Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 19

Übungsaufgaben

Aufgabe 19.1. Lucy Sonnenschein fährt fünf Stunden lang Fahrrad. In den ersten zwei Stunden schafft sie 30 km und in den folgenden drei Stunden schafft sie auch 30 km. Was ist insgesamt ihre Durchschnittsgeschwindigkeit?

Aufgabe 19.2.*

Beweise den Mittelwertsatz der Differentialrechnung für differenzierbare Funktionen

$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein kompaktes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (es muss nicht gezeigt werden, dass die Durchschnittsgeschwindigkeit im Innern des Intervalls angenommen wird).

Aufgabe 19.3. Bestimme die zweite Ableitung der Funktion

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{t^5 - t^3 + 2t}\, dt.$$

Aufgabe 19.4. Ein Körper werde zum Zeitpunkt 0 losgelassen und falle luftwiderstandsfrei aus einer gewissen Höhe unter der (konstanten) Schwerkraft der Erde nach unten. Berechne die Geschwindigkeit $v(t)$ und die zurückgelegte Strecke $s(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t. Nach welcher Zeit hat der Körper 100 Meter zurückgelegt?

Aufgabe 19.5. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $F(x-a)$ eine Stammfunktion zu $f(x-a)$ ist.

Aufgabe 19.6. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $-F(-x)$ eine Stammfunktion zu $f(-x)$ ist.

Aufgabe 19.7. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, eine stetige Funktion und $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$. Zeige, dass $F(x) + cx$ eine Stammfunktion zu $f(x) + c$ ist.

Aufgabe 19.8. Bestimme eine Stammfunktion zu

$$f(x) = 4x^2 - 3x + 2,$$

die an der Stelle 3 den Wert 5 besitzt.

Aufgabe 19.9. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{-1}^{4} 3x^2 - 5x + 6 \, dx \, .$$

Aufgabe 19.10. Berechne das bestimmte Integral

$$\int_{2}^{5} \frac{x^2 + 3x - 6}{x - 1} \, dx \, .$$

Aufgabe 19.11.*

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die beiden Graphen zu $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sqrt{x}$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 19.12. Es sei a die minimale positive Zahl mit $\sin a = \cos a$. Berechne den Flächeninhalt derjenigen Fläche, die durch den Graphen des Kosinus und den Graphen des Sinus oberhalb von $[0, a]$ eingeschlossen wird.

Aufgabe 19.13.*

Bestimme den Durchschnittswert der Quadratwurzel $\sqrt{x}$ für $x \in [1, 4]$. Vergleiche diesen Wert mit der Wurzel des arithmetischen Mittels von 1 und 4 und mit dem arithmetischen Mittel der Wurzel von 1 und der Wurzel von 4.

Aufgabe 19.14.*

Eine Person will ein einstündiges Sonnenbad nehmen. Die Intensität der Sonneneinstrahlung werde im Zeitintervall $[6, 22]$ (in Stunden) durch die Funktion

$$f\colon [6, 22] \longrightarrow \mathbb{R}, \, t \longmapsto f(t) = -t^3 + 27t^2 - 120t,$$

beschrieben. Bestimme den Startzeitpunkt des Sonnenbades, so dass die Gesamtsonnenausbeute maximal wird.

Aufgabe 19.15.*

Zeige, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \ln 2$$

gilt. Tipp: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ auf dem Intervall $]0, 1]$.

Aufgabe 19.16. Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeige, dass die Funktion

$$h(x) = \int_{0}^{g(x)} f(t) \, dt$$

differenzierbar ist und bestimme ihre Ableitung.

Aufgabe 19.17. Es sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Betrachte die durch

$$a_n := \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt$$

definierte Folge. Entscheide, ob diese Folge konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 19.18. Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe mit $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeige, dass dann die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{a_n} f(x)dx$$

absolut konvergent ist.

Aufgabe 19.19. Sei f eine Riemann-integrierbare Funktion auf $[a,b]$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Man zeige: Ist f stetig in einem Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) > 0$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx > 0\,.$$

Aufgabe 19.20. Man zeige, dass die Gleichung

$$\int_0^x e^{t^2}dt = 1$$

eine einzige Lösung $x \in [0,1]$ besitzt.

Aufgabe 19.21. Seien

$$f,g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen mit der Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx\,.$$

Beweise, dass es ein $c \in [a,b]$ mit $f(c) = g(c)$ gibt.

Aufgabe 19.22.*

Sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 19.23. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral $\int_0^8 f(t)\,dt$, wobei die Funktion f durch

$$f(t) = \begin{cases} t+1, \text{ falls } 0 \leq t \leq 2\,, \\ t^2 - 6t + 11, \text{ falls } 2 < t \leq 5\,, \\ 6, \text{ falls } 5 < t \leq 6\,, \\ -2t + 18\,, \text{ falls } 6 < t \leq 8\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Aufgabe 19.24. (3 Punkte)

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_1^7 \frac{x^3 - 2x^2 - x + 5}{x+1}\,dx\,.$$

Aufgabe 19.25. (2 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt unterhalb[1] des Graphen der Sinusfunktion zwischen 0 und π.

Aufgabe 19.26. (3 Punkte)

Bestimme eine Stammfunktion für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}\,.$$

Aufgabe 19.27. (4 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die durch die Graphen der beiden Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^2 \text{ und } g(x) = -2x^2 + 3x + 4$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 19.28. (3 Punkte)

Es seien

$$f, g\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

zwei stetige Funktionen und es sei $g(t) \geq 0$ für alle $t \in [a,b]$. Zeige, dass es dann ein $s \in [a,b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = f(s) \int_a^b g(t)\,dt\,.$$

[1]Gemeint ist hier der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Abbildungsverzeichnis