

Mathematik für Anwender I**Arbeitsblatt 45****Übungsaufgaben**

AUFGABE 45.1. Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

AUFGABE 45.2. Es sei V ein Minkowski-Raum.

- (1) Zeige, dass ein skalares Vielfaches eines zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektors wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.
- (2) Zeige, dass die Summe von zwei zeitartigen (raumartigen, lichtartigen) Vektoren im Allgemeinen nicht wieder zeitartig (raumartig, lichtartig) ist.

AUFGABE 45.3.*

Ist die Einschränkung einer Minkowski-Form im \mathbb{R}^n auf einen $n - 1$ -dimensionalen Untervektorraum wieder eine Minkowski-Form?AUFGABE 45.4. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass es zu jedem Beobachtervektor $v \in V$ eine direkte Summenzerlegung

$$V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$$

gibt, wobei die Einschränkung der Minkowski-Form auf $\mathbb{R}v$ negativ definit und die Einschränkung der Minkowski-Form auf $(\mathbb{R}v)^\perp$ positiv definit ist.AUFGABE 45.5. Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{25}{7} \\ \frac{24}{24} \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

AUFGABE 45.6.*

Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme die Raumkomponente dazu.

AUFGABE 45.7.*

Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu jedem Beobachtervektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ die Raumkomponente des Beobachters die Spiegelung seiner Zeitkomponente an der Hauptdiagonalen ist.

Die Hyperbelfunktionen wurden in der dreizehnten Vorlesung eingeführt.

AUFGABE 45.8. Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $\alpha \in \mathbb{R}$ der Vektor $\begin{pmatrix} \sinh \alpha \\ \cosh \alpha \end{pmatrix}$ der Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters ist. Bestimme die Raumkomponente zu diesem Vektor.

AUFGABE 45.9.*

Der \mathbb{R}^2 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass zu $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, die Vektoren

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} z - \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -z + \frac{1}{z} \\ z + \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektoren eines Beobachters sind. Zeige, dass jeder Beobachtervektor diese Gestalt besitzt.

AUFGABE 45.10.*

Der \mathbb{R}^3 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{2}}{5} \\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthogonalbasis der Raumkomponente dazu.

AUFGABE 45.11.*

Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$ und es seien v, w gleichgerichtete Beobachtervektoren. Zeige

$$\langle v, w \rangle < 0.$$

AUFGABE 45.12. Es sei V ein Minkowski-Raum. Zeige, dass die Menge der Beobachtervektoren in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfallen. Zeige, dass zwei Beobachtervektoren v, w genau dann zur gleichen Komponente gehören, wenn

$$\langle v, w \rangle < 0$$

ist.

AUFGABE 45.13. Es sei V ein Minkowski-Raum mit der Minkowski-Form $\langle -, - \rangle$ und es seien v, w zeitartige Vektoren. Zeige die Abschätzung

$$\langle v, w \rangle^2 \geq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle.$$

AUFGABE 45.14. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

AUFGABE 45.15. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum seien zwei Beobachter B und C mit den zugehörigen Raumkomponenten V_B und V_C gegeben. Was kann man über $V_B \cap V_C$ sagen?

AUFGABE 45.16. Es sei V ein zweidimensionaler Minkowski-Raum.

- (1) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- (2) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
- (3) Zeige, dass es eine Basis von V derart gibt, dass die beiden Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

AUFGABE 45.17. Bestimme den Geschwindigkeitsvektor eines Beobachters B in einem Minkowski-Raum relativ zu sich selbst und die Relativgeschwindigkeit.

AUFGABE 45.18. Es seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von C relativ zu B .
- (2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von B relativ zu C .
- (3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

AUFGABE 45.19. Zeige, dass die Relativgeschwindigkeit von zwei Beobachtern in einem Minkowski-Raum zwischen 0 und 1 liegt. Kann 1 erreicht werden? Was ist die physikalische Signifikanz dieser Aussage?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 45.20. (1 Punkt)

Berechne

$$\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \\ 17 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

in einem vierdimensionalen Standard-Minkowski-Raum.

AUFGABE 45.21. (4 Punkte)

Der \mathbb{R}^3 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen. Zeige, dass $\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Beobachtervektor ist und bestimme eine Orthonormalbasis der Raumkomponente dazu.

AUFGABE 45.22. (4 Punkte)

In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum besitze ein Ereignis die Koordinaten $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Minkowski-Basis. Bestimme die Zerlegung in Raum- und Zeitkomponente dieses Ereignisses bezüglich des Beobachtervektors $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{12} \\ 0 \\ \frac{13}{12} \end{pmatrix}$.

AUFGABE 45.23. (6 (2+2+2) Punkte)

Der \mathbb{R}^3 sei mit der Standard-Minkowski-Form versehen.

- (1) Man gebe eine Basis des \mathbb{R}^3 an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 1 sind.
- (2) Man gebe eine Basis des \mathbb{R}^3 an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich -1 sind.
- (3) Man gebe eine Basis des \mathbb{R}^3 an mit der Eigenschaft, dass alle Diagonaleinträge in der Gramschen Matrix bezüglich dieser Basis gleich 0 sind.

AUFGABE 45.24. (3 (1+1+1) Punkte)

Es seien B und C Beobachter mit den Vierergeschwindigkeiten

$$v_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \\ \sqrt{39} \end{pmatrix}$$

und

$$v_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von C relativ zu B .
- (2) Bestimme den Geschwindigkeitsvektor von B relativ zu C .
- (3) Bestimme die Relativgeschwindigkeit der beiden Beobachter.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7