Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 36

Dreiecke

In dieser und der nächsten Vorlesung stehen Dreiecke im Mittelpunkt. Unter einem Dreieck verstehen wir einfach ein Tupel (A, B, C) aus drei *Eckpunkten* in einem affinen Raum E (typischerweise eine affine Ebene) über einem euklidischen Raum V. Wir lassen die Situation, dass Eckpunkte zusammenfallen, als ausgeartete Dreiecke zu, und wir identifizieren Dreiecke, wenn sie durch eine Umbenennung der Ecken auseinander hervorgehen. Ein Dreieck ist nach Definition genau dann nicht ausgeartet, wenn die drei Punkte affin unabhängig sind. Häufig versteht man unter dem Dreieck auch seine *konvexe Hülle*, das ist die Menge

$$\{rA + sB + tC \mid r + s + t = 1,\ 0 \leq r, s, t \leq 1\}$$

aller baryzentrischen Kombinationen der drei Punkte, bei denen alle Koeffizienten nichtnegativ sind. Die Verbindungsstrecke

$$\overline{A, B} = \{rA + sB \mid r + s = 1,\ 0 \leq r, s \leq 1\}$$

heißt *Seite* zwischen den Eckpunkten A und B (oder gegenüber von C). Sie wird häufig mit c bezeichnet, ihre Länge ist

$$d(A, B) = || \overrightarrow{AB} || \, .$$

Entsprechende Festlegungen gelten für die beiden anderen Seiten. Manchmal werden auch die Seitenlängen mit a, b, c bezeichnet. Der Winkel $\angle(A, B, C)$ des Dreiecks im Punkt B ist durch

$$\angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

definiert, entsprechend an den übrigen Eckpunkten. Die Winkel werden häufig mit α, β, γ bezeichnet.

Definition 36.1. Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene heißen *kongruent*, wenn sie durch die Hintereinanderschaltung von Verschiebungen und Isometrien ineinander überführt werden können.

Man sagt auch, dass kongruente Dreiecke durch affin-lineare Isometrien ineinander überführt werden können.

Satz 36.2. *Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene sind genau dann zueinander kongruent, wenn ihre Seitenlängen übereinstimmen.*

Beweis. Da Verschiebungen und Isometrien die Längen erhalten, ist es klar, dass kongruente Dreiecke längengleich sind. Seien umgekehrt die beiden längengleichen Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') gegeben, wobei wir nach Umbenennung annehmen können, dass für die Seitenlängen die Beziehung

$$d(A, B) \geq d(A, C) \geq d(B, C)$$

und ebenso für das zweite Dreieck gilt. Wir können $E = \mathbb{R}^2$ annehmen und durch Verschiebungen erreichen, dass $A = A' = 0$ ist. Durch Drehungen am Nullpunkt der beiden Dreiecke können wir erreichen, dass sowohl B als auch B' auf der positiven x-Achse liegen. Wegen der Längengleichung ist dann $B = B'$. Die Punkte C und C' haben einerseits zu 0 und andererseits zu B den gleichen Abstand, d.h. sie liegen auf den Schnittpunkten von einem Kreis um 0 und einem Kreis um B. Da es nur zwei Schnittpunkte gibt, ist entweder $C = C'$ oder C und C' lassen sich durch eine Achsenspiegelung an der x-Achse ineinander überführen. □

Definition 36.3. Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene heißen *eigentlich kongruent*, wenn sie durch die Hintereinanderschaltung von Verschiebungen und eigentlichen Isometrien ineinander überführt werden können.

Definition 36.4. Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene heißen *ähnlich*, wenn sie durch die Hintereinanderschaltung von Verschiebungen und winkeltreuen Abbildungen ineinander überführt werden können.

Satz 36.5. *Zwei Dreiecke in einer euklidischen Ebene sind genau dann zueinander ähnlich, wenn ihre Winkel übereinstimmen.*

Beweis. Siehe Aufgabe 36.12. □

Der Satz des Pythagoras

Wir beschäftigen uns zunächst mit rechtwinkligen Dreiecken.

Definition 36.6. Ein Dreieck (A, B, C) heißt *rechtwinklig*, wenn an einem Eckpunkt die anliegenden Seiten orthogonal zueinander sind.

Definition 36.7. Unter der *Hypotenuse* versteht man die Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

Definition 36.8. Unter einer *Kathete* versteht man eine Seite eines rechtwinkligen Dreiecks, die an den rechten Winkel anliegt.

Der *Satz des Pythagoras* lautet für ein rechtwinkliges Dreieck wie folgt.

Satz 36.9. *In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Hypotenusenquadrats gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Kathetenquadrate.*

Beweis. Die Dreieckspunkte seien A, B, C mit dem rechten Winkel an C. Wir setzen $v = C - A$ und $w = B - C$. Der Verbindungsvektor von A nach B ist dann gleich $v + w$ und v und w stehen senkrecht aufeinander. Somit ist

$$||v + w||^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + 2\langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle = ||v||^2 + ||w||^2 .$$

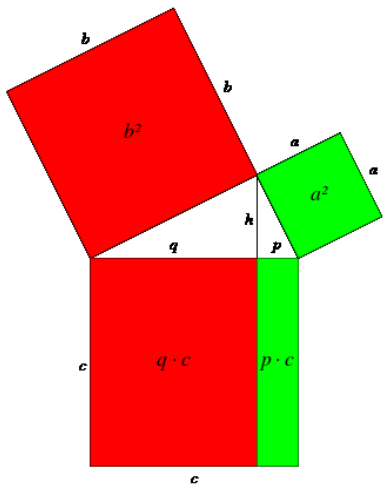
□

In dieser Formulierung wird verwendet, dass der Flächeninhalt eines Quadrats (also des geometrischen Objektes) gleich dem (arithmetischen) Quadrat der Seitenlänge ist. Der Beweis hat nichts mit Flächeninhalten zu tun.

DEFINITION 36.10. Zu einem Dreieck A, B, C in einer euklidischen Ebene heißt die Gerade durch A, die senkrecht auf der Geraden durch B und C steht, die *Höhengerade* durch A. Die Verbindungsstrecke von A zur Geraden durch B und C heißt *Höhe* durch A.

Die Länge der Höhe wird selbst auch oft Höhe genannt.

DEFINITION 36.11. In einem Dreieck A, B, C in einer euklidischen Ebene heißt der Schnittpunkt der Höhe durch A mit der Geraden durch B und C der *Höhenfußpunkt* dieser Höhe.



Der folgende Satz heißt *Kathetensatz*.

SATZ 36.12. *Es sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Punkt C. Es sei h die Höhe durch C und D der Höhenfußpunkt dieser Höhe auf der Geraden durch A und B. Dann ist*

$$d(A, C)^2 = d(A, D) \cdot d(A, B).$$

Beweis. Wir setzen $v = C - A$ und $w = B - C$. Der Verbindungsvektor von A nach B ist dann gleich $v + w$. Wir setzen den Höhenfußpunkt als

$$D = A + \lambda(v + w)$$

mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ und den Richtungsvektor der Höhe als

$$h = C - D = A + v - A - \lambda(v + w) = v - \lambda(v + w)$$

an. Die Orthogonalitätsbedingung für die Höhe führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v - \lambda(v + w), v + w \rangle \\ &= (1 - \lambda) \langle v, v \rangle - \lambda \langle w, w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \lambda (\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle) \end{aligned}$$

und somit ist

$$\lambda = \frac{\langle v, v \rangle}{\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} d(A, D) \cdot d(A, B) &= \lambda \, || v + w || \cdot || v + w || \\ &= \lambda \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \lambda (\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle) \\ &= \langle v, v \rangle \\ &= || v ||^2 \\ &= d(A, C)^2. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz heißt *Höhensatz.*

Satz 36.13. *Es sei A, B, C ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel im Punkt C. Es sei h die Höhe durch C und D der Höhenfußpunkt dieser Höhe auf der Geraden durch A und B. Dann ist*

$$d(C, D)^2 = d(A, D) \cdot d(B, D).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 36.16. □

Der folgende Satz heißt *Kosinussatz.*

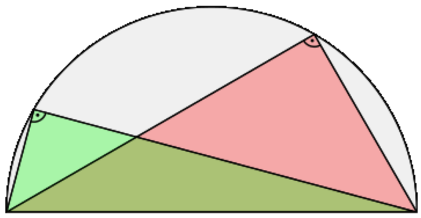
Satz 36.14. *In einem Dreieck (A, B, C) mit den Seitenlängen a, b, c und dem Winkel γ an C gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 36.22. □

Der Satz des Thales

Satz 36.15. *Es sei P ein Punkt in der euklidischen Ebene E, K der Kreis mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt P und es sei G eine Gerade durch P, die den Kreis in den Punkten A und B trifft. Dann ist für jeden Punkt $C \in K$ das Dreieck A, B, C rechtwinklig an C.*



Beweis. Ohne Einschränkung sei $E = \mathbb{R}^2$ und $P = 0$. Wir schreiben „vektoriell“ $w = C$, $v = A$, somit ist $B = -v$. Der Verbindungsvektor von A nach C ist dann $-v + w$ und der Verbindungsvektor von B nach C ist dann $v + w$. Somit ist

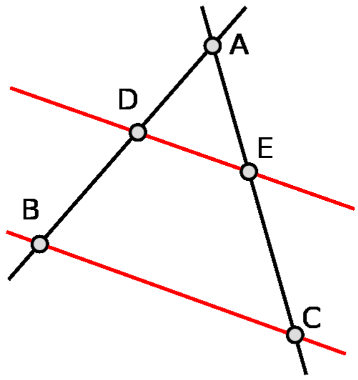
$$\begin{aligned} \langle -v + w, v + w \rangle &= \langle -v, v \rangle + \langle -v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= -\langle v, v \rangle - \langle v, w \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= -\langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= -r^2 + r^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

also sind diese Seiten senkrecht zueinander. □

Die Strahlensätze

Wir formulieren in der Sprache der linearen Algebra die Strahlensätze. Dabei legen wir einen zweidimensionalen euklidischen Vektorraum zugrunde, der die Längenmessung von Strecken erlaubt. Zwei affine Geraden heißen parallel, wenn sie von dem gleichen Vektor aufgespannt werden. Wir formulieren die Strahlensätze so, dass der Schnittpunkt der Strahlen der Nullpunkt ist. Dies kann man stets erreichen, indem man den Schnittpunkt in den Nullpunkt verschiebt, wobei sich die Längen nicht verändern.

Satz 36.16. *Es sei V ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum und es seien $s_1, s_2, v \in V$ von 0 verschiedene Vektoren und v sei sowohl zu s_1 als auch zu s_2 linear unabhängig sei. Es seien $S_1 = \mathbb{R}s_1$ und $S_2 = \mathbb{R}s_2$ die durch s_1 und s_2 definierten Geraden (die Strahlen) und es seien P und Q Punkte in V mit den zugehörigen parallelen Geraden $G = P + \mathbb{R}v$ und $H = Q + \mathbb{R}v$.*



Die Schnittpunkte der Geraden (die aufgrund der Voraussetzungen eindeutig existieren) seien

$$A_1 = S_1 \cap G,\ A_2 = S_2 \cap G,\ B_1 = S_1 \cap H,\ B_2 = S_2 \cap H\,,$$

und es seien $A_1, B_1 \neq 0$. *Dann ist*

$$\frac{d(B_1, B_2)}{||\,B_1\,||} = \frac{d(A_1, A_2)}{||\,A_1\,||}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung sei $s_1 = A_1$, $s_2 = A_2$ und $v = A_2 - A_1$, da dies die beteiligten Geraden nicht ändert. Wir schreiben $B_1 = tA_1$. Es ist $A_2 = A_1 + v$ und somit ist

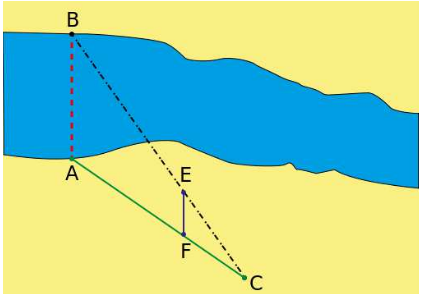
$$tA_2 = tA_1 + tv = B_1 + tv.$$

Dieser Punkt gehört sowohl zu S_2 als auch zu H, was bedeutet, dass es sich um den Punkt B_2 handelt. Es ist also $B_2 = tA_2$ und daher

$$\frac{||\,B_1 - B_2\,||}{||\,B_1\,||} = \frac{||\,tA_1 - tA_2\,||}{||\,tA_1\,||} = \frac{||\,A_1 - A_2\,||}{||\,A_1\,||}.$$

□

Der vorstehende Satz besagt insbesondere, dass sich in der beschriebenen Situation entsprechende Seitenlängen der beiden Dreiecke $0, A_1, A_2$ und $0, B_1$, B_2 zueinander in der gleichen Weise verhalten. Die Dreiecke sind ähnlich, und zwar geht das Dreieck $0, B_1, B_2$ aus dem Dreieck $0, A_1, A_2$ durch eine Streckung mit dem Streckungsfaktor t hervor. Dieser Streckungsfaktor tritt bei sämtlichen Streckenverhältnissen wieder auf.



Eine Anwendung des Strahlensatzes. Man kann den Abstand über den Fluss berechnen, ohne ihn zu überqueren.

Auch der Daumensprung beruht auf dem Strahlensatz.

Korollar 36.17. *Es sei V ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum und es seien $s_1, s_2, v \in V$ von 0 verschiedene Vektoren und v sei sowohl zu s_1 als auch zu s_2 linear unabhängig sei. Es seien $S_1 = \mathbb{R}s_1$ und $S_2 = \mathbb{R}s_2$ die durch s_1 und s_2 definierten Geraden (die Strahlen) und es seien P und Q Punkte in V mit den zugehörigen parallelen Geraden $G = P + \mathbb{R}v$ und $H = Q + \mathbb{R}v$. Die Schnittpunkte der Geraden seien*

$$A_1 = S_1 \cap G,\ A_2 = S_2 \cap G,\ B_1 = S_1 \cap H,\ B_2 = S_2 \cap H\,,$$

und es seien $A_1, A_2, A_1 - A_2 \neq 0$. Dann ist

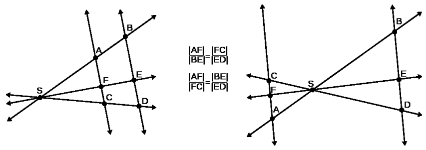
$$\frac{d(B_1, B_2)}{d(A_1, A_2)} = \frac{||\,B_1\,||}{||\,A_1\,||} = \frac{||\,B_2\,||}{||\,A_2\,||}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 36.16. □

Die in der vorstehenden Aussage mitbewiesene Gleichung

$$\frac{||\,B_1\,||}{||\,A_1\,||} = \frac{||\,B_2\,||}{||\,A_2\,||}$$

heißt auch *Erster Strahlensatz*. Er nimmt nur Bezug auf Längenverhältnisse auf den Strahlen.



In der letzten Varianten des Strahlensatzes gibt es drei Strahlen, wir sprechen vom *Dreistrahlensatz.*

SATZ 36.18. *Es sei V ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum und es seien $s_1, s_2, s_3 \in V$ von 0 verschiedene Vektoren und es sei $v \in V$ linear unabhängig zu jedem dieser Vektoren. Es seien $S_i = \mathbb{R}s_i$, $i = 1, 2, 3$, die durch die s_i definierten Geraden (die Strahlen) und es seien P und Q Punkte in V mit den zugehörigen parallelen Geraden $G = P + \mathbb{R}v$ und $H = Q + \mathbb{R}v$. Die Schnittpunkte der Geraden (die aufgrund der Voraussetzungen eindeutig bestimmt sind) seien*

$$A_1 = S_1 \cap G, A_2 = S_2 \cap G, A_3 = S_3 \cap G, B_1 = S_1 \cap H, B_2 = S_2 \cap H, B_3 = S_3 \cap H\,,$$

und es seien $B_1 \neq B_2$. Dann ist

$$\frac{d(B_2, B_3)}{d(A_2, A_3)} = \frac{d(B_1, B_2)}{d(A_1, A_2)}.$$

Beweis. Durch doppelte Anwendung von Korollar 36.17 auf die beiden durch s_1, s_2 bzw. s_2, s_3 gegebenen zweistrahligen Situationen erhält man

$$\frac{d(B_1, B_2)}{d(A_1, A_2)} = \frac{|| B_2 ||}{|| A_2 ||} = \frac{d(B_2, B_3)}{d(A_2, A_3)}.$$

□

Abbildungsverzeichnis