Vorli lässt sich gerne knuddeln. Dabei räkelt sie sich in alle Himmelsrichtungen und hinterher weiß niemand mehr, wo vorne und hinten ist.

Polynome

Mathematische Abbildungen werden typischerweise durch einen mathematischen Ausdruck beschrieben, eine Funktionsvorschrift, die angibt, wie aus einer eingegebenen Zahl (Stelle, Argument) eine Zahl als Wert (Ergebnis) der Funktion zu berechnen ist. Wir besprechen nun die am einfachsten gebauten Funktionen, die Polynomfunktionen. Deren Definition erfordert nur die Kenntnis von Addition und Multiplikation in einem Körper.

Definition 6.1. Es sei K ein Körper. Ein Ausdruck der Form

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

mit $a_i \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

Dabei heißen die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ die *Koeffizienten* des Polynoms. Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn sie in allen ihren Koeffizienten übereinstimmen. Die Polynome mit $a_i = 0$ für alle $i \geq 1$ heißen *konstante Polynome*, man schreibt sie einfach als a_0. Beim *Nullpolynom* sind überhaupt alle Koeffizienten gleich 0. Mit dem Summenzeichen kann man ein Polynom kurz als $\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ schreiben.

Definition 6.2. Der *Grad* eines von 0 verschiedenen Polynoms

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_n X^n$$

mit $a_n \neq 0$ ist n.

Das Nullpolynom bekommt keinen Grad. Der Koeffizient a_n, der zum Grad n des Polynoms gehört, heißt *Leitkoeffizient* des Polynoms. Der Ausdruck $a_n X^n$ heißt *Leitterm* des Polynoms.

Die Gesamtheit aller Polynome über einem Körper K heißt *Polynomring* über K, er wird mit $K[X]$ bezeichnet. Dabei nennt man X die *Variable* des Polynomrings.

Zwei Polynome

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \text{ und } Q = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$$

werden komponentenweise miteinander addiert, d.h. die Koeffizienten der Summe $P+Q$ sind einfach die Summe der Koeffizienten der beiden Polynome. Bei $n > m$ sind die „fehlenden“ Koeffizienten von Q als 0 zu interpretieren. Diese Addition ist offenbar assoziativ und kommutativ, das Nullpolynom ist das neutrale Element und das negative Polynom $-P$ erhält man, indem man jeden Koeffizienten von P negiert.

Zwei Polynome lassen sich auch miteinander multiplizieren, wobei man

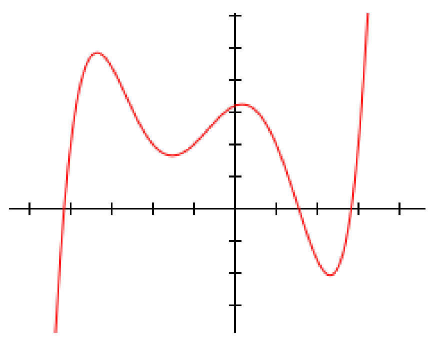
$$X^n \cdot X^m := X^{n+m}$$

setzt und diese Multiplikationsregel „distributiv fortsetzt“, d.h. man multipliziert „alles mit allem“ und muss dann aufaddieren. Die Multiplikation ist also explizit durch folgende Regel gegeben:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r} \,.$$

Für den Grad gelten die beiden folgenden Regeln

- $$\operatorname{grad}(P+Q) \leq \max\{\operatorname{grad}(P), \operatorname{grad}(Q)\}.$$
- $$\operatorname{grad}(P \cdot Q) = \operatorname{grad}(P) + \operatorname{grad}(Q).$$



Der Graph einer Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ vom Grad 5.

In ein Polynom $P \in K[X]$ kann man ein Element $a \in K$ *einsetzen*, indem man die Variable X an jeder Stelle durch a ersetzt. Dies führt zu einer Abbildung

$$K \longrightarrow K,\ a \longmapsto P(a),$$

die die durch das Polynom definierte *Polynomfunktion* heißt.

Wenn P und Q Polynome sind, so kann man die Hintereinanderschaltung $P \circ Q$ einfach beschreiben: man muss in P überall die Variable X durch Q ersetzen (und alles ausmultiplizieren und aufaddieren). Das Ergebnis ist wieder ein Polynom. Man beachte, dass es dabei auf die Reihenfolge ankommt.

Division mit Rest

Bei einem Polynom interessiert man sich für Nullstellen, Wachstumsverhalten, lokale Extrema und dergleichen. Für diese Fragestellungen ist die Division mit Rest wichtig.

Satz 6.3. *Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es seien $P, T \in K[X]$ Polynome mit $T \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $Q, R \in K[X]$ mit*

$$P = TQ + R \textit{ und mit } \operatorname{grad}(R) < \operatorname{grad}(T) \textit{ oder } R = 0\,.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über den Grad von P. Wenn der Grad von T größer als der Grad von P ist, so ist $Q = 0$ und $R = P$ eine Lösung, so dass wir dies nicht weiter betrachten müssen. Bei $\operatorname{grad}(P) = 0$ ist nach der Vorbemerkung auch $\operatorname{grad}(TP) = 0$, also ist T ein konstantes Polynom, und damit ist (da $T \neq 0$ und K ein Körper ist) $Q = P/T$ und $R = 0$ eine Lösung. Es sei nun $\operatorname{grad}(P) = n$ und die Aussage für kleineren Grad schon bewiesen. Wir schreiben $P = a_nX^n + \cdots + a_1X + a_0$ und $T = b_kX^k + \cdots + b_1X + b_0$ mit $a_n, b_k \neq 0$, $k \leq n$. Dann gilt mit $H = \frac{a_n}{b_k}X^{n-k}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} P' &:= P - TH \\ &= 0X^n + \left(a_{n-1} - \frac{a_n}{b_k}b_{k-1}\right)X^{n-1} + \cdots + \left(a_{n-k} - \frac{a_n}{b_k}b_0\right)X^{n-k} + a_{n-k-1}X^{n-k-1} + \cdots + a_0. \end{aligned}$$

Dieses Polynom P' hat einen Grad kleiner als n und darauf können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden, d.h. es gibt Q' und R' mit

$$P' = TQ' + R' \text{ mit } \operatorname{grad}(R') < \operatorname{grad}(T) \text{ oder } R' = 0\,.$$

Daraus ergibt sich insgesamt

$$P = P' + TH = TQ' + TH + R' = T(Q' + H) + R',$$

so dass also $Q = Q' + H$ und $R = R'$ eine Lösung ist. Zur Eindeutigkeit sei $P = TQ + R = TQ' + R'$ mit den angegebenen Bedingungen. Dann ist $T(Q - Q') = R' - R$. Da die Differenz $R' - R$ einen Grad kleiner als $\operatorname{grad}(T)$ besitzt, ist aufgrund der Gradeigenschaften diese Gleichung nur bei $R = R'$ und $Q = Q'$ lösbar. □

Die Berechnung der Polynome Q und R heißt *Polynomdivision*. Das Polynom T ist genau dann ein Teiler von P, wenn bei der Division mit Rest von P durch T der Rest gleich 0 ist. Der Beweis des Satzes ist konstruktiv, d.h. es wird in ihm ein Verfahren beschrieben, mit der man die Division mit Rest berechnen kann. Dazu muss man die Rechenoperationen des Grundkörpers K beherrschen. Wir geben dazu ein Beispiel.

Beispiel 6.4. Wir führen die Polynomdivision

$$P = 6X^3 + X + 1 \text{ durch } T = 3X^2 + 2X - 4$$

durch. Es wird also ein Polynom vom Grad 3 durch ein Polynom vom Grad 2 dividiert, d.h. dass der Quotient und auch der Rest (maximal) vom Grad 1 sind. Im ersten Schritt überlegt man, mit welchem Term man T multiplizieren muss, damit das Produkt mit P im Leitterm übereinstimmt. Das ist offenbar $2X$. Das Produkt ist

$$2X\big(3X^2 + 2X - 4\big) \,=\, 6X^3 + 4X^2 - 8X.$$

Die Differenz von P zu diesem Produkt ist

$$6X^3 + X + 1 - \big(6X^3 + 4X^2 - 8X\big) \,=\, -4X^2 + 9X + 1.$$

Mit diesem Polynom, nennen wir es P', setzen wir die Division durch T fort. Um Übereinstimmung im Leitkoeffizienten zu erhalten, muss man T mit $\frac{-4}{3}$ multiplizieren. Dies ergibt

$$-\frac{4}{3}T \,=\, -\frac{4}{3}\big(3X^2 + 2X - 4\big) \,=\, -4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}.$$

Die Differenz zu P' ist somit

$$-4X^2 + 9X + 1 - \left(-4X^2 - \frac{8}{3}X + \frac{16}{3}\right) \,=\, \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Dies ist das Restpolynom und somit ist insgesamt

$$6X^3 + X + 1 \,=\, \big(3X^2 + 2X - 4\big)\left(2X - \frac{4}{3}\right) + \frac{35}{3}X - \frac{13}{3}.$$

Lemma 6.5. *Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P \in K[X]$ ein Polynom und $a \in K$. Dann ist a genau dann eine Nullstelle von P, wenn P ein Vielfaches des linearen Polynoms*[1] *$X - a$ ist.*

Beweis. Wenn P ein Vielfaches von $X - a$ ist, so kann man

$$P \,=\, (X - a)Q$$

mit einem weiteren Polynom Q schreiben. Einsetzen ergibt

$$P(a) \,=\, (a - a)Q(a) \,=\, 0.$$

Im Allgemeinen gibt es aufgrund der Division mit Rest eine Darstellung

$$P \,=\, (X - a)Q + R,$$

wobei $R = 0$ oder aber den Grad 0 besitzt, also so oder so eine Konstante ist. Einsetzen ergibt

$$P(a) \,=\, R.$$

Wenn also $P(a) = 0$ ist, so muss der Rest $R = 0$ sein, und das bedeutet, dass $P = (X - a)Q$ ist. □

Korollar 6.6. *Es sei K ein Körper und sei $K[X]$ der Polynomring über K. Es sei $P \in K[X]$ ein Polynom ($\neq 0$) vom Grad d. Dann besitzt P maximal d Nullstellen.*

[1] $X - a$ heißt dann ein *Linearfaktor* des Polynoms P.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über d. Für $d = 0, 1$ ist die Aussage offensichtlich richtig. Es sei also $d \geq 2$ und die Aussage sei für kleinere Grade bereits bewiesen. Es sei a eine Nullstelle von P (falls P keine Nullstelle besitzt, sind wir direkt fertig), Dann ist $P = Q(X - a)$ nach Lemma 6.5 und Q hat den Grad $d - 1$, so dass wir auf Q die Induktionsvoraussetzung anwenden können. Das Polynom Q hat also maximal $d - 1$ Nullstellen. Für $b \in K$ gilt $P(b) = Q(b)(b - a)$. Dies kann nach Lemma 4.5 (5) nur dann 0 sein, wenn einer der Faktoren 0 ist, so dass eine Nullstelle von P gleich a ist oder aber eine Nullstelle von Q ist. Es gibt also maximal d Nullstellen von P. □

Der Fundamentalsatz der Algebra

Es gilt der folgende *Fundamentalsatz der Algebra*, den wir hier ohne Beweis erwähnen, und der die Wichtigkeit der komplexen Zahlen unterstreicht.

Satz 6.7. *Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.*

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass jedes von 0 verschiedene Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ in Linearfaktoren zerfällt, d.h. man kann

$$P = c(X - z_1)(X - z_2) \cdot (X - z_n)$$

mit eindeutig bestimmten komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ schreiben (wobei Wiederholungen erlaubt sind).

Der Interpolationssatz

Der folgende Satz heißt *Interpolationssatz* und beschreibt die Interpolation von vorgegebenen Funktionswerten durch Polynome. Wenn ein Funktionswert an einer Stelle vorgegeben wird, so legt dies ein konstantes Polynom fest, zwei Funktionswerte an zwei Stellen legen ein lineares Polynom fest (eine Gerade), drei Funktionswerte an drei Stellen legen ein quadratisches Polynom fest, u.s.w.

Satz 6.8. *Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein eindeutiges Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n - 1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.*

Beweis. Wir beweisen die Existenz und betrachten zuerst die Situation, wo $b_j = 0$ ist für alle $j \neq i$ für ein festes i. Dann ist

$$(X - a_1) \cdots (X - a_{i-1})(X - a_{i+1}) \cdots (X - a_n)$$

ein Polynom vom Grad $n-1$, das an den Stellen $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$ den Wert 0 hat. Das Polynom

$$\frac{b_i}{(a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_n)} (X-a_1) \cdots (X-a_{i-1})(X-a_{i+1}) \cdots (X-a_n)$$

hat an diesen Stellen ebenfalls eine Nullstelle, zusätzlich aber noch bei a_i den Wert b_i. Nennen wir dieses Polynom P_i. Dann ist

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

das gesuchte Polynom. An der Stelle a_i gilt ja

$$P_j(a_i) = 0$$

für $j \neq i$ und $P_i(a_i) = b_i$.

Die Eindeutigkeit folgt aus Korollar 6.6. $\square$

Bemerkung 6.9. Wenn die Daten $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ gegeben sind, so findet man das interpolierende Polynom P vom Grad $\leq n-1$, das es nach Satz 6.8 geben muss, folgendermaßen: Man macht den Ansatz

$$P = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_{n-2} X^{n-2} + c_{n-1} X^{n-1}$$

und versucht die unbekannten Koeffizienten $c_0, \ldots, c_{n-1}$ zu bestimmen. Jeder Interpolationspunkt (a_i, b_i) führt zu einer linearen Gleichung

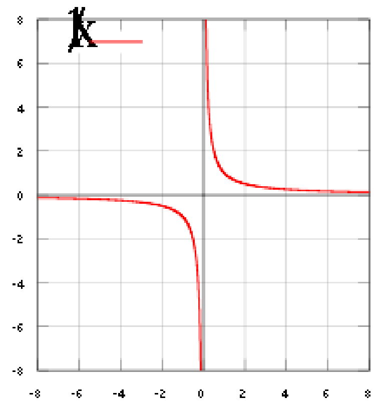
$$c_0 + c_1 a_i + c_2 a_i^2 + \cdots + c_{n-2} a_i^{n-2} + c_{n-1} a_i^{n-1} = b_i$$

über K. Das entstehende lineare Gleichungssystem besitzt genau eine Lösung $(c_0, \ldots, c_{n-1})$, die das Polynom festlegt.

Lineare Gleichungssysteme werden wir erst später systematisch behandeln, das Eliminationsverfahren oder ein anderes Lösungsverfahren sollte aber aus der Schule bekannt sein.

Rationale Funktionen

Die nach den Polynomfunktionen einfachsten Funktionen sind die rationalen Funktionen.



Einen Bruch P/Q von Polynomen kann man als Funktion auffassen, die außerhalb der Nullstellen des Nenners definiert ist. Das Beispiel zeigt den Graphen der rationalen Funktion $1/X$.

Definition 6.10. Zu Polynomen $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q \neq 0$, heißt die Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei D das Komplement der Nullstellen von Q ist, eine *rationale Funktion.*

Abbildungsverzeichnis