**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2017/2018**

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I

## Arbeitsblatt 2

### Die Pausenaufgabe

Aufgabe 2.1. Man gebe Beispiele für Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ derart, dass $\varphi$ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass $\psi$ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

### Übungsaufgaben

Aufgabe 2.2. Welche Funktionsvorschriften kennen Sie aus der Schule?

Aufgabe 2.3. Woran erkennt man am Graphen einer Abbildung $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob $f$ injektiv bzw. surjektiv ist?

Aufgabe 2.4. Welche bijektiven Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (oder zwischen Teilmengen von $\mathbb{R}$) kennen Sie aus der Schule? Wie heißen die Umkehrabbildungen?

Aufgabe 2.5. Eine Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion $f$ injektiv ist.

Aufgabe 2.6. Ist die Abbildung

$$\mathbb{Q}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0},\, x \longmapsto x^2,$$

injektiv? Ist sie surjektiv?

Aufgabe 2.7.*

Ist die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \longrightarrow \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+ \times \mathbb{N}_+,\, (a,b) \longmapsto (a+b, ab, a^b),$$

injektiv oder nicht?

Aufgabe 2.8. Bestimme die Hintereinanderschaltungen $\varphi \circ \psi$ und $\psi \circ \varphi$ für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ und } \psi(x) = x^2 + 5x - 3$$

definiert sind.

Aufgabe 2.9. Der Pferdepfleger hat einen Korb voller Äpfel und geht auf die Weide, um die Äpfel an die Pferde zu verteilen. Danach geht jedes Pferd in seine Lieblingskuhle und macht dort einen großen Pferdeapfel. Modelliere den Vorgang mit geeigneten Mengen und Abbildungen. Man mache sich die Begriffe injektiv und surjektiv an diesem Beispiel klar. Kann die Gesamtabbildung surjektiv sein, wenn es 10 Äpfel, 6 Pferde und 8 Kuhlen gibt?

Aufgabe 2.10.*

Es seien $L, M, N$ Mengen und $F\colon L \to M$ und $G\colon M \to N$ surjektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $G \circ F$ ebenfalls surjektiv ist.

Aufgabe 2.11.*

Es seien $L, M, N$ Mengen und $F\colon L \to M$ und $G\colon M \to N$ injektive Abbildungen. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $G \circ F$ ebenfalls injektiv ist.

Aufgabe 2.12.*

Seien $L, M, N$ Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f\colon\ L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch $f$ injektiv.

Aufgabe 2.13. Es seien $a, b$ positive natürliche Zahlen. Stifte eine Bijektion zwischen der Menge aller Vielfachen von $a$ und der Menge aller Vielfachen von $b$.

Bei den folgenden Aufgaben zur Potenzmenge denke man an die Interpretation, wo $G$ die Leute in einem Kurs sind und $M = \mathfrak{P}(G)$ die möglichen (in Hinblick auf die Teilnehmer) kursinternen Parties sind. Bei Aufgabe 2.16 denke man an $A =$ Damen im Kurs, $B =$ Herren im Kurs.

Aufgabe 2.14. Sei $G$ eine Menge und $\mathfrak{P}(G)$ ihre Potenzmenge. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathfrak{P}(G) \longrightarrow \mathfrak{P}(G),\ T \longmapsto \complement T,$$

bijektiv ist. Wie lautet die Umkehrabbildung?

Aufgabe 2.15. Sei $G$ eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(G) \text{ und } \operatorname{Abb}(G, \{0,1\}) .$$

Aufgabe 2.16.*

Sei $G$ eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$G = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(G)$ und der Produktmenge $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)$.

Aufgabe 2.17. Seien $M, N, L$ Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)) .$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0,1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 2.18. Wie kann man sich den Graphen einer Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und wie sich den Graphen einer Abbildung $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vorstellen?

Aufgabe 2.19. Es sei $F \colon L \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $T, T_1, T_2 \subseteq M$):

(1) $F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2)$,
(2) $F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2)$,
(3) $F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T)$.

Aufgabe 2.20. Es sei $F \colon L \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen

$$\mathfrak{P}(L) \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\, S \longmapsto F(S),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $S, S_1, S_2 \subseteq L$):

(1) $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2)$,
(2) $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$,
(3) $F(L \setminus S) \supseteq F(L) \setminus F(S)$.

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.

Aufgabe 2.21. Es seien $L$ und $M$ Mengen und es sei $F \colon L \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass $F$ genau dann injektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 2.22. Es seien $L$ und $M$ Mengen und es sei $F \colon L \to M$ eine Abbildung. Zeige, dass $F$ genau dann surjektiv ist, wenn das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\, T \longmapsto F^{-1}(T),$$

injektiv ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.23. (3 Punkte)

Bestimme die Hintereinanderschaltungen

$$\varphi \circ \psi \text{ und } \psi \circ \varphi$$

für die Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die durch

$$\varphi(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 5 \text{ und } \psi(x) = 2x^3 - x^2 + 6x - 1$$

definiert sind.

Aufgabe 2.24. (3 Punkte)

Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.25. (3 Punkte)

Seien $L, M, N$ Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Hintereinanderschaltung

$$g \circ f \colon L \longrightarrow N,\, x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch $g$ surjektiv.

Zeige durch ein Beispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 2.26. (3 Punkte)

Betrachte auf der Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ die Abbildung

$$\varphi \colon M \longrightarrow M,\, x \longmapsto \varphi(x),$$

die durch die Wertetabelle

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(x)$ | 2 | 5 | 6 | 1 | 4 | 3 | 7 | 7 |

gegeben ist. Berechne $\varphi^{1003}$, also die 1003-te Hintereinanderschaltung (oder *Iteration*) von $\varphi$ mit sich selbst.

Aufgabe 2.27. (5 Punkte)

Es seien $L$ und $M$ Mengen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi \colon \operatorname{Abb}(L, M) \longrightarrow \operatorname{Abb}(\mathfrak{P}(M), \mathfrak{P}(L)),\, f \longmapsto f^{-1},$$

bei der einer Abbildung das Urbildnehmen zugeordnet wird.

a) Zeige, dass $\Psi$ injektiv ist.

b) Es sei $L \neq \emptyset$. Zeige, dass $\Psi$ nicht surjektiv ist.