Übungsaufgaben

Aufgabe 26.1. Bestimme explizit den Spaltenrang und den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Beschreibe lineare Abhängigkeiten (falls solche existieren) zwischen den Zeilen als auch zwischen den Spalten der Matrix.

Aufgabe 26.2. Zeige, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen der Spaltenrang nicht ändert.

Aufgabe 26.3. Bestimme die Determinante von ebenen Drehungen.

Aufgabe 26.4. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+3\mathrm{i} & 5-\mathrm{i} \\ 3-2\mathrm{i} & 4+\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 26.5. Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 26.6.*

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 0 \\ -1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ -3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 26.7. Zeige durch Induktion, dass bei einer oberen Dreiecksmatrix die Determinante gleich dem Produkt der Diagonalelemente ist.

Aufgabe 26.8. Überprüfe die Multilinearität und die Eigenschaft, alternierend zu sein, direkt für die Determinante von 3×3-Matrizen.

Aufgabe 26.9. Es sei M eine quadratische Matrix, die man als

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

mit quadratischen Matrizen A und D schreiben kann. Zeige

$$\det M = \det A \cdot \det D .$$

Aufgabe 26.10.*

Bestimme, für welche $x \in \mathbb{C}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} x^2 + x & -x \\ -x^3 + 2x^2 + 5x - 1 & x^2 - x \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 26.11.*

Man begründe anhand des Bildes (siehe Kursseite), dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2-Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.

Aufgabe 26.12.*

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Determinante

$$\operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

für beliebiges $k \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$, für $u \in K^n$ und für $s \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ su \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = s \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

gilt.

Aufgabe 26.13. Zeige, dass man die Determinante nach jeder Zeile und nach jeder Spalte entwickeln kann.

Aufgabe 26.14. Es sei K ein Körper und $m, n, p \in \mathbb{N}$. Zeige, dass das Transponieren von Matrizen folgende Eigenschaften besitzt (dabei seien $A, B \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$, $C \in \mathrm{Mat}_{n \times p}(K)$ und $s \in K$.).

(1) $(A^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} = A$.
(2) $(A+B)^{\mathrm{tr}} = A^{\mathrm{tr}} + B^{\mathrm{tr}}$.
(3) $(sA)^{\mathrm{tr}} = s \cdot A^{\mathrm{tr}}$.
(4) $(A \circ C)^{\mathrm{tr}} = C^{\mathrm{tr}} \circ A^{\mathrm{tr}}$.

Aufgabe 26.15. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

indem man die Matrix nach allen Spalten und nach allen Zeilen entwickle.

Aufgabe 26.16. Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

Aufgabe 26.17. Es sei $z \in \mathbb{C}$ und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, w \longmapsto zw,$$

die zugehörige Multiplikation. Bestimme die Determinante dieser Abbildung, wenn man sie als reell-lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auffasst.

Die nächsten Aufgaben verwenden die folgende Definition.

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu $a \in K$ heißt die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V,\, v \longmapsto av,$$

die *Streckung* (oder *Homothetie*) zum *Streckungsfaktor* a.

Aufgabe 26.18. Was ist die Determinante einer Streckung auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V?

Aufgabe 26.19. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für zwei Streckungen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum.

Aufgabe 26.20. Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 26.21.*

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 26.22. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Zeige, dass

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M$$

gilt.

Aufgabe 26.23. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 3-2\mathrm{i} & 5 \\ \mathrm{i} & 1 & 3-\mathrm{i} \\ 2\mathrm{i} & -4-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 26.24. (3 Punkte)

Berechne die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 26.25. (4 Punkte)

Bestätige den Determinantenmultiplikationssatz für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} .$$