Georg Vega's
Ritters des militärischen Marien-Theresien-Ordens,
Majors und Professors der Mathematik des
k. k. Artilleriecorps u. s. w.

Mathematische Betrachtungen

über

eine sich um eine unbewegliche Achse gleichförmig drehende feste Kugel, und die Folgen dieser Voraussetzung für Astronomie, Geographie und Mechanik, in Beziehung auf unser Erdsphäroid.

Mit 1. Kupfer.

Erfurt,
bey Beyer und Maring
1798.

Mathematische Betrachtungen

über die Richtungen der Schwere, Längen des Secundenpendels, Bestimmung der wahren Breiten aus den wahren Polhöhen, Längen der einzelnen Meridiangrade in verschiedenen Breiten, bey einer sich um eine unbewegliche Achse gleichförmig drehenden festen Kugel, wie auch von der Gestalt der Oberfläche des Wassers im Stande des Gleichgewichts an einer solchen Kugel, und von der Nothwendigkeit der Berichtigung der scheinbaren Breiten oder wahren Polhöhen, um wahre Breiten zu erhalten, sowohl bey der Berechnung der Entfernung der Oerter aus ihren Längen und Breiten, als auch bey der Zeichnung eines Stückes einer solchen Kugelfläche nach einer beliebigen Projection; mit Beziehung auf unser Erdsphäroid.

Vorgelesen in der kurfürstl. Akademie nützlicher Wissenschaften zu Erfurt, am 2ten Jänner 1798.

§. 1.

Es sey ANESA die Meridian-Ebene einer vollkommenen festen Kugel.

Der Durchmesser AE = SN sey $= D =$ 6543210 Par. Tois. so groß als ohngefähr der mitt-

 lere

lere Durchmesser unsers Erdsphäroids wo Log. D
= 6. 8157909.

Die gleichförmige Dichtigkeit der in Betrachtung gezogenen Kugel sey ohngefähr eben so groß als die mittlere Dichtigkeit unsers Erdsphäroids. Es sey nämlich an der angenommenen Kugelfläche im freyen Zustande der Ruhe die Beschleunigung dieser Kugelschwere = g, und die davon abhangende Länge des einfachen Sekundenpendels $p = \frac{2g}{\pi^2}$ = 441 Par. Lin. wo Log. p = 2.6444386.

§. 2.

In diesem freyen Zustande der ruhenden Kugel wird die Beschleuniguug dieser Kugelschwere an jedem Punkte der Kugelfläche gleich groß, und die Richtung dieser Schwerkraft überall gegen den Mittelpunkt gerichtet seyn; die wahre Polhöhe wird der wahren geographischen Breite, so wie die Aequators-Höhe der Polardistanz des Zeniths gleichen; und aus den gegebenen geographischen Längen und Breiten zweyer Oerter wird deren Entfernung nach der bekannten trigonometrischen Formel bestimmt; die Oberfläche einer flüssigen Masse, eines Sees oder Meeres in den unmerklichen Vertiefungen an der Oberfläche einer solchen festen und ruhenden Kugel wird vollkommen sphärisch seyn; und wenn man vom Aequator bis zum Pol in der Richtung
des

des Meridians sich einen Kanal mit Wasser angefüllet gedenket, so wird die Durchschnittslinie AZN der Oberfläche des ruhenden Wassers mit der Meridian-Ebene ACN, eine Kreislinie seyn.

§. 3.

Nun nehme man an, diese feste Kugel werde in eine gleichförmige Rotation um die Achse SN versetzet; die Rotationszeit sey $t = 23^h 56^m 4.1^s = 86164.1$ Sek. der mittleren Sonnenzeit, wo Log. $t = 4.9353264$.

Frage: Was werden nun für Veränderungen erfolgen?

Antwort. Die Richtung der wahrnehmbaren Schwere wird außer den beyden Polen und dem Aequator nicht mehr gegen den Mittelpunkt gerichtet seyn; die wahrnehmbare Länge des einfachen Sekundenpendels wird nur an den beyden Polen der ursprünglichen gleich seyn, und von beyden Polen gegen den Aequator abnehmen. Die wahre Geographische Breite wird nicht mehr der wahren Polhöhe sondern nur die scheinbare Breite der wahren Polhöhe gleich seyn; man wird die wahre Polhöhe oder scheinbare Breite um den Ablenkungswinkel der Richtung der wahrnehmbaren Schwere, vom Mittelpunkt in der Meridian-Ebene gegen den Aequator, berichtigen müssen, um sodann nach der bekannten trigonometrischen Formel aus den geographischen

Längen und Breiten zweyer Oerter ihre Entfernung berechnen zu können. Die Oberfläche eines Sees oder Meeres einer solchen Kugel wird sodann nicht mehr sphärisch seyn 2c.

§. 4.

Um einige der erwähnten Veränderungen deutlicher einsehen und berechnen zu können, betrachte man den Punkt Z des Meridians in der wahren Breite AZ = ACZ = b. Aus der Umdrehungsbewegung dieser festen Kugel um die Achse SN erhält wegen der Fliehekraft der Punkt Z ein Bestreben nach der Richtung des Cosinus DZ der Breite in der Meridianebene von Z gegen F fortzugehen; die Beschleunigung dieser Fliehekraft in dem Punkte Z nach der Richtung ZF ist = $\frac{2\pi^2.ZD}{t^2} = \frac{\pi^2 D \cos b}{t^2}$ (verm. Vega Mathem. 3r Band §. 198. I und §. 200.) Die Beschleunigung aber des Punktes Z nach der Richtung ZC wegen der ursprünglichen Schwere ist = $g = \frac{1}{2}\pi^2 p$. Nimmt man nun ZF
G und ZG den zwey erwähnten Beschleunigungen gemäß, und ergänzet das Parallelogram FBGZ, so ist ZB die Größe und Richtung der wahrnehmbaren Schwere HR senkrecht auf ZP die wahre Horizontlinie, RN = NCR die wahre Polhöhe, ACQ = APZ = RCN = AQ die scheinbare Breite = B; BZG = ZCQ = ZQ = APZ — ACZ = $B - b$ ist der Ablenkungswinkel der Richtung

der

der wahrnehmbaren Schwere von der ursprünglichen, und ZG — ZB ist die Verminderung der ursprünglichen Beschleunigung der Schwere.

§. 5.

Aus dem Winkel FZG = 180° — b aus FZ $= \frac{\pi^2 D \cos b}{t^2}$ und ZG $= \frac{1}{2}\pi^2 p$ läßt sich der Winkel FZB = 180° — B, und auch die Beschleunigung nach der Richtung ZB bestimmen, es ist nämlich (vermög Vega Mathem. 3r Band §. 64). $\mathrm{Tang.}\ B = \left\{\frac{t^2 p}{t^2 p - 2D}\right\}$ Tang. b, und Tang. $b = \left\{1 + \frac{2D}{t^2 p}\right\}$. Tang. B; die Gleichung aber zwischen der wahrnehmbaren Länge des Sekundenpendels = q und zwischen den ursprünglichen p ist $q^2 = p^2 + \frac{4D^2}{t^4} \cos.^2 b - \frac{4pD.\ \cos.^2 b}{t^2}$, wo nun $p - q$ sehr nahe $= \frac{2D}{t^2}\left\{1 - \frac{D}{pt^2}\right\}$ cosin $^2 b$; denn wenn $p - q = \delta$ gesetzet wird, so ist $p - \delta = q$, $p^2 - 2p\delta + \delta^2 = q^2$, und da δ^2 in Absicht $2p\delta$ äußerst klein, so ist $p^2 - 2p\delta = q^2$ sehr nahe; nämlich $\delta = \frac{p}{2} - \frac{q^2}{2p}$.

§. 6.

Die Abnahmen der ursprünglichen Länge des einfachen Sekundenpendels in verschiedenen wahren Brei-

Breiten verhalten sich demnach wie die quadrirten Cosinus dieser Breiten. Und da unter dem Aequator die wahrnehmbare Beschleunigung der Schwere $\gamma = g - \frac{\pi^2 D}{t^2}$, oder in Längen der Sekundenpendel ausgedrückt $\frac{1}{2}\pi^2 q = \frac{1}{2}\pi^2 p - \frac{\pi^2 D}{t^2}$, und daher die Verminderung der ursprünglichen Länge des Sekundenpendels daselbst $p - q = \frac{2D}{t^2}$ ist, so ist auch für die wahre Breite b diese Verminderung oder Abnahme sehr nahe $\delta = \frac{2D}{t^2}$ cosin. $^2 b$; wo nun aus der beobachteten oder wahrnehmbaren Länge des einfachen Sekundenpendels in einer bekannten wahren Breite die ursprüngliche Länge, die nur noch unter den Polen statt findet, sich berechnen läßt.

§. 7.

Aus den oben bemerkten Zahlen für D, t, p folgt nun die Formel zur Verwandlung der wahren Polhöhen *B*, in wahre Breiten *b*, und umgekehrt.

Log. Tang. b = Log. Tang. B + 0. 9984973 — 1
Log. Tang. B = Log. Tang. b + 0. 0015027.

Und

Und die Formel für die Verminderung δ der ursprünglichen Länge des einfachen Sekundenzendels 441 Linien in der wahren Breite b ist.

$$\text{Log. } \delta = 2 \text{ Log. Cos. } b + 0.1826818, \text{ oder}$$
$$\delta = 1.523 \cos.^2 b \text{ Par. Lin.}$$

Für die wahre Polhöhe oder scheinbare Breite $B = 45°$ ist daher die wahre geographische Breite $b = 44° 54' 3''$, und folglich der größte Ablenkungswinkel der Richtung der wahrenehmbaren Schwere von der Richtung der ursprünglichen $= 5' 57''$; die Abnahme der Länge des Sekundenpendels aber $\delta = 0.764$. Par. Lin. und folglich die wahrnehmbare Länge des einfachen Sekundenpendels in dieser wahren Breite $q = 440.236$. Par. Lin.

§. 8.

Wenn nun bey den angeführten Umdrehungsbewegung einer solchen festen Kugel aus den bekannten geographischen Längen und wahren Polhöhen zweyer Oerter, wie solche auf gewöhnliche Art bestimmt werden, die Entfernung dieser zwey Oerter mittelst der bekannten sphärisch-trigonometrischen Formel zu berechnen wäre, so müßte man vorher aus den wahren Polhöhen die wahren Breiten dieser zwey Oerter nach voriger Formel herleiten, und sodann erst in der dazu gehörigen sphärisch-trigonometrischen Formel die Werthe substituiren. Eben so müßte man bey der Zeichnung einer geographischen Karte nach einer beliebigen Projectionsmethode die gewöhnlichen geographischen Breiten nach obiger Formel verbessern, solche in wahre Breiten verwandeln, und sodann erst in das Projectionsnetz eintragen, damit die abgebildeten Oerter darinnen ihre richtige Lage gegen einander erhalten, sonst entstehen daraus sehr merkliche Abirrungen, besonders bey Oertern, wovon einige nördlich, und andere südlich vom Aequator liegen. Wann man z. B. ein Stück einer solchen Kugelfläche vom 30° südlichen bis zu 30° nördlicher Breite nach Art einer gewöhnlichen geographischen Karte abzeichnen wollte, und würde da zwey Oerter, welche beyde unter einerley Meridian liegen, wovon aber eines 30° südliche und das andere 30° nördliche wahre Polhöhe hat, in das Projectionsnetz eintragen, ohne die Breiten auf obige Art zu berichtigen, so wäre ihre Entfernung von einander in der Zeichnung über 10¼ Minuten fehlerhaft.

§. 9.

Zur Verwandlung der wahren Polhöhen in wahre Breiten läßt sich nach obiger Formel eine sehr einfache Tabelle berechnen, etwan für alle einzelne Grade von 0 bis 90, wodurch die Verwandlung der scheinbaren Breiten in wahre und umgekehrt sehr abgekürzet wird. Hier folgt diese Tabelle.

Ta-

Tabelle

der wahren Breiten, Ablenkungswinkel der Schwerkraft, Längen der einzelnen Meridiangrade und des einfachen Sekundenpendels für verschiedene wahre Polhöhen oder scheinbare Breiten bey einer vollkommenen Kugel unter den angeführten Umständen.

Wahre Polhöhe oder scheinbare Breite.	Wahre Breite oder Meridianbogen von Aequator.			Unterschied oder Ablenkungswinkel.			Länge des Sekundenpendels in Par. Linien	Längen der einzelnen Meridiangrade.			Eben diese Längen in Par. Tois.
°	°	'	"	°	'	"		°	'	"	
0	0	0	0	0	0	0					
1	0	59	47	0	0	13		0	59	47	56894
2	1	59	34	0	0	26		0	59	47	
3	2	59	22	0	0	38		0	59	48	
4	3	59	10	0	0	50		0	59	48	
5	4	58	58	0	1	2		0	59	48	
6	5	58	46	0	1	14		0	59	48	
7	6	58	34	0	1	26		0	59	48	
8	7	58	22	0	1	38		0	59	48	
9	8	58	10	0	1	50		0	59	48	
10	9	57	58	0	2	2		0	59	48	
11	10	57	46	0	2	14		0	59	48	
12	11	57	35	0	2	25		0	59	49	
13	12	57	24	0	2	36		0	59	49	
14	13	57	13	0	2	47		0	59	49	
15	14	57	2	0	2	58	439, 477.	0	59	49	
16	15	56	51	0	3	9		0	59	49	56920
17	16	56	41	0	3	19		0	59	50	
18	17	56	31	0	3	29		0	59	50	
19	18	56	21	0	3	39		0	59	50	
20	19	56	11	0	3	49		0	59	50	
21	20	56	2	0	3	58	439, 578.	0	59	51	
22	21	55	53	0	4	7		0	59	51	
23	22	55	44	0	4	16		0	59	51	
24	23	55	35	0	4	25		0	59	51	
25	24	55	27	0	4	33		0	59	52	
26	25	55	19	0	4	41		0	59	52	
27	26	55	11	0	4	49		0	59	53	
28	27	55	4	0	4	56		0	59	53	
29	28	54	57	0	5	3		0	59	54	
30	29	54	51	0	5	9	439, 856.	0	59	54	57005

Wahre Polhöhe oder scheinbare Breite.	Wahre Breite oder Meridianbogen von Aequator.			Unterschied oder Ablenkungswinkel.			Länge des Sekundenpendels in Par. Linien	Längen der einzelnen Meridiangrade.			Eben diese Längen in Par. Tois.
°	°	′	″	°	′	″		°	′	″	
31	30	54	45	0	5	15		0	59	54	
32	31	54	39	0	5	21		0	59	55	
33	32	54	34	0	5	26		0	59	55	
34	33	54	29	0	5	31		0	59	56	
35	34	54	25	0	5	35		0	59	56	
36	35	54	21	0	5	39		0	59	56	
37	36	54	17	0	5	43		0	59	57	
38	37	54	14	0	5	46		0	59	57	
39	38	54	11	0	5	49		0	59	58	
40	39	54	9	0	5	51		0	59	58	
41	40	54	7	0	5	53		0	59	58	
42	41	54	5	0	5	55		0	59	59	
43	42	54	4	0	5	56		0	59	59	
44	43	54	3	0	5	57		1	0	0	
45	44	54	3	0	5	57	440, 236	1	0	0	57100
46	45	54	3	0	5	57		1	0	1	
47	46	54	4	0	5	56		1	0	1	
48	47	54	5	0	5	55		1	0	2	
49	48	54	7	0	5	53		1	0	2	
50	49	54	9	0	5	51		1	0	2	
51	50	54	11	0	5	49		1	0	2	
52	51	54	13	0	5	47		1	0	3	
53	52	54	16	0	5	44		1	0	4	
54	53	54	20	0	5	40		1	0	4	
55	54	54	24	0	5	36		1	0	5	
56	55	54	29	0	5	31		1	0	5	
57	56	54	34	0	5	26		1	0	5	
58	57	54	39	0	5	21		1	0	6	
59	58	54	45	0	5	15		1	0	6	57195
60	59	54	51	0	5	9	440, 617	1	0	6	
61	60	54	57	0	5	3		1	0	7	
62	61	55	4	0	4	56		1	0	7	
63	62	55	11	0	4	49		1	0	7	
64	63	55	18	0	4	42		1	0	8	
65	64	55	26	0	4	34		1	0	8	
								1	0	9	
66	65	55	34	0	4	26		1	0	9	
67	66	55	43	0	4	17		1	0	9	
68	67	55	52	0	4	8		1	0	9	
69	68	56	1	0	3	59		1	0	10	
70	69	56	10	0	3	50		1	0	10	

Wahre Polhöhe oder scheinbare Breite	Wahre Breite oder Meridianbogen vom Aequator.			Unterschied oder Ablenkungswinkel.			Länge des Sekundenpendels in Par. Linien	Längen der einzelnen Meridiangrade			Eben diese Längen in Par. Tois.
°	°	′	″	°	′	″		°	′	″	
71	70	56	20	0	3	40		1	0	10	
72	71	56	30	0	3	30		1	0	10	
73	72	56	40	0	3	20		1	0	11	
74	73	56	50	0	3	10		1	0	11	57275
75	74	57	1	0	2	51	44 0,897	1	0	11	
76	75	57	12	0	2	48		1	0	11	
77	76	57	23	0	2	37		1	0	12	
78	77	57	34	0	2	26		1	0	12	
79	78	57	46	0	2	14		1	0	12	
80	79	57	58	0	2	2		1	0	12	
81	80	58	10	0	1	50		1	0	12	
82	81	58	22	0	1	38		1	0	12	
83	82	58	34	0	1	26		1	0	12	
84	83	58	46	0	1	14		1	0	12	
85	84	58	58	0	1	2		1	0	12	
86	85	59	10	0	0	50		1	0	12	
87	86	59	22	0	0	38		1	0	13	
88	87	59	34	0	0	26		1	0	13	
89	88	59	47	0	0	13					
90	90	0	0	0	0	0	441,				57307

§. 10.

Nun sollte noch die krumme Linie bestimmt werden, welche die Oberfläche des Wassers im Stande des Gleichgewichts bey der Umdrehungsbewegung der Kugel in einem Kanal von einem Pol zum andern an der Meridianebene bildet. Diese krumme Linie muß wegen der Eigenschaft der flüssigen Massen gewiß so beschaffen seyn, daß die Richtung der wahrnehmbaren Schwere in jedem Punkte auf der Tangente dieses Punktes senkrecht sey; die wahrnehmbaren Richtungen der Schwere in verschiedenen

Brei=

Breiten sind daher Normalen dieser krummen Linie. Die Bestimmung dieser krummen Linie überlässe ich indessen dem eigenen Nachdenken des Lesers, und will nur noch folgende Betrachtungen anstellen.

§. 11.

Wenn man bey bey einem abgeplatteten Sphäroid, oder eigentlich bey einem Ellipsoid, welches durch die Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Achse entsteht, den Winkel, welchen der Halbmesser aus einem beliebigen Punkt im Mittelpunkte mit der großen Achse einschließt, die wahre Breite dieses Punktes $= b$, den Winkel aber, welchen die Normale aus diesem nämlichen Punkte mit der nämlichen großen Achse einschließt, die scheinbare Breite dieses Punktes $= B$ benennet, und dabey die große Achse mit A, die kleine aber mit a bezeichnet, so folget aus den bekannten Eigenschaften der Ellipse, die Gleichung..

$\text{Tang. } B = \left(\frac{A}{a}\right)^2 \text{Tang}\, b$ und $\text{Tang}\, b = \left(\frac{a}{A}\right)^2$ Tang. B, es ist nämlich für die Gleichung der Ellipse $y = \frac{a}{A} \sqrt{} \left(\frac{1}{4} A^2 - x^2\right)$ die Subnormale $\frac{a^2}{A^2}\, x$, und bey der angenommenen Bezeichnung auch $y = x$. Tang. b; woraus nun die angeführte Gleichung leicht folget.

Oben

Oben hatten wir $\text{Tang. } b = (1 - \frac{2D}{t^2 p})\text{Tang.} B.$

und allhier ist $\text{Tang. } b = (\frac{a}{A})^2 \text{ Tang. } B.$

Wegen der Einförmigkeit dieser zwey Ausdrücke sollte man vermuthen, es dürfte vielleicht bey unserem Erdsphäroid $\frac{a}{A} = \sqrt{(1 - \frac{2D}{t^2 p})}$, und daher äußerst nahe $\frac{a}{A} = \frac{578}{579}$ seyn.

§. 12.

Ingleichen wenn man auf der angenommenen Kugel in der Richtung des Meridians über beyde Pole sich einen Kanal mit Wasser angefüllt gedenkt, so scheint bey der festgesetzten Umdrehungsbewegung die Oberfläche des Wassers im Stande des Gleichgewichts an der Meridianebene eine Ellipse abzubilden, deren kleine Achse von einem Pole zum andern sich zur großen, als dem Durchmesser des Aequator sich vielleicht verhalten könnte, wie 578 zu 579; die kleine Achse wäre daher $a = 6537558$, und die große $A = 6548870$ Par. Toisen, und das Wasser unter dem Aequator würde um 5656 Tois. höher stehen als unter dem Pole, weil nur bey dieser Gestalt der Oberfläche des Wassers unter den angenommenen Umständen die wahrnehmbare Richtung der Schwere überall senkrecht auf der Oberfläche wäre.

Wenn

Wenn die oberste Schich der angenommenen Kugel in der Dicke von ohngefähr 3000 auch 4000 Tois. aus einer weichen beynahe flüssigen Materie bestünde, der übrige Kern aber vollkommen fest wäre, so könnte man ebenfalls vermuthen, daß vielleicht auch eine solche Kugel bey der festgesetzten Umdrehungsbewegung die Gestalt eines Ellipsoids von den Abplattungsverhältniß $\frac{578}{579}$ annehmen würde; die Richtung der wahrnehmbaren Schwere wäre sodann überall senkrecht auf der Oberfläche, und die wahrnehmbare Länge des einfachen Sekundenpendels überall — jedoch das muß erst aus den Gründen der Attractionslehre bestimmet werden, welches ich bey einer andern Gelegenheit untersuchen will.

§. 13.

Bey einem solchen Ellipsoid von den Abplattungsverhältniß $\frac{578}{579}$ und der angeführten Größe der Achsen wären demnach aus den wahren Polhöhen die wahren Breiten nach der nämlichen Formel, wie oben bey der sich herumdrehenden Kugel zu berechnen; und eben so auch bey der Zeichnung einer Karte nach einer beliebigen Projectionsmethode die Oerter nach ihren Längen und verbesserten wahren Breiten in das Projectionsnetz einzutragen. Bey der Zeichnung des Projectionsnetzes, da in einer solchen

solchen Zeichnung das Abplattungsverhältniß $\frac{578}{579}$ nicht bemerkbar dargestellet werden kann, müßte man das Ellipsoid immer für eine vollkommene Kugel ansehen, deren Durchmesser der mittlern geometrischen Proportionalgröße zwischen den zwey Achsen gleich sey. Nach eben dieser nämlichen Voraussetzung könnte man aus den Längen und verbesserten wahren Breiten zweyer Oerter, deren Entfernung von einander ohne merklichen Fehler nach der bekannten sphärisch-trigonometrischen Formel berechnen.

§. 14.

Der Halbmesser eines solchen abgeplatteten Ellipsoids von der Umdrehungsachse a, und dem Durchmesser des Aequators A, für die wahre Breite b, ist $R = \frac{Aa}{2\sqrt{(A^2 \sin.^2 b + a^2 \cos.^2 b)}}$ für die obigen Werthe $a = 6537558$, und $A = 6548870$ Par. Tois. folgt daher nachstehende Tabelle.

Bey den wahren Polhöhen	oder wahren Breiten			Halbmesser R des Ellips.	Länge des Bogens zwischen den zwey Halbmess. bey dem Ellipsoid.	Länge des Bogens bey der Kugel des Durchm. $D = \sqrt{Aa}$	Zunahmen der Meridiangrade.	
							Bey dem Ellipsoid	Bey der Kugel
°	°	′	″					
0	0	0	0	3274435	56943	56894	0	0
1	0	59	47	3274433				
15	14	57	2	3274058	56968	56926	25	32
16	15	56	51	3274006				
30	29	54	51	3273025	57029	57005	86	111
31	30	54	41	3272940				
45	44	54	3	3271613	57100	57103	157	206
46	45	54	3	3271514				
59	58	54	45	3270284	57171	57195	228	301
60	59	54	51	3270197				
74	73	56	50	3269211	57233	57275	290	381
75	74	57	1	3269159				
89	88	59	47	3268781	57257	57307	314	413
90	90	0	0	3268779				

Es ist merkwürdig, daß unter den festgesetzten Umständen die Zunahmen der wirklichen wahrnehmbaren Längen der Meridiangrade bey der vollkommenen Kugel größer sind, als bey dem angenommenen Ellipsoid.

§. 15.

Um von der eigentlichen Figur unserer Erde, welche vermöge des Durchschnittes ihres Schattenkegels bey den Mondfinsternissen immer eine Kugel zu seyn scheinet, deutlichere Begriffe zu erlangen, dürfte es nicht undienlich seyn über ein abgeplattetes Ellipsoides solche Betrachtungen anzustellen, wie es all=

allhier bey einer Kugel geschehen ist; nur müßten diese Betrachtungen noch weiter ausgedehnet, und mit den zuverläßigsten Ausmessungen verschiedener Meridiangrade verglichen werden. Allhier will ich nur noch bemerken, daß die krumme Linie nes, welche die Oberfläche des Wassers im obenerwähnten Kanale an der Meridianebene bildet, keine Ellipse, sondern eine andere krumme Linie von der Eigenschaft sey, daß vermöge der Grundlehren der Hydrostatik die wahrnehmbaren Richtungen der Schwere zwar überall mit den Richtungen der Normalen dieser Punkte übereintreffen; dabey müssen aber vermöge der nämlichen Grundlehren der Hydrostatik, die Abstände oder Ordinaten dieser krummen Linie auf den Richtungen der Normalen von der Kreislinie gerechnet, sich umgekehrt verhalten, wie die wahrnehmbaren Beschleunigungen der Schwere in eben diesen Punkten. In der abgebildeten Figur ist daher bey den angenommenen Größen Nn, oder Ss: Ee $= p - \frac{2D}{t^2} : p$, oder äußerst nahe wie 577 : 579 oder etwas einfacher ausgedrückt Nn : Ee = 289 : 290, wenn nes die Oberfläche des Wassers in dem kreisförmigen Kanale NES vorstellet, und dabey die Tiefen des Wassers Nn oder Ss in Rücksicht des Halbmessers der Kugel gleichsam unendlich klein sind, etwan nicht viel über eine deutsche Meile betragen. Liebhaber der höhern Geometrie können für eine solche Kurve, die von einer Kreislinie äußerst wenig abweicht, eine Gleichung suchen, derselben einen beliebigen Namen geben, und ihre Eigenschaften bestimmen.

§. 16.

Die obenangeführte Formel für den Halbmesser des Ellipsoids kann man auch so schreiben:

$$R = \frac{\frac{1}{2}A}{\sqrt{(\cos.^2 b + \frac{A^2}{a^2} \sin.^2 b)}} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} a A \sqrt{2}}{\sqrt{[(A^2 - a^2)(\frac{A^2 + a^2}{A^2 - a^2} - \cos. 2b)]}}$$

Will man hingegen diese Formel durch die wahre Polhöhe oder scheinbare Breite $= B$ ausdrücken,

so ist $R = \frac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{\frac{A^4}{a^4} + \text{Tang.}^2 B}{\frac{A^2}{a^2} + \text{Tang.}^2 B}\right)}$

oder auch

$$R = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(A^2 + a^2)(\frac{A^4 + a^4}{A^4 - a^4} + \cos. 2B)}{\frac{A^2 + a^2}{A^2 - a^2} + \cos. 2B}\right]}$$

§. 17.

Auch für den Krümmungshalbmesser $= K$ läßt sich eine brauchbare Formel angeben; für die wahre Pol-

Polhöhe oder scheinbare Breite $= B$ ist der Krümmungshalbmesser des elliptischen Meridianbogens

$$K = \frac{A^2}{2a\,(\sin.^2 B + \frac{A^2}{a^2}\cos{}^2 B)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2\,A^2\,\sqrt{2}}{\sqrt{[(A^2 - a^2)\,(\frac{A^2 + a^2}{A^2 - a^2} + \cos.\,2B)]^3}}$$

Diese Formeln sind aus den oben im §. 11. bemerkten Gleichungen der Ellipse $y = \frac{a}{A}\sqrt{(\frac{1}{4}A^2 - x^2)}$ $y = x\,\mathrm{Tang.}\,b$, $x = \frac{\frac{1}{2}\,a\,A}{\sqrt{(a^2 + A^2\,\mathrm{Tang.}^2\,b}}$ Subnormale $= \frac{a^2\,x}{A^2}$, $\mathrm{Tang.}\,B = \frac{A^2}{a^2}\,\mathrm{Tang.}\,b$ sehr leicht abzuleiten, wenn man sich nur noch dabey aus der Kegelschnittslehre erinnert, daß der Krümmungshalbmesser dem Würfel der Normale getheilt durch das Quadrat des halben Parameters, dieser Halbparameter aber der dritten Proportionalgröße nach der großen und kleinen Halbachse gleich sey.

§. 18.

Für obige Werthe $A = 6548870$ und $a = 6537558$ Par. Tois. folgt nachstehende Tabelle der Krümmungshalbmesser und wirklichen Längen einiger scheinbaren Breitengrade, nebst den dazu gehörigen wahren Breiten.

Wahre Polhöhe oder scheinbare Breite.	Wahre Breite.			Krümmungs-halbmesser.	Länge des scheinbaren Breitengrades.
°	°	′	″		
0	0	0	0	3263132	56953
1	0	59	47,57	3263135	
15	14	57	1,85	3264265	56974
16	15	56	51,17	3264417	
30	29	54	51,23	3267361	57029
31	30	54	45,17	3267618	
45	44	54	3,16	3271598	57103
46	45	54	3,35	3271892	
59	58	54	44,68	3275575	57172
60	59	54	50,68	3275846	
74	73	56	50,62	3278806	57227
75	74	57	1,30	3278959	
89	88	59	47,52	3280100	57249
90	90	0	0,	3280100	

Die Längen der scheinbaren Breitengrade, welche oben im §. 14. bey dem nämlichen Ellipsoid aus den Halbmessern und den dazwischen eingeschlossenen Winkeln berechnet wurden, weichen von letztern aus den Krümmungshalbmessern abgeleiteten etwas ab, welches aber blos daher rühret, weil dort bey der Bestimmung der wahren Breiten die Bruchtheile der Sekunden vernachlässiget wurden.

An

An einem abgeplatteten Ellipsoid, dessen große Achse, oder Aequators-Durchmesser A = 6548870, und die kleine Achse a = 6537558 Pariser Toisen, sind:

Bey den wahren Polhöhen oder scheinbaren Breiten.	Die wahren Breiten.	Halbmesser des Ellipsoides.	Krümmungs-Halbmesser	Maaß eines scheinbaren Breitengrades.	Dessen Länge in Pariser Toisen. Aus dem Halbmesser.	Aus dem Krümmungs-Halbmess	Bey der Kugel des Durchm. $\sqrt{Aa}$	Zunahmen der wirklichen Längen der scheinbaren Breitengrade. Bey dem Ellipsoid	Bey der Kugel
0°	0° 0′ 0″	3274435	3263132	0° 59′ 47,57″	56953	56953	56903	0	0
1	0 59 47 57	3274433	3263135						
15	14 57 1,85	3274058	3264265	0 59 49,32	56974	59674	56931	21	28
16	15 56 51,17	3274006	3264417						
30	29 54 51,23	3273025	3267361	0 59 53,94	57029	57029	57004	76	101
31	30 54 45,17	3272940	3267618						
45	44 54 3,16	3271613	3271598	1 0 0,19	57103	57103	57103	150	200
46	45 54 3,35	3271514	3281792						
59	58 54 44,68	3270284	3275575	1 0 6	57172	57172	57195	219	292
60	59 54 50,68	3270197	3275846						
74	73 56 50,62	3269211	3278806	1 0 10,68	57227	57227	57270	274	367
75	74 57 1,30	3269159	3278959						
89	88 59 47,52	3268781	3280100	1 0 12,48	57249	57249	57298	296	395
90	90 0 0	3268779	3280100						

§. 19.

§. 19.

Bey einem abgeplatteten Ellipsoid, an welchem die Richtung der wahrnehmbaren Schwere überall mit der Normale zusammentrift, oder senkrecht gegen die Oberfläche ist, läßt sich das Abplattungsverhältniß $= \frac{A}{a}$, welches ich $= \alpha$ setzen will, aus den gemessenen Längen zweyer Meridiangrade M, N, in sehr verschiedenen scheinbaren Breiten m, n (m in der Mitte von M nahe am Aequator, und n in der Mitte von N so nahe als möglich am Pole) sehr leicht herleiten, es ist nämlich bey dieser Bezeichnung wegen §. 17.

$$1) \quad \frac{\alpha^2 a \ . \ \text{Arc.} \ 1^0}{2(\sin.^2 m + \alpha^2 \cos.^2 m)^{\frac{3}{2}}} = M$$

$$2) \quad \frac{\alpha^2 a \ . \ \text{Arc.} \ 1^0}{2(\sin.^2 n + \alpha^2 \cos.^2 n)^{\frac{3}{2}}} = N$$

daraus folgt durch die Division dieser zwey Gleichungen

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{N^{\frac{2}{3}} \sin.^2 n - M^{\frac{2}{3}} \sin.^2 m}{M^{\frac{2}{3}} \cos.^2 m - N^{\frac{2}{3}} \cos.^2 n}\right)}$$

An unserem Erdsphäroid hat man durch die wirklich vorgenommenen Ausmessungen und Beobachtungen gefunden, daß die Meridiangrade vom Aequator gegen beyde Pole zunehmen. Daraus hat man geschlossen, daß unser Erdsphäroid ein abge-

ge-

geplattetes Ellipsoid sey, und hat sodann aus den unter verschiedenen Breiten gemessenen Meridiangraden mittelst voriger Formel das Abplattungsverhältniß abgeleitet Allein dieser Schluß kann nur alsdann richtig seyn, wenn vorher aus andern unumstößlichen Gründen erwiesen wird, 1) daß unser Erdsphäroid würklich ein abgeplattetes Ellipsoid sey; 2) daß bey der Umdrehungsbewegung dieses Erd-Ellipsoids die Richtung der wahrnehmbaren Schwere überall mit der Normallinie zusammentreffe. Denn oben im §. 9. hat man ja gesehen, daß auch bey der Umdrehungsbewegung einer vollkommnen Kugel die Meridiangrade vom Aequator gegen die Pole sehr merklich zunehmen. Wenn man dort aus dem Meridiangrade am Aequator 56894 $= M$ und am Pol 57307 $= N$, und aus den dazu gehörigen Breiten $m = 0°, 30'$ $n = 89°, 30'$ mittelst der Formel §. 17. das Achsenverhältniß berechnen wollte, so würde folgen $\alpha = \sqrt[3]{\frac{57307}{56894}}$ und daher äußerst nahe α oder $\frac{A}{a} = \frac{415}{414}$, da doch völlig genau $A = a$ ist.

§. 20.

Ehe man bloß allein aus den gemessenen Längen der Meridiangrade in verschiedenen Breiten und aus den dabey beobachteten Längen des einfachen Sekundenpendels auf die eigentliche Figur unseres Erdsphäroids einen Schluß wagen darf, scheint es nothwendig zu seyn, folgende Fragen nach den Gründen der Attractionslehre genau zu erörtern.

1) Bey einem vollkommenen Ellipsoid von gleichförmiger Dichtigkeit, dessen Größe, Masse, und Achsenverhältniß für bekannt angenommen werden, im freyen Zustande der Ruhe ohne Rotation wo zielen die Richtungen der Schwere (der eigenen Attraction mit Beseitigung aller äußern Störungen) unter verschiedenen Polhöhen hin? 2) Was ist da für eine Relation zwischen den wahren Polhöhen und wahren Breiten? 3) Wie verhalten sich die Längen des einfachen Sekundenpendels oder die hiemit in Verbindung stehenden Beschleunigungen der Schwere in verschiedenen wahren Breiten? 4) Wie sind da die wirklichen Längen der Meridiangrade in verschiedenen Breiten beschaffen? 5) Was hat an einem solchen Ellipsoid die Oberfläche des Wassers in einem Kanale von einem Pole zum andern im Stande des Gleichgewichts für eine Gestalt? 6) Wie ist da die Oberfläche eines Meeres beschaffen? 7) Wenn man nun annimmt, daß ein solches Ellipsoid von vollkommener Festigkeit in eine gleichförmige Umdrehungsbewegung um seine Erzeugungsachse versetzet wird, wie lauten sodann die Antworten auf vorige Fragen? 8) Wie sind alle diese Antworten beschaffen, wenn das in Betrachtung gezogene Ellipsoid nicht abgeplattet, sondern länglicht ist?

Ich

Ich zweifle nicht, daß alle diese Fragen, nebst mehr andern, in verschiedenen Schriften ausführlich, und umständlich erörtert seyn werden. Nur ist es mir in meiner dermaligen Lage von allen literarischen Hülfsmitteln schon so lange entblößet, nicht gestattet nachschlagen zu können, was und wie darüber gedacht und gesagt worden sey.

Aufgesetzt zu Mainz im Junii 1797

von

Georg Vega ꝛc.
derzeit Vertheidigungs-Artillerie-Commandant allhier.

Anhang.

Anwendung der im 30 §. der Einleit. m. log. trig. Tafeln bemerkten Berichtigung der gewöhnlichen geogr. Breiten auf geographische Ortsbestimmungen.

Im Traité analyt. des mouvem. appar. des corps celest. par Mr. du Sejour finde ich die Lage von Brest auf folgende Art angegeben.

Länge des senkrechten Bogens von Brest bis auf den Meridian der Pariser Sternwarte = 259168 Par. Toif.

Abstand dieses senkrechten Distanzbogens von der Pariser Sternwarte gegen Süden = 14614 Par. Toif.

Wahre Polhöhe der Pariser Sternwarte $= 48^{\circ}\ 50'\ 14''$ Hieraus läßt sich nun die Polhöhe und der Längenunterschied für Brest auf folgende Art berechnen.

Ich setze den Durchmesser unserer Erdkugel = 6543210 Par. Toif. (eine Zahl, die bey dieser Folge

Folge der Ziffern sehr leicht im Gedächtniße zu behalten ist; der fränkische Métre wäre für diesen Durchmesser äußerst nahe = 37 Par. Zoll; da solcher von 443. 44 Par. Lin. schon bis 443. 52 angewachsen ist, so kann er vielleicht in Kürze bis 444.00 anwachsen). Daraus folgt wegen der Umdrehungsbewegung der Erdkugel die wahre Breite der Pariser Sternwarte = $48^{\circ}\ 44'\ 20''$ mittelst der Formel Log. Tang. lat. ver. = Log. Tang. elev. poli + 0.9984973 - 1. Es ist daher Polardistanz der Paris. Sternwarte = $41^{\circ}\ 15'\ 40''$ Der senkrechte Distanzbogen von Brest bis an den Pariser Meridian 259168 Par. Tois. in Grade verwandelt = $4^{\circ},\ 32'\ 19\frac{3}{4}''$ = B nach der Formel Log. B. Sek. = Log. 259168 + 5.3144251 — Log. $\frac{1}{2}$ (6543210) = 5.4135814 + 0.7996642 — 2 = 4.2132456, nämlich B = 16339.75 Sek. Der Abstand aber dieses senkrechten Distanzbogens von der Paris. Sternwarte 14614 gegen Süden ist = $0^{\circ}\ 15'.21\frac{1}{3}''$ = a nach der Formel Log. a = Log. 14614 + 0.7996642 — 2 = 2.9644333, nämlich a = 921, 37 Sek. Es ist daher die Polardistanz dieses senkrechten Bogens = $41^{\circ}\ 15'\ 40''$ + $0^{\circ}\ 15'\ 21\frac{1}{3}''$ = $41^{\circ}\ 31'\ 1''$ = A.

Nun läßt sich in dem rechtwinklichten sphärischen Dreyeck aus A und B der dem Perpendikel B gegenüber

über liegende Winkel b am Pol als der Längenunterschied zwischen Paris und Brest mittelst der bekannten Formel berechnen.

$$\text{Cot. b} = \text{Cot. B} \times \text{Sin. A.}$$

Es ist nämlich

Log. Sin. A = L. Sin. $41^\circ\ 31'\ 1''$ = 9.8214097
Log. Cot. B = L. Cot. $4\ \ 32\ \ 19\frac{3}{4}$ = 11.1002833
Längenunterschied
$6^\circ\ 49'\ 45''$; Log. Cot. b = 10. 9216930
in Zeit verwandelt = $27^m\ 19^s$.

Eben dieses findet auch du Sejour durch eine sehr künstliche und mühsame Berechnung.

In dem nämlichen rechtwinklichten sphärischen Dreyecke findet man die Hypothenuse H als die Polardistanz von Brest mittelst der Formel Cos. H = Cos. A $\times$ Cos. B.

Es ist nämlich

Log. Cos. A = Log. Cos. $41^\circ 31' 1''$ = 9.8743424
Log. Cos. B = Log. Cos. $4\ 32\ 19\frac{3}{4}$ = 9.9986359
Polardistanz von Brest
= $41^\circ 43' 11''$ Log. Cos. H = 9.8729783
daher wahre Breite
= 48 16 49
und endlich Polhöhe
= 48 22 43 wegen L. T. elev. pol. = L. T. lat. ver. + 0.0015027

Du

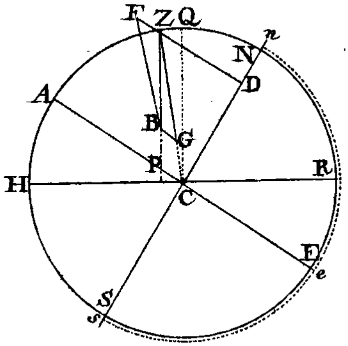
Du Sejour findet diese Polhöhe durch seine künstliche Berechnung = $48^\circ\ 22'\ 39''$

Wenn die geodätische Angabe der Lage von Brest nach du Sejour richtig ist, so dürfte die so berechnete Länge und Polhöhe eben so zuverläßig seyn, als wenn solche durch die sorgfältigste astronomische Beobachtung bestimmt worden wäre, obschon der angenommene Durchmesser der Erdkugel vielleicht über 1000 Par. Toiſ. fehlerhaft ist. Um die geographischen Ortsbestimmungen nach der angeführten Art aus geodätischen Messungen möglichst richtig zu erhalten, dürfte es vielleicht räthlich seyn für verschiedene sehr entlegene Erdstrecken verschiedene Halbmesser der Erdkugel anzunehmen. Der Erdhalbmesser für die Erdfläche von Ungarn ist gewiß kleiner, als der des mittlern Horizonts von der Schweiz.

Wenn ich die geodätischen Messungen des großbrittannischen Generals le Roi, und die damit verbundenen verschiedenen astronomischen Beobachtungen bey der Hand hätte, so wollte ich gern untersuchen, ob die Berechnung der Längen und Polhöhen nach der angeführten Art allda auch eben so genau zutrift, als bey Brest. Wenn der Distanzbogen zwischen den Sternwarten von Paris und Grenwich in Par. Toiſ. bekannt ist, so muß aus diesem und den beyden Polhöhen der Längenunterschied berechnet werden können.

Damit

Damit in einer geographischen Karte die Lage der Oerter gegen einander möglichst richtig werde, wenn solche nach ihren beobachteten Längen und Polhöhen eingetragen werden, so sollte bey der Entwerfung und Zeichnung des geographischen Netzes die oben angeführte Berichtigung der Polhöhen oder scheinbaren Breiten der Parallelkreise in Erwägung gezogen werden. Die Parallelkreise sollten nämlich für die wahren geographischen Breiten gezeichnet, und diesen die dazu gehörigen scheinbaren Breitengrade beygesetzet werden. Z. B. Um die Parallelkreise von 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, oder 80° scheinbare Breite erhalten, müßten die zu 9° 57′ 58″, 19° 56′ 11″, 29° 54′ 51′, 39° 54′ 9″, 49° 54′ 9″, 59° 54′ 51″, 69° 56′ 10″, 79° 57′ 58″ zugehörigen Parallelkreise gezeichnet, und solche mit den vorigen Zahlen benennet werden. Dadurch werden die Meridiangrade vom Aequator gegen die Pole ein wenig zu nehmen, als wenn die Erde ein abgeplattetes Sphäroid wäre. Bey der Entwerfung eines geographischen Netzes für Afrika dürfte es allerdings nothwendig seyn die angeführte Berichtigung der scheinbaren Breiten in Erwägung zu ziehen.


F Z Q
n
N
A
D
B
G
P
R
H
C
E
e
S
s