廣育統計學校叢書

統計學大綱

陳律平編著

中華民國二十六年三月四版印行

統計學大綱

陳律平編著

金曾澄署

中華民國十八年九月初版
中華民國二十一年一月訂正再版
中華民國二十六年三月四版

廣育統計學校叢書 統計學大綱 一冊

▲平裝每冊定價國幣壹元伍角▼
（外埠酌加運費匯費）

編著者 陳律平

出版者 廣育統計學校（廣州市文德路）

印刷者 播文印刷場（廣州惠愛中路大馬站）

發行處 廣育統計學校
持正會計師事務所（廣州市廻龍路八號二樓）

分售處 美華書局及（廣州市漢民北路）
各大書局

三版序言

本書三版，章節編制，仍沿再版。惟內容則畧有增補修改之處，其中尤以繪圖法章內，圖形種類及應用各節，增補特多。該項方法，雖非統計研究之主要工具， 但材料之整理 ，事實之表現，捨此實無由獲得簡單顯明之效果也。

此外並於曲線圖一節內，增入常態曲線(Normal Curve)之繪畫方法及其面積之推算一段；又將淨相關 (Partial Correlation) 與複相關 (Multiple Correlation) 析爲二節，以期完善。編末附錄，添入計算用表多張；本書所用之重要參考書報，亦均詳列，俾供學者實用及進而研究之需。

至此次三版所用各圖形之鋅版，因前者均已失去，故全屬新製。勷助繪圖者，爲同學林天耀，談天申，關希彭三君，並誌於此，藉表謝忱。

民國二十三年二月二十日，陳律平序於廣州。

四版附誌

四版內容，較前增加者，有第十三章指數。其餘第十二章集中數量，第十四章差異數量各節，雖畧有增補損益，惟大體仍無更易。至各項名詞，則多照中國統計學社審定譯名分別改正，以求一致。篇末附錄共分為四部，除原有計算用表及參考書報兩部外，特將本書公式及圖表，編列索引，以便檢查；並將我國現行統計法規，摘要列入，俾供實用，而嚮讀者。

民國二十六年三月，陳律平於廣州。

陳公達先生序

孫總理謂：「我們國民黨在中國所佔的地位，所處的時機，要解決民生問題，應該用甚麼方法呢？這種方法，不是一種玄妙理想，不是一種空洞學問，是一種事實。…………我們要拿事實做材料，才能够定出方法。………所以我們解決社會問題，一定是要根據事實，不能單憑學理。」（民生主義第二講）夫社會之事實，民生之狀態，隨時變動，易地不同。既有特殊性，又有普遍性；既有階級性，又有齊一性。若根據事實，删繁就簡，以定方法，宜如何而後可？此所以今之社會學者，　總理信徒，日日研究，孜孜不倦而圖之也。然每當進行之際，既無事實以印証；驟遇問題發生，更無方法以解決。馴至一切計劃，都成空談，輿言及此，不能不資賴於統計。統計者，搜集數量之材料，分析其原因，研究其結果，以簡明之方法，表繁賾之現象；以概括之數字，顯

巨量之內容；察往知來，因微知顯，誠研究科學及事實之最良工具者也。因此謀決社會問題，實現民生主義，根本大計，端基統計，無待言矣。陳子律平，對於政治經濟社會等問題，十載以來，悉心探索。惟自覺空談學理，不切實用，遂轉至力于統計，廣求博采，括細羅纖。教授統計學科，亦已五易裘葛，講授討論，教學之興味均濃；編成此書，初學之門徑更捷。權默察歐美各國政府之設施，學術團體之研究，旣覺統計之大用；再察我國社會之現狀，政治之建設，更覺統計之需要。然則陳子之書，不僅爲初學者之指針，亦爲解決社會問題實現民生主義之基本方法也。是爲序。

民國十九年九月，陳炳權序於工商部。

編著大意

1. 本書原爲不佞頻年在廣州各校所授統計學一科講義，初版於民國十八年刊行。嗣以印刷無多，學期又告開始，因亟將原稿重行修改，並將內容增加三分一以上，訂正再版，以爲教本之用。同時並就正於當今明達。

2. 統計原爲實用科學，故本書立論，多以實用爲主。文字力求顯淺，俾易了解；而於圖表之論述，則務期詳盡。至公式之來源，數理之推闡，在可能範圍內，亦盡量採入。學者閱此，固可資爲研學治事之工具，卽欲更求深造者，亦無難循序漸進。

3. 本書所用之參考書報，不下四五十種，中，英，日文者均備。其中尤以陳公達先生之統計方法，美國Chaddock教授之Principles and Methods of Statistics 二書爲主要藍本。至其餘之參考書報，容俟三版時，當再詳爲列舉。

4.編者學識謭陋，且以公餘之暇，率爾爲此，殊未得當。尙冀海內　明達，進而教之，幸甚！

5.編此書時，同學林天耀，陳東凱二君，對於繪圖計算，多所勷助。書成之後，並承　湘帆先生代署書簽，　公達先生代製序言，編者均深致感謝，附誌於此，藉伸忱悃。

編者識於廣州統計學校。

目　錄

統計學大綱

第一編　總　論

第一章　統計學之意義

第一節　統計之語源

統計學英文曰 Statistics，其語源似由拉丁文 Status 一字而來。按 Status 之意，乃表示國家政治情形及其所處實際地位；是統計之學，原爲考察國家情況之學也。惟後世統計學發達，其範圍不限於國政，人類社會之現象，尤爲研究之主要目的焉。

統計譯名，始自日本。初或譯爲政表，表紀，總計，國勢，統計，政算等，迨明治十四年於太政官中置統計院後，於是公私間皆採用統計二字，譯名遂以確定。我國沿用之，至今亦已一律通用矣。

第二節　統計學之定義

統計之語源，已如上述。至統計學之內容若何，則不能不

一考其定義。惟關於本科定義，古來學者，傳說紛紛，殊不一致。據統計名家比人葛特雷 (Quetelet) 在第七次國際統計會議 (International Statistical Congress) 開會時所提出，已謂有一百八十種之多；而近代學者之定義，尚不在內，可以想見其紛歧。茲將各學者對於本科之定義，擇列於下，俾見一班。

美儒斯密斯(M. Smith)以統計學爲社會學之一部，有依特種方法（卽大數觀察法）解釋社會生活疑問之責任。又依統計所得之智識，可分爲下列三種：

1.由計數及繼續計算所得之智識　由計數所得之智識，如人口，職業，農業等，一定時期之調查是也。至繼續計算所得之智識，卽如人口之出生死亡，與輸出入貿易等，則須經多時之搜羅整理，方能知其盈虛消長也。

2.計數之時常於一定關係上發見有自然之法則　例如生產數男女之比例，及自殺與氣候之關係，皆有一定之常軌可尋。

3.計數之時往往發見因果之關係　例如當凶年或災疫流行之際，則結婚與生產，將畧爲減少；而繁榮之年，則爭鬥之事常多。

日人橫山雅男曰：「統計學者，以社會之現象，用數量爲觀察者也。詳言之，則云統計學者，以社會與國家爲動爲靜之現象，依合法之大數觀察，以研究其原因及規律者也。」

英人包力 (A. L. Bowley) 謂統計學爲平均數科學 (Science of Average)，或計數科學 (Science of Counting)。又謂統計

可以考察多數事實中彼此之關係，亦可以爲表示事實之提要法及分類法。

美人金氏 (W. I. King) 曰：「統計學者，乃將搜集所得之材料，或推算之數目而分析之，以判斷集合之自然界，或社會現象之方法也。」

美人適克利(H. Secrist) 曰：「統計學者，乃事實之綜合；根據合理精確之標準，爲預定之宗旨而次第搜羅，並就彼此間之關係依次排列，而以數目敍述之，列舉之，或推算之，以求其顯著之因果關係。」

上列各家之說，各有所見，若求比較適當者，則金氏之說，較爲簡明；適氏之說，似較詳盡。茲爲求完確及易於明瞭起見，爰將各學者之主張，並參酌己見，另擬一定義如下，學者閱此，庶可知統計學內容之梗概。

統計學者，乃根據科學方法，爲預定之目的，從大數觀察中，將搜集所得之材料，經整理之結果，而以數目列舉之，推算之，綜合之，或分析之，以求自然界或社會現象中之共通原則，及其顯著因果關係之學也。

第二章　統計學之歷史

第一節　統計之發生及沿革

統計之發生最早，遠稽往古，部落相結，乃成國家；國家之雛形既具，統治者卽須搜羅其領域內之事實，以爲施政之根據。蓋不知人民財富之狀況，則不能定稅收之標準；不知戰士

之多寡，則無從定戰鬥力之強弱，更或爲適應自己特別需求，亦不能不設法搜集事實以處理之．凡斯數者，皆可謂爲統計發生之主要原因．至其沿革，則約可分爲下列三時期：

（1）　萌芽時期

當西元前3050年時，埃及因建造金字塔，曾調查國內之人口及財富，以爲佈置．迨至西元前 1400 年時，羅馬斯二世 (Rameses II) 更作一埃及國土調查，以冀得一善法分配土地於人民，而定賦稅之準則．其在我國，當西元前2200年時，夏禹治洪水，曾區分天下爲九州，幷將各州田土之等級，貢賦之次第，物產之種類，河川之源委，詳敍無遺，此實具有統計作用．迨後周行井田制度，統計之術，似更進步．又周禮載「司民掌登萬民之數，自生齒以上，皆書於版，辨其國中，與其都鄙及其郊野，異其男女，歲登下其死生，」此實可與近代文明各國之人口普查 (Census) 相提並論．此外如羅馬，雅典，之規定人民出生死亡登記；猶太，希臘，波斯，之人口軍政財政各種調查，皆莫不具有統計雛形而爲古代統計事業之一種．

中世紀時，歐洲之諸侯王公，亦嘗核計其境內之人民及財產，以爲施政之標準．當時如德王菲特烈二世 (Frederick II)，及英王愛德華二世 (Edward II)，對於斯種調查，均異常注意者，惜方法不良，是其缺點耳．

（2）　推行時期

在十七世紀時，西歐商業日漸興盛，而統計上之搜羅

亦隨而增加。此乃政府欲奬勵實業，以圖貿易發達之結果。又欲判定各種法律規條之需要及效能時，統計尤不可缺。且因政權集中，政府組織，力求完密，則詳細統計，較中世紀時爲尤切。需用既增，故精於統計之人，亦爲時代所必需。於是政府及民間學者，各就政治及經濟諸方面，討論探索之方法，而統計之術，遂日發達。即統計成爲科學的研究，亦於斯開其端。降及近世，則文明各國，對於統計事業，莫不異常注意矣。

（3）注重時期

晚近各國對於統計事業之最重視者，仍爲人口統計。斯項統計，原非近代產物，古代我國及羅馬，均已有之，惟不及現在週密耳。近日施行人口普查之最早者爲瑞典(1749)，次爲美(1790)，再次爲英，法(1801)，德(1833)，日本則於明治三十八年(1905)舉行，我國亦欲於清宣統三年(1911)舉行而未果。至美更於1900時，設立永久人口普查局(Bureau of The Census)，繼續辦理每期人口調查事宜，編造人口統計。其他文明各國，亦莫不先後於中央政府及地方政府設立永久統計機關，專司編造各種按期統計，以作施政之標準。我國現亦於國民政府主計處下置統計局，各院部各省市政府，亦設有專司，並頒行統計法規及表式多種，以資按期編造。時至今日，民智日開，統計事業，益爲世人所重視。

第二節　統計學術之改進

在十七世紀以前，統計尚未成爲一種獨立科學。蓋當時歐

西諸國、如法蘭西，英吉利，荷蘭等，對於本國之國政，雖有所調査，然此不過一國之紀實錄，祇備爲政者參考，於學理上幷無影響。其作爲一種學術資料，喚起學者注意者，實爲德儒康倫(Herman Corning)，時1660年也。自是以後，學者輩出，統計之術，日益發達。其演進情形，可分述如次：

(1)記述統計 1660年德國赫爾曼斯坦 (Helmstedt) 大學教授康倫著一書，名「現時政治上顯著事件」，又名「歐洲方今國家學」，其內容將當時歐洲各國之人口，土地，財政，軍政等項目，分類敘述，使世人得知各國之國情，此可稱統計之原始。繼氏而起者，爲阿循華 (Gottfried Achenwell)，氏亦德人也，嘗掌教席於馬爾堡 (Marburg) 大學。其論述要領，爲比較各國之形勢，如西班牙，葡萄牙，法蘭西，荷蘭，俄國，丹麥，瑞典各國之人口，物產，土地等事實，莫不詳爲記載，幷訂定統計學 (Statistik) 之名。氏又常稱統計學爲國家著明事件之結晶體；卽由此科學，國家可以知理亂興亡之迹。換言之，卽一國之眞相，由此可以窺測；政治之善惡，由此可以判斷。故統計雖濫觴於康倫，然繼之而啓發斯學，則阿氏之功，亦不可歿，故後人常稱氏爲統計學之父 (Father of Statistics)。惟其敘述，概以文字爲主體，是以後人稱之曰記述的統計。

(2)比較記述統計 比較記述統計，爲德人標星 (Busching) 所倡。氏所論述各國國情，不依國而別，舉凡同類事實，無論何國，皆排列於同一科目中，此實便於比較研究。故氏

之研究範圍，乃脫離個別國家觀念，與阿氏之國別叙述不同。且氏所搜集之材料，多屬政府之統計材料，故比以前各家之統計，其材料來源，或以想像，或以推測而得者，較形精密矣。

（3）數表統計　以上諸學者對於統計事項，多以文字叙述爲主體，數字不過以之爲補助。迨其後因國家經濟發達，統計上應用數字之方法日增，於是遂有單獨以數字而表示國家顯著事項者。其始倡爲丹麥人安索先(Anchersen)，氏嘗將各國之重要事項，如人口，面積，財政，教育，宗教等，用數字表顯之，而著爲統計表，使其便於比較研究。至1782年，德人格羅美(Crome)更倣之而作各種統計圖，令閱者一見卽明瞭其狀態或關係，是以後人多稱格氏爲圖表統計之先達者。

（4）生命統計　生命統計之始創者，可推英人約翰格蘭(John Graunt)。氏於1662年，據倫敦之記實錄（卽市政錄）以研究，遂發見男女出生之比例數及死亡數，皆有恆定之法則。例如百人出生中，則其年齡未及六歲者，平均當有36人之死亡，過此則陸續減少。至男女出生之數，男常較女畧多，其比例爲14與13；然男子之死亡，亦恆較女子爲多，故男女兩性之數，常得其平而無大差異。又本此推算英國人口之二倍時期，約須一百五十年。蓋確信人口之增減死生，均有恆定之法則，就現在已往之事實而以之類推者也。

次於格氏而起者，有威廉彼得(William Petty)。氏曾著有

政治算學(Political Arithmtie)一書，將人口，面積，建築物，農業，貿易，漁獲，職工，租稅等事項，詳為記載。并注重其方法，孜於利用數量，擴張格氏之研究，而注意於平均數之意見，亦為氏之特倡。

彼得之後，有愛曼夏利(Edmund Halley)，繼續格氏之人口統計研究。利用德國布立斯盧市(Breslau)，自1687至1691年之人口死亡記載材料，算出人口平均命數，作一死亡表，當時頗負盛名，所謂「夏利氏死亡表」是也。自此表出後，不唯有功於統計，卽生命保險業，亦以之為基礎焉。

(6)大數觀察之倡導　1741年德人蘇斯密著一書，名「人生變遷之神序(Doctrine of Nature Order)」，其要旨謂宇宙間均有上帝所定之法則，支配人類一切之行為并其現象，無論何人不能出其範圍以外。遂盡力於人口增減變動之研究，據古來寺院所備之婚姻，洗禮，死亡登錄簿，搜集人口統計之材料，依大數觀察法(Mass Observation)，努力於發見其因果及法則。常表明在結婚年齡之時，男女之數，幾於相等；此乃造物者之意，趨重一夫一妻主義之故。并就人口出生中，推算男女兩性之比例，雖為男子二十一人，女子二十人，然以死亡之數，男多於女，故彼此恒得其平。又專以死亡登錄簿所記之年齡，作一完全死亡表，證明死亡之數以兒童為最多。凡此皆氏由大數觀察研究所得之結果，而為後世統計學創立一有價值之基礎焉。

其後有比人葛特雷(Quetelet)出，統計學之理論及應用，

更渙然一新。氏爲著名之天文學家與數學家，在天文及氣候之範圍中，曾爲極廣汎之統計研究。因調查氣候之關係，葛氏進而研究植物界各時期之現象，更從植物界進而研究動物界與人類之現象。舉凡人類社會上，道德上之特點，無不反覆推究。終之乃於世界複雜之事物中，發現共通之原則，即世界一切形形色色之事物，其中必有中庸或常態者(Mean or Morm)存在。所謂中庸或常態者，是即大多數之事物，皆與此爲近；離中庸者漸遠，則其數漸寡。譬諸人類，上智下愚，其數甚少，而佔大多數者，厥爲中才之人耳。氏又本大數觀察法，進而推論人類之一切行動，謂皆有一定之規則。故氏之研究目的物，不僅止於人類有形現象，即人類之行爲及其結果，亦均納入研究範圍。蓋確信社會上一切事物，如能以數字表之者，均能依精密統計方法以研究，而發見其因果規律也。

葛氏除致力所學，集合社會現象以發見其中原理外，并努力使統計行政與統計學者合而爲一。當氏任比國統計局長時，極倡統計行政與統計學者合作之說。使政府採學者之學說，以整理統計材料；學者本政府所搜集之材料，以研究統計之眞理。一面編造合式之統計，以爲各國統計之模範；一面闡明純粹之學理，而鞏固其根源。又發起組織國際統計會議，以謀各國統計報告之劃一。并促斯學之進步，故裨益於近世統計，其功誠不可歿。

葛氏之後，繼之而闡明其學理者，有英之高爾敦(Galton)

，氏精於統計方法，尤精於遺傳學，應用統計方法發明之遺傳律，甚有名於時。其後有披爾遜（Pearson），對於統計學本身之貢獻尤多。吾人今日得應用統計學之多種公式，藉以研究宇宙間無窮之現象幷得窺其眞理者，皆氏之所賜也，此外如現代英之包力(Bowley)，優爾(Yule)，美之適克利(Secrist)，金氏(King)，察多(Chaddock)，刻力(Kelley)，哲羅(Jerome)等，均有精密之硏究與著述，而爲今日研究統計學知名之士。

第三章　統計學之分類

科學之研究，皆可從理論與實用兩方面區分之。前者曰純粹科學；後者曰應用科學。故統計學之內容，亦可按此分爲三部，卽：統計原理(Theory ot Statistics)，統計方法(Statistical Method)，及應用統計學(Applied Statistics)是也。玆分述之如次：

（1）統計原理　英人優爾（Yule）謂：「統計原理，乃用以闡明統計方法之理論者也。」

（2）統計方法　統計方法所論述者，則爲如何將搜集所得之材料，先由繁雜整理而爲簡單，幷依其性質分類，使其關係顯明，故常圖發明各種法規，以處理多種變異不定之事實。惟在此等方法中，有多種普通者，可以直接應用於經濟，政治，生物等統計。然亦有特殊者，祇適用於特殊範圍。故在統計方法學者言之，則專以造就各種法則（Laws），規則（Rules），

及方法(Methods)爲職志，至應用方面，則似非研討範圍之內。

（3）應用統計學　應用統計，則就方法學者所發明之規則及方法，應用之於具體事實。即猶之應用科學家之就純粹科學家所發明之原理原則應用於實際。自十九世紀以來，各科學家研究各種科學，均祇統計爲最重要之基本學術，於是政治學家，經濟學家，社會學家，保險學家，天文學家，以及他種關於人類智識之研究者，無不借重統計方法，以爲考研眞理之工具矣。

上述分類，祇從理論方面言之，其實三者之關係，當不能截然分割。蓋無學理，則無從指導實際之運用；無應用，則無從促進理論之完善。猶如鳥之兩翼，車之兩輪，實不可須臾離者。不過注重之點，各有不同，究無明確之界限也。

第四章　統計學之法則

統計學之基本法則有二：一爲統計之常則(Law of Statistical Regularity)，一爲大量不變之法則(Law of Inertia of Large Numbers)。斯二法則，實爲統計科學之根據，即一切方法與應用，亦由此推闡而來。玆分述之如下：

（1）統計之常則　社會現象，若從表面觀之，則紛紜錯雜，變幻靡常，眞況如何？因果奚若？似不可究詰。此無他，缺乏觀察之方，而眞象遂無由以顯。然若當事實之發生也，吾人苟能詳加審察，適用科學以簡馭繁之方，窮其源委，則無論

事實之爲靜爲動，亦自可發見其有一脈絡相通之則序。例如一國人口性別之差異，犯罪者與人口總數之比例，出生率死亡率之變遷，及五穀收穫量與其價格之關係等，往往均顯一「常數」，且常不因時地之不同而生異常之結果者。由是可知社會諸般現象雖繁，亦莫不有一恆定之則序存在。斯卽「常則」之大意，實統計研究主要問題。前人謂：「天不變常，地不易則。」及葛特雷謂：「萬事萬物，其中必有中庸或常態者存在。」實此法則所由構成也。

社會現象，雖有一定之則序存在。然其結果，決非絕對的固定性，而爲相對的發展性；非必然之關係，而爲或然的關係。故亦未必限於事實全體， 方能顯著。 蓋根據數學上或然律(Law of possibilitics)之理，於大羣事實中，選擇若干適宜之樣本——事實之平均數——，以代表全部事實之特質，則其結果，亦非不可靠。例如於千人中，任便選擇若干適中人之高度平均，用作全體代表。則所得結果，與千人之平均結果，當無多大差異也。

(2)大量不變之法則 斯法則實與上述之常則互相維繫者。蓋社會現象，雖有一定之則序存在，然此結果，必須從大多數觀察方易顯著。非如物理化學等，可用一回之觀察與實驗，而能類推者可比。且其變遷轉移，與時幷進，累年積月，益形錯雜，其中實況，愈難明瞭。必須以適法大數觀察行之，其眞況方顯，當可知社會諸般現象中，莫不有一定之因果規律存

在。

蘇司密曰：「欲知支配人事現象之法則，不宜取單獨之事項；須研究同國異時之同事實，或異國同時之同事實，而後可以發見天然秩序之一種特性。事實少時，秩序不能顯；必待多數少地方所搜集之多數事實，或在一大地方所搜集之多數事實中，方可見其秩序。一掬之水，無色可辨，而大海則深碧可觀；一室之氣，無迹可尋，而仰觀天空，則蒼蒼可愛。」

葛特雷曰：「搜集多數事實之時，各處之不規則，皆歸消滅，而大多數之規則卽顯。」

康德（Kant）曰：「人事之法則，不當求之一枝一節，當求之全體。」此爲推研統計之金科玉律。

又我國漢書東方朔傳內云：「以管窺天，以蠡測海，以莛撞鐘，豈能通其條貫，考其文理，發其音聲哉。」實亦同具一理也。

根據於大數觀察時，則各種偶然發生之現象，皆歸消滅。因多數現象集合之時，偶然發生之現象，可互相抵消，互相平均。例如某地五穀產量，今歲或顯有特奇增減，然按諸全省全國或全世界均數，則其歲產之量，大致相等。又如某城火災之數，今年或數倍於前年，此若就一城言之，則其變動自甚，而就全國言之，則火災之數，又常恒不變。凡此皆大量不變之意。雖然所謂不變者，非經千數百年而不變也，不過大數之變動，常較小數變動爲微。倘耕地日闢，農事進步，則五穀產減，

當可漸增；建築改良，防災設備完善，則火災之數，自可減少•惟斯種變動之原因，當由漸而來，非一蹴而就也•

恆靜原因，對於大數始顯出，學者已有實驗之先例•其法於一囊中，置同數之赤白球而搖出之，每次但落出一個；記錄其落出之赤或白，復納入內，更迭爲之，至數百回，則數百回中，有時赤球之次數多，有時白球之次數多•但積至一萬回，則知赤白球之數，各近於五千（赤球爲49.9%，白球爲50.1%）•此卽斯法則之發現•玆將其試驗結果，表列於次：

表1. 赤白球搖出結果之分配

百回中搖出之次數	赤 球	白 球
1	66	34
1	61	39
2	60	40
2	59	41
2	58	42
3	57	43
3	56	44
4	55	54
5	54	46
6	53	47
5	52	48
※11	51	49
※ 9	50	50
5	49	51
※10	48	52
4	47	53
8	46	54
3	45	55
5	44	56
4	43	57
4	42	58
1	39	61
1	38	62
1	37	63
100	4989	5011

第五章 統計學之應用

第一節 統計之效用

統計主要效用，若從實際方面言之，則有如下三點：

（1）根據已往事實求得正確見解 自然及社會現象，雖紛

紜錯雜，惟吾人苟能適用統計方法，從而搜集整理，使之化繁爲簡，化零爲整，則其眞況若何？自有明確之觀念。例如氣候之變遷，人口之增減，財政之盈絀，商業之盛衰，物價之升降等，均可就已往之事實，而明瞭其概況。幷可分析比較，以求其變動之原因。

（2）供給資料以爲現在預算之標準　事實既經搜集整理而成統計，使其眞況顯明後，則政治家可據之以爲施政之方針，財政家可利用之以爲預算租稅之收入，教育家可據以爲敷設教育之張本，商業家可藉之以定營業之標準，卽其他科學家及一般從事社會事業者，亦莫不可利用統計以爲研討科學之眞理或預算之基礎矣。

（3）可資爲預測之工具　察已往而知未來，就已知而推未知，實統計最大之任務，亦爲其主要效用之一。蓋社會事物之變遷若何？因果關係何在？苟能從大數觀察，就現在已往之事實而加以詳細分析，則其將來之趨向，未知之結果，亦不難預測而得其概畧。如人口之變動，商情之盛衰，物價之升降，穀米收穫量之增減等，均可藉此爲推算者也。

第二節　統計之程序

統計方法之程序若何？各學者之說，殊不一致。然概括言之，則可分爲下列五步：

（1）審定問題　在未爲統計調查之前，當將所欲研究之問題，確切規定，然後進行之手續，方有所依據。

(2)釐定單位　問題決定之後，次則當就事實之性質及範圍，規定完確之單位，以爲計算或分析材料之標準。

(3)搜羅材料　問題，單位，均經規定之後，次則應擬就調查表式，選擇適宜之調查方法，從事於材料之搜羅。

(4)彙類整理　材料旣經搜集訂正之後，則可依其性質分類整列，而以表列與圖示分別表顯其結果。

(5)分析校勘　由上列程序，雖可穫得事實之結果。惟其內容眞相若何？確度是否可靠？則不能不運用數學方法，從而分析校勘之，是爲統計最後之手續。

以上五者，均爲統計進行程序所必經，將於下篇各章詳述之。

第二編 各論

第六章 統計問題之審定

統計之初步，當爲事實之集合。惟徵集事實之前，自應將統計問題先行審定，然後進行手續，方有所依據。否則目的不定，性質未明，時空範圍無限，當無從着手。例如人口統計，則必先決定其調查對象，爲現在人口或常住人口？抑兩者兼顧？次則應定時空之範圍，即內容所欲調査項目之多寡，亦須先行明定。又如工資統計，則先當決定者爲貨幣工資(Money Wages 即工資之表面)？抑實在工資 (Real Wages)？次又當決定所欲得之工資，爲以時計者？抑以出品件數計者？又或以一定勞力計者？凡此問題，各不相同，則搜羅材料之方法，亦自殊異。故在調查之先，必將統計問題之目的，性質及範圍，確切規定，方可進行。

第七章 統計之單位

第一節 單位之意義

統計問題，常不離乎計數，對於各種事物之件數，品質，情形等，均常核算之，總計之，類別之，或分析之。且吾人不注意畸零事件，而注意於彙數 (Aggregates)， 若彙數脫離單位，即無意義；蓋統計單位 (Statistical Unit)，即所以代表研究事

之特徵也。例如有一千數目於此，在統計上決不能以之爲彙數單位；蓋統計上之所謂一千者，必指一千具體之客觀事實，而非謂論及多數抽象單位也。數目如爲抽象單位，則可分合無窮，因其性質相同，祇代表事物之抽象觀念而已。故在統計進程中，問題既經審定之後，次則當有嚴格完確單位，以爲搜集或分析之根據，彙數方有效用。否則雖有精密搜集與整理分析之方，而單位定義不清，其結果亦難達於精確也。

第二節　單位之類別

單位之類別甚繁，有按其本體性質而分者；亦有就其用途不同而分者，玆特將其種類先列表解如下，次再分述之。

單位之類別
- I. 按其本體性質分
  - (A) 屬於個體方面者
    - 1. 自然事物單位
    - 2. 人爲事物單位
  - (B) 屬於度量方面者
    - 3. 體量單位
    - 4. 金錢價值單位
- II. 就其用途不同分
  - (A) 計算或預算單位
    - 1. 簡單單位
    - 2. 複雜單位
  - (B) 解說或分析單位
    - 3. 解釋單位
    - 4. 表現單位

I. 按其本體性質，可分單位為二種四類：

(A)屬於個體方面者 (Individual Things)　斯類單位，均可以數計之，故亦稱計數之單位。復可分為下列二類：

1.自然事物之單位　此即按自然人物原有個體而為單位；意義顯明，最為完確，絕無含混之弊。如人口統計之人，家畜統計之牛羊等，均以其本身之個體而計之者也。

2.人為事物之單位　此類單位，係以人力製造事物之個體而為計算，其意義即無自然事物單位之完確；因其目的皆由人定，若人之目的變更，則其意義亦不能不隨之更易。但計算方面之便利，則與上述之單位相同。如船，車，及各種工業產品均是也。

(B) 屬於度量方面者 (Measurational Units) 斯類之單位，係專以定量之多寡，而不注重其個體者。其中又可分為二類：

3. 體量之單位　此類單位，即普通應用於長短，廣狹，輕重之測量者也。故其性質，僅能表示事實之抽象性測量，而不能表現具體事實內容，如尺，寸，斤，噸，加侖，立方尺，馬力等是也。

4 金錢價值之單位　此類單位，即指吾人常用以規定物品價值之銀元，銀兩等是。惟其意義，較諸上述單位，更難確定；因價值之觀念，發生於交易，且銀元購買力 (Purchasing Powor of The Dollar)，又隨時代境域而變更，其義意更難明定。至若幣制不統一，則尤為搜羅材料之困難。

II. 上述單位之種類，僅就其本體性質而分，若就用途不同，單位亦可分爲二種四類：

(A)計算或預算之單位(Units of Enumeration or Estimation)斯類單位，爲搜羅事實時用之。其中復分爲二類：

1. 簡單之單位（Simple Units）簡單之單位，乃一種情狀足以釐定其意義。例如農塲，僑民，工廠等是也。

2.複雜之單位（Composite Units）複雜之單位，則含有多種意義。例如農塲，乃一簡單單位，若加以「改良的」字樣，則變爲複雜單位矣。此一問題，不獨當明農塲意義，而改良情狀若何，亦當知之。他如僑民之爲英國僑民，紡織工廠，均同此理也。此種形容字樣，既將單位範圍縮細，亦將事物觀念解明，不過前者當明其一種情形；而後者則當明其多種情狀耳。故釐定界限時，更當認明之，否則差誤機會亦隨而增加矣。

(B)解說或分析之單位（Units of Expositior Analysis）斯類單位，乃用以解釋材料，或表現材料之用，與上述單位差異之點，即應用不同。其中亦可分爲二類：

3. 解釋之單位（Units of lnterpretation）解釋之單位，乃爲解釋問題時間（Time），空間（Place），及情形（Contition）之用。蓋統計問題，多含比較特性，此種比較，即常以時，地，及情形(事實原因與其發生之情形)爲標準；假令此等標準，缺乏合理之根據，隨意選擇，則其結果當無若何效用可言，甚或發生謬誤而影響統計之價值。例如以百數十年前之事物與現

在比較；以情狀絕異之兩地事實而平排並列；又或事實之結果非由眞正原因所發生，而強將之比較等，則均未見其有如何之價值也。是以統計進程中，計算之單位，固當有嚴格之說明，以免搜集上之困難，即將來內容比較之標準，亦當先加以充分之注意與選擇。

4 表現之單位 (Units of Presentation) 表現之單位，是即將問題要義表現之謂。在未搜集材料之前，自應將所欲表示之目的顯明，以符收集之本旨；否則準備不完，表現不當，而結果無從達到。故統計調查之前，表現單位亦應先行釐定，以爲搜集之根據。

第三節　釐定單位應注意之點

統計單位之意義及類別，已如上述。至規定單位之時，更須詳研問題之各方面而審定之，以免將來發生困難。其應注意之點有如下列：

1. 單位之意義，須有合理之根據，並須詳爲說明。
2. 單位所用之名詞，不可使有例外及誤會之處，
3. 直接顯明之單位，不可混以類似之單位。
4. 單位須具有普遍，穩定，明確之資格，以免調查者及閱者有所誤解。

第八章　搜羅材料之方法

第一節　統計材料之類別

在未調查之前，宜先明統計材料之種類。按統計材料種類，可就其來源區分，亦可就其性質區分。玆先將之表解如下，次再論述之。

- 統計材料之類別
  - I. 就其來源區分
    - A.初級材料
    - B.次級材料
  - II.就其性質區分
    - A.歷史材料
    - B 空間材料
    - C.組合材料
    - D.變量材料

I.就統計材料來源之不同，可分之爲初級材料與次級材料二種：

A.初級材料　此種材料，即原始之事實而未經整理者。其優點在乎眞實詳盡，多由直接調查得來。

B.次級材料　此種材料，即由原始材料而加以適當整理者。其優點在乎整齊有序，較合應用，多由間接調查得來。

II.就統計材料性質之不同，可分材料爲歷史，空間，組合，變量四種：

A.歷史材料(Time data)　此乃含有縱性之事實，即以時間爲分類標準。其注意點即在繼續變遷與趨向，如歷年對外貿易之消長，人口之變動，物價之漲落，稅收之增減等材料均屬此類。

B.空間材料 (Spatial data)　此即以事實分佈之地域而區分

，故曰空間材料。其注意點乃在觀察其數量之多寡，與散佈之狀況，如各省人口之疏密，海外華僑之分佈等均是。

C.組合材料 (Component data)　凡同一事實中而按其性質復區分爲若干類別者，曰組合材料。其注意點乃在部分與全體之關係，如生活費之分配，政府各類稅收之區分等均是。

D.變量(或次數)材料(Frequency data)　凡同一事實，能顯一個以上數量者，爲變量的材料。斯種分類，則以量之大小爲標準，其注意點在其分佈範圍之廣狹，與發現次數之多寡，如人口年齡之大小，體量之輕重，工人工資之多少等均是。

第二節　實際調查之方法

實際調查方法之區分頗繁，有按手續不同而分者；有就其範圍不同而分者；有就其時期不同而分者。茲分別表解說明如下：

- 調查之方法
  - I. 就調查手續區分
    - A.直接調查
      - 1.應用原有表册法
      - 2.親自調查法
      - 3.調查員查報法
      - 4.被問者填報法
      - 5.通訊調查法
    - B.間接調查
  - II. 就調查範圍區分
    - A.全體調查
    - B.揀樣調查
  - III. 就調查時期區分
    - A.定期調查
    - B.繼續調查
    - C.臨時調查

I. 就調查手續之差異，可分調查方法爲兩類，即直接調查與間接調查。茲依次述之：

A. 直接調查 (Primary Invesitgation)　直接調查，乃原始調查之謂。其法有下列五種：

1. 應用原有表册法　此種方法，即在政府機關或公共團體內之原有册籍檔案中或各項登記表上，從而搜集事實，編造統計，實爲至簡便之方法，且可靠程度亦高。行政統計之材料，大部均可從此獲得。

2. 親自調查法　親自調查法，乃主持統計之人，親自調查之謂也。在理論上當爲最完善之方法，因親身審查，結果自然精密。「統計名家勒卜來 (Le Play) 曾行此法於歐洲，以調查工人之生活費，歷時凡二十七年(1829—1856)，其所得結果，頗見精確。」惟研究範圍過廣，則似非個人能力所及，故實際上祗適宜於簡短之特別研究。

3. 調查員查報法　斯法乃由調查機關僱用專門人員，分任調查之謂，爲研究鉅大問題之頁好方法。因調查員之任用，既能加以選擇；復可加以訓練，如是則調查之宗旨及內容，自較明瞭，表册可較完備，惟需費署多，經費非裕之調查，似不易採用。

4. 被問者填報法　所謂被問者填報法，乃由調查機關編發空白調查表式，而令被問者填復之謂。是以苟從表面言之，此法之完善與否，則純恃被問者回答之確否而定，其實良好調查

表之編製，亦屬要事。因調查項目簡單，格式整齊，則填復自易，而所得之成數自高，差誤可少。故採此法時，調查表式之編造，亦當審慎。至如能將調查之宗旨及發表之機關列出，則更覺妥善；因被問者之懷疑私見，常足與調查報告以阻力也。

5.通信調查法　此卽委託通信員在各地代爲搜集材料之謂，實爲調查方法中之最簡便者。惟其結果，自不及上述各法之可靠；但欲費較少之經費而普及廣濶之範圍，則爲一適用之方法。故現在各國之普遍調查，如農業調查等，多採用之。

B. 間接調查 (Secondary Investigation)　間接調查者，乃利用他人已經搜集之材料而應用，故其手續似較簡便，惟不易規定。但他人調查所得，其宗旨，單位等，往往有未能顯明，則不能不重行解析整理，方合應用之範圍耳。至此類調查，其材料之來源，可有下列各方面：

1.政府公布者。

2.各會社之特別調查者。

3.海關報告者。

4.商會或商店所刊布者。

5.私人自行調查者。

6.報紙雜誌刊布者。

II.就調查範圍之廣狹，亦可分調查爲全體調查與揀樣調查兩類：

1.全體調查法 (Complete Investigation)　全體調查，

卽在某時空之內，將某一事實完全調查之謂，如人口，稅收等調查是也。

2. 揀樣調查 (Sampling Investigation) 揀樣調查，卽就所欲研究事實中，選擇若干爲代表而調查以概其餘之謂。(參閱統計之法則章)例如吾人欲研究居民之生活費，則極難盡得一區域或一城內所有家庭預算而編製之，故祗可就中選若干模範家庭(卽適中之家庭)以代表全體，此稱之曰代表事實(Sample Data)。至代表事實之選擇，當爲事實之最普遍者，而不能以事實中之特殊者罕見者爲標準也。

III. 除上述調調查方法外，統計調查又可就調查時期不同，而分調查爲定期調查(卽各種按期統計)，繼續調查（卽常年註册)，及臨時調查(偶然發生事故之調查)三種。然此等方法，均應於訂定目的時審定，方能據以爲材料之搜羅，實際調查之方法，當仍注於直接調查各法之採用也。

第三節 調查表之編製及種類

調查表爲搜羅材料之必要工具，且內容完善與否，尤與調查結果有密切之關係，故編選時自不能不詳加考慮，謹愼擬製，以期適合。玆將其應注意之點，分述如後：

(A) 調查項目之選擇 調查項目，卽調查表內之標題，亦卽吾人對於某事物所欲得之要點，通常以簡短文字顯之，實爲構成調查表之主要部份。選擇之時，必須注意下列各點：

1. 項目之數，以能包含所欲得之要點爲度，其有不關重

要者可畧去之，以免繁瑣。

2. 項目之文字，其意義須簡單顯明，以免發生誤解而便填覆。

3. 項目之答案，最好能以數字，「是」「否」，或符號等簡單方法填復者為佳，而極力避免冗長文字之答案。

4 項目不可令有偏見之答案，及引起被調查者以不快之感。

5. 項目須確為包括所求材料之一部，不可有相關或模稜兩可之涵義。

(B) 調查表式之布置　調查項目選定之後，次則可按照下列各點以為表式布置之根據：

1. 調查表式樣之大小，當以便於携帶，易於收藏為合，不可過大，以免重複摺叠，（我國主計處規定統計報告表式，最大不得過$15\frac{1}{2}\times10\frac{1}{2}$，最小不得過$10\frac{1}{2}\times7\frac{3}{4}$吋）紙質並須以堅實平滑者為之。

2. 同一問題之各方面，如須用多種表式以搜集事實時，則可用各種顏色分別之，以資識別。

3 問題之主要項目，當排列在前，其大項目及重要項目，有時並宜以較大文字排印之。

4 各項目之間，並須按其重輕，分別以複線或單線分割及以號數區別之。（3.4可再參閱下章表列之規則）

5. 各項目之排列，彼此不可過於擁擠，其後並須預備充

分空白，以便填覆。

6. 各項目之意義及所用單位，如須加以解釋者，亦應在表內詳爲說明。

7. 凡每調查表之上，皆宜編以號數，幷備有調查區域，時間，及調查員姓名之空白位置，以便填註而利查考。

8. 調查之宗旨，及發出調查表之機關，如能註明於表內者，概宜列入。

9. 調查表擬就之後，不妨先印多少，再行詳細核閱，並以二三十人試查，看其有無差誤及遺漏，以便更正。

上述各點，均爲編製調查表應注意之點。至調查表式之種類，則可列表解及舉例如下：

調查表之種類
- A. 就填報手續區分
  - 1. 初級調查表
  - 2. 次級調查表
- B. 就調查表式樣區分
  - 1. 表格式調查表
  - 2. 大綱式調查表
  - 3. 問題式調查表

表 2.

廣州市人口調查表

甲·住戶用

區別　　　街道名稱　　　門牌號數　　　共　　第　　頁

	1 姓名	2 家庭身份	3 性別	4 年齡	5 出生 年 月 日	6 婚姻狀況	7 籍貫	8 出生地	9 職業	10 服務地點	11 教育程度 識字否	12 教育程度 曾受何種教育	13 宗教	14 居住本市年數	15 現住或他往	16 有無廢疾	17 備考
一																	
二																	
三																	
四																	
五																	
六																	
七																	
八																	
九																	
十																	
十一																	
十二																	
十三																	
十四																	
十五																	

填報

先看後頁說明及舉例方可填寫

表3.

For aliens only

廣州市人口調查表

Census of The Canton Municipal Government, 1932.

戊. 外僑用

	區別 Police District					街道名稱 Street name					門牌號數 House member			
	姓名 Name	家庭身份 Relationship to Head of Family	性別 Sex	年齡 Age	出生年月日 Date of Birth	出生地 Birthplace	婚姻狀況 Particulars as to Marriage	國籍 Nationality	職業 Occupation	教育程度 Education	宗教 Religion	居住本市年數 Length of Sojourn in city	有無病疾 Physical Condition	備考 Remarks
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1														
2														
3														
4														
5														
6														
7														
8														
9														
10														

Remarks:- This form must be filled up by every alien who spent the saturday night, Oct 22nd in this dwelling, while a separate form is supplied for all Chinese nationality.

Signature of the filler:.......

上列二表爲民國廿一年廣州市人口調查所用調查表中之二種，表2爲黑色，表3爲淺紅色，取其便於分類也。其面積均爲$11 \times 14\frac{1}{2}$吋。

表4. 農戶及耕地報告表

省市縣別	全縣總戶數	農戶數	農民總數	農戶數對全縣百分比	農民人數對全縣百分比	全縣面積	已耕面積				可耕面積估計				耕地面積對全縣百分比	每農戶平均耕地面積
							總數	水田	旱田	其他	總數	水田	旱田	其他		

上列三表，均爲表格式 (Chart form) 調查表。表2及表3，則屬初級調查表；表4則爲次級調查表；因此表尙須照此要點另擬初級調查表以搜集材料，方能塡報也。原式見我國主計處統計局編印之「各機關彙送全國統計總報告材料應用表格」151頁。

表5. 塘沽住廠工人調查表

A. 調查人姓名…………B. 填表………年………月………日……

C. 工廠名稱……………………………………種類…………

甲 1. 工人姓名………號數……年齡………2 誕生地………省……

縣…………3. 在本廠多久…………4 何人介紹…………

5. 從事何種工作……………6 來廠以前工作…………

7 何故不繼續作…………8. 除本廠工作外兼作何事…………

9. 離家多久……原因……10. 家在何處……省……縣……

11. 家中共同生活之人口的年齡,職業及誰爲家長:………

妻(出嫁時年齡……工人娶妻時年齡……)……父………

母…………子…………女…………兄…………弟………

其他……………………12. 離家後囘家多少次…………

13. 上次囘家在何時……原因……來囘路上用多少日子……

旅行方法…………來囘旅費…………路上遇危險

否…………………在家住多少日子…………

乙 14. 進欵:每月工資………近十二月獎勵工資………上次

年終紅利………其他收入………全年收入總計…………

平均每月收入…………每日…………………………

丙 15. 近十二月借債多少………原因………何處…………

利息…………償還方法及期限…………16 近十二月當

何物…………當值………原因………17. 加入何種會………

會的組織及情形……………………………………

丁 18.每日吃幾餐……… 19.飯費，早……午……晚……共……

每月………每年……… 20.五種食品費百分數：饅頭……

窩頭………小米粥………油條………其他（各種佔幾

成………）21 每月零食費………全年………

22.近十二月衣服費，衣………帽………鞋………襪……

其他………共……… 23.近十二月茶葉費………

24.近十二月肥皂費…… 25.近十二月用具種類及用費……

26.全年理髮費……… 27.全年娛樂費（何種）………

28.全年親友應酬費……… 29.新年費……… 30.近十二月

郵件費……… 31.他種用費……… 32.全年支出總計………

平均每月………每日………

戊 33.每年大約剩錢多少（問工人）………

34.近十二月寄給家中錢多少………

己 35.每年理髮次數……… 36 每年沐浴次數…… 37 會何種音

樂……… 38.喜好何種遊戲……… 39 識字否………能讀

白話報否……… 40 曾在何處讀書……… 41 信神否……

何神……… 42.打算接家眷否（若已婚）……打算何時成家

（若未婚）……… 43何處儲蓄………現在多少………

打算如何用……… 44閒暇時作甚麼………

45.家中各種業的數量及價值………

上表爲大綱式（Outline form）之調查表，見林頌河著之

「塘沽工人調查」281—282 頁

調查表式之種類，除上二者外，尚有問題式（Questionnaire form）一種，全以問話式爲標題，內容與大綱式畧同，茲不列舉。

第四節　調查員之選擇

調查結果之完善與否，對於所任用之調查員極有關係。故主持統計調查之人，對於調查員之取錄，必須注意選擇，并應加以嚴格之訓練，務令各調查員均能勝任，及明瞭調查之本旨。至出發調查之時，並須授以詳細之指導書，及應備之事物，以利進行。茲將良好調查員應具之資格，分述如後，以爲選擇及訓練之標準。

（1）觀察力　觀察力之範圍，約包含下列四項：

a.　須富於理解力　統計調查，原爲繁雜之事，如被問人對於統計絕無興趣，則問題之意義亦未能明瞭，而常有問非所答或言過其實之弊。若調查員富於理解力者，在斯種情形之下，則可删去其無關重要之囘答而僅記其確切者。

b.　須毫無成見　統計調查，原重客觀的事實，若調查員豫存成見，則其報告必屬人爲者，結果自無可信之價值。

c.　須誠實及精細　誠實及精細，亦爲調查員應具之要件；不誠實及粗率之調查員，爲省力計，往往以多量虛僞或含混之材料隨意列報，則調查結果，其無價值自不待言，卽使有其他之良好調查員，得有完確材料，亦於事無濟也。

d　須富於記憶力　在調查之時，被問人之囘答，往往有

未能刻卽記錄者。故調查員必須具有良好記憶力，以便調查完畢後，將調查所得，詳細登錄或整理，而免有誤記及遺漏之錯誤。

(2)態度　態度之範圍，約包含下列三點：

a.　須有良好外表　調查員是與被問人時常接近者，故必須具有良好之外表。若粗魯及形狀古怪之調查員，往往易於引起對方不快之感，而與調查進行以阻力。

b.　須舉止穩重　調查員亦須具有穩重之態度，以冀易引起對方之信仰而與以協助。但亦不可過於做作，至反令人輕視。

c.　須謙遜及有體貌　遜謙及有禮貌，亦屬調查員應注意之要件；因遜謙及有禮之人，比較易引起他人之好感。故調查人員應竭力免去驕傲之形狀，及魯莽之言語。

(3)言語　言語之範圍，可包含下列二項：

a.　須能說調查區域內之語言　此點顯而易見，若以不能說本地方言之人而令担任統計調查，則其結果之失敗，自不待言。

b.　須清楚流暢　調查員之語言，亦須清楚暢達，以引起被問人之注意，易於答復，而免有誤會及錯誤之回答。

除上述三點外，調查人員更須具有堅忍及耐勞性，與應對之敏才，使調查之事，可以完滿進行；搜集所得之材料，可以完全無缺。

第五節　材料搜羅後之審核及分類

統計材料，如均已由調查員或被問人交回後，吾人不能卽將之表列，必須詳細校訂，使其達到最高之正確與完全，而免有遺漏及錯誤之處。遺漏之點，有時或應再行調查，但經覆查之後，而要點仍不增加者，此則未必由於忽畧，或因問題難於解答，亦未可定。故主持統計調查之人，當設法以校正之。

又如調查表內之數字，一見卽知其屬錯誤，必須更正，如不更正，卽可棄之。差誤太多之表，可全不用；因少數正確之表，以之代表事實全體，尙勝於多數差誤材料也。至應用他人調查所得之數字以研究時，則更應注意下列各點，以爲審核之根據。

1. 當知編製該項材料之人，是否可靠，及其採得事實之可能性。

2. 該項數目，由何地得來？

3. 單位之意義，並交付與調查員之指導書，亦宜設法獲得，以資參證。

4. 搜羅材料之原意，及其搜羅方法若何？

以上所述，如均已滿意，並將所得材料，詳細訂正之後，次則可按照事實之內容，依其性質相同者分類（Classification）而爲初步之彙類整理。其分類標準，通常不外以時間，空間，種類，數量四者爲依歸。至言手續，則殊難確定，若簡短事實之研究，則應用各種對照表式，利用劃記方法，便盡分類之能事。然若鉅大問題之整理（如人口統計等），則當採用咭片分類

法（即將每單位之事實，詳列於咭片上，並按種類異其色澤，以便彙計），方可減少錯誤之程度也。

第九章　表列法(Tabular Method)

第一節　表列之意義

統計材料既審核彙類後，次則可為正式之表列。所謂表列者，係將搜集所得之材料，按其性質分類，而以數字系統的排列之之謂。斯種方法，實為表現材料之根本方法，蓋無表列法，則散漫不規則之材料，末由整理；而圖示分析等，亦無所適從也。

無統計性質之事實，亦可表列，總求便於觀察。故數字事實，無論是否統計，亦多依此法排列。如對數表，三角函數，利息等均是表列；方式簡明，參考利便，乃其最要之旨，統計表列之理由亦如是也。

第二節　表列之利益

表列之目的，在使無系統之材料，分門別類，列成系統，俾易研究考察。即已成系統之材料，欲再詳細研究，亦可重行整理，或分析，或綜合，按類排列，以適應所欲研究之目的。故分類方法，實為表列之重要步驟。分類既成，即可依次列入表內縱橫各欄，如此整理就緒之後，非僅便於考查比較，且能助長分析之識見與推論之思考焉。是以既經分類表列之事實，較之未分類事實，其中自有優處，舉其大者言之，約有下列六

點：

1.秩序有定　材料之未經歸類而表列者，則毫無倫次，不易得其要領。若既經分類表列之後，則其秩序均有一定。如以時間之先後，行政區域之順序(地理的關係)，或分量之多寡等，而定其先後之次序是也。

2.便於記憶　同類事實，列爲一組，則較之未經分類表列時，記憶自易。

3.易於考察　若材料分類依次列妥之後，則考察甚易。

4.易於比較　同類之事實，依次排列，比較甚易。平常敘述，連篇累牘，極難比較；且各種事實，若不歸類，則其關係大小亦無由顯明。

5.易於總計　若各項目依次排列之後，則整齊有序，求其總數，自覺妥捷。

6.可免重複　事實之報告，若不用表列，則往往有同一事實，而反覆提及多次，甚覺煩瑣。若表列之後，則一種事實，祇以一項目代表，手續自簡，卽時間亦省却不少。

以上數者，爲表列應具之特點，亦爲表列時應注意之條件。雖同一表中，不必兼備數長，然製表之先，必須留意及之，方可着手。

第三節　表列之規則

表列之意義及利益，已如上述。至表列之規則，可分爲下列四點論述之：

(1)表之名稱　表名爲表列內容之代表，布置時應注意下列各點：

1.表名及其號數(如表1,表2,表甲，表乙等)，均應由左而右橫列於表之上部。因表之排列法，多自左而右，自上而下。

2.表之名稱須簡明概括，雖不必將表內事實盡行列入，但其主要目的，必須顯出。有必要時，詳細名稱(副名稱)及說明，亦宜增補，以期明晰。

3.名稱中所列項目，其先後次序，宜與表中所列項目一致。又表之內容，如有時間及空間區別時，亦應在名稱中註明。

4.事實之總數，如須指出時，亦應列入名稱之內。(參閱表11,表12)

5.過長之表，如須分列多頁之時，則名稱或不用重寫，祇書續前二字亦可。

(2)表之項目　表之項目可分爲縱目(Caption)及橫標(Stub)二種，分列於表之上部及左部。至於何者應爲縱目？何者應爲橫標？似無一定限制。通常之標準，則以事實較繁變化較大者爲橫標。布置時並應注意下列各點：

1.各項目(卽縱目橫標)排列之次序，或按時間之先後，或按行政區域之順序(地理的關係)，或按分量之多寡，或按等級之高低，或按事實之重輕。凡此種種，可由製表者依據事實之性質及其主要所在，自行決定。

2.表中項目，又可分爲大項目與細項目(或分目，卽將大

項目之內容再行區分者）•排列之時，細項目位於大項目之下至二者之區分，由製表之目的定之•(參閱表15)

3.細項目列於大項目之下時(指横標言)，文字須較大項目爲小，如於每二大項目間，留相當空白，當更清楚•(參閱表9)

4.項目文字過長，如須分列兩行以上之時，皆宜橫寫•(參閱表7)

5.注重比較某一項目時，可用粗畫字體以顯之•

6.若各項目有連續性者，如事實有中斷時，則該項目仍應列出，以免誤會•

7.總數一項，應列於表末，或表之極右端•然亦可列於表首項目之下，或接近左方項目者•

8.過長之表，如須分列多頁之時，則項目當重寫，或用簡單之寫法與第一頁相當，亦無不可•

(3)表之格線　表格線，乃表周圍所劃之線，及表中區分線之總稱•分畫時應注意下列各點：

1.表之頂末，須用複線或較粗之單線間斷，兩旁多不用畫線•

2.表中每一直行(即每縱目之間)，須以直線分畫之•細項目之間用單線，大項目或重要項目之間用複線，或用一較粗之單線，以示區別•(參閱表15)

3.表中縱目之下，宜用橫線區別之•至橫標間列數字之部，多不用橫線，因格線太多，反易令閱者混亂•

4. 表中列數字之部，雖不用橫線，但可於橫標之後，附以點線，藉之指示，則更顯明。(參閱下列各表)

5. 總數一項，無論在直行橫欄，其前均應用線區別之。

6. 表中橫直各線須平行，如各項目相當者，其格線距離亦須相等。

(4)數字排列法　排列表中數字時，應注意下列各點：

1. 表中所用之數字，應以阿剌伯數字爲標準；因該項數字，不特方向劃一，且國際間均採用之也。

2. 排列數字時，其位數須上下相對，俾易加減比較，有小數時，更應注意。

3. 無數字之格(即事實中斷或缺去者)，須用橫線或點線補充之(參閱表7)。如數字中有應加以說明者，可用各種符號記於數字前或後，而於表外附以說明。(參閱表59)

4. 總計或大項目之數字，及其他各項數字，有應加以特別注意者，宜用粗畫(或不同體裁)之數字填寫。(參閱表9.)

5. 排列總數時，常須留意其錯誤，而在雙式分配表中，更應注意。

以上爲製表時應依據之規則。至布置表式之時，各表之方向，皆宜一致；數字體裁，亦應注意。茲幷將各種字體，擇錄如下，以資列表繪圖之參考：

1234567890	12345678	1234567890
1234567890	1234567890	1234567890
123456789	12345678	12345
1234567890	12345678	123456789
1234567890	1234567890	123456789
12345678	1234567890	1234567890

第四節 表列之種類

表列之種類甚繁，有按照表內事實之詳畧而分者；有按照表內材料之種類而分者；亦有按照表內包含要點多少而分者。茲特表解如下，次再分述之。

- 表列之種類
  - I. 按表內事實之詳畧分
    - a. 詳表
    - b 總表
  - II. 按表內材料之種類分
    - a. 歷史材料的表
    - b. 空間材料的表
    - c. 組合材料的表
    - d. 變量材料的表（次數表）
  - III. 按表內包含要點多少分
    - a. 單項表
    - b. 雙項表
    - c. 三項表
    - d. 四項表

I. 按表內事實之詳畧，可分表爲詳表及總表二類：

a. 詳表　詳表，或稱原始的表(Primary table)。係將固有事實詳加記載，保存其實在情形，以備作詳細研究之材料。此

種表式之編製，多不參加作者之意見，祗將搜集所得事實，排列於表內而已，表6即其一例。

表6. 民國十一年度廣東省各類稅收按月收入數

(原表見廣東財政廳十七年來收支統計)

稅收類別 (單位：千元)	十一年 七月	八月	九月	十月	十一月	十二月	十二年 一月	二月	三月	四月	五月	六月	合計
鹽稅	831	1,305	379	852	642	681	333	....	10	....	89	....	5,122
關稅	4	48	36	45	49	61	28	....	....	9	17	....	297
烟酒	164	350	241	307	247	340	148	....	4	12	35	19	1,867
印花	....	5	14	12	56	51	36	....	35	....	....	....	209
沙田	5	28	23	51	48	134	49	....	14	....	54	....	406
田賦	73	207	305	202	315	363	190	36	47	109	182	40	2,069
蘆捐	489	538	699	722	886	1,145	624	20	447	207	465	244	6,486
雜項收入	213	208	155	290	453	371	485	206	912	500	852	112	4,757
公債	....	....	7	1	8	5	3	....	....	....	....	....	24
借款	1,420	1,162	1,494	2,869	1,739	1,450	887	10	347	347	548	313	12,586
稅外收入	3,840	275	225	427	333	526	220	....	21	26	....	2	2,895
總計	4,039	4,126	3,578	5,778	4,776	5,127	3,003	272	1,837	1,210	2,242	730	36,718

b. 總表　總表，或稱簡表或第二次的表 (Secondary table)•其材料卽將詳表之事實，或合併或減縮而成，有時幷加以分析，爲一特別之目的而作者，如表7是也•

至二者之分別，亦非絕對的，不過就其材料之詳畧劃分之耳•惟表顯材料之效用，則二者有密切之關係，蓋無詳表，則無從作總表；無總表，則無從作簡括之說明也•

表7. 民國十一十二兩年度廣東省各類稅收比較

稅收類別（單：位千元）	十一年度			十二年度		
	全年收入	平均每月收入	百分率	全年收入	平均每月收入	百分率
鹽　稅……	5,122	427	14.0	10	1	.1
關　稅……	297	25	.8	19	2	.1
烟　酒……	1,867	156	5.1	263	22	1.6
印　花……	209	17	.6	——	——	——
沙　田……	406	34	1.1	381	32	2.3
籌　餉……	——	——	——	34	3	.2
田　賦……	2,069	172	5.6	1,636	136	9.8
釐　捐……	6,486	541	17.6	4,830	403	29.1
雜項收入……	4.757	396	12.9	4,361	363	26.2
公　債……	24	2	.1	——	——	——
借　欵……	12,586	1,049	34.3	2,785	232	16.8
稅外收入……	2,895	241	7.9	2,284	190	13.8
總　計……	36,718	3,060	100.0	16,603	1,384	100.0

上列二表，表6爲詳表，表7爲總表•蓋表7事實之一部

，乃由表6綜合而成；其目的則欲表示各類稅收平均每月收入數，及一年來佔全數收入之多寡，故加入「平均每月收入數」及「百分率」兩欄，而畧去各月收入之詳數。至布置該項表式時，其應注意之點有二：

1. 總表在前，詳表在後。如詳表不止一張時，並應按總表中各項目之次序，排列各張詳表。

2. 各表中所列之相同項目，其次序彼此均須劃一。

II. 統計材料，可分為歷史的，空間的，組合的，及變量的。故表亦可分為歷史材料的表，空間材料的表，組合材料的表，及變量材料的表之四類者：

a. 歷史材料的表　表內事實，以時間為主體，按照事實時期之先後順次排列，以明其變遷之趨勢，作繼續研究。其排列方法，簡而易明，如表8是也。

表8. 我國國外貿易洋貨進口淨值按年總數

民國元年——民國二十年

民國年次	洋貨進口淨值 單位：關平兩
元　年	473,097,031
二　年	570,162,557
三　年	569,241,382
四　年	454,475,719
五　年	516,406,995
六　年	649,518,774
七　年	554,893,032
八　年	646,997,681
九　年	762,250,230
十　年	906,122,439
十一年	945,049,650
十二年	925,402,887
十三年	1,018,210,677
十四年	947,864,944
十五年	1,124,221,253
十六年	1,012,931,624
十七年	1,195,999,271
十八年	1,265,778,821
十九年	1,309,755,742
二十年	1,433,489,194

b. 空間材料的表　此類表式，係將同一時期各地之事實作横斷的表顯。其排列方法，或以行政區域順序(地理的關係)，或以分量多寡均可，如表9是也。

表9. 日本僑民旅居我國各地人數

旅居地	人數
遼寧省……	61,200
瀋陽……	40,000
遼陽……	10,000
營口……	10,000
安東……	1,000
江蘇省……	26,200
上海……	26,000
蘇州……	150
南京……	50
吉林省……	7,500
哈爾濱……	4,000
長春……	1,500
吉林……	1,000
間島……	1,000
……	……
……	……
……	……
……	……
總數……	103,495

c. 組合材料的表　此類表式，即將同一事實之各類結果表現。其排列方法，多以數量之多寡或事實之重輕為序，如表10是也。(參閱表28)

表10. 北平市工人生活費分配

類別	消費百分數
食品	71.2
衣着	6.8
房租	7.5
燃料	11.3
雜項	3.2
合計	100.0

d. 變量材料的表　斯類表式，多稱次數分配表。即表列一個時期事實之數量，依其分佈範圍之廣狹，與發見次數之多寡，適當排列，以便研究其變量情形，如表11及表12是也。

至變量之規律，在自然界中，最為顯著。例如測量樹葉之長度，由一樹之中，任擇若干以比較其長短之度，則長短必不

相等。其最長與最短之葉，必居少數，次長與次短之葉，必居次少數；長度居中之葉，其數必較多。此種居中之長度，可爲全體長度之代表。在此代表長度之兩側，其數必依次遞減(他如人之高度，體重等亦然)。惟各長度之葉數，既不限於一柄，則必有長度重複之葉數，此重複之數目，名爲**次數**(Frequency)；比較各變量所發見之次數，名爲**次數分配**(Frequency Distribution)。故表示變量材料的表，亦卽次數分配表也。(參閱下節次數分配表)

表11.　327柄樹葉長短之分配

葉　長	葉　數
3.0	1
3.5	0
4.0	1
4.5	0
5.0	2
5.5	3
6.0	9
6.5	0
7.0	12
7.5	19
8.0	32
8.5	40
9.0	67
9.5	63
10.0	28
10.5	21
11.0	8
11.5	2
12.0	1
總　計	327

表12.　英國成年男子8,585人之體高分配

高　度(單位：吋)	人　數
57—	2
58—	4
59—	14
60—	41
61—	83
62—	169
63—	394
64—	669
65—	990
66—	1223
67—	1829
68—	1230
69—	1063
70—	646
71—	392
72—	202
73—	79
74—	32
75—	16
76—	5
77—78	2
總　計	8,585

III　除上述表之種類外，又有因表中事實包含要點之多少，而分表爲下列四類者：

a. 單項表 (Single tabulation)　此類表式，祇列一項要點者，如表13是也。

b. 雙項表 (Double tabulation)　此類表式，則表列二項要點者。如表14，除輸出總數外復有種類之分是也。

c. 三項表(Treble tabulation)此類表式，則有三項要點列入。如表15之種類，數量,及價值是也。

表13. 民國十一年——十八年我國茶葉按年輸出總量

民國年次	輸出總量（單位：担）
十一年…………	575,073
十二年…………	801,417
十三年…………	765,935
十四年…………	833,008
十五年…………	839,317
十六年…………	852,176
十七年…………	926,002
十八年…………	947,730

表14. 民國十一年——十八年我國各種茶葉按年輸出數量

民國年次	茶葉輸出數量（單位：担）			
	紅茶	綠茶	他種茶	合計
十一年……	267,039	282,988	26,046	566,073
十二年……	450,686	284,063	66,101	801,417
十三年……	387,064	278,767	100,104	765,935
十四年……	329,455	321,201	182,352	833,008
十五年……	292,527	329,197	217,593	839,317
十六年……	248,858	333,216	290,102	872,176
十七年……	259,615	306,465	349,622	926.002
十八年……	294,563	350,005	303,162	947,730

d. 四項表 (Quadruple tabulation)　此類表式，則有四項要點列入。如表16之種類，數量，價值，及輸往地是也。

表15. 民國十一年——民國十八年
我國各種茶葉按年輸出數量及價值

民國年次	茶葉輸出數量及價值							
	紅茶		綠茶		他種茶		合計	
	數量(担)	價值(關両)	數量	價值	數量	價值	數量	價值
十一年……	267,039	6,950,518	282,988	9,671,194	26,046	344,363	576,073	16,966,075
十二年……	450,686	13,991,559	284,630	8,360,748	66,101	553,034	801,417	22,905,341
十三年……	387,064	12,925,551	218,767	8,363,350	101,104	738,320	765,935	21,127,221
十四年……	329,455	9,700,028	321,201	9,593,321	182,352	2,852,339	833,008	22,145,638
十五年……	292,527	9,336,780	329,197	12,340,596	217,593	4,487,891	839,317	26,165,267
十六年……	248,958	9,377,346	333,216	15,344,829	290,102	6,894,774	872,176	31,616,949
十七年……	269,615	11,068,895	306,765	14,480,871	349,622	10,984,087	926,002	37,133,853
十八年……	294,563	12,327,864	350,005	18,862,537	303,162	10,062,027	947,730	41,252,428

表16. 三年來我國各種茶葉輸往國外各地之數量及價值

民國十五年——民國十七年

民國年次	輸往地	茶葉輸出數量及價值							
		紅茶		綠茶		他種茶		總計	
		數量(担)	價值(關兩)	數量	價值	數量	價值	數量	價值
十五年	香港	....	....	....	....	....	....	....	....
	澳門	....	....	....	....	....	....	....	....
	安南	....	....	....	....	....	....	....	....
	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	合計	292,527	9,336,780	329,197	12,340,5 6	217,593	4,487,891	839,317	26,165,267
十六年	香港	....	....	....	....	....	....	....	....
	澳門	....	....	....	....	....	....	....	....
	安南	....	....	....	....	....	....	....	....
	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	合計	248,858	9 377,346	333,216	15,344,829	290,102	6,894,774	872,176	31,616,919
十七年	香港	....	....	....	....	....	....	....	....
	澳門	....	....	....	....	....	....	....	....
	安南	....	....	....	....	....	....	....	....
	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	....	....	....	....	....	....	....	....	....
	合計	269,615	11,668,895	306,765	14,480,871	349,622	10,984,087	926,002	37,133,853

第五節　次數分配表

次數分配之意義，前經畧言之。至事實如經搜集後，欲用表列出之時；則必先察全體數量若何？方可着手。假使全體數量不多，而兩端相差又不過大時(約在30單位以下，參閱表11)，則祗將各數量按其大小排列，成一行列(Array)後，復將其相同者歸類，以次數表出，然後依次排列卽得（排列時，數量由小而大或由大而小均可）。但若數量繁多，而兩端相差又大時(如下例)則又應如何着手？本節之目的，卽欲對此問題，加以討論。

某大學120名新生之體重

（以磅爲單位）

143.7	155.1	127.0	120.0	132.0	137.5	144.3	154.2
131.9	145.1	120.3	120.9	121.8	145.3	130.0	141.6
126.8	138.1	112.2	128.0	145.8	146.3	157.9	143.2
124.6	132.0	92.0	138.7	110.8	108.2	147.0	117.5
151.0	111.8	127.7	11[illegible].9	126.2	152.2	136.5	118.8
102.8	127.0	132.6	106.7	128.7	131.4	107.5	167.4
109.8	154.6	156.3	122.0	128.2	125.8	116.7	134.6
103.0	178.0	157.4	119.2	139.8	148.0	140.0	163.1
114.3	96.3	137.2	170.0	139.8	134.8	142.1	142.6
114.7	98.7	116.3	122.5	124.0	162.2	126.1	1[illegible]4.3
104.7	112.6	135.1	134.2	109.7	129.4	135.3	135.5
164.0	113.9	164.4	159.3	124.8	151.3	141.2	1[illegible]4.0
105.8	133.4	134.0	115.4	130.2	123.3	140.7	129.0
115.8	139.4	169.2	131.0	136.1	124.5	130.8	149.5
115.0	173.4	150.7	140.1	165.1	129.3	153.3	141.8

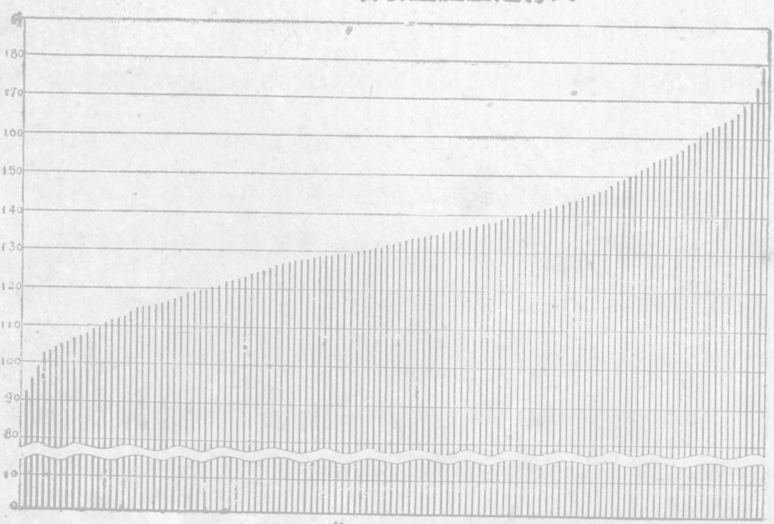
上列爲某大學某年120名新生之體重，按測量個人所得排列之結果，幷未加以整理者。若依前法將之列成行列，或更以圖顯之之時；則其結果有如表17，及圖1：

表17. 某大學120名新生體重之行列

（以磅爲單位）

92.0	112.2	120.3	127.0	132.0	138.1	145.1	155.4
96.3	112.6	120.9	127.7	132.6	138.7	145.3	156.3
98.7	113.9	121.8	128.0	133.4	139.1	145.8	157.4
102.8	114.3	122.0	128.2	134.0	139.8	146.3	157.9
103.0	114.7	122.5	128.7	134.2	139.8	147.0	159.3
104.0	115.0	123.3	129.0	134.3	140.0	148.0	161.0
104.7	115.4	124.0	129.3	134.6	140.7	149.1	162.2
105.8	115.8	124.5	129.4	134.8	141.2	149.5	163.1
106.7	116.3	124.6	130.0	135.1	141.6	150.7	164.4
107.5	116.7	124.8	130.2	135.3	141.8	151.3	165.4
108.2	117.5	125.8	130.8	135.5	142.1	152.2	167.4
109.7	118.8	126.1	131.0	136.1	142.6	153.3	169.2
109.8	119.2	126.2	131.4	136.5	143.2	154.0	170.0
110.8	119.9	126.8	131.9	137.2	143.7	154.2	173.4
111.8	120.0	127.0	132.0	137.5	144.3	154.6	178.0

某大學120名新生體重之行列



（圖 1）

觀上表及圖，雖較整齊有序，吾人亦可畧知該 120 人體重之大概情形。但其中體量最重之人(178.0)，與最輕之人(92.0)比較，相差有86.0磅，距離頗長，單位過多，即依上法整理之後，仍覺繁冗。且該項事實之內容——如該羣人之集中重量，及各種重量之人數等——亦未十分明顯。故在斯種情形之下，必須另以方法將其單位歸併，分爲若干組，使之化繁爲簡，俾便考察，作研究張本。至分組手續，通常約有下列三步：

(1)檢查全距　全距(Range)，即全體數量中最大數量與最小數量之差數也。如上例之最大數量爲 178.0，最小之數爲92.0，則其全距等於86.0。(參閱圖 2)此種手續，實爲分組所必經，即不須分組時，亦應知之也。

(2)規定組距　組距(Class interval)，即每組本身之距離也。其大數謂之上限(Upper limit)，小數謂之下限(Lower limit)，中央之值，則謂之中值(Mid-value 參閱圖2)。規定組距時，應注意下列各點：

a. 以一適宜之數除全距　求得全距後，即以一適宜之數除之，其除得之數，即組數也。如上例，其全距爲86.0，若以 5 除之，則得17.2；以10除之，則得8.6；以15除之則得5.7…是即以5，以10，或以 15 爲組距，而分全體數量爲 18 組，9組，或6 組也（此等組數，係由17.2，8.6，5.7…進大而得，參閱表19)。惟有須注意者，則定組距之時，不宜過大，亦不宜過少，其標準以能使次數分配之組數，約在10與30之間爲適宜。

蓋組數如超過30，則難免繁瑣；若少於10之時，則或恐失精確之程度。

b. 須保存原有事實之價值　分組之時，對於原來事實，應注意保存其價值，此點實至爲重要。如欲達此目的時，則須令每組所含之數量，其平均數值與該組之中值無大差異。然後據此分組材料，以爲分析張本——如求平均數，差異數等——，其事實之眞象，方不致消失。蓋此種分組法則，係假定每一組距之中，各個數量之價值，皆與該組之中值相等故也。如表19各組所含之數量，其平均數值，均與各該組之中值無大差異，至第二組所含之2數量，其平均數更與中值適合。此種假定，若當每組數量增加時，更可相符（在表19之事實，本可分爲92—97，97—102等組，但爲適合此條件起見，故將之分爲90—95，95—100........）。

c. 各組距之大小以相等爲原則　組距之大小，各組均須一律。如以5爲組距時，則每組均應包含有5單位，不可或多或少。

d. 組距之界限須詳細劃清　組距之界限，有上限與下限之分。如表19之第一組，則90爲該組之下限，94.99爲該組之上限。排列組距之時，必須分劃清楚。如排列上例之數量，以5爲組距時，則由90起，依次排列爲90—95—100等。然第一組上限，與第二組下限之界線，應詳細書出，以期明確。如表19組限(Class Limit)行內之90—94.99，95—99.99等是。至94.99

之意義，卽小數之後，有無限個9，若再於小數下無限個9之後加1時，卽爲95矣（參閱圖2）。然爲利便計，通常多有將之書爲90—95，95－100者，但其意義，亦與前同，凡數量一達95時，卽屬之第二組矣。

關於組限之書法，除上述二法外，倘有多種。玆特表列如下，以資參考。

表18. 組限之各種書法

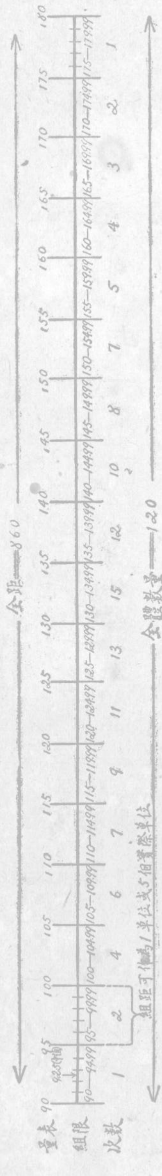
雙限法				下限法		中値法
A	B	C	D	E	F	G
0及小於5	0及5以下	0—4	1及包含5	0—	0－4.99	2.5
5 ,, 10	5,,10,,	5—9	6 ,, 10	5—	5—	7.5
10 ,, 15	10,,15,,	10—14	11 ,, 15	10—	10—	12.5
15 ,, 20	15,,20,,	15—19	16 ,, 20	15—	15—	17.5
20 ,, 25	20,,25,,	20—24	21 ,, 25	20—	20—	22.5
25 ,, 30	25,,30,,	25—29	26 ,, 30	25—	25—	27.5
30 ,, 35	30,,35,,	30—34	31 ,, 35	30—	30—	32.5
35 ,, 40	35,,40,,	35－39	36 ,, 40	35—40	35—	37.5

觀上表，可知組限之書法連前二法計，共有9種。就中除D法外，其餘意義，彼此均同。故書法雖多，吾人若能明瞭分組法則時，則亦當不發生困難與誤解也。

（3）排列各組數量之次數　以上二種手續，如均己決定之後，則從事於最後之一步，排列每組中數量之次數，斯種方法，可總括如下：

a. 先於左方列組限一行，將各組限書出，如表19之(1)行。

表明量表,組限,單位之應用



(圖2)

b. 次於組限之右方列中值一行，將各組之中值列出（計算中值時，可將其下限與上限相加，以2除之卽得。如$\frac{90+95}{2}=92.5$）。如表19之(2)行。（此行純爲便於計算起見，否則可以不列）

c. 再次列排列一行，然後循各數量依次檢查，如某數應歸入某組者，卽於該組排列行下作一竪線，如已有四竪線時，則作一橫線，使每五個數量成一形式，以便計算。如表19之(3)行。（此法，僅爲在未整成行列之事實分組時用之，若事實已成行列後，則直可依次計算，以次數表出，此行可以不用。又當全體數量均經列妥，用數字表出後，此行亦應省畧。）

d.若各數量均經檢查依次排列後，即可於左方列次數一行，將排列所得以數字表出，則次數分配之手續已完全·如表19之(1)行是也·

表19. 某大學120名新生之體重分配

(組距以5爲單位)

組限(磅) (1)	中值 (2)	排列 (3)	次數 (4)
90——94.99	92.5	|	1
95——99.99	97.5	||	2
100——104.99	102.5	||||	4
105——109.99	107.5	卌|	6
110——114.99	112.5	卌||	7
115——119.99	117.5	卌||||	9
120——124.99	122.5	卌卌|	11
125——129.99	127.5	卌卌|||	13
130——134.99	132.5	卌卌卌	15
135——139.99	137.5	卌卌||	12
140——144.99	142.5	卌卌	10
145——149.99	147.5	卌|||	8
150——154.99	152.5	卌||	7
155——159.99	157.5	卌	5
160——164.99	162.5	||||	4
165——169.99	167.5	|||	3
170——174.99	172.5	||	2
175——179.99	177.5	|	1
總計			120

表20 某大學120名新生之體重分配

A.（以5爲組距）體重（磅）(1)	中值 (2)	人數 (3)	B.（以10爲組距）體重（磅）(1)	中值 (2)	人數 (3)	C.（以15爲組距）體重（磅）(1)	中值 (2)	人數 (3)
90—95	92.5	1	90—100	95	3	90—105	97.5	7
95—100	97.5	2	100—110	105	10	105—120	112.5	22
100—105	102.5	4	110—120	115	16	120—135	127.5	39
105—110	107.5	6	120—130	125	24	135—150	142.5	30
110—115	112.5	7	130—140	135	27	150—165	157.5	16
115—120	117.5	9	140—150	145	18	165—180	172.5	6
120—125	122.5	11	150—160	155	12			
125—130	127.5	13	160—170	165	7			120
130—135	132.5	15	170—180	175	3			
135—140	137.5	12						
140—145	142.5	10			120			
145—150	147.5	8						
150—155	152.5	7						
155—160	157.5	5						
160—165	162.5	4						
165—170	167.5	3						
170—175	172.5	2						
175—180	177.5	1						
		120						
M.=15965÷120=133.042 Mdn=132.33			M.=15970÷120=133.083 Mdn=132.59			M.=15960÷120=133.000 Mdn=131.92		

表20，共有A,B,C. 三種組距，然分組之時，究以何種最爲適宜？欲解決此問題，則應視分組後對於原來事實之價值，能否保存爲斷。如上例，原來事實全體數值之和爲15965.3，其平均數爲133.044。而分組之後，則A行之平均數爲133.042；B行之平均數爲133.083；C行之平均數爲133。此三者所得，均與原來事實之結果，無大差異，故皆可採用。惟比較言之，則以A行分組，最爲適宜。蓋其平均數與原來事實之平均數，相差至微；是卽分組之後，與未分組之前，其結果幾完全一致也。

關於研究次數分配時，對於事實之性質，亦應注意。按事實之性質，可分爲二種：一爲連續事實，一爲分立事實。玆分述之如次：

1. 連續事實(Continuous data)　所謂連續事實者，卽測量所得之數量，其值多非絕對精確的，不過於一定限度之內，近似於精確已。是以其地位在量表(Scale 或稱量尺)上，實佔一距離，且可細分至無盡數，全視所用之測量單位所轉移。自然界之現象，多屬此類；因其大小，輕重等，均不易受數學精確之限制。如人之年齡，體重，高度等是也。至表明連續事實之數字，通常約有二種意義。如云5，則此5字可作如下解釋：(1)佔4.5至5.5間之距離；(2)佔5與6間之距離。從(1)之意義，是以5爲最近整數數量；其所佔之距離係由此數與其前一數中間距離之半數起，至此數與其後一數中間距離之半數止。從(2)之意義，是以5爲最低限度；凡能及此限度，而不能

及其次限度之數量，均以此數爲最近之整數。

2. 分立事實(Discrete data) 分立事實，則各種現象之變量，常以一定分量顯之；亦卽可以所用之單位，決定次數之多少。其地位在量表上爲一點，且不能再行細分，經濟範圍，多屬此類。如物價，工值，及工人數目等是也。故研究次數分配時，對於事實之性質，亦應明瞭。否則以分立事實於分組時，將其組限強排列之爲小數，則於事實爲不合矣。

第六節 等級分配表

等級分配者(Rank Distribution)，卽將搜集所得之事實，按其大小，依次排列，而以數字表示其等級高低之謂。設有下列14個數量，若以數字等級表出之，則其結果，有如表21：

號數：	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
數量：	50	49	48	48	47	46	45	45	45	44	43	42	41	40

表21. 14個數量之等級分配

號數	數量	等級	更正等級
A	50	14	14
B	49	13	13
C	48	12	11.5
D	48	11	11.5
E	47	10	10
F	46	9	9
G	45	8	7
H	45	7	7
I	45	6	7
J	44	5	5
K	43	4	4
L	42	3	3
M	41	2	2
N	40	1	1

表21最大之數量爲50，故其等級最高，列爲14(或列爲第一亦可)；次爲49，故居13級；再次爲48，但48有兩個，就原來等級，應列爲12，11。但此種列法，殊欠公允，因其數量彼此均同，則應各予以同一之等級。故爲補救此點起見，卽將該

二數所居之等級12，11相加平均得11.5，是爲該二數之更正等級。至45則有三個，亦依前法，將其原居等級8,7,6,平均得7,爲該三數所居之等級。其餘各數均祇得一個，故依其等級分別排列，以至列完爲止，於是遂成一等級分配。惟此種分配，必須將其數量列出方可；若祇列其等級，而忽畧其數量，則實不能明瞭各數之實價值爲若干？且此僅爲絕對的等級，對於各數之高低，仍未十分顯明。故除非爲利便計算起見（如用等級法求相關等），方可採用，否則不宜。

第十章　圖示法 (Graphic Method)

第一節　圖形之效能

事實之眞象，須假闡發之方法而後顯。如方法精當，則其表顯效力強，所收之效果亦大；苟方法不得其宜，雖有價值之事實，亦不能盡其效用。故表顯方法之重要，亦不亞於事實之價值也。

通常表顯事實之工具，有文言，數字，圖形三種。分別言之，三者各具其固有之功用。若比較言之，則文言之繁長，不如數字之簡括；數字之呆板，不如圖形之顯明。蓋用文字說明事物之時，多佔篇幅，作者閱者，兩費時間；考察比較，皆不便利。用數字表明事物之時，排列事實，整齊有序；較諸文字，可省篇幅，考查比較，亦均便利，惟事實之眞象，仍未充分明顯。蓋表列之效能，雖在乎詳晰，惟一般人對於數字之研究

，若無相當了解，亦難獲得其要點也•然苟用圖形示之，則其簡單顯明，雖庸常之人，亦可了然；且能於簡短篇幅，少許時間，作充量比較•此所以表列之外，尤須應用各種圖形以爲補助；表列居先，圖示隨後，兩者常幷用也•

第二節　圖形之種類

圖形之類別甚繁，有按其量表不同分類者；有按其示量方法不同分類者；有按其式樣不同分類者，玆特先行表解如下，次再論述之•

圖形之種類
- I. 按量表不同分類
  - 1. 算術的（即普通一般圖形）
  - 2. 對數的（比率圖）
- II. 按示量方法不同分類
  - 1. 一量的
  - 2. 面積的（二量的）
  - 3. 體積的（三量的）
  - 4. 多少的
- III. 按式樣不同分類
  - 1. 線形
  - 2. 條形
  - 3. 圓形
  - 4. 方形
  - ....
  - ....

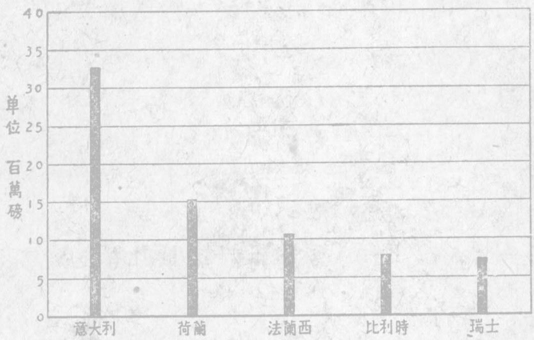
上列爲圖形之種類，其中除I. II二類，容再討論外•玆先按式樣之不同而通常所用者，由簡而繁，分別示例及說明如下：

（1） 線形圖

線形圖者，乃於一基線之上，分畫若干直線以代表數量之謂。此種圖形，係以分量之多寡，而定各線之長短，如下列二圖是也。

圖 3 乃據表22材料繪成。此類圖形之繪畫，當先察全部事實之兩端及紙張大小，然後選定量表（即圖3之縱方及橫方者是）方可着手。至選擇時，橫方量表通常爲事實主體之分畫，其距離彼此應相等；縱方量表則爲倚主體而生之數量分畫，其最低限度，當以能包含事實之最小數量（通常爲零點）；最高限度，當以能包含事實之最大數量爲標準。量表選定後，並將其名目(Scale designation)，數目(Scale numeral)，及指

1927年意,荷,法,比,瑞士,五國人造絲輸出量



（圖3）

表22　1927年
五國人造絲輸出量

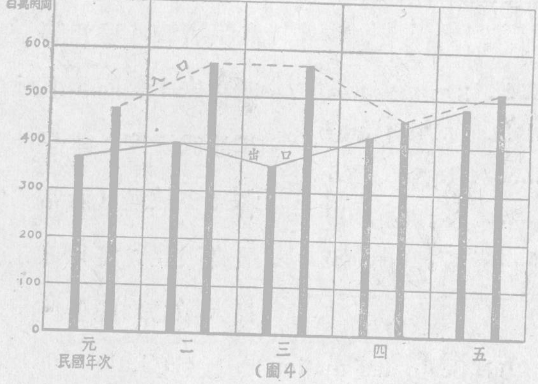
國　別	輸出數量 單位：磅
意大利……	32,684,437
荷　蘭……	15,294,400
法蘭西……	10,565,285
比利時……	7,865,000
瑞　士……	7,260,000

導線(Guide line)等加入，即可按各數量之大小分別繪畫矣。又若於一圖之內，幷列多種事實時，則可用各種不同顏色之線，或以不同組織之線連結其上端區別之。如圖4：

表23. 民國元年——民國五年
我國國外貿易出入口貨價總數
(單位：關平兩)

民國年次	出口貨價	入口貨價
元　年……	370,520,403	473,097,031
二　年……	403,305,546	570,162,557
三　年……	356,226,629	569,241,382
四　年……	413,861,164	454,475,719
五　年……	481,797,366	516,406,995

我國國外貿易出入口貨價比較
民國元年——五年



(圖4)

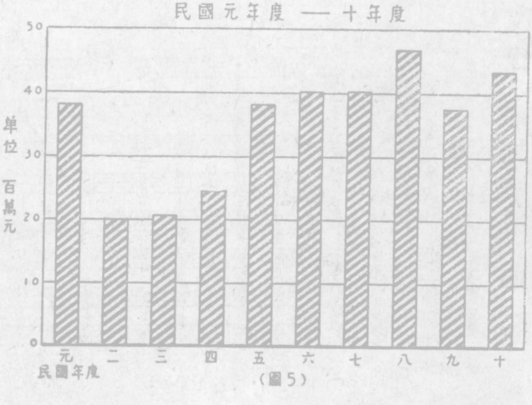
（2）　條形圖

表24.　民國元年度——十年度
廣東省財政按年收支總數

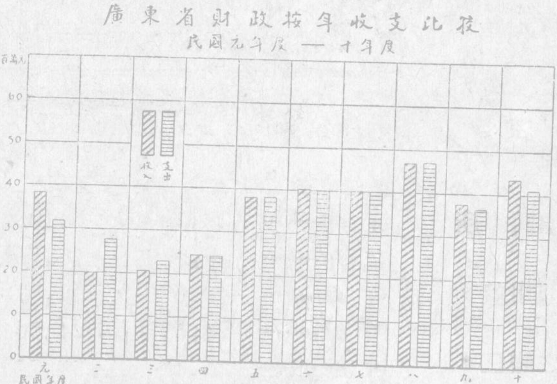
民國年度	收支總數（單位：千元	
	收　入	支　出
元　年………	38,139	31,832
二　年………	20,096	27,764
三　年………	20,629	22,975
四　年………	24,578	24,261
五　年………	38,187	38,247
六　年………	40,260	40,173
七　年………	40.277	40,113
八　年………	46,837	47,056
九　年………	37,003	36,694
十　年………	43,499	41,076

條形圖之性質，與線形圖相類，其作法大致亦復相同；所差異者，一則用線，一則用較闊之條已•惟條形圖中之每一條內，復可分爲若干段，以代表事實之各部，此則條形圖勝於線形圖處•下列各圖，均屬條形圖之例•

廣東省財政按年收入總數
民國元年度 — 十年度

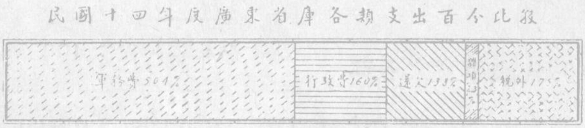


（圖5）

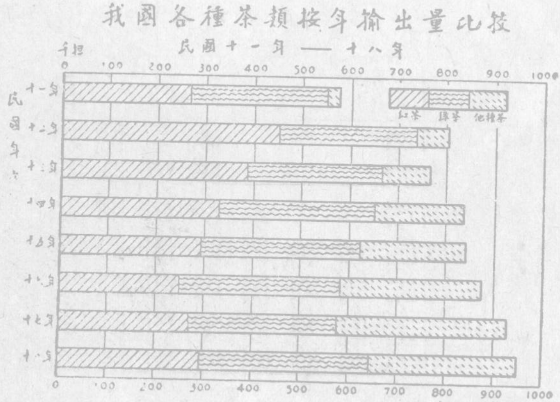


（圖6）

上列二圖，爲簡單的條形圖。但圖6則示二種事實，故應用兩種構造不同之條形以顯之，或用不同顏色條形分別之亦可，惟同類事實，須用同一顏色。又如欲表顯之事實，應區分爲若干部，或事實之每項中，復分爲若干部份時，則可用**分段條形圖**表明之，如下列各圖：

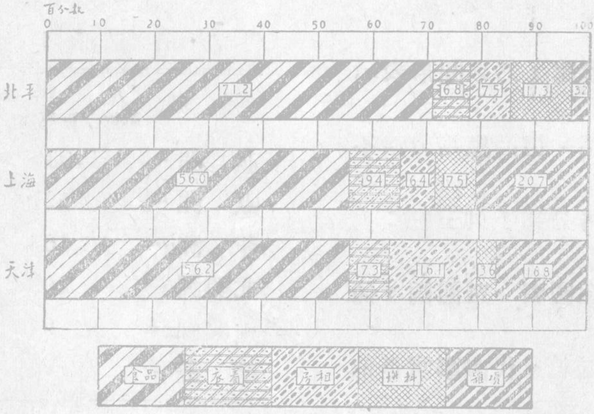


（圖7）



（圖8） （由表14材料繪成）

北平 上海,天津三市工人生活費百分分配

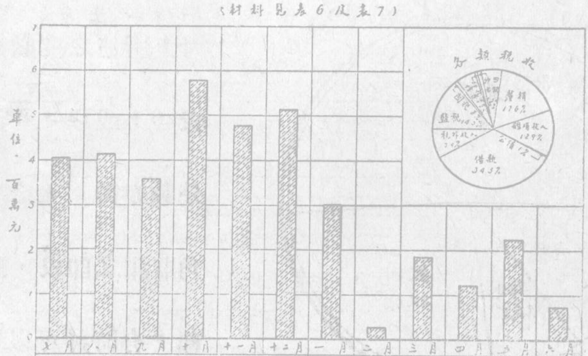


(圖9)

上述二種圖形中，有時並可加一圓形或方形，彙示其比較的量，使於一圖內得獲充分比較之機，則尤為便利，如圖10：

民國十一年度廣東省稅收比較

(材料見表6及表7)



(圖10)

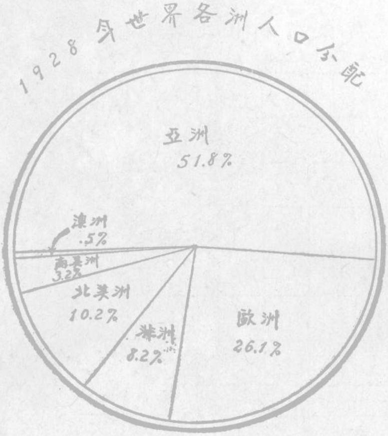
（3）圓形圖

圓形圖，乃以圓形表示事實之謂．但因應用方法不同，復可分爲下列三種：

A.單圓圖　單圓圖，係以一圓面積，代表事實全部，再按事實之分類而分全圓面積爲若干部份，以代表各分部之數量．如圖11，12：

表25．1928年
世界各洲人口分配

洲　別	人　數 單位：百萬人	百分數
亞　洲……	1,033	51.8
歐　洲……	521	26.1
非　洲……	163	8.2
北美洲……	203	10.2
南美洲……	64	3.2
澳　洲……	9	.5
總　數……	1,993	100.0



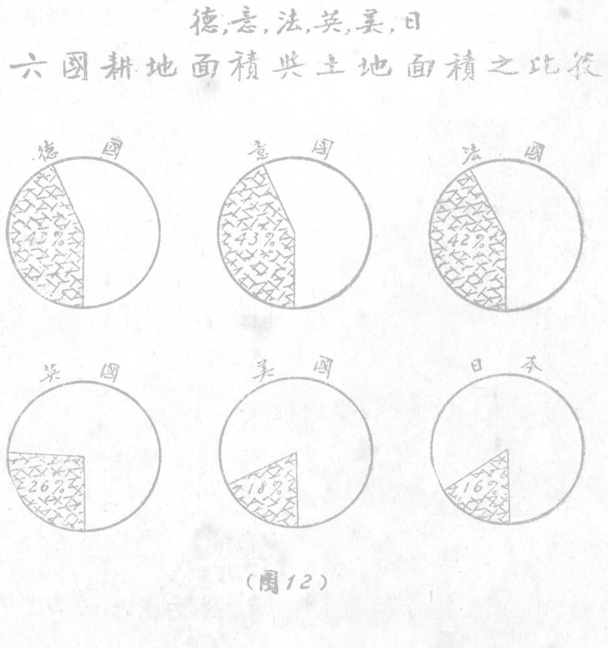
（圖11）

圖11之繪畫，先將各部份之數與圓周360度相比，以求各數在圓周上所佔之度數（參閱表26，或以3.6乘各百分數亦得），後再以量角器測之卽成．圖內各部，有時幷可以各種橫線或顏色區別之．

表26. 繪畫單圓圖之計算

(以圖11爲例)

各洲人數百分數	圓周度數	各數與圓周之比	所得度數
A 亞　洲……51.8		100 : 51.8＝360 : A	A＝186.5
B 歐　洲……26.1		100 : 26.1＝360 : B	B＝ 94.0
C 非　洲…… 8.2	360	100 : 8.2＝360 : C	C＝ 29.5
D 北美洲……10.2		100 : 10.2＝360 : D	D＝ 36.7
E 南美洲…… 3.2		100 : 3.2＝360 : E	E＝ 11.5
F 澳　洲……　.5		100 : .5＝360 : F	F＝ 1.8
總　數 100.0			360.0



(圖12)

（圖13）

右圖亦爲單圓圖一種，其性質與上述者亦同，皆以各部分之面積爲比較標準。但其效用與繪法則畧不同，圖11以圓周爲比例，圖13則以半徑爲比例。吾人一視二圖及繪畫時之計算，自可明瞭矣。

繪劃圖13之計算法如下：（參閱表27）

按圓面＝半徑^2 ×π

則$\frac{1}{12}$圓面＝$\frac{\text{半徑}^2 \times \pi}{12}$

設每部面積（即代表平均收入10,059）＝

$$=\frac{1^2 \times 3.1416}{12}$$

則一月之實際面積應依下列比例求得：

$$10,059:\frac{1^2\times 3.1416}{12}=5,051:\frac{1^2\times 3.1416}{12}$$

$$=\frac{5,051}{10,059}=r^2$$

即半徑之長度 $r=\sqrt{\frac{5051}{10059}}=.71$

同理，二月之半徑 $=\sqrt{\frac{6634}{10059}}=.81$（每月半徑均依此法求得）.

三　月……= .92

四　月……= .95

六　月……= .96

六　月……=1.12

七　月……=1.21

八　月……=1.07

九　月……= .98

十　月……=1.00

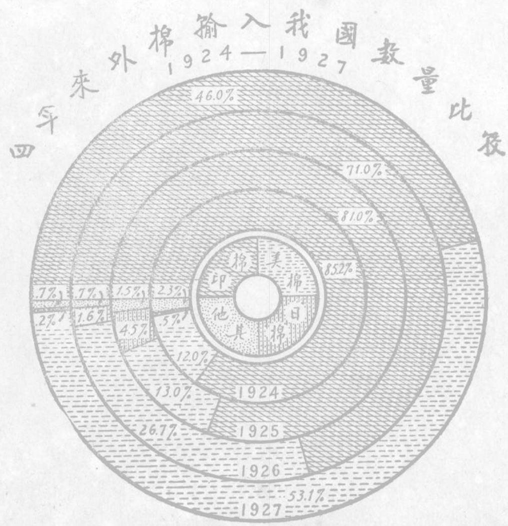
十一月……=1.02

十二月……=1.15

表27. 民國十五年
廣東省庫按月收入數

月次	收入數 單位：千元
一月……	5,051
二月……	6,634
三月……	8,508
四月……	9,016
五月……	9,318
六月……	12,544
七月……	14,792
八月……	11,529
九月……	9,643
十月……	10,007
十一月……	10,443
十二月……	13,217
總數……	120,702
每月平均……	10,059

B 疊圓圖　疊圖圖，係由同一圓心，作成二個以上圓周，代表二個以上之事實，幷按各事實所含各部數量，而分各圓周爲若干分，以代表各事實所含之各部。其繪法亦與單圓圖相同，不過將各圓周重疊置之已，如圖14卽其一例。



(圖14)

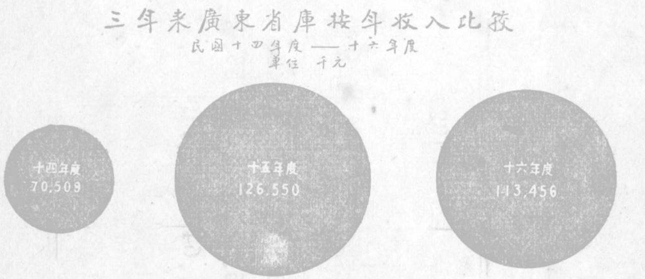
上圖為各單圓之重疊，如在事實許可時，則下述之多圓圖亦可仿此而成一疊圓。

表28. 四年來外棉輸入我國數量比較

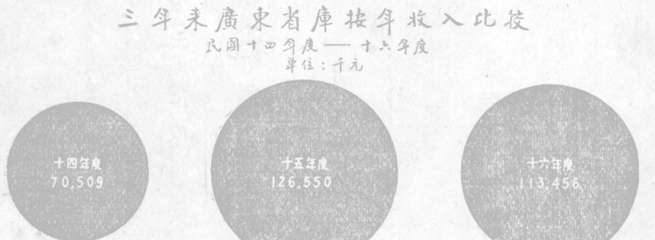
1924 —— 1927

年次 / 類別	1924 担數	1924 百分數	1925 担數	1925 百分數	1926 担數	1926 百分數	1927 担數	1927 百分數
印棉	1,039,043	85.22	1,463,760	80.99	1,947,984	70.96	1,111,793	46.03
美棉	146,810	12.04	235,010	13.00	731,888	26.66	1,282,146	53.08
日棉	5,899	.48	82,063	4.54	44,890	1.64	5,719	.24
其他	27,535	2.26	26,617	1.47	20,255	.74	15,824	.65
總數	1,219,284	100.00	1,807,450	100.00	2,745,017	100.00	2,475,482	100.00

C.多圓圖　用二個以上不等圓形，代表二個以上不等事實，大圓表示大量，小圓表示小量，謂之多圓圖。繪製之時，可以一圓之面積，或一圓之直徑爲標準，然後求出其他各圓之比例數，依次繪之卽成，如圖15，16是也（圖15以直徑爲標準，圖16則以面積爲標準）。惟此種圖形有下列之缺點：(1)以直徑爲標準，則易令閱者將其比例看大；(2)以面積爲標準，則易令閱者將其比例看小；（就理論上言之，當以面積比較爲適合）；(3)不易得精確之比較。有此數因，故應用較少。



(圖15)



(圖16)

繪畫圖16時，可先作如下之計算：

設代表十四年度收入數其圓之面積＝70方寸

則十五年度……………………=126

十六年度……………………=113

再按圓面求半徑(圓面=半徑^2×π)得：

$70 \div 3.1416 = 22.29$(卽半徑^2)

半徑$=\sqrt{22.29}=4.7$

$126 \div 3.1416 = 40.11$

半徑$=\sqrt{40.11}=6.3$

$113 \div 3.1416 = 35.94$

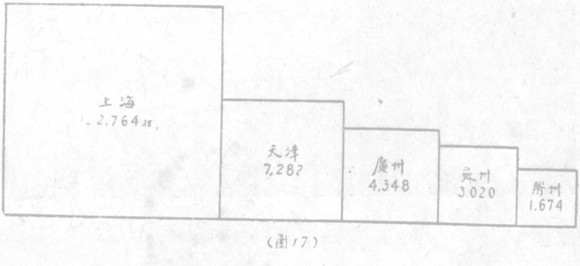
半徑$=\sqrt{35.94}=6.0$

將上列方根，用爲半徑各分畫一圓，便得所求•但爲簡便起見，卽用原來數量求其方根，以之各作一圓亦可•

(4)　方形圖

方形圖，可分爲正方形及長方形(矩形)二種，均以面積大小代表各數量之多少或大小，其性質與上述多圓圖相類•繪製之時，卽以一方形面積爲標準(正方形面積=每邊^2，長方形面積=底邊×高)，然後推求出其他方形之面積，依次繪畫卽成，如下列各圖均是•

各國人造丝输入我國各口岸之数量
1926年

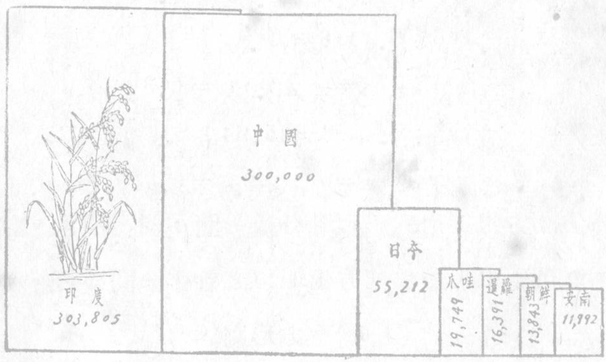


(圖17)

圖17之繪畫，即將原有各數量分別求其方根，用爲每邊長度，依次繪畫卽成•

世界各國米之產量

1919-23年之平均數 單位：千石

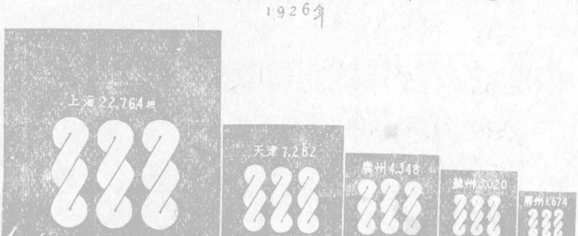


(圖18)

長方形之繪畫，求得面積後，次則應定其二邊之比例，如上圖，其二邊之比爲2：3，遂以6（卽2×3)除各面積求平方根，復以2乘方根，卽得底之度；以3乘方根，則高之度也•

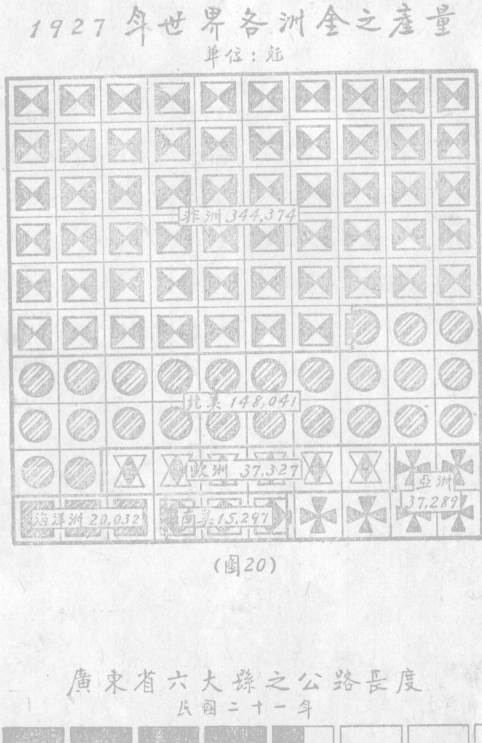
各國人造絲輸入我國各口岸之數量

1926年

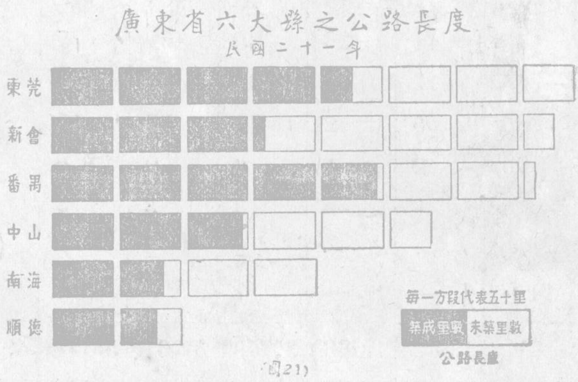


(圖19)

面積圖中，有時幷可將其所表示事物之實體，繪畫於圖內，或加以各種組織，則尤覺顯明。參閱上列二圖及圖40：



(圖20)



(圖21)

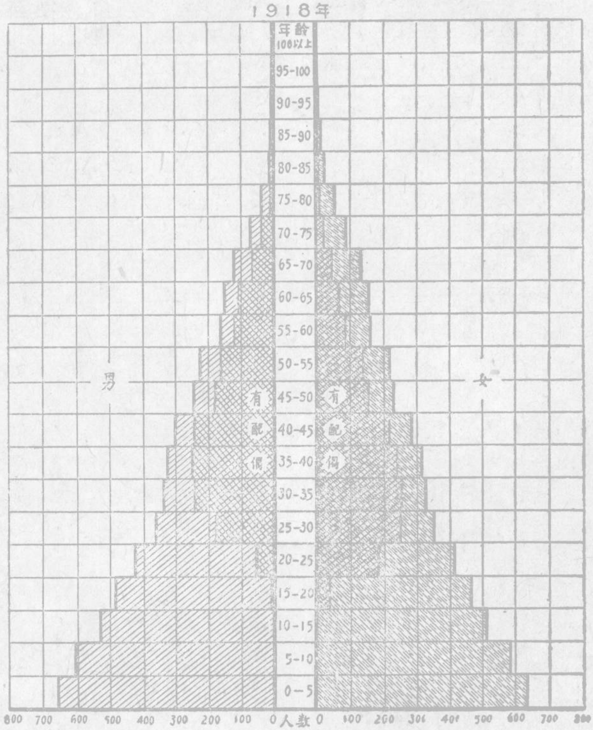
表29.本 日人口平均萬人中性別年齡及配偶之關係

1918年

年齡	有配偶		無配偶		合計	
	男	女	男	女	男	女
0— 5	—	—	652	638	652	638
5— 10	—	—	602	589	602	589
10— 15	—	—	522	508	522	508
15— 20	4	33	486	437	490	470
20— 25	64	185	358	224	422	409
25— 30	188	246	178	105	306	351
30— 35	242	247	97	78	339	325
35— 40	249	239	75	76	324	315
40— 45	234	213	66	75	300	288
45— 50	180	155	53	67	233	222
50— 55	167	135	53	77	220	283
55— 60	117	89	44	71	161	160
60— 65	106	72	50	86	156	158
65— 70	72	44	45	84	117	128
70— 75	41	20	36	69	77	89
75— 80	17	7	23	44	40	51
80— 85	5	2	11	19	16	21
85— 90	2	1	6	9	8	10
90— 95	—	—	3	3	3	3
95—100	—	—	2	1	2	1
100 以上	—	—	1	1	1	1
總計	1,688	1,688	3,363	3,261	5,051	4,949

日本人口平均萬人中性別年齡及配偶之關係

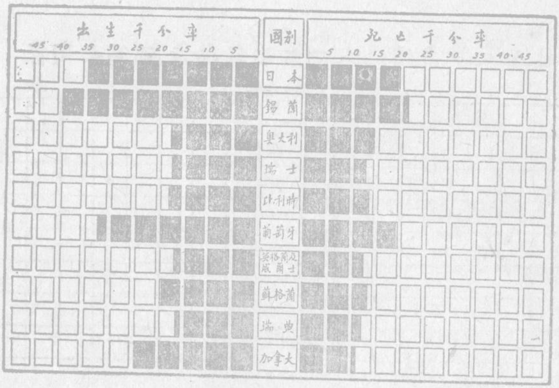
1918年



(圖22)

上列圖21,22及下圖23,其性質亦與條形圖相類。因此等圖形,雖以方形爲示量標準,但方形之中,其一量彼此均相同,其實亦祗以其他一量爲比較也。

1927年各國之出生率及死亡率



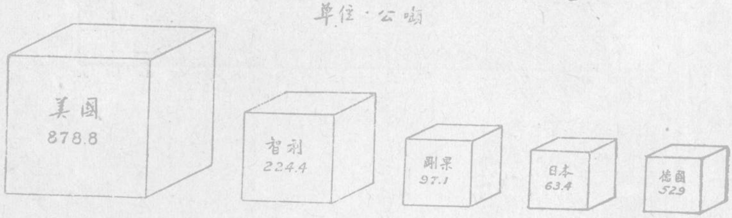
(圖23)

(5) 立體圖

立體圖，通常以體積大小，代表各數量之多少或大小。繪畫之時，亦以一體積爲標準，然後推求其他各立體之大小，分別繪之卽成，如下列各圖是也。

1927年各國銅之產量

單位：公噸



(圖24)

繪畫圖24之計算法如下：

設代表美國銅產量立方形每邊之長度＝$\sqrt[3]{878.8}=9.6$

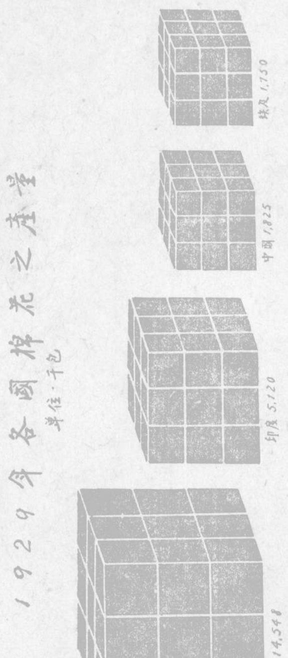
則……智利………………………………＝$\sqrt[3]{224.4}=6.1$

……剛果……………………………………$=\sqrt[3]{97.7}=4.6$

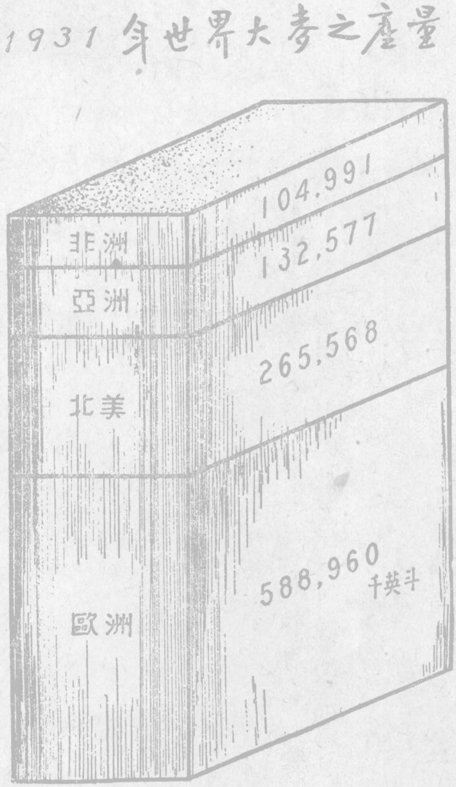
……日本……………………………………$=\sqrt[3]{63.4}=4.0$

……德國……………………………………$=\sqrt[3]{52.9}=3.8$

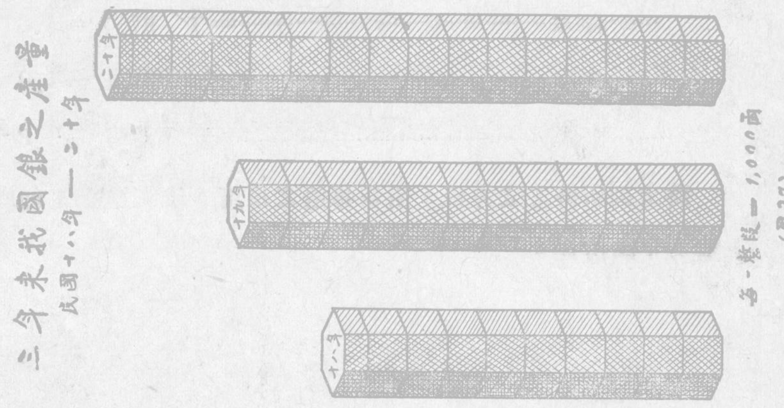
將上列所得之立方根，用為每邊之長度，依次繪畫，即成上圖，下圖仿此。



(圖25)



(圖26)

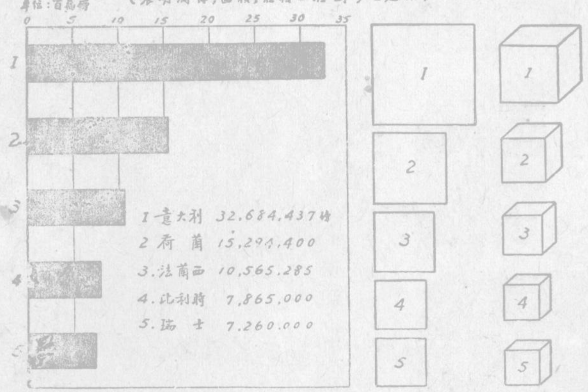


(圖27)

上列圖 6,27，雖以體積爲比例，但繪畫時，用一量爲標準便可；因三量之中，除一量外，其餘二量均同也。

1927年意,荷,法,比,瑞士五國人造絲輸出量

(表明線條,面積,體積三種圖形之應用)



(圖28)

圖28，係將條形，面積，體積三種圖形合并應用。吾人視之，當可知一量 (One Dimension) 圖形(即條形，線形)，比諸多量圖形(面積，體積)，自較簡單明確也。

(6) 地 圖

統計地圖，即於普通地圖之上，用各種符號或顏色等以表明各地方實在情形，凡事實之有地理關係者(即空間材料)，均可用之。但因表現方法不同，復分為點地圖與橫線地圖二種：

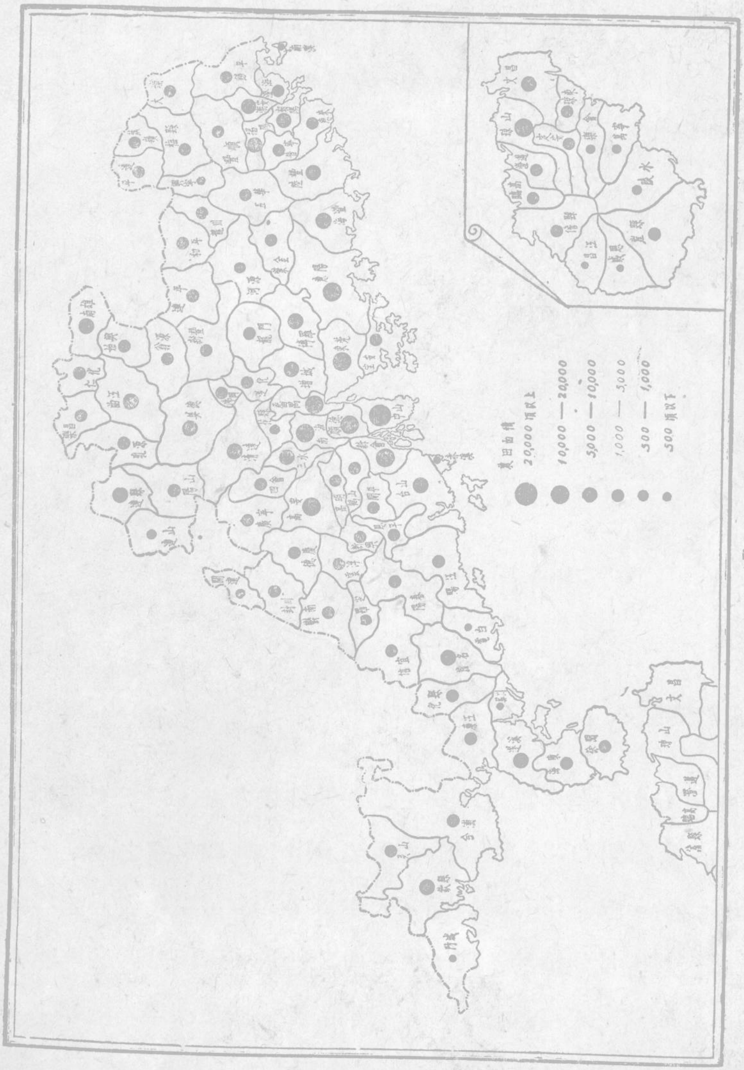
中國各省煤礦儲量估計

(圖29)

A.點地圖　點地圖乃用點加於地圖之上，以為表示數量之工具，如圖29,30,31,及32均是。但其表顯事實之方法，則各不相同。圖29,30,則以點之大小為標準；每點代表一定數目，而依其份量分繪於各地，故一地之數量，可視其區域內點之大小或多少，即可知之。圖31，則以點內顏色深淺為標準；各點

之大小均一律，祇以顏色之深淺表示各地數量之大小。圖32，則以點之多少爲標準；各點之大小，亦均一律，祇視其範圍內點之多少而定其數量之多少已。

廣東省農田分佈

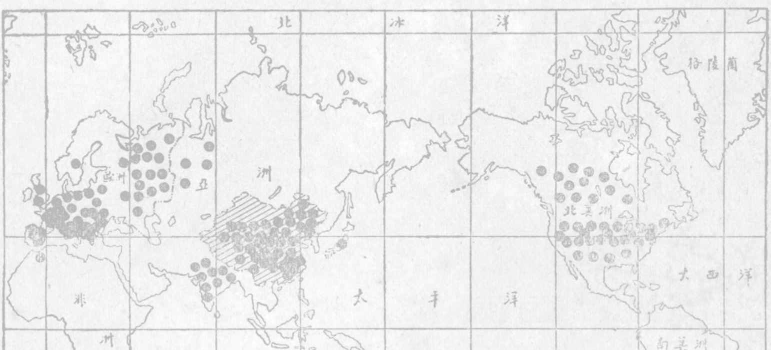


(圖30)

南美洲全麥之産量 1926

(圖31)

1927年世界小麥之產量



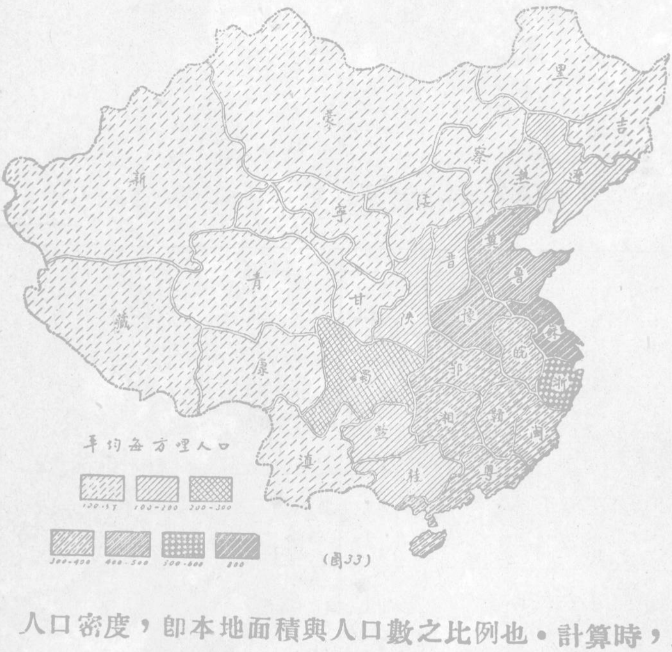
● = 一千萬公担

(圖32)

B. 橫線(或顏色)地圖　此類地圖，乃以各種構造不同之橫線(或各種顏色)分佈於各地，以爲表現數量之工具，通常亦曰平均地圖，因其多將各地事實平地表顯之也。如圖13卽將各省每方哩平均住居人數表出。斯類圖形之繪製，各地數量之多少或大小，應以橫線組織疏密(或顏色之淺深)爲標準，參閱下列二圖自可明瞭。

中國各省人口密度

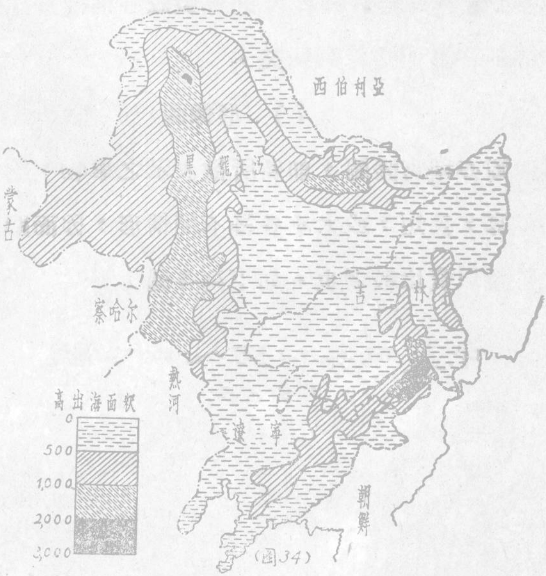
民國十八年



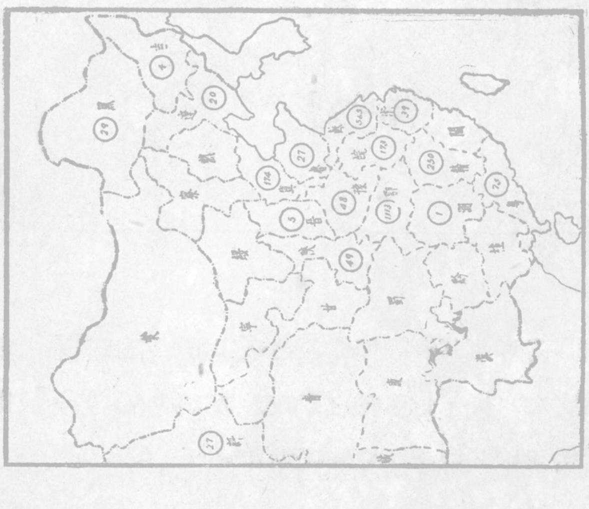
(圖33)

人口密度，卽本地面積與人口數之比例也。計算時，以面積數除人口數便得。如廣東省面積爲91,872方里，人口爲34,876,507人，則人口密度得 $\frac{34,876,507}{91,872}=379.6$

中國東三省之地勢



(圖34)



中國各省之麻布年產量

材料來源：1929中國年鑑

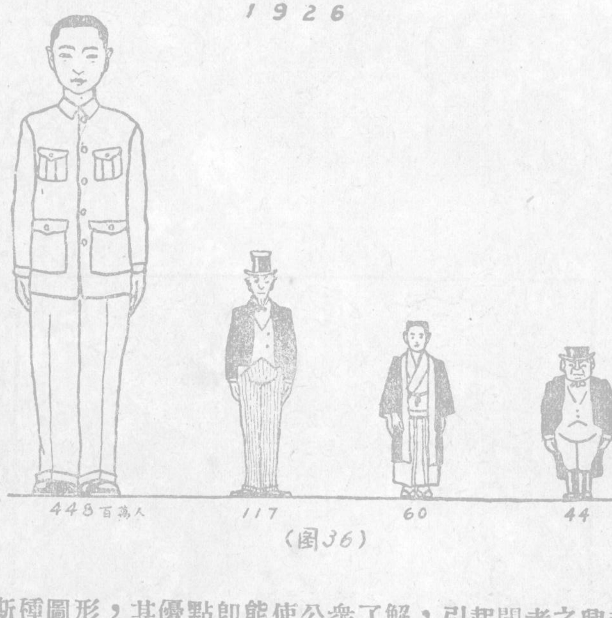
(圖35)

地圖除上述二種外，有時直可利用數字以爲表示數量之具，如圖35.至事實若常變者，則可製成各種標針誌於地圖上，如是即添補移動，當更利便矣。

(7) 形像圖

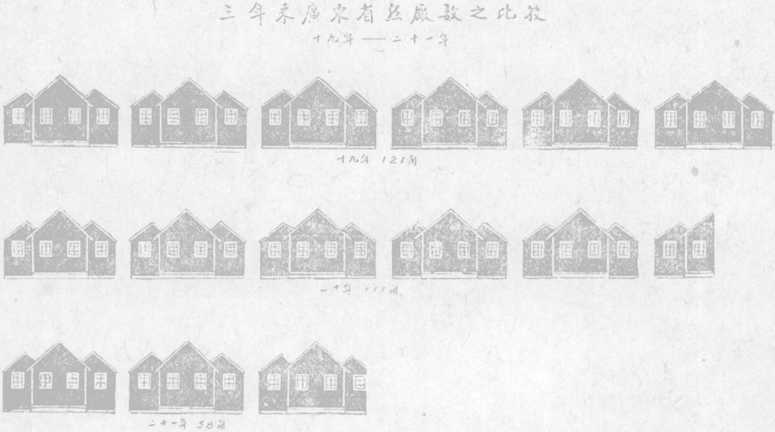
形像圖亦稱實體圖，即將所欲表示之事物，繪成圖形，由圖形之多寡，長短，或大小各種不同情形，因而顯明所欲表示事實之數量以資比較者也。如下列各圖：

中,美,日,英四國人口比較
1926



(圖36)

斯種圖形，其優點即能使公衆了解，引起閱者之興趣，而表現事實之本眞。惟事實之實在數量，頗不易顯，於比較上往往不能得正確之觀念，是其缺點耳。

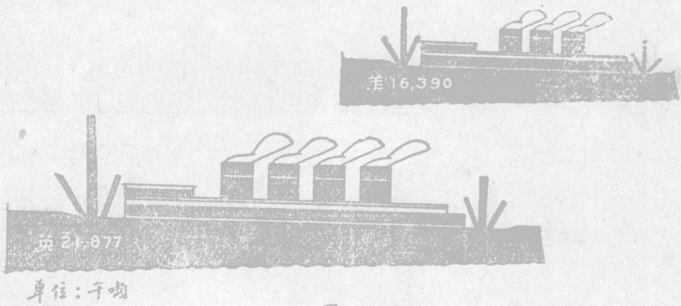

三年來廣東省絲廠數之比較
十九年——二十一年
十九年 121間
二十年 111間
二十一年 58間

(圖37)


民國十年及民國十四年某鐵路乘客人數比較
民國十年
每里乘客364,000
民國十四年
每里乘客619,000

(圖38)

1921年英美二國商船噸數比較



(圖39)

(圖40)

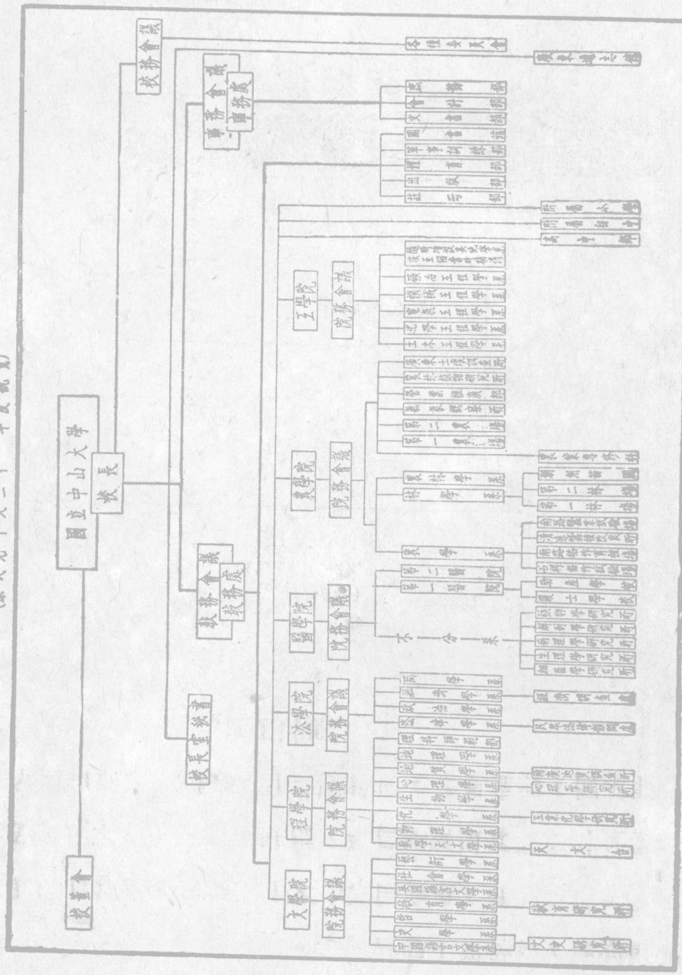
圖40係於圓形圖內各部分，按其大小，示以實物，故較之上列各圖，似易觀察。但其比例，則仍以各部面積之大小爲主。至所繪實物，僅示實際需用之各種物品已。

(8) 組織圖

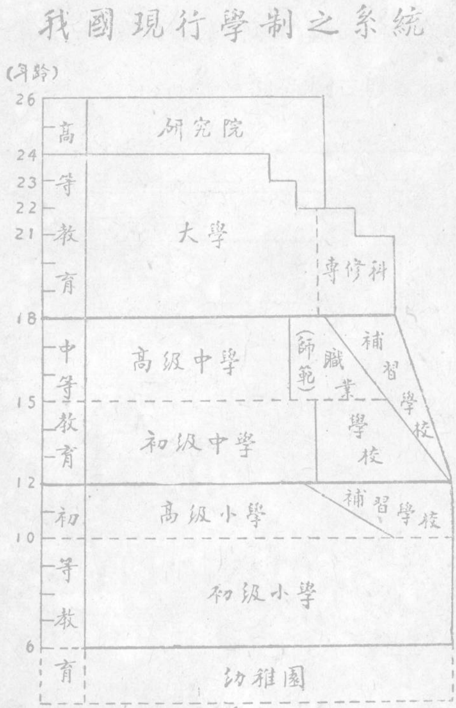
組織圖亦稱系統圖，乃用爲表顯各種公私機關組織之系統，或某一事實先後之過程，以明其彼此間相互之關係，而無數量之比較者，如下列二圖是也。

國立中山大學之組織系統

(據民九中大二十一年度概覽)



(圖41)



(圖42)

(9) 曲線圖

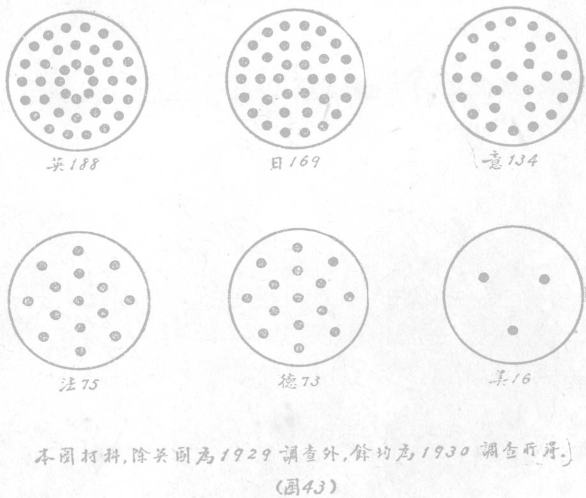
曲線圖，簡單言之，即將線形圖內之線，或條形圖內之條，以線互相連結其頂端而畧去其線或條即成。較之上述各種圖形，尤爲簡單明顯，實屬圖式中之最重要者。惟其種類甚繁，且應用亦廣，故特於下節詳述之。

(10) 其他圖形

統計圖形，除上述各種外，其他如點圖，三角形，半圓形，多角形………等，有時亦可利用之以爲表示事實之工具。茲並附數式，以資參考。惟其表示數量之方法，要不能離乎上述方法之外，卽以多少，長短，面積，或體積爲比較(參閱62頁)。學者苟明斯旨，則不難觸類隅反也。

英,日,意,法,德,美六國之人口密度

平均每方哩人口；每點代表五人

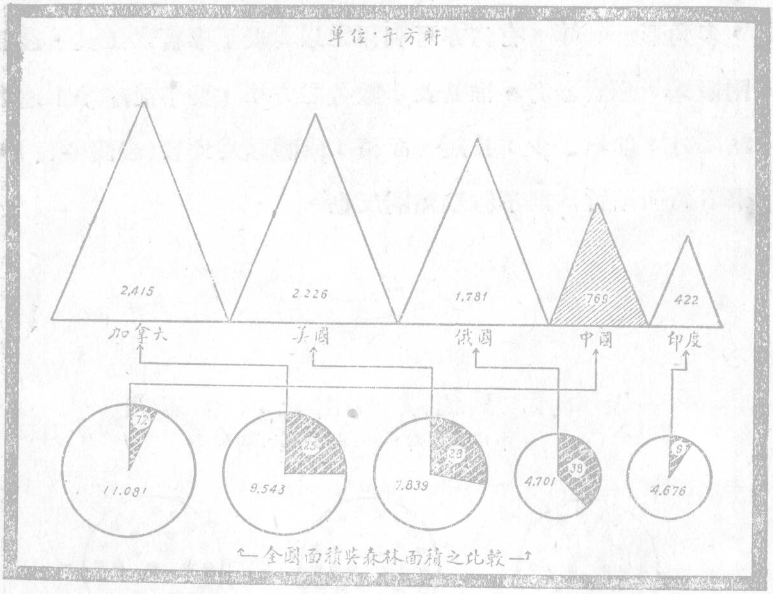


本圖材料,除英國爲1929調查外,餘均爲1930調查所得。

(圖43)

各國之森林面積

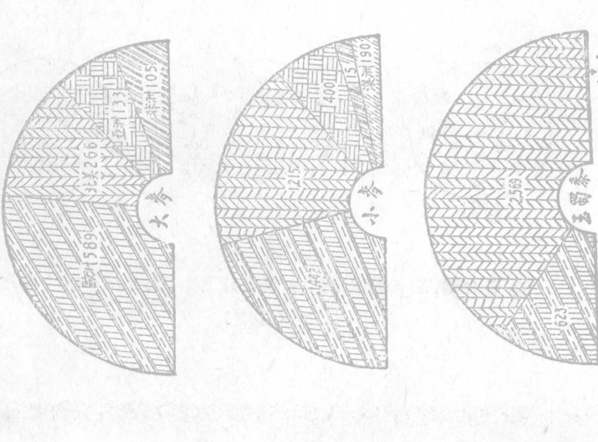
1926年調查



(圖44)

1931年世界大小麥及玉蜀黍之產量估計

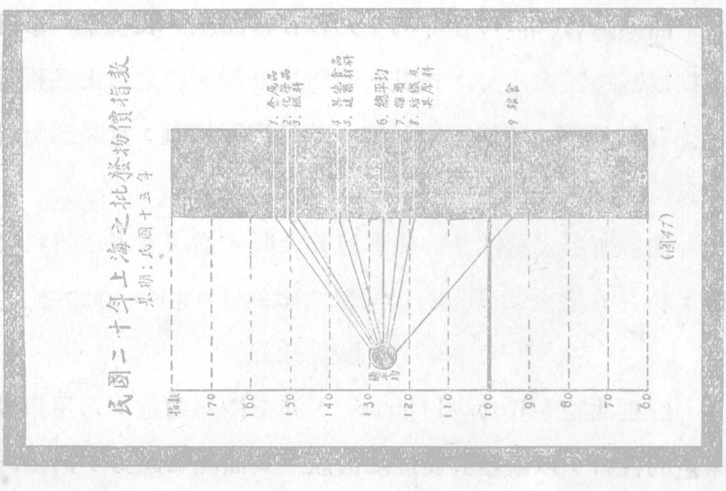
單位:百萬英斗



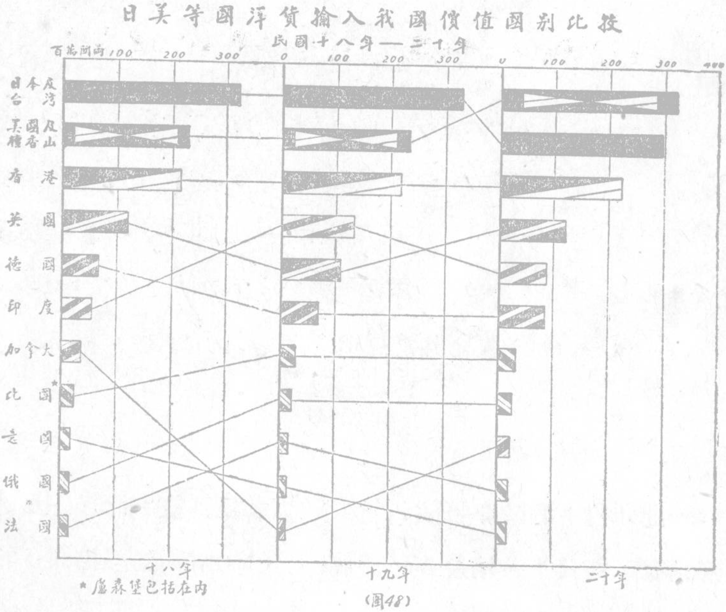
(圖45)

（圖46）

圖46內，有時亦可附入量表數目及分畫線，而以線形或條形爲表示之具，其結果亦與前述(1)(2)兩種圖形相同，惟較不便觀察矣。



（圖47）



(圖48)

第三節　曲線圖

曲線圖形(Curve-graph)，乃以各種曲線，表現某一事實各時期增減變遷之趨勢，或某一事實之分配。較之以上各種圖形，尤易觀比較，不但簡單易繪，並且淺顯易明，實爲推研科學之良好工具。

曲線圖形之繪法，前經畧述其大概。惟因其表現材料之不同，復分爲歷史的(Historical)及次數的(Frequency)二種：

(1)　歷史曲線

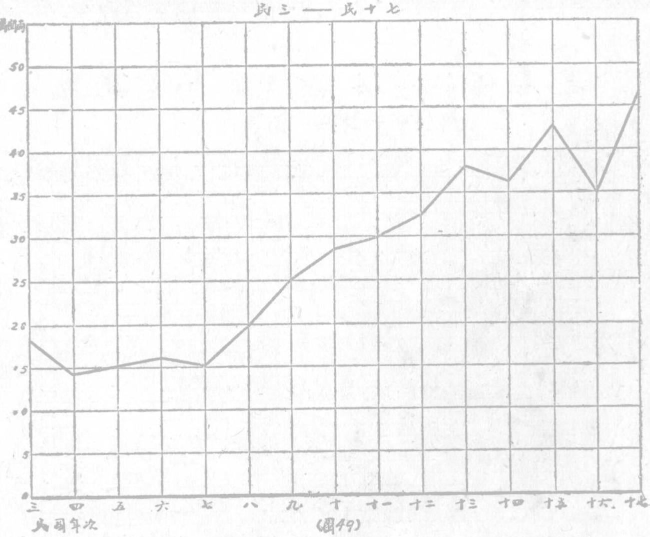
歷史曲線(Historial-Curve)，亦稱橫向曲線，乃用以表顯歷史的材料，以觀察其變遷之情狀。其曲線之趨勢，向橫方面

進行，若進行方向受某種原因影響時，則生高底變動，或逐漸增加逐漸減少之趨勢。其種類可分下列八種：

A. 簡單曲線　簡單曲線(Simple-curvc)，乃對累積曲線而言，即將原來事實以曲線表現之謂。繪畫時應以横量表示時間(或稱横軸，通常為事實主體之分晝)，竪量表示數量（或稱縱軸，通常為倚主體而生之數量分晝）。然後據各時間所發生之數量分別以點誌明，復以線互相連之即成；如圖49。

我國海關進口稅按年收入總數

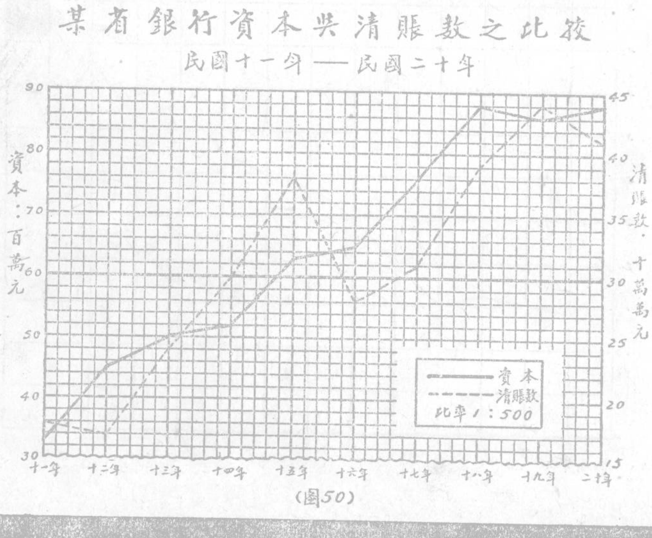
民三——民十七



(圖49)

若表顯之事實，不止一種，則可用各種構造不同之線，或各顏色之線以別之(參閱圖50)。但種類太多，各曲線恐有重叠時，則宜將圖分爲若干部，每部均以零度線別之，然後於每一部分晝一曲線，則各線不致有重合混雜之弊。惟種類不過多而各數量復有差異時，則不宜用無數零度線作起點，以其於比較方面，究有多少不便之處也。

又如兩種事實，其數量相差太鉅，在一圖內不易比較時，則可用中斷法(參閱圖52)，百分法，或量表變換法 (Method of Scale Conversion) 處理之，如圖50：



(圖50)

表30　民國十一年——二十年
某省銀行資本與清賬數比較

民國年次	資　　本	清　賬　數
十一年………	33,000,000元	18,000,000,000元
十二年………	45,000,000	17,000,000,000
十三年………	50,000,000	24,000,000,000
十四年………	52,000,000	30,000,000,000
十五年………	63,000,000	38,000,000,000
十六年………	65,000,000	28,000,000,000
十七年………	76,000,000	31,000,000,000
十八年………	88,000,000	39,000,000,000
十九年………	86,000,000	44,000,000,000
二十年………	88,000,000	41,000,000,000

圖50爲量表變換法之一例，如欲將銀行資本與清賬數繪圖比較，則資本以百萬爲單位，清賬數以十萬萬爲單位，兩者之絕對值，相差太遠，不能以平常量表顯其比較之數。於是各以其均數爲比例，遂求得資本之均數爲60百萬元 $\left(即\frac{30+60}{2}60\right)$，清賬數之均數爲30十萬萬 $\left(即\frac{15+45}{2}=30\right)$，兩者之比，爲1與500。依此繪成一圖，則兩線互相接近，而其關係情形即可瞭然矣。

B　累積曲線　累積曲線(Cumulative-curvc)，又稱增進曲線，乃將各時期之數量依次遞加，將各遞加之和，以線連之卽成。在累積時，係按時間之單位，有由時間早者向時間晚者遞加；有由時間晚者向時間早者遞加。前者之累積，係（期前及本期Up to and Including)之和數；後者，係「期後及本期」(After aud Including) 之和數(參閱表31)。各數既經累積及繪成曲線後，卽可得其接續總數與增進之情形，簡單曲線，不能顯斯效果，如圖51：

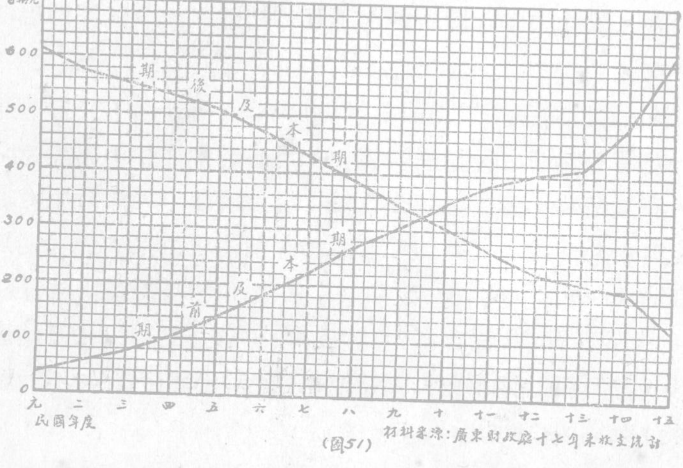
表31　民國元年度——十五年度

廣東省財政按年收入及其累積數

民國年度	收入總數 單位：千元	累積的 期前及本期	累積的 期後及本期
元　年……	38,139	38,139	612,575
二　年……	20,096	58,235	574,436
三　年……	20,629	78,864	554,340
四　年……	24,578	103,442	533,711
五　年……	38,187	141,629	509,133
六　年……	40,269	181,888	470,946
七　年……	40,277	222,175	430,677
八　年……	46,837	269,012	390,400
九　年……	37,603	306,615	343,563
十　年……	43,499	350,114	305,960
十一年……	36,718	386,832	262,461
十二年……	16,603	403,435	225,743
十三年……	12,081	415,516	209,140
十四年……	70,509	486,025	197,059
十五年……	126,550	612,575	126,550

廣東省財政按年收入累積數

民國元年度——民國十五年度

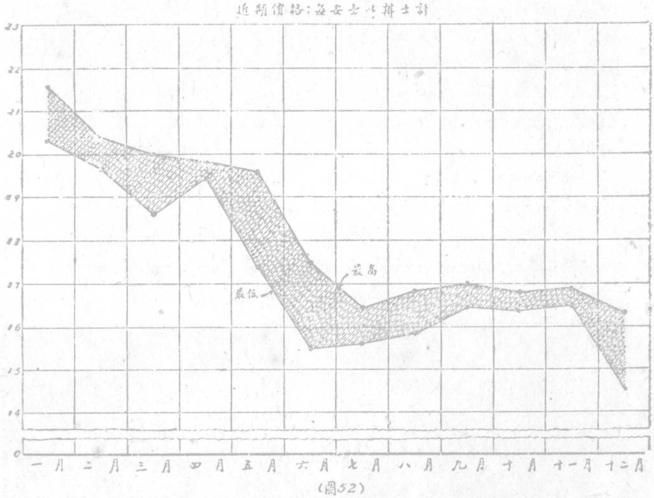


(圖51)　材料來源：廣東財政廳十七年來收支統計

C. 距限曲線　距限曲線(Zone-curve)，在圖上佔蓋若干面積，可以代表具有「最高點」與「最低點」之材料，如物價，利率等。繪製時，應先將各數之最高點與最低點分別註明，各以線連結，其二線間並可以橫線或顏色填蓋之。如圖52：

民國十九年廣州市生銀價格之升降

近期價格：每安士以辨士計

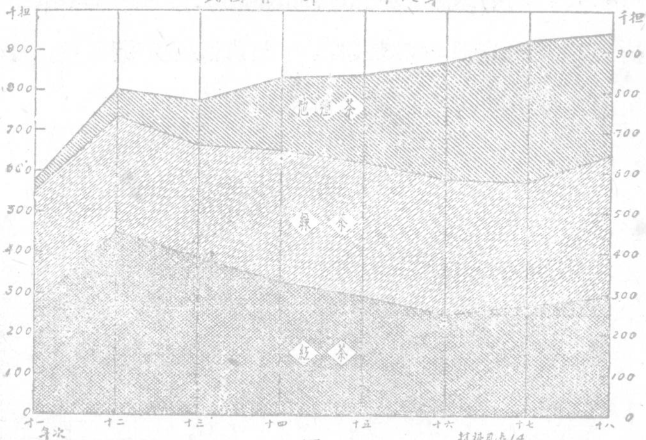


(圖52)

D. 帶形曲線　帶形曲線(Band-curve)，可用以表示事實全體之各部份，與分段潤條圖之性質相同。繪製時，各部份之組成，以事實各部數值爲準。曲線彼此間之空間，應以橫線或顏色區別之，如下列二圖是也。

中國各種茶按年輸出量比較

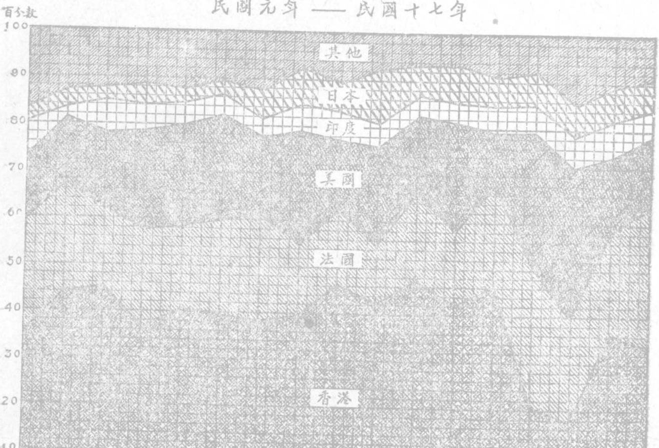
民國十一年——十八年



(圖53)

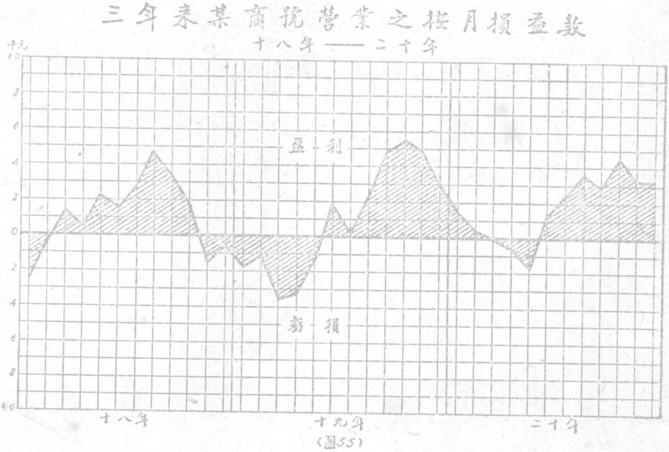
中國絲類出口往各國價值按年百分比較

民國元年——民國十七年



(圖54)

E. 分歧曲線　分歧曲線(Divergence-curve)，乃用以表事實之有分歧數目者。繪製時，以圖之中部爲零度，分上下二方以表示其數目。各數與零線間，並可以橫線塡蓋之。如圖55：



(圖55)

上圖爲表示某商號三年來營業之狀况。吾人視此，則該商號每月營業之損益及其歷來趨勢，均可獲得簡明之結果，比諸純以數字登記者，自較便利。故在組織完備之商店或工廠，均可利用曲線，以爲表示每月(每星期或每日)營業金額，成本費用，或出產品之數量等。若更能預先製成各種咭片，按時處理，則保存與查核，當益便利。試細閱下圖，自得其詳矣。

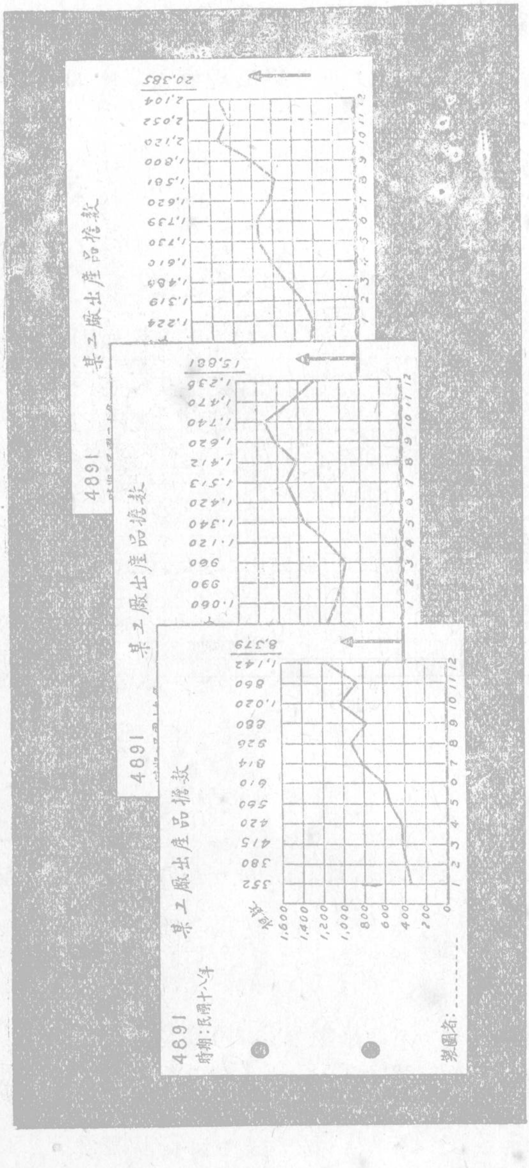
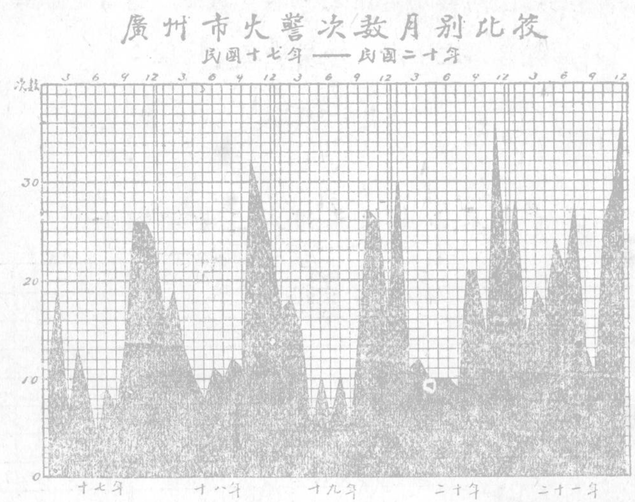


圖56. 三年來某工廠之出產品數量

F. 山形曲線　山形曲線 (Mountain-curve)，乃將不平滑曲線（Unsmoothed-curve，即簡單曲線）而升降較著者，用顏色或橫線塡蓋其橫基線與曲線之空間，因其形狀如遠望之山峯，故稱之曰山形曲線，如圖57是也。



(圖57)

C. 圓滑曲線　圓滑曲線(Smoothed-curve)，乃將不平滑曲線之角度修匀而去之卽成。至圓滑目的，則在求事實簡明之趨向——亦稱恆差或長期趨向(Secular trend, or long-time trend)——，或作推算之根據。蓋社會上一般事物，如人口，物價，利率……等，若經長時期之觀察，苟無意外影響，則其增減變動，似莫不具有常恆不之趨勢存在也。

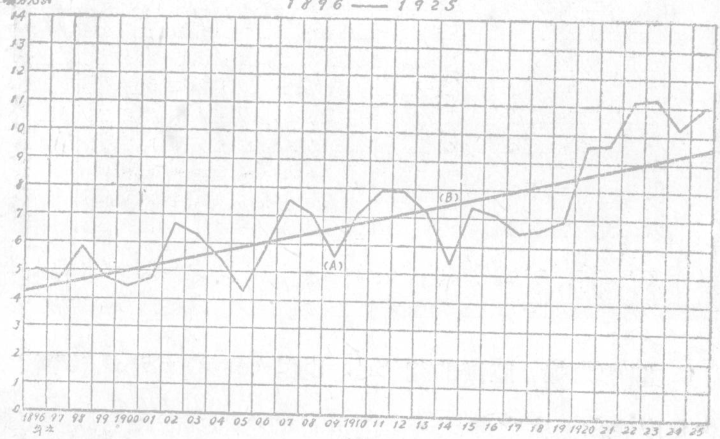
圓滑之意義，旣述如上。至圓滑之方法，通常所用者，則有下列四種：

1.隨手畫法(Free-hand method)　隨手畫法，卽在原來事實曲線圖上，不事計算，隨手用尺或用曲線板繪成一直線或曲

線，介於原有曲線之間，以明其趨勢。此種方法，至爲簡便，凡欲畧知事實之趨向者均可用之。惟於繪畫之時當免除異常的旋轉及維持曲線最大之半徑，如圖58之(B)線：

三十年來上海梗米價格及長期趨向

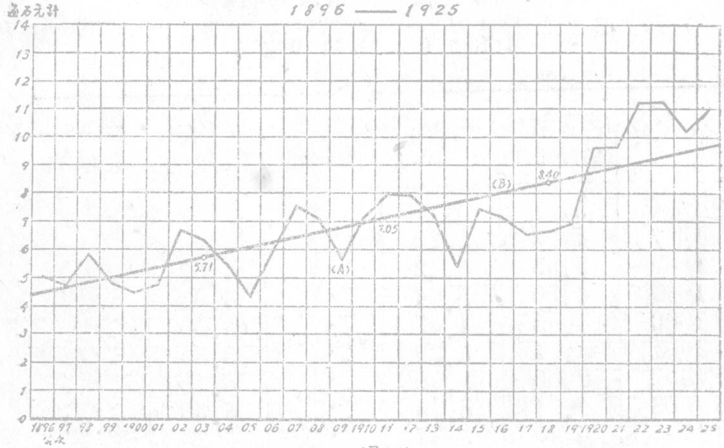
1896——1925



(圖58)

2.半平均數法 (Metbod of semi-average)　欲求事實長期趨向，除隨手畫法外，亦可用簡單之計算以求一直線。其法卽將原來事實分爲二部而各求其平均數，求得之後，卽以此二平均數分繪於每部時期之中，再用直線連之，則其趨向，亦可明瞭，斯卽所謂半平均數法是。如表32所載材料，用斯法以求之，則得圖59(B)線：

三十年來上海梗米價格及長期趨向
1896——1925



(圖59)

上列時期總和爲偶數(三十年)，若時期之和爲奇數時，則中項之值及時期，均可分而爲二，以作計算及繪畫之根據。

3.繼動均數法 (Moving average method)　用數學方法以求事實之趨向，其另一方法爲繼動均數法。斯種方法，亦甚簡明，卽將每一時期之數量，幷其前後若干時期之數量相加均衡卽得(參閱表32)。計算結果，因平均關係，繪一曲線顯之，甚爲圓滑。故事實之趨向，亦可由此觀察得之。參閱圖60(B)(C)二線：

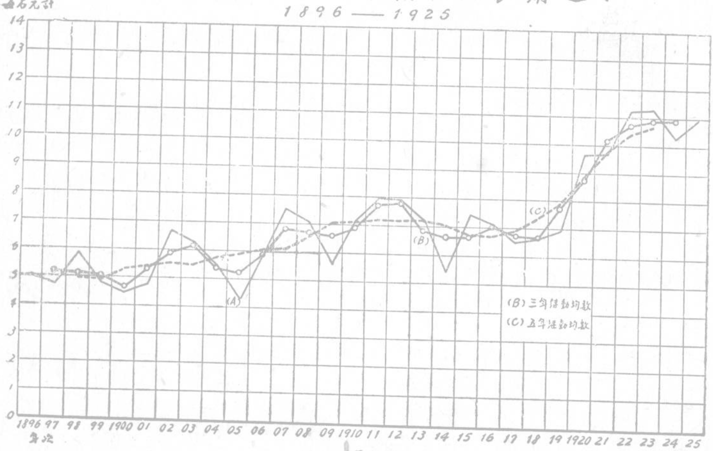
表32. 上海粳米價格及其繼動均數

1896——1925

年次	平均價格 (每石元計)	繼動均數 三年的	四年的	五年的	七年的
1896	5.02				
1897	4.72	5.20			
1898	5.85	5.12	5.10	4.97	
1899	4.80	5.04	4.96	4.91	5.18
1900	4.46	4.67	4.96	5.30	5.36
1901	4.74	5.29	5.16	5.39	5.47
1902	6.66	5.90	5.54	5.53	5.25
1903	6.31	6.15	5.80	5.50	5.41
1904	5.48	5.37	5.69	5.73	5.84
1905	4.31	5.22	5.49	5.90	6.17
1906	5.88	5.90	5.79	6.05	6.03
1907	7.51	6.82	6.19	6.08	6.15
1908	7.06	6.73	6.52	6.65	6.50
1909	5.63	6.61	6.84	7.07	7.02
1910	7.15	6.92	6.95	7.15	7.21
1911	7.98	7.69	7.17	7.18	6.91
1912	7.94	7.71	7.57	7.14	6.96
1913	7.21	6.86	7.14	7.19	7.17
1914	5.42	6.68	6.99	7.02	7.08
1915	7.40	6.65	6.79	6.73	6.89
1916	7.12	7.01	6.61	6.61	6.75
1917	6.51	6.75	6.91	6.92	7.09
1918	6.62	6.69	6.80	7.36	7.70
1919	6.94	7.72	7.42	7.87	8.24
1920	9.61	8.74	8.21	8.81	8.83
1921	9.68	10.16	9.35	9.73	9.36
1922	11.18	10.70	10.43	10.39	9.98
1923	11.25	10.89	10.59	10.66	
1924	10.24	10.81	10.90		
1925	10.95				

上表之繼動均數，分為三年的，四年的，五年的，及七年的四種。其三年的之第一數5.20，乃將首三項相加，以3除之而得$\left(\frac{5.02+4.72+5.85}{3}=5.20\right)$；四年的之第一數5.10，則將首四項相加，以4除之而得$\left(\frac{5.02+4.72+5.85+4.80}{4}=5.10\right)$；五年的第一數4.97，則將首五項相加，以5除之而得$\left(\frac{5.02+4.72+5.85+4.80+4.46}{5}=4.97\right)$；七年的第一數5.18，則將首七項相加，以7除之而得$\left(\frac{5.02+4.72+5.85+4.80+4.46+4.74+6.66}{7}=51.8\right)$。其餘各數，均依此法，逐漸移動計算。惟有須注意者，即計算之時，所包括之項數愈多，將來之曲線愈平滑，但其線愈短。至計算時，應包含項數多少，則可察看事實起伏情形，自行酌定。又如欲補足首尾缺去之數時，則可將極端之數重寫數次而平均即得。例如上表三年的繼動均數所缺之二數，即將首末兩數重寫一次平均以求之，即$\left(\frac{5.02+5.02+4.72}{3}=4.92\right)$；及$\left(\frac{10.24+10.95+10.95}{3}=10.71\right)$。其餘四年的，五年的，….所缺之數，均可仿此法計算。但此方法，原非十分精確，故有時為簡便計，即將所畫之線，隨手延長至極端以補其所缺之數亦無不可。因圓滑曲線之方法，充其量亦不過得近似之結果，在量度上似無須過於苛求也。

三十年來上海粳米價格及長期趨向
1896——1925



(圖60)

4. 最小平方法 (Method of least squares)　斯法爲求直線趨向之最完善方法，且與相關係數至有關係(參閱第十四章)。所謂最小平方者，卽由此法所得之線，其距離原來事實之差數平方之和，常較他線爲小(參閱圖61)。至繪畫時，則應先求直線之斜度，然後再求各時期趨向之位置方可。今以上海1896至1925年之粳米價格爲例，演算如表33 (先閱表34，再閱此表)，並將其計算公式例下：

$m\,(\text{Slope})=\dfrac{\sum xy}{\sum x^2}$ ……………………(1)　　$Y=mx+b$ ……………………(2)

上列二式中　(Slope)＝直線之斜度

Σ (Sigma)＝總和符號

x＝時期差數(卽各時期與中間時期之差數)

y＝數量(或各數量與其平均數之差數亦可)

Y＝各時期趨向之位置

b＝數量之平均數

表33. 1896—1925 上海粳米價格及每年趨向之位置

年次 X (1)	每年平均價格 (每石元計) y (2)	各年與中間時期(1910-11)差數 (半年爲單位) 年差 x (3)	年差自乘 x^2 (4)	年差與價格之乘積 y (5)	每年趨向之位置 Y (m=.1927) (5)
1896	5.02	-29	841	-145.58	4.25585
1897	4.72	-27	729	-127.44	4.44855
1898	5.85	-25	625	-146.25	4.64125
1899	4.80	-23	529	-110.40	4.83395
1900	4.46	-21	441	-93.66	5.02665
1901	4.74	-19	361	-90.06	5.21935
1902	6.66	-17	289	-113.22	5.41205
1903	6.31	-15	225	-94.65	5.60475
1904	5.48	-13	169	-71.24	5.79745
1905	4.31	-11	121	-47.41	5.99015
1906	5.88	-9	81	-52.92	6.18285
1907	7.51	-7	49	-52.57	6.37555
1908	7.06	-5	25	-35.30	6.56825
1909	5.63	-3	9	-16.89	6.76095
1910	7.15	-1	1	-7.15	6.95365
原始點	7.05			-1204.74	7.05000
1911	7.98	1	1	7.98	7.14635
1912	7.94	3	9	23.82	7.33905
1913	7.21	5	25	36.05	7.53175
1914	5.42	7	49	37.94	7.72445
1915	7.40	9	81	66.60	7.91715
1916	7.12	11	121	78.32	8.10985
1917	6.51	13	169	84.63	8.30255
1918	6.62	15	225	66.30	8.49525
1919	6.94	17	289	117.98	8.68795
1920	9.61	19	361	182.59	8.88065
1921	9.68	21	441	203.28	9.07335
1922	11.18	23	529	257.14	9.26605
1923	11.25	25	625	281.25	9.45875
1924	10.24	27	729	276.48	9.65145
1925	10.95	29	841	317.55	9.84415
	年均數(b) =7.05		8990	2070.91 -1204.74 866.17	

將上列結果代入(1)式求m，

$$m=\frac{(+2070.91-1204.74)\div 2}{8990\div 4}=\frac{866.17\div 2}{8990\div 4}=.1927$$

每年趨向之斜度＝.1927， 以2除之，得$\frac{.1927}{2}=.09635$，爲每半年趨向之斜度。 再將之代入(2)式求Y，即得(6)行各數。

$$Y=.09635x+7.05$$

表33計算之法次如下：

1.將各年及米價排列成(1)(2)行後，先覓時期中點。此處共三十年，故中間時期（原始點Origin）爲1910—1911之中點（即1910十二月與1911壹月之中間）。

2.以此中間時期爲原始點與各年較差，用半年爲單位，在此時期之前者爲負，後者爲正，即得(3)行之x。如長期連貫事實時間之和爲奇數時，則以中間之年爲原始點，求差數時，即以一年爲單位，計算方法，較此更爲簡易。（參閱表34）

3.求得年差之後，復將之自乘（消去負數符號），乘後再相加，即得年差自乘之和8990。

4.將x與y相乘，即得(5)行之—145.58，-127.44，………等。

5.將各年價格(y)相加，以30除之，即得平均數(b)7.05。

6.以上列結果，代入(1)式，復以2除Σxy；以4除Σx^2，即得每年趨向之斜度.1921。此種計算方法，係因計算年差時以半年爲單位，故以2除Σxy，以4除Σx^2，使其計算單位一律相等。如長期事實時間之和爲奇數，計算年差以一年爲單位時，

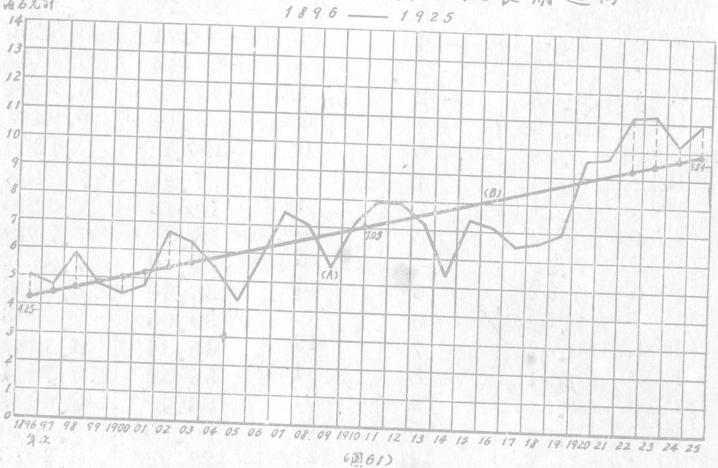
則此手續可省。

7.求得.1927之後，再以2除之，得.09635；是爲每半年趨向之斜度。因各年與原始點之差數，均以半年爲單位，故應以2除之。如計算年差時，以一年爲單位，亦可省去此手續。

8.以.09635及 7.05 代入(2)式求每年趨向之位置，得(6)行各數。如 1910年之Y=.09635×−1+705＝−.09635+7.05=6.95365；1911年之Y=.09635×1+7.05=7.14635；……等，復以線表之即得圖61之(B)線：

三十年來上海粳米價格及長期趨向

1896 —— 1925



(圖61)

上例之事實，其時期之和爲偶數，故計算畧繁；如爲奇數，則計算較易。茲特減去1896年之價格使爲奇數，並演算如表34，以示其方法之異同，

表34. 1897—1925 上海粳米價格及每年趨向之位置

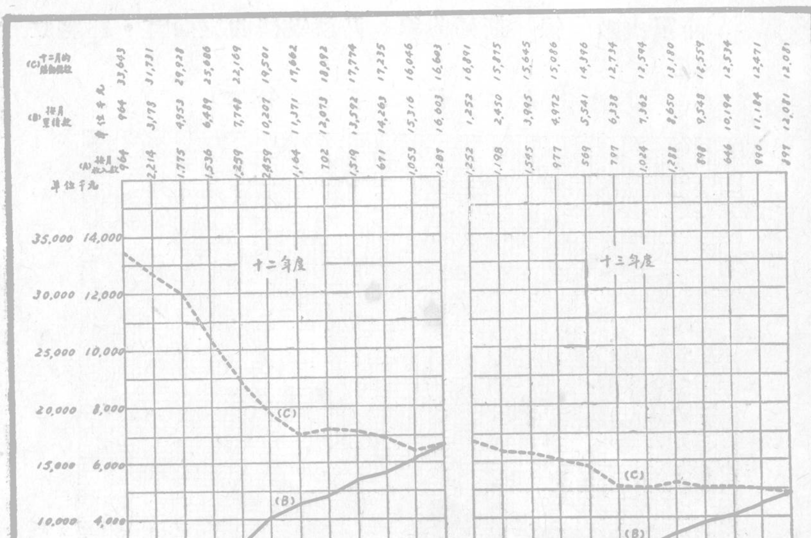
年 次 X (1)	每年平均價格 (每石元計) y (2)	各年與中年(1911)之差數 年差 x (3)	年差自乘 x^2 (4)	年差與價格之乘積 xy (5)	每年趨向之位置 Y (m=.1983) (6)
1897	4.72	-14	196	-66.08	4.3438
1898	5.85	-13	169	-76.05	4.5421
1899	4.80	-12	144	-57.60	4.7404
1900	4.46	-11	121	-49.06	4.9387
1901	4.74	-10	100	-47.40	5.1370
1902	6.66	-9	81	-59.94	5.3353
1903	6.31	-8	64	-50.48	5.5336
1904	5.48	-7	49	-38.36	5.7319
1905	4.31	-6	36	-25.86	5.9302
1906	5.88	-5	25	-29.40	6.1285
1907	7.51	-4	16	-30.04	6.3268
1908	7.06	-3	9	-21.18	6.5251
1909	5.63	-2	4	-11.26	6.7234
1910	7.15	-1	1	-7.15	6.9217
原始點 1911	7.98	0	0	-569.86	7.1200
1912	5.94	1	1	7.94	7.3183
1913	7.21	2	4	14.42	7.5166
1914	5.42	3	9	16.26	7.7149
1915	7.40	4	16	29.60	7.9132
1916	7.12	5	25	35.60	8.1115
1917	6.51	6	36	39.06	8.3098
1918	6.62	7	49	46.34	8.5081
1919	6.94	8	64	55.52	8.7064
1920	9.61	9	81	86.49	8.9047
1921	9.68	10	100	96.80	9.1030
1922	11.18	11	121	122.98	9.3013
1923	11.25	12	144	135.00	9.4996
1924	10.24	13	169	133.12	9.6979
1925	10.95	14	196	133.30	9.8962
	年均(數b) =7.12		2030	972.43 -569.86 402.57	

將上列結果代入(1)式，得

$$m=\frac{+972.43-569.86}{2030}=.1983 \quad \therefore Y=1983+7.12$$

H. 三曲線　三曲線(Zee-curve)，亦稱Z形曲線，乃將原來事實之曲線，累積曲線，及繼動總數曲線『Moving total curve，即將若干時期之數繼續相加而得，如二月的，三月的，五月的，……十二月的等。(參閱110頁繼動均數法)』三者，集合於一圖內而成。繪畫之時，縱方多用二種量表，以一表原來事實，一表累積數及繼動總數，如圖62是也。

民國十二十三兩年度
廣東省財政按月收入及其累積數並十二月的繼動總數



(圖62)

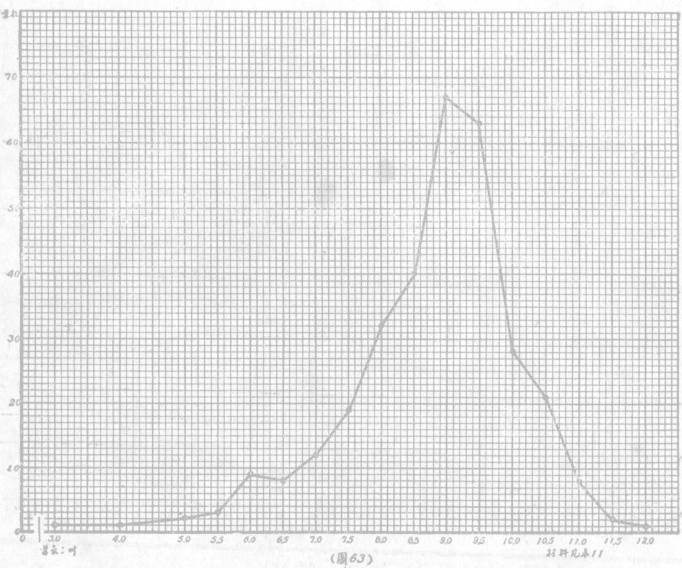
觀上圖，不特可明瞭每年度各月財政收入數及其增進情形，即就各月中，而欲知一年來收入之總數，亦可由(C)線觀察得之矣c

(2)　次數曲線

次數曲線(Frequcney-Curve)，乃用以表顯變量之材料，以觀察其特著之點與分配之情形。上述之歷史曲線，則以時間比較爲主體，故將時間之次第，列於橫量表之上；然後以時間爲標準，以考察各時間中事實之變遷及趨向。次數曲線，則以次數所由生之數量爲主體，故以横量表表明數量之價值，以竪量表表明各數量所發現之次數，然後按各數量之價值，以觀察其特著(集中)之點與分配之情形。至其種類，則有下列六種：

A.簡單次數曲線　斯種曲線，乃就累積曲線而言。即將原

327枘樹葉之長短分配



(圖63)

有事實數量之次數分別繪製，如圖63及下列各圖均是。

圖63係表一個單位之數量，若表明分組數量之圖形，則於每組之中央(即橫量表每格之中央)，繪定各該組之次數，並以線連綴之，假定每組間所有數量之價值，各與其組間之值相等；而每組間所有之數量，即與其組距中點上垂線之高度相等；全體數量，即與各組間各中點上垂線之總長相等。如圖64：

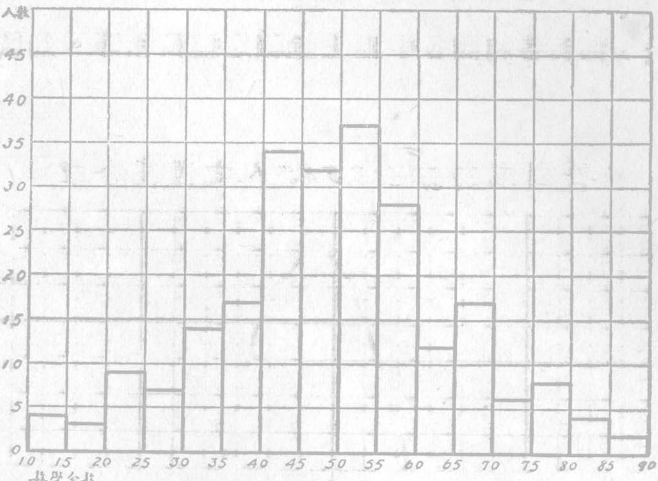
英國成年男子8,585人之體高分配

(圖64)

上列之次數曲線，亦稱之曰次數多邊圖(Frequency polygon)。至此事實，亦可以直方圖『Histogram，或稱次數面積Frequency surface』表明之，如圖55。此類圖形，係用矩形之面積，表明

次數之分配。矩形之底邊，與組距之長相等；矩形之高，與在該組間數量之次數相等。此種表明數量之方法，係假定每組中所有數量之分配均勻，故比之次數多邊圖，似較適當。

某校234名学生之数学成績分配



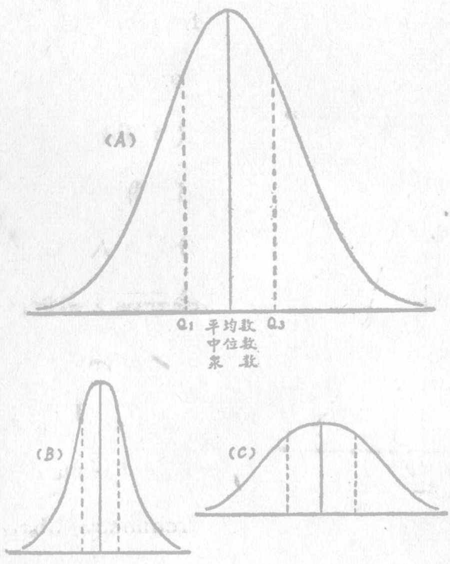
(圖65)

圖63,64 均爲簡單次數曲線之一種。然次數分配之形式，旣繁且多。蓋社會諸般現象，因受各種複雜原因之影響，欲求能盡適應自然之規律，集中於一點，而兩旁分配完全對稱者極少(圖64亦祗係近似對稱分配)。於是集中一旁者有之，集中之點不甚顯著者亦有之。故按其分配形式，復可分爲下列五種：

1. 對稱分配 (Symmetrical distribution)　斯種分配，即中央一數量之次數最多，兩旁之數量分配相稱，且依次減少，其形如圖66。此種曲線，名之曰常態曲線(Normal-cuvre)。社

會多數現象，若不受外界原因影響時，其分配大抵皆呈此結果。然實際之測量，似難盡適合此分配，故又有稱此種分配，爲理想的對稱分配(Ideal Symmetrical distributian)。

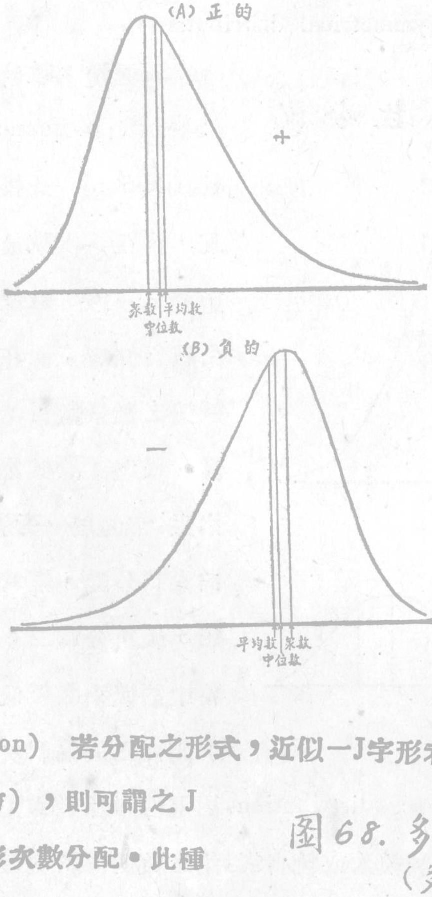
圖66. 對稱次數分配
(常態曲線)



2.偏斜次數分配(Skewed frequency distribution) 此種分配，即在一次數最多數量之一邊，數量數目驟行減少；而在他一邊之數量數目，則減少較遲，故其集中之點，常偏於一旁，是曰偏斜分配。惟其種類，復可分爲二：若集中於較小或較低者，謂之正的偏斜次數分配(Plus skewed frequency distribution,因其偏斜係數爲正故名)，如圖67(A)。若集中於較大或較高者，謂之負的偏斜次數分配(Minus skewed frequency distribution，因其偏斜係數爲負，故名)，如圖67(B)。實際之測量，以近似此二種者爲多。

3.多峯形次數分配(Multi-modal frequency distribution) 凡分配之形式，其集中之點，如在兩點以上者，稱之曰多峯形

圖67. 偏斜次數分配

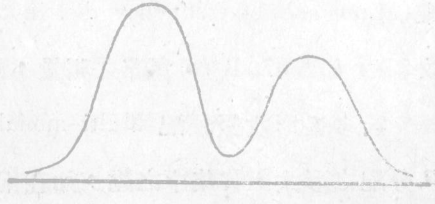


次數分配，或多衆數次數分配。其形如圖68：

4. U形次數分配 (U-shaped frequency distribution) 若分配之形式，畧如一U字形者，稱爲U形次數分配。人口死亡年率分配，多近此形式，如圖69：

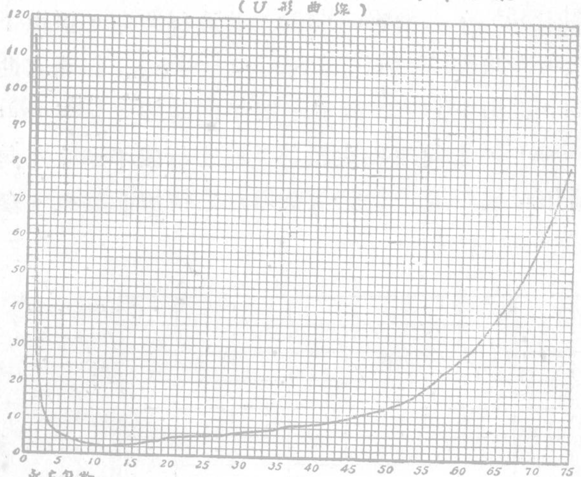
5. J形次數分配 (J-shaped frequency distribution) 若分配之形式，近似一J字形者(即數量偏聚於極端之一方)，則可謂之J形次數分配。此種分配，必大異常態，故亦稱極不對稱次數分配，其形如圖70：

圖68. 多峯形次數分配
(多衆數分配)



1909—1911美國人口死亡年率分配

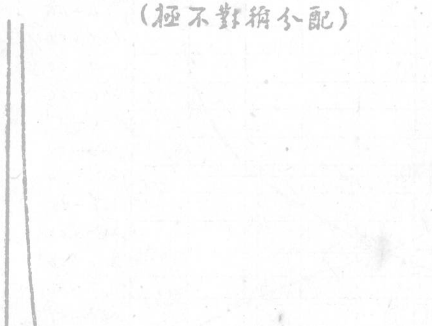
(U形曲線)



(圖69)

圖70. J形次數分配

(極不對稱分配)



B. 累積次數曲線　變量材料，亦可用累積曲線表顯之，以明其增加之情形。其繪畫方法，係先將各數量所有之次數依次遞加，將各遞加之和，以直線連之即成。其被加之次數，稱之曰累積次數；而對於原來之次數，則可謂之簡單次數。至遞加時，可由小數量向大數量遞加；亦可由大數量向小數量遞加。前者之累積次數，係各組距上限以下(Less han)之和數;後者之累積次數,係各組距下限以上(More than)之和數(參閱表35)。又前者之曲線,其進行方向,係由下向上,故名之曰上向曲線(Upward direction curve);後者之曲線,其進行方向,則由上向下,故名之曰下向曲線(Downward direction curve)。上向曲線之趨勢,或上行或平進;下向曲線之趨勢,或下行或平退,皆隨次數增加之情形而異也。參閱圖71:

圖71.1,800名工人工資之累積分配

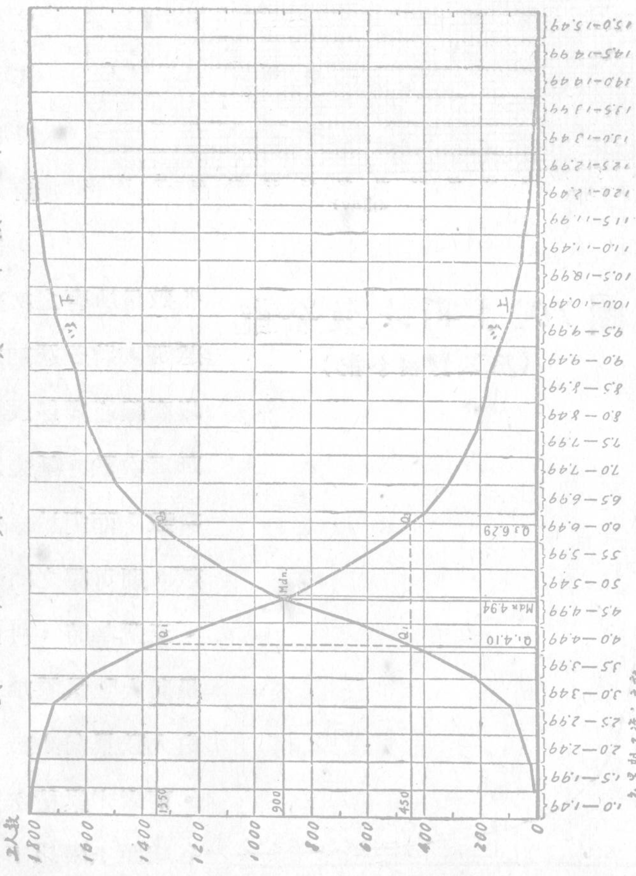


表35. 1,800名工人工資分配及其累積數

工　資（每星期以元計）(1)	人　數（簡單次數）(2)	累積次數 以下 (3)	累積次數 以上 (4)
1.0— 1.49	10	10	1800
1.5— 1.99	17	27	1790
2.0— 2.49	28	55	1773
2.5— 2.99	35	90	1745
3.0— 3.49	125	215	1710
3.5— 3.99	181	396	1585
4.0— 4.49	231	627	1404
4.5— 4.99	255	932	1123
5.0— 5.49	185	1117	868
5.5— 5.99	158	1275	683
6.0— 6.49	130	1405	525
6.5— 6.99	86	1491	395
7.0— 7.49	52	1543	309
7.5— 7.99	45	1588	257
8.0— 8.49	26	1614	212
8.5— 8.99	20	1634	186
9.0— 9.49	38	1672	166
9.5— 9.99	32	1704	128
10.0—10.49	18	1722	96
10.5—10.99	22	1744	78
11.0—11.49	11	1755	56
11.5—11.99	14	1769	45
12.0—12.49	8	1777	31
12.5—12.99	7	1784	23
13.0—13.49	6	1790	16
13.5—13.99	5	1795	10
14.0—14.49	3	1798	5
14.5—14.99	1	1799	2
15.0—15.49	1	1800	1
總　計	1,800	——	——

圖71，係由表35累積次數繪成。就曲線變動之情形，即可知次數增加之多寡。如圖內之以下曲線，在3元與8元之間者，

因其次數增加較多，故顯壁立，是即大部份工人工資，均在此限度之內。而在8元5角之上者，則因次數增加較少，故曲線遂顯低平，可知工資太高之工人爲數無多也。

上述之方法，係表示分組數量之累積次數。若表明一個單位數量之累積時，其法較此更簡易，亦用"以下"及"以上"二種形式。惟圖內橫量表表明各數量之豎線，僅用一直線，無下限與上限之分：知"以下"之數量數目，即可知"以上"之數量數目矣。

C. 圓滑次數曲線　歷史曲線可以圓滑之，已如上述。至次數曲線，若代表之數量不多，則曲線亦不能圓滑，故宜以修勻方法圓滑之，以示數量增加或將一切複雜變化除去時，本圖應具之形狀(理想的分配)。雖修勻之後，未必能與數量增多時相適合，然比之未修勻之圖，自較妥善，且可藉爲推算各組內之分配。其修勻方法，則有下列三種：

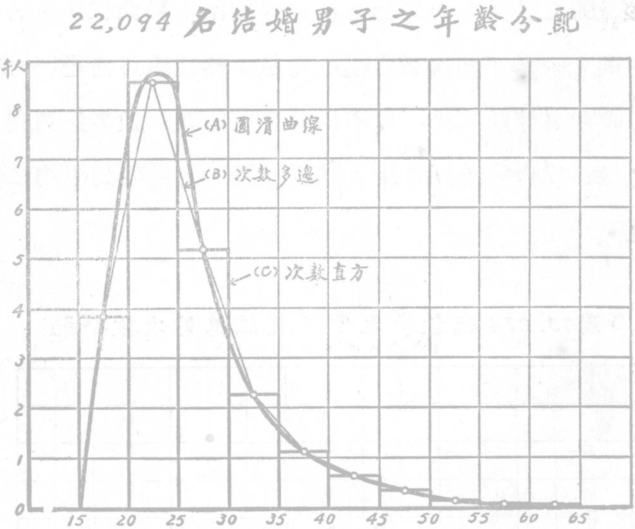
1.隨手畫法　斯種方法，與上述圓滑歷史曲線之隨手畫法性質相同。即就原來曲線之間，隨手繪一圓滑曲線以表之。如繪畫適當，則其分配情形，無難顯明(參閱圖72)。至圓滑之時，應根據次數多邊爲方向之指導，次數直方爲面積之指導，並應注意下列各點：

a. 所繪之圓滑曲線，其包含面積之總和，當等於原來直方形面積之總和。

b. 各個直方形面積之大小，在可能範圍內，當以仍舊不

變爲佳。

c. 圓滑曲線之方向，當無異常或例外之變動。



(圖72)

表36。22,094名結婚男子之年齡分配

結婚年齡	人　數
總　數	22,094
15—20	3,844
20—25	8,569
25—30	5,156
30—35	2,260
35—40	1,125
40—45	632
45—50	317
50—55	112
55—60	50
60—65	29

圓滑次數曲線之方法，除應注意上列各點外，更應詳察事實之內容。因材料之具有特質者，其分配形式，極難得完全對稱（如表36之事實），故圓滑之時，自應注意。又如事實之性質爲連續者，則圓

滑曲線愈可應用。如為分立事實，若欲圓滑之時，則應倍加注意；平常之事實，不圓滑曲線已足適用矣。

2.繼動均數法　用斯種方法繪畫圓滑次數曲線，其方法有二；一則先求若干組次數之繼動均數，然後據以繪畫（如圖73，並參閱表32之算法），一則不用計算，即在次數多邊圖內設法圓滑之（如圖74）。此二方法，雖各不同，而為繼動平均之性質則一也。

圖73. 234 個數量之實際及理想的次數分配
（次數多邊圖之圓滑法）

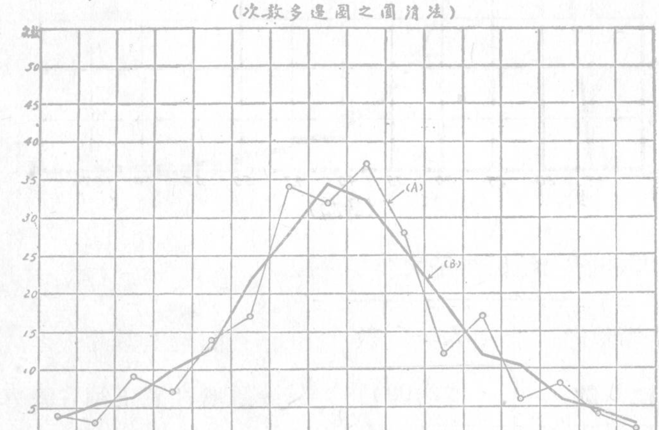


圖73之（B）線，係由每三組次數之繼動均數繪成。其繼動均數，列在圖之下方。至第一數與最後一數，係將極端數加倍平均而得。設使繪畫後，此曲線仍不甚圓滑，則可將第一次計算所得之繼動均數，再行繼續平均以求之，則曲線自然圓滑矣。

圖74. 234個數量之實際及理想的次數分配
（次數多邊圖之圓滑法）

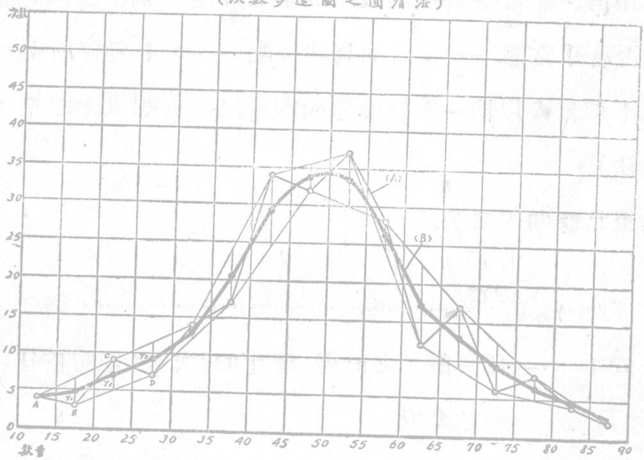


圖74(B)線之繪畫，則不用計算。其圓滑方法，係以線連轍其每隔一組次數之兩點，再作一垂線垂直於中央一組之次數上，然後以此垂線之中點作爲該組之均衡次數。如圖內B點之均衡次數，則先以線連結AC兩點，再作一垂線垂直於B，然後取該線之中點，即得y_1，照此方法，即得圖內y_1，y_2，⋮各點，復以線連之，即成(B)線。至此種均衡方法，亦可以算式代之，但與上者則畧不同。上述之均衡次數，則以三組計算；此種均衡，則須將中央一組之次數加倍，復加上其旁兩組之次數，以4除之方得，如第二組之均衡次數，即$=\frac{(2\times3)+4\times9}{4}=47.5$。故所得曲線形式，未能一致，惟就大體言之，要亦無甚差異也。

3.常態曲線之繪畫法　以上二法，爲圓滑次數多邊圖之通常所用者。然當事實搜集後以曲線表示時，爲精密的考驗其分配是否合乎常態——理想的對稱分配——，則可據所得材料，應用下列公式以繪一常態曲線而觀察之，（閱畢十四章，再回閱此法）。

繪畫常態曲線之公式

$$y=y_o e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

上式中　y=任何數量之計得(理想的)次數(即圖內任何縱線之高度)

y_o=事實平均數之計得(理想的)次數(即圖內平均點引出之縱線高度，爲圖內之縱線最高者)，其求得可依下式：

$$y_o=\frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}=\frac{N}{2.507\sigma} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

N=數量數目(即次數和)

σ(Sigma)=標準差

π(常數)=3.1416

e(常數)=2.71828『即納氏(Napierian)對數之底數』

x=各數量與平均數之差數用標準差表示者

今以前所示之例爲例，應用上式另繪一常態曲線，則得結果如次：

M(Mean算術平均數)=49.42(參閱十二章第三節)

$\sigma=3.014$ 組距爲單位　（參閱十三章五節）

$N=234$

$$y_0=\frac{234}{2.507\times3.014}=\frac{234}{7.556}=31.$$

卽49.42($x=0$)之計得次數爲31．設$x=\pm1\sigma$，則

$$y=31\times2.718^{-\frac{(1\sigma)^2}{2\sigma^2}}=31\times2.718^{-\frac{1}{2}}$$

$$=31\times\frac{1}{2.718^{\frac{1}{2}}}=31\times\frac{1}{1.687}$$

$$=31\times.607=18.8$$

卽$x=\pm1\sigma$時•　　$y=18.8$

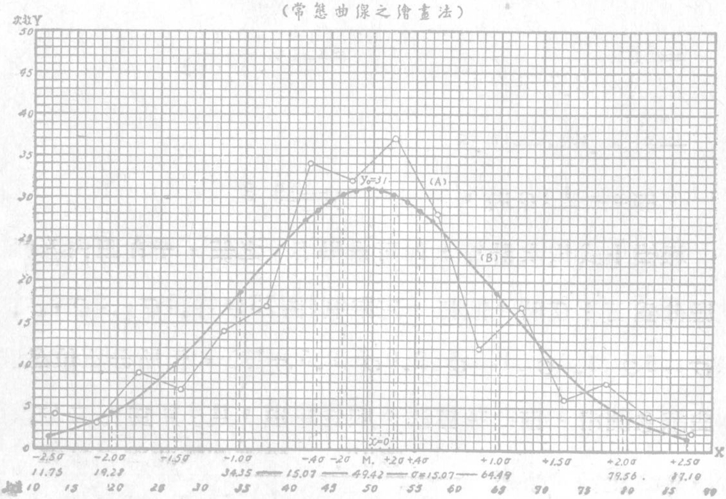
根據上式依次計算，卽可求得各y之值•至在圖內X軸上究應分爲若干σ時，似無一定限制(圖75分爲.1σ，.2σ，.3σ，.4σ，.5σ，1.0σ，1.5σ，2.0σ，2.5σ等)•但所分單位愈細，則曲線愈圓滑•惟此種算法，頗覺繁瑣，且y又爲y_0之分數而有一定之比例•學者因此，遂據各$\frac{x}{\sigma}$先行求出y_0與y之比值列成一表而應用（如附錄表1），則常態曲線之繪畫，當更便利•下表卽利用此法以求各y之值•

表37.　繪畫常態曲線之計算

$\frac{X}{\sigma}$由平均數之差 (Mean=0)	y.計得(理想的)次數或各縱線之高度 $y_0=31$
0σ=Mean	31×1.00 =31.0
$.1\sigma$(+或−)	,,× .995=30.8
$.2\sigma$　,,	,,× .980=30.4
$.3\sigma$　,,	,,× .956=29.6
$.4\sigma$　,,	,,× .923=28.6
$.5\sigma$　,,	,,× .883=27.3
1.0σ　,,	,,× .607=18.8
1.5σ　,,	,,× .325=10.1
2.0σ　,,	,,× .135= 4.2
2.5σ　,,	,,× .044= 1.4

各y之值求得後，即可在圖內X軸上，從M點起($x=0$)左右分畫.1σ，.2σ，.3σ，.4σ，.5σ，$1.\sigma$，……等，並由M點作一等於31(即y_0)之縱線。復從其餘各$\frac{X}{\sigma}$點，分別以計算所得之y作一縱線，然後以線連結此項縱線之頂端，即成一常態曲線。如圖75之(B)線：

圖75. 234個數量之實際及理想的次數分配
(常態曲線之繪畫法)



常態曲線繪畫後，即可知實際分配與理想分配接合之大概情形。但欲再考察其配合精確之程度，則應以下例「取樣之標準差誤Standard error of Sampling」公式考證之。

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{f(N-f)}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

上式 σ_s=取樣之標準差誤

f=常態曲線下任何數量之計得次數(即y)

應用上式，可先在圖內實際曲線與常態曲線上任取二點而求差數，並代入計算其取樣之標準差誤。如前者之差數，較3倍後者之差爲大，則此種差誤，當非由於取樣之變動，而另有其他原因存在；實際分配，即不能以常態分配視之。今以前例說明其算法如下：

在圖75內，60－65一組之實際次數爲12，而計得次數，則約爲21。取此二數求其差數，得21—12=9。復求σ_s，得

$$\sigma_s=\sqrt{\frac{21(234-21)}{234}}=\sqrt{\frac{4473}{234}}$$

$$=\sqrt{19.52}=4.42 \qquad 3\times 4.42=13.26$$

而　$9<13.26$

由上計算所得，實際次數與計得次數之差爲9，取樣之標準差誤爲4.42，若3倍之，則得13.26。惟9較13.26爲小，故可知二種分配極相接近；即實際分配，亦可以常態分配視之也。

常態曲線下面積之推算法　常態曲線繪畫後，則其下面積之總和，當近於原來曲線下面積之總和；而將曲線下各y之值相加，亦當與原來次數之總和相適合。是以在常態曲線下任何二縱線之間，若能求出其面積，則亦可代表該部所含之數量數目，惟此種面積精確之計算，殊非易易。英人瑟帕德（Shep－pard）遂將常態曲線以σ爲準，從平均數起分之爲若干部份，假設常態曲線下面積之總和爲1，用積分方法先行算出各部份與全部面積之比例，列成一表（如附錄表2.），則曲線下任何部份之

面積，均可依此比例算得矣(參閱下表及圖76)。

表38. 常態曲線下之面積

$\frac{x}{\sigma}$ 由平均數之差	所含面積佔全面積之比值 全面積=1.	在前例每部所含之數量數目 N=234 *
0. σ=M	.0000	0
1. σ(+或—)	.3413	.3413×234= 79.9
±1. σ	.3413×2 =.6826	.6826×234=159.7
2. σ(+或—)	.4773	.4773×234=111.7
±2. σ	.4773×2 =.9546	.9546×234=223.4
3. σ(+或—)	.49865	.49865×234=116.7
±3. σ	.49865×2 =.9973	.9973×234=233.4

*參閱圖75。

上表各部之面積俱從O(卽M)計起，至欲求任何二$\frac{x}{\sigma}$間之面積，則亦可求得。設例如下：

求1.0σ至1.5σ間之面積。

0至1.5σ間之面積=.4332 或 43.22%…………(1)

0至1.0σ間之面積=.3413 或 34.13%…………(2)

從(1)減(2)得………………….0919 或 9.19%

∴ 1.0σ至1.5σ間之面積=.0919或9.19%

又求1.0σ至—2.5σ間之面積，

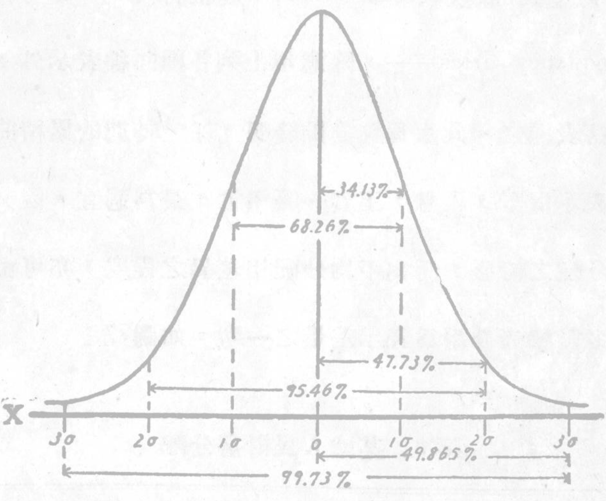
0至1.0σ間之面積=.3413 或 34.13%…………(1)

0至—2.5σ間之面積=.4938或 49.38%…………(2)

(1)(2)相加得……………….8351 或 83.51%

∴1.0σ至-2.5σ間之面積=.8351 或 83.51%

圖76. 常態曲線下σ之位置及所含之面積



觀上圖及表38,可知在常態曲線下,從中量起展開至±1σ,其間包含全體數量百分之68.26;至±2σ,則包含百分之95.46;至±3σ,則包含百分之99.37,而所餘僅得全體百分之.27,故常態曲線實際之應用,習慣上以±3σ爲標準(參閱十五章二節),誠以±3σ外之數量,所佔甚微,雖捨去之,而對於全體數量當亦不生若何影響也.

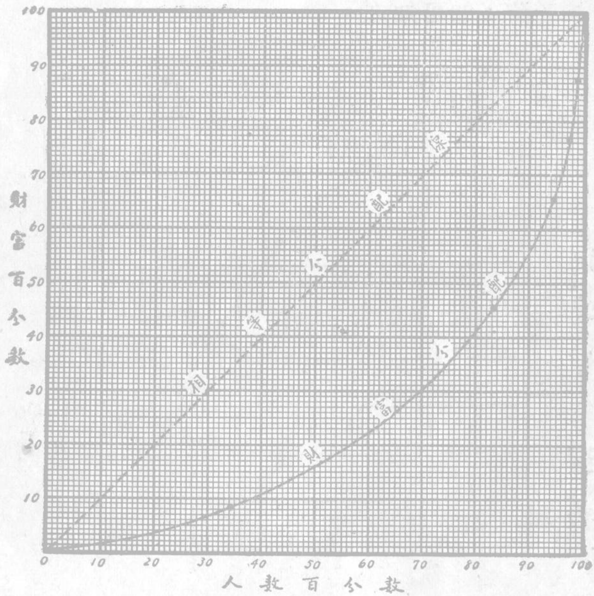
D. 距限曲線及帶形曲線　次數曲線，除上述各種外，亦有距限及帶形二種。至此二種曲線，其性質與繪法，均與前述歷史曲線內者相同(參閱101—102頁)。所差異者，圖之橫量表，一則以時間，一則以數量爲標準已。

E. 羅倫氏曲線(Lorenz Curve)　變量材料——亦可稱次數數列Frequency series——，除應用上列各種曲線表示外，亦可利用此法表顯之。此法爲羅倫氏發明，係一特別的累積曲線，應用以表示財富，入息，工資…等事實，最爲適宜。因其不特可明瞭分配之情形，而與平均分配相差異之程度，亦可由此得之，故多數學者卽用爲表示差量之一助。如圖77：

表39. 某城人民財富分配

財富	人數			財富合計		
(單位千元)	千人	百分數	累積百分數	百萬元	百分數	累積百分數
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
0—4	70	34.3	34.3	175	8.6	8.6
5—9	100	49.0	83.3	750	37.0	45.6
10—24	23	11.3	94.6	402.5	19.9	65.5
25—49	6	2.9	97.5	225	11.1	76.6
50—99	3	1.5	99.0	225	11.1	87.7
100—149	2	1.0	100.0	250	12.3	100.0
總計	204	100.0		2.027.5	100.0	

圖77. 某城人民財富分配
（羅倫氏曲線）

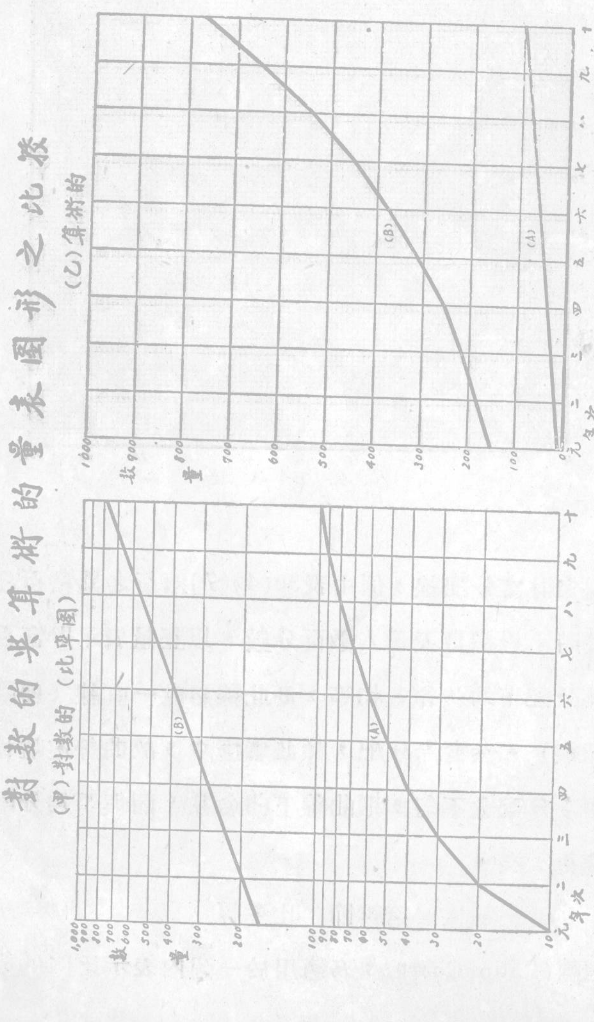


上圖之財富分配線，係由表39(4)(7)兩行之累積百分數繪成。繪畫時；以橫量表示人數百分數，以竪量表示財富百分數。設令其分配平均，各各相等，則此線必成一直線（即圖內之相等分配線）。然實際分配，類此者極少，故曲線遂離相等分配而下曲；分配愈不勻，則曲線下曲愈甚，而與平均分配相差異之程度更大矣。

第四節　比率圖

比率圖(Ratio Chart)，乃適用於一圖內表示比例的變動，

及其絕對數量者，與上述各圖差異之點，即量表之不同；因前者之量表，均爲算術的，而比率圖之量表，則爲對數的，吾人一視下列各圖，即可知之。



(圖78)

表40．構造圖78之數列

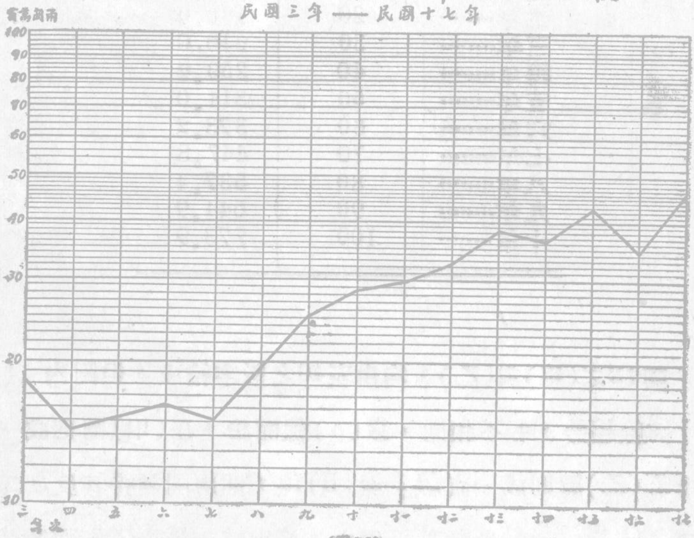
年　次	數列	
	(A)	(B)
元年……	10	150.0
二年……	20	180.0
三年……	30	216.0
四年……	40	259.2
五年……	50	311.0
六年……	60	373.2
七年……	70	447.8
八年……	80	537.4
九年……	90	644.9
十年……	100	773.9

圖78之(甲)與(乙)，均由表40之數字繪成，但圖內 (A)(B)二線趨勢，各不相同。以(A)線而論，在(甲)圖則成一曲線，在(乙)圖則成一直線；至(B)線，則兩圖適得其反，二者結果，未能一致。此種差異理由，純因縱方量表不同而發生，蓋(甲)圖之豎量表爲對數的（卽豎量表以各數對數分畫，故圖內無零度線），不但可以示事實絕對的量，同時並將其比例的變動表出。若事實增加具有常率者(Constant ratio of increase)，其結果必成直線『如(甲)圖之(B)線，是按年增加20%者』。若由直線逐漸灣高，則表示變動率漸增；下曲，則表示變動率漸減『如甲圖之(A)線，其變動率是按年遞減者』。至(乙)圖之豎量表，則爲通常所用者(卽算術的)，僅能表示事實絕對的量，而不能示其比例的變動。此卽二者差異之理由，亦比率圖所

具之特點。吾人再將圖79與圖49以爲比較，當更可明瞭二者之異同。

中國海關進口稅按年收入比較

民國三年——民國十七年

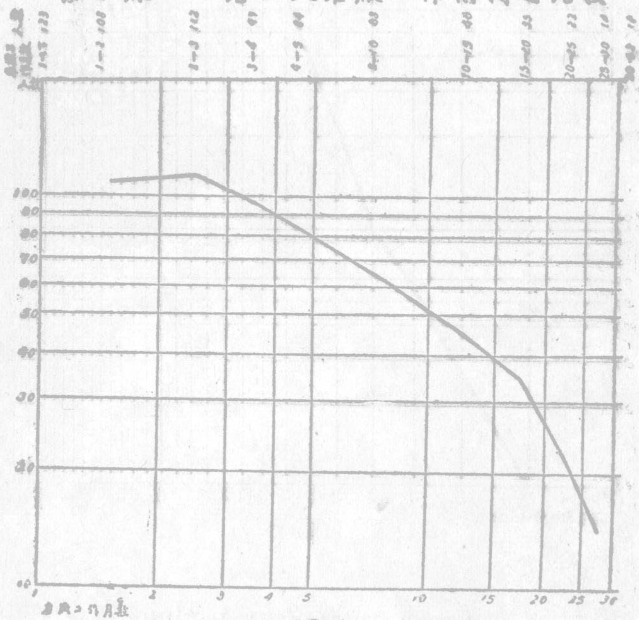


(圖79)

繪畫上圖及圖 78（甲）所用之紙，習慣上謂之半對數紙(Semi-logarithmic paper)，然亦有雙對數紙(Double logarithmic paper)，而橫豎二方均以比率分畫者，如下列圖80及81所示者是。半對數紙及雙對數紙，均可依對數數目，自行製造。近日上海中國銀行總管理處經濟研究室，且有印製發售，直接購用，當更便利。至二者之應用，則半對數紙多用於表示時間數列(Time scries)；雙對數紙則多用於表示次數數列，——卽不等

組距之事實，亦能以此法處理之——時間數列，未能應用雙對數紙表之也。

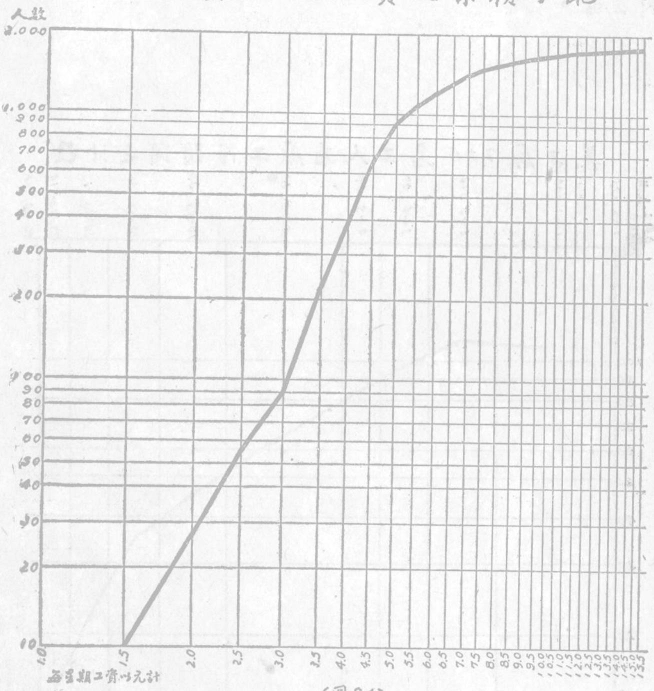
某工廠716名工人在廠工作期間之比較



(圖86)

次數數列，若用累積曲線表示時，如能將其橫豎二方，均改用對數量表，則其增進情形及變動比例，更覺顯明。試比較圖71與81，卽可知之。惟不等量表，就普通而言，常恐令人誤會耳。

1.800名工人工資之累積分配



(圖81)

第五節 圖形之應用及選擇

圖形之種類，依前所述，雖有多種。惟就應用方面言之，要不外下列數法，茲特總括說明如次：

1.比較法 此法之目的，乃欲比較各項數量者。如線形圖，簡單條形圖，多圓圖，方形圖，立體圖，簡單曲線圖，比率圖等均是。就應用可面言之，則線形條形，當較平面立體爲佳；因其不特簡單顯明，且繪製亦易也。至時間數列及次數數列

之表顯，則曲線圖實爲良好之方法，若更欲兼示其變動之比例，則當採用比率圖矣。

2.區分法　凡欲將事實各部份與全體關係表出，則當採用此法以顯之。如單圓圖，單式分段條形圖（如圖7），均屬此法之良好圖式。至複式分段條形圖，尤爲便利，蓋其不特可示各部與全部之關係，並能將各項以比較也（如圖8，帶紋曲線亦同具此效能，如圖53）。他如疊圓圖，單式方形圖（如圖20）等，間亦可以採用。

3.地位法　凡事實之結果，如欲兼示其發生之場所者，則當採用此法，如上述各種地圖均是。

4.累積法　此法之目的，即欲示事實之增進情形及其接續總數者，如曲線圖內之累積曲線是也。

5.系統法　斯種繪圖目的，僅欲示事實各部關聯及其統系，而無數量之比較。如上述之組織圖，卽其一例。

6.平均法　此法目的，卽欲闡明事實平均之趨勢，如歷史曲線內之圓滑曲線是。又如欲將事實結果與平均關係以比較，亦屬此法之一，如圖13是也。

7.實體法　此法之目的，亦在比較事物數量者，原卽比較法圖形之一。不過以其表示事物數量外，更及事物實體，故以斯法名之，如上述各形像圖是也。

上述爲圖形應用之方法，至選擇圖式之時，則當依事實性質及其要點而定。茲將各類材料應採用之圖形，取其要者，分

列表解如下，以為選擇之標準：

1.歷史材料……………………{線形圖，條形圖；多圖圓，方形圖，立體圖；曲線圖——簡單，累積，圓滑，……；比率圖}

2.空間材料……………………{線形圖，條形圖；圓形圖，方形圖，立體圖；地圖——點，橫線，……}

3.組合材料……………………{分段條形圖；單圓圖；單式方形或立體圖}

4.次數(變量)材料………{線形圖，條形圖；直方圖(次數面積)；曲線圖——簡單，累積，圓滑，……；比率圖}

第六節　繪圖之規則

繪圖方法，在前各節中，經已按類加以說明。茲為利便閱讀起見，再將關于繪圖所依據之普通規則，條例如下：

1. 採用之圖，當以能確切表現事實之眞象，而免發生誤點者為上(參閱前節圖形之應用及選擇)。
2. 表現事實之圖，以一量者較佳(參閱圖28)。
3. 圖之排列法，通常由左而右，自下而上。
4. 圖之橫量表，多為自變量之分晝；竪量表，則為倚變

量之分畫。

5. 橫量表之字文或數字，可列於圖之下部，有必要時，亦可另列於圖之上部(參閱圖57)。

6. 豎量表之數字，皆列於圖之左；有必要時，亦可另列於圖之右(參閱圖50,53)。

7. 豎量表排列時間之數字時，時間之早者宜在上（參閱圖8)。

8. 橫行排列時間之數字時，時間之早者宜在左。

9. 排列圖中之文字及數字，均宜使其能由圖之正面，或右側面讀之(參閱圖56,62,71,80)。

10. 圖中所用量表之單位，其距離當相等，所表顯事實之名目及數目，並須指明之。

11. 若橫量表之各級不相連接而有間斷，則對於相隔之處，仍須留一空格表示，以免誤會。

12. 圖內之格線，除必要外，不宜過多。

13. 圖內橫量表之規定，以能將零度列於圖內爲宜，其線並須比各線加寬，橫量表之有零度者亦然。

14. 若豎量表之零度線，不能順序列於圖下時，則零度線上宜以橫道空白表明之，以示省畧(參閱圖52,82)。

15. 若橫量表表明時間之時，則在圖左右二邊之豎線，不宜過寬；因時間之起訖，一圖之中，未能完全包括。

16. 若有多項事實在圖形上表顯作比較時，則應加以圖例

，以示何種代表何項(參閱圖6,8,9,50)。又如其中一項須令人注意者，則宜用較顯著之方法表示之(參閱圖44)。

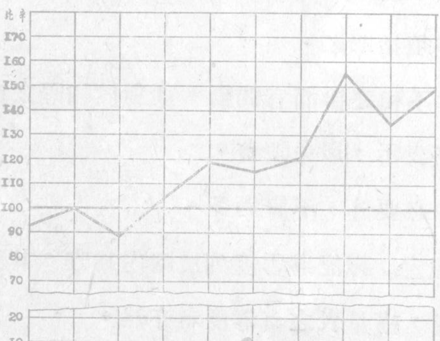
17. 圖形所根據之數目，有時可將之列於圖之上方(參閱圖56,62,80)。如不便列出時，則可另列一表，附於圖近。

18. 凡曲線圖之自變量，應在橫量表表明之。

19. 曲線圖如用百分法表示時，則代表百分之線，宜特別加寬，以示區別(參閱圖54,77,82)。其他用作比較標準之線亦然(參閱圖50)。

圖82. 民元至民十我國土貨出口價值之按年比率

民二＝100



20. 曲線之線，宜比格線特別加寬，使與其背地容易區別。

21. 在可能時，表明圓滑曲線之數量宜在圖內以點指出其位置(參閱圖88)。

22. 聯成曲線之各點，在可能範圍內，宜從一豎線上畫出。(參閱上列各曲線圖)

23. 若圖內量表以對數分晝時，則每重遞加，俱爲10倍。(參閱比率圖)

24. 圖之名稱，宜參照表名釋要列出。有必要時，詳細名稱及說明等，亦應增補，以期明晰。

25. 圖之號數及名稱，可列於圖之上方或下方，惟不可列於兩旁。

以上爲繪圖所依據之普通規則。學者苟能善爲運用，並於繪畫時，對於圖形之清潔，數字之整齊，格線之勻稱，色澤之調和等問題，加以充分注意。其有足以引起視覺上錯覺（Optical Illusion）之圖形，亦留意避免（參閱右圖），則繪圖之術，無難臻於完善之境矣。

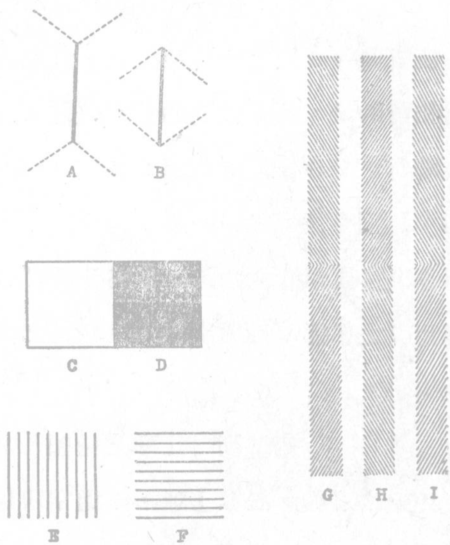


圖83. 表示視覺錯覺之圖形

觀圖83之A,B二線，A似較長於B。C,D,E,F四方形，則C似較D爲大；E視之似畧闊，而F則似畧高。但其實A,B二線均同長，C,D二方形面積亦等，至E，F，則皆爲正方形也。又

視C,H,I三條，則皆呈灣曲之狀，G,H二者，頂末似較接近；H,I二者，則適成相反，而其實三者大小固相同，且亦爲平行之直條。凡此諸端，純因組織不當而發生視覺上之錯覺。故繪圖時，對於各種線條之應用，自不能不加以相當注意與選擇，以期獲一正確之結果。

第十一章　比率(Ratios)

第一節　比率之意義

統計問題，均含有比較性質。且此種比較，吾人所當注重者爲相對的量，而非絕對的量。蓋以事實結果，其數目每有鉅大或畸零，若僅就絕對的量而觀察，極難得一明確之概念。故常利用比例方法以求一結果，而以比率或百分率代表之——是卽以各事實或事實之總計，作爲分數之分子分母而比較——，藉爲比較之準據，而明瞭彼此間數量之關係，斯卽本章所論述之比率也。

第二節　比率之種類及其算法

比率之意義，旣如上述。至通常所用之比率，則可分爲下列四種。玆分別說明及示例如下：

(1)變動率(Rate of change)　此種比率，多用於解析時間數列者。是卽用某年或平年之數爲標準，而以各年之數與其比較(參閱表41)；又或各用上年之數爲標準，而以本年之數與其比較（參閱表42），藉明事實增減變動之比例者也。各種指數

(Index number) 卽是此種變動率，前者可稱定基指數 (Fixed base Index)，後者可稱環比指數(Link relative Index)。

表41.

民元至民十我國土貨出口價值按年比較

民國年次	出口貨價（單位：千關兩）	比　率 民國二年＝100
元年……	370,520	91.9
二年……	403,306	100.0
三年……	356,227	88.3
四年……	418,861	103.9
五年……	481,797	119.5
六年……	462,932	114.8
七年……	485,883	120.5
八年……	630,809	156.4
九年……	541,631	134.3
十年……	601,226	149.1

上表之比率，係以民二之出口貨價爲標準，令其等於百分之一百（標準數常爲一百，以便比較），而以各年與其比較，求得之數，卽可表明各年出口貨價與二年相較，增減若干。如上表四年之比率爲 103.9，卽表示四年出口貨價，較二年增加百分之3.9也。算法如下：

以二年出口貨價　403,306，爲100.0

則元年之比率得　403,306 : 370,520 :: 100 : x，

$$x_1 = \frac{370,520}{403,306} \times 100.0 = 91.9$$

三年之比率得　403,306 : 356,227 :: 100 : x_2

$$x_2 = \frac{356,227}{403,306} \times 100 = 88.3 \quad (\text{餘仿此})$$

根據上列計算，此種比率，可列一算式如下：

$$\text{固定比率} = \frac{\text{本年數}}{\text{基年數}} \times 100$$

表42. 民國三年——民國十七年
我國海關進口稅按年收入比較

民國年次	進口稅(單位：千關兩)	環比
三年……	18,203	100.0
四年……	14,367	78.9
五年……	15,225	106.0
六年……	16,161	106.1
七年……	15,102	93.4
八年……	19,632	130.0
九年……	25,196	128.3
十年……	28,594	113.5
十一年……	29,988	104.9
十二年……	32,570	108.6
十三年……	38,104	117.0
十四年……	36,367	95.4
十五年……	42,855	117.8
十六年……	34,903	81.4
十七年……	46,499	133.2

上表第三行之「環比」，則各用上年之數爲標準，而以本年之數與其比較，所得結果，即示各年與其去年之增減百分數也．其算法及算式如下：

以三年進口稅

18,203爲100

則四年環比得

18,203:14,367::100:x_1

$$x_1=\frac{14,367}{18,203}\times 100=78.9$$

以四年進口稅 14,367爲100

則五年環比得 $\frac{15,225}{14,367}\times 100=106.0$ (餘仿此)

$$\text{環比}=\frac{\text{本年數}}{\text{上年數}}\times 100$$

(2)分配比率(Distribution ratios) 此種比率，則用以表示部份數與總數相關之數目，通常多以百分率顯之，即以100分配於總數之各部．求算時，可依下式：

$$\text{分配百分率}=\frac{\text{部份數}}{\text{總數}}\times 100$$

如表25所載，各洲總人數爲1,993(百萬人)，則亞洲1,033所佔之分配百分率應爲

$$\frac{1,033}{1,993}\times 100=51.8 \quad (\text{餘仿此})$$

(3)組間比率 (Inter-class ratios) 此種比率，乃表示一組總數之一部份(用爲標準者)，與同組總數之他部份相比，以明二者間之關係。如下表所示之「男與100女之比」是也。

表43. 美國人口中各種人口之性別比較

1930年

人種	人口		男與100女之比
	男	女	
白人	55,163,854	53,700,353	102.3
黑人	5,855,669	6,035,474	97.0
墨西哥人	158,674	663,859	114.3
紅印度人	170,350	162,047	105.1
日本人	81,771	57,003	143.3
中國人	59,802	15,152	394.7
菲律濱人	42,268	2,940	1,437.7
印度人	2,860	270	1,059.3
高麗人	1,223	637	192.0
其他人種	609	171	356.1
總數	62,137,080	60,637,966	102.5

上表「男與100女之比」計算，係以各種人口中之女子數爲標準令其等於100，而以男子數與之比較，其算法及算式可列如下：

以白人女子數53,700,353爲100；

則男子之比率得 $\frac{55,163,854}{53,700,353}\times 100=102.7$(餘此仿)

$$合計總數=\frac{62,137,080}{60,637,966}\times 100=102.5$$

$$組間比率=\frac{他部數}{標準數}\times 100$$

(4)異類比率(Hybrid ratios) 此種比率，則分子分母均爲異類的，是卽將各事物之總數以爲比較也。但此種比較，不以百分率或千分率爲標準，而以平均數爲標準，故卽下章所討論之平均數是。

比率之種類，除上述者外。其他如出生率 (Birth rate，$=\frac{出生人數}{人口總數}$ 如乘以1,000，則謂之千分率)，死亡率 (Death rate $=\frac{死亡人教}{人口總數}$)，特別死亡率(Specific death rate，$=\frac{某種人死亡數}{某種人數}$)，疾病率(Morbidity rate，$=\frac{疾病者人數}{人口總數}$)，結婚率(Marriage rate，$=\frac{結婚人數}{人口總數}$)，離婚率(Divorce rate，$=\frac{離婚人數}{結婚人數}$)，利率(Interist rate，$=\frac{利息}{本金}$)，所得稅率(Income-tax rate，$=\frac{所得稅數}{可稅入息數}$)，工人周轉率(Labor turnover rate，$=\frac{離工人數}{平均領薪人數}$)，標高率(Mark-up rate，$=\frac{定價-成本}{成本}$)，標低率(Mark-down rate，$=\frac{定價-售價}{定價}$)……………等，亦是一種比率——卽各係數亦然，如差異係數，

相關係數等(參閱十四十五兩章)——•惟單一率 (rate) 之意義，大抵包含有時間之單位在內•例如出生率，則通常爲表示每年(或每月)之出生數及每千人之出生數也•此所謂千分率，然比率之計算，亦可擴大爲萬分率或十萬分率（如自殺率多以十萬分率顯之）以使其小數較易觀察者•故與上述各種比率畧有不符，但其實則同是一種比例已•

第三節　應用比率之注意點

應用比率之時，對於下列各點，常須加以留意，以免發生錯誤而期得一正確之比：

1.總數若少於一百時，不宜用分配百分率顯之，因各部小數常致忽畧，不易比較•

2.總量是同類者，分配比率，乃可應用•蓋各部事實必須具有相同之點，方能將此組合各爲分配而成一百分數•

3.比率乃一分數，故求算時，分子分母最當留意選擇，其結果方有比較之可能•若以不同情形之數目，用爲分子分母以比較，則往往陷於差誤而不能得一正當之結果•法統計家白紫倫 (Bertillon) 曰：「必須以結果，與發生此結果之眞正原因相比•」實爲應用比率時之不可不注意者•

4.若將二個(或多個)比率以比較，則各比率之分子分母須確具有比較之可能方爲有効•若以不能比較的分母 (non-comparable denominators)，或不能比較的分子(non-comparable numerators)而比較，則常不能獲一正確之比•

第十二章 集中數量(Measures of Central Tendency or Arerage)

第一節 集中數量之意義

在前所述之表列法，圖示法，係將搜集所得事實之全體盡行表出以明其大概情形。然欲將兩羣或數群事實以比較，則不能祗據此爲標準，必須另由各事實中，選擇一簡明數量以代表方可(前章之比率，僅爲個體或各項比較之標準)。此代表之數量，卽爲集中數量。——集中數量亦稱模型數 (Types)，或平均數 (Average)——蓋無論何種現象，集合而研究之，必有多少或大小之差異，但其分配，每有集中之趨勢，變動之中心。故以集中數量爲代表，不獨簡單明確，卽全體事實情形，亦可由此數顯示之也。

第二節 集中數量之效用及種類

集中數量，旣可爲全體數量之代表；亦可將事實之情形顯明，故其效用，當有下列四點：

1.以一簡單數目，代表所得事實之全體情形。

2.有此簡單數目之後，各羣事實，方易比較。

3.可自大部事實中，選擇標本材料(Sample data 卽代表事實)，以代表全部事實之眞象。

4.對於各羣事實間之關係，予以數學上之概念。

集中數量之效用，已述如上。至常用之集中數量，則有五

種：(1)算術平均數，(2)中位數，(3)衆數，(4)幾何平均數，(5)倒數平均數，兹分節述明如下：

第三節　算術平均數 (Arithmetic Average or Mean)

算術平均數，乃全體數量價值最適中之一數，亦即全體數量均衡之值，意義最爲顯明，且屬吾人通常所用者。其求算方法，可分爲下列四種：

(1)通常法(Common method)數量未歸類者

在簡單數量中求算算術平均數時，可將全體各數量之值相加，而以數目之和除之卽得。設例如下：

表45. 民國廿一年廣州口岸對外貿易洋貨按月輸入總值

月　次	輸入總值 千關両
一　月……	3,640
二　月……	4,433
三　月……	3,980
四　月……	8,664
五　月……	4,805
六　月……	3,738
七　月……	4,583
八　月……	4,281
九　月……	3,563
十　月……	4,114
十一月……	4,361
十二月……	3,990
平　均……	54,152
總　計……	4,512.7

上表每月平均輸入之4,512.7係將各月輸入總值3,640，4,433，…………等相加，得全年總和54,152，復以月數(12)除之而得。此法計得之平均數，可稱之曰簡單算術平均數(Simple Average)，其公式如下：

$$M=\frac{\Sigma x}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

式中M (Mean)＝算術平均數

Σ＝總和符號　x＝數量

N＝數量數目之和（次數和）

(2)通常法數量已歸類者

在已歸類之數量中求平均數時，則應將各數量與其相當次數乘後再相加，方得全體數值總和，始能以數目之和除之。斯法計得之平均數，常稱之曰加權算術平均數(Weighted Average)。公式及舉例如下：

$$M=\frac{\Sigma fx}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)\qquad f=\text{次數}$$

或 $$M=\frac{\Sigma wx}{\Sigma w}\cdots\cdots\cdots\cdots(7a)\qquad w=\text{權數}$$

表46. 某工廠105名工人平均工資之計算

每月工資 x (1)	工人數 f (2)	人數×工資 fx(1×2) (3)
10元	8	80
11	12	132
12	17	204
13	20	260
14	13	182
15	16	240
16	9	144
17	5	85
18	3	54
19	2	38
總計	105	1,419

依(7)式代入

$$M=\frac{1,419}{105}=13.51$$

即每人每月平均工資為十三元五角一分

上表之例，其數量為一單位。若在分組數量中求平均數時，則算式亦與(7)式相同，即以各組距中值為 x 便可。因分組之假定，係當每組中所含之數量，皆與中值相等故也（參閱54頁）。如表47：

表47. 某大學120名新生平均體重之計算

體重(磅) G (1)	中値 x (2)	人數 f (4)	人數×中値 fx(2×3) (4)
90—05	92.5	1	92.5
95—100	97.5	2	195.0
100—105	102.5	4	410.0
105—110	107.5	6	645.0
110—115	112.5	7	787.5
115—120	117.5	9	1,057.5
120—125	122.5	11	1,347.5
125—130	127.5	13	1,657.5
130—135	132.5	15	1,987.5
135—140	137.5	12	1,650.0
140—145	142.5	10	1,425.0
145—150	147.5	8	1,180.0
150—155	152.5	7	1,067.5
155—160	157.5	5	787.5
160—165	162.5	4	650.0
165—170	167.5	3	502.5
170—175	172.5	2	345.0
175—180	117.5	1	177.5

總數……………………………120 $\sum fx = 15,965.0$

代入(7)式

$$M = \frac{15,695}{120} = 133.042$$ (即爲平均體重)

(3)簡捷法(Short method)

求算平均數時，若數量繁多，則可應用捷法以爲計算。其式如(8)或(8a)。玆設例說明此法之計算如次：

$$M = A + \frac{\sum d}{N} \quad \cdots\cdots (8)$$

或 $$M = A + C \quad \cdots\cdots (8a)$$

A(Assumed Mean)＝假設平均數

d(Deviation)＝離中差(各數與假設平均之差數)即

$=x-A$

C(Correction)＝更正數　即$=\frac{\Sigma d}{N}$

表48. 平均數捷法之計算

數量 X (1)	假設平均數 A (2)	各數與假設平均數之差d +(3	−(4)
40			20
48			12
50			10
60	60		
70		10	
74		14	
80		20	
82		22	
N＝8	A＝60	66	42

$\Sigma d=66-42=24$

$M=60+\frac{24}{8}\quad=60+3=63$

上表之計算法次如下：

1.先就全體數量中，選擇一適中之數爲假設平均數，本例爲60。

2.以此假設平均數爲標準與各數相較，並附入正負符號(大者爲正，小者爲負)，求各數與此數之差。得+10，+14，−20，−12，…等，分列於(3)(4)兩行。

3.將正號差數與負號差數用代數法相加，得66 -42＝24.

4.將差數之和24，以數量數目之和8除之，得8，是爲更正數(即更正實得平均與假設平均之差)。

5.將更正數3，加於假設平均數60上，即得實得(或眞正)平均數(Obtained or True Mean)63.

此法與通常法不同之點有二：(1)先假設一平均數，(2)所

計算者非實得平均數，乃實得平均數與假設平均數之差（卽更正數）。至此法所根據之原理，亦甚顯明，因實得平均與各數之差數（卽平均數兩邊之差數），其代數和必等於零——因平均數為全體數量價值之最適中一數，其兩邊差數適足抵消（參閱圖84，85及表49自明）。——若不為零時，則須先求一更正數，以更正假設平均數與實得平均數之差數，方能得一實得平均數也。

圖84. 由實得平均數之離中差

圖85. 由實得平均數之離中差

（據表49材料）

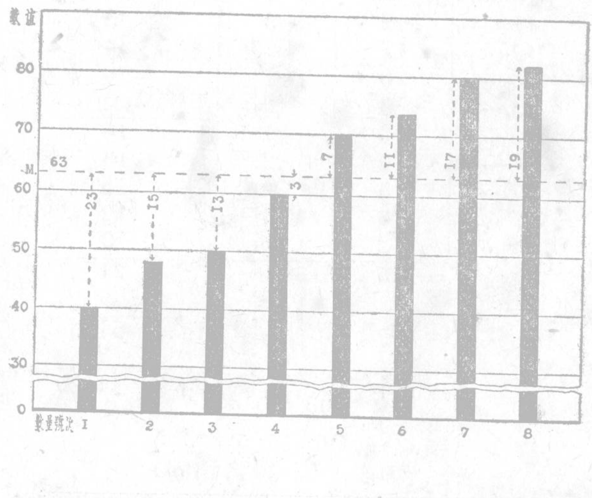


表49. 由實得平均數之離中差

數量 X	由平均數63之離中差 D +	由平均數63之離中差 D —
40…………		23
48…………		15
50…………		13
60…………		3
70…………	7	
74…………	11	
80…………	17	
82…………	19	
總計………	54	54

54—54=0

若各數量已歸類時，則前列公式(8)可改爲下式：

$$M=A+\frac{\Sigma fd}{N} \cdots\cdots\cdots (9)$$

表50. 某工廠105名工人平均工資之計算
(簡 捷 法)

每月工資 x (1)	工人數 f (2)	離中差 d (3)	人數×離中差 fd(2×3) (4)
10………	8	-4	-32
11………	12	-3	-36
12………	17	-2	-34
13………	20	-1	-20
			-122
14………	13	0	
15………	16	1	16
16………	9	2	18
17………	5	3	15
18………	3	4	12
19………	2	5	10
	N=105	A=14	71
			—122
			Σfd=—51

代入(9)式

$$M=14+\frac{-51}{105}=14+(-.49)$$

$$=14-.49=13.51$$

(與表46計得者相同)

表 51. 某大學 120 名新生平均體重之計算(簡捷法)

體重 G (1)	中值 x (2)	人數 f (3)	(A) 離中差 d (4)	(A) 人數×離中差 fd (3×4) (5)	(B) 離中差 (組距爲單位) (6)	(B) 人數×離中差 fd (3×6) (7)
90—95	92.5	1	-40	-40	-8	-8
95—100	97.5	2	-35	-70	-7	-14
100—105	102.5	4	-30	-120	-6	-24
105—110	107.5	6	-25	-150	-5	-30
110—115	112.5	7	-20	-140	-4	-28
115—120	117.5	9	-15	-135	-3	-27
120—125	122.5	11	-10	-110	-2	-22
125—130	127.5	13	5	-65	-1	-13
				-830		-166
130—135	132.5	15	0		0	
135—140	137.5	12	5	60	1	12
140—145	142.5	10	10	100	2	20
145—150	147.5	8	5	120	3	24
150—155	152.5	7	20	140	4	28
155—160	157.5	5	25	125	5	25
160—165	162.5	4	30	120	6	24
165—170	167.5	3	35	105	7	21
170—175	172.5	2	40	80	8	16
175—180	177.5	1	45	45	9	9
總數		120		895		179

若數量已分爲若干組距時，則應用捷法以求算術平均數，其功效愈顯。且更可於求差數時，利用組距爲單位，而在求得更正數後，再乘以組距使之還原。如此計算，則尤覺簡捷。試比較表51簡捷法(A)與簡捷法(B)自可明瞭。

由上表(A)及(B)計得之結果，均與表47計得者相同。而在簡捷法(B)之計算，則依照下列(10)式以組距爲差數單位，故較之簡捷法(A)，更覺妥捷。平常計算，此實爲最要之法，學者宜特加注意。

$$M=A+\frac{\Sigma fd}{N}\times i \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

i＝組距

(若在不等組距之數量中求平均數時，如應用(10)式，則須先定出一標準組距，然後將各數與假設平均數之實際差數一律折成標準組距，方可計算。)

假設平均數(A)爲130—135之中值132.5

−830
Σfd=65

依(9)式代入

$M=132.5+\frac{65}{120}=132.5+.544$

$=133.042$

−166
fΣd=13

依(10)式代入

$M=132.5+\frac{13}{120}\times 5$

$=132.5+.1083\times 5$

$=132.5+.042=133.042$

(4)累積次數法

在分組事實中計算平均數時，除上述通常法與簡捷法外，尚有累積次數法一種可以應用，茲將其計算方法及設例表明如次：

$$M = X_0 + \frac{\Sigma F' - \Sigma F}{N} \times i \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

X_0＝原始點（與簡捷法之假設平均數相同）

$\Sigma F'$＝原始點較高各組以上累積次數之總和

ΣF＝原始點較低各組以下累積次數之總和

表52. 用累積次數法求平均數

工資(2) G (1)	中值 x (23	人數 f (3)	累積次數 (A)以中間一數爲原始點 (4)		(B)以最小一數爲原始點 (5)		(C)以最大一數爲原始點 (6)	
10—15	12.5	2	2	34 ΣF	0	293 $\Sigma F'$	2	288 ΣF
15—20	17.5	8	10		81		10	
20—25	22.5	12	22		73		22	
25—30	27.5	19	0		61		41	
30—35	32.5	22	42	78 $\Sigma F'$	42		63	
35—40	37.5	7	20		20		70	
40—45	42.5	10	13		13		80	
45—50	47.5	3	3		3		0	
總數		83	分別代入(11)式					

(A)　$M=27.5+\frac{78-34}{83}\times 5$

44

$27.5+53\times 5$　　　$27.5+2.65=30.15$

(B)　$M=12.5+\frac{293}{83}\times 5$

$12.5+3.53\times 5$　　　$12.5+17.65=30.15$

(C)　$M=47.5+\frac{-288}{83}\times 5$

$47.5+(-3.47)\times 5$　　$47.5-17.35=30.15$

表內(A)(B)(C)三行，均係以累積次數法求平均數，各行之原始點雖不相同，而結果則彼此一律。應用時可任選一種。不過若當組數繁多時，則(A)行之計算，似較其餘二者爲便。

第四節　中位數(Median)

中位數又稱中數，亦稱地位平均數(Position Average)，乃全體數量位置最中間之一數。如數量數目爲偶數時，則在最中兩數之中間，在此數之每邊，各有全數總數二分之一$\left(即\frac{1}{2}N\right)$，兩邊數量數目適足抵銷。求其值時不須運算，祇將各數量按其大小排列，然後將兩端之數順次銷去，至所餘中間一項或二項之間之數，卽中位數也。求其位置時，可依下式：

$$\text{Mdn位置}=\frac{N+1}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

Mdn(Median)＝中位數

N＝數量數目之和(次數和)

表53. 中位數之求法
(數量數目爲奇數者)

數量	
20	代入(12)式
22	Mdn位置$=\frac{9+1}{2}=5$
24	
26	是卽第5項之數：
28	卽爲所求之中位數•
30	故中位數=28.
32	
34	
36	
N=9	

上式祇能求中位數之位置，不能求其價值，應用時宜加以注意•

上例，其數量數目之和爲奇數，故求得中位數之位置爲整數•然若數量數目之和爲偶數時，則中位數之位置頗難決定，各學者之主張亦殊之一致•有以加.5爲中位數位置者；亦有以減.5爲中位數位置者，惟通常則以居中兩數之均數爲中位數•如表54：

表54. 中位數之求法，據表6之材料
(數量數目爲偶數者)

各月稅收數 (單位：千元)	代入(12)式
5,778	Mdn位置$=\frac{12+1}{2}=6.5$
5,127	是卽中位數之位置，在第6項與第7項之間，取其均數，則得中位數如下：
4,776	$\text{Mdn}=\frac{3,578+3,003}{2}=$
4,126	3,290 卽每月之中位收入數爲3,290千元•(意亦卽每月通常收入也•惟此以中位數爲根據，不以算術平均數爲根據•)
4,039	
3,578	
3,003	
2,242	
1,837	
1,210	
730	
272	
N=12	

若各數量已歸類，則中位數之位置，可以累積次數決定之(如表55).至若數量分為若干組時，則須將每組所含之數量，當作均勻分配於各組之內;然後據以核算(因中位數以位置而定，故不能一律當作集中於中值上.)，方得所求之中位數。例如表56所載之事實，其人數總數(即次數和)為120，依前述中位數定義，則知中位數每邊各有60數量——即中位體重以下以上各有60人——。欲求其值，可由小數量一方起(或由大數量一方起亦得)，將各組次數(人數)相加至第60項止，便為所求之中位數(即第60項之值為中位數，參閱圖86)。今由第1組次數起加至第8組止，僅得53項(1+2+4+6+7+9+11+13=53)，尚差7項(即60—53=7)，方達全體數量之一半。如將較大一組(第9組)之15數加入，則得68,又超過一半。

表55. 33名工人中位工資之求法

工資 (1)	人數 (2)	累積人數 以下 (3)	累積人數 以上 (4)
20元	1	1	33
22	3	4	32
24	4	8	29
26	8	16	25
28	10	26	17
30	5	31	7
32	2	33	2
總數	33	——	——

代入(11)式Md位置$=\frac{33+1}{2}=17$

由以下累積觀之，可知26以下，祇得16人;而中位為第17人，故當為28，即所求之中位工資。從以上累積，亦得同一之結果。

由是可知中位數必在第9組130—135之內(通常稱該組曰中位數組)。惟此組內共有次數(人數)15，若當作其分配均勻，則中位數位置，應在此組內$\frac{7}{15}$之上，而組距爲5，是卽中位數離此組下限(130)之距離爲$5\frac{7}{15}$，將此數2.33(卽$5\times\frac{7}{15}=2.33$)加於下限130之上，得132.33(卽130+2.33=132.33)，便爲所求之中位數(卽120名新生之中位體重爲132.33磅)。若由大數量一方起計，則結果與此亦同。吾人再視下列圖86及87，當更可明瞭此種計算所據之原理矣。

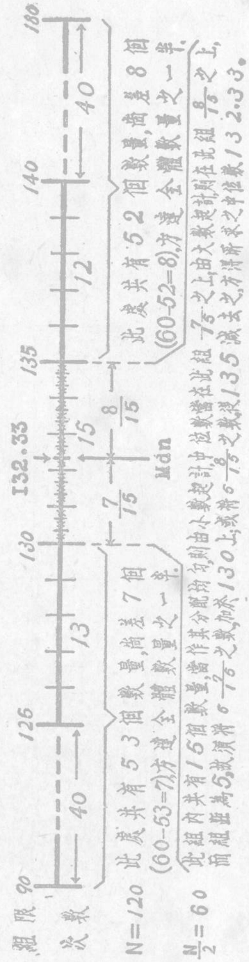
表56．120名新生體重之分配

組號 (1)	體　重 (2)	人數(次數) (3)
1	90—95	1
2	95—100	2
3	100—105	4
4	105—110	6
5	110—115	7
6	115—120	9
7	120—125	11
8	125—130	13
9	130—135	15
10	135—140	12
11	140—145	10
12	145—150	8
13	150—155	7
14	155—160	5
15	160—165	4
16	165—170	3
17	170—175	2
18	175—180	1
總　計		120

根據上述理由，學者遂造成核算中位數値之公式有二：一爲由小數量計起者，一爲由大數量計起者，玆幷將之列下，及以表56所載之材料爲例，應用公式，重行演算如表57：

圖86．圖示中位數之核算

（據表56之材料）



$$Mdn = L + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} \times i \cdots\cdots(13)$$

$$或 Mdn = U - \frac{\frac{N}{2} - F'}{f} \times i \cdots\cdots(13a)$$

L(Lower limit of modal class)

＝含有中位數組之下限

F＝L以下各組次數之和

f＝含有中位數組之次數

i＝距組

U(Upper limit of modal class)

＝含有中位數組之上限

F'＝U以上各組次數之和

上列二式，(13)式係由小數量計起，(13a)式則由大數量計起，惟其結果彼此均同．應用時任擇一式已足，無須兩者幷用也．

表57. 中位數之核算法

組限	次數	累積次數F
90—95	1	1
95—100	2	3
100—105	4	7
105—110	6	13
110—115	7	20
115—120	9	29
120—125	11	40
125—130	13	53
130—135	15	68
135—140	12	80
140—145	10	90
145—150	8	98
150—155	7	105
155—160	5	110
160—165	4	114
165—170	3	117
170—175	2	119
175—180	1	120
總數	120	——

$N=120,\ \frac{120}{2}=60$

含有中位數組應爲

130—135

$\therefore L=130 \quad F=53$

$f=15 \quad i=5$

依(13)式代入

$$Mdn=130+\frac{\frac{120}{2}-53}{15}\times 5$$

$$130+\frac{60-53}{15}\times 5$$

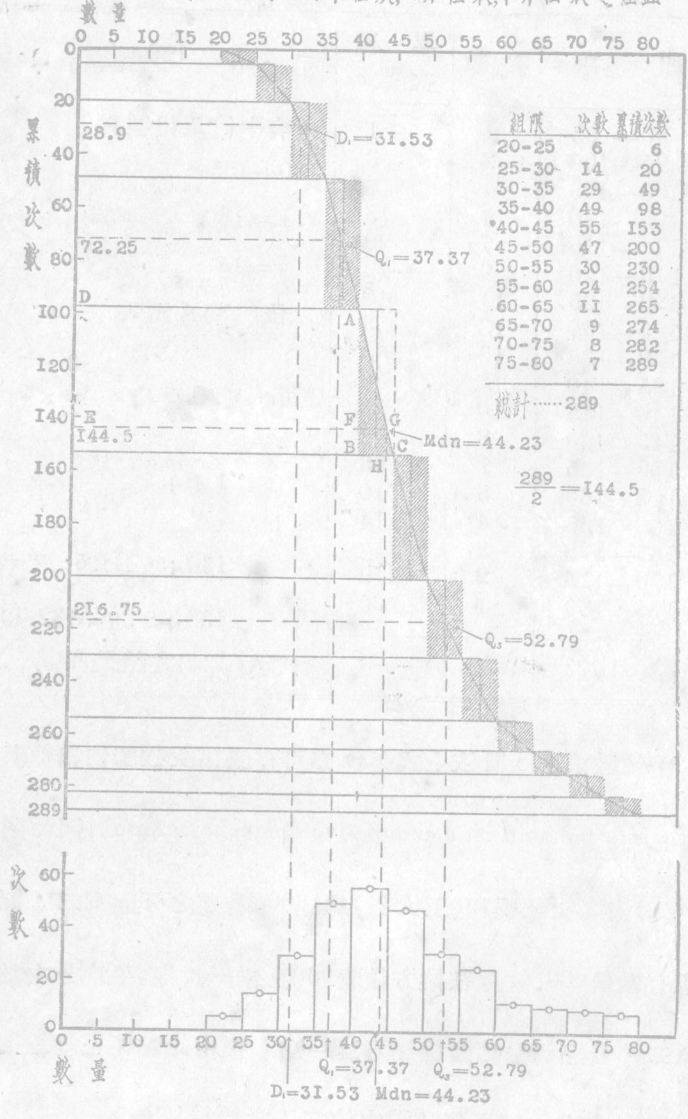
$$130+\frac{7}{15}\times 5$$

$$130+2.33=132.33$$

代入(13a)式結果亦同

中位數求法，除依上式外，亦可在累積次數圖內核算其數值(By interpolatoin on a cumulative frequency graph).例如圖71(122頁)內之次數總和(工人數)爲1800,若將之分而爲二，則每邊應有數量900.故可在縱方量表900上作一垂線,平均分次數總和爲二等分而與累積曲線相遇於一點；復由此點作一垂線，垂直於橫量表上，即可視察得中位之工資約爲4.94.

圖87. 累積次數圖內中位數,四分位數,十分位數之位置



組限	次數	累積次數
20-25	6	6
25-30	I4	20
30-35	29	49
35-40	49	98
40-45	55	I53
45-50	47	200
50-55	30	230
55-60	24	254
60-65	II	265
65-70	9	274
70-75	8	282
75-80	7	289

總計……289

在圖 87 內，其次數總和爲289，若從竪量表144.5上（即E點）作一垂線平分之爲二，則與累積曲線相遇於 G 點，故卽得中位數之值爲 EG。而EG＝EF＋FG，又EF＝DA，卽 40—45 組距之下限，所以 EF ＝ 40。然則 FG 之值爲何？依幾何學定理，△ABC與△AFG爲相似三角形，故AB：BC＝AF：FG。今AB爲此組數量數目55，BC爲組距5，AF爲$\frac{289}{2}$減去 A 以下各組次數和所餘之數，故爲46.5（卽144.5－98＝46.5）。將之代入上式，則$FG=\frac{5\times 46.5}{55}=4.23$，而中位數EG＝EF＋FG，故＝40＋4.23＝44.23，卽爲所求之中位數。此法與用公式（13）所求得者同一理由。至以下所述之四分位數，十分位數，及百分位數等，亦可仿此法以求其價值。

四分位數(Quartile)　中位數分全體數量爲二部，若再將此二部而各求其中數，則分全體數量爲四部；此二部之中數，曰四分位數，統計學上符號爲Q_1（第一四分位數Lower quartile）與Q_3（第三四分位數Upper quartile）。計算四分位數之方法，與求中位數之理相同。所差異者，一則爲$\frac{N}{2}$項；一則爲$\frac{N}{4}$項耳，其式如下：

$$Q_1=L+\frac{\frac{N}{4}-F}{f}\times i \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$Q_3=U-\frac{\frac{N}{4}-F'}{f}\times i \cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$Q_3 = U - \frac{\frac{3}{4}N - F'}{f} \times i \cdots\cdots (14a)$$

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3}{4}N - F}{f} \times i \cdots\cdots (14a)$$

L＝含有Q_1或Q_3組距之下限

U＝含有Q_1或Q_3組距之上限

F＝L以下次數之和

F＝U以上次數之和

f＝含有Q_1或Q_3組距之次數

四分位數之效用，與中位數相仿，求得第一四分位數與第三四分位數後，即可知四份一，四分三之數量所佔位置矣。

十分位數(Deciles)**及百分位數**(Percentiles)　十分位數與百分位，亦屬位置測量之一種。其意卽將全體數分爲十分或百分，以示各數在量表上所佔之位置，而補集中數量不足者也。至計算之法，則與求四分位數之法相同，玆將公式列下，並示其算法如表55：

十分位數之公式

$$D_d = L + \frac{\frac{d}{01}N - F}{f} \times i \cdots\cdots (16)$$

D_d＝十分位數之符號

d＝所求之第幾十分位數(如求第一，十分位數，則爲1，第二，則爲2，餘類推)

L＝含有d組距之下限

F＝L以下次數之和

f＝含有d組距之次數

表58. 四分位數，十分位數，百分位數之求法

組限 (1)	次數 (2)	累積次數 F (3)	累積次數 F' (4)
20—25	6	6	289
25—30	14	20	283
30—35	29	49	269
35—40	49	98	240
40—45	55	153	191
45—50	47	200	136
50—55	30	230	89
55—60	24	254	59
60—65	11	265	35
65—70	9	274	24
70—75	8	282	15
75—80	7	289	7
總數	289	——	——

$N=289 \quad \frac{286}{4}=72.25$

含有Q_1組距爲35—40

含有Q_3組距爲50—55

依(14)及(15)式代入

$$Q_1=35+\frac{\frac{289}{4}-49}{49}\times 5$$

$$35+\frac{72.25-49}{49}\times 5$$

$$35+2.37=37.37$$

$$Q_3=55-\frac{\frac{289}{4}-59}{30}\times 5$$

$$55-\frac{72.25-59}{30}\times 5$$

$$55-2.21=52.79$$

代入(14a)及(15a)式，其結果亦同。

含有D_1之組距爲30—35　　依(16)式代入

$$D_1=30+\frac{\frac{1}{10}\times 289-35}{29}\times 5$$

$$30+\frac{28.9-20}{29}\times 5 \qquad 30+\frac{8.9}{29}\times 5$$

$$30+1.53=31.53$$

含有P_1之組距爲20—25　　依(17)式代入

$$P_1=20+\frac{\frac{1}{100}289-0}{6}\times 5$$

$$=20+\frac{2.89}{6}\times 5$$

$$=20+2.41=22.41$$

百分位數之公式

$$P_p=L+\frac{\frac{p}{100}N-F}{f}\times i\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

P_p=百分位數

p=所求之第幾百分位數

L =含有p組距之下限

F =L以下次數之和

f =含有p組距之次數

上列公式(17)，除為求百分位數用外，其他如中位數，四分位數，十分位數，均可以此式之。其法祗將 p 之値變更卽得。如求中位數，則 p 爲50；求第一四分位數，則 p 爲25；求第三四分位數，則p爲75；求第一，第二，……十分位數，則p爲10,20,……等等。

第五節 衆數(Mode)

衆數又稱密集數，乃全體數量中發見最多之一數。如有一羣數爲1,2,3,3,4,4,4,4,5,6,6,7,則4發見最多，卽4爲該羣數量之衆數。故衆數所代表者，實事實中最通常之情形，普通一般人用作事物之代表者，多此數也。

衆數之意義，已如上述。然衆數復可依其精粗分爲下列二

種：

1.視察衆數或粗畧衆數(Inspection mode or Crude mode)

斯種衆數，顯而易見，求得最易。如上列之12個數量中，則4爲衆數。然此種衆數，必須在對稱次數分配上，方有作代表數之價值。因對稱次數分配，其算術平均數，中位數，衆數三者，皆相重於一點（參閱圖66,A），若次數分配偏斜，則此種衆數頗不可靠。且此種衆數常隨組距大小，及數量增加情形而變更其價值，非若理論衆數之精確，故祇可作爲初步之觀察，不宜視爲精確之價值。

2.理論衆數或眞正衆數(Theorectical mode or True mode)

理論衆數，則爲精確之衆數，但其計算，遠不如視察衆數之易求。蓋實際上之測量，所得之數不能甚多，所用測量方法不能甚精，而求理論衆數，則需要大多數事件與精密之測量方法。因此由實際測量所得之結果，難與理論現象符合，故欲求理論衆數，殊非易易。

精確之理論衆數，旣不易求，而粗畧之視察衆數又多不可靠，於是由統計學者之經驗，得有下列之方法，可以求出近似衆數(Approximate mode)以爲代表。

（1）次數表核算(By interpolation in a frequency table)　在次數分配中，若各數量係一單位而未經歸類爲組距時，如欲求其衆數，則以次數最多之數量爲其價值；若各數量已歸類爲若干組距時，則以次數最多之組中值爲其價值(如表56，則130—135爲衆數組，132.5卽爲衆數)，然此僅就視察法視察而得之衆數，其值殊不可靠。且此種衆數，又常隨組距之大小而變更其值，前已言之(參閱58頁表20)。故在斯種情形之下，則宜用下列公式求其價值，而糾正視察衆數之錯誤。

$$Mo = L + \frac{f_2 \times i}{f_1 + f_2} \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

或$$Mo = U - \frac{f_1 \times i}{f_1 + f_2} \cdots\cdots\cdots\cdots (18a)$$

Mo(Mode)＝衆數

L＝含有衆數組之下限

f_1＝衆數組較低一組(或數組)之次數

f_2＝衆數組較高一組(或數組)之次數

U＝含有衆數組之上限

上列二式，可任擇一式應用，其結果均同。如次數爲不規則分配時，則可用衆數組每邊之兩組，或兩組以上之次數均衡之，甚至將每邊所有之次數加上均衡，以求其價值亦無不可。設例如下：

表 59. 衆數之求法

（次數表核算法）

組限	次數
50—52	3
52—54	6
54—56	9
56—58	13
58—60	24
60—62	$\boxed{45}$
62—64	36
64—66	18
66—68	10
68—70	4
70—72	2
總數	170

衆數組＝60—62

$\therefore$　$L=60$　　$U=62$

$f_1=24$　　$f_2=36$

$i=2$

依式代入

$$Mo=60+\frac{36\times2}{24+36}$$

$$60+\frac{72}{60}$$

$$60+1.2=61.2$$

或　$$Mo=62-\frac{24\times2}{24+36}$$

$$62-\frac{48}{60}$$

$$62-.8=61.2$$

若將衆數組每邊兩組之次數加上均衡，則得

$$Mo=60+\frac{(36+18)}{(24+13)+(36+18)}$$

$$60+\frac{54\times2}{37+54}\qquad 60+\frac{108}{91}$$

$$60+1.19=61.19$$

上法之計算，乃根據衆數在次數最多之一組內以求之，若上下兩組之次數相等，則衆數居於衆數組之中央。但事實之分配，類此者絕少，故學者遂以衆數組鄰近兩組之次數，用爲衆數組上半及下半之權數(Weighting)而計算。此種計得之衆數，非該組之中值，惟在中值之上或下，則視乎上組或下組之次數多少而定。若上組之次數多，則衆數偏於該組之上方（上例卽衆數組內有$\frac{36}{60}$數量之力量，使衆數位置在該組之上，故將其結果加於下限上）；下組之次數多，則衆數偏於該組之下方（上例卽衆數組內有$\frac{24}{60}$數量之力量，使衆數位置在該組之下，故將其結果由上限減去之）。連續事實之數量，其分配接近常態者，用此法以求其衆數，頗爲適當。

（2）組合法(By grouping) 衆數之位置，常隨組距大小而變更，故亦可將組距分別歸併以求其位置，而補視察法不足，斯謂之組合法。又如各組次數中，或無一顯著衆數組者，亦可以此法決定之。設例及說明如下：

表60. 組合法求衆數

組號	組限	次數	組合								
			以10爲組距		以15爲組距			以20爲組距			
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
1	10-15	4	7	4	16	4	4	23	4	4	4
2	15-20	3		12		19	3		33	3	3
3	20-25	9	16				30			47	9
4	25-30	7		21	38						72
5	30-35	14	31			65		97			
6	35-40	17		51			83		120		
7	40-45	34	66		103					131	
8	45-50	32		69		97					109
9	50-55	37	65				77	94			
10	55-60	28		40	57				63		
11	60-65	12	29			35				43	
12	65-70	17		23			31				35
13	70-75	6	14		18			20			
14	75-80	8		12		14			8		
15	80-85	4	6				4		4	4	
16	85-90	2		2	2		2		2	2	2

表60組合行下之計算，先則將二組之次數相加，得(2)行；次又移下一組(即將第一組之次數除去)，仍以二組之次數相加，得(3)行；再則以三組次數，四組次數仿照此法相加，遂得(4)(5)……(10)等行．至斯種組合方法，原不限於四組次數相加；其標準以能使衆數組不因組合再加一組次數而變更其位置爲止．如此分別歸併之後，即可視察每組合之最大次數中，是否將某一組數包含在內，如均將之包含，則以該組爲衆數組．此種視察方法，可將表60之結果，列成一補助表(如表61)，則更顯明．然有時歷次相加結果之最大次數中，或不一定將某組數包含在內，但若比之其他各組仍佔多數者，則亦以該組爲衆數組．

表61. 表60之補助表(Auxiliary table)

組合 ＼ 乘數組 ＼ 組限	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60	60—65
1					×		
2			×	×			
3				×	×		
4			×	×	×		
5				×	×	×	
6		×	×	×			
7	×	×	×	×			
8		×	×	×	×		
9			×	×	×	×	
10				×	×	×	×
合計	1	3	6	9	7	3	1

觀表61，可知每組合之最大次數中：除原來組距外(卽第一組合)，均包含有45—50一組數在內。共有9組合以之爲乘數組，其他各組均無如此之多，故決定該組爲乘數組。至乘數之近似值，或卽爲此組之中值47.5，或與其接近(參閱圖73,74及75)。

(3)繼動均數法(By moving average) 用此法求乘數，卽將事實結果，以若干組之次數繼續平均而決定其位置。斯種理由，與前述次數多邊圖之圓滑法一致(參閱126頁)。例如以表60所載之數量，用三組次數求其繼動均數，則得乘數組爲45－50(卽圖73所示)，其結果與用組合法求得者相同。

表62.　繼動均數法求衆數

組　限	次數	每兩組次數之繼動均數
		2.0*
10—15	4	3.5
15—20	3	6.0
20—25	9	8.0
25—30	7	10.5
30—35	14	15.5
35—40	17	25.5
40—45	34	33.0
45—50	32	$\boxed{34.5}$
50—55	37	32.5
55—60	28	20.0
60—65	12	14.5
65—70	17	11.5
70—75	6	7.0
75—80	8	6.0
80—85	4	3.0
85—90	2	1.0*
總　數	234	234.0

*2.0及1.0，係將第一組次數4，與最後一組次數2以2除之而得。此種計算，遂使繼動均數之和與原來次數之和適合。

表62所示之例，則爲每兩組次數之繼動均數，所得衆數組爲45—55。其結果與前用三組次數之繼動均數求出之衆數組，未盡符合。但吾人試細察事實內容，就圖74之(B)線而論，則衆數雖在45—50組距之中，惟其價值，當仍似接近於50，故卽將衆數組擴大爲45—55，亦無不可也。

(4)應用披氏公式(By Pearson's formula)　斯法爲英人披爾遜經驗所得，應用之可以求出近似衆數，且與理論衆數相差甚微，惟祗能適用於偏斜次數分配上。蓋在不甚偏斜之次數分配中，據披氏經驗所得，算術平均數之離中位數，常等於衆數

與算術平均數距離三分之一(參閱圖67)。故氏遂利用此三者之關係以求衆數。玆以表63及圖88爲例，分別示其計算所得：

$$Mo = M - 3(M - Mdn) \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

表63. 某校274名學生之體高分配

(應用披氏公式求衆數)

體高(吋)	人數
44—	2
45—	5
46—	12
47—	22
48—	31
49—	36
50—	34
51—	35
52—	27
53—	22
54—	11
55—	10
56—	9
57—	8
58—	5
59—	4
60—61	1
總 計	274

$M = 51.22$

$Mdn = 50.85$

依(19)式代入

$$Mo = 51.22 - 3(51.22 - 50.85)$$

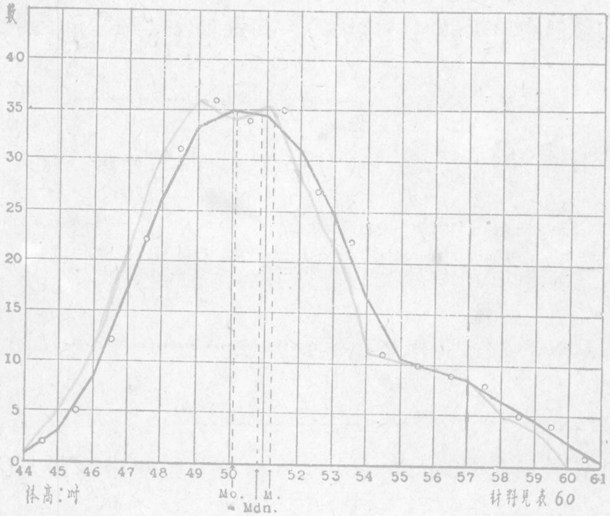
$$= 51.22 - 3(.37)$$

$$= 51.22 - 1.11$$

$$= 50.11$$

圖88. 某校274名學生之體高分配

(由每兩組次數之繼動均數繪成)



衆數之計算，在次數數列中(即前示各例)，則根據次數最大之數量以決定其位置。然在時間數列或空間數列(Gecgraphic series) 中求衆數時，則其位置非在最大數量之內，而應以各數量之相同最多者爲其價值 (此即衆數之意義，惟初學者每易誤會，如表54事實，則每月衆數收入非5,778千元，而約爲4,000千元) 。此點於應用時不可不加以注意。又如在分立事實中，由上列各法求得之衆數有小數時，則宜以其最近之整數爲代表。此種方法，不獨可與實際情形相適合，并能免除一切誤解也。

第六節　幾何平均數(Geometric Mean)

斯種平均數，乃若干項數量相乘之積之若干次方根。計算

手續，頗爲繁雜，常利用對數（Logarithm）以求之，故亦稱對數平均數(Logarithmic average)，其式如下：

$$G.M.=\sqrt[N]{X_1 \times X_2 \cdots\cdots \times X_N} \cdots\cdots (20)$$

G.M.(Geometric Mean)＝幾何平均數

$X_1, X_2, \cdots\cdots X_N$＝數量

上式極難應用，故改以對數計算，而成下式：

$$\log \text{ of } G.M.=\frac{\sum \log x}{N} \cdots\cdots (21)$$

log fo G.M.＝幾何平均數之對數

設各數量爲8，12，25，40，112，如求其幾何平均數，依（21）式代入，則得

$$\log \text{ of } G.M=\frac{\log 8+\log 12+\log 25+\log 40+\log 112}{5}$$

$$=\frac{0.9031+1.0792+1.3979+1.6621+2.0492}{5}$$

$$=\frac{7.0345}{5}=1.4063$$

$$1.4068=\log 25.5$$

$$\therefore G.M.=25.5$$

若各數量不祇一單位而分爲若干組時，如求其幾何平均，則須覓組距中值之對數而以次數乘之，方可計算。如下表所示之例是也：

表64. 幾何平均之計算

（數量依組距而分者）

組　限 (1)	中　值 (2)	次數 (3)	中值之對數 (4)	次數×對數 (5)
80— 85	82.5	1	1.9165	1.9165
85— 90	87.5	2	1.9420	3.8840
90— 95	92.5	5	1.9661	9.8305
95—100	97.5	9	1.9890	17.9010
100—105	102.5	8	2.0107	16.0856
105—110	107.5	4	2.0315	8.1260
110—115	112.5	2	2.0511	4.1022
總數(N)……………31			Σlogx…………61.8458	

$$\log \text{ of } G.M. = \frac{61.8458}{31} = 1.9950$$

$$1.9950 = \log 98.85 \qquad \therefore G.M. = 98.85$$

斯種平均數，對於比例相等之事實，各予以同等效力而無畸重畸輕。故物價指數之計算，此種平均，當較其他方法爲佳（參閱第十三章指數）。他如人口統計中，已知第一期人口數與第二期人口數，而欲推求其距離 N年之中間時期人口數，亦可以此種平均法求得之。

例如某城民國十年之人口P_0=52,400

,, 二十年 ,, P_1=61,800

則其中間時期(民國十五年)之人口

$$=\sqrt{52,400\times 61,800}=56,960$$

上列為推求中間時期之人口數，若欲並求其他各年之人口數，則須先照下式算出其平均增加率(r)方可。

$$r=\sqrt[N]{\frac{P_1}{P_0}}-1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

依前例代入得

$$r=\sqrt[10]{\frac{61,800}{52,400}}-1=1.017-1=.017 \quad 或1.7\%$$

平均增加率求得後，即可依下列(23)式推求兩期間中任何一時期之人口數。此種方法，與算術中繁利息之理相同。蓋人口增加如屬自然增加者，則不能祇以算術法求其平均增加數；因人口漸增，即合於結婚年齡之人數漸多，而結婚數及生產亦漸增加，遂成幾何級數形式之增進，其理當與複利之理相同也。

兩期間中任何一年之人口 $=P_0(1+r)^{N-1}\cdots\cdots(23)$

第七節 倒數平均數(Harmonic Mean)

倒數平均數，又稱調和平均數，乃各數量倒數算術平均數之倒數也，其式如下：

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1}{N}\Sigma\frac{1}{x}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

H.M.(Harmonic Mean)=倒數平均數

凡求速率之平均數，非用倒數平均數不可，此點即倒數平

均數之特殊效用。例如有一人步行三里，當其行第一里時，其速率爲每小時二里；行第二里時，其速率爲每小時四里；行第三里時，其速率爲每小時六里，則此人平均每小時步行若干里？此題答案，如以算術平均計之一則得 4 $\left(\frac{2+4+6}{3}=4\right)$，是卽每小時平均步行四里。其實非也，蓋此人行第一里時，須一小時 $\frac{1}{2}$（30分，卽 2 之倒數）；行第二里時，須一小時 $\frac{1}{4}$（15分）；行第三里時，須不小時 $\frac{1}{6}$（10分），總共須時55分。如每小時平均能行 4 里，則此人步行三里，祗一小時之 $\frac{3}{4}$（45分）。故其結果，當以倒數平均求出之 3.27 ，方爲適合。其算法如下：

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{3}\times\frac{11}{12}}=\frac{1}{\frac{11}{36}}$$

$$=1\times\frac{36}{11}=3.27$$

此外經濟統計中，物價之以每元若干計算者——卽每貨幣單位不變，而其值變更——，求其平均數時，亦應用倒數平均計算法。設有甲，乙，丙三物，其價格：甲物每元 4 個，乙物每元 5 個，丙物每元20個，如欲求每元平均購買若干個時，則非算術平均之9.66個，而應爲倒數平均之 6 個。

$$H.M.=\frac{1}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}\right)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{3}\times\frac{10}{20}}=\frac{1}{\frac{10}{60}}$$

$$=1\times\frac{60}{10}=6$$

第八節　各種集中數量之性質及應用

集中數量，不止一種，已如上述。然欲知何種最爲適宜？何種情形之下，應用何種？則不能不先察各集中數量之性質，始有所依據。玆將此問題分別解說如下：

（1）算術平均數

1. 算術平均數之意義，爲一般人所熟悉，且計算亦易，但有時未必見諸事實。
2. 算術平均數，須根據全體數量計算，故能令極端數量發生影響，若重視兩端數量時，此種平均，最爲適用。
3. 僅知數量總值與數量數目，而不知各量之價值，亦可求出算術平均數。至算術平均數與數量數目相乘，亦可得數量總值。
4. 算術平均之計算，雖在未經整理材料中，亦能求出。惟在次數分配圖上，其位置反不易見，必待算出後始知。
5. 若極端數量如有錯誤或遺漏時，則算術平均往往因之而大變其值，或竟不能求出。就此點言，其效用不及中位

數與衆數。

（2） 中 位 數

1.中位數簡明易曉，不須運算便可求得。

2.中位數受極端數量之影響甚微，祇須知其數目，即可求出。故欲免除極端數量不合理影響時，中位數頗爲適用。

3.在累積次數圖上，亦可決定中位數之值。

4.在分立事實上，數量數目爲偶數時，求出之中位數，往往與事理不符。

5.以中位數乘數量數目之和，不能得數量之總值。

6.中位數不能用代數法求之。

（3） 衆 數

1.衆數之意義，簡明易曉，近似衆數，求得亦易。惟理論衆數，則計算頗難。

2.衆數祇就全體數最多之一部求出，無須向全體去求，故在次數分配較偏斜之時，其值往往不甚可靠。

2.衆數不能使極端數量發生效力，故欲免除極端數量影響時，則衆數較之中位數，尤爲適當。

4.衆數所代表者，爲最普通情形，且有時比之各數，更覺適合。

5.若各數量散漫無集中傾向或得數甚少者，則衆數爲不適用。

6.祇知數量總値及數目之和，不能求得乘數。

（4） 幾何平均數

1.幾何平均最大之優點，即在對於各數量之等比變化，均予以同等地位，故計算事物之平均比例，非應用之不可。

2.幾何平均，有減少較大數目影響，而增加較小數目影響之能力。例如有6,36二數，其算術平均爲21（即$\frac{6+36}{2}=21$），而幾何平均則爲14.7（即$\sqrt{6\times36}=14.7$），是即減少36之影響，而增加6之影響。故欲免除向上偏誤之弊，此種平均，頗爲適用。(參閱十三章指數)

3.幾何平均之數理太抽象，計算亦難，使人不易了解。

（5） 倒數平均數

1.倒數平均之特殊效用，即在求時間之平均率（Averaging time rate），與及物價以每元若干計算者之平均數。

2.此種平均，範圍過狹，應用極少，且其結果，亦能利用算術平均求得。

3.此種平均，意義暗晦，常人多不能了解。

第九節 各種集中數量之關係

各種集中數量之性質，已述如上。玆再將此數者彼此間之關係，列舉如下：

1.在完全對稱次數分配中，算術平均數，中位數，衆數三者，合而爲一。(參閱圖66)

2.在不甚偏斜之次數分配中，中位數處於算術平均數與衆數之間。卽算術平均數之離中位數，常等於算術平均數與衆數距離三分之一。(參閱圖67,88)

3.任何二數(二數以上不在此例)之幾何平均數，卽等於其算術平均數與倒數平均數之幾何平均數。設例如下：

設二數爲x，及y

$$\text{則A.M.}=\frac{x+y}{2}$$

$$\text{H.M.}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{x+y}{xy}}$$

$$=\frac{1}{\frac{y+x}{2xy}}=1\div\frac{y+x}{2xy}$$

$$=\frac{2xy}{y+x}$$

$$\text{C.M.}=\sqrt{xy}$$

而　$\text{G.M. of M.A. and H.M.}=\sqrt{\frac{x+y}{2}\times\frac{2xy}{y+x}}=\sqrt{xy}$

$$\therefore \text{M.G.}=\sqrt{\text{A.M.}\cdot\text{HM}}$$

4.任何數量之算術平均數，必大於其幾何平均數，而幾何平均數，又必大於其倒數平均數。但有一例外，卽所有

數量各各相等之時，則此三者亦皆相等。故三者之關係可列如下：

$$A.M. > G.M. > H.M$$

第十三章 指數 (Index Number)

第一節 物價指數之意義及效用

指數(Index Number)，乃變動比率之平均數，亦即測定繁雜事實各時期增減變動之一簡單數目。此種測量，必先有一時期標準以爲比較方可。例如下表所列之物價，若以民國廿四年一月爲標準，則可照前述變動比率之求法（參閱146頁），先行算出二月對一月之增減百分數，是稱爲比價(Price relative)，再將此項比價平均之，所得即爲指數。故下表所列廿四年一月指數爲100.0.，二月之指數則爲101.0，亦即表明二月物價較一月平均增高百分之一也。

表65. 表明指數之算法

物品	單位	價格元計		比價	
		廿四年一月	廿四年二月	一月	二月
米	担	8.25	7.80	100.0	94.5
麵粉	包	4.20	4.82	100.0	102.9
棉花	担	63.82	67.44	100.0	105.7
指數……				100.0	101.0

據上所述，則可知物價指數(Price Index Numder)，實爲「各種貨物比價之平均數」，亦即表示物價經過一定時間平均百分率之變動。惟指數之應用，原不限於物價，舉凡一切現象，歷史

悠久者均可製成指數，以覘其盈虛消長。例如欲測量生活費之高下，則有生活費指數；測量工資之升降，則有工資指數；測量對外貿易之消長，則有國際貿易指數，以及外滙指數，證券指數，生產指數，………………等等。不過就歷史上言之，指數之應用，實以物價為首，且亦較重要，故本章祇以此為說明。言其效用，當有如下所列：

1.明白物價升降之緩急。

2.推算貨幣購買力之消長。

3.證明商情之循環。

4.可為解決勞資爭論之參考。

5.可據以訂定公定價格限制物價之暴漲。

第二節 物價指數編製之程序

編製物價指數，其中應行論述之問題甚多，惟較要者有下列三點：

(1)物價及物類之選擇　編製物價指數，首應決定者，當為何種物價。蓋物價有多種，如批發價，零售價，出入口貨價等，編製時應用何種？自不能不先為審定，然後進行方有依據。其次所當注意者，則為代表物類之選擇，例如編製批發物價指數，吾人自不能將所有貨物之批發價格全數調查而編製之，必當選擇其中重要者若干以為全體代表。現時各國及我國各都會之物價指數，所用物類之多少，至不齊一，有多至數百種者(如美國勞工統計局之指數包含物類五百五十種)，有僅得數

種者(如加拿大諾法斯科細亞銀行之指數，包含物類祇得八種)•然無論多少，就普通目的言之，則所用物類，當以能代表一般需求及生活上必需之物品爲佳，故消費物最普遍之物品，均宜包括也•

(2)基期之採用　基期(Base Period)，乃比較之標準•在編製物價指數時，所用之基期有二種：一曰固定基期，一曰變動基期•前者係以一定時期之物價爲基價(基價常爲100)，而計算各時期之比價，所得指數，稱之曰定基指數(Fixed Base Index)(參閱表67)；後者則以上一期之物價爲基價，而計算下一期之比價，所得指數稱之曰連環(或環比)指數(Link Relative Index)(參閱表69)•固定基期之採用，以一日之物價，或一月一年之平均價，甚至數年之平均價爲標準均無不可•惟就理論上言之，基期之採用，當以物價平穩而經濟狀況無急激變動時爲佳•故以數年之平均價爲基價，似較以一年或一時者稍勝，因物價變態之漲落常不能持久也•

前時各國所有之物價指數，多以1913年爲基期，以便與歐戰前之物價比較，我國上海之躉售物價指數及廣州批發物價指數，初編時亦用該年爲基期•但基期之採用，固當在物價平穩時，且亦須與計算時期相差不遠，1913距今已多年，按諸基期十年一易之說，似應改變•故近日各國之物價指數，有議改用1926年(即民國十五年)爲基期之說，美國勞工統計局之批發物價指數，且已實行•我國上海及廣州之批發物價指數，現亦均

改用該年爲基期矣。

(3)平均方法之選擇　物價指數既爲各種貨物比價之平均數，但平均數(廣義解釋卽集中數量)之種類，依前章所述，則有算術平均數，中位數，衆數，幾何平均數，倒數平均數五種。然應用時究以何種最爲適宜？此亦編製指數中之一重要問題。按美儒斐雪(Irving Fisher)教授分析指數之編製，謂基本之平均方法，除上列五種外，尙有物價綜合法一種。將於下節分別論述之。

以上爲編製物價指數之重要問題。此外如指數目的之規定，物價之搜集，物類之增減，編製之時期(如每週編一次或月編一次或年編一次等)，刋布之方式等，亦應加以注意，不宜忽視。惟此等問題，當易解決，究不若前列三者之重要也。

物價指數編製之程序，固如上述。卽其他指數之編製，亦大體相似，學者不難觸類隅反。蓋指數平均之公式，具有普遍性，於物價指數所得之論斷，推之其他指數，亦莫不皆然也。

第三節　平均之方法

指數平均之方法，前述共有六種，茲特以表66所列之物價爲例，分別說明此六種算法如下：(參閱表67)

(1)算術平均法　此種平均方法，與前所述者同。以物類總數除比價總和卽得。其式如下：

$$A = \frac{\sum \frac{P_1}{P_0}}{N} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

A ＝算術平均指數　　$\frac{P_1}{P_0}$＝比價$\left(\begin{array}{l}P_0\text{＝基期物價}\\P_1\text{＝計算期物價}\end{array}\right)$

N ＝物品總數

表66.廣州市五種物品之批發價格

民二〇——民二三

物品	單位	平均價格 單位：元			
		二十年	廿一年	廿二年	廿三年
金風雪米	担	9.67	9.01	8.18	6.72
金黃豆	担	8.61	8.79	9.28	6.79
兵船麵粉	包	4.04	4.08	3.76	3.65
寧波棉花	担	65.33	62.04	60.73	55.07
十二號花紗	包	291.71	291.43	256.91	228.39

若將上表所列物價，以二十年爲基期，則二十一年之指數可從下列計得：

$$A=\frac{\frac{9.01}{9.67}+\frac{8.79}{8.61}+\frac{4.08}{4.04}+\frac{62.04}{65.33}+\frac{291.43}{291.71}}{5}$$

$$=\frac{93.2+102.1+101.0+95.0+99.9}{5}$$

$$=\frac{491.2}{5}=98.24$$

（2）幾何平均法　此種平均，則爲若干比價相乘之積之若干次方根，其式如下：

$$G=\sqrt[N]{\frac{P_1}{P_0}\times\cdots\cdots\frac{P_1{}^N}{P_0{}^N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

幾何平均，常用對數計算，故上式可改爲(27)，並以前例

明其算法：

$$\log G=\frac{\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)+\cdots\log\left(\frac{P_1{}^N}{P_0{}^N}\right)}{N}$$

$$=\frac{1}{N}\Sigma\log\frac{P_1}{P_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

$$\log G=\frac{\log 93.2+\log 102.1+\log 101.0+\log 95.0+\log 99.9}{5}$$

$$=\frac{1.9694+2.0090+2.0043+1.9777+1.9996}{5}$$

$$=\frac{9.9600}{5}=1.9920 \quad 1.9920=\log 98.16$$

$\therefore G=98.16$ （二十一年指數）

（3）倒數平均法　此種平均，則為若干比價倒數算術平均數之倒數，其式如下，仍以前例表明其算法：

$$H=\frac{N}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$\frac{P_0}{P_1}$＝比價之倒數

$$H=\frac{5}{\frac{9.67}{9.01}+\frac{8.61}{8.79}+\frac{4.04}{4.08}+\frac{65.33}{62.04}+\frac{291.71}{291.43}}$$

$$=\frac{5}{1.073+.980+.990+1.053+1.001}$$

$$=\frac{5}{5.097}=.981 \qquad .981\times 100=98.10$$

（4）中位數法　此種方法，乃以比價之中項為標準。如表66廿一年比價之中位數為99.9，即為該年之指數。

(5)衆數法　衆數法，則以比價最普通者爲指數。但如物品過少時，則此法不甚適用。

(6)物價綜合法　物價綜合法，乃直接以基期物價總和，除計算時期物價總和而得。可省去計算比價之手續，其式如次，茲仍用前例表明之。

$$A_g=\frac{\sum P_1}{\sum P_0}\cdots\cdots(29)$$

$$A_g=\frac{9.01+8.79+4.08+62.04+291.43}{9.67+8.61+4.04+65.33+291.71}$$

$$=\frac{375.35}{379.36}=.9894 \qquad .9894\times100=98.94$$

將表66材料，應用上述各法分別求其指數，則可列成下表：

表67.五種物品批發價之各類指數

(據表66之材料)

物品		比價　基期＝民二〇年			
		二十年	廿一年	廿二年	廿三年
米		100.0	93.2	84.6	69.5
豆		100.0	102.1	107.8	78.9
麵粉		100.0	101.0	93.1	90.3
棉花		100.0	95.0	93.0	84.3
花紗		100.0	99.9	88.1	78.3
指數	平均法	100.0	98.2	93.3	80.3
	幾何法	100.0	98.2	93.0	80.0
	倒數法	100.0	98.1	92.7	79.7
	中數法	100.0	99.9	93.0	78.9
	綜合法	100.0	98.9	89.3	79.2

第四節　基期變換之方法

基期之選用，固不可在物價變態時，亦不宜距今過遠，蓋經過時間愈長，則比價之分配愈散漫，而指數亦不足以代表一般物價之趨勢。故繼續編製之指數，常須由較遠之基期轉換至較近之基期，是曰基期變換法。

基期如變換時，本應將指數從新計算，惟此種方法，常不便實行。故可以簡法代之，其法卽將新基期之指數（亦是以舊基期計得者），除各期之原有指數，復乘以100便得。如表66所列之指數，若改以民國廿二年爲基期，則得表68(3)行之新指數：

表68. 基期變換算法

（以算術平均法爲例）

年次 (1)	指數 基期：民二〇 (2)	指數 基期：民二二 (3)
二十年……	100.0	107.2
廿一年……	98.2	105.3
廿二年……	93.3	100.0
廿三年……	80.3	86.4

(3)行指數之算法：

$$二十年=\frac{100.0}{93.3}\times 100$$

$$=107.2(餘仿此)$$

統計學者鑒於定基指數之常須變換基期也，故有主張以連環指數或連鎖指數(Chain index)以代之者。吾人將下表之環比平均，卽得一連環指數，可用以表明各年物價與去年之增減比較。由連環指數可變爲連鎖指數，其算法係將本年之連環指數乘上年之連鎖指數而得（卽各連環指數連乘之積），如表70之(4)行是也。

表69. 五種物品之連環指數
（以算術平均法爲例）

物品	環比 上年＝100			
	二十年	廿一年	廿二年	廿三年
米…………	100.0	93.2	90.8	82.2
豆…………	100.0	102.1	105.0	73.2
麵粉………	100.0	101.0	92.2	97.1
棉花………	100.0	95.0	97.9	90.7
花紗………	100.0	99.9	88.2	88.9
連環指數	100.0	98.2	94.9	86.4

表70. 定基指數連環指數及連鎖指數

年次 (1)	定基指數 (2)	連環指數 (3)	連鎖指數 (4)
二十年	100.0	100.0	100.0
廿一年	98.2	98.2	98.2
廿二年	93.3	94.9	93.2
廿三年	80.3	86.4	80.5

(4)行連鎖指數之算法：

$$廿一年=\frac{98.2\times100.0}{100.0}=98.2$$

$$廿二年=\frac{94.9\times98.2}{100.0}=93.2$$

$$廿三年=\frac{86.4\times93.2}{100.0}=80.5$$

連鎖指數與定基指數所得之值常不相同，但單一物品之鎖比，則與定基比價相同．其差異與時俱增，歷時愈久，差異愈大；且意義又不及定基指數之簡明，故實無甚便利之處，似宜少用。

第五節　物價指數之權數

物價指數之編製，除上述各點應行討論外，尚有一重要之

問題，是爲權數(Weighting)問題。蓋各種物品對於人生之重要各不相同，消費多少自異。例如米麥與茶烟相較，其重要程度不同，夫人皆知。物品種類至爲繁雜，而其重要性之大小亦自不齊。編製指數，若捨此不談，則所得指數，祗能稱之曰簡單指數(Simple Index Number)，於理論上究未盡洽。前述之例，即是此類。反之，若編製指數須按照物品重要性之大小，而增減高下其變化之影響，則對於各種物品，均應給與適量之比重方可。是種指數，卽所謂加權指數(Weighted index number)，當較簡單指數爲合理也。

加權指數雖較簡單指數爲公平，然權數選擇失當，則其結果反不及簡單指數。故亦有主張不用權數者，其理由則以權數之資料不易搜集，且實際計算，權數影響於指數之結果甚微，遠不如物價之甚。若此則權數之選擇，如僅由主觀任意決定而乏客觀標準時，則不如不用之爲愈也。

關於權數之訂定，通常有二法：一曰總值權數法，一曰物量權數法。所謂總值權數者，以貨物銷售之值爲權數也(卽物價p×物量q=物值v)。其法復可配合爲四種：

1.以基期之價與基期之量之乘積(基期之值)爲權數。p_0q_0

2.以基期之價與計算期之量之乘積爲權數。　p_0q_1

3.以計算期之價與基期之量之乘積爲權數。　p_1q_0

4.以計算期之價與計算期之量之乘積(卽計算期之值)爲權數。　p_1q_1

茲將以上四法配入前述各種平均方法中，得如下各式：

(1)加權算術平均法

$$A_1=\frac{\Sigma p_0q_0\frac{P_1}{P_0}}{\Sigma p_0q_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$A_2=\frac{\Sigma p_0q_1\frac{P_1}{p_0}}{\Sigma p_0q_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

$$A_3=\frac{\Sigma p_1q_0\frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_1q_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

$$A_4=\frac{\Sigma p_1q\frac{p_1}{p_0}}{\Sigma p_1q_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

(2)加權幾何平均法

$$G_1=\sqrt[\Sigma p_0q_0]{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{p_0q_0}\cdots\left(\frac{p_1{}^N}{p_0{}^N}\right)^{p^N{}_0q_0{}^N}}\cdots\cdots(34)$$

$$\log G=\frac{\Sigma\left(p_0q_0\log\frac{P_1}{P_0}\right)}{\Sigma(p_0q_0)}\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

若用對數計算，則公式(34)可改爲(35)，其餘G_2，G_3，G_4各式，均可參照前法配合得之。總值權數之四種方法，對於算術平均數，幾何平均數，倒數平均數，中位數，衆數五法，均可適用。（以上祇列算術平均與幾何平均之加權方法，其餘從畧）惟物價綜合法之權數，則應以物量爲標準。所謂物量權數者，即以物品之銷售量爲權數也。其式如下：

$$A_g=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

（與30式相同）

$$\text{或}\quad A_g=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0p_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

（與31式相同）

第六節　指數之試驗

物價指數之種類，若從平均方法區分之，則有六種。然應用時當以何種最為適宜？此則不能不有賴於各法之試驗。關於指數公式試驗之方法有二：一曰時間還元試驗（Time reversal test），一曰因子還元試驗（Factor reversal test），玆分述如次：

（1）時間還元試驗　吾人若編製兩期之指數，則兩期之中，可任擇一期為基期。以前期為基期而編之指數，名曰前進指數；以後期為基期而編之指數，名曰後退指數。時間還元試驗者，即前進指數與後退指數相乘之積是否為一之試驗也。蓋此二種指數，其一應為他種之倒數，故兩者相乘，自當為一。若乘積過大或過小時，則該指數即有偏誤之弊，玆以前例所得各類指數分別試驗之：

表70. 五種物品之各類前進與後退指數

指數類別	前進指數		退後指數	
	二十年	廿一年	二十年	廿一年
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
算術平均	100.0	98.24	101.94	100.0
幾何平均	100.0	98.16	101.87	100.0
倒數平均	100.0	98.10	101.79	100.0
中位數	100.0	99.90	100.10	100.0
綜合法	100.0	98.94	101.07	100.0

將表70之(3)(4)兩行指數分別相乘，則得結果如下：

算術平均　$98.24\times101.94=1.0015$

幾何平均　$98.16\times101.87=1.0000$　*

倒數平均　$98.10\times 101.79=.9986$

中 位 數　$99.90\times 100.10=1.0000$　*

綜 合 法　$98.94\times 101.07=1.0000$　*

從上列結果，可知幾何平均法，中位數法及綜合法三者，均適合於時間還元試驗。惟算術平均法與倒數平均法則否，前者有向上之偏誤；後者有向下之偏誤，故不宜採用編製指數。至中位數法與綜合法雖覺適合，但仍有缺點，蓋中位數時而任性時而缺乏敏銳性（卽常不受數量變動之影響，此種缺點，乘數法更甚）；綜合法則常受單位大小之影響，且又不適合於指數正確之定義(但加權綜合法則否)，故亦爲不良之方法。是以在各簡單指數中，當以幾何平均法之指數爲最佳也。

(2)因子還元試驗　因子還元試驗，則適用於加權指數。其法係將代表物價之P與代表物量之q互換而求物量指數，再將此指數與物價指數相乘而視其積是否卽爲物值指數（因：價×量＝值。同理，價之指數×量之指數＝值之指數）。若結果相符：則可謂之適合此種試驗，否則必有一種偏誤。故因子還元試驗者，卽物價指數與物量指數相乘之積是否與兩期貿易值之比率相等(卽值之指數)之試驗也。設物品祗有一種，則此關係，當甚顯明，因其價之指數爲 $\frac{P_1}{P_0}$，量之指數爲 $\frac{q_1}{q_0}$，而其乘積 $\left(\frac{p_1}{p_0}\times\frac{q_1}{q_0}=\frac{p_1q_1}{p_0q_0}\right)$ 卽值之指數也。但若物品有多種時，則上列各法所得之指數，俱不能適合此試驗。美儒斐雪曾將指

數之所有公式以爲試驗，其結果謂有十三種公式可以符合時間還元試驗及因子還元試驗，並以計算之簡便與精確，就中選擇一式以爲代表，是名標準(或理想)公式，如下列者是：

$$I=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

上列公式，實卽加權綜合法(36)(37)二式之幾何平均數。因每對公式，若其偏誤在相反之方向時，如以幾何平均法平均之，則可免除一切偏誤也。

第七節　我國現有之物價指數

(1)　批發物價指數

批發物價指數(Index numbers of wholesale price)，或稱躉售物價指數，卽以物品之批發價(卽發行價)而編製之指數也。我國現在繼續編製者，有下列各地之指數：

1.上海躉售物價指數　此項指數，原由前財政部註滬調查貨價處於民國八年九月開始編製，以民國二年(1913)二月爲基期，應用簡單算術平均法計算，包含物品計有八類一百四十七種。迨後調查貨價處歸併國定稅則委員會，該項指數，遂由該會續編，及至民國二十年六月並重行修正，改以民國十五年(1926)爲基期，採用簡單幾何平均法以計算，物品亦增至八類一百五十五種。

2.廣州批發物價指數　是項指數，由廣東省農工廳於民國十四年七月着手辦理，編製期間，始自民國元年，基期則爲民國二年，初時應用簡單算術平均法，隨改用簡單幾何平均法。

追後農工廳裁撤，該項指數，遂由建設廳續編。現在則歸廣東省調查統計局辦理，基期改用民國十五年(1926)，物品由六類二百零五種減為六類一百八十種。

3.華北躉售物價指數 此項指數，由天津南開大學經濟學院主辦，民國十七年發表結果。編製期間，始自民國二年，以民國十五年為基期，應用簡單幾何平均法，所用物品，共有六類一百種。

4.南京躉售物價指數 此項指數，由實業部（即前時工商部）辦理。編製期間，始自民國十九年，即以該年為基期，應用簡單幾何平均法計算，物品有六類一百零六種。

5.漢口及青島之躉售物價指數 此二項指數，均由實業部主辦，俱以民國十九年基期，即自該年開始編製，應用簡單幾何平均法計算，所包含物品，漢口有五類一百一十一種，青島則有六類一百二十一種。

（2） 零售物價指數

零售物價指數(Index numbers of retail price)，即以物品市場之零賣價而編製之指數也。我國前時雖有南京，北平，廣州等地之零售物價指數，惟現在繼續編製者，祗有廣州零售物價指數及杭州零售物價指數二種：

1.廣州零售物價指數 該項指數，原由廣州市政府辦理，由民國十五年一月始編，至民國二十年四月終輟。現在則由廣東省調查統計局從民國二十三年九月起續編，仍以民國十五年為基期，應用簡單幾何平均法計算，所包含物品共有七類五十三種。

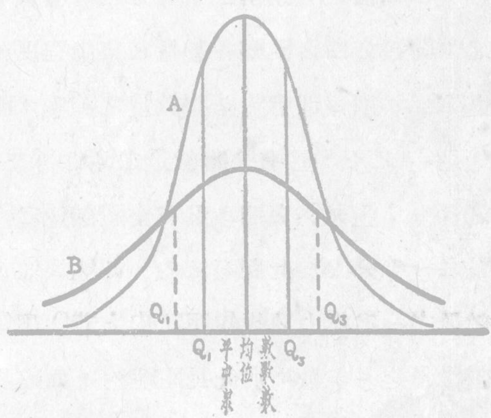
2.杭州零售物價指數　是項指數，現由浙江建設廳工商管理處辦理，材料取給於杭州市商會，從民國二十一年始編，即以該年爲基期，於民國二十四年一月發表結果，應用簡單幾何平均法計算，所用物品共有四類五十一種。

第十四章　差異數量 (Measures of Variability or Dispersion)

第一節　差異數量之意義

差異數量者，乃用以表示一種事實內部各數與中量相差之一種數目，與前章所述之集中數量不同。因集中數量，乃用以代表若干數量集中之性質，但不能明瞭全體數量分配之狀況。本章所討論之差異數量，則表示若干數量離中之程度，而表明其相差之距離。且前者在量表上之地位爲一點（故亦稱位置數量 Point measures）；後者則爲一距離，此亦其不同之點也。

圖89. A,B二量之分配
(集中同分配異)



至事實差量之表示方法，通常所用者，則有下述四種。但有時爲簡便計，亦可利用次數分配圖，或羅倫氏曲線（參閱 135

頁）決定之。吾人試視圖 89，則知A，B二量，其集中數量雖相同，而內容分配情形，則B之差異當較A爲大也。

第二節 全距離(Range)

全距離，爲全體數量中最大數量與最小數量之差，包含所得之數量全體，乃表明差異最簡單之方法，亦爲表明差異最不精確之方法。蓋全距離，乃表示首尾之相差(極量差)，而不能形容內部之分配，又常受極端數量之影響，而大變其性質。且同一距離中，兩種事實之分配，必不能盡同。其一之各數量，或與中量相距較近；而他一之各數量，或散漫於距離中，則集中程度甚少。基此原因，故用全距離爲代表差異之數量，實不適宜，祇間或利用之以表示全體事實之最大量與小量耳。

第三節 四分位差 (Quartile Deviation or Semi-interquartile range)

四分位差，或稱二十五分差，其實亦非眞正差異數量，不過用間接方法以觀察各數量之集中程度。蓋中位數分全體數量爲二部，則每部應佔全體數量之50%，而Q_1與Q_3復各分之爲二，則Q_1之下，當有全體數量之25%；Q_3之上，亦有全體數量之25%；Q_1與Q_3之間，則有全體數量之50%，是卽表明全體數量之一半分配於此距離之內。如Q_1與Q_3之距離短，則表示全體數量之一半集中於此短距離內；若Q_1與Q 之距離長，則表明全體數量之一半散佈於此長距離內，而差異程度大矣(參閱圖89)。利用此四分位數以測度差異程度者，曰四分位差。如事實分配完全對稱時，則$Mdn-Q_1=Q_3-Mdn$.然實際之結果，極難得

對稱分配，則Mdn－Q_1不一定等於Q_3－Mdn,故必須取Q_3－Q_1之折中數，以表明四位分差之程度乃可。其式如下：

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

Q(Quartile Deviation)＝四分位差

茲以表58所載之數量爲例，代入上式求其四分位差，則得結果如下：

$$Q_3=52.79 \qquad Q_1=37.37$$

$$Q=\frac{52.79-37.37}{2} \qquad \frac{15.42}{2}=7.71$$

四分位差，簡明易曉，計算甚易，事實結果，無須用精確數量以代表差異數目時，此法頗適於用。

第四節　平均差(Average Deviation or Mean Deviation)

平均差，乃各數量與中量差數之平均數也。計算之時，各差數之爲正爲負，一概不論，祇將各差數相加，而以次數之和除之卽得。求離中差時，以算術平均數,中位數,或衆數爲根據均無不可。惟據英人優爾(Yule)等謂，由中位數求出之平均差，其值往往較用其他中量求出者爲小（參閱下例。但實際計算時，因方法之關係，間有未能符合）。故亦有主張常用中位數爲中量以求之。其算法可分下列二種：

(1)通常法　數量未歸類時，其式如下：

$$A.D.=\frac{\Sigma D}{N} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

A.D.(Average Deviation)＝平均差

D,＝各數量與中量之差數(卽X－M)

表71．平均差之計算(例1)

(數量未經歸類者)

數量 X	離中差 D (A)以中位數爲中量 Mdn=62	離中差 D (B)以平均數爲中量 M=64	
40	22	×24	24
48	14	16	16
50	12	14	14
60	2	2	4
62	0	0	2
70	8	8	6
80	18	18	16
82	20	20	18
84	22	22	20
N=9	ΣD 118	120	

(A)　$A.D._{MdN}=\frac{118}{9}=13.1$

(B)　$A.D._{M.}=\frac{120}{9}=13.3$

表72．平均之計算(例2)

(據表54之材料)

各月稅收數 (單位：千元)	離中差 D Mdn=3,290
272	3,018
730	2,560
1,210	2,080
1,837	1,453
2,242	1,048
3,003	287
3,578	288
4,030	749
4,126	836
4,776	1,486
5,127	1,837
5,778	2,488
總數.......	18,130

N=12

$A.D._{MdN}=\frac{18,134}{12}=1,511$

此平均差1,511，即可以表示各月稅收與中量稅收之差異程度。

若分組數量中計算平均差時，則須先將各差數與其相當之次數相乘以求差數總和，方可平均。此種理由，與計算較量算術平均之理相同。公式如下，並示其算法如表73：

$$A.D.=\frac{\Sigma fD}{N} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

表73.　平均差之計算

（據某校225名學生之數學成績）

數學分數 G (1)	中值 x (2)	人數 f (3)	(A) 中位數之差 D (4)	人數×差數 fD(3×4) (5)	(B) 平均數之差 D (6)	人數×差數 fD(3×6) (7)
30—35	32.5	5	30.44	152.20	30.58	152.90
35—40	37.5	8	25.44	203.52	25.58	204.64
40—45	42.5	10	20.44	204.40	20.58	205.80
45—50	47.5	12	15.44	185.28	15.58	186.96
50—55	52.5	21	10.44	219.24	10.58	222.18
55—60	57.5	33	5.44	179.52	5.58	184.14
60—65	62.5	40	.44	17.60	.58	23.20
65—70	67.5	25	4.56	114.00	4.42	110.50
70—75	77.5	24	9.56	229.44	9.42	226.08
75—80	72.5	23	14.56	334.88	14.42	331.66
80—85	82.5	15	19.56	293.40	19.42	291.30
85—90	87.5	9	24.56	221.04	24.42	219.78
總　數	....	225	Mdn=62.94	2354.52	M=63.08	2359.14

(A)　$A.D._{MdN}=\frac{2354.52}{225}=10.46$

(B)　$A.\ D._{M}=\frac{2359.14}{225}=10.49$

（2）簡捷法　上述通常法計算平均差時，須有意的不顧差數符號之缺點，在數理上，究嫌牽強。美人刻力(Kelley)因此，特另以下列方法，應用於未歸類事實中求平均差時，比之上式，尤爲簡捷，且可免去正負差數混雜之弊。惟符號畧繁，初學者似不便記憶。其式如次：

(A)以平均數爲中量求平均差

$$A.D._M=\frac{2}{N}\left(FM-\Sigma_1^F X\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

F＝平均數以下各數量數目之和

$\Sigma_1^F X$＝平均數以下各數量數值之和（即由第1數量起，加至平均數以下數量(F)止之和數）

(B)以中位數爲中量求平均差

$$A.D._{MdN.}=\frac{1}{N}\left(\Sigma_{\frac{N}{2}+1}^{N} X-\Sigma_1^{\frac{N}{2}} X\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

$\Sigma_{\frac{N}{2}+1}^{N} X$＝中位數以上各數量數值之和（即由一半以上之第一數量$\left(\frac{N}{2}+1\right)$起，加至第N個數量止之和數）

$\Sigma_1^{\frac{N}{2}} X$＝中位數以下各數量數值之和（即由第1個數量，加至一半以下數量$\left(\frac{N}{2}\right)$止之和數）

（應用上式，如數量數目之和爲奇數時，則將中位數之值，平均分配於兩邊之內，參閱下列。）

今以表71之數量爲例，應用上列二式，推求其平均差如下：

(A)以平均數爲中量求平均差

$N=9$　　$M=64$

$F=5$（即62，60，50，48，40五數）

$\Sigma_1^F X=260(62+60+50+48+40=260)$

代入(42)式

$$A.D._{M.}=\frac{2}{9}(5\times64-260)$$

$$=\frac{2}{9}\times 60 \qquad =\frac{120}{9}=13.3$$

(B)以中位數爲中量求平均差

$N=9$

$$\sum_{\frac{N}{2}+1}^{N} X=347\left(\frac{62}{2}+70+80+82+84=347\right)$$

$$\sum_{1}^{\frac{N}{2}} X=229\left(\frac{62}{2}+60+50+48+40=229\right)$$

代入(43)式

$$A.D_{.MdN.}=\frac{1}{9}(347-229)$$

$$=\frac{1}{9}\times 118 \qquad =\frac{118}{9}=13.1$$

此二式所得之結果，與用公式(40)計得者相同，惟較簡易。至此二式之構成，亦由公式(40)推演而來。茲並將其演法列下，以供參考：

公式(42)之演算(以表71爲例)：

按 $A.D.=\frac{\Sigma D}{N}$ ……………………………………………(40)

若以X代數量，M代平均數，則上式應爲

$$A.D.=\frac{(M-X_1)+(M-X_2)+(M-X_3)+(M-X_4)+(M-X_5)}{N}$$

$$\frac{+(X_5-M)+(X_7-M)+(X_8-M)+(X_9-M)}{}$$

$$=\frac{X_6+X_7+X_8+X_9-X_1-X_2-X_3-X_4-X_5+5M-4M}{N}$$

(因求A.D.時，皆須按正號推算)

設F爲小於M之數量數目(本例爲5)，可見上式中，列有F個正M，及(N—F)個負M.又X之小於M者皆爲負，其和以$\Sigma_1^F X$代之；X之大於M者皆爲正，其和以$\Sigma_{F+1}^N X$代之．由是前式可改爲

$$A.D.=\frac{\Sigma_{F+1}^N X-\Sigma_1^F X+FM-(N-F)M}{N}$$

因 $\Sigma_{F+1}^N X-\Sigma_1^F x=\Sigma_{F+1}^N x+\Sigma_1^F x-2\Sigma_1^F x=\Sigma_1^N x-2\Sigma_1^F x$

及 $\Sigma_1^N X=NM$

故 $$A.D.=\frac{NM-2\Sigma_1^F X+FM-(N-F)M}{N}$$

$$=\frac{NM-2\Sigma_1^F X+FM-NM+FM}{N}$$

$$=\frac{2FM-2\Sigma_1^F X}{N}$$

$$=\frac{2}{N}(FM-\Sigma_1^F X)\cdots\cdots(42)$$

由平均數求A D.

公式(43)之演算：

按 $$A.D.=\frac{\Sigma_{F+1}^N X-\Sigma_1^F X+FM-(N-F)M}{N}$$

$$=\frac{1}{N}[\Sigma_{F+1}^N X-\Sigma_1^F X+(2F-N)M]$$

上式係由平均數(M)求A.D.，如由其他任何數(P)推求之，而F爲此數以下數量數目之和時，則上式爲

$$\text{A D 距P數} = \frac{1}{N}\left[\Sigma_{F+1}^{N}X - \Sigma_{1}^{F}X + (2F - N)P\right]$$

若$F=\frac{N}{2}$，　即P爲中位數，由是上式爲

$$A.D. = \frac{1}{N}\left[\Sigma_{\frac{N}{2}+1}^{N}X - \Sigma_{1}^{\frac{N}{2}}X + \left(2\times\frac{N}{2} - N\right)Mdn\right]$$

$$= \frac{1}{N}\left(\Sigma_{\frac{N}{2}+1}^{N}X - \Sigma_{1}^{\frac{N}{2}}X\right) \cdots\cdots\cdots (43)$$

由中位數求A.D.

若在分組數量中，以通常法計算平均差時，其差數多屬零碎不齊，計算頗需時間，且易致錯誤。即仿照前法計算，亦未見便利。故常用假設中量求差數，而以更正數更正之，則簡捷多矣。至此法所據之原理，參閱圖90自可明瞭。其式如下：

$$A.D. = \frac{\Sigma fd + C(N_b - N_a)}{N} \times i \cdots\cdots\cdots (44)$$

Σfd＝各數與假設中量之差數和

$C(N_b - N_a)$＝更正數

N_b(Number of measures below True Median or Mean)＝實得中位數或實得平均數以下數量數目之和

N_a(Number of measures above True Median or Mean)＝實得中位數或實得平均數以上數量數目之和

i＝組距(若計算差數時，以實際單位計算，則可省去)

用上式求平均差時，以假設中位數或假設平均數爲中量均可。但有須注意者，則二者差數之求算各不相同。以中位數爲中量時，則

$$C = \frac{\text{實得中數位} - \text{假設中位數}}{\text{組距}},$$

以平均數爲中量時，則

$C=\frac{\sum fd}{N}$（與前者相同，參閱155頁）

表74. 平均差捷法之計算

（以中位數爲中量）

組 限 G (1)	次 數 f (2)		假設中位數 A.Mdn. (3)	離中差d（組距爲單位）(4)	次數×差數 fd(2×4) (5)
30—35	5	N_b 129		6	30
35—40	8			5	40
40—45	10			4	40
45—50	12			3	36
50—55	21			2	42
55—60	33			1	33
60—65	40		62.5	0	0
65—70	25	N_a 96	（以含中位數組距之中值爲假設中位數）	1	25
70—75	24			2	48
75—80	23			3	69
80—85	15			4	60
85—90	9			5	45
	N=225				$\sum fd$=468

實得中位數(T.Mdn.)=62.94

$$C=\frac{62.94-62.5}{5}=.088$$

$$N_b=129(40+33+21+12+10+8+5)$$

（若眞正中位數大於假設中位數時，則中位數組之次數，應加於N_a之內；若較小時，則應列於N_b之內。）

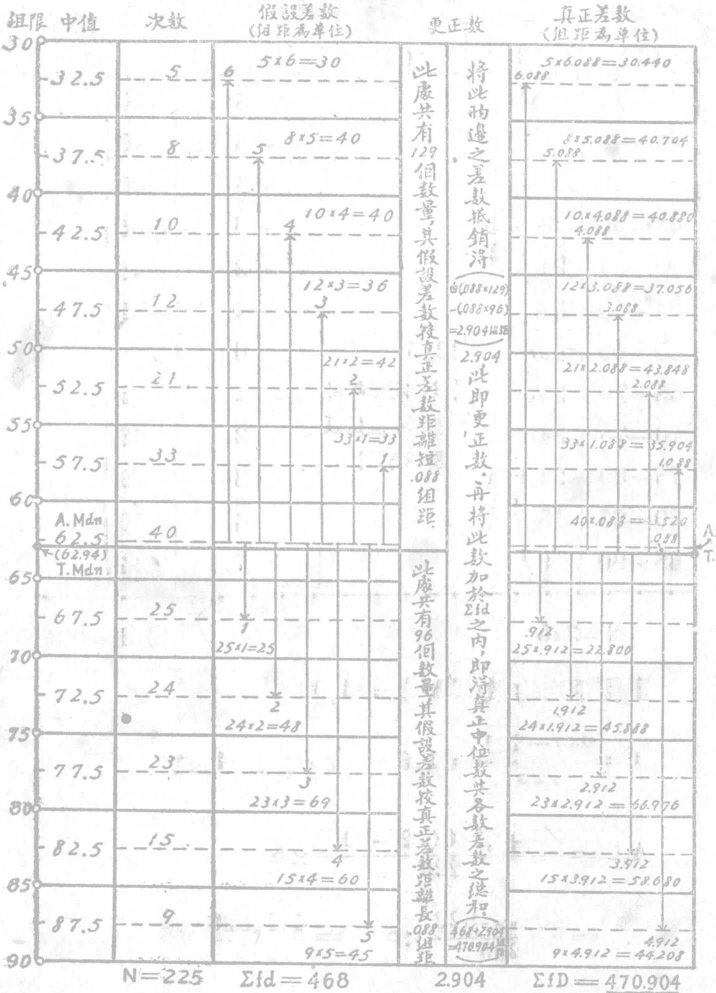
$N_a=96(25+24+23+15+9)$ 代入(44)式

$$A.D=\frac{468+.088(129-96)}{225}\times 5$$

$$=\frac{468+2.904}{225}\times 5 \quad =\frac{470.904}{225}$$

$=2.092\times 5=10.46$ 結果與表73(A)計得者相同，並參閱下圖。

圖90. 圖示平均差捷法之計算
(以中位數為中量)



$$A.D._{Mdn}=\frac{468+2.904}{225}\times 5=\frac{470.904}{225}\times 5=10.46$$

(以平均數為中量用捷法求平均差時,其理與此相同.)

表75. 平均差捷法之計算
(以平均數爲中量)

組限 G (1)	次數 f (2)		假設平均數 A.M. (3)	離中差 d (4)	次數×差數 fd(2×4) (5)	
30—35	5	N_b 129		—6	—30	-221
35—40	8			—5	—40	
40—45	10			—4	—40	
45—50	12			—3	—36	
50—55	21			—2	—42	
55—60	33			—1	—32	
60—65	40		62.5	0		
65—70	25	N_a 96	(以含有平均數組之中值爲假設平均數)	1	25	247
70—75	24			2	48	
75—80	23			3	79	
80—85	15			4	60	
85—90	9			5	45	

N=225　　　　Σfd=468

實得平均均數(T.M.)=63.08

$$C=\frac{247-221}{225}=.116$$ 代入(44)式

$$A.D.=\frac{468+.116(129-96)}{225}\times 5$$

$$=\frac{468+.828}{225}\times 5 \quad =\frac{471.828}{225}\times 5$$

$=2.097\times 5=10.49$　結果與表73(B)計得者相同。

用公式(44)以平均數求平均差時，對於假設平均之選擇，必須加以精密之估計，務以接近實得平均數爲宜（最好用含有平均數組之中值爲假設平均數）。否則實得平均數與假設平均數相差過大，使C數過1時，則求出之平均差，恐不正確。

第五節　標準差(Standard Deviaticn)

標準差，乃各數量與中量差數平方平均數之方根也。實爲表示差異最完善之方法，其符號通常以希臘字母σ (Sigma)代表之。

此種差數與前述平均差不同；蓋一爲各差數平方平均數之方根，一則爲各差數之平均數。計算平均差時，其差數符號須有意的棄置不問。此種計算究嫌牽強，且不能用代數法運算；而計算標準差則須將各差數平方(卽自乘)，故其負數符號遂無形消滅，此亦二者不同之點。再則計算標準差時，雖可用中位數或平均數爲中量，但因數理的關係，通常多以平均數爲準，此點與計算平均差時之兩者均可應用又異。其計算方法，可分爲四種：

(1)通常法　數量未歸類時，其式如下：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma D^2}{N}}\cdots\cdots(45)$$

σ(Sigma)＝標準差

ΣD^2＝各差數平方之和

表76. 標準差之計算

數量x (1)	離中差D (2)	差數方D^2 (3)
40	−24	576
48	−16	256
50	−14	196
60	−4	16
62	−2	4
70	6	36
80	16	256
82	18	324
84	25	400

N=9　　M=64　　$\sum D^2=2064$

$$\sigma=\sqrt{\frac{2064}{9}}=\sqrt{229.3}=15.1$$

若在已歸類數量求標準差時，則上列公式(45)應改爲(46)，算法詳表77：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fD^2}{N}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

表77. 標準差之計算

(據表73之材料)

組限 G (1)	中值 x (2)	次數 f (3)	離中差 D^2 (4)	差數方 D^2 (5)	次數×差數方 $fD^2(3\times5)$ (6)
30—35	32.5	5	—30.58	935.1364	4675.6820
35—40	37.5	8	—25.58	654.3364	5234.6912
40—45	42.5	10	—20.58	423.5364	4235.3640
45—50	47.5	12	—15.58	242.7364	2912.8368
50—55	52.5	21	—10.58	111.9364	2350.6644
55—60	57.5	33	— 5.58	31.1364	1027.5012
60—65	62.5	40	—.58	.3364	13.4560
65—70	67.5	25	4.42	19.5364	488.4104
70—75	72.5	24	9.42	88.7364	2129.6736
75—80	77.5	23	14.42	207.9364	4782.5372
80—85	82.5	15	19.42	377.1364	5657.0460
85—90	87.5	9	24.42	596.3364	5367.0276

N=225　　M=63.08　　38874.8900

$$\sigma=\sqrt{\frac{38874.8900}{225}}=\sqrt{172.78}=13.14$$

（2）簡捷法　用上述通常方法求標準差時，其次數與差數方之乘積頗大，計算需多量時間，且亦易致錯誤。故爲免除繁瑣及減少錯誤起見，亦可仿照平均差捷法之計算，應用假設中量以求之。其式如下：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-C^2}\times i \cdots\cdots(47)$$

Σfd^2＝各數與假設平均數之差數方乘次數之和

i＝組距（計算差數時，以實際單位計算，則可以省去）

表78．標準差捷法之計算

組限 G (1)	次數 f (2)	離中差 d（組距爲單位）(3)	次數×差數 fd(2×3) (4)	次數×差方 fd²(3×4) (5)
30—35	5	—6	—30	180
35—40	8	—5	—40	200
40—45	10	—4	—40	160
45—50	12	—3	—36	108
50—55	21	—2	—42	84
55—60	33	—1	—33	33
60—65	40	0	—221	
65—70	25	1	25	25
70—75	24	2	48	96
75—80	23	3	69	207
80—85	15	4	60	204
85—90	9	5	45	225

N＝225　　247　Σfd^2＝1558

A.M.＝62.5

$$C.=\frac{-221+247}{225}=.116 \qquad C^2=.0135$$

依式代入　$\sigma=\sqrt{\frac{1558}{225}-.0135}\times 5$

$=\sqrt{6.9244.0135}\times 5$

$=\sqrt{6.9109}\times 5 \qquad =2.628\times 5=13.14$

公式(47)之運算已見上表．至此式之構成，亦由公式(46)推演而來，玆並將其演法列下，以供參考：

按 $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fD^2}{N}}$ ……………………………………(46)

設 X=數量　　　M=算術平均數

D=各數量與平均數之差數(X−M)

A=假設平均數

d=各數量與假設平均數之差數(X−A)

C=更正數=$\frac{\Sigma fd}{N}$

因 $D=X-M$　　$\therefore\ M=X-D$

$d=X-A$　　$\therefore\ A=X-d$

而 $M=A+C$ ……………………………………(8a, 155頁)

$\therefore\ (X-D)=(X-d)+C$

$-D=X-d+C-X$

$-D=-d+C$　　　$d=D+C$

$\Sigma fd=\Sigma f(D+C)$

$\Sigma fd^2=\Sigma f(D+C)^2$

$\Sigma fd^2=\Sigma f(D^2+2DC+C^2)$

,,　$=\Sigma fD^2+2\Sigma fDC+N(C)^2$

但 $\Sigma fD=O$

$\therefore\ \Sigma fd=\Sigma fD^2+N(C)^2$

$$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{\Sigma fD^2}{N}+\frac{N(G)^2}{N}$$

$$\frac{\sum fd^2}{N}=\frac{\sum fD^2}{N}+C^2$$

$$\frac{\sum fD^2}{N}=\frac{\sum fd^2}{N}-C^2$$

故 $\sigma=\sqrt{\frac{\sum fd^2}{N}-C^2}$ ……………………………………(4)

(3)累積次數法

在分組數量中求標準差時，亦可利用累積次數以爲計算。此法亦極簡捷，且可免去求差數之手續。應用時以任何一組中值爲原始點均可。其式如下：

$$\sigma=\sqrt{\frac{2S_2+S_1}{N}-C^2}\times i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(48)$$

S_1＝第一累積次數之和(即$\sum F+\sum F'$)

S_2＝第二累積次數之和(即$\sum F_2+\sum F_2'$)

$C=\frac{\sum F'-\sum F}{N}$　(參閱11式)

表79. 用累積次數法求標準差

(據表52之材料)

組限 G (1)	次數 f (2)	第一累積次數 S_1 (3)		第二累積次數 S_2 (4)	
10—15	2	2	34	2	14
15—20	8	10	$\sum F$	12	$\sum F_2$
20—25	12	22		34	
25—30	19	0			
30—35	22	42			
35—40	7	20	78	36	
40—45	10	13	$\sum F'$	16	55
45—50	3	3		3	$\sum F_2'$
總數	83	$S_1=112$		$S_2=69$	

$$C = \frac{78-34}{183} = .53 \qquad C^2 = .281$$

依式代入 $\sigma = \sqrt{\frac{2\times 69 + 112}{83} - .281} \times 5$

$$= \sqrt{\frac{250}{83} - .281} \times 5 \quad = \sqrt{3.012 - .281} \times 5$$

$$= \sqrt{2.731} \times 5 \qquad = 1.65 \times 5 = 8.3$$

(4)數量平方法

標準差之計算，除上述方法外，亦可用別一方法求之。此法可稱曰數量平方法，其式係由通常法推演而來，惟免除求中量與差數之手續。若在未歸類數量中求標準差時亦頗覺簡捷，但數量已歸類後，則運算仍感繁瑣也。其式如次：

$$\sigma = \sqrt{\frac{N\sum X^2 - (\sum X)^2}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

$\sum X^2$＝各數量平方之和

$(\sum X)^2$＝各數量之和平方

N^2＝次數之和平方

或 $\sigma = \sqrt{\frac{N\sum fx^2 - (\sum fx)^2}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots(50)$

表80. 用數量平方法求標準差

(數 量 未 歸 類 者)

數 量 X	數量平方 X
40	1600
48	2304
50	2500
60	3600
62	3844
70	4900
80	6400
82	6724
84	7056

$N = 9 \quad N^2 = 81$

$\sum X^2 = 38928$

$(\sum X)^2 = 576^3 = 331776$

$$\sigma = \sqrt{\frac{9\times 389 - 331776}{81}}$$

$$= \sqrt{\frac{18576}{81}}$$

$$= \sqrt{229.3} = 15.1$$

與表76計得者相同

表81. 用數量平方法求標準差

(數量已歸類者)

組限 G (1)	中值 X (2)	次數 f (3)	次數×中值 fX(2×3) (4)	次數×中值平方 fX^2(2×4) (5)
10—15	12.5	2	25.0	312.50
15—20	17.5	8	140.0	2450.00
20—25	22.5	12	270.0	6075.00
25—30	32.5	19	570.0	14368.75
30—35	27.5	22	715.0	23237.50
35—40	37.5	7	262.5	9843.75
40—45	42.5	19	425.0	18062.50
45—50	47.5	3	142.5	6768.75
總數		83	2502.5	81,118.75

$N=83 \quad N^2=6,889$

$(\sum fx)^2=2502.5^2=6,262,506.25$

$N\cdot\sum fx=83\times81,118.75=6,732,856.25$

代入(50)式

$$\sigma=\sqrt{\frac{6,732,856.25-6,262,506.25}{6,889}}$$

$$=\sqrt{\frac{470,350}{6,889}}\qquad=\sqrt{68.28}=8.3$$

與表79計得者相同

第六節　差異數量之應用及關係

差異數量，除上述者外，倘有中位差(Median deviation，即各數量差數之中位數，在常態分配中，其值與四分位差同)，概誤差(Probable error，即各數量由平均數差數之中位數，在常態分配中，其值亦與四分位差同)二種；更有用P_{90}與P_{10}之差(The10

—90Percentile range)，以爲考察事實分配之差異程度者。惟就應用方面而言，除概誤差用爲證誤數外(參閱十六章三節)，其餘應用均少。此外如欲爲表示各數量彼此相差之關係，而不注重與中量相差之程度，則可用相互平均差 (Mutual deviation，卽各數量彼此相差之平均數) 表示之。至差異數量之效用，及與集中數量不同之點，在第一節中，經畧述其大概。茲爲讀者更易認識起見，特再設例說明如下：

表83. 某校甲乙二班學生成績分配

平均成績	學生數 甲	學生數 乙
30—40	1	4
40—50	2	6
50—60	14	7
60—70	16	10
70—80	11	9
80—90	2	5
90－100	2	7
總數	48	48
M········	65.0	66.9
Mdn····	64.4	67.0
Q········	8.2	13.6
$A.D_M$···	8.8	15.0
Q········	11.9	18.1

表83爲某校甲乙兩班學生之平均成績，人數彼此相同。今將其成績以比較，如從集中數量觀之，則乙班成績似較甲班爲高；但就差異數量而言，則四分位差，平均差，標準差三者，乙班均比甲班爲大。由是可知乙班成績之集中點雖畧高，然其差異程度，則反較甲班爲大；亦卽甲班各生之成績彼此差異畧小，較爲整齊劃一，而乙班則較散漫參差不及甲班之勻稱也。故吾人當應用數量分析方法以考究事實時——尤應注意二羣或數羣事實比較——除集中數量外，更應利用差異數量，以考察其差異程度之大小，方能明瞭

其內容分配如何，當不能祗憑集中數量便爲決論也。

差異數量之效能，及與集中數量不同之點，觀上所述，當可明瞭。至該項數量通常所用者，除全距離外，其餘四分位差，平均差，標準差三者，均可擇一以考察事實離中之程度。惟學者則多以標準差爲根據，蓋標準差固由全體數量求出，而精確之度，又比四分位差及平均差爲大；且對於他種數量之計算（如相關數，證誤數），標準差之應用，亦常較其餘二者爲多也。又此三種差量之價值，則以標準差爲最大，次爲平均差，而四分位差則最小，其關係可分列如下：

1.在完全對稱或不甚偏斜之次數分配中，四分位差之值約等於標準差三分之二，平均差六分之五；而平均差之值，則約爲標準差五分之四(詳可參閱下表)。

表 84. 各種差異數量之比例

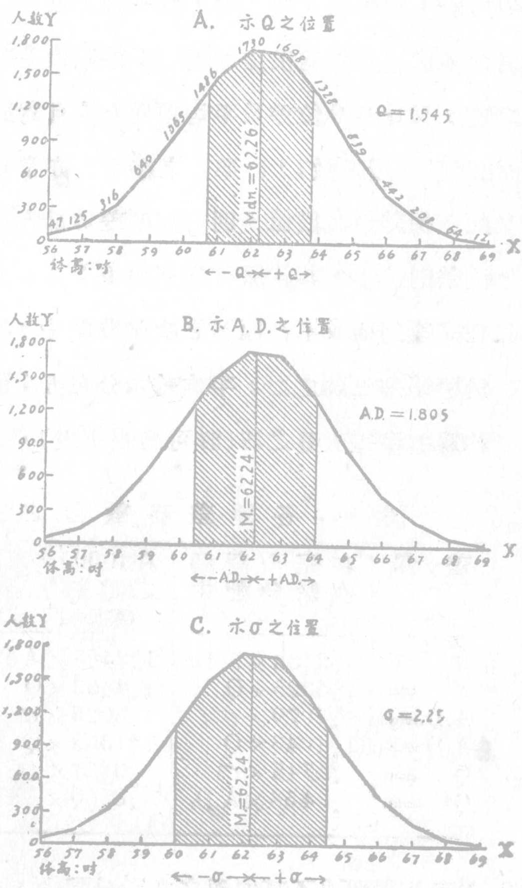
差量 (1)	在完全對稱次數分配中 (2)	在10000名軍隊之體高分配中 (參閱圖91)(3)	差額 (4)
σ =	1.2533 × A.D.	1.2465 × A.D.	.0068
σ =	1.4825 × Q	1.4563 × Q	.0262
A.D. =	.7979 × σ	.8022 × σ	.0043
A.D =	1.1843 × Q	1.1683 × Q	.0160
Q =	.6745 × σ	.6867 × σ	.0122
Q =	.8453 × A.D.	.8560 × A.D.	.0107

2.在完全對稱或不甚偏斜之次數分配中，由中量展開至正負各一個標準差之距離，其間包含全體數量百分之68.26；如展開至正負各一個平均差之距離，則包含全數百分之57.5

；如展開至正負各一個四分位差之距離，則包含全數百分之50(參閱圖76及圖91)。

3. 在一量表上，如6倍標準差之距離，其間常包含全體數量百分之99或且過之。而平均差及四分位差，均較標準差爲小，故7.5倍平均差或9倍四分位差之距離，亦可包含全體數量百分之99。以上爲各差量彼此間之關係，至各數在量表上之位置——在量表上所佔之距離——可詳閱圖91，自可得之。

圖91. 10,000名軍隊之體高分配



第七節　比較的差異數量(Measures of Relative Variability)

以上所討論之差異數量，均從實在數量計得，是爲絕對差異數量(Measures of Absolute Variability)。設使吾人欲比較各羣事實差異程度大小之時，若非各事實之集中點與量表之單位相，則不能以絕對差數爲依據。例如工人平均年齡爲34.7歲，標準差爲10.9；平均工資爲26.5元，標準差爲9.2,則年齡差異是否較工資差異爲大？又中學教師平均月薪爲95元，標準差爲12；小學教師平均月薪爲57元，標準差爲7.6,則12是否又較7.6爲大？似均不易决定。蓋因量表單位與集中之點不同，卽求出之差異數量，亦自參差不齊也(參閱圖92)。故對於差異大小之正確表示，常須以比較差量——卽其中量與差量之比率——爲標準。斯種比率數，名曰差異係數(Coefficent of variation)。通常算法，多用下列披爾遜氏之公式：

圖92. A,B,C三事實之分配

$$V=\frac{\sigma\times 100}{\text{Mean}}\cdots\cdots(51)$$

V=異差係數

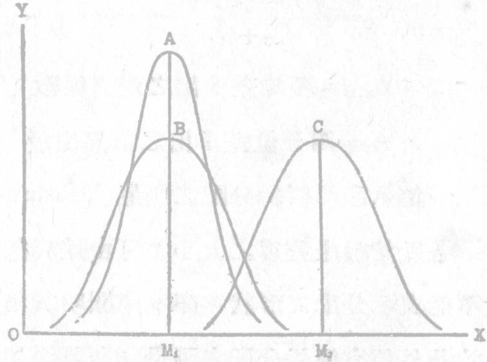


表85. 四類事實差異大小之比較

事　實 (1)	平均數M (2)	標準差σ (3)	差異係數V (4)
甲……	34.7	10.9	31.4
乙……	26.5	9.2	34.7
丙……	95.0	12.6	12.6
丁……	57.0	7.6	13.3

觀表85(4)行之差異係數，可知工人工資(乙)之差異程度最大；次爲工人年齡(甲)；再次爲小學教師月薪(丁)；而最小爲中學教師月薪(丙)。亦卽(乙)之差異程較大於(甲)；(丁)之差異程度較大於(丙)。但僅從標準差觀之，則其差異程度適得其反。故絕對的差量，往往不能表示正確之差度也。

差異係數之計算，亦可就其他差量以求之，惟所用之中量，須與求差量時所用者一致。如下列二式：

$$V_{A.D}=\frac{A.D.\times 100}{M.Mdn}\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

$$V_Q=\frac{(Q_3-Q_1)100}{Q_3+Q_1}\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

$V_{A.D}$＝平均差求出之差異係數

V_Q＝四分位差求出之差異係數

第八節　偏斜分配之測量(Measures of Skewness)

各數量離中程度之大小，可由差異數量以測定。惟此種差量不能表示分配之形狀，亦不能顯明其集中於平均數之上或下，故此外須有偏斜分配之測量。所謂偏斜，卽非對稱之謂，其

種類前經列出者，有偏斜，多峯形，U形，J形各式（參閱119頁）。若測量次數分配偏斜度大小時，則可利用平均數，中位數，衆數之關係而計算。因在對稱次數分配中，此三者均合而爲一（參閱189頁）。如次數分配偏斜，則此三者之值各有不同，且其差異之大小，即直接影響於偏斜方向及大小也。關於求算偏斜度，可有下列各式：

$Sk = M - Mo$　理論衆不易求得故改列如下

$= M - [M - 3(M - Mdn)]$

$= 3(M - Mdn)$ ……………………………………(54)

$Sk = (Q_3 - Mdn) - (Mdn - Q_1)$ ……………………(55)

$Sk = \sqrt[3]{\frac{\sum D^3}{N}}$ ……………………………………(56)

若在分組事實中用差數立方之和求偏斜度，則宜用下列捷法公式：

$Sk = \sqrt[3]{\frac{\sum fd^3 - 3C \cdot \sum fd^2}{N} + 2C^3} \times i$ ……………………(57)

Sk＝偏斜度

上列各式，(54)式較(55)式爲精密，且易計算，故通常多用之。關於此二式之理，亦甚簡明。如 $M - Mdn$，或 $(Q_3 - Mdn) - (Mdn - Q_1)$ 爲0時，則次數分配對稱，不偏不倚，此種分配，稱曰對稱分配。若 Mdn 數小於 M，或 $(Mdn - Q_1)$ 之數小於 $(Q_3 -$

Mdn）時，則所得爲正數。此種分配，稱曰正的偏斜分配〔參閱圖67(A)及圖93(A)〕若Mdn或($Mdn-Q_1$)之數大時，則所得爲負數，此種分配，稱曰負的偏斜分配〔參閱圖67(B)及圖93(B)〕。至(56)式，則根據在對稱次數分配時，各數與其算術平均數相差之立方和應等於零爲標準，如不爲零，則形成偏斜分配，故亦可利用以測定偏斜之度。惟此等方法所得之偏斜度，雖可表示每事實偏斜之方向及大小，但若在兩種數量單位不同或差量相差過大之事實中，則仍不能確切表明其偏斜度以何者爲大。故實際之應用，亦常仿照差異係數而以其差量與偏斜度求出之偏斜係數(Coefficent of Skewness)爲依據。如下列各式：

$$K=\frac{3(M-Mdn)}{\sigma}\cdots\cdots(58)$$

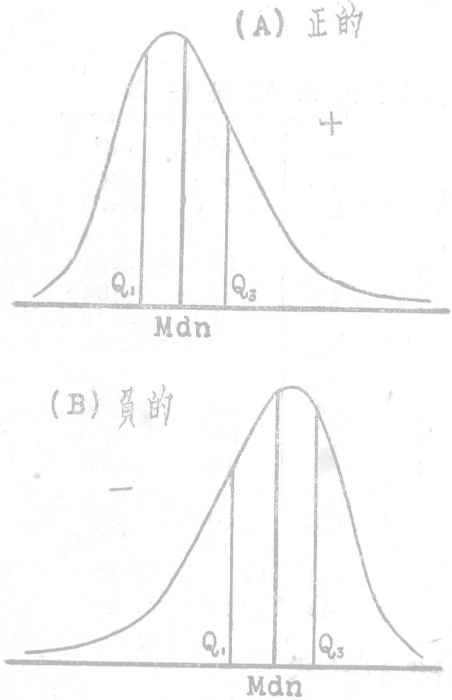
$$K=\frac{(Q_3-Mdn)-(Mdn-Q_1)}{Q}\cdots\cdots(59)$$

$$K=\frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma D^3}{N}}}{\sigma}\cdots\cdots(60)$$

或 $$K=\frac{(57)\text{式}}{\sigma}\cdots\cdots(61)$$

K＝偏斜係數

圖93. 偏斜次數分配



茲以表63之材料，應用(58)式；表58之材料，應用(59)式；及以下列表86材料應用(61)式，分別求其偏斜係數如下：

表63內，M=51.22

Mdn=50.85

Q=3.22

$$\therefore\quad K=\frac{3(51.22-50.85)}{3.22}$$

$$=\frac{3\times .37}{3.22}\qquad\frac{1.11}{3.22}=.34$$

由是可知表63之事實，其集中點略偏斜於下方而成正的偏斜，因所得係數爲正數故也。(參閱圖88)

又表58內，Mdn=44.23

$Q_1=37.37$　　$Q=52.79$　　$Q=7.71$

$$\therefore\quad K=\frac{(52.79-44.23)-(44.23-37.37)}{7.71}$$

$$=\frac{8.56-6.86}{7.71}$$

$$=\frac{1.70}{7.71}=.22$$

表 86. 應用(61)式求偏斜係數

G (1)	f (2)	d (3)	fd (2×3) (4)	fd^2 (3×4) (5)	fd^3 (3×5) (6)
10—15	2	—3	— 6	18	—54
15—20	8	—2	—16	32	—64
20—25	12	—1	—12	12	—12
			—34		—130
25—30	19	0		0	
30—35	22	1	22	22	22
35—40	7	2	14	28	56
40—45	10	3	30	90	270
45—50	3	4	12	48	192
總 數	83		78	250	540
			—34		—130
			44		410

先代入(57)式

$$Sk=\sqrt[3]{\frac{410-3\times.53\times250}{83}+2\times.53^3}\times5$$

$$=\sqrt[3]{\frac{12.5}{83}+.2978}\times5$$

$$=\sqrt[3]{.4484}\times5$$

$$.765\times5=3.825$$

代入(61)式

$$\sigma=8.3$$

$$K=\frac{3.825}{8.3}=.46$$

第十五章　相關數量(Measures of Relation-Ship or Correlation)

第一節　相關數量之意義

相關數量，乃用以表明二種或數種事實彼此相關程度之數目也。蓋宇宙間一切事物，常由各種原因而發生密切之關聯，或此長彼消，或此消彼長；或彼此消長，其途徑均同一趨向者。是以根據斯種相關程度，則不難由此事以推彼事，察已往而知未來。例如已知五穀產量之增減，則可預測其價格之升降，知人身體之高矮，亦可推算其體量之輕重。統計學者之常利用此種數量，以表明事實彼此相關之程度，藉為預測之根據，亦猶應用集中數量與差異數量，以表明事實之集中及差異程度，其理正復相同也。

第二節　相關之種類

據上所述，可知二種事實彼此間之關係，其途徑有同向者，亦有異向者。故相關之種類，復可分為下列二種：

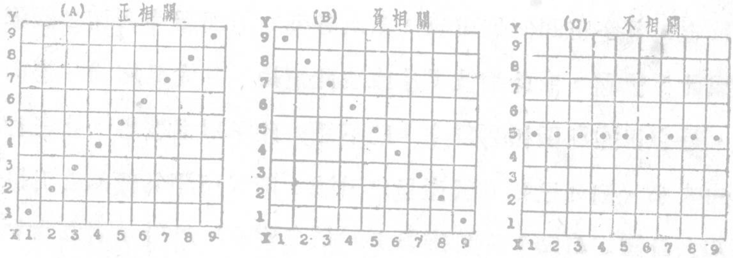
(1)正相關或積極的相關(Direct Correlation or Positive Correlation)　若二稱事實顯正相關時，則二量之性質相近。即一量之增加時，他量亦隨之而增加；減少時，亦隨之而遞減。其形如圖94(A)所示，幷參閱圖96。

(2)負相關或消極的相關(Inverse Correlation or Nagaitve Correlation)　若二種事實顯負相關時，則二量之性質相反。即一量之增加時，他量反隨之而遞減；減少時，反因之而遞增。

其形如圖94(B)所示，幷參閱圖95。

若一種事實之增減時，而他量不受其影響者，則可謂之不相關(Zero Correlation)，圖94(C)卽其一例。

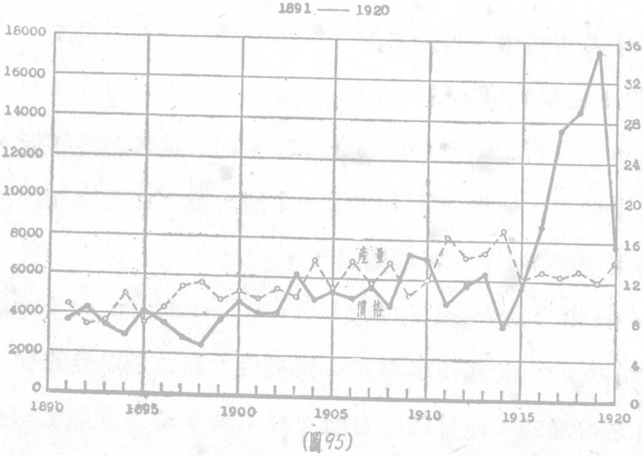
圖94. 相關之種類



相關圖示法　相關之種類，旣如上述。若吾人欲考究二種事實彼此間之關係時，爲簡便計，亦常可利用圖示法以顯之(參閱上圖)。試觀圖95，棉花產量及價格曲線，其中似有一定之關係，惟起伏則彼此異途。卽產量增加，價格下降；產量減

美國棉花按年產量及價格

1891——1920

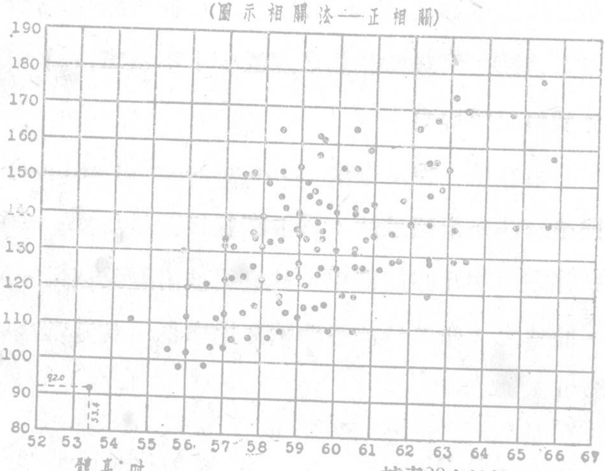


(圖95)

少，價格上升。故可知二者當成一相反之關係——負相關——。又如在圖96所示120名新生之體高及體重，則其趨向，彼此幾相一致，即身體高者，其體量亦重。故可知二者，當成一正的關係矣。

圖96. 某大學120名新生之體高及體重

(圖示相關法——正相關)



據表39之材料

第三節　相關係數及其價值

圖示相關法，雖簡而易行，且亦可視察二種事實相關之大勢。惟彼此間關係程度之大小，究不能示以確數。故相關問題之研究，爲獲得確實結果計——相關程度之大小——，則不能不另用一種簡明數量以代表。此代表數量，即所謂相關係數(Coefficient of Correlatian)，通常以r爲符號，其計算方法，將於以下各節詳述之。

至r之價值，若在完全正相關時，則其值爲1，若由1逐漸

減少，則相關之程度亦漸減少；迨 r 減至0時，則相關之程度消滅。若表明完全負相關時，則其值爲—1，若由—1逐漸增加時，則此相反之相關，亦逐漸消失；及 r 增至0時，則此相反之相關消滅。然實際計算所得之結果，r 之值爲1或—1者均少，大概多在1與—1之間。故 r 之值，若爲±.7以上時，則可表明相關之度高；由±.4至±.7時，可表明相關之度顯著；由±.2至±.4時，可表明相關之度低少；不及±.2時，則其相關之度，爲無足重輕矣。

第四節 乘積率法 (Product-moment method)

乘積率法亦稱積差法，爲求直線相關(Linear relationship)之至完善方法，且亦最常用。其式爲披爾遜氏創用。所謂乘積率者，簡言之，卽二量差數乘積之比率也。其通常法公式如下，算法詳表87,88：

$$r=\frac{\sum D_X D_Y}{\sqrt{\sum D_X^2}\sqrt{\sum D_Y^2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

或 $$r=\frac{\sum D_X D_Y}{N\sigma_X\sigma_Y} \cdots\cdots\cdots\cdots(62a)$$

r=相關係數

D_X=X量各數與X量平均數之差數

D_Y=Y量各數與Y量平均數之差數

N =對數(卽每一對數)之和

σ_X=X量之標準差 σ_Y=Y量之標準差

表87. 甲，乙二量相關係數之求法

（乘積率法，數量未歸類者）

號次	甲量 X (1)	乙量 Y (2)	D_X (3)	D_Y (4)	D_X^2 (5)	D_Y^2 (6)	$+D_XD_Y$ (3×4) (7)	$-D_XD_Y$ (3×4) (8)
1	40	60	−17	−6	289	36	102	
2	44	64	−13	−2	169	4	26	
3	46	70	−11	+4	121	16		44
4	48	65	−9	−1	81	1	9	
5	52	58	−5	−8	25	64	40	
6	54	67	−3	+1	9	1		3
7	60	60	+3	−6	9	36		18
8	64	66	+7	0	49	0		
9	66	69	+9	+3	81	9	27	
10	68	71	+11	+5	121	25	55	
11	70	74	+13	+8	169	64	104	
12	72	68	+15	+2	225	4	30	
平均數	57	66	合計		1348	260	393	65

$\Sigma D_X^2 = 1348 \qquad \Sigma D_Y^2 = 260$

$\Sigma D_X D_Y = +393 - 65$　　代入(62)式

$$r = \frac{+393-65}{\sqrt{1348}\sqrt{260}} \qquad \frac{+328}{36.72\times16.13}$$

$$= \frac{+328}{592.29} = +.55$$

此r＋.55，即表明甲乙二量關係之程度頗顯著，且爲正的相關。

表88. 1910—1925年上海粳米價格與時間之關係

時間(X) 年次 X (1)	各年與中間時期(1917—18)之差數(半年爲單位) x (2)	x^2 (3)	粳米價格(Y) 每年平均價格(每石元計) Y (4)	由平均格價8.33之差數 y (5)	y^2 (6)	年差與價差之乘積 $xy(2\times5)$ (7) +	(7) —	每年趨向之向置 (m=.29) (8)※
1910	—15	225	7.15	—1.18	1.3924	17.70		6.155
1911	—13	169	7.98	— .35	.1225	4.55		6.445
1912	—11	121	7.94	— .39	.1521	4.29		6.735
1913	— 9	81	7.21	—1.12	1.2544	10.08		7.025
1914	— 7	49	5.42	—2.91	8.4681	20.37		7.315
1915	— 5	25	7.40	— .93	.8649	4.65		7.605
1916	— 3	9	7.12	—1.21	1.4641	3.63		7.895
1917	— 1	1	6.51	—1.82	3.3124	1.82		8.185
原始點	0	0	8.33	0	0			8.330
1918	1	1	6.62	—1.71	2.9241		1.71	8.475
1919	3	9	6.94	—1.39	1.9321		4.17	8.765
1920	5	25	9.61	1.28	1.6384	6.40		9.055
1921	7	49	9.68	1.35	1.8225	9.45		9.345
1922	9	81	11.18	2.85	8.1225	25.65		9.635
1923	11	121	11.25	2.92	8.5264	32.12		9.925
1924	13	169	10.24	1.91	3.6481	24.83		10.215
1925	15	225	10.95	2.62	6.8644	39.30		10.505
合計	………	1360	………	………	52.5094	204.84	5.88	

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{1360\div4}{16}}=4.61 \qquad \sigma_Y=\sqrt{\frac{52.5094}{16}}=1.81$$

(年爲單位)

代入(62a)式 $$r=\frac{\frac{+204.84-5.88}{2}}{16\times4.61\times1.81}=\frac{+99.48}{133.51}=+.74$$

※ $y=r\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)x$,　　$y=+.74\left(\frac{1.81}{4.61}\right)x$,

$y=(.74\times.393)x$

或 $y=.29x$　　$m(\text{slope})=r\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)$※

※參閱110頁，4.最小平方法　※參閱本章第五節

上表爲1910--1925年，上海粳米價格與時間關係之計算，所得 $r=+.74$，卽用以表示二者相關之程度。其計算方法，與表87大致相同。惟此例之年數爲偶數，故求年差(DX)時，須以半年爲單位；而於求X量標準差時，則將 Σx^2(卽 ΣD_X^2)以4除之。至求得 Σxy(卽 $\Sigma D_X D_Y$)之後，亦以2除之，使其單位彼此皆相一致，以便計算(參閱111頁，表33之計法)。但若當年數爲奇數時，則求年差直以一年爲單位，計算方法，較此更爲簡易矣(參閱114頁，表34)。

計算捷法　上述爲乘積率求法 r 之通常算法。若當數量繁多時(如表89之材料)，如仍用上法以眞正中量求差數，則其結果多參差不齊，計算頗覺繁瑣，且錯誤亦易，於時間上殊不經濟。故在斯種情形之下，則宜用假設中量求差數，並先將事實分組列成一相關表(參閱下例)，利用捷法公式以爲計算，方覺妥捷。至此公式之構成，亦由上式推演而來。茲並附例其演算，以供參考：

$$r=\frac{\frac{\sum d_X d_Y}{N}-C_X C_Y}{\sigma_X \sigma_Y}\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

d_X＝X量各數與X量假設平均數之差數

d_Y＝Y量各數與Y量假設平均數之差數

C_X＝X量平均數與假設平均數之差數（更正數）

C_Y＝Y量平均數與假設平均數之差數（更正數）

此公式之演算如下：

按 $$r=\frac{\sum D_X D_Y}{N\sigma_X \sigma_Y}\cdots\cdots\cdots\cdots(62a)$$

因 $d_X=D_X+C_X \qquad d_Y=C_Y+C_Y$ （參閱220頁）

故 $\sum d_X d_Y=\sum(D_X+C_X)(D_X+C_Y)$

$\sum d_X d_Y=\sum D_X D_Y+\sum D_X C_Y+\sum D_Y C_X+\sum C_X C_Y$

但 $\sum D_X=0$ 及 $\sum D_Y=0$，

及 $\sum C_X C_Y=NC_X C_Y$

$\therefore \sum d_X d_Y=\sum D_X D_Y+NC_X C_Y$

$\sum D_X D_Y=\sum d_X d_Y-NC_X C_Y$

即 $$\frac{\sum D_X D_Y}{N\sigma_X \sigma_Y}=\frac{\sum d_X d_Y-NC_X C_Y}{N\sigma_X \sigma_Y}=\frac{\frac{\sum d_X d_Y}{N}-\frac{NC_X C_Y}{N}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$=\frac{\frac{\sum d_X d_Y}{N}-C_X C_Y}{\sigma_X \sigma_Y}\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

表89. 某大學120名新生體高及體重

體高(吋)	體重(磅)	體高	體重	體高	體重	體高	體重
59.6	134.8	59.0	140.7	57.0	104.0	57.8	134.2
62.5	128.7	60.9	159.3	58.0	122.5	59.5	124.8
55.9	130.0	60.5	132.0	59.5	157.4	59.2	115.0
60.0	141.2	56.8	112.2	62.2	165.1	65.8	157.4
58.5	134.0	59.7	116.3	59.0	112.6	60.8	142.6
60.5	164.4	62.5	129.0	58.2	133.4	56.5	120.3
57.0	132.0	57.6	106.7	58.0	140.0	58.2	107.5
59.5	144.3	59.8	143.2	57.0	132.6	59.3	145.8
55.8	93.7	60.5	154.6	60.5	109.8	60.2	154.2
58.6	114.3	59.2	149.5	60.6	127.0	60.5	131.9
65.5	178.0	55.5	103.0	56.0	102.8	59.0	127.7
53.4	92.0	59.8	109.7	63.5	170.0	58.2	149.1
59.0	124.0	57.8	115.4	57.1	122.0	62.5	155.1
58.5	108.2	61.5	128.0	60.5	141.8	62.5	119.9
62.8	148.0	65.7	139.8	56.0	111.8	59.5	115.8
64.8	138.1	59.5	162.2	56.5	96.3	61.0	135.1
58.6	142.1	58.9	137.2	59.6	161.0	60.0	126.1
62.5	139.8	58.8	124.6	61.8	145.1	59.4	147.0
60.5	118.8	63.5	129.3	57.5	123.3	58.5	117.5
57.0	121.8	57.8	126.2	59.2	134.6	59.0	153.3
61.5	136.1	60.5	141.6	57.5	114.7	57.5	150.7
60.5	127.0	58.5	145.3	62.7	167.4	58.5	124.5
54.5	110.8	57.8	151.3	59.5	131.4	60.0	130.8
59.6	125.8	62.0	138.7	60.2	119.2	61.2	126.8
62.7	156.3	58.5	116.7	59.2	120.9	59.5	139.1
64.7	169.2	57.8	135.3	57.2	105.8	61.6	128.2
63.0	154.0	60.8	134.3	58.5	163.1	62.5	146.3
57.2	131.0	58.0	130.2	61.0	143.7	63.2	137.5
56.0	120.0	58.5	152.2	63.2	129.4	59.6	136.5
56.7	104.7	63.1	173.4	57.0	113.9	59.0	135.5

表89所列，為120對偶數量，表示某大學新生之體高及體重(並參閱圖96)。吾人如欲考究此二者相關程度大小之時，則宜先將之排一相關表，然後據公式(63)以求相關係數，計算方覺妥捷。至相關表排列方法，與前第九章第五節所述次數分配表排列之方法(參閱51頁)，大致相同。不過前者祇排列一種事實之數量，而此處則須將兩種事實(即體高及體重)之數量配合成對排列之耳。如表90：

表90. 某大學120名新生之體高及體重

(據表89之材料列成相関表)

體高(吋) 體重(磅)	53—54	54—55	55—56	56—57	57—58	58—59	59—60	60—61	61—62	62—63	63—64	64—65	65—66	合計	體高平均
90—100	｜		｜	｜										3	55.17
100—110			｜	｜｜	｜｜｜	｜｜	｜	｜						10	57.80
110—120		｜		｜｜	｜｜｜	｜｜｜	｜｜｜｜	｜｜		｜				16	58.56
120—130				｜｜	｜｜｜｜	｜｜｜	卌	｜｜｜	｜｜｜	｜｜	｜｜			24	59.75
130—140			｜		卌	｜｜｜｜	卌｜	｜｜｜｜	｜｜	｜｜	｜	｜	｜	27	59.91
140—150						｜｜｜｜	卌｜	｜｜｜｜	｜｜	｜｜				18	60.06
150—160					｜｜	｜	｜｜	｜｜｜		｜｜	｜		｜	12	60.67
160—170						｜	｜｜	｜		｜｜		｜		7	61.07
170—180											｜｜		｜	3	64.17
合計	1	1	3	7	17	18	26	18	7	11	6	2	3	120	59.67
體重平均	95.00	115.00	111.67	112.14	126.18	131.67	135.00	136.67	133.57	142.27	148.33	150.00	155.00	133.08	

表91. 某大學120名新生體高及體重之關係

（就相關表用捷法計算相關係數）

	A	B	C	D	E	體高吋 (X)														
1	m					53.5	54.5	55.5	56.5	57.5	58.5	59.5	60.5	61.5	62.5	63.5	64.5	65.5		
2		f				1	1	3	7	17	18	26	18	7	11	6	2	3	120	
3			d→X ↓			−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6		
4			Y	fd		−6	−5	−12	−21	−34	−18	−96	18	14	33	24	10	18	117	
5					fd^2	36	25	48	63	68	18		18	28	99	96	50	108	657	Σd_xd_y
體重：磅 (Y)	95	3	−4	−12	48	1 24 24		1 16 16	1 12 12											52
	105	10	−3	−30	90			1 12 12	2 9 18	3 6 18	2 3 6	1 0	1 −3 −3							51
	115	16	−2	−32	64		1 10 10		2 6 12	3 4 12	3 2 6	4 0	2 −2 −4		1 −6 −6					30
	125	24	−1	−24	24				2 3 6	4 2 8	3 1 3	5 0	3 −1 −3	3 −2 −6	2 −3 −6	2 −4 −8				−6
	135	27	0	−98				0		5 0	4 0	6 0	4 0	2 0	2 0	1 0	1 0	1 0		
	145	18	1	18	18						4 −1 −4	6 0	4 1 4	2 2 4	2 3 6					10
	155	12	2	24	48					2 −4 −8	1 −2 −2	2 0	3 2 6		2 6 12	1 8 8		1 12 12		28
	165	7	3	21	63						1 −3 −3	2 0	1 3 3		2 9 18		1 15 15			33
	175	3	4	12	48											2 16 32		1 24 24		56
		120		75	403															
Σd_xd_y …………						24	10	28	48	30	6		3	−2	24	32	15	36		254

(A)

$$C_x = \frac{-96+117}{120} = \frac{21}{120} = .175 \text{ 組距}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{657}{120} - (.175)^2}$$

$$= \sqrt{5.4750 - .0306}$$

$$= \sqrt{5.4444} = 2.33 \text{ 組距}$$

(B)

$$C_y = \frac{-98+75}{120} = \frac{-23}{120} = -.1917 \text{ 組距}$$

$$(-.1917 \times 10 = -1.917)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{403}{120} - (-.1917)^2}$$

$$= \sqrt{3.3583 - .0367}$$

$$= \sqrt{3.3216} = 1.82 \text{ 組距}$$

$$(1.82 \times 10 = 18.2)$$

$$\Sigma d_x d_y = 260 - 6 = 254 \text{ 組距}$$

$$(\text{貳}) = 256 - 2 = 254 \text{ 組距}$$

$$(254 \times 10 = 2540)$$

代入(　)式

$$r = \frac{\frac{254}{120} - [.175 \times (-.1917)]}{2.33 \times 1.82}$$

$$= \frac{2.1167 - (-.0335)}{4.2406}$$

$$= \frac{2.1502}{4.2406} = +.507$$

上表係就表(90)排列所得，據(63)式以爲計算。其求算方法，可總括如下：

1.相關表排列完妥以數字表出後，即將X與Y之次數相加，各得120。

2.估計X量(體高)59—60組距之中值59.5，及Y量(體重)130—140組距之中值135爲假設平均數。即在此兩組之上下限各用雙線(或粗線)間斷，藉示區別。

3.以59.5與X量各數較差，以135與Y量各數較差（均以組距爲單位)，各得1,2,……—1,—2,…等，分別列於d_X(3)及d_Y(C)行內。

4.將X及Y之次數，與其相當之差數相乘，分別列於fd〔(4)，(D)〕行內。如—6,—5……—12,—30……等。

5.將差數平方乘次數，得36，25……及48，90……等，分別列於fd^2〔(5)，(E)〕行內，幷將之相加，得657及403。

6.以次數和120除Σfd求C，得下列二數，並將之分列於表之右方(A)(B)欄內。

$$C_X=\frac{-96+117}{120}=\frac{21}{120}=.175$$

$$C_Y=\frac{-89+75}{120}=\frac{-23}{120}=-.1917$$

7.將求算所得，分別代入標準差之公式，得

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{657}{120}-.0306}=2.33 \quad 及$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\frac{403}{120}-.0367}=1.82$$

（上述均爲求標準差之方法，計算幷以組距爲單位，而不用使之還原，因求 $\Sigma d_X d_Y$ 時，亦以組距爲單位也。）

8.將X與Y之相當差數相乘，列於二量相當之方格中。如 $d_X=-6$，$d_Y=-4$，相乘得24；$d_X=1$，$d_Y=-3$，相乘得-3；……等。（乘時，符號最當留意。至决定其乘積應爲正爲負，則參閱右圖自可得之。）

(II) $d_X=-$ $d_Y=-$ $-\times-=+$	(I) $d_X=+$ $d_Y=-$ $+\times-=-$
(III) $d_X=-$ $d_Y=+$ $-\times+=-$	(IV) $d_X=+$ $d_Y=+$ $+\times+=+$

9.以次數乘二量差數之乘積，列於每格之右下方，以求二量差數乘積之和。如 $1\times24=24$；$1\times16=16$；……等。（乘時，符號亦當注意）

10.將二量差數乘積之和，用代數法相加求 $\Sigma d_X d_Y$，卽得254。（加時，從橫竪二方均可。如從橫方得 $260-6=254$；從竪

方亦得 256—2=254。應用時，計算一方便可，無須兩方幷求。)

11.將上列計算所得，代入(63)式解之，得

$$r=\frac{\frac{254}{120}[.175\times(-.1917)]}{2.33\times1.32}=+.507$$ 卽爲所求。

此相關係數+.507，卽表示120名新生體高與體重之相關程度，且屬正的相關矣。

上例，爲二變量事實之用乘積率法以求其相關係數者。但斯法之應用，原不限於變量事實，卽在二種歷史材料上，亦可據以研究彼此關係之情形。惟所得結果，就大體而論，多屬表示二量長期之相關，至對於短期之起伏(Short-Time Fluctuations)，則影響甚微。例如在圖95之材料，若依照前法(用平均數求差數)以求其相關係數，則所得爲正數(卽正的相關)。用作長期趨向之代表，固甚適宜，惟對於短期起伏，未免畧視矣。故吾人研究歷史事實時，如欲得其短期起伏之關係，則不宜照前法以爲計算。應將之畧爲改變，細察事實起伏之情形，利用繼動均數求差數，而不以平均數爲標準，則所得結果，方能確切表示二量關係之實情，如下例所示之算法是也。

表92. 棉花產量及其價格之關係

（乘積平法計算二量短期起伏相關之方法）

年次	產量：百萬磅計 X	產量：四年徒動均數中點*	產量：徒動均數之差數 x	產量：差數自乘 x^2	價格：每磅仙計 Y	價格：四年徒動均數中點*	價格：徒動均數之差數 y	價格：差數自乘 y^2	二量差數之乘積 xy
1896	4,250				7.3				
1897	5,500				5.6				
1898	5,700	5,163	+537	288,369	4.9	6.6	−1.7	2.89	−929
1899	4,750	5,194	−444	197,136	7.6	7.2	+.4	.16	−177.6
1900	5,150	5,075	+75	5,625	9.3	7.9	+1.4	1.96	+105.0
1901	4,850	5,068	−218	47,524	8.1	8.9	−.8	.64	+174.4
1902	5,400	5,313	+87	7,569	8.2	9.4	−1.2	1.44	−104.4
1903	5,000	5,594	−594	352,836	12.2	9.6	+2.6	6.76	−1,544.4
1904	6,850	5,837	+1,013	1,026,169	8.7	10.2	−1.5	2.25	−1,519.5
1905	5,400	6,100	−700	490,000	10.9	10.4	+.5	.25	−350.0
1906	6,800	6,182	+618	381,924	10.0	10.3	−.3	.09	−185.4
1907	5,700	6,143	−443	196,249	11.5	10.8	+.7	.49	−310.1
1908	6,800	6,013	+787	619,369	9.2	11.8	−2.6	6.76	−2,046.2
1909	5,150	6,219	−1,069	1,142,761	14.3	12.0	+2.3	5.29	−2,458.7
1910	6,000	6,568	−568	322,624	14.0	12.1	+1.9	3.61	−1,079.2
1911	8,150	6,894	+1,256	1,577,536	9.6	12.1	−2.5	6.25	−3,140.0
1912	7,150	7,487	−337	113,569	11.5	11.0	+.5	.25	−168.5
1913	7,400	7,538	−138	19,044	12.5	10.4	+2.1	4.41	−289.8
1914	8,500				7.3				
1915	6,050				11.2				
合計	………	………	+4,373 −4,511	6,788,304	………	………	+12.4 −10.6	43.50	+279.4 −14,286.7

* 即每兩個四年徒動均數之平均數。如產量第一均數為5,050，第二均數為5,275，平均得5,163。此即四年徒動均數之中點，而以1898年為標準，餘仿此。

以上表計算所得求r，其結果如下：

$$C_X=\frac{-138}{16}=-8.62 \qquad C_Y=\frac{1.8}{16}=.11$$

$$\sigma_X=\sqrt{\frac{6,788.304}{16}-(-8.62)^2}$$

$$=\sqrt{424,269-74.30}$$

$$=\sqrt{424,194.70}=651.30$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\frac{43.50}{16}-(.11)^2}$$

$$=\sqrt{2.72-.01}$$

$$=\sqrt{2.71}=1.65$$

$$r=\frac{\frac{279.4-14286.7}{16}-(-8.62\times .11)}{651.30\times 1.65}$$

$$=\frac{\frac{-14007.3}{16}-(-.95)}{1074.64}$$

$$=\frac{-875.46+.95}{1074.64}=\frac{-874.51}{1074.64}=-.81$$

上列計算結果，r為一.81，由是可知二量短期起伏，有極大之負相關(參閱圖95)。至計算之時，所用年數爲十六年，故N=16而非20。又因繼動均數求出之差數，其和常不爲零，故計算二量標準差時，復將其差數和以N除之作爲更正數。斯種方法，實與由假設平均數求出之差數，而以更正數更正之之理由，似同一意義也。

第五節　回應方程式(Regression Equation)

相關係數求得後，爲進一步研究二量彼此相互關係情形起見、則當更求其回應係數(Regression of Coefficient)，而以回應方程式表示。蓋相關係數之效用，僅能示二量相關之大概情形，而不能顯明二量彼此互爲變動之關係。因二量之中，若其一量有單位變動時，則他一量亦不能不隨之發生若干變動；而Y量依X量所生之變動，與X量依Y量所生之變動，苟非其標準差完全相同，則大小常不一致。故研究相關問題，爲澈底了解計，除求得r外，並應依下列二式各求其回應係數，——即示二量互爲回應之數目——而以回應方程式表明二量互相變動之關係，藉作預測根據。統計上之所謂就此而推彼，察往而知來，亦不外利用斯法以達其目的也。

$$b_1 = r\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (64)$$

$$b_2 = r\left(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (65)$$

b_1＝Y依X回應之係數（即表示X量有一單位變動時，Y量所所生變動之數目）

b_2＝X依X回應之係數（即表示Y量有一單位變動時，X量所生變動之數目）

玆將表91計得之r，代入上列二式，各求其回應係數如下：

$$b_1 = +.507\left(\frac{1.82}{2.33}\right) = .507 \times .781 = .396$$

$$b_2 = +.507\left(\frac{2.33}{1.82}\right) = .507 \times 1.28 = .649$$

由上計算所得，b_1為.396，b_2為.649，是卽表明就平均計算，X量有一單位變動時，Y量當有.396之變動；而Y量有一單位變動時，X量亦當有.649之變動也。

回應係數求得後，卽可據此列成回應方程，而分別以直線表明二量彼此互爲變動之關係。所謂直線相關者，卽謂二量關係之情形，若以圖形顯示，當成直線。然就實際而論，則頗難呈斯結果。因此相關之二直線，其一本爲各竪行數量平均相連之線；而他一則爲各横行數量平均相連之線，若僅就各平均點以線連之，則此線必生上下起伏，不能一直（參閱下列各圖）。其所以用直線表之者，原屬理想的假定，卽謂觀察之事實愈多；測量方法愈精，則此線當與直線愈爲接近。故此遂不能不另以方法繪成，用作代表乃可。至此二直線之畫法，爲簡便計，有時卽可就各行接近平均點之位置，隨手繪成以示之（此法與前述圓滑曲線之隨手畫法同一意義，參閱105頁）。然若爲獲得精確結果計，則當依下列回應方程以計算，而爲繪畫之標準：

$$Y-\bar{Y}=r\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\bar{X})\cdots\cdots\cdots(66)$$

或 $$y=r\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(66a)$$

$$X-\bar{X}=r\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\bar{Y})\cdots\cdots\cdots(67)$$

或 $$x=r\left(\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\right)y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(67a)$$

Y=Y量各數量　　$\bar{Y}$=Y量平均數(M_Y)

X=X量各數量　　$\bar{X}$=X量平均數(M_X)

y=Y量差數($Y-\bar{Y}$)　　x=X量差數($X-\bar{X}$)

上列(66)及(66a)式，爲Y依X回應之直線方程；(67)及(67a)式，則爲X依Y回應之直線方程。茲用上例之事實(即表91之例)，列成Y依X之回應方程，則得結果如下，并以圖97表明之：

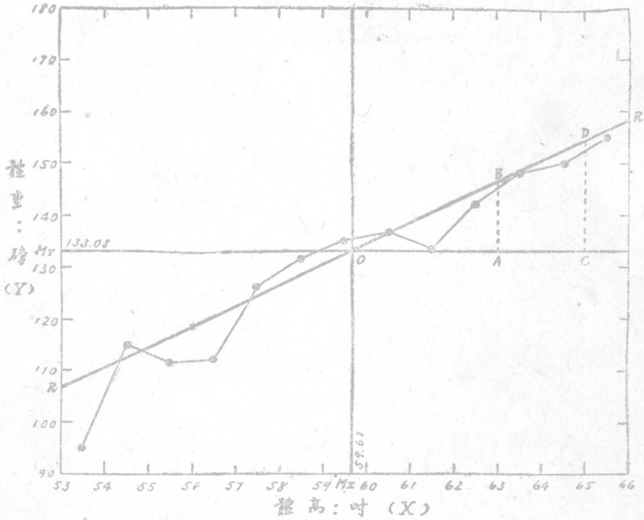
$$Y-133.08=+.507\frac{1.82}{3.33}(X-59.67)$$

$$Y-133.08=.396(X-59.67)$$

或 $$y=.396x$$

體重平均與體高之關係

（Y依X回應直線）



（圖97）

上圖之曲線，爲各豎行數量實得平均相連之線（即體重之平均線，參閱表90），而RR_1線，則爲代表Y量依X量回應之相關直線。繪畫此線時，可將X之值代入前式，以其計算所得，任取二點用直線連之即成。如X爲53時，則Y爲106.7；X爲66時，則Y爲158.2（算法見下）。至其餘X與Y相當之各價值，均落在此直線之上（若X=56，則Y=118.6；X=63，則Y=146.3）。故就此線之位置，即可知Y依X爲回應之關係。

$$Y-133.08=.396(53-59.67)$$

$$Y-133.08=-2.641$$

組距

$Y=(-2.641\times 10)+133.08$

$Y=-26.41+133.08=106.7$

（上式之-2.641，而乘以組距10者，使其單位Y量與X量一致也。因圖內之Y，其組距爲10，而X爲1，故須以10乘.396 (X—59,67)，使其單位一律相等。如二量之組距相等時，則可省去此手續。）

又　$Y-133.08=.396(66-59.67)$

$\dfrac{Y-133.08}{組距}=2.507$

$Y=(2.507\times 10)+133.08$

$Y=25.07+133.08=158.2$

按Y依X之囘應方程，其意義與前述圓滑曲線中最小平方法所得之方程式，完全相同（參閱110頁）。式中之囘應係數$r\left(\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)$，卽爲直線斜度$m$（亦稱常倍數Multiplying Constant），故(66)式，又可列爲$y=mx$（此式與(2)式一致，參閱表88及圖99之結果，當更顯明）；而$m=\dfrac{y}{x}$卽圖97內之$\dfrac{AB}{OA}=\dfrac{CD}{OC}=\dfrac{1.319(十磅)}{3.33\ (寸)}=\dfrac{2.111\ (十磅)}{5.33\ \ (寸)}=.396$。若再在此$x$，$y$之兩方，各以其標準差除之，所得比率，便爲二量之相關係數$\left(\dfrac{AB\div\sigma_Y}{OA\div\sigma_X}=\dfrac{1.319\div 1.823}{3.33\ \div 2.333}=\dfrac{.725}{1.43}=.507\right)$。故最小自乘法之$m$，實爲

計算相關係數之標準〔62式亦由此而來〕。至X依Y爲囘應之關係，依此亦可得同一結果。玆仍用上例以求其囘應方程，則得結果如下：

$$X-59.67=+.507\frac{2.33}{1.82}(Y-133.08)$$

$$X-59.67=.649(Y-133.08)$$

或 $x=.649y$

若 Y爲90，則X爲

$$X-59.67=.649(90-133.08)$$

$$X-59.67=-27.96$$

磅爲單位

$$X=(-27.96\div10)+59.67$$

$$X=-2.796+59.67=56.87$$

（上式之-27.96，而以組距10除之者，亦使其單位X量與Y量一致也，其理與前同。）

又 Y爲180，則X爲

$$X-59.67=.649(180-133.08)$$

$$X-59.67=30.45$$

磅爲單位

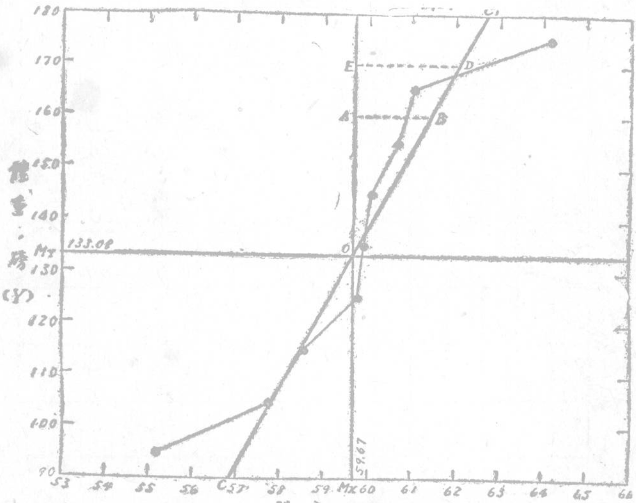
$$X=(30.45\div10)+59.67$$

$$X=3.045+59.67=62.72$$

將上列計算所得56.87，及62.72以直線連之，則得圖98之直線。

體高平均與體重之關係

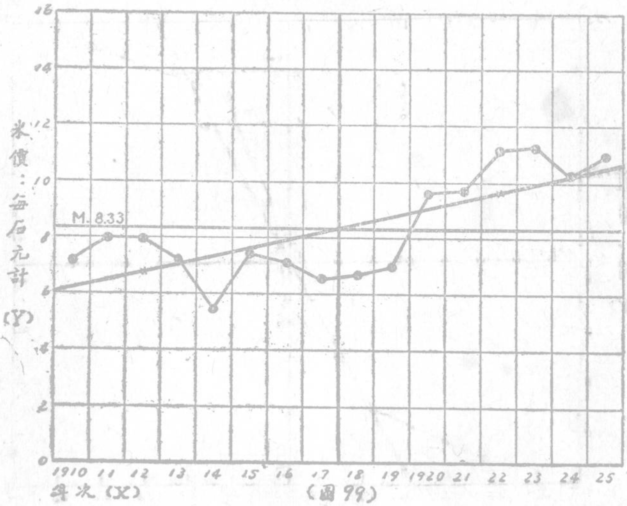
（Y依X回應直線）



（圖98）

上圖之CC_1線，即爲代表X量依Y量回應之相關直線（CC_1線與RR_1線，若在同一圖繪之，則必相遇於O）。此線之斜度m爲.649，即$\frac{x}{y}$（如圖之$\frac{AB}{OA}=\frac{ED}{OE}=\frac{1.747(\text{寸})}{2.692(\text{十磅})}=\frac{2.396(\text{寸})}{3.692(\text{十磅})}=.649$）。若再將$x$，$y$各以其標準差除之，則亦得一r，與由前法求出者一致$\left(\frac{AB\div\sigma_X}{OA\div\sigma_Y}=\frac{1.747\div2.333}{2.692\div1.823}=\frac{.75}{1.48}=.507\right)$。

上海粳米價格及時間之關係
1910—1925
(Y依X回應直線)



(圖99)

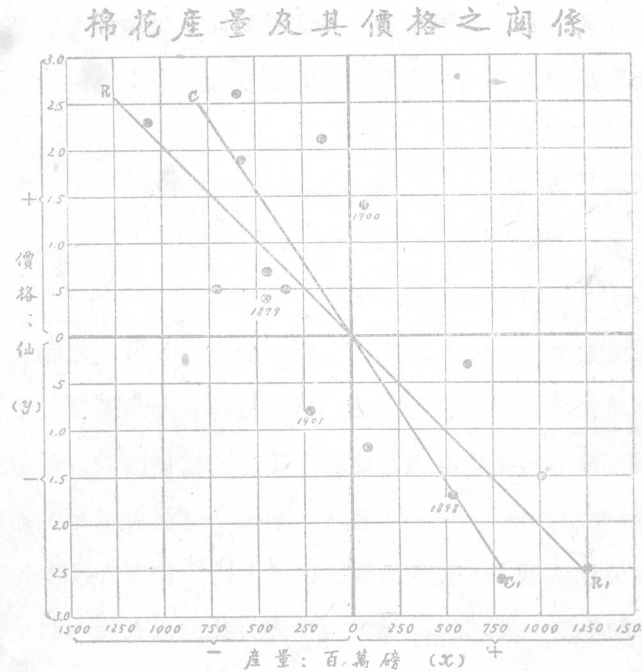
上圖係根據表88之事實繪成。圖內之直線，爲Y依X回應之相關直線(RR_1線)，亦卽最小平方法求出之恆差線。此線之斜度爲.29(參閱表88)。至所據之方程式，實與前(2)式完全相同，其証明如下：

按 $y=mx$　　　因 $y=Y-\overline{Y}$

$\therefore$ $Y-\overline{Y}=mx$　　　卽 $Y=mx+\overline{Y}$

以b代$\overline{Y}$卽得　　$Y=mx+b$……………………(2)〔110頁〕

又如將表92所載棉花產量及價格，以分布圖(Scatter diagram)示二者之關係，則得結果如下圖：



(圖100)

圖內各點，係由表92之每對差數繪成。至RR_1線，則為表示Y依X回應直線，斜度m為.00205。即謂棉花產量，如由平均數有一百萬磅變動時，則價格必於其相反之方向變動.00205仙。其回應方程式如下：

$$y=-.00205x$$

若 $x=+1250$ 則 $y=-2.563$

,, $x=-1250$,, $y=+2.563$

GC_1線，則代表X依Y回應直線，斜度m為-319.7313。即謂棉花價格，如由平均數有一仙之變動時，則產量必於其相反之方向變動319.7313百萬磅。其回應方程如下：

$x=-319.7313y$

若 $y=+2.5$ 則 $x=-799.328$

,, $y=-2.5$,, $x=+799.328$

第六節 相關率(Correlation Ratio)

凡由乘積率法求出之r，通常爲表示二量直線之相關，因其表中縱橫各行平均數相連之線近於直線也。然若當二量相關中，其縱橫各行平均數相連之線，非近於直線而爲他種形式之曲線(如表93)，則其相關之程度，有非r所能表示者，遂不能不另以他法處理之。英人披爾遜因此，乃以相關表縱橫各行平均數之標準差，與Y量或X量之標準差爲比例以表之，而示實際相關之度，是名相關率。其式有二：一爲Y量依X量之比率，一爲X量依Y量之比率，通常均以η (eta) 爲符號。玆分列之如次：

$$\eta_{YX}=\frac{\sqrt{\dfrac{\sum n_X(\overline{Y}_X-\overline{Y})^2}{N}}}{\sigma_Y}\cdots\cdots(65)$$

η_{YX}=Y依Y之相關率

n_X=每縱行之次數

$\overline{Y}_X$=每縱行之平均數

$\overline{Y}$=Y之平均數

N=對數之和

σ_Y=Y量之標準差

$$\eta_{XY}=\frac{\sqrt{\dfrac{\sum n_Y(\overline{X}-\overline{X})^2}{N}}}{\sigma_X}\cdots\cdots(69)$$

η_{XY}=X依Y之相關率

n_Y=每橫行之次數

$\overline{X}_Y$=每橫行之平均數

$\overline{X}$=X量之平均數

N=對數之和

σ_X=X量之標準差

上列二式，(68)式爲Y依X之相關率，(66)式則爲X依Y之相關率。至η之值，即在直線相關中(除完全正負相關外)，亦常較r然大。且因其爲二種標準差之比率，故其值常移動於0至1之間而爲正數。此點與r之值常在1與—1之間者，自有不同也。

表93. 58柄樹葉長度與寬度之關係

	長度(X)									合計	長度
寬度(Y)	中值：寸 m	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	f	平均
	1.2	1	1								2	2.7
	1.7		2	2		1					5	3.5
	2.2		3	7	3						13	3.5
	2.7			5	5	1					11	3.8
	2.2			4	4	3	2	1			14	4.2
	3.7					3	3	4	2	1	13	5.3
合計 f		1	6	18	12	8	5	5	2	1	58	4.1
寬度平均		1.2	1.9	2.5	2.7	3.1	3.5	3.6	3.7	3.7	2.7	

上列之相關表，為58柄樹葉長度與寬度之關係。吾人若以乘積率法求其相關係數，則得r為+.564，然此實不能示二量相關之度。蓋此二者之關係，祗從其縱橫各行平均數觀察之，已可知為非直線之相關。故當另求其相關率如下：

表94. 58柄樹葉寬度與長度之關係

(Y依X相關率之算法)

寬度平均 $\overline{Y}_X$ (1)	由平均數2.7之差數 $(\overline{Y}_X-\overline{Y})$ (2)	差數自乘 $(\overline{Y}_X-\overline{Y})^2$ (3)	每縱行之次數 n_X (4)	次數×差數自乘 $n_X(\overline{Y}_X-\overline{Y})^2$ (5)
1.2	—1.5	2.25	1	2.25
1.9	— .8	.64	6	3.84
2.5	— .2	.04	18	.72
2.7	0	0	12	0
3.1	+ .4	.16	8	1.28
3.5	+ .8	.64	5	3.20
3.6	+ .9	.81	5	4.05
3.7	+1.0	1.00	2	2.00
3.7	+1.0	1.00	1	1.00
合計			58	18.34

$$\sigma_Y = 1.41 \times .5 = .705$$

$$\eta_{YX} = \frac{\sqrt{\frac{18.34}{50}}}{.705} = \frac{\sqrt{.316}}{.705}$$

$$= \frac{.592}{.705} = .797$$

表95. 58柄樹葉長度與寬度之關係

(X 依 Y 相關率之算法)

長度平均 $\overline{X}_Y$ (1)	由平均數4.1之差數 $(\overline{X}_Y-\overline{X})$ (2)	差數自乘 $(\overline{X}_Y-\overline{X})^2$ (3)	每橫行之次數 n_X (4)	次數×差數自乘 $n_X(\overline{X}_Y-\overline{X})^2$ (5)
2.7	—1.4	1.96	2	3.92
3.5	— .6	.36	5	1.80
3.5	— .6	.36	13	4.68
3.8	— .3	.09	11	.99
4.2	+ .1	.01	14	.14
5.3	+1.2	1.44	13	18.72
合計			58	30.25

$$\sigma_X = 1.75 \times 5 = .875$$

$$\eta_{XY} = \frac{\sqrt{\frac{30.25}{58}}}{.875} = \frac{\sqrt{.522}}{.875}$$

$$= \frac{.722}{.875} = .825$$

由上計算所得，η_{YX}為.797，η_{XY}為.825，其值均比乘積率求出之.564為大。故可知二量若為非直線相關 (Non-linear Relationship)時，則r實不能表示其相關之度。至η之應用，原

不限於非直線相關，卽在直線相關中，亦可用之（通常則多用以表示非直線相關）。惟對於未歸類之材料，此法似不適用，且亦不能據此以推算二量互爲變動之關係。所表示者，祇爲二量極量之相關度已，此於應用時亦宜注意也。

η之意義及應用，既如上述。至當二量之關係，不能由視察法以決定其爲直線相關抑非直線相關時，則r與η均應求出，并可利用布拉門(Blakeman)之公式以考證之。按布氏之主張，相關如成直線者，則

$$\frac{\sqrt{N}}{1.3490}\sqrt{\eta^2-r^2}<2.5 \cdots\cdots\cdots\cdots(70)$$

若上式之結果>2.5，則爲非直線相關矣。玆用前例以證之：

$$\frac{\sqrt{58}}{1.3490}\sqrt{(.797)^2-(.564)^2}$$

$$5.6455\times .5631=3.179>2.5$$

又 $\frac{\sqrt{58}}{1.3490}\sqrt{(.825)^2-(.564)^2}$

$5.6455 \times .6021 = 3.359 > 2.5$

由上計算所得，其結果均大於2.5，當可知Y依X，與X依Y之關係，皆爲非直線相關(或有一爲直線，而一爲非直線者)，而非爲直線相關也明矣。

第七節　同異離差法(Method of Concurrent Deviation)

斯法爲求算歷史事實短期起伏相關之簡便方法。計算之時，祇將二量每年數量各與上年數量較差，用正負符號分別表示，而不注重差量之大小，然後即據其同向或異向差號以爲計算標準，便得所求之係數。公式如下，並以表84爲例說明之。

$$r = \pm\sqrt{\frac{2C-N}{N}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (71)$$

C＝同向或異向離差之和

N＝對數之和

表96. 棉花產量及其價格之關係

1896—1915

(同異離差法計算二量短期起伏相關之算法)

年次	產量		價格		離差乘積
	百萬磅計	與上年較差 x	每磅仙計	與上年較差 y	$xy(3\times5)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1896	4,250		7.3		
7	5,500	+	5.6	—	—
8	5,700	+	4.9	—	—
9	4,750	—	7.6	+	—
1900	5,150	+	9.3	+	+
1	4,850	—	8.1	—	+
2	5,400	+	8.2	+	+
3	5,000	—	12.2	+	—
4	6,850	+	8.7	—	—
5	5,400	—	10.9	+	—
6	6,800	+	10.0	—	—
7	5,700	—	11.5	+	—
8	6,800	+	9.2	—	—
9	5,150	—	14.3	+	—
1910	6,000	+	14.0	—	—
1	8,150	+	9.6	—	—
2	7,150	—	11.5	+	—
3	7,400	+	12.5	+	+
4	8,500	+	7.3	—	—
5	6,050	—	11.2	+	—

合計 ………………………………………… $\begin{cases} -15 \\ +4 \end{cases}$

代入(71)式

$$r=-\sqrt{\frac{(2\times15)-19}{19}}=-\sqrt{\frac{11}{19}}$$

$$=-\sqrt{.59}=-.76$$

上表同向離差之和爲4，異向離差之和爲15，因異向離差較同向離差爲多，故取異向離差之和代入公式以計算（卽C=15），而根號前之符號自應爲負。如同向離差較異向離差多時，則以同向離差之和代入，而根號前之符號自應爲正。又當每年數量與上年無差異時，則以0表之，如二量離差之乘積有爲0時，求其和數，則將之分而爲二；卽於同向及異向離差之兩方，各加二分一(.5)以求之便可。依計算所得r=−.76，卽所以表示二量關係之程度，且爲負的相關。此法之結果，雖與由乘積率法求出者，未盡符合，而均表示二量有極大之負相關則一也。

第八節　等級相關法(Method of Rank Correlation)

用乘積率法求r時，係將各數量與其平均數之差數以爲計算。然若不注重各數量差數之大小，僅就相關各數量所居等級之差異，亦可求出一相關係數，是名等級相關。斯法在教育上與心理上之測量，頗適於用。其式爲英人斯皐門(Spearman)經驗所得，如下列者是：

$$\rho=1-\frac{6\sum D^2}{N(N^2-1)}\cdots\cdots\cdots\cdots(72)$$

ρ (rho)=等級法求出之相關係數

D(Difference)=二量等級之差數

N=對數之和

表97．某地十二種工業工人數目與出品價值之等級分配

工業類別 (1)	工人數目(X)		出品價值(Y)	
	人數 (2)	等級 (3)	千元 (4)	等級 (5)
A…………	1,610	10	813	5
B…………	3,751	4	1,148	2
C…………	2,103	7	809	6
D…………	4,830	1	1,341	1
E…………	4,216	3	847	4
F…………	460	12	386	11
G…………	590	11	257	12
H…………	3,480	5	548	10
I…………	4,812	2	927	3
J…………	1,662	9	764	7
K…………	1,750	8	578	9
L…………	2,114	6	683	8

上表所載，爲十二種工業工人數目與出品價值，並經分別按其所居之位置，給與等級(如(3)(5)兩行)藉爲比較．如欲以等級法求其相關程度時，則須據此等級以爲計算．至等級之編列，在前第九章第六節(60頁)，已有討論，參閱自明．幷參閱表99之等級．

表98. 工人數目與出品價值之關係

(等級法求相關係數)

工業類別	X等級	Y等級	等級之差D +	等級之差D −	差數方 D^2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
A	10	5		5	25
B	4	2		2	4
C	7	6		1	1
D	1	1	0		
E	3	4	1		1
F	12	11		1	1
G	11	12	1		1
H	5	10	5		25
I	2	3	1		1
J	9	7		2	4
K	8	9	1		1
L	6	8	2		4
合計……			+11	−11	68

N=12 代入(72)式

$$\rho=1-\frac{6\times 68}{12(144-1)}=1-\frac{408}{1716}$$

$$=1-.24=+.76$$

由上法求出之ρ，其值常較r畧小。如此處計得之ρ爲.76，若捨去其等級，而以原來數量用乘積率法再求相關係數，則得r爲.776，此數須較ρ畧大，惟差異尙微。故當二量數量不

甚多時(約在30對以下)，則等級相關法，亦可應用，以圖簡捷。至ρ求得之後，並可根據下列披爾遜改正等級法公式化爲r，毋庸另行計算。

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(73)$$

sin＝正弦

π(π×半徑度)＝180^0

將上列之ρ代入，則

$$r=2\sin\left(\frac{180}{6}\times.76\right)$$

$$=2\sin 22.8^0$$

$$=2\times.3875=.775$$

(此數亦可從附錄表3查得)

等級相關法，除上之ρ外，斯畢門尚有一簡捷方法，名曰相關尺度(foot-rule)。其計算手續比前更易，惟因確度不高，故應用較少。其式如下：

$$R=1-\frac{6\sum G}{N^2-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(74)$$

R＝等級簡法(相關尺度)求出之相關係數

G(Gains)＝二量等級之差數(X大於Y，或Y大於X均可)

表99. 等級簡法求相關係數

甲量 X (1)	乙量 Y (2)	甲量等級X' (3)	乙量等級Y' (4)	等級之差G X'>Y' (5)	Y'>X' (6)
36	30	1	1.5		0.5
35	27	2	5		3
34	30	3.5	1.5	2	
34	29	3.5	3	0.5	
33	25	5	7		2
32	28	6	4	2	
31	23	7	9.5		2.5
30	26	8	6	2	
29	24	9	8	1	
28	23	10	9.5	0.5	
27	22	11	11		
26	20	12	13		1
25	19	13	14		1
24	21	14	12	2	
合計……				10	10

$N=14$　　　　依式代入

$$R=1-\frac{6\times10}{14^2-1}\qquad=1-\frac{60}{195}$$

$$=1-.308=+.692$$

此法與前法相似，惟更簡易，前法用等級差數之平方和，此則僅用正號差數之和。至R之值，亦較r爲小，但求得後，又可根據披爾遜公式將之轉化爲r。

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1\cdots\cdots(75)$$

cos＝餘弦　　如R＝.692，則

$$r=2\cos\frac{180}{3}(1-.692)-1$$

$$=2\cos 60(.308)-1$$

$$=\cos 18.48-1$$

$$=2\times .9486-1$$

$$=1.8972-1=.897$$

（此數亦可從附錄表4查得，但因表中R無.692者，故以比例法算出。）

第九節　異號差數對數法(Method of Unlike Signed Pairs)

斯法爲計算二量相關之最粗畧方法，結果不甚可靠，故應用極少，祗有在數量不多時(約在50對以下)，間或利用之以爲初步視察巳。其式爲英人瑟怕德(Sheppard)求得，玆列舉並示例如下：

$$U=\frac{u+\left(\frac{\frac{u}{u+L}+\frac{1}{2}}{2}\right)}{N}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(76)$$

U＝異號差數對數法求出之相關係數

u＝二量差數之符號相異者(如＋－，－＋)

L＝二量差數之符號相同者(如＋＋，－－)

d＝二量差數之符號有零數者(如＋0，－0，00)

表100. 異號差數對數法求相關係數

甲量 X (1)	乙量 Y (2)	D_X (3)	D_Y (4)	對數差號 同號 L (5)	異號 u (2)	零差 d (7)
4	11	—7	—4	1		
5	16	—6	+1		1	
8	13	—3	—2	1		
10	12	—1	—3	1		
12	18	+1	+3	1		
11	17	0	+2			1
13	15	+2	0			1
18	18	+7	+3	1		
16	16	+5	+1	1		
13	14	+2	—1		1	
M=11	M=15	合計…………		6	2	2

$$U=\frac{2+\left(\dfrac{\dfrac{2}{2+6}+\dfrac{1}{2}}{2}\right)^2}{10}=\frac{2+\left(\dfrac{.75}{2}\right)^2}{10}$$

$$=\frac{2+.75}{10}=\frac{2.75}{10}=.275$$

（此法之應用，如當二量差號無零差時，則U之值可依$\frac{u}{L+u}$（即$\frac{u}{N}$）求得，無庸依上式計算。）

由此法求得之U，其值適與r相反。若當U之值從0至.5時，則r之值為+1至0間之數；若其值從.5至1時，則r為0至—1間之數。是以U之值超過.5時，則為表示負的相關。至二者

之關係，亦可以下式表之。故求得U後，又可據此化為r。

$$r = \cos \pi U \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(77)$$

若U＝.275，則

$= \cos 180^0 \times .275$

$= \cos 49.5^0 = .6491$

(此數亦可從附錄表5查得)

前二節所述之等級相關法，異號差數對數法，若當相關之二數量分配為對稱或不甚偏斜，且為直線相關時，則由ρ，R，及U所得之r（即從上列各式算出），與由乘積率法所得之r，其值極相一致，無大差異。否則不甚可靠，此點於應用時亦宜加以注意也。

第十節　淨相關(Partial Correlation)

上述各節，均為研究二種事實彼此相關程度之方法。然社會上事物間之關係，决非如是單純。蓋常有一事物，因受各原因影響，而與多數事物發生關係，且此多數事物中，彼此間又常互施其影響，情形至為複雜。例如五穀之收穫量，與所用田料，勞力，雨量，及日光等，均莫不有密切之關聯；惟在此數者之中，其間亦往往互為影響，而發生消長之變動。吾人於斯，苟欲求得收穫量與所用田料之關係，應用前法以處理，則此二者之關係，必受其他事物影響而稍變其相關程度，純粹之關係，當無由顯明。淨相關（或稱部分相關）之作用，即欲對此問

題，加以解析；將各事實中之雜出分子抽去，使減其影響，而表明任何二量之相關程度。易言之，卽在多數事物中，求得二量純淨相關之一方法也。

分析相關之意義，已如上述。今設有甲，乙，丙三量於此，彼此間均有相當之關係：其甲，乙之r爲+.55〔參閱表87，

表101. 甲，丙二量之關係

號次	甲量 X (1)	丙量 Y (2)	D_X (3)	D_Y (4)	D_X^2 (5)	D_Y^2 (6)	D_XD_Y (7)
1	40	30	—17	+4	289	16	— 68
2	44	21	—13	—5	169	25	+ 65
3	46	20	—11	—6	121	36	+ 66
4	48	22	— 9	—4	81	16	+ 36
5	52	23	— 5	—3	25	9	+ 15
6	54	28	— 3	+2	9	4	— 6
7	60	31	+ 3	+5	9	25	+ 15
8	64	29	+ 7	+3	49	9	+ 21
9	66	24	+ 9	—2	81	4	— 18
10	68	25	+11	—1	121	1	— 11
11	70	26	+13	0	169	0	0
12	72	33	+15	+7	225	49	+105
平均數	57	26	合計……		1348	194	+323 —103

$$r=\frac{+323-103}{\sqrt{1348}\times\sqrt{194}}=\frac{+220}{510.1}=+.43$$

此r可書爲r_{12}，即表示一二兩量之相關係數〕；甲，丙之r爲＋.43(此r可書爲r_{13}，)；乙，丙之r(即r_{23})則爲－.16。(此種相關，均可稱零級(Zero-order)相關。今欲在此三者之中，抽出任一何量而得其餘二量純淨相關之度，則可依下列三種事實淨相關之公式以求之：

$$r_{12.3}=\frac{r_{12}-r_{13}\cdot r_{23}}{\sqrt{(1-r_{23}^2)(1-r_{12}^2)}}\cdots\cdots(78)$$

$$r_{13.2}=\frac{r_{13}-r_{12}\cdot r_{23}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{23}^2)}}\cdots\cdots(78a)$$

$$r_{23.1}=\frac{r_{23}-r_{12}\cdot r_{13}}{\sqrt{(1-r_{12}^2)(1-r_{13}^2)}}\cdots\cdots(78b)$$

上列(78)式，爲計算1,2二量淨相關之公式(即將3量抽出)。其餘則爲求1,3及2,3二量之淨相關公式。今若將前例以求其結果，則可依式代入計算，便各得所求。但爲簡捷計，通常多利用對數以計算，並可另列一算表如下：

表102. 三種事實淨相關之計算

r (零級) (1)	$\log\sqrt{1-r^2}$ (2)	各r之乘積 $r\cdot r$ (3)	分子所得 價值 (4)	分子所得 對數 (5)	分母對數 (6)	二量純淨相關係數(第一級) 對數 (7)	二量純淨相關係數(第一級) 價值 (8)
$r_{12}=+.55$	$\bar{1}.9218$	$-.0688$	$+.6188$	$\bar{1}.7916$	$\bar{1}.9500$	$\bar{1}.8416$	$r_{12,3}+.69$
$r_{13}=+.43$	$\bar{1}.9556$	$-.0880$	$+.5180$	$\bar{1}.7143$	$\bar{1}.9162$	$\bar{1}.7981$	$r_{13,2}+.63$
$r_{23}=-.16$	$\bar{1}.9944$	$+.2365$	$-.3965$	$\bar{1}.5982$	$\bar{1}.8774$	$\bar{1}.7208$	$r_{23.1}-.53$

觀表102所得結果，在此甲，乙，丙，三量之中，無論將任何一量抽出，其餘二量純淨相關之度，均比通常方法算得者價值較大。由此可知多數相關事實中，欲求得任何二量相關之度，前法當不能得一純淨結果也。

以上為三種事實淨相關〔稱為第一級(first order)相關〕之算法。至四種事實之淨相關〔稱為第二級 second order〕，亦可根據下列公式分別求得。如利用對數計算時，並可參照表102方法列成表式以計算，則尤為妥捷。

$$r_{12\cdot34}=\frac{r_{12\cdot3}-r_{14\cdot3}\cdot r_{24\cdot3}}{\sqrt{(1-r_{14\cdot3}^2)(1-r_{24\cdot3}^2)}}\quad\cdots\cdots(79)$$

（其餘 $r_{13\cdot24}$，$r_{14\cdot23}$，……等之計算，均可仿此配合而得。）

第十一節　複相關(Multiple Correlation)

複相關，乃為研究某一事物與多數事物合成關係之用。其結果即以複相關係數(Multiple coefficient of correlation)爲表示關係程度之大小，與上節之淨相關適成相反。因前者乃在多數相關事實中，抽去其雜出分子，使減少影響，以示任何二量純淨相關之度，而此則將多數事實連合，求與另一事實關係之方法也。其計算公式如下：

$$r_{1\cdot23}=\sqrt{1-(1-r_{12}^2)(1-r_{13\cdot2}^2)}\quad\cdots\cdots(80)$$

或 $$r_{1\cdot32}=\sqrt{1-(1-r_{13}^2)(1-r_{12\cdot3}^2)}\quad\cdots\cdots(80a)$$

上二式爲求三種事實複相關係數之公式（即1量與2,3量連合之關係），其結果均同。計算時，先求出第一級相關係數(即淨相關)代入運算便可。今以前例(參閱表102)表明其算法如次：

r_{12}(即甲，乙之關係)$=.55$

$r_{13\cdot2}$(即甲，丙之淨相關)$=.63$　　代入(80)式

$r_{1\cdot23}$(即甲與乙，丙複合之關係)$=\sqrt{1-(1-.55^2)(1-.63^2)}$

$=\sqrt{1-(1-.303)(1-.397)}$ $=\sqrt{(1-(.697\times.603)}$

$=\sqrt{1-.420}$ $=\sqrt{580.}=.76$

在複相關中，其係數之值，常比零級相關爲高。如上例之.76，均比甲，乙之.55；甲丙之.43爲大，故學者往往利用之以求一事物與多數事物複合之關係，而期得一高度結果也。至四種事實之複相關，亦可以下列公式求算：

$$r_{1.234}=\sqrt{1-[(1-r^2_{12})(1-r^2_{13.2})(1-r^2_{14.23})]} \quad\cdots\cdots\cdots(81)$$

第十六章 證誤數量(Measures of Unreliability)

第一節 證誤數量之意義

大凡考察某一事物以研究其結果，則所得之數，往往祇爲全體中之一部份，而不能遍及事實之全部。故由此一部（係指隨意搜集者，Selection at randon)所得之集中數，差異數，相關數等，若非出於偶然，則斷不能爲眞正之結果。蓋眞正之結果，必須由事實全體(卽事實所有一切之數量)求出，而由一部有限之數量求得者，祇稱之曰實得結果，不過爲眞正結果之近似值耳。例如有錢六枚於斯，若將之試擲二十回而求其正面發現之平均數，如是者四十五次，其第一次結果如下：

正面之數	1	2	3	4	6
發現之次數	2	5	7	5	1

由上所得之實得平均數爲2.95，吾人當知此2.95，若非偶

然，則必不能與此四十五次平均數之平均數——即所謂眞正平均數——一致，而自有其相當之差異。他如中位數，差異數，相關數等，亦莫不皆然也。

實得數量旣與眞正數量有差，則必須求其相差之度，以證明實得數量變動之大小，然後方可知眞正數量發現之界限。故統計之硏究，除利用上述方法以分析事實內容外，尤不能不更求其證誤數量，以表明實得數量與眞正數量相差之度，而考察結果確度之大小爲何如也。

第二節　標準差求證誤數

標準差數，旣可用以表明某一事物各數量與其中量差異之程度，故亦可利用之以考證實得數量與眞正數量相差之數目。惟因各數量結果不同，求算方法亦因而互異。其各種證誤數之公式，茲分列如下：

(1)算術平均數證誤數之公式：

$$\sigma_M=\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(82)$$

σ_M＝平均數之標準差

σ＝實得數量之標準差

N＝數量數目(次數和)

茲以表77所載之事實爲例，說明此公式之應用及意義：

在表77內，　$M=63.08$　$N=225$　$\sigma=13.14$

將之代入前式，則

$$\sigma_M=\frac{13.14}{\sqrt{225}} \qquad =\frac{13.14}{15}=.88$$

其意義可解釋如下：

1. 在此實得之225數量中，其算術平均數爲63.08，而此實得平均數與眞正平均數之差數，若用標準差表之者則爲.88

2. 此誤差數.88，即可以證明實得平均數不可靠之程度。故常將之與實得平均數并列：即M＝63.08±.88。如此數愈小，則實得平均數之不可靠性愈小(即可靠性愈大)；反之，則不可靠性愈大。惟就上式而觀，此數之值係與N之平方根成反比例，故N如增加四倍，則其可靠之度可增加二倍；若N增加九倍，則其可靠之度，可增加三倍。

3. 統計上之習慣，常以±3σ爲確實限度(即依常態曲線原理，在±3σ之間，其中包含體數量百分之99.73，故以之爲標準。參閱128—133頁)。故眞正平均數之確實限度爲±3σ_M(其他各數亦然)。今既得σ_M爲88因此可知眞正平均數當在63.08±3(.88)，或63.08±2.64之間，即在65.72及60.44之間。

4. 由上解釋，可知眞正平均數當在實得平均數±3σ_M之間。若以機遇(Chances)言之，則眞正平均數之值，如在63.08±1(.88)之間(即63.96—62.20)，其機遇爲2.15比1(68.26：31.74，亦即可有之機遇爲2.15，不可有之機遇爲1.)；如在63.

.08±2(.88)之間(即64.84—61.32)，其機遇爲21比1(95.46：4.54)；如在63.08±3(.88)之間(即在65.72—60.44)，則其機遇爲369比1(99.73：.27)。此種意義，詳閱圖76(133頁)，當更顯明。

以上解釋，固可適用於算術平均數之證誤數，即其他數量之證誤數，亦可依此類推得之。

（2）中位數證誤數之公式：

$$\sigma_{MdN}=\frac{1.2533\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(83)$$

σ_{MdN}=中位數之標準差

由此式可以確定眞正中位數，乃在實得中位數$\pm3\sigma_{MdN}$之間。

（3）四分位差證誤數之公式：

$$\sigma_{Q}=\frac{1.11\sigma}{\sqrt{2N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(84)$$

σ_{Q}=四分位差之標準差

（4）標準差證誤數之公式：

$$\sigma_{\sigma}=\frac{\sigma}{\sqrt{2N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(85)$$

σ_{σ}=標準差之標準差

由上二式，可知眞正四分位差，乃在實得四分位差$\pm3\sigma_{Q}$之

間，而眞正標準差，則在實得標準差±3σ σ之間。

（5） 相關係數證誤數之公式：

$$\sigma r=\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(86)$$

σr ＝相關係數之標準差

（相關率證誤數之公式與此相同，惟將 r 改爲 η 便得。）

由上式亦可以確定二量之眞正相關係數，乃在實得相關係數±3σr之間。故當求得相關係數之時，亦常將其證誤數幷列，以明確度之大小。如表91所得之 r 爲.507。若將之代入上式求證誤數，則得結果如下：

$$\sigma r=\frac{1-(.507)^2}{\sqrt{120}}=\frac{1-.257}{10.955}$$

$$=\frac{.743}{10.955}=.068$$

即 r＝.507±.068

（6） 差數證誤數之公式　以上爲求一列數量證誤數之公式。至二列數量之差數（如平均數，四分位差，標準差，相關係數等），亦可利用其證誤數而再求其差數之證誤數（通常以求二列數量平均數之差數爲多），以表明相差眞確之限度。其式如下：

$$\sigma_d=\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2} \quad \cdots\cdots(87)$$

σ_d＝二列數量差數之標準差(d=difference)

σ_X及σ_Y＝某二列數量之證誤數(如求平均數差數之證誤數時，則$\sigma_X=\sigma_{M1}$，$\sigma_Y=\sigma_{M2}$，餘仿此)

第三節　概差求證誤數

概差亦稱概誤差 (Probable error，通常書爲P.E.)，乃離中差由平均數之中位數也。如在常態次數分配中，概差原與四分位差相同，即自中量左右展開至 Q 或 P.E. 之間，各含有全體數量百分之25；±P.E. 間，則含有全體數量百分之 50。惟Q已採用爲差異數量，而P.E. 則用爲證誤數量，且常較前節所述之σ應用爲多(習慣上常以P.E. 表明證誤數，而用σ者較少)，此其不同之點也。至 P.E. 與σ之關係，則有如下列：(參閱圖101)

$$P.E.=.6745\sigma \text{(參閱表84)}$$

P.E. 之應用及與σ之關係，旣如上述。故前節所述之公式，均可按此而轉變爲下列各式：

$$P.E._M=.6745\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \cdots\cdots(88)$$

$$P.E._{MdN}=.8454\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad \cdots\cdots(89)$$

$$P.E._{Q} = .5306\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (90)$$

$$P.E._{\sigma} = .6745\frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (91)$$

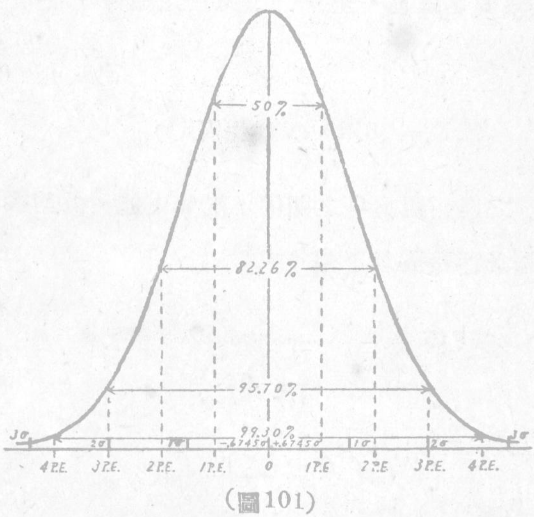
$$P.E._{r} = .6745\frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (92)$$

$$P.E._{\eta} = .6745\frac{1-\eta^2}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (93)$$

$$P.E._{d} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (94)$$

(94式中之E_1及E_2，爲二列數量證誤數之用P.E.表示者。)

常態曲線下P.E.之位置及所含之數量



(圖101)

上列為 P.E. 表示證誤數之公式。至統計之習慣，通常亦以±3P.E.為實得數量之確實限度(然亦有以±4P.E.為標準者)。蓋眞正數量之値，絕少在實得數量±3P.E.以外也。至以機遇言之，則眞正數量，如在實得數量±1P.E.之間，其機遇為1與1之比(50：50)；如在實得數量±2P.E.之間，其機遇為4.6與1之比(82.26：17.74)；如在實得數量± 3P.E.之間，其機遇為22與1之比(95.70：4.3)；如在實得數量±4 P.E.之間，則機遇為142與1之比(99.30：.7)。又眞正數量如在實得數量±4.4P.E.之間，其機遇則為369與1之比。由是可知±4.4P.E.，實與± 3σ相等。此種理由，吾人試細閱圖 101，當更可瞭然矣。

附　　錄

甲・計　算　用　表

表1. 常態曲線下各$\frac{x}{\sigma}$之縱線高度

x/σ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	100000	99995	99980	99955	99920	99875	99820	99755	99685	99596
0.1	99501	99396	99283	99158	99025	98881	98728	98565	98393	98211
0.2	98020	97819	97609	97390	97161	96923	96676	96420	96156	95882
0.3	95600	95309	95010	94702	94387	94055	93723	93382	93024	92677
0.4	92312	91399	91558	91169	90774	90371	89961	89543	89119	88688
0.5	88250	87805	87353	86896	86432	85962	85488	85006	84519	84060
0.6	83527	83023	82514	82010	81481	80957	80429	79896	79359	78817
0.7	78270	77721	77167	76610	76048	75484	74916	74342	73769	73193
0.8	72615	72033	71448	70861	70272	69681	69087	68493	67896	67298
0.9	66689	66097	65494	64891	64287	63683	63077	62472	61865	61259
1.0	60653	60047	59440	58834	58228	57623	57017	56414	55810	55209
1.1	54607	54007	53409	52812	52214	51620	51027	50437	49848	49260
1.2	48675	48092	47511	46933	46357	45783	45212	44644	44078	43516
1.3	42956	42399	41845	41294	40747	40202	39661	39123	38569	38058
1.4	37531	37007	36487	35971	35459	34950	34445	33944	33447	32954
1.5	32465	31980	31500	31023	30550	30082	29618	29158	28702	28251
1.6	27804	27361	26923	26489	26059	25634	25213	24797	24385	23978
1.7	23575	23176	22782	22392	22008	21627	21251	20879	20511	20148
1.8	19790	19436	19086	18741	18400	18064	17732	17404	17081	16762
1.9	16448	16137	15831	15530	15232	14939	14650	14364	14083	13806
2.0	13534	13265	13000	12740	12483	12230	11981	11737	11496	11259
2.1	11025	10795	10570	10347	10129	09914	09702	09495	09290	09090
2.2	08892	08698	08507	08320	08136	07956	07778	07604	07433	07265
2.3	07100	06939	06780	06624	06471	06321	06174	06029	05888	05750
2.4	05614	05481	05350	05222	05096	04973	04852	04734	04618	04505
2.5	04394	04285	04179	04074	03972	03873	03775	03680	03586	03494
2.6	03405	03317	03232	03148	03066	02986	02908	02831	02757	02684
2.7	02612	02542	02474	02408	02343	02280	02218	02157	02098	02040
2.8	01984	01929	01876	01823	01772	01723	01674	01627	01581	01536
2.9	01492	01449	01408	01367	01328	01288	01252	01215	01179	01145
3.0	01111	00819	00598	00432	00309	00219	00153	00106	00073	00050
4.0	00034	00022	00015	00010	00006	00004	00003	00002	00001	00001
5.0	00000									

本表所載，爲常態曲線下各y之值，亦卽各y與y_o之比例・求算時係假定y_o(卽由平均點引出之縱線高度)爲100,000(或1)而得・繪畫常態曲線，如利用此表，則可不必依公式(3)計算，手續自較簡捷・前列表37(129頁)，卽據此而求各y之值，試一檢閱，自可明瞭此表之應用矣・

表2. 常態曲線下各$\frac{x}{\sigma}$所含之部份面積

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4083	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	.4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4758	4762	4767
2.0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4080	4981
2.9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4987	4987	4988	4988	4988	4989	4989	4989	4990
3.1	4990.3	4991	4991	4991	4992	4992	4992	4992	4993	4993
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.674									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4999.966									
5.0	4999.997133									

上表係假定常態曲線下之面積總和爲10,000(或1)，而計出各y(卽$\frac{x}{\sigma}$)與y_0(卽平均點)間之部份面積(卽所含數量數目)•常態曲線繪畫後，欲得任何部份之面積，均可利用此表以爲計算(參閱132頁)•例如y_0至.8σ(卽$\frac{x}{\sigma}$=.8)之間，則包含面積2881，或28.81%；2.55σ之間，則包含面積4946，或49.46%；其餘均仿此類推便得•

表3. ρ 與 τ 相當之值

ρ	τ	ρ	τ	ρ	τ	ρ	τ
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8039
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3953	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9173
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9269
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7363	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9909
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

上表 τ，係按 $\tau=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$ 一式而來．故求得 ρ 後，即可檢視此表而得 τ 相當之值．如 $\rho=.50$，則 $\tau=.5176$．至 ρ 若為小數後三位數時，則可以比例方法而得 τ 之值．如 $\rho=.505$，則 $\tau=.52265$，即

$.01 : .0101 :: .005 : X \qquad X = \frac{.0101 \times .005}{.01} = .00505$

$.5176 + .00505 = .52265$

(式中.01爲.50與.51之差，而.0101則爲其相當r之差，.5176即爲ρ .50之r相當值。)

表4. R與r相當之值

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.209	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.369	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.24	.399	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000
.25	.414						

上表r，係按$r = 2\cos\frac{\pi}{3}(1-R) - 1$而來，旣得R之後，即可

檢查其相當r之值。如R計至小數後三位數時，則亦可仿照前法以比例而得r之值。例如R＝.692，則r＝.8972，即

$$.01:.006::.002:X \qquad X=\frac{.006\times.002}{.01}=.0012$$

$$\therefore .896+.0012=.8972$$

（參閱271頁）

表5. U與r相當之值

U	r	U	r	U	r	U	r
.00	1.0000	.13	.9174	.26	.6848	.39	.3387
.01	.9996	.14	.9044	.27	.6615	.40	.3089
.02	.9982	.15	.8905	.28	.6375	.41	.2788
.03	.9958	.16	.8757	.29	.6129	.42	.2485
.04	.9924	.17	.8602	.30	.5877	.43	.2180
.05	.9880	.18	.8439	.31	.5620	.44	.1873
.06	.9826	.19	.8268	.32	.5358	.45	.1564
.07	.9862	.20	.8089	.33	.5091	.46	.1253
.08	.9688	.21	.7902	.34	.4819	.47	.0941
.09	.9604	.22	.7707	.35	.4542	.48	.0628
.10	.9510	.23	.7504	.36	.4260	.49	.0314
.11	.9407	.24	.7293	.37	.3973	.50	.0000
.12	.9295	.25	.7074	.38	.3682		

上表爲U.00至.50之r相當值，係按$r \| \cos\pi U$而來。至當U超過.50時，則r爲負數，可由相反之關係而得其值。例如U＝.55，則＝—.1564，餘類推。又當U爲小數後三位數時，亦可以比例法而得r之值。如U＝.275，則r＝.6495其算法如下：

$$.01:.024::.005:X \qquad X=\frac{.024\times.005}{.01}=.012$$

$$.9615-.012=.6495$$

表6. 常用對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

常　用　對　數　表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

乙・公式及圖表索引

公 式 目 次

圖　　次

表次

丙．參考書報

1. 中文

王仲武：	統計學原理及應用	（商務印書館）
	漢譯統計名詞	（仝上）
朱君毅：	教育統計綱要	（仝上）
	教育統計學	（仝上）
	統計測驗名詞漢譯	（仝上）
金國寶：	統計學大綱	（仝上）
周調陽：	教育統計學	（中華書局）
孟　森：	統計通論	（商務印書館）
陳炳權：	統計方法	（大東書局）
陳其鹿：	統計學	（商務印書館）
盛　俊：	編製上海物價指數論叢	（財政部駐滬調查貨價處）
曾鯤化：	統計學教科書	（羣益書局）
甯恩承：	統計方法	（商務印書館）
楊西孟：	指數公式總論	（北平社會調查所）
趙文銳：	統計學原理	（商務印書館）
劉廼敬：	實用統計學	（南京書店）
薛鴻志：	教育統計學大綱	（北京師範大學）
顧　澄：	統計學之理論	（文明書局）
樊　弘：	社會調查方法	（商務印書館）
蔡毓聰：	社會調查之原理及方法	（北新書局）
吳半農：	中國之經濟地位統計圖	（北平社會調查所）

中國統計學社：統 計 譯 名

立法院統計處：統 計 月 報

上海市社會局：社 會 月 刊

2. 英 文

Bowley, A.L.: Elements of Statisties, P.S. King and Scn.

Brinton, W C.: Graphic Methods for Presenting Facts, Mcgraw-Hill Book Company.

Burgess, R W.: Introduction to the Mathematics of Statistics, Houghton Mifflin Company.

Chaddock,R.E.: Principles and Method of Statistics, Houghton Mifflin Company.

Davies, G.R.: Introduction to Economic Statistics, The Century Company.

Elderton, W.P., and Ethee. M.: Primer of Statistics, Adam and Charles Black, LTD.

Fisher, I.: The Making of Index Numbers, Houghton Mifflin Company.

Gavett, G. I.: A First Course in Statistical Methods, Mcgarw-Hill Book Company.

Kelley, T.L.: Statistical Method, Macmillan Company.

King, W. I.: The Elements of Statistical Methods, macmillan Company.

MaCall,W.A.: How to Measurement in Education, Macmillan Company.

Marshall, W.C.: Graphical Methods, Mcgraw-Hill Book Company.

Mills, F.C.: Statistical Methods as Applied to Economics and Business, Henry Holt.

Rietz, H. L.(Editor): Handbook of Mathematical Statistics, Houghton Mifflin Company.

Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Macmillan Company.

Sutcliffe, W.G.: Elementray Statistical Methods, Mcgaw-Hillr Book Company.

Thorndike, E.L.: An Introduction to the Theory of Mental and Social Measurement, Teachers College, Columbia University.

Yule, G.U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Charles Griffin and Company.

李　檻　時：Business Statistics (商務印書館)

3. 日文

石井秀彥：統計圖表之描畫法(統計友社)

森　數　樹：統計學概論　(嚴松堂書店)

道家齊一郎：參考統計學　(同　上)

矢野恒太及
白崎亨一：日本國勢圖會(日本評論社，昭和六年版)

丁· 統計法規

1. 統 計 法 （二十一年十月十九日公佈 二十三年五月一日施行）

第一章 通則

第一條 中華民國各級政府統計之調查編製全國統計總報告之編纂統計辦法之統一工作之分配及事務之指導監督均依本法之規定

第二條 各下級政府之主計機關或主計人員關於統計事務應受該管上級政府主計機關之直接監督與指導

第三條 政府應辦理之統計爲左列各種

一 基本國勢調查之統計

二 各機關職務上應用之統計

三 各機關所辦公務之統計

四 公務人員及其工作之統計

五 各機關認爲應辦之其他統計

第四條 前條各種統計由有直接關係之各機關辦理之但有左列情事之一時在中央由國民政府主計處在地方由省政府或直隸於行政院之市政府主計機關分別辦理之

一 屬於基本國勢調查者

二 不應專屬於任何機關之範圍者

三 各機關未及調查編製者

第五條 各級政府及中央各機關統計範圍之劃分由國民政府主計處根據需要情形擬具方案經全國主計會議之議

決呈請國民政府核定之有變更時亦同但無關根本原則之變更得由國民政府主計處與關係機關商定之

立法司法考試監察等機關爲行使職權所需要之特種統計應由各該機關與國民政府主計處商定其範圍

第六條　前條第一項方案應明定左列各事項

一　統計之機關單位及其分級

二　統計區域

三　分期進行之統計計劃

四　統計科目

五　統計單位

六　統計表册格式

七　調查及編製之方法

八　統計之公開程度

九　統計報告印行範圍

十　其他應行明定事項

第七條　統計之機關單位及其分級不得抵觸預算法關於機關單位及其分級之規定

第八條　統計區域之劃定除經常性質之統計應經第五條第一項程序外其臨時性質之統計國民政府主計處得斟酌全國情形劃定之

第九條　國民政府主計處爲統籌全國統計事業之進行應擬定每一年每五年每十年或其他一定期間之統計計劃

全國戶口至少每十年應普查一次其他重要統計能於普查戶口時普查者應同時爲之

第十條　各級政府之主計機關辦理基本國勢調查或其他有普查性質之統計除其需要情形得設臨時附屬機關辦理外並得與其他機關爲臨時之聯絡組織

前項統計非於其經費預算成立後不得舉辦

第十一條　統計科目單位表册格式及調查編製方法除第三條第二欵第三欵及第五欵統計中專供特殊目的之用者外均應有統一之規定但因特殊情事不能適用時關係機關主辦統計人員得呈請國民政府主計處核定變通辦法

前項專供特殊目的之用之統計國民政府主計處如認爲可兼供他種目的之用時於不妨碍其原定目的之範圍內得變更其科目單位表册格式及調查編製方法

財政統計之科目及單位應與預算上及會計上所用者相合

第十二條　國民政府主計處應依第五條統計方案之規定分配工作於駐在各機關辦理統計人員並監督指導之

臨時性質之統計除準用前項規定外各機關主管長官得令其辦理統計人員辦理之

第十三條　統計人員與所在機關長官因統計事務發生爭執時由其該管上級機關主管長官及其主辦統計人員處理之

第十四條　各機關之統計檔案與公務人員及其工作紀錄之册籍均由該機關辦理統計人員掌管之

第十五條　各級政府主計機關爲辦理統計之需要得隨時調閱本政府或所屬下級政府各機關有關係之檔案表册除軍事外交之機密案件外各該機關長官不得拒絕各機關主辦統計人員調閱本機關之檔案表册亦同

第十六條　政府辦理統計時被調查者無論爲機關團體或個人均有據實詳盡報告之義務

第十七條　辦理統計人員不得利用其職權及地位妨害被調查者之權利

第二章　統計之編製及報告

第十八條　每一年度之統計應自一月一日至六月三十日及七月一日至十二月三十一日各爲半年度編製之時但遇必要時得按季按月或按其他一定期間爲之

第十九條　各級機關之統計報告經主管長官及主辦統計人員簽名後由主管長官呈送該管上級機關但其統計非本機關所需要而由上級主計機關或主辦統計人員直接命令辦理者由主辦統計人員呈送之

第二十條　統計報告經前條程序依次遞至中央最高主管機關時其由主管長官呈送者由國民政府轉發主計處其由主辦統計人員呈送者逕呈主計處均由主計處統計局彙編全國統計報告

省及直隸於行政院之市其統計報告之呈遞及總報告之彙編準用前項之規定

第廿一條 關於第五條第二項之統計應由主計處或主辦統計人員遲送各關係需要機關

第廿二條 統計之公開程度分左列三類

一 秘密類 除供給政府機關或公務人員及其他利害關係人之合法需要外不得洩漏之

二 公開類 得供公衆閱覽及詢問

三 公告類 應按規定時期及其他條件於一定地域公告之

第廿三條 各級政府機關之收支統計應各於其所在地按月公告一次

第廿四條 公開類及公告類之統計得印行之

第廿五條 國民政府主計處每年根據全國統計總報告提要編纂中華民國分類統計年鑑呈經國民政府核定印行各省市縣亦得編印本省市縣之分類統計年鑑

第三章 地方統計

第廿六條 省政府及直隸行政院之市政府除由中央政府委託辦理之統計外不抵觸第五條統計方案之範圍內得按其需要辦理本省或本市之統計

第廿七條 省政府與縣市政府及省政府所屬各機關應辦之統計除依第五條程序所定外其範圍之劃分由省主計機關

擬具方案經全省主計會議之議決呈請省政府核定之有變更時亦同

第廿八條　縣市政府除由中央政府或省政府委託辦理之統計外於不抵觸第五條及前條統計方案之範圍內得按其需要辦理本縣或本市之統計

第廿九條　第二十六條及第二十八條省市縣之統計應於編竣後各以一份呈送該管上級政府主計機關

第四章　附則

第三十條　國立或地方設立之學術機關或教育機關為研究學術而辦理之統計不適用本法之規定

第卅一條　本法施行細則由國民政府主計處定之

第卅二條　本法施行日期以命令定之

2.統計法施行細則（廿三年四月二十四日公佈　廿三年五月一日施行）

第一條　本細則依統計法第三十一條之規定制定之

第二條　中央政府主辦統計之機關為國民政府主計處統計局省市縣政府主辦統計之機關設於各該政府主計機關之內

在各省市縣政府主計機關未經成立以前各該政府應設置臨時主辦統計之機關以行使主計機關統計部分之職權並受各該管上級政府主計機關或臨時主辦統計機關之監督指導

前項臨時主辦統計機關之組織規則另定之

各省市縣政府臨時主辦統計之機關準用本細則各條之規定

第三條 各級政府及其機關主辦統計之人員及其佐理人員均爲主計人員

主辦統計人員分左列三等

一 統計長簡任

二 統計主任薦任

三 統計員委任

佐理人員適用文官之名稱與等級

第四條 各機關統計事務簡單毋須專設主辦統計人員辦理者得由該管會計人員兼辦之

第五條 中央政府各機關及各省政府及直隸於行政院之各市政府主計機關辦理統計人員由國民政府主計處統計局提請主計會議議決設置任免之

省政府及直隸於行政院之市政府各機關及各縣市政府主計機關主辦統計人員由省政府及直隸於行政院之市政府主計機關呈請國民政府主計處設置任免之

縣市政府各機關主辦統計人員由各該政府主計機關呈請省政府主計機關設置任免之並轉呈國民政府主計處備案

省市縣政府各機關統計佐理人員由該政府主計機關

分別設置任免之並轉呈國民政府主計處備案

第六條　各機關主辦統計人員與統計佐理人員應經考試銓敘或訓練及格方得任用其訓練與任用標準另定之

第七條　各省市縣政府主計機關除受上級政府主計機關之直接監督與指導外並受所在政府長官之指揮

各機關或所屬機關主辦統計人員應對於所在政府主計機關指定之上級主辦統計人員負責如未經指定上級主辦統計人員時應直接對於所在政府主計機關負責

各機關或所屬機關主辦統計人員除受該管上級主辦統計人員或所在政府主計機關之直接監督與指導外並受所在機關長官之指揮

第八條　各級政府及其機關為謀統計事務與其他行政事務之聯絡起見得設立統計委員會由主辦統計人員與各部份組織（如署司廳處局所或科等）指定之人員組織之以主辦統計人員為主席各委員均為無給職

統計委員會之織務如左

一　審議關於調查統計之計劃及統一事項

二　審議關於各部分組織統計材料之徵集整理彙編應用等事項

第九條　各機關主辦統計人員每屆各該機關編製年度概算之前應擬定統計計劃提經統計委員會審議後呈送上級

主辦統計人員或所在政府主計機關核定

各級政府主計機關應根據各機關統計之組織與統計之計劃會同各該管機關決定各該統計部分之經費預算列入各該機關之概算其事業經費應單獨開列

第十條 基本國勢調查包括國家之人民土地資源及政治社會經濟文化等同在某一時期內舉行之普查

基本國勢調查關係全國或數省或數個直隸於行政院之市者由國民政府主計處主辦之但省及直隸於行政院之市政府之主計機關亦得單獨舉辦該管區域內之基本國勢調查

全國基本國勢調查至少每十年舉行一次

第十一條 辦理基本國勢調查之一部分爲某一種普查如戶口普查農業普查工業普查等其舉行時期及地域除戶口普查外不受前條之限制其主辦之機關由國民政府主計處核定之

第十二條 省市縣政府主計機關舉辦該管區域內之基本國勢調查或某一種普查時應先將左列各欵事項呈請該管上級政府主計機關核定之

一 調查之項目地域時期與單位

二 應用之條問表格與其他設備

三 整理與編製之方法

四 設置臨時附屬機關之組織與任用人員之標準

五　經費之預算

第十三條　中央政府各機關舉辦某一種普查時各該主辦統計人員應先將前條各欵事項呈請國民政府主計處核定之

省市縣政府各機關舉辦某一種普查時各該主辦統計人員應先將前條各欵事項呈由所在政府主計機關轉呈上級政府主計機關核定之

第十四條　各機關職務上應用之統計包括舉凡可供各該機關擬訂其施政計劃與行使其職務所需要之參考材料

第十五條　各機關應將前條所需要之各種統計詳舉其名稱與範圍通知所在政府之主計機關分交有直接關係之各機關調查登記後送由該主計機關分別核轉

第十六條　各機關直接調查登記之材料應先經所在政府主計機關審核後方得供職務上之應用

第十七條　各機關所辦公務之統計包括各該機關執行職務經過與結果之紀錄

凡屬左列性質者均應有詳確之紀錄

一　可以表現施政計劃推行之成績與程度者

二　可以表現工作之效率與每單位之費用者

三　可以表現財政收支之狀況者

第十八條　公務統計應注重實際數字並應以統計方式表現之其應用之單位表式以及各項比率均應有統一之規定

第十九條　各機關所辦公務統計之材料應從一般文件與報告中

整理搜集各機關主辦統計人員應派定統計佐理人員在各部分組織中担任工作以便常川登記就地取材前項統計佐理人員於行政上應受所在部分組織長官之指導並應將整理結果備供所在部分組織之應用所在部分組織長官應將關係文件報告等隨時供給統計人員之使用

第二十條　各機關公務人員之統計包括各機關及所屬各部分之組織編制員額與公務人員之資歷等級薪給以及進退遷調奬懲等之紀載

第廿一條　各機關公務人員工作之統計包括各個公務人員辦理各項職務之成績效率與所費以及日常辦公到退請假出勤等之情形

第廿二條　各機關公務人員及其工作紀錄之册籍如左

一　機關組織編制員額登記册

二　公務人員資歷等級薪給登記册

三　公務人員進退遷調登記册

四　公務人員辦公到退出勤請假登記册

五　公務人員領用經費與物品登記册

六　公務人員考績結果及奬懲登記册

七　其他應行登記事項之登記册

第廿三條　凡可直接取得某種原始統計材料之機關爲該種統計有直接關係之機關

各種統計應由有直接關係之各機關辦理之遇有多數有直接關係之機關時應由所在政府主計機關指定某一機關單獨辦理或數機關會同辦理之

第廿四條 國民政府主計處根據中央各機關及各級政府之需要情形擬具全國統計方案提經全國主計會議之議決呈請國民政府核定公佈之

省政府主計機關根據省政府所屬各機關及各縣市政府之需要情形擬具全省統計方案提經全省主計會議之議決呈由國民政府主計處核定後轉請省政府公佈之

直隸於行政院之市政府主計機關根據各該市之需要情形擬具全市統計方案呈由國民政府主計處核定後轉請市政府公佈之

縣市政府主計機關根據各該縣市之需要情形擬具全縣市統計方案呈由省政府主計機關核定機後轉請縣市政府公佈之

第廿五條 在全國主計會議未舉行以前國民政府主計處應根據實際情形擬定臨時統計方案召集臨時全國統計會議經審議後呈請國民政府核定頒行之

在全省主計會議未舉行以前省政府主計機關應根據實際情形擬定臨時統計方案召集臨時全省統計會議經審議後呈經國民政府主計處核定並轉請省政府頒

行之

第廿六條　臨時全國統計會議之組織規則由國民政府主計處定之各省臨時全省統計會議之組織規則由各該省政府主計機關擬訂後呈請國民政府主計處核定之

第廿七條　各省舉行全省主計會議或臨時全省統計會議時國民政府主計處應派員指導

第廿八條　各種統計材料之查報與彙報機關單位及其分級標準應由各級政府主計機關依統計之區域定之

第廿九條　統計區域應視統計材料之性質依下列標準劃分之

一　行政範圍

二　經濟地位

三　文化程度

四　國防關係

五　其他適用之標準

第三十條　各個統計區域應有最高級彙報機關

第卅一條　統計報告之編送自最下級機關單位開始依次遞至最高級機關單位

最下級統計機關應將原始統計材料依照應用報告表格式編製後送由次高級統計機關依照彙報時應用之表格彙編後送再高級統計機關如此逐級遞送至各區域內之最高級彙報機關彙送國民政府主計處

第卅二條　中央或省及直隸於行政院之市政府主辦基本國勢調

查時其原始材料應由最下級統計機關逐級遞送至中央或省或直隸於行政院之市政府主計機關集中整理之

第卅三條　各項統計工作應視其需要之緩急以及人才經費與設備之情形訂定進行先後之次序至於每項統計之辦理亦得分爲若干階段凡屬初辦性質者得先辦抽查或試查並分期完成全部統計

前項統計工作應分別訂定分期進行之計劃並明定各個時期內完成之範圍以及所需之臨時員額設備與經費之預算等

第卅四條　各級政府之主計機關辦理基本國勢調查或某種普查時得設立臨時附屬機關並得調用各機關之人員臨時機關之組織得採用委員制由有關係機關聯合組織之以主計機關爲召集機關

調用之人員應受主計機關或臨時機關之指揮監督

第卅五條　統計報告科目之統一應由國民政府主計處將全國統計總報告之範圍分爲門類綱目欄並分別設定其名稱門之下分類類之下分綱綱之下分目目之下分欄目爲各個統計表格之名稱欄爲各表中之統計事項

第卅六條　各機關主辦統計人員應依據全國統計總報報告之科目擬定各種調查登記與整理册表之格式但遇特殊情形有變更之必要時應呈請所在政府主計機關核定之

第卅七條　國民政府主計處應將各種統計科目之定義與統計技術上應用之名詞確定解釋並公布之

第卅八條　統計之單位均以國定制度爲準遇有不同單位者或在國定制度尙未施行地方報告時除仍得使用原有單位外應將折合方法詳細註明

第卅九條　統計材料之分類標準與排列次序均應依據國民政府主計處之規定

第四十條　統計表册分調查表登記册整理表與報告表四種調查表爲一次探問之用登記册爲繼續登錄之用整理表爲將調查表或登記册中之材料綜合分析時之用報告表爲將整理之結果正式彙報時之用

第四一條　各機關報告表之格式由各該政府主統計機關定之其數字均用阿拉伯字體塡寫由左而右表內之總計共計與小計均居前列表之紙張不得小於十九與二十七公分之見方

調査表登記册與整理表之格式由各機關主辦統計人員擬定經所在政府主計機關核定後行之

各機關之所屬機關報告表格式由各該管上級主辦統計人員或所在政府主計機關定之其調査表登記册與整理表之格式由各該所屬機關主辦統計人員擬定經各該管上級主辦統計人員或所在政府主計機關核定後行之

本條各項表册格式國民政府主計處認爲應令全國一致者統由其製定

第四二條　各級政府主計機關應依照統計方案之規定分配工作於駐在各機關主辦統計人員並監督指導之

各機關主辦統計人員對於各該所屬主辦統計人員亦同

第四三條　各機關主辦統計人員經所在政府主計機關或上級主辦統計人員依照統計方案之規定分配工作或經所在機關長官令辦臨時性質之統計時均應提出各該機關統計委員會報告與商議進行方法並按期將進行情形報告所在政府主計機關或上級主辦統計人員與所在機關長官

第四四條　各機關或所屬機關主辦統計人員遇有所在機關長官令辦臨時性質之統計時應即擬具進行計劃呈請上級主辦統計人員或所在政府主計機關核定如需要預算以外之開支時應附呈臨時經費預算經核准成立後方得舉辦

第四五條　各機關統計人員與所在機關職員因統計事務發生爭執時由所在機關長官處理之

第四六條　各機關辦理統計人員除有違法或廢弛職務或其他失職行爲之事情外不得受免職降級減俸或其他懲戒處分

第四七條 凡具有統計法第三條各項統計材料之文件報告册籍等均爲統計檔案

第四八條 各機關公務人員及其工作紀錄之册籍由國民政府主計處擬定統一之格式各機關如有特殊需要得增添紀錄之事項

前項册籍由各機關公布並執行後交各該機關統計人員掌管之遇有紀錄不全或不實時應退回重辦或拒絕接受

第四九條 各機關公務人員及其工作紀錄之册籍完全時其下年度之預算方得成立與執行

第五十條 各級政府主計機關爲辦理統計事務之需要調用所在政府或所屬下級政府各機關有關係之檔案表册時各該機關應即移調如因職務上同時需要使用時應復明延緩移調之日期但遇主計機關派員前來抄錄時不得遷延

各機關主辦統計人員調閱或抄錄所在機關各部分組織之檔案表册時亦同

第五一條 各機關辦理調查遇有必須避免人民之疑慮時得委託團體或個人爲之但應經所在政府主計機關之同意並應將一切費用實報實銷

前項團體或個人受委調查時應以各該團體或個人之名義爲之

第五二條　統計報告內一切材料之起訖時期凡屬月報者應自每月一日開始季報自每年一四七十各月一日開始半年報自每年一七各月一日開始年報自每年七月一日開始

彙報機關應將材料按期催報並整理後塡入報告表準時彙報

凡規定每一年報告者彙報期間不得逾半年每半年報告者彙報期間不得逾三個月每季報告者彙報期間不得逾兩個月每月報告者彙報期間不得逾一個月均自規定期間終了時起算

教育年度之統計材料得分爲兩個半年度彙報之上半年度應自每年二月一日起開始塡送下半年度應自八月一日起開始塡送

第五三條　各級政府統計材料之彙編與發表由各該政府主計機關爲之

各機關之統計材料未經所在政府主計機關之核定不得發表

第五四條　各機關需要之統計材料應通知所在政府主計機關分飭所在政府有直接關係之機關主辦統計人員或下級政府主計機關分別查報後統由所在政府主計機關彙齊具復遇有現成之材料或無調查統計之必要及無調查之可能者由所在政府主計機關直接具復之

各機關收到徵集統計材料之文件應即轉送所在政府主計機關辦理之

第五五條 關於經常統計報告之呈送各級政府各機關之所屬機關主辦統計人員編製該所屬機關統計報告送由主管長官簽名蓋章後送呈上級機關長官發交該機關主辦統計人員連同該機關及其他所屬機關之材料彙編該機關統計報告送由主管長官簽名蓋章後送呈所在政府發交主計機關連同各下級政府之材料彙編該政府之統計總報告

各下級政府主計機關彙編各該政府統計總報告送由所在政府長官簽名蓋章後送呈上級政府發交該管主計機關連同本政府各機關之統計報告彙編該上級政府統計總報告

第五六條 各級政府主計機關所需關於經常統計報告以外之材料得直接命令所在政府各機關主辦統計人員或下級政府主計機關直接呈送之惟所在政府各機關之所屬機關或下級政府各機關之材料應由各該管上級主辦統計人員或各該下級政府主計機關轉飭呈轉

第五七條 關於統計法第五條第二項之統計其有秘密性質者應由各級政府各機關主辦統計人員逐級密呈至國民政府主計處送交各關係需要之機關如因時間關係須由主辦統計人員逕送者仍應另錄一分逐級密呈國民政

府主計處存查

第五八條　秘密類之統計應經所在政府及其主計機關雙方同意後方得供給政府機關或公務人員及其他利害關係人之合法需要

第五九條　可供公衆閱覽詢問或抄錄之統計於必要時得酌收手續費

第六十條　凡須印行之統計應按期爲之印後遇有錯誤時應先附以勘誤表方得發行

第六一條　各級政府機關每月財政收支統計應儘次月月底以前公告之

第六二條　各機關主辦統計人員爲編製每月財政收支統計除得調閱各項收支簿籍憑証外並得會同辦理會計審計出納及管理之人員隨時檢視所存之金錢物品及其他一切財產

第六三條　各級政府編纂統年鑑得選錄不屬政府機關辦理之統計並得約集學術研究機關團體或個人共同編纂之

第六四條　本細則如有未盡事宜由國民政府主計處呈請修正之

第六五條　本細則自公布之日施行

3. 考試法規

一．高等考試統計人員考試條例（二十四年八月五日考試院修正公佈）

第一條　凡統計人員之高等考試除法律別有規定外依本條例

之規定行之

第二條　中華民國國民有左列各款資格之一者得應統計人員之高等考試

一　公立或經立案之公私立大學獨立學院或專科學校統計經濟財政商業各學科畢業得有證書者

二　教育部認可之國外大學獨立學院或專科學校統計經濟財政商業各學科畢業得有證書者

三　有大學或專科學校統計經濟財政商業各學科畢業之同等學力經高等檢定考試及格者

四　有統計專門著作經審查及格者

五　經同類之普通考試及格四年後者

六　曾任統計職務委任官及與委任官相當職務三年以上有證明文件者

第三條　第一試之科目如左

甲　必試科目

一　經濟學　二　統計學　三　社會調查　四　統計應用數學　五　統計實務（本科目以實例命題）　六　統計法規

乙　選試科目

一　民法　二　戶籍法　三　社會學　四　財政學　五　貨幣及銀行論

以上選試科目任選一種

第四條　第二試分筆試及口試

甲　筆試

一　總理遺教　建國方略　建國大綱　三民主義及中國國民黨第一次全國代表大會宣言

二　中國歷史及地理　　三　憲法（憲法未公佈前考中華民國訓政時期約法）

乙　口試　就應考人第一試之必試科目及其經驗考試之

第五條　本條例自公佈之日施行

二•普通考試統計人員考試條例（二十四年九月三日考試院公佈）

第一條　凡統計人員之普通考試除法律別有規定外依本條例之規定行之

第二條　中華民國國民有左列各款資格之一者得應統計人員之普通考試

一　公立或經立案之私立高級中學舊制中學或其他同等學校畢業得有證書者

二　有前款所列學校畢業之同等學力經檢定考試及格者

三　公立或經教育部立案或承認之國內外學校統計經濟財政商業各學科一年以上畢業得有證書者

四　有高等考試應考資格者

五 曾任各機關統計職務三年以上有證明文件者

第三條 第一試之科目如左

一 經濟學 二 統計學 三 統計應用數學

四 統計實務（本科目以實例命題） 五 統計法規

第四條 第一試分筆試及口試

甲 筆試

一 總理遺教 三民主義及建國方畧 二 中國歷史及地理 三 憲法（憲法未公佈前考中華民國訓政時期約法）

乙 口試 就應考人第一試科目及其經驗考試之

第五條 本條例自公佈日施行

4. 主計人員任用條例（二十五年十月三十日國民政府公佈 二十六年三月九日修正）

第一條 主計人員之任用除法律另有規定外依本條例行之

第二條 本條例所稱主計人員謂辦理歲計會計或統計之主計官會計人員及統計人員

第三條 會計長會計主任會計員為主辦會計人員統計長統計主任統計員為主辦統計人員餘為會計或統計佐理人員

主辦人員之等級依國民政府主計處組織法第十二條第一項之規定佐理人員分薦任職委任職

第四條 主計官應就具有左列各欵資格之一者各按其關於歲

計會計統計之學歷經歷分別任用之

一　現任或曾任主計官經銓敍合格者

二　現任或曾任會計長或統計長一年以上經銓敍合格者

三　在教育部認可之國內外大學或獨立學院專修主計學科畢業並在各官署曾任與簡任職相當之會計或統計之職務五年以上著有成續者

四　在教育部認可之國內外大學或獨立學院專修主計學科畢業並在公營事業機關主辦與簡任職相當之會計或統計職務五年以上著有成績者

五　在教育部認可之國內外大學或獨立學院充任專任教授講授主計學科五年以上並於主計學術有特殊之著作經審查合格者

第五條　會計長或統計長應就具有左列各欵資格之一者各按其關於歲計會計統計之學歷經歷分別任用之

一　現任或曾任會計長或統計長經銓敍合格者

二　現任或曾任簡任職之會計或統計職務一年以上經銓敍合格者

三　現任或曾任最高級薦任職之會計或統計職務三年以上經銓敍合格者（廿六年修正）

四　在教育部認可之國內外大學或獨立學院專修主計學科畢業並在各官署曾任簡任職相當之會計

或統計職務四年以上著有成績者

五 在教育部認可之國內外大學或獨立學院專修主計學科畢業並在公營事業機關主辦與簡任職相當之會計或統計職務四年以上著有成績者

六 在教育部認可之國內外大學或獨立學院充任專任教授講授主計學科四年以上並於主計學術有專門著作經審合格者

第六條 會計主任或統計主任應就具有左列各款資格之一者各按其關於歲計會計統計之學歷經驗分別任用之

一 經高等考試會計或統計人員考試及格或與高等考試相當之特種會計或統計人員考試及格並在各級政府主計機關或各機關之辦理主計部分組織實習一年以上成績優良者

二 現任或曾任會計主任或統計主任經銓敍合格者

三 現任或曾任薦任職之會計或統計職務一年以上經銓敍合格者

四 現任或曾任最高級委任職之會計或統計職務三年以上經銓敍合格者

五 在教育部認可之國內外專科以上學校專修主計學科畢業並在各官署曾任與薦任職相當之會計或統計職務三年以上著有成績者

六 在教育部認可之國內外專科以上學校專修主計

學科畢業並在公營事業機關曾任與薦任職相當之會計或統計職務三年以上著有成績者

七　在教育部認可之國內外專科以上學校教授主計學科三年以上並於主計學術有專門著作經審查合格者

八　領有會計師證書並繼續執行會計師業務五年以上成績優良經審查合格者

第七條　會計員或統計員應就具有左列各款資格之一者各按其關於歲計會計統計之學歷經歷分別任用之

一　經普通考試會計或統計人員考試及格或與普通考試相當之特種會計或統計人員考試及格並在各級政府主計機關或各機關之辦理主計部分組織實習一年以上成績優良者

二　現任或曾任會計員或統計員經銓敘合格者

三　現任或曾任委任職之會計或統計職務一年以上經銓敘合格者

四　在教育部認可之國內外專科以上學校專修主計學科畢業並在各官署曾任與委任職相當之會計或統計職務二年以上著有成績者

五　在教育部認可之國內外專科以上學校專修主計學科畢業並在公營事業機關曾任與委任職相當之會計或統計職務二年以上著有成績者

第八條　薦任職會計統計佐理人員之任用資格適用第六條之規定

第九條　委任職會計統計佐理人員之任用資格適用第七條之規定

第十條　現充各級政府主計機關或各機關主計部分組織之僱員繼續服務五年以上而成績優良現支最高薪額者亦得任爲低級委任職會計統計佐理人員

第十一條　簡任職主計人員之任用由國民政府交銓敍部審查合格後任命之薦任職主計人員之任命由國民政府主計處送銓敍部審查合格後呈薦之

中央政府各機關及省政府或直隸於行政院之市政府主計機關委任職主計人員之任用由國民政府主計處送銓敍部審查合格後委任之

省政府或直隸於行政院之市政府所屬各機關及縣市政府主計機關委任職主計人員之任用由省政府或直隸於行政院之市政府主計機關呈請國民政府主計處送銓敍部審查合格後委任之

縣市政府所屬各機關委任職主計人員之任用由各該政府主計機關呈請省政府主計機關送銓敍機關審查合格後委任之並轉呈國民政府主計處備案

第十二條　委任職主計人員之職務有一定期間者得由各主管機關分別規定任用期限依前條第二項第三項或第四項

所定程序委任之期滿解職並轉報銓敍機關備案

第十三條　委任職主計人員經依法任用後如調任其他機關之同官等主計職務時得免送銓敍機關審查但仍報請查核登記

第十四條　公營事業機關主計人員之任用其名稱等級與簡任薦任委任職相當者得適用第五條至第十條之規定

第十五條　主計人員之官等官俸除法律另有規定外應分別比較所在政府或機關所定俸給標準定之

第十六條　主計人員除法律另有規定外非受懲戒處分刑事處分或禁治產之宣告不得免職

第十七條　各級政府主計機關或各機關舉辦基本國勢調查或各項普查抽查試查臨時所需統計調查人員其任用資格得於各該統計方案內定之不受本條例之限制

第十八條　本條例未規定事項適用公務員任用法之規定

第十九條　本條例施行細則由銓敍部會同國民政府主計處定之

第二十條　本條例自公佈日施行

5. 國民政府主計處組織法（十九年十一月廿五日公佈　二十年六月二十九日　廿三年五月二十二日修正）

第一條　國民政府主計處掌管全國歲計會計統計事務

第二條　主計處設主計長一人特任主計官六人簡任

第三條　主計長承國民政府之命綜理處務指揮監督所屬人員

依法律之規定分別執行職務

第四條 主計處設左列各局

一 歲計局

二 會計局

三 統計局

第五條 前條各局均設局長一人綜管本局所掌事務副局長一人於局長因事故不能執行職務時代理局長均由主計長呈請國民政府於主計官中派充科長三人至五人薦任每科科員十八至二十人其中三人至五人薦任除委任(二十年修正)

第六條 歲計局辦理左列事務

一 關於籌劃預算所需事實之調查事項

二 關於各機關概算預算及決算表册等格式之製定頒行事項

三 關於各機關歲入歲出概算書之核算及總概算書之編造事項

四 關於依照核定總概算書編造擬定總預算書事項

五 關於擬定總預算書經核定後之整理事項

六 關於預算內欵項依法流用之登記事項

七 關於各機關各種計算書之彙編及其報告事項

八 關於各機關歲入歲出決算書之核算及總決算書之編造事項

九　關於各機關財務上增進効能與減少不經濟支出之研究及其報告事項

十　關於各機關間財務上應合辦或統籌事務之建議事項

十一　關於各機關辦理歲計事務人員之指揮監督事項

十二　其他有關歲計事項

前項第三款至第八款之規定於追加預算及非常預算準用之

第七條　會計局辦理左列事項

一　關於各機關會計人員之任免遷調訓練及考績事項

二　關於各機關會計表册書據等格式之製定頒行事項

三　關於各機關會計事務之指導監督事項

四　關於各機關會計報告之綜核記載及總報告之彙編事項

五　其他有關會計事項

第八條　統計局辦理左列事項

一　關於各機關統計人員之任免遷調訓練及考績事項

二　關於各機關統計圖表格式之製定頒行及一切編製統計辦法之統一事項

三　關於各機關編製統計範圍之劃定及統計工作之分配事項

四　關於各機關統計事務之指導監督事項

五　關於調查編製不能屬於任何機關範圍之統計及各機關未及編製之統計事項

六　關於全國統計總報告之編纂事項

七　其他有關統計事項

第九條　主計處置秘書二人至四人其中一人簡任餘薦任科員六人至十二人其中一人至三人薦任餘委任辦理文書及不屬於各局之事務(二十年修正)

第十條　主計處於必要時得聘用專門人員

第十一條　主計處得酌用雇員

第十二條　全國各機關主辦歲計會計統計之人員分為左列三等

一　會計長統計長均簡任

二　會計主任統計主任均荐任

三　會計員統計員均委任

前項主辦人員及其佐理人員均由主計處按其事務之需要分別設置

凡公營事業主辦歲計會計統計人員及佐理人員不適用第一項規定之名稱等級者得由主計處依所在機關之需要定之(二十三年修正)

各機關之歲計事務由會計人員兼辦其統計事務之簡

單者亦同

第十三條　前條辦理歲計會計統計人員直接對於主計處負責並依法受所在機關長官之指揮

前項人員之編制員額及服務規則由主計處定之其經費列入所在機關預算(廿三年修正)

第十四條　主計長得隨時調遣各機關辦理歲計會計統計之人員

第十五條　主計處設主計會議由主計長及主計官組織之以主計長爲主席主計長缺席時由歲計局長代理專門人員及科長得列席主計會議各機關主辦歲計會計統計之人員對於有關職掌之提案亦得列席

第十六條　主計會議職權如左

一　關於各機關主辦歲計會計統計人員之任免事項

二　關於歲計會計統計制度之擬訂及修正事項

三　關於本處及各機關辦理歲計會計統計之辦事規則製定及修正事項

四　關於兩局以上之關聯事項

五　各局長或主計官提議事項

六　主計長交議事項

第十七條　主計處得召集全國主計會議以左列人員組織之

一　主計處之主計長主計官及專門人員

二　各主要機關主辦歲計會計統計之人員

三　各主要機關之代表或其長官

前項會議以主計長爲主席

第十八條　本法施行規則及施行日期以命令定之

6. 國民政府主計處辦理各機關歲計會計統計人員暫行規程（二十年七月四日國府指令運行）

第一條　本規程依照國民政府主計處組織法制定之

第二條　各機關辦理歲計會計統計人員由主計處依組織法之規定分別緩急次第設置之

第三條　各機關主辦歲計會計統計人員分爲左列三等其等次由主計處視其事務之繁簡定之

一　會計長統計長由國民政府簡任

二　會計主任統計主任由主計處荐任

三　會計員統計員由主計處委任

第四條　各機關佐理歲計會計統計人員之名額等級由主計處按其事務之需要定之

第五條　各機關歲計會計事務均歸該機關之會計長會計主任或會計員主辦其統計事務之簡單者亦歸兼辦

第六條　各機關之統計事務除簡單者依前條規定辦理外均歸統計長統計主任或統計員主辦

第七條　各機關主辦歲計會計統計人員應直接對於主計處負責並分別受該管上級機關主辦歲計會計統計人員之監督指揮仍依法受所在機關長官之指揮

第八條　各機關佐理歲計會計統計人員應分別受該機關主辦

歲計會計統計人員之監督指揮

第九條　各機關歲計會計統計人員之敘級由主計處辦理之並行知所在機關

前項人員之俸給及其他應支經費由主計處決定行知所在機關編入其預算

第十條　各機關主辦歲計會計統計人員對於所在機關原定歲計會計統計部份之組織認爲有修正之必要者得擬具修正案呈請主計處或呈由該管上級機關主辦歲計會計統計人員核轉主計處核辦

第十一條　各機關辦理歲計會計統計人員辦事章則分別另訂之

第十二條　本規程自公布之日施行