

MG  
01-49  
2

建國中學生讀物叢刊

數 學 的 故 事

英 DENHAM LARRETT 著  
賁 壽 慈 譯

建 國 書 店 發 行



3 1773 6915 8

# 「建國中學生讀物叢刊」編刊旨趣

我們抱着很大的熱誠和審慎的態度，來從事這一部叢刊的出版。這是專供中學課外閱讀的叢書，在形式上力求活潑有趣，一掃教科書呆板枯燥之弊；在內容上注重啓發輔導，以收補充灌注之益。

我們尊重作者和讀者——作者們各人有各人的寫作手法，讀者們各人有各人的閱讀傾向。每一本書，我們只求其內容充實形式活潑，但決不先立下死板固定的原則。因此同一種學科，我們也許會出二本以上的讀物，庶讀者在讀這一本書覺得索然無味時，可以讀另外一本同性質的書而覺得盎然生趣。

對於作者，我們不但要求學識，而且要求經驗，是故在出書的進度上，不得不採取寧暫缺毋速濫為準則。希望由於作者們的辛勞，讀者們的愛護和編輯者、出版者的努力，這一叢刊能夠健康而迅速地成長起來。

唐秉彝 三十四年四月十一日



「知識與思想，當然是人們的娛樂與特權，但也是國家財產的一部分，它常常供給國家以源源無盡的補充，以彌補對自照富藏取用的浪費。」

——馮·漢波特

「如同眼睛能享受看到光明的快樂，耳朵聽到甜蜜的音樂一樣；心，也就是人，享受着發現奧秘，發現自然的優美、變幻的快樂。」

——培  
銀

## 前言

一位任何部門的專家所常遇見的最費力的事，便是要向一個普通的人解釋：他所研究的是什麼回事，而且爲什麼他要絞盡腦汁去搞它。這對於「純粹科學」，尤其如此。一個植物學家，作了長時期的苦心研究，是容易使人相信的，因爲任何人都明白：要認識全世界每個區域的每種植物的每一部分，是常人做不到的；對於醫學，也是如此，我們能夠了解到，要曉得人體上所有的疾病和應該用什麼藥，這非有一番好好的研究不可。因爲這些科學都是所謂「收集的科學」，是人們能夠具體感受到的。可是，對於「物理學」便辦不到了，物理學家告訴我們：世界上只有兩種東西，陽電子和陰電子，——這看來確實只要幾頁紙，便可以把它這件簡單的事情說明完了！同樣，如果要向人說明爲什麼會有這麼多關於數學的書，更會感覺得困難。最好的方法，只有給他一部數學的歷史。

這就是拉累特先生所完成的事。讀者將由此認識到，數學是怎樣來的，這得許多話才說得清楚。作者讓我們看到，由埃及人到希臘人的幾何學的故事，而且描寫出：它如何與阿刺伯人的代數學綜合起來，產生出博大精深的近代數學。當然，在這裏要詳細寫出數學的分門別類，是不可能的，但是作者經過一番聰明的選擇，讓讀者接觸到數學的主要的各部門。特別的，他提出了物理學在最近的驚人的兩大貢獻——原子論和相對論。關於相對論，他特別以適當的篇幅來描寫，因為相對論可以說是完全代表了數學的進步。相對論是從實驗中得來的一種「應用的」科學，但是其中一大部分却是由「純粹的」數學家里曼（Riemann）以深思而得的抽象思想發展開來的。

當應用科學深刻地抓住了一個人的興趣之後，他便會認識到數學在應用科學中的基礎地位，他將要想知道數學的來源了。拉累特先生的這本著作，正供給了這個需要，他以一種適當的有趣的方式寫成此書，無疑的，他將刺激一些人們更深一層去探求這一種高貴而又迷人的科學。

## 作者原序

只要一提起數學這個字，大多數人便會聯想起索然無味的教科書，還有非做不可的無數次的「加」。本來，對於數學認真而嚴密的應用，必須要克服它的技術方面的難關。同時，很不幸的，數學的真面目，也只有跨過了這一難關，才能得到全部的認識。

但是，在數學裏面除了技術之外，還有些別的東西存在着。其中有着一個故事。在這本小書裏，我想說些關於它的故事，一方面想從這裏給人一點數學內部所蘊藏的意義，同時想祛除讀者們對數字符號、公式的畏懼，以掃清研讀數學的學生們前途的障礙。

數學是我們一切活動的根源。從我們第一天收到一筆零用錢，直到我們付出最後一筆所得稅為止，我們都是數學家。商業、工程、建築，以及成千種的活動，都

要接觸到數學家的生活圈子。

今天，高級數學已經和哲學碰頭了。連心理學家也得請數學家幫忙，而且，我何後面可以看到，這種幫忙是在打下一個基礎，使各種科學形成一個完全的最後的大融合，而獲得對宇宙的更充分的了解。

這些便是數學的大概，而這不管是門外漢也好，專家也好，都會一致同意的。我得謝識 C·G·達爾文教授，他給我寫了這篇前言。對於他以及其他許多人，對這種「迷人的科學」的熱愛，我將深致抱愧和感謝。如果這本書能多少對愛好數學的廣大民衆有些幫助的話，這應當是他們的功勞。

目 錄

前言 (C. G. 達爾文)

作者原序

第一章	沒有字的數學	(一)
第二章	金字塔的時代	(七)
第三章	幾何學的誕生	(一一)
第四章	第一部幾何學	(一七)
第五章	寶貴的阿刺伯字母	(二五)
第六章	中世紀的大學	(二八)
第七章	輝煌的時代——「文藝復興」	(三四)
第八章	近代數學的基礎——牛頓和他的時代	(三八)

第九章	理論和實踐	(四七)
第十章	能	(五二)
第十一章	力	(五八)
第十二章	新的概念	(六三)
第十三章	相對論	(六八)
第十四章	科學的統一	(七五)
第十五章	結論	(七九)

譯後記

## 第一章 沒有字的數學



歷史使人聰明，詩使人幽默，數學則使人敏銳，自然科學使人深，道德

使人勇，而邏輯學與修辭學，則使人善辯。

——培根

不要以為數學是如何的艱深而遠超過了普通的常識。它只不過是普通常

識的精髓罷了。

凱爾文

— 1 —

在這本小書裏，並不想教讀者研究數學。對這一門學問，已經有了許多好的書籍，還有許多專門解釋其中要義的好教師了。但無論怎樣，初學的人總覺得異常艱辛，讀數學簡直是活受罪，於是不禁發生這樣的疑問：「數學這種學科怎樣發生的？」「它到底有什麼用處？」第一個問題與歷史有關，下面各章便要把由古至今數學的發展作大略的介紹。第二個問題却有不同的意義。因為，大多數人們對於數學的最大需要，也止不過計算一張稅單，或者核算商店裏的賬目而已，所以難怪大家

要覺得奇怪：「爲什麼現在幾乎每一篇科學著作都要列舉出必需準備的數學參考書，甚至於常是靠了數學才得到新發現的呢？」

一提到數學的用處，大多數人對於它在工程和建築等問題中所佔的地位，是已經認識到了。對於社會經濟等問題有興趣的人們，在許多統計工作中，引起了對數學的研究。從有史以來各數學家所悉心研討的問題之形形色色無所不包，便不難明白爲什麼數學會被看作像神話中「愛拉廷神燈」一般具有超凡的神力了。此外，數學在技術上的應用，只不過使門外漢更增加對它的神祕的崇拜。其實，揭穿了所有這些問題的謎底，都只不過是一句話：「需要」。「需要」刺激着數學的發明，「需要」決定了數學的存在。

對於一個人的生存，有一件很重要的事，便是他必須要學習怎樣計算。當他學會計算之後，又必須要用種種方法把已得的結果記載下來，以作將來的參考。隨着時間的消逝，人的要求也漸漸增加。從人剛會運用思想的時候起，他要常常提出問題：「爲什麼……？」「怎麼……？」「爲什麼天上的星在轉動？」……「太陽離

我們有多遠？」他把這些問題放在心裏，要給它適當的答案。一世紀一世紀過去了，問題的數量，和研究這些問題的科學家的數量同樣的增多起來。同時，大自然似乎正在把它所造成的祕密，更弄得傷腦筋了，要想解釋這些祕密，非要用牛皮糖一般的顛動鼠，和很長久的工夫不可。爲了解決這些問題，科學家必需具備各種的武器，除了他的望遠鏡、化學藥品等等而外，還需要關於前輩研究所得的清楚的記錄。『把精確的演繹推算，用一種精確的形式表達出來』，這就是一種武器，科學家有了這種有力的武器，才能進攻他當前的各種問題。這種武器，這種威力，就是數學。沒有它，科學的進展，實際上成爲不可能。

這一切，便是對第二個問題的回答。

只要大自然的祕密還繼續存在，人們對於知識的探求還繼續保持着的時候，數學便將始終成爲各種科學的中心，發揮它最大的效能，而成爲人們解決他自己提出的無數問題的重要工具。

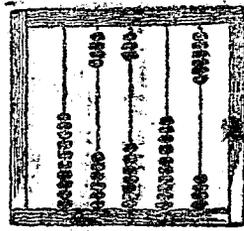
我們現在，對於有史以前人們的科學成就，知道得很少。我們從下面兩種來源

得識這方面的知識：第一，是靠對史前人類遺留下來的石武器及其他工具的考察，第二，便是靠了對現在還存着的原始民族的風俗習慣的觀察。總之，在很早以前，人們便已經能夠分別一個大數目和一個小數目，而且能夠辨明兩者相差有多少。這是確實無疑的。至於人們能夠計算，則是後一個階段的事，我們從對未開化民族的研究，發現他們是可指頭來計算的，所以原始人類的計數，最多只能到「十」為止。有些地方，甚至十個數字的名稱，也和十個手指的名稱完全一樣。

對於「十」以上的數目，未開化民族大都不能計算，於是他們常用「多」這一類的字眼來形容比「十」大的數目。至於用記號來表示數目，這是直到他們經過很久的進展之後才有的事。

再進一步的時期的人們，便不再使用手指計數，而是用石塊計數了，但仍然接受了過去用手指計數的天然方法，把石塊排成十個一組，成功了一種計算的新方法。這一大進步，可說是計算科學的第一步，無容否認的是一種空前的大進步。首先是把十個石塊排放在地上，再把另一排十個石塊放在第一排石塊的旁邊。所用的石

塊，也從大小不齊漸漸進步到採用整齊合用的了。用這方法，便可以并不困難地決定十以上的數目。同時，這使用兩組石塊的方法，更形成了單位的觀念。第二組石塊中的每一塊，發用來代表第一組石塊的全部。於是一塊第二組的石塊，和五塊



附圖 算盤

第一組的，便表示「十五」了。以此類推，這兩組石塊，可以一直計數到「一百」，於是，當使用了三組石塊時，便可以計數到「一千」。這些民族，根據這種方法再繼續改進，最後便產生了「算盤」(Abacus)。在歷史開始有文字記載時，算盤已是成為廣泛使用的東西，而且在此後好幾個世紀中它都是僅有的一種計算方法。在算盤上，二組一組的石塊，被代以一串一串的小珠，穿在一排平行的繩子上，繩子拉得相當長，使用時照所計的數把珠子撥上或撥下，進位的方法還是和以前一樣。

利用這種設計，算術的四種運算方法加、減、乘、除，都可以很容易地進行。最初的算盤，自然很粗糙，隨着人們智巧的進步，便改進成爲一種極爲簡單有用的

工真了。此後，當分數的概念已經完全確立之後，算盤上更添上了一種專門表示分數的珠子。這樣使得用算盤的人的計算能力更增加了。

在這裏，值得注意的是：算盤還提供了「表示數目」的方法，直到很久以後，才改進到用數字「寫出數目」的方法。現在我們所習用的數字，所謂阿刺伯字母，是直到十三世紀，才傳到歐洲來的。在十三世紀以前，曾用好些種方法，以後幾章裏還要詳細談到的。

以上便是我們關於有史以前人們的數字成就，所能說得出的全部事情了，在這一番大略追述之後，我們便要談到我們會用文字紀錄以後的工作情形。

## 第二章 金字塔的時代

那金字塔，孤獨地屹立着，

埃及陷落了，她的紀念物却將永垂長存！

7

在我們現在所保存着的古代的數學書籍裏面，有一本用草梗製成的書，作者是  
在大約公元前一千年的位埃及僧侶，名叫厄姆斯（Ameb）。據可信的考據，這  
本書還是由更早幾世紀以前的一本類似的著作的校訂本，其中搜集了好些關於算術  
和幾何的問題。我們上面已經談到有史以前人們對算術的成就，由這本書看來，厄  
姆斯對於簡單的四則運算法和分數的計算都已相當熟悉了。他所用的方法，有好些  
是非常機巧的，表現出特殊的智慧，足以證明這位作者對他所研究的學科，已經獲

其熟練。

幾何這一門學科，一般都認爲是發源於埃及，因爲埃及的尼羅河的定期泛濫，把沿河南岸的田地界限都沖沒了，必需有一種丈量的方法。這種說法是否靠得住，無從斷定，但埃及人確是早已曾用簡單的測量方法，而且據說希臘人初學幾何還是從埃及人那兒學去的。

如果考察一下這極區域所遺留的寺院舊址，更足以證實這種看法。因爲埃及人總是在同一個老地方翻造他們的廟宇，這件事實，便需要有確定「東西」、「南北」方向的方法。他們藉觀察星辰以確定「南北」而又很巧妙地找出與「南北」垂直的方向以確定「東西」：他們用一根繩子，打了一個個的等距離結，然後兩頭連結，照3:4:5的比，分成三段，繃開在地上，便成了一個三角形，其中兩條短邊恰巧夾成一個直角，那麼所求的方向，便立刻可以由此決定了。這個方法和現在木匠們所用的方法，是大致相同的。

在厄姆斯書中所提出的幾何問題，主要的都是各種圖形的面積，以及其他與金

學塔有關的事。我們必須記住，在那時候，對幾何學的研究，僅限於人類實際需要的範圍。傳到希臘人手裏之後，才開始把幾何學作為一種抽象的科學來研究。

至於在那時候，世界上和埃及人同時的民族，有無什麼對科學的貢獻，我們便很少知道了。有許多事，我們都無從得到確實的考據，這使我們研究古代數學時，添了不少麻煩。據說，腓尼基人，一個最長於貿易的民族，所具有的數的知識，足以應付經商的需要。他們的鄰人，查爾丁人，則注意於對星辰的觀察，而養成關於天文學豐富的知識。在遠東方面，要提到印度和中國。從印度人那裏，我們間接地得到像現在所用的寫數字的方法，在後面我們還要談到。中國人對於裝飾藝術有高度的技巧，他們的能力至今還常為人所讚美，但他們對於人所熟練的技藝的理論方面，却似乎知道得非常之少，這實在是相當奇怪的現象。

以上所說這些古代人民的數學能力，主要都偏於實用，而且大部分都是從精細觀察得到的結果。當我們想到他們以粗簡的工具與微少的理論研究，而竟完成了這樣多的偉大工作——如金字塔、寺院、巴比倫的空中花園等，不過其一小部而已。

一實在不能不驚歎他們技藝的精巧，不能不佩服他們工作的勇氣。因此，希臘人在從埃及人那裏獲得了幾何的初步知識之後，不久便青出於藍，超過了他們的先生，而由他們奠定了幾何學的基礎。

### 第三章 幾何學的誕生

幾何學是遵得上帝的靈跡，以賜福人類的。

畢希爾

— 11 —

在希臘，研究數學的學院的創始者，一般都歸功於退爾士（Thales）。退爾士生於公元前六四〇年，他的一生，已不可考。傳說他是一個商人，秉性聰穎，一得空便致力研究。後來，倦於經商，在他家鄉米爾士斯，開了一個學院，從事講學。他在經商的時期，曾到過埃及，在那裏引起他對數學的興趣。他的數學知識究竟如何，無從細考，不過從此後的學者的著作中，所提到關於他的一切，可以知道他對三角形和圓的基本性質，確是非常熟習，可惜除此而外關於他的研究都已不傳了。他的興趣還不止於幾何學，如當時其他學者一般，他同時還涉獵於天文學與哲學。此外，他對於有名的「琥珀經過摩擦可以吸芥」的發明，也有幫助。如果這是確實

的話，那麼他還應該被稱爲電的發現者。他在米爾士斯創立的學院，延傳了差不多百年之久，但後來出來的學生對數學沒有什麼貢獻，這裏不必細述。

在這一時期，最出名的希臘人，當然是畢大哥拉斯 (Pythagoras)，他的名字常和直角三角形基本定理——斜邊上的正方形等於兩腰上正方形之和——聯在一起。實際上，這定理不能說是他發明的，因爲早在他以前很久的時候就有了這個定理。但他確是給這定理作了詳細的證明，雖然在現在幾何學教科書裏，已經都採用歐幾里得的證明了。畢氏在希臘科學史上，確是佔有了顯著的地位。他在公元前五六九年生於薩摩斯 (Samos)。他的一生，也不大可考，他的太太曾替他寫過一本傳，可是已經失傳，但據收集得的史料，知道他是當時最早的一位教師，一般學生都要聽他講學，爭爲他的門下。他把他的學生分做兩組，一組是初學者，一組則叫做「畢氏學者」 (Pythagoreans)。「畢氏學者」都是比較高級的學生，畢氏自己的重要發現，差不多都傳給了他們。那時的「畢氏學者」們，組成了一種研討哲學的集團，並且訂了非常嚴格的生活規約，後來，竟變成了祕密的團體而從事政治

活動了。這當然引起了當時統治者的暴怒。於是跟着便來了殘酷的鎮壓。在混亂中，畢氏和他的許多學生都死於非命。從此以後，這個學院便不得不放棄政治問題的研討，而專心從事於學問的專業。

除了這幾個學院之外，在別的大城市裏，也還有有些比較不重要的學院。其中有一個值得在這裏介紹的，是在伊里亞（Ilia）建立的一個學院，有名的齊諾（Zeno）便是在這裏第一次發表他著名的「兔與龜之謎」，他說：「如果兔跑快十倍於一個烏龜，而龜先跑了一千碼，那麼兔要永遠追不到這個烏龜。因為當兔跑完這一千碼時，龜應該前進了一百碼；當兔再追上一百碼時，烏龜又跑了十碼；以此類推，烏龜將永遠在兔的前面。」究竟這個說法，有什麼毛病呢？且留給讀者去猜想罷。

（像這一類問題的討論，是這個學院的特點之一。還有，齊諾也和畢大哥拉斯一樣對於政治問題極有興趣，最後由於一次反對政府的號召，在公元前四三五年被殺於伊里亞。

在這時候，希臘成爲世界上最爲特出的國家。希臘的首都——雅典，很快成爲

政治與思想活動的中心。因為這裏的學者們，都紛紛在學院裏倡導深思多辯的風氣。於是在小亞細亞的一些歷史較早的學院，反而漸漸地湮沒不聞了。

在雅典各學院中的領導人物，要算柏拉圖。柏拉圖是蘇格拉底的得意門生，他是一個哲學家，但在數學史上也佔着固定的地位。他第一個說明了哲學與數學之間的關係。還有用謹慎的文字組成的公理與公設，以及嚴格的證明方法，都是此後數學賴以發展的基礎，這些大部分都是受柏拉圖的影響。

這時期的希臘數學家，大都集中興趣在所謂「三大問題」的解答。這三大問題是：

(1) 圓化方問題——求作一正方形，與一已知圓等積。

(2) 倍立方問題——求作一立方體，使其體積二倍於另一已知立方體。

(3) 三分角問題——求分一已知角為三等分。

這三大問題究竟是怎樣提出來的？至今還是一個謎。據傳說，它們的來源，是相當神祕的。解答這些問題只許用一根不刻度的直尺，和一副圓規，除此以外，其

他的解答方法，當時的幾何學家是認爲不算數的。在這樣的嚴格限制之下，現在已經被證明不可能求解。（實際上，後面兩個問題，如果應用一種下面要說到的所謂圓錐截線，便可以求得解答了。）但當時由於希臘學者們拚命向這些問題鑽研的結果，却另外無意中獲得了許多重要的發現和驚人的收穫。在這一期間有三位最特出的數學家：

第一位是希比亞(Hippias)，他作成一種曲線，叫做「求方線」(Quadratrix)。利用它，可以解決三等分角的問題。他還發明了一種專門繪製求方線的儀器。但因為違背了只許用直尺圓規的規定，所以他的發明，並不爲當時的幾何學家所接受。

第二位是希坡格拉底(Hippocrates)，他首先應用文字來標明一個圖裏的不同點，他對三大問題中的第一個問題，最有興趣，於是在他設法求解的過程中，發現了許多關於圓的重要性質。

第三位是梅萊姆斯(Menaechmus)，他是亞歷山大帝的大先生，他是當時第一流名家教師之一，但亞歷山大却瞧不起他。曾經命令他把他所著的幾何定理的概

明政類學說。梅萊姆斯回答說：「在一個國度裏，可以有許多私人的路和公家的路，可是在護何學裏，只有一條路可走。」他第一個證明倍立方問題可以用兩個特殊的曲線所謂拋物線，來求得解答，這個方法是希坡格拉底曾經提示過的。

梅萊姆斯死於公元前三二五年。他的學生亞歷山大才戴上皇冠。這位新皇帝，不久便征服了埃及和小亞細亞，但在他東征西討的戰爭事業中間，他並沒有忘記讀書。他在尼羅河口一個適當的地方，建造了亞歷山大城和亞歷山大大學。建築的設計，完全出於名建築家狄諾格拉底(Dinocrates)之手，集中全力，毫不浪費地造成一個偉大的教育中心。其中一個大圖書館，周圍有許多講堂，是這個設計的最大特色。就靠了這座圖書館，希臘的科學文化流傳了將近千年，直到公元六四一年，護罕默特把城洗了把學校毀了為止。在這大學創辦的初期，很幸運的擁三位數學聖手——歐幾里得，阿幾米得，和阿坡羅紐斯，有了這三個人，幾何學才得到突飛猛進的進步。亞歷山大大學的建立，可說是古代科學史的分期點，在下一章，讀者便可以看到在這全世界第一個大學裏，科學是在怎樣的向前邁進着。

## 第四章 第一部幾何學

平勤伏案讀一書，以窺真理之光芒。

羅夫

在公元三二三年，亞歷山大大帝逝世之後，埃及成爲托勒密領土的一部分。托勒密繼續支持亞歷山大大學，而且竭力招致當時最好的教師到這裏任教。大學裏的數學部，是由希臘最著名數學家之一——歐幾里得（Euclid）負責的。在數學成爲一種研究的專科的時間，歐幾里得便將永遠在數學裏佔着一個地位，與數學同垂不朽。他可以說是古代最好的教師，在他的影響下，培植出來的一代一代的學生，都致力於數學的改進。但我們對他的一生，知道得很少。根據傳說：他是一個沉靜而保守的人，他教人爲求知而求知。他有好幾種著作，其中「幾何原本」最爲著名。這是他爲他的學生而寫的幾何教科書，而兩千年以來，它一直還是被採爲學生的課

本。試問世界上還有哪一本教科書曾經流傳到這樣長久？在這本書裏，歐幾里得收集了所有著名的關於幾何學簡單圖形的命題，依照論理的層次編排起來，并逐一予以邏輯的證明。直到最近，這本書才漸漸爲別的類似的教科書所代替。

歐幾里得還著了幾本討論曲線等問題的書。此外有一本在那時期出版的光學的書，現在也認爲是他的作品。就歐幾里得一生所致力的工作來說，與其說他是數學家，不如說他是一位教師，亞歷山大大學得到他來教學，實在是幸運。他死於公元前二七五年，他的學生們繼續進行着他的工作。此後不久，另一明星又繼續湧現——這便是阿基米得。

阿基米得 (Archimedes) 在公元前二八七年生於希拉古斯。在歐幾里得死後不久，他就到亞歷山大大學讀書，畢業後回到他的家鄉，便在那裏過了他的一生。在這裏，由於他的超人的智慧和卓越的能力，博得了塞拉古斯國王希羅 (Hiero) 的敬重。他對故鄉有很多的幫助，關於這，後來還流傳着好些故事：說他如何在羅馬人武力封鎖港口時，利用凸玻璃聚集太陽光燒燬了敵人的船艦；又說他在另一個

如何當一些造船的工匠們沒有辦法把船釋出船塢時，他竟用一種巧妙的機械把船拋擲下水去。另外一個有名的故事，便是說一個狡猾的金匠替皇帝鑄一頂金冠的事。希羅疑心金冠裏被攙了別的金屬，把它交給阿基米得要他檢驗。讀者大概都已聽說過：他是在坐在浴盆裏洗澡時，忽然觸動靈機，計上心來，便跳起來跑到街上，穿過了塞拉古斯城，一面喊着：Eureka！Eureka！（我曉得了！我曉得了！）

懷德海教授（英物理學家——譯者）曾說：「如果我們認識這一天的意義，我們便應該在這一天的大舉慶祝，因為這一天便是「數學物理」的誕辰；當牛頓坐在阿基米得的肩上市時，科學便跨進了一個新的階段。」（這意思是說：牛頓是以阿基米得的學說為基礎才形成了近世物理的觀念——譯者。）阿基米得在浴盆裏想到的原理，便是所謂「浮體定律」——「一個物體浸在一種液體中時，常受到一種向上的壓力，這壓力的大小，等於被物體排去的液體的重量。」所以一個物體在一種液體裏稱得的重量，一定要比在空氣裏稱得的，要來得輕。物體在空氣中的重量與在水中時排出的水重量之比，叫作這物體的「比重」。阿基米得用這個方法決定了希羅金冠

的比重，再以同樣方法決定一塊純粹黃金的地盤，這祕密便被揭穿了。

阿基米德在數學方面所完成的工作極多，要想大概作完全介紹，是很困難的。他的著作，有關於數學在機械上的應用：如滑車、槓桿等，更有關於圓、拋物線、及螺線等的幾何性質。他關於液體的研究，奠定了近代水滲力學的基礎，他在這方面的研究，早被人集為大成，當作標準著作，有幾個世紀之久。公元前二二二年，羅馬人攻陷了塞拉古斯，羅馬人曾下令不得加害於阿基米德，但結果阿基米德仍然被殺於亂軍之中。阿德海教授在一本書裏寫到這件事時，說：「阿基米德死於羅馬人之手，是世界大勢第一等重要的變動；這象徵了：重理論的希臘人，和他們所愛好的抽象的科學，都被重實際的羅馬人打倒，而取得了歐洲的領導地位。小說家畢肯士斐爾曾說：「一個重實際的人，便是常常重踏他祖先的覆轍的人。」羅馬是一個大的民族，但便因為過於重視實際，以致被世人斥為「草包」。他們沒有對他們祖先的知識有所增進，却斤斤於一些工程小技。他們連做夢也沒有想到去發現更新的觀點，可以更有方地征服自然。阿基米德被羅馬人殺死，但是任何羅馬人都

無法消滅他的生命，因為他的生命已經全部灌注在對數學圖案的研究中了。——德海最後這句話，真足以發人深省啊！羅馬人多研究法律，其中有些有志於科學的，也會到亞歷山大大學讀書或者受教於到過亞歷山大出來的學者。而當他們統治了這兒之後，以這樣大一個民族，竟對於科學毫無實際貢獻，實在是太堪注意的。

在這時期第三個希臘偉人是阿坡羅紐斯 (Apollonius)。他第一個說明了圓錐截線的重要意義。他在公元二六〇年生於不爾薩 (Persepolis) 曾到亞歷山大講學。此外他的一生便不可考。

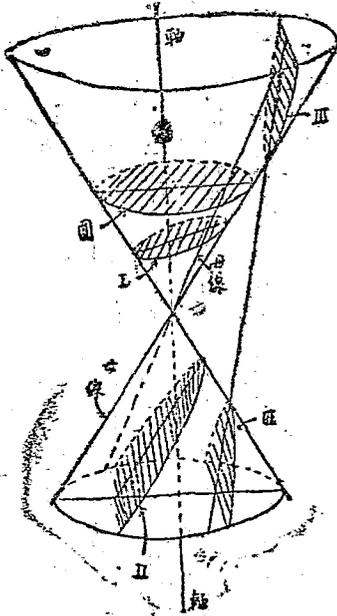
圓錐截線是早已被人知道的，它的一部分性質也已被人發現過，但阿坡羅紐斯第一個予以有系統的說明。這裏稍為說明一下，頗可以引起興趣。所謂圓錐，在數學意義上看來，應該是成對的，(如附圖一)現在若用一個平面與這圓錐相截，我們便可以得到三種不同的截線：

(1) 一種蛋形的曲線 (I) 叫做橢圓，如果平面與圓錐軸 (註) 垂直，那麼這橢圓便成爲圓。他說明了：在數學的意義上，圓不過是橢圓的一種特殊情

形。

(2) 一種叫拋物線 (II) 。當截面與圓錐的母線 (註) 平行時，便得到這樣的截線。

(3) 一種叫雙曲線 (III) 。當截面與圓錐上下兩部分都相截時，便得到這樣的截線。注意這種截線是有兩部分互相分離的曲線的。



附圖二：圓錐截線

(註)——依照數學上

對圓錐的定義是：空間任一直線繞另一固定直線旋轉所成之軌迹，叫做圓錐，這固定直線便叫做「圓錐軸」，這動直線便叫做「母線」——譯者。

這便是阿波羅紐斯所研究的曲線，他研究的結果，始終保持着權威著作的地位，直到十六世紀為止。我們應知道，他研究這些曲線的成就，是完全從立體幾何的圓錐研究得來的；這是很艱難的工作。到十七世紀，笛卡兒（Descartes）發明了解析幾何，因而得到圓錐曲線極簡便的作圖法，於是圓錐曲線性質的研究便成爲比較容易的工作了。

希臘人的研究興趣，雖然主要在於幾何學，但另外兩位著名的天文學家却非介紹不可。這兩位天文學家，一個是希帕古斯（Hipparchus），一個是托勒密（Ptolemy）。希帕古斯生於公元前二世紀，在西歷山大畢業後，到羅得斯城，他的大部分工作是在那兒完成的。不幸，他自己著作的稿本竟遺失掉了。現在我們所知道他的著作，都是從托勒密的鉅著「Almagest」裏得到的。希帕古斯最大的功勞，是首先研究角的三角函數性質，製定了第一部份的三角函數表。此外他曾編訂了包括一千多個星的天文表，我們可以想像到他那時所用的儀器是如何粗陋，可見他的貢獻實在不小。托勒密在希帕古斯發表著作的三四年後，整理出他的研究成果，而發

表他的天文學鉅著，便是Almagest。這本書一直成爲天文學的權威，直到刻卜勒時代，證明行星系的中心，並不是地球，而是太陽。托勒密的「教條」才被打破。

希臘的數學史到了公元六四一年回教徒攻陷亞歷山大的時候，遇到了末路。有史以來世界文化，從沒有遭受過這樣的摧殘。大學被毀了，它的著名的圖書館被燒光了。一部分教師逃到君士但丁堡（拜占廷一個城——譯者），在那裏繼續他們的研究工作。但此後拜占廷却并沒得到什麼重要的成就。它的最大功勞，便是保存了一些希臘著作，因此到了十五世紀，土耳其人在一四五三年佔據君士但丁堡後，便又在這裏刺激起一陣研究學術的潮流來。

## 第五章 寶貴的阿刺伯字母

如果生活中沒有了算術，那麼生活將黯然無光。

薛德來司塔斯

站在科學發展的立場來看，從第六世紀到十一世紀，實在是一個毫無趣味的時期。和這一段中東人的生活有關的，僅是一些日常的事件，歐洲的「學術之燈」，這時真是「搖搖欲墜」，但這時在阿刺伯，却還存留着希臘科學的精神。因此我們得要談談這時候阿刺伯的學院。阿刺伯學術精神之值得注意，有兩個原因：第一因為希臘人的著作在十二世紀時（藉了西班牙的回教徒穿過了歐洲，帶來了對古代科學的新的興趣。第二，我們現在所習用的阿刺伯數字和十進位的制度便是從阿刺伯人那裏學來的。

阿刺伯人從希臘人與印度人兩處來源接受了知識，再予以發揚。回教主常常歡

達希臘的學生到巴格達來，於是歐幾里得，阿坡羅紐斯，以及一般亞歷山大大的大科學家的著作，都因而流傳介紹到了阿剌伯。我們還應該申明：這些翻譯本後來有好些反成了這些著作唯一珍本，因為原文版都在亞歷山大被燬時散失了。此外，當時阿剌伯與印度之間，貿易頗盛，藉此機會，印度數學家的著作也得以流傳到阿剌伯。這使得阿剌伯學者的注意力，集中在算術和代數，而產生了一些較高深的著作。他們的著作，讀起來另有一種趣味，其中大部分都是與日常實際生活有關的數學問題，因此讀了之後，對這時印度人民的社會經濟生活，可以有很明白的印象。而我們現在所用的數字，大概就從這些書裏傳了過來。這些數碼字的來源已經不大清楚，但似乎在十世紀時曾在印度普遍流行應用過。此後經過阿剌伯人與摩爾人稍加修改，便在十二世紀與十三世紀普遍應用於西班牙。

一般的說，社會對於一種轉移風俗的改革，常常是難於接受的。但是這種新的十進數却很快就在歐洲普遍地被接受了。它的好處實在太顯明了，在任何地方，都可以看到。因為我們前面已經知道，當時算術的計算都是用算盤，但要記數目寫出

察，却相當費力。埃及人是用不同的象形符號來表示數目，它的來源大概是從畫手指爲記演變而成的。希臘人則用他們文字的字母排列起來記數。羅馬人也是用字母做記號，其中有幾個就是用數目名稱的第一個字母代表，例如C是Centum的縮寫，代表一百，M是Mille的縮寫，代表一千。這種記號要用來計算是異常麻煩的。要想對這一點有個印象，讀者只要隨便拿一個很簡單的乘法問題，例如 $25 \times 15$ ，用羅馬數目來演算一次，就明白了。由此便立刻可以見到阿剌伯數字的好處。

雖然阿剌伯人的工作，有這樣高的價值，但他們自己對於數學却並沒有什麼大的擴展。阿剌伯數學家裏面最特出的是阿爾卡里斯密 (Alkarismi)，他曾寫過一部關於代數學的很有價值的著作，成爲中世紀著作與研究的藍本。其中最有趣的，是他常常用幾何的方法去證明他的代數問題，此外，有許多算術問題也是這樣和代數混和起來。

說了這些閒話，現在我們得回過頭來再重新窺察歐洲數學的歷史。

## 第六章 中世紀的大學

一個大學應當是光明、自由、學習的地方。

——德伊斯雷里

十一世紀的末葉，在歐洲大部分國家裏，又重新現出一種學術研究的復興氣象。雖然直到此時為止，僧院始終是霸持着成爲思想活動的唯一的中心。也許是因爲僧院那樣安靜避世的地方，才具備了學術研究的環境罷。但即使是這樣微弱的一點燈光，也幾乎在十世紀的混亂時期完全熄滅，這時期，附屬於各教堂和僧院的學院，都岌岌可危，要想方設法，才能維持下去。所有的書札文件，都是應用拉丁文，而且都是教堂裏的人物寫的，要寫這些書札還非得精通古代經典著作不可。但是，當時教徒們的知識程度雖然落伍低下到這樣可憐，總算僧院裏還保藏了許多書。從這些書裏，還可以讓後代的人們，學習到古代先賢們的智慧。

中古教會的黑暗時期過去了，社會上的混亂漸漸復歸於安定。當時，對羅馬帝國的法律的研究，以及爲了約束正在很快增加的教徒們而擬訂的教規，對於行將到來的學術復興，頗有不少的幫助。對舊有的學院的限制開始解除，一些專門研究普羅米修斯神話的學院，也逐漸設立。其中最早的一個是在意大利的薩勒諾，是一個醫學院。後來會大著聲譽。另一個是在波諾格那成立的學院，以法律著名，是一些商人辦好的。他們的商業發達，因此法律學院的研究事業，得以日漸進展。從這一羣學院的建空中，慢慢地孕育出了後來的大學。

學生們聚集在一起（裏面絕對沒有一個女學生，因爲這時候離開兩性解放的時代還遠着呢！）形成一種集團，和當時的商業公會相彷彿。這集團的作用，一方面固是爲了學習，另一方面却是爲了防禦外界的加害，因爲這時一般人都還對這些學生的正當地向抱著懷疑和惡意的態度。這種在學校學生與市民之間的仇視心理，日益醞釀起來，終於到後來爆發了所謂「市與士之爭」（Town and Gown riot）。此後商業公會逐漸擴大到成爲一種自治團體的程度，可以監督會員的行爲，可以控

制他們所屬工廠的一切條件，而且拿得了「商人法」的特權。於是那些學生們所組織的公會，爲了要取得同樣的特權，也團結合併起來。牛津大學首先在二二一四年獲得政府的承認，劍橋大學次之，在二二二一年。這些公會雖然并不是教會辦的，但隨後都受着附近的主教或方丈之流的保護。因爲在那時的主教方丈都是常常出入於法院之門的。

現在我們得看看：科學在當時佔着怎樣的地位了。「中世紀」，在科學史上，可以說是一個荒誕的時期。「煉金術」是最哄動人心的研究，他們專心於所謂「哲人之石」與「長生不老酒」的製煉，這便是當時的科學研究。他們的試驗，常用很神秘的樣子來進行，試驗結果的報告，也常用最艱深難懂的文字寫出來。在這時期，共走江湖騙子們大走紅運的時期，其中自然也有些真正在追求着真理的天才，但反更要遭受騙子們的打擊，教會和政府也都曾以「衛道」的名義來「打倒這些剛生長的惡魔」。煉金術家們在長時期的探求試驗之後，當然是失敗了，但在他們這種盲目摸索的過程中，却造成了許多極其重要的發現。跟着學術風氣的復興，科學漸

漸得到了健康的外表，妖魔鬼怪的一套花樣被屏除了，而合乎理性的觀念則漸漸被提倡着。

在這時候，研究的課程是很妙的。拉丁文法修辭學和論理學，被定爲一切課程的基礎，這些課程中，一些平凡的内容，滿足了大多數求學的人。只有少數的人，專心研讀所謂「特別科」如神學、法律、或醫學，以準備造成爲一個職業學者。或者研究所謂「四算科」的算術、幾何、音樂、和天文學。這些學科的程度都很低，音樂不外乎教堂行禮時的唱歌，天文學幾乎只限於計算基督復活節的日子。這時的數學主要的是寺院收入的計算，或者編訂教會各種節日的曆本，如此而已。在十三世紀末，一位曾在牛津講學的聖芳宗派的僧侶，名叫羅哲·培根，曾說，他的學生當中，很少人會讀過歐氏「幾何原本」中的命題到五條以上。羅哲·培根是當時幾位具有真正科學修養的人之一。羅培·培根所貢獻的知識，包括着一些數學，是在儀器不完備，經驗缺乏等等不利條件之下完成的，這實在足以使我們感動。而遺憾的是他同時的人們對他的研究的反應，是競爭者少，而驚奇者多。當然，當時無論

怎樣，這些讀者們，都一致的反抗當時所謂「神前審判」的焚書坑儒的死刑。因為如亞當學及亞當被當作異端來燒死，那自然哲學家也將不能避免要被當作魔術家來處死刑。

顯而易見的，在這樣的氣氛之下，數學研究決無法達到最高的水準。即便像羅賓。培根這業何得上科學研究資格的人，都還是多多少少受着當時迷信的影響。他對於星相家一種相信星象可以致人禍福。而且，他在一本書裏還寫着一種當時最科學的迷信思想：就是認為由於人世上繼續不斷的禍亂，使得造物者震怒，不再製造黃金，所以地下的礦產中銅鐵多而黃金少了。

在這樣迷信的時代，純科學術降到低潮，而其中竟有少數人向他們同時愚蠢無知的人們，進行着光輝而又的反抗鬥爭。我們對他們，實不能不深致感謝。這時候，印刷術還沒有發明，交通也很困難，因此阿剌伯學術的傳入歐洲，也是非常遲緩。雖然如此，但商人階級增加了增加他們的貿易，也開始認識了新數字符號的好處，於是到了十五世紀，阿剌伯數字便已普遍流行。很有趣的，這時候弗羅倫司的商人

也開始採用簿記的方法記賬了，當時管這種新方法叫着「兩筆法」。此外，通貨的鈔票，及其他來往票據，都已經採用了，如現代的商業組織，已大致具備。

當文藝復興運動的前夜，無知的迷霧已漸漸撥開，而顯出一種新的圖景。古人的著作又被人以新的興趣開始研究，科學開始建立了穩固的基礎，當時的放棄空想與直覺，而代以實驗和理性了。

## 第七章 輝煌的時代——「文藝復興」

對於衝動與迷信的流毒，科學是一付最好的

對症良藥。

——亞當·斯密

希臘最後的學術中心，是在君士但丁堡苟延着殘喘，當一四五三年土耳其人佔據君士但丁堡，這最後的中心也完結了。這些逃亡者，帶着一些希臘名家的原稿和譯本，逃向西方。這給予歐洲科學以新的刺激。同時印刷術的發明，使科學的發現，得以很快地出版流行。這兩個重要的因素，促成了一種思想大進步的潮流，這便是史家所稱的「文藝復興運動」。

就數學的發展這方面看來，十五世紀的特點，應該是在算術與代數的進步。這一個時期，出現了我們所看慣了的加號減號。這兩個符號怎樣來的，是一個頗值得猜度的問題，關於這，有好多非常有趣的說法，其中最為流行的，是一個所謂「貨

棧說」。它認為加減符號的來源，是由於商人在他的過重的貨箱上寫一個「十」的標誌，而以「二」表示不夠重的貨箱，在這標誌的後面，便跟着註明超過與不足的分量。由於這種方法在使用上的便利，便被商人們應用來記賬，最後竟普遍應用到科學著作上了。在這以前，也曾有過幾種不同的表明加減運算的方法，但最後都讓位於這種較為簡單的新方法了。

在這一世紀中，有幾個相當有趣的人物，是值得在這裏介紹的。最著名的恐怕要算李約那多·達·文西 (Leonardo da Vinci)。誰也知道他是二位大藝術家，他的數學著作，主要是關於機械的問題，以及在槓桿、磨擦等方面的應用數學問題。自從阿幾米得以後，這些問題很少被人提起，所以，他對應用數學的研究特別值得注意。李約那多對數學並沒有了不起的貢獻，但由於他研究并提出了這類問題，使它又重新在人們心目中，有了新的印象。

此外，在十六世紀初期，還有兩位相當有趣的人物。一個叫做石綿斐 (Stifel) 曾著過一本代數學的小冊子。他原先是一個奧古斯丁派的僧侶，曾宣誓效忠於新

數首領馬丁·路德。不幸，石綿斐相信數學的分析可以應用到宗教問題上去，而且他竟很魯莽地把他對聖經的意見拿來出版，并討論到當時一個認為世界末日將到來的預言。這一來，幾乎被馬丁·路德要了他的命。

這時第二個特出的數學家是卡爾當 (Cardan)，讀過代數的學生們都知道，他的名字常和代數的三次方程式的一個特殊解法聯在一起的。他的著作，表示出他是一個不凡的人物，但他卻也正是「天才即瘋人」的好例子。他發見的三次方程式解法，是從一位和他同時的數學家塔他格里亞 (Tartaglia) 那裏偷來的。為這件事，塔他格里亞和他曾大打官司。後來放蕩的一輩子，在剛要被派為的帕爾亞刺的聖象官時，竟自殺死了。

在「文藝復興時期」的末期，在數學上有兩個重要的進步。第一，是約翰·弗庇翰 (John Napier) 在一六一七年發現了對數。第二是約翰·布里格士 (John Briggs) 編製了第一部對數表。布里格士是牛津大學的教授，從一六二〇年開始任教，一直到死為止。這兩個人的工作的重要性質，是不待多說的。繁瑣的計算，從此

可以很快地做出來。那麼這種新的計算方法，很快便流行於全歐洲，是不是驚異的了。

在我們結束這一章之前，還得對加里略 (Galileo 1564-1642) 和刻卜勒 (Kepler 1571-1630) 介紹一下，當然，從他們在天文學上的發現來說，已是世界聞名，無庸介紹的了。加里略曾在比薩擔任過一個時期的數學教授，就在此地有名的斜塔上，作過多次的落體試驗，由此奠定了近代動力學研究的基礎。刻卜勒是一個發現行星運動規律的人，而且第一個指出「行星是依橢圓軌道繞太陽運行」的事實。此後，牛頓的近代物理學說，便大部分是以他們兩位的學說為出發點的。

## 第八章 近代數學的基礎——牛頓和他的時代

我不知道我將貢獻些什麼給全世界，但就我自己來看，當真理的大海整個地顯露在我面前的時候，我只不過好像一個在海邊游盪着的小孩，把自己，從現在以及永久，都沉浸在找尋一粒圓滑的石子或一個美麗的貝壳的遊戲中而已。

——伊薩克·牛頓

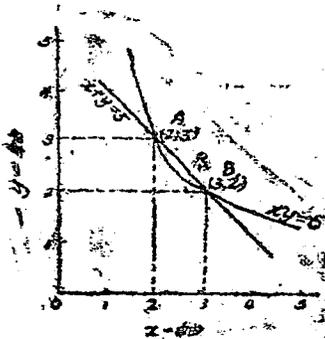
十七世紀和十八世紀，在數學的歷史上，形成了一個最重要的紀元。在前一世紀和這個時期所完成的工作之間，找不出一條明顯的分界線。正如以前我們看到希臘學院的歷史一樣。但是我們却必須要將這一時期數學研究的歷程，列為本章來討論，這是因為現代數學的基礎，正是在這時奠立的。現在，讓我們回到這個時代來放眼一看罷。

我們該還記得，在前幾個世紀裏，曾在算術和代數方面有了進步，對於希臘人

的幾何學，雖都已熟知，實際上對這方面並沒有什麼貢獻。現在，我們面前展開了一個新的階段，這幾種學科被綜合起來，而開始形成一種新的學科——解析幾何，現在是研究這種新學科的階段了。

一般地說，解析幾何，可以看作是代數方法應用到幾何問題上的研究方法。這種方法已是很為大家所熟悉，因為一切變動量的圖解，如溫度、壓力、以及各種的統計等，都正是這一方法的應用。取兩條任意長的直線，一般常取為互成直角，叫做「軸」，在軸上採用適當的分度。依兩軸上不同距離的地位而取得不同的點，把這些點連接起來便成爲一條曲線，這便是所要求的一「圖解」。它的畫法很簡易，把這些點連接起來便成爲一條曲線，這便是所要求的一「圖解」。它的畫法很簡易，得到的結果很精確。這樣的方法，當然立刻被廣泛地應用，不但應用於純粹的學術研究，而且還應用到工程與建築等實際的問題上去。

這種方法的使用，一般都歸功於笛卡兒（René Descartes 1596-1650）。笛卡兒是一個法國軍官，退伍後，便致力於哲學與數學的研究。他不但使用了這用圖解的表示方法，而且還第一個指出：這樣得到的幾何曲線，可以用一個代數方程式來



附圖三：方程式與曲線

表示它的幾何性質；相反地，代數方程式中變數的關係，也可以用在圖上對應各點的幾何意義表示出來。附圖3便大致說明了這一點。圖中所畫的兩條曲線，可以用兩個代數方程式： $x + y = 5$ ， $x - y = 3$ 來代表。（注意，所謂「曲線」這個名詞，在數學的意義上，是連直線也包括在內的。）如果從代數意義來說，這兩個方程式，有兩變數值  $x = 2$ ， $y = 3$  或  $x = 3$ ， $y = 2$  可以適合它們。如果從幾何意義來說，便是這兩個方程式所表示的兩個曲線，相交於兩點A和B。而A點的「座標」是  $(2, 3)$ ，（就是說：A點與Y軸的距離是2與X軸的距離是3）B點的「座標」則是  $(3, 2)$ 。

像這樣的方法，已經被擴充應用到數學的各個部門。因此，笛卡兒氏的工作的重要，自不待說。雖然他的著作「幾何學」，卻因為文字的晦澀而不大被人知道。

這一種新的部門，既已大致介紹過了，我們便要說到一個全世界最大的科學家——伊薩克。

牛頓 (Sir Isaac Newton 1642-1726)。

他是林肯州一個農夫的兒子，本來是應該照着命運的支配，走上他父親的老路的。然而當他小時在學校讀書，已顯露出在機械方面的偉大的天才，這給他家庭以極深的印象，於是他家裏決定送他到劍橋大學的特利里蒂學院去讀書。他很快便把指定給他讀的書籍全都理解了，他的驚人的智力，立刻爲人所知。幾年之後，他的導師巴羅 (Barrow) 認爲他的門生已經青出於藍了，便辭去了自己的數學教授的學位。牛頓在十八年當中，講授過許多班的課，對科學的每一部門，都作過不計其數的試驗。他幾乎沒有那一種學科不發生興趣，而且很少有幾種學科是沒有貢獻的。在光學方面，他發現一條光線在經過一個三稜鏡時分解成不清的顏色，而形成「光譜」。由此他解釋了虹的現象。他對星體運動及宇宙的研究極有興趣，因而製成了一種新式的望遠鏡，來觀測天體的運動。牛頓以長久的時間致力於這樣多的問題，我們必須對他的成就的重要之點，好好觀察一下。

扼要地說，有兩個主要的問題。第一、天體的運動，應如何解釋？第二、光線

是怎樣由太陽和星體傳到地球上來的？牛頓所研究的工作，大部分都和這兩個主要問題有關係。由第一個問題，引導出對引力及其影響的研究，由第二個問題，引導出牛頓關於光的學說。這個學說，後來被證明不能成立，但它在科學中佔着中心的地位已有許多年數。依照這個學說，任何發光的物體，例如太陽，發出一串的「微粒」，當射到眼睛上的時候，所發生的現象，便是光。根據這個假說，牛頓獲得了全部關於光學的有名的定律，其中包括了光的反射現象，折射現象，與光線分解成光譜的現象。這個學說克服了當時思想家們面對着的一個最大的困難。但是光究竟係由物質微粒產生的？抑或是由於一種在充塞宇宙的以太中的波動而引起的？物理學家海琴斯在一六九〇年曾把這個觀念詳細引伸，於是這兩派學說互相爭論了很長的時間。起初赫利大部分屬於牛頓，但到了十八世紀的末期，物理學家楊氏與弗雷斯勒一人的研究，提供了波動說的一般根據，於是微粒說便被否定了。

牛頓關於引力的定律及其在天文學與力學方面的各種應用的研究，都收集在他的名著「原理」一書裏。這本書被奉為經典，而為研究數學的學生所必讀的書；一

直流傳到十九世紀。其對科學貢獻之大，可想而知。牛頓引力定律的主要假定是：「兩物體常互相吸引，其引力與兩者距離的平方成反比。」此由此假定出發，證明了以前刻卜勒所斷定的一行星沿橢圓軌道繞太陽運行」的話完全正確，並進一步詳細研究行星的運動，及月亮的運行，潮汐的原理等等。但他的工作還不止於此。由於科學的某一部門的進步而引起另一部門的進步，這是常有的事，牛頓的研究也正是如此，由於他的研究帶來了許多關於方程式論的新發現，而使代數得一大進步。從這些研究，更得到了微積分學的重要發明，他叫它做「流體法」(Method of Fluxions)，這是十七世紀最大進步之一，因為它是後來科學家們解決任何問題的最重要的利器。在牛頓寫「原理」一書時，已經發現了微積分學的基本原理，但他在書中解答問題時，大部分仍然是應用着幾何的方法，所以在他死後，一般人受他的影響，仍多應用着幾何學，以致微積分學的研究，進展得并不如我們所想像的那樣快。

微積分學的基本觀念是不難明白的。假使有兩個量都在變動，而兩者之間有一

定的關係，一量的變動，會使另一量亦發生相當的變動；這時我們說，這一量是另一量的函數。試舉一例來說明：設就一圓來說，則圓的半徑和圓的面積，是兩個互有關係的變動量，當半徑改變長短時，面積必定相當地改變着大小。換句話說，圓面積是半徑的函數。這兩個量變動的速度之比，便叫做這函數的「微分係數」。這種計算的過程，便叫做「微分」。反之，設若先知道兩變動量的「微分係數」，求這兩個量原來的關係——函數，這個相反的計算過程，便叫做「積分」。由此可知，微積分學便是一種研究在連續變動的量的方法。所謂連續變動的量，範圍極廣，可以舉出無數的例子。因之，微積分學的應用是極為廣泛的。

微積分法的發現，曾經有一場科學史上著名的爭論。牛頓早在一六六六年就熟習了微積分法的原理，但一直沒有宣布，直到一六八七年才出版。但在一六八四年，一位漢語俄地方（屬今德國）的哲學家叫萊布尼茲（Leibniz）出版了一本說明微積分法的書，宣布這是他的發現。來布尼茲（1646—1716）是名外科學家萊卜齊格（Leipzig）的得意門生。他雖是一位哲學家，但也是一位頗著聲譽的數學家。依

一般批評，認爲他所創造的微積分的符號（便是現在所用的），要比牛頓所用的好。這一場激烈的爭執，延續了許多年，兩個人都因而苦惱了一生。在達維·布留斯特所著的「牛頓傳」中，作了如下的判斷：——

（一）認爲牛頓是在一六六六年發明「流體法」的第一人，然而爲了符號的緣故，方法還不完備。且認爲它的基本原理，在一六八七年以前，確是沒有公諸於世。

（二）認爲萊布尼茲曾在一六七七年把他的微分法告訴牛頓，附有一套完整的符號，且認爲他是在一六八四年把它出版。

這個意見，也是今日科學家們一般的看法。

牛頓在一六八九年重任國會中的劍橋大學代表議員，此後繼續擔任這一議席直到改組爲止。在一六九五年，他離開劍橋，就任造幣局監督。在這時，他曾做過一些關於月球的研究工作，但爲皇家天文學會會員弗拉姆爵士蒂德所反駁，從此以後，便沒有什麼科學的著作了。一七〇五年受英皇后的封爵，在劍橋特利里蒂學院舉行盛大的儀式，其費用之鉅，使大學後來不得不借了五百金鎊以抵清所付的費用。

山魯的紀念碑。

牛頓死於一七二六年，在威斯敏斯特寺院舉行盛大的葬禮，還爲他建立了一個

十七世紀中，形成了一種以迫切而熱情的情緒推動科學研究的潮流。一六六六年，英國皇家科學會成立於倫敦，同時在巴黎意大利等處，也先後成立了同樣的研究機關。科學界人士，開始互通聲氣，社會上也以討論科學家的著作爲時髦的事。這個時代，是真正的科學研究播下種子的時代。大約一個世紀以後，殘留的中世紀的思想觀念，最終趨於消滅，新時代的科學方法開始盛行了。

## 第九章 理論和實踐

任何偉大的事業決不能沒有熱情而得到成功。

伊歐生

總括牛頓全部的工作，前後幾達五十餘年。不幸，在他和來布尼茲之間的爭執，鬧得太厲害了，於是弄得後來，英國科學家只是跟着他提示的方向走，而歐洲大陸的學生，則已採用了笛卡兒氏的更有效的解析幾何方法，與來布尼茲的更便利的符號。直到十九世紀的初期，思想上的交換較為自由，無聊的爭執才完全平息。

要想說明十八世紀後期到十九世紀的數學發展，實是極其困難。因為現在數學變成非常複雜和技術化了，要不用符號和科學的方法而予以簡略的介紹，已是不可能的。所以我們只能限於考察這一世紀的特徵，從而獲得這時期數學發展的大概觀念。如果我們以這樣的立場來看，問題便比較簡單些。

在這以前，數學是只被看作一種純學術的研究工作，很少有人嘗試把數學應用到自然現象上去。在這一世紀，我們得承認，人們的眼界開闊起來了。他們開始向兩個主要方向努力：

(1) 充實完整這一門科學的內容，使它成爲更有力的武器，以解決許多急待解答的問題。

(2) 把數學應用到任何一種可能借重數學方法的科學上去。

我們可以將第一種稱爲「純粹數學」，而把第二種稱爲「應用數學」，這樣便不致影響到數學的完整。

此外我們還得看到一些有利的因素。這一時期，在教育事業上，有着極堪注意的發展，這使得研究數學的學生更多起來。同時，印刷的創造，與報紙雜誌的發行，使科學研究的收穫更易普及。於是，注意研究這些學科的人，比以前大大增加。這裏，我們記起這時期一些對純粹與應用數學都有貢獻的大數學家。例如尤勒（Euler 1707—1783）擴充了代數和「數學分析」的方法，同樣對液體的運動——

種稱爲「水力學」的學科——也有研究。他還著了關於天文學的很重要的著作，其中有陰歷表的編製，因此英國國會推他爲榮譽會員。我們還得提出這時法國的兩位大數學家拉格朗許（Lagrange 1736—1813）和拉普那斯（Laplace 1794—1827），他們的著作，無法詳細介紹，這兩位都是功勞卓著的大數學家，他們對天文學、力學，以及其他許多部門都作了有價值的貢獻。

說到這時期數學的進展，我們還得注意它開始對別的科學所發生的影響。在這以前，別的科學都各自沿着自己的方向，各不相關地向前發展，漸漸地，幾乎是不自覺地，認識了數以符號與方法的便利，於是物理化學的大部分都受了數學的影響，結果是，現在幾乎沒有一種科學能夠永遠不採用數學的研究。即使像英國俗語所謂「枯燥如塵」的關於人口出生、死亡、結婚的統計，到了數學家的手裏，也成爲栩栩如生的事實。可以從而反映出一個國家社會經濟生活的真相。

這種在其他部門的影響的迅速擴充，起初使數學本身有些鬆懈的表現，但到了十九世紀後期，便有許多研究者致力於數學的基本原則與方法，而獲得極其重要的

成環。這猶如一部機器，在辛苦工作之後，便必須有一番仔細的檢察。數學家柯熙（Cauchy 1769—1857）及其同時諸輩，以非常鄭重的耐心，從事研究微積分學的基本原理及其應用方法，這樣便創造了數學的一種新部門——函數論與數學分析法。

在這一章的末尾，還得說到一件大事，便是海王星的發現。原來有一個行星天王星的軌道，與理論上的略有不符，有人已經懷疑在天王星附近還存在別的新星，擾亂了它的軌道。後來，它的原因，被法國的勒味利哀（Leverrier）與英國的亞當斯（Adams）同時發現，引起當時很大的注意。他們對這個謎一般現象，進行數學的推斷，算着這個未知的新星應在某個時間經過天空某個位置，然後將這純理論的計算，期望遠鏡來作實際的觀察。誰都知道，後來這個星完全照理論所推斷的情形出現了。這個神奇的數學的應用，使數學在大眾的心目中的地位，增高到前所未有的程度。

誠然，這一個世紀，比起以前的時代來，已是空前的進步，但更不能忽視的，

是科學家的眼界與風氣，有了重大的改變。中世紀的無聊的教條與懶惰的空想，最後被肅清了，做黃金夢的煉金術家那一套奇詭的假說也全被摒棄。這一時期的歷史之所以如此重要，原因正在這裏。一個作家會這樣說：「這對於後世，是一個很大的教訓。它表示出：科學的真理，是不可能從一些教條看出來的，自然界的法則也不是可以由我們的觀創造的。它們只有誠懇而忠實地以耐心的觀察，和熱實的實驗，才能追求得。」只有當迷信的枷鎖最後被打碎時，真正的進步，纔能夠實現。問題並不在於十九世紀的工作者的智能，是否高於其他世紀的人們。更重要的問題還是在於他們週圍環境的情形不同。在一種思想自由的空氣中，真正的科學研究，便得以繁榮滋長；反之，在一個神祕與迷信的時代裏，研究的精神，將立刻遭到窒息，決不能繼續存在的。

## 第十章 能

科學聯合了理性，便是真正的判斷。

柏拉圖

十九世紀裏最重要的進步之一，便是「能」的學說的具體形成。在這時期以前的科學家，對於說明「能」的法則，雖然確是有了相當的知識，但從未有關於這方面的著作出版過。這是什麼原因，不得而知。但什麼因素促使他們致力於能的性質的研究，倒是不難知道的。在那一世紀的開始便已經看到工業革命的萌芽。舊的製造方法落伍了，工廠被創立起來，機器代替了舊時的手工。在新城市工業化以前，鄉村的小工業已漸次淘汰。這樣浩大的革命潮流，影響了人民的社會經濟生活，當然重要影響到科學的工作的。

「能」的最普通的形式便是熱。工業革命的重要因素，便是蒸氣機問世。這

兩者之間的關係，是非常明白的，因為隨着蒸氣機立刻發生的問題，便是必須要夠道，在煤爐供給的熱，與蒸氣機所能完成的「工作」（或「功」）之間，有着怎樣的關係。

在我們詳細討論這個問題之先，我們必須先把自己對於「能」與「工作」（或「功」）這兩個名詞所持的含糊概念，完全取消。每個人對這樣的名詞，都有了一些概念，因為「能力的耗費」，與「工作的完成」都是日常見到的事。但是這樣望文生義不加定義的記號，在科學上是毫無用處的。「能」的最適當的定義是：「可以勝任做多少「工作」的份量」，因此，無論哪一種「能」，都是以所完成的「工作」來量的。「工作」最普通的單位是「呎磅」——就是舉一磅的重量經過一呎的距離所需工作之量。試舉一例以說明「工作」與「能」的關係。每個人都看到過石匠用滑車或其他機械，把石頭從地面送到屋頂上去。工人旋着絞盤的轉柄，便可以把石頭舉起來，若不用滑車，便無法舉起來。我們可以很容易計算出來，舉起這塊石頭，要作多少「工作」。它是與石頭重量（磅）和經過的距離（呎）成正比的。這樣

計算結果，多少號稱的「工作」，便是工人旋轉絞盤所化費的肌肉勞動的「能」。

「能」是不相同的，我們得用各種方法來加以區別。上面的例子便指出了對付不同的能——「有用」的能，和「分散」的能。「有用」的能，是立刻可以應用來產生機械的效用的；「分散」的能，便是不如此應用而實際上等於無用的了。工人所費的「能」，并不是全用在舉石頭上面的；其中的一部分，是損失在克服機械各部的摩擦，滾熱了滑車的軸承，發出了輾軋的聲音等等上面。這些部分，便是「分散」的能。另一種常用的分類，便是「動能」與「位能」。「動能」是搬一物體所具有的產生動作的能。——例如蒸氣機起重機所具有移動重物的能便是。反之，「位能」則是一物體在靜止尚未發生動作時所具有的能——例如鐵的發條，當被旋緊後，它具有可以使擺輪走動的能，這便是「位能」。另外一個例子，是可以爆炸的化學藥品的混合物——如火藥。當它爆炸時，便是混合物所蘊藏着的「位能」發彈出來而使炸片具有着破壞力的「動能」了。這種分類，却不必過分重視，因為雖然它比凱爾文氏的「有用」能與「分散」能的分類較為普通，但究竟那種分類較

裏，這是一門問題。要把「動能」改變爲「位能」，或「位能」改變爲「動能」是很容易的事。例如開滿一個時鐘的發條，這便是我們以「動能」完成了拉緊簧片的「工作」，但這就是賦予了發條以相當的「位能」使其可以推動鐘擺。

這樣的「能」的改變，是受着一個重要定律的支配的。這便是「能常在定律」，是科學的重要基本原理之一。依照這個定律，宇宙間的能總，是沒有絲毫增加，也沒有絲毫減少的。關於這個定律，有人會這樣說：「它將是近代物理歷來所有的最真實的結果。它的真實性，是發物理學原理的每一個實驗與應用，在隨處證明着的。沒有一個物理學的部門不和他發生關係。」牛頓對這定律，已有相當的知識，另有其他幾個和他同時的人，也知道一些。但直到一八四二年梅耶（Mayer）才發表一部著作對它作了一般的討論。但是「能常在定律」還不足以概括全部的自然變化；我們必踏進一步看，第二個足以概括宇宙間所有的變化的重要法則。這是在一八五二年由凱爾文（Lord Kelvin）提出的，「總務爲『能消耗原理』」。

在一八四〇年，朱爾（J. P. Joule）證明了，熱與能具有着同樣的本質，且發

種形式的能，都可以被轉換成爲熱。他還顯示出一個最重要的事實，表明在某定量的能與它所能夠產生的熱之間，有着一定的相當的關係，這便是一般所稱的「熱的工當量」。但是奇怪的是：雖然任何一種機械方法所產生的能，都可以全部轉換爲熱，但是反過來，熱卻不能夠被轉換成任意某一種能。而且也不可能把一定量的熱，全部用到機械的工作上，這種可能做成工作的能與原來能量之比，叫做這能量的「可用率」。

現在讓我們來看，這個原理，與「能常在定律」是否適合。

宇宙間的能的「總量」是不變的，此後仍然是永遠不變。但是由於宇宙間存在着無數的運動，便有一種不斷的趨勢使所有各種的能轉化爲熱，而且其中還有一部分能，用在磨擦及各種形式的阻力上去，因此，我們可知宇宙間能的「可用率」，是在逐漸減少着的。但却也無需担心，因爲這減少的歷程很慢，對於我們世界上的生活，再經過許多世代，也不會由於「能的消耗現象」而有絲毫不舒服的<sup>25</sup>感覺的。

能是怎樣變換的呢？直到近幾十年前，一般還是相信它的變換，一定是在連續

不斷的進行着的。到最近，原子構造研究的完成，便改變了這樣的觀念。一個原子的構成，一般認為是一個帶陽電性的原子核，週圍環繞着許多帶陰電性的粒子——稱為電子——，沿着圓或橢圓的軌道運行着，正像行星環繞太陽一樣。但是，這裏却有一種行星所沒有的現象：有些電子常在改變着它們運行的軌道，而常常由這軌道「跳躍」到另一個軌道上去。每一次「跳躍」，必同時放出能來，而重要的是，所放出的能量，常為某一單位量的倍數。這個單位能量便叫做一個「量子」，而且正如原子普通情形下具有着不可破壞性一樣，能量的單位，也不可再分，能在轉換時，常以一定數量的一量子「轉換着。這個概念，大大改變了科學的面目。但是，雖然許多實驗和許多現象，都證實了它的正確，然而整個說來，還有着許多尚待解決的問題，我們只能談到這裏爲止了。

上面所說的這兩個重要的原理，看來已經很完整，然而究竟是否能充分表示自然的變化，誰也不能斷言。科學的發現，一個跟着一個地來得如此之快，也許在最近的前將來，我們將可以對每一種能的轉換的實際情形，獲得一個更清晰的觀念的。

## 第十一章 $\pi$

「 $\pi$ 」是希臘的字母，而遲十六世紀的字。

——李代爾與司各脫

在談到二十世紀的數學，和這一時期的許多極為重要的新觀念以前，我們還要回過頭來，看一看早期的工作。這便是數學家所常用的一個數，叫做「 $\pi$ 」（音派），一般用希臘字母「 $\pi$ 」來代替它。 $\pi$ 的定義是「任一圓的圓周與其直徑之比」，（所以又稱為圓周率）但實際上，高等數學的許多部門，常在和圓毫無關係的問題裏用牠。 $\pi$ 是最有趣的，也是最有名的一函數，它的內容與它的歷史，是不能不知道的。

一位有名的教授，有一次曾把我們的數比喻做一個國家。在好些地方，它們是相像的，或者說，它們有許多共同的特質，好像許多的個人構成一個國家一樣。另

一方面，每一個數，又各自有着一點特殊的地方，好像人的個性使每人能和別人有些不同。有些數特別有趣，正如某些特別幽默的人們一樣，其中有一個，便是「 $\pi$ 」。

讀者在前面已經看到，幾何學是最早的數學研究之一，古代的人們對幾何學有很豐富的知識。在他們所熟悉的簡單圖形中，圓是其中的一個，由於他們對圓的研索，使他們認識了一些關於 $\pi$ 的性質，雖然 $\pi$ 這個符號，還是在許多世紀之後，才被採用。巴比倫人和猶太人，曾估計圓周是直徑的三倍，這就是說， $\pi$ 的值是3。在厄姆斯德下來的「草梗書」裏，他有關於金字塔的研究。其中用到 $\pi$ 這個數值。他定的數值是3.1256，這在實際上已是很正確的數值了。現在，在應用 $\pi$ 的近似值的時候，我們常取 $\pi$ 為22/7，若在較精密的計算時，則常取 $\pi \approx 3.141592 \dots$ 。：英國的「自然」雜誌，曾接到一封來信，裏面附有一首韻文，照這首韻文，每個字的字母的數目，順次排列起來，便成爲 $\pi$ 的第三十位小數的近似數。

先生：我送上一首韻文，

Sir, I sent a rhyme excellent  
3 . 1 4 1 5 9

含着神聖的真理，嚴格的拼音，

In sacred truth and rigid spelling  
2 6 5 3 5 8

數字的妖精，向我顯露，

Numerical sprites elucidate  
9 7 9

說明了聖經的愚笨。

For me, the lesson's dull weight  
3 2 3 7 4 6

如果「自然」收到這封信，

If Nature gain  
2 6 4

請你不要多心，

Not you complain  
3 3 7

雖然莊生博士會因此大發雷霆。

Tho' Dr Johnson fulminate.  
3 2 7 9

把它連起來，便是：

現在，再回頭看這個奇怪的數的歷史，讀者還該記得，古代有名的三大問題中，有一個是「圓化方問題」——求作一正方形，與一已知圓等面積。這個問題實際上相當於以幾何方法求 $\pi$ 的值。雖然希臘人並沒有解決這個老問題，阿基米得却曾用幾何方法決定了 $\pi$ 的範圍。此後，托勒密曾取 $\pi \approx 3.1416$ ，這當然和它的實值極為相近了。印度的數學家卻沒有這樣好的運氣。他們由研究中，估計 $\pi$ 的最可能的數值應該與 $\sqrt{10}$ 很相近。此後，他們作了許多嘗試，想精確地決定這個神祕的數，布里格士和那庇爾發明了對數，使這些精神可佩的計算者的工作，得到大大的幫助。他們對這個工作，具有着很大的勇氣，雖然老實說，像這樣把 $\pi$ 計算到幾打以上的小數的工作，實在沒有多大的用處。直到後來，蘭伯特(Lambert 1728—1777)才證明出來，他們的努力是徒勞的，因 $\pi$ 為實是一不可量的數，——就是說，它的數值，是不可能完全確定的。

$\pi$  這個符號的使用，是在十八世紀尤勒所著的教科書上第一次出現。到一八八

二一年，林德曼(Lindemann)證明了 $\pi$ 不可能成爲代數方程式的根，(即是說， $\pi$ 不是一個「代數數」)。 $\pi$ 的研究，才最後完成， $\pi$ 的歷史，也便終結。對這一數率的奇物經過這樣大略的研究後，我們實將繼續把我們的故事說下去。

## 第十二章 新的概念

科學是有組織的知識。

—— 赫爾伯特·斯賓塞

數學的故事，若不涉及二十世紀新發現的相對論，便是個不完全的故事。這裏沒有篇幅來考察它的重要的哲學基礎，也無法深入研究這一學說的純粹數學的內容。我們只能限於把它的比較顯著的特點，作簡單的介紹。讀者如果想作更透徹的認識，可以去讀許多專述相對論的書籍。如能作詳細的研究，一定可以從它所蘊藏的興趣裏，得到豐富的收穫。

— 68 —

第一步，我們得溫習一個我們早已具有的概念——關於長度的概念。這個名詞和它的意義，是我們全都知道的。當我們想買手襪時，我們心裏，立刻要聯想起一個布店，店裏的夥計，在我們光顧的時候，遞出我們所要的貨色，用銅尺量出來

，交給櫃台。我們便得到了一段叫做十碼長的布，它是用一把政府規定爲一碼長的銅尺量的。此外，還得謝謝我們的政府，有一個度量衡檢察處，專門把各地用的尺，和安放在倫敦的一把標準尺，作定期的比較，以檢查商人有無欺騙的行爲。

現在，我們便要問這樣一個問題：這把銅尺的長度是永遠不變的嗎？我們的眼睛，看不出有什麼改變，甚至顯微鏡也看不出。因此，這個問題，就實際上說，是多餘的。但是，從純理論的觀點來看，一碼的長度是否永遠代表着絕對相同的長度？便是一個很有興味的問題。我們可以把它這個問題再換以另一種方式來設想。假設我們取一根棒，沿南北的方向拿着，將它切成恰爲一碼的長度，於是再轉到東西的方向。現在它還是一樣長嗎？我們會毫不遲疑的回答：是的。但這只不過因爲我們用任何我們知道的方法，都檢察不出它有什麼改變罷了。但我們既只是「不能」檢察到什麼改變，便不能下結論說，它「沒有」改變。假若這根棒沿着棒的方向，在空中極快的運動着，它的長度，是否可能有些改變呢？第一次看到這樣的問題，似乎不可思議。但我們若想到，這根棒可以沿着地球運動的方向安放着，而地球則正在

空中以極大的速度運動着，那麼，對這問題的看法，便要不同了。在一八八四年，由於米却爾生與穆萊（Michelson and Morley）的一個有名的實驗，（兩人實驗各有不同的目的，但卻得到同一結果。）證明了：一個在運動中的物體，要在它運動的方向上，略微有些縮短。這個現象，稱為「斐茲格拉德收縮」（Fitzgerald contraction）。這縮短是極其微小，——即使像地球直徑那麼長的棒，在空中運動時，縮短也不過一吋左右。——因此，在所有實際的應用上，仍是大可忽略不計的。但是設若在宇宙中天體之間那樣遙遠的距離，或若在原子中運行的電子那樣驚人的高速度，在這樣的情形之下，問題便大大不同。把這個現象應用於上述的例子，則這直尺在沿着地球運動方向時的長度，與在別的情形下的長度，確是應當有改變了。

我們已經解決了長度是否不變的疑團，現在讓我們再看，另一個基本的度量——時間。這個度量的意義，在好些世紀以前，便非常明白了。我們都會從兩個物之間，量得一個時間的差。例如，我們把一壺冷水放在煤氣爐上，我們可以從第一件事實——點起煤爐，到第二件事實——水開始沸騰，得到一個確定的時間。如

我們們要仔細記錄我們的觀察，我們可以用一個時鐘來量這個時間。讓我們假想：地球靜止着固定在空中，在地球上有一個觀察者，與一壺冷水，一個煤氣爐，和一個時鐘。他現在可以在地球上量着燒滾這壺水所需的時間。現在，假若有第二個同樣大小裝着一樣多的冷水的壺，和一個同樣的煤氣爐，一架同樣的鐘，但它們却以一定的速度離開地球運動出去。那麼，一定會發生下面的情形，這位靜止着的觀察者，會發現在第二種情形下燒水的時間，要比第一種情形的短些，它也有和我們剛才討論長度一樣的「收縮」。

讀者立刻會覺到，這兩個新的觀念，影響到數學的最根本的原則了，因此，無怪乎當這些新觀念最初被人承認時，大家都以為「牛頓學派」所創成的力學的全部理論，必須要大大修正了。我們必須指出：在上述的「麥茲格拉德收縮」現象所造成的時間空間改變的觀點上，舊的力學自然必需有些修正，但却不會有如一般人所想像那樣大大地修正的。我們應該認清，這種收縮，是極其微小，只有在極遠距離與極高速度時，才有看重要的意義。所謂高速度，是指近於光那極快的速度而言——

——每秒鐘十八萬六千英里。記住這個，讀者便會了解，我們在觀念上的新的改變，對於日常生活的實際事件，並沒有多大影響；因之，牛頓所創的方法，及其在科學上的一切貢獻，仍然是不失其原有的重要性的。

## 第十三章 相對論

智者樂於探求自然；

愚者則樂於其心茫然。

滯伯

我們現在要看：上面方才討論過的一些新觀念，如何配合起來，而形成一般所稱的相對論。要進行這樣的工作，我們必得要習於用一個名詞——「系統」。這個名詞，在它的數學意義上，有着比較一般使用時更為固定的意義。它表示：「一個進行任何實驗或度量工作的人，以及一切他實驗中所必需的重要的東西。」在上一章，曾提出一個靜止着的觀察者，在燒一壺水，注意燒滾它需要多少時間；其中：這個觀察者，和他的煤氣爐，他的水壺，他的時鐘，以及其他一切所用來度量的工具，全部組成一個「系統」。為便利計，我們可以叫它做「甲系統」。

現在，假定有一個觀察者，譬如我們叫他張三先生，帶着一根量尺，和一個時鐘，在進行對某一現象的研究，形成了某一個研究「系統」，譬如叫作「S系統」。而且還得假定：他是位置在空間裏某個「固定」的一點，同時可能對他的觀察進行記錄。又假使有第二個觀察者，李四先生，帶着同樣的設備，研究同一個現象，而形成另一個系統，「S'系統」。不過，假定李四先生的系統，是在空間運動着，而不自知。譬如說，如果李四先生和他的「S'系統」是在我們地球上，便是這樣的情形了。這樣兩個系統，所獲得的實驗記錄，可以完全相同，而其中任一個觀察者，都不可能從所得的記錄，來決定他自己是在運動着，還是在靜止着。

現在，讓我們再進一步，假定張三先生能夠從他的靜止的位置，觀察到運動着的S'系統，同樣，運動着的李四先生，能夠觀察到靜止着的S系統。那麼，又將如何呢？結果將是：兩個人所得的印象，也還是彼此完全相同。兩個人都感到：在這兩個系統S與S'之間，有一個「相對的速度」。但是誰也不能從觀察中決定出來，到底哪一個系統是在運動着。除非他預先知道哪一個系統是靜止不動的。但是，我

們在地球上，從來不知道，宇宙中哪兒有一點靜止的地方，可以給我們作爲度量的標準。所以我們對我們的運動所能知道的事，只有和地球以外的物體作比較而得的「相對運動」。這一番意思，如果換一句話說，便是：「絕對的運動，是無從決定的。」

如上面所說，這樣由哲學的推想而得到的結論，便是愛因斯坦在一九〇五年發表的一篇著名的論文的基礎。在這一年，他由運動着的電系統，證明了：米却生——穆萊實驗所得的「斐茲格拉德收縮」，是確實不錯。他的研究結果出版了，但當時並沒有被人注意。到近年來，這一問題，已經被整個地詳細研究，而得到如我們所有的這樣的概念，這新的概念，歷來都被以一種新奇的形式解釋着。這個學說，已被應用到許多的物理問題以及引力的重要問題上去。在這樣一本小書裏，對這些應用的詳細討論，是不可能的，所以我們只能對比較重要的研究結果，大略地介紹一下，作爲這一章的結束。

科學家們早已具有一個共同的目的，便是希望對作用於宇宙間的幾種「力」找

到一個滿意的解釋。他們的研究，集中注意在「電力」和「引力」。十九世紀的物理學家，對電力的解釋，是利用一種假設的充塞於整個空間的物質，叫作「以太」，這種物質，在一種伸張的狀態下，便發生了我們所稱的電力和磁力。當然，誰也沒有找出過這種物質來，——恐怕根本誰也沒有嘗試過——但是，當法拉第和馬克思威爾等輩，假定這「以太」賦有着某些性質以後，他對電的現象，得到了很完全的解釋，雖然因此面產生了一些新的矛盾，但除非能有更好的說法，每一個人都是對它滿意的。這種假設的「以太」造成的最大缺點一點，便是：適合於解釋電力磁力的「以太」便不能解釋引力，反之，適合於解釋引力的「以太」，便不能解釋電力磁力。

相對論者取消了「以太」，而另外研求一個適合任何方面的解答，便克服了這種困難。在愛因斯坦學說之外，明可夫斯基（Minkowski）在一九〇八年，創造了一種「四度空間的幾何學」——長，闊，高，三度空間，與時間合成四度——在這裏面，任何情形下，不能把空間與時間分開。這樣一個空間，是很難想像的。對於

有修養的數學家，它可以在他的符號和方程式中存在，但若想嘗試描寫出一個所謂「明可夫斯基世界」的明確的圖畫，那是必定失敗的。愛因斯坦利用這個概念來解釋了他初期的研究結果，才得以在一九一五年出版了他的相對論概論，從這概論裏，物理學的電力磁力引力等等現象，都被認為是一種「幾何的必然性」。讀者要想知道這方面的詳情，可以參讀屬於電學的範圍方面的書，本書裏不再詳細討論了。

相對論的最早的成功之一，是解釋了天文學上的一個疑案——關於水星軌道的移動的問題。在許多年前，便被勒味利哀指出了，這個星的軌道，是在逐漸地轉移着，這個現象唯一可能的解釋，是在水星軌道附近，存在着別的未知新星，造成了這種擾亂。愛因斯坦解除了這個問題的困難，而尤為重要的，是把計算所得關於軌道移動的情形，設法獲得了實際的觀察。

從相對論演繹出來的第二個結果，是光線在靠近一個極大的物體旁邊經過時，要向這物體略為彎曲。例如，一個很遠的星的光線，在經過太陽附近，射到地球上來的時候，便發生了彎曲，因而由地球上看到這個星的地位，要比實際的地位離得遠

些。這個結論，在一九一九年日蝕時的天文觀察當中，（因為只有日蝕時，纔能看得見太陽附近的星光——譯者註）得到了完全的證實，隨後又在一九二二年日蝕得到再度的證實，於是這個帶有革命性的新觀念，便被公認為成立了。

誰也不認為，現在所知的相對論的原理，已經達到無懈可擊的地步。雖然也有些人——甚至有第一流的科學家在內——相信，宇宙之謎是已經揭開了，但我們還是不不要貿然作這樣的看法：認為追究自然之謎的工作，便已將近結束。科學的歷史中，滿裝着各種的學說，今日被人熱烈接受的，即是以後爲人所揚棄的。海爾雪爾（Herschel）的一句名言，太容易爲人遺忘了：「輕率的斷語，科學的大忌。」牢記着這個警告，我們將引用名科學家托馬斯·卜里斯吞（Thomas Preston）的著作裏一段，作爲本章的結束：

『常常有人這樣斷言：玄學的空想，已經是一種過去的東西，物理科學完全代替了它。但是只要人的心還是活的時候，空想還是依然繼續着，如同希臘退爾斯（Thales）時代一樣的駭人耳目。實際上，恐怕在科學氛圍中所蘊藏的空想，從沒有

一個時候，像現在這樣的學富。幾乎每一天都有新的發明，和新的學說，在可疑的或假說的基礎上，得到形成及改進。同時，相反的，各種胡說亂造的種子，也由此而滋生。「不息運動說」者（相信能夠製成一種一經發動即永遠不息的機器——譯者註。）、「天國地方說」者，至今都還沒有完全消滅。「精神論」的哲學家，與「走方郎中」的科學家，仍然以驚人的速度增加着。「專賣藥」的商人發了財，而真正科學研究的精神，却在爲求生活的艱苦和挫折，受盡了磨折。」

## 第十四章 科學的統一

所有的科學。只有一個目標：尋求一個自然的原理。

——伊歐生

— 75 —

前面所討論的相對論的學說，在二十世紀的科學裏，佔着中心的地位。雖然它在最初時，是一個數學的概念，可是它的原理，却已被應用到科學研究的每一個部門。這一學說對許多部門的影響，初看來，似乎是越出了它自己的範圍，實則正是向我們提示了一件常被忽視的重要事實。我們已經慣於看到許多種的科學名稱，——化學、物理、生物學、人類學、等等——標明在封裝的書本上，在書架上分門別類的排列着。却没有認識到：在它們之間，已經找不出一條明顯的分界線了。在一本書所包含的某種研究，往往又在另一本書裏出現，作者們却並沒有因此感到什麼不便捷疑惑。舉一個例，便足以說明這一點。關於氫體的性質的討論，可以在任何一

本化學書中看到，其中述及測定氣體化合物比例的定律以及它們所由來的理由。換一本物理學的書來看，同樣的問題，也有在那兒；不過去掉了一些化學的名詞，而以不同形式出現，但還是同一個基本問題。同樣情形，在我們人類學的書裏，常要談到許多由古代生命遺留下來的白麩層，而這實在是屬於生物學的園地。這種科學之間的糾葛，實有很重要的意義。每一種科學，都有賴於別種科學而得到擴充。而在初看起來，表面上似乎完全獨立，若再細加考察，則它與其他某種科學的關係便顯然可見。

讓我們對這一事實，作更密切的觀察。在這些科學的初期，它們之間，很少或簡直沒有共同之點，直到較近的幾十年，才開始發生相互的關係。數學也沒有例外。如讀者在前面所看到的，當數學得到進展的時候，它便很快地超出了原來的範圍，而伸張到別的領域上去。但它是一個堅決的裁判者，有着小心的精細與嚴格的公正。雖然有些人嘲笑它為求嚴格而受的折磨，也有些人在它的謹慎的方法之下望而望畏，它始終貢獻着最大的功績——便是：由於它的敘述的精確，由於它的便利的

符號，無數科學實驗與記錄，得以形成明瞭的結論。這便是數學的目的，這也就是數學能不斷得到進步的原因。

我們回過頭來，細看過去的歷程，頗爲有趣。在數學史上每個大的進步之前，必先採用了一種新的便利的符號，這看來實在是一件奇事。阿剌伯數字的採用，使算術的進步，成爲可能，而古代沒有一種簡單的表明數目的方法，確是使古人的計算能力，受了極大的限制。在進步之路上的第二個記程碑，便是微積分學和它的方法的出世。這使得十九世紀的大進步，得以完成，而它的確又是一種表示量的新方法，在它出世以前，這種量的研究是極爲困難的。同樣的，在二十世紀，以相對論爲中心的科學工作，也因爲採用了一種新的符號，叫做「向量分析」，而在所有的量法上大得便利。將來究竟怎樣，當然只是一個空想的問題，可是看來，過去所有的這種趨勢，必然還要遭遇到。所有尚待研究的問題，可能還要等一種更便利的符號產生出來，足以表示出今日認爲複雜而困難的量，這個時候，問題才會得到解決。過去的每一個進步，都擴大了數學的園地，擴大了它所影響的範圍。在我們所

而對看的將來，可能將今日科學之間人為的界限，作更大的破壞，而帶來了對「自然的神祕」的增進不已的新知。

這樣的科學的統一，曾被國籍教授 (H. Lamb) 在英國科學會的主席演說中，很快地指出來：

「在科學的歷史中，有着極多的例子，顯示着，某一個科學的部門，常常對另一個部門出乎意外的幫助。我只特別提出兩個我所遇見最有趣的例子。一是環性原理，對於氣體相對重量的舊測定法，發生了極重要的作用，它使這個測定法得到重大關鍵的改正，這個重大意義，我想一般還不太容易明瞭。第二是水力學的數學原理，應用於飛機的構造。這種數學，原先雖也有些值得注意的成就，但總被認為是純粹數學的一部分，過於抽象，而對於一些日常事物，如水流經過水管之類的問題，却毫無幫助。但是，最近由勃朗德的研究，由它獲得了對飛機翼面受力的最切實估計，而且真正利用它不解釋關於飛機螺旋推進的一些疑難的問題呢！」

## 第十五章 結論

改進只不過是進步之路上的某一塊里程碑而已。

——這一段歷程的盡頭永遠在我們的範圍。

——阿 魯

— 79 —

我們的故事應該在這裏結束了；此後當「明可夫斯基世界」的祕密，被進一步揭穿時，無疑的，更大的進步，將隨之而來，讀者們且等着瞧吧。但是每一位數學家，有時會感到彷徨：究竟他的研究的意義，是否只是時間的浪費，如果把這些心血，應用到減輕人類痛苦的直接工作上，豈不是更有價值。到這樣的問題，哈代教授(Hardy)在牛津大學的演講演說中，曾說過這樣一番話：

「我想，每一位數學家，都一樣，有時在一種無助與徒勞的感覺中，而為之氣短。我並不是指受到任何確意的懷疑。我記得，數學家的一生，是一個完全

有理性的人所決不願從事的生活。但是，有時我又從另外一二反省中，得到一些覺服的感覺。第一，數學的研究，雖不是有利的事，但却是一個完全甯靜與純真的園地，我們已經由其中體驗到這一點，可以說，無論如何，我們沒有騷擾之感。第二，宇宙是廣闊無垠的，即算我們是浪費我們的時間罷，區區幾個大學人物的生命的浪費，決不會引起什麼人世間的災難。第三，我們所致力的工作，或許是很微小，但它却多少總有些不朽的意義；而只要是能夠產生一些有一點兒不朽意義的東西，不論是一首小詩，或是一個幾何定理，便是已經做了一些超乎大多數人的能力之上的事情。最後，我們這一門科學的歷史已經說明了：像這樣一種意義的研究，從來還沒有過第二種。過去的數學家至今並沒有被人遺忘或輕視；他們所享受的報酬，或許是看不到的，但決不是平凡的。無論如何，我們可以這樣說，如果我們所努力的目的是愚蠢的話，我們只是在我們的路上追隨着一長列先賢們所做的愚蠢行為而已。而且我們還可以說，在由古到今多少的研究切磋的漫長時期裏，其中必有一些稱得上不朽的研究結晶，這種研究，不是始於畢大哥拉斯，也不是止於愛因斯坦，

而是全部最老的與最年青的人們所合力構成的。」

此外，科學家李燕（M. Love）在法國科學院的主席演說中，說：

「我們現在之所以能夠計算最複雜的機械問題，飲水思源，我們不能忘記：這是受賜於曠古以前查爾丁的牧人們對星辰的觀察；受賜於希帕古斯匯合了他們的觀察和他自己的研究，一同傳給了我們；受賜於蒂谷·勃拉赫（Tycho Brahe 埃及古代天文學者）的進一步成就；受賜於兩千年前的大幾何學家阿坡羅紐斯，寫了一本圓錐截線的書，埋沒了許多世紀被視為無用；受賜於刻卜勒的天才，利用了蒂谷·勃拉赫的有價值的著作與觀察，得到了進步的定律，最初連用者自己都認為毫無用處；最後，受賜於牛頓發現了萬有引力的定律。」

這裏，我們還得加上愛因斯坦和他的追隨者們的功績，他們正在把他們的貢獻傳給將來的後代。而當這一世紀的歷史，被公正的史家著之春秋的時候，這一時期的天數學家，對於後來有所成就的人們的影響，一定也是不小的。

## 譯後記

中國的科學，正處在這樣一個時代：理論上是迫切地需要科學，然而實際上是很少人記得科學。

本書中一段引用的話說得好：「……『精神論』的科學家，與『走方郎中』的科學家仍然增加着，『專賣藥』商人發了財，而真正科學研究的科學家，却在為求生計的困苦掙扎下，受盡了磨折。」這難道不就是我們中國的高照麼？在一個最近淪陷的大城市裏，我曾親眼看見：一些商人捐資興造一座宏麗的西式佛殿。而它對面一間破屋裏住着一個二十年前為科學犧牲了健康的英雄，却正在奄奄一息，拖着殘廢的身體<sup>（？）</sup>在那兒，沒有一個人照顧他。

科學家應當在抗戰的時候大顯身手的，英美蘇聯成千成萬的科學家都是這樣在民主戰爭的號召下，振作精神的奮勇戰鬥着，他們不但支持了抗戰，而且從積極

工作中使科學得到更大的發展，然而，中國的科學家卻沒有這樣的福氣，他們中的大多數，除放下書本提起菜籃而外，再沒有什麼更了不起的作爲了。

中國決不能永遠是這樣，中國人必須奮起，使中國去舊更新，力爭上流，中國的科學更不能永遠是這樣，中國科學工作者必需以爭取民主勝利，普及科學知識爲急務。我們必需充分使用我們的武器，我們更必需願與廣大民衆以去舊更新的武器。

談到普及科學知識，並不是什麼新鮮的名詞，十幾年來，早就有許多介紹科學知識的文章與書籍了，然而，「花樣」却有一翻新」的必要。

以前的通俗科學的著作，老是在科學小品、科學趣味、科學雜誌裏面兜圈子，這并非不好，相反的，它們已有了相當的勞績，然而，僅僅如此，是絕對不行的。這些形式很靈活的作品，可以作爲助長科學的經武器，而決不能達到主要目的。所以我們一定還得要把科學的內容，作整個的有系統的介紹，尤其是對科學的發展，科學家的艱苦鬥爭的經過，更得注意。這樣才能給讀者明白：科學並不是公式。

它也是和人類社會經濟生活息息相關的。科學的產生，由於人類的需要；我們需要滿足需要，必需懂得科學，應用科學。

本書相當適合於這樣的要求，它做到了兩點：第一，從描寫當時社會情形，說明當時的「需要」，而敘述數學的發展。這說明了數學的社會。第二，它不是硬生生地只談數學，而是順着歷史發展來介紹科學的各部門的情形，從而得到數學發展的全貌，這說明理工科學各部門的有機關聯，說明科學的統一性。此外，有許多數學家的佚聞野史，給全書增加不少的趣味，這便並無注意到通俗所必需的材料，使這書不成爲講義，而是一般人的讀物，這便是我所以翻譯它的原因。

當然也還有些應該值得討論的地方，第一是對中國的數學史的認識，作者認爲中國藝術發達，而毫無理論的研究，引爲怪事云云。其實中國古代科學并不是一毫無內容的，只就數學而言，直角三角形與圓的研究及 $\pi$ 的計算，都有超乎西洋同時的成績，只是中國社會發展的遲緩限制了它甚至埋沒了它罷了。第二是數學家的生平問題，作者一方面先後指出數學在各種科學中佔着中心的地位，及其由人

類「需要」而產生、發展的情形，但在結論中介紹哈代教授的演說，其中鼓勵數學家的話有一點大意說：「我們研究數學，是因為它的甯靜，我們從不受到任何擾攘」。難道作為科學中心的數學，竟是這樣一種與佛經同樣作用的出世超塵的東西麼？我想作者自己也一定否定這樣的人生觀的，因為作者所介紹的數學家如畢大哥拉斯，阿基米得等等都爲了學問犧牲了生命，這一世紀的愛因斯坦從希特勒掌下逃亡到美國；這些更實不就是最好的回答麼？

原著中還附有一詳細的參考書目，列舉出數學各部門的重要著作，使有志研究數學的有所遵循，這本是非常有意義的，但可惜其中大部分的書在今日中國都是無從找到的，門了出來，也只是畫餅充饑而已，所以便刪去了。同時內容及文字方面，也一定還有很多不盡的地方，希望讀者隨時指正。

28/6/30

读店呈缘

500/62

统计：陈新

★中國學生讀物叢刊★

# 數學的故事

原著者 英D·拉累特

翻譯者 黃壽慈

編輯者 德國書店編輯部

發行者 唐秉彝

發行所 重慶林森路  
建國書店  
特二十四號

版權所有  
不准翻印

每册 元

中華民國三十四年六月初版

