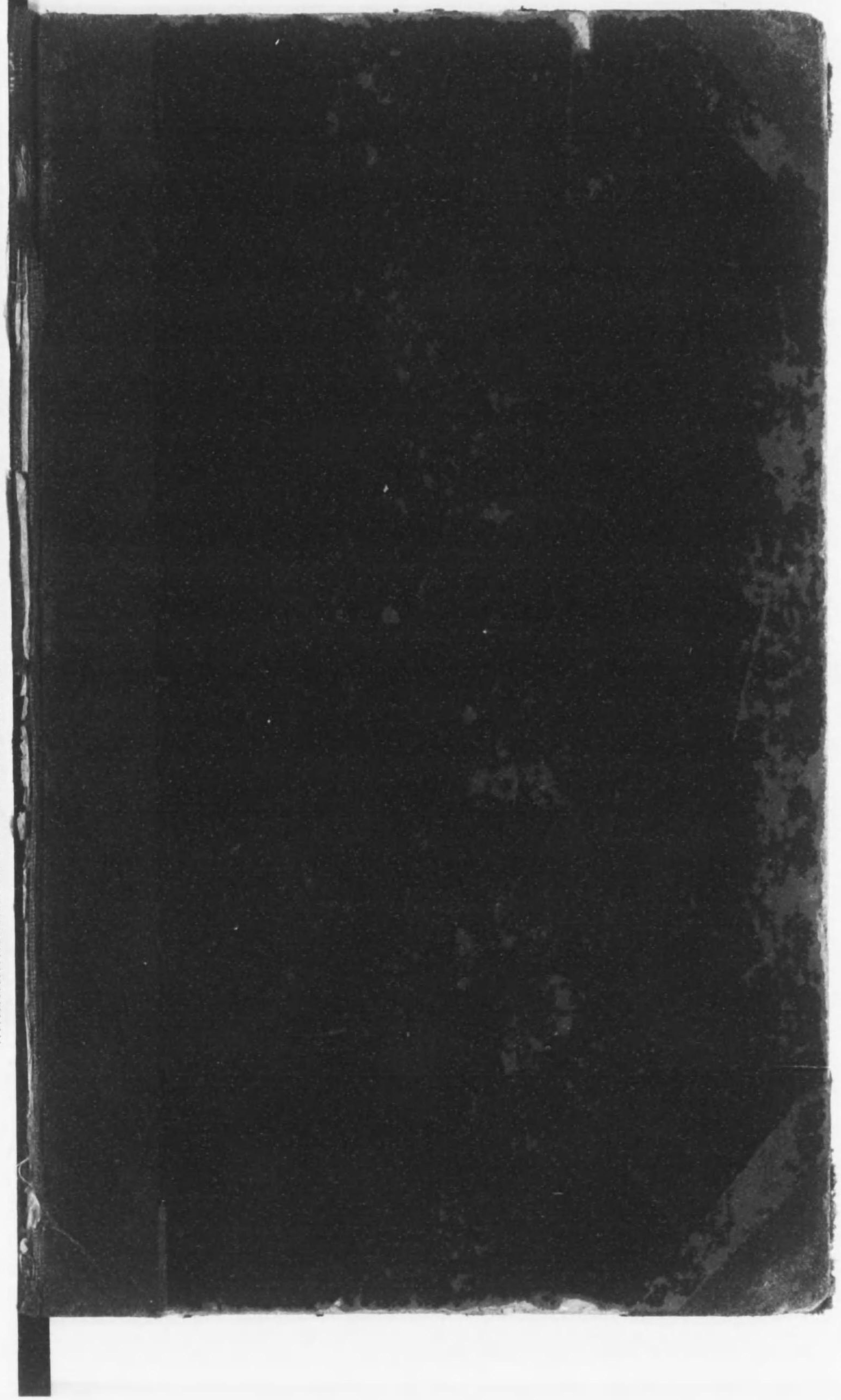
始



文部省檢定濟
明治四十一年一月二十日　中學校數學科用

新撰
代數學教科書

〔上卷〕

東京高等師範學校教授
理學士
林鶴一

開成館藏版
東京

序

本書ハ中學校及其他同程度ノ學校ノ教科書トシテ編纂セルモノニシテ、即余ガ撰述ニ係ル新撰統合數學教科書ノ代數學ノ部ヲ成スモノナリ。

抑中學校ノ代數學科ヲシテ最有功ナラシムルニ如何ナル教科書ニ頼ルベキカハ、余ガ多年甚深ナル興味ヲ以テ多方面ノ材料ヲ綜合シテ研究セル問題ニシテ、余ハ私ニ本書ニヨリテ略遺憾ナク此宿題ヲ解決シ得タリト信ズ。

特ニ本書ニ掲載セル問題ハ、數名ノ學理研究者教授實驗者ノ慎重ナル合議詮衡ヲ經テ精細ナル吟味ヲ試ミ、嚴密ナル校算ヲ施シ、一定ノ標準ノ下ニ整頓排列シタルモノナレバ、教授者ハ安ンジテ之ニ依頼シ、直ニ之ヲ生徒ニ課スルコトヲ得ベシ。本書ガ果シテ著者ノ豫

期セルガ如キ好成績ヲ收ムルコトヲ得タリトセバ、此問題ノ精選モ亦確ニ其一因ナルベシト信ズ。

又幾何學ト幷行教授スル頃ヨリハ、幾何學ノ用語ヲ採用スルコトヽセリ。

明治四十年十月

著　者

附言。本書ニハ數年間ノ下記高等各種學校入學試驗問題ヲ蒐集シ、之ヲ分類シテ適當ノ處ニ配置セリ。是レ生徒ニ興味ヲ與ヘ、其「力試シ」ノ機會ヲ得シムル恰好ノ材料ナレバナリ。

高等學校大學豫科……[大豫]
東京高等師範學校……[東京高師]
東京高等商業學校……[東京高商]
神戸高等商業學校……[神戸高商]
大阪醫學專門學校……[大阪醫專]
陸軍士官學校……[陸士]
海軍兵學校……[海兵]
其他

上卷目次

第三篇　一次方程式

第四篇　約數及倍數

第五篇　分數式

第六篇　無理數及虛數

新撰
代數學教科書

緒論

1. **代數學ノ目的。** 代數學ハ文字ヲ用ヒテ數ヲ代表シ,數ニ關スル問題ヲ講究スルヲ以テ目的トス。

算術ニテハ數ヲ代表スルニ一定ノ値ヲ有スル數字ヲ用フレド,代數學ニテ用フル文字ハ如何ナル數ヲモ代表シ得ルガ故ニ,得タル結果ハ數ノ大小如何ヲ問ハズ廣ク一般ニ通用シ,又其結果ハ計算ノ方法ヲ簡明ナラシム。

2. **文字使用ノ便益。** 次ニ文字ヲ使用スル便益ヲ說キ示サン。

算術ニテ「甲數ノ半ト乙數ノ半トノ和ハ其二數

ノ和ノ半ニ等シ」ト云フコトヲ知レリ。

例ヘバ甲數ヲ 100 トシ,乙數ヲ 80 トスレバ,

$$\frac{100}{2}+\frac{80}{2}=\frac{100+80}{2},$$

即　$$50+40=90$$

ヲ得。此二數ハ 100 ト 80 トニ限ラズ,如何ナル整數又ハ分數ニテモ可ナリ。故ニ之ヲ

$$\frac{\text{甲數}}{2}+\frac{\text{乙數}}{2}=\frac{\text{甲數}+\text{乙數}}{2}$$

ト記スヲ得ベシ。

今一層之ヲ簡明ナラシメンガタメニ,甲數.乙數ヲ代表スルニ a, b ヲ以テスレバ

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

又「攝氏寒暖計ノ度數ノ五分ノ九ニ三十二ヲ加ヘタルモノハ華氏寒暖計ノ度數ナリ」.依リテ攝氏ノ度數ヲ c ニテ示シ,華氏ノ度數ヲ f ニテ示セバ

$$f=c\times\frac{9}{5}+32, \tag{2}$$

即　$$\text{華氏ノ度數}=\text{攝氏ノ度數}\times\frac{9}{5}+32.$$

是レ度數ノ換算ヲ簡明ニ示スモノナリ。

例ヘバ $c=40$ トセバ,

$$f=40\times\frac{9}{5}+32=104,$$

即攝氏ノ四十度ハ華氏ノ百四度ニ當ル。又 $c=0$ トスレバ $f=32$ トナル,是レ氷點ヲ表ス度數ナリ。

文字ニテ表セル數ヲ加フル又ハ引クナドト云フベキヲ,單ニ文字ヲ加フル又ハ引クナドト云フ。

注意。數字及文字ヲ運算ノ符號.等號等ニテ結合シタルモノヲ**式**ト云ヒ,廣ク一般ニ通用シ得ル式ヲ**公式**ト云フ。

例ヘバ(1)及(2)ハ何レモ公式ナリ。

3. 符號。代數學ニテハ算術ト同様ニ加減乘除ノ符號.括弧.括線.等號等ヲ用フ。

サレド數字ト文字トノ間,或ハ文字ト文字トノ間,或ハ括弧ノ前後ニアル乘號ハ,之ヲ省略スルヲ常トス。

例ヘバ　$8x$,　$\frac{2}{3}a$,　$7\frac{m}{n}$,　$(a+b)(c-d)$ ハ夫夫 $8\times x$, $\frac{2}{3}\times a$,　$7\times\frac{m}{n}$,　$(a+b)\times(c-d)$ ニ同ジ。

但數字ト數字トノ間ノ乘號ハ省クヲ得ズ。

時トシテハ乘號トシテ點.ヲ用フルコトアリ。

例ヘバ　$5.3.2=30.$

積中ノ文字ハ羅馬字順ニ列ベ,數字ハ文字ノ左方ニ書クヲ通則トス。

又除法ノ符號 $\div$ ハ用フルコト少ク,通常ハ分數ノ形ヲ用フ。

例ヘバ $a\div b$ ヲ $\frac{a}{b}$ ト記ス。又 $\frac{a}{2}$ ハ $\frac{1}{2}a$ ニ等シ。

4. 運算ノ順序。 加減ノミヨリ成ル運算ハ左方ヨリ順次ニ右方ニ及ボスモノトス。サレド乘除ノ運算ハ常ニ加減ヨリ先ニ行フベシ。

例ヘバ $6\div2+3\times5-12\div3=3+15-4=14.$

$$a\div b+c\times d-e\div f=(a\div b)+(c\times d)-(e\div f).$$

又乘除ノミヨリ成ル運算ハ左方ヨリ順次ニ右方ニ及ボスモノナレド,乘號ヲ略スル場合ニハ除法ヲ乘法ノ後ニ行フ。

例ヘバ $a\div b\times c=(a\div b)\times c=\frac{a}{b}\times c$

及 $a\div bc=a\div(b\times c)=\frac{a}{bc}.$

問題一

(1) $a=16,\ b=6$ トシテ公式 $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}$ ヲ驗セ。$a=5,\ b=3$ トシテ試ミヨ。

(2) x ト y トノ和.差.積.商ヲ式ニテ書ケ。

(3) a ト b トノ和ノ三倍ヲ式ニテ書ケ。

(4) n ヲ以テ整數ヲ示ストキハ,次ノ大ナル整數ヲ示ス式ハ如何。

(5 $2n$ ヲ以テ偶數ヲ示ストキハ,其次ノ奇數及偶數ハ如何。

(6) a ノ五倍ヲ b ノ七倍ニテ除スルコトヲ式ニテ書ケ。

(7) 二數 $a,\ b$ ノ差ハ兩數ニ 10 ヲ加ヘタル結果ノ差ニ等シ。之ヲ式ニテ書ケ。

(8) 華氏寒暖計ノ度數 f ヲ攝氏寒暖計ノ度數 c ニ換算スル公式ヲ書ケ。而シテ $f=95$ ナルトキ c ヲ求メヨ。

第一篇

正數負數及其四則

第一章

正數　負數

5. 正數,負數。 金10圓ヲ有スル人ガ8圓ヲ費セバ殘金如何。

此問題ハ算術減法ノ問題ニシテ,

所要ノ殘金$=10^{\text{圓}}-8^{\text{圓}}=2^{\text{圓}}$.　答。

此問題ニテ,費シタル金高ヲ10圓トスレバ殘金ナシ。依テ

所要ノ殘金$=10^{\text{圓}}-10^{\text{圓}}=0^{\text{圓}}$.　答。

又費シタル金高ヲ12圓トスレバ,本題ハ算術ニテハ解ク能ハザル問題トナル。

然ルニ12圓ヲ費スハ,先10圓ヲ費シ,更ニ2圓ヲ費スニ異ナラズ。故ニ

$$10-12=10-10-2=0-2.$$

今$0-2$ヲ略シテ-2ト記シ,之ヲ以テ借金2圓ヲ代表ストセバ,被減數ガ減數ヨリ小ナル場合ニモ減法ヲ行フヲ得ベシ。

同樣ニ$0+2$ヲ略シテ$+2$ト爲スヲ得,但通常ハ之ヲ單ニ2ト記ス。

0ニ或數ヲ加ヘタル結果ヲ**正數**ト云ヒ,0ヨリ或數ヲ引キタル結果ヲ**負數**ト云フ。

正數及負數ノ前ナル符號ハ加減ノ意ニ非ズシテ,反對ノ性質ヲ表ス.故ニ之ヲ**性質ノ符號**或ハ單ニ符號ト云フ。

正數ト負數トヲ總稱シテ**代數的ノ數**ト云ヒ,符號ヲ去リタル數ヲ其**絶對値**ト云フ。例ヘバ$+2$又ハ-2ノ絶對値ハ2ナリ。

代數學ニ於ケル文字ハ,別ニ明言スルニ非ザレバ正數又ハ負數ヲ代表ス。

6. 總テ性質又ハ方向ノ相反セル量ノ大サヲ表スニ,正數及負數ヲ以テスルヲ得ベシ。

例ヘバ前節ノ場合ニ

數ノ性質ノ符號ハ財產ノ增減ヲ區別ス。同樣ニ利益ト損失トヲ區別ス。

又或人前方ニ向ヒテ3里進ミタル後, 5里退却セリト云フコトヲ, 此人ハ前方ニ $(3-5)$ 里即 -2 里進メリト云フヲ得, 是レ後方ニ2里退ケリト云フニ同ジ。故ニ

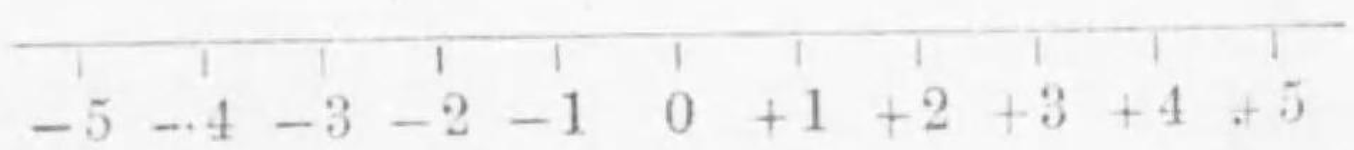
數ノ性質ノ符號ハ距離ノ前後ヲ區別ス。

又今ヨリ3年前ト3年後ト云フヲ區別スルガタメニ, 3年後ヲ $+3$ 年ト言フトキハ, 3年前ヲ -3 年ト言フヲ得。故ニ

數ノ性質ノ符號ハ時ノ前後ヲ區別ス。

其他宜シク類推スベシ。

7. 數ノ大小。 雙方ヘ無限ニ長キ横線上ノ定點ヨリ左右ニ向ヘル距離ヲ正數及負數ニテ表スト考ヘ, 右方ヲ正トシ, 左方ヲ負トセバ, 次ノ圖ノ如キ有樣ヲナス。



零ハ正數ニモアラズ, 負數ニモアラズ。

整數ニ正負ノ別アルガ如ク, 分數ニモ亦正負ノ別アリ。

例ヘバ7ヲ分母トセル負ノ分數ハ次ノ如シ。

$$-\frac{1}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{3}{7},\ -\frac{4}{7},\cdots\cdots\cdots\cdots$$

正數ノ大小ハ其絕對値ノ大小ニ同ジク, 負數ノ大小ハ其絕對値ノ大小ニ反ス。

0ハ總テノ正數ヨリ小ニシテ, 總テノ負數ヨリ大ナリ。

例ヘバ -1 ハ -2 ヨリ大ニシテ, 0ヨリ小ナリ。

之ヲ $\qquad -1>-2,\quad -1<0$

ト記ス。

上ノ圖ニテ一ツノ數ハ其左方ノ數ヨリハ大ニシテ, 右方ノ數ヨリハ小ナリ。即

$$\cdots\cdots\cdots<-2<-1<0<+1<+2<+3<\cdots\cdots\cdots$$

問題二

(1)　-5 ト -8 トハ何レガ大ナルカ。

(2)　0 ト $-\frac{1}{2}$ トハ何レガ小ナルカ。

(3)　次ノ諸數ヲ大小ノ順ニ排列セヨ。

$$+5,\ -2,\ +3,\ -1,\quad 0,\ -7,\ +2.$$

(4)　損失五圓ヲ $+5$ ニテ表サバ,利益五圓ヲ何ニテ表スベキカ。

(5)　家ノ高サ18尺ヲ $+18$ ニテ表サバ,井ノ深サ18尺ハ如何ニ表サルルカ。

(6)　-50 圓ノ貸金トハ如何ナル意カ。

(7)　$-\frac{2}{3}$ ト $-\frac{5}{7}$ トハ何レガ大ナルカ。

(8)　-300 米ノ前進ノ意義ヲ問フ。又 -5 尺ノ上昇トハ如何。

(9)　今ヨリ -5 時間後トハ如何ナル意カ。

(10)　-8 間降ルトハ如何ナル意カ。

第二章

加　法

8.　同性質ノ二量,例ヘバ貸金5圓ト貸金3圓トヲ合算スレバ貸金8圓トナルベク,又借金5圓ト借金3圓トヲ合計スレバ借金8圓トナルベシ。之ヲ代數的ニ表セバ次ノ如シ。

$$(+5)+(+3)=+8,$$

$$(-5)+(-3)=-8.$$

但等號ノ左方ナル括弧內ノ符號ハ性質ノ符號ニシテ,中央ノ符號ハ加法ノ符號ナリ。

又貸金5圓ト借金5圓トヲ有スル人ハ所有金ナキニ同ジ。依テ

$$(+5)+(-5)=0.$$

順序ヲ換フルモ亦

$$(-5)+(+5)=0.$$

又貸金5圓ト借金3圓トヲ有スルハ貸金2圓ヲ有スルニ同ジ。依テ

$$(+5)+(-3)=+2.$$

同樣ニ　$$(-3)+(+5)=+2.$$

又借金5圓ト貸金3圓トヲ有スルハ借金2圓ヲ有スルニ相當ス。故ニ

$$(-5)+(+3)=-2.$$

同様ニ $$(+3)+(-5)=-2.$$

上ノ例ニ依リテ次ノ法則ヲ立ツ。

(法則) 同符號ノ二數ヲ加フルニハ其絶對値ヲ加ヘ,之ニ共通ノ符號ヲ附スベシ。

異符號ノ二數ヲ加フルニハ其絶對値ノ差ニ絶對値ノ大ナル數ノ符號ヲ附スベシ。

絶對値ガ相等シクシテ符號ノ相異ナル二數ヲ加フレバ,零トナル。

今 a ト b トヲ以テ二數ノ絶對値ヲ示シ,且 $a>b$ トスレバ,上ノ法則ヲ次ノ公式ニテ示スヲ得。

$$(+a)+(+b)=+(a+b).$$

$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

$$(+a)+(-b)=+(a-b).$$

$$(-a)+(+b)=-(a-b).$$

$$(-a)+(+a)=0.$$

零ト或數トヲ加ヘタル結果ハ其數ナリ(第5節參照)。

即 $0+(+a)=+a,\quad 0+(-b)=-b$

又 $a+0=a,\quad (-b)+0=-b.$

例ヘバ $0+(-3)=-3,\quad \frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}.$

注意。數字・文字・符號等ヲ用ヒテ或事實ヲ表セルモノヲ**公式**ト云ヒ,公式ヲ言葉ニテ表セルモノヲ**法則**ト云フ。

9. **代數和**。代數學ニ於ケル加法ハ必シモ增加ヲ來サズ。正數ヲ加フレバ增加スレド,負數ヲ加フレバ却テ減小ス。

正數或ハ負數ヲ加ヘテ得タル結果ヲ**代數和**或ハ單ニ和ト云フ。

多クノ數ヲ加フルニハ,第一ノ數ニ第二ノ數ヲ加ヘ,其和ニ第三ノ數ヲ加ヘ,逐テ此ノ如クスレバ,最後ノ結果ハ所要ノ和ナリ。

二ツ以上ノ數ノ和ハ之ヲ加フル順序ニ關セザ

ルガ故ニ,正數ト負數トヲ別別ニ加ヘテ其結果ノ代數和ヲ求ムルモ可ナリ。

【例一】 $-13,\ +5,\ -1,\ +10,\ -6$ ノ和ヲ求メヨ.

解。
$$(-13)+(+5)=-8,$$
$$(-8)+(-1)=-9,$$
$$(-9)+(+10)=+1,$$
$$(+1)+(-6)=-5.\quad \text{答。}$$

別解。
$$(-13)+(-1)+(-6)=-20,$$
$$(+5)+(+10)=+15,$$
$$(-20)+(+15)=-5.\quad \text{答。}$$

【例二】 $-2\frac{1}{3}$ ト $+3\frac{2}{5}$ トノ和ヲ求メヨ。

解。二數ヲ同分母ノ假分數ニ化シテ加フベシ。

即
$$\left(-\frac{7}{3}\right)+\left(+\frac{17}{5}\right)=\left(-\frac{35}{15}\right)+\left(+\frac{51}{15}\right)$$
$$=+\frac{16}{15}$$
$$=1\frac{1}{15}.\quad \text{答。}$$

問題三

(1) 或日ノ溫度ガ18度ナリシニ,其夜3度下レリト云フ。其時ノ溫度如何。

(2) 或商人資本金300圓ヲ以テ商業ヲナシ,始ニ150圓ヲ利シ,次ニ500圓ヲ損セリト云フ。現今ノ財產幾許ナルカ。

(3) 或人某地點ヨリ350尺前進シ,次ニ400尺背進シ,更ニ125尺前進スルトキハ,出發點ヨリ何レノ方向,幾尺ノ地點ニアルカ。

(4) 零度以下12度ノ溫度ガ12度上昇スルトキハ,其溫度ハ如何。

次ノ加法ヲ行フベシ。

(5) $\left(+35\frac{1}{3}\right)+\left(+7\frac{1}{2}\right).$　(6) $(-72)+(-38).$

(7) $80+(-80).$　(8) $75+(-82).$

(9) $(-75)+82.$　(10) $(-8)+(-3)+12.$

(11) $3+(-6)+(-5).$　(12) $70+(-115)+45.$

(13) $(-1.7)+13.08.$　(14) $7.53+(-10).$

(15) $(-5)+2\frac{1}{3}.$　(16) $7\frac{1}{2}+\left(-3\frac{1}{5}\right).$

(17) $6\frac{1}{2}+\left(-3\frac{3}{8}\right)+\left(-5\frac{1}{2}\right).$

(18) $-5+3+5.$　(19) $x+y+(-y).$ $= x$

(20) $(-x)+(+x)+(-y).$ $= -y$

第三章

減法

10. 減法ハ加法ノ逆算ナリ。

被減數ヲ得ルガタメニ減數ニ加フベキ數,即減法ノ結果ハ差ナリ。

加法ニ依リテ $(+a)+(-a)=0.$ 故ニ

$$0-(+a)=-a. \tag{1}$$

又 $(-a)+(+a)=0.$ 故ニ

$$0-(-a)=+a. \tag{2}$$

例ヘバ $0-(+5)=-5,$

$$0-(-5)=+5.$$

實例ヲ以テ之ヲ説明センニ,貸金5圓ト借金5圓トヲ有スルハ財産無キニ等シ,故ニ之ヨリ貸金5圓ヲ引キ去レバ借金5圓ヲ殘シ,又借金5圓ヲ引キ去レバ貸金5圓ヲ殘スコトトナル。

上ノ説明ニ依リテ次ノコトヲ知ル。

零ヨリ或數ヲ引キタル差ハ,此數ノ符號ヲ變ジタルモノニ等シ。

0ヲ略スレバ

$$-(+a)=-a,$$

$$-(-a)=+a.$$

依テ $-\{-(+a)\}=-\{-a\}=+a,$

$$-\{-(-a)\}=-\{+a\}=-a.$$

11. 任意ノ二數ノ差ヲ求ムル法。

加法ニヨレバ

$$a+(-b)+(+b)=a,$$

故ニ $a-(+b)=a+(-b).$ $=a-b$ (1)

同樣ニ $a+(+b)+(-b)=a,$

故ニ $a-(-b)=a+(+b).$ (2)

【例一】 $(+8)-(+3)=(+8)+(-3)=+5$

即 $8-3=8+(-3)=5.$

【例二】 $(+3)-(+8)=(+3)+(-8)=-5,$

即 $3-8=3+(-8)=-5.$

或ハ $3-8=3-3-5=0-5=-5.$

(第5節參照)

【例三】 $(-8)-(-3)=(-8)+(+3)=-5.$

或ハ略シテ $-8-(-3)=-8+3=-5.$

【例四】 $(-3)-(-8)=(-3)+(+8)=+5.$

或ハ $-3-(-8)=-3+8=5.$

【例五】 $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0.$

【例六】 $(-2)-(+3)=(-2)+(-3)=-5,$

或ハ $(-2)-(+3)=0-2-3$

$=0-5=-5.$

上ノ諸例ニ依リテ次ノ法則ヲ得。

(法則) 一數ヨリ他ノ數ヲ減ズルニハ，減數ノ符號ヲ變ジテ之ヲ被減數ニ加フベシ。

(驗算) 減法ノ結果ノ正否ヲ驗スニハ，減數ト差トノ和ガ被減數トナルヤ否ヤヲ見ルベシ。

注意。被減數ガ減數ヨリ大ナレバ其差ハ正數ニシテ，前者ガ後者ヨリ小ナレバ其差ハ負數ナリ。

12. 前節ニ依レバ，正數ヲ引クハ之ト絕對値ヲ同ジクスル負數ヲ加フルニ同ジク，負數ヲ引クハ之ト絕對値ヲ同ジクスル正數ヲ加フルニ同ジ。

故ニ加減ヨリ成ル式ハ之ヲ代數和ノ形ニ改ムルヲ得。其時加號減號ハ夫夫正號負號トナル。

例ヘバ $12-3+7-6=12+(-3)+7+(-6).$

注意一。加減ヨリ成ル式ヲ代數和ナリト考フルトキ，其各部分ノ順ヲ換ヘテモ和ハ變ラズ。

例ヘバ $a-b+c=-b+a+c=c+a-b=\dots\dots\dots$

之ヲ加法ノ交換法則ト云フ。

又 $a-b+c=a+(-b+c).$

之ヲ加法ノ結合法則ト云フ。

注意二。代數學ニ於ケル減法ハ必シモ減小ヲ來サズ，正數ヲ引ケバ被減數ハ減小スレド，負數ヲ引ケバ却テ增大ス。

問題四

次ノ式ヲ計算セヨ (1)–(17).

(1) $9-12.$ (2) $-13-20.$ (3) $\frac{1}{4}-1.$

(4) $\frac{1}{2}-\frac{5}{6}$ (5) $7-(+1).$ (6) $23-(-23).$

(7) $(-27)-(-27).$ (8) $0-(-7).$

(9) $(-20)-(-25).$ (10) $0-(7-5).$

(11) $0-(5-7).$ (12) $-4+2\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}.$

(13) $19.05-5.2-18.$ (14) $7.5-(-3.8)+5.2.$

(15) $-\{+(+6)\}-(-7).$ (16) $0-\{1-(3-5)\}.$

$0-(+3)=0+(-3)=-3$

$=(-6)+(+7)=1$

(17) $2-\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(+\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{31}{15}\right)$.

(18) -37 ニ如何ナル數ヲ加フレバ2トナルカ。

(19) 15ヨリ如何ナル數ヲ引ケバ-10トナルカ。

(20) $-b+a$ ト $a-b$ トハ相等シキカ。

(21) -5 ト -8 トハ何レガ何程大ナルカ。又 $-\frac{2}{3}$ ト $-\frac{4}{5}$ トハ何レガ何程小ナルカ。

(22) 30度ノ溫度ハ零度以下25度ヨリ幾度高キカ。

(23) 深サ35尺ナル井ノ底ハ,高サ200尺ナル塔ノ頂上ヨリ幾尺低キカ。

(24) 7ニ何ヲ加フレバ$\frac{5}{3}$トナルカ。

(25) 歐羅巴大陸ハ北緯36°ト71°トノ間ニアリ,又巴里ヨリ東經63°ト西經12°トノ間ニ在リ。經緯度ノ廣ガリハ各幾度ナルカ。

(26) a圓ノ所持金ヨリb圓ノ品物ヲ買ヘバ殘金如何。$a>b$, $a=b$, $a<b$ナル場合ヲ説明セヨ。

(27) 或水夫,一地點ヲ發シテ河ヲ漕ギ上ルコト35町ニシテ,ソレヨリ12町下リ,又40町上リ,次ニ58町下リタリ。今出發點ヲ去ルコト川上或ハ川下ノ幾町ノ處ニアルカ。

第四章

乘法

13. 零ヲ乘ズル法。

例ヘバ $(+5)\times 0$ ナル積ヲ求メントス。

$0=1-1$ ナルガ故ニ所要ノ積ハ $+5$ ノ一倍ヨリ其一倍ヲ引キタルモノナリ。故ニ

$$(+5)\times 0=(+5)\times 1-(+5)\times 1$$
$$=(+5)-(+5)=0.$$

同樣ニ
$$(-5)\times 0=(-5)\times 1-(-5)\times 1$$
$$=(-5)-(-5)=0.$$

又
$$0\times 0=0\times 1-0\times 1=0.$$

一般ニaガ零又ハ正或ハ負ナル整數ニテモ,分數ニテモ,

$$a\times 0=0.$$

或數ニ零ヲ乘ジタル積ハ零ナリ。

14. 正ノ整數ヲ乘ズル法。

例ヘバ $(+5)\times(+3)$ ナル積ヲ求メンニ,乘數 $+3$ ハ $0+3$ ナルガ故ニ,所要ノ積ハ被乘數 $+5$ ノ零倍

ト3倍トノ和ナリ。即

$$(+5)\times(+3)=(+5)\times0+(+5)\times3$$
$$=0+15=+15.$$

同様ニ $(-5)\times(+3)=(-5)\times0+(-5)\times3$
$$=0+(-15)=-15.$$

又 $\left(-\frac{2}{7}\right)\times(+3)=\left(-\frac{2}{7}\right)\times0+\left(-\frac{2}{7}\right)\times3$
$$=0+\left(-\frac{6}{7}\right)=-\frac{6}{7}.$$

或數ニ正ノ數ヲ乘ジタル積ハ,被乘數ト同ジキ符號ヲ有ス。

又 $0\times(+3)=0\times0+0\times3=0.$

15. 負ノ整數ヲ乘ズル法。

例ヘバ $(+5)\times(-3)=(+5)\times0-(+5)\times3$
$$=0-(+15)=-15.$$

同様ニ $(-5)\times(-3)=(-5)\times0-(-5)\times3$
$$=0-(-15)=+15.$$

或數ニ負ノ數ヲ乘ジタル積ハ,被乘數ト反對ノ符號ヲ有ス。

又 $0\times(-3)=0\times0-0\times3=0.$

16. 上ニ說明セル所ニヨリテ次ノ法則ヲ得。

(法則) **同符號ヲ有スル二數ノ積ハ其絕對値ノ積ニ＋ヲ附シ,異符號ヲ有スル二數ノ積ハ其絕對値ノ積ニ－ヲ附スベシ。**

若干ノ因數ノ中ニテ,負數ノ數ガ偶數ナレバ積ハ正ニシテ,奇數ナレバ積ハ負ナリ。

$$(-1)(+5)(-2)=+10,$$
$$(-1)(-2)(+5)(-3)=-30.$$

又零ニ或數ヲ乘ジタル積ハ零ナリ。

17. 乘法ノ符號法則ノ實例。

同符號ノ二數ノ積ハ正ニシテ,異符號ノ二數ノ積ハ負ナリ。

(1) $(+100)\times(+5)=+500.$

(2) $(+100)\times(-5)=-500.$

(3) $(-100)\times(+5)=-500.$

(4) $(-100)\times(-5)=+500.$

之ニ對應スル實例ハ次ノ如シ。

(1) 每年百圓ヅツ財產ヲ增シツツアル人ハ,五

年後ニハ今ヨリ五百圓ヲ增ス。

(2) 毎年百圓ヅツ財産ヲ增シツツアル人ハ,五年前ニハ今ヨリ五百圓少シ。

(3) 毎年百圓ヅツ財産ヲ減ジツツアル人ハ,五年後ニハ今ヨリ五百圓減ズ。

(4) 毎年百圓ヅツ財産ヲ減ジツツアル人ハ,五年前ニハ今ヨリ五百圓多シ。

問題五

次ノ式ヲ計算セヨ (1)–(10).

(1) $0\times\left(-\frac{2}{3}\right)$. (2) $(+11)\times(+15)$.

(3) $(-1)(-1)(-1)$. (4) $\left(+\frac{1}{2}\right)(-2)$.

(5) $\left(-\frac{3}{5}\right)(+5)$. (6) $(-7)\times8\times(-3)$.

(7) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-12)$. (8) $5\times0\times(-3)$.

(9) $\frac{5}{8}\times(-40)$. (10) $-\frac{2}{15}\times(-5)\times(-3)\times(-4)$.

(11) $+3,\ +2,\ +1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3$ ヲ順次ニ $+4$ ニ乘ゼヨ。又 -4 ニ乘ゼヨ。

第五章

除法

18. 除法ハ乘法ノ逆算ナリ。

被除數即實ヲ得ルガタメニ,除數即法ニ乘ズベキ數,即除法ノ結果ハ商ナリ。

19. 除法ノ法則。

同符號ヲ有スル二數ノ商ハ其絶對値ノ商ニ符號＋ヲ附シタルモノナリ。

異符號ヲ有スル二數ノ商ハ其絶對値ノ商ニ符號－ヲ附シタルモノナリ。

(驗算) 除法ノ正否ヲ驗スニハ,法ト商トノ積ガ實ニ等シクナルカ否カヲ見ルベシ。

【例】 $(+15)\div(+5)=+3$, 其故ハ $(+5)(+3)=+15$.

$(-15)\div(+5)=-3$, 其故ハ $(+5)(-3)=-15$.

$(+15)\div(-5)=-3$, 其故ハ $(-5)(-3)=+15$.

$(-15)\div(-5)=+3$, 其故ハ $(-5)(+3)=-15$.

同様ニ $(+2)\div(+7)=+\frac{2}{7}$.

$$(-2)\div(+7)=-\frac{2}{7}.$$

$$(+2)\div(-7)=-\frac{2}{7}.$$

$$(-2)\div(-7)=+\frac{2}{7}.$$

20. 分數ノ乘除。

算術ニテ分數ヲ乘ズルハ分母ニテ除シ其商ニ分子ヲ乘ズルコトナリ。代數學ニテモ同樣ナリ。

【例】 $(-5)\times\frac{2}{7}=(-5)\div7\times2=-\frac{5}{7}\times2=-\frac{10}{7}.$

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{11}\right)=+\frac{2\times3}{5\times11}=+\frac{6}{55}.$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right)\div\left(+\frac{3}{2}\right)=-\frac{4\times2}{5\times3}=-\frac{8}{15}.$$

$$1\div\left(-\frac{5}{3}\right)=-\left(1\div\frac{5}{3}\right)=-\frac{3}{5}.$$

21. 逆數。 1ヲ或數ニテ除シタル商ヲ其逆數ト云フ。

例ヘバ $-\frac{5}{3}$ ト $-\frac{3}{5}$ トハ互ニ逆數ヲナス。

或數ニテ除スルハ其逆數ヲ乘ズルニ同ジ。

例ヘバ $\left(+\frac{6}{11}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)=\left(+\frac{6}{11}\right)\times\left(-\frac{5}{3}\right)$

$$=-\frac{6\times5}{11\times3}=-\frac{10}{11}.$$

22. 特別ノ場合。

零ヲ或數ニテ除シタル商ハ零ナリ。

例ヘバ $0\div(-5)=0.$

其故ハ法 -5 ト商 0 トノ積ガ實 0 ニ等シケレバナリ。

零ヲ零ニテ除シタル商ハ不定ナリ。

其故ハ 0 ニ如何ナル數ヲ乘ズルモ 0 ヲ得レバナリ。

零ニ非ザル數ヲ零ニテ除スルヲ得ズ。

其故ハ零ニ如何ナル數ヲ乘ズルモ零ナラザル數ヲ得ルコトナケレバナリ。

注意。 故ニ或數零ナルモ又ハ零ナラザルモノヲ零ニテ除スルコトヲ許サズ。

問題六

次ノ式ヲ計算セヨ (1)-(16).

(1) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(+\frac{3}{2}\right)$. (2) $8\times\left(-\frac{2}{5}\right)\times15$.

(3) $12.8\times(-0.5)$. (4) $(-200)\div(+25)$.

(5)　$(+175)\div(-15)$.　　(6)　$\left(-\frac{2}{7}\right)\div2$.

(7)　$\left(-\frac{1}{2}\right)\div\left(-\frac{1}{10}\right)$.　　(8)　$\left(-\frac{5}{11}\right)\div(+3)$.

(9)　$(-7)\times\left(+\frac{3}{50}\right)$.　　(10)　$\left(-\frac{2}{3}\right)\div\frac{5}{7}\times\left(-\frac{5}{11}\right)$.

(11)　$3\frac{2}{11}\times\left(-\frac{4}{5}\right)\div2\frac{1}{3}$.　　(12)　-12.8×0.25.

(13)　$24\div(-0.005)$.　　(14)　$(-3)\div(-75)$.

(15)　$(-24)\times(-1)\div\{(-3)\times(-4)\}$.

(16)　$(+12)\left(-\frac{2}{3}\right)\times5\frac{1}{2}\div(-3)\left(-\frac{5}{6}\right)$.

(17)　$a=-12$, $b=-3$ トシテ次ノ結果ノ正當ナルコトヲ驗スベシ。

$(+a)(+b)=+ab$,	$(+a)\div(+b)=+\frac{a}{b}$,
$(+a)(-b)=-ab$,	$(+a)\div(-b)=-\frac{a}{b}$,
$(-a)(+b)=-ab$,	$(-a)\div(+b)=-\frac{a}{b}$,
$(-a)(-b)=+ab$.	$(-a)\div(-b)=+\frac{a}{b}$.

第二篇

代數式及其四則

第一章

代數式

23.　或數ヲ因數トシテ幾回モ相乘ジテ得ル所ノ積ヲ,其數ノ**乘羃**又ハ**羃**ト云フ。

例ヘバ 5×5 即 25 ハ 5 ノ**二乘羃**又ハ**自乘**又ハ**平方**ニシテ, $5\times5\times5$ 即 125 ハ 5 ノ**三乘羃**又ハ**立方**ナリ。5 ノ平方ヲ 5^2 ト記シ, 5 ノ立方ヲ 5^3 ト記ス。

同樣ニ aa 即 a^2 ハ a ノ平方ニシテ, aaa 即 a^3 ハ a ノ立方ナリ。

一般ニ因數ノ數ガ n ナルトキ, a^n ハ a ノ n 乘羃ナリ。

乘羃ニ於ケル因數ノ數ヲ羃指數又ハ指數ト云フ。

又 a ハ a^1 ニ等シキガ故ニ, a ノ指數ハ 1 ナリ。故ニ a ヲ a ノ一乘羃ト云フ。

24. 或數 a ノ n 乘羃ガ b ニ等シキトキハ, a ヲ b ノ n **乘根**ト云フ。

例ヘバ $5^3=125$ ナルガ故ニ, 5 ハ 125 ノ三乘根又ハ立方根ナリ。之ヲ $5=\sqrt[3]{125}$ ト記ス。

$\sqrt[n]{\ }$ ノ形ノ符號ヲ根號ト云ヒ, n ヲ根指數ト云フ。

注意。 $+5$ 又ハ -5 ノ平方ハ何レモ $+25$ 即 25 ナリ, 故ニ 25 ノ平方根ハ $+5$ 及 -5 ノ二種ナリ。其中正ナル方ヲ $+\sqrt[2]{25}$ 或ハ $+\sqrt{25}$ 或ハ $\sqrt{25}$ ニテ示シ, 負ナル方ヲ $-\sqrt{25}$ ニテ示スモノトス。依テ 25 ノ平方根ハ $\pm\sqrt{25}$ 即 ±5 ナリ。符號 $\pm$ ヲ複號ト云フ。

25. 若干ノ數字及文字ヲ運算ノ符號ニテ連結セルモノヲ, **代數式**或ハ單ニ**式**ト云フ.

例ヘバ $8a$ 又ハ $a-b+c$ ノ如シ。

代數式ハ等號又ハ不等號ヲ含マズ。

26. 積ノ因數ヲ二部ニ分チ, 其各部ヲ他ノ部分ノ**係數**ト云フ。

例ヘバ $5ax$ ニテハ, 5 ハ ax ノ係數ニシテ, $5a$ ハ x ノ係數ナリ。又 $5x$ ハ a ノ係數ナリ。

積ノ因數ノ一ガ數字ニテ表サレタル數ナルトキハ, 之ヲ他ノ部分ノ數係數或ハ單ニ係數ト云フ。

例ヘバ $-\frac{2}{3}xy$ ノ數係數ハ $-\frac{2}{3}$ ナリ。

文字ノ前ニ數字ナキトキハ其係數ハ 1 ナリ。例ヘバ ab ハ $1ab$ ニ同ジ。

27. 根號ヲ有セザル式ヲ**有理式**ト云ヒ, 之ヲ有スル式ヲ**無理式**ト云フ.

例ヘバ $5x+\frac{y}{z}$ ト $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ トノ如シ。

28. 有理式ガ文字ニテ除スルコトヲ含マザレバ之ヲ**整式**ト云ヒ, 整式ヲ整式ニテ除シタル代數式ヲ**分數式**ト云フ.

例ヘバ $2a$ 又ハ $\frac{2}{3}x-\frac{3}{5}y+z$ ハ整式ニシテ, $\frac{m+n}{m-n}$ ハ分數式ナリ。

29. 代數式ガ代數和ノ形ニ改メラレタルトキハ(第12節注意一參照),各部分ヲ代數式ノ項ト云フ。

例ヘバ $5ab+\frac{c}{d}-3\sqrt{m}$ ハ $(+5ab)+\left(+\frac{c}{d}\right)+(-3\sqrt{m})$ ニ等シキガ故ニ, $+5ab$, $+\frac{c}{d}$, $-3\sqrt{m}$ ノ三項ヲ有スル代數式ナリ。始ノ二項ハ正項ニシテ,最後ノ項ハ負項ナリ。

30. 唯一項ヲ有スル式ヲ單項式ト云ヒ,數多ノ項ヲ有スル式ヲ多項式ト云フ。

多項式ハ項ノ數ニ從ヒテ之ヲ二項式.三項式.等ト云フ。

故ニ多項式ハ單項式ノ代數和ニシテ,項ハ即單項式ナリ。

數多ノ項ヲ一括シテ一數ト見做ス式ハ單項式ナリ。

例ヘバ $5(a+b)$ 或ハ $\frac{(a+b)^2(a-b)}{1+x-x^2}$ ノ如シ。

31. 整單項式ニテハ文字ノ因數ノ數ヲ此式ノ次數ト云フ。

例ヘバ $5abx$ ハ三次式ニシテ, $-x^3y$ ハ四次式ナリ。

次數ノ大ナルヲ次數高シト云ヒ,次數ノ小ナルヲ次數低シト云フ。

又特ニ或文字ニ關シテ次數ヲ云フコトアリ。

例ヘバ $6ax^2$ ハ x ニ關シテ二次ノ單項式ナリ。

整多項式ノ次數ハ其最高次ノ項ノ次數ナリ。

例ヘバ x^2-6x+5 ハ二次三項式ナリ。?

或文字ヲ有セザル項ハ其文字ニ關シテ零次ナリト云フ。例ヘバ前例ニテ $+5$ ハ x ニ關シテ零次ナリ。之ヲ絶對項又ハ既知項ト云フ。

32. 多項式ノ總テノ項ノ次數ガ同ジキトキハ,之ヲ同次式ト云フ。

例ヘバ $a^3-a^2b+ab^2-b^3$ ハ三次ノ同次式ニシテ, x^3-x-7 ハ同次式ニアラズ。

33. 式中ノ文字ニ其各文字ガ代表セル數ヲ

入レテ,指シ示サレタル運算ヲ成ストキ,得ル所ノ結果ヲ此式ノ數値又ハ單ニ値ト云フ。

例ヘバ $a=-2,\ b=3,\ c=4$ ナルトキ, $5a^2bc$ ノ數値ハ $5\times(-2)^2\times3\times4$ 即 240 ナリ。

34. 前節ヨリ次ノコトヲ知ル。

代數式ハ如何ニ複雜ナルモ皆或一數ヲ表スガ故ニ單一ノ記號ノ如ク之ヲ取扱フヲ得ベシ。故ニ又單一ノ記號ニテ任意ノ代數式ヲ表スヲ得。

問題七

(1) 次ノ各式ニテ x^2 ノ係數ヲ問フ。

$$-5x^2,\ \frac{2}{3}x^2,\ 7a^2x^2y,\ 6x^2(a+b).$$

(2) 次ノ式ハ何項式ナルカ。

$$a\div b\times c+\frac{(m+n)(m-n)}{30}-6xy.$$

(3) 次ノ式ハ何次式ナルカ。

$$34x^3y-15xy^4+x^2y^3.$$

又 x ノミニ關スル次數ハ如何。y ノミニ關スルモノハ如何。

(4) $3x$ ト x^3 ト $3+x$ トノ差異ヲ說明セヨ。又 $x=10$ トシテ此三式ノ數値ヲ求ムベシ。

$a=7,\ b=3,\ c=1,\ x=5,\ y=4$ トシテ次式ノ數値ヲ求メヨ (5)–(11).

(5) $5ab^2c^3$. (6) $3a-5b$. (7) $3(a-5b)$.

(8) $\frac{3a}{4}(x+y)$. (9) $\frac{14x+20}{a+b}$. (10) 2^x-x^2.

(11) $a^2-b^2+c^2$.

$a=\frac{3}{4},\ b=\frac{2}{3},\ c=0$ トシテ次式ノ數値ヲ求メヨ (12)–(15).

(12) $12ab+5bc$. (13) $8a^2b^2-35$.

(14) $\frac{1+a}{1-b}+\frac{1+b}{1-a}$. (15) $\frac{4}{3}a^3b^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{5}a^2b^3c^2\right)$.

$a=-7,\ b=-5,\ c=0,\ x=3,\ y=10$ トシテ次式ノ數値ヲ求メヨ (16)–(23).

(16) $x^2-7x+12$. (17) $\sqrt{3x}$.

(18) $8\sqrt{a^2x^4}$. (19) $a^3+b^3+c^3$.

(20) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

(21) $\sqrt{\frac{7ab}{150xy}}$. (22) $\frac{ac-bx}{(b-c)y}$.

(23) $\dfrac{\sqrt{-7a}+\sqrt{5c}}{2\sqrt{b^2}}$.

(24) $a=5,\ b=3$ 又ハ $a=0,\ b=-2$ トシテ次ノ各二式ノ數値ヲ求メ,之ヲ比較セヨ。

(1)　$(a+b)^2,\quad a^2+2ab+b^2.$

(2)　$(a+b)(a-b),\quad a^2-b^2.$

(25) 次ノ公式ニヨリテ華氏寒暖計ノ度數 $17°$, $0°$, $23°$, $-13°$, $-5°$ ヲ攝氏ノ度數ニ換算セヨ。

$$c=\frac{5}{9}(f-32).$$

(26) 靜止セル物體ガ眞空中ニテ t 秒間落下スレバ,其通過セル尺度 s ヲ表ス公式ハ

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

ナリ。$g=32,\ t=5$ ナルトキ s ヲ求メヨ。

(27) 三角形ノ田地ノ三邊ノ間數ヲ $a,\ b,\ c$ ニテ表シ, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$ トスレバ,三角形ノ面積ノ坪數ハ公式

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ニテ表サル。$a=15,\ b=12,\ c=9$ ナルトキ坪數 S ヲ求メヨ。

35. 文字ノ部分ヲ同ジクスル諸項ヲ同類項ト云フ。

例ヘバ $7ab^2$ ト $-ab^2$ ト $-\frac{2}{3}ab^2$ トハ同類項ナレド, $5x$ ト $5x^3$ トハ同類項ニ非ズ。

36. 同類項ノ簡約。 多項式ガ若干ノ同類項ヲ有スルトキハ,式ノ値ヲ變ゼズシテ項數ヲ少クスルヲ得,之ヲ簡約スト云フ。

(法則) 數多ノ同類項ヲ簡約スルニハ,係數ノ代數和ヲ作リテ之ニ其文字ヲ附記スベシ。

【例一】 $16x-7x=(16-7)x=9x.$ 答。

【例二】 $3a+4a-7a=(3+4-7)a$

$\qquad =0\times a=0.$ 答。

【例三】 $-5x-6y-3+4x-2y+8$

$\qquad =-5x+4x-6y-2y-3+8$

$\qquad =-x-8y+5.$ 答。

【例四】 $\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{5}x+\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{6}x+2$

$\qquad =\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{12}\right)x^3+\left(-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)x+2$

$\qquad =\frac{3}{4}x^3-\frac{11}{30}x+2.$ 答。

問題八

次ノ各式ヲ簡約セヨ。

(1) $a+a$. (2) $2a-a$.

(3) $5x^2+3x^2+x^2$. (4) $-2y+5y$.

(5) $5x^3-8x^3+3x^3$. (6) $7m-2m+8m-10m$.

(7) $\frac{1}{5}x-\frac{1}{6}x$.

(8) $-8x+2y-3x+8+7y+5x-13y-7$.

(9) $6x^3-5x^2+3x-8+5x^3-8x+5x^2+8$.

(10) $\frac{2}{11}y-\frac{1}{5}y+y$.

(11) $\frac{2}{5}a+\frac{3}{10}a-\frac{2}{3}a+a-\frac{7}{15}a$.

(12) $-\frac{2}{7}a^2b+\frac{3}{11}ab^2+a^2b-\frac{7}{11}ab^2$.

37. 代數式ノ製作。 或式ヲ一數ノ如ク取扱フコトヲ示スニハ,之ヲ括弧ニテ包ム。サレド曖昧ナラザル場合ニハ括弧ヲ取去ルヲ得。

例ヘバ三項式 $a-b+c$ ヲ m ニ加ヘ,又ハ m ヨリ引キ,又ハ m 倍シ,又ハ m ニテ除シ,又ハ其平方ヲ作ラバ,其結果次ノ如シ。

$$m+(a-b+c),$$

$$m-(a-b+c),$$

$$m(a-b+c),$$

$$\frac{a-b+c}{m},$$

$$(a-b+c)^2.$$

但除法ノ場合ニ括弧ヲ入レザルハ,分母ト分子トノ間ニアル横線ガ括線或ハ括弧ノ代リヲナスガ故ナリ。

【例一】 a ヲ b ヨリ引キ,殘ヲ c ヨリ引キ,其殘ヲ d ヨリ引キ,其殘ヲ e ニ加ヘ,其和ヲ f ヨリ引クコトヲ示ス代數式ハ次ノ如シ

$$f-[e+\{d-(c-\overline{b-a})\}].$$

【例二】 a ト b トノ差ニ q ヲ乘ジ,其積ヲ p ヨリ引ケバ,其結果ハ

$$p-q(a-b)$$

ナリ。之ニ $m+n$ ヲ乘ゼントスルトキハ,兩因數ヲ括弧ニ入レテ之ヲ

$$(m+n)[p-q(a-b)]$$

ト記スルヲ要ス。

注意　$a-b$ ノ q 倍ヲ $(a-b)q$ ト記サズシテ,$q(a-b)$ ト記スヲ常トス。一般ニ短キ式ハ,長キ式ノ前ニ置ク。

【例三】鶴 x 羽ト龜 y 頭トアリ。其足數合セテ幾許ナルカ。

解。鶴 x 羽ノ足數ハ 2 ノ x 倍即 $2x$ ニシテ,龜 y 頭ノ足數ハ 4 ノ y 倍即 $4y$ ナリ。故ニ其和ハ $2x+4y$ ナリ。

問題九

(1)　或數 x ノ三倍ト y ノ四倍トノ和ヨリ z ノ八倍ヲ引キタル差ヲ表ス式ヲ作レ。

(2)　二數ノ和ガ 50 ニシテ,一數ガ x ナルトキハ,他ノ數如何。

(3)　x 圓ハ幾錢ニ當ルカ。

(4)　y 錢ハ幾圓ニ當ルカ。

(5)　一本 m 錢ノ筆ヲ買ヒテ n 圓ヲ拂ヘリ。筆ノ數幾許ナルカ。

(6)　a 圓ト b 錢トヲ合計スレバ幾錢トナルカ。又幾圓トナルカ。

(7)　x ノ a 倍ト y ノ b 倍ト z ノ c 倍トノ和ハ $m-n$ ノ三倍ニ等シト云フ。之ヲ式ニテ書ケ。

(8)　x, y ノ和ノ 5 倍ヲ $a-b$ ニテ除シ,其商ヨリ a, b ノ積ヲ引ケ。

(9)　一斤 50 錢ノ茶 x 斤ト一斤 65 錢ノ茶 y 斤トヲ混合スルトキハ,一斤幾錢ノ茶ヲ得ベキカ。

(10)　三ツノ連續セル偶數ヲ示ス式ヲ作レ。

(11)　童子若干人ヲ方陣ニ列シタルニ,一列ノ人數ハ x ニシテ,尚 35 人殘レリト云フ。人數ヲ表ス式如何。

(12)　三位ノ整數アリ,百ノ位ノ數字ハ x,十ノ位ノ數字ハ y,一ノ位ノ數字ハ z ナリ。此數ヲ示ス式ヲ作レ。

(13)　或人 m 哩ノ旅行ヲナシシニ,往路ニハ每時三哩ヲ行キ,歸路ニハ每時四哩ヲ行ケリト云フ。往復ニ要セシ時間如何。

(14)　甲ガ 30 日ニ仕上グル仕事ヲ乙ハ 40 日ニテ仕上グト云フ。二人共同シテ x 日働カバ幾許ノ仕事ヲ成スベキカ。

(15)　m 圓ヲ有スル人,每冊三圓五十錢ノ書物 a

冊ヲ買ヘリ。殘金ニテ每冊四圓二十五錢ノ書籍幾冊ヲ買ヒ得ルカ。

(16) 或數 a ニ其 $\frac{1}{m}$ ヲ加ヘタルモノハ a ノ幾倍ニ等シキカ。

(17) 或數 x ヨリ其 $\frac{1}{n}$ ヲ引キ,次ニ其殘ノ $\frac{1}{n}$ ヲ引キ,次ニ又其殘ノ $\frac{1}{n}$ ヲ引ケバ,殘ハ如何。

(18) 或人自轉車旅行ヲナスニ,初日ノ行程ハ l 里ニシテ,其後ハ常ニ其前日ノ行程ノ $\frac{1}{m}$ ヅツヲ增加セリ。第 n 日目ノ行程ハ幾里ナルカ。

第二章

整式ノ加法

38. 單項式ノ加法。

(法則) 數多ノ單項式ヲ加フルニハ,之ヲ其儘連ネ記シ同類項アラバ之ヲ簡約スベシ。

(驗算) 任意ノ數値ヲ文字ニ代入シテ運算ノ正否ヲ驗スベシ。此驗算法ハ第二篇全體ニ適用スルコトヲ得。

【例一】 a ト $-b$ トノ和ヲ求メヨ。

解。所要ノ和 $=a+(-b)=a-b$. 答。

【例二】 $+8x,\ +3x,\ -10x$ ノ和ヲ求メヨ.

解。所要ノ和 $=(+8x)+(+3x)+(-10x)$

$$=8x+3x-10x$$

$$=(8+3-10)x=1x=x.$$ 答。

【例三】 $5a,\ -3b,\ -a,\ +7b$ ヲ加ヘヨ。

解。所要ノ和 $=5a-3b-a+7b$

$$=5a-a+7b-3b=4a+4b.$$ 答。

問題十

次ノ諸數ノ和ヲ求メヨ。

(1) $5m,\ 7m.$　(2) $5x,\ -7x.$

(3) $-7y,\ -3y,\ -2y.$　(4) $-3x,\ 8x.$

(5) $7z,\ -3z,\ +2z.$

(6) $+7x^2,\ +5x^2,\ -6x^2,\ -8x^2,\ +10x^2.$

(7) $6xy,\ -7xy.$　(8) $\frac{1}{2}x,\ \frac{1}{3}x.$

(9) $\frac{2}{3}y,\ -2y,\ +y.$　(10) $+a,\ +b,\ +c.$

(11) $+3a,\ -b.$　(12) $3a,\ -2a,\ +8b,\ -2b,\ -b.$

(13) $-2mn,\ +8ab,\ +20mn,\ -5ab.$

(14) $3x,\ +x^2,\ +5x^3.$

(15) $7a,\ -5b,\ +3a^2,\ -2b^2,\ +a^3,\ -6b^3.$

(16) $6x^3,\ -8,\ -x^3,\ 5x^2,\ -12,\ -x^2,\ x,\ 6x.$

(17) $6(x+y),\ 7(x+y),\ -12(x+y).$

39. 多項式ノ加法。

(法則) 多項式ヲ加フルニハ,各式ノ諸項ヲ其儘連ネ記シ,同類項アラバ之ヲ簡約スベシ。

【例一】 $a+(+b+c)=a+b+c.$ 答。

此例ニテ $a=+5,\ b=0,\ c=3$ トスレバ,

$$(+5)+(+3)=5+3$$

トナル。(第8節參照)。

【例二】 $a+(-b+c-d)=a-b+c-d.$ 答。

此例ニテ $c=0,\ d=0$ トスレバ,

$$a+(-b)=a-b$$

トナル。(第38節例一參照)。

【例三】 $(x+y)+(x-y)=x+y+x-y=2x.$ 答。

故ニ二數ノ和ト差トヲ加ヘタルモノハ第一數ノ二倍ナリ。

【例四】 $3a-5b+2c$ 及 $-2a+3b+c-5d$ ヲ加ヘヨ。

運算。 所要ノ和 $=3a-5b+2c-2a+3b+c-5d$

$$=3a-2a-5b+3b+2c+c-5d$$

$$=a-2b+3c-5d.$$ 答。

之ヲ同類項ヲ重ネテ次ノ如ク記セバ,便利ナリ。

$$\begin{array}{r} 3a-5b+2c \\ -2a+3b+c-5d \\ \hline a-2b+3c-5d \end{array}$$

【例五】 $2x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{2}{5}y^2,\ -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}xy+\frac{1}{10}y^2,\ -\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{4}{5}y^2$ ノ和ヲ求メヨ.

運算. 同類項ノ係數ヲ通分シテ加フレバ,次ノ如シ。

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
\frac{8}{4} & x^2-\frac{2}{6} & xy+\frac{4}{10} & y^2 \\
-\frac{2}{4} & +\frac{1}{6} & +\frac{1}{10} & \\
-\frac{3}{4} & -\frac{4}{6} & +\frac{8}{10} & \\
\hline
\frac{3}{4} & x^2-\frac{5}{6} & xy+\frac{13}{10} & y^2.
\end{array}
$$
答。

學ブ者ハ加法ノ結果ノ正否ヲ驗スベシ。

問題十一

次ノ式ノ和ヲ求メヨ。

(1) $7x,\ 8y-5x.$ (2) $17x-3y,\ 12x+3y.$

(3) $a+b-c,\ b+c-a,\ c+a-b.$

(4) $6x^2-8y^2+3z^2,\ 5x^2+5y^2-10z^2,\ x^2+3y^2+7z^2.$

(5) $a+2b+3c,\ 2a-b-2c,\ b-a-c,\ c-a-b.$

(6) $a-2b+3c-4d,\ -2a+3b-4c+5d,\ 3a-4b+5c-6d,\ -4a+5b-4c+7d.$

(7) $x^3-4x^2+5x-3,\ 2x^3-7x^2-14x+5,\ -x^3+9x^2+x+8.$

(8) $x^4-2x^3+3x^2-8,\ x^3+x^2+x-1,\ 4x^4+5x^3,\ 2x^2+3x-4,\ -3x^2-2x-5.$

(9) $7(x+y)+6(m+n),\ -3(x+y)-2(m+n),\ -(x+y)-8(m+n),\ 2(x+y)+5(m+n).$

(10) $7a-(x+y),\ 8a-(x+y),\ 3(x+y)-16a.$

(11) $\frac{1}{4}x^2+2xy,\ \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{5}xy+y^2,\ x^2+\frac{3}{10}xy+\frac{1}{8}y^2.$

(12) $3\frac{x}{a}+\frac{y}{b},\ 2\frac{x}{a}+3\frac{y}{b},\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b},\ \frac{y}{b}-\frac{6}{7},\ \frac{x}{a}+2\frac{y}{b}-\frac{1}{7}.$

40. 文字係數ヲ有スル式ノ加法.

加フベキ諸數ガ同一ノ文字ヲ共有シ,異ナル文字係數ヲ有スルトキハ,此等ノ係數ヲ加ヘテ其和ニ共通ノ文字ヲ附記ス。

例ヘバ多項式 $6x+3x-2x$ ハ,單項式

$$(6+3-2)x \quad 即 \quad 7x$$

ニ簡約スルヲ得ルト同樣ニ,多項式

$$ax+bx-cx$$

ハ單項式 $(a+b-c)x$

ニ簡約スルヲ得ベシ。

又 $mx-ny+pz+r$

及 $-ax+by-cz+d$

ノ和ハ

$$(m-a)x+(-n+b)y+(p+c)z+r+d$$

ナル形ニテ示スヲ得ベシ。

問題十二

次ノ各題ニテ x, y, z ノ係數ヲ集メヨ。

(1) $ax-bx$.

(2) $3mx+5nx+7px-qx$.

(3) $ax+bx+ay-by$.

(4) $cdx+3by+mnx-4by$.

(5) $8ax+7bx-by+6x-5y+x-y$.

(6) $ax+by+cz-mx-ny-pz$.

(7) $3ax-ay-3bx-by+cz-dz$.

(8) $\frac{1}{2}ax+\frac{2}{3}by-\frac{1}{6}mx+\frac{3}{5}ny$.

第三章

整式ノ減法

41. 單項式ノ減法。

(法則) 減式ノ符號ヲ變ジテ之ヲ被減式ノ後ニ附記シ,同類項アラバ之ヲ簡約スベシ。

(驗算) 減式ニ差ヲ加ヘテ被減式トナルヤ否ヤヲ見ルベシ。

【例一】 $7ax-(-3ax)=7ax+3ax$

$=10ax$. 答。

【例二】 $-17y-(+8y)=-17y-8y$

$=-25y$. 答。

【例三】 $-x-(-y)=-x+y$. 答。

問題十三

第一式ヨリ第二式ヲ引ケ (1)-(8).

(1) $5x, 3x$. (2) $10x, -27x$.

(3) $-8m, -3m$. (4) $-3a, -8a$.

(5) $17ax^2,\ -24ax^2.$ (6) $6x,\ -4y.$

(7) $0,\ -7x^2y^2.$ (8) $-7ay,\ -3ay.$

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ (9)-(14).

(9) $9x^2+(-5x^2)-(+8x^2).$

(10) $5x^2y-(-18x^2y)+(-10x^2y).$

(11) $-8x+(-7y)+6x-(-2y).$

(12) $5x^3-(-2x^2)+8x-7x^2-5x.$

(13) $3x+(-7)-(+2x)-(-10)-6x+3.$

(14) $3a-(+2b)-(-4c).$

42. 多項式ノ減法。

(法則) 減式ノ各項ノ符號ヲ變ジテ之ヲ被減式ノ後ニ附記シ,同類項アラバ之ヲ簡約スベシ。

【例一】 $a+b-(-c+d)=a+b+c-d.$ 答。

【例二】 $x+y$ ヨリ $x-y$ ヲ引ケ。

解。 $(x+y)-(x-y)=x+y-x+y=2y.$ 答。

故ニ二數ノ和ヨリ差ヲ引キタルモノハ,第二數ノ二倍ナリ (第39節例三參照)。

【例三】 $5a-7b+4c-3d$ ヨリ $-a+3b-5d-e$ ヲ引ケ。

解。減式ノ符號ヲ變ジテ加フレバ次ノ如シ。

$$\begin{array}{r} 5a-\ 7b+4c-3d \\ +\ a-\ 3b+5d+e \\ \hline 6a-10b+4c+2d+e \end{array}\quad 答。$$

【例四】 $a^3x^2+2a^2x^3-4ax^4$ ヨリ $a^4x+4a^3x^2-3a^2x^3-4ax^4$ ヲ引ケ。

解。實際減式ノ符號ヲ變ヘズシテ,變ヘタリト考ヘナガラ運算スレバ,次ノ如シ。

$$\begin{array}{r} a^3x^2+2a^2x^3-4ax^4 \\ a^4x+4a^3x^2-3a^2x^3-4ax^4 \\ \hline -a^4x-3a^3x^2+5a^2x^3 \end{array}\quad 答。$$

問題十四

第一式ヨリ第二式ヲ引ケ (1)-(7).

(1) $6a-2b-c,\ \ 2a-2b-3c.$

(2) $3x-2y+3z,\ \ 2x-7y-z.$

(3) $7x^2-8x-1,\ \ 5x^2-6x+3.$

(4) $a^2+2ab+b^2,\ \ -a^2-2ab+b^2.$

(5) $4x^4-3x^3-2x^2-7x+9,\ \ x^4-2x^3-2x^2+7x-9.$

(6) $a+b-c-d,\ \ -a-b-c-d.$

(7) $2x^2-5ax+3a^2,\quad x^2-ax.$

(8) $-a+b-c+d$ ＝何ヲ加フレバ 0 トナルカ。

(9) $a+b+c$ ヨリ何ヲ引ケバ $\frac{4}{5}a-\frac{2}{3}b-\frac{1}{8}c$ ヲ得ルカ。

(10) 二式ノ和ハ $\frac{3}{7}x-\frac{2}{5}y+\frac{2}{3}z$ ＝シテ，一式ハ $x-\frac{3}{5}y+\frac{8}{11}z$ ナリ．他ノ式ハ如何。

(11) $A=15(x-y)+7(x-z)+9(y-z),$

$$B=9(x-y)+7(x-z)+15(y-z)$$

ナルトキ，A−B ヲ求メヨ。

43. 括弧ヲ去ル法。 既ニ知レルガ如ク，括弧ノ前ニ加號アルトキ括弧ヲ去ルニハ，其内ニアル式ヲ其儘前ニアル式ニ附記ス。

$$a+(+b+c)=a+b+c,$$

$$a+(-b-c)=a-b-c.$$

又括弧ノ前ニ減號アルトキ括弧ヲ去ルニハ，其内ニアル式ノ各項ノ符號ヲ變ヘテ前ノ式ニ附記ス。

$$a-(b+c)=a-b-c,$$

$$a-(-b+c)=a+b-c.$$

代數式中ニ數對ノ括弧アルコトアリ。此場合ニモ順次ニ上ノ方法ヲ適用シテ括弧ヲ去ルヲ得。

【例一】 $a-\{b-(c-d)\}=a-b+(c-d)$

$$=a-b+c-d.$$

又内部ヨリ取去レバ，

$$a-\{b-(c-d)\}=a-\{b-c+d\}$$

$$=a-b+c-d.$$

【例二】 $a-[b-\{c+(d-\overline{e-f})\}]$

$$=a-b+\{c+(d-\overline{e-f})\}$$

$$=a-b+c+(d-\overline{e-f})$$

$$=a-b+c+d-\overline{e-f}.$$

$$=a-b+c+d-e+f.$$

學ブ者ハ習熟スルニ従ヒテ第二行及第三行ヲ省略スルヲ得ベシ。(此例ノ括弧ヲ内部ニアルモノヨリ取去ラバ如何)。

問題十五

次ノ式ノ括弧ヲ去リテ之ヲ簡單ニセヨ。

(1) $x-y+(x+y).$ (2) $(x+y)+(-x+y).$

(3) $(a+b)+(3b+5c)-(a+6c).$

(4) $(2x-y)-(2y-z)-(2z-x)$.

(5) $4x-3y+2z-(-7x+5y-3z)-(x-y)$.

(6) $1-(1-a)+(1-a+a^2)-(1-a+a^2-a^3)$.

(7) $a-\{2b-(3c+2b)-a\}$.

(8) $2a-\{b-(a-2b)\}$.

(9) $16-x-[7x-\{8x-(x-7x)\}]$.

(10) $a-[2a+(3a-4a)]-5a-\{6a-[(7a+8a)-9a]\}$.

(11) $a-[5b-\{a-(3c-3b)+2c-(a-2\overline{b-c})\}]$.

(12) $ax-by-\{ax+by-[ax-by-(ax+by)]\}$.

44. 括弧ヲ入ルル法。 前節ノ方法ヲ轉倒シテ多項式ノ一部分ヲ括弧ニテ包ムヲ得ベシ。括弧ノ前ニ減號ヲ置クトキハ,其中ニ容ルベキ諸項ノ符號ヲ變フルコトヲ忘ルベカラズ。

【例】 $7-3+2=7+(-3+2)$.

$7-3+2=7-(3-2)$.

$a-b+c-d=a-(b-c+d)$.

$a-2x-3b+c-d=a-\{2x+3b-c+d\}$

$=a-\{2x+3b-(c-d)\}$.

問題十六

次ノ式ヲ$x-(\ldots\ldots)$ノ形ニ化セヨ (1)-(6).

(1) $x-a-b$. (2) $x-3b+2c$.

(3) $a+x+2y$. (4) $x+3-(a+b)$.

(5) $2x-a$. (6) $3x-2m+n$.

次ノ式ノ第三項ヨリ末項マデヲ括弧內ニ入レ,括弧ノ前ニ＋ヲ置キタル式ヲ作リ,次ニ－ヲ置キタル式ヲ作レ。

(7) $2a-3b-4c+d$. (8) $3a^4-2a^3-4a^2+a-1$.

第四章

整式ノ乘法

45. 單項式ノ乘法。

交換法則。 因數ハ之ヲ如何ニ交換スルモ其積ハ變ラズ。

【例】 $(-3)\times 5=5\times(-3)=-15.$

$$a\times b=b\times a.$$

$$a\times b\times c=a\times c\times b=b\times c\times a=\ldots\ldots$$

46. 結合法則。

因數ハ之ヲ如何ニ結合スルモ其積ハ變ラズ。

【例】 $(3\times 5)\times 2=3\times(5\times 2).$

$$(abc)d=a(bc)d=(ab)(cd)=\ldots\ldots$$

47. 乘法ノ指數法則.

【例】
$$a^3\times a^2=aaa\times aa$$
$$=aaaaa=a^5=a^{3+2}.$$

同樣ニ $a^3\times a^2\times a^5=a^{3+2+5}=a^{10}.$

同文字ノ乘冪ノ積ハ,指數ノ和ヲ指數トセル其文字ノ乘冪ナリ。

卽 $m,\ n$ ガ正ノ整數ナレバ

$$a^m\times a^n=a^{m+n}.$$

又
$$(a^m)^2=a^m\times a^m$$
$$=a^{m+m}=a^{2m}.$$

一般ニ $(a^m)^n=a^{mn}.$

48. 負數ノ乘羃。

負數ノ偶數乘羃ハ正ニシテ,奇數乘羃ハ負ナリ。

例ヘバ $(-3)^2=+9,\ \ (-3)^3=-27.$

一般ニ $2n$ ハ偶數ニシテ, $2n+1$ ハ奇數ナリ。依テ

$$(-a)^{2n}=+a^{2n},\quad (-a)^{2n+1}=-a^{2n+1}.$$

特ニ $(-1)^{2n}=+1,\quad (-1)^{2n+1}=-1.$

注意。 負數ノ平方ハ常ニ正ナリ。

【例】 $x^2=0$ ナルトキハ $x=0$ ナリ。之ヲ證セヨ。

證明。 $x>0$ 或ハ $x<0$ トスルモ, $x^2>0$ ヲ得ベキガ故ニ, x ハ 0 ヨリ大ナラズ,又小ナラズ。故ニ 0 ナリ。

注意。 $x>0$ ハ x ガ正ニシテ, $x<0$ ハ x ガ負ナリト云フニ同ジ。

49. 單項式ノ乘法。

(法則) 係數ノ積ニ文字ノ部分ノ積ヲ附記スベシ。

【例一】 $5a\times 3bc=5\times 3\times a\times bc=15abc.$ 答。

【例二】 $-\frac{2}{3}a^2b^3\times\frac{3}{4}ab^2c^4$

$$=-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}a^{2+1}b^{3+2}c^4=-\frac{1}{2}a^3b^5c^4.\quad\text{答。}$$

問題十七

次ノ式ノ積ヲ求メヨ (1)-(11).

(1) $7x\times 5y.$ (2) $-\frac{3}{4}b\times 8bc.$

(3) $3a^2\times(-4a^2).$ (4) $(-3a)\times 2a^3.$

(5) $6a^3\times(-2a)\times 5a^2.$ (6) $3ax\times(-4by).$

(7) $\frac{42}{5}m^2x\times\frac{20}{3}mx^2\times\frac{6}{7}mx^3.$

(8) $\frac{2}{5}x^2y^3z\times\frac{11}{12}xz^5\times\frac{9}{154}y^2z^3.$

(9) $(-ab)\times(-bc)\times(-ca)+3a^2b^2c^2.$

(10) $(-2a^3b^2c^3)^2.$ (11) $(-5x^2)^3.$

(12) $x^2+y^2+z^2=0$ ナルトキハ x, y, z ハ皆零ナリ。之ヲ證セヨ。

50. 多項式ト單項式トノ乘法。

第40節ニ說ケルガ如ク,

$$ax+bx-cx=(a+b-c)x$$

ナリ。今左右兩邊ヲ交換スレバ,

$$(a+b-c)x=ax+bx-cx.$$

依テ次ノ法則ヲ得。

配分法則。 多項式ニ單項式ヲ乘ズルニハ,多項式ノ各項ト此單項式トノ積ノ代數和ヲ作ルベシ。

【例】 $\left(-\frac{1}{3}a^3+\frac{2}{5}a^2b-3ab^2+b^3\right)\times(-ab)$

$$=\frac{1}{3}a^4b-\frac{2}{5}a^3b^2+3a^2b^3-ab^4.\quad\text{答。}$$

單項式ニ多項式ヲ乘ズルニハ,其多項式ニ單項式ヲ乘ズベシ。

問題十八

次ノ式ノ積ヲ求メヨ。

(1) $(5a+3b)\times 8x.$ (2) $(a-b)\times 7.$

(3) $5a\times(3b+4c-2d).$ (4) $-7\times(x^2-3x+2).$

(5) $(4a^2-3b^2)\times 3ab^3.$ (6) $(3x^2-xy+2y^2)\times 3x.$

(7) $\left(\frac{x}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{x}{5}\right)\times 30.$

(8) $\left(\frac{3}{4}m+\frac{2}{5}n-\frac{7}{10}p\right)\times(-20).$

次ノ式ノ括弧ヲ去リテ簡單ニセヨ。

(9) $6x+3(-x+y-5).$

(10) $7(x^2-3x+2)-2(x^2-5).$

(11) $2x-5\{3x-7(4x-9)\}.$

(12) $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b).$

(13) $2\{3ab-4a(c-2b)\}+5ac.$

(14) $15\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)-12\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right).$

(15) $\frac{3}{7}(21x-35y)+\frac{4}{5}(10x+15y).$

(16) $\frac{3}{4}(x+y-z)-\frac{2}{5}\left(-x-3y+\frac{3}{2}z\right).$

51. 多項式ト多項式トノ乘法。

今二ツノ多項式 $a+b+c$ 及 $m+n$ ノ積ヲ求メンニ, $m+n$ ヲ P ニテ表セバ(第34節參照),

$$
\begin{aligned}
\text{所要ノ積} &= (a+b+c)\times \mathrm{P} \\
&= a\mathrm{P}+b\mathrm{P}+c\mathrm{P} \\
&= a(m+n)+b(m+n)+c(m+n) \\
&= am+an+bm+bn+cm+cn.
\end{aligned}
$$

故ニ

$$
\begin{aligned}
&(a+b+c)(m+n) \\
&= am+bm+cm+an+bn+cn.
\end{aligned}
$$

依テ次ノ法則ヲ立ツ。

(法則) 二ツノ多項式ノ積ヲ作ルニハ,第一式ノ各項ニ第二式ノ各項ヲ乘ジ,其積ノ和ヲ作ルベシ。其和ニ同類項アラバ之ヲ簡約スベシ。

兩多項式ノ積ノ項數ハ,兩式ノ項數ノ積ヨリ大ナラズ。

例ヘバ前節ノ例ニテ三項式ト二項式トノ積ノ項數ハ $3\times 2=6$ ナリ。

(驗算) 乘法ヲ驗スニハ,文字ニ任意ノ數ヲ代入シ,數値ノ積ヲ求ムベシ。

【例一】 $a+b$ ト $c-d$ トノ積ヲ求メヨ。

解。 $(a+b)\times[c+(-d)]=ac+bc+a(-d)+b(-d)$

$\therefore \quad (a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd.$

【例二】 $a-b$ ト $c-d$ トノ積ヲ求メヨ。

解。上ノ例ト同法ニテ

$(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd.$

注意。 上ノ二例ニテ $a=0,\ c=0,\ b=5,\ d=3$ トスレバ,

$$(+5)\times(-3)=-15,$$

$$(-5)\times(-3)=+15$$

ヲ得(第15節參照)。

問題十九

次ノ二式ノ積ヲ求メヨ。

(1) $(3a+4b)\times(2a+5b)$. (2) $(x+y+z)\times(a-b)$.

(3) $(a+5b)\times(8x-3y)$.

(4) $(4m-3n+p)\times(5m-n+2p)$.

(5) $(a+b)(2a-bx-cy)$. (6) $(x-y-z)(a-b+c)$.

$(2a-bx-cy)(a+b)$

52. 多項式ノ整頓。 或文字ニ關シテ多項式ヲ整頓ストハ,此文字ノ同乘羃ノ項ヲ一項ニ集メ,且此文字ノ指數ガ次第ニ增加シ或ハ減小スルガ如ク諸項ヲ列記スルヲ云フ。

又特別ノ場合ノ外ハ,各項中ノ文字ヲ $a,\ b,\ c$ ノ順ニ記スベシ。

例ヘバ $5x^2-3+x^3$ ヲ x ノ降羃ノ順ニ整頓スル

トキハ x^3+5x^2-3 トナリ,又 x ノ昇羃ノ順ニ整頓スルトキハ $-3+5x^2+x^3$ トナル。

x ヲ含メル多項式ノ諸項ニ於ケル x ノ指數ガ次第ニ一ヅツ增シ或ハ減ジ,且 x ヲ含マザル項アルトキハ,之ヲ完備多項式ト云フ。

例ヘバ $x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$ ノ如シ。

故ニ x ニ就キテ整頓セル n 次ノ完備多項式ノ項數ハ $n+1$ ナリ。

問題二十

次ノ各式ヲ x ノ降羃ノ順ニ整頓セヨ。

(1) $5+x^2-3x$. (2) $ax^3-cx+bx^2-d$.

(3) $3x^5-6x+8x^4+7-5x+x^2-2-x^3+x^2$.

(4) $-4y^2x^2+2xy^3+x^4-5y^4-2yx^3$.

(5) $a+bx-cx^2+x^3+mx-dx^2+nx^3$.

53. 整頓セル多項式ノ乘法。

相乘スベキ兩式ガ共通ノ文字ヲ有スルトキハ,之ヲ此文字ノ降羃或ハ昇羃ノ順ニ整頓シタル後ニ乘ズルヲ便ナリトス。

【例一】 $2x^2+3-5x$ ニ $-7+3x^2-4x$ ヲ乘ゼヨ。

解。二式ヲ x ノ降冪ノ順ニ整頓シテ之ヲ乘ズレバ,次ノ如シ。

$$\begin{array}{rl}
 & 2x^2-\ 5x+3 \\
 & \underline{3x^2-\ 4x-7\qquad\qquad\qquad} \\
 & 6x^4-15x^3+\ 9x^2 \\
 & \qquad -\ 8x^3+20x^2-12x \\
 & \underline{\qquad\qquad\qquad -14x^2+35x-21} \\
\text{積} & 6x^4-23x^3+15x^2+23x-21 \quad \text{答。}
\end{array}$$

【例二】 $m+nx+px^2$ ニ $a-bx$ ヲ乘ゼヨ。

$$\begin{array}{rl}
 & m+nx\ -px^2 \\
 & \underline{\ a-bx\qquad\qquad\qquad} \\
 & am+anx-apx^2 \\
 & \underline{\qquad -bmx-bnx^2\ +bpx^3} \\
\text{積} & am+(an\ -bm)x-(ap+bn)x^2+bpx^3 \quad \text{答。}
\end{array}$$

【例三】 $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc$ ニ $a+b+c$ ヲ乘ゼヨ。

解。a ノ降冪ノ順ニ整頓シテ乘ズレバ次ノ如シ。

$$\begin{array}{l}
a^2-ab-ac+b^2-bc+c^2 \\
\underline{a+b\ +c\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
a^3-a^2b-a^2c+ab^2-abc+ac^2 \\
\quad +a^2b\qquad -ab^2-abc\qquad +b^3-b^2c+bc^2 \\
\underline{\qquad\quad +a^2c\qquad -abc-ac^2\qquad +b^2c-bc^2+c^3} \\
a^3\qquad\qquad\qquad\quad -3abc\quad +b^3\qquad\qquad\quad +c^3
\end{array}$$

答 $a^3+b^3+c^3-3abc.$

54. 整頓セル兩多項式ノ積ノ最高次(或ハ最低次)ノ項ハ,兩式ノ最高次(或ハ最低次)ノ項ノ積ニ等シ。

例ヘバ前節ノ例1ニテ,積ノ最高次ノ項 $6x^4$ ハ兩因數ノ最高次ノ項 $2x^2$ 及 $3x^2$ ノ積ニ等シク,又積ノ最低次ノ項 -21 ハ $+3$ ト -7 トノ積ナリ。

故ニ整頓セル兩多項式ノ積ハ少クトモ二項式ニシテ,其次數ハ兩式ノ次數ノ和ナリ。

例ヘバ四次式 $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$ 及一次式 $x-a$ ノ積ハ五次ノ二項式 x^5-a^5 ナリ。

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
\multicolumn{5}{l}{x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4} \\
\multicolumn{5}{l}{x-a} \\
\hline
x^5+a & x^4+a^2 & x^3+a^3 & x^2+a^4 & x \\
\quad -a & \quad -a^2 & \quad -a^3 & \quad -a^4 & \quad -a^5 \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{x^5} & \quad -a^5
\end{array}$$

△　問題二十一

次ノ積ヲ求メヨ (1)-(16).

(1) $(2x+3)(5x+7)$.　　(2) $(a-b)(2a+3b)$.

(3) $(x^2-4)(x^2+5)$.　　(4) $(a^2-2ab+4b^2)(a+2b)$.

(5) $(x^2+x+1)(x-1)$.　　(6) $(12x-3y)(5x-11y)$.

(7) $(2m+n)(m+2n)$. (8) $(3x+5y)(3x-5y)$.

(9) $(x^3-x^2+x-1)(x+1)$.

(10) $(-4x^2+6x-5)(-x^2-7x+1)$.

(11) $(x^3-3x^2+2x+5)(x^2-3x+4)$.

(12) $(a^4-a^2b^2+b^4)(a^4+a^2b^2+b^4)$.

(13) $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$.

(14) $(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)(a-b)$.

(15) $(x^2-xy+x+y^2+y+1)(x+y-1)$.

(16) $(ax+by)(cx+dy)$.

兩式ヲ整頓シテ次ノ乘積ヲ求メヨ (17)—(21).

(17) $(5x+4x^2-24+x^3)(x^2+11-4x)$.

(18) $(7x^3+11x-5x^2-25)(6x^2+8+2x.)$

(19) $(5a^4+2a^2b^2+ab^3-3ab)(5a^3b-2ab^3+2a^2b^2+b^4)$.

(20) $(1+bx^2+ax+cx^3)(x^2-x+5)$.

(21) $\left(\frac{1}{3}a^2-b^2+\frac{1}{5}ab\right)\left(\frac{3}{4}a^2+3b^2+\frac{2}{3}ab\right)$.

次ノ積ニ於ケルx^2ノ係數ヲ求メヨ。(22)－(24).

(22) $(5x^3-7x^2+6x-3)(2x^3+11x^2+x+4)$.

(23) $(ax^2+bx+c)(ax^2-bx+c)$.

(24) $\{x^4+(a-b)x-ab\}\{x^2+(a-b)x+ab\}$.

第五章

重要ナル乘法ノ公式

55. 二數ノ和ノ平方。 實算ニ依リテ

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

二數ノ和ノ平方ハ各數ノ平方ノ和ニ兩數ノ積ノ二倍ヲ加ヘタルモノニ等シ。

56. 二數ノ差ノ平方。 實算ニ依リテ

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

二數ノ差ノ平方ハ各數ノ平方ノ和ヨリ兩數ノ積ノ二倍ヲ引キタルモノニ等シ。

57. $(a+b)^2$ノ式ニテ$+b$ヲ$-b$ニ換フルトキハ$(a-b)^2$ノ式ヲ得ベシ依テ前者ハ後者ヲ包含ス。又aトbトガ如何ナル代數式ヲ表スモ(第34節參照)前二節ノ公式ハ眞ナリ。故ニ

A及Bガ如何ナル正數又ハ負數又ハ如何ナル代數式ヲ表スモ

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2. \qquad (1)$$

二項式ノ平方ハ兩項ノ平方ノ和ニ其積ノ二倍

ヲ加ヘタルモノニ等シ。

【例一】 $(7x-5y)^2=(7x)^2+2(7x)(-5y)+(-5y)^2$

$$=49x^2-70xy+25y^2.$$

又ハ第56節ニヨリテ

$$(7x-5y)^2=(7x)^2-2(7x)(5y)+(5y)^2$$

$$=49x^2-70xy+25y^2.$$

【例二】 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab.$

解。公式(1)ニテ $A=a+b,\ B=c$ トスレバ,

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2.$$

【例三】 $(-a-b)^2=(-a)^2+2(-a)(-b)+(-b)^2$

$$=a^2+2ab+b^2.$$

又ハ $(-a-b)^2=\{-(a+b)\}^2=(a+b)^2$

$$=a^2+2ab+b^2.$$

故ニ代數式 $a^2+2ab+b^2$ ハ $a+b$ ノ平方ナルト同時ニ $-a-b$ ノ平方ナリ。

【例四】 $13^2=(10+3)^2=10^2+2\times10\times3+3^2$

$$=100+60+9=169.$$

【例五】 $997^2=(1000-3)^2$

$$=1000000-6000+9$$

$$=994009.$$

58. 二數ノ和ト差トノ積。 乘法ヲ實行スレバ

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2. \qquad (2)$$

二數ノ和ト差トノ積ハ各數ノ平方ノ差ニ等シ。

【例一】 $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$

$$=(\overline{a+b}+\overline{c+d})(\overline{a+b}-\overline{c+d})$$

$$=(a+b)^2-(c+d)^2$$

$$=(a^2+2ab+b^2)-(c^2+2cd+d^2)$$

$$=a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2.$$

【例二】 $(-a+b)(-a-b)=(-a)^2-b^2=a^2-b^2.$

又ハ $(-a+b)(-a-b)=\{-(a-b)\}\{-(a+b)\}$

$$=(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

問題二十二

公式(1), (2)ヲ應用シテ次ノ平方及乘積ヲ求メヨ。

(1) $(2x+3y)^2$. (2) $(7m+5n)^2$. (3) $(x+1)^2$.

(4) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$. (5) $(ax+by)^2$. (6) $(7p-10q)^2$.

(7) $\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{3}n\right)^2$. (8) $(x^2+y^2)^2$.

(9) $\left(x+\frac{1}{2}a\right)^2$. (10) $(1-x^2y^2)^2$.

(11) $(x^2+x+1)^2$. (12) $(3a^2+a+5)^2$.

(13) $\left(\frac{3}{5}x+\frac{2}{7}y\right)\left(\frac{3}{5}x-\frac{2}{7}y\right)$.

(14) $(5x^3+3)(5x^3-3)$.

(15) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$. (16) $-(a+b)(a-b)$.

(17) $(x-y)(y-x)$. (18) $(x+y)(-x-y)$.

(19) $(am-bn)(bn-am)$. (20) $(a+b+c)(a+b-c)$.

(21) $(a-b-c)^2$. (22) $(x-y+z)^2$.

(23) $(x^2-5x-7)^2$.

(24) $(x^2+2x+3)(x^2+2x-3)$.

(25) $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

(26) 309×291. (27) 9993^2.

(28) $(a^3x+b^3y)(a^3x-b^3y)$.

(29) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$.

(30) $(5a+3b)^2(5a-3b)^2$.

59. 二ツノ二項式ノ積.

乘法ヲ實行スレバ

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab. \qquad (3)$$

【例】 $a=3, b=5$ トスレバ

$$(x+3)(x+5)=x^2+(3+5)x+3\times 5$$
$$=x^2+8x+15.$$

又 $a=-3, b=5$ トスレバ

$$(x-3)(x+5)=x^2+(-3+5)x+(-3)\times 5$$
$$=x^2+2x-15.$$

又 $a=+3, b=-5$ トスレバ

$$(x+3)(x-5)=x^2-2x-15.$$

又 $a=-3, b=-5$ トスレバ

$$(x-3)(x-5)=x^2-8x+15.$$

即積ニ於ケル x ノ係數ハ因數ノ絶對項ノ代數和ニシテ,積ノ絶對項ハ因數ノ絶對項ノ積ナリ。

公式(3)ノ兩邊ニ $x+c$ ヲ乘ズレバ次ノ積ヲ得ベシ。

$$(x+a)(x+b)(x+c)$$
$$=x^3+(a+b+c)x^2+(bc+ca+ab)x+abc.$$

【例一】 $(x+1)(x+2)(x+3)=x^3+6x^2+11x+6.$

【例二】 $(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3.$

【例三】 $(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3.$

60. 二數ノ立方ノ和。 乘法ヲ實算シテ

$$\left.\begin{aligned}(A+B)(A^2-AB+B^2)&=A^3+B^3\\(A-B)(A^2+AB+B^2)&=A^3-B^3\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

【例】 $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1.$

$(A+b)^2=a^2+2ab+$ ...
$A-b$ a^2-

問題二十三

公式ヲ利用シテ次ノ積ヲ諳算ニテ求メヨ。

(1) $(x+1)(x+5)$. (2) $(x+5)(x+6)$.

(3) $(x-5)(x-6)$. (4) $(x+3)(x-2)$.

(5) $(x-3)(x+2)$. (6) $(x+2m)(x+3m)$.

(7) $(x+y)(x+2y)$. (8) $(x-13)(x+12)$.

(9) $(x-5a)(x+3a)$. (10) $(ax+3)(ax+5)$.

(11) $(x-1)(x-2)(x-3)$. (12) $(2x+y)^3$.

(13) $(x-1)(x-5)(x+6)$. (14) $(m+n)(m^2-mn+n^2)$.

(15) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$.

(16) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

第六章
整式ノ除法

61. 除法ノ指數法則。

$a^3\times a^2=a^{3+2}=a^5$ ナルガ故ニ,逆ニ

$$a^5\div a^3=a^{5-3}=a^2.$$

故ニ或文字ノ乘冪ヲ之ヨリ低キ同文字ノ乘冪ニテ除シタル商ハ,指數ノ差ヲ指數トセル其文字ノ乘冪ナリ。

故ニ $m>n$ ナルトキハ

$$a^m\div a^n=a^{m-n}.$$

又 $m=n$ ナルトキハ

$$a^m\div a^n=1.$$

62. 單項式ヲ單項式ニテ除スル法。

(法則) 實ノ數係數ヲ法ノ數係數ニテ除シ,之ヲ商ノ數係數トス。實ノ中ヨリ法ニ等シキ因數ノ積ヲ取去ルベシ。

(驗算) 除法ヲ驗スルニハ法ト商トノ積ガ實ニ等シクナルヤ否ヤヲ見ルベシ。

【例】 $-15a^3b^4cx$ ヲ $9a^2bc$ ニテ除セヨ。

運算。 $\dfrac{-15}{9}a^{3-2}b^{4-1}x=-\dfrac{5}{3}ab^3x.$ 答。

注意。 實ガ法ニテ整除セラレザル場合ハ,之ヲ分數トシテ取扱フ (分數ノ條ヲ見ヨ)。

問題二十四

次ノ除法ヲ行ヒ且之ヲ驗算セヨ。

(1) $28xy\div 2y.$ (2) $21a^2b^3c\div 7abc.$

(3) $24x^3\div(-3x^3).$ (4) $(-3amx^5)\div 5mx^3.$

(5) $\dfrac{35abcd}{5bd}.$ (6) $\dfrac{-51abdy^2}{-3bdy}.$ (7) $\dfrac{12a^4}{-3a}.$

(8) $\dfrac{4a^2x^4}{2ax^3}.$ (9) $\dfrac{21x^2y^4z^6\times(-2x^3y)}{3xy^2z^3}.$

(10) $104ab^3x^9\div(91a^5b^6x^7\div 7a^4b^4x).$

63. 多項式ヲ單項式ニテ除スル法。

(法則) 多項式ヲ單項式ニテ除スルニハ,多項式ノ各項ヲ此單項式ニテ除スベシ。

例ヘバ $\dfrac{am+bm+cm}{m}=\dfrac{am}{m}+\dfrac{bm}{m}+\dfrac{cm}{m}$

$=a+b+c.$ 答。

其故ハ $(a+b+c)\times m=am+bm+cm.$

【例】 $15x^4-3x^3+6x^2$ ヲ $3x^2$ ニテ除セヨ.

運算。

$$3x^2\ \underline{)\,15x^4-3x^3+6x^2}$$
$$5x^2-\ x+2$$

答。

問題二十五

次ノ除法ヲ行ヒ且之ヲ驗算セヨ。

(1) $(8x+12y)\div 4.$ (2) $(a^2+5a)\div a.$

(3) $(15am-10bm-20m)\div 5m.$

(4) $(4x^4+8x^3-2x^2+6x)\div 2x.$

(5) $(x+3y+5z-10)\div 5.$

(6) $(-3x^3-6x^5+9x^7-12x^9)\div(-3x^2).$

(7) $(a^2bc+ab^2c+abc^2)\div abc.$

(8) $(x^3-6x^2+x)\div(-x).$

(9) $\dfrac{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)+abc}{abc}.$

(10) $\dfrac{15(x+y)^3(x-y)^2-10(x+y)^2(x-y)^3}{5(x+y)^2(x-y)^2}.$

64. 多項式ヲ多項式ニテ除スル法。

二ツノ多項式ノ除法ハ算術ニ於ケル長除法ニ類似セルモノナリ。

例ヘバ $6x^4+11x^3-4x^2-14x-5$ ヲ $2x^2+3x+1$ ニテ除スルニハ,

$$\begin{array}{rr} 2x^2+3x+1\,) & 6x^4+11x^3-4x^2-14x-5\,(\,3x^2+x-5 \\ & 6x^4+9x^3+3x^2\qquad\qquad\qquad \\ \cline{2-2} & +2x^3-7x^2-14x-5\qquad\quad \\ & +2x^3+3x^2+x\qquad\qquad\quad \\ \cline{2-2} & -10x^2-15x-5\qquad\quad \\ & -10x^2-15x-5\qquad\quad \\ \cline{2-2} & 0\qquad\qquad\quad \end{array}$$

實ノ初項 $6x^4$ ヲ法ノ初項 $2x^2$ ニテ除シ,其商 $3x^2$ ヲ商ノ初項トス。$3x^2$ ト法トノ積ヲ實ヨリ引キ,第一殘餘ノ初項 $+2x^3$ ヲ法ノ初項 $2x^2$ ニテ除シ,其商 $+x$ ヲ商ノ第二項トス。此 x ト法トノ積ヲ第一殘餘ヨリ引キ,第二殘餘ノ初項 $-10x^2$ ヲ法ノ初項 $2x^2$ ニテ除シ, -5 ヲ得,之ヲ商ノ第三項トス。-5 ト法トノ積ヲ第二殘餘ヨリ引ケバ 0 トナル。故ニ全商ハ $3x^2+x-5$ ナリ。

其故ハ A 及 B トニテ實ト法トヲ表セバ,實ヨリ引キタル各部分ハ $3x^2\mathrm{B}$, $x\mathrm{B}$, $-5\mathrm{B}$ ナリ。故ニ

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=3x^2\mathrm{B}+x\mathrm{B}-5\mathrm{B}\\&=(3x^2+x-5)\mathrm{B}.\end{aligned}$$

依テ $$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=3x^2+x-5.$$

上ノ除法ノ形式ハ左右ニ擴ガルガ故ニ次ノ形ヲ用フルヲ便トス。

$$\begin{array}{r|l} 6x^4+11x^3-4x^2-14x-5 & 2x^2+3x+1 \\ \cline{2-2} 6x^4+9x^3+3x^2\qquad\qquad\quad & 3x^2+x-5 \\ \cline{1-1} +2x^3-7x^2-14x-5 & \\ +2x^3+3x^2+x\qquad\quad & \\ \cline{1-1} -10x^2-15x-5 & \\ -10x^2-15x-5 & \\ \cline{1-1} 0\qquad\quad & \end{array}$$

依テ次ノ法則ヲ得。

(法則) 兩多項式ヲ共ニ同文字ノ降冪(又ハ昇冪)ニ從ヒテ整頓シ,實ノ初項ヲ法ノ初項ニテ除シ,其結果ヲ商ノ初項トス。商ノ初項ヲ法ノ全部ニ乘ジ,其積ヲ實ヨリ引キ,殘餘ノ初項ヲ法ノ初項ニテ除シ,其結果ヲ商ノ第二項トシ,之ヲ法ノ全部ニ乘ジ,其積ヲ第一殘餘ヨリ引キ,逐テ同法ヲ行ヒ,遂ニ殘餘ナキニ至ルベシ。

注意。殘餘アル場合ハ次章ニ論ズベシ。

【例一】 x^3-27y^3 ヲ $x-3y$ ニテ除セヨ。

運算。
$$
\begin{array}{l|l}
x^3+0\quad+0\quad-27y^3 & x-3y \\
\underline{x^3-3x^2y} & \overline{x^2+3xy+9y^2}\ \text{答。} \\
\quad+3x^2y+0\quad-27y^3 & \\
\quad\underline{+3x^2y-9xy^2} & \\
\qquad\quad+9xy^2-27y^3 & \\
\qquad\quad\underline{+9xy^2-27y^3} & \\
\qquad\qquad\quad 0 &
\end{array}
$$

【例二】 $x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc$ ヲ $x-a$ ニテ除セヨ。

運算。
$$
\begin{array}{l|l}
x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc & x-a \\
\underline{x^3-ax^2} & \overline{x^2-(b+c)x+bc}\ \text{答。} \\
\quad-(b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc & \\
\quad\underline{-(b+c)x^2+(ab+ac\qquad)x} & \\
\qquad\qquad\qquad+bcx-abc & \\
\qquad\qquad\qquad\underline{+bcx-abc} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

問題二十六

第一式ヲ第二式ニテ除シ且之ヲ驗算セヨ。

(1) $x^2+6x+9,\ x+3.$ (2) $x^2+5x+6,\ x+2.$

(3) $x^2-5x+4,\ x-1.$ (4) $x^2-x-6,\ x-3.$

(5) $3x^2+16x-35,\ x+7.$ (6) $a^2-ax-6x^2,\ a-3x.$

(7) $a^2-b^2,\ a-b.$ (8) $a^2-49a+600,\ a-25.$

(9) $3a^2+34ab+11b^2,\ 3a+b.$

(10) $a^3+b^3,\ a+b.$ (11) $4x^2+23x+15,\ 4x+3.$

(12) $6x^2-7x-3,\ 2x-3.$

(13) $12a^2-11ac-36c^2,\ 4a-9c.$

(14) $-4xy-15y^2+96x^2,\ 12x-5y.$

(15) $100x^3-3x-13x^2,\ 3+25x.$

(16) $x^2+x+\frac{1}{4},\ x+\frac{1}{2}.$

(17) $x^3-x^2-9x-12,\ x^2+3x+3.$

(18) $2y^3-3y^2-6y-1,\ 2y^2-5y-1.$

(19) $6a^5-13a^4+4a^3+3a^2,\ 3a^3-2a^2-a.$

(20) $x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x,\quad x^2-\frac{1}{2}x.$ 〔海兵〕

(21) $\frac{1}{8}a^3-\frac{9}{4}a^2x+\frac{27}{2}ax^2-27x^3,\quad \frac{1}{2}a-3x.$

(22) $\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{72}xy^2+\frac{1}{12}y^3,\quad \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y.$

(23) $1+x-14x^2+7x^3+3x^4-18x^5,\quad 1-2x-3x^2.$

(24) $20x^5-57x^4+34x^3-73x^2-4x+20,$
$5x^3-3x^2+8x-4.$

(25) $x^5+y^5,\ x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4$

(26) $(a+b)^2+2(a+b)(c+d)+(c+d)^2,\quad a+b+c+d.$

(27) $(a-b)^3+3(a-b)^2c+3(a-b)c^2+c^3,\quad a-b+c.$

第七章

剩餘定理

65. 多項式ヲ多項式ニテ除スル場合ニ,實ト法トヲ同文字ノ降冪ノ順ニ整頓シテ除法ヲ行ヒ,法ヨリモ低次ノ剩餘ヲ得ルトキハ,實ヲ法ニテ整除スルヲ得ズ。此場合ニハ剩餘ヲ分子トシ,法ヲ分母トシテ,分數式ヲ作リ,之ヲ既ニ得タル商ノ整式部ニ加フ。

例ヘバ $$\frac{2x^2-x+6}{x+1}=2x-3+\frac{9}{x+1} \qquad (1)$$

若 x ノ昇冪ノ順ニ整頓シテ除法ヲ施ストキハ

$$\frac{6-x+2x^2}{1+x}=6-7x+\frac{9x^2}{1+x} \qquad (2)$$

一般ニ多項式 A ヲ他ノ多項式 B ニテ除シ,商 Q ト剩餘 R トヲ得ルトセバ

$$\frac{A}{B}=Q+\frac{R}{B}$$

ヲ得。故ニ之ニ B ヲ乘ズレバ

$$A=B\times Q+R.$$

トナル。

注意。 此式ハ一般ニ除法ヲ驗算スルニ用ヒラル。

多項式ヲ多項式ニテ除スルニ當リ,或文字ノ降冪ノ順ニ整頓スルト昇冪ノ順ニ整頓スルトニ從ヒテ商ト剩餘トノ形狀互ニ同ジカラズ,例ヘバ(1)及(2)ノ如シ。サレド何レノ場合ニモ法ト商トノ積ニ剩餘ヲ加フレバ實トナルガ故ニ,除法ハ正當ナリ。上ノ例ニテ $x=2$ トスレバ商ハ何レモ 4 トナル。

66. **剩餘定理。** x ノ降冪ニ從ヒテ整頓セラレタル x ノ多項式ヲ,一次ノ二項式 $x-a$ ニテ除シテ得ベキ剩餘ハ,此多項式中ノ x ニ a ヲ代入シテ得ベキ値ニ等シ。

例ヘバ x^2+3x+5 ヲ $x-2$ ニテ除シタルトキノ剩餘ハ $\quad R=2^2+3\times2+5=15.$

其故ハ x ノ値ニ關セズ

$$x^2+3x+5=(x-2)Q+R$$

ヲ得。然ルニ R ハ法 $x-2$ ヨリ低次ナルガ故ニ,x ヲ含マザル數ナリ。故ニ x ニ如何ナル數値ヲ與フルモ,R ハ變ズルコトナシ(但 A, B, Q ハ變ズ)。

依テ特ニ $x=2$ トスレバ

$$2^2+3\times2+5=0\times Q'+R=R$$

トナル。但 Q' ハ $x=2$ ナルトキノ Q ノ數値ナリ。

同様ニ x^2+3x+5 ヲ $x-a$ ニテ除シタル剩餘ハ a^2+3a+5 ナリ。

今試ニ除法ヲ實行スレバ次ノ如シ。

$$\begin{array}{l|l} x^2+3x+5 & x-a \\ \underline{x^2-ax} & x+(a+3) \\ (a+3)x+5 & \\ \underline{(a+3)x-a^2-3a} & \\ \qquad\quad a^2+3a+5 & \end{array}$$

上ノ證明法ハ被除數ノ次數ニ關セズ一般ニ適用ス。

注意。 除數ガ $x+a$, x ナル場合ニ R ヲ求ムルニハ, 夫夫 $-a$, 0 ヲ被除數中ノ x ニ代入スレバ可ナリ。

【例一】 x^3+6x^2+7x+2 ヲ x ニテ除シテ得ベキ剩餘ハ $\qquad R=0^3+6\times0^2+7\times0+2=2.$

【例二】 $2x^2-x+6$ ヲ $x+1$ ニテ除シテ得ベキ剩餘ハ

$$\begin{aligned} R&=2(-1)^2-(-1)+6 \\ &=2+1+6 \\ &=9. \end{aligned}$$

(第65節參照)

67. 上ノ定理ヨリ直ニ次ノ定理ヲ得ベシ。

x ノ降冪ニ從ヒテ整頓セラレタル整多項式ガ一次ノ二項式 $x-a$ ニテ割リ盡シ得ラルルガタメニハ, $x=a$ ナルトキ此多項式ガ零トナルヲ要ス。

【例一】 x^3-7x+6 ハ $x-2$ ニテ整除セラル。

其故ハ $\qquad R=2^3-7\times2+6=8-14+6=0$

ナレバナリ。

【例二】 $2x^3+mx^2-3x-36$ ガ $x-3$ ニテ整除セラルルガタメニハ m ノ數値ヲ如何ニ定ムベキカ。

解。 $x=3$ ナルトキ $R=0$ トナルベキガ故ニ

$$2\times3^3+m\times3^2-3\times3-36=0.$$

故ニ $\qquad 54+9m-9-36=0.$

即 $\qquad 9m+9=0.$

故ニ $\qquad m+1=0.$

依テ $m=-1$ ナルヲ要ス.

(驗算) 實算ニ依レバ, $2x^3-x^2-3x-36$ ハ $x-3$ ニテ整除セラルルコトヲ見ルベシ。

68. m ガ奇數ナルト偶數ナルトニ論ナク, x^m-a^m ハ $x-a$ ニテ整除セラル。

其故ハ $\qquad R=a^m-a^m=0.$

【例】 $$\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a.$$

$$\frac{x^3-a^3}{x-a}=x^2+ax+a^2.$$

$$\frac{x^4-a^4}{x-a}=x^3+ax^2+a^2x+a^3.$$

69. m ガ奇數ナルトキ, x^m+a^m ハ $x+a$ ニテ整除セラル。

其故ハ $$\begin{aligned}\mathrm{R}&=a^m+(-a)^m\\&=a^m-a^m=0.\end{aligned}$$

m ガ偶數ナルトキ x^m+a^m ヲ $x+a$ ニテ除スレバ, 剩餘 $2a^m$ ヲ得ベシ。

【例】 $$\frac{x^3+a^3}{x+a}=x^2-ax+a^2.$$

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}=x-a+\frac{2a^2}{x+a}.$$

70. x^m+a^m ヲ $x-a$ ニテ除シタル剩餘ハ, 常ニ $2a^m$ ナリ。

71. m ガ偶數ナレバ x^m-a_m ハ $x+a$ ニテ整除セラル, サレドm ガ奇數ナレバ整除スルヲ得ズ。

問題二十七

(1) $7x-5$ ヲ $x-1$ ニテ除シテ得ベキ剩餘如何。

(2) x^2-5x+6 ハ $x-3$ ニテ整除シ得ラルルカ。

(3) x^3-7 ヲ $x-2$ ニテ除シタル剩餘ヲ求メヨ。

(4) x^5-x^3+6x-8 ハ $x-2$ ニテ整除セラルルカ。

(5) x^3+27 ハ $x+3$ ニテ整除シ得ラルルカ。

(6) $(x+1)(x+2)(x+3)-6$ ハ x ナル因數ヲ有ス。之ヲ證セヨ。

(7) $6x^2-13x+6$ ハ $2x-3$ ニテ整除シ得ラルベシ。其理如何。

(8) a^5+b^5 ハ $a+b$ ニテ整除シ得ラルルカ。

(9) x^4-81y^4 ハ $x+3y$ 又ハ $x-3y$ ナル因數ヲ有ス。之ヲ證セヨ。

(10) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ハ $a-b$ ニテ整除セラル。之ヲ證セヨ。

(11) $3x-m$ ガ $x-2$ ニテ整除セラルルトキハ, m ノ數値如何。

(12) mx^2-7x-8 ガ $x-1$ ニテ整除セラルルガタメニハ, m ノ數値ヲ如何ニスベキカ。

(13) $x^3+x^2+mx-15$ ガ $x+3$ ニテ整除シ得ラルト云フ。m ノ數値如何。

(14) 5^3+1 ハ 6 ノ倍數ナリ。其理如何。

(15) 10^6-1 ハ 11 及 9 ノ倍數ナリ。其理由如何。

問題二十八

(雜　題)

(1) $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{2}{5}$ ナルトキ $\frac{5a-b}{7a+3b}$ ノ數値如何。

(2) $n=\frac{1}{3}$ ナルトキ $\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ ノ數値如何。

(3) 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$1-\{1-(1-x)\}+2x-\{3-5x-3(5x-4)\}.$$

(4) $a=0, b=2, c=-1$ ナルトキ次式ノ數値如何。

$$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3.$$

(5) 次ノ三式ノ和ヲ求メヨ。

$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{2}{3}y+\tfrac{1}{5}z,\ -\tfrac{3}{4}x+\tfrac{2}{5}y-\tfrac{1}{3}z,\ \tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{4}y+\tfrac{1}{2}z.$$

(6) $5b^4-3ab^3+4a^2b^2$ ニ如何ナル式ヲ加フレバ, $5a^4-3a^3b+4a^2b^2$ トナルカ。

(7) $2a^2+2b^2=(a+b)^2$ ナルトキハ $a=b$ ナリ。之ヲ證セヨ。

(8) $a+b+c=0$ ナルトキハ $b^2+c^2-a^2=-2bc$ ナリ。之ヲ證セヨ。

(9) $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{2}ab+b^2$ 及 $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+b^2$ ノ積如何。

(10) $1-6x^5+5x^6$ ヲ $1-2x+x^2$ ニテ除セヨ。

(11) $(a^2-b^2)\div(a-b)=a+b$ ナルコトヲ知リテ, $9x^2-16y^2$ ヲ $3x-4y$ ニテ除シタル商ヲ書ケ。

(12) $a^2+b^2+1-ab-a-b$ ニ $a+b+1$ ヲ乘ゼヨ。

(13) $(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2$ ナルコトヲ知リテ, $(x+y)^3+z^3$ ヲ $x+y+z$ ニテ除シタル商ヲ書ケ。

(14) $a^3+b^3+3a^2b+3ab^2-8c^3$ ヲ $a+b-2c$ ニテ除セヨ。

(15) 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)+(a-b+c+d)(-a+b+c+d).$$

(16) 次ノ式ヲ簡單ニセヨ。

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+(b-c)(c-a)(a-b).$$

次ノ各式ヲ證セヨ (17)－(22).

(17) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$

(18) $(ac+bd)^2+(ad-bc)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2).$

(19) $(a+b+c)^3$

$$=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(c+a)+3c^2(a+b)+6abc.$$

(20) $(a-b)^5+(b-a)^5=0.$

(21) $(1+x+x^2)(1-x+x^2)(1-x^2+x^4)(1-x^4+x^8)$

$=1+x^8+x^{16}.$

(22) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$

$=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$

$=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4.$

(23) $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$ ナル式ヲ滿足スル a, b, c ハ互ニ相等シキコトヲ證明セヨ。但 a, b, c ハ何レモ正ノ實數ナリ。(山口高商)

(24) $a+b+c=0$ ナルトキハ

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

第八章

簡易ナル分數式

72. 若干ノ整式ヲ整除スル式ヲ其公約數或ハ公因數ト云ヒ,公約數ノ中,次數ノ最大ナルモノヲ最大公約數又ハ最高公因數ト云フ。

73. 單項式ノ最大公約數.

例ヘバ算術ニテ $2^3\times5^2\times11$ 及 $2^2\times5^2\times7$ ノ最大公約數ハ $2^2\times5^2$ ナリ。

同樣ニ a^3b^2x 及 a^2b^3y ノ最大公約數ハ a^2b^2 ナリ。

(法則) 所設ノ各式ニ共通ナル因數ノ積ヲ作リ,之ニ各因數ノ最小指數ヲ附スベシ。

數係數ハ代數式ノ最大公約數ニ關係セザレド,其絶對値ノ最大公約數ヲ取リ之ニ正號ヲ附スルモノトス。

注意。最大公約數ニテ各式ヲ除シタル商ハ,公約數ヲ有セズ。

多項式ノ最大公約數ハ第四篇第三章ニ論ズベシ。

問題二十九

次ノ諸式ノ最大公約數ヲ求メヨ。

(1) $2a^3,\ 3a^4,\ a^6.$ (2) $4ab^2,\ 6a^2b.$

(3) $ax,\ by.$ (4) $5x^3y^3,\ 15xy^2z.$

(5) $49ax^2,\ 63ay^2,\ 14az^2.$

(6) $8ab(a+b)^2,\ 12(a+b)(a-b),\ 20(a-b)^2(a+b)^2.$

74. 若干ノ整式ニテ整除シ得ラルル式ヲ其公倍數ト云ヒ,公倍數ノ中ニテ次數ノ最小ナルモノヲ最小公倍數又ハ最低公倍數ト云フ。

75. 單項式ノ最小公倍數。

例ヘバ $2^3\times3^2$ 及 $2^2\times3^2\times5$ ノ最小公倍數ハ $2^3\times3^2\times5$ ナリ。

同樣ニ a^3b^2 及 a^2b^2c ノ最小公倍數ハ a^3b^2c ナリ。

(法則) 所設ノ諸式中ニアル總テノ因數ノ積ヲ作リ,之ニ各因數ノ最大指數ヲ附スベシ。

數係數ハ代數式ノ最小公倍數ニ關係セザレド,其絕對値ノ最小公倍數ヲ取リ,之ニ正號ヲ附スルモノトス。

注意。 多項式ノ最小公倍數ハ第四篇第四章ニ論ズベシ。

問題三十

次ノ諸式ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

(1) $11a,\ 154b,\ 8c.$ (2) $ax,\ bx^2,\ cx^3.$

(3) $ab,\ bc,\ ca.$ (4) $60a^5b^3,\ 12a^2b^3.$

(5) $15a^3,\ -3a^5.$ (6) $7a^2,\ -2ab,\ 3b^2.$

(7) $2x^2y^2,\ 3xy^3,\ 4x^3y^4z.$

(8) $3a(a+b)^2,\ 2(a+b)(a-b),\ ab(a-b)^2.$

76. 整式 A ヲ整式 B ニテ除シタル商ヲ**分數式**ト云フ。(第28節參照)

$$A\div B=\frac{A}{B}.$$

A ヲ分數ノ**分子**ト云ヒ, B ヲ**分母**ト云ヒ,之ヲ通稱シテ分母子或ハ**項**ト云フ。

77. 分數式ノ符號。

分數式モ亦一ツノ數ヲ表スガ故ニ,其前ニ性質ノ符號アリト見ルヲ得。

$$\frac{+a}{+b}=\frac{-a}{-b}=+\frac{a}{b}.$$

$$\frac{-a}{+b}=\frac{+a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

分子或ハ分母ノ符號ヲ變ズレバ,分數式ノ符號ハ變ジ,分母子ノ符號ヲ同時ニ變ズレバ,分數式ノ符號ハ元ノ如シ。

例ヘバ
$$\frac{a-b}{m-n}=-\frac{b-a}{m-n}.$$

$$\frac{x-y}{3}=\frac{-x+y}{-3}.$$

78. 分數式ノ分母子ニ同數ヲ乘ズルモ其値ハ變ゼズ。

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{m\mathrm{A}}{m\mathrm{B}}.$$

其故ハ $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ ノ値ヲ q ニテ示セバ,分數ノ定義ニ依リテ
$$\mathrm{A}\div\mathrm{B}=q.$$
故ニ
$$\mathrm{A}=\mathrm{B}q.$$
故ニ
$$m\mathrm{A}=m\mathrm{B}q.$$

但 m ハ正或ハ負ナル任意ノ數ナリ。故ニ

$$\frac{m\mathrm{A}}{m\mathrm{B}}=q=\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}.$$

故ニ又分數式ノ兩項ヲ同數ニテ除スルモ,其値ハ變ゼズ。

79. **約分**。前節ノ理ニ依リテ,分數式ノ値ヲ變ゼズシテ其分母子ノ公約數ヲ去リ得ベシ。

【例一】 $\frac{6a^2bc^3}{9abc^5}=\frac{2a}{3c^2}.$ 答。

【例二】 $\frac{7a^2\times(-3xy)\times y^3z}{21a^2b\times x^2y^4z}=-\frac{1}{bx}.$ 答。

【例三】 $\frac{m^3(a-b)^2(a^2+b^2)^3}{mn(a+b)(a-b)(a^2+b^2)^4}=\frac{m^2(a-b)}{n(a+b)(a^2+b^2)}.$ 答。

80. **通分**。諸分數式ノ値ヲ變ゼズシテ之ヲ同分母ニ化スルヲ得。

【例一】 $a,\ \frac{c}{ab^3},\ \frac{d}{a^2b^2}$ ヲ通分セヨ。

解。分母ノ最小公倍數ハ a^2b^3 ナリ。依テ之ヲ各分母ニテ除シ,其商ヲ各分數式ノ兩項ニ乘ズレバヨシ。

$$\left.\begin{aligned}
a&=\frac{a}{1}=\frac{a\times a^2b^3}{1\times a^2b^3}=\frac{a^3b^3}{a^2b^3}.\\
\frac{c}{ab^3}&=\frac{c\times a}{ab^3\times a}=\frac{ac}{a^2b^3}.\\
\frac{d}{a^2b^2}&=\frac{d\times b}{a^2b^2\times b}=\frac{bd}{a^2b^3}.
\end{aligned}\right\}\ \text{答.}$$

【例二】 $\dfrac{a}{b}, \dfrac{n}{m}, \dfrac{x}{y}$ ヲ通分セヨ。

答。 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{amy}{bmy}.\quad \dfrac{n}{m}=\dfrac{bny}{bmy}.\quad \dfrac{x}{y}=\dfrac{bmx}{bmy}.$

81. 分數式ノ加法及減法。

(法則) 諸分數式ガ同分母ナラザルトキハ,先之チ通分シ,所得ノ分數ノ分子チ加ヘ又ハ減ジテ,之ニ通分母チ附スベシ。

【例一】 $\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m}-\dfrac{c}{m}=\dfrac{a+b-c}{m}.$ 答。

其故ハ $\left(\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{m}-\dfrac{c}{m}\right)\times m$

$=\dfrac{a}{m}\times m+\dfrac{b}{m}\times m-\dfrac{c}{m}\times m=a+b-c.$

【例二】 $\dfrac{4x}{3}-\dfrac{2x}{5}+\dfrac{7x}{10}=\dfrac{40x}{30}-\dfrac{12x}{30}+\dfrac{21x}{30}=\dfrac{49x}{30}.$ 答。

【例三】 $-m+\dfrac{x}{y}=\dfrac{-my}{y}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{-my+x}{y}=\dfrac{x-my}{y}.$ 答。

【例四】 $\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{d}{b-a}=\dfrac{c}{a-b}+\dfrac{-d}{a-b}=\dfrac{c-d}{a-b}.$ 答。

【例五】 $\dfrac{A}{B}\pm\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD\pm BC}{BD}.$ 答。

【例六】 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{a+b}{ab}.$ 答。

問題三十一

次ノ式ヲ計算セヨ (1)-(13).

(1) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}.$　(2) $\dfrac{z}{4}-\dfrac{z}{5}.$　(3) $\dfrac{8}{3x}+\dfrac{2}{5x}-\dfrac{3}{x}.$

(4) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{12}.$　(5) $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}.$

(6) $\dfrac{2y}{3}+\dfrac{4y}{5}-\dfrac{y}{12}.$　(7) $\dfrac{7}{m}+\dfrac{5}{-m}-\dfrac{3}{-m}.$

(8) $a+\dfrac{c}{b}.$　(9) $x-\dfrac{ny}{m}.$　(10) $1+\dfrac{2c}{3b}.$

(11) $1+\dfrac{a-x}{a+x}.$　(12) $1-\dfrac{x+3}{x+5}.$

(13) $\dfrac{x+3}{x-5}+\dfrac{x-3}{5-x}.$

(14) $\dfrac{a^2+b^2}{ab}$ ヲ二ツノ分數ノ和ニ化セヨ。

(15) $\dfrac{x-y}{xy}$ ヲ二ツノ分數ノ差ニ化セヨ。

82. 分數式ノ乘法。

(法則) 諸分子ノ積チ分子トシ,諸分母ノ積チ分母トシテ分數式チ作リ,之

ヲ約分スベシ。

$$\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$

其故ハ　$\frac{A}{B}=p,\ \frac{C}{D}=q$ トスレバ,

$$A=Bp,\quad C=Dq.$$

故ニ之ヲ乘ジテ,

$$AC=BpDq,$$

即　$$AC=BD\times pq.$$

依テ　$$\frac{AC}{BD}=pq=\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}.$$

同樣ニ　$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}.$$

【例一】 $\frac{2a^2}{3bc}\times\frac{5b^2c^3}{8a^3x}=\frac{5bc^2}{12ax}$. 答。

【例二】 $\left(\frac{x}{m}+\frac{y}{n}\right)\times m^2n^2=\frac{m^2n^2x}{m}+\frac{m^2n^2y}{n}$

$$=mn^2x+m^2ny.$$ 答。

83. 分數式ノ除法。

(法則) 除數ノ分母子ヲ轉倒シテ之ヲ被除數ニ乘ズベシ。

$$\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}.$$

其故ハ　$\frac{AD}{BC}\times\frac{C}{D}=\frac{ADC}{BCD}=\frac{A}{B}$

ナレバナリ。

【例一】 $1\div\frac{a}{b}=1\times\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$. 答。

注意。 $\frac{a}{b}$ ノ逆數ハ $\frac{b}{a}$ ナリ。**(第21節參照)**

【例二】 $\frac{a-b}{a+b}\div\left(1-\frac{a-3b}{a+b}\right)$

$$=\frac{a-b}{a+b}\div\frac{4b}{a+b}=\frac{a-b}{4b}.$$ 答。

84. 二ツノ分數式ガ相等シケレバ,甲ノ分子ト乙ノ分母トノ積ハ乙ノ分子ト甲ノ分母トノ積ニ等シ。逆モ亦眞ナリ。

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ナルトキハ $ad=bc$.

其故ハ,之ヲ同分母ニスレバ

$$\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$$

ヲ得,相等シキ分數式ノ分母ガ相等シキガ故ニ,分子モ亦等シカルベシ。依テ $ad=bc$.

【例】 $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ ナルトキハ $2\times12=8\times3$

85. 分數式ノ數値ガ零ニシテ分母ガ零ナラザレバ,分子ハ零ナリ。

$B \neq 0,\ \dfrac{A}{B}=0$ ナルトキハ $A=0$.

(第22節參照)

問題三十二

次ノ式ノ結果ヲ求メヨ。

(1) $2x^2 \div 5xy$.　　(2) $\dfrac{11ax}{7b^3} \times \dfrac{14a^2}{bxy}$.

(3) $\dfrac{3}{5} \div \dfrac{x}{10y}$.　　(4) $\dfrac{3(a+b)^2}{a^2b(a-b)^3} \times \dfrac{ab^2(a-b)^2}{12(a+b)}$.

(5) $(-1) \div \left(-\dfrac{2m}{5n}\right)$.　　(6) $\dfrac{(m+n)^2}{(a-b)^3} \div \dfrac{xy(m+n)}{(a-b)^2(a+b)}$.

(7) $\left(y-\dfrac{3}{5}y\right) \times \left(2x-\dfrac{1}{5}x\right)$.

(8) $\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{6}\right) \div \left(x-\dfrac{2x}{3}+\dfrac{5x}{12}\right)$.

(9) $1 \div \left(1-\dfrac{x-y}{x+y}\right)$.　　(10) $\left(1+\dfrac{a-b}{a+b}\right) \div \left(1-\dfrac{a-b}{a+b}\right)$.

第三篇

一次方程式

第一章

一元一次方程式ノ解法

86. 二ツノ代數式ノ相等シキコトヲ示セルモノヲ**等式**ト云ヒ,等號ノ兩側ノ式ヲ等式ノ**左邊**,**右邊**ト云フ。

【例】 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.　　(1)

$x-1=9$.　　(2)

等式中ノ文字ニ如何ナル數値ヲ代入スルモ成立スル等式ヲ**恒等式**ト云フ。

例ヘバ(1)ハ恒等式ナリ。

前篇中ノ等式ハ式中ノ文字ノ數値ニ關セズ成立スルガ故ニ,恒等式ナリ。

等式ノ文字ニ或格段ナル數ヲ代入スルトキニ限リテ成立スル等式ヲ,**方程式**ト云フ。

例ヘバ(2)ニテハ $x=10$ ナルトキニ限リテ等式ガ成立ス。依テ(2)ハ方程式ナリ。

方程式ニテ,其値ヲ知レルカ或ハ知レリト假定セル數ヲ**既知數**ト云ヒ,其値ノ知ラレザル數ヲ**未知數**ト云フ。既知數ハ數字又ハ $a, b, c, \ldots\ldots$ ニテ表シ,未知數ハ $x, y, z, \ldots\ldots$ ニテ表ス。

未知數ヲ表ス文字ヲ**元**ト云フコトアリ。

本篇ニハ兩邊ガ整式ナル方程式ノミヲ論ズ。

87. 方程式ノ次數。

方程式ノ兩邊共ニ整式ニシテ方程式ノ未知數ガ唯一ナルトキハ,其最大指數ヲ方程式ノ次數トス。

例ヘバ
$$\frac{2}{3}x=10$$
ハ一元一次方程式ニシテ,
$$x^2+8=6x$$
ハ一元二次方程式ナリ。

二ツ以上ノ未知數ヲ含ム方程式ニテハ,總テノ未知數ニ就キテ最高次ノ項ノ次數ヲ方程式ノ次數トス。

例ヘバ
$$36x=xy+1$$
及
$$36x^2=7y^2+2x-y+1$$
ハ二元二次方程式ナリ。

88. 方程式ヲ解クトハ方程式ヲ成立セシムルガ如キ未知數ノ値ヲ求ムルコトヲ云フ。

未知數ノ値ヲ方程式ノ**根**ト云ヒ,且其値ハ方程式ニ**適合**ス或ハ之ヲ**滿足**セシムト云フ。

方程式ノ未知數ニ根ヲ代入スレバ,方程式ガ等式トシテ眞ニ成立スルコトヲ知ル。

根ノ値ノ成立セザルトキアルガ故ニ,方程式ハ假ニ二式ノ相等シキコトヲ示スモノナリ。

例ヘバ $x+5=x$ ノ如シ。此方程式ハ根ヲ有セズ,其故ハ如何ナル數モ之ニ5ヲ加フレバ此數ヨリ大ナル數ヲ得レバナリ。

89. 次ニ示セルモノハ眞ナリトス。

(1) 相等シキ二式ニ同數ヲ加フレバ,其和ハ相等シ。

(2) 相等シキ二式ヨリ同數ヲ減ズレバ其差ハ相等シ。

(3) 相等シキ二式ニ同數ヲ乘ズレバ,其積ハ相等シ。

(4) 相等シキ二式ヲ同數(零ニ非ザル)ニテ除スレバ,其商ハ相等シ。

90. 移項法。 等式ノ或項ノ符號ヲ變ズレバ,之ヲ他邊ニ移スヲ得。

例ヘバ t ヲ方程式ノ一項トシ, A ヲ之ト同邊中ノ他ノ項ノ和トシ, B ヲ他邊中ノ諸項ノ和トセバ(第34節參照),方程式ハ

$$A+t=B \qquad (1)$$

トナル。今兩邊ニ $-t$ ヲ加フレバ,

$$A+t-t=B-t$$

トナル。故ニ $A=B-t.$ (2)

此方程式(2)ト原方程式(1)トヲ比較スルニ,(1)ノ左邊ノ項 $+t$ ハ右邊ニ來リテ $-t$ トナレル外他ニ變化ナシ。

又原方程式ヲ $A-t=B$

トシ,之ニ t ヲ加フレバ

$$A=B+t.$$

91. 等式ノ一邊ノ諸項ヲ悉ク他邊ニ移ストキハ,一邊ハ0トナル。

例ヘバ,方程式 $A+t=B$

ニテ B ヲ移項スレバ

$$A+t-B=0$$

トナリ,又 A ト t トヲ移項スレバ

$$0=B-A-t.$$

92. 兩邊ノ符號ノ變更。 等式ノ各項ノ符號ヲ變ズルモ等式ハ成立ス。是レ -1 ヲ兩邊ニ乘ジタルモノニ相當スレバナリ。

例ヘバ $A=B$

ナルトキハ $-A=-B.$

93. 整數ノ係數ヲ有スル方程式ノ解法。

以上說キタルトコロニ依リテ,一元一次方程式ヲ解クヲ得。

【例一】 方程式 $3x-8=10$ ヲ解ケ。

解。左邊ノ8ヲ移項スレバ

$$3x=10+8,$$

即 $$3x=18.$$

之ヲ x ノ係數 3 ニテ除スレバ

$$\frac{3x}{3}=\frac{18}{3},$$

$$\therefore \quad x=6.$$

(驗算) $3\times6-8=18-8=10.$

【例二】 $8x-7=15x+24$ ヲ解ケ。

解。未知數ヲ含ム項ヲ左邊ニ集メ,既知數ヲ右邊ニ集ムレバ,

$$8x-15x=24+7,$$

即 $$-7x=31.$$

兩邊ノ符號ヲ變ズレバ,

$$7x=-31.$$

故ニ $$x=-\frac{31}{7}.$$

(驗算) $$8x-7=8\left(-\frac{31}{7}\right)-7$$

$$=-\frac{248}{7}-\frac{49}{7}=-\frac{297}{7}.$$

$$15x+24=15\left(-\frac{31}{7}\right)+24$$

$$=-\frac{465}{7}+\frac{168}{7}=-\frac{297}{7}.$$

【例三】 $(3x+1)(2x-7)=6(x-3)^2+7$ ヨリ x ヲ求メヨ。

解。 $$6x^2+2x-21x-7=6(x^2-6x+9)+7,$$

$$6x^2-19x-7=6x^2-36x+54+7,$$

$$\therefore \quad -19x+36x=54+7+7,$$

$$17x=68,$$

$$x=4. \quad \text{答。}$$

【驗算】 左邊 $=(12+1)(8-7)=13\times1=13,$

右邊 $=6\times1^2+7=6+7=13.$

問題三十三

次ノ方程式ヲ解ケ(驗算セヨ)。

(1) $3x+12=2x+42.$ (2) $-x=15.$

(3) $2x-3=3x-7.$ (4) $5x+1=8x-17.$

(5) $3x-4=5(x-2).$ (6) $11x=8x-6.$

(7) $8(x-1)+17(x-3)=4(4x-9)+4.$

(8) $15(x-1)+4(x+3)=2(7+x).$

(9) $5x-6(x-5)=2(x+5)+5(x-4).$

(10) $(x-8)(x+12)=(x+1)(x-6).$

(11) $7x-39-10x+15=100-33x+26.$

(12) $97-5(x+20)=111-8(x+3)$.

(13) $4x-[3+\{x-(3+x)\}]=5$.

(14) $(x+1)^2-(x^2-1)=x(2x+1)-2(x+2)(x+1)+29$.

(15) $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3=3x(x+1)(x+2)$.

(16) $(x+1)(x+2)(x+6)=x^3+9x^2+28x-4$.

94. 分數ノ係數ヲ有スル方程式ノ解法。

【例一】 $\frac{3x}{7}=15$ ヲ解ケ。

解。兩邊ニ 7 ヲ乘ズレバ

$$3x=105.$$

$$\therefore \quad x=35. \quad 答。$$

驗算ハ學ブ者宜シク之ヲ行フベシ。

【例二】 $2x-\frac{x}{3}-\frac{1}{5}(2x-15)=41$ ヲ解ケ。

解。左邊ノ括弧ヲ去リ,既知數ヲ右邊ニ移シ,且其 x ノ係數ヲ集ムレバ,

$$\left(2-\frac{1}{3}-\frac{2}{5}\right)x=41-3,$$

卽 $$x=30. \quad 答。$$

別解。係數ノ分母ノ最小公倍數 15 ヲ各項ニ乘ズレバ,

$$15\times 2x-\frac{15}{3}x-\frac{15}{5}(2x-15)=41\times 15,$$

卽 $$30x-5x-3(2x-15)=615,$$

$$25x-6x+45=615,$$

$$19x=570,$$

$$x=30. \quad 答。$$

驗算ハ學ブ者之ヲ行フベシ。

【例三】 $\frac{5-3x}{2}=\frac{8x-9}{3}$ ヲ解ケ。

解。第84節ニ依リテ

$$3(5-3x)=2(8x-9),$$

$$15-9x=16x-18,$$

$$-9x-16x=-18-15,$$

$$-25x=-33,$$

$$x=\frac{33}{25}. \quad 答。$$

(驗算) $\frac{5-3x}{2}=\frac{5-3\times\frac{33}{25}}{2}=\frac{125-99}{25\times 2}=\frac{26}{25\times 2}=\frac{13}{25}$,

又 $\frac{8x-9}{3}=\frac{8\times\frac{33}{25}-9}{3}=\frac{264-225}{25\times 3}=\frac{39}{25\times 3}=\frac{13}{25}$.

【例四】 $\dfrac{72}{11}=\dfrac{5}{2x}$ ヲ解ケ。

解。最小公分母 $22x$ ヲ乘ズレバ

$$144x=55,$$

$$x=\frac{55}{144}.\quad \text{答。}$$

驗算ハ學ブ者之ヲ行フベシ。

【例五】 $\dfrac{2x}{7}=\dfrac{3x}{5}$ ヲ解ケ。

35 ヲ兩邊ニ乘ズレバ

$$10x=21x,$$

$$-11x=0,$$

$$\therefore\quad x=0.\quad \text{答。}$$

(驗算) $\dfrac{2}{7}\times 0=0,\ \dfrac{3}{5}\times 0=0.$

問題三十四

次ノ各方程式ヲ解ケ(驗算セヨ)。

(1) $x+\dfrac{1}{2}x=12.$ (2) $x-\dfrac{2}{3}x=20.$

(3) $\dfrac{3x}{2}-\dfrac{4x}{5}=0.$ (4) $7x+8=\dfrac{4x}{5}+39.$

(5) $\dfrac{x-4}{7}=\dfrac{x-10}{5}.$ (6) $\dfrac{x}{4}+\dfrac{x-5}{3}=10$

(7) $\dfrac{1}{10}(x-5)+\dfrac{1}{5}(x+5)=5.$

(8) $\dfrac{4}{5}(x+2)=7+\dfrac{5}{13}x.$ (9) $\dfrac{2x-5}{7}=\dfrac{3x-10}{8}.$

(10) $\dfrac{x-1}{8}=1+\dfrac{x+1}{18}.$ (11) $\dfrac{x+5}{6}-\dfrac{x+1}{9}=\dfrac{x+3}{4}.$

(12) $\dfrac{x-8}{7}+\dfrac{x-3}{3}+\dfrac{5}{21}=0.$

(13) $1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{3x}{4}-4\dfrac{1}{2}.$

(14) $x-1=\dfrac{x-2}{2}+\dfrac{x-3}{3}.$

(15) $\left(\dfrac{1}{2}x+5\right)\left(\dfrac{1}{3}x-7\right)=\left(\dfrac{1}{2}x+4\right)\left(\dfrac{1}{3}x-6\right).$

(16) $\dfrac{1}{2}(27-2x)=\dfrac{9}{2}-\dfrac{1}{10}(7x-54).$

(17) $\dfrac{8}{21x}+\dfrac{4}{7}=0.$

(18) $\dfrac{x}{4}+3=\dfrac{1}{2}\left(4-\dfrac{x}{3}\right)-\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{3}\left(11-\dfrac{x}{2}\right).$

(19) $0{\cdot}5x-0{\cdot}3x=0{\cdot}25x-1.$

(20) $0{\cdot}2x-0{\cdot}1\dot{6}x=0{\cdot}6-0{\cdot}\dot{3}.$

(21) $3+\dfrac{x}{0{\cdot}5}=7-\dfrac{x}{0{\cdot}2}.$ (22) $-\dfrac{4}{3x}+\dfrac{16}{27}=0.$

第二章

應用問題

95. 前章ニ論ジタル一元一次方程式ヲ應用シテ種々ノ問題ヲ解クヲ得,其順序ハ次ノ如シ。

〔第一〕 x ニテ問題中ノ未知數ヲ示シ,題意ヲ方程式ニテ表スコト。

〔第二〕 方程式ヲ解クコト。

〔第三〕 答ヲ問題中ノ未知數ニ代入シ,題意ニ適スルカ否カヲ驗スコト。

【例一】 某數アリ,其三倍ガ 50 ヲ超過スルコト正ニ其二倍ガ 40 ニ及バザルダケニ等シト云フ。某數ヲ問フ。

解。x ニテ所要ノ數ヲ表セバ,其三倍ト 50 トノ差ハ $3x-50$ ニシテ, 40 ト二倍トノ差ハ $40-2x$ ナリ。故ニ

$$3x-50=40-2x,$$

之ヲ解キテ $x=18$. 答。

(驗算) $3x-50=54-50=4,$

$40-2x=40-36=4.$

【例二】 金 40 圓ヲ甲乙二人ニ分ツニ,其所得甲三倍ハ乙ノ二倍ニ等シト云フ。各所得如何。

解。本題ハ未知數二ツアリ。今甲ノ所得ヲ x 圓トスレバ,乙ノ所得ハ $(40-x)$ 圓トナル。依テ

$$3x=2(40-x).$$

是レ題意ヲ表セル方程式ナリ。之ヲ解キテ

$$x=16,$$

$$40-x=24$$

ヲ得。故ニ甲ハ 16 圓,乙ハ 24 圓ナリ。

甲ノ所得ノ三倍ハ 48 圓ニシテ,乙ノ二倍モ亦 48 圓ナリ。依テ答數ハ正確ナリ。

注意。文字 x ハ恒ニ不名數ヲ示スガ故ニ,甲ノ所得ヲ x トスト記スベカラズ,必金高ノ單位ノ名ヲ記スルヲ要ス。然ラザレバ甲ノ所得ノ圓數ヲ x トスト記スベシ。

學ブ者ハ乙ノ所得ヲ x 圓トシテ此問題ヲ解キ試ミルベシ。

【例三】 時計ノ盤面ニテ二時ノ後,兩針ガ相重ナル時刻ヲ問フ。

解。所要ノ時刻ヲ二時 x 分トセヨ。時計ノ盤

面ノ周圍ハ60區ニ等分セラレ,長針ハ一分間ニ一區ヲ經過シ,短針ハ一區ノ $\frac{1}{12}$ ヲ進行ス。而シテ XII ト II トノ間ニハ 10 區アルガ故ニ,

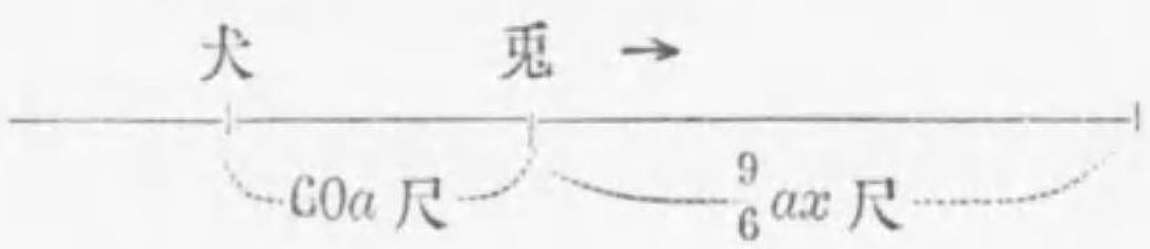
$$x-\frac{1}{12}x=10,$$

之ヲ解キテ $$x=10\frac{10}{11}.$$

故ニ所要ノ時刻ハ2時10分 $\frac{10}{11}$ 即二時十分五十五秒弱ナリ。

【例四】 60歩ダケ前方ニ在ル兎ヲ追フ犬アリ。兎ガ9歩スル時間ニ犬ハ6歩シ,兎ノ7歩ニテ達スル距離ヲ犬ハ3歩ニテ達スト云フ。然ラバ兎ヲ捕フルマデニ犬ハ幾歩ヲ走ルベキカ。但犬ト兎トハ同ジ通路ヲ走ルモノトス。

解。兎一歩ノ長サヲ a 尺トスレバ,犬一歩ノ長サハ $\frac{7}{3}a$ 尺ナリ。故ニ所要ノ歩數ヲ x トスレバ,犬ノ走レル距離ハ $\frac{7}{3}ax$ 尺ナリ。



又犬ノ x 歩走ル時間ニ兎ハ $\frac{9}{6}x$ 歩シ,其長サハ $\frac{9}{6}xa$ 尺ナリ。故ニ次ノ方程式アリ。

$$\frac{7}{3}ax=60a+\frac{9}{6}ax.$$

a ハ零ナラザルガ故ニ, a ニテ各項ヲ除スレバ

$$\frac{7}{3}x=60+\frac{9}{6}x,$$

$x=72.$ 答 72歩。

問題三十五

(1) 或數ノ3倍ヨリ15ヲ引キタルモノハ,原數ヨリ9ダケ大ナリト云フ。原數如何。

(2) 大小二數アリ,其差ハ252ニシテ,大數ハ小數ノ7倍ニ等シト云フ。各數如何。

(3) 100ヲ二部ニ分チ,其一部ノ二倍ヲ他ノ部ノ三倍ニ等シクセントス。各部分如何。

(4) 四ツノ連續セル整數アリ,其和ハ410ナリ。各數如何。

(5) 二ツノ連續セル偶數アリ,其和ハ86ナリ。各數如何。

(6) 甲乙二人同額ノ金ヲ有セシニ,甲ハ42圓ヲ費シ,乙ハ140圓ヲ費セシガ故ニ甲ノ殘金ハ乙ノ殘金ノ2倍トナレリ。最初ノ所有金如何。

(7) 或數ノ四分ノ一ハ其五分ノ一ヨリ大ナルコト27ナリト云フ。原數如何。

(8) 或人或距離ヲ往復セシニ,往路ハ毎時二里ヲ行キ,歸路ニハ毎時一里半ヲ步行シ,往復七時間ヲ費セリト云フ。其距離ヲ問フ。

(9) 或人ノ今年ノ年齢ハ25年前ノ年齢ノ6倍ニ當ルト云フ。今年ノ年齢ヲ求メヨ。

(10) 30ヲ甲乙二部ニ分チ,甲ノ3倍ト乙ノ4倍トノ和ヲ116ナラシメントス。各部分如何。

(11) 金180圓ヲ三人ニ分チ,次第ニ20圓ヅツノ差ヲ作ラントス。各所得如何。

(12) 或五人ノ兄弟ノ年ハ次第ニ2歳ノ差アリテ,長兄ノ年ハ末弟ノ年ノ5倍ナリト云フ。各人ノ年ヲ問フ。

(13) 男工10人ト女工15人トノ日給合セテ7圓ニシテ,男工一人ノ日給ハ女工一人ノ日給ノ2倍ニ等シト云フ。各一人ノ日給如何。

(14) 父ハ45歳子ハ13歳ナリ。今ヨリ幾年ノ後,父ノ年ガ子ノ年ノ3倍トナルベキカ。

(15) 羅紗30碼ト絹40碼トノ價合計660圓ニシテ絹1碼ノ價ハ羅紗2碼ノ價ニ等シト云フ。各一碼ノ價如何。

(16) 金300圓ヲ三子ニ分與セシニ,其所得次子ハ長子ノ二倍ニシテ末子ハ長子ト次子トノ和ニ等シト云フ。三人ノ所得各如何。

(17) 甲乙二人同額ノ資本ヲ以テ商業ヲナシシニ,甲ハ一割ヲ利シ,乙ハ二割ヲ損セシガ故ニ,甲ノ所有金ハ乙ヨリモ120圓多キニ至レリト云フ。始ノ資本金ヲ問フ。

(18) 連續セル二整數ノ平方ノ差ガ17ナルトキハ各數如何。

(19) 三時ノ後,時計ノ兩針ガ相重ナル時刻ヲ問フ。

(20) 四時ノ後,時計ノ兩針ガ反對ノ方向ヲ爲ス時刻ヲ問フ。

(21) 或仕事ヲ甲乙二人ニテナサバ4日ニテ成功スベク,各一人ニテ爲サバ甲ハ乙ノ2倍ノ日數ヲ要スベシ。各一人ニテ成就スル日數如何。

(22) 兵士1296人ヲ12列ノ中空方陣ニ列スルトキハ,外面一列ノ人數如何。

(23) 甲乙二個ノ時計アリ,甲ノ進ムダケ乙ハ後レ,又甲ノ時計ノ1799時間ハ乙ノ時計ノ1801時間ニ當ル。毎時ノ遲速幾何ナルカ。

(24) 金8圓ニテ牛肉ヲ買フニ,若現價ヨリ2割安クセバ5斤多ク買ヒ得ベシト云フ。一斤ノ現價如何。

(25) 或人,童子若干人ニ桃ヲ與フルニ,各25個ヅツトセバ10個不足シ,又各20個ヅツトセバ10個餘ルベシト云フ。童子ノ數及桃ノ數ヲ求メヨ。

(26) 正方形ノ地面アリ,縱ヲ3間長クシ,横ヲ2間短クスルモ,面積ハ變ラザルベシト云フ。各邊ノ長サヲ求メヨ。

(27) 火藥若干斤ヲ製スルニ,硝石ハ全重量ノ半分ヨリ6斤多ク,硫黃ハ$\frac{1}{3}$ヨリ5斤少ク,木炭ハ$\frac{1}{4}$ヨリ3斤少シ。各成分ノ重量ヲ求メヨ。

(28) 甲ハ或地點ヲ發シ,5時間ニ4里ノ割合ニテ旅行シ,其後3時間ヲ經テ乙ハ同地點ヲ發足シ4時間ニ5里ノ割合ニテ甲ヲ追フトキハ,幾時間ニシテ甲ニ追及スルカ。

(29) 靜水ニテ毎時9浬ノ速サヲ有スル汽船ガ或河ヲ上ルニ要スル時間ハ,同距離ヲ下ルニ要スル時間ノ2倍ナリ。水流ノ速サヲ問フ。

(30) 一將アリ,部下ノ兵士ヲ二等分シテ中空方陣二個ヲ作リシニ,甲ハ厚サ三列,乙ハ五列ニシテ,乙ハ正ニ甲ノ内ニ容レ得ベキコトヲ見タリ。兵士ノ數ヲ求メヨ。

(31) 或人其所有金ノ$\frac{3}{10}$ニテ衣服ヲ買ヒ,次ニ殘金ノ$\frac{1}{3}$ニテ書籍ヲ買ヒシニ,尚28圓ヲ殘セリト。最初ノ所有金如何。

(32) 甲乙兩人相伴ヒテ汽車ニ乘ラントスルニ兩人ノ携帶荷物ヲ合シテ350斤アリ。一人ニテ之ヲ持ツトキハ無賃ト定メタル重量ニ超過シタル部分ニ對シテ一圓五十五錢ノ運賃ヲ支拂フヲ要スレド,兩人別別ニ之ヲ持ツトキハ,超過部分ニ對スル運賃トシテ甲ハ金七十五錢,乙ハ金六十錢ヲ支拂ヘバ足ルベシト云フ。一人ニ許ス所ノ無賃斤量ハ幾許ナルカ。 〔神戸高商〕

第三章
多元一次方程式ノ解法

96. 二ツノ未知數x, yヲ有スル單一ノ方程式

$$x+y=5. \qquad (1)$$

ニ適合スル兩未知數ノ値ハ無數アリ。其故ハ方程式(1)ハ　$y=5-x$

ニ異ナラザルガ故ニ,xノ値ヲ

$$x=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots$$

トスレバ,之ニ對應スルyノ値ハ

$$y=5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, \ldots\ldots$$

ナレバナリ。サレドx及yノ値ガ此方程式(1)ニ適合スルト同樣ニ,他ノ方程式,例ヘバ

$$x-y=1 \qquad (2)$$

ニモ適合スルヲ要スルトキハ,其値ハ唯一對アルノミ。即

$$\left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}\right\}$$

ハ兩方程式(1)及(2)ニ適合シ,其他ニハ兩方程式ニ適スルモノナシ。

97. 未知數ノ間ノ相異ナル關係ヲ表ス方程式ヲ**獨立方程式**ト云フ。

例ヘバ$x+y=5$及$x-y=1$ノ如シ。

又二ツノ方程式

$$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 3x+3y=15 \end{array}\right\}$$

ニ適合スルx, yノ數値ハ無數アルベシ。是レ兩方程式ハ獨立方程式ニ非レバナリ。

又二ツノ方程式

$$\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ 2x+2y=12 \end{array}\right\}$$

ノ如キハ兩立スルモノニ非ズ。其故ハ第二ノ方程式ヨリ$x+y=6$ヲ得テ,第一ノ方程式ト矛盾スレバナリ。

98. 若干ノ未知數ガ夫夫同ジ値ヲ取ルトキ滿足スル若干ノ方程式ノ一組ヲ**聯立方程式**又ハ**多元方程式**ト名ヅク。

斯ノ如キ未知數ノ値ヲ方程式ノ**根**ト云フ。

未知數ノ數ト方程式ノ數トハ同數ナルヲ要ス。然ラザレバ,一定ノ解答ヲ得ル能ハズ。

99. 二元一次方程式ノ解法。

二元一次方程式ヲ解クニハ,之ヲ結合シテ一元一次方程式ヲ作ルヲ要ス。此方法ヲ消去法ト云フ。

消去法ニ三種アリ。(第一)加減法,(第二)代入法(第三)比較法是レナリ。

100. 加減法。

今次ノ聯立一次方程式ヲ解カントス。

$$\begin{cases} 2x+3y=22 & (1) \\ 5x-7y=-3 & (2) \end{cases}$$

先ヅ y ヲ消去センニ,兩方程式ニ於ケル y ノ係數ノ絕對値ヲ等シクスル目的ヲ以テ(1)ノ兩邊ニ7ヲ乘ジ,又(2)ノ兩邊ニ3ヲ乘ズレバ,

$$14x+21y=154, \qquad (3)$$

$$15x-21y=-9. \qquad (4)$$

方程式(3)ト(4)トヲ邊々相加フレバ,

$$29x=145$$

$$\therefore \quad x=5.$$

是レ加法ニ據レル消去法ナリ。

次ニ x ヲ消去セン。

方程式(1)ノ兩邊ニ5ヲ乘ジ,又(2)ノ兩邊ニ2ヲ乘ズレバ,

$$10x+15y=110, \qquad (5)$$

$$10x-14y=-6. \qquad (6)$$

方程式(5)ヨリ(6)ヲ邊々相減ズレバ

$$29y=116$$

$$\therefore \quad y=4.$$

是レ減法ニ據レル消去法ナリ。

故ニ $x=5,\ y=4$ ハ方程式(1)及(2)ニ適合ス。

故ニ此一對ノ値ハ所要ノ根ナリ。

101. (法則) 兩方程式ニ於ケル同一ノ未知數ノ係數ヲシテ絕對値ニ於テ相等シカラシムベキ數ヲ各式ニ乘ジ然ル後此未知數ヲ有スル項ガ異符號ナルトキハ邊々相加ヘ同符號ナルトキハ邊々相減ズベシ。然ルトキハ一元一次方程式ヲ得。

【例】

$$\begin{cases} \dfrac{15}{x}-\dfrac{4}{y}=48, & (1) \\[2ex] \dfrac{5}{x}+\dfrac{6}{y}=38 & (2) \end{cases}$$

解。此例ニテハ $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{y}$ ヲ未知數ト見做スベシ。

今 y ヲ消去センニ,係數 4 ト 6 トノ最小公倍數ハ 12 ナリ。而シテ

$$12=4\times3,\qquad 12=6\times2.$$

故ニ (1) ニ 3 ヲ乘ズレバ,

$$\frac{45}{x}-\frac{12}{y}=144. \tag{3}$$

又 (2) ヲ二倍スレバ,

$$\frac{10}{x}+\frac{12}{y}=76. \tag{4}$$

(3) ト (4) トヲ邊々相加フレバ,

$$\frac{55}{x}=220,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}=4,\qquad x=\frac{1}{4}.$$

依テ (2) ヨリ $20+\frac{6}{y}=38,$

$$\frac{6}{y}=18,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{y}=3,\qquad y=\frac{1}{3}.$$

特別ノ場合。 $\begin{cases}17x+13y=64, & (1)\\ 13x+17y=56. & (2)\end{cases}$

解。x ト y トノ係數ガ兩式ニ於テ交互ニ等シ

キガ故ニ (1) ト (2) トヲ加フレバ,

$$30x+30y=120,$$

$$\therefore\quad x+y=4. \tag{3}$$

又 (1) ヨリ (2) ヲ引ケバ

$$4x-4y=8,$$

$$\therefore\quad x-y=2. \tag{4}$$

(3) 及 (4) ヲ加減シテ

$$2x=6,\qquad 2y=2,$$

$$\therefore\quad x=3,\qquad y=1.$$

問題三十六

加減法ニ依リテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases}x+y=15\\ x-y=7\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+y=3\\ -x+y=7\end{cases}$

(3) $\begin{cases}2x+3y=7\\ 4x-5y=3\end{cases}$ (4) $\begin{cases}7x+2y=30\\ y-3x=2\end{cases}$

(5) $\begin{cases}5x+4y=58\\ 3x+7y=67\end{cases}$ (6) $\begin{cases}x-2y=4\\ 2x-y=5\end{cases}$

(7) $\begin{cases} 3x+2y=39 \\ 3y-2x=3 \end{cases}$ (8) $\begin{cases} 3x-4y=-5 \\ 4x-5y=1 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+49y=693 \\ 49x+\ \ y=357 \end{cases}$ (10) $\begin{cases} 17x+30y=59 \\ 19x+28y=77 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 15x+13y=56 \\ 13x+15y=0 \end{cases}$ (12) $\begin{cases} 7x+\dfrac{3}{y}=18 \\ 2x-\dfrac{1}{y}=3 \end{cases}$

102. 代入法。

【例】
$$\begin{cases} 2x+3y=8 & (1) \\ 3x+7y=7 & (2) \end{cases}$$

解。(1) ヨリ $3y=8-2x$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{3}(8-2x) \qquad (3)$$

ヲ得,此値ヲ (2) ノ y ニ代入スレバ,

$$3x+\frac{7}{3}(8-2x)=7,$$

之ヲ解キテ $x=7.$

故ニ (3) ヨリ

$$y=\frac{1}{3}(8-14)=\frac{1}{3}\times(-6),$$

$$y=-2.$$

依テ次ノ法則ヲ生ズ。

(法則) 兩方程式ノ一ヨリ未知數ノ一ヲ引キ出シ(他ノ未知數ハ之ヲ旣知數ト見做シ),此値ヲ他ノ方程式ノ未知數ニ代入スベシ。

問題三十七

代入法ニ依リテ次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

但一ツノ未知數ハ加減法ニヨリ他ハ代入法ニヨルモ妨ナシ。

(1) $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ x-\ y=1 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x-4y=18 \\ 3x=-2y \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 7x-5y=24 \\ 4x-3y=11 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 8x+3y=24 \\ 2x-\ y=6 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 7x+\ 5y=60 \\ 13x-11y=10 \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 6x-7y=42 \\ 7x-6y=75 \end{cases}$

103. 比較法。

前節ノ例ヲ取ランニ

$$\begin{cases} 2x+3y=8 & (1) \\ 3x-7y=7 & (2) \end{cases}$$

(1) ヨリ　　$x=\dfrac{8-3y}{2}$　　(3)

(2) ヨリ　　$x=\dfrac{7-7y}{3}$　　(4)

依テ (3) ト (4) トヲ比較スレバ,

$$\frac{8-3y}{2}=\frac{7-7y}{3}$$

之ヲ解キテ,　　$y=-2.$

故ニ (3) ヨリ　　$x=\dfrac{8-3(-2)}{2}=\dfrac{8+6}{2}=7.$

(法則) 各方程式ヨリ一ツノ未知數ノ値ヲ引キ出シ,之ヲ相等シトシテ方程式ヲ作ルベシ。

注意。　(1) ヨリ $2x=8-3y,$

(2) ヨリ $3x=7-7y.$

故ニ相除シテ　$\dfrac{2}{3}=\dfrac{8-3y}{7-7y}.$

是ヨリ y ノ値ヲ求メ得ベシ。

問題三十八

比較法ニ依リテ次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} x+15y=33 \\ x+\ 2y=7 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3y-7x=4 \\ 2y+5x=22 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 4x+19y=51 \\ 8x+13y=9 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 5x-\ 7y=33 \\ 11x+12y=100 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 8x-21y=33 \\ 6x+35y=177 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} x=3y-19 \\ y=3x-23 \end{cases}$

104. 方程式ガ分數ヲ有スルカ,又ハ括弧等ヲ含ムトキハ,消去法ヲ行フニ先チテ之ヲ簡單ニスルヲ要ス。

【例】 次ノ二元方程式ヲ解ケ。

$$\begin{cases} (x-1)(y+2)=(x-3)(y-1)+8, & (1) \\ \dfrac{1}{5}(2x-1)-\dfrac{3}{4}(y-2)=1. & (2) \end{cases}$$

解。 (1) ヨリ　　$3x+2y=13,$　　(3)

(2) ヨリ　　$8x-15y=-6$　　(4)

ヲ得ベシ。依テ (3) ニ 8 ヲ乘ジ,之ヨリ (4) ニ 3 ヲ乘ジタルモノヲ引ケバ

$$61y=122,$$

$$y=2,$$

ヲ得。故ニ (3) ヨリ　$x=3.$

問題三十九

次ノ聯立方程式ヲ解ケ。

(1) $\begin{cases} x(y+7)=y(x+1) \\ 2x+20=3y+1 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-\frac{1}{5}(y-3)=4 \\ 3y+\frac{1}{3}(x-2)=9 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} (x+1)(y+2)-(x+2)(y+1)+1=0 \\ 3(x+3)-4(y+4)+8=0 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \dfrac{x-2}{5}-\dfrac{10-x}{3}=\dfrac{y-10}{4} \\ \dfrac{2y+4}{3}-\dfrac{2x+y}{8}=\dfrac{x+13}{4} \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 1\frac{1}{2}x=1\frac{1}{3}y+4\frac{5}{12} \\ 4\frac{1}{2}x=\frac{1}{3}y-21\frac{7}{12} \end{cases}$

105. 三元一次方程式ノ解法。

(法則) 三ツノ未知數 x, y, z ヲ有スル三個ノ聯立方程式ヲ解クニハ,先一ツノ未知數,例ヘバ z ヲ二對ノ方程式ヨリ消去シ,所得ノ二ツノ方程式ヨリ更ニ第二ノ未知數,例ヘバ y ヲ消去スベシ。

【例】

$$\begin{cases} 2x-3y+4z=4 & (1) \\ 3x+5y-7z=12 & (2) \\ 5x-y-8z=5 & (3) \end{cases}$$

解。 $(1)\times 2+(3)$,　$9x-7y=13$　(4)

$(1)\times 7+(2)\times 4$,　$26x-y=76$　(5)

$(5)\times 7-(4)$,　$173x=519$

$x=3.$

(5) ヨリ　$y=26\times 3-76=2.$

(1) ヨリ　$6-6+4z=4,\quad z=1.$

注意。 四元一次方程式モ亦同様ニ三對ヨリ第一未知數ヲ消去シテ三元方程式ヲ作リ,之ヨリ前法ヲ適用スルヲ得.

106. 特別ノ場合。

【例一】

$$\begin{cases} -x+y+z=8 & (1) \\ x-y+z=10 & (2) \\ x+y-z=12 & (3) \end{cases}$$

解。 $(2)+(3)$　$2x=22$

$(3)+(1)$　$2y=20$

$(1)+(2)$　$2z=18$

$\therefore\quad x=11,\ y=10,\ z=9.$ 答。

【例二】

$$\begin{cases} y+z=2a & (1) \\ z+x=2b & (2) \\ x+y=2c & (3) \end{cases}$$

解。三式ヲ加フレバ

$$2x+2y+2z=2a+2b+2c \qquad (4)$$

$$\therefore \quad x+y+z=a+b+c$$

$(4)-(1)$ 　 $x=b+c-a.$

$(4)-(2)$ 　 $y=c+a-b.$

$(4)-(3)$ 　 $z=a+b-c.$

問題四十

次ノ聯立方程式ヲ解ケ.

(1) $\begin{cases} 2x-3y-z=1 \\ 3x+2y-2z=13 \\ 5x-4y-2z=11 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+y=4 \\ y+z=9 \\ z+x=5 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x+3y-6z=4 \\ 3x-y+2z=8 \\ x-2y+2z=2 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 5x+4y+3z=22 \\ 15x+10y+6z=53 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} -x+y+z=-5 \\ -x-y+z=-25 \\ x+y+z=35 \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 5x-7y=2 \\ 2x-z=7 \\ 4y-3z=1 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 2x-3y=3 \\ 3y-4z=7 \\ 4z-5x=2 \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} 2x-4y+3z=10 \\ 3x+y-2z=6 \\ x+3y-z=20 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=6 \\ y+\dfrac{z}{2}+\dfrac{x}{3}=-1 \\ z+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=17 \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{4}{z} \end{cases}$

(11) $\dfrac{2x-y}{3}=\dfrac{3y+2z}{4}=\dfrac{x-y-z}{5}=4.$

(12) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+y=1 \\ \dfrac{y}{3}-\dfrac{z}{[illegible]}=3 \\ 3x+2y+z=-8 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{7}=\dfrac{5x+6z}{9}=\dfrac{3y+4z}{8}. \\ x+y-z=126 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ y+z+u=9 \\ z+u+x=8 \\ u+x+y=7 \end{cases}$

第四章

應用問題

107. 若干ノ未知數ヲ有スル問題ヲ解ク方法ハ次ノ如シ。

[第一] $x, y, z, \dots\dots$ ニテ問題中ノ未知數ヲ示シ,題意ヲ方程式ニテ表スコト。

[第二] 方程式ヲ解クコト。

[第三] 答ヲ問題中ノ未知數ニ代入シテ題意ニ適スルカ否カヲ驗スコト。

問題ノ說述ハ未知數ト同數ナル方程式ヲ定ムルニ過不及ナキヲ要ス。然ラザレバ問題ハ不定或ハ不能ナリ。

【例一】 二數アリ,其和 s ニシテ其差 d ナリ。各數如何。

解。 所要ノ二數ヲ x, y トスレバ,方程式

$$\begin{cases} x+y=s \\ x-y=d \end{cases}$$

ヲ得。之ヲ聯立方程式トシテ解キ,

$$x=\frac{s+d}{2},\quad y=\frac{s-d}{2}$$

故ニ第一數ハ和ト差トヲ加ヘタルモノノ半ニ等シク,第二數ハ和ヨリ差ヲ減ジタルモノノ半ニ等シ。

【例二】 二位ノ整數アリ,之ニ 18 ヲ加フレバ數字ノ位置轉倒スト云フ。然ルトキハ二數字ノ差恒ニ 2 ナリ。之ヲ證明セヨ。

證明。 x ニテ十ノ位ノ數字ヲ表シ,y ニテ單位ノ數字ヲ表ストキハ,本數ハ $10x+y$ ニシテ,轉倒數ハ $10y+x$ ナリ。故ニ

$$10x+y+18=10y+x,$$

$$\therefore\quad 9x-9y=-18,$$

$$\therefore\quad x-y=-2.$$

故ニ十ノ位ノ數字ハ單位ノ數字ヨリ 2 ダケ小ナリ,例ヘバ 13, 24, 35, 46 ノ如シ。本題ハ二數字ノ値ヲ定ムルニ十分ナル假定ヲ有セズ。

【例三】 三人ノ工夫アリ,甲乙二人共同セバ 20 日,乙丙二人共同セバ 40 日,甲丙二人共同セバ 24 日ニテ或一事ヲ成就スベシト云フ。各一人ニテ成就スベキ日數ヲ求メヨ。

解。 甲,乙,丙ノ各一人ニテ成就スベキ日數ヲ順

次ニ x, y, z ニテ示セバ,甲,乙各一日ノ仕事ハ全キ仕事ノ $\frac{1}{x}$ 及 $\frac{1}{y}$ ナリ。

故ニ $$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\times 20=1.$$

故ニ $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}. \quad (1)$$

同樣ニ $$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{40}. \quad (2)$$

$$\frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{24}. \quad (3)$$

(1), (2), (3) ヲ聯立方程式トシテ解カンニ,之ヲ加ヘテ

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{6+3+5}{120}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{120}. \quad (4)$$

(4) ヨリ順次ニ (2), (3), (1) ヲ引ケバ,

$$\frac{1}{x}=\frac{4}{120}, \quad \frac{1}{y}=\frac{2}{120}, \quad \frac{1}{z}=\frac{1}{120}.$$

$$\therefore \quad x=30, \quad y=60, \quad z=120.$$

答。甲30日,乙60日,丙120日。

問題四十一

(1) 二數ノ和ハ365ニシテ,差ハ37ナリ。二數ヲ問フ。

(2) 鶴龜合セテ100頭アリテ,足數ノ和ハ280ナリト云フ。各ノ頭數如何。

(3) 一升72錢ト40錢トノ酒ヲ混合シテ一升60錢ノ酒8斗ヲ作ルニハ,各種幾升ヅヽヲ取ルベキカ。

(4) 二位ノ整數アリ,十ノ位ノ數字ハ單位ノ數字ノ半ニシテ,又本數ニ27ヲ加フレバ數字ノ位置轉倒スト云フ。原數如何。

(5) 甲乙二人ノ年俸合計1400圓ニシテ,甲ハ年俸ノ三分ノ二ヲ毎年ノ費用トシ,乙ハ年俸ノ四分ノ三ヲ毎年ノ費用トス。而シテ二人ノ殘金ヲ合算スレバ404圓トナル。各年俸額如何。

(6) 若干人集リテ祝宴ヲ開クニ,若人員ヲ10人増シ,一人前ノ費用ヲ10錢ヅヽ高クセバ定額ヨリ19圓ヲ増スベク,又人員ヲ15人減ジ,一人前ノ費用ヲ30錢ヅヽ高クセバ定額ヨリ4圓50錢ヲ減ズベシト云フ。人數及一人前ノ費用如何。

(7) 或人1000圓ヲ二部ニ分チ,甲部ヲ年8分,乙部ヲ年1割ノ利率ニテ貸シ,一ケ年ノ利息合計88圓ヲ得タリト云フ。甲乙ノ金高ヲ求メヨ。

(8) 三位ノ整數アリ,百ノ位ノ數字ハ單位ノ數字ノ2倍ニシテ,十ノ位ノ數字ハ單位ノ數字ノ3倍ナリ。又此數ヨリ198ヲ引カバ轉倒數ヲ得ベシト云フ。本數ヲ問フ。

(9) 水夫アリ,或川ヲ漕ギ下ルニ毎時ノ速サ6里ニシテ,漕ギ上ル時間ハ下ル時間ノ2倍ヲ要スト云フ。毎時ノ水流ノ速サ如何。

(10) 兄ノ年齡ハ兄ガ弟ノ年齡ナリシトキノ弟ノ年齡ノ2倍ナリ。又弟ガ兄ノ今年ノ年齡トナルトキ二人ノ年齡ヲ合算セバ63トナルベシト云フ。兄弟二人ノ今年ノ年齡ヲ問フ。

(11) 二輪車アリ,一哩ヲ行クニ前輪ハ後輪ヨリ64回多ク廻轉シ,又十哩ヲ行クトキハ兩輪ノ廻轉ハ合セテ7040回ナリト云フ。各輪ノ周圍幾呎ナルカ。(但1哩=5280呎)。

(12) 甲ノ合金ハ金36匁,銅54匁ヨリ成リ,乙ノ合金ハ金27匁,銅9匁ヨリ成ル。今此兩種ノ

合金ヨリ金銅各21匁ヲ含有スル新合金ヲ造ラントスレバ甲乙各幾許ヲ要スルカ。 [海兵]

(13) 平行セル線路ヲ走ル二列車アリ,甲ノ前端ガ乙ノ後端ニ追及シテヨリ兩車相離ルルマデニ12秒ヲ要ス。若乙ノ速度ヲ前ノ一倍半トセバ24秒ヲ要スベシト云フ。甲ノ長サ60碼,乙ノ長サ72碼ナルトキハ,甲乙兩車ハ毎時幾哩ノ速度ナルカ。

(14) 甲樽ニハ酒12升,水18升ヲ容レ,乙樽ニハ酒9升,水3升ヲ容ル。兩樽ヨリ各幾升ヲ汲出シテ混合セバ,酒7升,水7升ノ混合酒ヲ得ベキカ。

(15) 二ケ所ノ停車場A,Bノ距離225粁アリ。Aニテ石炭100瓩ノ價3圓75錢,Bニテハ4圓35錢ナリ。然ラバAB線上ニテAヨリ送ルモBヨリ送ルモ同價ノ石炭ヲ得ベキ地點如何。但石炭100瓩ノ運賃ハ一粁8錢トス。

(16) $a+bx^3$ナル式ノ値ガ,$x=10$ナルトキ100ニシテ,$x=11$ナルトキ120ナレバ,$x=12$ナルトキノ値如何。 [商船]

第五章

一元及二元ノ一次方程式ノ根ノ公式

108. 一般ノ一元一次方程式。 一元一次方程式ニテ x ヲ含ム項ヲ左邊ニ移シ,殘ノ項ヲ右邊ニ移ストキハ,常ニ次ノ如キ形トナル。

$$ax=b.$$

a ハ必0ニ非ズ。其故ハ a モシ0ナラバ,是レ一次方程式ニアラザレバナリ。

従テ　　$x=\dfrac{b}{a}$.

109. 吟味。 上ノ公式ニテ a 及 b ニ就キテ種種ノ假定ヲナシ,之ニ對應スル x ノ値ヲ檢査セントス。之ヲ稱シテ吟味ト云フ。

〔1〕 $b\neq0$. 此場合ニハ原方程式ニ適合スル x ハ唯一ニシテ,0ニ非ズ。

〔2〕 $b=0$. 此場合ニハ

$$x=\frac{0}{a}=0.$$

注意。今 a ニ微小ナル絶對値ヲ與フレバ x ノ絶對値ハ頗大トナル。

例ヘバ　$a=0{\cdot}0000001$ ト假定スレバ,

$$x=\frac{b}{0{\cdot}0000001}=10000000\times b$$

トナル。斯クシテ a ノ絶對値ノ愈減小スルニ従ヒテ,x ノ絶對値ハ愈増大ス。之ヲ略言シテ a ノ無限小ナル絶對値ニ對シテ x ハ無限大ナル絶對値ヲ取ルト云ヒ,此意義ニ於テ

$$\frac{b}{0}=\infty$$

ト記スコトアリ。

a ニ微小ナル絶對値ヲ與フルト同時ニ,b ニモ微小ナル絶對値ヲ與フレバ,

$$x=\frac{0}{0}$$

ニシテ,原方程式ハ $0\times x=0$ トナル。此式ハ x ノ値如何ヲ論ゼズ常ニ成立ス。即 x ノ値ハ不定ナリ。其故ハ總テノ有限數ト零トノ積ハ零ナレバナリ。

110. 一般ノ二元一次方程式.

二元 x, y ヲ含メル聯立方程式ヲ簡單ニスレバ,遂ニ次ノ形トナルベシ。

$$\begin{cases} ax+by=c & (1) \\ a'x+b'y=c' & (2) \end{cases}$$

但 a, b, c, a', b', c' ハ 0 又ハ任意ノ正數或ハ負數ナリ。又 a ト b トガ同時ニ 0 ナルコトナク,又 a' ト b' トガ同時ニ 0 ナルコトモナシ。又 a ト a' トガ同時ニ 0 ナルコトナク,又 b ト b' トガ同時ニ 0 ナルコトモナシ。一般ニハ a, b, a', b' ハ總テ 0 ニ非ズ。今此ノ如キ場合ノミヲ攻究セン。

解。y ヲ消去センガタメニ (1) ニ b' ヲ乘ジ, (2) ニ $-b$ ヲ乘ズレバ

$$ab'x+bb'y=cb'$$

$$-ba'x-bb'y=-bc'$$

ヲ得,此二式ヲ加フレバ

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'$$

トナル。故ニ $ab'-ba'\neq 0$ ナリトスレバ,

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}. \qquad (3)$$

同法ニテ

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}. \qquad (4)$$

注意。代入法又ハ比較法ニヨルモ (3) 及 (4) ヲ得ベシ。學ブ者宜シク之ヲ試ミルベシ。

111. 吟味。

〔1〕 $ab'-ba'\neq 0$. 此場合ニ於ケル x 及 y ノ値ハ各唯一ニシテ且有限ナリ(無限大ニ非ズ)。上ノ運算ハ此假定ニ依リタルナリ。

〔2〕 $ab'-ba'=0$, $cb'-bc'\neq 0$. 此場合ニハ y ノ値 (4) ノ分子ハ零ニ非ズ。其故ハ $ab'-ba'=0$ ナルガ故ニ, $ab'=ba'$ ナリ。從テ

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}.$$

又同法ニテ $cb'-bc'\neq 0$ ヨリ

$$\frac{c}{c'}\neq\frac{b}{b'}$$

ヲ得。故ニ又

$$\frac{c}{c'}\neq\frac{a}{a'}.$$

從テ $\qquad ac'\neq ca'$

ヲ得レバナリ。

サテ(3)及(4)ノ分子ハ零ニ非ズシテ分母ハ零ニ等シキガ故ニ, x 及 y ノ値ハ共ニ求ムルヲ得ズ。

注意。此理ヲ一層明瞭ナラシメンガタメニ原方程式(1)ノ兩邊ヲ b ニテ除シ, (2)ノ兩邊ヲ b' ニテ除スレバ,

$$\frac{a}{b}x+y=\frac{c}{b},$$

$$\frac{a'}{b'}x+y=\frac{c'}{b'}$$

ヲ得,此二式ハ兩立スルヲ得ズ。何トナレバ $ab'=ba'$ 及 $cb'\neq bc'$ ヨリ

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}\ 及\ \frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'}$$

ヲ得ルガ故ニ二ツノ方程式ノ左邊ハ相等シク, 右邊ハ不等ナレバナリ。

〔3〕 $ab'-ba'=0$ 及 $cb'-bc'=0$. 此場合ニハ $ab'=ba'$ 及 $cb'=bc'$.

從テ　$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\ 及\ \frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}$$

ナルガ故ニ,

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}\ 即\ ac'=ca'$$

ヲ得。故ニ(3)及(4)ノ分母子ハ皆零ニ等シクシテ, x, y ノ値ハ不定ナリ。

注意。此理ヲ一層明瞭ナラシメンガタメニ, 原方程式ヨリ

$$\frac{a}{b}x+y=\frac{c}{b},$$

$$\frac{a'}{b'}x+y=\frac{c'}{b'}$$

ヲ作ルベシ。然ルニ $ab'-ba'=0$ 及 $cb'-bc'=0$ ナルガ故ニ

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'},\ 及\ \frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$$

ナリ。故ニ上ノ兩方程式ハ畢竟同一ニシテ獨立ニアラズ(第97節參照)。

問題四十二

次ノ文字方程式ヨリ x, y, z ヲ求メヨ。

(1)　$ax-m=n-bx.$

(2)　$a^2(x-a)+b^2(x-b)=abx.$

(3)　$7ax-3b=5ax+3a.$

(4)　$x=\frac{a}{b}(x-a)+\frac{b}{a}(x-b).$

(5)　$(a+b)x^2-a(bx+a)=bx(x-a)+ax(x-b).$

(6)　$b(a-x)-\frac{a}{b}(b+x)^2+ab\left(1+\frac{x}{b}\right)^2=0.$

(7) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1,\ \dfrac{x}{3a}+\dfrac{y}{6b}=\dfrac{2}{3}.$

(8) $x+y=2a,\ ax-by=bx+ay.$

(9) $ax+by=a^2+b^2,\ bx+ay=2ab.$

(10) $\begin{cases}(a+b)x+(a-b)y=2(a^2-b^2)\\ ax+by=a^2+b^2.\end{cases}$

(11) $y+z-x=a,\ z+x-y=b,\ x+y-z=c.$

(12) $x+a=y+b=z+c,\ x+y+z=a+b+c.$

(13) $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=1,\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=\dfrac{a}{b}.$

(14) $ax-ay-z=0,\ bx+by-z=0,\ x+y-2z=0.$

〔東京高[illegible]

第六章

根ノ解釋 問題ノ吟味

112. **負數ノ解答。** 第一篇ニ論ジタルガ如ク,多クノ量ハ之ヲ表スニ正數及負數ヲ用フ。

問題ノ解答ガ負數トナルトモ,常ニ必シモ之ヲ解ク能ハザル問題トナスベカラズ。若少シク題意ヲ改ムレバ,大抵此解答ヲ合理ナラシメ得ルモノナリ。

【例】 父ハ45歳ニシテ,子ハ17歳ナリ。今ヨリ幾年ノ後,父ノ年ガ子ノ年ノ3倍トナルカ。

解。xヲ所要ノ年數トスレバ,題意ニ依リテ

$$45+x=3(17+x),$$

$$\therefore\quad x=-3.$$

此負根ハ三年前ニ父ノ年ガ子ノ年ノ三倍ナリシ事ヲ指示ス。依テ問題ヲ次ノ如ク改ムレバヨシ。

父ハ45歳ニシテ,子ハ17歳ナリ。今ヨリ幾年前ニ父ノ年ガ子ノ年ノ3倍ナリシカ。

注意。 問題ノ解答ハ必正數ナルベキモノアリ。

人數物價等ノ如シ。此場合ニ於ケル負數ノ結果ハ題意ニ適合セズ,又合理ノ解釋ヲナシ難シ。是レ問題ノ不成立ヲ示スモノナリ。又分數ノ解答モ亦不合理ナルコトアリ,人數又ハ文字ノ數ニ於ケルガ如シ。

113. 不能ノ問題。 問題ノ文中矛盾又ハ背理ノ語アルトキハ,之ヲ解クコトヲ得ズ。

又未知數ノ數ヨリモ多ク獨立方程式ヲ得ル場合ニモ,問題ハ一般ニ不能ナリ。

【例一】或數ノ五分ノ二ニ4ヲ加ヘタルモノハ其數ノ十分ノ四ヨリ2ダケ大ナリ。原數如何。

解。題意ニヨレバ

$$\frac{2x}{5}+4=\frac{4x}{10}+2,$$

$$\therefore\quad 4x+40=4x+20,$$

$$\therefore\quad 40=20.$$

是レ不合理ナルコト明白ニシテ,此背理ハ問題ノ文中ニ含有セラル。

【例二】2圓30錢ニテ甲茶3斤ト乙茶2斤トヲ買ヒ得ベク,又5圓ニテ甲茶6斤ト乙茶4斤ヲ買

ヒ得ベシト云フ。各種一斤ノ價ヲ求メヨ。

解。甲茶ノ價ヲx錢,乙茶ノ價ヲy錢トスレバ,

$$3x+2y=230 \qquad (1)$$

$$6x+4y=500 \qquad (2)$$

方程式(1)ヲ2倍スレバ,

$$6x+4y=460 \qquad (3)$$

ヲ得。然ルニ(2)ト(3)トハ左邊同一ニシテ,右邊ハ不等ナリ,依テ本題ハ不能ナリ。

【例三】100圓ヲ甲乙二人ニ分チ,其所得甲ノ2倍ハ乙ノ5倍ヨリモ80圓少ク,又甲ノ3倍ト乙ノ2倍トノ和ヲ280圓ナラシメントス。二人ノ所得各如何。

解。甲ノ所得ヲx圓,乙ノ所得ヲy圓トスレバ,

$$x+y=100 \qquad (1)$$

$$2x=5y-80 \qquad (2)$$

$$3x+2y=280 \qquad (3)$$

方程式(1)ト(2)トヨリxヲ消去スレバ,

$$y=40$$

ヲ得,又(1)ト(3)トヨリxヲ消去スレバ,

$$y=20$$

ヲ得テ,前ノ値ト矛盾ス。x ノ値モ亦然リ。

故ニ同時ニ三ツノ方程式ニ適スル x, y ノ値ナシ。依テ本題ハ不能ナリ。

114. 不定ノ問題。 未知數ト既知數トノ關係ニ依リテ問題ノ不定トナルコトアリ。又未知數ノ數ヨリ少數ナル獨立ノ方程式或ハ同數ナレド獨立セザル方程式ヲ得レバ,問題ハ常ニ不定ナリ。

【例一】 或數ノ $\frac{17}{12}$ ト 9 トノ和ハ原數ト 12 トノ和ノ $\frac{3}{4}$ ヨリ原數ノ $\frac{2}{3}$ ダケ多シ。原數如何。

解。x ヲ所要ノ數トスレバ,

$$\frac{17}{12}x+9=\frac{3}{4}(x+12)+\frac{2}{3}x,$$

$$\therefore\quad 17x+108=9x+108+8x.$$

$$\therefore\quad 17x-8x-9x=108-108.$$

即 $$0x=0.$$

故ニ本題ハ不定ナリ。之ヲ詳言スレバ如何ナル數ニテモ題意ニ適ス。

【例二】 甲乙二數アリ,甲ノ3倍ハ乙ノ2倍ヨリ8多ク,甲ノ15倍ト乙ノ10倍トノ差ハ40ナリト云フ。各數如何。

解。x ヲ甲數トシ,y ヲ乙數トスレバ,

$$3x-2y=8,$$

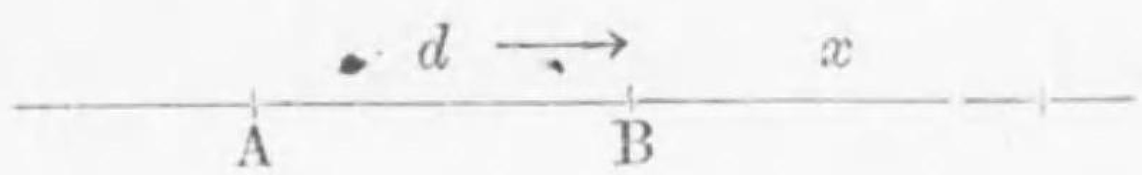
$$15x-10y=40.$$

此二方程式ハ獨立セルモノニ非ズ。故ニ二ツノ未知數ヲ有スル單一ノ方程式トナル,從テ本題ハ不定ナリ。

115. 問題ノ吟味。 既知數ガ文字ニテ表サレタル問題ニテ,根ヲ吟味ストハ,其根ガ解答トシテ合理ナルカ否カ,又ハ如何ナル場合ニ合理ニシテ如何ナル場合ニ不合理ナルカ等ヲ攷究スルコトナリ。

【例】 甲乙二人ノ飛脚アリ,甲ハ乙ヲ逐ヒテ同方向ニAB線上ヲ走リ,甲ガA點ニ在ルトキ乙ハB點ニアリ。A, B ノ距離ハ d 里ニシテ,速度ハ每時甲ハ a 里,乙ハ b 里ナリ。兩人ガ相會スル點ハBヲ距ルコト幾里ノ處ニアルカ。

解。B點ヨリ會點マデノ距離ヲ x 里トセバ,甲ノ走レルハ $(d+x)$ 里ナリ。然ルニ甲ガ $(d+x)$ 里



ヲ行ク時間ト乙ガx里ヲ行ク時間トハ相等シ。

故ニ
$$\frac{d+x}{a}=\frac{x}{b}.$$

之ヲ解ケバ
$$x=\frac{bd}{a-b}.$$

吟味。此分數式ノ分子ハ恒ニ正ナレド,分母ハ二人ノ速度ニ從ヒテ正或ハ負或ハ零トナル。故ニ三種ノ場合ニ就キテ吟味スルヲ要ス。

〔1〕 $a>b$. 甲ハ乙ヨリモ速ク,xノ値ハ正ニシテ,通常ノ意義ニテ題意ヨリ問題ヲ解クヲ得。

〔2〕 $a<b$. 甲ハ乙ヨリモ遲ク,xノ値ハ負ナリ。而シテ$\frac{b}{b-a}>1$ナルガ故ニ,xノ絶對値$\frac{bd}{b-a}$ハdヨリ大ナリ。故ニ兩人ハ旣ニA點ノ左方ニテ相會セシコトヲ知ル。如何ニモ乙ハ甲ヨリモ速カナルガ故ニ問題ニ言ヘル方向ニテハ二人ハ相會スル能ハザルナリ。

〔3〕 $a=b$. 此場合ニハ,原方程式ヨリ
$$d+x=x$$
ヲ得。故ニ之ニ適スル値ナシ。如何ニモ此場合ニハ兩人ハ速度相等シキガ故ニ常ニd里ノ距離ヲ保チ,決シテ相會スルコトナシ。

注意。若同時ニ$a=b, d=0$ト假定セバ方程式ハ$x=x$トナリ,xノ値ハ不定ナリ。如何ニモ此場合ニハ兩人常ニ相提ヘテ進ムベシ。

問題四十三

(1) 父ハ48歳ニシテ,子ハ12歳ナリ。今ヨリ幾年ノ後,父ノ年ガ子ノ年ノ4倍トナルベキカ。

(2) $\frac{5}{12}$ナル分數ノ分母子ニ如何ナル同數ヲ加フレバ,$\frac{2}{9}$トナルベキカ。

(3) 10ヲ二部ニ分チテ,其平方ノ差ヲ40ナラシメヨ。

(4) 分數$\frac{5}{6}$ノ分母子ヨリ如何ナル數ヲ引カバ$\frac{7}{8}$トナルベキカ。

(5) 甲乙二數アリ,甲ノ$\frac{1}{2}$ト乙ノ$\frac{1}{3}$トノ和ハ15ニシテ,甲ノ3倍ト乙ノ2倍トノ和ハ90ナリ。二數各如何。

第七章

一次不等式

116. 一數AガB他ノ數Bヨリ大ナルトキハA−Bハ常ニ正ニシテ,AガBヨリ小ナルトキハA−Bハ常ニ負ナリ(第11節注意參照)。

故ニ $A-B>0$ ト $A>B$ トハ同ジ事ヲ示シ,

$A-B<0$ ト $A<B$ トハ同ジ事ヲ示ス。

117. **不等式**トハ二ツノ代數式ノ不等ナルコトヲ示スモノヲ云フ。

例ヘバ $x+5>8$ ノ如シ。

不等式ヲ解クトハ,此不等式ガ成立ツガタメニ式中ノ一ツノ文字ガ取リ得ル値ノ限界ヲ求ムルコトヲ云フ。此文字ノ表ス數ヲ未知數ト云フ。

例ヘバ上ノ不等式ヲ解カンニ,前節ニヨリテ

$$x+5-8>0,$$

即 $$x-3>0,$$

故ニ $$x>3.$$

是レ所要ノ解答ナリ。

不等式 $x+5>8$ ハ一ツノ未知數 x ヲ含ミ,其 x ノ平方以上ヲ含マズ。依テ之ヲ一元一次不等式ト云フ。

118. 不等式ノ兩邊ニ同數ヲ加ヘ或ハ兩邊ヨリ同數ヲ引クモ,不等號ノ向ハ變ゼズ。

即 $A>B$ ナルトキハ $A\pm C>B\pm C.$

其故ハ $A>B$ ナルガ故ニ, $A-B$ ハ正ナリ。

然ルニ $$A-B=(A\pm C)-(B\pm C)$$

ナルガ故ニ $(A\pm C)-(B\pm C)$ モ亦正ナリ。

故ニ $$A\pm C>B\pm C.$$

故ニ次ノ結果ヲ生ズ。

不等式ノ一項ノ符號ヲ變ジテ之ヲ一邊ヨリ他邊ニ移スヲ得。

【例】 $$3x-2>2x+5$$

ナルトキハ $$3x-2x>5+2$$

即 $$x>7.$$

又 $A>B$ ナルトキハ,兩邊ヨリ $A+B$ ヲ引ケバ

$$-B>-A$$

故ニ不等式ノ兩邊ノ符號ヲ變ズレバ,不等號ノ向ヲ變ズベシ。

【例】 $13>7$ ナルトキハ $-13<-7$.

又 $-x<5$ ナルトキハ $x>-5$.

119. [1] 不等式ノ兩邊ニ同一ノ正數ヲ乘ズルモ又兩邊ヲ同一ノ正數ニテ除スルモ,不等號ノ向ハ變ゼズ。

$$A>B,\ m>0 \text{ ナルトキハ } mA>mB.$$

其故ハ $A-B$ ガ正ニシテ m ガ正ナルガ故ニ, $m(A-B)$ 即 $mA-mB$ ハ正ナリ。故ニ

$$mA>mB.$$

又同様ニ $$\frac{1}{m}A>\frac{1}{m}B.$$

此法則ニ依リテ不等式ノ分母ヲ拂フコトヲ得。

[2] 不等式ノ兩邊ニ同一ノ負數ヲ乘ズレバ不等號ノ向ハ變ズ。

何トナレバ,負數ヲ乘ズルハ正數ヲ乘ジテ然ル後ニ符號ヲ變ズルニ同ジケレバナリ。

注意。不等式ノ兩邊ニ符號ノ判明セザル數ヲ乘ズベカラズ。

120. 次ニ一次不等式解法ノ例ヲ示サン。

【例】 $5x-\frac{1}{4}>7+\frac{17x}{3}$. ヲ解ケ.

解。兩邊ニ 4×3 即 12 ナル正數ヲ乘ズレバ

$$60x-3>84+68x,$$

$$\therefore \quad 60x-68x>84+3.$$

即 $$-8x>87.$$

此兩邊ヲ負數 -8 ニテ除スレバ

$$x<-\frac{87}{8}.$$

故ニ $-\frac{87}{8}$ ヨリ小ナル x ノ總テノ値ハ,所題ノ不等式ニ適合ス。

問題四十四

次ノ不等式ヲ解ケ (1)－(5).

(1) $\frac{1}{15}x<\frac{7}{3}$. (2) $-x>-7$.

(3) $5x-8<3x+2$. (4) $x-\frac{5}{7}>\frac{2}{9}x+2$.

(5) $\frac{3x}{8}-\frac{2x-1}{12}>\frac{3x+1}{6}-\frac{5}{4}$.

次ノ不等式ニ適スル x ノ正ノ整數値ヲ求メヨ (6)－(7).

(6) $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}<\frac{1}{4}(x+2)+\frac{1}{3}x<\frac{1}{2}(x-4)+3$.

(7) $\frac{3x}{4}>\frac{x}{5}+1$,　$\frac{7}{5}x-1<\frac{2x}{3}+2$.

(8) $a\neq b$ ナルトキハ $a^2+b^2>2ab$.

(9) $a\neq b$ ニシテ，a ト b トガ同符號ノ數ナルトキハ $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$.

(10) $a+b$ ガ正ナルトキハ $\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. 但 $a\neq b$.

第四篇

約數及倍數

第一章

因數分解法

121. 乘法ニテハ二因數ヲ知リテ其積ヲ求メタリ。逆ニ積ヲ知リテ其因數ヲ求ムルコトヲ因數分解ト云フ。

122. **各項共通ノ因數。** 多項式ノ各項ニ共通ノ因數アルトキハ之ヲ括弧ノ外ニ置キ，其他ヲ其儘括弧ノ內ニ置クベシ。

【例一】 $am+bm-cm=m(a+b-c)$.

是レ配分法則ヲ逆ニ適用シタルナリ。(第 40 節參照)。

【例二】 $(a+b)x+(a+b)y+(a+b)z$

$=(a+b)(x+y+z)$.

【例三】 $18a^3b-27a^2b^2+45ab$

$=9ab(2a^2-3ab+5)$.

【例四】 $x^3-5x^2+x-5=x^2(x-5)+1(x-5)$

$$=(x-5)(x^2+1).$$

問題四十五

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) x^2-xy. (2) $5a^2b+10ab$. (3) $15x^2-5x$.

(4) $4x^3y-40x^2y^2+12xy^3$. (5) $a^3+5a^2+\frac{1}{3}a$.

(6) $x(a+b)+y(a+b)-5(a+b)$.

(7) $(m+n)^2x^2+(m+n)^2y^2$. (8) $7(m-n)x+m-n$.

(9) $(x^2+xy)a^2+(x^2+xy)ab$. (10) $a-b-(a-b)x$.

(11) $x^3+2x^2+5x+10$.

(12) $a^2-3ab+2ab-6b^2$.

(13) $am+bm+cm-an-bn-cn+ap+bp+cp$.

123. 二項式ノ平方。 次ノ公式ノ左邊ニ當ルモノハ,之ヲ二項式ノ平方トナスヲ得(第57節參照)。

$$A^2+2AB+B^2=(A+B)^2.$$

【例一】 $9a^2+12ab+4b^2=(3a)^2+2(3a)(2b)+(2b)^2$

$$=(3a+2b)^2.$$ 答。

【例二】 $-x^2-y^2+2xy=-(x^2-2xy+y^2)$

$$=-(x-y)^2.$$ 答。

【例三】 $(m+5n)^2+2(m+5n)(3m-n)+(3m-n)^2$

$$=\{(m+5n)+(3m-n)\}^2$$

$$=(4m+4n)^2=16(m+n)^2.$$ 答。

問題四十六

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) x^2+6x+9. (2) $x^2+36-12x$.

(3) $x^2+x+\frac{1}{4}$. (4) $5a^2+10ab+5b^2$.

(5) $4a^2x^2+4abx+b^2$. (6) $-3m^2-6m-3$.

(7) $(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$. (8) $x^2-3xy+\frac{9}{4}y^2$.

(9) $(a-b)^2-2(a-b)(c+d)+(c+d)^2$.

(10) $(x^2-5x+4)^2+2(x^2-5x+4)(5x-3)+(5x-3)^2$.

(11) $11(m+2n)^2-88(m+2n)(m-n)+176(m-n)^2$.

124. 二式ノ平方ノ差。 次ノ公式ノ左邊ニ當ルモノハ,之ヲ和ト差トノ積トナスヲ得(第58節參照)。

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B).$$

【例一】 $25x^2-16y^2=(5x)^2-(4y)^2$

$=(5x+4y)(5x-4y)$. 答。

【例二】 $(a+b+c+d)^2-(a+b-c-d)^2$

$=(\overline{a+b+c+d}+\overline{a+b-c-d})(\overline{a+b+c+d}-\overline{a+b-c-d})$

$=2(a+b)\times 2(c+d)$

$=4(a+b)(c+d)$. 答。

注意一。 本節ノ公式ヲ應用シテ,數ノ計算ヲ簡單ニ成シ得ルコトアリ。

例ヘバ $75^2-25^2=(75+25)(75-25)$

$=100\times 50=5000$.

注意二。 A^2+B^2 ハ之ヲ因數ニ分解スルヲ得ズ。

問題四十七

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) a^2-1　(2) $b^2c^2-4d^2$.　(3) $\frac{1}{4}m^2-\frac{4}{9}n^2$.

(4) a^4-b^4.　(5) a^8-b^8.　(6) $(a+b)^2-9c^2$.

(7) $(a+b)^2-(c+d)^2$.　(8) $x(a-b)^2-x(c-d)^2$.

(9) $9(m-n)^2-4(m+n)^2$.　(10) $a^2-2ab+b^2-c^2$.

(11) $x^2+4x+4-y^2-2y-1$

(12) $a^2+2ab+b^2-c^2+2cd-d^2$.

(13) $7(4x+3y)^2-7(2x-5y)^2$.

(14) $-1+x^4$.　(15) $(a+b+c)^2-(a-b-c)^2$.

(16) $4(x+y)^3-(x+y)$.

125. 二次三項式。

$$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b).$$

即 x^2 ノ係數ガ1ナルトキハ,加ヘテ x ノ係數トナリ,乘ジテ絶對項トナルガ如キ數ヲ按出スルコトヲ得バ,二次三項式ヲ一次ノ二項因數ニ分ツヲ得(第59節參照)。

【例一】 $x^2+12x+35=x^2+(5+7)x+5\times 7$

$=(x+5)(x+7)$. 答。

【例二】 $x^2-12x+35=x^2+(-5-7)x+(-5)(-7)$

$=(x-5)(x-7)$. 答。

【例三】 $x^2+2x-35=x^2+(-5+7)x+(-5)\times 7$

$=(x-5)(x+7)$. 答。

【例四】 $x^2-2x-35=x^2+(5-7)x+5(-7)$

$=(x+5)(x-7)$. 答

【例五】 $x^2+\frac{13}{6}xy+y^2=x^2+\left(\frac{9}{6}+\frac{4}{6}\right)xy+\left(\frac{9}{6}y\right)\left(\frac{4}{6}y\right)$

$$=\left(x+\frac{9}{6}y\right)\left(x+\frac{4}{6}y\right)$$

$$=\left(x+\frac{3}{2}y\right)\left(x+\frac{2}{3}y\right).$$ 答。

問題四十八

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ。

(1) $x^2+9x+20.$ (2) $x^2-14x+40.$

(3) $x^2-x-6.$ (4) $x^2+x-6.$

(5) $x^2-7x-44.$ (6) $x^2-13xy+42y^2.$

(7) $x^2+(a-c)x-ac.$ (8) $x^2-(a-c)x-ac.$

(9) $x^2-\frac{5}{2}x+1.$ (10) $a^2-a(b+c)+bc.$

(11) $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}.$

(12) $(a+b)^2-7(a+b)+12.$

(13) $x^2y^2+9xy-22.$

(14) $(x+y-z)^2+15(x+y-z)+56.$

(15) $x^2+2xy+y^2-x-y-2.$

126. 二次三項式。

$$acx^2+(bc+ad)x+bd=(ax+b)(cx+d).$$

x^2 ノ係數ガ1ナラザル場合ニハ,初項ト末項トヲ種種ニ因數ニ分解シテ乘ジ試ミレバ可ナリ。

【例】 $6x^2+x-12$ ヲ分解スレバ $(6x\pm1)(x\mp12)$ 或ハ $(2x\pm3)(3x\mp4)$ 或ハ $(6x\pm1)(x\mp12)$ ノ中ナルベシ。x ノ係數ヲ計算スルコトニ依リテ,

$$(2x+3)(3x-4)$$

ヲ得。

又ハ $6x^2+x-12=6x^2+9x-8x-12$

$$=3x(2x+3)-4(2x+3)$$

$$=(2x+3)(3x-4).$$ 答。

問題四十九

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

(1) $2x^2+5x+2.$ (2) $6x^2-13x+6.$

(3) $12x^2-7x+1.$ (4) $12x^2-x-1.$

(5) $3x^2-2x-5.$ (6) $3x^2+4x-4.$

(7) $6x^2-xy-y^2.$ (8) $30x^2+xy-20y^2.$

127. 立方ノ和又ハ差。

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2).$$

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2).$$

(第60節參照)。

問題五十

次ノ各式ヲ因數ニ分解セヨ.

(1) $8x^3+1.$　　(2) $27a^3-1000b^3.$

(3) $3x^4y+81xy^4.$　　(4) $\dfrac{x^3}{8}+\dfrac{y^3}{125}.$

(5) $a^6-b^6.$　　(6) $(a+b)^3-8b^3.$

(7) $(m+n)^3-(m-n)^3.$　　(8) $-64-x^3.$

128. 雜例。 列ベ換ヘ又ハ同數ヲ加減シテ,因數ヲ知リ得ル場合アリ。

【例一】 $a^4+a^2b^2+b^4$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解。 a^2b^2 ヲ加減スルトキハ,

$$\begin{aligned} a^4+a^2b^2+b^4 &= a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2 \\ &= (a^2+b^2)^2-(ab)^2 \\ &= (\overline{a^2+b^2}+ab)(\overline{a^2+b^2}-ab). \\ &= (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \quad \text{答。} \end{aligned}$$

【例二】 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ヲ因數ニ分解セヨ。

解。 a ノ昇冪ノ順ニ整頓スレバ,

$$\begin{aligned} & a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2 \\ &= a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c) \\ &= (b-c)[a^2-a(b+c)+bc] \\ &= (b-c)(a-b)(a-c). \quad \text{答。} \end{aligned}$$

【例三】 x^3-7x+6 ヲ因數ニ分解セヨ。

解。 x ノ係數ノ和ハ $1-7+6$ 即 0. 故ニ $x=1$ ナルトキ題式ハ 0 トナル。故ニ剩除定理(第67節參照)ニ依リテ $x-1$ ハ因數ノ一ナリ。依テ次ノ如クス(或ハ除法ヲ行フモ可ナリ)。

$$\begin{aligned} x^3-7x+6 &= x^3-x-6x+6 \\ &= x(x^2-1)-6(x-1) \\ &= (x-1)\{x(x+1)-6\} \\ &= (x-1)(x^2+x-6) \\ &= (x-1)(x-2)(x+3). \quad \text{答。} \end{aligned}$$

【例四】 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$

$$\begin{aligned} &= \{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}-24 \\ &= (\overline{x^2+5x}+4)(\overline{x^2+5x}+6)-24 \end{aligned}$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24-24$$
$$=(x^2+5x)(x^2+5x+10)$$
$$=x(x+5)(x^2+5x+10).$$ 答。

問題五十一

次ノ各式ノ因數ヲ求メヨ。

(1) a^6+b^6.　(2) x^4+4x^2+16.　〔海兵〕

(3) x^4-7x^2+9.　(4) $x^4-3x^2y^2+y^4$.

(5) a^2-b^2-a-b.　(6) $ax^3+bx+a+b$.

(7) x^4+4y^4.　(8) $a^8+a^4b^4+b^8$.

(9) $x^2+2x(y+z)+y^2+2yz$.

(10) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

(11) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$.

(12) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

(13) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$

(14) $(x+y+z)^3+yz(y+z)+xyz$.

第二章

一元高次方程式ノ解法

129. 因數分解法ヲ應用シテ一元高次方程式ノ根ヲ知リ得ルコトアリ。

例ヘバ方程式

$$(x+a)(x+b)(x-c)=0$$

ノ根ハ,左邊ノ各因數ヲ零ナラシムベキ x ノ値ニシテ,次ノ如シ。

$$x=-a,\ x=-b,\ x=+c.$$

依テ一元高次方程式ノ諸項ヲ皆左邊ニ移シ,之ヲ整頓シテ因數ニ分解スレバ,容易ニ其根ヲ得。

注意。 n 次方程式ハ n 個ノ根ヲ有シ之ヨリ多クヲ有セズ。

【例一】 方程式 $x^2=a^2$ ヲ解ケ。

解。　$x^2-a^2=0,$

$(x-a)(x+a)=0,$

故ニ　$x-a=0$　又ハ　$x+a=0.$

故ニ　$x=a$　又ハ　$x=-a.$

之ヲ $x=\pm a$ ト略記ス。

【例二】 次ノ四次方程式ヲ解ケ。

$$x^4-6x^3+11x^2-6x=0.$$

解。左邊ヲ因數ニ分解スレバ

$$x(x^3-6x^2+11x-6)=0.$$

第二因數ノ係數ノ和ハ $1-6+11-6=0$ 即 $x=1$ ナルトキ此因數ハ 0 トナル。故ニ $x-1$ ニテ整除セラル。依テ除法ニ依リテ,

$$x(x-1)(x^2-5x+6)=0$$

ヲ得。故ニ $x(x-1)(x-2)(x-3)=0$

$\therefore \quad x=0,\ x=1,\ x=2,\ x=3.$

問題五十二

次ノ方程式ヲ解ケ。

(1) $x^2-5x=0.$ (2) $x^2=mx.$

(3) $x^2+6=5x.$ (4) $x^2+11x+30=0.$

(5) $x^3=7x-6.$ (6) $x(x-1)=56.$

(7) $x^2+ax=cx+ac.$ (8) $x^2+9x=2x-12.$

(9) $x^4-13x^2+36=0.$ (10) $x^3=3x^2+28x.$

(11) $2x^2+10=9x.$ (12) $x^3+x^2+15=17x.$

(13) $x^3+6x^2+11x+6=0.$ (14) $x^4+5x^3+5x^2-5x=6.$

(15) $ax^2=bx.$

(16) $acx^2+bd=(bc+ad)x.$

(17) $x^6-14x^4+49x^2=36.$

(18) $ax^2-bx=a+b.$

問題五十三

(雜　題)

次ノ式ノ因數ヲ求メヨ (1)-(19).

(1) $12a^3-4a^2b-3ax^2+bx^2.$

(2) $204-29x^2+x^4.$

(3) $a^2x+abx+ac+aby+b^2y+bc.$

(4) $a^2-ay-210y^2.$ (5) $98-7x-x^2.$

(6) $1-64x^6.$ (7) $(x+y)^2-4z^2.$

(8) $9x^2-(3x-5y)^2,$ (9) $(2x-a-3)^2-(3-2x)^2.$

(10) $x^4-x^2-9-2a^2x^2+a^4+6x.$

(11) $x^6-4096.$ (12) $6x^2-x-77.$

(13) $a^2+x^2-(y^2+z^2)-2(yz-ax).$

(14) $1+2mn-(m^2+n^2).$ (15) $250(a+b)^3+2c^6.$

(16) $8(a+b)^2x^2-16(a^2-b^2)xy+8(a-b)^2y^2.$

(17) $a^2-9b^2+a+3b.$　(18) $x^4y-x^2y^3-x^3y^2+xy^4.$

(19) $x^4-2x^2a^2-2x^2b^2+a^4+b^4-2a^2b^2.$　〔農實〕

(20) x^3+Mx^2-Nx-6 ガ $x-2$ 及 $x-3$ ニテ整除セラルベキM及Nノ數値ヲ求メヨ。

(21) $x^3+Mx-2N$ ガ $x+3$ 及 $x-5$ ニテ整除セラルルガタメニハ,M及Nニ如何ナル數値ヲ與フベキカ。

(22) $x+y=3,\ xy=-10$ ヲ知リテ, $x^2+y^2,\ x-y,\ x^3+y^3$ ノ値ヲ求メヨ。

(23) $\alpha+\beta=m,\ \alpha\beta=n^2$ ナルトキ $\alpha^2+\beta^2$ 及 $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$ ノ値ヲ求メヨ。

(24) 下式ヲ證明セヨ。

$(y-z)^3+(x-y)^3-3(x-y)(y-z)(z-x)=(x-z)^3.$　〔商船〕

(25) $x-\dfrac{1}{x}=1$ ナラバ $x^2+\dfrac{1}{x^2}=3$ 及 $x^3-\dfrac{1}{x^3}=4$ ナリ。其證ヲ問フ。　〔商船〕

第三章

多項式ノ最大公約數

130. 單項式ノ最大公約數ハ既ニ第一篇第九章ニ述ベタリ。多項式ノ因數ガ容易ニ發見シ得ラルルトキハ,同樣ニ其最大公約數ヲ求ムルヲ得ベシ。

【例一】 $4a^2x^3$ 及 $2ax^3+4a^2x^2$ ノ最大公約數ヲ求メヨ。

解。
$$4a^2x^3=4a^2x^3.$$
$$2ax^3+4a^2x^2=2ax^2(x+2a).$$

故ニ最大公約數ハ $2ax^2$ ナリ.

【例二】 $ax^2+2a^2x+a^3,\ 2ax^2-4a^2x-6a^3,\ 3(ax+a^2)^2$ ノ最大公約數ヲ求メヨ。

解。第一式 $=a(x^2+2ax+a^2)=a(x+a)^2.$

第二式 $=2a(x^2-2ax-3a^2)=2a(x+a)(x-3a).$

第三式 $=3a^2(x+a)^2$

故ニ最大公約數 $=a(x+a).$

問題五十四

次ノ式ノ最大公約數ヲ求メヨ。

(1) $x^2+x,\ x^2-1,\ 5x^3+5.$

(2) $a^5+8a^2b^3,\ a^4b+a^3b^2-2a^2b^3.$

(3) $12x^2+x-1,\ 15x^2+8x+1.$

(4) $x^3-xy^2,\ x^3+x^2y+xy+y^2.$

(5) $x^3+2x^2y-xy^2-2y^3,\ x^3-2x^2y-xy^2+2y^3$

131. 若干ノ多項式ガ皆同一ノ文字ノ乘羃ヲ含ムトキハ,此等ノ諸式ヲ整除スル式ノ中ニテ其文字ニ就キテ最高次ノモノヲ其最大公約數ト云フ。

132. 二ツノ多項式ノ因數ガ容易ニ發見シ得ラレザルトキ,其最大公約數ヲ求ムル法則ハ次ノ如シ。

(法則) A及Bニテ二式ヲ示シ,之ヲ共通ノ文字ノ降羃(又ハ昇羃)ノ順ニ整頓シテAヲBヨリ低次ナラズト假定セヨ。AヲBニテ除シ,次ニ殘餘ヲ法トシBヲ實トシテ除法ヲ行ヒ,次ニ新殘餘ニテ第一殘餘ヲ除シ,第三殘餘ニテ第二殘餘ヲ除シ,逐テ此ノ如クシテ遂ニ殘餘ナキニ至レバ最後ノ法ハ所要ノ最大公約數ナリ。

上ノ如ク除法ヲ續クルトモ殘餘ヲ得ルトキハ,最大公約數ナシ。

此方法ハ算術ニ於ケルモノト大差ナシ。

注意一。多項式ニ單項因數アラバ之ヲ取去リ,然ル後ニ上ノ法則ヲ適用スベシ。共通ノ單項式アルトキハ,之ヲ最大公約數ノ一部トス。

注意二。AガBニテ整除セラルルトキハ,Bガ所要ノ最大公約數ナリ。

【例一】次ノ二式ノ最大公約數ヲ求メヨ。

$$4x^2-8x-5,\ 12x^2-4x-65.$$

運算。

$$\begin{array}{l}
4x^2-8x-5)12x^2-\ 4x-65(3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{12x^2-24x-15} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 10)20x-50 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ 2x-\ 5)4x^2-8x-5(2x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{4x^2-10x} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2x-5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+2x-5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

答。$2x-5.$

上ノ運算ヲ通常次ノ如ク略記ス。

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
2x & 4x^2-\ 8x-5 & 12x^2-\ 4x-65 & 3 \\
 & 4x^2-10x & 12x^2-24x-15 & \\
\cline{2-2}\cline{3-3}
+1 & +\ 2x-5 & 10)\underline{20x-50} & \\
 & +\ 2x-5 & 2x-\ 5 & \\
\cline{2-2}
 & 0 & &
\end{array}
$$

答。$2x-5$

注意。 $20x-50$ ヲ最大公約數トスルモ不可ナシ。サレド上ノ如クスルヲ常トス。

【例二】 $3x^3-x^2-2x-16$, $2x^3-2x^2-3x-2$ ノ最大公約數ヲ求メヨ。

運算。

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
 & 3x^3-x^2-2x-16 & 2x^3-2x^2-3x-2 & \\
3 & 6x^3-2x^2-4x-32 & 4x^3-4x^2-6x-4 & x \\
 & 6x^3-6x^2-9x-\ 6 & 4x^3+5x^2-26x & \\
\cline{2-2}\cline{3-3}
4x+13 & 4x^2+5x-26 & -9x^2+20x-4 & \\
 & 4x^2-8x & -36x^2+80x-16 & -9 \\
\cline{2-2}
 & +13x-26 & -36x^2-45x+234 & \\
\cline{3-3}
 & +13x-26 & 125)\underline{125x-250} & \\
\cline{2-2}
 & 0 & x-2 &
\end{array}
$$

答。$x-2$.

【例三】 次ノ二式ヲ同時ニ0ナラシムベキxノ値如何。

$$3x^3-x^2-2x-16,\quad 2x^3-2x^2-3x-2.$$

解。 前ノ例ニ依リ最大公約數ハ$x-2$ナリ,故ニ

$$3x^3-x^2-2x-16=(x-2)(3x^2\ldots\ldots+8),$$

$$2x^3-2x^2-3x-2=(x-2)(2x^2\ldots\ldots+1).$$

故ニ所題ノ二式ガ0ナルガタメニハ

$$x-2=0,$$

即

$$x=2.$$

133. 法則ノ證明。 前節ノ法則ハ次ノ二ツノ理ヨリ生ズ。

[1] 多項式 C ガ多項式 A ノ約數ナラバ, C ハ mA ノ約數ナルベシ。

[2] C ガ二式A, B ノ公約數ナラバ, C ハ mA$\pm n$B ノ約數ナルベシ,但 m, n ハ任意ノ數又ハ整式トス。

其故ハ A÷C$=a$, B÷C$=b$ トスレバ,

$$mA\pm nB=maC\pm nbC$$
$$=(ma\pm nb)C.$$

サテ之ヨリ法則ヲ證明セン。

AヲBニテ除シタル商ヲQ,殘餘ヲRニテ表セバ

$$A-QB=R.$$

故ニA及Bノ各公約數ハRノ約數ナリ。故ニA及Bノ各公約數ハB及Rノ公約數ナリ。

又

$$A=QB+R.$$

故ニB及Rノ各公約數ハAヲ整除シ得ベク，從テB及Rノ各公約數ハA及Bノ公約數ナリ。之ニ依リテ A, Bノ公約數トB, Rノ公約數トハ異ナルコトナシ。

BヲRニテ除シタル殘餘ヲR′トシ，RヲR′ニテ除シタル殘餘ヲR″トシ，R′ハR″ニテ整除セラレタリト假定セヨ。

然ルトキハ，上ノ理論ヲ適用スレバR′, R″ノ各公約數ハA, Bノ公約數ニシテ，A, Bノ各公約數ハR′, R″ノ公約數ナルコトヲ知ル。

然ルニR′, R″ノ最大公約數ハ明ニR″ナリ。故ニA, Bノ最大公約數モ亦R″ナリ。尙進ムモ同樣ナリ。

上ノ理論ヨリ次ノ結果ヲ生ズ。

二式ノ各公約數ハ其最大公約數ノ約數ナリ。

若干ノ多項式ノ公約數ノ約數ハ又諸式ノ公約數ナリ。

134. 三ツ以上ノ多項式ノ最大公約數。

(法則) 三ツノ多項式A, B, Cノ最大公約數ヲ求ムルニハ，先AトBトノ最大公約數Gヲ求メ，次ニGトCトノ最大公約數G′ヲ求ムベシ。然ルトキハG′ハ所要ノ最大公約數ナリ。

四ツ以上ノ場合モ亦之ニ準ズ。

問題五十五

次ノ二式ノ最大公約數ヲ求メヨ。(1)-(3).

(1) $x^4+3x^3+9x^2+12x+20,\ x^5+6x^3+6x^2+8x+24.$

(2) $x^5-x^4-3x^3+x^2+3x+1,\ x^4-x-3x^2+2x+2.$

(3) $a^3-5a^2b-99ab^2+40b^3,\ a^3-6a^2b-86ab^2+35b^3.$

次ノ各二式ヲ同時ニ零ナヲシムベキxノ値如何 (4)-(5).

(4) $x^4-x^3+2x^2-x-1,\ 2x^4-2x^2+x-1.$

(5) $7x^3-32x^2+27x+18,\ 2x^3-5x^2-13x+30.$

(6) $3x^3-4x^2-5x+2,\ 6x^3-17x^2+11x-2$, 及 $3x^3-x^2-12x+4$ ノ最大公約數ヲ求メヨ. 〔海機〕

第四章

多項式ノ最小公倍數

135. 多項式ノ因數ガ容易ニ知ラルルトキハ,單項式ノ場合(第75節)ト同様ニ其最小公倍數ヲ求メ得ベシ。

【例】 $6x^3(a-x)$, $4ax^2(x^2-a^2)^2$, $5(x-a)^3$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

解。 $$6x^3(a-x)=-6x^3(x-a),$$
$$4ax^2(x^2-a^2)^2=4ax^2(x+a)^2(x-a)^2,$$
$$5(x-a)^3=5(x-a)^3.$$

∴ 最小公倍數$=60ax^3(x-a)^3(x+a)^2$.

問題五十六

次ノ諸式ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

(1) x^2+x-42, $x^2-11x+30$, $x^2+2x-35$.

(2) $(a+b)^2-c^2$, $(b+c)^2-a^2$, $(c+a)^2-b^2$.

(3) $a-b-c$, $b+c-a$, $a+b+c$.

(4) x^2-5x+6, x^2-4, x^3-3x-2.

(5) $ab(x^2+1)+x(a^2+b^2)$, $ab(x^2-1)+x(a^2-b^2)$.

(6) $(bc^2-abc)^2$, $b^2(ac^2-a^3)$, $a^2c^2+2ac^3+c^4$.

(7) x^3-y^3, x^3y-y^4, $y^2(x-y)^2$, x^2+xy+y^2.

(8) a^2-b^2, a^3-b^3, $a^3-a^2b-ab^2-2b^3$

136. 若干ノ多項式ガ皆同一ノ文字ノ乘羃ヲ含ムトキハ,此等ノ式ニテ整除セラルル式ノ中ニテ,此文字ニ就キテ最低次ノ式ヲ其最小公倍數ト云フ。

137. ニツノ多項式ノ最小公倍數.

(法則) 先最大公約數ヲ求メ,之ヲ以テ一式ヲ除シ,其商ヲ他ノ式ニ乘ズベシ。

A, B ヲ二式トシ,其最大公約數ヲ G トシ,最小公倍數ヲ L トセヨ。

又 G ニテ A, B ヲ除シタル商ヲ A′, B′ トスレバ, A′ ト B′ トハ公約數ヲ有セズ。而シテ
$$A=A'.G,\quad B=B'.G$$
ナルガ故ニ $$L=A'.B'.G$$
ナリ。

故ニ $$L=A'.B=A.B'.$$

是レ此法則ノ證明ナリ。

依テ又 $$L\times G=A\times B.$$

即二式ノ最小公倍數ト最大公約數トノ積ハ二式ノ積ニ等シ。

【例】 $4x^2-8x-5$, $12x^2-4x-65$ ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

解。最大公約數ヲ求ムレバ $2x-5$ ヲ得(第132節例一參照)。

依テ $$4x^2-8x-5=(2x-5)(2x+1),$$

$$12x^2-4x-65=(2x-5)(6x+13).$$

$\therefore$ $$\text{最小公倍數}=(2x-5)(2x+1)(6x+13).$$

138. 二ツノ多項式ノ各公倍數ハ其最小公倍數ノ倍數ナリ。

若干ノ多項式ノ公倍數ノ各倍數ハ,諸式ノ公倍數ナリ。

139. 三ツ以上ノ多項式ノ最小公倍數。

(法則) 三ツノ多項式 A, B, C ノ最小公倍數ヲ求ムルニハ,先 A ト B トノ最小公倍數 L ヲ求メ,次ニ L ト C トノ最小公倍數 L′ ヲ求ムベシ。然ルトキハ L′ ハ所要ノ最小公倍數ナリ。

四ツ以上ノ場合モ亦之ニ準ズ。

問題五十七

次ノ二式或ハ三式ノ最小公倍數ヲ求メヨ。

(1) x^3-7x-6, $x^3+8x^2+17x+10$.

(2) x^4-1, $x^4+x^3+2x^2+x+1$.

(3) $x^3-9x^2+26x-24$, $x^3-12x^2+47x-60$.

(4) $6x^3-11x^2+5x-3$, $9x^3-9x^2+5x-2$,

$18x^4-45x^3+37x^2-19x+6$.

第 五 篇

分數式

第 一 章

分數式ノ化法及四則

140. 既ニ第二篇第八章ニテ簡易ナル分數式ノ化法及四則ヲ論ゼリ。今稍繁雜ナル分數式ノ計算ヲ示サントス。

141. 約分。

(法則) 兩項ノ最大公約數ニテ兩項ヲ除スベシ。

【例】 次ノ分數ヲ約分セヨ。

$$\frac{3x^3-x^2-2x-16}{2x^3-2x^2-3x-2}.$$

解。分母子ノ最大公約數ヲ求ムレバ, $x-2$ ヲ得(第132節例二參照)。故ニ $x-2$ ニテ兩項ヲ除シ,次ノ分數ヲ得。

$$\frac{3x^2+5x+8}{2x^2+2x+1}.\quad 答。$$

注意。容易ニ因數分解ヲ行ヒ得ベキトキハ,兩項ヲ分解シテ共通ノ因數ヲ去ルベシ。

142. 通分。

(法則) 諸分母ノ最小公倍數ヲ求メ,之ヲ各分母ニテ除シ,其商ヲ各自ノ分母子ニ乘ズベシ。

注意。最小公倍數ニ代フルニ任意ノ公倍數ヲ以テスルモ,妨ナシ。

【例】 $\frac{a}{x+a},\ \frac{x}{a-x},\ \frac{a^2}{x^2-a^2},\ \frac{x^2}{a^2-x^2}$ ヲ通分セヨ。

解。分母ヲ x ノ降冪(或ハ昇冪)ノ順ニ列スレバ,所題ノ分數式ハ

$$\frac{a}{x+a},\ \frac{-x}{x-a},\ \frac{a^2}{x^2-a^2},\ \frac{-x^2}{x^2-a^2}$$

トナル。而シテ分母ノ最小公倍數ハ x^2-a^2 ナルガ故ニ

$$\frac{a(x-a)}{x^2-a^2},\ \frac{-x(x+a)}{x^2-a^2},\ \frac{a^2}{x^2-a^2},\ \frac{-x^2}{x^2-a^2}$$

ハ所要ノ分數式ナリ。

143. 分數式ノ加減。

(法則) 同分母ノ分數式ヲ加減スルニハ分子ノミヲ加減シ,之ニ共通ノ分

母ヲ附スベシ。分母ノ異ナル場合ニハ,先之ヲ通分シテ,然ル後ニ之ヲ加減スベシ。

【例一】次ノ和ヲ求メヨ。

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}. \quad \text{〔陸士〕}$$

解。分母ノ最小公倍數ヲ $(a-b)(b-c)(c-a)$ トスレバ,

$$\text{所要ノ和}=\frac{-a}{(a-b)(c-a)}+\frac{-b}{(b-c)(a-b)}+\frac{-c}{(c-a)(b-c)}$$

$$=\frac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

依テ a, b, c ガ皆不等ナルトキハ,和ハ 0 トナル。a, b, c ノ中何レカ二ツガ相等シキ場合ニハ,和ハ $\frac{0}{0}$ 即不定トナル(第22節參照)。

【例二】次ノ差ヲ求メヨ。

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}-\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}.$$

解。分母ノ最小公倍數ハ $(x+y)(x-y)$ ナルガ故ニ,

$$\text{所要ノ差}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)-(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{(x^3-y^3)-(x^3+y^3)}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{-2y^3}{x^2-y^2}. \quad \text{答。}$$

別解。所要ノ差$=\left(x+\frac{y^2}{x+y}\right)-\left(x+\frac{y^2}{x-y}\right)$

$$=\frac{y^2}{x+y}-\frac{y^2}{x-y}$$

$$=y^2\left(\frac{x-y-x-y}{x^2-y^2}\right)$$

$$=\frac{-2y^3}{x^2-y^2}.$$

問題五十八

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ。

(1) $\frac{x^2-x-20}{5x^2+5x-60}$.　　(2) $\frac{a^2-(b+c+d)^2}{(a-b)^2-(c+d)^2}$.

(3) $\frac{3a^3b^2(a^2-b^2)}{4(a^2b-ab^2)^2}$.

(4) $\frac{x^3-x^2-13x+4}{2x^4+7x^3+5x^2+11x-4}$.　〔神戸高商〕

(5) $\frac{2x^3+5x^2y+xy^2-3y^3}{3x^4+3x^3y-4x^2y^2-xy^3+y^4}$.　〔陸士〕

(6) $\dfrac{a}{x(a-x)}-\dfrac{x}{a(a-x)}$. (7) $x-\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x^2}{x-1}$.

(8) $\dfrac{2x-5}{4x^2-1}+\dfrac{5}{2x-1}-\dfrac{3}{x}$. (9) $\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{2y}{x^2-y^2}-\dfrac{1}{x-y}$.

(10) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}$. 〔陸士〕

(11) $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}-\dfrac{x-1}{x^2-x+1}+\dfrac{2}{x^4+x^2+1}$.

(12) $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}$. (13) $2-\dfrac{x^2-11x+18}{x^2-6x+8}$.

(14) $\dfrac{a}{b}-\left(\dfrac{b}{a-b}+\dfrac{a}{b-a}\right)$.

(15) $\dfrac{m-(x-a)}{x+y}-\dfrac{m-(x+a)}{x-y}$.

(16) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$.

(17) $\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

(18) $\dfrac{a^2}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{b^2}{(x-b)(b-a)}$.

(19) $\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{b-c}+\dfrac{1}{c-a}$.

(20) $\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}+\dfrac{1}{(b-x)(c-x)}-\dfrac{1}{(x-a)(c-x)}$.

(21) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)}$

$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}$. 〔神戸高商〕

(22) $x=\dfrac{a}{b+c},\ y=\dfrac{b}{c+a},\ z=\dfrac{c}{a+b}$ ナルトキ $xy+yz+zx+2xyz$ ノ値ヲ求メヨ。 〔東京高師〕

144. 分數式ノ乘法。

(法則) 分數式ヲ相乘ズルニハ分子ト分子ト相乘ジ,分母ト分母ト相乘ジ,分母子ニ公約數アラバ之ヲ去ルベシ。

【例】 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\times\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}$ ヲ計算セヨ。

解。題式 $=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-3)}\times\dfrac{(x-3)(x-4)}{(x-1)(x-4)}=1$. 答。

145. 分數式ノ除法。

(法則) 分數式ニテ除スルニハ,其逆數ヲ乘ズベシ。

【例】 次ノ繁分數ヲ簡單ニセヨ。

$$\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{1-\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}}$$

解。分子 $=\dfrac{(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)}$.

分母 $=\dfrac{(a+b)^2-a^2-b^2}{(a+b)^2}=\dfrac{2ab}{(a+b)^2}$.

∴ 題式 $=\dfrac{4ab}{(a-b)(a+b)}\times\dfrac{(a+b)^2}{2ab}=\dfrac{2(a+b)}{a-b}$. 答。

【例二】次ノ連分數ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{x-2}{x-2-\cfrac{x}{x-\cfrac{x-1}{x-2}}}.$$

解。題式 $=\dfrac{x-2}{x-2-\cfrac{x(x-2)}{x^2-2x-x+1}}=\dfrac{1}{1-\cfrac{x}{x^2-3x+1}}$

$=\dfrac{x^2-3x+1}{x^2-4x+1}$. 答。

問題五十九

次ノ諸式ヲ簡單ニセヨ (1)-(16).

(1) $\dfrac{x^2+2x}{x^2-9}\times\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$.

(2) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2-c^2-2bc}\times\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2-b^2-c^2+2bc}$.

(3) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-5x+4}\div\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-9x+20}\times\dfrac{x^2-7x}{x^2-5x}$.

(4) $\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)\div\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$.

(5) $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+1\right)\times\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-1\right)$.

(6) $\left(1+\dfrac{12}{x+1}-\dfrac{4}{x+3}\right)\times\left(1+\dfrac{4}{x+5}-\dfrac{12}{x+7}\right)$. 〔海機〕

(7) $\left(\dfrac{x+2a}{a-2x}-\dfrac{a+2x}{x-2a}\right)\times\left(\dfrac{3}{2a-x}-\dfrac{1}{a-x}\right)$. 〔海兵〕

(8) $\dfrac{x+5+\dfrac{6}{x}}{1+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{x^2}}$. (9) $\dfrac{x-\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+1}$.

(10) $1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}$. (11) $\dfrac{1}{a-\cfrac{a^2-1}{a+\cfrac{1}{a-1}}}$.

(12) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}$.

(13) $\dfrac{\dfrac{a^2+b^2}{b}-a}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}\times\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}$. 〔海兵〕

(14) $\dfrac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x+1}+1}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x-1}-x}$.

(15) $$\frac{x+\dfrac{1}{y}}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}-\frac{1}{y(xyz+x+z)}.$$

(16) $$\left\{\frac{1}{3x^2-14xy+15y^2}+\frac{2}{3x^2-2xy-5y^2}\right\}$$
$$\div\left\{\frac{x+y}{x-3y}-\frac{x-y}{x+3y}\right\}.$$ 〔大阪高工〕

(17) $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$ ナルトキハ $\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}-\dfrac{y^2}{x^2-y^2}$ ノ値如何。

(18) $\dfrac{x}{b-c}=\dfrac{y}{c-a}=\dfrac{z}{a-b}=\dfrac{2}{3}$ ナルトキハ $x+y+z=0$.

(19) $2x=a+b$ ナルトキハ次ノ式ノ値如何。
$$\frac{x+2a}{2b-x}+\frac{x-2a}{2b+x}-\frac{4ab}{4b^2-x^2}.$$

(20) $a+b+c=0$ ナルトキハ
$$\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0.$$

第二章

分數方程式

146. 分數方程式トハ分母ニ未知數ヲ含メル分數ヲ有スル方程式ヲ云ヒ,然ラザルモノヲ整方程式ト云フ。

147. 一元分數方程式ノ解法。

【例一】 方程式 $\dfrac{3x-5}{2x+7}=0$ ヲ解ケ。

解。此方程式ノ左邊ハ 0 ニ等シキガ故ニ,分子ガ零ニシテ分母ガ零ナラザルヲ要ス。故ニ
$$3x-5=0,$$
$$x=\frac{5}{3}.$$

此値ニ對シテ分母ハ零ナラズ,故ニ $\dfrac{5}{3}$ ハ所要ノ根ナリ。

(驗算) $$\frac{3\times\dfrac{5}{3}-5}{2\times\dfrac{5}{3}+7}=\frac{5-5}{\dfrac{10}{3}+7}=\frac{0}{10\dfrac{1}{3}}=0.$$

【例二】 次ノ方程式ヲ解ケ。
$$\frac{x-2}{4x-5}=\frac{x-3}{4x-10}.$$

解。分母ノ最小公倍數 $(4x-5)(4x-10)$ ヲ乘ズレバ, $4x^2-8x-10x+20=4x^2-12x-5x+15$,

故ニ
$$-x=-5,$$
$$x=5.$$

(驗算) 左邊 $=\dfrac{5-2}{20-5}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$,

右邊 $=\dfrac{5-3}{20-10}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

【例三】 次ノ方程式ヲ解ケ。
$$\frac{x-8}{x-10}+\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-5}{x-7}+\frac{x-7}{x-9}.$$

解。各項ヨリ 1 ヲ引ケバ
$$\frac{2}{x-10}+\frac{2}{x-6}=\frac{2}{x-7}+\frac{2}{x-9}.$$

各項ヲ 2 ニテ除シ,項ヲ移セバ
$$\frac{1}{x-10}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-9}-\frac{1}{x-6}.$$

ヲ得,即
$$\frac{3}{(x-10)(x-7)}=\frac{3}{(x-9)(x-6)}.$$

分子ハ3ナルガ故ニ,分母ハ相等シカルベシ。
$$\therefore\quad (x-10)(x-7)=(x-9)(x-6),$$
$$\therefore\quad x^2-17x+70=x^2-15x+54,$$

$$-2x=-16,$$
$$x=8.$$

(驗算) 左邊 $=\dfrac{0}{-2}+\dfrac{4}{2}=0+2=2$,

右邊 $=\dfrac{3}{1}+\dfrac{1}{-1}=3-1=2$.

【例四】 次ノ方程式ヲ解ケ。
$$\frac{x-3}{2x+7}=\frac{x-3}{2x+5}.$$

解。兩邊ノ分子ハ同ジクシテ分母ハ不等ナリ。故ニ分子ハ零ナルベシ。其故ハ
$$\frac{x-3}{2x+7}-\frac{x-3}{2x+5}=0$$

ト記スレバ
$$(x-3)\left(\frac{1}{2x+7}-\frac{1}{2x+5}\right)=0.$$

而シテ第二因數ハ明ニ零ニ非ズ,故ニ第一因數ハ零ナリ。依テ
$$x-3=0,$$
$$x=3.$$

(驗算) 左邊 $=\dfrac{3-3}{6+7}=\dfrac{0}{13}=0$,

右邊 $=\dfrac{3-3}{6+5}=\dfrac{0}{11}=0$.

【例五】 次ノ文字方程式ヲ解ケ。

$$\frac{mx-a-b}{nx-c-d}=\frac{mx-a-c}{nx-b-d}.$$

解。 $b=c$ ナレバ,所題ノ方程式ハ恒等式ナリ。

即 x ハ不定ナリ,故ニ b ト c トヲ不等トス。

分母子ノ和ハ兩邊トモ相等シキガ故ニ,兩邊ニ 1 ヲ加フレバ

$$\frac{(m+n)x-a-b-c-d}{nx-c-d}=\frac{(m+n)x-a-c-b-d}{nx-b-d}.$$

トナル。此方程式ノ分母ハ明ニ不等ニシテ,分子ハ同一ナリ。故ニ

$$(m+n)x-a-b-c-d=0,$$

$$\therefore \quad x=\frac{a+b+c+d}{m+n}.$$

學ブ者宜シク之ヲ驗算スベシ。

問題六十

次ノ方程式ヲ解キ且之ヲ驗算スベシ。

(1) $\dfrac{x-6}{2x-3}=\dfrac{4}{17}$.　　(2) $\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{4x}=\dfrac{23}{12}$.

(3) $\dfrac{5}{3x-6}=\dfrac{15}{x-10}$.　　(4) $\dfrac{3x+1}{x-2}-\dfrac{3x-6}{x-1}=0$.

(5) $\dfrac{6x+7}{9x+6}=\dfrac{5x-5}{12x+8}+\dfrac{1}{12}$.

(6) $\dfrac{x+5}{x+4}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-15}{x-16}$.

(7) $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2+x+1}{x+1}=2x$.

(8) $\dfrac{2x-3}{2x-1}-\dfrac{2x-5}{2x-7}=1-\dfrac{4x^2-1}{4x^2-16x+7}$.

(9) $\dfrac{0{\cdot}3x-1}{0{\cdot}5x-0{\cdot}4}=\dfrac{0{\cdot}5+1{\cdot}2x}{2x-0{\cdot}1}$.

(10) $\dfrac{2x+1{\cdot}5}{2x-1{\cdot}125}=\dfrac{3x+1{\cdot}25}{3x-2{\cdot}25}$.

(11) $\dfrac{x+3}{x+6}+\dfrac{x+5}{x+8}=\dfrac{x+2}{x+5}+\dfrac{x+6}{x+9}$.

(12) $\dfrac{3x^2-15x+7}{x-5}=\dfrac{3x^2-9x+21}{x-3}$.

(13) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{5x^2-15x-8}{10(x-3)}-\dfrac{5x-9}{5}=1$.　　〔海兵〕

(14) $\dfrac{m(x+a)}{x+b}+\dfrac{n(x+b)}{x+a}=m+n$.

(15) $\dfrac{b-c}{bx-c}=\dfrac{a+c}{ax+c}$.　　(16) $\dfrac{ax^2}{b-cx}+a+\dfrac{ax}{c}=0$.

148. 多元分數方程式ノ解法。

二元ノ聯立方程式ヲ解クニハ,先分母ヲ拂ヒテ之ヲ簡單ニシ,所題ノ二方程式ヲ皆

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y=\mathrm{C}$$

ノ形ニ化シ然ル後消去法ヲ行ヒ, x, y ヲ求メ,其値ヲ原方程式ニ代入シテ,驗算ヲ行フベシ。

三元ノ場合ニハ,所題ノ三方程式ヲ皆

$$Ax+By+Cz=D$$

ノ形ニ化シ,然ル後ニ上ト同ジキ法ヲ行フベシ。

問題六十一

次ノ聯立方程式ヲ解ケ (1)－(6).

(1) $\begin{cases} \dfrac{13}{x+2y+3}+\dfrac{3}{4x-5y+6}=0 \\ \dfrac{3}{6x-5y+4}=\dfrac{19}{3x+2y+1} \end{cases}$

(2) $\dfrac{x+y}{y-x}=\dfrac{15}{8}$, $\quad 9x-\dfrac{3y+44}{7}=100.$

(3) $\begin{cases} \dfrac{6x+9}{4}+\dfrac{3x+5y}{4x-6}=\dfrac{13}{4}+\dfrac{3x+4}{2} \\ \dfrac{8y+7}{10}+\dfrac{6x-3y}{2y-8}=4+\dfrac{4y-9}{5} \end{cases}$

(4) $\dfrac{a}{b+y}=\dfrac{b}{3a+x}$, $\quad ax+2by=c.$

(5) $x-y-z=2$, $\quad \dfrac{x+y-z}{x-y-z}=8$, $\quad \dfrac{x+y+z}{x-y+z}+7=0.$

(6) $\dfrac{x-a}{y-b}=c$, $\quad a(x-a)+b(y-b)=d.$

(7) 或分數ノ分母子ニ1ヲ加フレバ$\dfrac{1}{2}$トナリ,分母子ヨリ,$\dfrac{2}{3}$ヲ引ケバ$\dfrac{7}{19}$トナル。原分數如何。

(8) 或汽車一時間ヲ走レル後,事故ノタメニ24

分間停止シ,其後ハ前ノ速度ノ五分ノ六ニテ進行シ,定時ヨリ15分後レテ先地ニ著セリ。若前ヨリモ五哩進ミテ同事故起リ,停止シタランニハ,更ニ2分遲レテ先地ニ到著スベカリシト云フ。原速度並ニ距離如何。

(9) 甲乙二人400米ノ競走ヲナスニ,甲ガ乙ニ25米ノ先發ヲ許ストキハ15秒勝チ,又甲ガ乙ニ36秒ノ先發ヲ許ストキハ40米負クベシト云フ。各400米ヲ走ル時間ヲ求メヨ。

(10) 或距離ヲ行クニ,毎時ノ行程ヲ四分ノ一里ヅツ增シタランニハ現ニ費セル時間ノ五分ノ四ニテ到著シタルベク,若又毎時ノ行程ヲ四分ノ一ヅツ減ジタランニハ現ニ費セル時間ヨリ二時間半多ク要シタルベシト云フ。其距離如何。〔農習〕

第三章

一元方程式ノ解法ニ關スル注意

149. **定義***。二ツノ一元方程式ガ同ジ根ヲ有スルトキハ之ヲ等價又ハ同値ナリト云フ。

例ヘバ $2x-1=7$ ト $2x=8$ トハ等價方程式ナリ。

150. **定理***。方程式ノ兩邊ニ同數ヲ加ヘ又ハ之ヨリ同數ヲ引ケバ,之ト等價ナル方程式ヲ得。

方程式 $A=B$ ト $A+M=B+M$ トハ等價ナリ。

其故ハ A ト B トヲ等シカラシムル根ハ,$A+M$ ト $B+M$ トヲモ等シカラシメ,其逆モ亦成立スレバナリ。

系*。整方程式ハ常ニ之ヲ等價ナル次ノ形ニ改ムルヲ得。

$$A=0.$$

*定義,定理,系ナル語ハ幾何學ニ於ケルモノト同意義ナリ。

分數方程式ハ之ヲ等價ナル次ノ形ニ改ムルヲ得。

$$\frac{A}{B}=0.$$

但 A ト B トハ未知數ニ關スル整式ナリ。

151. **定理**。方程式ノ兩邊ニ零又ハ無限大ニ非ザル同數ヲ乘ジ或ハ兩邊ヲ除スレバ,之ト等價ナル方程式ヲ得。

M ガ 0 ニ非ザル有限數ナルトキハ,方程式 $A=0$ ト $MA=0$ トハ等價ナリ。

152. **定理**。整方程式ノ兩邊ニ未知數ヲ含メル式ヲ乘ジテ得タル方程式ハ原式ト等價ナラズ。

整方程式 $$A=0 \qquad (1)$$

ノ兩邊ニ未知數ヲ含メル式 M ヲ乘ズレバ,

$$MA=0 \qquad (2)$$

ヲ得。サレド(1)ト(2)トハ等價ナラズ。

【證明】 M ガ整式ナルトキハ,方程式(1)ノ根ハ皆(2)ニ適合ス。依テ(1)ノ總テノ根ハ(2)ノ根ノ中ニアリ。

サレドモ(2)ノ根ハ必シモ(1)ニ適合セズ。其故ハ積 MA ガ 0 ナルガタメニハ,其因數ノ一ガ零ナレバ足ルヲ以テナリ。

例ヘバ $$(x-1)(x+3)=0$$

ノ根ハ,1 及 -3 ナレドモ,之ニ $x-5$ ヲ乘ジテ得タル方程式

$$(x-1)(x+3)(x-5)=0$$

ノ根ハ, 1, -3, 5 ナルガ如シ。

注意。 M ト A トガ整式ナルトキハ,方程式 MA=0 ノ根ハ,二ツノ方程式 A=0, M=0 ノ根ヲ合セタルモノナリ。

又 M ガ分數ナルトキハ,方程式(2)ノ根ノ數ハ(1)ノ根ノ數ヨリ少ナキコトアリ。

例ヘバ方程式

$$(x-1)(x+3)=0$$

ノ兩邊ニ $\frac{7}{2x+6}$ ヲ乘ズレバ

$$\frac{7}{2}(x-1)=0.$$

此方程式ノ根ハ唯1ノミナリ。 即分數式ヲ乘ジタルガタメニ原方程式ハ一根ヲ失ヘリ。

153. 定理。 A 及 B ガ未知數ニ關スル整式ニシテ公約數ヲ有セザルトキハ,分數方程式

$$\frac{A}{B}=0 \qquad (1)$$

ハ,整方程式 $$A=0 \qquad (2)$$

ト等價ナリ。

【證明】 假定ニヨレバ A ト B トハ公約數ヲ有セザルガ故ニ方程式 A=0 ノ根ハ B ヲ零ナラシメズ。 依テ (2) ノ根ハ (1) ノ根ナリ。 次ニ (1) ノ根ハ分子 A ヲ零ナラシムルヲ要ス,依テ必 (2) ノ根ナリ。 故ニ (1) ト (2) トハ等價ナリ。

例ヘバ方程式 $$\frac{6x-5}{2x+3}=0$$

ト $$6x-5=0$$

トハ等價ナリ。

注意。 分數方程式

$$\frac{A}{B}=0$$

ノ兩邊ニ整式 M ヲ乘ジテ得ベキ方程式

$$\frac{MA}{B}=0$$

ハ,一般ニ原方程式ト等價ナラズ。

例ヘバ $\dfrac{6x-5}{2x+3}=0$

及 $\dfrac{(x-7)(6x-5)}{2x+3}=0$

ハ等價ニアラス。

サレド特別ノ場合アリ。

例ヘバ $x+2+\dfrac{12}{x-5}=0$

及 $(2x-10)\left(x+2+\dfrac{12}{x-5}\right)=0$

ハ等價ナリ。其故ハ第一ノ方程式ハ

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-5}=0$$

ニシテ,第二ノ方程式ハ

$$2(x-1)(x-2)=0$$

ナレバナリ。

154. 分數方程式ノ解法。

(法則) 所題ノ分數方程式ノ總テノ項ヲ一邊ニ移シ,之ヲ分數式ニ化シ,之ヲ約分シ,然ル後其分子ヲ零ニ等シト置キタル方程式ヲ解クベシ。

【例一】 方程式 $\dfrac{3}{x-1}=5$ ヲ解ケ。

解。 $\dfrac{3}{x-1}-5=0,$

即 $\dfrac{8-5x}{x-1}=0,$

故ニ $8-5x=0,$

$x=\dfrac{8}{5}.$

是レ所要ノ根ナリ。

【例二】 次ノ分數方程式ヲ解ケ。

$$\frac{x^2-3x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}+2=0.$$ 〔陸士〕

解。左邊ヲ一項ニスレバ,

$$\frac{x^2-3x+x+1+2x^2-2}{x^2-1}=0,$$

即 $\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-1}=0,$

即 $\dfrac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(x+1)}=0,$

即 $\dfrac{3x+1}{x+1}=0,$

$\therefore\quad 3x+1=0,$

$x=-\dfrac{1}{3}.$

155. 分數方程式ヲ解クニハ必シモ前節ノ法則ニ從フヲ要セズ。唯斯ノ如キ計算ヲ行ヒタル

ト同樣ナル結果ニ到著スレバ可ナリ。

多クノ場合ニハ,方程式ノ兩邊中ニ含マルル總テノ分數式ノ分母ノ最小公倍數ヲ其兩邊ニ乘ジテ得ベキ方程式ヲ解ケバ,所要ノ根ヲ得ベシ。前節ノ例一及第147節ノ例ノ如キハ,皆此方法ニヨリテ解クヲ得。

サレド前節ノ例二ニテ此方法ヲ適用スルトキハ,x^2-1 ヲ乘ズルガ故ニ,整方程式

$$(x-1)(3x+1)=0$$

ヨリ

$$x=1,\quad x=-\frac{1}{3}$$

ヲ得。

注意。$x=1$ ハ明ニ原方程式ノ根ニアラズ,是レ x^2-1 ヲ乘ジタルガタメニ入リ來レル根ナリ。故ニ之ヲ棄ツベシ。斯ノ如ク計算ノ途中ニ入リ來レル根ヲ**無緣根**ト云フ。

上ノ方法ニ依リテ得タル根ガ所題ノ方程式中ノ分數ノ分母ヲ零ナラシムル場合ニハ,前節ノ法則ニ據ルヲ要ス。

問題六十二

次ノ方程式ヲ解ケ。(1)－(6).

(1) $\dfrac{1}{x-1}+7=\dfrac{x^2}{x-1}$.　(2) $\dfrac{x-1+\dfrac{6}{x-6}}{x-2+\dfrac{3}{x-6}}=3$.

(3) $\dfrac{3x-5}{x-1}-\dfrac{8}{x+1}+\dfrac{10x+6}{x^2-1}=3$.

(4) $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{2}{x^2-4x+3}=\dfrac{3}{x^2-5x+4}$.

(5) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{4}{x^2-4}+5$.

(6) $\dfrac{2x}{2x+3}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{x}{(x+2)(2x+3)}$.

(7) 方程式 $A=B$ ト方程式 $A^2=B^2$ トハ等價ナルカ否カ。

第六篇
無理數及虛數

第一章
無理數

156. 定義。 或數ノ若干乘根ガ精密ニ求メ得ベカラザルトキハ,之ヲ**無理數**又ハ**不盡根數***トエフ。之ニ對シテ整數又ハ分數ヲ**有理數**ト云フ。

例ヘバ $\sqrt{2}$ ハ無理數ナリ。而シテ此無理數ハ其平方ガ 2 トナルベキ正ノ數ナリトス,即

$$\sqrt{2}\sqrt{2}=2.$$

$\sqrt{2}$ ハ整數ニモ非ズ,分數ニモ非ズ,唯或二ツノ分數(有限小數)ノ間ニ夾マルルモノナリ。

* 實ハ不盡根數ニアラザル無理數アリ。其時ニハ有理數ニアラザル數ヲ總テ無理數ト云フナリ。例ヘバ圓周率 π 即 3.1415926 ..... ノ如シ。サレド此所ニハ狹キ意義ニ無理數ナル語ヲ用フ。廣キ意義ニ於ケル無理數ヲ不盡數ト云フコトアリ。之ニ對シテ有理數ヲ盡數ト云フ。

算術ニヨリテ $\sqrt{2}=1.4142......$ ナルガ故ニ

$$1<\sqrt{2}<2,$$

$$1.4<\sqrt{2}<1.5,$$

$$1.41<\sqrt{2}<1.42,$$

$$1.414<\sqrt{2}<1.415,\ 等。$$

$\sqrt{2}$ ハ有限ノ數字ニテ表スヲ得ズ。是レ之ヲ不盡根數ト名ヅクル所以ナリ。

平方根ノ不盡根數ヲ**二次不盡根數**ト云フ。

同樣ニ n 乘根ノ不盡根數ヲ n 次不盡根數ト云フ。

有理數ト不盡根數トノ積モ亦一ツノ不盡根數ナリ。例ヘバ $3\sqrt{2}$ ハ $\sqrt{9\times2}$ 即 $\sqrt{13}$ ニ等クシテ,亦不盡根數ナリ。

又 $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}$ ノ如キ式ハ無理式ナリト云フ(第27節參照)。

無理式ハ有理數ヲ表スコトアリ。

157. 定義。 或數 x ノ平方ガ他ノ數 A ニ等シケレバ,x ヲ A ノ**代數的平方根**ト云フ。

例ヘバ $x^2=7$ ナルトキハ $x=\pm\sqrt{7}$ ナリ。

$\sqrt{7}$ ヲ**算術的平方根**ト云フ。

同樣ニ $\sqrt[n]{A}$ ハ A ノ算術的 n 乘根ヲ表ス。

注意。本章ニハ算術的乘根ノミヲ論ズ。

158. 不盡根數ノ關係。

a, b, c, m, n ニテ正ノ整數ヲ表ストキハ,次ノ關係アリ。

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{ab}.$$

$$\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}.$$

$$(\sqrt[m]{a})^n=\sqrt[m]{a^n}.$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

$$\sqrt[m]{a}=\sqrt[mn]{a^n}.$$

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}.$$

此等ノ關係ニヨリテ不盡根數ニ計算ヲ施ス。

【例一】 $\sqrt{48}=\sqrt{16\times3}=\sqrt{16}\sqrt{3}=4\sqrt{3}.$

【例二】 $2\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^3\times4}=\sqrt[3]{32}.$

【例三】 $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\frac{4}{8}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

159. 無理多項式ノ計算。

【例一】 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+2\sqrt{a}\sqrt{b}+(\sqrt{b})^2$

$$=a+b+2\sqrt{ab}.$$

【例二】 $(m-\sqrt{n})^2=m^2-2m\sqrt{n}+n.$

【例三】 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b.$

【例四】 $\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})=\sqrt{6}+3+\sqrt{18}.$

【例五】 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{c}-\sqrt{d})$

$$=\sqrt{ac}+\sqrt{bc}-\sqrt{ad}-\sqrt{bd}.$$

160. 同類根數。

不盡根數ノ根號ヲ有スル部分ガ全ク同一ナルモノヲ,同類根數ト云フ。

一式中ノ同類根數ハ之ヲ簡約スルコトヲ得。

【例一】 $8\sqrt{2}+3\sqrt{2}-5\sqrt{2}=(8+3-5)\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

【例二】 $\sqrt{45}+\sqrt{20}=\sqrt{9\times5}+\sqrt{4\times5}$

$$=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}=5\sqrt{5}.$$

161. 同次根數。

根指數ヲ同ジクスル不盡根數ヲ同次根數ト云フ。

二ツ以上ノ不盡根數ハ之ヲ同次根數ニ化スルコトヲ得。

例ヘバ $\sqrt{3}$ ト $\sqrt[3]{5}$ トヲ同次根數ニ化スレバ,

$$\sqrt{3}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt[6]{27}.$$

$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{25}.$$

162. 分數式ノ分母ヲ有理化スル例。

【例一】 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

【例二】 $\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{\sqrt{c}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}$

$$=\frac{\sqrt{ac}-\sqrt{bc}}{a-b}.$$

問題六十三

次ノ數ヲ無理數ト有理數トノ積ニ化セヨ (1)－(5).

(1) $\sqrt{50}$.　(2) $\sqrt{125}$.　(3) $\sqrt{847}$.

(4) $\sqrt{36a^3b^2}$.　(5) $5\sqrt[3]{320}$.

次ノ各式ニテ,根數ノ係數ヲ根號ノ下ニ入ルベシ (6)－(10).

(6) $12\sqrt{5}$.　(7) $5\sqrt{4}$.　(8) $3\sqrt[3]{10}$.

(9) $\dfrac{x^2}{y}\sqrt{\dfrac{ay^2}{x^3}}$.　(10) $m^2\sqrt[3]{mn^2}$.

(11) $\sqrt{11}$ ト $\sqrt[3]{37}$ トハ何レガ大ナルカ。〔海兵〕

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ (12)－(24).

(12) $13\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{98}$.　(13) $3\sqrt{45}-\sqrt{20}-7\sqrt{5}$.

(14) $2\sqrt{14}\times\sqrt{21}\times5\sqrt{6}$.　(15) $8\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt{10}$.

(16) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{\dfrac{5}{4}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\times\sqrt{10}$.

(17) $5\sqrt[3]{4}+\dfrac{3}{2\sqrt[3]{2}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$

(18) $(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3)$.

(19) $(2\sqrt{13}+5\sqrt{2})(\sqrt{13}-\sqrt{2})$.

(20) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}-\sqrt{6})\times(\sqrt{2}+\sqrt{3}+5\sqrt{6})$.

(21) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})$

$\times(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})$.

(22) $(\sqrt{a}+2\sqrt{b}+3\sqrt{c})^2$.　(23) $(\sqrt{3x+5}+\sqrt{2x-8})^2$.

(24) $(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})\times(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})$.

次ノ分數ノ分母ヲ有理化セヨ (25)－(32).

(25) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}$.　(26) $\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[11]{y}}$.　(27) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

(28) $\dfrac{20}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.　(29) $\dfrac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}$.

(30) $\dfrac{2\sqrt{7}+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.　(31) $\dfrac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

(32) $\dfrac{9x^2-4}{x-\sqrt{(x^2-3x+2)}}$.

(33) $x=2\pm\sqrt{2}$ ナルトキ x^2-4x+2 ノ數値如何。

(34) $3x=1$ ナルトキ次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

$$\frac{2(1+2\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}-\frac{1-\sqrt{x}}{1-2\sqrt{x}}$$ 〔東京高商〕

(35) 次ノ分數ヲ變化シテ其分母ヲ有理式トシ,然ル後 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ ヲ代入シタル價ヲ求メヨ.

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}.$$ 〔海兵〕

163. 定理。 或數ノ平方根ハ一部分ガ有理數ニシテ他ノ部分ガ二次不盡根數ナル能ハズ。

(證明) 其故ハモシ $\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$ ナリトセバ，之ヲ平方シテ

$$n=a^2+2a\sqrt{m}+m,$$

從テ $$\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a}$$

ヲ得，即 $\sqrt{m}$ ハ有理數トナリ，假設ニ反スレバナリ。

164. 定理。 一部分ガ有理數ニシテ他ノ部分ハ二次不盡根數ナル二式相等シケレバ，有理數及無理數ノ部分ハ別別ニ相等シ。

$$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$$

ナルトキハ，$x=a$, $\sqrt{y}=\sqrt{b}$, 從テ $y=b$.

(證明) モシ然ラズトシ $a=x+c$ ナリトセバ，$x+\sqrt{y}=x+c+\sqrt{b}$，從テ $\sqrt{y}=c+\sqrt{b}$ ヲ得ルニ至レバナリ（前節參照）。

165. $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ ヲ簡單ニスル法。

【例】 $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{m}+\sqrt{n}$ ト假定セヨ。

之ヲ平方スレバ

$$5+2\sqrt{6}=m+n+2\sqrt{mn}.$$

故ニ $$\left.\begin{array}{r} m+n=5 \\ mn=6 \end{array}\right\}$$

今此二式ヨリ m, n ヲ求メンニ，恒等式

$$(m-n)^2=(m+n)^2-4mn$$

ヲ用フルトキハ，

$$(m-n)^2=25-24=1.$$

故ニ $$m-n=\pm1.$$

故ニ $$m=3, \quad n=2,$$

或ハ $$m=2, \quad n=3.$$

$$\therefore \quad \sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

同樣ニ $$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

但差ノ場合ニハ $m>n$ ナリトスルヲ要ス。

注意。 上ト同樣ナル方法ヲ行ヘバ，一般ニ

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right\}}\pm\sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right\}}$$

ヲ得レド，a^2-b ガ完全ナル平方數ニ非ザルトキハ右邊ハ却テ左邊ヨリ簡單ナラズ。故ニ此方法ノ有效ナル場合ハ甚多カラズ。

簡單ナル場合ニハ視察ニテ平方根ヲ求ムルヲ得ベシ。

【例一】 $\sqrt{(7+4\sqrt{3})}=\sqrt{(4+4\sqrt{3}+3)}$

$$=\sqrt{\{2^2+2\times2\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2\}}$$

$$=2+\sqrt{3}.$$ 答。

【例二】 $\sqrt{(2+\sqrt{3})}=\sqrt{\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{2}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$ 答。

問題六十四

次ノ各式ヲ簡單ニセヨ (1)-(10).

(1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$. (2) $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

(3) $\sqrt{11+2\sqrt{30}}$. [海兵] (4) $\sqrt{13+2\sqrt{40}}$.

(5) $\sqrt{15-4\sqrt{14}}$. (6) $\sqrt{4\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}}$.

(7) $\sqrt{\sqrt{27}+2\sqrt{6}}$. (8) $\frac{58}{\sqrt{(126+22\sqrt{5})}}$.

(9) $\frac{1}{\sqrt{(2a+2\sqrt{a^2-b^2})}}$. (10) $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

$\sqrt{2}=1.4142$, $\sqrt{3}=1.7321$ トシテ,次ノ式ヲ小數四位マデ計算セヨ (11)-(13).

(11) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (12) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$. (13) $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}$.

第二章

虛數

166. 定義。 數ノ正負ヲ論ゼズ其平方ハ正トナル。故ニ負數ノ平方根ハ正數ニモ非ズ,負數ニモ非ズ。依テ之ヲ**虛數**ト云フ。

例ヘバ $\sqrt{-9}$ ハ虛數ナリ,此數ハ $\sqrt{9(-1)}$ ニ等シキガ故ニ,之ヲ $3\sqrt{-1}$ ト記スヲ得。

若 $\sqrt{-1}$ ヲ i ニテ表セバ,

$$\sqrt{-9}=3i.$$

虛數ニ對シテ有理數及無理數ヲ**實數**ト云フ。

虛數計算ノ例ハ次ノ如シ。

$$\sqrt{-9}+\sqrt{-16}=3\sqrt{-1}+4\sqrt{-1}=7\sqrt{-1}.$$

$$\sqrt{-9}-\sqrt{-16}=3\sqrt{-1}-4\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}.$$

$$\sqrt{-25}\times\sqrt{-4}=5\sqrt{-1}\times2\sqrt{-1}=10(-1)=-10.$$

$$\sqrt{-25}\div\sqrt{-4}=5\sqrt{-1}\div2\sqrt{-1}=\frac{5}{2}.$$

第三ノ場合ハ殊ニ之ヲ注意スルヲ要ス。即 $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{a\times b}$ ハ唯 a, b ガ正ナルトキニノミ通用スル公式トス。

注意。 實數ト虚數トノ代數和ヲモ虚數ト云フコトアリ, $3-\sqrt{-5}$ ノ如シ。區別スルトキニハ此和ヲ複素數ト云フ。

問題六十五

次ノ各式ヲ簡約セヨ (1)−(10).

(1) $\sqrt{-36}-\sqrt{-1}+2\sqrt{-4}$.

(2) $(4+\sqrt{-3})(4-\sqrt{-3})$.

(3) $(\sqrt{3}+2\sqrt{-2})(\sqrt{3}-2\sqrt{-2})$.

(4) $\{5+7\sqrt{-1}\}^2$.

(5) $(\sqrt{-a}+\sqrt{-b})(\sqrt{-a}-\sqrt{-b})$.

(6) $\sqrt{-10}\times\sqrt{-3}$.　　(7) $1\div\sqrt{-1}$.

(8) $(2\sqrt{3}-6\sqrt{-5})\times(4\sqrt{3}-\sqrt{-5})$.

(9) $\sqrt{-12}\div\sqrt{-3}$.　　(10) $\sqrt{15}\div\sqrt{-3}$.

(11) $x=\sqrt{-3}$ ナルトキ x^2+9 ノ値如何。

(12) $x=3+2\sqrt{-1}$ ナルトキ $x^2-6x+14$ ノ値如何。

(13) $\sqrt{-5}+\sqrt{-3}-\sqrt{-2}$ ヲ單項式ニ化セヨ。

(14) $i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, \ldots\ldots$ ノ値ヲ求メヨ。

(15) $(a+bi)^2+(a-bi)^2$ ヲ簡單ニセヨ。

答

問題一

(1) $a=16,\ b=6$ ナルトキハ共ニ 5 トナル。

$a=5,\ b=3$ ナルトキハ共ニ 1 トナル。

(2) $x+y,\ x-y,\ xy,\ \dfrac{x}{y}$.　(3) $3(a+b)$.　(4) $n+1$.

(5) $2n+1,\ 2n+2$.　(6) $5a\div7b$.

(7) $a-b=(a+10)-(b+10)$.

(8) $\dfrac{5}{9}(f-32),\ c=35$.

問題二

(1) -5.　(2) $-\dfrac{1}{2}$.　(3) $+5, +3, +2, 0, -1, -2, -7$.

(4) -5圓.　(5) -18尺.　(6) 50圓ノ借金。

(7) $-\dfrac{2}{3}$.　(8) 300米ノ退却。　五尺降ル。

(9) 5時間前。　(10) 8間昇ル。

問題三

(1) 15度。　(2) -50圓即負債50圓。

(3) 75尺前。　(4) 零度。　(5) $42\dfrac{5}{6}$.

(6) -110.　(7) 0.　(8) -7.　(9) 7.

(10) 1.　(11) -8.　(12) 0.　(13) 11·38.

(14) $-2·47$.　(15) $-2\frac{2}{3}$.　(16) $4\frac{3}{10}$.　(17) $-2\frac{3}{8}$.

(18) 3.　(19) x.　(20) $-y$.

問題四

(1) -3.　(2) -33.　(3) $-\frac{3}{4}$.　(4) $-\frac{1}{3}$.

(5) 8.　(6) 46.　(7) 0.　(8) 7.

(9) 5.　(10) -2.　(11) 2.　(12) $-4\frac{1}{6}$.

(13) $-4·15$.　(14) 16·5.　(15) 1.　(16) -3.

(17) $\frac{1}{15}$.　(18) 39.　(19) 25.　(20) 相等。

(21) -5 ガ 3 ダケ大. $-\frac{4}{5}$ ガ $\frac{2}{15}$ ダケ小。

(22) 55 度。　(23) 235 尺。　(24) $-5\frac{1}{3}$.

(25) 緯度 35°, 經度 75°.　(26) $a>b$ ナルトキ殘金 $(a-b)$ 圓。$a=b$ ナルトキハ殘金ナシ。$a<b$ ナルトキ殘金 $(a-b)$ 圓即 $(b-a)$ 圓ノ不足。

(27) 5 町川上。

問題五

(1) 0.　(2) 165.　(3) -1.　(4) -1.

(5) -3.　(6) 168.　(7) 8.　(8) 0.

(9) -25.　(10) 8.　(11) $12, 8, 4, 0, -4, -8, -12, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12$.

問題六

(1) -1.　(2) -48.　(3) $-6·4$.　(4) -8.

(5) $-11\frac{2}{3}$.　(6) $-\frac{1}{7}$.　(7) 5.　(8) $-\frac{5}{33}$.

(9) $-\frac{21}{50}$.　(10) $\frac{14}{33}$.　(11) $-\frac{12}{11}$.　(12) $-3·2$.

(13) -4800.　(14) $\frac{1}{25}$.　(15) 2.　(16) $-17\frac{3}{5}$.

(17) 共 $= 36, -36, -36, 36$.　共 $= 4, -4, -4, 4$.

問題七

(1) $-5, \frac{2}{3}, 7a^2y, 6(a+b)$.　(2) 三項式.

(3) 五次式, x ニ關シ三次式, y ニ關シ四次式。

(4) 30, 1000, 13.　(5) 315.　(6) 6.

(7) -24.　(8) $47\frac{1}{4}$.　(9) 9.　(10) 7.

(11) 41.　(12) 6.　(13) -33.　(14) $11\frac{11}{12}$.

(15) $-\frac{1}{12}$.　(16) 0.　(17) 3.　(18) 504.

(19) -468.　(20) -70.　(21) $\frac{7}{30}$.　(22) $-\frac{3}{10}$.

(23) $\frac{7}{10}$.　(24) (1) 共 $= 64$ 又ハ共 $= 4$.
(2) 共 $= 16$ 又ハ共 $= -4$.　(25) $-8°\frac{1}{3}$, $-17°\frac{7}{9}$, $-5°$, $-25°$, $-20°\frac{5}{9}$.　(26) 400.　(27) 54.

問題八

(1) $2a.$　(2) $a.$　(3) $9x^2.$　(4) $3y.$

(5) $0.$　(6) $3m.$　(7) $\frac{1}{30}x.$

(8) $-6x-4y+1.$　(9) $11x^3-5x.$

(10) $\frac{54}{55}y.$　(11) $\frac{17}{30}a.$　(12) $\frac{5}{7}a^2b-\frac{4}{11}ab^2.$

問題九

(1) $3x+4y-8z.$　(2) $50-x.$

(3) $100x$ 錢。　(4) $\frac{y}{100}$ 圓。

(5) $\frac{100n}{m}.$　(6) $(100a+b)$錢, $\left(a+\frac{b}{100}\right)$ 圓。

(7) $ax+by+cz=3(m-n).$

(8) $\frac{5(x+y)}{a-b}-ab.$　(9) $\frac{50x+65y}{x+y}$錢。

(10) $2n, 2n+2, 2n+4.$　(11) $x^2+35.$

(12) $100x+10y+z.$　(13) $\left(\frac{m}{3}+\frac{m}{4}\right)$時。

(14) $\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{40}\right)x.$　(15) $\frac{100m-350t}{425}$ 冊。

(16) $\left(1+\frac{1}{m}\right)$倍。　(17) $a\left(1-\frac{1}{n}\right)^3.$　(18) $l\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n-1}.$

問題十

(1) $12m$　(2) $-2x.$　(3) $-12y.$　(4) $5x.$

(5) $6z$　(6) $8x^2.$　(7) $-xy.$　(8) $\frac{5}{6}x.$

(9) $-\frac{1}{3}y.$　(10) $a+b+c.$　(11) $3a-b.$

(12) $a+5b.$　(13) $3ab+18mn.$　(14) $3x+x^2+5x^3.$

(15) $a^3+3a^2+7a-5b-2b^2-6b^3.$

(16) $5x^3+10x^2+x-20.$　(17) $x+y.$

問題十一

(1) $2x+8y.$　(2) $29x.$　(3) $a+b+c.$

(4) $12x^2.$　(5) $a+b+c.$

(6) $-2a+2b+2d.$　(7) $2x^3-2x^2-8x+10.$

(8) $5x^4+4x^3+3x^2+2x-18.$

(9) $5(x+y)+m+n.$　(10) $-a+x+y.$

(11) $2x^2+\frac{21}{10}xy+\frac{9}{8}y^2.$　(12) $7\frac{x}{a}+6\frac{y}{b}-1.$

問題十二

(1) $(a-b)x.$　(2) $(3m+5n+7p-q)x.$

(3) $(a+b)x+(a-b)y.$　(4) $(cd+mn)x-by.$

(5) $(8a+7b+7)x+(-b-6)y.$

(6) $(a-m)x+(b-n)y+(c-p)z.$

(7) $(3a-3b)x+(-a-b)y+(c-d)z.$

(8) $\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{6}m\right)x+\left(\frac{2}{3}b+\frac{3}{5}n\right)y.$

問題十三

(1) $2x.$　(2) $37x.$　(3) $-5m.$

(4) $5a.$　(5) $41ax^2.$　(6) $6x+4y.$

(7) $7x^2y^2.$　(8) $-4ay.$　(9) $-4x^2.$

(10) $13x^2y$　(11) $-2x-5y.$　(12) $5x^3-5x^2+3x$

(13) $-5x+6.$　(14) $3a-2b+4c.$

問題十四

(1) $4a+2c.$　(2) $x+5y+4z.$

(3) $2x^2-2x-4.$　(4) $2a^2+4ab.$

(5) $3x^4-x^3-14x+18.$　(6) $2a+2b.$

(7) $x^2-4ax+3a^2.$　(8) $a-b+c-d.$

(9) $\frac{1}{5}a+\frac{5}{3}b+\frac{9}{8}c.$　(10) $-\frac{4}{7}x+\frac{1}{5}y-\frac{2}{33}z.$

(11) $6(x-y)-6(y-z).$

問題十五

(1) $2x.$　(2) $2y.$　(3) $4b-c.$

(4) $3x-3y+z.$　(5) $10x-7y+5z.$　(6) $a+a^3.$

(7) $2a+3c.$　(8) $3a-3b.$　(9) $16+6x.$

(10) $-5a.$　(11) $a-2c.$　(12) $-4by.$

問題十六

(1) $x-(a+b).$　(2) $x-(3b-2c).$

(3) $x-(-a-2y).$　(4) $x-(a+b-3).$

(5) $x-(a-x).$　(6) $x-(2m-n-2x).$

(7) $2a-3b+(-4c+d),\ 2a-3b-(4c-d).$

(8) $3a^4-2a^3+(-4a^2+a-1),$

$3a^4-2a^3-(4a^2-a+1).$

問題十七

(1) $35xy.$　(2) $-6b^2c.$　(3) $-12a^4.$

(4) $-6a^6.$　(5) $-60a^5.$　(6) $-12abxy.$

(7) $48m^4x^6.$　(8) $\frac{3}{140}x^3y^3z^2.$　(9) $2a^2b^2c^2.$

(10) $4a^6b^4c^6.$　(11) $-125x^6.$

問題十八

(1) $40ax+24bx.$　(2) $7a-7b.$

(3) $15ab+20ac-10ad.$　(4) $-7x^2+21x-14.$

(5) $12a^2b^3-9ab^5.$　(6) $9x^3-3x^2y+6xy^2.$

(7) $29x.$　(8) $-15m-8n+14p.$

(9) $3x+3y-15.$　(10) $5x^2-21x+24.$

(11) $127x-315.$　(12) $0.$

(13) $22ab-3ac.$ (14) $x+6y.$

(15) $17x-3y.$ (16) $\frac{23}{20}x+\frac{39}{20}y-\frac{\cancel{9}}{\cancel{4}}z.$ 27 20

問題十九

(1) $6a^2+23ab+20b^2.$

(2) $ax-bx+ay-by+az-bz.$

(3) $8ax+40bx-3ay-15by.$

(4) $20m^2+3n^2+2p^2-19mn+13mp-7np.$

(5) $2a^2+2ab-abx-b^2x-acy-bcy.$

(6) $ax-bx+cx-ay+by-cy-az+bz-cz.$

問題二十

(1) $x^2-3x+5.$ (3) $ax^3+bx^2-cx-d.$

(3) $3x^5+8x^4-x^3+2x^2-11x+5.$

(4) $x^4-2x^3y-4x^2y^2+2xy^3-5y^4.$

(5) $(n+1)x^3-(c+d)x^2+(b+m)x+a.$

問題二十一

(1) $10x^2+29x+21.$ (2) $2a^2+ab-3b^2.$

(3) $x^4+x^2-20.$ (4) $a^3+8b^3.$

(5) $x^3-1.$ (6) $60x^2-147xy+33y^2.$

(7) $2m^2+5mn+2n^2.$ (8) $9x^2-25y^2.$

(9) $x^4-1.$

(10) $4x^4+22x^3-41x^2+41x-5.$

(11) $x^5-6x^4+15x^3-13x^2-7x+20.$

(12) $a^8+a^4b^4+b^8.$ (13) $x^2-4y^2+12yz-9z^2.$

(14) $a^6-b^6.$

(15) $x^3+y^3-1+3xy.$

(16) $acx^2+bcxy+adxy+bdy^2.$

(17) $x^3+151x-264.$

(18) $42x^5-16x^4+112x^3-168x^2+38x-200.$

(19) $25a^7b-9a^5b^3+22a^4b^4-4a^3b^5+ab^7.$

(20) $5+(5a-1)x+(-a+5b+1)x^2+(a-b+5c)x^3$
$+(b-c)x^4+cx^5.$

(21) $\frac{1}{4}a^4+\frac{67}{180}a^3b+\frac{23}{60}a^2b^2-\frac{1}{15}ab^3-3b^4.$

(22) $-55.$ (23) $2ac-b^2.$ (24) $(a-b)^2.$

問題二十二

(1) $4x^2+12xy+9y^2.$ (2) $49m^2+70mn+25n^2.$

(3) $x^2+2x+1.$ (4) $x^2-x+\frac{1}{4}.$

(5) $a^2x^2+2abxy+b^2y^2.$

(6) $49p^2-140pq+100q^2.$

(7) $\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{3}mn+\frac{1}{9}n^2$.

(8) $x^4+2x^2y^2+y^4$. (6) $x^2+ax+\frac{1}{4}a^2$.

(10) $1-2x^2y^2+x^4y^4$. (11) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

(12) $9a^4+6a^3+31a^2+10a+25$.

(13) $\frac{9}{25}x^2-\frac{4}{49}y^2$ (14) $25x^6-9$.

(15) x^4-y^4. (16) $-a^2+b^2$. (17) $-x^2+2xy-y^2$

(18) $-x^2-2xy-y^2$. (19) $-a^2m^2+2abmn-b^2n^2$.

(20) $a^2+2ab+b^2-c^2$.

(21) $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

(22) $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz$.

(23) $x^4-10x^3+11x^2+70x+49$.

(24) $x^4+4x^3+4x^2-9$.

(25) $a^2-2ab+b^2-c^2+2cd-d^2$ (26) 89919.

(27) 99960004. (28) $a^6x^2-b^6y^2$. (29) a^8-b^8.

(30) $625a^4-450a^2b^2+81b^4$.

問題二十三

(1) x^2+6x+5. (2) $x^2+11x+30$.

(3) $x^2-11x+30$. (4) x^2+x-6.

(5) x^2-x-6. (6) $x^2+5mx+6m^2$

(7) $x^2+3xy+2y^2$. (8) $x^2-x-156$

(9) $x^2-2ax-15a^2$. (10) $a^2x^2+8ax+15$.

(11) $x^3-6x^2+11x-6$. (12) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$.

(13) $x^3-31x+30$. (14) m^3+n^3.

(15) $8x^3-27y^3$. (16) a^6+b^6.

問題二十四

(1) $14x$. (2) $3ab^2$. (3) -8. (4) $-\frac{3}{5}ax^3$.

(5) $7ac$. (6) $17ay$. (7) $-4a^3$. (8) $2ax$.

(9) $-14x^4y^3z^3$. (10) $8bx^3$.

問題二十五

(1) $2x+3y$. (2) $a+5$. (3) $3a-2b-4$.

(4) $2x^3+4x^2-x+3$. (5) $\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}y+z-2$.

(6) $x+2x^3-3x^5+4x^7$. (7) $a+b+c$.

(8) $-x^2+6x-1$. (9) 1. (10) $x+5y$.

問題二十六

(1) $x+3$. (2) $x+3$. (3) $x-4$.

(4) $x+2$. (5) $3x-5$. (6) $a+2x$.

(7) $a+b$. (8) $a-24$. (9) $a+11b$.

(10) a^2-ab+b^2. (11) $x+5$. (12) $3x+1$.

(13) $3a+4c$. (14) $8x+3y$. (15) $4x^2-x$.

(16) $x+\frac{1}{2}$. (17) $x-4$. (18) $y+1$.

(19) $2a^2-3a$. (20) $x^2-\frac{3}{4}x+1$.

(21) $\frac{1}{4}a^2-3ax+9x^2$. (22) $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$.

(23) $1+3x-5x^2+6x^3$. (24) $4x^2-9x-5$.

(25) $x+y$. (26) $a+b+c+d$.

(27) $(a-b)^2+2(a-b)c+c^2$.

問題二十七

(1) 2. (2) 整除ス。 (3) 1.

(4) 否。殘 28. (5) 整除ス。

(7) $2x-3=0$ 即 $x=\frac{3}{2}$ ナルトキ題式ハ 0 トナルガ故ナリ。 (8) 整除ス。 (11) 6. (12) 15. (13) -11.

問題二十八

(1) $1\frac{6}{23}$. (2) $\frac{5}{81}$. (3) $21x-14$. (4) 6.

(5) $\frac{1}{12}x-\frac{1}{60}y+\frac{11}{30}z$.

(6) $5a^4-3a^3b+3ab^3-5b^4$.

(9) $\frac{1}{16}a^4+\frac{1}{4}a^2b^2+b^4$.

(10) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$. (11) $3x+4y$.

(12) $a^3+b^3-3ab+1$. (13) $x^2+y^2+z^2+2xy-zx-yz$.

(14) $a^2+b^2+4c^2+2ab+2ac+2bc$.

(15) $4ab$. (16) 0.

問題二十九

(1) a^{x-3} (2) $2ab$. (3) 1. (4) $5xy^4$.

(5) $7a$. (6) $4(a+b)$.

問題三十

(1) $616abc$. (2) $abcx^3$. (3) abc.

(4) $60a^3b^3$. (5) $15a^5$. (6) $42a^2b^2$.

(7) $12x^3y^4z$. (8) $6ab(a+b)^2(a-b)^2$.

問題三十一

(1) $\frac{5}{6}x$. (2) $\frac{1}{20}z$. (3) $\frac{1}{15x}$.

(4) $\frac{12x+5y}{60}$. (5) $\frac{a+b+c}{abc}$. (6) $\frac{83}{60}y$.

(7) $\frac{5}{m}$. (8) $\frac{ab+c}{b}$. (9) $\frac{mx-ny}{m}$.

(10) $\frac{3b+2c}{3b}$. (11) $\frac{2a}{a+x}$. (12) $\frac{2}{x+5}$.

(13) $\frac{6}{x-5}$. (14) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$. (15) $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$.

問題三十二

(1) $\dfrac{2x}{5y}$.　(2) $\dfrac{22a^3}{b^4y}$.　(3) $\dfrac{6y}{x}$.

(4) $\dfrac{b(a+b)}{4a(a-b)}$.　(5) $\dfrac{5n}{2m}$.　(6) $\dfrac{(m+n)(a+b)}{xy(a-b)}$.

(7) $\dfrac{18}{25}xy$.　(8) $\dfrac{8}{9}$　(9) $\dfrac{x+y}{2y}$.　(10) $\dfrac{a}{b}$.

問題三十三

(1) 30.　(2) -15.　(3) 4.　(4) 6.

(5) 3　(6) -2.　(7) 3.　(8) 1.

(9) 5.　(10) 10.　(11) 5.　(12) 30.

(13) $\dfrac{5}{4}$.　(14) $3\dfrac{2}{7}$.　(15) -1.　(16) 2.

問題三十四

(1) 8.　(2) 60.　(3) 0.　(4) 5.

(5) 25.　(6) 20.　(7) 15.　(8) 13.

(9) 6.　(10) 17.　(11) $-\dfrac{1}{7}$.　(12) 4.

(13) 6.　(14) -6.　(15) -66.　(16) 12.

(17) $-\dfrac{2}{3}$.　(18) $3\dfrac{1}{7}$.　(19) 20.　(20) 8.

(21) $\dfrac{4}{7}$.　(22) $2\dfrac{1}{4}$.

問題三十五

(1) 12.　(2) 294, 42.　(3) 40, 60.

(4) 101, 102, 103, 104.　(5) 42, 44.

(6) 238 圓。　(7) 540.　(8) 6 里。

(9) 30 歲。　(10) 甲 4, 乙 26.

(11) 40 圓, 60 圓, 80 圓。　(12) 2, 4, 6, 8, 10 歲。

(13) 男 40 錢, 女 20 錢。　(14) 三年。

(15) 羅紗 6 圓, 絹 12 圓。　(16) 長子 50 圓, 次子 100 圓, 末子 150 圓。　(17) 600 圓。

(18) 8, 9.　(19) 3 時 16 分 $21\dfrac{9}{11}$ 秒。

(20) 4 時 54 分 $32\dfrac{8}{11}$ 秒。　(21) 甲 12 日, 乙 6 日。

(22) 39 人。　(23) 2 秒。　(24) 40 錢。

(25) 4 人, 桃 90.　(26) 6 間。

(27) 硝石 18 斤, 硫黄 3 斤, 木炭 3 斤。

(28) 5 時 20 分。　(29) 3 浬。　(30) 480 人。

(31) 60 圓。　(32) 40 斤。

問題三十六

(1) $x=11$, $y=4$.　(2) $x=-2$, $y=5$.

(3) $x=2$, $y=1$.　(4) $x=2$, $y=8$.

(5) $x=6,\ y=7.$ (6) $x=2,\ y=-1.$

(7) $x=7,\ y=9.$ (8) $x=29,\ y=23.$

(9) $x=7,\ y=14.$ (10) $x=7,\ y=-2.$

(11) $x=15,\ y=-13.$ (12) $x=2\frac{1}{13},\ y=\frac{13}{15}.$

問題三十七

(1) $x=2,\ y=1.$ (2) $x=2,\ y=-3.$

(3) $x=17,\ y=19.$ (4) $x=3,\ y=0.$

(5) $x=5,\ y=5.$ (6) $x=21,\ y=12.$

問題三十八

(1) $x=3,\ y=2.$ (2) $x=2,\ y=6.$

(3) $x=6,\ y=3.$ (4) $x=8,\ y=1.$

(5) $x=12,\ y=3.$ (6) $x=11,\ y=10.$

問題三十九

(1) $x=1,\ y=7.$ (2) $x=2,\ y=3.$

(3) $x=-3,\ y=-2.$ (4) $x=7,\ y=10.$

(5) $x=-\frac{11}{2},\ y=-\frac{19}{2}.$

問題四十

(1) $x=5,\ y=2,\ z=3.$ (2) $x=0,\ y=4,\ z=6.$

(3) $x=2,\ y=2,\ z=2.$ (4) $x=1,\ y=2,\ z=3.$

(5) $x=20,\ y=10,\ z=5.$ (6) $x=6,\ y=4,\ z=5.$

(7) $x=-4,\ y=-\frac{11}{3},\ z=-\frac{9}{2}.$

(8) $x=6,\ y=8,\ z=10.$

(9) $x=6,\ y=-12,\ z=18.$

(10) $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{3}{4},\ z=\frac{2}{5}.$

(11) $x=17,\ y=22,\ z=-25.$

(12) $x=-\frac{16}{7},\ y=\frac{15}{7},\ z=-\frac{38}{7}.$

(13) $x=51,\ y=76,\ z=1.$

(14) $x=1,\ y=2,\ z=3,\ u=4.$

問題四十一

(1) 201, 164. (2) 鶴60羽, 龜40頭。

(3) 上五斗, 下三斗。 (4) 36.

(5) 甲648圓, 乙752圓。 (6) 60人, 1圓20錢。

(7) 甲600圓, 乙400圓。 (8) 462.

(9) 一里半。 (10) 28歲, 21歲。

(11) 前輪13呎9吋, 後輪16呎6吋。

(12) 甲$26\frac{12}{13}$匁, 乙$15\frac{1}{13}$匁。 (13) 甲45哩, 乙22·5哩。

(14) 甲$7\frac{7}{9}$升, 乙$6\frac{2}{9}$升。 (15) Aヨリ116·25杆ノ處。

(16) $143\frac{327}{331}$.

問題四十二

(1) $\frac{m+n}{a+b}$. (2) $a+b$. (3) $\frac{3(a+b)}{2a}$.

(4) $a+b$. (5) $\frac{a}{b}$. (6) a.

(7) $x=3a,\ y=-2b$. (8) $x=a+b,\ y=a-b$.

(9) $x=a,\ y=b$. (10) $x=a-b,\ y=a+b$.

(11) $x=\frac{b+c}{2}$, 等。 (12) $x=\frac{1}{2}(-a+2b+2c)$, 等。

(13) $x=a,\ y=0$.

(14) $x=a+b,\ y=a-b,\ z=2ab$.

問題四十三

(1) 本年。 (2) 3ヲ引クトスベシ。 (3) 不能。

(4) 2ヲ加フベシ。 (5) 不定。

問題四十四

(1) $x<35$. (2) $x<7$. (3) $x<5$.

(4) $x>\frac{171}{49}$. (5) $x<4$. (6) $x=5$.

(7) $x=2,\ 3,\ 4$.

問題四十五

(1) $x(x-y)$. (2) $5ab(a+2)$. (3) $5x(3x-1)$.

(4) $4xy(x^2-10xy+3y^2)$.

(5) $a\left(a^2+5a+\frac{1}{3}\right)$ 或ハ $\frac{1}{3}a(3a^2+15a+1)$.

(6) $(a+b)(x+y-5)$. (7) $(m+n)^2(x^2+y^2)$.

(8) $(m-n)(7x+1)$. (9) $ax(a+b)(x+y)$.

(10) $(a-b)(1-x)$. (11) $(x^2+5)(x+2)$.

(12) $(a+2b)(a-3b)$. (13) $(a+b+c)(m-n+p)$.

問題四十六

(1) $(x+3)^2$. (3) $(x-6)^2$. (3) $\left(x+\frac{1}{2}\right)$.

(4) $5(a+b)^2$. (5) $(2ax+b)^2$. (6) $-3(n+1)^2$.

(7) $(a+b+c)^2$. (8) $\left(x-\frac{3}{2}y\right)^2$. (9) $(a-b-c-d)^2$.

(10) $(x^2+1)^2$. (11) $99(m-2n)^2$.

問題四十七

(1) $(a+1)(a-1)$. (2) $(bc+2d)(bc-2d)$.

(3) $\left(\frac{1}{2}m+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}m-\frac{2}{3}n\right)$. (4) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

(5) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$.

(6) $(a+b+3c)(a+b-3c)$.

(7) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$.

(8) $x(a-b+c-d)(a-b-c+d)$.

(9) $(5m-n)(m-5n)$. (10) $(a-b+c)(a-b-c)$.

(11) $(x+y+3)(x-y+1)$.

(12) $(a+b+c-d)(a+b-c+d)$.

(13) $28(3x-y)(x+4y)$.

(14) $(c^2+1)(x+1)(x-1)$. (15) $4a(b+c)$.

(16) $(x+y)(2x+2y+1)(2x+2y-1)$.

問題四十八

(1) $(x+4)(x+5)$. (2) $(x-4)(x-10)$.

(3) $(x-3)(x+2)$. (4) $(x+3)(x-2)$.

(5) $(x-11)(x+4)$. (6) $(x-6y)(x-7y)$.

(7) $(x+a)(x-c)$. (8) $(x-a)(x+c)$.

(9) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)$. (10) $(a-b)(a-c)$.

(11) $(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)$. (12) $(a+b-3)(a+b-4)$,

(13) $(xy+11)(xy-2)$.

(14) $(x+y-z+7)(x+y-z+8)$.

(15) $(x+y+1)(x+y-2)$.

問題四十九

(1) $(2x+1)(x+2)$. (2) $(2x-3)(3x-2)$.

(3) $(3x-1)(4x-1)$. (4) $(3x-1)(4x+1)$.

(5) $(x+1)(3x-5)$. (6) $(x+2)(3x-2)$.

(7) $(3x+y)(2x-y)$. (8) $(5x-4y)(6x+5y)$.

問題五十

(1) $(2x+1)(4x^2-2x+1)$.

(2) $(3a-10b)(9a^2+30ab+100b^2)$.

(3) $3xy(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$.

(4) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{10}+\frac{y^2}{25}\right)$.

(5) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

(6) $(a-b)(a^2+4ab+7b^2)$.

(7) $2n(3m^2+n^2)$. (8) $-(4+x)(16-4x+x^2)$.

問題五十一

(1) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

(2) $(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$.

(3) $(x^2+x-3)(x^2-x-3)$.

(4) $(x^2+xy-y^2)(x^2-xy-y^2)$.

(5) $(a+b)(a-b-1)$. (6) $(x+1)(ax^2-ax+a+b)$

(7) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$.

(8) $(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$.

(9) $(x+y)(x+y+2z)$. (10) $(a-b)(a-c)(b-c)$

(11) $(b-c)(c-a)(a-b)$

(12) $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

(13) $(x^2+5ax+5a^2)^2$.

(14) $(x+y+z)(x+y+z+yz)$.

問題五十二

(1) $0, 5$. (2) $m, 0$. (3) $2, 3$.

(4) $-5, -6$. (5) $1, 2, -3$. (6) $8, -7$.

(7) $c, -a$. (8) $-3, -4$. (9) $\pm 2, \pm 3$.

(10) $0, -4, 7$. (11) $2, \frac{5}{2}$. (12) $1, 3, -5$.

(13) $-1, -2, -3$. (14) $1, -1, -2, -3$.

(15) $0, \frac{b}{a}$. (16) $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}$.

(17) $\pm 1, \pm 2, \pm 3$. (18) $-1, \frac{a+b}{a}$.

問題五十三

(1) $(3a-b)(2a-x)(2a+x)$.

(2) $(12-x^2)(17-x^2)$. (3) $(a+b)(ax+by+c)$

(4) $(a-15y)(a+14y)$. (5) $(7-x)(14+x)$.

(6) $(1+2x)(1-2x)(1-2x+4x^2)(1+2x+4x^2)$.

(7) $(3x+y)(-x+y)$ (8) $5y(6x-5y)$.

(9) $-a(4x+a-6)$.

(10) $(x^2+x-a^2-3)(x^2-x-a^2+3)$.

(11) $(x+4)(x-4)(x^2-4x+16)(x^2+4x+16)$.

(12) $(3x-11)(2x+7)$.

(13) $(a+x+y+z)(a+x-y-z)$.

(14) $(1+m-n)(1-m+n)$.

(15) $2\{5(a+b)+c^2\}\{25(a+b)^2-5(a+b)c^2+c^4\}$.

(16) $8\{(a+b)x-(a-b)y\}^2$.

(17) $(a+3b)(a-3b+1)$. (18) $xy(x+y)(x-y)^2$.

(19) $(x+a-b)(x-a+b)(x+a+b)(x-a-b)$.

(20) $M=-6, N=-11$. (21) $M=-19, N=15$.

(22) $x^2+y^2=29, x-y=\pm 7, x^3+y^3=117$.

(23) $\alpha^2+\beta^2=m^2-2n^2, \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{m^2-2n^2}{n^2}$.

問題五十四

(1) $x+1$. (2) $a^2(a+2b)$ (3) $3x+1$.

(4) x^2+y. (5) x^2-y^2.

問題五十五

(1) x^2+4. (2) x^2-x-1. (3) $a^2-13ab+5b^2$

(4) $x=1$ (5) $x=2, x=3$ (6) $3x^2-7x+2$.

問題五十六

(1) $(x-5)(x-6)(x+7)$.

(2) $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

(3) $(a-b-c)(-a+b+c)(a+b+c)$.

(4) $(x+1)^2(x-2)(x+2)(x-3)$.

(5) $(ax+b)(ax-b)(bx+a)$.

(6) $ab^2c^2(c+a)^2(c-a)^2$. (7) $y^2(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$.

(8) $(a+b)(a-b)(a-2b)(a^2+ab+b^2)$.

問題五十七

(1) $(x-3)(x+5)(x^2+3x+2)$.

(2) $(x^2+1)(x^2-1)(x^2+x+1)$.

(3) $(x-2)(x-5)(x^2-7x+12)$.

(4) 第三式。

問題五十八

(1) $\frac{x-5}{5(x-3)}$. (2) $\frac{a+b+c+d}{a-b+c+d}$. (3) $\frac{3a(a+b)}{4(a-b)}$.

(4) $\frac{x-4}{2x^2+x+4}$. (5) $\frac{2x+3y}{3x^2-y^2}$. (6) $\frac{a+x}{ax}$.

(7) $\frac{2x^2}{1-x^2}$ (8) $\frac{3}{x(4x^2-1)}$ (9) 0.

(10) $\frac{8x^4}{1-x^8}$ (11) $\frac{4}{x^4+x^2+1}$. (12) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$.

(13) $\frac{x+1}{x-4}$. (14) $\frac{a+b}{b}$. (15) $\frac{2ax+2xy-2my}{x^2-y^2}$

(16) 0. (17) 0. (18) $\frac{(a+b)x-ab}{(x-a)(x-b)}$.

(19) $\frac{ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2}{(a-b)(b-c)(c-a)}$. (20) $\frac{3x-a-b-c}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

(21) $\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ (22) 1.

問題五十九

(1) $\frac{x^2}{(x+3)(x-2)}$. (2) $\frac{a+b-c}{a-b+c}$. (3) 1.

(4) $\frac{x^4+x^2+1}{x^2}$ (5) $\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2b^2}$. (6) 1.

(7) $\frac{5(x+a)}{(x-2a)^2}$. (8) $\frac{x(x+3)}{x+4}$. (9) $x-1$.

(10) $\frac{1+x}{1+x^2}$. (11) $\frac{a^2-a+1}{2a-1}$. (12) $\frac{a^2+b^2}{2ab}$.

(13) $\frac{a(a^2+ab+b^2)}{a+b}$. (14) x. (15) 1.

(16) $\frac{x+3y}{8xy(x+y)}$. (17) $-\frac{9}{16}$. (19) $-\frac{8(a^2+b^2)}{a^2+2ab-15b^2}$.

問題六十

(1) 10. (2) 3. (3) 1. (4) $\frac{13}{10}$.

(5) $-\frac{41}{6}$. (6) 6. (7) 0. (8) -1.

(9) 0·15. (10) 2·25. (11) -7. (12) 6.

(13) 4. (14) $\frac{-ma+nb}{m-n}$. (15) 1. (16) $\frac{bc}{c^2-b}$.

問題六十一

(1) $x=7, y=8$. (2) $x=14, y=46$. (3) $x=7, y=9$.

(4) $x=\dfrac{-6a^2+2b^2+c}{3a}$, $y=\dfrac{3a^2-b^2+c}{3b}$.

(5) $x=7\dfrac{1}{8}$, $y=7$, $z=-1\dfrac{7}{8}$.

(6) $x=\dfrac{a^2c+ab+cd}{ac+b}$, $y=\dfrac{abc+b^2+d}{ac+b}$.

(7) $\dfrac{3}{7}$ (8) 原速度25哩, 距離$47\dfrac{1}{2}$哩.

(9) 甲120秒, 乙144秒, (10) 七里半.

問題六十二

(1) 6. (2) $5\dfrac{1}{2}$. (3) 不能. (4) 不定.

(5) 不能. (6) 1. (7) 方程式$A^2=B^2$ハ二ツノ方程式$A=B$, $A=-B$ノ根ヲ有スル故$A=B$ト等價ニ非ズ.

問題六十三

(1) $5\sqrt{2}$. (2) $5\sqrt{5}$. (3) $11\sqrt{7}$.

(4) $6ab\sqrt{a}$. (5) $20\sqrt[3]{5}$. (6) $\sqrt{720}$.

(7) $\sqrt{100}$. (8) $\sqrt[3]{270}$. (9) $\sqrt{ax}$.

(10) $\sqrt[3]{m^7n^2}$. (11) $\sqrt{11}<\sqrt[3]{37}$. (12) $8\sqrt{2}$.

(13) 0. (14) 420. (15) $16\sqrt[6]{500}$.

(16) $\dfrac{31}{2}\sqrt{2}$. (17) $\dfrac{11}{2}\sqrt[3]{4}$. (18) 2.

(19) $16+3\sqrt{26}$. (20) $42\sqrt{2}+18\sqrt{3}+5\sqrt{6}-17$.

(21) 24. (22) $a+4b+9c+4\sqrt{ab}+6\sqrt{ac}+12\sqrt{bc}$.

(23) $5x-3+2\sqrt{(6x^2-14x-40)}$. (24) $a-b$.

(25) $\sqrt[4]{2}$ (26) $\dfrac{1}{y}\sqrt[33]{c^{11}y^{30}}$ (27) $5+2\sqrt{6}$.

(28) $5(\sqrt{7}-\sqrt{3})$. (29) $\sqrt{2}+\sqrt{6}-2$.

(30) $\dfrac{1}{17}(30+4\sqrt{35}+2\sqrt{21}+3\sqrt{15})$.

(31) $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}$.

(32) $(3a+2)\{x+\sqrt{(x^2-3x+2)}\}$.

(33) 0. (34) $6+4\sqrt{3}$. (35) b.

問題六十四

(1) $\sqrt{2}+1$. (2) $\sqrt{7}-1$. (3) $\sqrt{5}+\sqrt{6}$.

(4) $\sqrt{5}+2\sqrt{2}$. (5) $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$. (6) $\dfrac{1}{3}(6-\sqrt{3})$.

(7) $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}+1)$. (8) $\dfrac{1}{2}(11-\sqrt{5})$.

(9) $\dfrac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{2b}$. (10) $\sqrt{10}$.

(11) 0·7071. (12) 3·7321. (13) 0·9659.

問題六十五

(1) $9\sqrt{-1}$.　(2) 19.　(3) 11.

(4) $70\sqrt{-1}-24$.　(5) $b-a$　(6) $-\sqrt{30}$.

(7) $-\sqrt{-1}$.　(8) $-6-26\sqrt{-15}$.　(9) 2

(10) $-\sqrt{-5}$　(11) 6.　(12) 1.

(13) $(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})\sqrt{-1}$.

(14) $i^2=-1, i^3=-\sqrt{-1}, i^4=+1, i^5=+\sqrt{-1}$. 以下同順ニ循環ス。　(15) $2(a^2-b^2)$.

明治四十年十一月廿二日印刷
明治四十年十一月廿六日發行
明治四十年十二月廿七日訂正再版印刷
明治四十年十二月三十日訂正再版發行

新撰代數學教科書 上下　定價各卷六拾錢

編纂者　東京市小石川區小日向水道町七十三番地　林鶴一
發行者　東京市小石川區小日向水道町七十三番地　西野虎吉
印刷者　東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地　藤本兼吉
發行所　東京市小石川區小日向水道町七十三番地　開成館　【振替貯金口座】東京第五參貳貳番
販賣所　大阪市東區心齋橋通北久寶寺町角　三木佐助
販賣所　東京市日本橋區數寄屋町九番地　林平次郎

東京秀英舍工場印刷

終