

## Grundkurs Mathematik II

### Arbeitsblatt 54

#### Die Pausenaufgabe

AUFGABE 54.1. Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $(4, -1)$ , der durch den Punkt  $(-2, 5)$  läuft.

#### Übungsaufgaben

AUFGABE 54.2.\*

Erstelle eine Kreisgleichung für den Kreis im  $\mathbb{R}^2$  mit Mittelpunkt  $(-5, 5)$ , der durch den Punkt  $(-4, -1)$  läuft.

AUFGABE 54.3. Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden  $G$  und des Kreises  $K$ , wobei  $G$  durch die Gleichung  $2y - 3x + 1 = 0$  und  $K$  durch den Mittelpunkt  $(2, 2)$  und den Radius 5 gegeben ist.

AUFGABE 54.4.\*

Bestimme die Schnittpunkte des Einheitskreises mit der Geraden, die durch die beiden Punkte  $(-1, 1)$  und  $(4, -2)$  verläuft.

AUFGABE 54.5.\*

Berechne die Schnittpunkte der beiden Kreise  $K_1$  und  $K_2$ , wobei  $K_1$  den Mittelpunkt  $(3, 4)$  und den Radius 6 und  $K_2$  den Mittelpunkt  $(-8, 1)$  und den Radius 7 besitzt.

AUFGABE 54.6.\*

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + 3y^2 = 3\} \text{ und } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 - xy + y^2 = 4\}.$$

AUFGABE 54.7. Beschreibe die obere Hälfte des Einheitskreises und die untere Hälfte des Einheitskreises als den Graphen einer Funktion.

## AUFGABE 54.8.\*

Es sei

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

die Standardparabel und  $K$  der Kreis mit dem Mittelpunkt  $(0, 1)$  und dem Radius 1.

- (1) Skizziere  $P$  und  $K$ .
- (2) Erstelle eine Gleichung für  $K$ .
- (3) Bestimme die Schnittpunkte

$$P \cap K.$$

- (4) Beschreibe die untere Kreisbogenhälfte als Graph einer Funktion von  $[-1, 1]$  nach  $\mathbb{R}$ .
- (5) Bestimme, wie die Parabel relativ zum unteren Kreisbogen verläuft.

## AUFGABE 54.9. Bestimme alle Lösungen der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

für die Körper  $K = \mathbb{Z}/(2)$ ,  $\mathbb{Z}/(3)$ ,  $\mathbb{Z}/(5)$  und  $\mathbb{Z}/(7)$ .

## AUFGABE 54.10. Skizziere die trigonometrischen Dreiecke zu den Winkeln

- (1)  $2\pi/3$ ,
- (2)  $5\pi/4$ ,
- (3)  $7\pi/4$ .

## AUFGABE 54.11. Begründe die Abschätzung

$$\sin x \leq x$$

für  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

## AUFGABE 54.12.\*

Zeige, dass die Sinus- bzw. die Kosinusfunktion die folgenden Werte besitzt.

a)

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b)

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

c)

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

AUFGABE 54.13. Wir betrachten eine Uhr mit Minuten- und Sekundenzeiger, die sich beide kontinuierlich bewegen. Bestimme eine Formel, die aus der Winkelstellung des Minutenzeigers die Winkelstellung des Sekundenzeigers (jeweils ausgehend von der 12-Uhr-Stellung im Uhrzeigersinn gemessen) berechnet.

AUFGABE 54.14. Wie hoch muss ein Spiegel mindestens sein, damit man sich in ihm vollständig sehen kann (ohne sich zu verrenken)?

AUFGABE 54.15.\*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n}, n \in \mathbb{N}_+.$$

AUFGABE 54.16. Zeige, dass die Folge

$$x_n := \sin n$$

nicht konvergiert.

AUFGABE 54.17.\*

Zu einem Startwert  $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$  sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} := \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Mit einem Ausdruck der Form  $\sin^n x$  meint man  $(\sin(x))^n$ .

AUFGABE 54.18.\*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{3 \sin^4 n - 7n^3 + 11n}{5n^3 - 4n^2 - \cos n}$$

in  $\mathbb{R}$  konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 54.19.\*

Ordne die folgenden Funktionen den Bildern zu (man schreibe ohne Begründung hinter den Funktionsausdruck den Buchstaben des zugehörigen Bildes; nur für vollständig richtige Antworten gibt es Punkte).

$$(1) \quad \frac{1}{3} \sin \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) - 1,$$

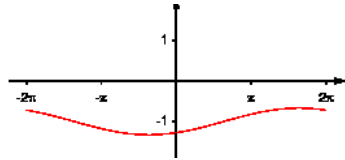
$$(2) \quad \frac{1}{3} \sin \left( \frac{1}{2}x - 1 \right) - 1,$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \sin \left( \frac{1}{3}x + 1 \right) - 1,$$

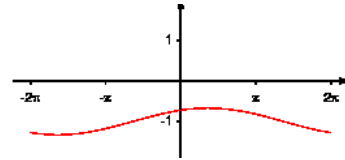
$$(4) \quad \frac{1}{3} \sin \left( \frac{1}{2}x + 1 \right) + 1,$$

$$(5) \quad \frac{1}{3} \sin (2x + 1) - 1,$$

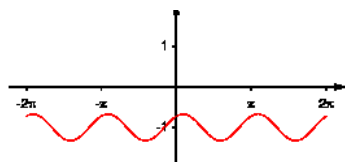
$$(6) \quad \frac{1}{3} \sin \left( \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) - 1.$$



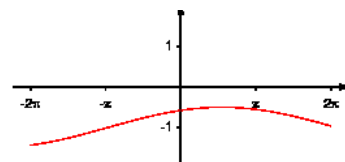
(a)



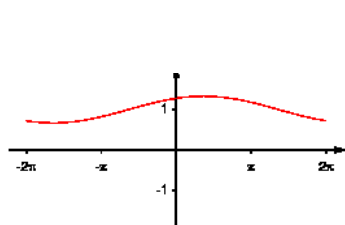
(b)



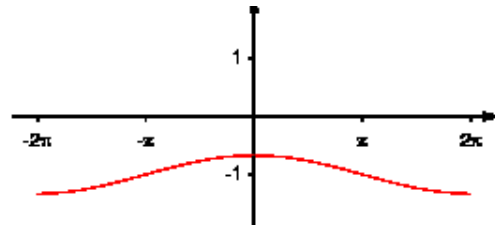
(c)



(d)



(e)



(f)

AUFGABE 54.20. Skizziere die Funktion

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin \frac{1}{x}.$$

AUFGABE 54.21. Zeige, dass die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist. Ist der Graph dieser Funktion „zeichnenbar“?

Die trigonometrischen Funktionen sind periodisch im Sinne der folgenden Definition.

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *periodisch* mit *Periode*  $L > 0$ , wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

AUFGABE 54.22. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine periodische Funktion und  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion.

- a) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung  $g \circ f$  wieder periodisch ist.
- b) Zeige, dass die Hintereinanderschaltung  $f \circ g$  nicht periodisch sein muss.

AUFGABE 54.23. Es seien  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodische Funktionen mit den Periodenlängen  $L_1$  bzw.  $L_2$ . Der Quotient  $L_1/L_2$  sei eine rationale Zahl. Zeige, dass auch  $f_1 + f_2$  eine periodische Funktion ist.

Die nächsten Aufgaben verwendet den Begriff der geraden und der ungeraden Funktion.

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *gerade*, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *ungerade*, wenn für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

AUFGABE 54.24. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von  $f$ , ob  $f$  eine gerade Funktion ist?

AUFGABE 54.25. Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Woran erkennt man am Graphen von  $f$ , ob  $f$  eine ungerade Funktion ist?

AUFGABE 54.26. Zeige, dass der Betrag

$$|\cdot|: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto |x|,$$

eine gerade Funktion ist.

AUFGABE 54.27. Zeige, dass eine lineare Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto ax,$$

eine ungerade Funktion ist.

AUFGABE 54.28. Es sei  $P = \sum_{k=0}^d a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$  ein Polynom. Zeige, dass  $P$  genau dann eine gerade Funktion definiert, wenn  $a_k = 0$  für alle ungeraden Indizes ist.

AUFGABE 54.29. Es sei  $P = \sum_{k=0}^d a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$  ein Polynom. Zeige, dass  $P$  genau dann eine ungerade Funktion definiert, wenn  $a_k = 0$  für alle geraden Indizes ist.

AUFGABE 54.30. Erstelle die Drehmatrizen zu den Winkeln

$$\alpha = 0, \pi, \pi/2, \pi/3, \pi/6, \pi/4.$$

AUFGABE 54.31. Es sei

$$\mathcal{D} = \{D(\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller Drehmatrizen mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.

- (1) Zeige, dass  $(\mathcal{D}, \circ, E_2)$  eine Gruppe ist.
- (2) Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{D}, \alpha \longmapsto D(\alpha),$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist.

- (3) Zeige, dass  $2\pi\mathbb{Z}$  der Kern der Abbildung  $\alpha \mapsto D(\alpha)$  ist.
- (4) Zeige die Gruppenisomorphie

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong \mathcal{D}.$$

AUFGABE 54.32. Beweise die Formel

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

aus den Additionstheoremen für die trigonometrischen Funktionen.

AUFGABE 54.33. Berechne

$$\left(1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{24}X^4\right)^2 + \left(X - \frac{1}{6}X^3 + \frac{1}{120}X^5\right)^2.$$

Was fällt dabei auf und wie kann man es erklären?

AUFGABE 54.34.\*

Es sei

$$P = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{2}X^2 + 1.$$

- (1) Bestimme die kleinste positive Nullstelle von  $P$ .
- (2) Besteht ein Zusammenhang zwischen dieser Nullstelle und  $\frac{\pi}{2}$ ?

AUFGABE 54.35. Bestimme die „Ableitung“ der Sinusreihe unter der (in diesem Fall richtigen) Annahme, dass man bei einer unendlichen Summe von Funktionen gliedweise ableiten darf.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 54.36. (3 Punkte)

Bestimme die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Geraden  $G$  und des Kreises  $K$ , wobei  $G$  durch die Gleichung  $3y - 4x + 2 = 0$  und  $K$  durch den Mittelpunkt  $(2, 5)$  und den Radius 7 gegeben ist.

AUFGABE 54.37. (5 Punkte)

Berechne die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der beiden Kreise  $K$  und  $L$ , wobei  $K$  den Mittelpunkt  $(2, 3)$  und den Radius 4 und  $L$  den Mittelpunkt  $(5, -1)$  und den Radius 7 besitzt.

AUFGABE 54.38. (5 Punkte)

Bestimme die Schnittpunkte der beiden Ellipsen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - 3xy + 2y^2 = 7\} \text{ und } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 4xy + 5y^2 = 8\}.$$

AUFGABE 54.39. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$x_n := \frac{5 \sin^3 n - 6n^4 + 13n^2 + (\sin n)(\cos(n^2))}{7n^4 - 5n^3 + n^2 \sin(n^3) - \cos n}$$

in  $\mathbb{R}$  konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 54.40. (4 Punkte)

Zeige, dass man jede stetige Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$f = g + h$$

mit einer stetigen geraden Funktion  $g$  und einer stetigen ungeraden Funktion  $h$  schreiben kann.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Trigonom1.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Trigonom2.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Trigonom3.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Trigonom4.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Trigo5.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Trigo6.png , Autor = Benutzer Mgausmann auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4