Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2023/24**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 22

Übungsaufgaben

AUFGABE 22.1. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} Z & E & I & L & E \\ R & E & I & H & E \\ H & O & R & I & Z \\ O & N & T & A & L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S & E & I \\ P & V & K \\ A & E & A \\ L & R & A \\ T & T & L \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 22.2.*

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} & -1-3\mathrm{i} & -1 \\ \mathrm{i} & 0 & 4-2\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \\ 2+5\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

AUFGABE 22.3. Bestimme das Matrizenprodukt

$$e_i \circ e_j \, ,$$

wobei links der i-te Standardvektor (der Länge n) als Zeilenvektor und rechts der j-te Standardvektor (ebenfalls der Länge n) als Spaltenvektor aufgefasst wird.

AUFGABE 22.4. Es sei M eine $m \times n$-Matrix. Zeige, dass das Matrizenprodukt Me_j mit dem j-ten Standardvektor (als Spaltenvektor aufgefasst) die j-te Spalte von M ergibt. Was ist e_iM, wobei e_i der i-te Standardvektor (als Zeilenvektor aufgefasst) ist?

AUFGABE 22.5. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und M eine $n \times n$-Matrix. Beschreibe DM und MD.

Aufgabe 22.6. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n-Tupel über einem Körper K, und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$Dx = c,$$

und wie löst man es?

Aufgabe 22.7. Berechne das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 1-\frac{1}{2}\mathrm{i} & 4\mathrm{i} \\ -5+7\mathrm{i} & \sqrt{2}+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5+4\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i} \\ \sqrt{2}-\mathrm{i} & e+\pi\mathrm{i} \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gemäß den beiden möglichen Klammerungen.

Für die folgende Aussage wird sich bald ein einfacher Beweis über die Beziehung zwischen Matrizen und linearen Abbildungen ergeben.

Aufgabe 22.8. Zeige, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Genauer: Es sei K ein Körper und es sei A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix und C eine $p \times r$-Matrix über K. Zeige, dass $(AB)C = A(BC)$ ist.

Aufgabe 22.9.*

Zeige, dass die Matrizenmultiplikation von quadratischen Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

Zu einer Matrix M bezeichnet man mit M^n die n-fache Verknüpfung (Matrizenmultiplikation) mit sich selbst. Man spricht dann auch von n-ten *Potenzen* der Matrix.

Aufgabe 22.10. Berechne zur Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Potenzen

$$M^i,\ i = 1, \ldots, 4.$$

AUFGABE 22.11.*

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	6	2	3
P_2	4	1	2
P_3	0	5	2
P_4	2	1	5

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Vierertupel von Produkten die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

	P_1	P_2	P_3	P_4
	6	4	7	5

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

	R_1	R_2	R_3
	12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

AUFGABE 22.12. Bestimme die (ungefähren) Koordinaten des skizzierten Punktes (eine Kästchenlänge repräsentiere eine Einheit).

AUFGABE 22.13. Markiere die folgenden Punkte in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$.

$$(3,-7),\ (-1,-2),\ (0,5),\ (4,4),\ (4,5),\ (-3,0),\ (0,0)\,.$$

AUFGABE 22.14. Es sei ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Punkte

$$(-x, y),\ (x,-y),\ (-x,-y),\ (3x, 3y), (-2x,-2y)\,.$$

AUFGABE 22.15. Es sei ein Punkt $P = (x, y)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2$ gegeben. Skizziere die Menge aller Punkte

$$(cx, cy),\ c \in \mathbb{R}\,.$$

AUFGABE 22.16. Markiere zwei Punkte P und Q in der kartesischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und addiere sie.

AUFGABE 22.17. Zeige, dass der Zahlenraum K^n zu einem Körper K mit der komponentenweisen Addition und der Skalarmultiplikation die Eigenschaften

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u+v) = ru + rv$,
(3) $(r+s)u = ru + su$,
(4)
$$1u = u,$$

erfüllt.

AUFGABE 22.18. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Zeige, dass auch das Produkt

$$V \times W$$

ein K-Vektorraum ist.

AUFGABE 22.19.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $s_1, \ldots, s_k \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeige

$$\left(\sum_{i=1}^{k} s_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} v_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq k,\, 1 \leq j \leq n} s_i \cdot v_j .$$

AUFGABE 22.20. Man mache sich klar, dass sich die Addition und die skalare Multiplikation auf einen Untervektorraum einschränken lässt und dass dieser mit den von V geerbten Strukturen selbst ein Vektorraum ist.

AUFGABE 22.21. Überprüfe, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume sind:

(1) $V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\}$,
(2) $V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$,
(3) $V_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x + 1\}$,
(4) $V_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.

AUFGABE 22.22.*

Es sei K ein Körper und

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{matrix}$$

ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Zeige, dass die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n ist. Wie verhält sich dieser Lösungsraum zu den Lösungsräumen der einzelnen Gleichungen?

Aufgabe 22.23.*

Es sei D die Menge aller reellen 2×2-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

die die Bedingung

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

erfüllen. Zeige, dass D kein Untervektorraum im Raum aller 2×2-Matrizen ist.

Aufgabe 22.24. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass die Vereinigung $U \cup W$ nur dann ein Untervektorraum ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt.

Aufgabe 22.25. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I := \operatorname{Abb}(I, K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 22.26. Es sei

$$C = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Cauchyfolge in } \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller reellen Cauchyfolgen. Zeige, dass C ein Untervektorraum des Folgenraums

$$F = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \text{Folge in } \mathbb{R} \right\}$$

ist.

Aufgabe 22.27. Zeige, dass die Teilmenge

$$S = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 22.28. Zeige, dass die Teilmenge

$$T = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ differenzierbar} \} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 22.29. Zeige, dass die Teilmenge

$$M = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ monoton} \} \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

kein Untervektorraum ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.30. (3 Punkte)

Berechne über den komplexen Zahlen das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 3-2\mathrm{i} & 1+5\mathrm{i} & 0 \\ 7\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} & 4-\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 3-4\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} \\ 5-7\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 22.31. (3 Punkte)

Wir betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K. Zeige, dass die vierte Potenz von M gleich 0 ist, also

$$M^4 = MMMM = 0.$$

Aufgabe 22.32. (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Finde und beweise eine Formel für die n-te Potenz der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 22.33. (2 Punkte)

Finde neben den beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ vier weitere Matrizen M mit der Eigenschaft $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 22.34. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die folgenden Eigenschaften gelten (dabei sei $s \in K$ und $v \in V$).

(1) Es ist $0v = 0$.
(2) Es ist $s0 = 0$.
(3) Es ist $(-1)v = -v$.
(4) Aus $s \neq 0$ und $v \neq 0$ folgt $sv \neq 0$.

Aufgabe 22.35. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen Vektorraum V und von drei Teilmengen in V an, die jeweils zwei der Unterraumaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Abbildungsverzeichnis