洋算例題微分篇

洋算例題續々篇巻之八

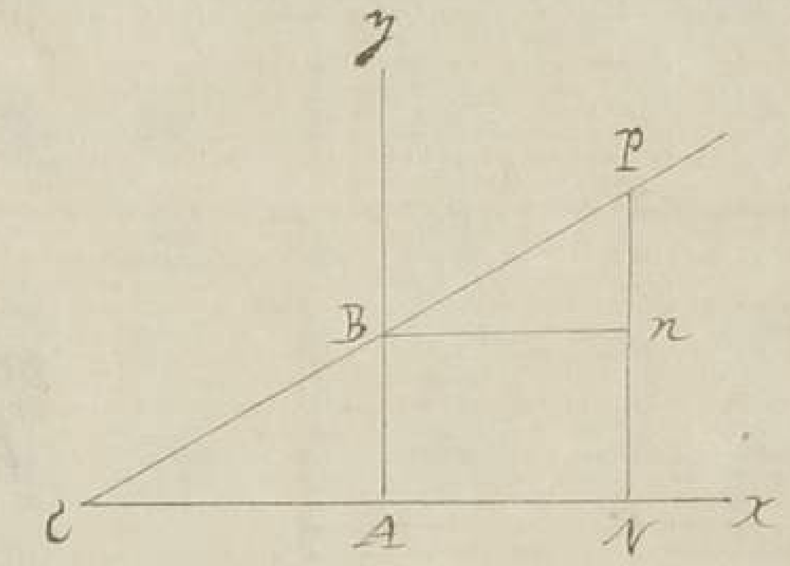
陸軍大尉福田半編輯

曲線幾何

第一章直線平圓圓錐曲線（楕圓拋物線及ひ双曲線の三種是なり）及ひ其他一般の曲線の性質に就て之が充分に推究せるものに至ては別に明了に記載したる書に屬し此巻に載せる所は只諸曲線の式并頗る簡易に論せるを主とし微分積分両術の適用によりて一定せざる曲線の性質に就て次の如き認識を以て學者に授る為に草論し

直線式

第二章 直線式ヲ求ムルニ左圖の如くAyAxヲx
yの両軸とする線準とし



$AN=x \qquad Bn \perp pN$

$NP=y \qquad AB=b$

$PCA=\theta$

$$\frac{pn}{Bn}=\frac{BA}{CA}=\tan\theta$$

$$\frac{y-b}{x}=\tan\theta=m$$

$$\therefore y=mx+b$$

餘論一 若し直線任意の一点を過ぐる時は其点の
縦横線をαβとし次の如き式を得る

β ベーター　α アルハ　θ テーター

餘論二 若し直線原点を過ぐる時はbは0なり故
に $y=mx$ を得る即ち原点Aを過ぐる所の直線
なり

$$x=\alpha$$

$$y=\beta$$

$$\beta=m\alpha+b$$

$$y=mx+b$$

$$\therefore y-\beta=m(x-\alpha)$$

第三章 二個の直線或一点に於て相交る時其点の
位置ヲ求むる先づ二個の線式ヲ
$y=mx+b$ $y=m'x+b'$ とされは交点に於ては縦横
線の同数相等し故に左の如し

$mx+b=m_1x+b_1$

$\therefore x=\frac{b_1-b}{m-m_1}$

$y=\frac{mb_1-mb}{m-m_1}+b$

$=\frac{mb_1-m_1b}{m-m_1}$

第四章設第たる二点を貫通する所の線式を求むるか先つ $y=mx+b$ とす即ち m と b を既に定まりたる者とす而して a β 及ひ a_1 β_1 此二点の縦横線とすれ故に

$\beta=ma+b$

$\beta_1=ma_1+b$

$\therefore \beta-\beta_1=m(a-a_1)$

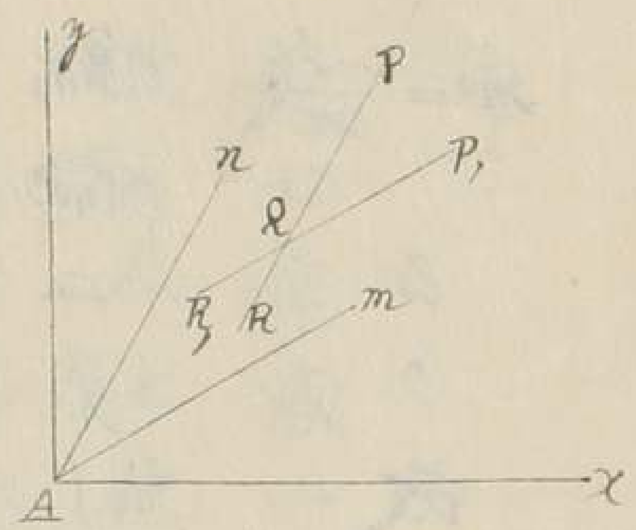
$\therefore m=\frac{\beta-\beta_1}{a-a_1}$

$y=mx+b$

$\therefore y-\beta=m(x-a)$

$\therefore y-\beta=\frac{\beta-\beta_1}{a-a_1}(x-a)$

第五章両直線或一点に於て交り成る所の角度を求むるか先つ PQR 及ひ P_1QR_1 の二線式を $y=mx+b$ $y=m_1x+b_1$ とし而して A より PR に平行し An の線を作り又 P_1R_1 に平行し Am の線を作り解釈すること左の如し



$\angle nAm=\angle PQP_1$

$\therefore PQP_1=nAx-mAx$

$=\tan^{-1}m-\tan^{-1}m_1$

$\therefore \tan PQP_1=\frac{m-m_1}{1+mm_1}$

餘論一　若し兩直線平行すれハ $PRP_1=0$ $m-m_1=0$ 而して $m=m_1$ なり
故に $y=mx+b$ $y=m_1x+b_1$ ハ平行線式なり

餘論二　若し其一線他の一線に垂直なれハ $\tan PRP_1=\frac{1}{0}=\frac{m-m_1}{1+mm_1}$ $m=-\frac{1}{m}$ なり　故に $y=mx+b$ を線式とすれハ $y=-\frac{1}{m}x+b_1$ ハ垂直線式なり

第六章　或一點を過ぎ他の或一線と垂直たる線式を求むるに先つ他の或一線の式を $y=mx+b$ とし而して $\alpha\beta$ を或點の縦横線とし前章餘論二の理に依て解理すれハ $y=-\frac{1}{m}x+b_1$ $\beta=-\frac{1}{m}\alpha+b_1$　故に $(y-\beta)=-\frac{1}{m}(x-\alpha)$　即ち求むる所の線式なり

第七章　或一線より或一點に達する垂直線の距を求めんと欲するに先つ或一線の式を $y=mx+b$ とし而して或一點の縦横線を $\alpha\beta$ とすれハ其點より或一線上に至る垂線の式ハ $(y-\beta)=-\frac{1}{m}(x-\alpha)$ とす然るに若し距離を P とし x_1, y_1 を或一線と垂直線と相交る所の點の縦横線とすれハ則ち距離 P を得るもの如し

$$p=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

$$=(x_1-\alpha)\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$$

惟ふに

$$mx_1+b=\beta-\frac{x_1-\alpha}{m}$$

$$\therefore x_1(m^2+1)=m\beta+\alpha-mb$$

$$\therefore x_1=\overline{m\beta+\alpha-mb}$$

$$\therefore p=\pm\frac{\beta-b-m\alpha}{\sqrt{m^2+1}}$$

餘論一 若し或一点原点に在れば

$$\alpha=0 \qquad \beta=0$$

$$\therefore p=\frac{b}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{y-mx}{\sqrt{m^2+1}}$$

$$m=\tan\theta$$

$$\sqrt{m^2+1}=\sin\theta$$

$$\therefore p=y\cos\theta-x\sin\theta$$

なり

餘論二 若し或一線原点を過ぐれば b は 0 なり 故に左の如し

$$p=\frac{\beta-m\alpha}{\sqrt{m^2+1}}=\beta\cos\theta\sin\theta$$

第八章 原点より b なる距離に於て縦軸と交り而して原点より a なる距離に於て横軸と交互する所の線式を求む

$$y=mx+b$$

$$x=0 \qquad y=b$$

$$y=0 \qquad x=a$$

$$\therefore ma+b=0$$

$$m=-\frac{b}{a}$$

$$\therefore y=-\frac{b}{a}x+b$$

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1$$

即ち求むる所の線式なり

平圓

第九章圓は平面にして其周圍の各点より中心に至るの距を等しくする所の曲線なり

平圓式を求むるに先つα βを中心点の縦横線とし半径をrとしx yを周圍任意一点の縦横線とし解理するは左の如し

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

$$\therefore y^2+x^2-2\beta y-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

即ち求むる所式なり

餘論一若し原点周圍に在り横軸中心点を貫通すれは即ち左の如し

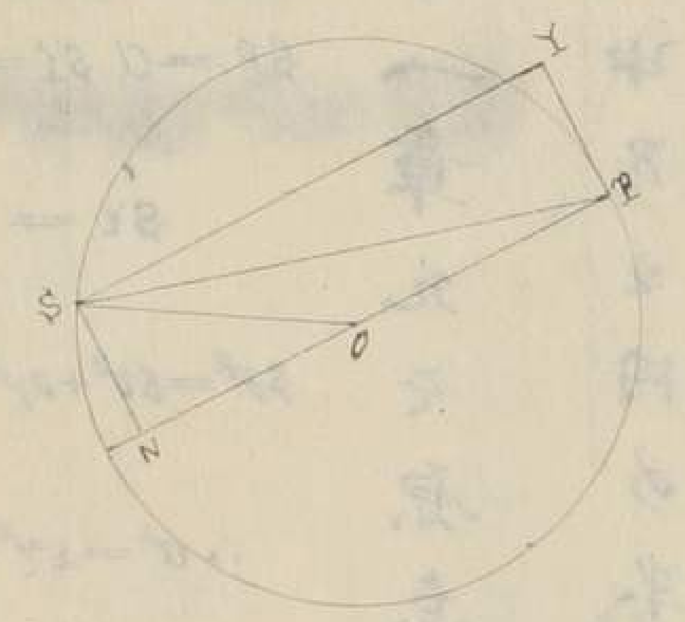
$$\beta=0 \quad \alpha=r$$

$$\therefore y^2+x^2-2rx=0$$

$$\therefore y^2=2rx-x^2$$

なり

餘論二若し原点中心に在れは式変して左の如し



$$\alpha=0 \quad \beta=0$$

$$\therefore y^2+x^2-r^2=0$$

$$\therefore y^2=r^2-x^2$$

第十章Sは円周の一点なり而して切線に垂直な

へ犯SYなる線式を求む

$$SN \perp PO$$

$$SP = a \quad SY = p \quad OP = r$$

$$SY = PN$$

$$SP^2 = SO^2 + OP^2 + 2OP\,ON$$

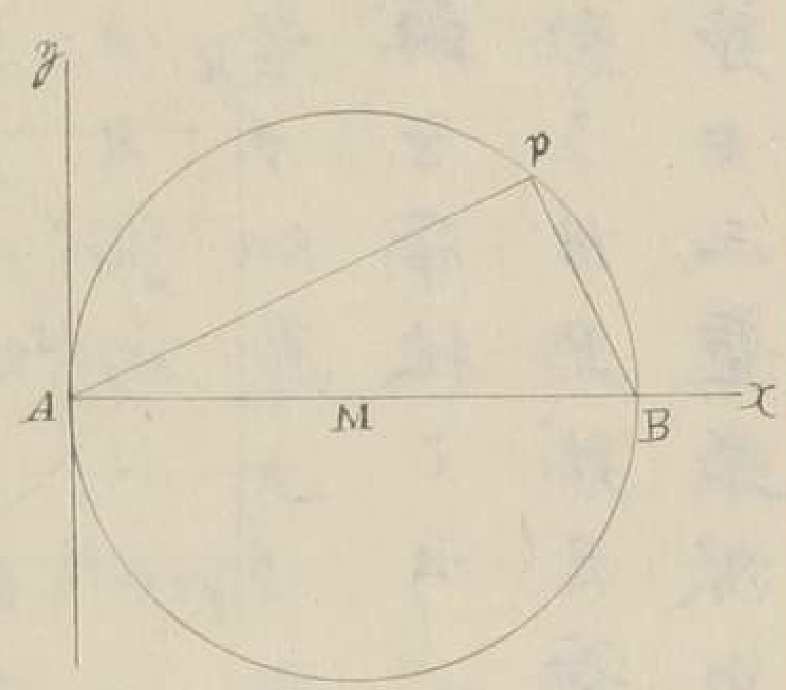
$$\therefore a^2 = 2r^2 + 2r(p - r)$$

$$= 2rp$$

$$\therefore p = \frac{a^2}{2r}$$

第十一章凡そ原点円周に在れる円の極式を $r = 2R\cos v$ とする式中Rは円の半径にして r は犹帯径として v を変角とせる所の者なり

左図の如くAは原点なり之ヲ極点としAXは角の一脚にして原線なりPAXを変角とし畫を視て比例を起し以て式を求む左の如し



$$AM : AB :: \cos PAB : AP$$

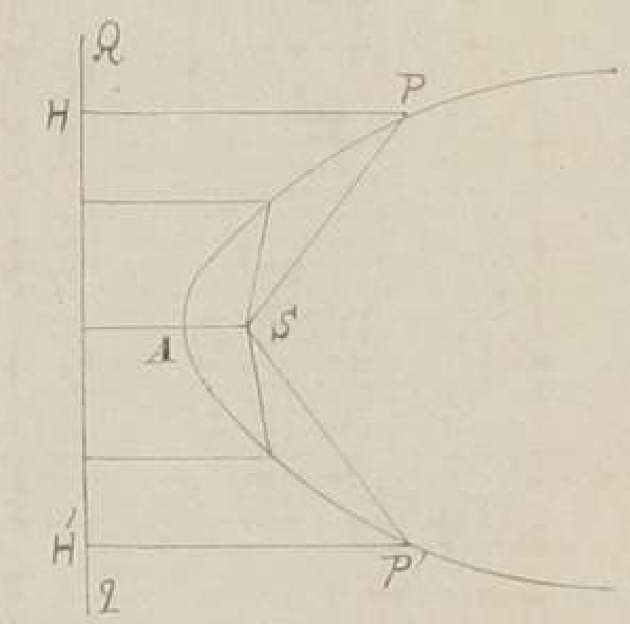
$$1 : 2R = \cos : r$$

$$\therefore r = 2R, \cos v$$

なり

抛物線

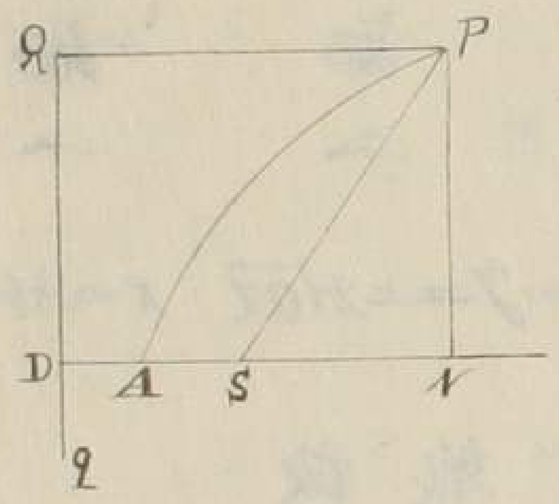
第十二章抛物線ハ円錐曲線三種の一ニシて即ち円錐を斜截シ生ずる所の曲線なり



抛物線ハ一定点及ひ一の直線あり曲線中毎点定点の距離と直線ノ距離と恒ニ相等シ定点ハ即ち抛物線の心なり直線一名準線と云ふ又曲線内毎点と心点との距離を帯径と云ふ右図のSハ定点なりQqハ準線なりHP H'P'等ハ帯径なり

第十三章準線ニ正交シて曲線を過ぐる者を径線と云ふ径線と曲線との交点を径頂点と云ふ心を過ぐる径線を軸線と云ふ心を過ぐる倍縦線を通径と云ふ

第十四章凡ての正交二軸の原点抛物線の頂ニ在れハ其式必ず$y^2=4ax$なり式中x yハ曲線内一点の縦横線なり$4a$ハ軸線の通径なり



$$SD \perp Qq$$

$$SA = AD = a$$

$$AN = x \quad NP = y$$

$$QP = DN = SP$$

$$DA + AN = \sqrt{NP^2 + SN^2}$$

$$\therefore a + x = \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$$

$$\therefore (a+x)^2 + 4ax = y^2 + (x-a)^2$$

$$\therefore y^2 = 4ax$$

餘論一　$x=AS=a$

故ニ軸ト正交シテ心点ヲ過ル倍縦線ヲ通径トス

餘論二　$y=\pm2\sqrt{ax}$

故ニ横軸毎点上下必ス相等シキ二縦線アリテ正負ヲ相異ナリ

故ニ抛物線X線ヲ軸トスレハ其両辺相等シキナリ

餘論三、$y^2=4ax$

$x:y::y:4a$

故ニ横線ト縦線ノ比例ハ縦線ト通径ノ比例ノ如シ又曲線ノ通径ハ恒ニ横線縦線ノ連比例ニ等シ

第十五章九ノ曲線心ヲ極点トナシ之レヲ抛物線ノ極式 $r=\frac{a}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}$ ナリ式中rハ帯径θハ帯径ト軸トノ交角ナリ

$SP=r \quad \angle ASP=\theta$

$r=DN=2a+SN$

$=2a+r\cos PSN$

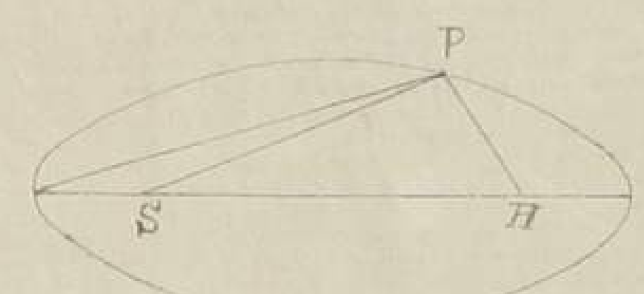
$=2a-r\cos\theta$

$\therefore r=\frac{2a}{1+\cos\theta}$

$=\frac{a}{\cos^2\frac{1}{2}\theta}$

楕圓

第十六章 楕円ハ亦円錐曲線の一ニして平面の曲線なり周の各点より二定点に至るの距離相合すれバ恒に相等しかる者ニして二定点ハ即ち曲線の二心なり



上図の如くSHを二定点としP点S点を繞りて常にPS及びPHの二距離の和を相等しからしむれバP点の通行せし所楕円の形を成せり故にP点よりS点及びH点に至るの距離を倶に号して帯径と云ふ

第十七章 二心の距離を平分せし所を中点と云ふ中点を過ぎ左右に向ひ心点を過ぎ楕圓の周に至るの線を長径と云ふ又長軸と云ふ中心点に於て長径に正交する径を短径と云ふ心を過ぐるの倍縦線を長軸の通径と云ふ

第十八章 中点を原点とし長短の二径を縦横の二軸とすれバ楕円の式 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$ なり化しく $\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$ なり式中 a b ハ長短二半径なり x y ハ曲線内任意一点の縦横線なり

此證を求むるに次の図の如くSHを二心としC

を原点として解理する左の如し式中eは楕率と稱する所の者にして即ち $\frac{SH}{2}=c$ $\frac{c}{a}=e$ なり

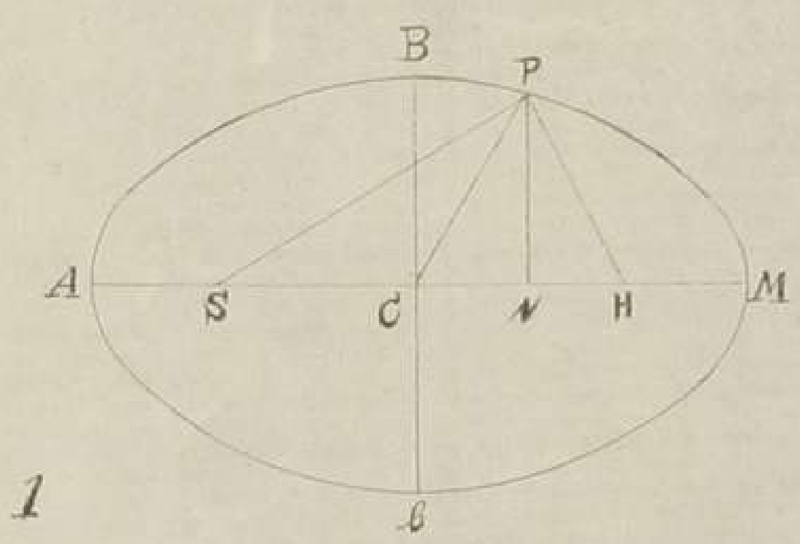
$SP+PH=2a$

$CA=CM=a$

$CB=Cb=b$

$CS:CA::e:1$

$\therefore CS=ae$



$CN=x \quad NP=y \quad SP=D \quad HP=D_1$

$D^2=SN^2+NP^2=(ae+x)^2+y^2$

$D_1^2=HN^2+NP^2=(ae-x)^2+y^2$

$\therefore D^2+D_1^2=2(a^2e^2+x^2+y^2)$

$\therefore D^2+D_1^2=2a^2+2e^2x^2$

$\therefore a^2+e^2x^2=a^2e^2+x^2+y^2$

$\therefore y^2=(1-e^2)(a^2-x^2)$

$1-e^2=1-\frac{CS^2}{a^2}=\frac{SB^2-CS^2}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$

$\therefore y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$

$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1$

$$\left\{\begin{array}{l} D^2-D_1^2=4aex \\ D+D_1=2a \therefore D-D_1=2ex \\ D=a+ex \quad D_1=a-ex \end{array}\right\}$$

餘論 若し焦点長径端のAに在れば其式 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax_1-x_1^2)$ なり

$AN=x_1 \quad \therefore x=x_1-a$

$\therefore a^2-x^2=2ax_1-x_1^2 \quad \therefore x=x_1-a$

第十九章 Sを極点とし[illegible]楕円の極式 $r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ なり

$ASP=\theta \qquad SP=r$

$\therefore (2a-r)^2=HP^2=HN^2+NP^2=(2ae-SN)^2+r^2\sin^2\theta$

$SN=r\cos PSH=-r\cos\theta$

$\therefore 4a^2-4ar+r^2=(2ae+r\cos\theta)^2+r^2\sin^2\theta$

$=4a^2e^2+4aer\cos\theta+r^2$

$\therefore r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$

第二十章C点を極とし之れを楕円の極式と

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}$$

$$CP = r \qquad PCM = \theta$$

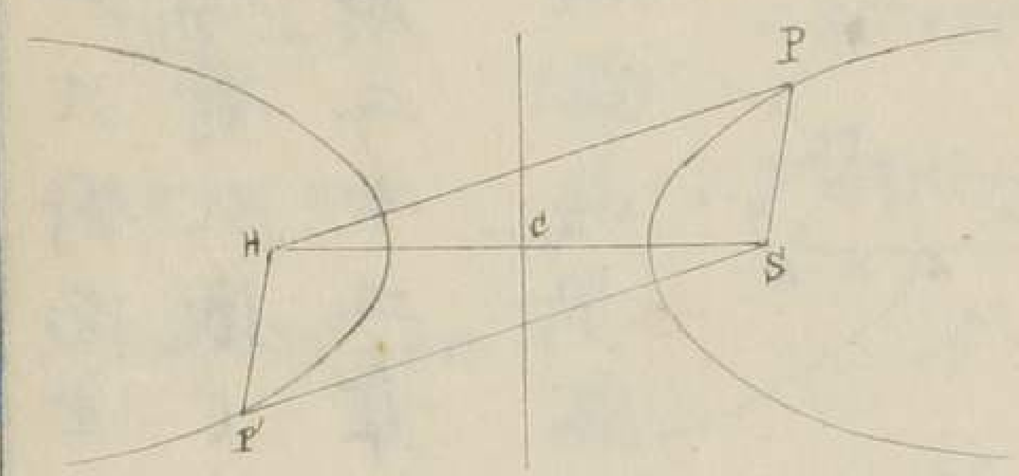
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1$$

$$\therefore r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}} = \frac{b}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}$$

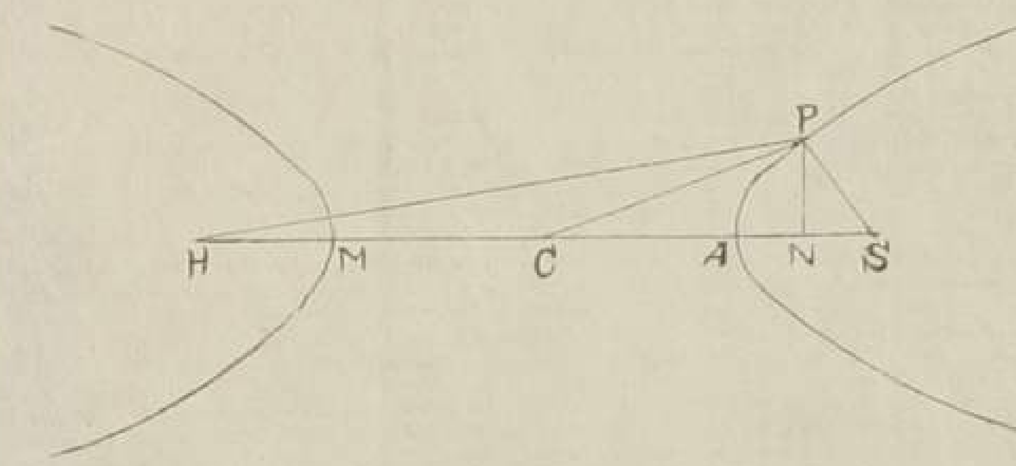
双曲線

第二十一章双曲線ハ亦圓錐曲線の一にして平面の曲線なり曲線の毎点と二定点との距離の差必ず相等しき二定点を曲線の二心なり



上図の如くSHを二定としP点Sを繞り而してPHとPSの二線の差相等しくして常に相等しく而して在る時はP点の過ぐる所即ち双曲線を為す然して次にP′点H点を繞り又P′SとP′Hの差に等しく而して在る時はP′点の過ぐる所

必ス對面曲線ヲ為シ其形本線ト等クシテ二曲線
相對ス依テ之ヲ双曲線ト号ケ又畧シテ双線ト云
第二十二章九ニ双曲線中点及ヒ二軸ヲ以テ準ト
スレハ即チ其式 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ 或ハ $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$ ナリ 其證左ノ如シ



$$PH-PS=2a$$

$$CA=CM=a$$

$$CN=x \quad NP=y$$

$$CS=e$$

$$CS=e.CA=ea$$

$$HP^2=HN^2+NP^2=(ea+x)^2+y^2=D_{,}^2$$

$$SP^2=SN^2+NP^2=(ea-x)^2+y^2=D^2$$

$$\therefore D_{,}^2+D^2=2(a^2e^2+x^2+y^2)$$

又 $D_{,}-D=2a \quad D_{,}^2-D^2=4aex$

$$\therefore D_{,}=a+ex \quad \therefore D_{,}+D=2ex$$

$$D=ex-a$$

$$\therefore 2a^2+2e^2x^2=2(a^2e^2+x^2+y^2)$$

$$\therefore y^2=(e^2-1)x^2-(e^2-1)a^2=(e^2-1)(x^2-a^2)$$

$$b^2=a^2(e^2-1)$$

$$\therefore y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$$

或 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=-1$

餘論 若シ原点Aニ在レハ其式 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax_{,}+x_{,}^2)$ ナリ

$$AN=x_{,}$$

$$x=x_{,}+a$$

$$\therefore x+a=x_{,}+2a$$

$$x^2-a^2=x_{,}^2+2ax_{,}$$

$$\therefore y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax_{,}+x_{,}^2)$$

ナリ

第二十三章若しSをもして極点に命されを双曲線の極式を得る左の如し

$SP = r \qquad \angle ASP = \theta$

$(2a+r)^2 = HP^2 + PN + HN^2 = PN^2 + (2CS - SN)^2$

$= r^2\sin^2\theta + (2ae - r\cos\theta)^2$

$\therefore 4a^2 + 4ar + r^2 = r^2 + 4aer\cos\theta$

$\therefore r = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta}$

第二十四章若しCを極点とし是を双曲線の極式を得るまと左の如し

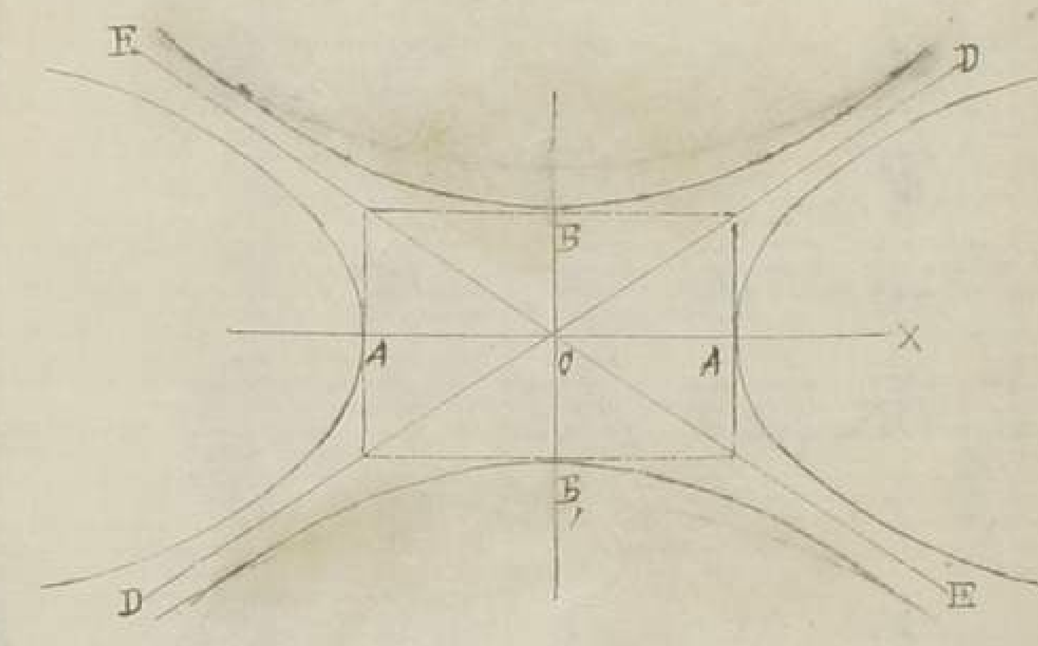
$CP = r \qquad \angle ACP = \theta$

$\therefore x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2} - \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = 1$

$\therefore r = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta}} = \frac{b}{\sqrt{e^2\cos^2\theta - 1}}$

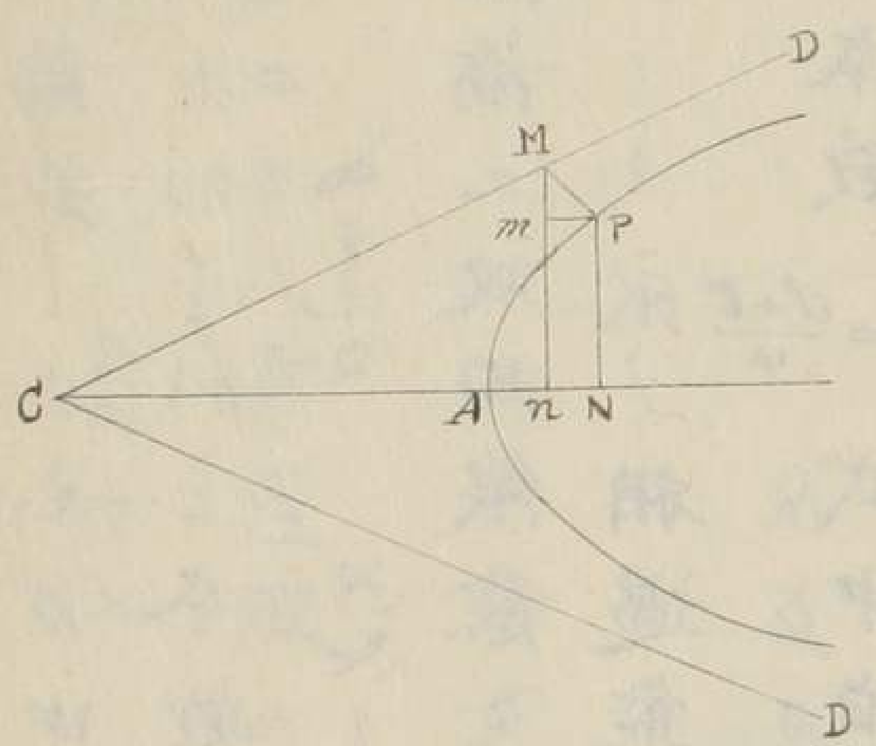
第二十五章縦横二径の端を過る四切線を作れば之に依て矩形を得べし此矩形に二對角線を作り之を引長して無究に至れば漸く双線と相近つへし然れとも永く相遇ふ能はされ之を名けて双線の漸近線と云ふ



図の如くAA′及ひBB′を縦横の二径とし其A′ABB′の四端を過る四切線を作り得る所の矩形の二對角線を作り之を引長すれは無究長線DD,及ひEEを得る即ち双曲線の漸近線なり

第二十六章双曲線中点と漸近線を以て準とすれは

其式 $xy=\frac{a^2+b^2}{4}$ とし式中 a b は縦横の二半径なり



$CN = x \quad CM = x_1$

$DCA = D_1CA = \theta$

$NP = y \quad MP = y_1$

$Mn \perp CAN \quad P_m \perp M_n$

$MP \parallel CD' \quad P_m \parallel CN$

$\therefore MP_m = \theta$

$$x = Cn + nN = x_1\cos\theta + y_1\cos\theta = (x_1+y_1)\cos\theta$$

$$y = Mn - Mm = x_1\sin\theta - y_1\sin\theta = (x_1-y_1)\sin\theta$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{(x_1+y_1)^2}{a^2}\cos^2\theta - \frac{(x_1-y_1)^2}{b}\sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a} \qquad \therefore 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{b^2+a^2}{a^2}$$

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2} = \frac{1}{b^2+a^2} \qquad \frac{\sin^2\theta}{b^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} = \frac{1}{b^2+a^2}$$

$$\therefore \frac{(x_1+y_1)^2-(x_1-y_1)^2}{b^2+a^2} = 1$$

$$4x_1y_1 = a^2+b^2 \qquad \therefore xy = \frac{a^2+b^2}{4}$$

なり

餘論若しC点を中心とし円を作り其円周AA,BB,に切されは本數の式變して左の如し

$b=a$　$xy=\frac{1}{2}a^2$

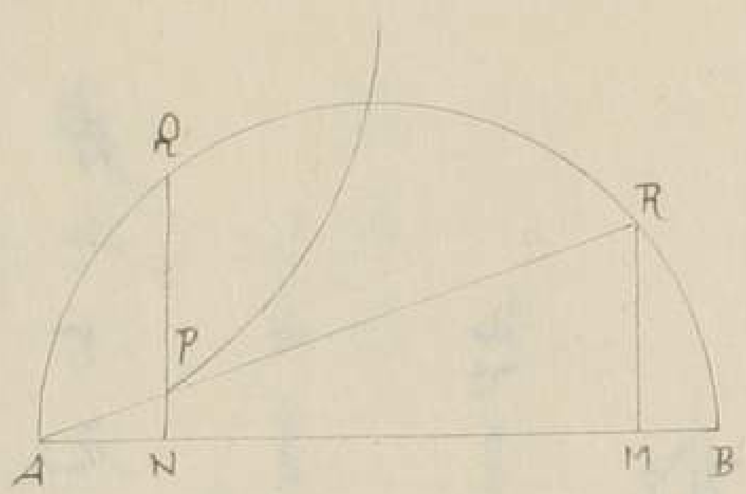
餘論二 双曲線愈々長ければ愈々漸近線に近し然れとも永く相遇能はず今左に其證を顯さん

本數 $xy=\frac{a^2+b^2}{4}$ 式中右辺を m^2 とすれは $xy=m^2$ 即 $y=\frac{m^2}{x}$ なり

扨 m^2 は常數なるが故にy変小すれはx變大にy變小の極に至り0となれはx即ち無窮大となるなり故に漸近線は双線の無究遠点の切線と爲して見ることを得るなり

蘿線

第二十七章 蘿線は代數曲線の一種にして平面の曲線なり



図の如くAQBは半圓なり其徑線内にANとBMと等しく取り而してNQ及ひMRの二縱線を設けAR線をしてP点に於てNQ線と切合せしむる時其P点の過くる所を蘿線と云

第二十八章 蘿線の式を求む左の如し

$AN=x$　$NP=y$　$AB=2a$

$$\frac{AN^2}{NP^2} = \frac{AM^2}{MR^2} = \frac{AM^2}{AM.MB} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{2a-x}{x} \qquad \therefore y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$

第二十九章Aを極点としCを羅線の極式

$$r = 2a.\tan\theta \sin\theta$$

$$AP = r \quad \angle PAN = \theta \quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$$

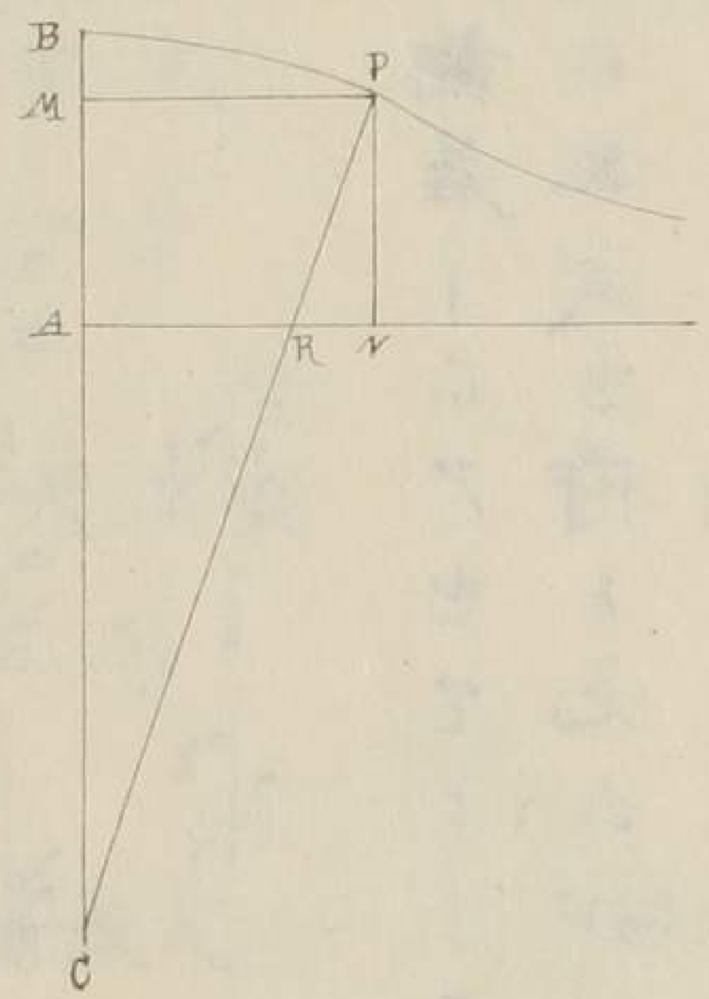
$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{x}{2a-x} = \frac{r\cos\theta}{2a-r\cos\theta}$$

$$\therefore 2a\sin^2\theta = r\cos\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$

$$\therefore r = 2a\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\sin\theta = 2a\tan\theta\sin\theta$$

蚌線

第三十章蚌線ハ代数曲線の一種にして平面の曲線なり



図の如くCPなる線C点を心としARNの線に交り毎にRPを等しく度とし心点を繞りP点の過ぐる所即ち蚌線なり

第三十一章蚌線の式を求むる左の如し

双曲線螺線式

$r = \frac{a}{t}$

円ノ漸伸線

$p^2 = r^2 - a^2$

對數螺線式

$t = \log r$

漸近線式

$TA = y\frac{\partial x}{\partial y} - x$

轂擺線式

$x = a(\theta - e\sin\theta)$

$y = a(1 - e\cos\theta)$

曲率半径公式

$R = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x . \partial^2 y}$

円内外擺線

$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}.\theta\right)$

$y = Bn - Bm = (a+b)\sin\theta - b.\sin\left(\frac{a+b}{b}.\theta\right)$

若シbノ同數負ナレハ曲線ハ円内擺線之

$CA = a \quad RP = AB = b \quad AM = x \quad MP = y$

$\frac{MP^2}{CM} = \frac{AR^2}{CA^2} = \frac{RN^2}{MP^2} = \frac{RP^2 - NP^2}{NP^2}$

$\frac{y^2}{(a+x)^2} = \frac{b^2 - x^2}{x^2} \quad \therefore x^2y^2 = (a+x)^2(b^2 - x^2)$

餘論若しCPをrとしPCM角をθとされば蚌線の極式を得る左の如し

$r = CP = PR + CR = b + \frac{a}{\cos\theta}$

洋算例題續々編巻之八終

蘿線式	$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$	直線式	$y = mx + b$
蚌線式	$x^2y^2 = (a+x)^2(b^2-x^2)$	平円式	$y^2 = r^2 \pm x^2$
擺線式	$x = a\,\mathrm{ver\,sin}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{2ay-y^2}$	拋物線式	$y^2 = 4ax$ or $y^2 = 2Ax$
對數曲線式	$x = \log y$	楕円線式	$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$
亞奇默德螺線式	$r = \frac{t}{2\pi}$	双曲線式	$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$

洋算例題續々篇卷之八諸曲線幾何公式

洋算例題續々篇卷之九

陸軍大尉福田半編輯

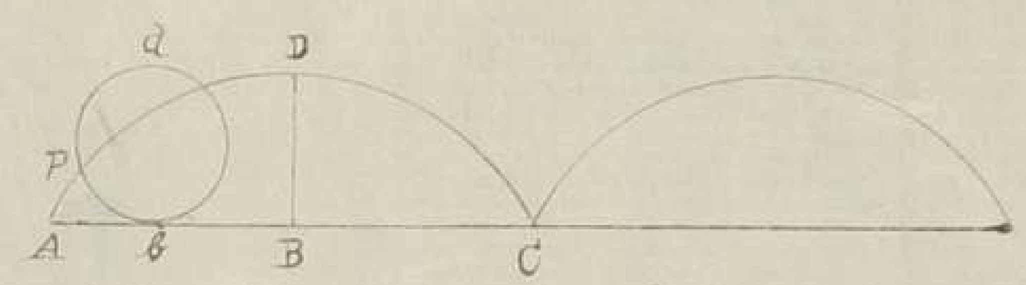
越曲線

第三十二章凡そ曲線を分つて二大類とす一を代數曲線と稱し一を越曲線と稱す曲線の縱橫線聯屬の理代數を以て顯はすへき者を之を代數曲線とす若し代數をもて顯はす事能はされは越數を兼用して之か顯はす之を越曲線とす越曲線中擺線及ひ對數曲線を最要の線とす對數曲線能く風氣輕重の理か顯はし擺線能く鐘擺及ひ重物地心に向ふの理を顯はすによれは其

他螺線あり其中亦甚だ妙理あり

擺線

第三十三章凡そ輪直線に依て平面に輾されたる輪周一点の過ぐる所の道擺線を為すべし



図の如くbPdの輪Acの直線上に輾されしは輪周一点Pの過ぐる所の道ADCは即ち擺線なりbPdの輪を母輪といふP点を母点と云ふ

P点既にADCの擺線を成してCに至り其後再び輾されは第二擺線を成す其形第一と同じ此の如く第三第四以上を成れり

亦同じ故に只ADCの一線を考へ得れば其余悉く知るべきなり

直線ACは輪周に等しき擺線底と名付くBDは底の中点垂線にして輪の全径と等しき擺線軸と云ふ

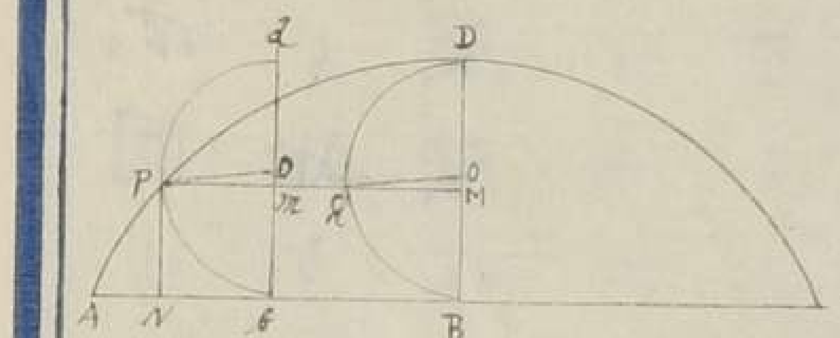
第三十四章擺線の式也

$$x = a\,\mathrm{versin}^{-1}\frac{y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}$$

とし

式中yは弧の正矢aは母輪の半径なり

左図の如くAを縦横線の原点としPを母点としAPは母点既に過くる所の擺線の一段ありbを母輪底線と相切る点あり然る時はAbの直線Pbの弧に等しb点より底の垂線dbを作り又P点よりPmを作りdbに正交せしむればPNmbに等しく即ちPbの弧の正矢に同し



$AN=x \quad BD=2a$

$NP=y$

$$Nb=Pm=\sqrt{mb\,md}$$
$$=\sqrt{y(2a-y)}$$
$$=\sqrt{2ay-y^2}$$

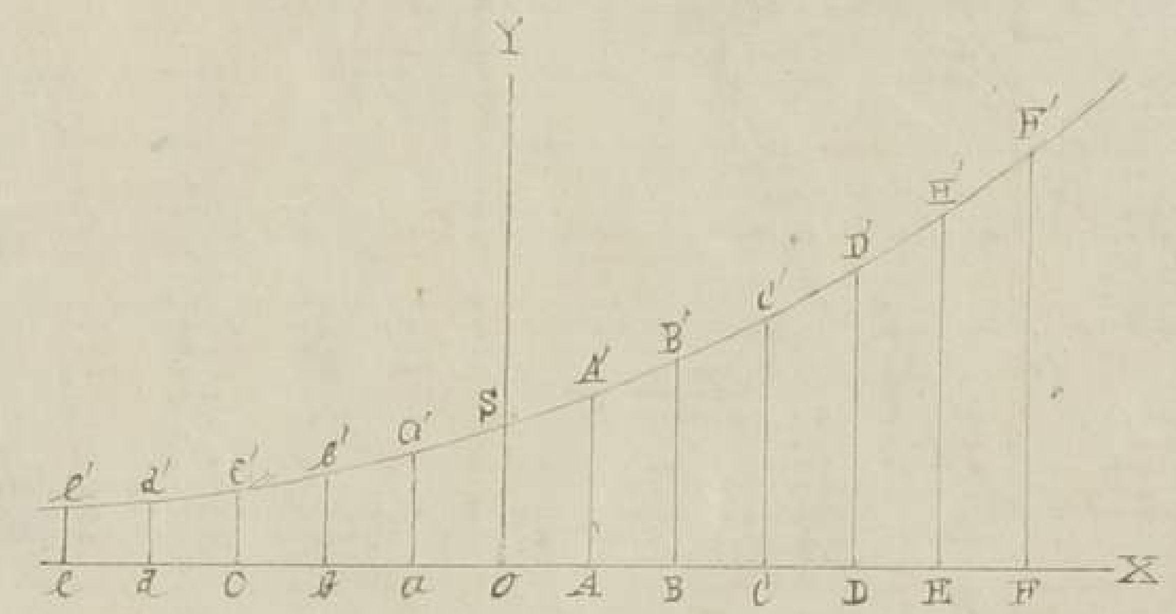
$$AN=Ab-Nb$$
$$=\operatorname{arc}Pb-Nb$$
$$\therefore x=\operatorname{arc}Pb-\sqrt{2ay-y^2}$$
$$=a\operatorname{versin}^{-1}\frac{y}{a}-\sqrt{2ay-y^2}$$

第三十五章若しMPとDQの弧と恒に等しからしむれはP点の過くる所を号して擺線の属線と云ふ其式左の如し

$$\angle DOQ=\theta$$
$$y=a\theta$$
$$x=a(1-\cos\theta)$$

對數曲線

第三十六章對數曲線正交二軸を以て之を推せば横線必ず縦線の對數に等し故に其式 $x=\log y$ とす



若しaを對數の底とすれば $a^x=y$ の式を得る乃ち之に準じて對數曲線を作るべし

上図の如くOを原点としOX及びOYを以て縦横の二軸とし

試に訥白爾氏の對數を以て曲線を作る

$$OA=OS=1=a^0$$

$$x=0 \qquad y=a^0=SO$$

$$x=1=OA \qquad y=a^1=AA'$$

$$x=2=OB \qquad y=a^2=BB'$$

$$x=3=OC \qquad y=a^3=CC'$$

$$x=-1=Oa \qquad y=a^{-1}=\frac{1}{a}=aa'$$

$$x=-2=Ob \qquad y=a^{-2}=\frac{1}{a^2}=bb'$$

$$x=-3=Oc \qquad y=a^{-3}=\frac{1}{a^3}=cc'$$

$x=0 \quad y=1$

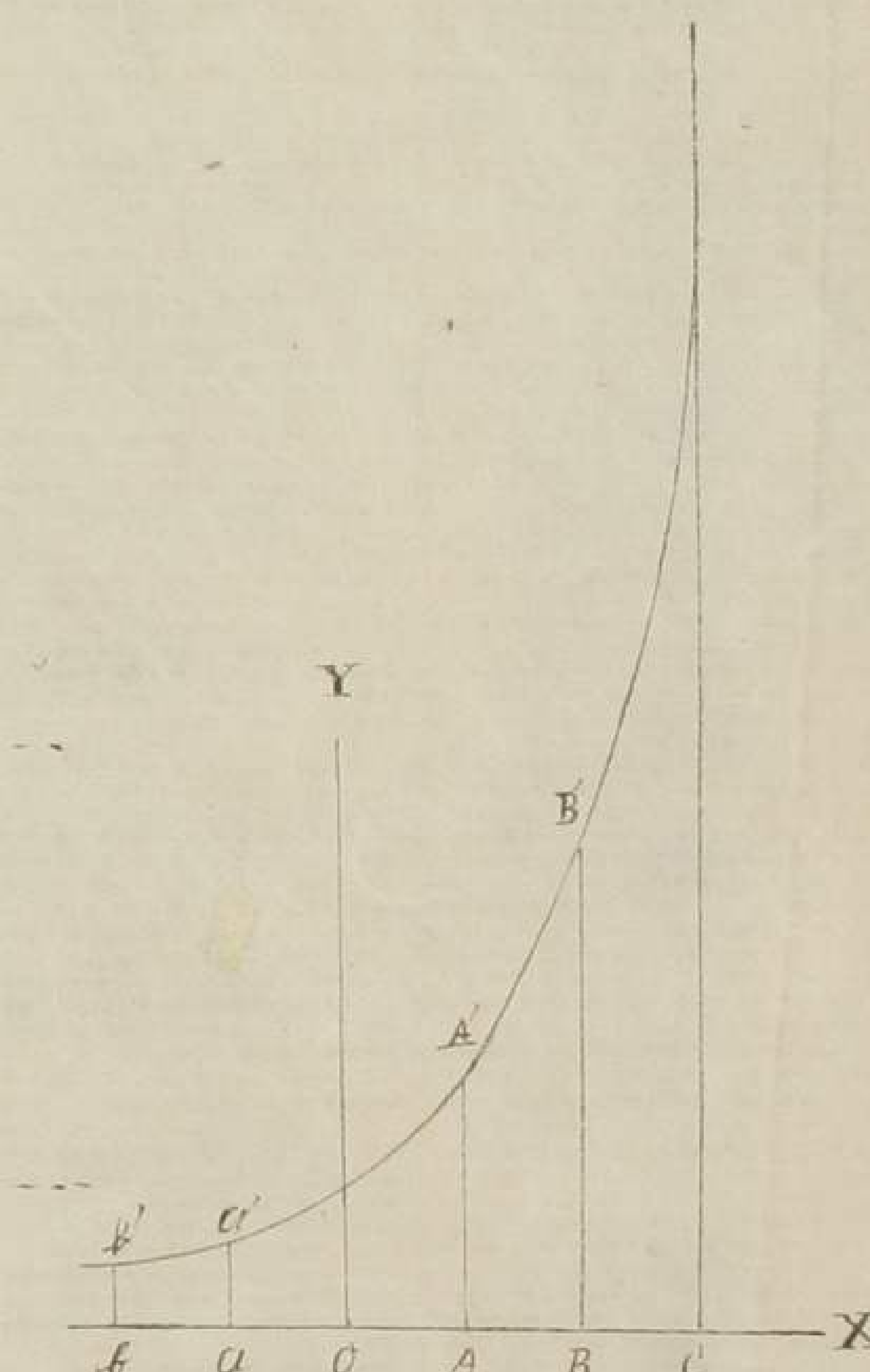
$x=1 \quad y=2{,}718$

$x=2 \quad y=7{,}389$

$x=3 \quad y=20{,}085$

$x=-1 \quad y=0{,}368$

$x=-2 \quad y=0{,}135$

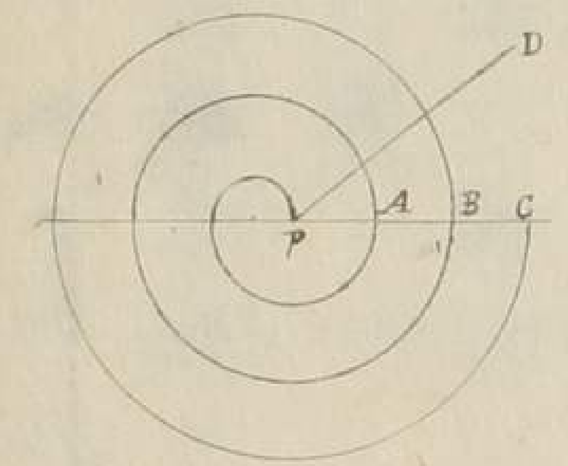


螺線

第三十七章元を点定平を以て直線に進み直線平速を以て一端を繞つて旋轉されし点の過ぐる所の道螺線を為すべし

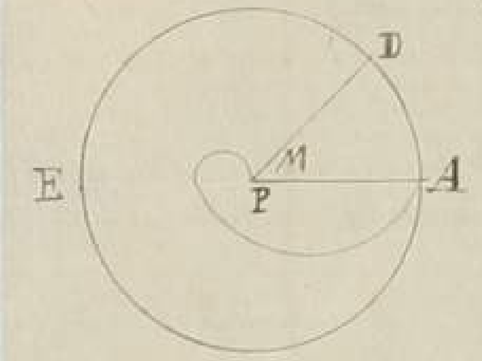
左図アDを直線なりア点定法を以てDに向て進み直線まゝ其一端アを繞りて旋轉されしア点A B Cの諸点を往過し曲線を為す是即ち螺線なり

中点アを極とし此直線アD極を繞り一周して成る所の曲線を一逓螺線と名く第二周して成る所の曲線を二逓螺線と名く第若し極を繞



つて止まされは無數亜螺線を成す時ハ之を直線極の螺線を過ぐる者其曲線に交らる度無窮に至るなし

直線の極点を繞りて成る所の度を知るにハ先つPを心としPAを以て半径としDFの半円を作るべし扨直線極点を繞りて其処に至るまでA点より測りて其何度なるを知るべし假令直線既に繞りて曲線の一段PMを為せし時其極を繞る度を知らんと欲せハA点よりAD弧を測りて之を得べし



亜奇黙徳螺線

第三十八章直線平速を以て極点を繞り毎点平速を以て直線を進行されハ之に依て成る所の曲線を亜奇黙徳螺線といふ

第三十九章亜奇黙徳螺線の式を $r=\frac{t}{2\pi}$ とし式中rを帯径としてtを帯径極点を繞るの弧度とせハ

如前圖

$$PM : PA :: \text{arc}\,AD : \text{circ}\,ABF$$

$$PM = r$$

$$PA = a$$

$$\text{arc}\,AD = t$$

$$\text{circ}\,ADB = 2\pi a$$

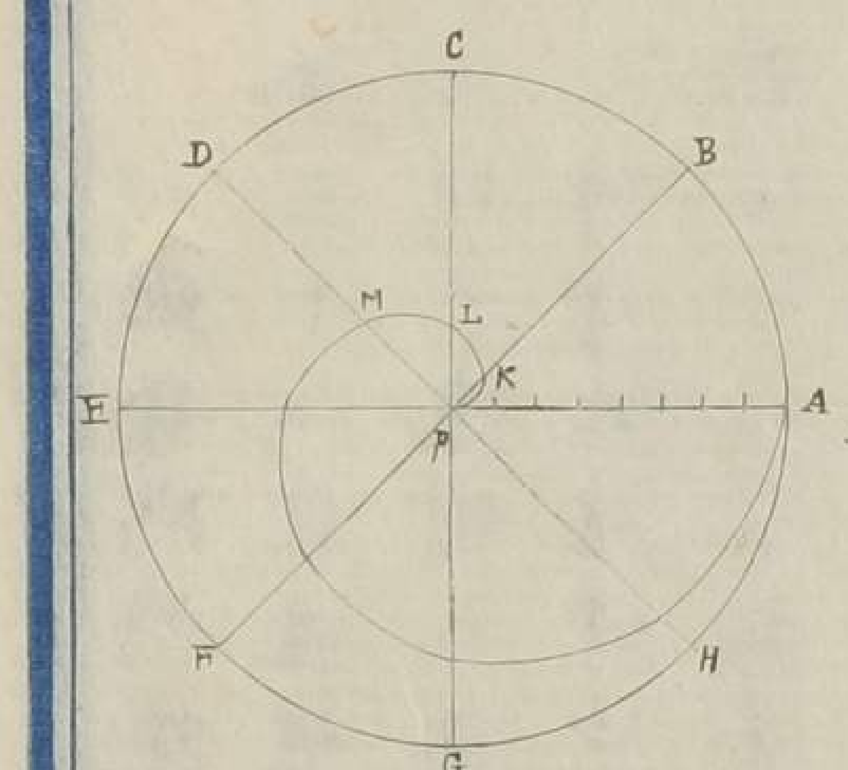
$$r : a :: t : 2\pi a$$

$$\therefore r = \frac{t}{2\pi a}$$

なり

亜竒默徳螺線を作る法

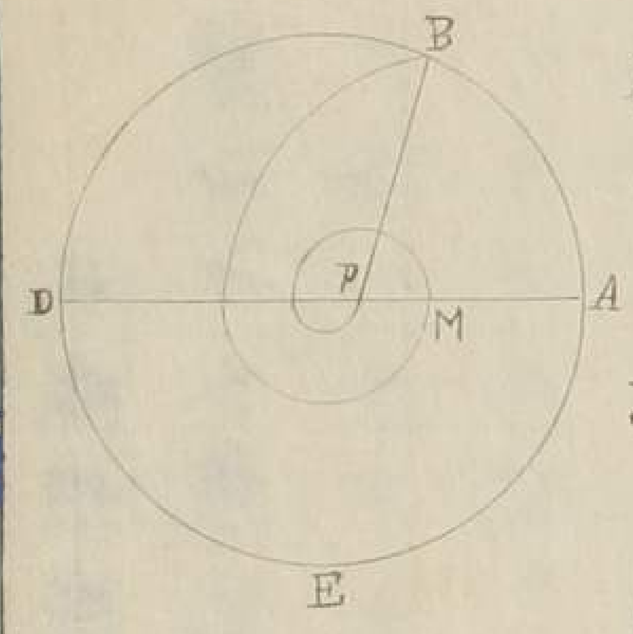
第四十章左図円周を平分し若干分となし又円周の分数に比して半径を平分し次に半径ＰＢ内にて一分を取りＫ点を定めＰＣ点にて二分を取りＬ点を定めＰＤ内にて三分を取りＭ点を定め以上之に倣ひ一分増しに多く取り諸点を定め其後ＫＬＭ等の諸点を過ぎて線を作れば即ち求むる所の亜竒默徳の螺線なり



双曲線螺線

第四十一章直線平速を以て極点を繞り母点減速を以て直線を退行し常距と極を繞る弧度と狎して反比例を為さしむる時は成る所の曲線を双線螺線とす

第四十二章双線螺線の式は $r=\frac{a}{t}$ とす式中 r は常距なり t は弧なり a は常数なり



$PB : PM :: \text{arc}\,ABDE : \text{arc}\,AB$

$PB = r \quad PM = 1$

$\text{arc}\,AB = t$

$r : 1 :: 2\pi : t$

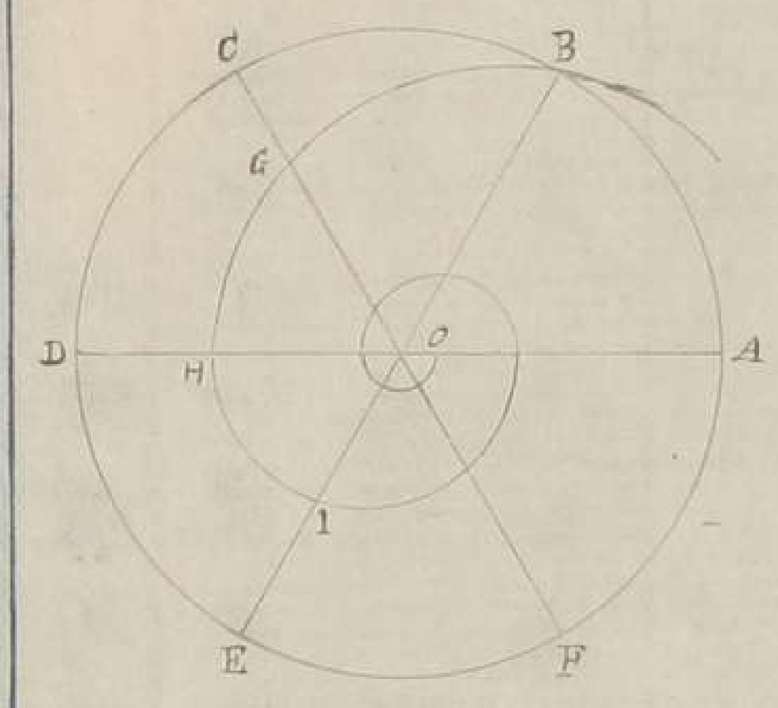
$r = \frac{2\pi}{t}$

$2\pi = a$ とすれば

$r = \frac{a}{t}$ なり

双線螺線を作るの法

第四十三章右図平円をABCDEF等の若干ニ分ちBPの半径ヲ以てPGを取り三分之一ヲ以てPHを取り四分之一を以てPIを取り余之ニ倣ひ而してBGHI等の諸点ヲ過ぎて曲線を作れば即ち求むる所の双線螺線是なり



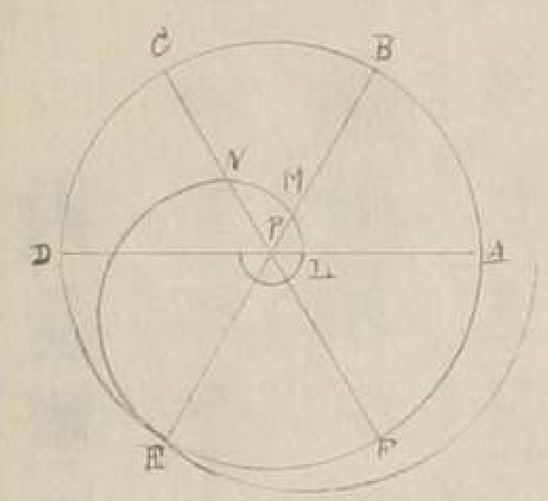
上ニ示ス所の二螺線共ニ $r=a^m t^n$ を以て公式とし式中 m n 或ハ正或ハ負ニして変化を生ずるなり

蓋し 2π を a とすれば $\frac{t}{2\pi}$ を $a^{t'}$ へ $\frac{2\pi}{t}$ を $a^{t'}$ なるか故なり

對數螺線

第四十四章直線平速ヲ以て極点ヲ繞り毎点減速を以て極ニ向て進行し帯径の對數と弧と径して比例を為さしむる時は即ち對數螺線なり

第四十五章對數螺線の式ヲ $t=\log r$ とし式中rを帯径にしてtを弧なり



$t=0$

$t=1$

$t=2$

$y=a^0=PL=1$

$y=a^1=PM$

$y=a^2=PN$

故ニ

$y=a^t$

$t=\log y$

對數螺線を作るの法

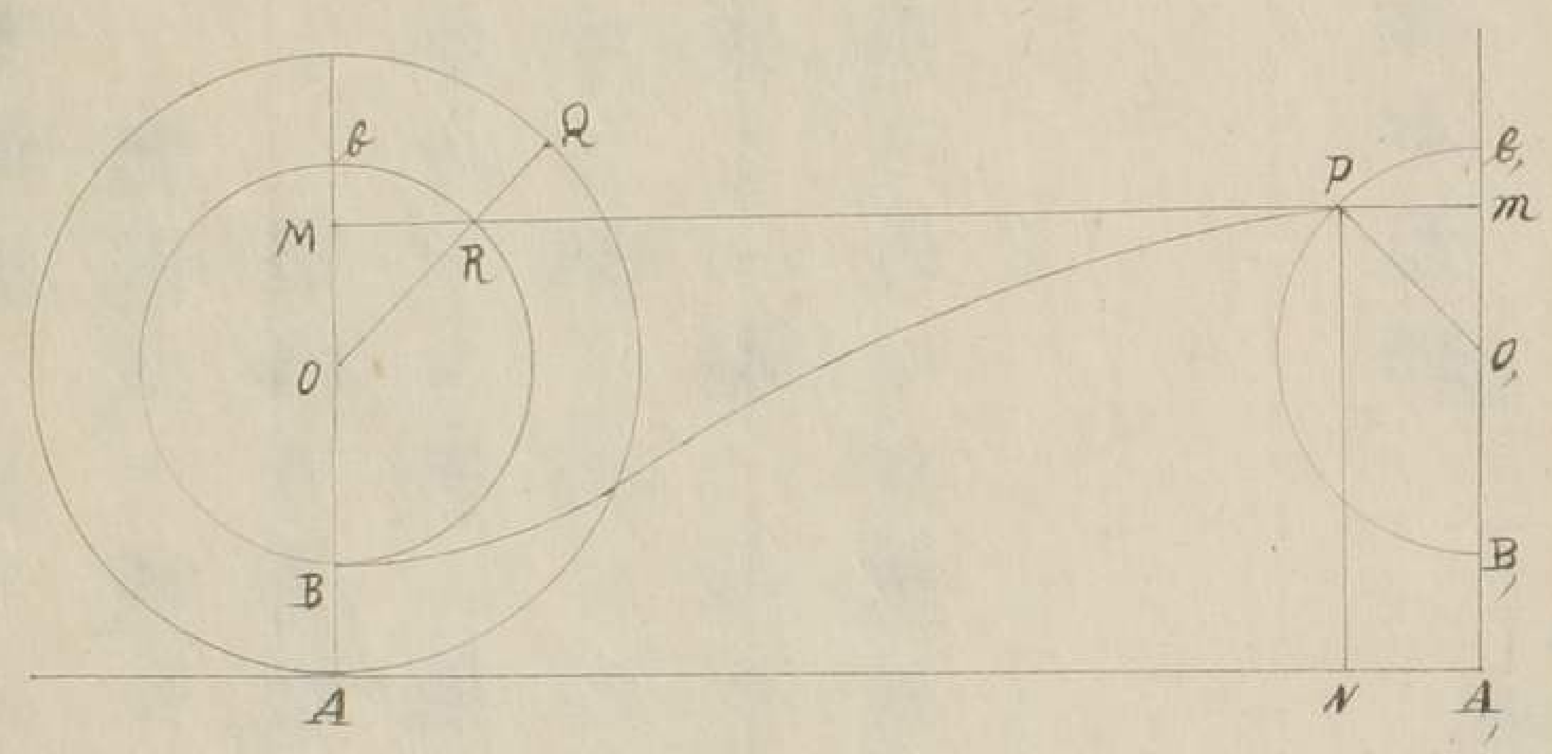
第四十六章右図の円周を分つてABB'CC'D等の諸等分となし分界より諸半径を作り次にPLPMPN等をして連比例を為さしむれはLMN等の諸点を過くる線即ち對數螺線なり

轂擺線

第四十七章Aなる輪水平線上を輾る時同時にBRbなる内部の周囲にあるB点に依て成る所の曲線を轂擺線と云

第四十八章轂擺線の式を求むること左の如し

Pは車轂軸擺線の一点なり其点



を通しMRPmの水平線を設け而してOO,の二心を取りORr及ひO,Pの線を画けは即ちPmとRMと等しく又AOr角とA,O,P角と相等しかるべし

$OA = a \quad AN = x$

$OB = b \quad NP = y$

$\angle AOR = \theta$

$\mathrm{arc}\ Ar = AA_,$

$\therefore x = AA_, - NA_, = a\theta - b\sin\theta$

$y = NP = OA + O_,m_{,,}$

$= a - b\cos\theta$

$\frac{b}{a} = e$

$\therefore x = a(\theta - e\sin\theta)$

$y = a(1 - e\cos\theta)$

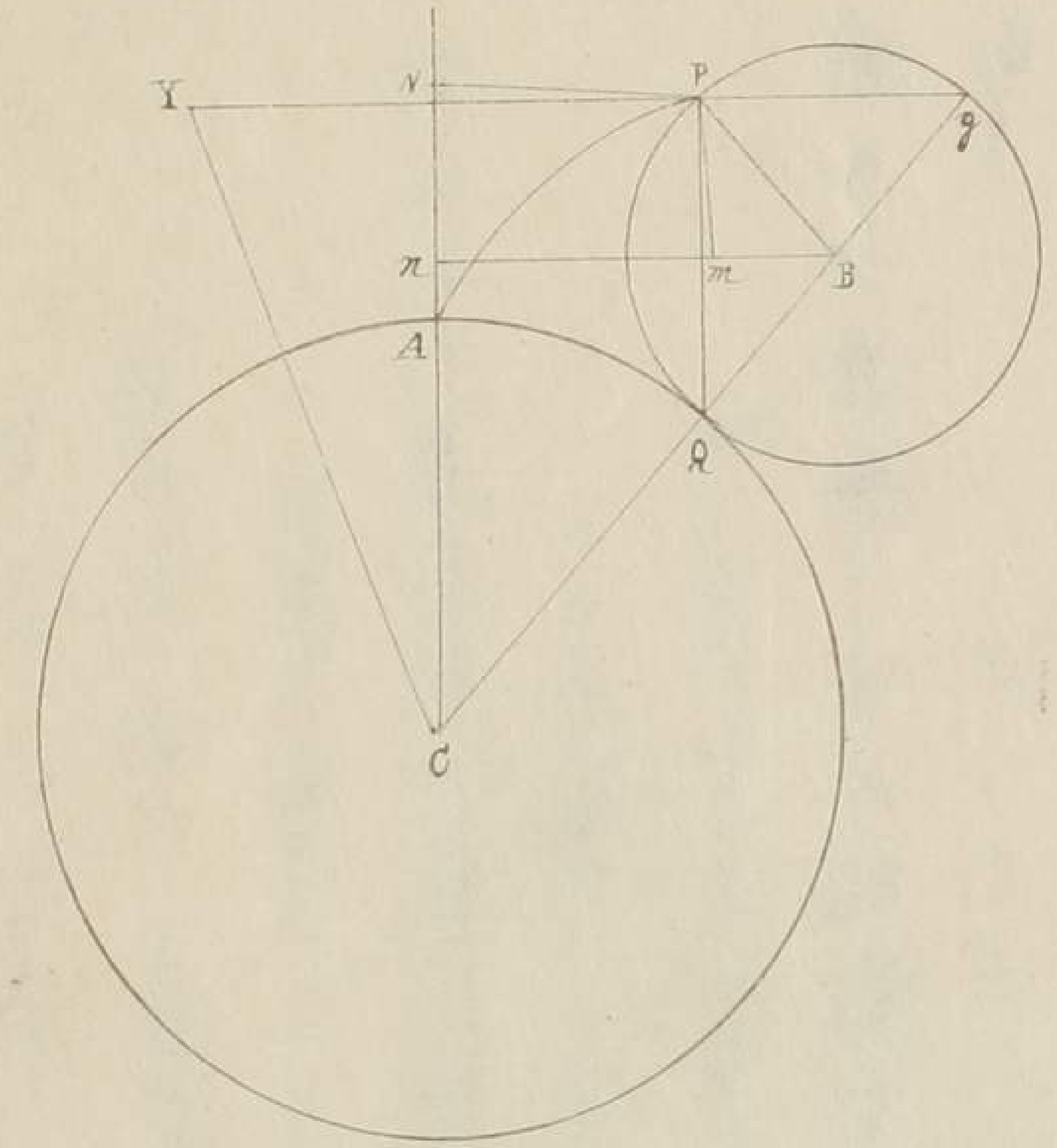
餘論若しaとb相等しきものとすれハ本式變して擺線式と成るなり

円内外擺線

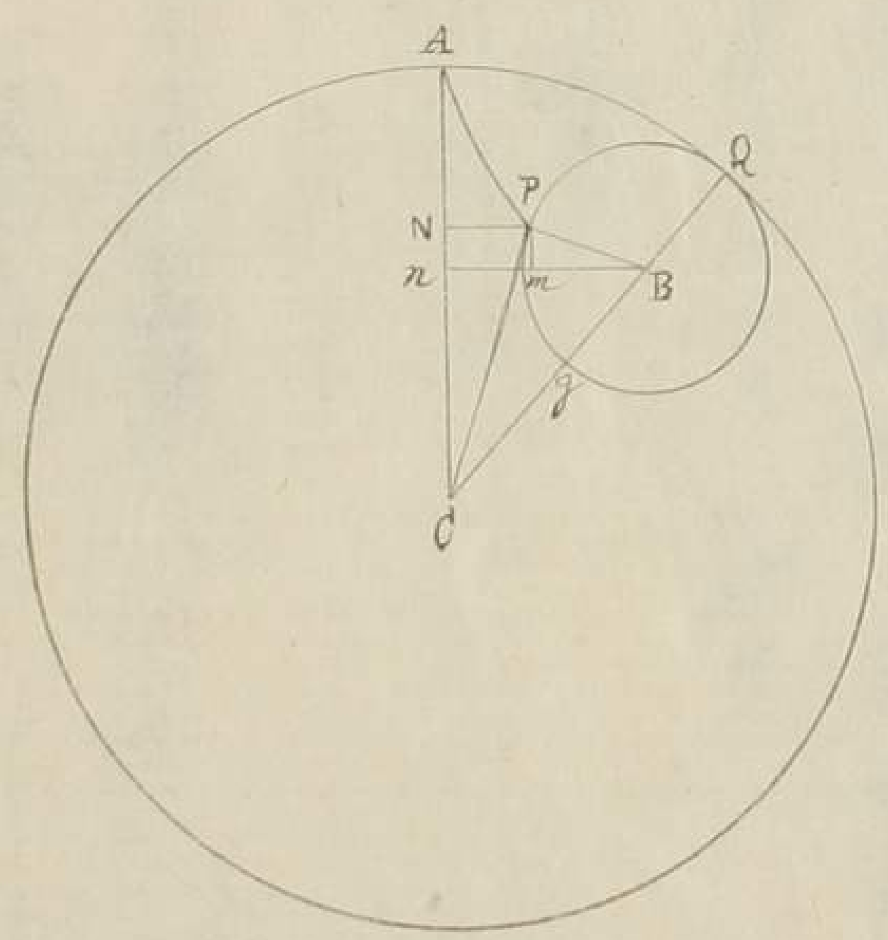
第四十九章一輪一円の外面周を繞るに輪周の一点に依て画く所の曲線を圓外擺線と号ス

若し一輪一円の内面周を繞るに前と等しくすれハ成る所の曲線を円内擺線と号ス

圓外擺線



圓内擺線



$CA = a \quad QB = b \quad \angle ACQ = \theta$

$CN = x \quad NP = y \quad \angle PBQ = \varphi$

$\therefore x = cn + Nn = (a+b)\cos\theta + b\sin PBm$

$PBm = PBQ - (90-\theta) = \varphi + \theta - 90$

$AQ = PQ \quad \therefore a\theta = b\varphi \quad \therefore \varphi = \frac{a\theta}{b}$

$\therefore x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$

$y = Bn - Bm = (a+b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\theta\right)$

第五十章若し b の同数負なれは曲線は円内擺線なり

$x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

$y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

$PBm = PBC - nBC = 180 - \frac{a\theta}{b} - (90-\theta) = 90 - \frac{a-b}{b}\theta$

$x = (a-b)\cos\theta + b\sin PBm$

$= (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

$y = (a-b)\sin\theta - b\cos PBm$

$= (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

第五十一章円外擺線に於て a と b と等しかりのとき之れを即左の如し

$x = a(2\cos B - \cos 2\theta) \qquad y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta)$

$x^2 + y^2 = a^2(4 - 4\cos\theta + 1)$

$\therefore x^2 + y^2 - a^2 = 4a^2(1 - \cos\theta)$

$$x = a(2\cos\theta - 2\cos^2\theta + 1)$$

$$\therefore x - a = 2a\cos\theta(1 - \cos\theta)$$

$$y = 2a\sin\theta(1 - \cos\theta)$$

$$\therefore (x-a)^2 + y^2 = 4a^2(1-\cos\theta)^2$$

$$16a^4(1-\cos\theta)^2 = (x^2+y^2-a^2)^2$$

$$\therefore 4a^2\{y^2+(x-a)^2\} = (x^2+y^2-a^2)^2$$

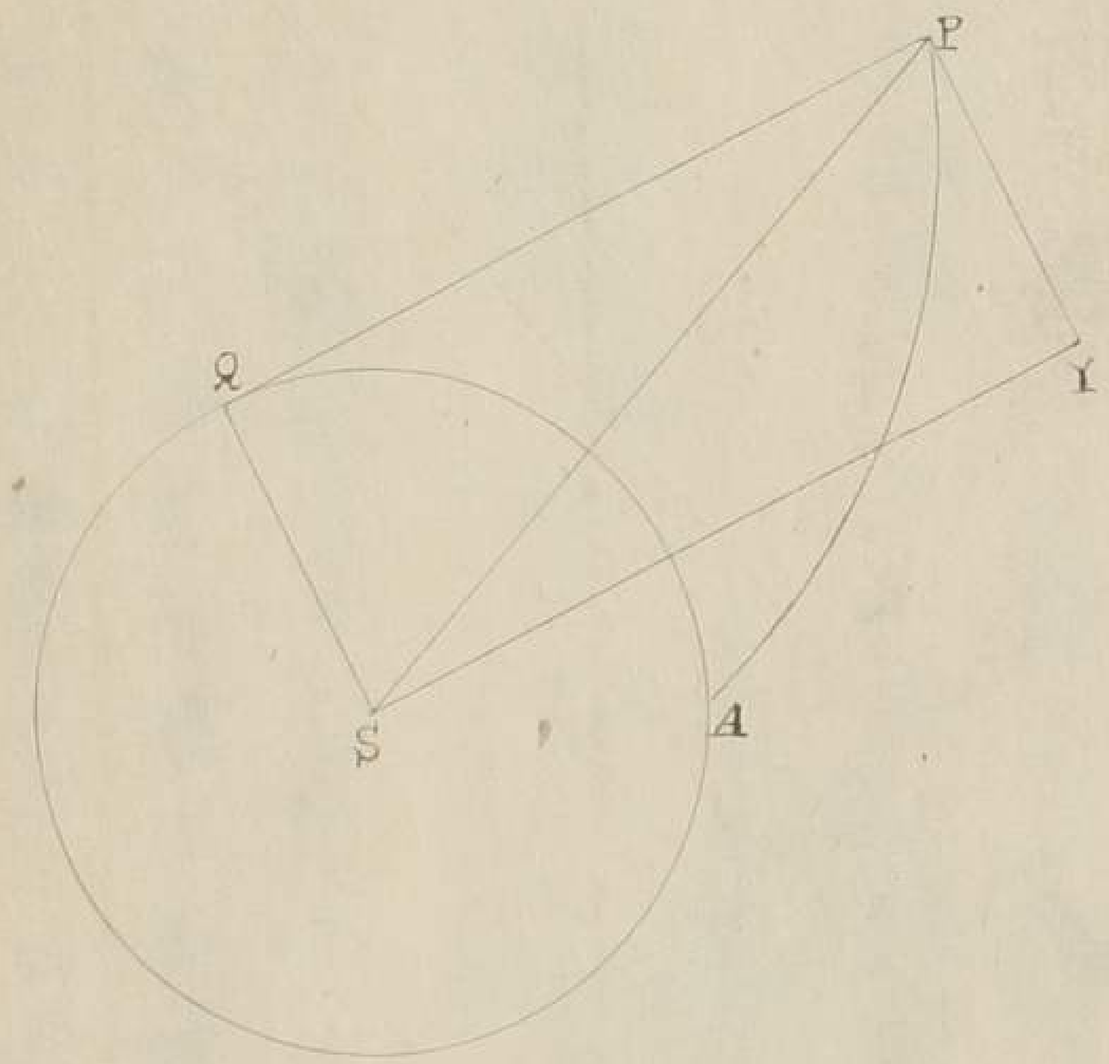
餘論若し $x-a = r.\cos\varphi$ 及 $y = r\sin\varphi$ とすれは極式を得る左の如し

$$4a^2r^2 = (r^2 + 2ar\cos\varphi)^2$$

$$\therefore r = 2a(1-\cos\varphi)$$

圓の漸伸線

第五十二章円の漸伸線なるものは圓の周圍より捲回せる所の線の一端に依て画きたる曲線なり



線を捲回せしめ始むる所の点をAとしQPを線の長さとし即ちAQに等しPYをAPの切線としSYをPYに正交せしめ設くべし

$SP = r \quad SY = p \quad Sq = a$

$\therefore Sq = PY = \sqrt{SP^2 - SY^2} \quad \therefore p^2 = r^2 - a^2$

$\therefore a^2 = r^2 - p^2$

餘論若し $\varphi = \sec^{-1}\frac{r}{a} = PSq \quad \theta = \angle ASP$

$\theta + \varphi = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a}$

$\therefore \theta = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} - \sec^{-1}\frac{r}{a}$

$\therefore a\frac{\partial\theta}{\partial r} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} = \frac{SY}{SP}$ ナリ

洋算例題續々篇巻之九終

洋算例題續々篇巻之十

陸軍大尉福田半編輯

曲線

凡そ線式の微分を求むれは之を得る所の式縱横線微分相屬するの理を示すもの之を號して線微分式と云

○假令直線式の如き

$$y = ax + b$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

一次微分はbに關係せす二次微分はaとb供に關係せす凡そ直線の縱横軸の平面内に在る者皆此の如し之を號して一次線微分と云

又抛物線式の如き

$$y^2 = 2ax$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a}{y}$$

$$a = \frac{y^2}{2x}$$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y}{2x}$$

此式a yに關係せしむ故に凡そ同縦横線の抛物諸線皆此の如し

又平圓式の如し

$$y^2 + x^2 = r^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{y}$$

此式rの同數に關係せしむ故に同し縦横軸の平圓皆此の如し之れ二次線微分式と云

又二次線公式の如き

$$y^2 = mx + nx^2$$

$$2y\,\partial x = m\,\partial x + 2nx\,\partial x$$

$$\partial y^2 + y\,\partial^2 y = n\,\partial x^2$$

故に

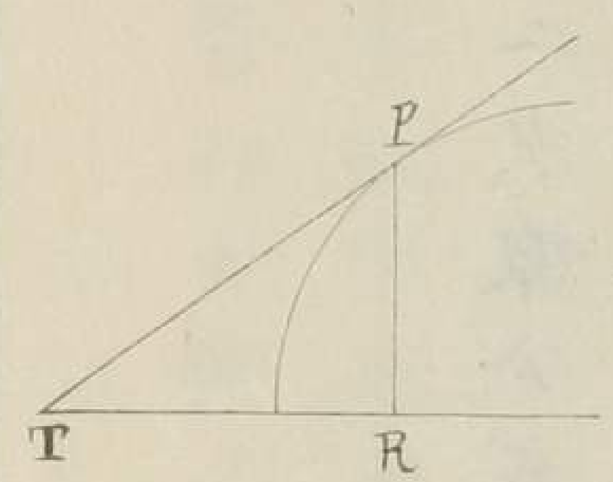
$$y^2\partial x^2 + x^2\partial y^2 + yx^2\partial y - 2xy\,\partial x\,\partial y = 0$$

此式を二次線公微分式と云

凡式右に準をれハ數次微分求め終て常元を消去しを擧し若し二個あれを二次微分を求む三個あ

れを三次微分を求め以て原式に合し常元を去尽
を盡し已に知る凡そ曲線の切線と横軸との交角
の正切は縦横第一次微係数に等し此に準し切線
次切線法線次法線の四線公式を求む

一例凡そ曲線正交縦柚二軸を準とし之れを何点の次
切線を論ずる如し縦線に横線の微係数を乗ずる
者に等し其證左の如し



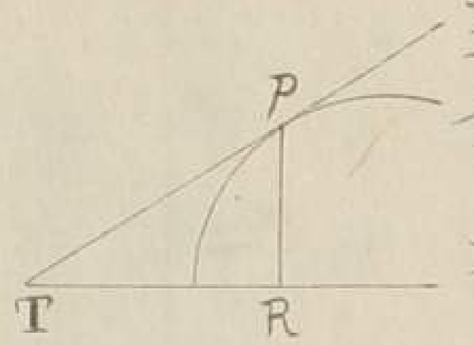
$1 : TB :: \tan PTR : PR$

$1 : TR :: \frac{\partial y}{\partial x} : y$

$TR = y\frac{\partial x}{\partial y}$

如し

二例凡そ四線正交二軸を以て準とし之れを切線と縦
線次切線各自乗冪の和を平方に開きし者に等し
其證左の如し



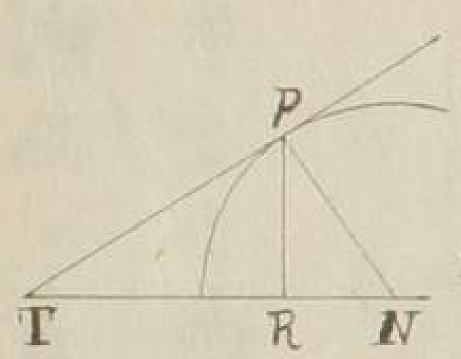
$PT^2 = PR^2 + TR^2$

$PT^2 = y^2 + y^2\frac{\partial x^2}{\partial y^2}$

$PT = y\sqrt{1+\frac{\partial x^2}{\partial y^2}}$

如し

三例凡そ曲線の次法線は縦線の微係数に縦線を乗
ずる者に等し其證左の如し



$1 : PR :: \tan RPN : RN$

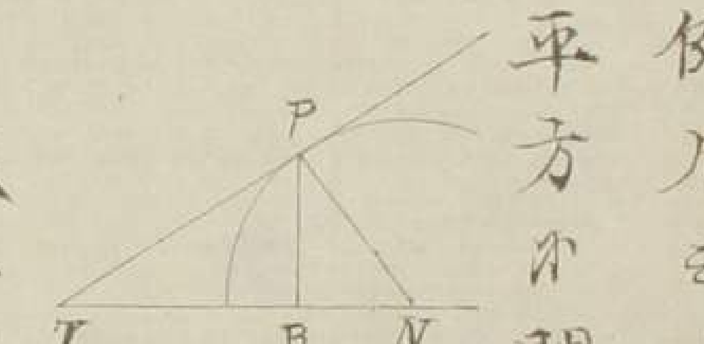
$\angle RPN = \angle PTN$

$1 : y :: \frac{\partial y}{\partial x} : RN$

$RN = y\frac{\partial y}{\partial x}$

如し

四例乃ち曲線の法線と縦線次法線各自乗幂の和ハ平方ニ關きし者ニ等し其證左の如し



$$PN^2 = PR^2 + RN^2$$

$$PN^2 = y^2 + y^2\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$$

$$PN = y\sqrt{1-\frac{\partial y^2}{\partial x^2}}$$

如し

微分ハ用ひ曲線の四線ハ求むる法

何曲線ニ拘らすこれを上四例の諸線ハ求めんと欲さハ先つ本曲線の微分ハ求め $\frac{\partial x}{\partial y}$ 若しくハ $\frac{\partial y}{\partial x}$ の同數ハ得て四例の式中ニ用ゐ又縦横線ハ以て x y の二元ニ代ふ算し然る時ハ何線の何点ニ關さしむを得る所の數一々密合ハ證し

二次線公式

$$y^2 = mx + nx^2$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m+2nx}{2y}$$

$$y = \sqrt{mx+nx^2}$$

$$\therefore \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m+2nx}{2\sqrt{mx+nx^2}}$$

之ハ前四例中ニ用ゐれハ左の如し

次切線
Subtangenta $= TR = y\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{2(mx+nx^2)}{m+2nx}$

切線
tangenta $= PT = \sqrt{y^2+y^2\frac{\partial x^2}{\partial y^2}} = \sqrt{mx+nx^2+4\left(\frac{mx+nx^2}{m+2nx}\right)^2}$

次法線
Subnormal $= RN = y\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m+2nx}{2}$

法線
normal $= PN = \sqrt{y^2+y^2\frac{\partial y^2}{\partial x^2}} = \sqrt{mx+nx^2+\frac{1}{4}(m+2nx)^2}$

前四式を用ひ圓錐諸曲線の曲線を推すべし

五例 試に $m=2A$ $n=0$ とすれば拋物線の四線式を得るものゝ如し

$$TR=2x$$

$$PT=\sqrt{2Ax+4x^2}$$

$$RN=A$$

$$PN=\sqrt{2Ax+A^2}$$

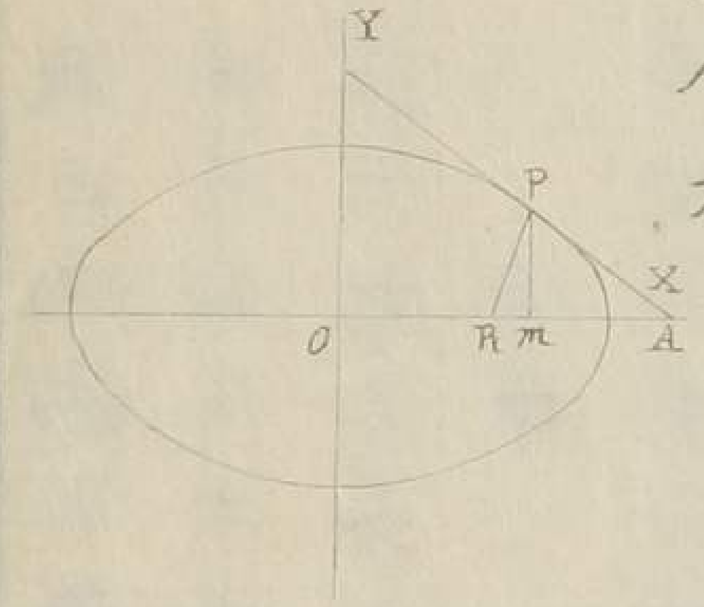
設題

第一 若し $m=2A$ $n=-1$ とすれば平圓の四線式を得ると云其線式如何なる哉

第二 若し $m=\frac{2B^2}{A}$ $n=-\frac{B^2}{A^2}$ とすれば楕円の四線式を得ると云其線式如何

第三 若し $m=\frac{2B^2}{A}$ $n=\frac{B^2}{A^2}$ とすれば其線式如何

六例 楕円に於り心点を頂点と作る所の次切線及ひ次法線を引くことを問



$$y^2=\frac{B^2}{A^2}(A^2-x^2)\cdots(1)$$

$\therefore$

$$\text{Sub tan}=-\frac{A^2-x^2}{x}\quad(2)$$

$$\text{Sub nor}=-\frac{B^2x}{A^2}\quad(3)$$

此の(2)(3)の両式を以て前圖 MA なる次切線及び
MR なる次法線を作り而して AP 及び RP の線
を引けば即ち P 点の切線並に法線を得べし

設題

第四 今平円あり心点を原点とする所の四線式如何

第五 今抛物線あり通径四寸横線九寸縦線及び次切線幾何なる哉

第六 今楕円あり半長径十五寸半短径八寸中心を厚点とし横線十寸なる時次切線幾何なる哉

第七 同半長径六寸半短径四寸中心を原点とし横線二寸なる時は次法線幾何なる哉

第八 今平円あり半径十寸中心を原点とし横線三寸なる時切線及次切線幾何なる哉

第九 今双曲線あり心点を原点とする所の次切線及び次法線を求むる式如何

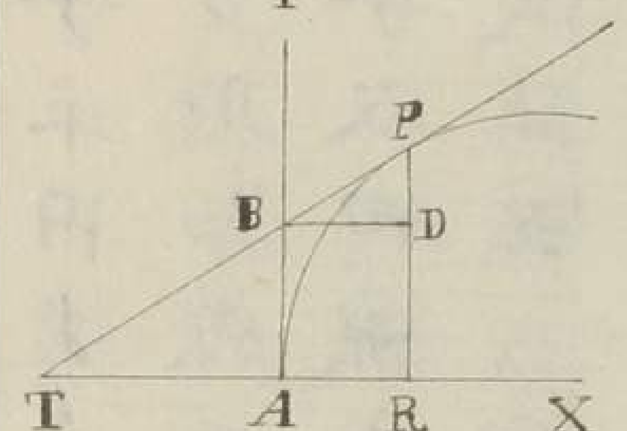
第十 今擺線あり其の次切線及び次法線を得る式如何

漸近線

曲線の漸近線とは原点を遠ざかるに従ひ曲線を相近つくと雖も永く相遇ふことなし原点を距る無究の遠さに至る時は殆と曲線の切線の切線の如し然れとも永く切点に至る能はず

凡そ曲線の横線愈長ければ其切線の縦横軸に交

るの点原点を距ること亦愈遠し
若し横線の長さを無窮となして二点の原点を距るの遠さも亦無窮となれは其切線漸近線に非ざるなり
若し横線の長さを無窮となして二点の原点を距る無窮に非ざれは其切線即ち漸近線なり



左圖の如くAを原点Tを切線横軸に交る点としてPTを切線なり其縱横線を

即ち $AR=x$ $PR=y$ となれは次切線 $TR=y\frac{dx}{dy}$ を得る

此内横線を減すれは $TA=y\frac{dx}{dy}-x$ なり

即ち切線横軸に交る点と原点との距離の公式之

又Bを切線縱軸に交る点なり而して

$$PD=BD\times\tan DBP=\frac{dy}{dx}x$$

$$\therefore AB=PR-PD=y-\frac{dy}{dx}x$$

即ち切線縱線に交る点と原点との距離の公式之
若し又多無窮として二公式を亦無窮となり其曲線に漸近線なし二公式俱に無窮となれは其曲線に必ず漸近線あるなし
若し二公式俱に無窮ならざれは漸近線必ず縱

横二軸に斜交する圖し
若し二公式一を有究一を無究となれば漸近線必ず一軸と平行す
若し二公式倶に0となれば漸近線必ず原点を過ぐるなり

七例　試に抛物線に漸近線の有無を問ふ

抛物線式

$$y^2=2ax$$

$$y\frac{dx}{dy}=\frac{y^2}{a}$$

$$=2x$$

故に

$$AT=y\frac{dx}{dy}-x$$

$$=x$$

若しxを無究となれば AT を無究なり 故に抛物線に漸近線なし

前七例に準し種々の問題を設て左に挙く

設問

十一　双曲線に漸近線あり哉如何

十二　楕円に漸近線ある哉如何　但し原点中心にあり

十三　對数曲線に漸近線ある哉如何

十四　蜉線なり　次法線及び次切線を得る式如何

十五　假令蘿線なり　其次切線及び次法線を得る式如何

十六　蜉線あり　其線に漸近線ある哉如何と問ふ

十七　假令蘿線あり　此線に漸近線ある哉如何

十八　$y^2=a^2x$ なる式を曲線式とされハ　其次切線及び次法

線を求む式如何

十九
今 $u=x^2-2axy+y^2$ なる式を曲線式となしこれを其次切線を求る
式如何なる哉

二十
今 $\sqrt{y}=\sqrt{a}-\sqrt{x}$ なる式を曲線式となしこれを $AB-AT=a$ を得る證及び
其切線式如何（本巻の六葉の裏に記載しある図に依るものとし）

廿一
假令TP及びTQをして抛物線の切線としSを
中心点となしこれを $SP.SQ=ST^2$ を得る㕝云其證如何

廿二
今 $x^2y^2=(a+x)^2(b^2-x^2)$ なる式あり次切次法の両線相
乗ずれば y^2 に等し其證如何

廿三
今對數曲線あり其次切線式を求む如何

廿四
今 $y^2=2a^2\log x$ なる式を曲線式となる所の次切線
を求む如何

廿五
今 $xy^2=a^2(a-x)$ なる式を曲線式となる所の次法
線を求む如何

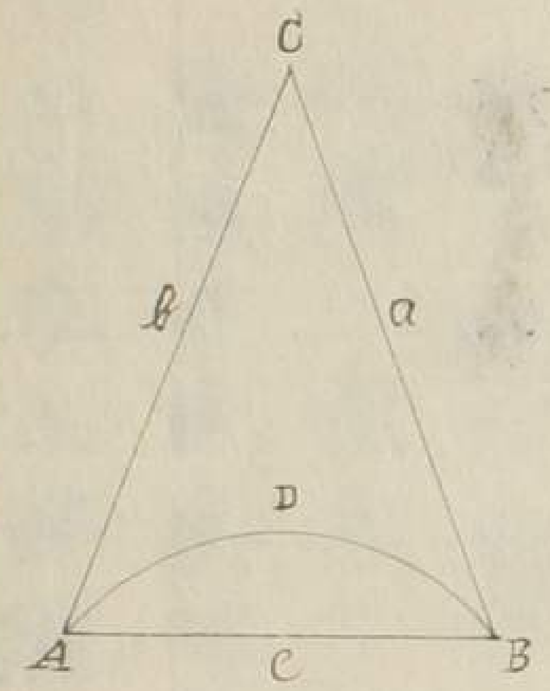
洋算例題續々篇巻之十終

洋算例題續々篇巻之十一

陸軍大尉福田半編輯

曲線及ひ曲線面の積曲面體の積の諸微分を推す法

第一則 凡そ曲線と其通弦の比例の限は一に等しといふ其證左の如し



左圖の如れADBを曲線の一段ありABを其通弦にして之をcと号し又曲線の二端のA及ひBにの二切線を作り之をa及ひbとれ故ADBの曲線を通弦により大

而して二切線 a b の和より小なること明了なり
故に三角術に準じ之を左の如し

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C} \quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\sin\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

AB の二点漸々に近づくを曲線 ADB 従って減
縮を故に AB の二点相合するに至り其二角減縮
の極にして A+B 及び A-B 倶に 0 となるに依て前に得し

る式変して 1 となる次の如し

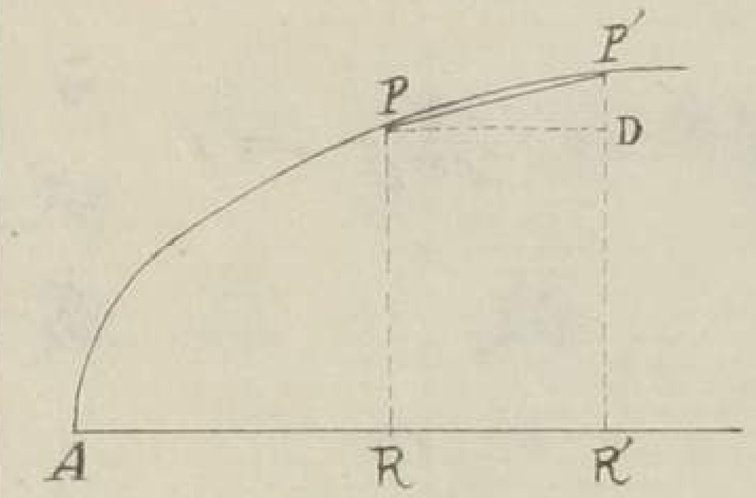
$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos 0}{\cos 0}=1$$

故に $a+b$ と c の比例の限を一なり

扨て ADB の曲線を $a+b$ より大なるを又 c より小
なるを故に $a+b$ と c の比例の限一なれを ADB の
曲線と通弦 c の比例の限を亦一なり即ち曲線と
其通弦の比例の限を亦一なり

第二則 凡そ曲線の微分を直角縱横線両微分平方の

和の平方商に等しと云其證左の如し
前則に準し曲線と通弦の比例の限を一とし試に
ARを曲線の横線としPRを曲線の縦線とし長
數RR'をhとしxに加ふれはyの同數變してP'
R'となる之をy'としARに平行してPDを作れ
は即ち左の如し



$$PR = y \qquad AR = x$$

$$P'R' = y' \qquad RR' = h$$

$$\text{chord}\ PP' = \sqrt{PD^2 + P'D^2}$$

$$= \sqrt{h^2 + P'D^2}$$

$$y = f(x) \qquad y' = f(x+h)$$

$$P'D = y' - y = \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{1 \cdot 2\, \partial x^2}h^2 + \cdots\cdots$$

$$\text{chord}\ PP' = \sqrt{h^2 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots}$$

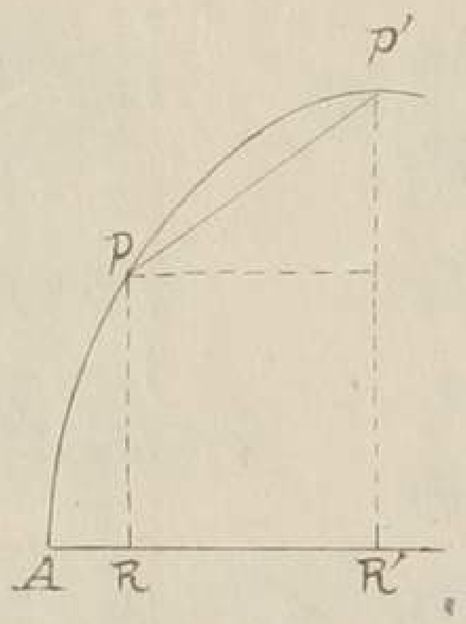
$$\frac{\text{chord}}{h} = \sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} + \cdots\cdots} \quad h = 0$$

$$\text{chord}\ PP' = \text{arc}\ PP' = z$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}}$$

$$\therefore \partial z = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2}$$

第三則凡そ曲線面正交して縦横線を以て界とされ
は其面積の微分は縦線に横線の微分を乗したる
ものに等しと云其證左の如し



$$AR = x$$

$$PR = y$$

$$RR' = h$$

$$AR' = x + h$$

$$P'R' = y'$$

PR. RR'. P'R' 及ひ通弦PP'にて成れる面積をS
と命しまたPR. RR'. P'R' 及ひ弧線PP'にて成せ
る面積S'とされはSとS'の比例の限を一なり如
何となれは通弦PP'と弧線PP'の比例の限一な

$$\frac{chord\ PP'}{arc\ PP'} = 1$$

以て知る

$$\therefore \frac{s}{S} = 1$$

$$S = \tfrac{1}{2}RR'(PR + P'R') = \tfrac{1}{2}h(y + y')$$

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots$$

$$\tfrac{1}{2}(y' + y) = y + \frac{\partial y}{2\partial x}h + \cdots\cdots$$

$$\therefore \frac{s}{h} = \tfrac{1}{2}(y' + y) = y + \frac{\partial y}{2\partial x}h + \cdots\cdots$$

$$h = 0$$

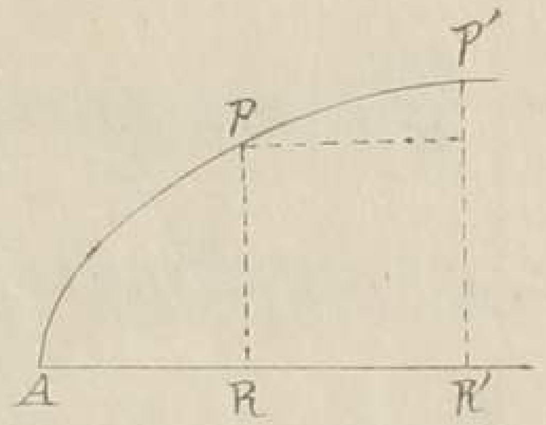
$$\therefore \frac{\partial s}{\partial x} = y$$

$$\partial s = y.\partial x$$

第四則 凡そ曲線體の曲面微分は底面の圓周に毎曲線の微分を乗じたるものに等しと云 其證左のごとし

曲線體の曲面を皮積或は覓積と云

左図の如く APP' の曲線 AR を軸として旋轉して一匝を以て其過ぐる所必ず曲面を為すを知る



$AR = x$

$PR = y$

$RR' = h$

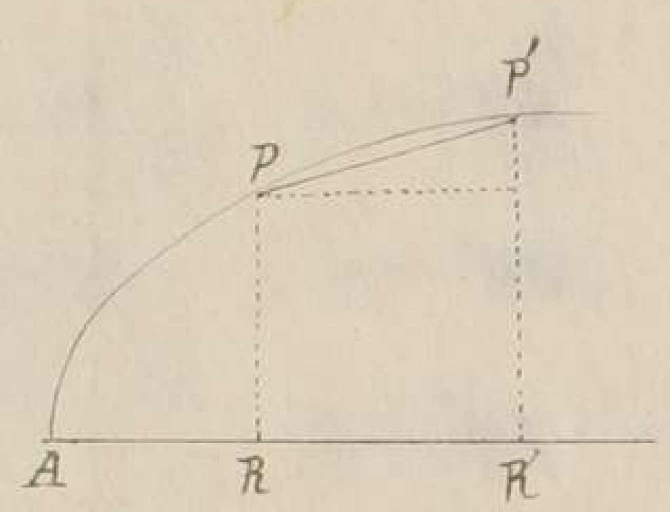
$AR' = x + h$

$P'R' = y'$

曲線旋轉する時はP及びP'の二点過ぐる所必ず二円周を為し又通弦PP'の過ぐる所必ず円錐截積の曲面を為すを知る

第一則に準ずれば通弦と弧線の比例の限一なり故に通弦PP'旋轉して成る所の曲面と弧線PP'

第五則曲線体積の微分は底面に母曲線の横線微分を乗ずるものに等しと云ふ其證左の如し



上図の如きAPRの曲線面ARを軸とし旋轉一匝すれは其過る所必す曲線體を為すへし

曲面APR旋轉する時はPRR'P'の四辺形必す円錐截體を成す前諸則の理に依れは此円錐截體の積とPR、R'R PR及ひ曲線PP'より成れる面の旋轉にて生せる體の比例の限は一なり

旋轉して成る所の曲面の比例の限も亦一なり幾何學の理に準し通弦PP'旋轉して成れる所の曲面をSとすれは其式左の如し

$$S = \frac{PP'}{2} \times (2\pi . PR + 2\pi . P'R')$$

$$\therefore S = PP'(\pi y + \pi y')$$

$$\frac{S}{PP'} = \pi(y + y')$$

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x} h + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} h^2 + \cdots\cdots$$

$$y + y' = 2y + \frac{\partial y}{\partial x} h + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} h^2 + \cdots\cdots$$

$$\frac{S}{PP'} = \pi\left(2y + \frac{\partial y}{\partial x} h + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} h^2 + \cdots\cdots\right)$$

$$h = 0 \qquad PP' = 0 = \partial z$$

$$\therefore \partial S = 2\pi y \partial z$$

$$\partial S = 2\pi y (\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\because \partial z = (\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{1}{2}}$$

幾何學に據れハ右円錐体の積をＹとすれハ次のことし

$AR = x \qquad PR = y$

$PR' = h \qquad AR' = x + h$

$P'R' = y'$

$$Y = \frac{1}{3}\pi RR'(PR^2 + P'R'^2 + PR.P'R')$$

$$= \frac{1}{3}\pi h(y^2 + y'^2 + yy')$$

$$\frac{Y}{h} = \frac{1}{3}\pi(y^2 + y'^2 + yy')$$

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 + \cdots\cdots$$

$$y'^2 = y^2 + \frac{2\partial y}{\partial x}yh + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}h^2 y + \cdots\cdots$$

$$yy' = y^2 + \frac{\partial y}{\partial x}hy + \frac{\partial^2 y}{2\partial x^2}h^2 y + \cdots\cdots$$

$$y^2 + y'^2 + yy' = 3y^2 + \frac{3\partial y}{\partial x}hy + \cdots\cdots$$

$$\therefore \frac{Y}{h} = \frac{1}{3}\pi\left(3y^2 + \frac{3\partial y}{\partial x}yh + \cdots\cdots\right)$$

$$h = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial h} = \pi y^2 \qquad \partial Y = \pi y^2 \partial x$$

式中πy^2ハPR線を半径としてゑかく円面積即ち底面な
呈

例 今平円分面積あり試に其微分を求む

平円式

$$R^2 = x^2 + y^2$$

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

第三則に準し

$$\partial s = y\partial x$$

$$\therefore \partial s = \partial x\sqrt{R^2 - x^2}$$

此例に準し前諸則に照し左の設題を了解すへし

設題

第一 今平円の弧線あり其微分を求む

第二 今平円分面積あり原点円周に在る時其微分如何

第三 今抛物線あり其面の微分及ひ線の微分を問

第四 今對數曲線あり線の微分を問

第五 今抛物線體あり其曲面の微分
第六 今中心を頂点とする所の楕円あり其線及び面の
微分を問
第七 今蜉線あり其面の微分を問ふ
第八 今擺線あり其線及び面の微分如何
第九 今中心を焦点とする所の楕円長径を軸として旋轉
一匝されば長立円と成る其曲面の微分を問ふ
第十 今若し短径を軸としこれを如何なる形為して其曲
面の微分を如何なる式を得る哉
十一 今蘿線あり其線の微分を問ふ
十二 今円錐体あり其曲面の微分及び体積の微分を向

十三 今立円体あり其曲面の微分及び体積の微分を問
十四 今半立方抛物線あり其曲面の微分を問
十五 今底辺を軸としたる擺線体あり其体積の微分を
向ふ

洋算例題續々篇卷之拾一終