新課程標準世界中學教本

高級中學學生用

傅氏

高中代數學

編著者 傅溥

世界書局印行

編輯大意

1. 本書係遵照教育部最近頒布之高中課程標準編纂而成,專供高級中學普通科及與此同程度學校之用.

1. 本書程度係與初中相銜接.假定學者已具有相當之數學知識,故有少數名詞解釋在後,而引用反在前者,職是之故.

1. 數之概念及各種算法,學者雖已於初中時習得之;但因其陳義過高,初中教科書中僅述其當然,而不及其所以然.本書爲使學者徹底的了解起見,特於卷首加以系統的敍述.

1. 學語譯名,我國極不統一.本書所採用者,均係通行已久之名詞,俟教育部統一學語頒布後,再行照改.茲爲便於學者參閱他書及翻讀英文原書之助起見,特於卷末附一中英學語對照表,俾便參考.

1. 方程式爲代數學中之最重要部分,故本書大體以此爲中心.惟初等方程式之解法,學者大率已於初中時習得之.本書對此僅側重於其解法之原理,而於討論方面,更於可能範圍內,詳爲敍述,藉資磨練學者之思考.

1. 圖解爲代數學與幾何學融合而成之產物.本書在

不與解析幾何學重複之範圍內,特闢一章敍述之.而對於極大,極小,方程式之實根,不定方程式,不等式等之圖的解法,尤詳爲敍述.俾學者得知代數學與幾何學溝通之情形.

1. 本書問題,雖僅七百餘題,然選擇精當,難易適度,足資學者練習之用.

1. 本書付印倉促,謬誤之處,在所難免,海內明達,如承見教,則不勝感謝之至.

中華民國二十二年五月七日編者識於京寓.

目　次

第一章　緒論

1. 代數學 ……1
2. 代數學之符號……2
3. 式……4
4. 運算之順序及數值……4

第二章　數及其算法

5. 自然數……7
6. 加法……8
7. 加法之規則……10
8. 減法……12
9. 減法之規則……13
10. 零……16
11. 乘法……17
12. 乘法之規則……18
13. 除法……21
14. 除法之規則……22

15. 負數 ……………………………………………………25
16. 負數之算法 ……………………………………………27
17. 分數 ……………………………………………………30
18. 分數之算法 ……………………………………………32
19. 有理數系…………………………………………………35
20. 冪與根 …………………………………………………37
21. 無理數 …………………………………………………42
22. 無理數之近似值及算法 ………………………………45
23. $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ 之條件 ……………………………46
24. 實數系 …………………………………………………47
25. 虛數 ……………………………………………………48

第三章　式及其算法

26. 代數式 …………………………………………………51
27. 加法及減法 ……………………………………………53
28. 乘法 ……………………………………………………55
29. 分離係數法 ……………………………………………57
30. 除法 ……………………………………………………59
31. 開平方法…………………………………………………62
32. 數之開平法 ……………………………………………65
33. 開立方法…………………………………………………67
34. 數之開立法 ……………………………………………70
35. 有理分數式之算法………………………………………72
36. 無理式之算法 …………………………………………76

第四章　倍式及約式

37. 因式分解……83
38. 最高公因式……89
39. 最低公倍式……92
40. 關於素因式之定理……94

第五章　有理整式

41. 有理整式之值……99
42. 必要條件與充分條件……100
43. 剩餘定理……101
44. 綜合除法……106

第六章　對稱式及交代式

45. 對稱式……111
46. 交代式……113
47. 循環順序……116

第七章　恆等式

48. 恆等式……119
49. 條件恆等式……122
50. 未定係數法……124
51. 著名恆等式……126
52. 分項分數式解法原理……128

53. 分項分數式之解法 ……132

第八章　方程式

54. 方程式 ……139
55. 方程式解法原理 ……140
56. 一元一次方程式 ……143
57. 一元一次方程式之根之討論 ……145
58. 一元二次方程式 ……148
59. 一元二次方程式之根之討論 ……153
60. 一元二次方程式僅有二根 ……157
61. 一元二次方程式之根與係數之關係 ……159
62. 二次方程式之根之對稱式 ……162
63. 兩個二次方程式具有公共根之條件 ……167
64. 分數方程式 ……173
65. 無理方程式 ……177
66. 高次方程式 ……182

第九章　聯立方程式

67. 聯立方程式 ……187
68. 聯立方程式解法原理 ……189
69. 聯立方程式之解法 ……192
70. 聯立二元一次方程式 ……197
71. 聯立二元一次方程式之根之討論 ……201
72. 二元一次同次方程式 ……205

73. 聯立三元一次方程式……206
74. 聯立 n 元一次方程式……211
75. 未知數之數與方程式之數之關係……214
76. 由一次及二次方程式組成之聯立二元方程式……218
77. 聯立二元二次方程式……222
78. 聯立二元二次方程式之特例……224
79. 消去法……230

第十章 不定方程式

80. 不定方程式……237
81. 二元一次不定方程式……238
82. 二元一次不定方程式之一般解法……243
83. 多元一次不定方程式……247

第十一章 不等式

84. 不等式之基礎定理……251
85. 絕對不等式與條件不等式……254
86. 不等式之例解……254
87. 絕對不等式……257
88. 分數定理……260
89. 相加平均與相乘平均……262

第十二章 應用問題

90. 應用問題之解法 ……………………………………269
91. 方程式應用問題例解 ……………………………270
92. 聯立方程式應用問題例解 ………………………274
93. 不定方程式應用問題例解 ………………………279
94. 不等式應用問題例解 ……………………………282

第十三章　函數

95. 函數與極限 ………………………………………289
96. 無限大 ……………………………………………291
97. 不定形 ……………………………………………293
98. 二次三項式之值之研究……………………………295
99. 二次方程式之根與與數之比較……………………299
100. 極大極小 …………………………………………302

第十四章　比例及變數法

101. 比……………………………………………………307
102. 比之性質 …………………………………………308
103. 比例…………………………………………………309
104. 變數法 ……………………………………………312

第十五章　圖解

105. 坐標…………………………………………………317
106. 函數之圖表法………………………………………318
107. 極大極小之圖的解法 ……………………………322

108. 方程式實根之圖的解法……………………………323
109. 不定方程式之圖的解法……………………………325
110. 不等式之圖的解法……………………………327

第十六章　級數

111. 等差級數……………………………333
112. 等比級數……………………………336
113. 調和級數……………………………341
114. 自然數之平方,立方和……………………………344
115. 積彈……………………………347

第十七章　對數及其應用

116. 對數之性質……………………………353
117. 對數表……………………………355
118. 對數表之用法……………………………357
119. 對數之計算……………………………359
120. 複利及年金……………………………362

第十八章　數學的歸納法

121. 數學的歸納法……………………………369

第十九章　順列及組合

122. 順列及組合……………………………373
123. 求由 n 個物件中取出 r 個之順列數……………………………374

124. 求由 n 個物件中取出 r 個之組合數 ……………376
125. 求由全體不盡相異之 n 個物件中一次取出 r 個所得組合及順列數 ……………378
126. 允許同一物件得重複取出時之順列及組合數 ……………380
127. 類似問題 ……………381

第二十章　二項定理及多項定理

128. 二項定理 ……………387
129. $(1+x)^n$ 展開式中之最大係數及最大項 ……………391
130. 二項係數之性質 ……………392
131. 多項定理 ……………396

第二十一章　或然率

132. 或然率之第一定義 ……………401
133. 或然率之第二定義 ……………404
134. 反排事象之或然率 ……………406
135. 獨立事象及從屬事象之或然率 ……………407
136. 例解 ……………409
137. 關於獨立試行之定理 ……………413
138. 期望金額 ……………415
139. 大數法則 ……………417
140. 原因之或然率 ……………420
141. 證言之或然率 ……………423

第二十二章　無限級數

142. 無限級數之性質 ……429
143. 正項級數 ……432
144. 交錯級數 ……439
145. 關於無限級數移項之定理 ……441
146. 複項級數 ……445
147. 冪級數 ……449
148. 二項級數 ……452
149. 指數級數 ……456
150. 對數級數 ……461
151. 對數表之計算法 ……463

第二十三章　一般方程式之性質

152. 一般方程式 ……469
153. 根與係數之關係 ……471
154. 根之對稱式 ……474
155. 導函數 ……476
156. 重根 ……479
157. 判別式 ……480

第二十四章　方程式之變換

158. 特殊變換 ……487
159. 一般變換 ……492

160. 方程式之項之消除 ……………………………………495

第二十五章　複素數

161. 複素數 ……………………………………………………499
162. 複素數之幾何學的表示法 ………………………………501
163. 複素數之積,商之絕對值及偏角 …………………………503
164. 二複素數之和,差,積,商之幾何學的表示法 ……504
165. 多麻布路之定理 ……………………………………………506
166. 二項方程式之解法 …………………………………………508

第二十六章　三次及四次方程式之解法

167. 三次方程式之解法 …………………………………………513
168. 四次方程式之解法 …………………………………………517

第二十七章　具實係數之方程式

169. 具實係數方程式之虛根 ……………………………………521
170. 介於二數間之根之數 ………………………………………523
171. 德卡路特之符號規則 ………………………………………526

第二十八章　數字方程式

172. 數字方程式實根近似值之求法 ……………………………531
173. 省略算 …………………………………………………………534
174. 有數正根之方程式 …………………………………………536

第二十九章　行列式

175. 轉倒……539
176. 行列式之定義……541
177. 行列式之性質……543
178. 小行列式……549
179. 餘因式……552
180. 聯立一次方程式之解法……553
181. 聯立一次方程式之根之討論……555
182. 消去法……560
183. 行列式之乘法……562

附　　錄

1. 對數表……1—2
2. 答數……1—29
3. 中英學語對照表……1—6

第一章 緒論

1. 代數學 代數學爲算術之擴張,亦係一種研究數與數之關係之科學;其目的則在使計算之條理簡明,且能獲得一般通用之結果.故代數學除使用算術中之數字外,更須用文字以代表數字.因數字僅能代表一定之數,而文字則能代表任意之數故也.例如表示「甲數加乙數之和,等於乙數加甲數之和.」時,在算術必須列舉

$$5+8=8+5$$

$$7+10=10+7$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$

等例以說明之;在代數學如用文字 a, b 各代甲乙二數時,僅須書作

$$a+b=b+a\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以表之卽可.而使 a 代 5, b 代 8,或 a 代 7, b 代 10,及 a 代 $\frac{1}{3}$, b 代 $\frac{1}{5}$ 時,卽得前列各算式之一特別式.

又例如解問題「知大小二數之和與差,求其二數.」時,在

算術必須先設大小二數之和爲54,其差爲 8,而求得大數等於54與 8 之和之半卽31,小數等於54與 8 之差之半卽23以說明之.但一般知大小二數之和與差時,其大數皆等於所與二數之和之半,小數等於其差之半.故在代數學如用 a 代大小二數之和,b 代其差,又用 x 代大數,y 代小數時,僅須書作

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{a+b}{2} \\ y&=\frac{a-b}{2} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

卽可.而使 a 代54,b 代8 時,(2)式卽成爲

$$x=\frac{54+8}{2}=31$$

$$y=\frac{54-8}{2}=23$$

與上所學之一特例相符.

上列之(1),(2)二式,卽爲一般通用之結果.觀此二例,可知代數學中使用文字之便利.

如上所學二例所示,代數學中代表數字時,通常皆用羅馬文字 $a, b, c, \cdots\cdots, x, y, z$ 等以代之,其文字能代表任意之數,毫無限制.但於連續之計算中,則同一文字必須代表同一之數始可.例如(1)式等號兩方之文字 a, b,須各表同一之數;及(2)之二式中文字 a, b,亦須各表同一之數是.

2. 代數學之符號 代數學中所使用之加 (+),減 (−),乘 (×),除 (÷) 等符號,及等號 (=),括弧,括線 {( ), { }, [ ], ——} 等之用法,或稱呼方法,完全與算術

相同.但文字與文字間,或數字與文字間,及括弧前後之乘號,則常略去之.例如 $a\times b$, $7\times a\times b\times c$, $m\times(a+b-c)$, $(a+b+c)\times(a+b-c)$等通常皆書作ab,$7abc$,$m(a+b-c)$,$(a+b+c)(a+b-c)$ 等是.又如不致與小數點相混淆時,亦常有用點(・)以代乘號者.例如$3\times4\times5$亦可書作$3\cdot4\cdot5$是.

代數學中表示除法之商時,多不使用除號÷而以分數之形式表示之.例如 $a\div b$,$(a+b)\div(c-d)$等可各書作 $\frac{a}{b}$, $\frac{a+b}{c-d}$ 或a/b,$a+b/c-d$,又$a\div3$可書作$\frac{a}{3}$,或$\frac{1}{3}a$ 等是.

∴為表示承上接下之符號,即所以二字之略稱也.

∵為表示原因之符號,即因為二字之略稱也.

……為表示依此類推之符號,即以下準此之意也,

又表示二數關係之符號除等號＝外,更有<u>不等號</u>$>$,$<$,$\neq$及$\not>$,$\not<$等.例如

$a>b$表示a較b為大,

$a<b$表示a較b為小,

$a\neq b$表示a不等於b,

$a\not>b$表示a不大於b,

$a\not<b$表示a不小於b,

等是.又此諸符號,亦可倂用之.例如

$a\gtrless b$表示a較b為大,或較b為小,但不等於b;

$a\geqq b$表示a較b為大,或等於b,但不較b為小;

$a\leqq b$表示a較b為小,或等於b,但不較b為大;

等.即$a\gtrless b$,$a\geqq b$,$a\leqq b$各與$a\neq b$,$a\not<b$,$a\not>b$同一意義也,

符號 $+,-,\times,\div$ 等,謂之計算符號.而等號 $=$ 及不等號 $>$, $<$ 等,則謂之關係符號.又數字,文字,計算符號,關係符號,及括號等,總稱之爲代數的符號.

代數學中所使用之符號甚多,不盡止於如上所述者.以後隨其需要,當逐漸說明之.

3. **式** 凡數字與文字,或文字與文字,由計算符號,關係符號,及括號等連結而成者,概謂之式.例如

$$a+2b-3c,\ a(b+c),\ ax^2+bx+c,$$

$$\frac{ax+b}{cx-d},\ a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,\ a^2+b^2>2ab,$$

等皆爲式是.就中如上所舉最初四例,其數字與文字,或文字與文字,僅由計算符號,括號等相連結,而不含關係符號者謂之代數式.或簡稱曰式.又含有關係符號之式中,其以等號連結代數式或數字者,謂之等式;以不等號連結代數式或數字者,謂之不等式.如上所舉之第五例爲等式,而第六例則爲不等式也.

於等式或不等式,其關係符號 $=$ 或 $>$, $<$ 等左方及右方之代數式或數字,各謂之其等式或不等式之左邊及右邊.亦謂之其前邊或後邊.而二者合併稱之,則謂之等式或不等式之兩邊.

又如第 1 節所列之(1),(2)等式,凡表示關於計算之規則或同種類問題解答之規則之式,特稱之爲公式.換言之,即公式爲一般通用甚廣之式也.

4. **運算之順序及數值** 代數學中運算之順序,與算

術相同.即

(1)僅由加減或乘除二種符號連結而成之計算,概由左方開始,以次及於其右方.

(2)由加減乘除各號混合連結而成之計算,其乘除之計算,必於加減計算之先行之.例如

$$4\times3+15\div5-18\div3=12+3-6=9$$

$$a\times b+c-d\div e-f=(a\times b)+c-(d\div e)-f$$

等是.

(3)略去乘號後所表示之積,及用分數形式所表示之商,概須視作一團,與有括弧加於其上相同.例如

$$a\div bc=a\div(b\times c)$$

$$ab\div\frac{d}{c}=(a\times b)\div(c\div d)$$

等是.

凡式中之文字如$a, b, c,\cdots\cdots$等能各代表任意一數,既如第1節所述.但如於某計算中各代表某一定數時,則此諸定數,各謂之其文字$a, b, c,\cdots\cdots$等之數值.或簡稱曰值.例如設$a, b, c,$各代表1, 5, 13時,則此時1, 5, 13各謂之其文字$a, b, c,$之數值是.

又於式中文字各與以某一定數值而依其計算符號所示,實行計算後所得結果之數,謂之其式之數值.或簡稱曰其式之值.例如設a, b, c之數值各爲1, 2, 3時,則

$7a+8bc-\frac{6ac}{3b}$ 式之數值爲

$$7a+8bc-\frac{6ac}{3b}=(7\times1)+(8\times2\times3)-\frac{6\times1\times3}{3\times2}=7+48-3=52$$

是.但當以數值代入於文字時,其以前所略去之乘號,不可不再行重書之.

第二章　數及其算法

5. 自然數　一物與多物之觀念,爲吾人所共有者.於此有甚多同種類之物體時,設於其中任取一物,則所取之物數謂之一;次於殘餘之物體中再任取一物,則此所取之一物與前所取一物合併後之數,謂之加一於一,或稱其物之數爲二,卽二爲加一於一之略稱;再於殘餘之物體中更任取一物,此所取之一物與前所取二物合併後之數,謂之加一於二,或稱其物之數爲三,卽三爲加一於二之略稱;詳言之,則爲加一於一後再行加一之略稱也.如此以推.加一於三謂之四,加一於四謂之五,加一於五謂之六,………,如斯吾人卽得數之觀念.

不論其物數如何之多,吾人仍能設想再行添加一物於其中,故任取何數,吾人亦能得一較其數多一之數.

一,二,三,四,……… 等數,謂之自然數,通常皆以 1, 2, 3, 4, ……… 等符號以表之.依自然數之順序,整列成

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,…………

系統時,謂之自然數列.自然數列如吾人依次唱之,則後唱者較前唱者其數爲大,前唱者較後唱者其數爲小.例如 7 較 5 爲大,而 5 較 7 爲小.是.由此定義,當易得知下述之事

實.

(1) $a=b, b=c$ 時,則 $a=c$.

(2) $a \neq b$ 時,則 $a>b$ 或 $a<b$,二者必居其一.

(3) $a>b, b>c$ 時,則 $a>c$.

(4) $a=b, b<c$ 時,則 $a<c$.

又 a, b 二數相等,或 a 等於 b, 及 b 等於 a 云者;其意爲 a 不大於 b, 亦不小於 b, 畢竟二數同爲一數之謂也.

6. **加法** 加 b 於 a 云者,其意爲於自然數列中求其位於 a 後之第 b 位數爲何數之謂.即於自然數列中由 a 後一數數起,順次唱數其後之 b 個數,而求得其位於 a 後之第 b 位數也.故

加 1 於某數,於其所得結果再行加 1 時,等於加 2 於其數.
加 2 於某數,於其所得結果再行加 1 時,等於加 3 於其數.
如此以推,因得下述事實.

吾人能加任意一數於其他任意一數,其所得結果,一定不變.

加一數於他一數所得之結果,謂之此二數之和.

有數在三個以上;於其中任取一數,而將其所餘諸數中任意一數加之,於其所得結果,更將第二次所餘諸數中任意一數加之,如此逐次行之,待所與各數俱行加盡時,其最後所得結果,謂之此諸數之和.對和而言,其各數則謂之項.

爲求和而施之計算,謂之加法.

通常表和時,皆用加號 + 以行之.此符號一般皆置之於

二數間,表示加其右方之數於左方之數所得結果.其左方之數,謂之被加數;右方之數,謂之加數.例如表加 b 於 a 時,書作

$$a+b$$

是.又例如表加 b 於 a 於其所得結果再行加 c,及加「加 c 於 b 所得之和」於 a 時,各書作

$$(a+b)+c \text{ 及 } a+(b+c)$$

等.其他皆準此.

由加法之意義及等式或不等式之規則,可易於得知下述諸事實.

(1) 以任意一數加於某數,其所得結果,較原數爲大.

(2) 有大小二數,如加適當之數於其較小之數,必可使其和與大數相等.卽設有大小二數 a, b,其

$$a>b$$

時,則必有

$$b+x=a$$

之 x 存在.

(3) 若 $a=b$,則 $a+c=b+c$.

(4) 若 $a>b$,則 $a+c>b+c$.

(5) 若 $a<b$,則 $a+c<b+c$.

反之;

(6) 若 $a+c=b+c$,則 $a=b$.

(7) 若 $a+c>b+c$,則 $a>b$.

(8) 若 $a+c<b+c$,則 $a<b$.

又由(3),(4),(5)諸式,亦可推得下述諸事實.

(9) 若$a=b,c=d$,則$a+c=b+d$.

(10) 若$a>b,c>d$,則$a+c>b+d$.

(11) 若$a<b,c<d$,則$a+c<b+d$.

7. 加法之規則 行加法時,將各加數一一唱數而加之,若遇大數,則甚感煩難.故一般皆先將較小之數之和暗記後,再行應用加法之規則,以求其和.

定理 1. 於「加乙數於甲數所得」之和,再加丙數,其結果與加「加丙數於乙數所得」之和於甲數相等.即

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

證明 $(a+b)+1=a+(b+1)$ 〔加法之意義〕……(1)

又 $(a+b)+2=\{(a+b)+1\}+1$ 〔加法之意義〕

$=\{a+(b+1)\}+1$ 〔(1)〕

$=a+\{(b+1)+1\}$ 〔加法之意義〕

$=a+(b+2)$ 〔同上〕……(2)

又 $(a+b)+3=\{(a+b)+2\}+1$ 〔加法之意義〕

$=\{a+(b+2)\}+1$ 〔(2)〕

$=a+\{(b+2)+1\}$ 〔加法之意義〕

$=a+(b+3)$ 〔同上〕……(3)

如此順次以推,最後可得

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

上述定理,謂之加法之結合法則.

定理 2. 加乙數於甲數,其和等於加甲數於乙數.即

$$a+b=b+a$$

證明 首先, $1+2=(1+1)+1$ 〔加法之意義〕

$=2+1$ ……………………………(1)

又 $1+3=(1+2)+1$ 〔加法之意義〕

$=(2+1)+1$ 〔(1)〕

$=3+1$ ……………………………(2)

如此順次以推,最後可得

$1+b=b+1$ ……………………………(3)

次 $2+b=(1+1)+b$

$=1+(1+b)$ 〔定理 1〕

$=1+(b+1)$ 〔(3)〕

$=(1+b)+1$ 〔定理 1〕

$=(b+1)+1$ 〔(3)〕

$=b+2$ 〔加法之意義〕……(4)

又 $3+b=(2+1)+b$

$=2+(1+b)$ 〔定理 1〕

$=2+(b+1)$ 〔(3)〕

$=(2+b)+1$ 〔定理 1〕

$=(b+2)+1$ 〔(4)〕

$=b+3$ 〔加法之意義〕……(5)

如此順次以推,最後可得

$$a+b=b+a$$

上述定理,謂之加法之交換法則.由此法則,可知凡二數之和,不必區別其爲加乙數於甲數,或加甲數於乙數,僅簡稱之爲二數相加即可.

加法之交換及結合法則經證明後,如擴張之,更可得下述定理.

定理 3. 若干數之和,與其各項之順序無關.例如

$$a+b+c+d+e+f=c+d+a+e+b+f$$
$$=e+c+a+d+b+f$$
$$=f+e+d+c+b+a$$

上述法則爲加法交換法則之擴張,其證明從略.由此法則,可知求三個以上之數之和時,可簡稱之爲加合此諸數.

系 加合諸數時,於其中任取若干數而以此諸數之和代之,或其中某一數等於若干個數之和,而以此諸數代其一數,其最後之結果,皆一定不變.例如

$$a+b+c+d+e+f=a+c+(b+e+f)+d$$

又設 $\quad g=b+c+f$

則 $\quad a+d+e+g=a+d+e+b+c+f$

等是.

此定理爲加法結合法則之擴張,其證明從略.

8. 減法 有 a, b 二數於此,求加一數於 b 使其和恰等於 a 時,謂之由 a 減 b.即由 a 減 b 云者,爲於自然數列中求 a 前之 b 位數爲何數之謂也.其 a 謂之被減數,b 謂之減數.又由 a 減 b 所得結果,謂之其二數之差.或稱爲由被減數減去減數後之餘數.

爲求差而施之計算,謂之減法.

通常表差時,皆用減號 $-$ 以行之.此符號一般皆置之於二數間,表示由其左方之數減去右方之數所得結果.例如

表由 a 減 b 時,書作

$$a-b$$

是.由此定義,設

$$a=b+c$$

時,則 $a-b=c$ 及 $a-c=b$.

即 $a-b=c$ 及 $a-c=b$,均與 $a=b+c$ 及 $a=c+b$ 同一意義也.

由減法之意義,可易於得知下述諸事實.

(1) 爲使減法可能起見,其被減數必須較減數爲大.

(2) 減法之結果,一定不變.

(3) 差較被減數爲小.

(4) 由被減數減去其差,等於減數.

(5) $a=b, a>c$ 時,則 $a-c=b-c$.

(6) 有 a, b, c 三數,其 $a>b>c$ 時,則 $a-c>b-c$.

(7) 有 a, b, c 三數,其 $a>b>c$ 時,則 $a-c>a-b$.

9. 減法之規則

定理 1. 加相等之數於被減數及減數之雙方,或由被減數及減數雙方各減去相等之數,其差不變.即

$$a-b=(a+c)-(b+c)$$

$$a-b=(a-c)-(b-c)$$

證明 $a-b+b=a$ 〔減法之意義〕

$\therefore$ $\{(a-b)+b\}+c=a+c$

即 $(a-b)+(b+c)=a+c$ 〔第7節定理1〕

$\therefore$ $(a-b)=(a+c)-(b+c)$ 〔減法之意義〕

又 $(a-b)+b=a$ 〔減法之意義〕

$\therefore \quad (a-b)+\{(b-c)+c\}=(a-c)+c$〔減法之意義〕

$\therefore \quad \{(a-b)+(b-c)\}+c=(a-c)+c$〔第7節定理1〕

$\therefore \quad (a-b)+(b-c)=a-c$ 〔第6節(6)〕

$\therefore \quad a-b=(a-c)-(b-c)$ 〔減法之意義〕

定理 2. 由某數減去「他二數之和」,其結果與由其數順次減去此二數之差相等.卽

$$a-(b+c)=(a-b)-c$$

證明 $a-(b+c)=a-(c+b)$ 〔第7節定理2〕

$=\{(a-b)+b\}-(c+b)$ 〔減法之意義〕

$=(a-b)-c$ 〔定理1〕

系 由某數減去「其他諸數之和」,其結果與由其數順次減去此諸數所得之差相等.

定理 3. 由一數連續減去他二數時,雖交換其減法之順序,而其最後之結果不變.卽

$$a-b-c=a-c-b$$

證明 $a-b-c=a-(b+c)$ 〔定理2〕

$=a-(c+b)$ 〔第7節定理2〕

$=a-c-b$ 〔定理2〕

系 由某數連續減去其他諸數時,雖任何變更其減法之順序,而其最後之結果不變.

定理 4. 加丙數於「甲數減乙數」之差時,其結果與由「甲數與丙數」之和減去乙數相等.卽

$$a-b+c=a+c-b$$

證明 $a-b+c=(a+c-c)-b+c$ 〔減法之意義〕

$$=(a+c-b)-c+c \qquad 〔定理3〕$$

$$=a+c-b \qquad 〔減法之意義〕$$

上述定理,亦可改述之如下.

定理 於減法之後再行加法時,如將其加法移於減法之前,其結果不變.

定理 4 如擴張之,更可得下述定理.

定理 5. 於加減混合之計算,先將其應加各數悉數加合,然後再將應減各數悉數減去,其結果不變.例如

$$a-b+c-d-e+f=a+c+f-b-d-e$$

證明 $a-b+c-d-e+f=a+c-b-d-e+f$ 〔定理4〕

$$=a+c-b-d+f-e \qquad 〔同\quad上〕$$

$$=a+c-b+f-d-e \qquad 〔同\quad上〕$$

$$=a+c+f-b-d-e \qquad 〔同\quad上〕$$

系 1. 於加減混合之計算,由其應加各數之和,減去應減各數之和,其結果不變.

系 2. 行加減混合之計算時,於減法之可能範圍內,雖任何變更其計算順序,其結果不變.

定理 6. 加「二數之差」於第三數,其結果與由「第三數與被減數」之和減去其減數相等.即

$$a+(b-c)=a+b-c$$

證明 $a+(b-c)=(b-c)+a$ 〔第7節定理2〕

$$=b+a-c \qquad 〔定理4〕$$

$$=a+b-c \qquad 〔第7節定理2〕$$

定理 7. 由一數減他「二數之差」,其結果與由「此

數與減數」之和減被減數相等.即

$$a-(b-c)=a+c-b$$

證明 $a-(b-c)=(a+c)-(b-c+c)$ 〔定理1〕

$=a+c-b$ 〔減法之意義〕

10. 零 如前所述,減法之被減數必須大於其減數.故相等二數之差一語,毫無意義可言.吾人便宜上為附與此語以意義起見,特添設下列各規約.

I 另有一個表無物之新數於此,此數稱之為零.

即零為空無一物之意義,通常皆以符號 0 表之.為與 0 便於區別起見,故以前所述之 1, 2, 3, …… 等數,特稱之為自然數.

0 及第 5 節所述表一至九之符號 1,2,3,4,5,6,7,8,9 等十個符號,通稱之為數字.為與 0 區別起見,其餘九個數字,特稱之為有效數字.

II 0 較任何自然數為小,凡不為 0 之自然數,皆較 0 為大.

故將 0 及自然數依其大小之順序排列之,則為

$$0,1,2,3,4,5,6,7,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

III 加 0 於某數,其結果仍為原數.即

$$a+0=a$$

$$0+0=0$$

IV 加法及減法之定義,於 0 亦能適用.

由上列各規約之結果,可得下述各事實.

(1) 加某數於 0 之結果,仍為其數.

(2) 相等二數之差爲 0.

(3) 差等於 0 之二數相等.

(4) 由某數減 0 時,仍等於原數.

11. 乘法 以 b 乘 a 云者,係以 b 個 a 數相加,而求其和之謂也.故

以 1 乘某數後再加其原數時,謂之以 2 乘其數.

以 2 乘某數後再加其原數時,謂之以 3 乘其數.

以下類推.

以一數乘他一數時,其首先之數,謂之被乘數;其居後之數,謂之乘數.又相乘後所得之結果,謂之其二數之積.

有數在三個以上;於其中任取一數而將其所餘諸數中任意一數乘之,於其所得結果,更將第二次所餘諸數中任意一數乘之,如此逐次行之,待所與各數俱行乘盡時,其最後所得結果,謂之此諸數之連乘積.或簡稱曰積.對積而言,其各數則謂之因數.

爲求積而施之計算,謂之乘法.

通常表積時,皆用乘號 × 以行之.此符號一般皆置之於二數間,表示以其右方之數乘左方之數所得結果.例如表以 b 乘 a 時,書作

$$a\times b$$

是.又如第 2 節所述,在無與小數點相混之條件下,通常皆用 · 以代乘號 ×,或竟完全略去之.例如 $a\times b$ 一般皆書作

$$a\cdot b \text{ 或 } ab$$

等是.

由乘法之意義及等式或不等式之規則,可易於得知下述諸事實.

(1) 能以任意一數乘他任意一數,其結果一定不變.

(2) 以某數乘 0,其結果仍為 0.

(3) 二數或諸數之積為 0 時,則此二數或諸數中至少有一為 0.

(4) 若 $a=b, c\neq 0$, 則 $ac=bc$.

(5) 若 $a>b, c\neq 0$, 則 $ac>bc$.

(6) 若 $a<b, c\neq 0$, 則 $ac<bc$.

(7) 若 $ac=bc, c\neq 0$, 則 $a=b$.

(8) 若 $ac>bc, c\neq 0$, 則 $a>b$.

(9) 若 $ac<bc, c\neq 0$, 則 $a<b$.

(10) 若 $a=b, c=d$, 則 $ac=bd$.

(11) 若 $a>b, c>d$, 則 $ac>bd$.

(12) 若 $a<b, c<d$, 則 $ac<bd$.

12. 乘法之規則

定理 1. 以某數乘其他「諸數之和」,等於「以某數一一乘其諸數」所得之積之和.例如

$$(a+b+c)d=ad+bd+cd$$

證明 $(a+b+c)d=\overbrace{(a+b+c)+\cdots\cdots+(a+b+c)}^{\text{共}d\text{項}}$

〔乘法之意義〕

$$=\overbrace{(a+a+\cdots)}^{\text{共}d\text{項}}+\overbrace{(b+b+\cdots)}^{\text{共}d\text{項}}+\overbrace{(c+c+\cdots)}^{\text{共}d\text{項}}$$

〔第7節定理3之系〕

$$=ad+bd+cd \qquad 〔乘法之意義〕$$

系　以某數乘他「二數之差」,其結果與以某數各乘其二數所得之積之差相等.即

$$(a-b)c=ac-bc$$

證明　$\because \quad (a-b)c+bc=(a-b+b)c$　〔本定理〕

$$=ac$$

$\therefore \quad (a-b)c=ac-bc$　〔第6節(6)〕

本定理及系,謂之乘法之配分法則.

定理 2.　被乘數與乘數,雖交換之,其積不變.即

$$ab=ba$$

證明　$ab=\overbrace{a+a+a+\cdots\cdots}^{\text{共}b\text{項}}$　〔乘法之意義〕

$=\overbrace{1\times a+1\times a+1\times a+\cdots\cdots}^{\text{共}b\text{項}}$　〔同　上〕

$=(\overbrace{1+1+1+\cdots\cdots\cdots}^{\text{共}b\text{項}})a$　〔定理1〕

$=ba$

本定理謂之乘法之交換法則.由此法則,可知以一數乘他數時,可不必區別其被乘數與乘數,而簡稱之爲二數相乘.

定理 3.　以諸數之和乘某數,其結果與以「此諸數各乘其數所得之積」之和相等.例如

$$a(b+c+d)=ab+ac+da$$

證明 $a(b+c+d)=(b+c+d)a$ 〔定理2〕

$=ba+ca+da$ 〔定理1〕

$=ab+ac+ad$ 〔定理2〕

系 以二數之差乘某數,其結果與「以此二數各乘其數所得之積」之差相等.即

$$a(b-c)=ab-ac$$

本定理及系,亦謂之乘法之配分法則.

定理 4. 以第三數乘某「二數之積」,其結果等於以「二數中任意一數乘其第三數所得」之積再乘其餘一數.即

$$(ab)c=a(bc)$$

證明 $(ab)c=\overbrace{ab+ab+\cdots\cdots\cdots}^{\text{共}c\text{項}}$ 〔乘法之意義〕

$=a(\overbrace{b+b+\cdots\cdots\cdots}^{\text{共}c\text{項}})$ 〔定理3〕

$=a(bc)$ 〔乘法之意義〕

本定理謂之乘法之結合法則.

由交換及結合法則之論理的結果,更可得下述定理.

定理 5. 若干數之連乘積,與其因數之順序無關.

本定理爲乘法交換法則之擴張,其證明從略.由此法則可知求三數以上之積時,可簡稱之爲連乘此諸數.

系 連乘諸數時,於其中任意取出若干數而以其積代之,或因其中某一數等於他若干數之積而以此諸數之積代其一數,其最後之結果,皆一定不變.例如

$$abcdefg=ce(adg)bf$$

又設 $h=adg$

則 $bcehf=bceadgf$

等是.

本定理爲乘法結合法則之擴張,其證明從略.

13. 除法　有 a, b 二數,設 b 不爲 0 而求其與某一數之積恰等於 a 時,謂之以 b 除 a. 其 a 謂之被除數, b 謂之除數以 b 除 a 所得之結果,謂之其商.

爲求商而施之計算,謂之除法.

通常表商時,皆用除號 $\div$ 以行之.此符號一般皆置之於二數間,表示以其右方之數除左方之數所得結果.例如以 b 除 a 時,書作

$$a\div b$$

是.又如第 2 節所述,商 $a\div b$ 亦常用 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 等符號表之.

上述除法之定義,爲乘法之逆算,然有時亦可視作累次減法之意義者.例如以 3 除 7 云者,其意義爲下述之二答案是.

(1)　欲得較 3 爲小之餘數,須由 7 減去 3 之幾倍.

(2)　此餘數爲何數.

上列二問題,如由 7 累次減去 3 時,卽足以解答之.此時所謂除法,實無異於累次減法,其對於減法之關係,猶之乘法之對於加法.

一般,設 a, b 爲任意二自然數,其以 b 除 a 之意義,卽在求適合於

$$a=bq+r \text{ 及 } r<b$$

之二自然數 q 及 r.（其中一數爲 0 亦可）此時 a 亦謂之被除數，b 謂之除數，q 謂之商，而 r 則謂之<u>餘數</u>.

如被除數 a 恰爲除數 b 之倍數時，則餘數 r 爲 0. 此時 a 謂之被 b 所<u>整除</u>. 可知除法之二種意義，於整除時實相一致.

由除法之意義，可易於得知下述諸事實.

(1) 以 0 除某數一語，毫無意義.

(2) 爲使除法可能起見，其被除數必須較除數爲大.

(3) 除法之結果，一定不變.

(4) 以 1 除某數，其結果仍爲原數.

(5) 以任何自然數除 0，其商皆爲 0.

(6) 以 0 除 0，其商不定.

(7) 以商除被除數，其結果等於除數.

(8) 若 $a>b$, $c\neq 0$, 則 $a\div c>b\div c$.

(9) 若 $b\neq 0$, $c\neq 0$, 而 $b>c$, 則 $a\div c>a\div b$.

14. 除法之規則

定理 1. <u>諸數同以某一數除之所得諸商之和，等於以某數除此諸被除數之和所得之商.</u> 例如

$$(a\div m)+(b\div m)+(c\div m)=(a+b+c)\div m$$

證明 $(a\div m)\times m=a$ 〔除法之意義〕

$(b\div m)\times m=b$ 〔同上〕

$(c\div m)\times m=c$ 〔同上〕

$\therefore\quad \{(a\div m)+(b\div m)+(c\div m)\}\times m=a+b+c$

〔第12節定理1〕

$\therefore\quad (a\div m)+(b\div m)+(c\div m)=(a+b+c)\div m$

〔除法之意義〕

定理 2. 二數同以某一數除之所得二商之差,等於以某一數除其二數之差所得之商.即

$$(a\div m)-(b\div m)=(a-b)\div m$$

證明 $(a\div m)\times m=a$ 〔除法之意義〕

$(b\div m)\times m=b$ 〔同上〕

$\therefore\quad \{(a\div m)-(b\div m)\}\times m=a-b$〔第12節定理1之系〕

$\therefore\quad (a\div m)-(b\div m)=(a-b)\div m$ 〔除法之意義〕

上述二定理,謂之除法之配分法則.

下述七定理,不外於第9節所述減法定理中以積代和,以商代差,置換而得者.其證明可與第9節各定理之證明法同樣以證明之,故從略.

定理 3. 以不為0之相等二數各乘被除數與除數,或以等數除被除數與除數之雙方,其商不變.即

(1) $a\div b=am\div bm$ 〔$m\neq 0$〕

(2) $a\div b=(a\div m)\div(b\div m)$

定理 4. 以二數之積除第三數,其結果等於以此二數順次除第三數所得之商.即

$$a\div bc=(a\div b)\div c \quad [b\neq 0 \quad c\neq 0]$$

系 以諸數之積除某一數,其結果等於以此諸數順次除其數所得之商.例如

$$a\div bcd=a\div b\div c\div d$$

定理 5. 以二數連續除某一數時,雖交換其除法之順序,其最後之結果不變.即

$$a \div b \div c = a \div c \div b$$

系 以諸數連續除某一數時,雖任何變更其除法之順序,其最後之結果不變.

定理 6. 以丙數乘「乙數除甲數」之商,其結果與以乙數除甲丙二數之積相等.即

$$a \div b \times c = ac \div b$$

上述定理,亦可改述之如下.

定理 於除法之後,再行乘法時,其乘法可移於除法之前行之.

定理 7. 於乘除混合之計算,先將其應乘各數悉數相乘,然後再將應除各數悉數除之,其結果不變.例如

$$a \div b \times c \div d \div e \times f = acf \div b \div d \div e$$

系 1. 於乘除混合之計算,以應除各數之積除應乘各數之積,其結果不變.例如

$$a \div b \times c \div d \div e \times f = acf \div bde$$

系 2. 行乘除混合之計算時,於除法之可能範圍內,任何變更其計算之順序,其結果不變.

定理 8. 以「丙數除乙數」之商乘甲數時,其結果與以丙數(除數)除甲乙(被除數)二數之積相等.即

$$a \times (b \div c) = ab \div c$$

定理 9. 以「丙數除乙數」之商除甲數時,其結果與以乙數(被除數)除甲丙(除數)之積相等.即

$$a\div(b\div c)=ac\div b$$

15. 負數 如第 8 節所述,吾人爲使減法可能起見,必須使被減數大於減數始可.其被減數等於減數時,爲維持減法之可能計,不得不如第10節所述,於自然數之外更設一新數 0 以解決之.又被減數小於減數時,如仍欲維持其減法之可能,則於自然數及 0 以外,更不能不添設一種新數以應需要.因此;吾人另行作成一新數 -1 置於 0 之前方,次作成又一新數 -2 置於 -1 之前方,再作成第三新數 -3 置於 -2 之前方,順此以往,卽行創設一種新的數列.此種新數,雖毫無物數之意義,但因其與自數相同,有順序的性質;且於含有自然數之順序系統中,占有某一定之位置,故亦有足以名之爲數之理由.

此新數之數列,如與 0 及自然數列依其順序排列之,則爲

$$\cdots\cdots\cdots\cdots-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上列順序系統,謂之完全數列.完全數列無最初之符號,亦無最終之符號,其數能向其前後增加至任何遠處.隨之減數無論大於被減數之程度若何,其減法皆能成立.

吾人爲使此種新數與以前所研究之數易於區別起見,特稱之爲負數.而對於以前所研究之自然數,則稱之爲正數.

負數前之一號,謂之負號.其作用僅在表示其數爲負數,與減號之意義毫無關係.對此;故正數之前,亦有附以+號者.此+號謂之正號.其作用亦僅在表示其數爲正數,與加號之意義毫無關係.但正數前之+號,如無必要時,一般多

略去之.

如上所述,可知符號+,-之作用有二:其表示加減時,謂之計算符號.表示數之正負時,謂之性質符號.

正數及負數,如將其性質符號除去之,則謂之其數之絕對值.例如+4與-4之絕對值各爲4,+a與-a之絕對值各爲a是.絕對值通常皆以符號$|\ \ |$表之,例如$|4|$,$|a|$等是.

設a,b,c爲完全數列中任意三數,則隨a先於b,與b一致,或後於b,而書作

$$a<b,\ a=b,\ 或\ a>b.$$

因完全數列爲一順序的系統,故第5節節末(1),(2),(3),(4)各結論,亦能適用之.即

(1) $a=b,\ b=c$時,則$a=c$.

(2) $a\neq b$時,則$a>b$或$a<b$,二者必居其一.

(3) $a>b,\ b>c$時,則$a>c$.

(4) $a=b,\ b<c$時,則$a<c$.

$a<b$,即於完全數列中a位於b之前方時,謂之代數的a較b爲小,或代數的b較a爲大.

又隨$|a|<|b|$,$|a|=|b|$,或$|a|>|b|$,其a謂之算術的小於b,算術的等於b,或算術的大於b.

例如-3代數的較2爲小,而算術的較2爲大;及-7代數的較-3爲小,而算術的較-3爲大是.

負數應用之於量之測定時,其便利處,至足稱道.例如計算某人之財產時,設視其資產爲正,則負債爲負;計算某時

間前後之溫度時,設其水銀柱之上升爲正,則下降爲負;又以某點爲標準而決定一直線上各點之位置時,設其位於右方之點爲正,則位於左方之點爲負等是.

16. 負數之算法　負數與負數,或負數與0及自然數相結合之新的算法,與自然數之算法相同.卽其名稱,亦莫不相同.

設 a 爲完全數列中任意一數,a, b 各爲自然數,則其各種新算法之定義如下.

加法及減法之定義.卽

(1)　$a+b$,其意爲 a 後之第 b 位數.

(2)　$a-b$,其意爲 a 前之第 b 位數.

(3)　$a+0$ 及 $a-0$,其意爲與 a 同爲一數.

(4)　$a+(-b)$,其意爲與 $a-b$ 同爲一數.

(5)　$a-(-b)$,其意爲與 $a+b$ 同爲一數.

換言之,卽加正數 b 於任意之數 a 云者,其意爲於完全數列中 a 之後方數 b 個數位之謂.此時所得之和,謂之代數的和.又由 a 減正數 b 云者,其意爲於完全數列中 a 之前方數 b 個數位之謂.此時所得之差,謂之代數的差.其加負數與減負數時,則各與減去或加合其所對應之正數同値.至此二數之和或差,與算術中之和或差其結果稍有不同;不必定較其被加數爲大,或定較被減數爲小.

乘法之定義.卽

(1)　$0\cdot a$ 及 $a\cdot 0$,其意均爲0.

(2)　$a(-b)$ 及 $(-a)b$,其意均爲 $-ab$.

(3) $(-a)(-b)$,其意爲ab.

換言之,卽各不爲0之二數之積,隨其二數之爲同號或異號而爲正數或負數.其積之絕對值,則等於其二數絕對值之積.

除法之定義.卽

(1) $0\div a$,其意爲0.

(2) $ab\div -b$,其意爲$-a$.

(3) $-ab\div b$,其意爲$-a$.

(4) $-ab\div -b$,其意爲a.

換言之,卽各不爲0之二數之商,隨其二數之爲同號或異號而爲正數或負數.其商之絕對值,等於以除數之絕對值除被除數絕對值所得之商.

上述新的算法,旣非假定,亦非需要證明之定理,僅爲所謂新的算法之定義而已.如問爲何而創設此種算法;則其答案爲吾人硏究數之本身間及外界物與物間之關係時,而欲使負數盡量的有效之故.可知此種新的算法,決非任意所能創設,反爲從來算法應用於新數上之自然擴張.

關於自然數各種算法之規則,對於負數,亦能適用之.其證明從略.

又關於等不等之規則,在加法與減法時,可依自然數等不等規則同樣推理以求得之.卽設a,b,c爲完全數列中之任意三數時,隨

$$a<,=,\text{或}>b.$$

而定 $$a+c<,=,\text{或}>b+c.$$

反之,隨

$$a+c<,=,\text{或}>b+c.$$

而定

$$a<,=,\text{或}>b+c.$$

故不論數之正負如何,下述事實,均屬正確.

加相同之數於等式或不等式之兩邊,或由其兩邊各減去相同之數,其等式或不等式之號不變.

因變換 a, b 二數之符號時,則其位於完全數列中之位置相反,故設 c 爲任意之自然數,則其因乘除所得結果之大小關係如下.

設

$$a<,=,\text{或}>b$$

時,則

$$ac<,=,\text{或}>bc;$$

$$a(-c)>,=,\text{或}<b(-c);$$

$$a\div c<,=,\text{或}>b\div c;$$

$$a\div(-c)>,=,\text{或}<b\div(-c).$$

反之,設

$$ac<,=,\text{或}>bc;$$

$$a(-c)>,=,\text{或}<b(-c);$$

$$a\div c<,=,\text{或}>b\div c;$$

$$a\div(-c)>,=,\text{或}<b\div(-c).$$

諸式成立時,則亦得

$$a<,=,\text{或}>b.$$

故得下述諸事實.

於等式之兩邊,同以一正數或負數乘之,(或除之)仍相等.

於不等式之兩邊,同以一正數乘之,(或除之)其不等

號不變.

於不等式之兩邊,同以一負數乘之,(或除之)則其不等號之方向轉變.

17. 分數 設a,b,c,d爲四自然數,其a能爲b整除,c能爲d整除時,則其商$\frac{a}{b}$與$\frac{c}{d}$於自然數列中之關係的順序,與ad對於bc之關係的順序相同.即隨

$$ad<,=,\text{或}>bc$$

之關係,亦成立

$$\frac{a}{b}<,=,\text{或}>\frac{c}{b}$$

之關係.因$ad\div bd=\frac{a}{b}$, $bc\div bd=\frac{c}{d}$故也.

又不論a, c能各爲b, d整除與否,其ad,bc於自然數列中關係的順序,皆得而知之.故任取二自然數a, b,作成$\frac{a}{b}$時,若a能爲b整除,則與從來之計算相同,$\frac{a}{b}$表以b除a所得之自然數.若a不能爲b整除,則可暫時認$\frac{a}{b}$爲一符號,至其與除法之關係,則容後述之.

此時更想像$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$等符號曾經依「隨ad先於,一致於,或後於bc;其$\frac{a}{b}$亦先於,一致於,或後於$\frac{c}{d}$」之規則排列之,而附以與自然數相同之順序性質.卽用含有先於,一致於,後於等意義之符號$<,=,>$,表其隨$ad<,=,\text{或}>bc$,而$\frac{a}{b}$亦

$<,=,$或$>\frac{c}{d}$之關係.

於上述規則,如$\frac{a}{b}$符號係表自然數時,則於自然數列中指定其固有位置.不然,則指定數列中連續二數間之位置.由此定義,其曾經排列後之符號$\frac{a}{b}$集合之全體,(自然數列爲其一部分)即行成一順序的系統.

$\frac{a}{b}$不表自然數時,謂之<u>分數</u>.其a謂之<u>分子</u>,b謂之<u>分母</u>.a與b總稱之爲<u>分數之項</u>.可知分數爲$\frac{a}{b}$形式之符號,而由其位於包含自然數列之順序系統中之位置以定義之者.故由順序之見地,分數亦得名之爲數.

又分數亦可由商之意義以定義之,即分數$\frac{a}{b}$爲以b乘之則其積爲a之數是.換言之,即爲滿足下列等式之數是也.

$$\frac{a}{b}\times b=a$$

爲與分數易於區別起見,其以前所述完全數列中所含之數,一般皆稱之爲<u>整數</u>.

設分子,分母之一方或雙方爲負整數之分數,例如$\frac{-a}{b}$,$\frac{a}{-b}$,$\frac{-a}{-b}$等時,則其定義如下.

(1) $\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$, $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$; $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

(2) 凡負之分數,皆位於 0 之前方.

(3) 負分數（或負整數）相互間之關係,依下列規則而排列.即隨

$$-ad <, =, \text{或} > -bc,$$

而 $$-\frac{a}{b} <, =, \text{或} > -\frac{c}{d}.$$

18. 分數之算法

定理 1. 分數之兩項,同以不等於 0 之數乘之,其值不變.即

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b} \quad m \neq 0$$

證明 於 $\frac{a}{b}$, $\frac{am}{bm}$ 二分數,其

$$a \cdot bm = b \cdot am$$

故由分數之定義.

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm},$$

由此定理,吾人能將任何分數,化成分母相同（謂之公分母）而其值等於各該分數之分數.此種方法,謂之通分.

定理 2. 二分數之兩項,各以同一公因數除之,其值不變.即

$$\frac{a \div m}{b \div m} = \frac{a}{b}$$

證明 於定理 1,已證明分數之兩項同以不等於 0 之數乘之,其值不變.設此乘數同爲 $\frac{1}{n}$,則定理 1 即成爲定理

2.

由此定理,吾人可以分數兩項之公因數以除之,使其兩項皆較原分數兩項爲小,而其値不變.此種方法,謂之約分.其不能行約分之分數,謂之不可約分數.或亦稱既約分數.

玆將關於分數加減乘除等算法之規則述之於下.

(1) 分母相同之分數相加或相減時,其結果等於以其公分母爲分母,各分子之和或差爲分子之新分數.如分母不同時,則由定理1,先行通分,然後相加或相減.例如

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b}{m}+\frac{c}{m}$$

$$=\frac{a+b+c}{m}$$

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}+\frac{c}{n}=\frac{a-b}{n}+\frac{c}{n}$$

$$=\frac{a-b+c}{n}$$

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{n}-\frac{c}{l}=\frac{an}{mn}+\frac{mb}{mn}-\frac{c}{l}$$

$$=\frac{an+bm}{mn}-\frac{c}{l}$$

$$=\frac{anl+bml}{mnl}-\frac{mnc}{mnl}$$

$$=\frac{nla+mlb-mnc}{mnl}$$

(2) 數個分數相乘時,其結果等於以各分子之積爲

分子,各分母之積爲分母之新分數.例如

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$$

此因使

$$x=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}$$

時,以$b\times d$乘其兩邊,得

$$x\times b\times d=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times b\times d$$

$$=\frac{a}{b}\times b\times\frac{c}{d}\times d \qquad \text{〔第12節定理5〕}$$

$$=a\times c \qquad \text{〔第17節〕}$$

$$\therefore \quad xbd=ac$$

以bd除上列等式之兩邊,得

$$x=\frac{ac}{bd}$$

即 $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

隨之亦 $$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ac}{bd}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$$

故也.

(3) 以一分數除他分數時,其結果等於顛倒除數之分子分母以乘除數.例如

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

此因使

$$x=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$$

時,則

$$x\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore\quad x\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

$$但\quad x\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{c}=x=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

故也.

某分數之分子分母恰爲他分數之分母分子時,則此分數,謂之他分數之逆數.因整數 a 之分母可視爲 1,故 a 之逆數爲 $\frac{1}{a}$.隨之除法之規則,不論其除數爲整數或爲分數,可總括的改述之如下.

以某數除他一數時,等於以除數之逆數,乘其被除數.

19. **有理數系** 吾人對於以前所述各數,爲便於與以後研究之其他數區別起見,特總稱之爲有理數.其由有理數組成之順序系統,謂之有理數系.有理數系,有屬於其一部分之整數系所無之一重要性質,即有理數系爲一稠密的數列,凡不相等之二有理數間,必更有其他之有理數存在是.例如有 $\frac{a}{b},\frac{c}{d}$ 二分數,其 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ 時,吾人可證明更有介

於此二分數間之分數$\frac{bc+ad}{2bd}$存在如下.

$$\because \quad \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$$

$$\therefore \quad ad<bc$$

(1) 設各加ad於$ad<bc$之兩邊,則得

$$2ad<bc+ad$$

$$\therefore \quad a\cdot(2bd)<b(bc+ad)$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}<\frac{bc+ad}{2bd}$$

(2) 設各加bc於$ad<bc$之兩邊,則得

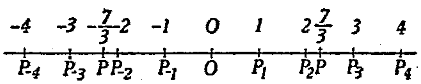
$$bc+ad<2bc$$

$$\therefore \quad (bc+ad)d<c(2bd)$$

$$\therefore \quad \frac{bc+ad}{2bd}<\frac{c}{d}$$

即$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$二分數間,更有分數$\frac{bc+ad}{2bd}$存在.依此推之,可知有理數系中任意二數間,有無限數有理數存在.

有理數系各數,皆能以位於一無限直線上之點以表之.例如於一無限直線上以O點為標準,OP_1為單位,左右量



去,其

$$OP_1=P_1P_2=P_2P_3=\cdots\cdots P_{-1}O=P_{-2}P_{-1}=\cdots\cdots$$

時,則可將完全數列中所有各數.依其順序左右排列於此$P_1, P_2, P_3,\cdots\cdots P_{-1}, P_{-2},\cdots\cdots$上,而 0 位於$O$點上.此$O$點謂

之原點.

由原點 O 至各點 P_x 之距離,卽線段 OP_x 之長,表其上方所書數之絕對值;而由 O 向 P_x 之方向則表其數之符號.

又作表 $\frac{7}{3}$ 之點 P 時,可由原點 O 出發,以等於單位 OP_1 之長之 $\frac{1}{3}$ 爲標準,於 O 點之右方量 7 次,則此取得之 P 點,卽代表 $\frac{7}{3}$.反之,於 O 點之左方與 P 點對應之 P' 點,則代表 $-\frac{7}{3}$.

如上所述,可知無限直線上之各點,皆與有理數系之某一數相對應.其直線上各點之位置,與有理數系之順序相一致.故某有理數有時可稱之爲位於他有理數之左方或右方,或介於他二有理數之間.

20. 冪與根　通常對於 aa 之積,皆以 a^2 表之,謂之 a 之自乘冪.或謂之 a 之平方.aaa 之積,以 a^3 表之,謂之 a 之第三次冪.或謂之 a 之立方.又 $aaa\cdots\cdots$ (n 個因數) 之積,以 a^n 表之,謂之 a 之第 n 次冪.

凡 a,b 二數有 $a^n=b$ 之關係時,則 b 謂之 a 之乘冪,或簡稱曰冪.其 n 謂之指數.a 謂之底.反之, a 謂之 b 之方根以 $\sqrt[n]{b}$ 表之.此符號 $\surd$,謂之根號.根號之上,常有加一括線書作 $\sqrt{}$ 者.其 n 謂之根指數.設 $n=2$ 時,則根指數一般皆略去之僅書作 $\sqrt{b}$.

因冪之定義爲某數自乘若干次之積,故其計算之規則

如下，

(1) 底數相同之諸冪之積,等於以其各冪指數之和為指數之同底數之冪.即

$$a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=a^{m+n+p+\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

此因 $a^m\times a^n\times a^p\times\cdots\cdots=(aaa\cdots\cdots$至$m$個因數$)(aaa\cdots\cdots$至$n$個因數$)(aaa\cdots\cdots$至$p$個因數$)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=a^{m+n+p+\cdots\cdots\cdots\cdots}$$

故也.

(2) 某數之冪之乘冪,等於以其二指數之積為指數之同底數之冪.即

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

此因 $(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\cdots\cdots$至$n$個因數

$$=a^{m+m+m\cdots\cdots\text{至}n\text{項}}$$

$$=a^{mn}\qquad\text{〔本節之(1)〕}$$

故也.

(3) 底數相同之二冪之商,等於以其二指數之差為指數之同底數之冪.即

$$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

此因 $a^m\div a^n=\dfrac{aaa\cdots\cdots\text{至}m\text{個因數}}{aaa\cdots\cdots\text{至}n\text{個因數}}$

$$=aaa\cdots\cdots\text{至}m-n\text{個因數}$$

$$=a^{m-n}$$

故也.

(4) 諸數之積之羃,等於其各數同次數之羃之積.卽

$(abc\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots\cdots$

此因 $(abc\cdots\cdots)^m=(abc\cdots\cdots)(abc\cdots\cdots)\cdots\cdots$ 至 m 個因式

$=(aaa\cdots\cdots$ 至 m 個因數$)(bbb\cdots\cdots$ 至 m 個因數$)(ccc\cdots\cdots$ 至 m 個因數$)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$=a^m\times b^m\times c^m\times\cdots\cdots=a^mb^mc^m\cdots\cdots\cdots$

故也.

(5) 分數之羃,等於以其分子同次數之羃爲分子,分母同次數之羃爲分母之分數.卽

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

此因 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\cdots\cdots$ 至 m 個因數

$$=\frac{aaa\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 個因數}}{bbb\cdots\cdots\text{至 } m \text{ 個因數}}=\frac{a^m}{b^m}$$

故也.

又羃之指數爲偶數時,則其羃爲正;爲奇數時,則其羃之號與其底之號相同.

上述之(1),(2),(4)諸規則,謂之指數法則.

因求根爲求羃之逆算,故關於根之計算規則,易於由羃之計算規則以推知之.玆述之於下.

(6) 某數 m 次羃之第 n 次根,等於其數之 $\frac{m}{n}$ 次羃,卽

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

此因　$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$

隨之　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

故也.

(7)　某數m次根之第n次根,等於其數之第mn次根.

即

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

此因　$\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm}=\left\{\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right\}^m=\left\{\sqrt[m]{a}\right\}^m=a$

隨之　$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}$

故也.

(8)　諸數之積之第m次根,等於其各數第m次根之積.即

$$\sqrt[m]{abc\cdots}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\cdots\cdots\cdots$$

此因　$(\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\cdots\cdots)^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m(\sqrt[m]{c})^m\cdots\cdots$

$$=abc\cdots\cdots\cdots$$

隨之　$\sqrt[m]{abc}\cdots\cdots=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\cdots\cdots\cdots$

故也.

(9)　分數之第m次根,等於以其分子之第m次根爲分子,分母之第m次根爲分母之分數.即

$$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

此因　$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m=\frac{(\sqrt[m]{a})^m}{(\sqrt[m]{b})^m}=\frac{a}{b}$

隨之　$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

故也.

正數之偶數次根,有正負二數,其絕對值相等.負數之偶數次根,則不存在.因不論正負數,其偶數次羃皆爲正數故也.正數之奇數次根,僅一正數.又負數之奇數次根,亦僅一負數.

羃之指數,不僅限於正整數,即對於分數及負數,亦有意義.茲分別說明之於下.

(10) $a^{\frac{1}{n}}$ 爲 $\sqrt[n]{a}$

由指數法則, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=n^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\cdots\cdots$ 至 n 個因數

$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\text{至}n\text{項}}=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$$

$$\therefore\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

(11) $a^{\frac{m}{n}}$ 爲 $\sqrt[n]{a^m}$

由指數法則, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\cdots\cdots$ 至 n 個因數

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots\cdots\text{至}n\text{項}}=a^{\frac{mn}{n}}=a^m$$

$$\therefore\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

(12) a^0 爲 1

由指數法則, $a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$

$$\therefore\quad a^0=a^m\div a^m=1$$

(13) a^{-m} 爲 $\frac{1}{a^m}$

由指數法則, $a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^0$

但 $a^0=1$

$$\therefore\quad a^m\times a^{-m}=1.$$

即 $$a^{-m}=\frac{1}{a^m}\text{ 或 }a^m=\frac{1}{a^{-m}}.$$

可知不論m,n之為正為負為0或為分數,指數之法則,皆能成立.因得三定理於下.

定理 1. $a^m\times a^n=a^{m+n}$對於m及n之任何有理值皆能成立.

定理 2. $(a^m)^n=a^{mn}$對於m及n之任何有理值皆能成立.

定理 3. $(abc\cdots\cdots)^m=a^mb^mc^m\cdots\cdots$對於$m$之任何有理值皆能成立.

21. 無理數 有數一羣時,吾人名此羣為數羣.一數羣中之數,有多至無限個者,亦有僅含一個數者.

有二數羣A,B於此,設A羣中所有各數皆較B羣中各數為小時,則任意一數,於

(1) 較A羣中某一數為小,

(2) 較B羣中某一數為大,

(3) 不小於A羣中之任何數亦不大於B羣中之任何數,

之三方面中,必居其一甚明.此時A,B二數羣,謂之分所有各數為三級.其屬於第一級之數,即較A羣中某一數為小之所有各數,謂之A級之數.屬於第二級之數,即較B羣中某一數為大之所有各數,謂之B級之數.屬於第三級之數,即不小於A羣中任何數,亦不大於B羣中任何數之所有

各數,謂之 C 級之數.例如以 8 及較 8 爲小之數數個爲 A 羣,與以 15 及較 15 爲大之數數個爲 B 羣時,則較 8 爲小之各數,皆屬於 A 級;較 15 爲大之各數,皆屬於 B 級;由 8 至 15 之間之各數,皆屬於 C 級是.

定理 1. 有二數羣 A, B 於此,設

(1) A 羣中所有各數皆較 B 羣中各數爲小.

(2) 取一較 0 爲大之任意數 ε, 不論 ε 小至如何程度,皆能於 A 羣中選擇一數 a, B 羣中選擇一數 b, 使 $b-a<\varepsilon$.

之二條件能成立時,則屬於 C 級之數,決無不相等之二數.

證明 設不相等之二數 c, c' (假定 $c>c'$) 皆屬於 C 級時,則因 $c-c'$ 較 0 爲大,故由假設,能於 A 羣中選擇一數 a, B 羣中選擇一數 b, 使

$$b-a<c-c'. \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然 $$b \geqq c > c' \geqq a,$$

$$\therefore \quad b-a \geqq c-c'.$$

此與(1)式相矛盾甚明.故屬於 C 級之數,皆屬一定.卽相等之數皆視作一數時,則屬於 C 級之數,(如有屬於 C 級之數時) 僅有一個.

例 1. 於循環小數 $0.52\dot{9}$, 將其小數點下之數字各取至一位,二位,三位,…… 所得之無限個數 0.5, 0.52, 0.529, 0.5299,……爲 A 羣,而以於其第三數以後各數末位加 1 所得一定數 0.53 爲 B 羣時,則 A 羣中所有各數,皆較 B 羣中各數爲小.又 B 羣中之數,與由 A 羣中適當選取之數之差,

可使小至無限.而其循環小數之極限$0.\dot{5}\dot{3}$,既不較A羣中任何數爲小,亦不較B羣中之數爲大,即$0.\dot{5}\dot{3}$爲C級之惟一數也.又此時B級之數爲較B羣之數$0.\dot{5}\dot{3}$爲大之所有各數.

例 2. 將2依算術上開平方之方法開方,以其平方根取至小數點下一位,二位,三位,……所得之無限個數1.4, 1.41, 1.414, 14142, 1.41421, 1.414213,……等爲A羣,而以於A羣中各數之尾加1所得無限個數1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214,……等爲B羣時,則A羣中各數,皆較B羣中任何數爲小.又於二羣中各適當選擇一數,可使其差小至無限.此時如有不較A羣中任何數爲小,亦不較B羣中任何數爲大之數存在,則其數不可不爲$\sqrt{2}$.但實際上並無自乘後恰等於2之數存在,故此時無C級之數存在.可知此時之A, B二羣,僅分所有各數爲A, B二級.

吾人爲便利起見,故不得不設一新規約如下.

有二數羣A, B於此,設

(1) A羣中所有各數皆較B羣中各數爲小.

(2) 取一較0爲大之任意數ε,不論ε小至如何程度,皆能於A羣中選擇一數a, B羣中選擇一數b,使而$b-a<\varepsilon$.

之二條件能成立時,如有C級之數存在,則數羣A,B,謂之決定其數.如無C級之數存在,則認定有一較A羣中任何數爲大,且較B羣中任何數爲小之新數存在.其數羣A,B,謂之決定此新數.此新數謂之<u>無理數</u>.對於無理數而言,故

以前所研究各數,統謂之有理數.

22. 無理數之近似値及算法 無理數之數,與有理數相同,其數無限,如 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt{7}, \sqrt{\frac{3}{5}}$. ……. 及圓周率 π 等皆爲無理數是.一般,某正有理數 a 不等於其他有理數之 n 次冪時,則其數之第 n 次根卽 $\sqrt[n]{a}$,皆爲無理數,此種由求根所生之無理數,亦謂之不盡根數.

無理數之値,雖不能以有理數表之.然因其夾於二有理數羣 A, B 之間,且於 A 羣中適當選擇一數 a, B 羣中適當選擇一數 b, 能使 a, b 之差小於無限小之正數 ε, 故此 A, B 二數羣可使之與其所決定之無理數極相接近.故此 A, B 二數羣,各謂之其所決定無理數之近似値.其較無理數爲小之近似值,謂之不足近似値.較無理數爲大之近似值,謂之過剩近似値.例如

$$1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, 1.414213, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

等各爲 $\sqrt{2}$ 之不足近似値;而

$$1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, 1.414214, \cdots\cdots\cdots\cdots$$

等各爲 $\sqrt{2}$ 過剩近似値是.

無理數算法之規則,與有理數相同.如前第20節所述關於冪與根之規則,雖係於不成爲無理數之假定下所導得者,但如其根號內之數成爲無理數時,其諸規則,亦皆能適用.例如不論 $\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}, \cdots\cdots$ 及 $\sqrt[n]{abc\cdots\cdots}$ 等爲有理數抑爲無理數,下列等式,皆能成立是.

$$\sqrt[n]{abc\cdots\cdots} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\cdots\cdots\cdots$$

此因無理數算法之規則,與有理數完全相同.故與以前所說明之方法完全相同,其

$$(\sqrt[m]{a}\ \sqrt[m]{b}\ \sqrt[m]{c}\cdots)^m=(\sqrt[m]{a})^m(\sqrt[m]{b})^m(\sqrt[m]{c})^m\cdots\cdots$$
$$=abc\cdots\cdots\cdots$$

隨之 $$\sqrt[m]{abc\cdots\cdots}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b}\sqrt[m]{c}\cdots\cdots\cdots$$

故也.

23. $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ **之條件**

定理 設 $a, b, c, d,$ 各爲有理數, $\sqrt{b}, \sqrt{d}$ 爲不盡根.而

$$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$$

時,則必 $a=c, b=d.$

證明 因 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ 時,則

$$a-c+\sqrt{b}=\sqrt{d}.$$

將上式兩邊各自乘,得

$$(a-c)^2+2(a-c)\sqrt{b}+b=d.$$

移項,得

$$2(a-c)\sqrt{b}=d-b-(a-c)^2.$$

如 $a-c\neq 0$ 時,則上列等式之左邊爲不盡根,而右邊爲有理數,隨之其等式不能成立.故 $a-c$ 不可不等於 0, 卽不可不 $a=c$. 隨之亦不可不 $b=d$.

反之,如 $a=c, b=d$ 時,其 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ 甚明.

例 1. 求 $2a+\sqrt{3}=12+\sqrt{3}$ 時, a 之值如何.

解 由定理,得

$$2a=12.$$

$$\therefore\quad a=6.$$

例 2. 求 $10+\sqrt{21}=10+\sqrt{3x}$ 時,x 之值如何.

解 由定理,得

$$3x=21.$$

$$\therefore \quad x=7.$$

24. 實數系 有理數與無理數為便於與下節所研究之虛數區別起見,統稱之為<u>實數</u>.

無理數之定義,既表示其對於各有理數之關係位置,故二任意無理數相互關係之位置,可由其無理數之定義以推得之.其無理數位於 0 前時為負,位於 0 後時為正.可知無理數及有理數,實排列成一順序的系統.此由實數所組成之順序系統,謂之<u>實數系</u>.

實數系與有理數系相同,亦為一稠密的數列.因有理數不但存在於任意相異之二有理數間,即任意相異之二無理數間,或一有理數與一無理數間,皆能存在故也.

又實數系除具有有理數系所有各性質外,更具有一有理數系所無之性質,即實數系係連續的數列是.因於決定某一數之二數羣 A,B 中,各適當選取一數 a 及 b,能使 a, b,之差較無限小之正數 ε 為小,隨之設此二數羣所決定者為有理數,而此有理數為 A 羣中之最終數,則 B 羣中無最初之數,又設此有理數為 B 羣中最初之數,則 A 羣中無最終之數;再設此二數羣所決定者為無理數,則 A 羣中既無最終之數,B 羣中亦無最初之數;即無論何時,不能 A 羣中既有最終之數,同時 B 羣中復有最初之數故也.

實數系與有理數系相同,其各數皆可以一直線上之點

表之.其以直線上之點表有理數之方法,已於第19節中述之,茲不重贅.

直線上表無理數之點,雖不能由作圖方法以求得之.但可假定表示決定其無理數二數羣A, B之各點間僅有一點存在,此點卽爲表示其二數羣A, B所決定之無理數.

反之,如直線上一點P既經決定後,則由實測OP之結果,隨其P點位於O之右方或左方而附以$+$或$-$號,至少可求得其點所表數之近似值.

25. 虛數 正數之平方根,雖可用有理數或無理數以表之,而負數之平方根,則如前第20節之(9)所述,全無意義.但當解二次方程式時,往往有需要負數之平方根者.例如解$x^2=-4$時,卽不可不求-4之平方根是.因無論如何之有理數或無理數,其平方決無成爲-4之理,隨之於吾人已知之數中,並無適合於此方程式之值存在.

爲使二次方程式此時亦屬有根起見,故對於數之意義,不可不加以擴張,認爲-4之平方根,亦爲數之一種.此種新數,以i表之,定$i^2=-1$,卽$i=\sqrt{-1}$.如a爲任意之有理數或無理數時,其ai通常謂之虛數,但a則視爲i之係數.

虛數之算法,與實數相同.其規則如下.

(1) $ai+bi=(a+b)i;$

(2) $ai-bi=(a-b)i;$

(3) $a\cdot bi=bi\cdot a=abi;$

(4) $ai\cdot bi=-ab;$

(5) $ai\div bi=\frac{a}{b}.$

上列虛數之算法規則中所應注意者,爲ai與bi之積爲變更其係數相乘結果之符號而得之實數$-ab$是.

一實數a與一虛數bi用$+$,$-$等號以連結之者,謂之複素數有時亦單稱虛數.

二複素數$a+bi$, $c+di$相等時,則$a=c$, $b=d$.反之,如$a=c$. $b=d$時,則$a+bi$亦等於$c+di$. 又如$a+bi=0$時,則$a=0$, $b=0$.反之,$a=0$, $b=0$時,則$a+bi=0$.

複素數之算法規則如下.

(6) $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;

(7) $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$;

(8) $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

(9) $\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. 但 $c+di\neq0$.

問　題　一

1. $x=3$時,求$5x^4-7x^3+15x^2-23x+33$之值.

2. $x=a^2-bc$, $y=b^2-ca$, $z=c^2-ab$時,求$(ax+by+cz)-(a+b+c)(x+y+z)$之值如何.

3. 試計算下列各式之值

(a) $8^{\frac{2}{3}}$, (b) $16^{-\frac{1}{2}}$, (c) $\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}$, (d) $27^{-\frac{4}{3}}$.

4. $x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$時,下列各式之值如何.

(a) x^2-y^2, (b) $x^2-4xy+4y^2$, (c) $2x^2+3xy+2y^2$.

5. 試將下列各式化簡之.

(a) $(x^{q-r})^p\times(x^{r-p})^q\times(x^{p-q})^r$,

(b) $\dfrac{(xyz)^{x+y+z}}{x^{y+z}y^{z+x}z^{x+y}}$,

(c) $\left\{x^{\frac{p-q}{pq}}\right\}^r\left\{x^{\frac{q-r}{qr}}\right\}^p\left\{x^{\frac{r-p}{rp}}\right\}^q\div x^{\frac{p-q}{r}+\frac{q-r}{p}+\frac{r-p}{q}}$.

6. 比較下列各組不盡根之大小.

(a) $\sqrt[3]{14}$ 與 $\sqrt{6}$, (b) $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt[3]{41}$.

(c) $\sqrt[15]{16}$ 與 $\sqrt[10]{6}$ 與 $\sqrt[6]{3}$.

7. 將下列各式化簡後,以分數指數表示之.

(a) $\sqrt[3]{a^7}\times\sqrt[5]{a^7}\times a^{-\frac{1}{3}}\div a^{\frac{4}{5}}$,

(b) $\sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a\sqrt[6]{a^{-23}}}}$

(c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{(a^6b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}})\times b^{-\frac{9}{2}}\times(c^{\frac{1}{3}}a^4)^{-\frac{1}{2}}}}$,

(d) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}$,

(e) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

8. $x=a^{-3}+b^{-2}$ 時,$x^2-\dfrac{2}{a^3}x+\dfrac{1}{a^6}-\dfrac{1}{b^4}$ 之值如何.

9. 設 x,y 各爲有理數,試由下列二式各求出其值.

(a) $x+\sqrt{y}=5+\sqrt{7}$, (b) $2x-3\sqrt{5}=4-\sqrt{y}$.

10. 化簡下列諸式.

(a) $(3+\sqrt{-2})(3-\sqrt{-2})$,

(b) $(\sqrt{5}+4\sqrt{-3})(\sqrt{5}-4\sqrt{-3})$,

(c) $1\div\sqrt{-1}\div\sqrt{-1}$,

(d) $(a+bi)^2+(a-bi)^2$.

第三章　式及其算法

26. 代數式　如前第3節所述,其以$+,-,\times,\div,\sqrt{\ }$等計算符號,將文字與文字,或文字與數字連結而成者,謂之代數式,或簡稱曰式.

代數式中之文字,其能於研究之初確定其代表某特別之數值後,於其研究中始終不變其值者謂之已知文字.或謂之已知數.亦稱常數.反之,其文字於研究中能自由任取何值,且能任意由一值以變爲他值者,謂之變數.

表常數時,常用a, b, c等文字;而表變數時,則常用x, y, z等文字.

代數式中,其分母不含變數者,謂之整式.而含變數者,則謂之分數式.例如

$$ax^2+bx+c \text{ 及 } \frac{y}{b}+\sqrt{x}$$

等爲整式,而

$$y+\frac{1}{x} \text{ 及 } \frac{2+x}{1-x}$$

等則爲分數式是.

代數式中,其變數不附根號者,謂之有理式.而附根號者,則謂之無理式.有理式中之爲整式者,特稱之爲有理整式.

例如

$$ax^2+bx+c$$

爲有理整式,而

$$y+\frac{1}{x}\text{ 及 }\frac{2+x}{1-x}$$

爲有理式,其

$$\frac{y}{b}+\sqrt{x}$$

則爲無理式是.

代數式中以+,－等計算符號連結之部分,謂之其式之項.項前爲+號者,謂之正項.項前爲－號者,謂之負項.

整式因其項數之多少,復有單項式,二項式,三項式,及多項式等名稱.

於單項式中,其常數因數之積,謂之爲變數因數之積之係數.例如於 $4ab^2x^3y^4$,其 $4ab^2$ 爲 x^3y^4 之係數是.

變數相同之項特稱爲同類項.例如 $-2x^2y$, bx^2y 及 abx^2y 等,皆爲同類項是.

單項式之次數,爲其中變數之指數之和.例如 $4ab^2x^3y^4$ 之次數爲 7,而 ax^3 之次數爲 3, b 之次數爲 0 是.

多項式之次數,爲其式中最高次數之項之次數.而任意整式之次數,則爲將其式簡約以後所得最簡式之次數.例如 ax^3+bx^2+cx+d 之次數爲 3,而 $(x-1)(x-2)$ 之次數爲 2 是.

如將多項式之項,依其次數之昇降順序排列之,則於計算上,便利諸多.若同次數之項有數個時,則依其某變數之次序排列之.例如

$$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$$

爲依 x 之降羃順序排列者,而

$$f+ex+dx^2+cx^3+bx^4+ax^5$$

則爲依 x 之昇羃順序排列者.又

$$5x^3-2x^2y+4xy^2+y^3$$

依 x 爲降羃順序,依 y 則爲昇羃順序.此種各項之次數相同之多項式,特稱之爲同次多項式.或謂之同次式.

式之算法規則,與數相同.即於前第二章中所使用各文字不令代數而代式時,其已經證明之各種算法定理及規則,亦皆能成立是.玆分別述之如下.

27. 加法及減法 設 A, B 表二代數式時,則 A 與 B 之和及由 A 減 B 之差,爲依計算法則各由 $A+B$ 及 $A-B$ 所得之最簡形式.當化簡此等代數式時,不可不遵從下列諸公式所示之規則.

(1) $A+B-C=A-C+B$

(2) $A-(B+C)=A-B-C$

(3) $A+(B-C)=A+B-C$

(4) $A-(B-C)=A-B+C$

(5) $A(B-C)=AB-AC$

上列諸公式,不外將前第二章所述之交換,結合及配分諸法則擴張之而應用於代數式之減法者.由上列(2),(3),(4)三式,得括弧之規則如下.

前方附有＋號之括弧,其前方之符號可與括弧同時取去之.前方附有－號之括弧,如將其符號與括弧同時取去

之,必須變更其括弧內各項之符號.又由此規則,亦可將括弧插入於式中之任何部分.

如將括弧內更含有括弧之代數式化簡時,可適用上述規則順次將其括弧取去之.例如

$$A-\Big[B-\Big\{C-(D-E)\Big\}\Big]=A-B+\Big\{C-(D-E)\Big\}$$
$$=A-B+C-(D-E)$$
$$=A-B+C-D+E$$

去括弧時,由內開始或由外開始,自可任意爲之.惟由最外部開始時,則無再三變更符號之煩瑣,較爲便利.

二同類項相加時,可將其係數相加之結果,置於其公共之文字前以爲係數;相減時,則將其係數相減之結果,置於其公共之文字前以爲係數.

二多項式相加時,可將其所有各項不變其符號,順次排列之,然後將同類項歸併之.

由一多項式以減其他多項式時,可變其減數各項之符號而加之於被減數.

例 1. 加合 $x^3+ax^2y+2ab^3$ 及 bx^2y-5ab^3 二式.

解 $x^3+ax^2y+2ab^3+(bx^2y-5ab^3)$

$$=x^3+ax^2y+2ab^3+bx^2y-5ab^3$$
$$=x^3+ax^2y+bx^2y+2ab^3-5ab^3$$
$$=x^3+(a+b)x^2y-3ab^3.$$

例 2. 由 $a^3+a^2b+b^3$ 減去 $2a^2b-ab^2+b^3$.

解 $a^3+a^2b+b^3-(2a^2b-ab^2+b^3)$

$$=a^3+a^2b+b^3-2a^2b+ab^2-b^3$$

$$=a^3-a^2b+ab^2.$$

當行加減時,如其多項式有同類項,則以其同類縱列於一直行之下,然後就其同行以行加減時,則尤爲便利.

例 3. 求 $x^3-4x^2y+y^3+y^2x$, $5x^2y+6y^3-7x^3$, 及 $2x^2y-3y^3+5xy^2$ 之和.

解
$$\begin{array}{rrrr}
x^3-4x^2y+ & xy^2+ & y^3 \\
-7x^3+5x^2y & & +6y^3 \\
+)\qquad 2x^2y+ & 5xy^2 & -3y^3 \\
\hline
-6x^3+3x^2y+ & 6xy^2 & +4y^3
\end{array}$$

例 4. 求由 $4a^2+5ab-b^2$ 減去 $-a^2+2ab-3b^2$ 之差.

解
$$\begin{array}{r}
4a^2+5ab-\ b^2 \\
-)\ -a^2+2ab-3b^2 \\
\hline
5a^2+3ab+2b^2
\end{array}$$

28. 乘法 二代數式 A, B 之積,爲依計算法則,由式 A, B 所得之最簡形式.當化簡時,下列諸法則,亦能適用.即

(1) 交換,結合,及配分之法則,

(2) 指數之法則,

(3) 符號之規則,即 $A(-B)=(-A)B=-AB$, $(-A)(-B)=AB$ 等是.

故求二單項式之積時,可將其數字因數之積,以乘其文字因數之積.其積之符號,隨其二單項式之爲同號或異號而爲+或−.

又求多項式與單項式或多項式與多項式之積時,可以

乘數各項逐次以乘被乘數各項,而將其所得之積加合之卽可.

二個以上之單項式或二個以上之多項式相乘時,可將上述二法則反復適用之.

例 1. 求 $-4a^2b^2x^3$, $2bx^4$ 及 $-3a^3x$ 之積.

解

$$-4a^2b^2x^3\times 2bx^4\times -3a^3x=24a^2b^2x^3bx^4a^3x$$
$$=24a^5b^3x^8.$$

例 2. 求 $a-2b$ 及 $ab-b^2+a^2$ 之積.

解 爲便利起見,故將二式依 a 之降冪順序排列之,而將其項數較少之式爲乘數以乘之.

$$\begin{aligned}&(a^2+ab-b^2)(a-2b)\\&=a^3+a^2b-ab^2-2a^2b-2ab^2+2b^3\\&=a^3-a^2b-3ab^2+2b^3.\end{aligned}$$

觀例 2, 可知二因式爲同次式時,其積亦爲同次式.

設二因式爲 x 或其他某文字之多項式或爲二文字之同次式時,則計算時依下述二例排列之,較爲便利.

例 3. 以 $x-3+x^2$ 乘 $2x^3-x^2+5$.

解

$$\begin{array}{rrrrrr}2x^3&-x^2&&+5&&\\ \times)\ x^2&+x&-3&&&\\ \hline 2x^5&-x^4&&+5x^2&&\\ &2x^4&-x^3&&+5x&\\ &&-6x^3&+3x^2&&-15\\ \hline 2x^5&+x^4&-7x^3&+8x^2&+5x&-15\end{array}$$

例 4. 以 $2y+x$ 乘 $x^2-y+2xy$.

解

$$\begin{array}{r} x^2+2xy-y^2 \\ \times)\ x+2y \\ \hline x^3+2x^2y-xy^2 \\ 2x^2y+4xy^2-2y^3 \\ \hline x^3+4x^2y+3xy^2-2y^3 \end{array}$$

29. 分離係數法 如上節之例 3 所示,於行乘法列式時,將其式之各項依 x 之昇羃或降羃排列之,則僅須看出其 x 之位置,即可得知其次數,故計算時可略去其 x,而僅書其係數.在多項式之各項具有數字係數時,採用此法,尤爲便利.如缺某項,則以該項之係數爲 0.玆舉例示之於下.

例 1. 以 x^3+3x^2-2 乘 x^3-3x^2+2.

解

$$\begin{array}{r} 1-3+0+2 \\ \times)\ 1+3+0-2 \\ \hline 1-3+0+2 \\ 3-9+0+6 \\ -2+6-0-4 \\ \hline 1+0-9+0+12-0-4 \end{array}$$

先依 x 之降羃順序,將其各項之係數排列之.次將其下列之各項係數,逐次與上列各項係數相乘,將其積書之於適當之位置而求其總和.如乘數爲 0,則其積即行略去之.因 x^3 與 x^3 之積爲 x^6,故將 $x^6, x^5, x^4, \cdots\cdots$ 等 x 之羃,順次添加於所得係數之積之各項,即得二式之積爲

$$x^6-9x^4+12x^2-4.$$

上述方法,謂之<u>分離係數法</u>.此法不僅能適用之於一文

字之多項式之乘法,卽關於二文字之同次多項式乘法,亦能適用之.因二文字之同次多項式,如將其中一文字依降冪順序排列之,則其他文字卽被依昇冪順序而整列.隨之其任意係數之位置,能表示與其相伴之二文字之冪數.玆舉例示之於下.

例 2. 求 $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$……之結果.

解 因乘數之係數常爲1+1,故各式之結果,爲逐次相乘所得之結果.

(1) $1+1$ 卽 $a+b$

$$\begin{array}{r}1+1\\ \hline 1+2+1\end{array}$$

(2) 卽 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$$\begin{array}{r}1+2+1\\ \hline 1+3+3+1\end{array}$$

(3) 卽 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

$$\begin{array}{r}1+3+3+1\\ \hline 1+4+6+4+1\end{array}$$

(4) 卽 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
$=(a+b)^4$

繼續此法,可求得 $(a+b)^n$ 至任何次數.

如本例所示,將多項式之冪實行乘法而求出其結果時,謂之<u>展開</u>.

例 3. 證明 $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)(a-b)=a^5-b^5$.

解

$$\begin{array}{rl} & 1+1+1+1+1 \\ \times) & 1-1 \\ \hline & 1+1+1+1+1 \\ & \quad -1-1-1-1-1 \\ \hline & 1+0+0+0+0-1 \end{array}$$

因積之最高次數為5,故得

$$a^5+0\cdot a^4b+0\cdot a^3b^2+0\cdot a^2b^3+0\cdot ab^4-b^5,$$

卽 a^5-b^5.

由上例所示方法,可證明下列三等式,無論何時,皆屬眞確.卽 n 為正整數時,

$$(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})(a-b)=a^n-b^n.$$

n 為正奇數時,

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})(a+b)=a^n+b^n.$$

n 為正偶數時,

$$(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})(a+b)=a^n-b^n,$$

30. 除法 設 A,B 為任意二代數式而 B 不等於 0 時,則所謂以 B 除 A 所得之商云者,係依計算規則,將分數 $\frac{A}{B}$ 約成最簡之形式.當計算代數式之商時,其所遵守之規則如下列諸公式所示.

(1) $\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$.

(2) $m>n$時, $\frac{A^m}{A^n}=A^{m-n}$.

$m<n$, $\frac{A^m}{A^n}=\frac{1}{A^{n-m}}$.

(3) $\frac{-A}{B}=-\frac{A}{B}$, $\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$, $\frac{-A}{-B}=\frac{A}{B}$.

(4) $\frac{A\pm B}{C}=\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}$.

卽須遵守下述之四規則是.

(1) 實行約分.

(2) 分子分母中有同文字(或式)異羃之因式時,則將其指數較低之因式消去,同時復由較高之指數中減去其較低之指數.

(3) 隨分子分母之符號相同或相異,其商之符號爲＋或爲－.

(4) 配分法則.

故以單項式除單項式時,置被除數於除數之上,作成分數式而簡約之卽可.

又以單項式除多項式時,其被除數之各項,皆須以除數除之,然後將其除得之各商,再行加合之.

再以多項式除多項式時,除易於看出其分子分母之公因式者,得依因式分解之方法,析出其公因式而消去之外;一般多用所謂長除法之方法以計算之.卽將除數被除數各依同一文字之降羃或昇羃順序排列之,而以除數之首項,除被除數之首項,其所得者卽爲商之第一項;次以商之第一項,乘除數之各項,將其所得之積,依同類項各書之於被除數之下而以被除數減之;再以除數之首項,除此差之首項,將其所得之商以爲商之第二項;更用商之第二項,遍乘除數之各項,將其所得之積依同類項置之於第一次差之下而由第一次差以減之;復以除數之首項,除此第二次差之首項,以爲商之第三項.如此逐次除之,能除盡時,則其某次之差,當成爲零.如不能除盡時,則減至相當之次數時,其所剩之差,當較除數首項之次數爲低.此較除數首項次

數爲低之殘餘部分,通常皆稱之爲剩餘.

例 1. 求 $-8a^3b^2c\div6ab^6d$ 及 $(ax^3-4a^2x^2)\div ax$ 之商.

解
$$-8a^3b^2c\div6ab^6d=\frac{-8a^3b^2c}{6ab^6d}=-\frac{8a^3b^2c}{6ab^6d}$$
$$=-\frac{4a^2c}{3b^4d}.$$
$$(ax^3-4a^2x^2)\div ax=\frac{ax^3-4a^2x^2}{ax}=\frac{ax^3}{ax}-\frac{4a^2x^2}{ax}$$
$$=x^2-4ax.$$

例 2. 求 $(x^2-y^2)\div(x^2+2xy+y^2)$ 之商.

解 $$(x^2-y^2)\div(x^2+2xy+y^2)=\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$=\frac{x-y}{x+y}.$$

例 3. 求 $(8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3)\div(2a+b)$ 之商.

解
$$\begin{array}{r l}
2a+b)\,8a^3+8a^2b+4ab^2+b^3 & (4a^2+2ab+b^2\\
\underline{8a^3+4a^2b} & \\
4a^2b+4ab^2+b^3 & \\
\underline{4a^2b+2ab^2} & \\
2ab^2+b^3 & \\
\underline{2ab^2+b^3} &
\end{array}$$

例 4. 求 $(2x^4+3x^3+4x^2+x-2)\div(x^2-x+1)$ 之商.

解
$$\begin{array}{r l}
x^2-x+1)\,2x^4+3x^3+4x^2+x-2 & (2x^2+5x+7\\
\underline{2x^4-2x^3+2x^2} & \\
5x^3+2x^2+\ x-2 & \\
\underline{5x^3-5x^2+5x} & \\
7x^2-4x-2 & \\
\underline{7x^2-7x+7} & \\
3x-9 &
\end{array}$$

除法與乘法相同,亦可用分離係數法以計算之.茲就例3計算之如下.

$$
\begin{array}{r|l}
2+1)\,8+8+4+1\,(4+2+1 & \\
\underline{8+4} & \\
4+4+1 & \\
\underline{4+2} & \\
2+1 & \\
\underline{2+1} &
\end{array}
$$

因二式皆爲 a, b 之同次式,其二式各首項之商爲a^2,故所得之商爲$4a^2+2ab+b^2$.

31. 開平方法 設某有理整式P恰等於他有理整式Q之n次冪時,則此有理式Q,謂之有理式P之第n次根.知某有理式而求其根之方法,謂之開方.其求平方根之方法,特稱之爲開平方法.或簡稱之爲開平法.

單項式平方根之求法,由前第20節所述根之計算法則,易於推得其規則如下.

單項式P之平方根,等於以2除其各文字因數之指數所得各文字之冪之積,更以其數係數之平方根乘之.

例 1. 求$4a^2x^4$之平方根.

解 $$\sqrt{4a^2x^4}=\sqrt{4}\sqrt{a^2}\sqrt{x^4}=2\cdot a^{\frac{2}{2}}\cdot x^{\frac{4}{2}}=2ax^2$$

例 2. 求$\dfrac{9x^2}{16a^2}$之平方根.

解 $$\sqrt{\frac{9x^2}{16a^2}}=\frac{\sqrt{9x^2}}{\sqrt{16a^2}}=\frac{3\cdot x^{\frac{2}{2}}}{4\cdot a^{\frac{2}{2}}}=\frac{3x}{4a}$$

凡式或數之平方根,皆有絕對值相等而符號相反之二根.但爲簡單起見,一般皆以根號 $\sqrt{\ }$ 表其二根中之正根,而負根則以 $-\sqrt{\ }$ 表之.

多項式平方根之求法,較爲複雜.茲述之於下.

設 P 爲完全平方之整式,$a, b, c, \cdots\cdots$ 等爲 P 之平方根依 x 降冪順序而排列之項,卽假定 $P=(a+b+c+\cdots\cdots)^2$ 時,則問題歸着於知 P 而求 $a, b, c, \cdots\cdots$ 等項.

不論 $a, b, c, \cdots\cdots$ 等之值如何,下列諸等式皆能成立.卽

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b$$

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$

$$=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c$$

$$+\{2(a+b+c)+d\}d$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如上列諸等式所示,凡於左邊添加一新文字時,其右邊卽行添加一成羣之項,卽添加一「於已求得各文字之和之二倍加一新文字後,再以此新文字乘之.」所得結果之羣.故由假設,因

$$P=(a+b+c+\cdots\cdots)^2$$

$$\therefore \quad P=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c$$

$$+\{2(a+b+c)+d\}d+\cdots\cdots$$

上列等式右邊各羣之首項,卽 $a^2, 2ab, 2ac, 2ad, \cdots\cdots$ 等皆爲較其後任何項爲高之 x 之冪.由上列等式,故可推得 $a, b,$

$c,\cdots\cdots$ 等項之求法順序如下.

(1) a 爲 P 之首項之平方根甚明.

(2) 由 P 減 a^2,因其差 R_1 之首項不可不等於 $2ab$,故以 $2a$ 除此差 R_1 之首項,即得其根之第二項 b.

(3) 於求得 b 後,作成 $(2a+b)b$ 而由第一次差 R_1 減之,其所得之差 R_2 之首項,不可不等於 $2ac$. 故以 $2a$ 除此差 R_2 之首項,即得其根之第三項 c.

(4) 繼續上法至減得之差較 a 之次數爲低而止.

設依上法所求得最後之差爲 0,則如假設所言,P 爲完全平方,其平方根爲 $a+b+c+d+\cdots\cdots$.設其最後之差不爲 0,則 P 非完全平方,由上法可化成

$$P=(a+b+c+\cdots\cdots)^2+R$$

之形式.但 R 爲低於 a 之次數之整式.

例 3. 求 $4x^4-4x^3+13x^2-6x+9$ 之平方根.

解

$$\begin{array}{rl|l}
 & P=4x^4-4x^3+13x^2-6x+9 & \underline{2x^2-x+3=a+b+c} \\
 & a^2=\underline{4x^4} & \\
2a+b=4x^2-x & -4x^3+13x^2-6x+9=R_1=P-a^2 & \\
 & \underline{-4x^3+\quad x^2}\qquad\qquad=(2a+b)b & \\
2(a+b)+c=4x^2-2x+3 & 12x^2-6x+9=R_2=P-(a+b)^2 & \\
 & \underline{12x^2-6x+9}=\{2(a+b)+c\}c & \\
 & 0=R=P-(a+b+c)^2 &
\end{array}$$

本例因爲學者便於與開平法之公式對照起見,故一一皆與公式中各項對照而排列之,但實際計算時,其公式中各項可省略之,而依例 4 排列.

例 4. 求 $4x^6+32x^5+80x^4+60x^3-8x+1$ 之平方根.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^6+32x^5+80x^4+60x^3-8x+1 \quad \big|\ \underline{2x^3+8x^2+4x-1} \\
 & \underline{4x^6} \\
4x^3+8x^2 & 32x^5+80x^4+60x^3 \qquad -8x+1 \\
 & \underline{32x^5+64x^4} \\
4x^3+16x^2+4x & 16x^4+60x^3 \qquad -8x+1 \\
 & \underline{16x^4+64x^3+16x^2} \\
4x^3+16x^2+8x-1 & -4x^3-16x^2-8x+1 \\
 & \underline{-4x^3-16x^2-8x+1} \\
 & \qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

32. 數之開平法 數之平方根,可依整式之開平法,同樣以求得之.茲述之於下.

因 $\cdots\cdots, 0.01^2=0.0001,\ 0.1^2=0.01,\ 1^2=1,$

及 $10^2=100,\ 100^2=10000, \cdots\cdots\cdots\cdots$

故可知二位之數之平方,介於 100 與 10000 間,卽爲三位或四位之數.一位之數之平方,爲一位或二位之數.又由小數第一位開始之數之平方,介於 1 與 0.01 間,卽爲由小數第一位或第二位開始之數.其由小數第二位開始之數之平方,爲由小數第三位或第四位開始之數.隨之如將所與之數由小數點起每隔二位左右區分之,則可得知其平方根之最高位.例如區分 148225 成 14|82|25 時,得知其平方根之最高位爲百;又區分 0.004356 成 0.00|43|56 時,得知其平方根爲由小數第二位開始之數是.

例 1. 求 53361 之平方根.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & \qquad\qquad\quad a+\ \ b+c \\
 & 5\,|\,33\,|\,61\ \ \underline{|\,200+30+1} \\
 & 4\ \ 00\ \ 00\ \ =a^2 \\
\hline
2a=400 & 1\ \ 33\ \ 61\ \ =R_1 \\
2a+b=430 & 1\ \ 29\ \ 00\ \ =(2a+b)b \\
\hline
2(a+b)=460 & \quad 4\ \ 61\ \ =R_2 \\
2(a+b)+c=461 & \quad 4\ \ 61\ \ =\{2(a+b)+c\}c \\
\hline
 & \qquad\ 0
\end{array}
$$

說明　先由 5 求得其平方等於 5 或稍小之數 2, 此 2 卽相當於整式開平方時之 a. 由 53361 減去相當於 a^2 之數 40000, 然後以相當於 $2a$ 之數 400 除其相當於 R_1 之數 13361, 卽得相當於 b 之數 30. 次由相當於 R_1 之數 13361 減去相當於 $(2a+b)b$ 之數 12900, 而求得相當於 R_2 之數 461, 更以相當於 $2(a+b)$ 之數 460 除此相當於 R_2 之數 461 時, 因而得相當於 c 之數 1.

如本例所示之開方式,亦係爲學者便於與公式中各項對照起見,故一一對照排列之.但一般之排列方法,則皆如下式所示,其各處之 0 亦可略去之.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 5\,|\,33\,|\,61\ \ \underline{|\,231} \\
 & 4 \\
\hline
43 & 1\ \ 33 \\
 & 1\ \ 29 \\
\hline
461 & \quad 4\ \ 61 \\
 & \quad 4\ \ 61 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}
$$

又不爲完全平方之數,如由上述開平方法以開方時,則

可求得其平方根之近似值.

例2. 求7.342之平方根近似值至小數第三位止.

解

$$
\begin{array}{r|l}
 & 7|.34|20|00\ \ |\underline{2.709} \\
 & 4 \\
\cline{2-2}
47 & 3\ \ 34 \\
 & 3\ \ 29 \\
\cline{2-2}
5409 & 52000 \\
 & 48681 \\
\cline{2-2}
 & \ \ 3319
\end{array}
$$

$\therefore\quad \sqrt{7.342} \fallingdotseq 2.709.$

33. **開立方法** 求某有理整式立方根之方法,謂之<u>開立方法</u>.或簡稱之爲<u>開立法</u>.

單項式立方根之求法,亦可由前第20節所述根之計算法則易於推得其規則如下.

單項式P之立方根,等於以3除其各文字因數之指數所得各文字之冪之積,更以其數係數之立方根乘之.

例1. 求$27a^3x^6y^9$之立方根.

解
$$\sqrt[3]{27a^3x^6y^9}=\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{a^3}\sqrt[3]{x^6}\sqrt[3]{y^9}$$
$$=3\cdot a^{\frac{3}{3}}\cdot x^{\frac{6}{3}}\cdot y^{\frac{9}{3}}=3ax^2y^3$$

例2. 求$-x^3y^6z^3$之立方根.

解
$$\sqrt[3]{-x^3y^6z^3}=\sqrt[3]{-1}\sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{y^6}\sqrt[3]{z^3}.$$
$$=-1\cdot x^{\frac{3}{3}}\cdot y^{\frac{6}{3}}\cdot z^{\frac{3}{3}}=-xy^2z$$

設多項式爲完全立方時,則其立方根亦可由與前第31節所述平方根求法類似之其他方法以求得之,茲述之於下.

設 P 爲關於 x 之多項式,其最高次數爲 3 之倍數,且各項皆依 x 之降冪順序而排列時,假定此多項式 P 爲完全立方,其立方根依 x 降冪順序排列後之各項爲 a, b, c……等,則

$$P=(a+b+c+\cdots\cdots)^3.$$

隨之問題歸着於知 P 而求 $a, b, c,$…… 等項.

不論 $a, b, c,$…… 等之值如何,下列諸等式,皆能成立.即

$$(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$

$$(a+b+c)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$$
$$+\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如上列諸等式所示,凡於左邊添加一新文字時,其右邊卽行添加一成羣之項,卽添加一「於已求得各文字之和之平方三倍,加一以新文字乘此已得各文字之和之三倍,及新文字之平方,而以新文字乘之.」所得結果之羣.故由假設,因 $P=(a+b+c+\cdots\cdots)^3$

$\therefore\ P=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c+\cdots\cdots$

上列等式右邊各羣之首項,卽 $a^3, 3a^2b, 3a^2c,$…… 等,皆爲較其後任何項爲高之 x 之冪.由上列等式,故可推得 $a, b, c,$…… 等項之求法順序如下.

(1) a 爲 P 之首項之立方根甚明.

(2) 由 P 減 a^3,因其差 R_1 之首項不可不等於 $3a^2b$,故以 $3a^2$ 除此差 R_1 之首項,卽得其根之第二項 b.

(3) 於求得 b 後,作成 $(3a^2+3ab+b^2)b$ 而由第一次差

R_1減之.其所得之差R_2之首項,不可不等於$3a^2c$,故以$3a^2$除此差R_2之首項,卽得其根之第三項 c.

(4) 繼續上法,至減得之差較a^2之次數爲低而止.設依上法所求得最後之差爲0,則如假設所言,P爲完全立方,其立方根爲 $a+b+c+\cdots\cdots$. 設其最後之差不爲0,則P非完全立方,由上法可化成

$$P=(a+b+c+\cdots\cdots)^3+R$$

之形式.但R爲低於a^2之次數之整式.

例 3. 求$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$之立方根.

解

$$
\begin{array}{rl|l}
 & P=x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & \underline{x^2+2x+3=a+b+c} \\
 & a^3=x^6 & \\
\hline
3a^2=3x^4 & 6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27=R_1=P-a^3 & \\
3ab+b^2=\quad 6x^3+4x^2 & & \\
\hline
3a^2+3ab+b^2=3x^4+6x^3+4x^2 & 6x^5+12x^4+\ 8x^3 \qquad =(3a^2+3ab+b^2)b & \\
\hline
3(a+b)^2=3x^4+12x^3+12x^2 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27=R_2=P-(a+b)^3 & \\
3(a+b)c+c^2=\quad 9x^2+18x+9 & & \\
\hline
3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2=3x^4+12x^3+21x^2+18x+9 & 9x^4+36x^3+63x^2+54x+27=\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c & \\
\hline
 & 0=R=P-(a+b+c)^3 &
\end{array}
$$

本例因爲學者便於與開立法之公式對照起見,故一一皆與公式中各項對照而排列之.但實際計算時,其公式中各項可省略之而依例 4 排列.

例 4. 求$8x^6-12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27$之立方根.

解

$$
\begin{array}{lll}
 & & 8x^6-12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27 \;\underline{\big|\,2x^2-x+3} \\
 & & \underline{8x^6} \\
 & 12x^4 & -12x^5+42x^4-37x^3+63x^2-27x+27 \\
 & \underline{(6x^2-x)(-x)} & \\
 & 12x^4-\ 6x^3+x^2 & \\
 & \underline{x^2} & \underline{-12x^5+\ 6x^4-x^3} \\
\left.\begin{array}{l}6x^2-\ x\\ \underline{-2x}\end{array}\right\} & 12x^4-12x^3+3x^2 & 36x^4-36x^3+63x^2-27x+27 \\
6x^2-3x+3 & \underline{(6x^2-3x+3)3} & \\
 & 12x^4-12x^3+21x^2-9x+9 & \underline{36x^4-36x^3+63x^2-27x+27} \\
 & & 0
\end{array}
$$

上列算式中左方應書$3(2x^2-x)$處,而書加$2(-x)$卽$-2x$於$6x^2-x$以代之,又右方中層應書$3(2x^2-x)^2$卽$12x^4-12x^3+3x^2$處,而求 } 符號所指三式之和卽可.

34. 數之開立法 數之立方根.可依整式之開立法同樣以求得之.茲述之於下.

因……,$0.01^3=0.000001$, $0.1^3=0.001$, $1^3=1$,

及$10^3=1000$, $100^3=1000000$,…………

故可知二位之數之立方,介於 1000 與 1000000 間,卽爲四位或六位之數.一位之數之立方,爲一位或三位之數.又由小數第一位開始之數之立方,介於 1 與0.001間,卽爲由小數第一位乃至第三位開始之數.其由小數第二位開始之數之立方,爲由小數第四位乃至第六位開始之數.隨之如將所與之數由小數點起,每隔三位左右區別之,則可得知

其立方根之最高位.例如區分66430125成66|430|125時,得知其立方根之最高位爲百;又區分0.000000216成0.000|000|216時,得知其立方根爲由小數第三位開始之數是.

例 1. 求152273304之立方根.

解

$$
\begin{array}{rrl}
 & & 152|273|304\ \underline{|534} \\
153 & 7500 & 125 \\ \cline{3-3}
 & 459 & 27\ 273 \\ \cline{2-2}
 & 7959 & \\
 & 9 & 23\ 877 \\ \cline{2-3}
6 & 842700 & 3\ 396\ 304 \\ \cline{1-1}
1594 & 6376 & \\ \cline{2-2}
 & 849076 & 3\ 396\ 304 \\ \cline{3-3}
 & & \qquad 0
\end{array}
$$

今置 $P=152273304, a=500, b=30, c=4$ 而與整式之開立法比較之如下.

$$
\begin{array}{lll}
 & & P \qquad\qquad \underline{|a+b+c} \\
3a+b & 3a^2 & a^3 \\ \cline{3-3}
 & (3a+b)b & P-a^3 \\ \cline{2-2}
 & 3a^2+3ab+b^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 \\ \cline{3-3}
 & b & P-(a+b)^3 \\ \cline{2-2}
2b & 3(a+b)^2 & \\ \cline{1-1}
3(a+b)+c & \{3(a+b)+c\}c & \\ \cline{2-2}
 & 3(a+b^2)+3(a+b)c+c^2 & 3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \\ \cline{3-3}
 & & P-(a+b+c)^3
\end{array}
$$

又不爲完全立方之數由上述開立法以開方時,則可求得其根之近似值.

例 2. 求30之立方根近似值至小數第四位止.

			30	3.1072
解	91	2700	27	
		91	3000	
		2791	2791	
		1	209000000	
	2	28830000		
	9307	65149		
		28895149	202266043	
		49	6733957000	
	14	2896034700		
	93212	186424		
		2896221124	5792442248	
			941514752	

85. 有理分數式之算法 設 A, B 表任意二整式而 B 不等於 0 時,則將以 B 除 A 所得之商書成 $\frac{A}{B}$ 之形式者,謂之分數式. A 謂之分子, B 謂之分母, A, B 同謂之分數式之兩項.如 A, B 二式皆爲有理式時,則 $\frac{A}{B}$ 之形式,特稱之爲有理分數式.又有理分數式分子之次數低於分母時,特稱之爲眞分數式.

分數式之算法,與前第18節所述之分數算法,完全相同.能約分亦能通分.換言之,即分數式之兩項,能以共同之因式以乘除之,而其値不變.其以共同因式除其分數式之兩項,使分數式化爲最簡單形式之方法,謂之約分.又各選擇適當之因式以乘諸分數式之兩項,使諸分數式皆化成相

同分母之方法,謂之通分.

求分數式之代數的和時,其次序如下.

(1) 先行通分,使各分數式之分母,皆行化爲各分數式分母之最低公倍式.

(2) 將通分後各分數式之分子,以其原分數式前之符號連結之,置之於公分母之上以爲新分數式之分子.

(3) 將所得之新分數式,用約分法化成最簡之形式.

上述規則,在分數式與整式混合時,亦能適用之.因整式可視爲分母爲 1 之分數式故也.又某分數式中,如其兩項有公共之因式且此因式在其他分母中皆不含有時,則先將此分數式化爲不可約分數式後,再行通分,更爲便捷.

例 1. 化簡 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}$.

解 因此三分數式分母之最低公倍式爲 a^2-b^2,故

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}-\frac{2b}{a^2-b^2}=\frac{a-b}{a^2-b^2}+\frac{a+b}{a^2-b^2}-\frac{2b}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b-2b}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b}{a^2-b^2}=\frac{2}{a+b}.$$

例 2. 化簡 $x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$.

解 因第一分母爲 1,第二分母爲 $-(x-1)$,第三分母爲 x^2-1,故三分母之最低公倍式爲 x^2-1.

$$\therefore\quad x-\frac{1}{1-x}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}=\frac{x^3-x}{x^2-1}+\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{x^3-3x+1}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^3-x+x+1-x^3+3x-1}{x^2-1}=\frac{3x}{x^2-1}.$$

例 3. 化簡 $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x+2}$.

解 上列分數式,以分爲二組化簡時較爲便利.即

$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{x+2-(x-2)}{x^2-4}=\frac{4}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{x+1}-\frac{2}{x-1}=2\cdot\frac{x-1-(x+1)}{x^2-1}=\frac{-4}{x^2-1}.$$

$$\frac{4}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-1}=4\cdot\frac{x^2-1-(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2-1)}=\frac{12}{x^4-5x^2+4}.$$

二個以上分數式之積,亦爲一分數式.其分子爲各原分數式諸分子之積,其分母爲各原分數式諸分母之積.若以整式乘分數式時,則僅須將其整式以乘分數式之分子卽可.

將分數式昇高至若干次之乘羃時,只須將其分數式之分子分母各昇高至同次之乘羃卽可.

以一分數式除他分數式時,只須將其除數之分子分母顚倒之以乘其被除數卽可.若以整式除分數式時,則以其整式乘該分數式之分母卽可.

例 4. 以 $\frac{x+1}{x-1}$ 乘 $\frac{x^3-1}{x^3+1}$.

解 $$\frac{x^3-1}{x^3+1}\times\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x^3-1)(x+1)}{(x^3+1)(x-1)}=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}.$$

例 5. 以 $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}$ 除 $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}$.

解 $$\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\div\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4-y^4}=\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2}\times\frac{x^4-y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

$$=\frac{x^2+y^2}{x^2+xy+y^2}.$$

於分數式$\frac{A}{B}$,如其A,B各不爲整式而爲分數式時,則分數式$\frac{A}{B}$,謂之<u>繁分數式</u>.化簡繁分數式時,由分數式之定義,以分母之分數,除其分子之分數卽可.或同時以A,B二分數式分母之最低公倍式以乘A,B二式,亦無不可.總之以何法手續爲簡便,卽採用何法.

例 6. 化簡$\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}+1}$.

解 $$\frac{\dfrac{a+b}{a-b}+1}{\dfrac{a-b}{a+b}+1}=\frac{\dfrac{a+b+a-b}{a-b}}{\dfrac{a-b+a+b}{a+b}}=\frac{\dfrac{2a}{a-b}}{\dfrac{2a}{a+b}}=\frac{2a}{a-b}\times\frac{a+b}{2a}$$
$$=\frac{a+b}{a-b}.$$

例 7. 化簡$\dfrac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}$.

解 $$\frac{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{b}{a+b}}{\dfrac{a}{a+b}+\dfrac{b}{a-b}}=\frac{a(a+b)-b(a-b)}{a(a-b)+b(a+b)}$$
$$=\frac{a^2+ab-ba+b^2}{a^2-ab+ba+b^2}=1.$$

例 8. 化簡$\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$.

解 如本例題所示形式之繁分數式,謂之<u>連分數式</u>.連

分數式之化簡法,通常皆自其最下部逐次向上方化簡之.

$$\frac{a}{b+\frac{c}{d+\frac{e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{c}{\frac{df+e}{f}}}=\frac{a}{b+\frac{cf}{df+e}}$$

$$=\frac{a}{\frac{b(df+e)+cf}{df+e}}=\frac{a(df+e)}{b(df+e)+cf}$$

$$=\frac{adf+ae}{bdf+be+cf}$$

36. 無理式之算法　如前第26節中所述,凡代數式中之變數附有根號時,則此代數式謂之無理式.或稱根式.但無理式之數值,不必定為無理數.例如$a=9$時,$\sqrt{a}=\sqrt{9}=3$;又$a=4,b=3$時,$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$是.

無理式之變形及計算方法,如利用前第20節所述之指數法則,則至為便利.茲舉例示之於下.

例 1.　化簡$\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a}}}$.

解　$$\sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{a}}}=(a\times a^{-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$$

例 2.　求　$\sqrt[4]{ab^3}\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}$之結果.

解　$$\sqrt[4]{ab^3}\sqrt[6]{a^5b}\div\sqrt[3]{a^2b^2}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\cdot a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$$

$$=a^{\frac{1}{4}+\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{3}{12}}=\sqrt[12]{a^5b^3}$$

例 3.　化簡$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\right)^3$.

解　$\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}\right)^3=\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}\right)^3=(x^{\frac{2}{3}})^3+3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2y^{-\frac{2}{3}}$

$+3(x^{\frac{2}{3}})\left(y^{-\frac{2}{3}}\right)^2+\left(y^{-\frac{2}{3}}\right)^3=x^2+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$

$+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}$

$=x^2+3\sqrt[3]{\frac{x^4}{y^2}}+3\sqrt[3]{\frac{x^2}{y^4}}+\frac{1}{\sqrt{y}}$

無理式常可以其他代數式乘之而化成有理式,例如

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2=a^2-b$$

是.如此之二無理式,互謂之<u>有理化因式</u>.即 $a+\sqrt{b}$ 爲 $a-\sqrt{b}$ 之有理化因式,而 $a-\sqrt{b}$ 亦爲$a+\sqrt{b}$ 之有理化因式也.

又無理分數式$\frac{A}{B}$如以其分母 B之有理化因式乘其兩項時,則可化成具有有理分母且與原分數式等值之分數式.

例 4.　求$2(\sqrt{x})^4+3x(\sqrt{x})^3$之有理化因式.

解　因 $2(\sqrt{x})^4+3x(\sqrt{x})^3$ 可書作 $2x^2+3x^2\sqrt{x}$,故其有理化因式爲$2x^2-3x^2\sqrt{x}$

例 5.　求　$1+\sqrt{x}+\sqrt{y}+2\sqrt{xy}$ 之有理化因式.

解　$1+\sqrt{y}+\sqrt{x}(1+2\sqrt{y})$…………(1)

$1+\sqrt{y}-\sqrt{x}(1+2\sqrt{y})$…………(2)

以(2)式乘(1)式,得 $(1+\sqrt{y})^2-x(1+2\sqrt{y})^2$

即　$1-x+y-4xy+2\sqrt{y}(1-2x)$ ……(3)

$1-x+y-4xy-2\sqrt{y}(1-2x)$ ……(4)

以(4)式乘(3)式,得 $(1-x+y-4xy)^2-4y(1-2x)^2$……(5)

因(5)式全爲有理式,故可知(2)式與(4)式之積,爲(1)之有理化因式.

例 6. 求$\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}$之有理化因式.

解 $\sqrt[3]{a}+\sqrt{b}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}=(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}$…………(1)

由第29節之公式,此$(a^2)^{\frac{1}{6}}+(b^3)^{\frac{1}{6}}$可整除有理式$a^2-b^3$,而其商爲

$$(a^2)^{\frac{5}{6}}-(a^2)^{\frac{4}{6}}(b^3)^{\frac{1}{6}}+\cdots\cdots-(b^3)^{\frac{5}{6}}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

故(2)式爲(1)式之有理化因式.

例 7. 化$\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$之分母成有理分母.

解
$$\frac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$=\frac{(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})^2}{(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2})(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2})}$$
$$=\frac{x^2+\sqrt{x^4-a^4}}{a^2}$$

問 題 二

1. 求下列各式之和.

(a) $\frac{3}{2}a^2b-5ab^2+7b^3,\ 2a^3-\frac{1}{2}a^2b+5ab^2,\ 3b^3-2a^3.$

(b) $3a^2-2ac-2ab,\ 2b^2+3bc+3ab,\ c^2-2ac-2bc.$

(c) $a^3-a^2+a,\ a^2-a+1,\ a^4-a^3-1.$

(d) $4a^3+a^2b-5b^3,\ \frac{5}{3}a^3-6ab^2-a^2b,\ \frac{1}{3}a^3+10b^3,$

$6b^3-15ab^2-4a^2b-10a^3.$

2. 求下列各二式之差.

(a) 由 $5b^4-3ab^3+4a^2b^2$ 減 $5a^4-3a^3b+4a^2b^2$.

(b) 由 $-3x^2-5xy+4y^2$減$-5x^2+2xy-3y^2$.

(c) 由 $c-\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b$ 減 $\frac{a}{2}+\frac{3}{2}b-\frac{5}{3}c$.

(d) 由 $-5x^3+4x^2-3x+5$ 減 $-8x^3-2x^2+4x-6$.

3. 求下列各式之積.

(a) $x^2-x+1, x^2+x+1, x^4+x+1$.

(b) $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab, a+b+c$.

(c) $a+b+c+d, a+b-c-d, a-b+c-d, a-b-c+d$.

(d) $a^2x^2+b^2y^2-abxy, a^2x^2-b^2y^2+abxy,$
$abxy-a^2x^2+b^2y^2$.

4. 展開下列各式.

(a) $(a-b)^3$.

(b) $(a+b+c)^3$.

(c) $(a+b+c-d)^3$.

(d) $(a+b-c)^2(a^2+b^2-c^2)$.

5. 求下列各二式之商.

(a) 以 x^2+xy+y^2 除 $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$.

(b) 以 $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 除 $x^5-5x^4y+7x^3y^2-x^2y^3$
$-4xy^4+2y^5$.

(c) 以 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y$ 除 $x^4+\frac{1}{2}x^3y-\frac{2}{3}x^2y^2+\frac{3}{5}xy^3-y^4$.

(d) 以 $a+b+c$ 除 $a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2$

6. 用分離係數法求下列各式之積.

(a) $x^3+x^2+x+1,\ x-1.$

(b) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4,\ y-x.$

(c) $3x^2-xy+2y^2,\ 3y^2-xy+2x^2.$

(d) $x^2-ax+a^2,\ x^2+ax+a^2,\ x^4-a^2x^2+a^4.$

7. 用分離係數法求下列各二式之商.

(a) 以 $1+3x-5x^2$ 除 $1+x-8x^2+19x^3-15x^4$

(b) 以 $1-2x+x^2$ 除 $1-6x^5+5x^6.$

(c) 以 x^2-3x+2 除 $x^4+2x^3-7x^2-8x+12.$

(d) 以 x^2-2x+1 除 $x^6-2x^3+1.$

8. 求下列各有理式之平方根.

(a) $25a^4+9b^4+4c^4+12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2.$

(b) $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1.$

(c) $49+112x^2+70x^3+64x^4+80x^5+25x^6.$

(d) $x^4-2x^3+5x^2-6x+8-6x^{-1}+5x^{-2}-2x^{-3}+x^{-4}.$

9. 求下列各有理式之立方根.

(a) $x^3-24x^2+192x-512.$

(b) $x^6-3x^5y+6x^4y^2-7x^3y^3+6x^2y^4-3xy^5+y^6.$

(c) $27x^6-27x^5-99x^4+71x^3+132x^2-48x-64.$

(d) $1-9x^2+33x^4-63x^6+66x^8-36x^{10}+8x^{12}.$

10. 求下列各數之平方根.

(a) 1237069584.

(b) 3094251876.

(c) 527380.9641,

(d) 9814.072356.

11. 求下列各數之方根至小數第四位止.

(a) $\sqrt[3]{2.718281828}$.

(b) $\sqrt[3]{60236.288}$.

(c) $\sqrt[6]{244140625}$.

(d) $\sqrt[9]{42720835.145912}$.

12. 化簡下列各式.

(a) $\dfrac{a}{a-x}+\dfrac{a}{a+x}+\dfrac{2a^2}{a^2+x^2}+\dfrac{4a^2}{a^4+x^4}$.

(b) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$.

(c) $\dfrac{a^2}{(a-b))a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$.

(d) $\dfrac{a(b+c-a)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b(c+a-b)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c(a+b-c)}{(c-a)(c-b)}$.

(e) $\dfrac{a(b+c)}{b+c-a}+\dfrac{b(c+a)}{c+a-b}+\dfrac{c(a+b)}{a+b-c}$.

(f) $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1+x+\dfrac{2x^2}{1-x}}}$.

13. 求下列各式之有理化因式.

(a) $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b^4}$.

(b) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{x^5}+\sqrt{y}$.

(c) $a+b\sqrt[3]{x}+c\sqrt[3]{x^2}$.

(d) $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

14. 計算下列各式之結果.

(a) $\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{\frac{1}{2}}$.

(b) $4\sqrt{xy}\times 2\sqrt[3]{x^2y^2}$.

(c) $6\sqrt{xy}\div 2\sqrt[4]{xy}$.

(d) $(2\sqrt[6]{xy^2})^9$.

(e) $\sqrt[3]{54a\sqrt{b}}$.

15. 將下列各無理式化成分母爲有理式之同值分數式.

(a) $\dfrac{2a-\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab}-b}$.

(b) $\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$.

(c) $\dfrac{2\sqrt{a+b}-3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$.

(d) $\dfrac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}$.

第四章 倍式及約式

37. 因式分解 某整式等於二個以上之其他整式之積時,則此諸整式,各謂之其原整式之因式.使整式還原成爲其各因式之積時,謂之分解其整式爲因式,或簡稱因式分解.行因式分解時,如整式之各項皆具有共通之因數時,則可將其共通之因數置於括號之外,而以各項除去此因數後之殘餘部分,不變其符號置於括號之內.至其理由,如適用配分之法則,則至爲明瞭.

例 1. 將 $abx^2+aby^2-abz^2$ 分解爲因式.

解 $abx^2+aby^2-abz^2=ab(x^2+y^2-z^2)$.

通常之整式,不限各項皆含有共通之因數,故行因式分解時,必須採用已知之恆等式以求之.茲將應用於因式分解之各恆等式,分類述之於下.

I **三項完全平方式** 凡具有 $a^2\pm2ab+b^2$ 形式中之一者,皆謂之三項完全平方式.由乘法,

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2,$$

故反之可由此二等式還原,以行三項完全平方式之因式分解.即

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b)=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b)=(a-b)^2.$$

凡三項式中,其中央項等於其兩端項平方根之積之二倍者,皆可通用上列二公式以行因式分解.

例 2. 分解 $9x^2-12xy+4y^2$ 爲因式.

解 因 $12xy=2\sqrt{9x^2}\sqrt{4y^2}$,故所與之式爲完全平方式.

$$\begin{aligned}\therefore\quad 9x^2-12xy+4y^2&=(3x)^2-2(3x)(2y)+(2y)^2\\&=(3x-2y)(3x-2y)\\&=(3x-2y)^2.\end{aligned}$$

II **二平方之差** 由乘法,$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.故反之凡二平方之差,皆可分解之爲因式.即

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

III **二平方之和** 如用虛數單位 $i=\sqrt{-1}$ 時,則 a^2+b^2 之和,成爲平方差之形式,隨之可分解爲二虛數之因式.因

$$i^2=-1,$$
$$\therefore\quad b^2=-(-b^2)=-(ib)^2.$$
$$\therefore\quad a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a+ib)(a-ib).$$

IV **任意二數等冪之和及差** 由前第29節所證明,得三等式於下.

第一: 不論 n 爲正奇數或正偶數,

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

第二: n 爲正偶數時,

$$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}-b^{n-1})$$

第三: n 爲正奇數時,

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$$

故得三定理如下.

定理 1. a^n-b^n 常能以 $a-b$ 整除之.

定理 2. n 爲偶數時, a^n-b^n 能以 $a+b$ 整除之.

定理 3. n 爲奇數時, a^n+b^n 能以 $a+b$ 整除之.

於上述三定理中,如置 $n=2,3$ 時,則得二平方之和及差,與二立方之和及差之公式如下.

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b);$$
$$a^2+b^2=a^2-(ib)^2=(a-ib)(a+ib);$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2);$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

V　**二次三項式**　二次三項式 ax^2+bx+c 均能分解爲因式,茲將其一般解法述之於下.

(1)　置 x^2 之係數 a 於全式括弧之外方使 x^2 之係數爲 1,得

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}.$$

(2)　將括弧內之 $x^2+\dfrac{b}{a}x$ 配成完全平方,卽加一項 $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2}{4a^2}$ 於其中而同時復減去之,因得

$$a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)\right\}$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\sqrt{\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)^2}\right\}.$$

(3) 因括弧內係二式平方之差,故引用二平方之差之公式,得

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)^2\right\}=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}.$$

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}.$$

如ax^2+bx+c所分解之因式皆爲有理式時,則可由視察之方法以分解之.設其所分解之因式爲$px+r, qx+s$,則由

$$ax^2+bx+c=(px+r)(qx+s).$$

其p, q, r, s四數,可由$pq=a, ps+qr=b, rs=c$三式以求得之.

設$a=1$二次三項式成爲x^2+bx+c之形式時,則p, q各等於1.其r, s二數,則可由$r+s=b, rs=c$以求得之.

上述諸公式,其諸文字無論代表數或代表式,均能適用之.

例 8. 分解下列二式爲因式.

(a) $9a^4-12a^2y^2+4y^4$; (b) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

解(a)

$$\begin{aligned}9a^4-12a^2y^2+4y^4&=(3a^2)^2-2(3a^2)(2y^2)+(2y^2)^2\\&=(3a^2-2y^2)^2\\&=(\sqrt{3}a+\sqrt{2}y)^2(\sqrt{3}a-\sqrt{2}y)^2\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}&a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc\\&=(a^2+2ab+b^2)+2c(a+b)+c^2\\&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=(a+b+c)^2.\end{aligned}$$

例 4. 分解$x^4+x^2y^2+y^4$爲因式.

解 $$x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

例 5. 分解下列諸式爲因式.

(a) x^6-y^6;

(b) x^6+y^6;

(c) x^6-y^{15}.

解(a) $$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$$
$$=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

(b) $$x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4).$$

(c) $$x^6-y^{15}=(x^2)^3-(y^5)^3=(x^2-y^5)(x^4+x^2y^5+y^{10}).$$

例 6. 分解下列各式爲因式.

(a) $x^2+13x+42$;

(b) $x^2-13x+22$;

(c) $2x^2+7x+3$;

(d) $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$.

解(a) 由$r+s=13$, $rs=42$, 其r, s二數之積與和皆爲正數.故二數亦皆爲正數.由是得$r=7, s=6$; 或$r=6, s=7$之二組數.

$$\therefore\quad x^2+13x+42=(x+7)(x+6).$$

(b) 由$r+s=-13$, $rs=22$,其r,s二數之積爲正,而和爲負,故二數同爲負數.由是得$r=-11, s=-2$;或$r=-2, s=-11$之二組數.

$$\therefore\quad x^2-13x+22=(x-11)(x-2).$$

(c) $$2x^2+7x+3=2\left\{x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}\right\}$$

$$=2\left\{x^2+\frac{7}{2}x+\frac{49}{16}+\frac{3}{2}-\frac{49}{16}\right\}$$

$$=2\left\{\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\frac{49-24}{16}\right\}$$

$$=2\left\{\left(x+\frac{7}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}$$

$$=2\left(x+\frac{7}{4}+\frac{5}{4}\right)\left(x+\frac{7}{4}-\frac{5}{4}\right)$$

$$=2(x+3)(x+\frac{2}{4})=(x+3)(2x+1).$$

(d) $$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\frac{(abx)^2+(a^2+b^2)abx+a^2b^2}{ab}$$

$$=\frac{(abx+a^2)(abx+b^2)}{ab}$$

$$=(bx+a)(ax+b).$$

被分解爲因式之代數式之項過多時,雖無一定規則以分解之,但若就其式中某一文字之昇降冪順序排列之,則便利諸多.玆舉數例示之如下.

例 7. 分解下列各式爲因式.

(a) x^3+x-3x^2-3;　(b) $ax+by+bx+ay$;

(c) $a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc$;

(d) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$.

解(a) $x^3-3x^2+x-3=x^2(x-3)+(x-3)=(x^2+1)(x-3)$.

(b) $ax+by+bx+ay=ax+bx+ay+by$

$$=x(a+b)+y(a+b)=(a+b)(x+y).$$

(c) $a^2-3b^2-c^2-2ab+4bc=a^2-2ab-3b^2+4bc-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-4b^2+4bc-c^2=(a-b)^2-(2b-c)^2$

$=\{a-b+(2b-c)\}\{a-b-(2b-c)\}$

$=(a+b-c)(a-3b+c).$

(d) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c).$

例 8. 分解 $(x-2)(x-1)(x+3)(x+6)-5x^2$ 爲因式.

解 $(x-2)(x-1)(x+3)(x+6)-5x^2$

$=(x-2)(x+3)\cdot(x-1)(x+6)-5x^2$

$=(x^2+x-6)(x^2+5x-6)-5x^2$

以上式中最初二式相加後平均所得結果爲一圍,

∴原式 $=\{(x^2+3x-6)-2x\}\{(x^2+3x-6)+2x\}-5x^2$

$=\{(x^2+3x-6)^2-4x^2\}-5x^2$

$=(x^2+3x-6)^2-(3x)^2$

$=(x^2+6x-6)(x^2-6).$

38. 最高公因式 二個以上整式之共通因式,謂之其諸整式之公因式.在二個以上整式之公因式中,其次數最高者,謂之其諸整式之最高公因式.例如 $15, x, x^2, y, xy, \cdots\cdots$ 等式,爲 $15x^3y^3z^2, 30x^2y^2z^3, -45x^3yz^2$ 三式之公因式,而 $15x^2yz^2$ 則爲其最高公因式是.最高公因式五字,通常皆取其英文原名之開始字母 $H.C.F.$ 以代之.

求二個以上單項式之最高公因式時,可將所與各式中

相同各文字一一並列之,而以其各式中各文字之最小指數以爲指數卽可.

求二個以上多項式之最高公因式時,如各式皆能分解爲因式,則先行分解之,然後將各式中相同各因式一一並列之,而以其各式中各因式之最小指數以爲指數卽可.

求諸多項式最高公因式之一般方法,通常皆用<u>連除法</u>.例如求二多項式A_0,A_1之最高公因式時,先依其式中某文字之降冪順序排列之,然後以次數較低之A_1式以除A_0式,將其所得剩餘用爲除數,再除A_1式.如復有剩餘,則更用此剩餘以除前得之剩餘.如此輾轉相除,迨至完全除盡時,則最後之除式,卽爲所求之最高公因式.

連除法如以除式表之,則其順序如下.

$$
\begin{array}{l}
A_1)A_0(Q_1\\
\quad \underline{Q_1A_1}\\
\qquad A_2)A_1(Q_2\\
\qquad\quad \underline{Q_2A_2}\\
\qquad\qquad A_3)A_2(Q_3\\
\qquad\qquad\quad \underline{Q_3A_3}\\
\qquad\qquad\qquad A_4)A_3(\cdots\cdots\\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{\cdots\cdots}\\
\qquad\qquad\qquad\quad \cdots\cdots\cdots
\end{array}
$$

由上式,得 $A_0=Q_1A_1+A_2$……………………(1)

$A_2=A_0-Q_1A_1$……………………(2)

由(1)式,A_1,A_2之公因式,亦爲A_0之因式;由(2)式,A_1,A_0之公因式,亦爲A_2之因式;隨之A_1與A_0之公因式,亦卽A_1與A_2之公因式.故A_1與A_2之最高公因式,卽爲所求之最高公因式.

同理,由 $$A_1=Q_2A_2+A_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$
$$A_3=A_1-Q_2A_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$
二式,可推知A_2,A_3二式之最高公因式,卽爲所求之最高公因式.繼續此法,無論何時,其除數與被除數之最高公因式,皆爲所求之最高公因式.設除至最後毫無剩餘時,則除數爲被除數之因式甚明.又除數爲其自身與被除數之最高公因式,故亦卽所求之最高公因式.

上述求最高公因數之方法,亦謂之歐幾里得之算法.

例 1. 求 $(x-2)^3(x-1)^2(x-3)$ 與 $(x-2)^2(x-1)(x-3)^3$ 之$H.C.F.$

解 所求之$H.C.F.$爲 $(x-2)^2(x-1)(x-3)$.

例 2. 求$a^4b^2-a^2b^4$與$a^4b^3+a^3b^4$之$H.C.F.$

解
$$a^4b^2-a^2b^4=a^2b^2(a^2-b^2)=a^2b^2(a-b)(a+b);$$
$$a^4b^3+a^3b^4=a^3b^3(a+b).$$

$\therefore$ 所求之$H.C.F.$爲$a^2b^2(a+b)$.

例 3. 求x^3+x^2-2與x^3+2x^2-3之$H.C.F.$

解
$$\begin{array}{l}
x^3+x^2-2)\,x^3+2x^2-3\,(1\\
\qquad\qquad\underline{x^3+\ x^2-2}\\
\qquad\qquad\qquad x^2-1)\,x^3+x^2-2\,(x+1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\underline{x^3-x\qquad\quad}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^2+x-2\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{x^2\quad\ -1}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-1)\,x^2-1\,(x+1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\underline{x^2-x}\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-1\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\underline{\underline{x-1}}
\end{array}$$

$\therefore$ 所求之$H.C.F.$爲$x-1$.

設所與多項式含有單項因式時,則此因式可先行除去之,然後用連除法以求其餘式之最高公因式.但此所除去之各單項因式亦應求得其最高公因式,以爲所求最高公因式之一部分.

又當行連除法以求最高公因式時,於除法之計算中,如以任意之單項式或數以乘除其除數或被除數時,對於其多項式之最高公因式,並無影響.故於計算之途中,遇有除得分數形式之商時,可選擇適宜之單項式或數以乘除其除數或被除數,則較爲簡便.

求三個多項式之最高公因式時,可先求其中二式之最高公因式,然後將此結果再與第三式以求其最高公因式即可.其求四個以上多項式之最高公因式時,亦準此.

39. 最低公倍式 一整式A能爲他整式M所整除時,則A謂之M之倍式.其二個以上整式之共通倍式,謂之其諸整式之公倍式.於二個以上整式之公倍式中,其次數最低者,謂之其諸整式之最低公倍式.例如 a^2bxy^2, $a^2bx^2y^2$, $a^3b^2xy^2$ 等式,皆爲 a^2xy, $abxy^2$ 二式之公倍式,而 a^2bxy^2 則爲其最低公倍式是.最低公倍式五字,通常皆取其英文原名之開始字母$L.C.M.$,以代之.

求二個以上單項式之最低公倍式時,可將所與各式中相異之各文字一一並列之,而以其各式中各文字之最大指數以爲指數即可.

求二個以上多項式之最低公倍式時,如各式皆能分解

爲因式,則先行分解之,然後將式中相異之各因式一一並列之,而以其各式中各因式之最大指數以爲指數卽可.

求二多項式之最低公倍式,一般皆先求得其二式之最高公因式,然後以此最高公因式除其二式中之一式,將其所得之商以乘他一式卽可.

設 G 爲 A, B 二式之最高公因式,L 爲其最低公倍式,以 G 除 A, B 所得之商各爲 A', B',則

$$A=A'G, \qquad B=B'G.$$

因 A', B' 無公因式,故 A, B 二式之最低公倍式爲 $A'B'G$.

$$\therefore \quad L=A'B'G=AB'=BA'=\frac{AB}{G}.$$

由上式,得 $\quad LG=AB.$

卽二整式之最低公倍式與其最高公因式之積,等於其二式之積.

求三多項式之最低公倍式時,可先求得其中任意二式之最低公倍式,以此結果再與第三式求其最低公倍式.其求四個以上多項式之最低公倍式時皆準此.

例 1. 求 $3(x-y)(x+y)$, $(a-c)^2(x+y)$ 與 $2(a+c)(x+y)^2$ 之 L.C.M.

解 所求之 L.C.M. 爲 $6(a-c)^2(a+c)(x-y)(x+y)^2$.

例 2. 求 x^3-a^2x 與 $ax^4+2a^2x^3+a^3x$ 之 L.C.M.

解

$$x^3-a^2x=x(x^2-a^2)=x(x-a)(x+a);$$

$$ax^4+2a^2x^3+a^3x^2=ax^2(x^2+2ax+a^2)$$
$$=ax^2(x+a)^2.$$

$\therefore$ 所求之 L.C.M. 爲 $ax^2(x+a)^2(x-a)$.

例 3. 求 x^3+2x-3 與 x^3+2x^2-5x+2 之 $L.C.M.$

解 先求得二式之 $H.C.F.$ 為 $x-1$, 因

$$x^3+2x-3=(x^2+x+3)(x-1);$$

$$x^3+2x^2-5x+2=(x^2+3x-2)(x-1).$$

$\therefore$ 所求之 $L.C.M.$ 為 $(x-1)(x^2+x+3)(x^2+3x-2)$.

40. 關於素因式之定理 設 $A,B,C,\cdots\cdots$ 諸有理整式不含公因式時,則此諸整式,謂之互為素式.

定理 1. 設二有理整式 A, B 互為素式時,則必有適合於

$$MA+NB=1$$

之二有理整式 M,N 存在.

證明 因 A,B 互為素式,故適用第38節所述之連除法時,其最後之剩餘必為一不等於 0 之常數.

將 A,B 二式用連除法輾轉除之,設其第三次剩餘為 c, 則

$$\begin{array}{llll}
B)A(Q & & & \\
\underline{\;BQ\;} & & & \\
 & R_1)B(Q_1 & & \\
 & \underline{\;R_1Q_1\;} & & \\
 & & R_2)R_1(Q_2 & \\
 & & \underline{\;R_2Q_2\;} & \\
 & & \quad c &
\end{array}$$

$$\therefore\begin{cases}A=Q\,B+R_1\cdots\cdots(1)\\ B=Q_1R_1+R_2\cdots\cdots(2)\\ R_1=Q_2R_2+c\cdots\cdots(3)\end{cases}\quad \text{隨之}\begin{cases}R_1=A-Q\,B\cdots\cdots(4)\\ R_2=B-Q_1R_1\cdots\cdots(5)\\ c=R_1-Q_2R_2\cdots\cdots(6)\end{cases}$$

將(5)式R_2之值代入於(6)式中,將含R_1及B之項整頓後更以(4)式R_1之值代入之,最後再將含A,B之項整頓之,故得

$$
\begin{aligned}
c&=R_1-Q_2R_2\\
&=(1+Q_1Q_2)R_1-Q_2B\\
&=(1+Q_1Q_2)A-(Q+Q_2+QQ_1Q_2)B
\end{aligned}
$$

以c除上列等式之兩邊,因c為常數,故

$$\frac{1+Q_1Q_2}{c}\text{及}-\frac{Q+Q_2+QQ_1Q_2}{c}$$

各為整式.此二整式各以M及N代之,卽得

$$MA+NB=1$$

其所得剩餘在第三次除法之前或後時,均可同樣證明之.

又此定理之逆定理亦眞.卽

定理 2. 設M,N各為有理整式而

$$MA+NB=1$$

時,則A,B互為素式.

證明. 因A,B之公因式亦為$MA+NB$之公因式,隨之亦為1之公因式,不合理甚明.

定理 3. 設A,B互為素式,而AC能為B整除時,則C能為B整除.

證明 因A,B互為素式,故有適合於

$$MA+NB=1$$

隨之適合於

$$M\cdot AC+NC\cdot B=C$$

之M,N存在.

然B為AC及B之因式,故B亦為C之因式.

定理 4. A對於B及C各為素式時,則A對於其積BC亦為素式.

證明 因A對於B為素式,故有適合於

$$MA+NB=1$$

隨之適合於

$$MC\cdot A+N\cdot BC=C$$

之M,N存在.

故設A與BC含有公因式時,則此公因式亦不可不含於C中.但A與C互為素式,故不可能.故A與BC互為素式.

系 A對於$B,C,D,\cdots\cdots$各為素式時,則A對於其積$BCD\cdots\cdots$亦為素式.

問 題 三

分解下列各式為因式.

1. $(x+y)^4-(x-y)^4$
2. $(2x+3y)^3+(3x+2y)^3$
3. x^4-5x^2+4
4. $ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)$
5. $(a+b)^2-8(a+b)(c+d)+15(c+d)^2$
6. $a^2x+abx+ac+b^2y+aby+bc$
7. $x^4-7x^2y^2+y^4$
8. $(x^2+7x+6)(x^2+7x+12)-280$

9. x^9-y^9

10. $x^{10}+y^{10}$

11. $6x^2-9ax+4bx-6ab$

12. $98a^2b+112a^3b^2+32a^4b^3$

13. $4(xy-ab)^2-(x^2+y^2-a^2-b^2)^2$

14. $(x^2+3x)^2-8(x^2+3x)-20$

15. $ab-(a^2+b)x+x^3$

16. $x^2+y^2+z^2+2xy-2xz-2yz$

17. $x^4+x^2-2ax+1-a^2$

18. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

19. $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$

20. $x^2-28x+2304$

21. $3x^2-58x+224$

22. $12x^2-37x-144$

23. x^2+5x-1

24. $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

25. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$

26. $(x^2+2x-3)(x^2+18x+77)-105$

27. $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2$

28. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$

29. $a^3+b^3+c^3-3abc$

30. $a^3-8b^3+c^3+6abc$

求下列各式之$H.C.F.$

31. $2x^2-5x+2, 4x^3+12x^2-x-3$

32. x^4+3x^2-10, x^4-3x^2+2

33. $8a^3+1, 16a^4+4a^2+1$

34. $2x^4+4x^3+3x^2-2x-2, 3x^4+6x^3+7x^2+2x+2$

35. $mn(x^2+y^2)+xy(m^2+n^2), mn(x^3+y^3)+xy(m^2y+n^2x)$

36. $2x^3-5x^2+4x-1, 2x^4+x^3-9x^2+8x-2$

37. $x^3-4a^2x+15a^3, x^4+a^2x^2+25a^4$

38. $3x^3-14x^2-12x+35, 2x^3-13x^2+17x-10$

39. $20x^4+x^2-1, 25x^4+5x^3-x-1$

40. $2x^3+3x^2-2x-3, 3x^3+2x^2-3x-2, 5x^3-4x^2-1$

求下列各式之 $L.C.M.$

41. $x^3(x-y)^2, y^2(x+y)^2, xy(x^2-y^2)$

42. $4a+4b, 6a^2-24b^2, a^2-3ab+2b^2$

43. $x^3-a^3, x^3+a^3, x^4+a^2x^2+a^4$

44. $9x^3-x-2, 3x^3-10x^2-7x-4$

45. $a^3+6a^2+11a+6, a^3+10a^2+29a+20$

46. $3x^3+x^2-8x+4, 3x^3+7x^2-4, x^3+3x^2-4x-12$

47. $x^3-x^2-4x+4, x^3+4x^2+x-6, x^3+3x^2-4x-12,$
$2x^4+2x^3-20x^2-8x+48$

48. $x^4-10x^2+9, x^4+10x^3+20x^2-10x-21,$
$x^4+4x^3-22x^2-4x+21$

49. 二式之最高公因式為$x+2$,最低公倍式為$x^3+2x^2-9x-18$. 今知其一式為x^2+5x+6, 求他式.

50. 二式之最高公因式為$x-1$,最低公倍為 $x^3-6x^2+11x-6$. 設此二式爲同次式時,則其二式如何.

第五章　有理整式

41. 有理整式之值　將代數式中之所有文字,概行易以數值,依其符號之所示,實行計算而得之數值,謂之原代數式之數值,或簡稱之爲值,既如前第 4 節所述.茲更就代數式之值一語,將其意義推廣之如下.即於代數式之諸文字中,以數值或以文字所表之值代入於其若干文字中簡約後所得之式,亦謂之原代數式之值是.例如於 $2ac-6b+2bc-a^2+ab$, 置 $a=3$. $c=2$ 時,則此式之值爲 $b+3$; 於 $ax+by$, 置 $a=2$, $b=1$ 時,則此式之值爲 $2x+y$; 又置 $x=a-b$, $y=a+b$ 時,則其值爲 a^2+b^2 等是.總之代數式之值,雖係指其數值而言,然亦不限於數值.

關於 x 之 n 次有理整式,其一般形式爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

其 x 謂之元, $a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$ 等各謂之係數,又 a_n 亦謂之絕對項.於上式,如置 $\alpha=x$ 時,則其值爲

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n.$$

如以數字代入於 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$ 及 α 中以求其數值時,則由下例所示之算法以計算之,較爲便利.例如欲求

$$a_0\alpha^3+a_1\alpha^2+a_2\alpha+a_3$$

之數值時,先以 a 乘 a_0,得

$$a_0a.$$

加 a_1,得 $\quad a_0a+a_1.$

又以 a 乘之,得 $\quad a_0a^2+a_1a.$

再加 a_2,得 $\quad a_0a^2+a_1a+a_2.$

再以 a 乘之,得 $\quad a_0a^3+a_1a^2+a_2a.$

再加 a_3,得 $\quad a_0a^3+a_1a^2+a_2a+a_3$

但實際上計算時,則以下式之配置較爲便利.

a_0	a_1	a_2	a_3
	a_0a	$a_0a^2+a_1a$	$a_0a^3+a_1a^2+a_2a$
	a_0a+a_1	$a_0a^2+a_1a+a_2$	$a_0a^3+a_1a^2+a_2a+a_3$

其次數較 3 爲大時,亦能依同樣方法以計算之,甚爲明瞭.

例 1. 求 $x=3$ 時 $2x^4-4x^3+5x+13$ 之數值.

解

2	-4	0	5	13
	6	6	18	69
	2	6	23	82

卽所求之數值爲82.

42. 必要條件與充分條件 某事件成立時所不可不具備之條件,謂之<u>必要條件</u>.反之,如某條件具備時,某事件必定成立,則其條件謂之<u>充分條件</u>.例如

$$ab=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

時,$a=0$ 之條件爲充分條件而非必要條件是.因於 a b 之積,如 $a=0$ 時,則 ab 必等於 0.然 ab 成爲 0 時,不必定需 $a=0$,

卽 $b=0$ 亦可故也.

次就 $ab=0$ 時,$a=0,b=0$ 之條件研究之.因 ab 成爲 0 時此條件不可不具備;又此條件具備時,則 ab 必成爲 0.故此條件爲必要且兼充分之條件.

又設 a, b 皆爲實數,於

$$a^2+b^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

時,$a=0$ 之條件則爲必要條件而非充分條件.因 a^2+b^2 成爲 0 時,a 不可不爲 0,而 $a=0$ 時其 $b\neq0$,則 a^2+b^2 亦不成爲 0 故也.

次就 $a^2+b^2=0$ 時,$a=0, b=0$ 之條件研究之.因 $a^2+b^2=0$ 時,其 a, b 皆不可不爲 0;又 $a=0, b=0$ 時,則 a^2+b^2 亦必爲 0.故 $a=0, b=0$,爲 $a^2+b^2=0$ 時之必要且兼充分條件.

43. 剩餘定理 關於 x 之 n 次整式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n,$$

其 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ 等係數,皆爲不含 x 之數.此後凡表 x 之整式時,皆用

$$f(x),\quad \phi(x),\quad F(x),$$

等符號以表之.而 x 等於某特別値 a 時,整式 $f(x)$ 之値,則以 $f(a)$ 表之.例如於

$$f(x)=2x^3-x+1$$

整式,其

$$f(0)=1,\ f(1)=2,\ f(2)=15,\ f(-2)=-13,$$

等是.

今於 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$

整式,以 x 之一次式 $(x-a)$ 除之,設所除得之商爲

$$Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+b_{n-1}$$

整式而剩餘爲 R 時;則

$$f(x)=(x-a)Q(x)+R.$$

上列等式中之 R 不含 x,如於此恆等式置 $x=a$ 時,

$$f(a)=R.$$

則因得一定理於下.

定理 1. 以 $x-a$ 除 x 之整式 $f(x)$ 所得之剩餘等於 $f(a)$.

上述定理,謂之剩餘定理.

系 $f(x)$ 能爲 $x-a$ 所整除之必要且兼充分條件,爲

$$f(a)=0.$$

應用剩餘定理,可證明下述定理.

定理 2. 對於 $x=a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 等值,x 之整式 $f(x)$ 成爲 0 時;其 $f(x)$ 可爲 $(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 所整除.但 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 各爲相異之數.

證明: 由假定,$f(a_1)=0$, 故 $f(x)$ 能爲 $(x-a_1)$ 所整除.即

$$f(x)=(x-a_1)f_1(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其 $f_1(x)$ 爲較 $f(x)$ 低一次之 x 整式.

又因 $f(a_2)=0$, 故於(1)之關係式置 $x=a_2$ 時,則

$$0=(a_2-a_1)f_1(a_2).$$

而 $\qquad a_1\neq a_2$

$$\therefore\quad f_1(a_2)=0.$$

由定理 1 之系,可知 $f_1(x)$ 能爲 $(x-a_2)$ 所整除.即

$$f_1(x)=(x-a_2)f_2(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其$f_2(x)$爲較$f_1(x)$低一次之x整式以(2)式代入於(1)式時,得

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x).$$

此即表示$f(x)$能爲$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$所整除也.順次用$f(\alpha_3)=0$, $f(\alpha_4)=0$,$\cdots\cdots\cdots$可證明$f(x)$能爲$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$所整除.

系 1. 使x之n次整式成爲0之x之值,不能多過n個.

因假定x之n次整式對於較n爲多之x之值成爲0時,則此整式由上述定理.可爲較n次爲高之整式整除之,不合理甚明.

系 1 又可改述之如下.

一元n次方程式不能有較n個爲多之根.

系 2. 不高於n次之x整式,對於較n爲多之x之值成爲0時,則此整式各項之係數,皆不可不爲0.即

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$$

對於x之n個以上值,例如對於$n+1$個值成爲0時,則非

$$a_0=a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots\cdots\cdots=a_n=0$$

不可.因如$a_0\neq0$,則$f(x)$爲x之n次整式;由系 1,對於較n爲多之x之值,不能成爲0.又如$a_0=0$, $a_1\neq0$時,則$f(x)$爲x之$n-1$次整式,由系 1,對於較$n-1$爲多之x之值,不能成爲0.順次以推,苟非

$$a_0=a_1=a_2=\cdots\cdots\cdots\cdots=a_n=0,$$

則 $f(x)$ 對於較 n 爲多之 x 之值不能成爲 0 故也.

系 2 又可改述之如下.

不高於 n 次之 x 整式對於較 n 爲多之 x 之值成爲 0 時,則此整式恆等的等於 0.

系 3. 不高於 n 次之 x 之二整式對於較 n 爲多之 x 之值其值相等時,則此二整式恆等的相等.

因 $$f_1(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$$

$$f_2(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n$$

二整式如對於較 n 爲多之 x 之值,其值相等,則

$$f_1(x)-f_2(x)=(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+a(a_n-b_n)$$

對於較 n 爲多之 x 之值成爲 0; 由系 2, 得

$$a_0-b_0=0,\ a_1-b_1=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_n-b_n=0,$$

即 $$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_n=b_n,$$

故也.

由系 2 與系 3, 又可得一系於下.

系 4. 不論 x 之值如何,其

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0$$

之等式常能成立之必要且兼充分條件,爲

$$a_0=a_1=a_2=\cdots\cdots\cdots\cdots=a_n=0.$$

又不論 x 之值如何,其

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=b_0x^n+b_1x^{n-1}$$
$$+\cdots\cdots+b_n$$

之等式常能成立之必要且兼充分條件,爲

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1\cdots\cdots\cdots\cdots,a_n=b_n.$$

例 1. 如 a,b,c 互異時,證明

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{1}{(a-b)(a-c)(x-a)}$$
$$+\frac{1}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

解 以 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 乘其兩邊時,得

$$1=\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\cdots\cdots\cdots(1)$$

故祇須證明(1)式無論何時皆能成立即可.

(1)式之兩邊爲對於 x 不超過二次之式,而對於 $x=a,b,c$ 三值皆能成立,故由系 3,(1)式無論何時皆能成立.

例 2. 應用剩餘定理,證明前第29節中之三等式,即下述三定理.

(1) n 爲正整數時, a^n-b^n 常能爲 $a-b$ 所整除.

(2) n 爲正偶數時, a^n-b^n 能爲 $a+b$ 所整除.

(3) n 爲正奇數時, a^n+b^n 能爲 $a+b$ 所整除.

解(1) 於 a^n-b^n 置 $a=b$ 時,其值爲 0 甚明,故 a^n-b^n 常能爲 $a-b$ 所整除.

(2) 於 a^n-b^n 置 $a=-b$ 時,因 n 爲正偶數,故其值爲 0. 隨之於 n 爲正偶數之條件下,a^n-b^n 能爲 $a+b$ 所整除.

(3) 於 a^n+b^n 置 $a=-b$ 時,因 n 爲正奇數,故其值爲 0. 隨之於 n 爲正奇數之條件下,a^n+b^n 能爲 $a+b$ 所整除.

44. **綜合除法** 設以 $x-a$ 除

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$$

所得之商爲

$$Q(x)=b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+b_{n-1}$$

而剩餘爲R,則

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=(x-a)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}$$
$$+\cdots\cdots+b_{n-1})+R.$$

如將上列等式之右邊依乘法計算後而整理之,則得

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=b_0x^n+(b_1-b_0a)x^{n-1}$$
$$+(b_2-b_1a)x^{n-2}+\cdots\cdots+R-b_{n-1}a.$$

由第43節定理2之系4,比較其兩邊之係數時,得

$$a_0=b_0,\quad a_1=b_1-b_0a,\quad a_2=b_2-b_1a,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$a_n=R-b_{n-1}a.$$

即 $$b_0=a_0,\quad b_1=a_1+b_0a,\quad b_2=a_2+b_1a,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$R=a_n+b_{n-1}a.$$

由此關係,可順次以求得其 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, R$.但實際計算時,則以採取下列形式爲便,

$$\begin{array}{llll}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\
 & b_0a & b_1a & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_{n-1}a \\
\hline
b_0 & b_1 & b_2 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots R
\end{array}$$

先將$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$等並書於一列,取等於$a_0$之$b_0$,作成$b_0a$置於$a_1$之下,與$a_1$相加,得$b_1$.次作成$b_1a$置於$a_2$之下,與$a_2$相加,得$b_2$.依此法順次計算之,其最後所得者,即爲$R$.此種方法,謂之綜合除法.

例 1. 以$x+2$除$f(x)=x^4-1$.

解

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \underline{-2} \\ & -2 & 4 & -8 & 16 & \\ \hline 1 & -2 & 4 & -8 & 15 & \end{array}$$

$\therefore\quad Q(x)=x^3-2x^2+4x-8, R=15.$

例 2. 以$3x-2$除$f(x)=3x^3-14x^2+5x-4$.

解 先以$x-\frac{2}{3}$除$f(x)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & -14 & 5 & -4 & \frac{2}{3} \\ & 2 & -8 & -2 & \\ \hline 3 & -12 & -3 & -6 & \end{array}$$

$$\therefore\quad f(x)=(x-\frac{2}{3})(3x^2-12x-3)-6$$

$$=(3x-2)(x^2-4x-1)-6.$$

即 $Q(x)=x^2-4x-1,\ R=-6.$

因以$x-a$除$f(x)$所得之剩餘,等於$f(a)$.故計算$f(a)$時,可用綜合除法以行之.如第41節所述計算有理整式之值之方法,即不外綜合除法之應用.

問 題 四

試計算出下列各有理整式之數值.

1. $3x^3-7x^2+4x+40,\quad x=13.$
2. $2x^4-5x^3+3x^2-12x+29,\quad x=-5.$
3. $x^5-2x^4+7x^2-8x+5,\quad x=4.$
4. $x^6-4x^4+7x^3+6x^2-11x+10,\quad x=-2.$
5. $n=7, x=3$時,下式之值如何.

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^n.$$

6. 不論 x 之值如何, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 之值一定不變時,其 a, b, c, d 間,應有若何關係.且其一定不變之值如何.

7. ax^2+bx+c 與 px^2+qx+r 二式,不論 x 之值如何皆相等時,證明

$$a=p,\quad b=q,\quad c=r.$$

8. a, b, c, p, q, r 各不等於 0, 證明 $\dfrac{ax^2+bx+c}{px^2+qx+r}$ 之值不論 x 之值如何,皆屬一定時;則必 $\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}=\dfrac{c}{r}$.

用綜合除法,求以下各式之商及剩餘.

9. 以 $x-5$ 除 $2x^5-12x^4+14x^3-23x^2+17x-33$.

10. 以 $x-2$ 除 $3x^4-5x^3-4x^2+3x-2$.

11. 以 $x+1$ 除 x^4-1.

12. 以 $3x-2$ 除 $3x^3-11x^2+18x-3$.

13. $p_0, p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, p_n, a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, a_n$ 各不等於 0. 證明 $\dfrac{p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_n}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n}$ 之值,不論 x 之值如何,皆屬一定時;則必 $\dfrac{p_0}{a_0}=\dfrac{p_1}{a_1}=\dfrac{p_2}{a_2}=\cdots\cdots=\dfrac{p_n}{a_n}$.

14. 證明下列二等式完全相等.

(a) $(x+a+b)^2-4ab=(x+a-b)^2+4bx$.

(b) $x(x-1)(x-2)(x-3)+1=(x^2-3x+1)^2$.

15. 證明 $b-c$ 爲 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 之一因式.

16. 證明 $x^4-11x^3+41x^2-61x+30$ 能爲 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 所整除,且求其商.

17. 求使$x^3-6x^2+11x-6$及x^3-7x-6雙方俱成爲0時x之值.

應用剩餘定理,分解下列各式爲因式.

18. $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$.

19. $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$.

20. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$.

21. $(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)$
$$+(c-a)(x-c)(x-a).$$

22. $2x^3+3x^2-11x-6$.

23. $x^3-5x^2+13x-14$.

24. $x^3-5x^2-46x-40$.

25. 設$ax^3+bx^2-47x-15$能各爲$3x+1$及$2x-3$所整除時,其a, b之值如何.

第六章　對稱式及交代式

45. 對稱式　設將某整式中若干文字任意交換其二文字而其式仍不變時,則此式謂之其各文字之對稱式.例如

$$a+b+c,\quad ab+bc+ca,\quad a^3+b^3+c^3-3abc,$$

等,皆為 a, b, c 三文字之對稱式是.

凡言對稱式時,必須明言某某文字之對稱式始可.例如 $(a+b)c$ 為 a, b 之對稱式,而非 a, b, c 之對稱式是.但該式如為式中所有各文字之對稱式時,則其文字始可略去之,僅稱對稱式.

設以 L 與 M 表某特別數時,則關於 a, b 之一次同次式,其一般形式為 $La+Mb$. 若此式為對稱式,則必

$$La+Mb=Lb+Ma.$$

由前第43節定理 2 之系 3,可知 $L=M$. 即關於 a, b 之一次對稱式為 $L(a+b)$.

關於 a, b, c 二次同次式之一般形式,為

$$La^2+L_1b^2+L_2c^2+Mab+M_1bc+M_2ca.$$

若此式為對稱式時,則由上述方法,同樣可證明

$$L=L_1=L_2,\quad M=M_1=M_2.$$

即關於 a, b, c 一般之二次同次對稱式爲

$$L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca).$$

對稱式常用符號 Σ 以表之.例如云關於 a, b, c 三文字之對稱式 Σa^2 時,其意爲與 a^2 同形式之各項之和 $a^2+b^2+c^2$; 又關於 a, b, c, d 四文字之對稱式 Σab, 爲與 ab 同形式之各項之和 $ab+ac+ad+bc+bd+cd$ 等是.

例 1. 化簡下式.

$$(a+b+c)^2-(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2.$$

解 因此式爲關於 a, b, c 之二次同次對稱式,故不可不等於

$$L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+bc+ca)$$

將上列二式中 a^2 之係數比較之,得 $L=-1$. 又比較 bc 之係數時,得 $M=0$. 故原式等於 $-(a^2+b^2+c^2)$.

茲以 P 表 a, b, c 三文字之對稱式,如 P 於 $b=-c$ 時成爲 0, 則 P 能爲 $b+c$ 所整除.然 a 與 b 雖交換之,其 P 仍不變,故 P 亦能爲 $c+a$ 所整除.同理,P 亦能爲 $a+b$ 所整除.但 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 爲對稱式,故以 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 除 P 所得之商,亦爲對稱式.

同理,P 於 $a=0$ 時成爲 0, 則 P 含有 a 之因式隨之亦含有 b 與 c 之因式.其以 abc 除 P 所得之商,亦爲對稱式.

例 2. 將下式分解爲因式.

$$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc.$$

解 此式爲對稱式甚明,因設 $b=-c$ 時,則此式成爲 0, 故 $b+c$ 爲此式之一因式.隨之 $c+a$ 與 $a+b$ 亦各爲其因式.

然此式爲三次式,故不可不等於$L(a+b)(b+c)(c+a)$.將二式中 a^2b 之係數比較之,得$L=1$,即原式等於

$$(a+b)(b+c)(c+a).$$

$$\therefore \quad a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$$
$$=(a+b)(b+c)(c+a),$$

46. 交代式 設將某整式中若干文字任意交換其二文字而其式僅變更符號時,則此式謂之其各文字之交代式.例如於 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 式中,交換其中二文字 a, b 時,則成爲

$$(b-a)(a-c)(c-b)=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

又交換 a 與 c,或 b 與 c 時,亦然.故此式爲 a, b, c 之交代式.

凡不指示文字而僅稱交代者,即爲其式中各文字之交代式.

若干相同文字之對稱式與對稱式,或交代式與交代式,或對稱式與交代式之關係如下.

對稱式與對稱式之積,及以對稱式除對稱式所得之商,俱爲對稱式.

對稱式與交代式之積,爲交代式.

以交代式除對稱式所得之商,或以對稱式除交代式所得之商,俱爲交代式.

交代式與交代式之積,及以交代式除交代式所得之商,俱爲對稱式.

偶數個交代式之連乘積爲對稱式,奇數個交代式之連

乘積仍爲交代式.

定理 1. 於若干文字之交代式中,如任意使其中二文字相等時,則其式成爲 0.

證明 設以 A 表 a, b, c, d 等文字之交代式,於 A 中任意交換其二文字,例如交換 a 與 b 時,則由交代式之定義,原式成爲 $-A$. 故如置 $a=b$ 時,則 $A=-A$,卽 $2A=0$. 故 A 不可不爲 0. 因 $a=b$ 時,A 成爲 0;故 A 能爲 $a-b$ 所整除.隨之上述定理,又可改述之如下.

定理 2. 若干文字之交代式,能爲其文字中任意二文字之差所整除,隨之亦能爲其諸差之連乘積所整除.

於 a, b, c 三文字中任意選取二文字所作之差之連乘積爲 $(a-b)(b-c)(c-a)$, 此式已說明如上,爲一交代式.又由定理 2, 凡 a, b, c 三文字之交代式,皆能以此連乘積整除之,故此連乘積謂之 a, b, c 三文字之最簡交代式.

於 a, b, c, d 四文字中任意選取二文字所作之差之連乘積,爲

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

此式之爲交代式,可實行於 a, b, c, d 中任意交換其二文字以證明之.但關於四文字之交代式,皆能以此連乘積整除之.故此連乘積爲此四文字之最簡交代式.

三文字之最簡交代式,爲關於其諸文字之三次式.因凡若干文字之交代式,皆能以其諸文字之最簡交代式整除之,故三文字之交代式其次數較三爲低者,不可不爲 0.例如 $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)$ 爲 a, b, c 三文字之交代式,而

其次數爲二,故此式爲 0 是.

三文字之三次交代式,不可不等於其諸文字之最簡交代式前添置一某數係數之式.例如

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=L(a-b)(b-c)(c-a)$$

是.上列等式中之 L,卽爲數係數.如比較上列等式兩邊之某項例如 a^2b 之係數時,可知 $L=1$.

$$\therefore\quad a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a).$$

四文字之最簡交代式,爲其諸文字之六次式.隨之四文字之交代式如其次數較六爲低時,亦不可不爲 0.

例 1. 分解 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 爲因式.

解 此式爲交代式甚明.因此式爲四次式,故以 a, b, c 之最簡交代式 $(a-b)(b-c)(c-a)$ 除得之商,不可不爲一次對稱式.卽不可不爲 $L(a+b+c)$.此處之 L 爲數係數.故原式等於

$$L(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

次比較其任一項,例如 a^3b 之係數時,得 $L=-1$.或以任意之特殊值,例如 $a=0, b=1, c=0$ 代入於 a, b, c 中時,亦可得 $L=-1$.

$$\therefore\quad a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

例 2. 分解 $(y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5$ 爲因式.

解 此式爲關於 x, y, z 之五次交代式,故以 x, y, z 之

最簡交代式$(x-y)(y-z)(z-x)$除得之商,不可不等於二次對稱式.卽不可不等於$L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)$.故原式等於$(x-y)(y-z)(z-x)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$.

次比較x^4y之係數,得$L=5$.比較y^3z^2之係數,得

$$L-M=10.$$

卽$M=-5$.故原式等於

$$5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$$

$$\therefore\quad (y-z)^5+(z-x)^5+(x-y)^5=5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

47. 循環順序 並列若干文字於一列,而以第二文字代第一文字,第三文字代第二文字,如此順次置換之其最後之文字則以第一文字代之,此種交換方法,謂之依其諸文字之循環順序.例如依循環順序,將 a, b, c 交換之,則成爲 b, c, a;再依循環順序交換之,則成爲 c, a, b;更依循環順序交換之,仍行還原爲 a, b, c 是.

作成對稱式及交代式時,如注目於其循環順序,則便利諸多.例如有 a, b, c 三文字,將bc依循環順序逐次交換之,則得 ca 與 ab, 而此諸式之和 $bc+ca+ab$ 爲對稱式.又將$a^2(b-c)$依循環順序逐次交換之,則得$b^2(c-a)$與$c^2(a-b)$,而此諸式之和$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$爲交代式是.

問　題　五

應用對稱式及交代式之性質分解下列各式爲因式.

1. $a^3+b^3+c^3-3abc$.

2. $a(b^3-c^3)+b(c^3-a^3)+c(a^3-b^3)$.

3. $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$.

4. $(a^2+b^2+c^2)^3-(a^2+b^2-c^2)^3-(b^2+c^2-a^2)^3-(c^2+a^2-b^2)^3$.

5. $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$.

6. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$+(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$.

7. $(a-b)(c+a-b)(c-a+b)+(b-c)(a+b-c)$
$(a-b+c)+(c-a)(b+c-a)(b-c+a)$.

8. $(a+b+c)^5-(a+b-c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5$.

9. $a^5(b-c)+b^5(c-a)+c^5(a-b)$.

10. $a^3(b-c)(b-d)(c-d)-b^3(a-c)(a-d)(c-d)$.
$+c^3(a-b)(a-d)(b-d)-d^3(a-b)(a-c)(b-c)$.

11. $(x^3+y^3+z^3)(x+y+z)^2-x(x+y)^2(x+z)^2-y(y+z)^2$
$(y+x)^2-z(z+x)^2(z+y)^2$.

12. $(a-b)(a+b)^3+(b-c)(b+c)^3+(c-a)(c+a)^3$.

13. $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$.

14. $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

15. $(a+b+c)^4-(a+b)^4-(b+c)^4-(c+a)^4+a^4+b^4+c^4$.

化簡下列各式.

16. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$.

17. $\dfrac{a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}$.

18. $\dfrac{yz}{(x^2-y^2)(x^2-z^2)}+\dfrac{zx}{(y^2-z^2)(y^2-x^2)}+\dfrac{xy}{(z^2-x^2)(z^2-y^2)}$.

19. $\dfrac{b^2(a-c)(a-d)}{(b-c)(b-d)}+\dfrac{c^2(a-d)(a-b)}{(c-d)(c-b)}+\dfrac{d^2(a-b)(a-c)}{(d-b)(d-c)}$.

20. $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$
$+a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

21. 試就 a, b, c 三文字作成一一般之三次同次對稱式.

第七章　恆等式

48. 恆等式　如前第 3 節所述,其以等號連結之二式,謂之等式.等式有二種,其不論式中各文字所取之值如何,兩邊皆相等者,謂之恆等式;其式中所含某一文字如不取某特別之值時,則兩邊不相等者,謂之方程式.例如

$$2x+5=8-x$$
$$3x^2-5x=2(x-1)$$

等為方程式,而

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$x^4+a^2x^2+a^4=(x^2-ax+x^2)(x^2+ax+a^2)$$

等為恆等式是.恆等式如須表明其為恆等式時,通常皆以恆等號 $\equiv$ 以代其等號 $=$.故如上所舉之恆等式,亦可書作

$$(a+b)^2\equiv a^2+2ab+b^2$$
$$x^4+a^2x^2+a^4\equiv(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$$

如前第37節中行因式分解時所用諸公式,皆為恆等式,當不待言.即如第六章對稱式及交代式中所示,將某整式分解為因式後而以等號與原式相連者.亦皆為恆等式也.恆等式恆等號左方之式,謂之左邊,或稱前邊;右方之式,謂

之右邊,或稱後邊,二者併稱之爲其兩邊.

恆等式之證明方法如下.

I. 將所與恆等式之一邊變化之,使其與他一邊成相同之式.

此法在將其項數甚多較爲複雜,或可逕行分解爲因式,及能應用既知公式之邊;變其形狀,使與他邊相同.

例 1. 證明 $(a^2+b^2+c^2)^2\equiv(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2$
$$+(ab-ac)^2+a^4$$

解 右邊 $=(b^2+c^2)^2+a^2b^2+2a^2bc+a^2c^2+a^2b^2$
$$-2a^2bc+a^2c^2+a^4.$$
$$=(b^2+c^2)^2+2(b^2+c^2)a^2+a^4=(b^2+c^2+a^2)^2$$

$\therefore\quad (a^2+b^2+c^2)^2\equiv(b^2+c^2)^2+(ab+ac)^2$
$$-(ab-ac)^2+a^4.$$

例 2. 證明 $(x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2\equiv4xy(x^2+y^2)$.

解 左邊 $=(x^2+xy+y^2+x^2-xy+y^2)$
$$(x^2+xy+y^2-x^2+xy-y^2)$$
$$=(2x^2+2y^2)(2xy)=4xy(x^2+y^2)$$

$\therefore\quad (x^2+xy+y^2)^2-(x^2-xy+y^2)^2\equiv4xy(x^2+y^2)$

II. 將所與恆等式之兩邊同時變化之,使成爲相同之式.

例 3. 證明 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\equiv2(a-b)(a-c)$
$$+2(b-a)(b-c)+2(c-a)(c-b).$$

解 左邊 $=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2$
$$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

右邊 $=2c^2-2bc-2ca+2ab+2b^2-2ab-2bc+2ac$
$+2a^2-2ab-2ac+2bc$
$=2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore \quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\equiv 2(a-b)(a-c)$
$+2(b-a)(b-c)+2(c-a)(c-b).$

III. 探求所與恆等式成立時之充分條件.

此法爲將所與恆等式順次變化之,使成爲易於識別其確能成立之形式.

例 4. 證明 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\equiv 2(a-b)(a-c)$
$+2(b-a)(b-c)+2(c-a)(c-b).$

解 如所與恆等式能成立,則必須

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+2(a-b)(c-a)$$
$$+2(b-c)(a-b)+2(c-a)(b-c)=0,$$

卽須 $(a-b+b-c+c-a)^2=0$. 但此式等於 0 甚明.

$\therefore \quad (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\equiv 2(a-b)(a-c)$
$+2(b-a)(b-c)+2(c-a)(c-b).$

例 5. 證明 $(x+y)^4\equiv 2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2$.

解 如所與恆等式能成立,則以 $(x+y)^2$ 除其兩邊所得之商,亦必相等.但

$$(x+y)^4\div(x+y)^2=(x+y)^2.$$
$$\{2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2\}\div(x+y)^2$$
$$=2(x^2+y^2)-(x-y)^2$$
$$=x^2+2xy+y^2$$

而 $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$

$$\therefore\quad (x+y)^4\equiv 2(x^2+y^2)(x+y)^2-(x^2-y^2)^2.$$

49. 條件恆等式 於某種條件之下始能成立之恆等式,謂之條件恆等式.條件恆等式之證明法,通常不出下列三種.

I. 變化所與之條件,因而誘導得所與之恆等式.

例 1. $a+b+c=0$ 時,證明 $a^4+b^4+c^4\equiv 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

解 將 $a+b+c=0$ 之兩邊各自乘,然後移項,得

$$a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca).$$

將上列等式之兩邊再各自乘,得

$$\begin{aligned}&a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\&=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2a^2bc+2ab^2c+2abc^2)\\&=4\{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\}.\end{aligned}$$

然 $a+b+c=0$,故上列等式之右邊成為 $4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$.

$$\therefore\quad a^4+b^4+c^4\equiv 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$$

II. 用所與條件以證明所與恆等式.

例 2. 設 $2s=a+b+c$, 證明

$$s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2\equiv a^2+b^2+c^2.$$

解 將所與恆等式左邊之括弧除去之,則成為

$$4s^2-2(a+b+c)s+a^2+b^2+c^2.$$

於上式,設使 $a+b+c=2s$ 時,則成為

$$4s^2-4s^2+a^2+b^2+c^2 \text{ 卽 } a^2+b^2+c^2.$$

$$\therefore\quad s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2\equiv a^2+b^2+c^2.$$

III. 探求所與恆等式成立時之必要且兼充分之條件.

例 3. 設 a, b, c 互不相等,且 $a+b+c=0$ 時,證明

$$a^2+ab+b^2\equiv b^2+bc+c^2\equiv c^2+ca+a^2.$$

解　先就 $a^2+ab+b^2\equiv b^2+bc+c^2$ 研究之,此恆等式成立時之必要且兼充分條件爲

$$a^2+ab=bc+c^2,$$

隨之　$$a^2-c^2=bc-ab,$$

即　$$(a+c)(a-c)=b(c-a).$$

故以不等於 0 之 $a-c$ 除上列等式之兩邊時,此條件成爲

$$a+c=-b.$$

即　$$a+b+c=0.$$

$$\therefore\quad a^2+ab+b^2\equiv b^2+bc+c^2.$$

同理.　$$b^2+bc+c^2\equiv c^2+ca+a^2.$$

$$\therefore\quad a^2+ab+b^2\equiv b^2+bc+c^2\equiv c^2+ca+a^2$$

例 4.　$3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ 時,證明 $a=b=c$. 但 a, b, c 皆爲實數.

解　由所與條件除去其括弧,得

$$2a^2+2b^2+2c^2=2ab+2bc+2ca.$$

移項,得

$$a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2=0.$$

即　$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$$

因 a, b, c 皆爲實數,故不論 $a-b, b-c, c-a$ 等之正負如何, $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$ 皆爲正.故上列等式成立時,其必要且兼充分之條件爲 $a-b=b-c=c-a=0$, 即

$$a=b=c.$$

50. 未定係數法 因恆等式兩邊某同一文字同冪之係數彼此相等,故其二邊中任一邊含有未定之係數時,可與他邊對應之係數比較之而決定其值.此種方法,謂之未定係數法.前第五第六二章中常經應用之方法也.

例 1. 於 $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

$$\equiv A(x^3+y^3+z^3)+B(x^2y+y^2z+z^2x)+Cxyz,$$

決定其未定係數 A, B, C 之值.

解 先比較所與恆等式兩邊 x^3 之係數,得 $A=1$.又比較其兩邊 x^2y 之係數,得 $B=0$.最後比較其兩邊 xyz 之係數,得 $C=-3$.

$$\therefore \quad A=1, \quad B=0, \quad C=-3.$$

例 2. 求 $x^4+3x^3-5x^2+mx+n$ 能爲 x^2+x-2 所整除時 m, n 之值如何.

解 因商之第一項爲 x^2 甚明,故設所得之商爲 x^2+Ax+B 之形式,則

$$(x^2+x-2)(x^2+Ax+B)\equiv x^4+3x^3-5x^2+mx+n.$$

先比較其兩邊 x^3 之係數時,得

$$x^3+Ax^3=3x^3.$$

即 $$(1+A)x^3=3x^3.$$

$$\therefore \quad A=2.$$

又比較其兩邊 x^2 之係數時,得

$$(B+A-2)x^2=-5x^2.$$

即 $$Bx^2=-5x^2.$$

$$\therefore \quad B=-5.$$

故恆等式之左邊成為 $(x^2+x-2)(x+2x-5)$. 再比較其 x 之係數及不含 x 之項時,因得

$$m=-9,\quad n=10.$$

又因恆等式兩邊所含之文字雖任以如何數值代入之均屬相等,故以適當數值代入於其兩邊之文字而置之相等時,亦能決定其式中含有未定係數之數值.

例 3. 於 $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3\equiv L(y+z)(z+x)(x+y)$, 求其 L 之值.

解 置 $x=0, y=1, z=1$ 時,得

$$8-1-1=L\times 2.$$

$$\therefore\quad L=3.$$

例 4. 於 $x^4+x^3+x^2+x+1\equiv A+B(x+1)+C(x+1)(x+3)$
$+D(x+1)(x+3)(x+5)$
$+E(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)$.

求其 A,B,C,D,E 之值各如何.

解 先置 $x=-1$, 得 $A=1$.

次置 $x=-3$ 時,得

$$81-27+9-3+1=A+B\times(-2).$$

$$\because\quad A=1,$$

$$\therefore\quad B=-30.$$

又置 $x=-5$ 時,與上理相同,可得 $C=50$.

置 $x=-7$ 時,與上理相同,可得 $D=-15$.

再比較恆等式兩邊 x^4 之係數時,得 $E=1$.

$$\therefore\quad A=1,\ B=-30,\ C=50,\ D=-15,\ E=1.$$

51. 著名恆等式 下列五公式,爲關於三文字以上古來有名之恆等式.而 (I), (II), (III) 三公式對於因式分解上之應用尤廣,學者當一一暗記之.

(I) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

證明 此公式曾作爲問題,於問題三及問題五中揭出之.茲分別證明之於下.

(a) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$\begin{aligned}&\equiv a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3-3ab(a+b)-3abc\\&=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)\\&=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)\\&=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$

別證

(b) 因 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 爲關於 a, b, c 之三次對稱式,而置 $a+b+c=0$ 卽置 $a=-(b+c)$ 時,成爲

$-(b+c)^3+b^3+c^3+3(b+c)bc=-3bc(b+c)+3bc(b+c)=0$.

故由第43節定理1之系,此式可以 $a+b+c$ 整除之,卽含有 $a+b+c$ 一因式.又因此因式爲關於 a, b, c 之一次對稱式,故 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 所含其他因式,不可不爲關於 a, b, c 之二次對稱式.設 L, M 爲二未定係數,則

$a^3+b^3+c^3-3abc\equiv(a+b+c)\{L(a^2+b^2+c^2)+M(ab+ca+ca)\}$.

比較上列恆等式兩邊 a^3 及 abc 之係數時,得

$$L=1,\quad M=-1.$$

$$\therefore \quad a^3+b^3+c^3-3abc \equiv (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

(II) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$

此公式亦已於問題五及第49節例題中揭出之,玆證明之於下.

證明 因 $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$ 爲關於 a, b, c 之三次對稱式,而置 $b=-c$ 時,成爲 $a^3-a^3=0$,故由第43節定理1之系,此式可以 $b+c$ 整除之.同理,此式亦可各以 $c+a, a+b$ 整除之.故由第43節定理2.此式可以 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 整除之.即含有因式 $(a+b)(b+c)(c+a)$. 又因此因式,亦爲關於 a, b, c 之三次對稱式,故 $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$ 所含其他因式,不可不爲不含文字之數字.設 L 爲一未定係數,則

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3) \equiv L(a+b)(b+c)(c+a).$$

比較上列恆等式兩邊 a^2b 之係數時,得

$$L=3.$$

$$\therefore \quad (a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3) \equiv 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

(III) $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

證明 $\because \quad (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}\{c-(a-b)\}\{c+(a-b)\}$$
$$=\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}$$
$$=-[c^4-c^2\{(a+b)^2+(a-b)^2\}+(a+b)^2(a-b)^2]$$
$$=-\{c^4-2c^2(a^2+b^2)+(a^2-b^2)^2\}$$
$$=-(c^4-2c^2a^2-2b^2c^2+a^4-2a^2b^2+b^4)$$
$$=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$$

(IV) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

證明 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$$=a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2+c^2x^2$$
$$+c^2y^2+c^2z^2$$
$$-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2acxz+2bcyz)$$
$$=(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2)+(c^2x^2-2acxz+a^2z^2)$$
$$+(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$$
$$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+(ay-bx)^2$$

(V) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$

$$=(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx-cw+dz)^2$$
$$+(az+bw-cx-dy)^2+(aw-bz+cy-dx)^2$$

此公式學者可實行乘法證明其兩邊相等.

52. 分項分數式解法原理 如前第35節所述,凡諸既約分數式皆可化合成一既約分數式.此分數式謂之前諸分數式之和.反之,吾人遇一既約分數式時,常有須求得其和等於此分數式之諸既約分數式之必要.此諸分數式,謂之原分數式之分項分數式.例如吾人求得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$$

後,有時亦常須求得

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

是.即分項分數式對於分數式加法之關係,猶之因式分解之對於乘法相同.茲將關於求分項分數式之基本定理述

之於下.

定理 1. 二眞分數式$\frac{A}{B}$,$\frac{C}{D}$之和或差,爲眞分數式或 0.

證明 因 $\frac{A}{B}\pm\frac{C}{D}=\frac{AD\pm BC}{BD}$,

其A之次數較B爲低,隨之AD之次數亦較BD爲低.同理,BC之次數亦較BD爲低.故$AD\pm BC$爲次數低於BD之整式或爲 0.

定理 2. 設I及I'爲整式,$\frac{A}{B}$及$\frac{A'}{B'}$爲眞分數式,其

$$I+\frac{A}{B}\equiv I'+\frac{A'}{B'}$$

時,則

$$I\equiv I'$$

$$\frac{A}{B}\equiv\frac{A'}{B'}.$$

證明 由假定,得

$$I-I'\equiv\frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}.$$

然由定理 1, $\frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}$ 爲眞分數式或 0.又 $I-I'$ 爲整式或 0.但整式不能與眞分數式相等,故必

$$I-I'\equiv 0,$$

及 $$\frac{A'}{B'}-\frac{A}{B}\equiv 0.$$

$$\therefore\ I\equiv I',$$

$$\frac{A}{B}\equiv\frac{A'}{B'}.$$

定理 3. 設$\dfrac{A}{PQ}$爲眞分數式,其分母能分解成不含公因式之二因式 P, Q 時,則此分數式能分解成$\dfrac{B}{P}$及$\dfrac{C}{Q}$形式之二眞分數式之和.

證明 因 P 與 Q 無公因式,故由第40之定理 1,必有適合於

$$MQ+NP\equiv 1$$

隨之適合於

$$AMQ+ANP\equiv A$$

之二整式 M 及 N.故

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{AMQ+ANP}{PQ}\equiv\frac{AM}{P}+\frac{AN}{Q}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設$\dfrac{AM}{P}$及$\dfrac{AN}{Q}$各爲眞分數式,則本定理已被證明.設$\dfrac{AM}{P}$及$\dfrac{AN}{Q}$各不爲眞分數式,則可將其化成整式與眞分數式之和.假定其結果爲

$$\frac{AM}{P}\equiv I+\frac{B}{P},$$

及 $$\frac{AN}{Q}\equiv K+\frac{C}{Q}.$$

則以上列二式之值各代入於(1)式中之$\dfrac{AM}{P}$及$\dfrac{AN}{Q}$,得

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}+I+K.$$

然$\dfrac{A}{PQ}$, $\dfrac{B}{P}$及$\dfrac{C}{Q}$爲眞分數式,故由定理 1 及 2,其

$$I+K\equiv 0,$$

$$\frac{A}{PQ}\equiv\frac{B}{P}+\frac{C}{Q}.$$

即本定理已被證明.

系. 設眞分數式之分母能分解成不含公因式之數個因式$P,Q,R,\cdots\cdots$時,則此分數式可分解成下列諸眞分數式之和.

$$\frac{A}{PQR\cdots}\equiv\frac{B}{P}+\frac{D}{Q}+\frac{E}{R}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例 1. 分解$\dfrac{5x+1}{x^2-5x+6}$爲分項分數式.

解 因分母能分解成不含公因式之$x-2$,$x-3$二因式,故可置

$$\frac{5x+1}{x^2-5x+6}\equiv\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

因上列恆等式右邊之分母皆爲一次,故由定理 3,其B,C皆爲常數.將上列恆等式去分母時,得

$$5x+1\equiv B(x-3)+C(x-2).$$

移項,得

$$(5-B-C)x+(1+3B+2C)\equiv 0.$$

因上列恆等式不論x之值如何皆等於0;故由第43節定理 2 之系 2,得

$$5-B-C=0,$$

$$1+3B+2C=0.$$

$$\therefore\quad B=-11,\ C=16.$$

$$\therefore \quad \frac{5x+1}{x^2-5x+6}\equiv\frac{16}{x-3}-\frac{11}{x-2}.$$

分項分數式如應用未定係數法解之,一般更爲便利,玆將上例另行解之如下.

別解 $$\frac{5x+1}{x^2-5x+6}\equiv\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

去分母,得

$$5x+1\equiv B(x-3)+C(x-2)$$

於上列恆等式置$x=3$時,則$C=16$.又置$x=2$時,則$B=-11$.

故 $$\frac{5x+1}{x^2-5x+6}\equiv\frac{16}{x-3}-\frac{11}{x-2}.$$

53. 分項分數式之解法

I. 原分數式分母爲各不相同之n個一次式之積時.

設 $$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots\cdots+a_n}{b_1x^n+b_2x^{n-1}+b_3x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n+1}},$$

其 $$g(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n)$$

時,則由第52節定理3之系,

$$R(x)\equiv\frac{A}{x-r_1}+\frac{B}{x-r_2}+\frac{C}{x-r_3}+\cdots\cdots+\frac{L}{x-r_n}.$$

上列恆等式中$A, B, C, \cdots\cdots, L$各爲不含x之數,其值可由下列恆等式以求得之.

$$f(x)\equiv A(x-r_2)\cdots\cdots(x-r_n)+B(x-r_1)(x-r_3)\cdots\cdots(x-r_n)$$
$$+\cdots\cdots+L(x-r_1)\cdots\cdots(x-r_{n-1})$$

例1. 分解$\dfrac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}$成分項分數式.

解 設 $$\frac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}\equiv\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-2}$$

時,則

$$x^2\equiv A(x+1)(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-1)(x+1)$$

置 $x=-1$ 時,得 $B=\frac{1}{6}$. 置 $x=2$ 時,得 $C=\frac{4}{3}$. 置 $x=1$ 時,得 $A=-\frac{1}{2}$. 故得

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x-2)}\equiv-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{6(x+1)}+\frac{4}{3(x-2)}.$$

II. 原分數式分母爲一次式之冪時.

設 $$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+a_3x^{n-3}+\cdots\cdots+a_n}{(x-r)^n}.$$

置 $x-r=y$ 時,則 $x=y+r$. 將此二式各代入於所與分數式之分母,分子中,則成

$$R(x)\equiv\frac{b_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}+b_3y^{n-3}+\cdots\cdots+b_n}{y^n}.$$

即 $$R(x)\equiv\frac{b_1}{y}+\frac{b_2}{y^2}+\frac{b_3}{y^3}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{y^n}.$$

於上列恆等式中將 y 盡改爲 $x-r$ 時,因得

$$R(x)=\frac{b_1}{x-r}+\frac{b_2}{(x-r)^2}+\frac{b_3}{(x-r)^3}+\cdots\cdots+\frac{b_n}{(x-r)^n}.$$

例 2. 分解 $\frac{x^2+5x}{(x+1)^3}$ 成分項分數式.

解 置 $$\frac{x^2+5x}{(x+1)^3}\equiv\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x+1)^3}.$$

去分母時,得

$$x^2+5x\equiv A(x+1)^2+B(x+1)+C.$$

比較兩邊 x 同次冪之係數時,得

$$A=1,\ 2A+B=5,\ A+B+C=0.$$

$\therefore \quad A=1,\ B=3,\ C=-4.$

$$\therefore \quad \frac{x^2+5x}{(x+1)^3} \equiv \frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2} - \frac{4}{(x+1)^3}.$$

III. 原分數式分母爲二次式或二次式之羃時.

設 $$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+a_3x^{2n-3}+\cdots\cdots+a_{2n}}{(x^2+ax+b)^n}.$$

置 $x^2+ax+b=y$ 時,則 $x^2=y-ax-b$. 將此 $y=x^2+ax+b$ 代入於所與分數式之分母中,而於分子中之 x^2 概行易以 $y-ax-b$ 時,則成

$$R(x)\equiv\frac{(b_1x+c_1)y^{n-1}+(b_2x+c_2)y^{n-2}+\cdots\cdots+b_nx+c_n}{y^n}.$$

即 $$R(x)\equiv\frac{b_1x+c_1}{y}+\frac{b_2x+c_2}{y^2}+\cdots\cdots+\frac{b_nx+c_n}{y^n}.$$

於上列恆等式中將 y 盡改爲 x^2+ax+b 時,因得

$$R(x)\equiv\frac{b_1x+c_1}{x^2+ax+b}+\frac{b_2x+c_2}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{b_nx+c_n}{(x^2+ax+b)^n}$$

例 3. 分解 $\dfrac{x^5+x^3+1}{(x^2+x+1)^3}$ 成分項分數式.

解 置 $x^2+x+1=y$ 時,則 $x^2=y-x-1$. 故

$$x^5=x(x^2)^2=x(y-x-1)^2=y^2(x-2)+y(x+3)-(x+1)$$
$$x^3=x(x^2)=x(y-x-1)=xy-(y-x-1)-x$$
$$=y(x-1)+1.$$

隨之

$$x^5+x^3+1=y^2(x-2)+y(2x+2)-(x-1).$$

$$\therefore \quad \frac{x^5+x^3+1}{(x^2+x+1)^3} \equiv \frac{x-2}{x^2+x+1} + \frac{2x+2}{(x^2+x+1)^2} - \frac{x-1}{(x^2+x+1)^3}.$$

IV. 原分數式分母爲冪及非冪因式之積時.

設 $$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n}{(x-r)^\alpha(x-s)^\beta(x-t)^\gamma\cdots\cdots}.$$

其 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$ 等各爲自然數,且 $\alpha+\beta+\gamma+\cdots\cdots=n$ 時,則因 $x-r, x-s, x-t, \cdots\cdots$ 各無公因式.故 $R(x)$ 可化成

$$R(x) \equiv \frac{A}{(x-r)^\alpha} + \frac{B}{(x-s)^\beta} + \frac{C}{(x-t)^\gamma} + \cdots\cdots.$$

由II,其

$$\frac{A}{(x-r)^\alpha} \equiv \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_\alpha}{(x-r)^\alpha},$$

$$\frac{B}{(x-s)^\beta} \equiv \frac{B_1}{(x-s)} + \frac{B_2}{(x-s)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_\beta}{(x-s)^\beta},$$

$$\cdots\cdots \equiv \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots \equiv \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\therefore \quad R(x) \equiv \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots\cdots + \frac{A_\alpha}{(x-r)^\alpha} + \frac{B_1}{(x-s)} + \frac{B_2}{(x-s)^2} + \cdots\cdots + \frac{B_\beta}{(x-s)^\beta} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

例 4. 分解 $\frac{1}{x(x-1)^2}$ 成分項分數式.

解 置 $$\frac{1}{x(x-1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

而求 A,B,C 時,得 $A=1,\ B=-1,\ C=1.$

$$\therefore \quad \frac{1}{x(x-1)^2} \equiv \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

問　題　六

證明下列諸恆等式.

1. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2 \equiv (ay-bx)^2.$

2. $(y+z)^2+(z+x)^2+(x+y)^2-x^2-y^2-z^2 \equiv (x+y+z)^2.$

3. $(a+2b)a^3-(b+2a)b^3 \equiv (a-b)(a+b)^3.$

4. $4xy(x^2-y^2) \equiv (x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2.$

5. $(x+y)^3+(y+z)^3+(z+x)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)$
$\equiv 2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx).$

6. $x(x+1)(x+2)(x+3) \equiv (x^2+3x+1)^2-1.$

7. $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \equiv (ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$

8. $(x+y)(x+z)-x^2 \equiv (y+z)(y+x)-y^2$
$\equiv (z+x)(z+y)-z^2.$

9. $(a^2+b^2+c^2)^2 \equiv (ab+bc+ca)^2+(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2$
$+(c^2-ab)^2$

10. $(x^2+xy+y^2)^2-4xy(x^2+y^2) \equiv (x^2-xy+y^2)^2.$

11. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \equiv 1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{15}.$

12. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca \equiv \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}.$

13. $a+b+c=0$ 時,證明 $(a^2+b^2+c^2)^2 \equiv 2(a^4+b^4+c^4)$
$\equiv 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2).$

14. $a+b+c+d=0$ 時,證明 $a^3+b^3+c^3+d^3$
$\equiv 3(a+d)(b+d)(c+d)$

15. $a+b+c=0$ 時,證明 $abc+b(a+b)^2+c(a+c)^2\equiv 0$.

16. $x=a-b, y=b-c, z=c-a$時,證明 $x^4+y^4+z^4$

$$\equiv 2(a-b)^2(b-c)^2+2(b-c)^2(c-a)^2+2(c-a)^2(a-b)^2.$$

17. $2s=a+b+c$ 時,證明 $\{(s-a)+(s-b)\}^3$

$$\equiv (s-a)^3+(s-b)^3+3(s-a)(s-b)c.$$

18. $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ 時,證明 $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2=1$.

19. $a+b+c=0$時,證明 $a^3+b^3+c^3\equiv 3abc$ 後,進而證明

$$p^3(q-r)^3+q^3(r-p)^3+r^3(p-q)^3$$
$$\equiv 3pqr(p-q)(q-r)(r-p).$$

20. $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$ 時,證明 $a\equiv b$.

21. $(l^2+m^2+1)(x^2+y^2+1)\equiv(lx+my+1)^2$時,證明$x=l,y=m$.

22. $(a+b+c)^2=3(ab+bc+ca)$ 時,證明 $a\equiv b\equiv c$.

23. 決定 $(a+b+c)^3\equiv A(a^3+b^3+c^3)$

$$+B(a^2b+b^2a+a^2c+c^2a+b^2c+c^2b)+Cabc$$

之未定係數 A, B, C 等之值.

24. 決定 $x^2y^2(x-y)+y^2z^2(y-z)+z^2x^2(z-x)=(x-y)$

$$(y-z)(z-x)\{L(x^2+y^2+z^2)+M(xy+yz+zx)\}$$

之未定係數 L 及 M 之值.

25. 設 $x^4-6x^3+mx^2+nx+36$ 能為 x^2+3x+6 所整除時,決定其 m 及 n 之值.

26. 決定 $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3$

$$\equiv Labc \text{ 之 } L \text{ 值}.$$

27. 決定 $4x^3-21x^2+37x-19\equiv a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)$

$$+d(x-1)(x-2)(x-3) \text{ 之 } a, b, c, d \text{ 等值}.$$

28. 決定 $2x^3+mx^2+nx+2\equiv(x-1)(x-2)(2x+1)$ 之 m,n 等值.

分解下列各分數式成分項分數式.

29. $\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)}$.

30. $\dfrac{9x+34}{x^2+7x+12}$.

31. $\dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

32. $\dfrac{x}{(x+a)(x+b)}$.

33. $\dfrac{3}{x^3+1}$.

34. $\dfrac{x}{(1+x)^2(2+x)^2}$.

35. $\dfrac{x(x^2+2)}{(x-1)(x^3+2)^2}$.

36. $\dfrac{8x^4+5x^3+13x^2+14x+13}{(x^2+1)^2(x+2)}$.

第八章　方程式

54. 方程式　如前第48節所述,凡等式中所含某一定文字如不取某特別之值時,則兩邊不相等者,謂之方程式.例如

$$2x+5=8-x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x^2-5x=2(x-1) \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$ax+by=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

等皆爲方程式是.

方程式等號左方之式,亦謂之其左邊,或稱前邊;右方之式謂之其右邊,或稱後邊.二者併稱之爲其兩邊.

當方程式成立時,其中應取某特別值之一定文字,謂之方程式之未知數.其數值已知或視爲已知數之文字,謂之已知數.如於上所舉之方程式中,其 $2, 3, 5, \cdots\cdots a, b, c$ 等爲已知數,而 x, y 等爲未知數是.

通常未知數皆用 $x, y, z, w, \cdots\cdots$ 等文字,而已知數皆用 $a, b, c, d, \cdots\cdots\cdots$ 等文字以表之.

方程式成立時,其未知數所取之值,謂之方程式之根,或謂之解.其值謂之滿足其方程式,或謂之適合其方程式.又尋求方程式之根,則謂之解方程式.例如 $x=1$ 爲上舉例 1

之根,而 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{3}$ 則爲上舉例 2 之根是.

如上所述,方程式有僅有一個根者,亦有有二個或二個以上之根者.且有時無根存在者,此時之方程式,謂之無根.

方程式之未知數,有僅爲一個者,亦有具有數個者.如上舉之方程式,其例 1 例 2 之未知數爲一個,而例 3 之未知數爲二個是.

含有一個未知數之方程式,謂之<u>一元方程式</u>.含有二個未知數之方程式,謂之<u>二元方程式</u>.含有三個以上未知數之方程式,謂之<u>多元方程式</u>.

方程式之兩邊爲未知數之有理整式時,謂之<u>有理整方程式</u>.含有未知數之分母時,謂之<u>分數方程式</u>.含有未知數之無理式時,則謂之<u>無理方程式</u>.

方程式中未知數之最高次數爲一次者,謂之<u>一次方程式</u>;爲二次者,謂之<u>二次方程式</u>;三次以上者,則謂之<u>高次方程式</u>.

55. 方程式解法原理 有含同數未知數之二方程式,其一方方程式之根與他方方程式之根完全相同時,換言之,卽凡能滿足第一方程式未知數之值,皆能滿足第二方程式;又凡能滿足第二方程式未知數之值,亦皆能滿足第一方程式時,則此二方程式,謂之<u>同値</u>.

解方程式云者,不外探索與其原方程式同値,且其未知數之值甚爲明顯之方程式也.

定理 1. <u>於方程式之兩邊同加一式（或數）時,其方</u>

程式之根不變.換言之,卽如此所得之方程式,與原方程式爲同値.

證明 設含有一個或數個未知數之二式爲A,B,於方程式

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之兩邊同加一式(或數)C時,得方程式

$$A+C=B+C. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故如能證明(1),(2)二方程式爲同値時,則本定理卽被證明.

先取方程式(1)中之任意一根代入於A,B,C中之未知數時,設其所得之値各爲A',B',C',則必$A'=B'$.而於此相等之二數中,同加一數C'時,則成$A'+C'=B'+C'$.卽方程式(1)之根能滿足方程式(2).次取方程式(2)中之任意一根代入於A,B,C中之未知數時,設其所得之値各爲A'',B'',C'',則必$A''+C''=B''+C''$.而於此相等之二數中同減一數C''時,則成$A''=B''$.卽方程式(2)之根亦爲方程式(1)之根.故方程式(1)與(2)爲同値.卽本定理已被證明.

系 1. 變更方程式各邊中任意項之符號時,可將其項自一邊移置於他邊,而其方程式之根不變.

上述方法,謂之**移項**.故系1又可改述之如下.

移項後所得之方程式,與原方程式爲同値.

系 2. 任何方程式,皆能作成與其同値且一邊爲0之方程式.換言之,卽凡方程式皆能化成與其同値之$P=0$形式之方程式.

定理 2. 於方程式之兩邊同以一不含未知數且不等於 0 之式（或數）乘之,其方程式之根不變.換言之,卽如此所得之方程式與原方程式爲同值.

此定理可依定理 1 之證明法,同樣證明之,故證明從略.

系 1. 於方程式之兩邊同以一不含未知數且不等於 0 之式（或數）除之,其方程式之根不變.換言之,卽如此所得之方程式,與原方程式爲同值.

因以同一數除方程式之兩邊云者,不外以其逆數乘方程式之兩邊故也.

系 2. 雖變更方程式兩邊之符號,而其根不變.換言之,卽如此所得之方程式,與原方程式爲同值.

因變更方程式兩邊之符號,等於同以 -1 乘其兩邊故也.

定理 3. 於方程式之兩邊同以一含有未知數之式乘之,其所得之方程式,除特殊之情形外,一般不與原方程式同值.

證明 於方程式

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之兩邊,同以一含有未知數之式 C 乘之,作成

$$AC=BC \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

方程式時,則此二方程式一般多不同值.

因方程式(2)與

$$AC-BC=0$$

卽 $$(A-B)C=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

爲同値,且此方程式一般皆能由

$$\begin{cases} A-B=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4) \\ C=0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5) \end{cases}$$

二方程式之根以滿足之.

然方程式(4)與方程式(1)爲同値,又方程式(5)亦有其根,故方程式(2)除具有方程式(1)之根外,兼具有方程式(5)之根.可知方程式(1)與(5),一般多不同値.隨之本定理卽被證明.

系. 於方程式之兩邊同以一含有未知數之式除之,其所得方程式,除特殊之情形外,一般不與原方程式同値.

56. 一元一次方程式 一元一次方程式恆能化成

$$ax+b=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之形式,因此式爲一次方程式,故對於 x 爲一次整式.隨之其 a 不能爲 0. 故於方程式(1),不可不使 $a \neq 0$.

因 $a \neq 0$, 故以之除方程式(1)之兩邊時,得

$$x+\frac{b}{a}=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

移項,得 $$x=-\frac{b}{a}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

方程式(3)與方程式(2)爲同値.隨之與方程式(1)亦爲同値.又因方程式(3)之根,明爲 $-\frac{b}{a}$, 此外並無他根.因得一定理於下.

定理 1. 一元一次方程式 $ax+b=0$ 之根爲 $-\frac{b}{a}$, 此外無根存在.

於 $-\frac{b}{a}$,如 a 與 b 同符號時,則 $-\frac{b}{a}$ 爲負數;如 a 與 b 異符號時,則 $-\frac{b}{a}$ 爲正數;又 $b=0$ 時,則 $-\frac{b}{a}$ 爲 0.故復得一定理於下.

定理 2. 於方程式 $ax+b=0$,如 a 與 b 同符號時,則其根爲負數;異符號時,則其根爲正數;又 $b=0$ 時,則其根爲 0.

例 1. 解 $\frac{3x}{2}-5=\frac{2x}{5}+\frac{1}{2}$ 方程式.

解 以10乘所與方程式之兩邊,得

$$15x-50=4x+5.$$

移項,得 $$15x-4x=5+50.$$

卽 $$11x=55.$$

以11除其兩邊,得 $$x=5.$$

卽所求之根爲 5.

例 2. 解 $\frac{x-a}{b-a}+\frac{x-c}{b-c}=2$ 方程式.

解 先將不含 x 之各項盡行移置於右邊,得

$$\frac{x}{b-a}+\frac{x}{b-c}=2+\frac{a}{b-a}+\frac{c}{b-c}=\left(1+\frac{a}{b-a}\right)+\left(1+\frac{c}{b-c}\right)$$

$$=\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}.$$

卽 $$\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\right)x=\left(\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\right)b.$$

設 $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}\neq 0$ 時,以之除其兩邊,得

$$x=b.$$

又因 $\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{2b-(a+c)}{(b-a)(b-c)}$, 此式僅於 $2b=a+c$ 即 $b=\frac{a+c}{2}$ 時成爲 0,此外不能爲 0,故如 $b\neq\frac{a+c}{2}$ 時,本方程式之根爲 b.

例 3. 解 $7x-3\lambda=2(x-1)$ 方程式,且討論 λ 所能取之種種數值.

解 先移項,得 $5x=3\lambda-2,$

解之,得 $x=\frac{3\lambda-2}{5}.$

討論 此根依 $3\lambda-2$ 之爲正數,爲 0,或爲負數,亦爲正數,爲 0,或爲負數.但

$$3\lambda-2=3(\lambda-\frac{2}{3}).$$

此式依 λ 大於,等於,或小於 $\frac{2}{3}$,亦爲正數,爲 0,或爲負數.因得 λ 大於 $\frac{2}{3}$ 時,其根爲正數; λ 等於 $\frac{2}{3}$ 時,其根爲 0; λ 小於 $\frac{2}{3}$ 時,其根爲負數.

57. 一元一次方程式之根之討論 如上節所討論者,係假定方程式

$$ax+b=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之 a 不爲 0,本節則就 $a=0$ 時以討論之.

先解方程式,(假定 $a\neq0$) 得其根爲 $\frac{-b}{a}$. 於此分數,如置 a 等於 0 時,則成爲 $\frac{-b}{0}$. 此時可依 $b=0$, 與 $b\neq0$ 兩方面分別研究之.

I. $b=0$ 時,此時 $\frac{-b}{a}$ 成為 $\frac{0}{0}$,即成為不定形是.

於方程式 $$0\cdot x+0=0,$$

其 $0\cdot x$ 不論 x 之值如何,恆等於 0. 故此等式不論 x 之值如何,恆能成立.即為恆等式是.隨之適合於等式(1)之未知數 x 之值不能一定,無論何數均可.可知 $a=0, b=0$ 時,方程式(1)成為不定.如勉強應用一次方程式之根之公式時,則其根成 $\frac{0}{0}$ 之形.

II. $b\neq 0$ 時.此時 $\frac{-b}{a}$ 成為 $\frac{-b}{0}$, 即成為不能形是.

於方程式 $$0\cdot x+b=0.$$

其 $0\cdot x$ 不論 x 之值如何,恆等於 0. 故此式成為 $b=0$. 然 b 不為 0, 故不能成立.換言之,即此時等式(1)不能成立.可知 $a=0$, $b\neq 0$ 時,方程式(1)成為不能.如勉強應用一次方程式之根之公式時,則其根成 $\frac{-b}{0}$ 之形.

要之以上所討論者,不過為便利起見,擴張方程式之意義而謂其方程式為不定或不能也.

例. 解 $\frac{2x+7}{2\lambda+1}=1+\frac{x+\lambda}{2\lambda-1}$ 方程式,且討論之.

解 先假定 λ 不取使 $2\lambda+1$ 與 $2\lambda-1$ 為 0 之值,即 λ 不為方程式

$$2\lambda+1=0 \text{與} 2\lambda-1=0$$

之根,隨之其 λ 不等於 $-\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{2}$.因設 λ 如取此二值時,則於方程式之係數中,其分母為 0, 故非除去之不可.

以不等於 0 之數 $(2\lambda+1)(2\lambda-1)$ 乘方程式之兩邊後,盡移其項於左邊而簡約其同類項時,則得與此同值之方程式

$$(2\lambda-3)x-6\lambda^2+13\lambda-6=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

將此方程式不含 x 之部分分解為因式時,成為

$$(2\lambda-3)x-(2\lambda-3)(3\lambda-2)=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

如 $2\lambda-3\neq0$ 時,解之,得

$$x=3\lambda-2.\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

討論 $2\lambda-3\neq0$ 卽 λ 不為 $2\lambda-3=0$ 之根時,換言之,卽 $\lambda\neq\frac{3}{2}$ 時,則如(3)式所示,其根為 $3\lambda-2$. 因此式等於 $3(\lambda-\frac{2}{3})$, 故 λ 較 $\frac{2}{3}$ 為大時,其根為正; λ 較 $\frac{2}{3}$ 為小時,其根為負; λ 等於 $\frac{2}{3}$ 時,其根為 0.

次設 $2\lambda-3=0$ 時,則方程式(2)之係數皆成為 0. 卽方程式成為 $0\cdot x=0$. 隨之所與方程式成為不定.

問　題　七

解下列諸方程式.

1. $\frac{1}{3}(x-3)-\frac{1}{4}(x-8)+\frac{1}{5}(x-5)=0.$
2. $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=4.$
3. $a(x-a)=b(x-b).$
4. $(x+a)(x+b)-(x-a)(x-b)=(a+b)^2.$
5. $a(2x-a)+b(2x-b)=2ab.$

6. $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$.

7. $3(x+3)^2+5(x+5)^2=8(x+8)^2$.

8. $(x+a)^4-(x-a)^4=8ax^3-8a^4$.

9. $(x-1)^3+x^3+(x+1)^3=3x(x^2-1)$.

10. $(x+a)^3+(x+b)^3+(x+c)^3=3(x+a)(x+b)(x+c)$.

11. $(x-a)(x-b)=(x-b)(x+b)-(x-a)(a-b)$.

12. 解 $5x+\lambda=2x+3\lambda+1$ 方程式,且決定其根為負數時 λ 之值如何.

解下列諸方程式,且討論之.

13. $(3\lambda+1)+\lambda-2=0$.

14. $2x+\lambda=\frac{1}{3}(5-3\lambda x)$.

15. $\frac{x+7}{\lambda+1}=1+\frac{x+\lambda}{2\lambda-2}$.

58 一元二次方程式 一元二次方程式恆能化成

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

之形式,因此式為二次方程式,故對於 x 為二次整式.隨之其 a 不能為 0.故於方程式(1),不可不使 $a\neq0$.

因 $a\neq0$,故以之除方程式之兩邊時,得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0. \quad\cdots\cdots(2)$$

然 $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

故(2)式成為 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0. \quad\cdots\cdots(3)$

於上列方程式中,隨 b^2-4ac 之為正數,為 0,為負數,其

$\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ 亦爲正數,爲 0,爲負數.故可分三方面討論之如下.

(I) $b^2-4ac>0$ 時,此時 $\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$ 爲正數,因

$$\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2,$$

故方程式(3)成爲

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

分解爲因式,得

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)=0.$$

隨之得下列一組同值方程式.

$$\left\{\begin{array}{l} x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0, \\ x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0. \end{array}\right. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

解之,得

$$\left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ab}}{2a}. \end{array}\right. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

即所求方程式之根爲 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 及 $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 二實數.

(II) $b^2-4ac=0$ 時,此時方程式(3)成爲

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

故此方程式之根等於方程式

$$x+\frac{b}{2a}=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

之根.解之,得

$$x=-\frac{b}{2a}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

即此時方程式(1)之根爲實數$-\frac{b}{2a}$.

但方程式(7)之左邊由方程式(8)之左邊之平方而成,故此時方程式(7)實具有方程式(8)之根二重.此種相重之根,謂之<u>二重根</u>.又於(I)之所論根式中,其二根雖相異,但若於其根之公式(6)中置$b^2-4ac=0$時,則二根均成$-\frac{b}{2a}$.故此時方程式之根,亦可謂之<u>相等</u>.故二重根亦或謂之等根.

(III) $b^2-4ac<0$時,此時方程式(3)成爲

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2=0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

因$b^2-4ac=-(4ac-b^2)$,而$4ac-b^2>0$故也.故得一組與原方程式同値之方程式如下.

$$\begin{cases} x+\frac{b}{2a}-\frac{i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=0, \\ x+\frac{b}{2a}+\frac{i\sqrt{4ab-b^2}}{2a}=0. \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

解之,得

$$\begin{cases} x=\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, \\ x=\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}. \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

即所求方程式之根爲$\frac{-b+i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$與$\frac{-b-i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

二虛數.

因 $\sqrt{b^2-4ac}$ 於 $b^2-4ac\geqq 0$ 時表其平方根,於 $b^2-4ac<0$ 時則表 $i\sqrt{4ac-b^2}$,故總括以上討論之結果,得一定理於下.

定理 一元二次方程式具有

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 及 }x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

二根,此外無其他根存在.如 $b^2-4ac>0$ 時,則二根爲相異實數;如 $b^2-4ac=0$ 時,則二根爲相等實數;如 $b^2-4ac<0$ 時,則二根爲相異虛數.

此 b^2-4ac 通常皆稱之爲一元二次方程式之判別式.方程式之二根如簡單書之,通常皆書作

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

此卽方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根之公式也.

例 1. 解 $3x^2-x-4=0$ 方程式.

解 以 3 除此方程式之兩邊,得

$$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=0.$$

因 $$x^2-\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}=\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{36},$$

故所與方程式成爲

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{49}{36}=0.$$

卽 $$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{7}{6}\right)^2=0.$$

因得

$$\begin{cases} x-\frac{1}{6}-\frac{7}{6}=0, \\ x-\frac{1}{6}+\frac{7}{6}=0. \end{cases}$$

解之,得

$$x=\frac{4}{3}, \quad x=-1.$$

卽所求方程式之二根爲 $\frac{4}{3}$ 及 -1.

如用本節所求得根之公式時,因

$$a=3, \quad b=-1, \quad c=-4,$$

故 $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\times3\times4}}{6}$$

$$=\frac{1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{1\pm7}{6}.$$

卽所求方程式之根爲 $\frac{1+7}{6}=\frac{4}{3}$ 及 $\frac{1-7}{6}=-1$ 是.

如所與方程式能逕行分解爲因式時,則先行分解之,較爲便利.

例 2. 解 $x^2+3x+2=0$ 方程式.

解 將方程式之左邊分解成因式時,得

$$(x+1)(x+2)=0.$$

因得同値之方程式一組於下.

$$\begin{cases} x+1=0. \\ x+2=0. \end{cases}$$

解之,得 $\quad x=-1, \quad x=-2.$

卽所求方程式之根爲 -1 與 -2.

例 3. 解 $25x^2-10x+1=0$ 方程式.

解 先以25除方程式之兩邊,得

$$x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}=0.$$

即 $$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2=0.$$

解之,得 $$x=\frac{1}{5}.$$

即所求方程式之二根相等,其值均為 $\frac{1}{5}$.

例 4. 解 $x^2-x+1=0$ 方程式.

解 應用根之公式,因 $a=1, b=-1, c=1$, 故

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}.$$

即所求方程式之根為 $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ 與 $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

59. 一元二次方程式之根之討論 於方程式

$$ax^2+bx+c=0, \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設其係數 a, b, c 皆為實數,茲就此各係數中有一個或數個成為 0 時,方程式之根討論之如下.

(I) $a\neq0$, $b\neq0$, $c=0$ 時,方程式成為

$$ax^2+bx=0.$$

即 $$x(ax+b)=0.$$

解之,得 $$x=0,\ x=-\frac{b}{a}.$$

即 $a\neq 0, b\neq 0, c=0$ 時,二次方程式之根一爲 0,一爲 $-\frac{b}{a}$.

(II) $a\neq 0, b=0, c\neq 0$ 時,方程式成爲純二次方程式

$$ax^2+c=0.$$

解之,得 $\quad x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

即 $a\neq 0, b=0, c\neq 0$ 時,二次方程式之二根爲 $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ 與 $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$. 其絕對值相等,其號相反.

(III) $a\neq 0, b=0, c=0$ 時,方程式成爲

$$ax^2=0.$$

解之,得 $\quad x=0.$

即 $a\neq 0, b=0, c=0$ 時,二次方程式之二根相等,且均爲 0.

(IV) $a=0, b\neq 0, c\neq 0$ 時,因 $b^2-4ac=b^2$, 故於二次方程式之根之公式,其分子成爲 $-b+\sqrt{b^2}$ 與 $-b-\sqrt{b^2}$, 二式中一方爲 0 時,則他方不爲 0. 因設 $b>0$ 時,其

$$-b+\sqrt{b^2}=-b+b=0, \quad -b-\sqrt{b^2}=-2b;$$

又設 $b<0$ 時,其 $-b+\sqrt{b^2}=-2b$, $-b-\sqrt{b^2}=0$故也.隨之方程式之二根成爲 $\frac{0}{0}$ 與 $\frac{-2b}{0}$, 其一根不定,而他根不能.

今取其不定之根研究之.先設 $b>0$, 然於 $a\neq 0$ 時,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}$$
$$=\frac{-4ac}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})}=\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

即 $a\neq 0$ 時,方程式之一根常等於 $\frac{-2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}$.

然此等式於 $a=0$ 時亦能成立,故於上式置 $a=0$ 時,得$\frac{-c}{b}$.
次於 $b<0$ 時,亦能計算其他根之值爲$\frac{-c}{b}$.故 $a=0, b\neq 0$ 時,其呈不定形之根之值爲 $\frac{-c}{b}$. 此即於二次方程式中置 $a=0$ 時所得方程式

$$bx+c=0$$

之根也.卽 $a=0, b\neq 0, c\neq 0$ 時,二次方程式之一根不能,他根爲方程式 $bx+c=0$ 之根.

如上所述,$a=0$ 時,二次方程式之一根不能,他根爲 $\frac{-c}{b}$.
如此時 b 亦爲 0 時,則$\frac{-c}{b}$亦不能.($c\neq 0$) 卽

(V) $a=0, b=0, c\neq 0$ 時,二次方程式之二根皆不可能.

又於$\frac{-c}{b}$式,設 $b\neq 0, c=0$ 時,則成爲 0.故

(VI) $a=0, b\neq 0, c=0$ 時,二次方程式之一根爲 0,一根不能.

(VII) 最後 $a=0, b=0, c=0$ 時,二次方程式之二根皆爲不定甚明.

$a=0$ 時,方程式 $ax^2+bx+c=0$ 成爲 $bx+c=0$, 雖早已不成其爲二次方程式;但於 $a\neq 0$ 時,所求得二次方程式之根中,使 $a=0$ 加以討論後,故不得不擴張二次方程式之意義,謂此時方程式之根爲不能或不定.

又 $a=b=c=0$ 時,二次方程式之二根雖呈不定之形式,但由其不定形之性質如何,其二根之值亦有能決定之者.

例 1. 解 $(\lambda-1)x^2-2(\lambda-2)x-\lambda-1=0$ 方程式,且討論

$\lambda=1$ 時,其根之値如何.

解 先解方程式,得

$$x'=\frac{\lambda-2+\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}}{\lambda-1}$$

$$=\frac{\lambda-2+\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}}{\lambda-1},$$

$$x''=\frac{\lambda-2-\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}}{\lambda-1}$$

$$=\frac{\lambda-2-\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}}{\lambda-1}.$$

二根.如 $\lambda=1$ 時,則成爲

$$x'=\frac{0}{0},\quad x''=\frac{-2}{0}.$$

其 x' 爲不定,x'' 爲不能.

然 $\lambda\neq1$ 時,

$$x'=\frac{\lambda-2+\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}}{\lambda-1}$$

$$=\frac{\{\lambda-2+\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}\}\{\lambda-2-\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}\}}{\lambda-1\{\lambda-2-\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-1)(\lambda+1)}\}}$$

$$=\frac{-(\lambda-1)(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda-2-\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3})}=-\frac{\lambda+1}{\lambda-2-\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}}.$$

於上式置 $\lambda=1$ 時,得

$$x'=-\frac{2}{-1-1}=1.$$

此卽於所與方程式中置 $\lambda=1$ 時所得方程式

$$2x-2=0$$

之根也.

隨之於$\lambda=1$時,其$x'=1$而x''不能.

例 2. 解$(\lambda-a)x^2+(\lambda-a)^2x-(\lambda-a)=0$方程式,且討論$\lambda=a$時,其根之值如何.

解 $\lambda=a$時,所與方程式之係數俱成為0,其根不定.但設$\lambda\neq a$時,由公式,其根為

$$x=\frac{-(\lambda-a)^2\pm\sqrt{(\lambda-a)^4+4(\lambda-a)^2}}{2(\lambda-a)}$$

$$=\frac{-(\lambda-a)^2\pm(\lambda-a)\sqrt{(\lambda-a)^2+4}}{2(\lambda-a)}$$

$$=\frac{-(\lambda-a)\pm\sqrt{(\lambda-a)^2+4}}{2}.$$

於上式置$\lambda=a$時.得

$$x=\pm1.$$

即$\lambda=a$時,所與方程式之根表面上雖屬不定,但其根為±1.

60. 一元二次方程式僅有二根 由上述二節,凡一元二次方程式,解之皆可求得其根二個.本節所證明者,則為其僅有二根,不能更有其他之第三根.

假設一元二次方程式具有三個互異之根α, β, γ時,則將此根各代入於其方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

中,因而得下列三等式.

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

以(2)式與(3)式邊邊相減,得

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0.$$

即 $$(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

然由假定,$\alpha\neq\beta$;故等式(5)成立時之必要條件爲

$$a(\alpha+\beta)+b=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

同理,由(3)式與(4)式,亦可得

$$a(\beta+\gamma)+b=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

以(6)式與(7)式邊邊相減,得

$$a(\alpha-\gamma)=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

即設 α, β, γ 三個互異數爲方程式(1)之根時,則等式(8)不可不成立.但由假定,α 與 γ 不相等,故 $\alpha-\gamma\neq0$.又由假定,a 亦不爲 0.故等式(8)不能成立.可知三個互異數爲方程式(1)之根之假定爲不合理,即一元二次方程式不能有二個以上之根.

例 1. 解 $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=x^2$ 方程式.

解 由視察方法,此方程式能爲 $x=a, x=b$ 所滿足甚明.故 a, b 爲此方程式之僅有二根.(此方程式非恆等式,因不能更爲 $x=c$ 所滿足故也.)

例 2. 解 $a^2\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$
$=x^2$ 方程式.

解 由視察方法,此方程式能爲 $x=a, x=b, x=c$ 所滿足甚明.故此式雖形式上有如 x 之二次方程式,而實際上則爲一恆等式.

61. 一元二次方程式之根與係數之關係 由前第58節研究之結果,得知二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之二根,爲

$$\begin{cases} x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \\ x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

作成此二根之和時,得

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}.$$

因得 $$x'+x''=-\frac{b}{a}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又作成此二根之積時,得

$$x'x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}.$$

因得 $$x'x''=\frac{c}{a}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

此等式(3)與(4),即爲方程式(1)之根與係數之關係也.因得一定理於下.

定理 1. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根之和,等於以其首項之係數變更符號後除其第二項係數所得之商;其二根之積,等於以其首項之係數除其不含未知數之項所得之商.

系. 設方程式$x^2+px+q=0$之根爲x'及x'',則

$$x'+x''=-p,\quad x'x''=q.$$

如上所述,方程式之根與係數之關係,雖可用解方程式後所得之根之值以求之,但此關係如用下法,則不待解其方程式亦可以求出之.

先假定 $\qquad ax^2+bx+c=0$ ……………………………(1)

之根爲x'及x'',則由因式分解方法分解之,得

$$ax^2+x+c=a(x-x')(x-x''). \quad \cdots\cdots(2)$$

因(2)式爲恆等式,故展開其右邊以比較其係數時,則其結果如下.

$$\because \quad a(x-x')(x-x'')=ax^2-a(x'+x'')x+ax'x'',$$

$$\therefore \quad ax^2+bx+c=ax^2-a(x'+x'')x+ax'x''.$$

故得 $\qquad -a(x'+x'')=b,\quad ax'x''=c.$

因$a\neq0$,故以之除上列二等式之兩邊時,得

$$-(x'+x'')=\frac{b}{a},\quad x'x''=\frac{c}{a}.$$

此卽方程式(1)之根與係數之關係也.

反之,如以x', x''爲所與之二數,(相異或相等均可)且使

$$\frac{b}{a}=-(x'+x''),\qquad \frac{c}{a}=x'x'',$$

以決定 a, b, c 時,則因

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\&=a\{x^2-(x'+x'')x+x'x''\}\\&=a(x-x')(x-x''),\end{aligned}$$

故 $ax^2+bx+c=0$ 成爲 $a(x-x')(x-x'')=0$,其二根爲 x' 及 x''.因復得一定理於下.

定理 2. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及 x'' 二數之必要且兼充分條件,爲 $\frac{b}{a}=-(x'+x'')$ 及 $\frac{c}{a}=x'x''$.

如置 $\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$ 時,則亦得一系於下.

系. 方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 x' 及 x'' 二數之必要且兼充分條件,爲 $p=-(x'+x'')$ 及 $q=x'x''$.

由上所述定理,可易於以所與二數爲根以作成方程式.

設所與二數爲 α 及 β,其和爲 $-p$,其積爲 q;卽設

$$-p=\alpha+\beta, \text{或 } p=-(\alpha+\beta), \ q=\alpha\beta$$

時,則由上述定理,方程式

$$x^2+px+q=0$$

之根爲 α 及 β.又以不等於 0 且不含未知數之任意數 a 乘其兩邊時,其所得結果

$$ax^2+apx+aq=0$$

亦能爲 α, β 所滿足.換言之,卽與 $x^2+px+q=0$ 爲同値也.今置 $ap=b, aq=c$ 時,則此方程式成爲

$$ax^2+bx+c=0.$$

因得一規則於下.卽

以所與二數爲根求作二次方程式時,可以 1 爲 x^2 之係數,以所與二數之和變更符號後爲 x 之係數,以所與二數之積爲不含 x 之項,然後將此三項加合後所得之二次有理整式,使之等於 0 卽可.又如此所得之方程式,雖以不等

於 0 且不含未知數之任意數乘之,其根亦不變.

例 1. 以 3 及 -7 二數爲根,求作方程式.

解 先作 二根之和 $=3+(-7)=-4$,

二根之積 $=3\times(-7)=-21$.

因得所求之方程式爲

$$x^2+4x-21=0.$$

又此式任以不等於 0 且不含未知數之數乘之,其所得結果,亦爲所求之方程式.

例 2. 以 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ 及 $\dfrac{1}{7}$ 二數爲根,求作方程式.

解 先作 二根之和 $=\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{1}{7}$.

二根之積 $=\dfrac{\sqrt{2}}{21}$.

因得所求之方程式爲

$$x^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{7}\right)x+\frac{\sqrt{2}}{21}=0.$$

以21乘其兩邊以除去其分母時,得

$$21x^2-(7\sqrt{2}+3)x+\sqrt{2}=0.$$

此卽所求之方程式也.

62. 二次方程式之根之對稱式 設二次方程式

$$x^2+px+q=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之根爲 x' 及 x'',則有下述之定理存在.

定理 1. 凡關於 x' 及 x'' 之對稱式,皆可以關於 p 及 q 之有理式以表之.

上述定理中所謂對稱式,係指關於 x' 及 x'' 之有理式且兼對稱者而言.又關於 x' 及 x'' 之有理式,恆能化作

$$\frac{P}{Q} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

之形式.此處之 P 及 Q 爲關於 x' 及 x'' 不含公因式之有理整式.

此式如爲對稱,則 P, Q 二式亦爲對稱式,由對稱式之性質推之,至爲明顯.故上述定理,又可歸着於下述定理.

定理 1. 凡關於 x' 及 x'' 之對稱有理整式,皆可以 p 及 q 之有理整式以表之.

證明: 因關於 x' 及 x'' 之對稱有理整式,如分作同次之部分時,則其各同次部分,亦爲對稱式.故就同次對稱式以證明上述定理卽可.

然關於 x' 及 x'' 之同次對稱式,如將其係數置之度外,則由

$$\left.\begin{array}{l}(x'x'')^l \\ (x'x'')^m(x'^n+x''^n)\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

等形式之項而成.如應用根與係數之關係,卽

$$x'+x''=-p, \quad x'x''=q \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

時,則成爲

$$(x'x'')^l=q^l$$

$$(x'x'')^m(x'^n+x''^n)=q^m(x'^n+x''^n).$$

故對於 $x'^n+x''^n$ 之對稱式研究之卽可.

因 x' 及 x'' 爲方程式(1)之根,故

$$\left.\begin{array}{l}x'^2+px'+q=0\\ x''^2+px''+q=0\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

將上列二等式邊邊相加,得

$$x'^2+x''^2+p(x'+x'')+2q=0.$$

$\because$ $\quad x'+x''=-p,$

$\therefore$ $\quad x'^2+x''^2-p^2+2q=0.$

卽 $\quad x'^2+x''^2=p^2-2q.$

今令 $\quad S_n=x'^n+x''^n\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

時,則由上得結果,得

$$S_1=x'+x''=-p,$$

$$S_2=x'^2+x''^2=p^2-2q.$$

以 x' 及 x'' 各乘(5)式時,得

$$x'^3+px'^2+qx'=0,$$

$$x''^3+px''^2+qx''=0.$$

將上列二等式邊邊相加,得

$$x'^3+x''^3+p(x'^2+x''^2)+q(x'+x'')=0.$$

卽 $\quad S_3+pS_2+qS_1=0.$

因得 $\quad S_3=-pS_2-qS_1=-p(p^2-2q)-q(-p)$

$$=-p^3+3pq.$$

一般如以 x'^{n-2} 及 x''^{n-2} 各乘(5)式邊邊相加時,則得

$$S_n+pS_{n-1}+qS_{n-2}=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

應用此種關係,可順次以求得 $S_3, S_4, S_5, \cdots\cdots, S_n$. 此 S_n 由上述計算,其爲關於 p 及 q 之有理整式甚明.卽本定理已被證明.

以上定理,雖僅就$x^2+px+q=0$形式之二次方程式說明之,由此當可推知關於 $ax^2+bx+c=0$ 形式之二次方程式之根之對稱式,亦有同樣之定理存在.卽

定理 2. 關於二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根 x' 及 x''之對稱式,可以關於其係數 a, b, c 之有理式以表之.

因於上述證明中,如置 $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$ 時,卽成爲本定理故也.

例 1. 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及x'',試計算下列對稱式之值.

(1) $x'^2x''^3+x'^3x''^2$, (2) $\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}$, (3) $\frac{x''^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x''^2}$.

解 (1) $x'^2x''^3+x'^3x''^2=x'^2x''^2(x'+x'')=(x'x'')^2(x'+x'')$.

然 $x'+x''=-\frac{b}{a}$, $(x'x'')^2=\frac{c^2}{a^2}$.

因得 $x'^2x''^3+x'^3x''^2=-\frac{bc^2}{a^3}$.

(2) $\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{x'^3+x''^3}{x'^3x''^3}$.

然 $x'^3x''^3=(x'x'')^3=\frac{c^3}{a^3}$.

又 $x'^3+x''^3=-p^3+3pq=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}=\frac{3abc-b^3}{a^3}$.

因得 $\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{3abc-b^3}{a^3}\div\frac{c^3}{a^3}=\frac{3abc-b^3}{c^3}$.

(3) $\frac{x''^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x''^2}=\frac{x''^4+x'^4}{x'^2x''^2}$.

然 $$x'^2x''^2=(x'x'')^2=\frac{c^2}{a^2}.$$

又由公式(7),置 $n=4$ 時,則

$$S_4+pS_3+qS_2=0.$$

因得 $$S_4=x'^4+x''^4=-pS_3-qS_2.$$

∵ $$S_2=p^2-2q,\quad S_3=-p^3+3pq,$$

∴ $$S_4=p^4-4p^2q+2q^2.$$

隨之得 $$S_4=\frac{b^4}{a^4}-\frac{4b^2c}{a^3}+\frac{2c^2}{a^2}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}.$$

∴ $$\frac{x''^2}{x'^2}+\frac{x'^2}{x''^2}=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}\div\frac{c^2}{a^2}$$

$$=\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^2c^2}.$$

由上述定理,可推得一定理於下.

定理 3. 設關於二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根 x' 及 x'' 之有理式為 A,如於 A 中交換其 x' 與 x'' 時所得之式為 B,則以 A 與 B 為二根之方程式,其係數可以關於 a, b, c 之有理式以表之.

證明: 因交換 x' 與 x'' 時,則 A 成為 B, B 成為 A,二式皆不變其值,故 $A+B$ 及 AB 為關於 x' 及 x'' 之對稱式.由定理 2,其 $A+B$, 及 AB 皆可以 a, b, c 之有理式以表之.隨之以 A 與 B 為二根之方程式,即

$$x^2-(A+B)x+AB=0$$

之係數,可以關於 a, b, c 之有理式表之.

例 2. 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根為 x' 及 x'',求作以 x'^2 及 x''^2 為二根之方程式.

解　因 $$x'^2+x''^2=p^2-2q=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$x'^2x''^2=\frac{c^2}{a^2},$$

故得所求之方程式爲

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}x+\frac{c^2}{a^2}=0.$$

如以 a^2 乘之,則得

$$a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$$

例 3. 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及 x'',求作以 $\frac{1}{x'^3}$ 及 $\frac{1}{x''^3}$ 爲二根之方程式.

解　由例 1, $\frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}=\frac{3abc-b^3}{c^3}$.

又 $$\frac{1}{x'^3}\times\frac{1}{x''^3}=\frac{a^3}{c^3}.$$

故得所求之方程式爲

$$x^2-\frac{3abc-b^3}{c^3}x+\frac{a^3}{c^3}=0.$$

如以 c^3 乘之,則得

$$c^3x^3-(3abc-b^3)x+a^3=0.$$

63. 兩個二次方程式具有公共根之條件

定理 1. 二個二次方程式

$$ax^2+bx+c=0\text{ 及 }a'x^2+b'x+c'=0\cdots\cdots(1)$$

之根完全相同時,其必要且兼充分之條件,爲

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

證明: 設(1)組之二方程式二根完全相同時其二根爲x'及x''.則必

$$x'+x''=-\frac{b}{a},\ x'x''=\frac{c}{a}.$$

$$x'+x''=-\frac{b'}{a'},\ x'x''=\frac{c'}{a'}.$$

因得 $$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'},\ \frac{c}{a}=\frac{c'}{a'}.$$

$\therefore$ $$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

次設上列等式成立時其$\frac{a'}{a}=k$($k\neq 0$甚明),則

$$a'=ak,\quad b'=bk,\quad c'=ck.$$

$\therefore$ $$a'x^2+b'x+c'=k(ax^2+bx+c).$$

可知方程式$a'x^2+b'x+c'=0$,爲於方程式$ax^2+bx+c=0$之二邊,同以一不等於0且不含未知數之k乘之所得者,故此二方程式爲同値,卽其二根完全相同.隨之本定理卽被證明.

定理 2. 二個二次方程式

$$ax^2+bx+c=0\text{ 及 }a'x^2+b'x+c'=0.$$

僅有一個公共根時,其必要且兼充分之條件,爲

$$ab'-a'b\neq 0,$$

且 $$(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0.$$

證明: 設二方程式

$$ax^2+bx+c=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a'x^2+b'x+c'=0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之公共根為x_1,則

$$ax_1^2+bx_1+c=0, \quad \cdots\cdots(3)$$

$$a'x_1^2+b'x_1+c'=0. \quad \cdots\cdots(4)$$

以a'乘(3)式之兩邊,a乘(4)式之兩邊後,邊邊相減,得

$$(ab'-a'b)x_1+ac'-a'c=0. \quad \cdots\cdots(5)$$

設 $ab'-a'b\neq 0$ 時,得

$$x_1=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}. \quad \cdots\cdots(6)$$

又以b'乘(3)式之兩邊,b乘(4)式之兩邊後,邊邊相減,得

$$(ab'-a'b)x_1^2+b'c-bc'=0. \quad \cdots\cdots(7)$$

同理,得 $$x_1^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}. \quad \cdots\cdots(8)$$

由(6)式與(8)式之關係,因而成立下列等式.

$$\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\frac{(a'c-ac')^2}{(ab'-a'b)^2}.$$

將上列等式去分母兼移項時,得

$$(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0. \quad \cdots\cdots(9)$$

以R表上列等式之左邊,即置

$$\begin{aligned}R&=(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)\\&=a'^2c^2+a^2c'^2-bb'(a'c+ac')+b^2a'c'\\&\quad+b'^2ac-2aa'cc' \quad \cdots\cdots(10)\end{aligned}$$

時,則(9)式成為

$$R=0.$$

次設$ab'-a'b=0$時,則(5)式成為

$$ac'-a'c=0.$$

隨之容易誘導得下列等式.

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}.$$

此卽如定理 1 所證明,二方程式(1)與(2)之二根完全相同時也.但此時(9)式之等式,亦能成立甚明.可知

$$R=(a'c-ac')^2-(ab'-a'b)(bc'-b'c)=0$$

爲(1)式及(2)式具有公共根之必要條件.又$ab'-a'b\neq 0$及$R=0$,爲(1)式及(2)式僅有一公共根之必要條件.

次假設 $ab'-a'b\neq 0$ 且$R=0$時,置

$$x_1=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b},$$

由$R=0$等式,得

$$\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}=\frac{(a'c-ac')^2}{(ab'-a'b)^2}.$$

因得 $$x_1{}^2=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}.$$

以此x_1之值代入於方程式(1)中之 x 時,得

$$\begin{aligned}ax_1{}^2+bx_1+c&=\frac{a(bc'-b'c)}{ab'-a'b}+\frac{b(a'c-ac')}{ab'-a'b}+c\\&=\frac{a(bc'-b'c)+b(a'c-ac')+c(ab'-a'b)}{ab'-a'b}\\&=0.\end{aligned}$$

卽$x_1=\dfrac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$ 爲方程式(1)之根.同理,可知此數亦爲方程式(2)之根.因 $ab'-a'b\neq 0$, 故方程式(1)與(2)其兩根不能完全相同.隨之可知 $ab'-a'b\neq 0$, 且$R=0$,爲此二方程式僅有一公共根之充分條件.卽本定理已被證明.

系 1. 二方程式 $ax^2+bx+c=0$ 及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 具有公共根之必要且兼充分條件,爲 $R=0$.

系 2. 二方程式 $ax^2+bx+c=0$ 及 $a'x^{2'}+bx+c'=0$ 僅有一公共根時,此根必爲實根.

設此公共根爲 x_1,則於 $ab'-a'b\neq 0$ 時,由 (6) 式,得

$$x_1=\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b},$$

其 $\frac{a'c-ac'}{ab'-a'b}$ 爲實數故也.

系 3. 二方程式 $ax^2+bx+c=0$ 及 $a'x^2+b'x+c'=0$ 共有一虛根時,則其他一根亦爲虛數,其二方程式之根完全相同.

設 x_1 爲二方程式之公共虛根時,則由等式(5),

$$(ab'-a'b)x_1=a'c-ac'.$$

然 $ab'-a'b$ 及 $a'c-ac'$ 皆爲實數,故如 x_1 爲虛數時,則上列等式如能成立,必不可不 $ab'-a'b=0, a'c-ac'=0$. 隨之其二方程式之二根完全相同.而方程式之二根設其一根爲虛數時,則其他一根亦爲虛數.故本系眞確不誤.

問　題　八

解下列諸方程式.

1. $9x^2-24x+16=0.$
2. $3x^2=8x+3.$
3. $16x^2+16x+3=0.$
4. $x^2+(a-x)^2=(a-2x)^2.$

5. $x^2+(a-2x)^2=(a-3x)^2$.

6. $(x-a)^2+(x-b)^2=(a-b)^2$.

7. $(a-x)^3+(x-b)^3=(a-b)^3$.

8. $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$.

9. $(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$.

10. 求 λ 取如何之值時,方程式 $ax^2+bx+c-\lambda=0$ 之二根爲相異實根.

11. 設 a, b, c 爲相異實數時,證明方程式

$$(a+b+c)x^2-2(bc+ca+ab)x+3abc=0$$

之二根爲相異實根.

12. 求 λ 取如何之值時,方程式 $x^2-(2\lambda+3)x+\lambda^2-1=0$ 之二根爲相異實根.

13. 求 λ 取如何之值時,方程式 $(\lambda+2)x^2-2\lambda x+1=0$ 之二根相等.

14. 求 $m=-1$ 時,方程式 $(m^2+m)x^2+3mx-2=0$之根如何.又 $m=0$ 時,其根如何.

15. 解 $(\lambda+a)x^2-(\lambda+a)^2x-4(\lambda+a)=0$ 方程式,且討論 $\lambda=a$ 時,其根之值如何.

16. 設 x' 及 x'' 爲二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根,求作以$\frac{x''^2}{x'^2}$及$\frac{x'^2}{x''^2}$爲二根之方程式.

17. 求以二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根 k 倍之數爲二根之方程式.

18. 求以由二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根中減去

h 數之數爲二根之方程式.

19. 設二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲 x' 及 x'',求作以下列各組數爲根之方程式.

$$(a)\ \frac{1}{x'}\text{及}\frac{1}{x''},\quad (b)\ \frac{x''}{x'}\text{及}\frac{x'}{x''},\quad (c)\ \frac{x'+x''}{x'}\text{及}\frac{x'+x''}{x''}.$$

20. 設方程式$x^2+px+q=0$之二根爲 x' 及 x'',求以 p 及 q 表下列各式之式.

$$(a)\ (x'-x'')^2,\quad (b)\ x'^5+x''^5,\quad (c)\ \frac{x''}{x'}+\frac{x'}{x''}.$$

21. 設方程式 $2x^2-5x+3=0$ 之二根爲 x' 及 x'',證明以 $\frac{x'}{x''}$ 及 $\frac{x''}{x'}$ 爲二根之方程式爲 $6x^2-13x+6=0$.

22. 求出方程式$a^2x^2+b^2x+c^2=0$之根等於$ax^2+bx+c=0$之根之平方條件.

23. 設方程式 $px^2+qx+r=0$ 之二根爲 x' 及 x'',證明以 $x'+x''$ 及 $\frac{x'x''}{x'+x''}$爲二根之方程式爲$pqx^2+(pr+q^2)x+qr=0$.

24. 證明方程式 $x^2+ax+b=0$ 二根之差等於方程式 $x^2+px+q=0$二根之差時,則必 $a^2-4b=p^2-4q$.

25. 設方程式 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 x' 及 x'',證明以 $(x'+x'')^2$ 及 $(x'-x'')^2$ 爲二根之方程式爲

$$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0.$$

64. 分數方程式 茲先述關於分數方程式解法原理之基本定理於下.

定理 1. 設A, B爲關於未知數之有理整式,而此二式

不含公因式時,則方程式$\frac{A}{B}=0$ 與方程式$A=0$爲同値.

證明: 由假定,其A與B不含公因式,故方程式$A=0$之根,不能使B爲0.可知方程式$A=0$之根,卽爲$\frac{A}{B}=0$之根.又方程式$\frac{A}{B}=0$之根,不可不使此分子爲0,卽不可不爲$A=0$之根.卽本定理已被證明.

此定理不外於前第55節所述定理3之特殊情形,卽$A=0$之方程式爲以含有未知數之B式乘方程式$\frac{A}{B}=0$所得者,而此二方程式爲同値也.

以B乘方程式$\frac{A}{B}=0$之兩邊以作成$A=0$之方程式時,謂之去分母.

定理2. 凡分數方程式皆能化成$\frac{A}{B}=0$之形式.

因分數方程式如將其所有各項悉行移置於一邊化成一分數式後,如以其分子分母之最高公因式除其兩項時,必成$\frac{A}{B}=0$之形式故也.

因所有分數方程式皆能化成$\frac{A}{B}=0$之形式,故將分數方程式化成$\frac{A}{B}=0$之形式後再行應用定理1時,則卽能解之.

例1. 解$\frac{x-1}{2x+1}=\frac{x+1}{3x-2}$方程式.

解 移項,得$\frac{x-1}{2x+1}-\frac{x+1}{3x-2}=0$.

卽 $$\frac{(x-1)(3x-2)-(x+1)(2x+1)}{(2x+1)(3x-2)}=0.$$

卽 $$\frac{x^2-8x+1}{(2x+1)(3x-2)}=0.$$

去分母,得 $x^2-8x+1=0.$

解之,得 $x=4-\sqrt{15}$ 或 $4+\sqrt{15}.$

此卽所求之根也.

例 2. 解 $\frac{x}{(x+2)(2x+3)}=\frac{2x}{2x+3}-\frac{1}{x+2}$ 方程式.

解 將所有各項盡行移置於左邊化成一分數式時,得

$$\frac{x-2x(x+2)+(2x+3)}{(x+2)(2x+3)}=0,$$

或 $$\frac{-x(2x+3)+(2x+3)}{(x+2)(2x+3)}=0.$$

卽 $$\frac{(2x+3)(1-x)}{(x+2)(2x+3)}=0.$$

以 $2x+3$ 約其兩項時,得

$$\frac{1-x}{x+2}=0.$$

去分母,得 $1-x=0.$

因得 $x=1.$

當解分數方程式時,不必定行依照如上述二例所示,將各項盡行移置於左邊,於化成既約分數式後,再行除去分母之順序.只須其所得結果,能與如此計算之結果相同,其計算中途,無論採用何種方法均可.

一般,如以方程式兩邊所有各分數式分母之最低公倍

式乘其兩邊時,則此所得之方程式如解之,皆能得所求之根.但以諸分母之最低公倍式乘分數方程式之兩邊後所求得之根,常較原方程式所具之根爲多.例如於例 2. 以 $(x+2)(2x+3)$ 乘其方程式之兩邊時,得

$$x=2x(x+2)-(2x+3);$$

移項.再行因式分解時,得

$$(2x+3)(1-x)=0;$$

解之,得 $x=1$, 或 $-\frac{3}{2}$;

此 $-\frac{3}{2}$ 顯非原方程式之根是.此種於計算中途混入之根,謂之增根.因增根非原方程式所有之根,故於求得方程式之根後,不可不辨別其孰爲方程式之根,孰爲增根.待發覺其爲增根後,當卽棄去之.

辨別增根有無之方法,可置其根於分數方程式分母之未知數中,而檢驗其分母是否有成爲 0 者.如其根代入於分母之未知數中,使任何分母皆不成爲 0 時,則其根顯非增根.如使其分母有一爲 0 時,則多屬增根.

例 3. 解 $\frac{x^2-3x}{x^2-1}+2+\frac{1}{x-1}=0$ 方程式.

解 此方程式所應注意者爲 x 不可爲 1 或 -1. 因 x 不爲 1 或 -1 時,則 x^2-1 決不能成爲 0. 故以 x^2-1 乘方程式之兩邊時,得

$$x^2-3x+2(x^2-1)+(x+1)=0.$$

卽 $(x-1)(3x+1)=0.$

解之,得 $\qquad x=-\frac{1}{3}$, 或 1.

因 $x=1$ 時,則原方程式之分母俱成爲 0,可知其爲增根.故原方程式僅有一根 $-\frac{1}{3}$.

分數方程式亦有無根時,玆舉一二例以說明之.

例 4. 解 $\frac{1}{x-a}=0$ 方程式.

解 此方程式無論與 x 以如何之值,均不能滿足之.因任以何數除 1,其商皆不能成 0 故也.隨之此方程式無根存在.

例 5. 解 $\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+5}=\frac{8}{(2x-1)(x+5)}$ 方程式.

解 以分母之最低公倍式 $(2x-1)(x+5)$ 乘其兩邊時,得

$$2(x+5)-(2x-1)=8.$$

移項,簡約之,得

$$3=0.$$

不合理甚明.卽所與方程式無根存在.

65. 無理方程式 玆先述關於無理方程式解法原理之基本定理於下.

定理 於方程式之兩邊,昇高同次數之冪後所得之方程式,一般不與原方程式同値.

證明: 將方程式

$$A=B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之兩邊各自乘 n 次時,得方程式

$$A^n=B^n. \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但此兩方程式,一般多不同值.因方程式(1)與方程式

$$A-B=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

爲同值,而方程式(2)與方程式

$$A^n-B^n=0$$

$$\text{即}\quad (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}+A^{n-3}B^2+\cdots\cdots+B^{n-1})$$

$$=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

爲同值,但此方程式(4)係以含有未知數之式

$$A^{n-1}+A^{n-2}B+\cdots\cdots+B^n$$

乘方程式(3)所得者,故由第55節之定理3,不與方程式(3)同值.隨之方程式(1)與(2)亦不同值.即本定理已被證明.

茲爲便利起見,置

$$P=A^{n-1}+A^{n-2}B+A^{n-3}B^2+\cdots\cdots+B^{n-1}$$

系 1. 方程式 $A^n=B^n$ 爲以 P 乘方程式 $A=B$ 之兩邊所得者.

系 2. 方程式 $A^n=B^n$ 於方程式 $P=0$ 不具根時,始與方程式 $A=B$ 同值.

系 3. 方程式 $A^n=B^n$ 於方程式 $P=0$ 具有根時,則除方程式 $A=B$ 之根外,尙含有 $P=0$ 之根.

系 4. 方程式之兩邊各自乘後所得之方程式,一般不與原方程式爲同值.

解無理方程式時,通常皆將其各項適宜的移動後,昇高其兩邊成同次之羃,因以化成有理方程式,然後將此有理

方程式解之卽可.若一次昇高其兩邊成同次之羃後,所得者再爲無理方程式時,可再行將其各項適宜移動之,昇高其兩邊成同次之羃,藉以化成有理方程式.反復此法,不論如何之無理方程式,最後皆可化成爲有理方程式.

解無理方程式時,通常皆須昇高其兩邊成同次之羃,其所得有理方程式所含之根,由本定理,可知較原方程式之根爲多.欲辨別最後所得方程式之根孰爲原方程式之根,孰爲增根時,不可不將所得之根,一一代入於原方程式中以驗之.其能滿足原方程式者,卽爲所求之根.

例 1. 解 $\sqrt{2x-3}=2\sqrt{x+2}-3$ 方程式.

解 兩邊各自乘,得

$$2x-3=4(x+2)-12\sqrt{x+2}+9.$$

移項後整頓之,得

$$12\sqrt{x+2}=2x+20.$$

兩邊各以 2 除之,得

$$6\sqrt{x+2}=x+10.$$

兩邊各自乘,得

$$36(x+2)=x^2+20x+100.$$

卽 $x^2-16x+28=0.$

分解爲因式,得

$$(x-2)(x-14)=0.$$

解之,得 $x=2,$ 或 $14.$

$x=2$ 時; $\sqrt{2x-3}=\sqrt{4-3}=1,$

$$2\sqrt{x+2}-3=2\sqrt{2+2}-3=4-3=1,$$

其兩邊相等.故 2 為原方程式之根.

次 $x=14$ 時,代入於原方程式中,得

$$\sqrt{28-3}=2\sqrt{14+2}-3$$

即 $5=5.$

其方程式能成立.故14亦為原方程式之根.故所求之根為 2 與14.

例 2. 解$2\sqrt{x-3}+1=\sqrt{2x+1}$方程式.

解 兩邊各自乘,得

$$4(x-3)+4\sqrt{x-3}+1=2x+1.$$

移項,得 $4\sqrt{x-3}=12-2x.$

以 2 除之,得

$$2\sqrt{x-3}=6-x.$$

兩邊各自乘,得

$$4(x-3)=36-12x+x^2.$$

移項,得 $x^2-16x+48=0.$

解之,得 $x=4$ 或 $12.$

$x=4$ 時,代入於原方程式中,成$3=3$.其方程式能成立.又$x=12$時,代入於原方程式中,成$7=5$.其方程式不能成立.故12為增根,而 4 則為所求之根.

以上所舉例題之解法,雖在將方程式之兩邊昇高成同次之冪,但有時可先行適宜之計算,或行適宜之置換後,然後始行化為有理式者.其方法固可因利乘便,不必定拘執於一途也.茲例示一二於下.

例 3. 解$2x-3\sqrt{x}-14=0$方程式.

解　此方程式雖能於移項後兩邊各自乘以解之,但以下法爲較便.

因 $x=(\sqrt{x})^2$, 故所與方程式得改書之爲

$$2(\sqrt{x})^2-3\sqrt{x}-14=0.$$

如以 $\sqrt{x}$ 爲一未知數以處理之,則原方程式爲關於 $\sqrt{x}$ 之二次方程式.

解之,得　　$\sqrt{x}=\frac{7}{2}$, 或 -2.

因 $\sqrt{x}$ 不能爲負數,故 -2 不合理,僅

$$\sqrt{x}=\frac{7}{2}$$

爲合理.將上式兩邊各自乘,得

$$x=\frac{49}{4}.$$

即所求之根爲 $\frac{49}{4}$.

例 4.　解 $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}+2$ 方程式.

解　先以所與方程式與恆等式 $(x^2+4)-(x^2-4)=12-4$ 邊邊相除,得

$$\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-4}=\sqrt{12}-2.$$

將上列方程式與原方程式邊邊相加而以 2 除之,得

$$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{12}.$$

將上列方程式兩邊各自乘,得

$$x^2+4=12.$$

即　$x^2=8.$

因得　　$x=\pm2\sqrt{2}.$

卽爲所求之根也.

66. **高次方程式** 凡三次以上之方程式,統稱之爲高次方程式.高次方程式,本書當於後部第二十三章至第二十八章所謂方程式論中詳細硏究之.此處所述者,僅爲其能應用二次方程式解法所能解之特例數種而已.

I 能由視察的方法以求根者.

由第43節之定理2,凡由視察的方法求出 n 次方程式之一根時,則其解法可誘導成 $n-1$ 次之方程式.如此逐次求之,卽能將所與方程式之根完全求出.

例 1. 解 $3x^3-x-2=0$ 方程式.

解 $x=1$ 爲此方程式之一根,易於由視察的方法以求出之甚明.故此方程式之左邊能以 $x-1$ 整除之.卽

$$3x^3-x-2=(x-1)(3x^2+3x+2).$$

隨之原方程式之其他二根爲方程式

$$3x^2+3x+2=0.$$

之二根.解之,得

$$x=\frac{-3\pm i\sqrt{15}}{6}.$$

卽所求之根爲 $1,\ \dfrac{-3+i\sqrt{15}}{6},\ \dfrac{-3-i\sqrt{15}}{6}.$

II $ax^4+bx^2+c=0$ 形式之方程式.(其 x 爲含未知數之項)

此種形式之方程式能應用二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之解法以解之.應用公式時,得

$$x^2=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\therefore\quad x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

例 2. 解 $x^4-10x^2+9=0$ 方程式.

解 應用公式,得

$$x^2=\frac{10\pm\sqrt{100-36}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{10\pm8}{2}=9,\text{或 }1.$$

$x^2=9$ 時,得 $x=\pm3$;

$x^2=1$ 時,得 $x=\pm1$.

即所求方程式之根爲 3, -3, 1, -1.

III 相反方程式.

相反方程式爲將方程式之各項依 x 之降冪或昇冪順序排列時,則其第一項之係數與末項之係數相同,第二項之係數與末第二項之係數相同,其餘準此類推者.例如

$$ax^3+bx^2+bx+a=0,$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0,$$

$$ax^5+bx^4+cx^3-cx^2-bx-a=0,$$

等皆爲相反方程式是.

例 3. 解 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 方程式.

解 以 x^2 除其兩邊,得

$$ax^2+bx+c+b\frac{1}{x}+a\frac{1}{x^2}=0.$$

即 $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0.$

置 $x+\frac{1}{x}=y$ 時,得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

$$\therefore\quad a(y^2-2)+by+c=0.$$

設上列方程式之二根爲 α,β 時,則原方程式之四根爲下列二方程式之二組根.

$$x+\frac{1}{x}=\alpha,\quad x+\frac{1}{x}=\beta.$$

IV　二項方程式

凡屬於 $x^n\pm A=0$ 形式之方程式,謂之二項方程式.

例 4.　解 $x^5-1=0$ 方程式.

解　由第37節之定理 1,

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

得所求之根爲　$x=1$,

或　$x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

之根.但上列方程式爲相反方程式,故以 x^2 除之,得

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1=0.$$

置　$x+\frac{1}{x}=y$ 時,則 $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$.

$$\therefore\quad y^2-2+y+1=0.$$

$$\therefore\quad y=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore\quad x+\frac{1}{x}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{即}\quad x^2-\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}x+1=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{-1+\sqrt{5}\pm\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$\text{或} \quad x=\frac{-1-\sqrt{5}\pm\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

卽所求之根爲 $1,\ \dfrac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4},$

$\dfrac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}}{4},\ \dfrac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4},$

$\dfrac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}}{4}$ 是.

問　題　九

解下列諸方程式.

1. $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{1-x}.$

2. $\dfrac{2x+1}{2x-1}-\dfrac{8}{4x^2-1}=\dfrac{2x-1}{1+2x}.$

3. $\dfrac{x+a}{x-b}+\dfrac{x+b}{x-a}=2.$

4. $\dfrac{ax}{a+x}+\dfrac{bx}{b+x}=a+b.$

5. $\dfrac{x-b}{x-a}-\dfrac{x-a}{x-b}=\dfrac{2(a-b)}{x-a-b}.$

6. $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+b}{x-b}+\dfrac{x+c}{x-c}-3=0.$

7. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{b}{x}+\dfrac{b^2}{x^2}=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}.$

8. $\dfrac{2x^2-ax-a^2}{x-2a}+\dfrac{2x^2-3ax-8a^2}{x-3a}=\dfrac{8x^2-8a^2}{2x-3a}.$

9. $6\sqrt{x^2-2x+6}=21+2x-x^2$.

10. $2x^2-3x-21=2x\sqrt{x^2-3x+4}$.

11. $\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}$.

12. $\sqrt[4]{a-x}+\sqrt[4]{b-x}=\sqrt[4]{a+b-2x}$.

13. $2\sqrt{x^2-3x+1}+3=\dfrac{5}{\sqrt{x^2-3x+1}}$.

14. $\sqrt{a-x}=x-b$.

15. $\dfrac{(x-a)\sqrt{x-a}+(x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}}=a-b$.

16. $\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}-\sqrt{\dfrac{b-x}{x-a}}=1$.

17. $(x-a)^4+(x-b)^4=(a-b)^4$.

18. $a^4\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^4\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^4\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$

$=x^4$.

19. $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12=0$.

20. $(x^2+2)^2+8x(x^2+2)+15x^2=0$.

21. $2x^2-4x+3\sqrt{x^2-2x+6}=15$.

22. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)=\dfrac{9}{16}a^4$.

23. $ax^3+bx^2+bx+a=0$.

24. $4x^4-4x^3-7x^2-4x+4=0$.

25. $9x^4-24x^3-2x^2-24x+9=0$.

26. $x^3-1=0$. 27. $x^4-1=0$.

28. $x^4+a^4=0$. 29. $x^5+32=0$.

30. $x^8-1=0$.

第九章　聯立方程式

67. 聯立方程式　於含有未知數 x, y 之方程式,例如

$$3x-2y=8, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其能適合於 x, y 之值,有無數組存在.因如將此方程式改書成

$$3x=8+2y,$$

即　$$x=\frac{8+2y}{3}.$$

時,則任與何值代入於 y 即能得一與此值對應之 x 值故也.例如上式於

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$y=1$ 時,則 $x=3\frac{1}{3}$;

$y=2$ 時,則 $x=4$;

$y=3$ 時,則 $x=4\frac{2}{3}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等是.可知能適合於方程式(1)之 x, y 值,有無數組存在.同理,其能適合於方程式

$$x+y=6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之 x, y 值,亦有無數組存在.因如將此方程式改書成

$$x=6-y$$

時,則

$$\begin{array}{l}
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y=1\text{ 時},x=5;\\
y=2\text{ 時},x=4;\\
y=3\text{ 時},x=3;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

故也.但其能同時滿足兩方程式(1)及(2)之 x, y 值,則僅有 $x=4, y=2$ 之一組,此外並無存在.

凡含有二個以上未知數之方程式數個,均能爲其各未知數之相同值所滿足時,則此諸方程式,謂之<u>聯立方程式</u>.或謂之<u>方程式組</u>.其能滿足聯立方程式之未知數之值,則謂之<u>聯立方程式之根</u>.或謂之<u>聯立方程式之解</u>.

聯立方程式如係由整方程式組成時,則取其中最高次方程式之次數以爲聯立方程式之次數,例如

$$\left.\begin{array}{l}ax+by=c\\a'x+b'y=c'\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\left.\begin{array}{l}x+y+z=a\\x^2+y^2+z^2=b\\yz+zx+xy=c\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

等組方程式各能爲 x, y, z 之相同值所滿足時,則(1)組謂之<u>聯立二元一次方程式</u>,(2)組謂之<u>聯立三元二次方程式</u>是.於聯立方程式,如滿足其各未知數之數值能同時存在

時,則此聯立方程式,謂之成立,或謂之有根.否則謂之不能成立,或謂之無根,亦或謂之不能.

68. 聯立方程式解法原理 設含有若干未知數之聯立方程式二組,其第一組之根悉爲第二組之根;反之,第二組之根亦悉爲第一組之根時,則此二組聯立方程式,謂之同值.

解聯立方程式時,除能引用前第八章所證明之諸定理外,茲更就其與聯立方程式解法有密切關係之定理二三,證明之於下.

定理 1. 於所與一組聯立方程式中,將其組諸方程式之右邊與右邊相加,左邊與左邊相加後所得之方程式,以代其中任一方程式時;則此組聯立方程式,與原組聯立方程式爲同值.

證明: 設所與一組聯立方程式爲

$$\left.\begin{array}{l}A_1=B_1\\A_2=B_2\\A_3=B_3\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

則證明

$$\left.\begin{array}{r}A_1+A_2+A_3=B_1+B_2+B_3\\A_2=B_2\\A_3=B_3\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(2)$$

爲同值卽可.

於(1)組諸方程式中,如以其滿足(1)組未知數之值代入於其未知數時;則A_1之值,等於B_1之值;A_2之值,等於B_2之值;

A_3之值,等於B_3之值;隨之 $A_1+A_2+A_3$ 之值,亦不可不等於 $B_1+B_2+B_3$ 之值.故凡滿足(1)組聯立方程式未知數之值,必能滿足(2)組聯立方程式.

又將滿足(2)組聯立方程式未知數之值,嵌入於(2)組諸方程式時,則A_2之值,等於B_2之值;A_3之值,等於B_3之值;隨之A_2+A_3 之值,亦等於 B_2+B_3 之值.然 $A_1+A_2+A_3$ 之值等於 $B_1+B_2+B_3$ 之值,故A_1之值不可不等於B_1之值.可知凡能滿足(2)組聯立方程式未知數之值,必能滿足(1)組聯立方程式.

故(1)組聯立方程式與(2)組聯立方程式爲同値.卽本定理已被證明.

於上列(2)組中第一方程式,如改爲

$$A_1+A_2=B_1+B_2$$

或 $$A_1+A_3=B_1+B_3$$

時,其(1)與(2)二組聯立方程式仍爲同值甚明.所應注意者,爲於不失卻同值之性質,其能替代 $A_1=B_1$ 之方程式者,必不可不含 $A_1=B_1$ 之一事.例如

$$A_2+A_3=B_2+B_3,\ A_2=B_2,\ A_3=B_3,$$

之一組聯立方程式,不與(1)組爲同值是.因滿足此一組聯立方程式未知數之值,不必定能滿足 $A_1=B_1$ 故也.

一般,於(2)組聯立方程式中,其能替代其第一方程式者,爲

$$L_1A_1+L_2A_2+L_3A_3=L_1B_1+L_2B_2+L_3B_3$$

形式之方程式.但此處之 L_1, L_2, L_3 爲不含未知數且不等

於 0 之數.

又本定理中所謂加者,當知其亦含有減之意義.

定理 2. 於一組聯立方程式,設其中一方程式之任意未知數,能以其他未知數表之,例如$x=P$,其 P 不含 x 僅含 x 以外之未知數時;則於其餘諸方程式中,盡置 P 以代 x 所得之方程式一組,與原組聯立方程式爲同值.

證明: 設於A_2, A_3, B_2, B_3諸式,置 P 以代 x 所得之諸式爲A'_2, A'_3, B'_2, B'_3時,則證明下列二組聯立方程式爲同值卽可.

$$\left.\begin{aligned} x&=P \\ A_2&=B_2 \\ A_3&=B_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} x&=P \\ A'_2&=B'_2 \\ A'_3&=B'_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

凡滿足(1)組聯立方程式未知數之值,均能使 x 之值與 P 之值相等,故於其餘諸方程式,或以未知數之值以代未知數,或改 x 爲 P 後再以未知數之值代入之,其結果均屬相等.故凡能滿足(1)組聯立方程式未知數之值,必能滿足(2)組聯立方程式.

反之,其能滿足(2)組聯立方程式未知數之值,能使 x 之值與 P 之值相等.故不論豫置 x 以代 P 與否,與其於(2)組殘餘諸方程式中,以未知數之值以代未知數所得之結果,毫無影響.故凡能滿足(2)組聯立方程式未知數之值,亦必

能滿足(1)組聯立方程式.

故(1)組聯立方程式與(2)組聯立方程式爲同值.卽本定理已被證明.

69. 聯立方程式之解法 聯立方程式之解法,要在適宜引用前第八章第55節及本章第68節所證明諸定理,藉以變更所與方程式之形式,因而誘導得所求之根之明白方程式.其解法當隨其方程式形式之不同而異.本節所述者,則爲一般聯立方程式之解法.

I 加減法

設有 $A=0, B=0, C=0, \cdots\cdots\cdots\cdots, L=0,$

諸聯立方程式,則應用定理1,如適宜選定 $p, q, r, \cdots\cdots, t$ 等諸數,作成

$$pA+qB+rC+\cdots\cdots\cdots\cdots+tL=0, B=0,$$
$$C=0, \cdots\cdots\cdots\cdots, L=0,$$

一組與前組同值之聯立方程式時,則方程式

$$pA+qB+rC+\cdots\cdots\cdots\cdots+tL=0$$

之未知數,可較所與方程式少一個或數個.卽於原方程式之兩邊同以一數乘之,然後邊邊相加(或相減),其所得方程式之未知數,爲於所與方程式未知數中消去一個或數個者.依此法順次消去之,至其最後所得方程式僅含一個未知數時,則其未知數之根,卽行求得.此種方法,謂之加減消去法,或簡稱加減法.

例 1. 解下列聯立方程式.

$$3x+2y=16 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$x-4y=24 \cdots\cdots(2)$$

解　以 2 乘(1)式,得

$$6x+4y=32. \cdots\cdots(3)$$

(2)+(3),得　$7x=56.$

$\therefore\quad x=8.$

以 x 之值代入於(1)式或(2)式,得 $y=-4.$

即所求聯立方程式之一組根爲 $x=8, y=-4.$

II　代入法

先將一方程式中一未知數之值,以其他未知數及已知數表之;然後以此未知數之值,代入於其他方程式中同一未知數時,則其未知數即行消去.此種方法,謂之代入消去法,或簡稱之爲代入法.

例 2.　解下列聯立方程式.

$$2x+7y=35 \cdots\cdots(1)$$

$$5x-3y=26 \cdots\cdots(2)$$

解　由(1)式,得

$$x=\frac{35-7y}{2}. \cdots\cdots(3)$$

以(3)式 x 之值代入於(2)式,得

$$5\left(\frac{35-7y}{2}\right)-3y=26.$$

解之,得　$y=3.$

以 y 之值代入於(3)式,得 $x=7.$

即所求聯立方程式之一組根爲 $x=7, y=3.$

III 等置法

於二方程式將其某相同未知數之值,以其他未知數及已知數表之;然後用等號以連結此所得二式,則其未知數卽行消去.此種方法,謂之等置消去法,或簡稱之爲等置法.

例 3. 解下列聯立方程式.

$$4x-3y=5 \cdots\cdots(1)$$

$$3x-2y=4 \cdots\cdots(2)$$

解 由(1)式,得

$$x=\frac{5+3y}{4}. \cdots\cdots(3)$$

由(2)式,得 $$x=\frac{4+2y}{3}. \cdots\cdots(4)$$

置(3)式與(4)式之 x 之值相等時,得

$$\frac{5+3y}{4}=\frac{4+2y}{3}.$$

解之,得 $y=1.$

以 y 之值代入於(3)式或(4)式,得 $x=2.$

卽所求聯立方程式之一組根爲 $x=2, y=1.$

IV 未定係數法

設有三個三元一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=p_1 \cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=p_2 \cdots\cdots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=p_3 \cdots\cdots(3)$$

時,然後選定二未定係數 λ_1 及 λ_2,各以之乘(2)式及(3)式,將其所得結果與(1)式相加,得

$$(a_1+a_2\lambda_1+a_3\lambda_2)x+(b_1+b_2\lambda_1+b_3\lambda_2)y$$
$$+(c_1+c_2\lambda_1+c_3\lambda_2)z$$
$$=p_1+p_2\lambda_1+p_3\lambda_2.$$

今設使 y 之係數及 z 之係數皆成爲 0 以決定 λ_1 及 λ_2 時,則得

$$x=\frac{p_1+p_2\lambda_1+p_3\lambda_2}{a_1+a_2\lambda_1+a_3\lambda_2}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又置 y 及 z 之係數各等於 0 時,得

$$b_1+b_2\lambda_1+b_3\lambda_2=0,$$
$$c_1+c_2\lambda_1+c_3\lambda_2=0.$$

上列二方程式成爲以 λ_1 及 λ_2 爲未知數之二元一次聯立方程式,解之,得

$$\lambda_1=\frac{b_3c_1-b_1c_3}{b_2c_3-b_3c_2}.$$

$$\lambda_2=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{b_3c_2-b_2c_3}.$$

將上列二式中 λ_1 及 λ_2 之值代入於(4)式時,卽得 x 之根

$$x=\frac{p_1(b_2c_3-b_3c_2)+p_2(b_3c_1-b_1c_3)+p_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

依同樣方法,得

$$y=\frac{p_1(c_2a_3-c_3a_2)+p_2(c_3a_1-c_1a_3)+p_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)},$$

$$z=\frac{p_1(a_2b_3-a_3b_2)+p_2(a_3b_1-a_1b_3)+p_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(b_2c_3-b_2c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

未定係數法雖較前述三法遙爲繁雜,但此事毫不足爲

未定係數法病,未定係數法之特色,在秩序整然,且能使一般聯立三元一次方程式之解法,直接歸着於聯立二元一次方程式之解法.

又未定係數法,雖在未知數三個以上之聯立方程式,亦能適用之.

例 4. 解下列聯立方程式.

$$7x+3y-2z=16 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x+5y+3z=39 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$5x-y+5z=31 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

解 以二未定係數 λ_1 及 λ_2 各乘(2)及(3)式後將所得結果與(1)式邊邊相加時,得

$$(7+2\lambda_1+5\lambda_2)x+(3+5\lambda_1-\lambda_2)y$$
$$+(-2+3\lambda_1+5\lambda_2)z$$
$$=16+39\lambda_1+31\lambda_2.$$

今使 y 與 z 之係數各成爲 0 時,得

$$(7+2\lambda_1+5\lambda_2)x=16+39\lambda_1+31\lambda_2.$$

$$\therefore \quad x=\frac{16+39\lambda_1+31\lambda_2}{7+2\lambda_1+5\lambda_2}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又置 y 及 z 二係數各等於 0 時,得

$$3+5\lambda_1-\lambda_2=0,$$

$$-2+3\lambda_1+5\lambda_2=0.$$

解之,得 $\lambda_1=-\frac{13}{28}, \quad \lambda_2=\frac{19}{28}.$

將 λ_1 及 λ_2 之值代入於(4)式時,得 $x=2$.

將 x 之值代入於(1),(2),(3)三式中任意二式,使成爲二元

一次聯立方程式時,解之,得 $y=4$, $z=5$.

卽所求聯立方程式之一組根爲 $x=2$, $y=4$, $z=5$.

70. 聯立二元一次方程式 聯立二元一次方程式經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$$

此聯立方程式之解法如下.

假定 a_1, b_1, a_2, b_2 中至少有一個不爲 0 者,例如設 $b_1 \neq 0$ 時,則於方程式(1)移項後以 b_1 除其兩邊時,成爲

$$y=-\frac{a_1x+c_1}{b_1}. \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

將(3)式所表之 y 值 $-\frac{a_1x+c_1}{b_1}$ 代入於方程式(2)時,得

$$a_2x-\frac{b_2(a_1x+c_1)}{b_1}+c_2=0.$$

以 b_1 乘上列方程式之兩邊後整頓之,則成

$$(a_2b_1-a_1b_2)x+b_1c_2-b_2c_1=0.$$

卽 $$(a_1b_2-a_2b_1)x-(b_1c_2-b_2c_1)=0. \cdots\cdots(4)$$

故如 $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ 時,則

$$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \quad \cdots\cdots\cdots(5)$$

將 x 之值代入於(3)式整頓後,得

$$y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

卽所求聯立方程式之一組根爲

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\ y&=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

如上所說明者,係假定$b_1\neq0$;又假定$b_2\neq0$時,其所得結果亦完全相同.因將a_1, b_1, c_1各與a_2, b_2, c_2相交換時,僅止於方程式(1)與(2)之交換,而其二方程式之一組並無若何變化;且於(7)組行此交換時,亦成

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}\\ y&=\frac{c_2a_1-c_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2}\end{aligned}\right\},\quad \text{即}\quad \left.\begin{aligned}x&=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}\\ y&=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}\end{aligned}\right\},$$

事實上毫無變化故也.

上述結果,當含有b_1, b_2之一方能為0之意義甚明.此時之根,亦能以(7)式表之.茲說明之於下.

設 $b_1=0$ 時,則 $a_1b_2-a_2b_1$,成為a_1b_2.故$a_1b_2-a_2b_1\neq0$時,為$a_1b_2\neq0$,其a_1, b_2雙方均不能為0.此時之聯立方程式成為

$$\begin{cases}a_1x+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$$

因$a_1\neq0$,由第一方程式,得

$$x=-\frac{c_1}{a_1}.$$

將上式x之值$-\frac{c_1}{a_1}$代入於第二方程式時,得

$$-\frac{a_2c_1}{a_1}+b_2y+c_2=0.$$

以a_1乘上式之兩邊,得

$$a_1b_2y-(c_1a_2-c_2a_1)=0.$$

$$\because \quad a_1b_2 \neq 0,$$

$$\therefore \quad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2}.$$

故此時聯立方程式之一組根爲

$$x=-\frac{c_1}{a_1}, \qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2}.$$

此卽於(7)式置 $b_1=0$ 所得之結果也.

又於上述說明,假定a_1, b_1, a_2, b_2中至少有一個不爲 0 者.設$b_1 \neq 0$,則$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$時,其a_1, a_2中之一方爲 0 時之根,亦能以(7)式表之甚明.至其說明方法,則與假定$b_1=0$時之說明方法相同,

但a_1, a_2雙方,或b_1, b_2雙方同爲 0 時,則$a_1b_2-a_2b_1=0$.此種情形,容下節再行研究之.茲總合上述結果,得一定理於下.

定理 聯立二元一次方程式

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於$a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$時,有下列之一組根,此外無根存在.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

上列(2)組方程式,謂之聯立方程式(1)組之根之公式.

記憶上列聯立方程式之根之公式時,以採用下述方法爲便.

將聯立方程式(1)組各方程式 x, y 之係數依次排列成

$$\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$$

之形式,然後以 a_1 乘其隔行下方之 b_2,得積 a_1b_2;次以 a_2 乘其隔行上方之 b_1,得積 a_2b_1;將此所得二積相減,其差卽爲公共之分母 $a_1b_2-a_2b_1$. 卽隨式中矢號之爲 $\searrow$ 爲 $\nearrow$,而予其積以 + 號或 − 號也.又將(1)組各方程式 y 之係數及其絕對項依次排列成

$$\begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array}$$

之形式後,依上述同樣方法,卽得 x 根之分子 $b_1c_2-b_2c_1$. 再將(1)組各方程式 x 之係數及絕對項依次排列成

$$\begin{array}{cc} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{array}$$

之形式後,依上述同樣方法,復得 y 根之分子 $c_1a_2-c_2a_1$. 但上列 $\begin{array}{cc} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{array}$, $\begin{array}{cc} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{array}$, $\begin{array}{cc} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{array}$ 等式,通常省略去其矢號而以 | | 號置於其兩旁書作 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ 等,故聯立方程式之根,亦可書作

$$x=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

此 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$ 等式,謂之行列式.

以後研究聯立方程式時,爲簡單起見,常置

$$D=a_1b_2-a_2b_1,\quad A=b_1c_2-b_2c_1,\quad B=c_1a_2-c_2a_1,$$

故根之公式,常簡書作

$$x=\frac{A}{D},\qquad y=\frac{B}{D}.$$

71. 聯立二元一次方程式之根之討論 聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

於 $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ 時,僅有

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y&=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之一組根,已證明於上.茲更就 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時研究之.

因 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時,其 a_1, b_1, a_2, b_2 四數有悉數爲 0 與否之別,故特分爲二方面以研究之.

I　a_1, b_1, a_2, b_2 四數中至少有一不爲 0 者.但此時當包括有四數悉不爲 0 之可能意義在內.

下列二恆等式

$$b_2(a_1x+b_1y+c_1)-b_1(a_2x+b_2y+c_2)$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)x-(b_1c_2-b_2c_1),$$
$$-a_2(a_1x+b_1y+c_1)+a_1(a_2x+b_2y+c_2)$$
$$=(a_1b_2-a_2b_1)y-(c_1a_2-c_2a_1),$$

於 $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時,成為

$$b_2(a_1x+b_1y+c_1)-b_1(a_2x+b_2y+c_2)=-A, \quad \cdots\cdots(4)$$
$$-a_2(a_1x+b_1y+c_1)+a_1(a_2x+b_2y+c_2)=-B. \quad \cdots\cdots(5)$$

但 $A=b_1c_2-b_2c_1,\quad B=c_1a_2-c_2a_1.$

又因(4),(5)兩等式右邊 A, B 有為 0 與否之別,故須再行分為二方面以研究之.

(i) A, B 中至少一方不為 0 時.此時包含 A, B 雙方皆不為 0 或一方為 0 而他方不為 0 之兩種,要之其 A, B 二方至少一方不為 0.故設 $A\neq0$ 時,則 b_1, b_2 不能同時為 0,卽至少其一方不能為 0.設 $b_1\neq0$ 時,則於等式(4)移項後以 b_1 除其兩邊,成為

$$a_2x+b_2y+c_2=\frac{b_2}{b_1}(a_1x+b_1y+c_1)+\frac{A}{b_1}. \quad \cdots\cdots\cdots(6)$$

因 $a_1x+b_1y+c_1=0,$

故 $a_2x+b_2y+c_2=\frac{A}{b_1}.$

上列等式右邊不為 0,故能滿足方程式(1)未知數 x, y 之值,不能滿足方程式(2).隨之聯立方程式(1)與(2)不能成立.卽此時聯立方程式(1),(2)為不能.

(ii) $A=B=0$ 時.由假定,a_1, b_1, a_2, b_2 四數中至少有一個不為 0 者存在,設 $b_1\neq0$ 時,則於等式(4)移項後以 b_1 除其兩

邊,成爲

$$a_2x+b_2y+c_2=\frac{b_2}{b_1}(a_1x+b_1y+c_1).$$

$$\because \quad a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$\therefore \quad a_2x+b_2y+c_2=0.$$

卽凡能滿足方程式(1)未知數 x, y 之値,悉能滿足方程式(2).然方程式(1)爲二元一次方程式,能滿足其方程式未知數之値有無數組存在,故此時聯立方程式之根有無數組存在.卽此時聯立方程式(1)及(2)爲不定.

總合上述(i),(ii)兩方面結果時,因得一定理於下.

定理 $a_1b_2-a_2b_1=0$,而 a_1, b_1, a_2, b_2 四數中至少有一不爲 0 時,則聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$

$$a_2x+b_2y+c_2=0.$$

於 $b_1c_2-b_2c_1$, $c_1a_2-c_2a_1$ 中一方不爲 0 時爲不能,於雙方同爲 0 時爲不定.

II a_1, b_1, a_2, b_2 悉數爲 0 時.此時聯立方程式成爲

$$c_1=0, \quad c_2=0.$$

如 c_1, c_2 中有不爲 0 者,則此一組等式不能成立.隨之聯立方程式(1),(2)不能成立.卽此時聯立方程式爲不能.次如 $c_1=c_2=0$ 時,則此二等式不論 x, y 之値如何,皆能成立.隨之方程式(1),(2)之根完全不定.卽此時聯立方程式爲不定.因得一定理於下.

定理 2. 設 a_1, b_1, a_2, b_2 悉數爲 0 時,則聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0,$$

於c_1, c_2中有一不爲0時爲不能,於雙方同爲0時爲不定.

例 1. 解下列聯立方程式.

$$x+y=a+b \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$(a+c)x-by=bc \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 因 $D=-b-(a+c)=-(a+b+c)$, 故如 $a+b+c \neq 0$ 時,則聯立方程式僅有一組根.此根易由觀察的方法以求得之.即

$$x=b, \qquad y=a,$$

是.如 $a+b+c=0$ 時,則因 $a+c=-b, c=-(a+b)$, 故方程式(2)成爲

$$-b(x+y)=-b(a+b).$$

此即以 $-b$ 乘方程式(1)兩邊所得之結果.可知此時僅有方程式(1)之一個方程式.即此時聯立方程式爲不定.

例 2. 解下列聯立方程式.

$$p(x+y)+q(x-y)=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$p(x-y)+q(x+y)=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 將上列二方程式整頓之,成爲

$$(p+q)x+(p-q)y=5,$$
$$(p+q)x-(p-q)y=3.$$

將上列二方程式邊邊相加,相減,各以2除其兩邊得

$$(p+q)x=4,$$

$$(p-q)y=1.$$

如 $p^2-q^2 \neq 0$ 時,則

$$x=\frac{4}{p+q},$$

$$y=\frac{1}{p-q}.$$

卽所求聯立方程式之一組根也.

又如 $p^2-q^2=0$ 時,設 $p=q$, 則方程式(1),(2)各成爲

$$2px=5, \qquad 2px=3.$$

此二方程式不能同時成立甚明.卽此時聯立方程式爲不能.次設 $p=-q$ 時,則方程式(1),(2)各成爲

$$2py=5, \qquad -2py=3.$$

亦不能同時成立甚明.卽此時聯立方程式亦爲不能.因得結論如下.卽 $p^2-q^2=0$ 時,所與聯立方程式爲不能.

72. 二元一次同次方程式 聯立二元一次方程式具有

$$a_1x+b_1y=0,$$

$$a_2x+b_2y=0.$$

之形式時,謂之同次方程式.此種聯立方程式,如於上述一般聯立二元一次方程式中,置其絕對項等於 0 時,則由上節討論結果,易於了解下述事項.

(i) $a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ 時, $x=y=0$, 此外無能滿足聯立方程式之値.

(ii) $a_1b_2-a_2b_1=0$ 時,聯立方程式爲不定.隨之於未知數 x, y 中,至少能爲其一方不爲 0 之値所滿足.因得一定理

於下.

定理 聯立方程式

$$a_1x+b_1y=0,$$
$$a_2x+b_2y=0.$$

能爲其未知數 x, y 中至少一方不爲 0 之値所滿足時,其必要且兼充分之條件,爲 $a_1b_2-a_2b_1=0$.

此結果當歸着於二個一元一次方程式具有公共根之條件.因 x, y 中至少有一不爲 0,故設 $y\neq 0$ 時,則於上列聯立方程式兩邊各以 y 除之,得

$$a_1\frac{x}{y}+b_1=0,$$

$$a_2\frac{x}{y}+b_2=0.$$

此卽以 x 與 y 之比 $\frac{x}{y}$ 爲一未知數之二個一次方程式也.此二方程式之根相等之必要且兼充分條件,爲

$$-\frac{b_1}{a_1}=-\frac{b_2}{a_2},$$

卽 $a_1b_2=a_2b_1.$

$\therefore$ $a_1b_2-a_2b_1=0.$

73. 聯立三元一次方程式 聯立三元一次方程式經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ 九數中至少有一不爲 0,例如 $c_1 \neq 0$ 時,則以 c_2 乘方程式(1)之兩邊,c_1 乘方程式(2)之兩邊後,邊邊相減時,得

$$(c_1a_2-c_2a_1)x-(b_1c_2-b_2c_1)y+c_1d_2-c_2d_1=0. \cdots(4)$$

又各以 c_3, c_1 乘方程式(1),(3)後,邊邊相減時,得

$$(c_3a_1-c_1a_3)x-(b_3c_1-b_1c_3)y+c_3d_1-c_1d_3=0. \cdots(5)$$

由方程式(4)與(5)消去 y 時,得

$$\begin{aligned}\{(c_1a_2-c_2a_1)(b_3c_1-b_1c_3)-(c_3a_1-c_1a_3)(b_1c_2-b_2c_1)\}x \\ +(c_1d_2-c_2d_1)(b_3c_1-b_1c_3) \\ -(c_3d_1-c_1d_3)(b_1c_2-b_2c_1) \\ =0.\end{aligned}$$

將上列等式改書之,則成爲

$$\begin{aligned}c_1\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}x \\ +c_1\{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3) \\ +d_3(b_1c_2-b_2c_1)\}=0.\end{aligned}$$

因 $c_1 \neq 0$,故以 c_1 除上列等式之兩邊時,得

$$\begin{aligned}\{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\}x \\ +d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3) \\ +d_3(b_1c_2-b_2c_1)=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)\end{aligned}$$

隨之如 $a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) \neq 0$ 時,則

$$x=-\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}. \cdots(7)$$

如以上式中 x 之值代入於方程式(4),或由(4),(5)兩方程式消去 x 時,則得

$$y=-\frac{d_1(c_2a_3-c_3a_2)+d_2(c_3a_1-c_1a_3)+d_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.\cdots(8)$$

將(7),(8)兩式中 x 與 y 之值代入於方程式(1)中而計算之,得

$$z=-\frac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)+d_2(a_3b_1-a_1b_3)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}.\cdots(9)$$

如以 D 代上列三式中 x, y, z 之值之分數公共分母時,則 D 可書成下列之種種形式.

$$\left.\begin{aligned}D&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)\\&=b_1(c_2a_3-c_3a_2)+b_2(c_3a_1-c_1a_3)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)\\&=c_1(a_2b_3-a_3b_2)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\\&=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)\\&=a_2(b_3c_1-b_1c_3)+b_2(c_3a_1-c_1a_3)+c_2(a_3b_1-a_1b_3)\\&=a_3(b_1c_2-b_2c_1)+b_3(c_1a_2-c_2a_1)+c_3(a_1b_2-a_2b_1)\end{aligned}\right\}(10)$$

因 $D\neq0$ 時,則於由三數構成之(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2),(a_3,b_3,c_3)六組中任何組,皆至少有一個不爲 0 者存在.隨之於$D\neq0$時,聯立方程式各係數及絕對項中至少有三個不爲 0 者.

又於原方程式(1),(2),(3)中,循環交換 x, y, z 時,同時不變其添數 1, 2, 3 之位置而循環交換其文字 a, b, c 時,仍屬不變.隨之如於等式(7)施行同樣之方法時,則順次卽得等式(8)(9).可知由方程式(4)與(5)一組求得 x 之值後,則可不必再如上法以求 y, z 之值,僅須於表 x 值之公式中循環交換其文字 a, b, c 卽可.

於 x 之值中交換其文字 a, b 時,卽成爲 y 之值;交換其

文字 a, c 時,則成爲 z 之值.此因於原方程式中交換 x, y 時,同時交換 a, b; 及交換 x, z 時,同時交換 a, c,則仍屬不變故也.

可知以上所得結果之(7),(8),(9)三式,雖係由假定 $c_1 \neq 0$ 時以求得者,但此結果可由假定係數 $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ 中任何一數不爲 0 時以求得之甚明.隨之於 $D \neq 0$ 時,原方程式之根,爲(7),(8),(9)三式所表之值.此外無根存在.因得一定理於下.

定理 聯立三元一次方程式.

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於 $D \neq 0$ 時,有

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3(+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)} \\ y&=-\frac{d_1(c_2a_3-c_3a_2)+d_2(c_3a_1-c_1a_3)+d_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)} \\ z&=-\frac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)+d_2(a_3b_1-a_1b_3)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)} \end{aligned}\right\}(2)$$

之一組根,此外無根存在.

上列(2)組方程式,謂之聯立方程式(1)組之根之公式.即與於第66節所述未定係數法求得結果中置 $d_1=-p_1, d_2=-p_2, d_3=-p_3$ 時,完全一致.

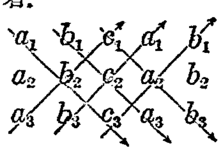
記憶上列聯立方程式之根之公式時,亦以採用行列式爲便.即其根之公式可書作

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$y=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}},$$

等是.但 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 之計算,爲三文字之連乘積而依下式之矢號附以正負號者.



上式中矢號之爲↘者,亦表正;爲↗者,表負.卽各由三文字連乘所得之積 $a_1b_2c_3$, $b_1c_2a_3$, $c_1a_2b_3$ 等爲正;$a_3b_2c_1$, $b_3c_2a_1$, $c_3a_2b_1$ 等爲負是.其餘準此.

74. 聯立 n 元一次方程式 n 個 n 元一次方程式經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+\cdots\cdots\cdots+l_1w+p_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+\cdots\cdots\cdots+l_2w+p_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\cdots\cdots\cdots+l_3w+p_3=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nx+b_ny+c_nz+\cdots\cdots+l_nw+p_n=0 \end{cases}$$

式中 $x, y, z, \cdots\cdots\cdots\cdots w$ 爲 n 個未知數,其 $a_1, b_1, c_1, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 等則皆爲已知數.

設 $a_1 \neq 0$ 時,則由第一方程式,得

$$x=-\frac{1}{a_1}(b_1y+c_1z+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_1w+p_1).$$

將上式 x 之值代入於其餘 $n-1$ 個方程式中時,則得關於 $y, z, \cdots\cdots w$ 等 $n-1$ 個未知數之方程式 $n-1$ 個.隨之所與聯立 n 元一次方程式之解去,歸着於聯立 $n-1$ 元一次方程式之解法.如此逐次消去其未知數 $x, y, z, \cdots\cdots$ 時,最後卽得一一元一次方程式.解此一元一次方程式時,卽得一未知數之根.再以此未知數之值順次代入於原方程式中,繼續求之,當可將 $x, y, z, \cdots\cdots, w$ 等 n 個未知數之根求出.

又如應用未定係數法時,則其解法如下.以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots\cdots\cdots, \lambda_n$ 各乘一方程式之兩邊,然後邊邊相加,置未知數 $y, z,$

$\cdots\cdots$, w 之係數等於 0,即使

$$\begin{cases} b_1\lambda_1+b_2\lambda_2+b_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n\lambda_n=0 \\ c_1\lambda_1+c_2\lambda_2+c_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n\lambda_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_1\lambda_1+l_2\lambda_2+l_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_n\lambda_n=0 \end{cases}$$

後,然後應用含有 $n-1$ 個未知數之聯立一次方程式解法,得以決定其 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\cdots\cdots\cdots\cdots:\lambda_n$ 之比之值.而 x 之值,則可由方程式

$$(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+\cdots\cdots+a_n\lambda_n)x+p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3 +\cdots\cdots+p_n\lambda_n=0.$$

以決定之.卽設 $a_1\lambda_1+a_1\lambda_2+a_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n\lambda_n\neq 0$, 則

$$x=-\frac{p_1\lambda_1+p_2\lambda_2+p_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n\lambda_n}{a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+a_3\lambda_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n\lambda_n}.$$

將上式中 x 之值代入於原方程式中,卽得關於其餘 $n-1$ 個未知數 $y, z, \cdots\cdots\cdots\cdots, w$ 之聯立方程式.如此逐次求之,卽得所求之根.

例 1. 解下列聯立方程式.

$$3u-2y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$5x-7z=11 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$2x+3y=39 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$4y+3z=41 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

解　因 u 僅於方程式(1)中含有之,故於方程式(2),(3),(4)計算 x, y, z 之值時,得

$$x=12,\quad y=5,\quad z=7.$$

將 y 之值代入於方程式(1)中,得 $u=4$.故所求聯立方程式之根爲

$$x=12,\quad y=5,\quad z=7,\quad u=4,$$

之一組.

例 2. 解下列聯立方程式.

$$y+z+u-kx=a \quad \cdots\cdots(1)$$

$$z+u+x-ky=b \quad \cdots\cdots(2)$$

$$u+x+y-kz=c \quad \cdots\cdots(3)$$

$$x+y+z-ku=d \quad \cdots\cdots(4)$$

解 將各方程式邊邊相加,得

$$(3-k)(x+y+z+u)=a+b+c+d. \cdots(5)$$

以 $3-k$ 乘方程式(1)之兩邊後與方程式(5)邊邊相減,得

$$(3-k)(1+k)x=(k-2)a+b+c+d.$$

隨之如 $(3-k)(1+k)\neq 0$ 時,則

$$x=\frac{(k-2)a+b+c+d}{(3-k)(1+k)}.$$

次觀察所與方程式之形勢,可知如於上式右邊循環交換 a, b, c, d 時,則可順次以得 y, z, u 之值甚明.故所求聯立方程式之根如 $(3-k)(1+k)\neq 0$ 時,則

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{(k-2)a+b+c+d}{(3-k)(1+k)}, & y&=\frac{(k-2)b+c+d+a}{(3-k)(1+k)} \\ z&=\frac{(k-2)c+d+a+b}{(3-k)(1+k)}, & u&=\frac{(k-2)d+a+b+c}{(3-k)(1+k)} \end{aligned}\right\} \cdots (6)$$

如 $(3-k)(1+k)=0$ 時,則可討論之如下.

I　$k=-1$ 時,此時方程式(1),(2),(3),(4)之左邊皆相等,悉成爲 $x+y+z+u$. 隨之

(1)　如 $a\neq b\neq c\neq d$ 時,則聯立方程式爲不能.

(2)　如 $a=b=c=d$ 時,則聯立方程式爲不定.

因結果僅有一個方程式 $x+y+z+u=a$ 故也.

II　$k=3$ 時,此時方程式(5)成爲

$$0=a+b+c+d.$$

上式爲方程式成立時之必要條件甚明.隨之

(1)　如 $a+b+c+d\neq 0$ 時,則聯立方程式爲不能.

(2)　如 $a+b+c+d=0$ 時,則將方程式(1),(2),(3)邊邊相加,因 $k=3$,

$$\therefore\quad -(x+y+z)+3u=a+b+c=-d.$$

$$\text{卽}\quad x+y+z-3u=d.$$

卽爲方程式(4)是.但置 $x+y+z+u=4t$ 時,則方程式(1),(2),(3),(4)各成爲

$$4t-4x=a,\ 4t-4y=b,\ 4t-4z=c,\ 4t-4u=d.$$

隨之

$$x=t-\frac{a}{4},\quad y=t-\frac{b}{4},\quad z=t-\frac{c}{4},\quad u=t-\frac{d}{4}.\cdots\cdots(7)$$

因 t 能取任意之值,故此時聯立方程式爲不定.其未知數之值如(7)所示.

75. 未知數之數與方程式之數之關係　於一次方程式,其未知數之數如與方程式之數相等時,則一般其未知數之值皆能決定,已如上述諸節所討論.本節僅就未知數之數與方程式之數不相等時討論之.

未知數之數與方程式之數不等時,約可分爲下列二方面.

(I) 未知數之數較方程式之數爲多時.

(II) 未知數之數較方程式之數爲少時.

玆依上述二方面順次研究之於下.

定理 1. 未知數之數如較方程式之數爲多時,則聯立方程式一般爲不定.

例如二元一次方程式僅有一個時,則如第67節所述,其能滿足方程式未知數之值,有無數組存在.隨之其方程式爲不定.又三元一次方程式如僅有一個或二個時,則最多僅能消去一未知數,且此時所得之二元一次方程式僅有一個,故其方程式爲不定.

設有含未知數m個之方程式n個而 $m>n$ 時,則於此一組方程式中將其m個未知數中之 $m-n$ 個視作已知數以計算之,而此一組方程式卽成爲關於其餘n個未知數之聯立方程式.因方程式之數亦有n個,故解之其n個未知數得以此$m-n$個未知數以表之.因於此結果,此$m-n$個未知數能取任意之值.故m個未知數之值,一般不能決定.卽聯立方程式爲不定.

定理 2. 未知數之數較方程式之數爲少時,則聯立方程式一般爲不能.

設有含未知數m個之方程式n個而 $m<n$ 時,則於此一組方程式中任取m個方程式解之,均能決定其m個未知數之值.但此所決定之未知數之值,一般多不能滿足其

餘 $m-n$ 個方程式.隨之 n 個方程式之組,不能成立.故聯立方程式爲不能.

問　題　十

解下列聯立方程式.

1. $3x-y+z=4,$
$5x+2y+3z=18,$
$3x+4y+2z=17.$

2. $5x-6y-10z=8,$
$2x-4y+5z=6,$
$7x+4y-15z=17.$

3. $2x+5y-4z=1,$
$7x-3y+2z=13,$
$8x-21y+16z=23.$

4. $3x-2y+5z=7,$
$9x+3y-10z=0,$
$6x-5y-15z=33.$

5. $\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10,\ \frac{4}{x}-\frac{9}{y}+\frac{2}{z}=4,\ \frac{3}{x}+\frac{6}{y}+\frac{1}{z}=7.$

6. $3x-5y+5z=0,$
$3x+4z=3,$
$5x-3y=25,$
$7w-2z=13.$

7. $4w-2x+7y-5z=1,$
$3w+3x-y-z=2,$
$7w-3x+5y-2z=8,$
$w+2x+3y+4z=30.$

8. $w+x+y+z=16,$
$x-w+2y+3z=33,$
$2w+5x+5y-6z=0,$
$3w+7x-y-2z=5.$

9. $ax+by+cz=k,$
$bx+cy+az=k,$
$cx+ay+bz=k.$

10. $x+y+z=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0,$
$ax+by+cz=(a-b)(a-c)(b-c).$

11. $x+y+z=1,$
$ax+by+cz=k,$
$a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$

12. $ax+by+cz=b,$
$bx+cy+az=c,$
$cx+ay+bz=a.$

13. $x-ay+a^2z=a^3,$
$x-by+b^2z=b^3,$
$x-cy+c^2z=c^3.$

14. $(4-x)(17-y)=z,$
$(5-x)(14-y)=z,$
$(7-x)(11-y)=z.$

15. $bx+cy+az=cx+ay+bz=a^2+b^2+c^2,$
$x+y+z=a+b+c$

16. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},\ lx+my+nz=p.$

解下列聯立方程式且討論之.

17. $(\lambda-3)x+(2\lambda+1)y+\lambda-5=0,$
$(\lambda-1)x-(3\lambda-1)y-2\lambda+7=0.$

18. $(\lambda-3)x+(2\lambda+1)y+\lambda-5=0,$
$(\lambda-1)x-(3\lambda-1)y-2\lambda+3=0.$

19. $(\lambda-3)x-(6\lambda+1)y-3\lambda+2=0.$
$(\lambda-1)x+(3\lambda-1)y+2\lambda=0.$

20. $(\lambda-5)x+(3\lambda-1)y+2\lambda+4=0,$
$(\lambda+1)x-(4\lambda-3)y+2\lambda-12=0.$

21. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,$
$\frac{b}{x}-\frac{a}{y}=1.$

22. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b-c}.$
$\frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}.$

23. $\frac{x}{a+\alpha}+\frac{y}{b+\alpha}=1,$
$\frac{x}{a+\beta}+\frac{y}{b+\beta}=1.$

24. $ax+by+cz=0,$
$bcx+cay+abz=0.$
但 $a, b, c,$ 皆不為 0.

76. 由一次及二次方程式組成之聯立二元方程式

含有未知數 x, y 之一次及二次方程式經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$lx+my+n=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

因(2)式爲二次方程式,故其係數 a, h, b 中至少有一個不爲 0 者.

凡如此形式之聯立方程式解法,皆可歸着於一元二次方程式之解法.茲述之於下.

先假定方程式(1)之係數 l, m 中至少有一個不爲 0 者,例如 $m\neq 0$ 時,則方程式(1)與方程式

$$y=-\frac{lx+n}{m} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

爲同值.以此 y 之值代入於方程式(2)時,得

$$ax^2-\frac{2hx(lx+n)}{m}+\frac{b(lx+n)^2}{m^2}+2gx-\frac{2f(lx+n)}{m}+c=0.$$

以 m^2 乘上列等式兩邊後整頓之,得

$$(am^2-2hlm+bl^2)x^2+2(gm^2-hmn-flm+bln)x$$
$$+bn^2-2fmn+cm^2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

如 $am^2-2hlm+bl^2\neq 0$, 則(4)式爲關於 x 之二次方程式.設解此方程式時所得之根爲 x_1, x_2, 將 x_1, x_2 代入於方程式(3)所得之 y 值各爲 y_1, y_2,則聯立方程式之根爲

$$\left.\begin{array}{l}x=x_1\\ y=y_1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=x_2\\ y=y_2\end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

之二組,此外無根存在.

又如假定 $l\neq 0$ 時,亦能求得同樣結果.卽此時由方程式(1)及(2)消去其 x 時,得方程式

$$(am^2-2hlm+bl^2)y^2+2(fl^2-glm-hln+amn)y$$
$$+an^2-2gln+cl^2=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

將方程式(6)解之,求得 y 之值後,再代入於方程式(1)以求 x 之值,卽可求得所要之根 x, y 之二組值.

次作成方程式(4)之判別式時,則其值如下.

$$\begin{aligned}\text{判別式}&=4\{(gm^2-hmn-flm+bln)^2\\&\quad-(am^2-2hlm+bl^2)(bn^2-2fmn+cm^2)\},\\&=4m^2\{(f^2-bc)l^2+(g^2-ca)m^2+(h^2-ab)n^2\\&\quad+2(af-gh)mn+2(bg-hf)nl+2(ch-fg)lm\}.\end{aligned}$$

爲簡單起見,置

$$\left.\begin{array}{l}A=f^2-bc,\ B=g^2-ca,\ C=h^2-ab\\F=af-gh,\ G=bg-hf,\ H=ch-fg\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots(7)$$

時,則

$$\text{判別式}=4m^2(Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm). \cdots(8)$$

再置 $$D=Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm \quad\cdots\cdots(9)$$

時,則

$$\text{判別式}=4m^2D. \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

由假定,$m\neq 0$, 故 $m^2>0$. 隨之其方程式(4)之判別式與 D 同符號.如 D 爲 0 時,則亦爲 0.故方程式(4)之根隨 D 之爲正數,爲 0,或爲負數;而爲相異之實根,相等之實根,或相異之虛根.

又於方程式(4)之係數,如將 (l,m), (a,b), (f,g) 三組各二數同時交換時,則成爲方程式(6)之係數.且 D 不因此交換而變化,故可知方程式(6)之判別式爲 $4l^2D$. 因 $l\neq 0$, 故方程式(6)之根隨 D 之爲正數,爲 0, 或爲負數;而爲相異之實根,相等之實根,或相異之虛根.

又 $am^2-2hmn+bl^2\neq 0$ 時,則 l, m 中至少有一方不爲 0 者.故得一定理於下.

定理 聯立方程式

$$lx+my+n=0,$$
$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0.$$

於 $am^2-2hlm+bl^2\neq 0$ 時,具有二組根.如

$$D=Al^2+Bm^2+Cn^2+2Fmn+2Gnl+2Hlm$$

爲正數時,則其根爲實數,二組互異;D 爲 0 時,則其根爲實數,二組相等;D 爲負數時,則其二組根均含虛數.

例 1. 解下列聯立方程式.

$$2x-y-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x^2-4y^2+x+3y-1=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 由方程式(1),得

$$y=2x-1. \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將 y 之值代入於方程式(2),得

$$x^2-4(2x-1)^2+x+3(2x-1)-1=0.$$

即 $$-15x^2+23x-8=0.$$

解之,得 $x=1$, 或 $x=\frac{8}{15}$.

$x=1$ 時,由(3)式,得 $y=1$.

$x=\frac{8}{15}$時,由(3)式,得 $y=\frac{1}{15}$.

故所求聯立方程式之二組根爲

$x=1,\quad y=1;\quad x=\frac{8}{15},\quad y=\frac{1}{15}$.

例 2. 解下列聯立方程式.

$$x+y=a \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$xy=b \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 上列聯立方程式雖可如例 1 所示之一般方法以解之,但依下法解之亦可.

將方程式(1)之兩邊各自乘,得

$$x^2+2xy+y^2=a^2. \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以 4 乘方程式(2)之兩邊,得

$$4xy=4b. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)式減(4)式,得

$$(x-y)^2=a^2-4b. \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\therefore \quad x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}.$$

故可知所求聯立方程式之根,由二組聯立方程式

$$\left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=\sqrt{a^2-4b} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=-\sqrt{a^2-4b} \end{array}\right\}$$

之根而成.解此二組聯立方程式時,得

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b}) \\ y=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b}) \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-4b}) \\ y=\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-4b}) \end{array}\right\}$$

此卽所求聯立方程式之二組根也.

又此二組根隨 a^2-4b 之爲正數,爲 0,或爲負數;而爲相異實數,相等實數,或虛數.

77. 聯立二元二次方程式 由含有二個未知數 x, y 之二次方程式二個所組成之聯立方程式,經整頓後,皆能化成下列之一般形式.

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a'x^2+2h'xy+b'y^2+2g'x+2f'y+c'=0\cdots\cdots\cdots(2)$$

因上列二方程式均爲二次,故其係數 (a,h,b),及 (a',h',b') 二組中至少各有一不爲 0 者.

此種聯立方程式之解法,一般不能由初等的方法以解之,須歸着於一元四次方程式之解法,玆述之於下.

將二方程式之左邊依 x 降冪之順序排列之,則成爲

$$ax^2+2(hy+g)x+by^2+2fy+c=0,$$

$$a'x^2+2(h'y+g')x+b'y^2+2f'y+c'=0.$$

爲簡單起見,置

$$\left.\begin{aligned} p&=hy+g, & q&=by^2+2fy+c \\ p'&=h'y+g', & q'&=b'y^2+2f'y+c' \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

時,則聯立方程式成爲

$$ax^2+2px+q=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$a'x^2+2p'x+q'=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

以 a', a 各乘方程式(4),(5)之兩邊後邊邊相減,得

$$2(ap'-a'p)x+aq'-a'q=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

又以 p', p 各乘方程式(4),(5)之兩邊後邊邊相減,得

$$(ap'-a'p)x^2-(pq'-p'q)=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

其 $ap'-a'p$ 雖含有 y，但為關於 y 之有理整式，故對於 y 之任何值決無成不定或不能形式之事。隨之於

$$ap'-a'p \neq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

時，易於證明方程式(4),(5)之一組，即所與聯立方程式，與方程式(6),(7)之一組為同值。

由方程式(6)，得

$$x=-\frac{aq'-a'q}{2(ap'-a'p)}.$$

以 x 之值代入於方程式(7)除去分母後，得

$$(aq'-a'q)^2-4(ap'-a'p)(pq'-p'q)=0.$$

隨之如 $ap'-a'p \neq 0$ 時，所與聯立方程式與

$$x=-\frac{aq'-a'q}{2(ap'-a'p)} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$(aq'-a'q)^2-4(ap'-a'p)(pq'-p'q)=0 \cdots\cdots(10)$$

之一組為同值。因方程式(10)僅含有 y，故由此決定 y 之值後，以之代入於方程式(9)，隨之 x 之值即行決定。即所求之根即行求出。然以(3)式之值代入於方程式(10)中而計算之，則得關於 y 之四次方程式如下。

$$\alpha y^4+\beta y^3+\gamma y^2+\delta y+\varepsilon=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

但

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha=(ab'-a'b)^2+4(ah'-a'h)(bh'-b'h);\\
&\beta=4\{(ab'-a'b)(af'-a'f)+(ag'-a'g)(bh'-b'h)\\
&\quad+(ah'-a'h)(bg'-b'g)+2(ah'-a'h)(fh'-f'h)\};\\
&\gamma=2(ab'-a'b)(ac'-a'c)+4\{(af'-a'f)^2\\
&\quad+(ah'-a'h)(ch'-c'h)+2(ah'-a'h)(fg'-f'g)\\
&\quad+(ag'-a'g)(bg'-b'g)+2(ag'-a'g)(fh'-f'h)\};\\
&\delta=4\{(ac'-a'c)(af'-a'f)+(ah'-a'h)(cg'-c'g)\\
&\quad+(ag'-a'g)(ch'-c'h)+2(ag'-a'g)(fg'-f'g)\};\\
&\varepsilon=(ac'-a'c)^2+4(ag'-a'g)(cg'-c'g).
\end{aligned}\right\}(12)$$

由第43節定理2之系1,一元四次方程式可有四根.又由方程式(9)對於y之各值,x之值亦僅各為一個.故所求聯立方程式之根共有四組.不能較四組為多.

一元四次方程式之解法,本書須於後部第二十六章中研究之,故聯立二元二次方程式,刻下實無法以解之.

78. 聯立二元二次方程式之特例 聯立二元二次方程式之解法,一般雖須歸着於一元四次方程式之解法,但亦有能應用一元二次方程式之解法以解之者,茲舉其特例數題解之於下.

例 1. 解下列聯立方程式.

$$x^2+3xy+2y^2=3 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$3x^2-4xy-y^2=7 \quad \cdots\cdots(2)$$

解 以7與3各乘方程式(1),(2)之兩邊,得

$$7x^2+21xy+14y^2=21, \quad \cdots\cdots(3)$$

$$9x^2-12xy-3y^2=21. \quad \cdots\cdots(4)$$

由(4)式減(3)式,得

$$2x^2-33xy-17y^2=0. \quad \cdots\cdots(5)$$

置$x=vy$以y^2除其兩邊,得

$$2v^2-33v-17=0.$$

解之,得 $\quad v=-\frac{1}{2}, \quad$ 或 $\quad v=17.$

隨之得 $\quad x=-\frac{1}{2}y, \quad$ 或 $\quad x=17y.$

$x=-\frac{1}{2}y$時,由方程式(1),得

$$(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2)y^2=3.$$

即 $\frac{3}{4}y^2=3.$

$\therefore\quad y=\pm 2.$

$y=2$ 時, $x=-1$;

$y=-2$ 時, $x=1.$

又 $x=17y$ 時,由方程式(1),得

$$342y^2=3.$$

$\therefore\quad y=\pm\sqrt{\frac{1}{114}}.$

$y=\sqrt{\frac{1}{114}}$ 時, $x=17\sqrt{\frac{1}{114}}$;

$y=-\sqrt{\frac{1}{114}}$ 時, $x=-17\sqrt{\frac{1}{114}}.$

故所求聯立方程式之根為下列四組.

$$\left.\begin{matrix}x=-1\\y=2\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=1\\y=-2\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=-17\sqrt{\frac{1}{114}}\\y=-\sqrt{\frac{1}{114}}\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=17\sqrt{\frac{1}{117}}\\y=\sqrt{\frac{1}{114}}\end{matrix}\right\}$$

例 2. 解下列聯立方程式.

$$x^2-y^2+x-5=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x^2+2y^2-6x-2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 以 2 乘方程式(1)之兩邊後與方程式(2)邊邊相加,得

$$5x^2-4x-12=0.$$

因得 $\qquad x=2,$ 或 $x=-\frac{6}{5}.$

$x=2$ 時,由方程式(1),得

$$y^2=4+2-5=1, \qquad \therefore \quad y=\pm 1.$$

$x=-\frac{6}{5}$ 時,由方程式(1),得

$$y^2=\frac{36}{25}-\frac{6}{5}-5=-\frac{119}{25},$$

$$\therefore \quad y=\pm\frac{\sqrt{119}}{5}i.$$

故所求聯立方程式之根爲下列四組.

$$\left.\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=2\\y=-1\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=-\frac{6}{5}\\x=\frac{\sqrt{119}}{5}i\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l}x=-\frac{6}{5}\\y=-\frac{\sqrt{119}}{5}i\end{array}\right\}$$

例 3. 解下列聯立方程式.

$$x^2-3xy-7y^2+3y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2+5xy+y^2-y=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 以 3 乘方程式(2)之兩邊後與方程式(1)邊邊相加,得

$$7x^2+12xy-4y^2=0.$$

分解爲因式,成爲

$$(7x-2y)(x+2y)=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因得 $\qquad 7x-2y=0,$ 或 $x+2y=0.$

$x+2y=0$ 時,由方程式(1),得

$$(4+6-7)y^2+3y=0.$$

即 $\qquad 3y(y+1)=0.$

$$\therefore \quad y=0,\ 或\ y=-1.$$

$y=0$ 時, $x=0$;

$y=-1$ 時, $x=-2y=2$.

又 $7x-2y=0$ 即 $y=\frac{7}{2}x$ 時,由方程式(1),得

$$x(127x-14)=0.$$

$$\therefore \quad x=0,\ 或\ x=\frac{14}{127}.$$

$x=0$ 時, $y=0$;

$x=\frac{14}{127}$ 時, $y=\frac{49}{127}$.

故所求聯立方程式之根爲下列三組.

$$x=y=0, \quad \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x=\frac{14}{127} \\ y=\frac{49}{127} \end{matrix}\right\}$$

例 4. 解下列聯立方程式.

$$x^2-xy+3x-y=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2+3xy-10x+y=0. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 置 $y=vx$ 時,則聯立方程式成爲

$$x\{(1-v)x+3-v\}=0,$$

$$x\{(2+3v)x-10+v\}=0.$$

以 x 各除上列二方程式之兩邊,得

$$(1-v)x+3-v=0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(2+3v)x-10+v=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3),(4)兩方程式消去 x 時,得

$$(1-v)(v-10)-(2+3v)(3-v)=0.$$

卽 $2v^2+4v-16=0.$

卽 $v^2+2v-8=0.$

解之,得 $v=2$, 或 $v=-4.$

將 v 之值代入於方程式(3)而計算之,得 x, y 之值如下.

$$v=2\text{時}, x=1, y=vx=2;$$

$$v=-4\text{時}, x=-\frac{7}{5}, y=vx=\frac{28}{5}.$$

又原方程式由視察的方法能知其爲$x=y=0$所滿足甚明.故所求聯立方程式之根爲下列三組.

$$x=y=0, \quad \left.\begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} x=-\frac{7}{5} \\ y=\frac{28}{5} \end{matrix}\right\}$$

例 5. 解下列聯立方程式.

$$xy+2x-3y-1=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2xy-3x+y-9=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 置 $xy=t$ 時,則所與聯立方程式成爲

$$2x-3y+t-1=0,$$

$$-3x+y+2t-9=0.$$

解之,得 $x=t-4$, $y=t-3.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

將此 x, y 之值代入於 $xy=t$ 中,得

$$(t-4)(t-3)=t.$$

卽 $t^2-8t+12=0.$

因得 $t=2$, 或 $t=6.$

將 t 之值代入於(3)式時,得所求之根二組如下.

$$\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-1\end{array}\right\}\qquad\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$$

例 6. 解下列聯立方程式.

$$x^2-3xy+4y^2+x-4y=0\quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$2x^2-xy-5y^2+2x-5y=0\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

解 先假定 $y\neq 0$, 置 $x=vy$ 後以 y 除上列二方程式之兩邊,得

$$(v^2-3v+4)y+v-4=0,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$(2v^2-v-5)y+2v-5=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)式與(4)式消去 y 時,得

$$(v^2-3v+4)(2v-5)-(2v^2-v-5)(v-4)=0.$$

即 $\quad -2v^2+24v-40=0.$

分解爲因式,得

$$-2(v-2)(v-10)=0.$$

因得 $\quad v=2,$ 或 $v=10.$

將 v 之值代入於(3)式而計算之,得 x, y 之值如下.

$v=2$ 時, $y=1,$ 　　隨之 $x=2y=2.$

$v=10$ 時, $y=-\dfrac{3}{37},$ 　隨之 $x=10y=-\dfrac{30}{37}.$

又置 $y=0$ 時,則所與方程式成爲

$$x^2+x=0,\quad 2(x^2+x)=0.$$

但此兩方程式能爲 $x=0$, 或 $x=-1$ 所滿足,故所求聯立方程式之根爲下列四組.

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=0\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=2\\y=1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{30}{37}\\y=-\dfrac{3}{37}\end{array}\right\}$$

79. 消去法 如第75節定理2所述,未知數之數如較方程式之數爲少時,則聯立方程式一般爲不能.但此時如於其中選取足以決定其未知數之值之方程式若干個解之,而將求得之根之值代入於其餘之方程式,則可發見所與各方程式具有公共根時其係數間不可或缺之關係.此種方法,謂之消去法.其所得之關係式,則謂之消去式.

實際上求消去式時,不必定用上述之方法,可隨其方程式之形式,因利乘便,適宜以求得之.因消去法雖爲代數學上重要方法之一,但並無一般所能用之有效方法故也.茲舉例說明之如下.

例 1. 由 $ax^2+bx+c=0$ 及 $px^2+qx+r=0$ 消去 x.

解
$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$px^2+qx+r=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 p 乘方程式(1),a 乘方程式(2)後,相減,得

$$(bp-aq)x+cp-ar=0.$$

$$\therefore\quad x=-\frac{cp-ar}{bp-aq}. \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又以 q 乘方程式(1),b 乘方程式(2)後,相減,得

$$(aq-bp)x^2+cq-br=0.$$

$$\therefore\quad x^2=-\frac{cq-br}{aq-bp}. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由(3)式及(4)式,得

$$\left\{\frac{-(cp-ar)}{bp-aq}\right\}^2=-\frac{cq-br}{aq-bp}.$$

$$\therefore\quad (cp-ar)^2=(cq-br)(bp-aq).$$

上式卽爲所求之消去式.爲方程式(1)及(2)具有公共根之條件也.

例 2. 由$ax^3+bx^2+cx+d=0$及$px^3+qx^2+rx+s=0$消去x,

解 $$ax^3+bx^2+cx+d=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$px^3+qx^2+rx+s=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

以p乘方程式(1),a乘方程式(2)後,相減,得

$$(bp-aq)x^2+(cp-ar)x+dp-as=0.\cdots\cdots(3)$$

以d乘方程式(2),s乘方程式(1)後,相減,得

$$(dp-as)x^2+(dq-bs)x+dr-cs=0.\cdots\cdots(4)$$

以$dp-as$乘方程式(3),$bp-aq$乘方程式(4)後,相減,得

$$\{(cp-ar)(dp-as)-(dq-bs)(bp-aq)\}x$$
$$+(dp-as)^2-(dr-cs)(bp-aq)=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

以$dr-cs$乘方程式(3),$dp-as$乘方程式(4)後,相減,得

$$\{(bp-aq)(dr-cs)-(dp-as)^2\}x^2$$
$$+\{(cp-ar)(dr-cs)-(dq-bs)(dp-as)\}x=0.\cdots\cdots\cdots(6)$$

由方程式(5)及(6),得

$$\frac{(dp-as)^2-(dr-cs)(bp-aq)}{(cp-ar)(dp-as)-(dq-bs)(bp-aq)}$$
$$=\frac{(cp-ar)(dr-cs)-(dq-bs)(dp-as)}{(bp-aq)(dr-cs)-(dp-as)^2}$$

上列消去式卽爲方程式(1)及(2)具有公共根之條件也.

如上舉二例所示,一般,由二方程式皆可消去其一未知

數.如依此法順次將方程式之未知數消去時,可知由 $n+1$ 個方程式當可消去其中 n 個未知數.但未知數之次數如較高時,則上述方法中之計算,甚爲複雜,不適於實用.茲更舉數例用其他方法消去之如下.

例 3. 求

$$x(x+y+z)=a^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$y(x+y+z)=b^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$z(x+y+z)=c^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$
$$ax+by+cz=d^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

之消去式.

解 將方程式(1),(2),(3)三式相加,得

$$(x+y+z)^2=a^2+b^2+c^2. \cdots\cdots (5)$$

以 a 乘方程式(1), b 乘方程式(2), c 乘方程式(3)後,相加,得

$$(ax+by+cz)(x+y+z)=a^3+b^3+c^3. \cdots\cdots (6)$$

由(4),(5),(6)三式,得

$$(a^3+b^3+c^3)^2=d^4(a^2+b^2+c^2).$$

例 4. 求

$$\frac{y-z}{y+z}=a \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$\frac{z-x}{z+x}=b \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$\frac{x-y}{x+y}=c \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

之消去式.

解 $\because \quad \frac{y-z}{y+z}=\frac{a}{1},$

$$\therefore \quad \frac{z}{y}=\frac{1-a}{1+a}.$$

同理, $$\frac{x}{z}=\frac{1-b}{1+b},$$

$$\frac{y}{x}=\frac{1-c}{1+c}.$$

$$\therefore \quad \frac{z}{y}\times\frac{x}{z}\times\frac{y}{x}=1=\frac{1-a}{1+a}\times\frac{1-b}{1+b}\times\frac{1-c}{1+c}.$$

將上式整頓之,得

$$a+b+c+abc=0.$$

問 題 十 一

解下列各組聯立方程式.

1. $x+y=x^2-y^2=23.$

2. $x^2-4y^2+x+3y=2x-y=1.$

3. $x-y=a,$ $x^2-xy+y^2=b.$

4. $px+qy+1=0,$ $y^2-4ax+4ab=0.$

5. $x-y=5,$ $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{84}.$

6. $x+y=a+b,$ $\dfrac{a}{x+b}+\dfrac{b}{y+a}=1.$

7. $x^2-3xy+2y^2=3,$ $2x^2+xy+ay^2=5.$

8. $x^2+xy=a,$ $y^2+xy=b.$

9. $x^2+xy-ay^2+x=0,$ $ax^2-2xy+y^2-2x=0.$

10. $xy+a(x+y)+1=0,$ $2xy+ay-3=0.$

11. $x^2-3xy+4y^2+x-4y=0,$ $2x^2-6xy+y^2+x+y=0.$

12. $x^2+2xy-y^2=ax+by,$ $x^2-2xy-y^2=bx-ay.$

13. $x^2+xy+y^2=(a+b)(x+y)$,
$x^2-xy+y^2=(a-b)(x-y)$.

14. $x^2+xy=12$,
$xy-2y^2=1$.

15. $x^2+2y^2=12$,
$3y^2-xy-x^2=17$.

16. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{a^2}$,
$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{yx}=\frac{1}{b^2}$.

17. $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=10$,
$\frac{ab}{xy}=3$.

18. $x^2+xy+x=14$,
$y^2+xy+y=28$.

19. $x^2-xy=8x+3$,
$xy-y^2=8y-6$.

20. $\frac{x+y}{1-xy}=3$,
$\frac{x-y}{1+xy}=\frac{1}{3}$.

21. $x-y=a(x^2-y^2)$,
$x+y=b(x^2-y^2)$.

22. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$,
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}$.

求下列各組聯立方程式之消去式.

23. $x+y=a$,
$x^2+y^2=b^2$,
$x^4+y^4=c^4$.

24. $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a$,
$\frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b$,
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c$.

25. $x^2-yz=a$,
$y^2-zx=b$,
$z^2-xy=c$,
$ax+by+cz=d$.

26. $ax^2+by^2+cz^2=0$,
$ax+by+cz=0$,
$yz+zx+xy=0$.

27. $(z+x-y)(x+y-z)=ayz,$

$(x+y-z)(y+z-x)=bzx,$

$(y+z-x)(z+x-y)=cxy.$

28. $x+y+z=a,$

$x^3+y^2+z^2=b^2,$

$x^3+y^3+z^3=c^3,$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{d}.$$

第十章　不定方程式

80. 不定方程式　如前二章中所述,一未知數能由一方程式決定之,二未知數須由二方程式決定之,三未知數須由三方程式決定之;一般,方程式之個數須與其未知數個數相等,則其未知數方能決定.故方程式之個數,如較其未知數之數爲少時,其未知數之值,卽屬不定.此種方程式,謂之不定方程式.不定方程式,因公曆第三世紀時希臘之數學者的阿橫塔士研究甚詳,故亦稱之爲的阿橫塔士方程式.

不定方程式之解,雖屬不定,但如附以某種條件,例如所求之數須爲正整數,或有理數等時,則其解之範圍,卽被限制.其可能之解,常爲數甚少,或竟至無解.又有時可能之解雖仍屬無限,但難於發見.故探求其解時,常需要特殊方法.此不定方程式爲研磨初學者之智力,增進其計算技能之最良工具之理由也.

不定方程式之理論,過於艱深,故本章所述者,僅爲一次不定方程式.又本章所述者,亦僅爲其根爲整數之方程式一個.因設有數方程式成爲聯立不定方程式時,可由聯立方程式之解法,逐次消去其中若干數未知數,最後仍得一

不定方程式;及求有理數之根時,如適當變更其未知數,仍行歸着於求整數根之問題故也.

81. 二元一次不定方程式 由第38節所述歐几里得之算法,設A_0,A_1二數之最大公因數爲A_n時,則其關係如下.

$$A_0=Q_1A_1+A_2 \quad \cdots\cdots(1)$$

$$A_1=Q_2A_2+A_3 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$A_2=Q_3A_3+A_4 \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

$$A_{k-1}=Q_kA_k+A_{k+1} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

$$A_{n-2}=Q_{n-1}A_{n-1}+A_n \quad \cdots\cdots(5)$$

$$A_{n-1}=Q_nA_n \quad \cdots\cdots(6)$$

由(1)式,得

$$A_2=A_0-Q_1A_1. \quad \cdots\cdots(7)$$

以(7)式A_2之值代入於(2)式以求A_3時,得

$$A_3=A_1-Q_2(A_0-Q_1A_1).$$

卽 $$-A_3=Q_2A_0-(1+Q_1Q_2)A_1. \quad \cdots\cdots(8)$$

再將(7),(8)二式A_2,A_3之值代入於(3)式以求A_4時,得

$$A_4=(A_0-Q_1A_1)+Q_3\{Q_2A_0-(1+Q_1Q_2)A_1\}$$
$$=(1+Q_2Q_3)A_0-(Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3)A_1. \cdots\cdots(9)$$

統觀上列(7),(8),(9)等式,可推知A_2,A_3,A_4,……等皆可化成A_0及A_1之一次式,而由

$$(-1)^k A_k = X_k A_0 - Y_k A_1 \quad \cdots\cdots\cdots(10)$$

形式之公式以表之.但X_k及Y_k均爲$Q_1, Q_2, \cdots\cdots$等之有理整式.

爲再行精密研究X_k, Y_k之形式起見,將A_1書作

$$-A_1 = 0 \cdot A_0 - 1 \cdot A_1$$

時,得

$$X_1 = 0, \qquad Y_1 = 1.$$

又由(7),(8),(9)等式,得

$$X_2 = 1, \qquad Y_2 = Q_1;$$

$$X_3 = Q_2 \qquad Y_3 = 1 + Q_1 Q_2;$$

$$X_4 = 1 + Q_2 Q_3 \qquad Y_4 = Q_1 + Q_3 + Q_1 Q_2 Q_3.$$

比較上列各式,當易於推得其關係如下.

$$X_1 + Q_2 X_2 = X_3, \qquad Y_1 + Q_2 Y_2 = Y_3;$$

$$X_2 + Q_3 X_3 = X_4, \qquad Y_2 + Q_3 Y_3 = Y_4.$$

一般,(其證明以用後述之數學的歸納法爲便)

$$\left.\begin{array}{l} X_{k-2} + Q_{k-1} X_{k-1} = X_k \\ Y_{k-2} + Q_{k-1} Y_{k-1} = Y_k \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

故得一定理於下.

定理 1. 設使用歐幾里得之算法求二自然數A, B之最大公因數時所得結果爲

$$A = Q_1 B + A_2$$

$$B = Q_2 A_2 + A_3$$

$$\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{k-1}=Q_nA_n$$

時,則一般有

$$(-1)^kA_k=AX_k-BY_k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

之關係.此處之 X_k 及 Y_k, 由下列各式以決定之.即

$$\left.\begin{matrix}X_1=0\\Y_1=1\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}X_2=1\\Y_2=Q_2\end{matrix}\right\}$$

一般,

$$\left.\begin{matrix}X_k=X_{k-2}+Q_{k-1}X_{k-1}\\Y_k=Y_{k-2}+Q_{k-1}Y_{k-1}\end{matrix}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(II)}$$

因 $Q_1, Q_2,\cdots\cdots$ 等均各為自然數,故由上列等式所示,於行加法及乘法後所成之 X_k, Y_k, 亦均為自然數.隨之本定理之前半段,可改述之如下.

系 1. 對於 A, B 及 A_k, 可求得適合於

$$AX-BY=\pm A_k$$

之自然數 X, Y.

設置 $A_n=C$ 時,則得下述系 2 之結果.

系 2. 設 A, B 二自然數之最大公因數為 C, 則必有適合於

$$AX-BY=\pm C$$

之自然數 X, Y 存在.

上式右邊之複號,隨定理 1 中之 n 為偶數或為奇數而定.

定理 2. 設 A, B 二自然數之最大公因數為 C, 則必有適合於

$$AX-BY=C$$

之自然數 X, Y 存在.

證明 由前列(6)式,其

$$A_{n-1}-Q_nA_n=0.$$

隨之可誘導得

$$(-1)^{n-1}(X_{n-1}A-Y_{n-1}B)-(-1)^nQ_n(X_nA-Y_nB)=0.$$

卽 $$(X_{n-1}+Q_nX_n)A-(Y_{n-1}+Q_nY_n)B=0.$$

之關係.置

$$X_{n-1}+Q_nX_n=X_{n+1}$$

$$Y_{n-1}+Q_nY_n=Y_{n+1}$$

時,則上式成爲

$$X_{n+1}A-Y_{n+1}B=0.$$

上式中之 X_{n+1}, Y_{n+1},俱爲自然數,且各較 X_n, Y_n 爲大.故於歐几里得之算法,設其 n 爲偶數時,則逕得

$$X=X_n, \qquad Y=Y_n.$$

$$\therefore \quad AX-BY=C.$$

設其 n 爲奇數時,雖

$$AX_n-BY_n=-C,$$

但由上式,別有

$$AX_{n+1}-BY_{n+1}=0$$

之關係存在.且 $X_{n+1}>X_n, Y_{n+1}>Y_n$, 故置

$$X=X_{n+1}-X_n, Y=Y_{n+1}-Y_n$$

時,則 X, Y 各爲自然數.而

$$AX-BY=C$$

確能成立.

系　設A,B爲互爲素數之二自然數,則必有適合於

$$AX-BY=1$$

之自然數X,Y存在.

定理2之系中X,Y之值,雖可由歐几里得之算法以求得之,但實際計算時,以下表所示爲便.

因　　$X_k=X_{k-2}+Q_{k-1}X_{k-1},\quad Y_k=Y_{k-2}+Q_{k-1}Y_{k-1}.$

而　　$X_1=0,\quad Y_1=1;$

$X_2=1,\quad Y_2=Q_1;$

$\cdots=\cdots\quad \cdots=\cdots$

故如下表所示,將粗黑字體之文字部分先行記入,然後對照左方及上方逐次記入X_k,Y_k即可.

Q	X	Y
Q_1	0	1
Q_2	1	Q_1
Q_3	X_3	Y_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Q_n	X_n	Y_n
	X_{n+1}	Y_{n+1}

(n爲偶數時,此欄不用.)

於上表,其n爲偶數時,

$$X=X_n,\quad Y=Y_n.$$

n爲奇數時,

$$X=X_{n+1}-X_n,\quad Y=Y_{n+1}-Y_n.$$

例1.　解$8x-5y=1$方程式.

解　先行歐几里得之算法時,得

$$8=1\cdot5+3.$$
$$5=1\cdot3+2.$$
$$3=1\cdot2+1.$$
$$2=2\cdot1.$$

$n=4$為偶數,故可作成下表.

Q	X	Y
1	0	1
1	1	1
1	1	2
2	2	3

$\therefore\quad X=2,\ Y=3.$

驗算 $\quad 8\cdot2-5\cdot3=16-15=1.$

例 2. 解 $13x-7y=1$ 方程式.

解 $\quad 13=1\cdot7+6.$

$$7=1\cdot6+1.$$

$6=6\cdot1.\quad n=3$（奇數）

Q	X	Y
1	0	1
1	1	1
6	1	2
	7	13

$\therefore\quad X=7-1=6,\ Y=13-2=11.$

驗算 $\quad 13\cdot6-7\cdot11=78-77=1.$

82. **二元一次不定方程式之一般解法** 如上節所述,二元一次不定方程式

$$AX-BY=C$$

能應用歐几里得之算法以解之,本節更就一般二元一次不定方程式

$$AX+BY=C \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之整根存在與否研究之於下.但上式中之A, B, C等,各爲任意整數.

設A, B之最大公因數爲D時,則$AX+BY$含有D之因數,隨之C不可不爲D所整除.此(1)式具有整根之必要條件也.

反之,設C能爲A, B之最大公因數D所整除,其

$$A=A'D,\quad B=B'D,\quad C=C'D$$

時,則A', B'互爲素數.由第77節定理2之系,必有適合於

$$A'X_0-B'Y_0=1$$

之自然數X_0, Y_0存在.以C即$C'D$乘上列等式之兩邊,得

$$A'DC'X_0-B'DC'Y_0=C.$$

即 $$A(C'X_0)+B(-C'Y_0)=C.$$

故(1)式實際上具有

$$X=C'X_0,\ Y=-C'Y_0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之一組根.因得一定理於下.

定理 1. 設A, B, C爲整數時,不定方程式

$$AX+BY=C$$

具有整根之必要且兼充分條件,爲C能被A, B之最大公因數所整除.

系 設A, B爲互爲素數之二整數,C爲任意整數時,則

不定方程式

$$AX+BY=C$$

常有整根存在.

由上法求得不定方程式之一組根後,則易於誘導得其一般根.卽設以X, Y表其一般根, X_1, Y_1表上列(2)式之特別根時,則

$$AX+BY=C,$$

且 $$AX_1+BY_1=C.$$

將上列二式邊邊相減,得

$$A(X-X_1)+B(Y-Y_1)=0.$$

以A, B之最大公因數D除上式之兩邊後移項,得

$$-A'(X-X_1)=B'(Y-Y_1).$$

因A', B'互爲素數,故$(Y-Y_1)$不可不爲$-A'$所整除.故置

$$Y-Y_1=-A'T \quad (T\text{爲整數})$$

而代入上式時,得

$$-A'(X-X_1)=-B'A'T.$$

隨之,得 $$X-X_1=B'T.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} X=X_1+B'T \\ Y=Y_1-A'T \end{array}\right\} (T\text{爲整數}) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

實際上如以T爲任意整數,將(3)式代入於(1)式中,能使其適合,當易於驗證之.故得一定理於下.

定理 2. 設不定方程式

$$AX+BY=C$$

之一組整根爲 X_1, Y_1, 則其他各整根皆可以

$$X=X_1+B'T,\quad Y=Y_1-A'T$$

形式表之.但T爲任意整數,A',B'爲以A,B之最大公因數各除其二數所得之商.

例: 解$16x+26y=318$方程式.

解 因16與26之最大公因數爲2,而318能爲2所整除,故所與方程式確有整根.

解此方程式時,先求得方程式

$$8x-13y=1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之整根如下.

$$8=0\cdot13+8.$$
$$13=1\cdot8+5.$$
$$8=1\cdot5+3.$$
$$5=1\cdot3+2.$$
$$3=1\cdot2+1.$$
$$2=2\cdot1.\qquad n=6$$

Q	X	Y
0	0	1
1	1	0
1	1	1
1	2	1
1	3	2
2	5	3

故(1)式之一組整根爲

$$x=5,\quad y=3.$$

隨之,得所與不定方程式之一組整根爲

$$x_1=5\cdot159=795,$$
$$y_1=3\cdot(-159)=-477.$$

又其一般根爲

$$\left.\begin{aligned}x&=795+13t\\y&=-477-8t\end{aligned}\right\}(t\text{爲整數})$$

以 $(t-61)$ 代 t 時,則其形式更可化簡.即

$$\left.\begin{aligned}x&=2+13t\\y&=11-8t\end{aligned}\right\}$$

〔注意〕 不定方程式由通常方法求得其解後,一般,皆應盡量的變換之使成爲最簡形式.

83. 多元一次不定方程式 研究含有三個以上未知數之一次不定方程式解法時,本節純以三元一次不定方程式爲主.因未知數更多時,不過其計算較爲繁雜,理論固完全相同故也.

三元一次不定方程式之一般形式爲

$$AX+BY+CZ=D,$$

其 A,B,C,D 爲既知整數,X,Y,Z 爲未知整數.

定理 設 A,B,C 三整數之最大公因數爲 G,則不定方程式

$$AX+BY+CZ=D\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(I)}$$

具有整根之必要且兼充分條件,爲 D 能被 G 整除.

證明 此條件爲必要條件,甚明.故僅須證明其爲充分條件即可.

設 A,B 二數之最大公因數爲 E,則不定方程式

$$AX+BY=E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

如上節所述,確有整根.其一般形式為

$$\left.\begin{array}{l} X_1=X_0+\beta T \\ Y_1=Y_0-\alpha T \end{array}\right\}（T 為整式）\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

上式中之 X_0, Y_0, 為某一組根; α, β 各為以 E 除 A, B 所得之商.

次設 U 為一新未知數,而對不定方程式

$$EU+CZ=D \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

考察之,其 E 與 C 之最大公因數,不外 A, B, C 之最大公因數 G. 由假定, D 能為此 G 所整除,故(4)式確具有整根,其一般形式為

$$\left.\begin{array}{l} U_1=U_0+\gamma S \\ Z_1=Z_0-\varepsilon S \end{array}\right\}（S 為整數）\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

但 U_0, Z_0 為某一組根, γ, ε 各為以 G 除 C, E 所得之商.

以 U 乘(2)式之兩邊而與(4)式邊邊相加,得

$$A(XU)+B(YU)+CZ=D.$$

上式與(1)式之形式相同,故由滿足(2)式之 X_1, Y_1 及滿足(4)式之 U_1, Z_1, 作成

$$X_1U_1, \quad Y_1U_1, \quad Z_1$$

三數時,則此三數確能滿足(1)式.

反之,設有滿足(1)式之整數 X, Y, Z 時,則以其值代入後, $AX+BY$ 必為 E 之倍數.而其倍數（設為 EU）與 CZ 之和,恰等於 D. 換言之,即其 X, Y, Z 能滿足以(2)式右邊為 EU 之式與(4)式,隨之不可不

$$X=X_1U_1,\quad Y=Y_1U_1,\quad Z=Z_1.$$

以(3)式及(5)式之值代入於上列三式,得

$$\left.\begin{aligned}X&=(X_0+\beta T)(U_0+\gamma S)\\Y&=(Y_0-\alpha T)(U_0+\gamma S)\\Z&=Z_0-\varepsilon S\end{aligned}\right\}$$

此即(1)式之一般根也.但 T 及 S 各爲任意整數.

例: 解 $21x+14y+12z=1$ 方程式.

解 因21,14,12三數之公因數爲1,故所與不定方程式確有整根.茲由上述方法解之如下.

因21與14之最大公因數爲7,故解

$$21x+14y=7,$$

即 $$3x+2y=1$$

時,得

$$\left.\begin{aligned}x_1&=1+2t\\y_1&=-1-3t\end{aligned}\right\}.$$

又解

$$7u+12z=1$$

時,得

$$\left.\begin{aligned}u_1&=7+12s\\z_1&=-4-5s\end{aligned}\right\}$$

故得所求之根如下.

$$x=(1+2t)(7+12s)$$
$$y=-(1+3t)(7+12s)$$
$$z=-(4+5s)$$

問 題 十 二

求下列不定方程式之各整數根.

1. $7x-13y=26$
2. $7x+10y=280$.
3. $7x+19y=213$.
4. $7x-13y=15$
5. $9x-11y=4$
6. $49x-69y=100$
7. $7x+9y=100$
8. $119x-105y=217$
9. $14x+161y-42z=35$
10. $5x+8y+19z=50$

求下列不定方程式之各正整數根.

11. $7x+10y=280$
12. $7x+15y=59$
13. $8x+13y=138$
14. $15x+71y=10653$
15. $7x+15y=59$
16. $6x+17y=313$
17. $9x+21y=204$

解下列各組聯立不定方程式.

18. $5x+y+7z=39$
    $2x+4y+9z=63$
19. $3x+2y+3z=250$
    $9x-4y+5z=170$

20.求聯立不定方程式

$$5x+7y+2z=24$$
$$3x-y-4z=4$$

之正整數根.

第十一章　不等式

84. 不等式之基礎定理　本章所論數之範圍,僅限於實數,故各文字所表者,皆爲實數.

有 a, b 二數,其 a 大於 b 或小於 b,由 $a-b$ 爲正爲負而定.即

若 $a-b>0$ 時,則 $a>b$;

若 $a-b<0$ 時,則 $a<b$.

是.凡二數之大小,皆能由此標準以決定之.以下所述者,即爲關於不等式之基礎定理.

定理 1.　若 $a>b$ 時,則 $a\pm x>b\pm x$. 即於不等式之兩邊同加一數或同減一數時,不等式之號不變.

證明:　$(a\pm x)-(b\pm x)=a-b$.

然由假定,　$a-b>0$.

$$\therefore \quad (a\pm x)-(b\pm x)>0.$$

$$\therefore \quad a\pm x>b\pm x.$$

定理 2.　若 $a>b, a'>b'$ 時,則 $a+a'>b+b'$.

證明:　$(a+a')-(b+b')=(a-b)+(a'-b')$.

然由假定,　$a-b>0, a'-b'>0$.

$$\therefore \quad (a+a')-(b+b')>0.$$

$$\therefore \quad a+a'>b+b'.$$

系　若$a>b, a'>b', a''>b'',\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$時,則

$$a+a'+a''+\cdots>b+b'+b''+\cdots.$$

定理 3.　$m>0$ 時,若 $a>b$,則 $ma>mb$.

證明:　$ma-mb=m(a-b)$.

然由假定,　$m>0,\ a>b$.

$\therefore\quad m(a-b)>0$.

$\therefore\quad ma>mb$.

同理,可證明 $m<0$ 時,若 $a>b$,則 $ma<mb$.

系 1.　$m>0$ 時,若 $a>b$,則$\dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m}$.

系 2.　若 $a>b$ 時,則 $-a<-b$.

系 3.　$m<0$ 時,若 $a>b$ 則$\dfrac{a}{m}<\dfrac{b}{m}$.

定理 4.　$a>0, b>0, a'>0, b'>0$,而 $a>b, a'>b'$ 時,則

$$aa'>bb'.$$

證明:

$$aa'-bb'=(aa'-ba')+(ba'-bb')$$
$$=a'(a-b)+b(a'-b').$$

然由假定,　$a-b>0, a'-b'>0$, 且$a'>0, b>0$.

$\therefore\quad aa'-bb'>0$.

$\therefore\quad aa'>bb'$.

系 1.　$a>0,\ b>0,\ a'>0,\ b'>0,\ a''>0,\ b''>0,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$,而 $a>b,\ a'>b',\ a''>b'',\ \cdots\cdots\cdots\cdots$ 時,則

$$aa'a''\cdots\cdots\cdots\cdots>bb'b''\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

系 2.　$a<0, b<0, a'<0, b'<0$,而 $a>b, a'>b'$ 時,則

$$aa'<bb'.$$

證明: $a>b, a'>b'$,而其各文字均表負數,故

$$-a<-b, \quad -a'<-b'.$$

上列二不等式之兩邊悉爲正數,故由定理 4,得

$$(-a)(-a')<(-b)(-b').$$

即 $\quad aa'<bb'.$

定理 5. 若 $a>b>0$ 且 n 爲正整數時,則 $a^n>b^n$.

證明: 於定理 4 系 1,置

$$a=a'=a''=\cdots\cdots\cdots\cdots=a,$$

$$b=b'=b''=\cdots\cdots\cdots=b$$

時,則

$$a^n>b^n.$$

定理 6. 若 $0>a>b$ 且 n 爲正整數時,則

$$a^{2r}<b^{2r}, \quad a^{2r+1}>b^{2r+1}.$$

證明: 因若 $0>a>b$,則

$$-b>-a>0.$$

$\therefore \quad (-b)^{2r}>(-a)^{2r}.$

即 $\quad a^{2r}<b^{2r}.$

又因 $\quad 0<-a<-b,$

$\therefore \quad -a^{2r+1}<-b^{2r+1}.$

隨之, $\quad a^{2r+1}>b^{2r+1}.$

定理 7. 若 $a>b>0$ 且 n 爲正整數時,則 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

證明: 因若 $a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$, 則由定理 5, 得 $a<b$.又若 $a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$, 則 $a=b$,甚明.二者皆與 $a>b$ 之假定相反,故必 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

又同理可證明若 $0>a>b$ 且 r 爲正整數時,則

$$a^{\frac{1}{2r+1}}>b^{\frac{1}{2r+1}}.$$

85. 絕對不等式與條件不等式 凡任以如何實數或某一定限制以內之數代入於不等式文字中,其不等式均能成立時,則此不等式,謂之絕對不等式.絕對不等式以外之不等式,則謂之條件不等式.

例如 $x^2+3>0$ 對於 x 之所有實數值皆能成立,故爲絕對不等式.又於 $x>1$ 之範圍內, $x^2-1>0$ 必能成立,故 $x^2-1>0$ 於$x>1$ 之範圍內爲絕對不等式.然如不豫附 x 以任何限制,或於 $x>-1$ 之限制下,則 $x^2-1>0$ 不一定成立.故此時 $x^2-1>0$, 卽爲條件不等式.

不等式之有絕對不等式與條件不等式二種,猶之於等式之有恆等式與方程式.其絕對不等式相當於恆等式,而條件不等式則相當於方程式.

於條件不等式,爲使其不等式能成立而求其應給與於其中某特別文字之值之限界,謂之解不等式.卽解不等式云者,爲決定給與如何範圍以內之值於其不等式中之某特別文字,則其不等式能成立;又給與如何範圍以內之值於其不等式中之某特別文字,則其不等式不能成立之謂.

86. 不等式之例解

例 1. 設$a\neq c$,解$ax+b>cx+d$不等式.

解 $$ax+b>cx+d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

應用第84節之定理 1,將不等式(1)移項,使成爲

$$ax-cx>d-b,$$

卽 $$(a-c)x>d-b.$$

(1) 若$a-c>0$隨之$a>c$時,則由第84節定理3之系1,

得 $$x>\frac{d-b}{a-c}.$$

(2) 若$a-c<0$隨之$a<c$時,則由第84節定理3之系3,

得 $$x<\frac{d-b}{a-c}.$$

故所求滿足不等式(1)之x值,為

$$a>c\text{時,則}x>\frac{d-b}{a-c};$$

$$a<c\text{時,則}x<\frac{d-b}{a-c}.$$

例2. 解$\dfrac{15-27x-2x^2}{12-17x+6x^2}<1$不等式.

解 $$\frac{15-27x-2x^2}{12-17x+6x^2}<1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

將不等式(1)之左邊移至右邊整頓之,成為

$$0<\frac{(2x+3)(4x-1)}{(2x-3)(3x-4)}.$$

以8除右邊之分子,6除右邊之分母,則成

$$0<\frac{(x+\frac{3}{2})(x-\frac{1}{4})}{(x-\frac{3}{2})(x-\frac{4}{3})}.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

將右邊分子與分母之因式依大小之順序排列之,則為

$$x+\frac{3}{2},\quad x-\frac{1}{4},\quad x-\frac{4}{3},\quad x-\frac{3}{2}.$$

因(2)式右邊為正,故必不出(i)四因式悉為正,(ii)二因式為正他二因式為負,(iii)四因式悉為負之三途.於(i),其四因式中之最小者即$x-\dfrac{3}{2}$為正;於(ii),其第二大數$x-\dfrac{1}{4}$

爲正,第三大數 $x-\frac{4}{3}$ 爲負;於 (iii), 其四因式中之最大者卽 $x+\frac{3}{2}$ 爲負.隨之不等式僅限於

$$\text{(i)}\quad x>\frac{3}{2},\quad \text{(ii)}\quad \frac{4}{3}>x>\frac{1}{4},\quad \text{(iii)}\quad x<-\frac{3}{2}.$$

之三方面,始能成立.

〔注意〕 解含分數式之不等式時,不可妄去其分母.因去分母爲以其分母之式乘不等式之兩邊,若其分母爲正,乘後不等式兩邊雖不變;但若爲負時,則乘後其不等式之不等式號須變更方向故也.

例 3. 解 $\sqrt{3-x}>x-2$ 不等式.

解 若根號內之式爲負,則不等式無意義,故 x 不能較 3 爲大.又 $x=3$ 時,左邊爲 0,右邊爲 1,不等式不能成立,甚明.故僅須於 $x<3$ 之範圍內研究之卽可.

(i) $x\leqq 2$ 時.

此時不等式之左邊爲正,右邊爲負或 0,不等式能成立甚明.

(ii) $2<x<3$ 時.

此時不等式兩邊皆爲正,故由第84節之定理 5,原不等式與兩邊自乘後所得之不等式

$$3-x>(x-2)^2$$

爲同值.解此不等式時,得

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

因 $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<2$ 及 $2<\frac{3+\sqrt{5}}{2}<3$,故以此解與 $2<x<3$ 之限

制相結合時,得

$$2<x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

綜合(i),(ii)二段所得之結果,可知所與不等式成立時 x 之範圍,為

$$x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

87. 絕對不等式

例 1. 若 $a \neq b$ 時,證明 $a^6+b^6>a^5b+ab^5$.

解 $$(a^6+b^6)-(a^5b+ab^5)=a^5(a-b)+b^5(b-a)$$
$$=(a^5-b^5)(a-b).$$

若 $a>b$ 時,則 a^5-b^5 與 $a-b$ 皆為正.

若 $a<b$ 時,則 a^5-b^5 與 $a-b$ 皆為負.

故無論何時,$(a^5-b^5)(a-b)$ 皆為正.隨之

$$a^6+b^6>a^5b+ab^5.$$

例 2. 證明 $a^2+b^2+c^2 \geqq bc+ca+ab$.

解 $$a^2+b^2+c^2-(bc+ca+ab)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0.$$

$$\therefore \quad a^2+b^2+c^2 \geqq bc+ca+ab.$$

其等號僅限於 $a=b=c$ 時,始能成立.

例 3. $a>b>0$ 時,證明下列不等式.

$$\frac{a}{2}\geqq\sqrt{2a(a-b)}-(a-b).$$

解 由所與不等式之左邊減去其右邊,得

$$\frac{a}{2}-\{\sqrt{2a(a-b)}-(a-b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{a-2\sqrt{a\cdot 2(a-b)}+2(a-b)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\sqrt{a}-\sqrt{2(a-b)}\}^2\geqq 0.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{2}\geqq\sqrt{2a(a-b)}-(a-b).$$

其等號僅限於 $\sqrt{a}=\sqrt{2(a-b)}$ 卽 $a=2b$ 時,始能成立.

例 4. 若 a, b, c 三數皆爲正數且各不相等時,證明下列不等式.

$$(b+c)(c+a)(a+b)>8abc.$$

解 $(b+c)(c+a)(a+b)-8abc=2abc+b^2c+b^2a+c^2a$

$$+c^2b+a^2b+a^2c-8abc$$

$$=a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)-6abc$$

$$=a(b^2+c^2-2bc)+b(c^2+a^2-2ac)+c(a^2+b^2-2ab)$$

$$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>0.$$

$$\therefore\quad (b+c)(c+a)(a+b)>8abc.$$

例 5. n 爲正數時,證明下列不等式.

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}}>\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(2n)}>\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}.$$

解 於不等式 $a+b>2\sqrt{ab}$,置 $a=2n-1, b=2n+1$ 時,則成爲

$$(2n-1)+(2n+1)>2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\therefore\quad 4n>2\sqrt{(2n-1)(2n+1)}.$$

$$\therefore\quad 2n>\sqrt{(2n-1)(2n+1)}.$$

以$2n\sqrt{2n+1}$除其兩邊後再以$\sqrt{2n-1}$乘之,得

$$\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}>\frac{2n-1}{2n}.$$

即 $$\frac{2n-1}{2n}<\frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}.$$

於上列不等式中逐次使 n 減 1 時,得下列一羣不等式.

$$\begin{aligned}\frac{2n-3}{2(n-1)}&<\sqrt{\frac{2n-3}{2n-1}}.\\ &\vdots\\ \frac{5}{2\cdot 3}&<\sqrt{\frac{5}{7}}.\\ \frac{3}{2\cdot 2}&<\sqrt{\frac{3}{5}}.\\ \frac{1}{2\cdot 1}&<\sqrt{\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

將上列 n 個不等式邊邊相乘,得

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots(2n)}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

即所與不等式之一部分已被證明.

次於不等式$a+b>2\sqrt{ab}$,置$a=n$, $b=n+1$時,則成爲

$$n+(n+1)>2\sqrt{n(n+1)}.$$

$$\therefore\quad 2n+1>2\sqrt{n(n+1)}.$$

$$\therefore\quad \frac{2n+1}{2n}>\sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

於上列不等式中逐次使 n 減 1 時,得下列一羣不等式.

$$\frac{2n-1}{2(n-1)}>\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{7}{2\cdot 3}>\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

$$\frac{5}{2\cdot 2}>\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\frac{3}{2\cdot 1}>\sqrt{\frac{2}{1}}.$$

將上列n個不等式邊邊相乘後以$2n+1$除之,得

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots\cdots\cdots(2n)}>\frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}.$$

即所與不等式之他部分亦被證明.

88. 分數定理

定理 1. 設 n 個分數

$$\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_3}{b_3},\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{a_n}{b_n}.$$

之分母皆爲同號時,則分數

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots+b_n}$$

不較 n 個分數中之最大者爲大,亦不較其最小者爲小.

證明: 設 n 個分數中之最大者其值爲 g,又最小者之值爲 k.

茲先就$b_1,b_2,b_3,\cdots\cdots\cdots,b_n$等悉表正數時,證明之如下.

因 g 爲 n 個分數中之最大者,故

$$g>\frac{a_1}{b_1},\ g>\frac{a_2}{b_2},\ g>\frac{a_3}{b_3},\cdots\cdots\cdots\cdots,g>\frac{a_n}{b_n}.$$

但於上列不等式中,對於最大分數,則須易不等式爲等式.

由假定,其 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots\cdots, b_n$ 皆爲正,故應用第84節之定理 3,得

$$gb_1>a_1, gb_2>a_2, gb_3>a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, gb_n>a_n.$$

$$\therefore \quad g(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)>a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n.$$

又因 $b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$ 爲正數,故應用第84節定理 3 之系 1,得

$$g>\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n}.$$

同理,$\because\ k<\frac{a_1}{b_1},\ k<\frac{a_2}{b_2},\ k<\frac{a_3}{b_3},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ k<\frac{a_n}{b_n}.$

$$\therefore \quad kb_1<a_1, kb_2<a_2, kb_3<a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, kb_n<a_n.$$

$$\therefore \quad k(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)<a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n.$$

$$\therefore \quad k<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n}.$$

又設 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots\cdots, b_n$ 等悉表負數時,則由第84節之定理 3 及系 3,得

$$gb_1<a_1, gb_2<a_2, gb_3<a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, gb_n<a_n.$$

$$\therefore \quad g(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots+b_n)<a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_n.$$

因 $b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n$ 爲負,

$$\therefore \quad g>\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n}.$$

同理,可證明

$$k<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n}.$$

卽本定理已被證明.

由同樣方法,亦可證明下述之一般定理.

定理 2. 設 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, b_n$ 及 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, l_n$ 皆表正數時,則分數

$$\frac{l_1a_1+l_2a_2+l_3a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+l_na_n}{l_1b_1+l_2b_2+l_3b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+l_nb_n}.$$

不較 n 個分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots\cdots\cdots, \frac{a_n}{b_n}$ 中之最大者爲大,亦不較其中之最小者爲小.

此定理如擴張之,更可得一定理如下.

定理 3. 設 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, a_n$; $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, b_n$; 及 $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, l_n$ 悉表正數時,則分數

$$\left\{\frac{l_1a_1^m+l_2a_2^m+l_3a_3^m+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+l_na_n^m}{l_1b_1^m+l_2b_2^m+l_3b_3^m+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+l_nb_n^m}\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

及 $$\left\{\frac{a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n}{b_1b_2b_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b_n}\right\}^{\frac{1}{n}}.$$

皆不較 n 個分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots\cdots\cdots\cdots, \frac{a_n}{b_n}$ 中之最大者爲大,亦不較其中之最小者爲小.

系 設 n 個分數 $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \cdots\cdots\cdots\cdots, \frac{a_n}{b_n}$ 皆相等時,則此諸分數皆等於下列分數.

$$\left\{\frac{l_1a_1^m+l_2a_2^m+l_3a_3^m+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_na_n^m}{l_1b_1^m+l_2b_2^m+l_3b_3^m+\cdots\cdots\cdots\cdots+l_nb_n^m}\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

但 m 爲任意整數, $l_1, l_2, l_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, l_n$, 則爲任意數.

89. 相加平均與相乘平均

定理 設 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$ 皆表正數時,則

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+x_n)$$

$$\geqq\sqrt[n]{x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots\cdots x_n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之等號,僅限於 $x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots\cdots\cdots=x_n$ 時,始能成立.

上式左邊,謂之 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$ 之相加平均;右邊謂之 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$ 之相乘平均.故上述定理,又可改述之如下.

定理 n 個正數之相加平均,不能較其相乘平均爲小.但此二數僅限於 n 個正數皆相等時,始能相等.

證明: 先就 $n=2$ 時研究之.此時(1)式之關係爲

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2)\geqq\sqrt{x_1x_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(2)式左邊減去其右邊,則成爲

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})^2.$$

可知若 $x_1\neq x_2$ 時,(2)式左邊較右邊爲大.換言之,卽 $n=2$ 時,本定理能成立是.

次就 $n=4$ 時研究之.

因 $$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_3+x_4)\right\},$$

故應用(2)式關係,得

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\geqq\frac{1}{2}(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4}).\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

再將(2)式關係應用於 $\sqrt{x_1x_2}$, $\sqrt{x_3x_4}$ 二數時,得

$$\frac{1}{2}(\sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_3x_4})\geqq\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\therefore\quad \frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+x_4)\geqq\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

於(5)式,其等號僅限於(3)式及(4)式兩方之等號均能成立時,始能成立.故(5)式之等號,僅限於

$$x_1=x_2,\quad x_3=x_4,\quad \sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_3x_4},$$

即 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 時,始能成立.隨之於$n=4$時,本定理亦能成立.

反復此法,可證明凡 n 為 2 之乘冪時,本定理皆能成立.

次為示明 n 不為 2 之乘冪時之證明法起見,故特先就 $n=3$ 時研究之.

$n=3$ 時,上述定理成為

$$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\geqq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

將(6)式三乘之,得

$$\left\{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\right\}^3\geqq x_1x_2x_3.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

可知如欲證明(6)式時,僅須證明(7)式即可.

置$\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=k$ 即 $x_1+x_2+x_3=3k$,將 x_1, x_2, x_3, k 四數應用本定理時,(對於四數本定理能成立係已證明者)得

$$\frac{1}{4}(x_1+x_2+x_3+k)\geqq\sqrt[4]{x_1x_2x_3k}.$$

因上式左邊等於k,

$$\therefore\quad k\geqq\sqrt[4]{x_1x_2x_3k}.$$

$$\text{即}\quad k^3\geqq x_1x_2x_3.$$

其等號僅限於 $x_1=x_2=x_3=k$ 即 $x_1=x_2=x_3$ 時,始能成立.隨之 $n=3$ 時,本定理已被證明.

用同樣方法,可證明一般 n 不爲 2 之乘羃時,本定理皆能成立.卽取一較 n 爲大之 2 之乘羃 p, 置 $p-n=m$, (m 爲正整數）再置

$$\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x_n)=k,$$

卽 $$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+x_n=nk,$$

將 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$ 與 m 個 k 成合之 p 個正數應用本定理時,（對於 p 個數本定理能成立係已知之者）則得

$$\frac{1}{p}(x_1+x_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+x_n+mk)\geqq\sqrt[p]{x_1x_2\cdots\cdots x_nk^m};$$

因上式左邊等於 k, 故兩邊自乘 p 次,則成爲

$$k^p\geqq x_1x_2x_3\cdots\cdots x_nk^m,$$

或 $$k^n\geqq x_1x_2x_3\cdots\cdots\cdots\cdots x_n,$$

因得 $$k=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\geqq\sqrt[3]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}.$$

其等號僅限於

$$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n=k,$$

卽 $$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_n$$

時,始能成立.卽本定理已被證明對於 n 之任意正整數值,皆能成立.

例 1. 若 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$ 悉爲正或悉爲負時,證明下列不等式.

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_1}\geqq n,$$

解　因 $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_3}$, ………, $\frac{x_n}{x_1}$ 悉為正數,故對於此諸正數應用本節之定理時,得

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_1}\right)\geqq\sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_4}\cdots\cdots\frac{x_n}{x_1}}.$$

隨之得　$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{x_n}{x_1}\geqq n.$$

其等式僅限於

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\frac{x_3}{x_4}=\cdots\cdots\cdots=\frac{x_n}{x_1}$$

時,始能成立.如注意及

$$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, x_n$$

等為同號時,則限於

$$x_1=x_2=x_3=\cdots\cdots=x_n$$

時,始能成立.

例 2.　設 n 為 2 以上之整數時,證明

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots n.$$

解　將 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 之 n 個數應用於本節之定理時,得

$$\frac{1}{n}(1+2+3+\cdots\cdots+n)>\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots n}.$$

因上式左邊等於 $\frac{n+1}{2}$,故

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>1\cdot2\cdot3\cdots\cdots\cdots\cdots n.$$

問題十三

解下列不等式.

1. $2x^2-7x+6>0.$

2. $(x-1)(x-2)(x-3)<0.$

3. $x^3+1>x^2+x.$

4. $\dfrac{2x}{x+1}>3.$

5. $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}>0.$

6. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+2}<0.$

7. $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}>1.$

8. $\dfrac{x-a}{x+a}+\dfrac{3a}{x-a}-\dfrac{10a^2}{x^2-a^2}>0.$ 但 $a>0.$

9. $x>\sqrt{3-2x}.$但平方根爲正.

10. $\sqrt{3-x}<x-2.$但平方根爲正.

11. $\sqrt{a-x}>x-b.$但 $a>b>0,$而平方根爲正.

12. $\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}}>\dfrac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}}.$但 $a>b>0,$而平方根爲正.

13. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}>\sqrt{3x}.$但平方根爲正.

14. $\sqrt{x^2+1}+p\sqrt{x}>x+1.$但平方根爲正.

證明下列不等式.

15. $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)<2(a^3+b^3+c^3).$ 但 $a, b,$ c 悉爲正,且各不相等.

16. $3(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab)$. 但 a, b, c 悉爲正,且各不相等.

17. $a+b>0$ 且 $a \neq b$ 時, $a^3+b^3>ab(a+b)$.

18. $a \neq b$ 時, $(a^4+b^4)(a^2+b^2)>(a^3+b^3)^2$.

19. $a+b+c>0$ 且 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 時, $a^3+b^3+c^3>3abc$.

20. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ 時, $\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}}>\frac{c}{d}$.

21. $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}>\frac{e}{f}$ 時, $\frac{a}{b}>\sqrt[3]{\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}}>\frac{e}{f}$.

22. $n^n>1\cdot3\cdot5\cdots\cdots\cdots\cdots(2n-1)$.

23. $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \nless 9$.

24. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \nless 9abc$.

25. $a^2cd+b^2da+c^2ab+d^2bc \nless 4abcd$.

26. m 爲大於1之整數時,則

$$\frac{a_1{}^m+a_2{}^m+a_3{}^m+\cdots\cdots+a_n{}^m}{n}>\left(\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{n}\right)^m.$$

第十二章　應用問題

90. 應用問題之解法　本章所謂之應用問題,係指應用方程式,聯立方程式,不定方程式,不等式等之解法所能解之關於數及量之各種問題而言.關於解應用問題之步驟如分析之,約爲下述四層.

(1)　未知數之選定.

(2)　方程式或不等式之作成.

(3)　方程式或不等式之解法.

(4)　根之討論.

解應用問題,通常皆須應問題之要求,選定未知數後,由問題中所與已知數之關係,作成方程式或不等式.然後解此方程式或不等式,以求出其所求之數.

一般雖多以問題所要求之數爲未知數而以 x, y, z 等文字表之,作成方程式或不等式即可.然有時不直接以所求之數爲未知數,另行選定其他未知數以作成方程式,由解此方程式所得結果,再行計算問題所要求之數時,反爲簡便者.故解應用問題時,對於未知數之選定,實至爲重要.

當選定未知數後,以此未知數與問題中所與數即已知數之關係,作成方程式或不等式,即得決定此未知數之值

之方程式或不等式.但此時當詳審問題之意義,使其未知數與已知數間之關係,盡行包含於方程式或不等式中.

又如關於量之問題時,尤應選定適宜單位,然後用未知數或已知數以表之.故作成後之方程式或不等式,其兩邊之項,皆爲不名數.

解方程式時,其所求得之根,未必能盡合於題意,因問題中未知數不能不有一定限制,而此限制不能施之於方程式故也.故於求得方程式之根後,其根是否能盡合乎題意,不可不加以討論.例如所求未知數之值應爲正數時,而方程式之根中偏有負數存在,則此負根不可不棄去之;又如所求之數應爲整數時,而以此爲未知數作成之方程式中偏含有分數之根,則此分數之根,亦不可不棄去之是.

91. 方程式應用問題例解

例 1. 甲以每時 $3\frac{1}{2}$ 哩速度,由 A 地向 B 地進行.經四十分鐘後,乙以每時 $4\frac{1}{2}$ 哩速度,由 B 地向 A 地進行.二人於 A 方距離兩地中點半哩處相會.求兩地間距離爲幾哩.

解 設兩地間距離爲 x 哩.由題意,甲乙二人於相會時,甲曾行 $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\right)$ 哩,乙曾行 $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)$ 哩.隨之二人行至相會處,甲由 A 地出發後,曾經 $\dfrac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}$ 時;乙由 B 地出發後,曾經 $\dfrac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}$ 時.但當乙由 B 地出發時,甲已由 A 地出發 40 分

鐘,即$\frac{2}{3}$時.因得方程式於下.

$$\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}}{3\frac{1}{2}}=\frac{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}.$$

去分母,得　$9(x-1)=7(x+1)+42.$

解之,得　$x=29.$

此根能合題意,甚明.故得A,B兩地間之距離爲29哩.

例 2. 父現年四十六歲,子現年二十五歲,求幾年後父年爲子年之四倍.

解　設x年後父年恰爲子年之四倍.由題意,x年後父年爲$46+x$歲,子年爲$25+x$歲,因此時父年爲子年四倍,故得下列方程式.

$$46+x=4(25+x).$$

解之,得　$x=-18.$

負數不合題意,甚明.但此時可另行解釋之如下.即將x年後之詞意擴張之,其x爲正數時,則依普通意義,指x年之後;如x爲負數時,則指變更x符號後所表年數之前是.故上面所求之根爲$x=-18$,即指18年前也.

例 3. 某學校將學生120人分爲兩級.但知甲級人數之二倍,較乙級人數多70.求兩級人數各若干.

解　設甲級人數爲x,由題意,其乙級人數爲$120-x$.又甲級人數之二倍,較乙級人數多70,故得下列方程式.

$$2x=120-x+70.$$

解之,得　　$x=\frac{190}{3}=63\frac{1}{3}$.

因每級人數不能爲分數,故所求得之根,不適合於題意.因之問題成爲不能.

例 4. 有某工作,甲乙丙三人合力作之,其所需時間,較甲一人獨作所需時間少六小時,較乙一人獨作所需時間少一小時,而等於丙一人獨作所需時間之半.求三人合作時所需時間幾何.

解 設三人合作時所需時間爲 x 小時,則三人合作時每小時能作此工作 $\frac{1}{x}$.由題意,甲一人獨作時需 $x+6$ 小時,乙一人獨作時需 $x+1$ 小時,丙一人獨作時需 $2x$ 小時.隨之甲,乙,丙三人獨作時,每小時各能作此工作之 $\frac{1}{x+6}$, $\frac{1}{x+1}$, $\frac{1}{2x}$.因得一方程式於下.

$$\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{x}.$$

去分母後整頓之,得

$$3x^2+7x-6=0.$$

即　$$(3x-2)(x+3)=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{2}{3}, \quad 或 \quad x=-3.$$

因負根不能適合於題意,故二根中僅能採用 $x=\frac{2}{3}$. 即所需時間爲 $\frac{2}{3}$ 小時.

例 5. 直角三角形之斜邊及三邊之和各爲 a, l, 求餘

二邊之長各若干.

解 設所求二邊中一邊之長爲 x,則由題意,其他邊之長爲 $l-(x+a)$. 因此三角形爲直角三角形,故得方程式於下.

$$x^2+\{l-(x+a)\}^2=a^2.$$

移項後整頓之,得

$$2x^2-2(l-a)x+l(l-2a)=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

解之,得 $$x=\frac{1}{2}(l-a\pm\sqrt{(a^2+2al-l^2)}). \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

討論 由問題之性質,其 a 與 l 皆不可不爲正數.又方程式(1)之根爲實數之條件,爲

$$a^2+2al-l^2\geqq 0.$$

玆爲簡單起見,置 $l_1=-(\sqrt{2}-1)a$, $l_2=(\sqrt{2}+1)a$ 時,其 $l_1<l_2$.上列不等式成爲

$$-(l-l_1)(l-l_2)\geqq 0.$$

隨之方程式(1)之根爲實數條件,成爲

$$l_1\leqq l\leqq l_2.$$

然 $l-a$ 爲二邊之長之和,且二邊之和較斜邊爲大.故問題成立時,必 $l-a>a$,隨之 $l>2a$.

又 $l_2>2a$, 甚明.故問題成立時,必

$$2a<l\leqq l_2. \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

此時方程式(1)之根爲適合於問題起見,其必要且兼充分條件,顯爲

$$0<x<l-a. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

如不等式(3)成立,則觀方程式(1)之係數符號,其二根皆爲正數,甚明.此時方程式(1)之左邊如以$f(x)$表之,則

$$f(l-a)=2(l-a)^2-2(l-a)^2+l(l-2a)=l(l-2a).$$

其$f(l-a)>0$. 又觀方程式(2),其二根之一方較$l-a$爲小.故二根均較$l-a$爲小.故(2)式之二根能滿足(4)式之條件.隨之能適合於題意.且因此二根之和爲$l-a$,故此二根卽爲所求二邊之長.

隨之問題於$2a<l\leqq(\sqrt{2}+1)a$時,方能成立.否則爲不能.而此問題成立時,其所求二邊之長各爲

$$\frac{1}{2}(l-a-\sqrt{a^2+2al-l^2}),\ \ \frac{1}{2}(l-a+\sqrt{a^2+2al-l^2}).$$

92. 聯立方程式應用問題例解

例 1. 甲於距靶 500 粎處向靶發鎗,於發鎗後經 $4\frac{1}{3}$ 秒時,得聞彈丸命中靶上之聲音.又乙於距甲 650 粎距靶 400 粎處聞得鎗聲後,再經 $2\frac{1}{3}$ 秒時,聞得彈丸中靶之聲音.求彈丸及音之速度各若干.

解 設彈丸之速度爲每秒x粎,音之速度爲每秒y粎.由題意,甲發鎗後其彈丸飛至靶上,需時$\frac{500}{x}$秒;其彈丸中靶之聲音回至甲處,需時$\frac{500}{y}$秒.隨之甲自發鎗後至聞中靶之聲止,共經過$\left(\frac{500}{x}+\frac{500}{y}\right)$秒.但此時間爲$4\frac{1}{3}$秒.故得一方程式於下.

$$\frac{500}{x}+\frac{500}{y}=4\frac{1}{3}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又鎗聲傳至乙處,需時$\frac{650}{y}$秒.彈丸中靶聲傳至乙處,需

時 $\frac{400}{y}$ 秒.隨之乙於聞得甲發鎗之聲後至聞得彈丸中靶之聲止,其間經過時間為 $\left(\frac{500}{x}+\frac{400}{y}-\frac{650}{y}\right)$ 秒.但此時間為 $2\frac{1}{3}$ 秒.故復得一方程式於下.

$$\frac{500}{x}+\frac{400}{y}-\frac{650}{y}=2\frac{1}{3}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由方程式(1)減方程式(2),得

$$\frac{750}{y}=2.$$

因得 $y=375.$

以 y 之值代入於方程式(1)中,得

$$\frac{500}{x}+\frac{500}{375}=4\frac{1}{3}.$$

移項,得 $\frac{500}{x}=3.$

因得 $x=\frac{500}{3}=166\frac{2}{3}.$

如上求出之 x, y 值,能適合於題意,甚明.故得彈丸之速度為每秒 $166\frac{2}{3}$ 米尺,音之速度為每秒 375 米尺.

例 2. 某人有三子,其年齡恰為三子年齡之和.但經九年後,則父年為長子及次子年齡之和.如再經三年後,則父年為長子及第三子年齡之和.又更經三年後,則父年為次子及第三子年齡之和.求父子四人現年各幾何.

解 設父之年齡為 x,長子之年齡為 y,次子之年齡為 z,第三子之年齡為 w,則由題意,得下列一組聯立方程式.

$$y+z+w=x.$$
$$(y+9)+(z+9)=x+9.$$
$$(y+12)+(w+12)=x+12.$$
$$(z+15)+(w+15)=x+15.$$

將上列一組方程式左邊之已知數悉行移置於右邊,得

$$y+z+w=x. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$y+z=x-9. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$y+w=x-12. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$
$$z+w=x-15. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

由方程式(1)逐次與方程式(2),(3),(4)邊邊相減,得

$$w=9,\quad z=12,\quad y=15.$$

將 w, y, z 之值代入於方程式(1)中,得

$$x=36.$$

此所求得 x, y, z, w 之值,能適合於題意,甚明.故求得父年爲36歲,長子爲15歲,次子爲12歲,第三子爲 9 歲.

例 3. 有蘋菓若干,分給於童子若干人.若於一人所得之數,加上童子多二人時所分得之數,則爲14.又如蘋菓之數多二,童子之數減一時,則每人可得十個.求蘋菓與童子各若干.

解 設蘋菓之數爲 x,童子之數爲 y,則由題意,得下列一組聯立方程式.

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{y+2}=14. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{x+2}{y-1}=10. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

去方程式(2)之分母整頓之,成爲

$$x=10y-12. \quad\cdots\cdots(3)$$

以(3)式 x 之值代入於方程式(1)中,得

$$(10y-12)\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{y+2}\right)=14.$$

以 2 除上列方程式之兩邊且除去其分母時,得

$$(5y-6)(2y+2)=7(y+2)y.$$

移項後整頓之,得

$$3y^2-16y-12=0.$$

解之,得 $y=6$, 或 $y=-\frac{2}{3}$.

因人數不能爲負數,故此二根中不能採用 $-\frac{2}{3}$. 故僅

$$y=6.$$

隨之由方程式(3),得

$$x=10\times6-12=48.$$

卽所求蘋菓之數爲48,童子之數爲 6.

例 4. 有矩形 $ABCD$,其周圍爲 $2p$, 其 AB 邊與直線 a 所包矩形及 AD 邊與直線 b 所包矩形面積之和,等於其周之半之直線上正方形面積.求 AB, AD 之長.

解 設 $AB=x$, $AD=y$, 則 $AB+AD$ 爲矩形之周之半,故由題意,得下列聯立方程式.

$$x+y=p. \quad\cdots\cdots(1)$$

$$ax+by=p^2. \quad\cdots\cdots(2)$$

由上列二方程式順次消去 y, x 時,得

$$\left.\begin{aligned}(a-b)x=p(p-b)\\(a-b)y=p(a-p)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

隨之如 $a \neq b$ 時,則

$$\left.\begin{aligned}x=\frac{p(p-b)}{a-b}\\y=\frac{p(a-p)}{a-b}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

討論　由問題之性質, a, b, p 皆不可不為正數.先就 $a \neq b$ 時研究之,此時所與方程式之根如(4)式所示.此根適合於題意之必要且兼充分條件,為 $x>0$, $y>0$, 甚明.即須

$$\frac{p(p-b)}{a-b}>0, \quad \frac{p(a-p)}{a-b}>0.$$

也.然 a, b, p 皆為正數,故此條件於

$a>b$ 時,為 $a>p>b$;

$a<b$ 時,為 $a<p<b$.

隨之 $a \neq b$ 時,其 p 位於 a, b 之間,則問題成立.否則,問題成為不可能.而問題成立時, AB, AD 之長,各如(4)式所示.

次就 $a=b$ 時研究之,此時方程式(3)非 $a=b=p$, 則不能成立,甚明.又 $a=b=p$ 時,方程式(2)成為

$$a(x+y)=a^2.$$

以 a 除上式之兩邊時,得

$$x+y=a=p.$$

上式與方程式(1)完全一致,隨之方程式成為不定.即 x, y 之值不定.

可知 $a=b \neq p$ 時,問題成為不能.如 $a=b=p$ 時,問題復

成為不定,所求之矩形,有無限數存在.卽凡合 $AB+AP=p$ 條件之矩形.皆為所求之矩形是.

93. 不定方程式應用問題例解

例 1. 試分 100 為二份,使其一份能為 7 整除,而他份能為 11 整除.

解 設所求第一份為 $7x$,第二份為 $11y$. 依題意,得方程式

$$7x+11y=100. \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因 7 與 11 互為素數,故由第82節定理 1 之系,上列方程式確有整根存在.

上列不定方程式雖可用第82節之方法以解之,玆另法解之如下.

由方程式(1),得

$$x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7}.$$

卽 $$x=14-y+\frac{2-4y}{7}.$$

故 $2-4y$ 不可不為 7 整除.隨之 $4y-2$ 亦不可不為 7 整除.然 $4y-2$ 能為 7 整除時,則其二分之一之 $2y-1$, 亦能為 7 整除.故

$$2y-1=7z.$$

卽 $$2y=7z+1.$$

而 $$x=14-y-2z.$$

然 $$2y=7z+1=6z+z+1,$$

$$\therefore \quad y=3z+\frac{z+1}{2}.$$

隨之　$z+1=2u$.

即　$z=2u-1$.

隨之　$y=3z+u$.

上式中之 u 能與吾人為不使 x 及 y 成負數之整數.因得

$$y=7u-3.$$

$$x=19-11u.$$

故前一式示 $7u$ 大於 3,後一式示 $11u$ 小於 19.即 u 較 $\frac{19}{11}$ 為小.

故 u 不能為 2.又 u 亦不能為 0.故必

$$u=1.$$

即 u 所能有之唯一值也.因得

$$x=8,\quad y=4.$$

故得一份為56,他份為44.

例 2.　某人買牛馬各若干頭,馬一頭之價為31元,牛一頭之價為20元,計牛價共較馬價多 7 元.求牛馬各若干頭.

解　設牛之頭數為 x,馬之頭數為 y.由題意,得方程式

$$20x-31y=7.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

解此方程式時,先求得方程式

$$20x-31y=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之整根如下.

$$20=0\cdot31+20$$

$$31=1\cdot20+11$$

$$20=1\cdot11+9$$

$$11=1\cdot 9+2$$

$$9=4\cdot 2=1$$

$$2=2\cdot 1$$

Q	X	Y
0	0	1
1	1	0
1	1	1
1	2	1
4	3	2
2	14	9

$n=6.$

故(2)式之一組整根,為

$$x=14,\quad y=9.$$

隨之得所與不定方程式之一組整根為

$$x_1=14\times 7=98.$$

$$y_1=\ 9\times 7=63.$$

而其一般根為

$$x=98+31t.$$

$$y=63+20t.$$

以$(t-3)$代t時,則上列二式,可化簡如下.

$$x=5+31t.$$

$$y=3+20t.$$

置$t=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$時,得所求不定方程式之各組整根如下.

牛之頭數$x=5, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253,\cdots\cdots\cdots$

馬之頭數$y=3, 23, 43, 63,\ 83, 103, 123, 143, 163,\cdots\cdots\cdots$

94. 不等式應用問題例解

例 1. 有機關車車輪之周圍為15呎,客車車輪之周圍在 9 呎與10呎間之某列車.於經過若干哩(一哩之整數倍)之距離時,其客車車輪較機關車車輪多轉 1496 回.求客車車輪之周圍為若干呎.

解 設列車經過之距離為 x 呎,則 $\frac{x}{15}$ 為機關車車輪迴轉之回數,$\frac{x}{15}+1496$ 為客車車輪迴轉之回數.由題意,得不等式於下.

$$\frac{x}{10}<\frac{x}{15}+1496<\frac{x}{9}.$$

解此不等式,得

$$33660<x<44880.$$

可知列車經過之距離在33660呎與44880呎間.然由題意,此距離不可不為 5280 呎之整數倍.以 5280 除 33660, 得整數商 6, 以 5280 除 44880, 得整數商 8. 故可知此距離為 7 哩或 8 哩.

設列車經過之距離為 7 哩,則客車車輪之周圍為 $9\frac{1}{3}$ 呎.若列車經過之距離為 8 哩,則客車車輪之周圍為 $9\frac{39}{49}$ 呎.隨之得所求客車車輪之周圍為 $9\frac{1}{3}$ 呎,或 $9\frac{39}{49}$ 呎.

例 2. 有沿途每距60步樹有電報柱一桿之街道.甲以每分鐘行35步之速度,由第一號柱出發,經半小時後,乙以每分鐘行45步之速度,由第一號柱出發,追於甲後.求乙出發後經若干時間,其甲乙二人始行至於相鄰二柱間.

解　設甲與乙最初同行於二柱間時,其二柱爲 $x+1$ 及 $x+2$ 號,則當乙通過此 $x+1$ 號柱時,甲當在乙前60步以內.

因第一號柱至第 $x+1$ 號柱之距離爲 $60x$ 步,故乙於出發後經 $\frac{60x}{45}$ 分鐘,始達 $x+1$ 號柱.較乙先30分鐘出發之甲至此時所行之距離,爲 $35(\frac{60x}{45}+30)$ 步.因得下列不等式.

$$0<35(\frac{60x}{45}+30)-60x<60.$$

解上列不等式,得

$$78\frac{3}{4}>x>74\frac{1}{4}.$$

x 當爲整數,固不待論.因問題在求甲與乙最初行至於相鄰二柱間之時間,故吾人於能適合於上列不等式之範圍內,不可不取其最小之整數75.隨之可知甲乙二人最初行至於相鄰二柱間之二柱爲76號及77號.而乙由出發以至達於76號柱時所需之時間,爲 $\frac{75\times60}{45}$ 分,即 100 分或一時四十分.

又乙通過76號柱時,甲在第76號柱之前方50步,第77號柱之後方10步處.

問 題 十 四

1. 有甲乙二桶,甲桶盛有水一斗八升葡萄酒一斗二升之混合液,乙桶盛有水三升葡萄酒九升之混合液.今欲混合此二桶中混合液,俾合成水與葡萄酒等分之混合液一斗四升.求由二桶中各須取出混合液幾升.

2. 有兵士一隊,計可列成每邊四列之中空正方陣,或每邊八列之中空正方陣.但第一正方陣前列人數,較第二正方陣前列人數多十六.求此隊之人數幾何.

3. 快車與慢車駛行於距離 120 哩之兩市間,其所需時間之比爲 9 與 14.但慢車停車所費時間,等於不停車時駛行20哩距離之時間;而快車停車時間,則僅等於此時間之半.且快車每時間之速度較慢車多15哩.求兩列車之速度幾何.

4. 於某日午前比較坐鐘與掛鐘所示之時間時,坐鐘爲九時五分,掛鐘爲九時.待翌日午後再比較之,則坐鐘爲三時四分掛鐘爲三時二分.但知掛鐘每時快四秒,求坐鐘每時應快若干秒.

5. 有水槽,於其空虛時;如開甲管使水流入,則 5 小時可滿,開乙管則 6 小時可滿.又於其充滿水時,閉其甲乙二管,開丙管則 3 小時20分流盡,開丁管則15小時流盡.今設此水槽有水半槽,問如將甲乙丙丁四管同開時,則經幾小時可滿.

6. 有二位之數,其單位之數字較十位之數字大 a,如將此二數字交換其位置時,則等於原數之 b 倍.(但 b 爲整數)求此數爲何數.

7. 有二位之數,其值較其二位數字之和之四倍大 3.如於此數之二倍加36時,則等於交換其二位數字後之數之二倍減36.求此數爲何數.

8. 有能容水一石二斗之水槽,若甲乙丙三管同開注

水入內時,則二十四分鐘可滿.若僅開甲管,則較僅開丙管時多需十分鐘.又每一分鐘間,甲乙二管同時注入之水量,較於同時間丙管注入之水量多一升.問如甲乙丙三管單獨開放時,各需若干時間始滿.

9. 有位於三角形三頂點A,B,C之三市,某人欲繞行此三角形之一周,特決定其最初出發之邊為步行,第二邊為騎行,第三邊為車行.但每行一里,步行需時a分,騎行需時b分,車行需時c分.如其進行之方向始終不變,則由A出發,至歸至A處,計需A小時.由B出發,至歸至B處,計需B小時,由C出發,至歸至C處計需C小時,求此三角形之周圍計長若干里.

10. 有二等邊三角形,其周長$2p$,高為h.求其各邊之長度.

11. 某人有現金五千元,以某種利率貸之於人,一年後收回本利後,計於其內消費二十五元,再以如前利率全數貸之於人,經一年後,計共得本利五千三百八十二元.求其年利率幾何.

12. 有甲乙二工人,以不同之工資,於某期間內,共同從事於某工作.其間甲未休息一日,而乙休息六日,計甲得工資十九元二角,乙得工資十元八角.如乙未曾休息一日,甲曾休息六日,則二人所得之工資相等.求此期間之日數及甲乙二人每日之工資各若干.

13. 有滿盛酒精之桶,於其中酌取一斗八升後,以水補之.再於其中酌取一斗八升,復以水補之.設此時桶中酒精

與水之比為 16∶9, 求桶之容量幾何.

14. 以小石由井口落下,經 t 秒時,得聞小石衝擊水面之聲音.求由井口至水面之深度.但當小石落下時,空氣之抵抗不計及之,落體之加速度為 g 秒秒粎.音之速度為 v 秒粎.

15. 有三角形,其二邊之長為 a, b,其面積等於第三邊上正三角形之面積.求第三邊之長度.

16. 有某人由甲地出發,向乙地進行.因由此路程之中央起,至乙地止,全為山路.故行抵中點後,其速度每時減少 $\frac{2}{3}$ 哩.計自出發後,經十小時,始抵乙地.又歸時始終保持較最初速度每時少半哩之速度,計經十小時四十分,始達甲地.求此人最初速度及甲乙兩地間之距離.

17. 有三位之數,其十位之數字等於單位數字與百位數字之和之半,如於此數加 198 時,則等於交換單位與百位數字所得之數,又如於此數加 5 時,則等於各位數字平方之和之 7 倍.求此數為何數.

18. 有直角三角形,其周為 $2p$,其內切圓之半徑為 r.求三邊之長各幾何.

19. 試將73分為二部分,各部分皆為整數,使其大部分之三倍,較其小部分與 8 之和之五倍為大;由大部分減 8 後之差之三倍,較小部分之七倍為小.

20. 有分數於分子加 2,分母加 3,則其值為 $\frac{3}{4}$.如於分子加 3,分母加 1,則其值介於 1 與 2 之間.求此分數.

21. 有若干學生須容納於具有若干房間之寄宿舍中,若一室住七人,則餘十八人;若一室住十人,則最後一室,不足十人.求室數若干.

22. 有甲乙二人,同時由周圍 400 丈之正方形相鄰兩隅出發,同向而行,甲在乙前.計甲之速度為每分 42 丈,乙之速度為每分 34 丈.求二人出發後,經若干時間始再行行至一邊.

23. 有人還賬若干筆,因改釐以下不計之習慣,爲分以下不計,致剩洋七分.但每賬均在五元以上,而合之則不足八十元.求賬數爲若干筆.

24. 有沿街每隔 75 丈樹立一柱之街道,甲以每分 33 丈之速度,由第三十七號柱出發;同時乙以每分 47 丈之速度,由第一號柱出發,自後追之.求乙追及甲後,最後二人行於二柱間時,其相鄰二柱爲若干號.

25. 設 AB, CD 爲圓之平行弦,其長各爲 $2a, 2b$, 而其距離爲 d, 求圓心之位置.

26. 設三角形 ABC 之內切圓與 AB 邊之切點爲 X,又 A 角內之傍切圓與 AB 邊之切點爲 Y,其 AX, AY 之長各爲 p, q, 而 AB, AC 二邊之差爲 d, 求三角形三邊之長.

27. 由直徑 AB 之半圓周上一點 M,向 AB 引垂線 MP,而使 $MP+2AP=l$ 時,求 M 點之位置.

28. 設直角三角形 ABC 之斜邊 BC 之長爲 a, 由頂點 A 向斜邊 BC 所引垂線 AD 與 AB, AC 二邊之和爲 l, 求 AB, AC 之長.

29. 證明正三角形爲周圍一定之三角形中面積之最大者,又爲面積一定之三角形中周圍之最小者.

30. 設直角三角形之周圍一定,其夾成直角之二邊之和最大時,此直角三角形如何.

31. 分 100 爲二份,使其一份以 5 除之,餘 2;他份以 7 除之,餘 4.

32. 有男女合組之旅行團,共集旅費1000元.計男每人出19元,女每人出13元,求男女人數各若干.

33. 某人買牛馬各若干頭,共費1770元.計馬一頭値31元,牛一頭値21元,求牛馬各若干頭.

34. 某數以 6 除之,餘 2;又以13除之,餘 3.求其數.

35. 某人以 100 元買鵝,鴨,雞共 100 隻,計鵝每隻費$3\frac{1}{2}$元,鴨每隻費 $1\frac{1}{3}$ 元,雞每隻費$\frac{1}{2}$元,求鵝,鴨,雞各若干隻.

36. 有三數,以 3 乘第一數,5 乘第二數,7 乘第三數後而加合之,其和爲 560. 又以 9 乘第一數,25乘第二數,49乘第三數後而加合之,則其和爲2920.求三數.

第十三章　函數

95. 函數與極限　如第26節所述,於一計算之研究中,其代表一定數值之文字,謂之<u>常數</u>.反之,其能代表種種數值之文字,謂之<u>變數</u>.例如 x 之整式 $f(x)=ax^2+bx+c$,其

$x=0$ 時, $f(x)=c$;

$x=1$ 時, $f(x)=a+b+c$;

$x=-2$ 時, $f(x)=4a-2b+c$.

等,即視 a, b, c 等為常數, x 為變數是.

設二變數 x, y 間有某種關係存在,而由此關係,如其中任意一方例如 x 之值決定後,其他方 y 之值亦隨之決定者,則 y 謂之為 x 之<u>函數</u>.例如於 x, y 間有 $y=x^2-1$ 之關係時,其 y 之值雖隨 x 之種種值而變化,但若 x 之值決定後,則 y 之值亦隨之而定.即 y 為 x 之函數是.

x 之整式,分數式等,皆為 x 之函數.前曾用 $f(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ 等符號以表 x 之整式者,即不外表明其式為 x 函數之意.一般,表 x 之函數時,皆用 $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$ $\psi(x)$ 等符號.表 $x=a$ 時函數 $f(x)$ 之值,則以 $f(a)$. 例如於

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$,其

$$f(0)=1,\ f(1)=\frac{1}{2}\ \ f(-3)=\frac{1}{10},$$

等是.

變數 x 無限的接近於一定數 a 時,則以 $x\longrightarrow a$ 之符號表示之.此時 a 謂之爲變數 x 之極限值.或謂之爲 x 收斂於 a 之值.

如上所謂 x 無限的接近於 a 云者,並非爲 $x=a$,僅爲 x 能取與 a 極相接近之數值之謂.詳言之,卽任取如何小之正數 ε,更可使

$$|x-a|<\varepsilon$$

是.

又 x 接近於 a 之值時,其值不必連續的變更.例如 x 順次取

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

之值進行時,亦得謂之 $x\longrightarrow 0$ 是.

設 a, b 爲二定數,其 $x\longrightarrow a$ 時,則 $f(x)\longrightarrow b$,此時稱 b 爲 $x\longrightarrow a$ 時 $f(x)$ 之極限值,一般皆以下列符號以表之.

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

例 $\lim\limits_{x\to 1}(1+2x)=3.$

解 因任取如何小之正數 ε,對此使

$$0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而使 x 接近於 1 時,則確能得

$$|(1+2x)-3|<\varepsilon\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故也.又此例實際於 $x=1$ 時,則 $1+2x=3$.故於(1)式,無特別

附加$0<|x-1|$之必要.

96. **無限大** 如前第13節所述,以0除某數一語,毫無意義,因任何數如以0乘之,其積皆爲0,不能等於某數故也.又如前第57節所述,解 $ax+b=0$ 方程式時,設 $a=0, b\neq 0$,則其方程式不能成立.故分數$\frac{b}{0}$所表者,爲不能之意.但自變數之觀念導入後,如假定 a 之値原不爲0而因漸次減少致成爲0時,則其解釋如下.

先假定$\frac{b}{a}$之 a, b, 各不等於0.固定 b 之値不變,使 a 之値連續的減少時,則$\frac{b}{a}$之値卽漸次增加.待 a 之値減少至無限小時,則$\frac{b}{a}$之値亦增加至無限大.此時 a 之極限値爲0,而$\frac{b}{a}$之極限値爲無限大.或謂之無窮大.

無限大通常皆以符號∞表之,此∞符號卽8字之橫置者.同樣,負之無限大以$-\infty$表之.故

$$\lim_{a\to 0}\frac{b}{a}=\infty$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{-b}{a}=-\infty$$

又 $$\lim_{a\to\infty}\frac{b}{a}=0$$

無限大一數,吾人腦海中實難於想像之.因吾人想像一可想像之大數後,更可想像一較其數爲大之數;進而復可想像一較此更大數爲大之數,如此逐次進行,了無止境故也.故無限大一數,吾人想像中雖可追逐之,但無由捕得之

對於無限大而言,其普通有限之數,謂之<u>有限數</u>.因 0 亦列於有限數中,故如有將 0 除外之必要時,特稱之為非 0 之有限數.

吾人對於無限大之觀念,旣解釋明瞭,故對於前第57,59二節所討論一元一次或一元二次方程式之根時,凡方程式成為不能時,其時之根,皆可謂之為無限大.

例 1. 證明 $0.777\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots+\frac{7}{10^n}\right)=\frac{7}{9}$.

解　因 $\frac{7}{9}-\frac{7}{10}=\frac{7}{90}$,

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}\right)=\frac{7}{90}-\frac{7}{100}=\frac{7}{900},$$

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}\right)=\frac{7}{900}-\frac{7}{1000}=\frac{7}{9000},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{7}{9}-\left(\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\cdots\cdots+\frac{7}{10^n}\right)=\frac{7}{9\times10^n},$$

故 $\frac{7}{9}$ 與 $0.777\cdots\cdots$ 之差,如使 n 之值成為無限大,即此小數之位數取至無限大時,可使之小至較任何正數為小.

例 2. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=2$.

解　因 $2-\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4},$$

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n},$$

故$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}$ 與 2 之差,如 n 之值成爲無限大時,可小至較任何正數爲小.

97. 不定形 如前第57,59,71諸節所述,方程式及聯立方程式之根有時成爲$\frac{0}{0}$形式,致其根不能決定者.此種$\frac{0}{0}$形式之代數式,謂之<u>不定形</u>.不定形除其分子,分母絕對的爲 0,其值無論何時皆屬不定外;一般如以某值代入於不定形中,其分數式表面上雖呈不定之形式,但實際仍有其一定值者.例如

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

於$x=3$時成爲$\frac{0}{0}$,而實際上

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=6$$

是.此種不定形,謂之<u>形式上之不定形</u>.

不定形之形式甚多,如$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty$等形式之代數式,皆爲不定形是.因其他不定形皆可化成$\frac{0}{0}$之形式,例如

$$\frac{\infty}{\infty}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0},$$

$$0\times\infty=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$$

等,故本節僅就形式上成爲$\frac{0}{0}$之代數式研究之於下.

設 $f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ 於 $x=a$ 時成爲$\frac{0}{0}$,則 $\varphi(a)=0$, $\psi(a)=0$. 因 $x=a$ 時 $\varphi(x)$ 之值爲 0, 故 $\varphi(x)$ 能爲 $x-a$ 所整除.卽

$$\varphi(x)=(x-a)\varphi_1(x).$$

同理, $\psi(x)$ 亦能爲 $(x-a)$ 所整除.卽

$$\psi(x)=(x-a)\psi_1(x).$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{(x-a)\varphi_1(x)}{(x-a)\psi_1(x)}=\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

設 $x=a$ 時 $\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$ 仍成$\frac{0}{0}$,依同理,

$$\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}=\frac{(x-a)\varphi_2(x)}{(x-a)\psi_2(x)}=\frac{\varphi_2(x)}{\psi_2(x)}.$$

如此逐次推之,最後必得一與原分數式相等且分子,分母於 $x=a$ 時不同時爲 0 之分數式.故得不定形之極限值求法規則如下.

求形式上爲$\frac{0}{0}$不定形之極限值時,可先約去其分子,分母中之公因式,使所與分數式成不可約分數式,然後以指定之值代入之.

設最後所得不可約分數式之分子,分母於 $x=a$ 時俱不爲 0,則原分數式於 $x=a$ 時之值,爲非 0 之有限數.設所得不可約分數式僅其分子於 $x=a$ 時成爲 0,則原分數式於 $x=a$ 時之值爲 0;又僅其分母於 $x=a$ 時成爲 0,則原分數

式於$x=a$時之值爲∞,其符號隨分數式分子之符號而定.

例 1. 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{1-x}$之值.

解 $$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{1-x}=\lim_{x\to1}(1+x)=2.$$

例 2. 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}$之值.

解 $$\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x^2+2}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2-2x-2)}{(x-1)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x-2}{x-3}=\frac{-3}{-2}=1\frac{1}{2}.$$

例 3. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{2x^2+x-1}$之值.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2+x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x^2}}{2+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}.$$

$$\because\ \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0,$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3}{2x^2+x-1}=\frac{1}{2}.$$

98. 二次三項式之值之研究 於x之二次式

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

如與x以種種值時,則$f(x)$亦隨之而取種種之值,已如前述.茲更就其值之符號研究之於下.

置 $$P=ax^2+bx+c, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

則由因式分解,得

$$P=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 a, b, c 皆不含 x 且 $a \neq 0$，當不待論.

當研究此式之值時,由 b^2-4ac 之值如何,因而可分爲下述之三方面.

I　$b^2-4ac>0$ 時.此時二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

有二個相異實根,設此二根各爲 x' 及 x'',置

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

時,則　$$P=ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x''). \cdots\cdots(5)$$

因二次方程式不能有二個以上之根,故此式僅於 $x=x'$ 或 $x=x''$ 時爲 0,於其他諸值皆不爲 0.

因 x' 及 x'' 爲相異實數,故與此相異之值可分爲下列三種.

(1)　較 x', x'' 中之小者爲小之值.

(2)　位於 x', x'' 間之值.卽較其中之小者爲大,大者爲小之值.

(3)　較 x', x'' 中之大者爲大之值.

x 於具有上列各值時,其二次三項式 P 之值之號如下.

(1')　x 較 x', x'' 二數中之小者爲小時,此時 $x-x'$ 及 $x-x''$ 皆爲負數.隨之 $(x-x')(x-x'')$ 爲正數.故 $a(x-x')(x-x'')$ 與 a 爲同號之數.卽此時二次三項式 ax^2+bx+c 之值與 a 爲同號.

(2′) x 位於x',x''二數之間時,此時因 x' 及x''一方較x爲大,他方較 x 爲小,故$x-x'$ 及 $x-x''$ 爲異號之數.隨之$(x-x')(x-x'')$ 爲負數.故 $a(x-x')(x-x'')$ 與 a 爲異號之數.卽此時二次三項式ax^2+bx+c之值與 a 爲異號.

(3′) x 較x',x''二數中之大者爲大時,此時 $x-x'$ 及 $x-x''$ 皆爲正數.隨之$(x-x')(x-x'')$爲正數.故$a(x-x')(x-x'')$與 a 爲同號之數.卽此時二次三項式ax^2+bx+c之值與 a 爲同號.

總括上得結果,因得一定理於下.

定理 1. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有相異實根時,如x較此方程式二根中之小者爲小,或較大者爲大,則二次三項式 ax^2+bx+c 之值與 a 爲同號;如 x 介於其二根之間,則二次三項式 ax^2+bx+c 之值與 a 爲異號.

可知$b^2-4ac>0$時,二次三項式 ax^2+bx+c 由 x 之值如何,能爲正數或負數.

II $b^2-4ac=0$ 時.此時由(2)式,得

$$P=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2. \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但此時方程式(3)具有等根.設此根爲 x', 則

$$x'=-\frac{b}{2a}.$$

隨之得 $P=a(x-x')^2.$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

因 $a(x-x')^2$ 於$x=x'$時成爲 0, 而於$x\neq x'$時均不成爲 0, 且$(x-x')^2$於$x\neq x'$時常爲正數,故 $a(x-x')^2$ 卽 P 於$x=x'$時成爲 0; 於$x\neq x'$時,其值與 a 爲同號.因得一定理於下.

定理 2. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有等根時,如 x 不等於此方程式之根,則二次三項式 ax^2+bx+c 之值,恆與 a 爲同號.

可知 $b^2-4ac=0$ 時,二次三項式 ax^2+bx+c 之值,如 a 爲正數時,則不論 x 之值如何,常爲正數或 0,決不能爲負數.又 a 爲負數時,則不論 x 之值如何,常爲負數或 0,決不能爲正數.

III $b^2-4ac<0$ 時.此時由(2)式,得

$$P=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}. \quad \cdots\cdots(8)$$

故方程式(3)具有虛根.因 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 爲正數,又 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ 不論 x 取若何之實數值,皆不能成負數,卽不外成爲 0 或爲正數.故 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 不論 x 之值如何,常爲正數.隨之 $a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$ 卽 ax^2+bx+c 常與 a 同號.因得一定理於下.

定理 3. 二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲虛數時,則二次三項式 ax^2+bx+c 之值,不論 x 之值如何,常與 a 爲同號.

可知 $b^2-4ac<0$ 時,二次三項式 ax^2+bx+c 之值,不論 x 之值如何,常爲正數 ($a>0$ 時) 或負數,($a<0$ 時) 決無成爲 0 時.

例: 求 $3x^2+x-2$ 於 x 取如何之值時,其值爲正.

解 先就二次方程式 $3x^2+x-2=0$ 研究之.因

$$3x^2+x-2=(3x-2)(x+1)=0,$$

此方程式之根爲$\frac{2}{3}$及-1,而

$$3x^2+x-2=3(x-\frac{2}{3})(x+1),$$

故此二次三項式之値爲正時,須

$$(x-\frac{2}{3})(x+1)>0.$$

上列不等式之關係,於 $x-\frac{2}{3}$ 及$x+1$兩者皆爲正數或負數時,始能成立.

先就 $x<-1$ 時,其 $x-\frac{2}{3}<0$, $x+1<0$,

$$\therefore\quad 3(x-\frac{2}{3})(x+1)>0.$$

次就 $x>\frac{2}{3}$時,其 $x-\frac{2}{3}>0$, $x+1>0$,

$$\therefore\quad 3(x-\frac{2}{3})(x+1)>0.$$

如 x 取其他之値,則 $x-\frac{2}{3}$ 及 $x+1$ 二者不能同爲正數或負數.故所求 x 之値,爲

$$x<-1,\quad \text{或}\quad x>\frac{2}{3}.$$

99. 二次方程式之根與與數之比較 設二次方程式爲

$$ax^2+bx+c=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

所與與數爲 a.茲將不俟解方程式(1)而能將其根與 a 比較大小之方法,述之於下.

因此問題僅限於方程式(1)之根爲實數時,故先就

$$b^2-4ac>0$$

時研究之.此時方程式(1)之根爲相異實數,設此二根各爲x'及x'',則

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'').$$

$$\therefore\quad a\alpha^2+b\alpha+c=a(\alpha-x')(\alpha-x'').$$

故如上節所說明,其結果如下.

(1) $a\alpha^2+b\alpha+c$與a爲同號時,則α較x'及x''二數中之小者爲小,或較其大者爲大.

(2) $a\alpha^2+b\alpha+c$與a爲異號時,則α位於x'及x''二數之間.

於(1)時,其2α較$x'+x''$爲小或大,隨之α較x'及x''中之小者爲小,或較其大者爲大.然

$$x'+x''=-\frac{b}{a}.$$

$$\therefore\quad 2\alpha-(x'+x'')=2\alpha+\frac{b}{a}=\frac{2a\alpha+b}{a}.$$

可知如$2a\alpha+b$與a爲異號時,其2α較$x'+x''$爲小.隨之α較二根x'及x''中之小者爲小.又如$2a\alpha+b$與a爲同號時,則2α較$x'+x''$爲大.隨之α較二根x'及x''中之大者爲大.因得一定理於下.

定理 1. 方程式$ax^2+bx+c=0$有相異實根x'及x''時,(1)如$a\alpha^2+b\alpha+c$與a爲同號,而$2a\alpha+b$與a爲異號時,則α較二根x',x''中之小者爲小;(2)如$a\alpha^2+b\alpha+c$與a爲同號,而$2a\alpha+b$亦與a爲同號時,則α較二根x',x''中之大者爲大;(3)如$a\alpha^2+b\alpha+c$與a爲異號時,則α爲介於二根x',x''間之數.

又設 α 等於方程式(1)之一根時,則 $a\alpha^2+b\alpha+c=0$. 而此時隨2α較二根之和爲小或大,隨之 α 亦較其他根爲小或大.故如上述說明,復得一定理於下.

定理 2. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有相異實根時,如 α 等於其中之一根.則隨 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號或爲同號,α 亦較其他一根爲小或大.

次就 $b^2-4ac=0$ 時研究之.因方程式(1)之根爲 $-\dfrac{b}{2a}$,此根設以 x' 代之,則方程式(1)之左邊成爲 $a(x-x')^2$. 隨之 $a\alpha^2+b\alpha+c=a(\alpha-x')^2$, 其 $a\alpha^2+b\alpha+c$ 與 a 爲同號. ($\alpha \neq x$ 時)

而 $\alpha-x'=\alpha-\left(\dfrac{-b}{2a}\right)=\dfrac{2a\alpha+b}{2a}$,故如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號時,則 α 較 x' 爲小;如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲同號時,則 α 較 x' 爲大.因得一定理於下.

定理 3. 方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有等根時,(1)如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲異號,則 α 較此方程式之根爲小;(2)如 $2a\alpha+b$ 與 a 爲同號,則較其根爲大.

例: 將方程式 $-x^2+5x+2=0$ 之根與 1, 2, -3. 三數比較之.

解 以1,2,-3三數分別代入於所與方程式之左邊 x 時,則各得

$$6,\quad 8,\quad -22.$$

因起首二數 6 與 8 皆與 x^2 之係數異號,故可知 1 與 2 二數皆介於所與方程式之二根間.

又最後一數 -22 與 x^2 之係數爲同號,而 $2a\alpha+b$ 於此時

成爲$2\times(-1)\times(-3)+5=11$,與$x^2$之係數異號.故$-3$較所與方程式二根中之小者爲小.

100. 極大極小 於x之函數$y=f(x)$,一般如x之値變化時,則y之値亦隨之變化,已如前述.但有時當x之値漸次增加,至達於某値爲止,其y之値卽漸次減少,至成爲某値m;迨x再繼續增加,則y之値反由m而漸次增加者.此時m謂之爲函數$f(x)$之極小値.或謂之極小.例如於$y=f(x)=(x-2)^2+3$,其x之値較2爲小至漸次增加以達於2時,則y之値亦漸次減少,終成爲3.如x達於2後再繼續增加時,則y之値反由3漸次增加.故3爲此函數$f(x)=(x-2)^2+3$之極小值.

又有時當x之値漸次增加,至達於某値爲止,其y之値亦漸次增加,至成爲某値m;迨x再繼續增加,則y之値反由m而漸次減少者.此時m謂之爲函數$f(x)$之極大値.或謂之極大.例如於$y=f(x)=-(x-1)^2+5$,其x之値較1爲小至漸次增加以達於1時,則y之値亦漸次增加,終成爲5.如x達於1後再繼續增加時,則y之値反由5漸次減少.故5爲此函數$f(x)=-(x-1)^2+5$之極大値.

變數x之値雖始終漸次增加或漸次減少,其y之値可由增而減,再由減而增,更由增而減,如此經數度之增減.換言之,卽函數能有數個之極大値及極小値.可知極大値決非最大値,極小値亦非最小値.譬如登山,登一峯後當下一谷,其峯雖爲該處之最高部分,然更有高於其峯之他峯在.又下一谷後,當更登一峯,其谷雖爲該處之最低部分,然更

有低於其谷之他谷在是.

極大極小之研究,原屬於高等數學之範圍,本節所論者,僅爲關於不等式之諸定理,及應用上述諸節所能研究之簡單函數而已.

下述二定理,爲應用相加平均與相乘平均之定理所能證明者,學者可自行證明之.

定理 1. 諸正數之和一定,則其諸數之積,於各數皆相等時爲極大.

理定 2. 諸正數之積一定,則其諸數之和,於各數皆相等時爲極小.

例 1. 求 ax^2+bx+c 之極大值或極小值.

解 因 $y=ax^2+bx+c$,故於 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 時,y 之值成爲 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. 此卽 y 值之界限也.

如 $a>0$ 時,則 y 之值常較 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 爲大.故 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 爲 y 之極小值.如 $a<0$ 時,則 y 之值常較 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 爲小.故 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 爲 y 之極大值.

例 2. 求 $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-4x+5}$ 之極大值或極小值.

解 置所與分數式等於 λ 時,則

$$\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+5}=\lambda.$$

去分母,得 $(1-\lambda)x^2-(2-4\lambda)x+3-5\lambda=0.$

滿足上列方程式之 x 值如爲實數,則必

$$(2-4\lambda)^2-4(1-\lambda)(3-5\lambda)\geqq 0.$$

將左邊化簡後以 -4 除之,得

$$\lambda^2-4\lambda+2\leqq 0.$$

$$\therefore\quad \{\lambda-(2+\sqrt{2})\}\{\lambda-(2-\sqrt{2})\}\leqq 0.$$

$$\therefore\quad 2-\sqrt{2}\leqq\lambda\leqq 2+\sqrt{2}.$$

即 $2-\sqrt{2}$ 爲其極小值,$2+\sqrt{2}$ 爲其極大值.

例 3. 求周圍一定之矩形中,其面積最大者爲何形.

解 設矩形之周圍爲 $2p$,其二邊各爲 a, b,則

$$\frac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}.$$

然 $\quad a+b=p,$

$$\therefore\quad \left(\frac{p}{2}\right)^2\geqq ab.$$

可知矩形之面積 ab 不能較 $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ 爲大,故其極大值爲 $\frac{p^2}{4}$.

此時 $a=b$,故矩形爲邊長 $\frac{p}{2}$ 之正方形.

問 題 十 五

求下列各式之極限值.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^4+x^5}{2x^3-x^4+4x^5}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-4x^3+4x^5}{x^2+5x^3-x^4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3}{2x^2+x-1}$.

5. 使方程式 $x^2+\lambda x+(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ 之二根爲相異實數,試決定 λ 之值.

6. 證明方程式 $(a+b+c)x^2-2(bc+ca+ab)x+3abc=0$ 之根於 a, b, c 互相不等時,爲相異實數.

7. 證明 $b=k+\dfrac{ac}{k}$ 時,方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲有理數.

8. 證明方程式 $(a^2+p^2)x^2-2(aq+bp)x+b^2+q^2=0$ 之根爲有理數時,則其二根不等.

9. 證明如 b^2-ac 或 q^2-pr 爲負數時,則方程式

$$(b^2-ac)x^2+(ar+cp-2bq)x+(q^2-pr)=0$$

之根常爲實數.

10. 將方程式 $x^2-2x+\lambda=0$ 之根與 3 比較之.

11. 使方程式 $(\lambda-2)x^2+2\lambda x-5=0$ 之一根大於 1 而他根小於 1,試決定 λ 之值.

12. 於 $y=\dfrac{12x-19}{x^2-4x+5}$,試研究對於 x 之實數值之 y 值變化.

13. 求 $(x-a)(x-b)$ 之極小值.

14. 設 a 爲正數,求 $\dfrac{x^2+a^2}{x}$ 之極大值及極小值.

15. 設 a 爲正數,證明 $\dfrac{x^2}{x-a}$ 於 $x=2a$ 時爲極小.

16. 求面積一定之矩形中,其周圍最小者爲何形.

17. 證明立方體爲表面積一定之直六面體中體積之最大者.

18. 證明立方體爲體積一定之直六面體中表面積之最小者.

19. 求經過圓內一定點之弦爲其點所分之二部分上平方和之最大値及最小値.

20. 設直角三角形之周圍一定,求其夾成直角之二邊之和,以何時爲最大.

第十四章　比例及變數法

101. 比　於某數 a 爲他數 b 若干倍之意義下,其 a, b 間之關係,謂之 a 對於 b 之比.此關係一般皆用符號 a/b 或 $a:b$ 以表之,其 a 謂之比之前項,b 謂之比之後項.又以 b 除 a 所得之商 $\frac{a}{b}$,謂之比 $a:b$ 之值.

因比之前後項各能爲正負之整數,分數,或無理數,故比之值亦能爲正負之整數,分數,或無理數.例如 $3:2$ 之值爲有理數 $\frac{3}{2}$,而 $\sqrt{2}:3$ 之值爲無理數 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 是.

於二正數之比,其值較 1 爲大時,謂之優比;較 1 爲小時,謂之劣比.又交換比之兩項所得之比,謂之其原比之反比.或稱逆比.例如 $b:a$ 爲 $a:b$ 之反比是.對於反比 $b:a$ 而言,其原比 $a:b$, 常謂之正比.

以若干比前項之積爲前項,後項之積爲後項所得之比,謂之其諸比之複比.例如 $ac:bd$ 爲比 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比是.複比書寫時,一般皆如下式所示.

$$\begin{cases} a:b \\ c:d \end{cases}$$

由上述定義,二比以上之複比之值,等於其諸比值之積,

甚明.

又相同二比之複比,謂之其比之疊比.相同三比之複比,謂之其比之三疊比.餘準此.例如$a^2:b^2$爲 $a:b$ 之疊比,$a^3:b^3$爲$a:b$之三疊比是.

102. 比之性質

定理 1. 以不等於 0 之一數同乘比之兩項時,其值不變.

證明　因 $a:b$ 之值爲$\frac{a}{b}$,

而$ma:mb$之值爲$\frac{ma}{mb}$,即$\frac{a}{b}$,

故$ma:mb=a:b$.

又以一數m除某數時,結果等於以其逆數$\frac{1}{m}$乘之.故得下述之系.

系　以不等於 0 之一數同除比之兩項時,其值不變.

定理 2. 同加一正數於二正數之比之兩項,則優比之值減少,劣比之值增加.

證明　設 a, b, x 各爲正數,茲將比$a:b$與比$(a+x):(b+x)$之值研究之於下.

因
$$\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}.$$

設$a>b$時,則$a-b>0$;上式右邊爲正數,故$\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$.

設$a<b$時,則$a-b<0$;上式右邊爲負數,故$\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$.

下述定理,可與定理 2 之證明法,同樣以證明之.

定理 3. 由二正數之比之兩項各同減較其兩項中任何項爲小之正數時,則優比之值增加,劣比之值減少.

定理 1 及 2,亦可改述之如下.

定理 4. 同加一正數於二正數之比之兩項,則比之值漸近於 1.又由其兩項各同減較其兩項中任何項爲小之正數,則比之值漸遠於 1.

103. 比例 於 a, b, c, d 四數,設其比 $a:b$ 等於比 $c:d$ 時,則此四數,謂之互成比例.表二比相等之式,謂之比例式.或簡稱比例.

比例式一般皆如下式書寫之:

$$a:b=c:d,$$

或 $$a:b::c:d.$$

上式中之 a, d, 謂之比例式之外項; b, c, 謂之其內項.內項,外項,統稱之爲比例式之項.又 a, b, c, d 四項,有時亦各稱之爲比例式之第一項,第二項,第三項,第四項.

設諸數中第一數與第二數之比,第二數與第三數之比,第三數與第四數之比,如此逐次所作之比皆相等時,則此諸數,謂之成連比例.例如

$$a:b=b:c=c:d=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

卽 $$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

時,則 a, b, c, d,………等數成連比例是.

三數成連比例時,其第二數謂之第一及第三二數之比例中項,又第三數謂之第一及第二二數之第三比例項.

定理 1. 比例式外項之積,等於其內項之積.反之,設第一組二數之積等於第二組二數之積時,則以其一組二數爲內項,他組二數爲外項,可排成比例式.

證明　因　$a:b=c:d$

時,則
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

以 bd 各乘上列等式之兩邊時,即得

$$ad=bc$$

故也.

反之,設　$ad=bc$

時,以 bd 各除其兩邊,得

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

即　$a:b=c:d.$

同理,可證明 $a:c=b:d,\qquad c:a=d:b,$

$d:b=c:a,\qquad b:d=a:c,$

$d:c=b:a,\qquad c:d=a:b,$

$b:a=d:c.$

上列八比例式中任一式成立時,皆可由 $ad=bc$ 以證明其餘七式亦能成立.因得一定理於下.

定理 2. 某比例式成立時,則交換其內項或外項,比例式仍能成立.又二比相等時,其反比亦相等.

又 $a:b=c:d$ 成立時,由定理 1,亦可證明下列六式皆能成立.

$$a+b:b=c+d:d.\qquad a-b:b=c-d:d.$$

$a+b:a-b=c+d:c-d.$　　$ma:mb=nc:nd.$

$ma:nb=mc:nd.$　　$a^n:b^n=c^n:d^n.$

定理 3. 設三數成連比例時,則其比例中項之平方,等於第一第三二數之積.又第一數與第三數之比,等於第一數與第二數之疊比.

證明 因 $a:b=b:c$

時,則 $b^2=ac,$

及 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{a}{b}=\dfrac{a^2}{b^2}$

故也.

例 1. 設 $a:b=c:d$ 時,證明 $(ab+cd):(ab-cd)$

$=(a^2+c^2):(a^2-c^2).$

解 置 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ 時,則 $a=bk, c=dk.$ 因得

$$ab+cd=bkb+dkd=b^2k+d^2k=(b^2+d^2)k$$

$$ab-cd=b^2k-d^2k=(b^2-d^2)k.$$

$$a^2+c^2=b^2k^2+d^2k^2=(b^2+d^2)k^2.$$

$$a^2-c^2=b^2k^2-d^2k^2=(b^2-d^2)k^2.$$

$$\therefore\quad \frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{(b^2+d^2)k}{(b^2-d^2)k}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}.$$

又 $$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\frac{(b^2+d^2)k^2}{(b^2-d^2)k^2}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}.$$

$$\therefore\quad \frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}.$$

即 $(ab+cd):(ab-cd)=(a^2+c^2):(a^2-c^2).$

例 2. 設 $x:y:z=a:b:c$ 時,證明 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$,且

$$(x+y+z):x:y:z=(a+b+c):a:b:c.$$

解 $\because\quad x:y:z=a:b:c,$

$\therefore\quad x:y=a:b,\qquad y:z=b:c.$

因得 $x:a=y:b,\qquad y:b=z:c.$

隨之得 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b},\qquad \dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}.$

$\therefore\quad \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}.$

由上列等式,得

$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

隨之得

$$(x+y+z):x=(a+b+c):a.$$

$$(x+y+z):y=(a+b+c):b.$$

$$(x+y+z):z=(a+b+c):c.$$

由假定, $x:y:z=a:b:c.$

$\therefore\quad (x+y+z):x:y:z=(a+b+c):a:b:c.$

104. 變數法 設二變數 y, x 依同一比例互相變化時,則 y, x 謂之互成正變.或謂之成正比例.又設變數 y 與變數 x 之逆數成正變時,則 y, x 謂之互成反變.或謂之成反比例. y 與 x 成正變時,一般皆以符號 $y\propto x$ 表之;而成反變時,則以符號 $y\propto\dfrac{1}{x}$ 表之.

定理 1. 設 y 與 x 成正變,則 $y=kx$. 其 k 爲常數.

證明 由 $y\propto x$,設其 y 之任意二值爲 y', y'', 及與此對應之 x 二值各爲 x', x'',則

$$y':y''=x':x''.$$

隨之得 $$\frac{y'}{x'}=\frac{y''}{x''}.$$

卽 y 値及與其對應之 x 値之比爲一定.設此定値爲 k 時,則

$$\frac{y}{x}=k.$$

卽 $$y=kx.$$

定理 2. 設 y 與 x 成反變,則 $xy=k$. 其 k 爲常數.

證明 因 y 與 $\frac{1}{x}$ 成正變,卽 $y\propto\frac{1}{x}$. 故由定理 1,得

$$y=k\cdot\frac{1}{x}.$$

卽 $$y=\frac{k}{x}.$$

$$\therefore\quad xy=k.$$

〔注意〕 $xy=k$ 時,當亦易於推知 $x\propto\frac{1}{y}$. 故 y 與 x 成反變時,同時 x 亦與 y 成反變.隨之如 $y\propto\frac{1}{x}$ 時,其 x, y 互成反變.

定理 3. 設變數 z 與他二變數 x, y 相伴而變化,如 x 一定,其 z 與 y 成正變;如 y 一定,其 z 與 x 成正變時,則 z 與 x, y 之積成正變.

證明 設 x, y 値各爲 x', y' 時之 z 値爲 z',
又 x, y 値各爲 x', y'' 時之 z 値爲 z''',
及 x, y 値各爲 x'', y'' 時之 z 値爲 z'',

時,則由假定,其

$$\frac{z'}{z'''}=\frac{y'}{y''},\qquad \frac{z'''}{z''}=\frac{x'}{x''}.$$

將上列二等式邊邊相乘,得

$$\frac{z'}{z''}=\frac{x'y'}{x''y''}.$$

卽 $$\frac{z'}{x'y'}=\frac{z''}{x''y''}.$$

$\therefore\quad z\propto xy.$

例: 自由落體落下之距離,與其經過時間之平方成比例.設某自由落體2秒間之落下距離爲64呎,求6秒間落下之距離幾何.

解 設 t 秒間之落下距離爲 s 呎,則

$$s=kt^2.$$

然 $t=2$ 秒, $s=64.$

$\therefore\quad 64=k\times 2^2.$

隨之得 $k=16.$

$\therefore\quad s=16t^2.$

今 $t=6,$

$\therefore\quad s=16\times 6^2=576$(呎).

問題十六

1. $\dfrac{y+z}{a}=\dfrac{z+x}{b}=\dfrac{x+y}{c}$ 時,求 $x:y$ 及 $y:z$ 之值.

2. 設二數之和及差之比爲 $m:n$,求此二數之比.

3. $a:b=c:d$時,證明各比皆等於$\dfrac{\sqrt{la^2+mac+nc^2}}{\sqrt{lb^2+mbd+nd^2}}$（但各比之值爲正數）.

求下列各比例式中之x值.

4. $(6+x):(3+2x)=(10-x):(13-3x)$.

5. $(x^2-2x+3):(2x-3)=(x^2-3x+5):(2x-5)$.

6. 求下列各二數之比例中項.

(a) $(a+b)^2, (a-b)^2$; (b) $\dfrac{a}{b}, \dfrac{bc^2}{ad^2}$.

7. 求下列各二數之第三比例項.

(a) ax^2, xy; (b) $(1-x)^2, 1-x^2$.

8. 證明$a:b$之反比爲$\dfrac{1}{a}:\dfrac{1}{b}$.

9. $a:b=b:c$時,證明$(a^2+b^2):(ab+bc)=(ab+bc):(b^2+c^2)$.

10. $a:b=c:d$時,證明$(a^2+ac+c^2):(a^2-ac+c^2)$
$$=(b^2+bd+d^2):(b^2-bd+d^2)$$

11. $a:b=c:d$時,證明$\left(\dfrac{a}{p}+\dfrac{b}{q}\right):\left(\dfrac{c}{p}+\dfrac{d}{q}\right)=a:c$.

12. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$時,證明$(b-c)x+(c-a)y$
$$+(a-b)z=0.$$

13. $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}$時,證明
$$\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\sqrt{a_3b_3}+\cdots\cdots+\sqrt{a_nb_n}$$
$$=\sqrt{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)}.$$

14. $\dfrac{x}{b+c-a}=\dfrac{y}{c+a-b}=\dfrac{z}{a+b-c}$時,證明$\dfrac{a}{y+z}=\dfrac{b}{z+x}=\dfrac{c}{x+y}$.

15. $a^2=b^2+c^2$ 時,證明 $a+b+c:a+b-c=c+a-b:c-a+b$.

16. $a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$ 時,證明

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

17. 氣體體積與其絕對溫度成正比例,而與其壓力成反比例.今有壓力15氣壓,絕對溫度 280 度時之氣體 200 立方吋,求壓力變為18氣壓,同時溫度升至絕對溫度 300 度時,其體積應為若干立方吋.

18. 遊星繞太陽一周日數之平方,與其距太陽距離之立方成正比例.今知地球距太陽約 91000000 哩,水星距太陽約 35000000 哩,求水星繞太陽一周之日數.

19. 遊星作用於其衛星之引力,與遊星之質量成正比例,與其距離之平方成反比例.又衛星繞遊星一周時間之平方,與其距離成正比例,與引力成反比例.今知木星與其衛星之距離對於地球與其衛星距離之比為 35:31, 而木星之質量為地球質量之 343 倍,又月繞地球一周之時間為 27.32 日,求木星之衛星繞其一周所需日數.

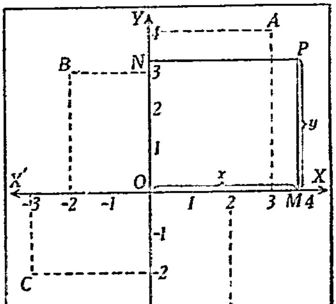
20. 火車通過某距離所需之時間,與其距離成正比例,與其速度成反比例.又其速度,與每哩所費炭量噸數之平方根成正比例,而與列車之列數成反比例.今連結18列車於半小時行25哩所費之炭量為10噸,求連結16列車於28分間行21哩,所費炭量為若干噸.

第十五章　圖解

105. 坐標　決定直線上一點之位置時,已如前第19節所述,於其直線上固定一原點 O 後;以某定長爲單位量得其點距原點之距離及其位於原點之某一方卽可.又決定平面上一點之位置時,則其方法如下.

於平面上固定直交於 O 點之二直線 XX', YY', 由其點 P 引直線 PM 垂直於 XX', PN 垂直於 YY'. 設 P 點之位置一定,則 PM, PN 之長亦隨之而定.反之,設 PM, PN 二線段之長度決定時,則 P 點之位置亦隨之決定.

上述二線段 PN 及 PM,謂之 P 點之坐標. PN 或與其等長之線段 OM,謂之橫坐標. PM 或與其等長之線段 ON,謂之縱坐標.橫坐標通常皆以 x 表之,縱坐標則皆以 y 表之.



第　一　圖

又 XX' 及 YY' 二線,謂之坐標軸.其 XX' 謂之橫坐標軸.或稱橫軸. YY' 謂之縱坐標軸或稱縱軸. O 點則謂之

原點.

一般,橫坐標以某單位向原點右方所量得之數値皆定爲正,向原點左方所量得之數値皆定爲負.又縱坐標以某單位向原點上方所量得之數値定爲正,向原點下方所量得之數値定爲負.

設某點之橫坐標爲a,縱坐標爲b,則該點通常皆以$x=a$, $y=b$表之.或簡書作(a,b).如圖一,其A, B, C, D各點,通常皆以$(3,4)$, $(-2,3)$, $(-3,-2)$, $(2,-3)$表之.又原點爲$(0,0)$.

因坐標之種類甚多,故上述坐標,特稱之爲直交坐標.

106. 函數之圖表法　於x之函數$y=f(x)$,如以種種之値代入於x,則隨之可求得其y之種種對應値,已如前述.今取某坐標軸,將變數x, y之種種對應値爲各點之坐標,而將其各點一一描寫於包含此坐標軸之平面上時,則其各點,卽行集合形成直線或曲線.此直線或曲線,謂之表其函數$y=f(x)$之圖,或稱圖表.

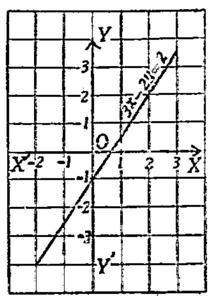
例 1.　以圖表$3x-2y=2$方程式.

解　將原方程式就y解之,得

$$y=\frac{3x-2}{2}.$$

故得x, y之種種對應値如下表所示.

x	······-2	-1	0	1	2	3········
y	······-4	$-2\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$3\frac{1}{2}$ ······



第二圖

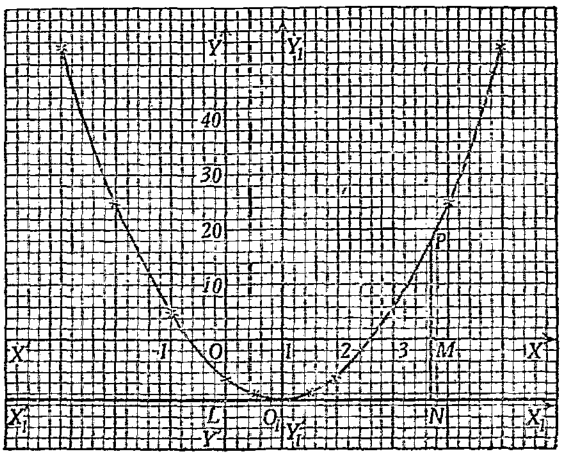
如描寫……, $(-2,-4)$, $(-1,-2\frac{1}{2})$, ……, 諸點於含坐標軸之平面上,連結之,即得一如圖二所示之直線.

例 2. 以圖表函數 $y=4x^2-8x-7$.

解 對應於x種種值之 y 值如下表所示.

x	……-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5………
y	…… 53	25	5	-7	-11	-7	5	25	53 ……

因 y 值較 x 值過大,紙面上不易描寫,故縱坐標之單位,僅取等於橫坐標 $\frac{1}{10}$ 之長度.依法將各點描寫後,連結之,即得一如圖三所示之曲線.此種曲線,謂之拋物線.

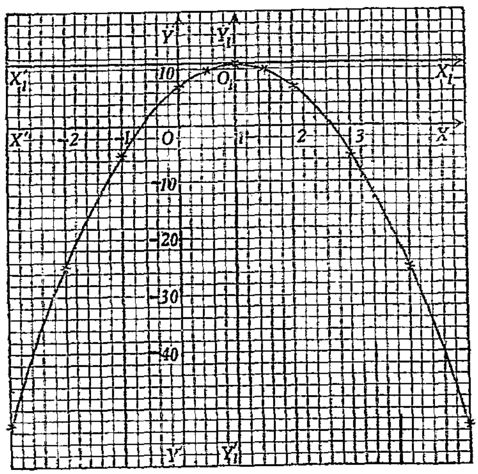


第 三 圖

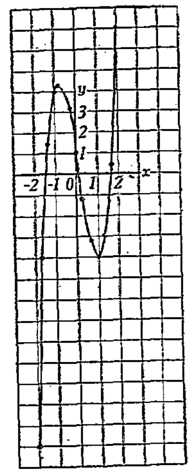
例 3. 以圖表函數 $y=7+8x-4x^2$.

解 此方程式之 y 值僅與例 2 方程式 y 之值異其符號,故由上例 x, y 之種種對應值,描寫$(-3,-53)$, $(-2,-25)$,

……,諸點而連結之,卽得一如圖四所示之拋物線.



第　四　圖



第　五　圖

例 4. 以圖表函數 $y=3x^3-x^2-7x+1$.

解 對應於 x 種種值之 y 值如下表所示.

x	…… -3	-2	-1	0	1	2	3 ………
y	……-68	-13	4	1	-4	7	52………

如再將 $x=-2$ 及 $x=2$ 間之 x, y 之對應值精細計算之,則如下表所示.

x	$-1\frac{1}{3}$	$-1\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{2}{3}$
y	-4	$\frac{4}{9}$	$4\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{9}$	$-1\frac{1}{3}$	$-3\frac{2}{9}$	-3	$\frac{4}{9}$

如將上列二表 x, y 之種種對應值取為點之坐標——

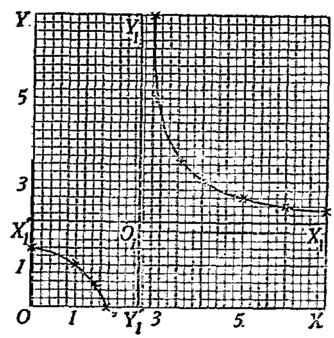
描寫之於平面上而連結之,則得一如圖五所示之曲線.

例 5. 求函數 $y=\dfrac{4x-7}{2x-5}$ 之圖表.

解 其 x, y 之種種對應值如下表所示.

x	·········0	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$	2.8	3	$3\frac{1}{2}$	4	5	6	7······∞
y	······1.4	1	$\frac{1}{2}$	0	$\pm\infty$	7	5	$3\frac{1}{2}$	3	2.6	2.4	2.33···0

故取上表所列 x, y 之種種對應值爲各點之坐標一一描寫於平面上而連結之,則得如圖六所示之一對曲線.此種曲線,謂之雙曲線.



第 六 圖

例 6. 以圖表函數

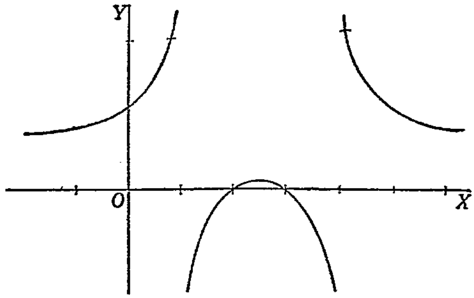
$$y=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-4)}.$$

解 其 x, y 之種種對應值如下表所示.

x	0	.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
y	1.5	2.14	$\pm\infty$	$-.6$	0	.11	0	$-.6$	$\mp\infty$

5	6	∞	$-.5$	-1	-2	$-\infty$
1.5	1.2	1	1.3	1.2	1.11	1

表此函數之曲線交x軸於$x=2$及$x=3$處.又當x經過1時,其y之值由$+\infty$忽變爲$-\infty$;x經過4時其y之值忽由$-\infty$變爲$+\infty$.



第七圖

故其曲線如圖七所示.

107. 極大極小之圖的解法 於第三圖,設有一點由直線Y_1Y_1'之左邊沿曲線向直線Y_1Y_1'之右邊移動時,則其點之縱坐標,隨其點距O_1點愈近而愈行減少;待一經越過O_1點後,則復行漸次增加.又於第四圖,設有一點由直線Y_1Y_1'之左邊沿曲線向直線Y_1Y_1'之右邊移動時,則其點之縱坐標隨其點距O_1點愈近而愈行增加.待一經越過O_1點後,則復行漸次減少.如此位於曲線上之一點,當動點越過其點時,不論其點的縱坐標由減而增,或由增而減,皆謂之該曲線之轉換點.轉換點之縱坐標值,謂之曲線之轉換值.或稱函數之轉換值.

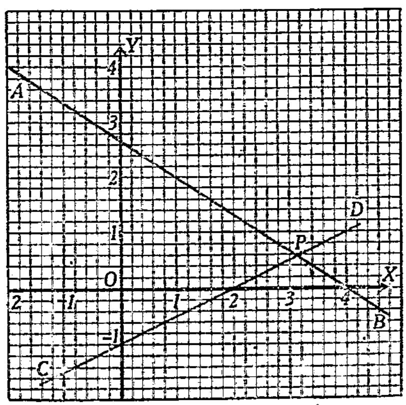
於轉換點之近旁,其縱坐標係由減而增者,則其轉換點之縱坐標,謂之爲該函數之極小值.其縱坐標係由增而減者,則其轉換點之縱坐標,謂之爲該函數之極大值.例如於第三圖,其函數之極小值爲於$x=1$時,$y=-11$.又於第四圖,

其函數之極大值為於 $x=1$ 時, $y=11$. 及圖五其函數之極大值為於 $x=-\dfrac{2}{3}$ 時, $y=4\dfrac{1}{3}$; 極小值為於 $x=1$ 時, $y=-4$ 是.

所謂極大值極小值云者,係指曲線上某點之縱坐標值較位於其點近傍曲線上任何點之縱坐標值為大或小之謂也.故極大值不必為最大值,極小值不必為最小值.如於一函數有數個極大值及極小值時,則其極大值不必定大於其極小值.此實與前第 100 節所討論者相一致.

108. 方程式實根之圖的解法 具有實係數之方程式 $f(x)=0$ 之實根,不外表函數 $y=f(x)$ 之直線或曲線截於橫軸上之點之橫坐標.故將表函數 $f(x)$ 之直線或曲線繪成後,則其方程式 $f(x)=0$ 之實根,可於圖上求得其近似值.

又方程式 $f_1(x)=f_2(x)$ 之實根,不外表函數 $y=f_1(x)$ 及 $y=f_2(x)$ 之直線或曲線相交點之橫坐標.故將表函數 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 之直線或曲線繪成後,則方程式 $f_1(x)=f_2(x)$ 之實根,亦可於圖上求得其近似值.



第　八　圖

例 1. 求下列聯立方程式之根.

$$2x+3y=8 \cdots\cdots(1)$$

$$x-2y=2 \cdots\cdots(2)$$

解 如前法繪成表方程式(1)與(2)之直線 AB 及 CD 時,則 AB 上任意點之坐標,皆能滿

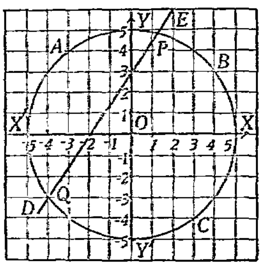
足方程式(1),但僅有一點能滿足方程式(2),即 AB 與 CD 之交點 P 是.由 P 點之坐標,故得

$$x=3.15,\ y=0.57.$$

例 2. 求下列聯立方程式之根.

$$x^2+y^2=25 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$3x-2y=-6 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



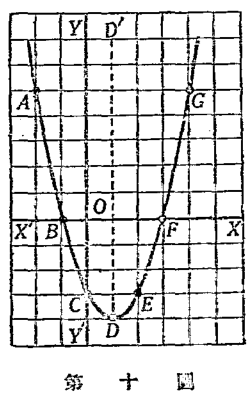
第九圖

解 如前法繪成方程式(1)與(2)之曲線 ABC 圓及直線 DE 後,求得其交點 P 與 Q.由 P 與 Q 之坐標,求得其二組根為

$$x=1\frac{1}{3},\quad y=4\frac{4}{5};$$

$$x=-4,\quad y=-3.$$

例 3. 求方程式 $x^2-2x-3=0$ 之根.



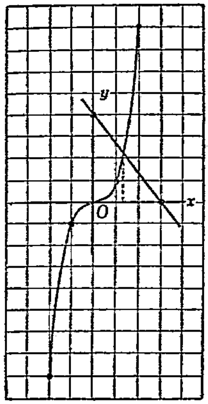
第十圖

解 繪成表函數 $f(x)=x^2-2x-3$ 之曲線 ADG 後,求得其與橫軸之交點 B 及 F.觀圖,B 及 F 之橫坐標為 $x=-1$ 及 $x=3$,故得方程式之二根為 -1 及 3.

例 4. 求方程式 $3x^3+4x-12=0$ 之根.

解 將方程式改書之使成為

$$x^3=-\frac{4}{3}(x-3).$$



第十一圖

繪成表函數x^3及$-\frac{4}{3}(x-3)$之曲線及直線而求其交點之橫坐標時,得

$$x \doteqdot 1.3.$$

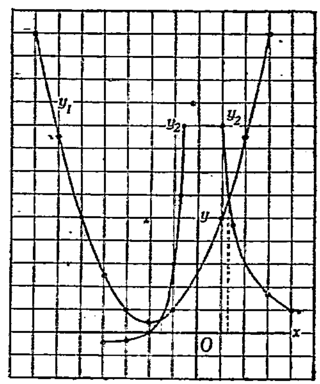
上式中之≑符號表其式兩邊近似的相等.

因交點僅只一個,故實根亦僅只一個.

例 5. 求方程式

$$x^4+4x^3+5x^2-6x-12=0$$

之實根.



第十二圖

解 將方程式改書之使成爲

$$\frac{1}{2}(x^2+4x+5)=\frac{3(x+2)}{x^2}.$$

繪成表函數$\frac{1}{2}(x^2+4x+5)$及$\frac{3(x+2)}{x^2}$之曲線而求其交點之橫坐標時,得$x \doteqdot 1.3$及$x \doteqdot -1.5$.

因交點僅只二個,故實根亦僅只二個.

109. 不定方程式之圖的解法 如前所述,凡關於直交坐標軸含二變數之方程式$f(x,y)=0$所表者,爲一直線或曲線.又x, y之一組值如滿足其方程式時,則以此一組值爲坐標之點(x, y)始能位於其直線或曲線上.故解不定

方程式$f(x,y)=0$而求其整根云者,不外求其所表直線或曲線之坐標爲整數之點,甚明.

今各與二坐標軸平行,引

$$x=0,\quad x=\pm1,\quad x=\pm2,\cdots\cdots$$
$$y=0,\quad y=\pm1,\quad y=\pm2,\cdots\cdots$$

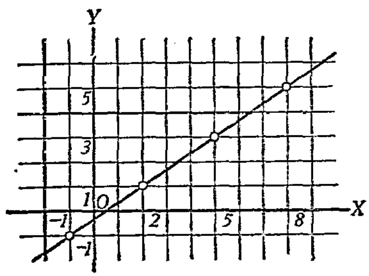
等直線,分其平面成棋盤形時;則此諸直線之交點,皆爲以整數爲坐標之點.此種交點,特稱之爲格子點.

隨之可知凡求不定方程式$f(x,y)=0$之整根問題,如由幾何學上觀之,不外求其方程式所表直線或曲線上之格子點坐標數甚明.

例 1. 求$2x-3y=1$之各整根.

解 由不定方程式之解法,可求得此不定方程式之一般根爲

$$\begin{aligned}x&=2+3t,\\ y&=1+2t.\end{aligned}\quad(t\text{爲整數})$$



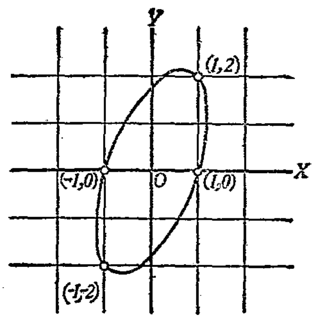
第十三圖

如以$-\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$等值代入於上列二等式之$t$時,則$x,y$之各組值,顯與$2x-3y=1$所表直線上之各格子點坐標相符合.

又二次不定方程式之解法,本書雖未論及,但如用圖解之,則甚易求得其整根,玆舉例說明之於下.

例 2. 求 $3x^2-2xy+y^2=3$ 之各整根.

解 由圖表法,求得表所與方程式之曲線(橢圓)如



第　十　四　圖

圖所示,此橢圓上之四格子點坐標各爲$(1,0)$,$(-1,0)$,$(1,2)$,$(-1,-2)$,故所求不定方程式之四組整根如下.

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=0\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=-1\\y=0\end{matrix}\right\},$$

$$\left.\begin{matrix}x=1\\y=2\end{matrix}\right\},\quad\left.\begin{matrix}x=-1\\y=-2\end{matrix}\right\}.$$

110. 不等式之圖的解法　不等式亦能由圖的方法以解之,茲舉例說明之於下.

例 1.　解$\sqrt{3-x}>x-2$不等式.

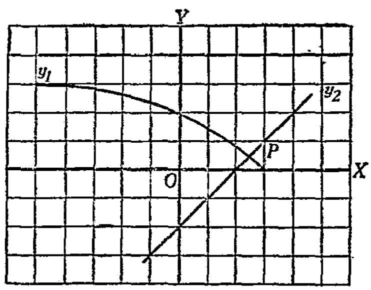
解　此不等式已於前第86節中解之,其x之範圍爲

$$x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

茲引用圖表法解之如下.

置　$y_1=\sqrt{3-x}$,

$y_2=x-2$,



第　十　五　圖

而求此二函數之圖表如圖所示.設其交點P之x坐標爲x_1,則如圖所示,對於較x_1爲小之x值,其$y_1>y_2$,所與不等式能成立;對於不較x_1爲小之x值,所與不等式不能成立.故求得P點之x坐標時,卽可.

但 P 點之 x 坐標 x_1,可解方程式

$$y_1=y_2 \quad \text{即} \quad \sqrt{3-x}=x-2$$

以求得之.解此無理方程式時,得

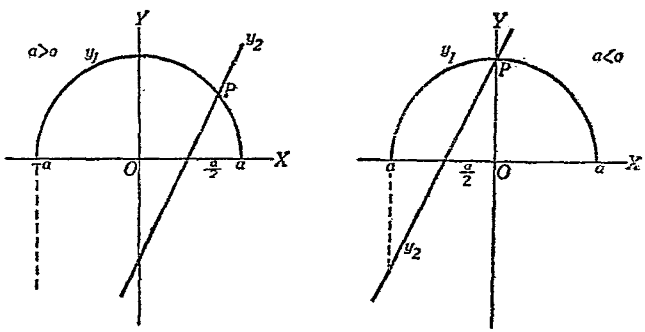
$$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

故得所與不等式之解爲

$$x<\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

例 2. 解 $\sqrt{a^2-x^2}>2x-a$ 不等式.

解 $a=0$ 時,所與不等式不能成立,甚明.故僅須於 $a\neq 0$ 之條件下研究之即可.



第 十 六 圖

置 $$y_1=\sqrt{a^2-x^2},$$
$$y_2=2x-a$$

時,則 y_1 之圖表,爲以原點爲圓心 $|a|$ 爲半徑之半圓.(位於 x 軸之上方) y_2 之圖表,隨 a 爲正或負,而爲左方或右方

圖中之直線.

設 y_1 及 y_2 圖表之交點爲 P, P 點之 x 坐標爲 x_1 時,則對於較 x_1 爲小而不較 $-|a|$ 爲小之 x 值,卽

$$-|a|\leqq x<x_1$$

之 x 值,其 $y_1>y_2$, 所與不等式能成立;對於其外之 x 值,所與不等式不能成立.故求得 P 點之 x 坐標,卽可.

P 點之 x 坐標 x_1,與例 1 相同,可解方程式 $y_1=y_2$ 卽

$$\sqrt{a^2-x^2}=2x-a$$

以求得之.解此無理方程式時,得

$$a>0\text{ 時},\quad x_1=\frac{4}{5}a;$$

$$a<0\text{ 時},\quad x_1=0.$$

故得所與不等式之解如下.

$$a>0\text{ 時},\quad -a\leqq x<\frac{4}{5}a;$$

$$a<0\text{ 時},\quad a\leqq x<0.$$

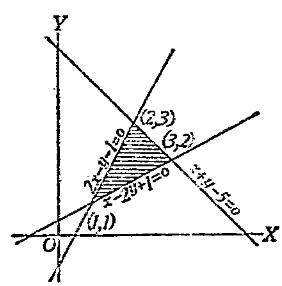
($a=0$ 時,不能.)

例 3. 解下列聯立不等式.

$$x-2y+1<0$$
$$x+y-5<0$$
$$2x-y-1>0$$

解 如圖所示,各求

$$x-2y+1=0,$$
$$x+y-5=0,$$



第十七圖

$$2x-y-1=0,$$

之圖表時,則不等式 $x+y-5<0$ 之圖表,可由位於直線 $x+y-5=0$ 原點之側之點(x,y)各組值以滿足之.因設 $x=0$, $y=0$ 時,則 $x+y-5=-5<0$ 故也.

同理,可知 $x-2y+1<0$ 及 $2x-y-1>0$ 二不等式之圖表,可各由位於二直線$x-2y+1=0$, $2x-y-1=0$ 原點反對之側之點(x, y)各組值以滿足之.隨之可知所與不等式之圖表,能由 $x-2y+1=0$, $x+y-5=0$, $2x-y-1=0$ 三直線所圍成三角形內之點(x, y)各組值以滿足之.

問 題 十 七

1. 描寫下列諸點$(3,2)$,$(4,-1)$,$(-3,2)$,$(-3,-3)$,$(0,0)$,$(0,-4)$.

2. 求作三頂點爲$(4,1)$,$(-1,3)$ 及 $(1,-2)$ 三點之三角形.

3. 描寫$(-2,1)$ 及 $(2,-3)$ 二點而測其距離.

4. 凡縱坐標皆爲 4 之點位於何處.又橫坐標皆爲-3之點位於何處.

以圖表下列諸函數.

5. (*a*) $3x+5$. (*b*) $2-3x$.
   (*c*) $-3x$. (*d*) $\frac{3}{2}x$.

6. (*a*) x^2. (*b*) $\frac{1}{4}x^2$. (*c*) $3x^2$

7. (*a*) x^2-1. (*b*) x^2+x. (*c*) x^2-2x.

8. (a) x^2-4x+4. (b) x^2-x-5. (c) x^2-3x-8.

9. (a) $6+x-x^2$. (b) $2-x-x^2$. (c) $10-3x-x^2$.

10. (a) $\dfrac{x-3}{x-4}$. (b) $\dfrac{x-4}{x-3}$.

(c) $\dfrac{10x-1}{x}$ (d) $\dfrac{10x+1}{x}$.

11. (a) $\dfrac{x^2-1}{x^2-4}$. (b) $\dfrac{(x-3)(x-6)}{(x-2)(x-4)}$.

(c) $\dfrac{(x-3)(x-5)}{(x-1)(x-7)}$. (d) $\dfrac{(x-4)(x-7)}{(x-1)(x-10)}$.

12. (a) x^3+2x-5. (b) $x^3+2x-18$. (c) $x^3-12x-1$.

繪圖求下列諸函數之極大值或極小值.

13. (a) x^2+6x+1. (b) x^2-2x+5. (c) $2x^2-8x+17$.

14. (a) $1-6x-x^2$ (b) $3+2x-x^2$. (c) $-4+4x-x^2$.

繪圖求下列諸方程式之實根.

15. (a) $x^2-5x+6=0$, (b) $x^2+5x+6=0$.

(c) $15x^2-7x-2=0$.

16 (a) $x^3-6x^2-8x+40=0$.

(b) $x^3+6x^2-x-20=0$.

17. (a) $x^4-12x^2+12x+4=0$.

(b) $x^4-10x^2-4x+8=0$.

18. (a) $x^4+6x^3+10x^2-12x-30=0$.

(b) $x^4-4x^3+7x^2+7x-28=0$.

繪圖求下列諸方程式之整根.

19. $7x-13y=15$.

20. $9x-11y=4$.

21. $7x+9y=100$.

22. $x^2+xy+y^2=13$.

23. $x^2-10xy+9y^2=33$.

繪圖解下列諸聯立不等式.

24. $y-x-2<0,\quad x-3<0,\quad y+1>0$.

25. $x+y+3>0,\quad y-2x-4<0,\quad y+2x+4>0$.

26. $x^2+y^2-1<0,\quad y^2-4x<0$.

第十六章　級數

111. 等差級數　凡遵守某種一定之規則,一定順序,排列而成之數列,謂之級數.其數列中之各數,謂之此級數之項.

級數之各項,與其相鄰前項之差皆相等者,謂之等差級數.或稱爲算術級數.此相等之差,謂之公差.其最初之項,謂之初項.最後之項,謂之末項.

設等差級數之初項爲 a, 公差爲 d, 則其各項爲

$$a,\quad a+d,\quad a+2d,\quad a+3d, \cdots\cdots$$

因等差級數各項中公差 d 之係數,較其項之號數少 1,故一般,等差級數之第 n 項,爲 $a+(n-1)d$. 設此級數之項數爲 n, 末項爲 l, 則

$$l=a+(n-1)d, \quad \cdots\cdots(1)$$

甚明.故如等差級數之初項 a, 末項 l 及項數 n 已定時,則其公差 d 可由下式求出之.

$$d=\frac{l-a}{n-1}. \quad \cdots\cdots(2)$$

等差級數中任意二項如已知之,則其初項及公差,亦易於求出.設其第 h 項及第 k 項之值各爲 α, β 時,則其初項 a 與公差 d 間,有下列二等式之關係.

$$a+(h-1)d=\alpha.$$
$$a+(k-1)d=\beta.$$

此即以 a 及 d 爲未知數之聯立方程式也.解此聯立方程式時,即可求得其 a 及 d 之值.

設等差級數之初項爲 a,公差爲 d,末項爲 l,其 n 項之和爲 S 時,則

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(l-d)+l.$$

又 $$S=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(a+d)+a.$$

將上列二式邊邊相加,得

$$2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots+(a+l)+(a+l)$$
$$=n(a+l).$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}n(a+l).\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又因 $l=a+(n-1)d$,

以上式 l 之值代入於(3)式時,得

$$S=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

級數之和,亦常有用符號 Σ 以表之者.例如等差級數

$$a,\ a+d,\ a+2d,\cdots\cdots,a+nd,$$

可以

$$\sum_{k=1}^{n}\{a+(k-1)d\}$$

表之是.即 $\sum_{k=1}^{n}\{a+(k-1)d\}$ 表於 $a+(k-1)d$ 式中順次置 $k=1,2,3,\cdots\cdots,n$ 所得諸值之和也.

三數成等差級數時,則其中間一數,謂之他二數之等差

中項.或謂之相加平均.例如 a, b, c 三數成等差級數時,則 b 爲 a 及 c 之等差中項是.因

$$b-a=c-b,$$

$$\therefore \quad b=\frac{a+c}{2}.$$

成等差級數之諸數,其位於初項與末項間之各數,謂之其二數間之等差中項.吾人於所與二數間,得任意插入 m 個等差中項.即設 a, b 爲所與二數時,則此問題歸結於作成一初項爲 a,末項爲 b,項數爲 $m+2$ 之等差級數.設其公差爲 d,則

$$b=a+(m+1)d.$$

$$\therefore \quad d=\frac{b-a}{m+1}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

隨之得所求之等差中項如下.

$$a+\frac{b-a}{m+1}, \ a+2\frac{b-a}{m+1}, \ a+3\frac{b-a}{m+1}, \ \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$a+m\frac{b-a}{m+1}.$$

例 1. 求第三項爲 7 第五項爲 13 之等差級數之初項及公差.

解 設此級數之初項爲 a,公差爲 d,則

$$a+2d=7, \quad a+4d=13.$$

解之,得 $\quad a=1, \quad d=3.$

例 2. 求級數 $1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots\cdots, n-1, n$ 之和.

解 此級數之初項爲 1,項數爲 n,末項爲 n,故由公式(3),得

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$$

例 3. 求 4, 7, 10, 13,…………級數前十二項之和.

解 因此級數相連二項之差皆為 3,故此級數為等差級數,其公差為 3.設所求之和為 S,則由公式(4),得

$$S=\frac{1}{2}\times 12\{2\times 4+(12-1)\times 3\}=246.$$

例 4. 求於 3 與 -7 二數間,插入四個等差中項.

解 因此時 $a=3, b=-7, m=4$,故由公式(5),得

$$d=\frac{-7-3}{4+1}=-2.$$

隨之得所求之等差中項如下.

$$1,\quad -1,\quad -3,\quad -5.$$

112. 等比級數 級數之各項與其相鄰前項之比皆相等者,謂之<u>等比級數</u>.或稱為<u>幾何級數</u>.此相等之比,謂之<u>公比</u>.

設等比級數之初項為 a,公比為 r,則其各項為

$$a,\quad ar,\quad ar^2,\quad ar^3,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因等比級數各項中公比 r 之冪指數,較其項之號數少 1.故一般,等比級數之第 n 項為 ar^{n-1}.設此級數之項數為 n,末項為 l,則

$$l=ar^{n-1},\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

甚明.故如等比級數之初項 a,末項 l,及項數 n 已定時,則其公比 r,可由下式求出之.

$$r^{n-1}=\frac{l}{a}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由上式,得 r 爲 $\frac{l}{a}$ 之 $n-1$ 次根.

等比級數中任意二項如已知之,則其初項及公比,亦易於求出.設其第 h 項及第 k 項之值各爲 α, β 時,則其初項 a 與公比 r 間,有下列二等式之關係.

$$ar^{h-1}=\alpha.$$

$$ar^{k-1}=\beta.$$

此卽以 a 及 r 爲未知數之聯立方程式也.解此聯立方程式時,卽可求得其 a 及 r 之值.

設等比級數之初項爲 a,公比爲 r,其 n 項之和爲 S 時,則

$$S=a+ar+ar^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}ar^k.$$

因得 $$Sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+ar^n.$$

將上列二式邊邊相減,得

$$S-Sr=a-ar^n.$$

卽 $$S(1-r)=a(1-r^n).$$

設 $r \neq 1$ 時,則

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

或 $$S=a\frac{r^n-1}{r-1}.$$

設其末項爲 l,則因

$$l=ar^{n-1},$$

$$\therefore \quad S=\frac{a-lr}{1-r}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

〔**注意**〕 $r=1$ 時, $S=na$.

三數成等比級數時,則其中間一數,謂之他二數之等比中項.或謂之相乘平均.例如 a, b, c 三數成等比級數時,則 b 爲 a 及 c 之等比中項是.因

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b},$$

隨之 $$b^2=ac.$$

$$\therefore\quad b=\pm\sqrt{ac}.$$

成等比級數之諸數,其位於初項與末項間之各數,謂之其二數間之等比中項.吾人於所與二數間,得任意插入 m 個等比中項.即設 a, b 爲所與二數時,則此問題歸結於作成一初項爲 a,末項爲 b,項數爲 $m+2$ 之等比級數.設其公比爲 r,則

$$b=ar^{m+1}.$$

因得 $$r^{m+1}=\frac{b}{a}.$$

$$\therefore\quad r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

隨之得所求之等比中項如下.

$$a\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}},\quad a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^2,\cdots\cdots\cdots\cdots,\ a\left(\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}\right)^m.$$

若 a, b 爲同符號之數,而 $m+1$ 爲偶數時,則 r 有正負之二值.隨之所求之等比中項,亦有二種.

設等比級數之初項爲 a,公比爲 r,項數爲 n,其和爲 S 時,則

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

於上列公式,如 r 之絕對值較 1 爲小,則隨 n 之無限增加,其 r^n 之絕對值亦無限減少,終至接近於 0. 隨之 S 亦無限的接近於 $\frac{a}{1-r}$.換言之,即 n 增加至成爲無限大時,則 S 之極限值爲 $\frac{a}{1-r}$.

一般,如等比級數之項數成爲無限大時,則其等比級數,謂之<u>無限等比級數</u>.無限等比級數公比 r 之絕對值如較 1 爲小時,則其和有一定之極限值.即設其初項爲 a 時,則其極限值爲 $\frac{a}{1-r}$.

和之極限值,有時亦簡稱之爲<u>和</u>.

例 1. 某等比級數之第四項爲 189, 第六項爲 1701, 求其初項及公比.

解 設等比級數之初項爲 a, 公比爲 r 時,則

$$ar^3=189, \quad ar^5=1701.$$

解之,得

$$\left.\begin{array}{l}a=7\\r=3\end{array}\right\}, \quad \text{或} \quad \left.\begin{array}{l}a=-7\\r=-3\end{array}\right\}.$$

例 2. 求 8, 12, 18,……………級數前八項之和

解 因此級數相連二項之比爲 $\frac{3}{2}$,故此級數爲等比級數.其公比爲 $\frac{3}{2}$.設所求之和爲 S, 則由公式(3),得

$$S=a\frac{1-r^n}{1-r}=8\times\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^8}{1-\frac{3}{2}}=8\times\frac{1-\frac{6561}{256}}{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{6305}{16}=394\frac{1}{16}.$$

例 3　求於2, 162二數間插入 3 個等比中項.

解　因此時$a=2$, $b=162$, $m=3$,故由公式(5),得

$$r=\sqrt[4]{\frac{162}{2}}=\sqrt[4]{81}.$$

$$\therefore\quad r=3,\ \text{或}\ -3.$$

隨之得所求之等比中項二種如下.

$$6,\ 18,\ 54.$$

$$\text{或}\quad -6,\ 18,\ -54.$$

例 4.　求無限等比級數 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\cdots\cdots$之和.

解　因此等比級數之初項為 1,公比為$\frac{1}{2}$,故得

$$S=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

循環小數,亦可視為一無限等比級數之和,茲舉例說明之於下.

例 5.　化$0.\dot{3}\dot{6}$為分數.

解　因$0.36=\frac{36}{100}$, $0.0036=\frac{36}{100}\times\frac{1}{100}$, $0.000036=\frac{36}{100}\times\left(\frac{1}{100}\right)^2$, ……,故$0.\dot{3}\dot{6}$不外為初項為$\frac{36}{100}$,公比為$\frac{1}{100}$之無限等比級數之和.求此無限等比級數之和時,得

$$\frac{\frac{36}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{36}{100-1}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}.$$

$$\therefore\quad 0.\dot{3}\dot{6}=\frac{36}{99}=\frac{4}{11}.$$

例 6. 化 $2.5\dot{3}1\dot{2}$ 為分數.

解　因 $2.5\dot{3}1\dot{2}=(25+0.\dot{3}1\dot{2})\div 10$,

故如化之使成分數時,則其計算如下.

$$2.5\dot{3}1\dot{2}=\frac{25+\frac{312}{1000-1}}{10}=\frac{25\times(1000-1)+312}{(1000-1)\times 10}$$

$$=\frac{(25\times 1000)+312-25}{(1000-1)\times 10}=\frac{25312-25}{9990}.$$

觀上舉二例,可知算術中化循環小數為分數之方法所由來也.

113. **調和級數**　於級數中任意鄰接之三項,其第一項與第二項之差,及第二項與第三項之差之比,等於其第一項與第三項之比時,則此級數,謂之<u>調和級數</u>.例如 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 成調和級數時,則

$$a-b:b-c=a:c,$$
$$b-c:c-d=b:d,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

等是.

又設 a, b, c 三數成調和級數時,則由上述定義,

$$a-b:b-c=a:c.$$
$$\therefore\quad c(a-b)=a(b-c).$$

於上式,如以 abc 除其兩邊時,得

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

可知其逆數$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$成等差級數.卽調和級數各項之逆數,必成等差級數.

因 a, b, c 三數成調和級數時,則$\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$成等差級數,

故 $$\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

$$\therefore \quad b=\frac{2ac}{a+c}.$$

可知二數之調和中項,等於以其二數之和除其二數之積之二倍所得之商.

設二數 a, b 之等差中項,等比中項,調和中項,各爲 A, G, H 時,則

$$A=\frac{1}{2}(a+b), \quad G=\sqrt{ab}, \quad H=\frac{2ab}{a+b}.$$

$$\therefore \quad AH=G^2.$$

由上式,可知二數之等比中項,亦爲其等差中項與調和中項之等比中項.

定理 二不等數之等差中項,較其等比中項爲大.又等比中項,復較其調和中項爲大.

證明 設 a, b 爲二不等數時,則由前第89節之定理,其

$$\frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}.$$

卽 $A>G$.

旣 $A>G$,

而 $A\cdot H=G^2$,

$$\therefore \quad \frac{A\cdot H}{A}<\frac{G^2}{G}.$$

$$\therefore \quad H<G.$$

故二不等數之三種級數中項之大小順序如下.

$$A>G>H.$$

於任意二數 a, b 間,亦可插入 m 個調和中項.即於 $\frac{1}{a}$ 及 $\frac{1}{b}$ 間插入 m 個等差中項時,則其諸等差中項如下.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{m+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),\quad \frac{1}{a}+\frac{2}{m+1}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因等差級數各項之逆數成調和級數,故得所求之 m 個調和中項如下.

$$\frac{(m+1)ab}{mb+a},\ \frac{(m+1)ab}{(m-1)b+2a},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{(m+1)ab}{b+ma}.$$

調和級數若干項之和之公式,無法以求出之.

例 1. 設某調和級數之第二項為 2,第四項為 6,求其級數.

解 因與調和級數對應之等差級數第二項為 $\frac{1}{2}$,第四項為 $\frac{1}{6}$,設此等差級數之首項為 a,公差為 d,則

$$a+d=\frac{1}{2},$$

$$a+3d=\frac{1}{6}.$$

$$\therefore \quad a=\frac{2}{3},\ d=-\frac{1}{6}.$$

故與調和級數對應之等差級數為

$$\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\cdots\cdots\cdots\cdots$$

隨之得所求之調和級數為

$$\frac{3}{2},\ 2,\ 3,\ 6,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例 2. 設 a, b, c 三數成等比級數時,證明 $a+b$, $2b$ 及 $b+c$ 成調和級數.

解 設 $a+b, 2b$ 及 $b+c$ 成調和級數,則必

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{2b}.$$

由上式,得

$$b(b+c)+b(a+b)=(a+b)(b+c).$$

即 $$b^2+bc+ab+b^2=ab+b^2+ac+bc.$$

即 $$b^2=ac.$$

即須 a, b, c 三數成等比級數也.今 a, b, c 三數既成等比級數,故 $a+b, 2b, b+c$ 三數,亦成調和級數.

114. 自然數之平方,立方和

I $\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2=\sum_{r=1}^{n} r^2}$

置 $$S_1=1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\sum_{r=1}^{n} r,$$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2=\sum_{r=1}^{n} r^2$$

時,則由第 111 節之例 2,其

$$S_1=\frac{1}{2}n(n+1).$$

又因恆等式 $(x+1)^3-x^3\equiv 3x^2+3x+1$ 不拘 x 之值如何,皆能成立.故順次置 $n, n-1, n-2, \cdots\cdots, 3, 2, 1$ 等以代 x 時,得

$$(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1.$$

$$n^3-(n-1)^3=3(n-1)^2+3(n-1)+1.$$
$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-2)^2+3(n-2)+1.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3^3-2^3=3\cdot2^2+3\cdot2+1.$$
$$2^3-1^3=3\cdot1^3+3\cdot1+1.$$

將上列 n 個等式邊邊相加,得

$$(n+1)^3-1=3\sum_{r=1}^{n}r^2+3\sum_{r=1}^{n}r+n=3S_2+3S_1+n.$$

卽 $$3S_2=(n+1)^3-3S_1-(n+1).$$

$$\therefore\quad S_2=\frac{1}{3}\left\{(n+1)^3-3\cdot\frac{n(n+1)}{2}-(n+1)\right\}$$
$$=\frac{n+1}{3}\left\{(n+1)^2-\frac{3n}{2}-1\right\}$$
$$=\frac{n+1}{6}n(2n+1).$$

$$\therefore\quad \sum_{r=1}^{n}r^2=S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

II $\quad 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\sum_{r=1}^{n}r^3$

置 $$S_1=1+2+3+\cdots\cdots+n=\sum_{r=1}^{n}r.$$
$$S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\sum_{r=1}^{n}r^2$$
$$S_3=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\sum_{r=1}^{n}r^3.$$

時,則由例 1,其

$$S_1=\frac{1}{2}n(n+1),$$
$$S_2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

因恆等式

$$(x+1)^4-x^4=4x^3+6x^2+4x+1$$

不拘 x 之值如何,皆能成立.故順次置 $n, n-1, n-2, \cdots\cdots,$ 3, 2, 1 等以代 x 時,得

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1.$$
$$n^4-(n-1)^4=4(n-1)^3+6(n-1)^2+4(n-1)+1.$$
$$(n-1)^4-(n-2)^4=4(n-2)^3+6(n-2)^2+4(n-2)+1.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1.$$
$$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1.$$

將上列 n 個等式邊邊相加,得

$$(n+1)^4-1=4\sum_{r=1}^{n}r^3+6\sum_{1=r}^{n}r^2+4\sum_{r=1}^{n}r+n$$
$$=4S_3+6S_2+4S_1+n.$$

即 $4S_3=(n+1)^4-6S_2-4S_1-(n+1).$

$$\therefore\quad S_3=\frac{1}{4}\{(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)\}$$
$$=\frac{n+1}{4}\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$
$$=\frac{n+1}{4}\{(n+1)^3-(n+1)(2n+1)\}$$
$$=\frac{(n+1)^2}{4}\{(n+1)^2-(2n+1)\}.$$
$$\therefore\quad \sum_{r=1}^{n}r^3=S_3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

但 $1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1).$

$$\therefore \quad 1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots\cdots+n)^2.$$

例 1. 求$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+20^2=\sum\limits_{r=1}^{20} r^2$之值.

解 由公式,得

$$S=\frac{1}{6}\times 20\times(20+1)\times(20\times 2+1)$$

$$=\frac{1}{6}\times 20\times 21\times 41=10\times 7\times 41$$

$$=2870.$$

例 2. 求$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+15^3=\sum\limits_{r=1}^{15} r^3$之值.

解 由公式,得

$$S=\frac{1}{4}\times 15^2\times(15+1)^2$$

$$=\frac{1}{4}\times 15^2\times 16^2$$

$$=14400.$$

例 3. 求$2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 8+\cdots\cdots+2n\,(2n+2)=2\sum\limits_{r=1}^{n}(r+1)$.

解
$$S=2\cdot 4+4\cdot 6+6\cdot 8+\cdots\cdots+2n(2n+2)$$

$$=2\{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots\cdots+n(n+1)\}$$

$$=2\{1\cdot(1+1)+2\cdot(2+1)+3\cdot(3+1)+\cdots\cdots+n(n+1)\}$$

$$=2\{1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2+1+2+3+\cdots\cdots+n\}$$

$$=2\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{3}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{2}{3}n(n+1)(n+2).$$

115. 積彈 將彈丸堆成錐體,設其底面成;(1)等邊三角

形,(2)正方形,(3)矩形時,則其彈丸總和之求法如下.

(1)底面成等邊三角形時　此時由彈丸積成之錐體,其第一層爲1彈,第二層爲每邊2彈之正三角形,第三層爲每邊3彈之正三角形,如此順次增加,每下一層,其邊之彈數亦多1,故第n層,其各邊之彈數爲n,而其層彈丸之總數則爲

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+3+2+1=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}\{n^2+n\}.$$

由此得　第$n-1$層$=\frac{1}{2}(n-1)n=\frac{1}{2}\{(n-1)^2+(n-1)\}$

第$n-2$層$=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)=\frac{1}{2}\{(n-2)^2+(n-2)\}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

第　3　層$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4=\frac{1}{2}\{3^2+3\}$

第　2　層$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=\frac{1}{2}\{2^2+2\}$

第　1　層$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=\frac{1}{2}\{1^2+1\}$

因得
$$S=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}r^2+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}r$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

(2)底面成正方形時　此時由彈丸積成之錐體,第一層

爲 1彈,第二層爲每邊 2 彈之正方形,第三層爲每邊 3 彈之正方形,如此逐層增加,每低一層,其正方形每邊之彈數亦多 1,故第 n 層每邊之彈數爲 n,而其層彈丸之總數則爲 n^2,隨之得全體彈丸之數爲

$$S=\sum_{r=1}^{n}r^2=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

(3)底面成矩形時 此時由彈丸積成之錐體,其第 n 層設爲以 n 及 m(假定 $m>n$)個彈丸爲二邊之長方形,則其層之彈丸總數爲 nm. 隨之其第 $n-1$ 層之彈丸總數爲 $(n-1)$ 乘 $(m-1)$, 如此逐層減少,至第一層則成以 1 及 $m-n+1$ 個彈丸爲二邊之長方形,卽爲 $m-n+1$ 個彈丸之一列也.因得

$$\begin{aligned}S&=mn+(m-1)(n-1)+(m-2)(n-2)\\&\qquad+\cdots\cdots+(m-n+1)\cdot 1\\&=(\overline{m-n}+n)n+(\overline{m-n}+\overline{n-1})(n-1)\\&\quad+(\overline{m-n}+\overline{n-2})(n-2)+\cdots\cdots+(\overline{m-n}+1)\cdot 1\\&=(m-n)\{n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1\}\\&\qquad+\{n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots\cdots+1^2\}\\&=(m-n)\sum_{r=1}^{n}r+\sum_{r=1}^{n}r^2\\&=(m-n)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(3m-n+1)\end{aligned}$$

例 1. 以彈丸堆成正三角錐臺,其層數爲 8,其底面一邊之彈數爲 12,求全體彈丸數.

解　底面一邊爲12彈之三角錐體,其層數亦爲12層,故$n=12$.由公式,得此錐體全體彈數爲

$$\frac{1}{6}\times 12\times(12+1)(12+2)=364.$$

然所求三角錐臺僅8層,故由上數不可不減去其上$12-8=4$層之彈數.因上4層三角錐之彈數爲

$$\frac{1}{6}\times 4\times(4+1)\times(4+2)=20,$$

故得所求全體彈數爲

$$364-20=344.$$

例2.　以彈丸堆成長方角錐臺,其最下層二邊之彈數各爲20及25,全體共計10層,求彈丸總數.

解　全長方角錐體之彈丸總數

$$=\frac{1}{6}\times 20\times(20+1)\times(3\times 25-20+1)=3920.$$

又其上方缺去部分之長方角錐體最下層二邊之彈數各爲$20-10=10$及$25-10=15$,故其全體彈數爲

$$\frac{1}{6}\times 10\times(10+1)\times(3\times 15-10+1)=660,$$

故得所求全體彈數爲

$$3920-660=3260.$$

問題十八

1.　設a, b, c三數成等差級數時,證明$a^2(b+c), b^2(c+a), c^2(a+b)$亦成等差級數.

2.　有成等差級數之四數,其各數平方之和爲120,而

其第一數與第四數之積較其他二數之積小 8,求各數幾何.

3. 有成等比級數之三數,其三數之和爲 14,而其各數平方之和爲 84,求各數幾何.

4. 設 a, b, c 三數成調和級數時,證明 $\frac{a}{b+c-a}, \frac{b}{c+a-b}, \frac{c}{a+b-c}$ 亦成調和級數.

5. 設 a, b, c 三數成調和級數時,證明 $\frac{2}{b}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$.

6. 設 a, b, c 成等差級數; b, c, d 成等比級數; c, d, e 成調和級數時,證明 a, c, e 成等比級數.

7. 有等比級數,其第一第二第三項之和,與第三第四第五項之和之比爲 1:4, 而其第七項爲 384, 求此級數.

8. 有成等差級數之三數,其兩外項之積等於中項之 5 倍,而其中二大數之和等於最小數之 8 倍,求各數.

9. 有等比級數,其項數爲 7,但知其初六項之和爲 $157\frac{1}{2}$,而後六項之和爲 315, 求此級數.

10. 求 $1, r, 2r^2, 3r^3, \cdots\cdots, (n-1)r^{n-1}$ 級數之和

11. 知 a, b, c, d, e 五數成等差級數,試解下列聯立方程式.

$$
\begin{aligned}
ax+by+cz+du+ev&=k\\
bx+cy+dz+eu+av&=k_1\\
cx+dy+ez+au+bv&=k_2\\
dx+ey+az+bu+cv&=k_3\\
ex+ay+bz+cu+dv&=k_4
\end{aligned}
$$

求下列各級數n項之和.

12. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2\cdots\cdots$

13. $1^3-2^3+3^3-4^3+5^3-\cdots\cdots$

14. $1^3+3^3+5^3+7^3+9^3+\cdots\cdots$

15. $1^4+2^4+3^4+4^4+5^4+\cdots\cdots$

16. $1\cdot2^2+2\cdot3^2+3\cdot4^2+4\cdot5^2+\cdots\cdots$

17. 以彈丸堆成正三角錐,全錐共計10層,求彈丸總數.

18. 以彈丸堆成正四角錐,全錐共計12層,求彈丸總數.

19. 以彈丸堆成長方角錐,全錐共計10層,其最上層全體彈數爲10,求彈丸總數.

20. 以彈丸 605 個堆成二等高角錐,其底面一爲正三角形,一爲正方形,求二角錐之層數.

第十七章　對數及其應用

116. 對數之性質　於 $a^x=n$ 式,如以數值代入於 a 及 n 而求 x 時,則 x 謂之以 a 爲底之 n 之對數,通常皆以 $log_a n$ 表之.例如於 $2^5=32$, 其 5 爲以 2 爲底之 32 之對數,卽 $5=log_2 32$ 是.

通常對數之底數,皆用較 1 爲大之數.

$a>1$ 時,a^x 隨 x 之值增加而亦增加,x 之值減少而亦減少.且隨 $x>,=,$ 或 <0,而 a^x 亦 $>,=,$或 <1. 故此時 a^x 不論 x 取如何之實數值,決無成負數之理.卽 $a>1$ 時,無負數之對數存在.

次於 $a^x=n$, 其 n 爲正數時,則與 n 之各值對應,x 之實數值必有一個存在,且僅限於一個.其 x 卽 $log_a n$,不僅能成爲正負之整數或分數,且有時成爲無理數.

玆將關於對數之重要性質,述之如下.

定理 1.　不論底數如何,其與底數相同之數之對數皆爲 1.

證明　因不論 a 爲何數,其 $a^1=a$.

$$\therefore \quad log_a a=1.$$

定理 2.　不論底數如何,凡 1 之對數皆爲 0.

證明　因 a 不等於 0 時,其 $a^0=1$.

$\therefore \quad log_a 1=0.$

定理 3.　積之對數,等於其各因數對數之和.

證明　設　$log_a m=x, \quad log_a n=y;$

則　$m=a^x, \ n=a^y.$

隨之　$mn=a^x a^y=a^{x+y}.$

$\therefore \quad log_a mn=x+y=log_a m+log_a n.$

其因數在三個以上時亦同.

定理 4.　商之對數,等於由被除數之對數減去除數對數之差.

證明　設　$log_a m=x, \quad log_a n=y;$

則　$m=a^x, \quad n=a^y.$

隨之　$\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}.$

$\therefore \quad log_a\left(\frac{m}{n}\right)=x-y=log_a m-log_a n.$

定理 5.　某數之冪之對數,等於以其指數乘其數對數之積.

證明　設　$log_a n=x,$

則　$n=a^x.$

隨之　$n^p=(a^x)^p=a^{px}.$

$\therefore \quad log_a n^p=px=plog_a n.$

系　某數冪根之對數,等於以其根指數除其數對數所得之商.

定理 6.　以 a 爲底之一數 n 之對數,等於以 $log_a b$ 乘以

b 爲底之同數 n 之對數所得之積.

證明　設　$log_a n=x,\quad log_b n=y;$

則　$n=a^x,\quad n=b^y.$

$\therefore\quad a^x=b^y.$

$\therefore\quad a^{\frac{x}{y}}=b.$

隨之得　$\frac{x}{y}=log_a b.$

卽　$x=ylog_a b.$

$\therefore\quad log_a n=log_b n\times log_a b.$

117. 對數表　以10爲底之對數,謂之常用對數,通常之計算皆採用之.卽 $10^x=n$ 時,則其 x 謂之 n 之常用對數.

常用對數,一般皆略去其底數,於應書 $log_{10}n$ 時,僅書作 $logn$. 本章以後單云對數時,卽係指常用對數而言.

對數爲負數時,其小數部分,常以正數記之;僅其整數部分,始以負數表之.例如

$$log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=log\frac{1}{100}+log\frac{1}{\sqrt[8]{10}}=(-2)+(-\frac{1}{8})$$

$$=-2\frac{1}{8}=-3+0.875$$

是.此時用符號 $log\frac{1}{100\sqrt[8]{10}}=\bar{3}.875$ 以表之.卽以 3 上之符號 — 表此對數之整數部分 3 爲負數也.

對數之整數部,謂之其對數之指標;小數部,則謂之其對數之假數.上例之 -3, 卽爲其對數之指標;而0.875則爲其假數也.

對數之指標,通常可由觀察的方法以求得之.因

$$10^0=1,\ 10^1=10,\ 10^2=100,\ 10^3=1000,\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

故 $\log 1=0,\ \log 10=1,\ \log 100=2,\ \log 1000=3,\cdots\cdots\cdots\cdots$

隨之得結論如下.

I 1與10間之數之對數,爲 0 與 1 間之數,隨之其指標爲 0.

II 10與 100 間之數之對數,爲 1 與 2 間之數,隨之其指標爲 1.

III 100 與 1000 間之數之對數,爲 2 與 3 間之數,隨之其指標爲 2.

以下順次類推,因得一法則於下.

較 1 爲大之數之對數指標,較其數整數部分數字之數少 1.

又因 $10^{-1}=0.1,\ 10^{-2}=0.01,\ 10^{-3}=0.001,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

故 $\log 0.1=-1,\ \log 0.01=-2,\ \log 0.001=-3,\cdots\cdots$

隨之得結論如下.

I 1與0.1間之數之對數,爲 0 與 -1 間之數,隨之其指標爲 -1.

II 0.1與0.01間之數之對數,爲 -1 與 -2 間之數,隨之其指標爲 -2.

III 0.01 與 0.001 間之數之對數,爲 -2 與 -3 間之數,隨之其指標爲 -3.

以下順次類推,因得一法則於下.

較 1 爲小之數之對數指標,爲以較其數小數點與最初有效數字間之 0 數大 1 之數爲絕對值之負數.

二數如僅由其小數點之位置而異時,則其二數對數之假數相等.因某數M與僅由其小數點之位置而異之數,一般皆等於$M\times10^n$或$M\div10^n$,（n爲正整數）

但　$log(M\times10^n)=logM+log10^n=logM+n$,

又　$log(M\div10^n)=logM-log10^n=logM-n$,

即各數之對數,皆與$logM$成一整數n之差.故其假數與$logM$之假數相等,甚明.隨之如得知任意一數之對數時,則與此數僅依小數點之位置而異之數之對數,甚易於求得之.

一般,非10之整數乘羃之整數對數,多爲不盡根數.（無理數）故通常皆將其近似値計算至小數若干位後,即行四捨五入,以供實用.如此;將各整數之對數求至小數若干位爲止排列而成之表,謂之對數表.

由上述之理,如得知整數之對數時,則其他任意之數之對數,皆容易求得之.又任意之數之對數指標,可由視察的方法以求得之.故對數表中,通常僅揭載整數之對數假數.

對數表中所揭載假數爲四位時,謂之四位對數;爲五位時,謂之五位對數表.其餘準此.本書卷末所附之對數表,即爲1000未滿之整數四位對數表也.

118. 對數表之用法　茲將關於對數表之使用法,舉例說明之於下.

例 1.　求$log47.2$.

解　先求得其指標爲1,次由對數表,求得其假數爲0.6739.

故得　　$\log 47.2=1.6739$.

例2.　求 $\log 0.00825$.

解　先求得其指標為 -3,次由對數表,求得其假數為 0.9165.

故得　　$\log 0.00825=\bar{3}.9165$.

例3.　求 $\log x=3.7185$ 之 x 值.

解　先由其指標為 3,故可知 x 之整數部分之位數為 4.次由對數表,求得假數為 0.7185 之數為 523.故得 $x=5230$.

例4.　求對數為 $\bar{2}.4082$ 之數.

解　先由其指標為 -2,可知所求之數於小數點與最初有效數字間有 0一個.次由對數表,得假數為 0.4082 之數為 256.故得所求之數為 0.0256.

通常四位對數表中所揭載者,為由 1 至 1000 之數之對數.隨之其由四個以上數字所成之數之對數假數,不能直接於對數表中求得之,必須應用下述法則始可.(參閱高中三角法)

二數之差對於其各數甚為微小時,則其二數對數之差,與其二數之差成比例.

例5.　求 $\log 361.4$.

解　先求得其指標為 2,次由對數表,求得

$\log 361$ 之假數為 0.5575,

$\log 362$ 之假數為 0.5587.

可知此二假數之差(謂之表差)為 0.0012.設與 361

及361.4二數之差0.4對應之此二數對數之差爲x,則由上述法則,得

$$1:0.4=0.0012:x.$$

由此得 $x=0.00048.$

截至小數第四位止四捨五入之,得

$$\log 361.4=2.5575+0.0005=2.5580.$$

例 6. 求對數爲$\bar{3}.7652$之數.

解 先由其指標$\bar{3}$,可知所求之數其小數點與最初有效數字間有 0 二個.次由對數表,求得

$$\log 0.00582=\bar{3}.7649,$$

$$\log 0.00583=\bar{3}.7657.$$

其表差爲 0.0008,可知所求之數位於0.00582與0.00583之間.故設所求之數爲$0.00582+x$時,則此數之對數$\bar{3}.7652$與0.00582之對數$\bar{3}.7649$之差爲0.0003.應用比例部分之法則計算之,得

$$0.0008:0.0003=0.00001:x.$$

由此得 $x=0.000004.$

故得所求之數$=0.00582+0.000004=0.005824.$

119. 對數之計算 對數之目的,在使計算簡便;卽能使乘除之計算化爲對數之加減,又乘冪與方根之計算,能歸着於對數之乘除等是.玆將關於應用對數之計算,舉例示之於下.

例 1. 用對數計算3.268×15.97.

解 設此二數之積爲N,則

$$\log N=\log 3.268+\log 15.97.$$

茲由對數表計算之如下.

$$\begin{array}{r} \log 3.268=0.5142 \\ \log 15.97=1.2033 \\ \hline \log N=1.7175 \end{array}$$

$$\therefore \quad N=52.18.$$

例 2. 用對數計算$23.6^3\div 9806.5$.

解 設此二數之商為N,則

$$\log N=\log 23.6^3-\log 9806.5=3\log 23.6-\log 9806.5.$$

茲由對數表計算之如下.

$$\log 23.6=1.3729, \qquad \begin{array}{r} 3\log 23.6=4.1187 \\ \log 9806.5=3.9915 \\ \hline \log N=0.1272 \end{array}$$

$$\therefore \quad N=1.3403.$$

例 3 知$\log 2=0.3010$, $\log 3.973=0.5991$,計算$\sqrt[7]{25^3}$.

解 設所求之數為N,則

$$N=25^{\frac{3}{7}}=(5^2)^{\frac{3}{7}}=5^{\frac{6}{7}}=\left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{6}{7}}.$$

$$\therefore \quad \log N=\frac{6}{7}\log\frac{10}{2}=\frac{6}{7}(\log 10-\log 2)=\frac{6}{7}(1-0.3010)$$

$$=0.5991.$$

$$\therefore \quad N=3.973.$$

例 4. 解$(0.4)^{2x-1}=0.003$方程式.

解 取所與方程式兩邊之對數,得

$$(2x-1)\log 0.4=\log 0.003.$$

隨之得 $2x-1=\frac{\log 0.003}{\log 0.4}=\frac{\bar{3}.4771}{\bar{1}.6020}=\frac{-(3-0.4771)}{-(1-0.6020)}$

$$=\frac{2.5229}{0.3980}$$

再行應用對數時,得

$$\log(2x-1)=\log 2.5229-\log 0.3980.$$

$$\because \quad \log 2.5229=0.4019,$$

$$\log 0.3980=\bar{1}.5999;$$

$$\therefore \quad \log(2x-1)=0.8020,$$

$$\therefore \quad 2x-1=6.339.$$

$$\therefore \quad x=3.670.$$

如例 4 所示,其指數中含有未知數之方程式,謂之<u>指數方程式</u>.

例 5. 解 $13^{2x+5}=14^{x+7}$ 方程式.

解 取所與方程式兩邊之對數,得

$$(2x+5)\log 13=(x+7)\log 14.$$

解之,得

$$x=\frac{7\log 14-5\log 13}{2\log 13-\log 14}=\frac{2.4532}{1.0817}=2.268.$$

例 6. 解 $\log\sqrt{x-21}+\frac{1}{2}\log x=1$ 方程式

解 由前第 116 節定理 3 及定理 5 之系,所與方程式可變更成下式

$$\log\sqrt{x(x-21)}=1=\log 10.$$

$$\therefore \quad x^2-21x=100.$$

解之,得

$$x=25, \text{或 } x=-4.$$

如本例所示之方程式,謂之對數方程式.

例 7. 解 $x^{2\log x}=10x$ 方程式.

解 取所與方程式兩邊之對數,得

$$2(\log x)^2=\log x+1.$$

就 $\log x$ 解之,得

$$\log x=1, \text{或 } \log x=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad x=10, \text{或 } x=\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

120. 複利及年金 於利息算法中,其各期利息皆與本金相併而爲下期之本金,即利息又復生利者,謂之複利.又於複利算法中,約定於一定期間,例如每年償還之金額,謂之年金.複利與年金,如期限過長,實甚煩難;但利用對數時,則易於求得其近似值.玆述之於下.

I 知本金,期限,年利率而求本利合計.

設 P 爲本金,n 爲年數,r 爲年利率,A 爲本利合計時,則一年間 P 之利息爲 Pr. 隨之第一年末之本利合計爲 $P+Pr$, 即 $P(1+r)$.因此數爲第二年之本金,故第二年之利息爲 $P(1+r)r$.隨之第二年末之本利合計爲 $P(1+r)+P(1+r)r$, 即 $P(1+r)^2$ 因此數復爲第三年之本金,如上法類推,可知第三年末之本利合計爲 $P(1+r)^3$.又第四年末之本利合計爲 $P(1+r)^4$, …………, 第 n 年末之本利合計爲 $P(1+r)^n$. 即

$$A=P(1+r)^n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

上式中之P,謂之A之現值.於上式取其兩邊之對數時,得

$$\log A=\log P+n\log(1+r).$$

由對數表求得$1+r$之對數後以n乘之,再加P之對數時,卽得A之對數.於求得A之對數後,再由對數表,卽可求得其數A.

設複利期限爲半年,則每隔半年,其利息均須轉爲本金.故n年間之期限爲$2n$次,隨之其本利合計如下.

$$A=P\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

例 1. 某人以複利貸洋 350 元於人,言明年利 5%,求 25年後本利合計若干.

解　因$P=350,\quad r=\frac{5}{100},\quad n=25,$　故由公式(1),得

$$\log A=\log 350+25\log\left(1+\frac{5}{100}\right)$$

$$=\log 350+25(\log 105-\log 100).$$

由對數表,得　$\log 350=2.5440,\ \log 105=2.0212.$

$$\therefore\qquad \log A=2.5440+25(2.0212-2)$$

$$=3.0740.$$

$$\therefore\qquad A=1185.\ (\text{元})$$

II　求期末應付金額之現值

設A爲n年後應付金額,P爲本金,r爲年利率,則n年後P之本利合計應等於A.由公式(1),得

$$A=P(1+r)^n.$$

$$\therefore\quad P=A(1+r)^{-n}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

例 2. 求 100 年後本利合計應共付 1000 元時之本金若干.但年利率爲 5%.

解　因 $A=1000$, $n=100$, $r=\frac{5}{100}$, 故由公式(2),得

$$P=1000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{-100}=1000\left(\frac{21}{20}\right)^{-100}.$$

$$\therefore \quad \log P=\log 1000-100(\log 21-\log 20)$$

$$=3-100(1.3222-1.3010).$$

$$=3-2.1189=0.8811.$$

由對數表,得　$\log 7.6045=0.8811.$

$$\therefore \quad P=7.6045. (\text{元})$$

III　求於 n 年間每年末應付 A 元之現值

設年利率爲 r, 則由公式(2),得

第一年末應付 A 元之本金 $=A(1+r)^{-1}$,

第二年末應付 A 元之本金 $=A(1+r)^{-2}$,

....

....

第 n 年末應付 A 元之本金 $=A(1+r)^{-n}$.

故得本金總數爲

$$A\{(1+r)^{-1}+(1+r)^{-2}+\cdots\cdots+(1+r)^{-n}\}$$

$$=A\left\{\frac{1}{1+r}+\frac{1}{(1+r)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{(1+r)^n}\right\}$$

$$=A\left\{\frac{\frac{1}{1+r}-\frac{1}{(1+r)^{n+1}}}{1-\frac{1}{1+r}}\right\}=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}.$$

$$\therefore \quad P=\frac{A}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

設 $n=\infty$，即年金成爲<u>永久年金</u>時，則 $(1+r)^n=\infty$. 隨之

$$P=\frac{A}{r}.$$

例 3. 求年利率 4%，20 年間每年應付 30 元之現值.

解 因 $A=30,\ n=20,\ r=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$，故由公式(3)，得

$$P=\frac{30}{\frac{1}{25}}\left\{1-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{25}\right)^{20}}\right\}=30\times25\left\{1-\left(\frac{25}{26}\right)^{20}\right\}.$$

但 $\quad \log\left(\frac{25}{26}\right)^{20}=20\{\log 25-\log 26\}=20\{1.3979-1.4149\}$

$$=20\{-0.0170\}=-0.3407=\bar{1}.6593$$

$$=\log 0.4564$$

$$\therefore \quad \left(\frac{25}{26}\right)^{20}=0.4564.$$

$$\therefore \quad P=30\times25\times(1-0.4564)=30\times25\times0.5436$$

$$=407.7.\ (\text{元})$$

問題十九

用對數表計算下列各數之對數.

1. 65.29^5. 2. $\sqrt{0.0876}$. 3. $5^5\div\sqrt[3]{89}$.

用對數表計算下列各式之結果.

4. 2.364×934.25. 5. $(1.3872)^5$.

6. $367.21\div1467.9$. 7. $\frac{0.0032}{638.1\times3.5892}$.

8. $\frac{0.356\times723.54}{896.72}$.　　9. $\frac{46.723\times\sqrt{1.2145}}{(2.264)^{3}\times(1.8905)^{6}}$.

10. 求7^{138}爲幾位之數.

11. 知$\log2=0.3010$, $\log3=0.4771$, $\log7=0.8451$試計算下列各式之結果.

(a) $\log1458$.　(b) $\log0.768$.　(c) $\log42000$.

(d) $\log\sqrt[5]{39.2}$.　(e) $\log\frac{225}{224}-\log\frac{20}{189}$.

12. 求$\left(\frac{4}{7}\right)^{25}$之小數點與最初有效數字間之0之個數.

解下列諸方程式.

13. $2^{x+3}=160$.　14. $20^{3x-7}=2^{x+5}$.

15. $5^{x-3}=8$.　16. $16^{2x+1}\times36^{5-x}=1468$.

17. $\log(x-1)=\log(x^2-5x+4)-\log10$.

18. $\log\sqrt{3x+4}+\frac{1}{2}\log(5x+1)=\log3+1$.

19. 有面積 400 方丈之圓形地面,求其直徑幾何.

20. 有正方形,其面積與高453.4尺底邊687.5尺之平行四邊形面積相等.求正方形之邊長.

21. 化簡下列各式.

(a) $\log\frac{25}{4}+\log\frac{36}{50}-\log\frac{9}{8}$.

(b) $\log\frac{133}{65}+2\log\frac{13}{7}-\log\frac{143}{90}+\log\frac{77}{171}$.

22. 解$18^{8-4x}=(54\sqrt{2})^{3x-2}$方程式.

23. 解$\log(x^2-1)-\log(x^2-x-2)=\log2$方程式.

24. 解 $2^{x+1}-3\times2^{x}+5\times2^{x-1}=12$ 方程式.

25. 設等比級數第 x, y, z 項各爲 X, Y, Z 時,證明下式.

$$(y-z)\log X+(z-x)\log Y+(x-y)\log Z=0.$$

26. 證明下列三式能同時成立.

$$x=10^{\frac{1}{1-\log z}},\quad y=10^{\frac{1}{1-\log x}},\quad z=10^{\frac{1}{1-\log y}}.$$

27. 某人以複利借洋2500元,言明年利率爲 4%. 求18年後本利合計應共還洋若干元.

28. 某人以年利率 4% 之複利儲金,計每年年首皆儲洋 120 元.求10年後,本利合計共可得洋若干元.

29. 求年利率 3% 之複利,於20年間,每年年末均應付洋 1000 元之契約;而欲立時一次付清之應共付洋若干.

30. 某國每年增添人數爲全體人數千分之八十五,而死亡人數爲全體人數千分之五十二.迨經過22年後,其人數竟增至二倍以上.試證明之.

第十八章　數學的歸納法

121. 數學的歸納法　數學的歸納法,爲廣涉於數學各分科常用之一種證明法,茲舉例說明之於下.

例 1.　證明 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$. ………………(1)

證明　證明分二段.

I.　先檢驗上式對於 n 之某特別值,其關係均能成立.

$n=1$ 時,　左邊$=1$.　右邊$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2=1$;

$n=2$ 時,　左邊$=3$,　右邊$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3=3$;

可知對於 $n=1,2$ 之特別值時,(1)式之關係成立.

II.　次假定 n 等於某特別整數 r 時,(1)式之關係成立;從而證明其等於較 r 大於 1 之值卽 $r+1$ 時,亦能成立.

由假定,$n=r$ 時,(1)式能成立,故其對於 r 成

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+r=\frac{1}{2}r(r+1).$$

於上式兩邊各加 $r+1$,則成

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+r+(r+1)=\frac{1}{2}r(r+1)+(r+1)$$

$$=\frac{1}{2}(r+1)(r+2).$$

此即表明(1)式之關係於$n=r+1$時亦能成立也.

由 I, II 兩段,因得推一論於下.

由 I; $n=1, 2$ 時,(1)式能成立.又 $n=2$ 時能成立,則由 II, $n=3$ 時亦能成立.再 $n=3$ 時能成立,復由 II, $n=4$ 時亦能成立.順次以推,可知對於 n 之任意正整數值,(1)式之關係,皆能成立.

例 2. 因連續二整數之一必爲偶數,故此二整數之積能以 2 整除之.試以此證明連續三整數之積能以 6 整除之.

證明 設連續三數中之最小者爲 n,則其餘二數爲 $n+1$ 及 $n+2$.

$$n=1\text{時},\quad n(n+1)(n+2)=1\cdot2\cdot3=6,$$

能以 6 整除之,甚明.

次假定 $n=r$ 時本定能成立,則 $r(r+1)(r+2)$ 能以 6 整除之.但

$$(r+1)(r+2)(r+3)=r(r+1)(r+2)+3(r+1)(r+2).$$

其 $3(r+1)(r+2)$ 能爲 3×2 即 6 所整除.故如 $r(r+1)(r+2)$ 能爲 6 所整除時,則上式之右邊能以 6 整除之.隨之其左邊亦不能不爲 6 所整除.

與上例同樣,可知 $n(n+1)(n+2)$ 對於 n 之各整數值皆能以 6 整除之.

上述二例所用之證明法,謂之<u>數學的歸納法</u>.或略稱之爲<u>歸納法</u>.

問 題 二 十

用數學的歸納法證明下列各式之關係.

1. $1+r+r^2+\cdots\cdots+r^n=\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

2. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot\cdot4+\cdots\cdots+n(n+1)(n+2)$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

3. $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

4. $1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$.

5. $\dfrac{1}{1\cdot2\cdot3}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}.$$

6. 設 n 爲正整數,則 x^n-y^n 能爲 $x-y$ 所整除.

7. 連續四整數之積能以 $1\cdot2\cdot3\cdot4$ 整除之.

8. 連續五整數之積能以 $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$ 整除之.

9. 證明前第81節定理1中之
$$X_{k-2}+Q_{k-1}X_{k-1}=X_k,$$
$$Y_{k-2}+Q_{k-1}Y_{k-1}=Y_k.$$

第十九章　順列及組合

122. 順列及組合　由所與 n 個物件中取出 r 個依種種順序排列而成之各列,謂之由 n 個物件中取出 r 個之順列.或簡稱之爲 n 個物件之 r 順列.例如於不同之三物 a, b, c 中任取二物所得之順列爲

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

之六種是.

又由所與 n 個物件中取出 r 個爲一組而不論其排列順序時之各組,謂之由 n 個物件中取出 r 個之組合.或簡稱之爲 n 個物件之 r 組合.例如於不同之三物 a, b, c 中任取二物所得之組合爲

$$ab,\quad ac,\quad bc.$$

之三種是.

以後凡表物件時,皆用 $a, b, c, \cdots\cdots$ 等文字或 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 等數字以行之.且於無特別申明時,其所表者,皆爲相異之物件.

茲將關於計算順列及組合種數時常用之基礎定理述之於下.

定理　設第一事件 A 由 m 個方法生起,第二事件 B 由

n 個方法生起時,則 A 與 B 互相結合所能生起之方法,其總數爲 mn.

例如投一骰子,其骰面之現出方法,計有六種.又投二骰子,則對於一方骰子之各面,他方骰面之現出方法,各有六種.故全體共有 6×6 種之現出方法.(甲之一點與乙之二點同時現出,及甲之二點與乙之一點同時現出,不視爲相同.餘同此.)由此例之同樣方法,可證明本定理之眞確不誤.

又此定理對於二個以上事件之結合時,亦能成立.例如

定理 設第一事件 A 由 m 個方法生起,第二事件 B 由 n 個方法生起,第三事件 C 由 p 個方法生起時,則 A, B, C 互相結合而生起之方法,其總數爲 mnp.是.

123. 求由 n 個物件中取出 r 個之順列數 由 n 個物件中取出 r 個之順列之數,通常皆用符號 ${}_nP_r$ 以表之.

由 n 個物件 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots, a_n$ 中取出 r 個排成順列時,可於 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ 中任取一個置於首位後,再於剩餘之 $n-1$ 個物件中任取一個置於第二位,更於剩餘之 $n-2$ 個物件中任取一個置於第三位,如此順次行之,卽成.因其占第一位之物件,於 n 個物件中無論取何個皆可,其方法之數爲 n.次占第二位之物件,於剩餘之 $n-1$ 個中任取何個皆可,故其方法之數爲 $n-1$.再占第三位之物件,於剩餘之 $n-2$ 個中任取何個皆可,故其方法之數爲 $n-2$.其餘類推.故由上節定理,其所求順列之數爲

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots(\,r\text{ 個因式之積})$$

卽　$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1).$ …………(1)

又如 $r=n$ 時,則

$$_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 4\cdot3\cdot2\cdot1. \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)式右邊之積,謂之 n 之階乘,通常皆以符號 $n!$ 或 $\underline{|n}$ 表之.卽

$$_nP_n=n!.$$

公式(1)亦可另行證明之如下.

由 n 個物件 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, a_n$ 中取出 r 個排成一列時,其排列方法有 $_nP_r$ 種.其中 a_1 占最左端之順列,不外於 $a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, a_n$ 中任取 $r-1$ 個排列於 a_1 右方之順列.故其數有 $_{n-1}P_{r-1}$ 種.又 $a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, a_n$ 等占最左端時,亦各有 $_{n-1}P_{r-1}$ 種.故全體應有 $n\times{}_{n-1}P_{r-1}$ 個順列.因得下式之關係.

$$_nP_r \;=n\times{}_{n-1}P_{r-1}.$$

同理,　$$_{n-1}P_{r-1}=(n-1)\times{}_{n-2}P_{r-2}.$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

又　$$_{n-r+1}P_1=(n-r+1).$$

甚明.將上列諸等式邊邊相乘,卽得

$$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1).$$

例 1.　求用 a, b, c, d, e 五文字能作成若干順列.又設其順列中最初最終之位置皆屬子音時,其數若何.

解　用 a, b, c, d, e 五文字所作順列之數爲

$$_5P_5=5!=120.$$

次因子音有三個,若於最初最終之位置配置子音時,則其方法有 ${}_3P_2$ 種.又對於此中一組,將其餘三文字置於內部之方法有 ${}_3P_3$ 種.故由上節定理,其所求順列之數爲

$${}_3P_2\times{}_3P_3=3\cdot2\times3!=36.$$

例 2. 由學生十人敎師四人排成一列,如敎師四人須互相鄰接不能離開時,則其方法有幾種.

解 先除敎師單就學生排成一列時,其不同之方法有 ${}_{10}P_{10}$ 種.於此各排列中相鄰二人間或兩端之首位,得插入敎師四人之排列.如此,其得插入敎師四人一團之地位,共計有十一處.又因敎師四人互相移換位置時,其方法共有 ${}_4P_4$ 種.故所求排列方法之數爲

$${}_{10}P_{10}\times11\times{}_4P_4=10!\times11\times4!=11!\times4!.$$

例 3. n 人圍繞圓桌而坐,其方法有幾.

解 n 人圍繞圓桌而坐之方法,共有 $n!$ 種.但 n 人相互位置相同之排列視爲一種時,則其數較此爲少.卽以某一人固定於某一席次而使其餘 $n-1$ 人雜坐於 $n-1$ 席次時,可知其不同方法爲 $(n-1)!$ 種.此種順列,謂之圓順列.

124. 求由 n 個物件中取出 r 個之組合數 由 n 個物件中取出 r 個之組合之數,通常皆用符號 ${}_nC_r$ 或 $\binom{n}{r}$ 以表之.

於由 n 個物件中任取 r 個所成組合中之一組,如將其 r 個物件依種種順序排列之,則得 $r!$ 個順列.又取 n 個物件中之 r 組合之全體,將其 r 個物件依種種順序排列之,則得 n 個物件之 r 順列.因得下列關係式.

$$r! \times {}_nC_r = {}_nP_r.$$

由此得

$${}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或 $${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-1)!} = {}_nC_{n-r}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1')$$

例 1. 求 ${}_{15}C_{13}$ 之數.

解 $${}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = \frac{15 \cdot 14}{2!} = 105.$$

例 2. 求於 $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ 之九文字中,用 2 個母音與 5 個子音所聯成之字數有幾.

解 由母音 3 個中任意取出 2 個之方法,有 ${}_3C_2$ 種.由子音 6 個中任意取出 5 個之方法,有 ${}_6C_5$ 種.故於所與九文字中選出 2 母音與 5 子音之方法,共有 ${}_3C_2 \times {}_6C_5$ 種.由此各組合,每組合皆能排成 ${}_7P_7$ 個不同之單字.故所求之字數爲

$${}_3C_2 \times {}_6C_5 \times {}_7P_7 = 3 \times 6 \times 7! = 90720.$$

例 3. 證明 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_r + {}_{n-1}C_{r-1}$.

解 上式由公式 ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$, 可以得知其相等.但亦可依下法以證明之.

將含 n 個文字之 r 組合全體分爲二羣.

〔第一羣〕含特別之某一文字者.〔第二羣〕不含特別之某一文字者.

於含特別某一文字之組合中,除去其特別之文字時,則成爲於所與 n 個文字中除去其文字而由其餘之 $n-1$ 個

中任取 $r-1$ 個所成之組合.此種組合之數,爲 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 個.故屬於第一羣組合之數,亦爲 ${}_{n-1}C_{r-1}$ 個.

屬於第二羣之組合,不外由所與 n 個字文中,除去某特別文字後,於其剩餘之 $n-1$ 個文字中,任取 r 個所成之組合.故屬於此羣之組合,其數爲 ${}_{n-1}C_r$ 個.

第一羣之組合數與第二羣組合數之和,不可不爲 ${}_nC_r$.故得

$${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r.$$

125. 求由全體不盡相異之 n 個物件中一次取出 r 個所得組合及順列數

I　$r=n$ 時, 此時組合之數爲 1,甚明.

如欲求此時順列之數時,可先行說明下例.

例 1. 求以 1, 1, 1, 2, 3, 4 六數字所作之六位數有幾.

解 於此六數字所成六位數中之一,將與 2, 3, 4 相異之三數字例如 5, 6, 7 代入於其中之 1, 1, 1 處時,則可得由 2, 3, 4, 5, 6, 7 六數字所成之六位數 3! 個.若於最初所成之六位數中施行同樣之方法時,則可得 2, 3, 4, 5, 6, 7 六數字所成六位數之全體.設以 x 表最初六數字所成六位數之個數,則得

$$3!\times x=6!.$$

$$\therefore\quad x=\frac{6!}{3!}=120.$$

由上例同樣之推理,因得一結論如下.

設 $a, b, c,$…………爲相異文字,於 n 個文字中,其 p 個與

a 相同,q 個與 b 相同,r 個與 c 相同,以下類推時;則以此諸文字全體作成之順列,其數爲

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots\cdots}.$$

II　$r<n$ 時

表此時組合及順列之數之公式,甚爲複雜.茲以例示其計算之方法於下.

例 2.　求以 *Species* 一語中五文字作成之組合及順列之數有幾.

解　所與文字爲 s, s, e, e, c, i, p 七個,應選出之文字爲;(a)含相同文字二組,(b)含相同文字一組,(c)全不含相同文字之三類.

(a)含相同文字 s, s, e, e 二組時——.此時於 c, i, p 三文字中再行取出一文字卽可.故組合之數爲 3,順列之數爲 $3\times\frac{5!}{2!2!}$.

(b)含相同文字之一組時——.如含 s, s 時,則於 e, c, i, p 四文字中尙應再行取出三個.故組合之數爲 ${}_4C_3$,順列之數爲 ${}_4C_3\times\frac{5!}{2!}$.

如含 e, e 時,其數亦相等.故此時組合之數爲 $2\times{}_4C_3$,順列之數爲 $2\times{}_4C_3\times\frac{5!}{2!}$.

(c)完全不含相同之文字時——.組合之數爲 1,順列之數爲 $5!$.

總括(a)(b)(c)三方面,因得

所求組合之數$=3+2\times{}_4C_3+1=12$.

所求順列之數$=3\times\dfrac{5!}{2!2!}+2\times{}_4C_3\times\dfrac{5!}{2!}+5!=690$.

126. 允許同一物件得重複取出時之順列及組合數

(I) 於允許重複取出之規定下,由 n 個物件中一次各取出 r 個所得之順列數,通常皆以 ${}_n\Pi_r$ 表之.

例 1. 求僅用有效數字所作成之三位數,其數有幾.

解 於 1,2,3,………,9 九個文字中,任意取出三個(但同一數字得任取數次)排成一列時,即得所求之數.因其占第一位之數字,於九個數字中任何數字均可;占第二位之數字,於九個數字中任何數字均可;占第三位之數字,於九個數字中任何數字亦可.故所求之數爲 $9\times9\times9$ 即 9^3.

由上例,得 ${}_9\Pi_3=9^3$. 與此例相同,一般,可證明

$${}_n\Pi_r=n^r.$$

(II) 於允許重複取出之規定下,由 n 個物件中一次各取出 r 個所得之組合數,通常皆以 ${}_nH_r$ 表之.

例 2. 於 1, 2, 3, 4 四數字中,允許其相同文字可以重複取出時,求一次取出三個所作成之組合數.

解 此組合中必有如 112, 222, 234,………… 等排列者,於此等組合中,如將其較大數字置於較小數字之右側,排成一列後,(例如不書 211 而書 112 是)再加 0 於左端之數,加 1 於中央之數,加 2 於右端之數,則得由 1, 2, 3, 4, 5, 6 六數字中無重複的一次取出三個所得之組合.(例如由 112, 得 124; 由 222, 得 234; 由 234, 得 246 是.)

於 1, 2, 3, 4 四數字中允許重複取出之規定下,一次取出三個所成之組合皆行同樣之方法時,則應生出 1, 2, 3, 4, 5, 6 六數字中無重複的一次取出三個所得組合之全部,且僅此全部.故

$$_4H_3 = {}_{4+(3-1)}C_3.$$

由同樣推理,因得一一般之結果於下.卽

$$_nH_r = {}_{n+r-1}C_r = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{r!}.$$

127. 類似問題 下列問題,雖可由與求順列,組合等完全不同之方法以解之,因其表面上甚爲類似,故揭之於下.

例 1. 有位於平面上之 n 直線,其中無二線平行及三線交於一點者,證明此 n 直線分其平面爲 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 部分.

解 今以 $f(n)$ 表 n 直線所分平面部分之數時,則$(n-1)$ 直線所分平面部分之數,可以$f(n-1)$ 表之.設於 $(n-1)$ 直線所分$f(n-1)$ 個部分之平面上,再引一與此諸直線中任何線皆不平行且不經過此諸直線交點之直線時,則此直線與 $(n-1)$ 直線交於 $(n-1)$ 點.因而於$f(n-1)$ 個區分中,再行增加 n 個區分.故得

$$f(n) = n + f(n-1).$$

同理,
$$f(n-1) = (n-1) + f(n-2).$$

$$\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$f(2) = 2 + f(1).$$

$$f(1)=2.$$

將上列諸等式邊邊相加,得

$$f(n)=n+(n-1)+\cdots\cdots+2+1+1$$

$$=\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2).$$

例 2. 有致 n 人之信 n 封,設封信時將信與信封誤置,求其錯誤之方法有幾.

解 設 n 信為致 $a, b, c,\cdots\cdots$ 之 n 人者,其與各信對應之信封為 $a', b', c'.\cdots\cdots\cdots$,其錯誤之方法為 $f(n)$.

如 a 誤封入於 $(n-1)$ 個信封 $b', c',\cdots\cdots$ 之任一封中,例如 a 封入於 k' 中,則 k 封入於 a' 時,其 a' 及 k' 二封既已錯誤,故其他各封錯誤之數為 $f(n-2)$.

又 a 封入於 k' 中而 k 不在 a' 內時,則其他各封錯誤之數為 $f(n-1)$.

故得 a 誤封入於 k' 時,其錯誤之數為

$$f(n-2)+f(n-1).$$

由同理, a 誤封入於 k' 外 $b', c',\cdots\cdots$ 中之一時,其錯誤之數亦相同.故 a 誤封入於 $b', c',\cdots\cdots k',\cdots\cdots$ 之 $(n-1)$ 封信封內時,其錯誤之總數為 $(n-1)\{f(n-1)+f(n-2)\}$. 因得

$$f(n)=(n-1)\{f(n-1)+f(n-2)\}.$$

$$\therefore\ f(n)-nf(n-1)=-\{f(n-1)-(n-1)f(n-2)\}.$$

同理, $f(n-1)-(n-1)f(n-2)=-\{f(n-2)-(n-2)f(n-3)\}$.

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$f(3)-3f(2)=-\{f(2)-2f(1)\}$$

因信與封各祇一件時,則無錯誤.故 $f(1)=0$. 又信與封各二件時,其錯誤僅一次.故 $f(2)=1$.

$$\therefore\quad f(3)-3f(2)=-\{1-0\}=(-1)^3.$$

$$f(4)-4f(3)=-\{f(3)-3f(2)\}=(-1)^4.$$

$$\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots.$$

$$\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots.$$

$$f(n)-nf(n-1)=(-1)^n.$$

隨之得 $$\frac{f(n)}{n!}-\frac{f(n-1)}{(n-1)!}=(-1)^n\cdot\frac{1}{n!}.$$

$$\frac{f(n-1)}{(n-1)!}-\frac{f(n-2)}{(n-2)!}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!}.$$

$$\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots.$$

$$\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots.$$

$$\frac{f(2)}{2!}-\frac{f(1)}{1!}=(-1)^2\cdot\frac{1}{2!}.$$

將上列諸等式邊邊相加,得

$$f(n)=n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\}.$$

即所求之錯誤數也.

問題二十一

1. 求以 0, 1, 2, 3, 4 五數字能作成五位之數若干.
2. 求以 1, 2, 5, 8 四數字能作成若干奇數.
3. 有專能漕右舷者四人,及專能漕左舷者四人,共載

於八人共漕之小舟上,其位置之分配方法有幾.

4. 求以構成 *equation* 一語之文字以聯成其他單語時,設不變更其子音之順序,求其所成單語之數.

5. 有由三册組成之書二部,二册組成之書二部,同置於一書架上.設其同屬一部之書籍不互相分離時,其方法有幾.

6. 以絲線貫穿七色之珠七枚作成珠輪時,其方法有幾.

7. 有大人與小兒各五人圍坐於一圓桌上,其方法有幾.但小兒不許互相鄰接.

8. 有乘載五十六人之列車,而搭客計有六十人.求能乘坐列車之組數有幾.又一人能加入之組數有幾.

9. 有將校10人下士12人兵卒18人,今欲編成將校 5 人下士 8 人兵卒10人之隊伍,其編制之方法有幾.

10. 有互異之子音 7 個,互異之母音 4 個,今以子音 3 個母音 2 個聯成單語時,其字數有幾.

11. 有德文書 7 册,英文書 3 册,於其中選出德文書 4 册英文書 1 册置於書架上而使英文書常居中央時,其方法有幾.

12. 於 6 人中選出 5 人使作環狀順列時,其種類有幾.

13. 投 n 個骰子時,其出現點數之排列,共有幾種.

14. 有十分及二十分銀幣,與一分銅幣各在五個以上,求由其中選取五枚之方法有幾.

15. 於 7, 8, 9 三數字中重複取用之,求由此各數字排

成之數中,其位數不較 4 爲多之數有幾.

16. 求以 9 個有效數字排成之五位整數有幾.

17. 以信 5 封投入於郵筒 3 個之方法有幾.

18. 某會選舉會長一名,計有選舉權者12名,被選舉權者 3 名,求其選舉之方法有幾種.

19. 某平面上有三點不同位於一直線上之點 n 個,求連結二點所得之直線有幾.

20. 於空間中有 n 個平面,其中無平行之二面,亦無同交於一直線之三面,及同交於一點之四面,求空間爲此諸平面分爲若干部分.

21. 有通過球心之 n 個平面,設其中無三面同含一直徑時,求球之表面爲此諸平面分爲若干部分.

22. 證明

$$_{m+n}C_r={}_mC_r+{}_mC_{r-1}\cdot{}_nC_1+{}_mC_{r-2}\cdot{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_mC_1\cdot{}_nC_{r-1}+{}_nC_r$$

第二十章　二項定理及多項定理

128. 二項定理

置　　$f(x)=(x+a_1)(x+a_2)(x+a)\cdots\cdots\cdots\cdots(x+a_n)$.

而將其右邊實行乘法之計算時;其 x^n 之係數爲 1, x^{n-1} 之係數爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n$ 之和, x^{n-2} 之係數爲於此 n 個數中各取二個所作乘積之和;一般,其 x^{n-r} 之係數,皆等於由此 n 個數中各取 r 個所作乘積之和.故如置

$$\left.\begin{aligned}
A_1&=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n\\
A_2&=a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+\cdots\cdots\cdots+a_1a_n\\
&\qquad\quad+a_2a_3+a_2a_4+\cdots\cdots\cdots+a_2a_n\\
&\qquad\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+a_{n-1}a_n\\
A_3&=a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots\cdots\cdots+\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+a_{n-2}a_{n-1}a_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_n&=a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_n
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(1)$$

時,則得　$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+A_rx^{n-r}$

$$+\cdots\cdots\cdots+A_n.$$

其(1)式中之 A_1 含 ${}_nC_1$ 個項, A_2 含 ${}_nC_2$ 個項;一般, A_r 含 ${}_nC_r$ 個項.故置

$$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=a_n=a$$

時,因得下式之關係.

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1ax^{n-1}+{}_nC_2a^2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_ra^rx^{n-r}+\cdots\cdots\cdots+a^n\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

即 $$(x+a)^n=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}a^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}x^{n-r}a^r+\cdots\cdots+a^n\cdots\cdots(2')$$

上列關係式,謂之二項定理.其右邊謂之左邊之展開式.

例如 $$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3,$$
$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3+a^4,$$
$$(x+a)^5=x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5,$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等是.

此定理亦可直接用數學的歸納法證明之如下.

$n=1$ 時,此定理能成立,甚明.

今假定 $n=m$ 時,此定理亦能成立,則

$$(x+a)^m=x^m+{}_mC_1ax^{m-1}+{}_mC_2a^2x^{m-2}+\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_mC_ra^rx^{m-r}+\cdots\cdots\cdots+a^m.$$

以 $x+a$ 乘其兩邊,得

$$(x+a)^{m+1}=x^{m+1}+({}_mC_1+1)ax^m+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+({}_mC_r+{}_mC_{r-1})a^rx^{m-r+1}+\cdots\cdots$$
$$+a^{m+1}.$$

然　　${}_mC_r+{}_mC_{r-1}={}_{m+1}C_r$.（第124節例3）

$$\therefore\quad (x+a)^{m+1}=x^{m+1}+{}_{m+1}C_1ax^m+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_{m+1}C_ra^rx^{m-r+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a^{m+1}.$$

此卽示明 $n=m+1$ 時,本定理亦能成立也.故由數學的歸納法,本定理無論何時,皆能成立.

如規定0! 及 ${}_nC_0$ 爲 1 時,則有時可得種種便利.例如於此規約下,其

$$ {}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_{n-r}$$

可謂之對於 $r=0, 1, 2, \cdots\cdots, n$ 時,皆能成立是.用此規約時,二項定理可簡書之如下.

$$(x+a)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_ra^rx^{n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

或　$$(x+a)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_rx^ra^{n-r}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

其(3)式爲將 $(x+a)^n$ 順 x 之降冪展開之者,(4)式則爲將 $(x+a)^n$ 順 x 之昇冪展開之者.又(3)式之 ${}_nC_ra^rx^{n-r}$ 及(4)式之 ${}_nC_rx^ra^{n-r}$, 謂之一般項.

於(4)式置 $a=1$ 時,則得

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_rx^r+\cdots\cdots x^n.\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

反之,如於此關係式,置$\dfrac{x}{a}$以代x再以a^n乘其兩邊時,則得(4)式之關係.故(4)式與(5)式可視爲同表一事項之關係式.故(5)式亦可稱之爲二項定理.

於(5)式之展開式,可知由初項及末項數起,凡序數相同之項,其係數必相等.

於二項定理,如得知$(1+x)^n$之展開式時,則$(1+x)^{n+1}$之展開式,可機械的書出之.例如知

$$(1+x)^n=1+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+C_rx^r+\cdots\cdots\cdots$$

時,則

$$(1+x)^{n+1}=1+(1+c_1)x+(c_1+c_2)x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+(C_{r-1}+C_r)x^r+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

是.卽於$(1+x)^{n+1}$之展開式,其x^r之係數,等於$(1+x)^n$展開式x^{r-1}之係數C_{r-1}與x^r之係數C_r之和.例如由

$$(1+x)^3=1+3x+3x^2+x^3,$$

得

$$(1+x)^4=1+(1+3)x+(3+3)x^2+(3+1)x^3+x^4$$
$$=1+4x+6x^2+4x^3+x^4.$$

同理,得

$$(1+x)^5=1+(1+4)x+(4+6)x^2+(6+4)x^3$$
$$+(4+1)x^4+x^5=1+5x+10x^2+10x^3$$
$$+5x^4+x^5,$$
$$(1+x)^6=1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6,$$

等是.

例　求$\left(2x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^6$展開式中$x^3$之係數.

解　一般項$={}_6C_r(2x^2)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{3x}\right)^r=(-1)^r{}_6C_r\cdot\dfrac{2^{6-r}}{3^r}\cdot x^{12-3r}.$

由 $12-3r=3$, 得 $r=3$. 將此 r 之值代入於上式時,即得 x^3 之項.故

$$所求之係數=(-1)^3{}_6C_3\cdot\frac{2^3}{3^3}=-\frac{160}{27}.$$

129. $(1+x)^n$ 展開式中之最大係數及最大項

$(1+x)^n$ 展開式中之係數為 $1,\ {}_nC_1,\ {}_nC_2, \cdots\cdots, {}_nC_r, \cdots\cdots$ 等,其第 $r+1$ 項之係數為 ${}_nC_r$, 故比較 ${}_nC_r$ 與 ${}_nC_{r-1}$ 時,得

$$\frac{{}_nC_r}{{}_nC_{r-1}}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$\div\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)!}$$

$$=\frac{n-r+1}{r}.$$

可知 ${}_nC_r$ 隨

$$\frac{n-r+1}{r}\gtreqless 1,\quad 即\quad \frac{n+1}{2}\gtreqless r,$$

而大於,等於,或小於 ${}_nC_{r-1}$. 故順次將 $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 等值代入於 r 時,則 ${}_nC_r$ 初時漸次增加,待 r 之值增至較 $\frac{1}{2}(n+1)$ 為大時,則復行漸次減少.設 $\frac{1}{2}(n+1)$ 為整數,（即 n 為奇數時）則於 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ 時,其 ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ 較其他係數為大.設 $\frac{1}{2}(n+1)$ 不為整數,（即 n 為偶數時）則對於滿足 $\frac{n+1}{2}>r$ 之 r 最大值,（換言之即於 $r=\frac{n}{2}$ 時）其 ${}_nC_r$ 為最大.故無論何時,皆以其中央之二項或中央之一項之係數為最大.

次設 $x>0$ 時,於 $(1+x)^n$ 之昇冪展開式,將其第 $r+1$ 項與

第 r 項比較之.此時如以 μ_r 表第 $r+1$ 項時,則得

$$\frac{\mu_r}{\mu_{r-1}}=\frac{{}_nC_r x^r}{{}_nC_{r-1}x^{r-1}}=\frac{n-r+1}{r}x.$$

可知 μ_r 隨

$$\frac{n-r+1}{r}x\gtreqless 1,\quad 卽\quad \frac{n+1}{1+x}x\gtreqless r.$$

而大於,等於,或小於 μ_{r-1}. 故與上述之理論完全相同,得一結論於下.

設 $\frac{n+1}{1+n}x$ 爲整數,則於 $r=\frac{n+1}{1+x}x$ 時,其 $\mu_r=\mu_{r-1}$ 較其他各項爲大.設 $\frac{n+1}{1+x}x$ 不爲整數,則對於滿足 $\frac{n+1}{1+x}x<r$ 之 r 最大整數值,其 μ_r 爲最大.但此時常有最初之項或最後之項爲最大者.

例: 求 $\left(1+\frac{2}{3}\right)^{10}$ 展開式中之最大項.

解 因 $\frac{n+1}{1+x}x=\frac{10+1}{1+\frac{2}{3}}\times\frac{2}{3}=\frac{22}{5}$,

不爲整數,而滿足 $\frac{22}{5}>r$ 之 r 最大值爲 4,故 μ_4 卽其第五項爲最大項.

130. 二項係數之性質 於 $(1+x)^n$ 之展開式

$$(1+x)^n=1+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

中,其 $1, {}_nC_1, {}_nC_2, \cdots\cdots\cdots$ 等,謂之<u>二項係數</u>.

二項係數間之關係,雖可用 ${}_nC_r$ 之公式以證明之,但以直接用二項定理證明之者,較爲簡單.玆證明之於下.

爲便利起見,置 ${}_nC_r=c_r$ 時,則

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots\cdots +c_nx^n.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(I) 置 $x=1$ 時,則得

$$2^n=c_0+c_1+c_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n.$$

即 $(1+x)^n$ 展開式中各項係數之和等於 2^n.

(II) 置 $x=-1$ 時,則得

$$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^nc_n.$$

$$\therefore\quad 0=(c_0+c_2+c_4+\cdots\cdots\cdots)-(c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots\cdots).$$

$$\text{即}\quad c_0+c_2+c_4+\cdots\cdots=c_1+c_3+c_5+\cdots\cdots=2^n\div2=2^{n-1}.$$

即 $(1+x)^n$ 展開式中奇數項係數之和,等於其偶數項係數之和,其值爲 2^{n-1}

(III) 因 $c_r=c_{n-r}$, 故得

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_rx^r+\cdots\cdots+c_nx^n.$$

$$\text{與}\quad (1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots\cdots+c_{n-r}x^r +\cdots\cdots\cdots+c_0x^n.$$

上列二展開式相乘積之 x^n 項係數爲

$$c_0^2+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n^2.$$

由前第43節定理 2 之系 3,其

$$c_0^2+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_r^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+c_n^2$$

亦等於 $(1+x)^n\times(1+x)^n$ 之 x^n 項係數,即等於 $(1+x)^{2n}$ 展開式中之 x^n 項係數.但此係數爲 $\frac{(2n)!}{n!n!}$,

$$\therefore\quad c_0^2+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots+c_r^2+\cdots\cdots+c_n^2=\frac{(2n)!}{n!n!}.$$

即 $(1+x)^n$ 展開式中各項係數之平方和,等於 $\frac{(2n)!}{n!n!}$.

(IV) 如(III)所示,其

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+c_nx^n.$$

又 $$(1-x)^n=c_n-c_{n-1}x+c_{n-2}x^2-\cdots\cdots\cdots+(-1)^nc_0x^n.$$

上列二展開式相乘積之x^n項係數爲

$$(-1)^n\{c_0^2-c_1^2+c_2^2-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^nc_n^2\}.$$

又 $(1+x)^n\times(1-x)^n$ 卽 $(1-x^2)^n$ 展開式中之x^n項係數如 n 爲奇數時,爲 0;如 n 爲偶數時,爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n!}{(\frac{1}{2}n)!(\frac{1}{2}n)!}$.故

$$c_0^2-c_1^2+c_2^2-\cdots\cdots+(-1)^nc_n^2$$

之爲 0,爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\frac{n!}{\{(\frac{1}{2}n)!\}^2}$,隨 n 之爲奇爲偶而定.

例 1. 證明 $c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+rc_r+\cdots\cdots+nc_n=n2^{n-1}$.

解 $$c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+rc_r+\cdots\cdots\cdots\cdots+nc_n$$

$$=n+2\frac{n(n-1)}{1\cdot2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}+\cdots+r\frac{n!}{r!(n-r)!}+\cdots+n$$

$$=n\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot2}+\cdots+\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}+\cdots+1\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}=n2^{n-1}.$$

例 2. 證明 $c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$.

解 $$c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\cdots\cdots=1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}\cdot\frac{n(n-1)}{1\cdot2}-\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{n+1}\{n+1-\frac{(n+1)n}{1\cdot2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}-\cdots+(-1)^n\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1\cdot2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot2\cdot3}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

例 3. 設 n 爲任何正整數,證明

$$\frac{c_0}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{x+n}$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}.$$

解 因 $c_0={}_nC_0=1, c_1={}_nC_1, c_2={}_nC_2,\cdots\cdots$, 故如假定

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1}{x+1}+\frac{{}_nC_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n}$$

$$=\frac{n!}{x(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

成立時,則以 $x+1$ 代入於 x, 得

$$\frac{1}{x+1}-\frac{{}_nC_1}{x+2}+\frac{{}_nC_2}{x+3}-\cdots\cdots\cdots+(-1)^n\frac{{}_nC_n}{x+n+1}$$

$$=\frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots\cdots(x+n+1)}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

亦能成立.由(1)式減(2)式,得

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_nC_1+1}{x+1}+\frac{{}_nC_2+{}_nC_1}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{{}_nC_r+{}_nC_{r-1}}{x+r}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{x+n+1}$$

$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots\cdots\cdots(x+n+1)}.$$

但對於 r 之各正整數值,其 ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$. 故得

$$\frac{1}{x}-\frac{{}_{n+1}C_1}{x+1}+\frac{{}_{n+1}C_2}{x+2}-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\frac{{}_{n+1}C_{n+1}}{x+n+1}$$

$$=\frac{(n+1)!}{x(x+1)\cdots\cdots\cdots(x+n+1)}.$$

可知如本題之恆等式對於 n 之某特別值能成立時,則對於其下位較大之數,亦能成立.然 $n=1$ 時,不論 x 之值如

何,本題之恆等式皆能成立,甚明.故其對於 n 爲任何正整數時,亦能成立.

如以特別數值代入於 x,卽得 $c_0, c_1, c_2,$…………等之關係式.例如置 $x=1$ 時,得

$$\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}-\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{n+1}.$$

置 $x=\frac{1}{2}$ 時,得

$$\frac{c_0}{1}-\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{5}-\cdots\cdots=\frac{2^n\times n!}{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}$$

是.

131. 多項定理 設 n 爲正整數,則於

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots\cdots+k)^n\cdots\cdots\cdots(1)$$

之展開式,欲求其 $a^pb^qc^r\cdots\cdots(p+q+r+\cdots\cdots=n)$ 之係數時,可先將(1)式改書成 $\{a+(b+c+d+\cdots\cdots+k)\}^n$.將此式依二項定理展開之,則其 a^p 之係數爲

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}(b+c+d+\cdots\cdots\cdots+k)^{n-p}.$$

同理, $(b+c+d+\cdots\cdots k)^{n-p}$ 展開式中 b^q 之係數爲

$$\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)!}(c+d+\cdots\cdots\cdots+k)^{n-p-q}.$$

如此順次計算之,可得(1)式展開式中 $a^pb^qc^r\cdots$之係數爲

$$\frac{n!}{p!(n-p)!}\times\frac{(n-p)!}{q!(n-p-q)}\times\frac{(n-p-q)!}{r!(n-p-q-r)!}\times\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots\cdots}.$$

卽 $$(a+b+c+\cdots\cdots)^n=\Sigma\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}a^pb^qc^r\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

但 $p+q+r+\cdots\cdots\cdots\cdots=n$.

上列關係式,謂之多項定理.

例 1. 求 $(a+b+c)^3$之展開式.

解 a^3, b^3, c^3 之係數爲 1,甚明.又 $a^2b, a^2c, b^2a,\cdots\cdots$等之係數相等,亦甚明.故

$$(a+b+c)^3=(a^3+b^3+c^3)+l(a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b)+mabc.$$

由公式,求得

$$l=\frac{3!}{2!\,1!}=3,\quad m=\frac{3!}{1!\,1!\,1!}=6.$$

$$\therefore\quad (a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc.$$

例 2. 求 $(1+2x+3x^2+4x^3)^4$ 展開式中 x^3 之係數.

此展開式之一般項爲

$$\frac{4!}{p!q!r!s!}\cdot 1^p(2x)^q(3x^2)^r(4x^3)^s.\quad (p+q+r+s=4)$$

$$=\frac{4!}{p!q!r!s!}2^q\cdot 3^r\cdot 4^s\cdot x^{q+2r+3s}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設此項表 x^3 之項時,則

$$q+2r+3s=3.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 $p+q+r+s=4.\ \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

故由(2)及(3)式,求得 p, q, r, s 後代入於(1)式中,即得 x^3 之項.

s	p	q	r
1	3	0	0
0	2	1	1
0	1	3	0

先由(2)式得 $s=1$, 或 $s=0$.

對於 $s=1$ 時,則 $q+2r=0$. 隨之得 $q=0$, $r=0$. 以此二值代入於(3)式中,得 $p=3$.

對於 $s=0$ 時,則 $q+2r=3$. 隨之得 $r=1, q=1$, 或 $r=0, q=3$ 故由 (3) 式,得 $r=1, q=1$ 時, $p=2$; 又 $r=0, q=3$ 時, $p=1$.故得所求之係數爲

$$\frac{4!}{3!\,1!}\cdot 4+\frac{4!}{2!\,1!\,1!}\cdot 2\cdot 3+\frac{4!}{1!\,3!}\cdot 2^3=120.$$

問題二十二

1. 展開下列各式.

(a) $(a+b)^8$, (b) $(3x-y)^3$,

(c) $\left(3x-\frac{1}{3x}\right)^5$, (d) $\left(a^2-\frac{x}{a^3}\right)^{10}$.

2. 設 $\frac{1}{3}(n-2r)$ 不爲正整數時,則 $(x+x^{-2})^{n-3}$ 之展開式中不含 x^{2r} 之項.

3. 求 $\left(x^2+\frac{a^3}{x}\right)^5$ 展開式中 x 之係數.

4. 設 $(a+b)^{20}$ 展開式中第 $3r$ 項之係數與第 $r+2$ 項之係數相等,求其係數之值.

5. 設 n 爲正整數時,證明

$$1-n\frac{1+x}{1+nx}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1+2x}{(1+nx)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1+3x}{(1+nx)^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots=0.$$

6. 設 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{3}$ 時,求 $(a+b)^{300}$ 展開式中之最大項.

7. 知 $(1+x)^n$ 展開式中連續三項之係數爲 6, 15, 20, 求 n 之值.

8. 求下列各式展開式中之最大係數.

(a) $(1+2x)^{20}$, (b) $(a+x)^9$, (c) $(a+x)^3$.

9. 用二項定理求 $99^4, 51^4, 999^3$ 之值.

10. 求 $(1+2x+3x^2)^4$ 展開式中 x^5 之係數.

11. 求 $(2+x-x^2)^5$ 展開式中 x^8 之係數.

12. 求 $(7+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$ 展開式中 x^{10} 之係數.

13. 證明 $c_0-2c_1+3c_2-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)c_n=0$.

14. 證明 $c_1-2c_2+3c_3-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(-1)^n nc_n=0$.

15. 證明 $c_0+2c_1+3c_2+\cdots\cdots\cdots+(n+1)c_n=2^{n-1}(n+2)$.

16. 證明 $c_2+2c_3+3c_4+\cdots\cdots\cdots+(n-1)c_n=1+(n-2)2^{n-1}$.

17. 證明 $c_0+3c_1+5c_2+\cdots\cdots\cdots+(2n+1)c_n=(n+1)2^n$.

18. 證明 $3c_1+7c_2+11c_3+\cdots\cdots+(4n-1)c_n=1+(2n-1)2^n$.

19. 證明 $(a+b+c+d)^4=\Sigma a_4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc$
$+24abcd$.

20. 用數學的歸納法證明

$$(x+a)^n=x^n+c_1a(x+b)^{n-1}+c_2a(a-2b)(x+2b)^{n-2}+\cdots$$
$$\cdots\cdots+c_ra(a-b)^{r-1}(x+rb)^{n-r}+\cdots\cdots+a(a-nb)^{n-1}.$$

21. 用數學的歸納法證明

$$x^n+\frac{1}{x^n}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^n-n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1\cdot 2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^r\frac{n(n-r-1)(n-r-2)\cdots(n-2r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots r}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2r}+\cdots.$$

上式右邊最後之項如 n 爲偶數時,則爲 $(-1)^{\frac{n}{2}}2$;如 n 爲奇數時,則爲 $(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\left(x+\frac{1}{x}\right)$.

第二十一章　或然率

132. 或然率之第一定義　有二事象,其一事象之生起,能期待與其他事象之生起同一程度時,則此二事象之生起,謂之<u>同一確度</u>.例如投一骰子,其1點之面以至於6點之面必有一面現出,而各面之現出能期待爲同一程度,故1點之面以至於6點之面,其各面現出爲同一確度.

某事象於所有各機會之數 n 個中能於 a 個機會生起時,則其事象生起之或然率,或簡稱其事象之或然率,謂之 $\frac{a}{n}$.但此 n 個機會,其生起之確度皆爲同一者.例如投一骰子,對於其1點之面現出之事象,因 $a=1, n=6$,故其或然率爲 $\frac{1}{6}$;又此時對於奇數點之面現出之事象,因 $a=3, n=6$,故其或然率爲 $\frac{3}{6}$ 是.此時 a 個機會,謂之其事象生起之<u>成功機會</u>.其餘 $n-a$ 個機會,謂之其事象生起之<u>失敗機會</u>.

由上述定義,因得結論如下.

定理 1. 一事象必定生起之或然率爲1,(因 $a=n$ 故也)其必不生起之或然率爲0.(因 $a=0$ 故也)

例如於置有白球之袋中任取一球時,則該球爲白球之或然率爲1,爲黑球之或然率爲0是.

定理 2. 一事象生起之或然率爲 p 時,則其事象不生起之或然率爲 $1-p$.

證明 因一事象生起成功機會之數爲 a,所有各機會之數爲 n 時,則

$$p=\frac{a}{n}.$$

而其事象生起失敗機會之數,換言之,卽其事象不生起成功機會之數,爲 $n-a$.故此事象不生起之或然率爲

$$\frac{n-a}{n}, \quad \text{卽} 1-p.$$

例 1. 有盛有白球三個黑球四個赤球五個之布袋,求下述三方面之或然率.(1)取出一球,其球爲白球;(2)取出二球,二球皆爲白球;(3)取出三球,二球爲白球,一球爲黑球.

解 (1) 取出一球時,其方法之數全體爲12,而此數中取出白球之次數爲 3,故其或然率爲 $\frac{3}{12}$.

(2) 取出二球時,其方法之數全體爲 ${}_{12}C_2$,而此數中二球皆爲白球之次數爲 ${}_{3}C_2$,故其或然率爲

$$\frac{{}_{3}C_2}{{}_{12}C_2}=\frac{1}{22}.$$

(3) 取出三球時,其方法之數全體爲 ${}_{12}C_3$,而此數中二球爲白球,一球爲黑球之次數爲 ${}_{3}C_2\times 4$,故其或然率爲

$$\frac{{}_{3}C_2\times 4}{{}_{12}C_3}=\frac{3}{55}.$$

例 2. 袋中有球 n 個,其上各附有 $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ 等號碼.今於此袋中取出五球時,求下述二方面之或然率.(1)附有 1, 2, 3 三號碼之球皆行取出;(2)附有 1, 2, 3 三號碼之

球僅取出一個.

解　由 n 個球中取出五個之各種方法,其數爲 ${}_nC_5$. 就中

(1)　附有 1, 2, 3 三號碼之三球皆在五球之內時,其數爲 ${}_{n-3}C_2$. (因 1, 2, 3 三球以外之二球爲 4, 5, 6, ……, n 等球中之球,而由 4, 5, 6, ……, n 等球中取出二球之方法,其數爲 ${}_{n-3}C_2$ 故也.) 故其或然率爲

$$\frac{{}_{n-3}C_2}{{}_nC_5}=\frac{5\cdot4\cdot3}{n(n-1)(n-2)}.$$

(2)　附有 1, 2, 3 三號碼之三球僅有一個在內時,其數爲 $3\times{}_{n-3}C_4$. (因 1 在內時,則 2, 3 不在其內,故 1 以外之四球爲 4, 5, 6,……,n等球中之球,隨之其含 1 時之數爲 ${}_{n-3}C_4$. 又含 2 或含 3 時,其數亦相等.故全體共爲$3\times{}_{n-3}C_4$.) 故其或然率爲

$$\frac{3\times{}_{n-3}C_4}{{}_nC_5}=\frac{15(n-5)(n-6)}{n(n-1)(n-2)}.$$

例 3.　投二骰子,求其現出點數之和爲 8 時之或然率.

解　將二骰子同時投擲時,其面之現出方法計共有 6^2 種.而此 6^2 種現出方法,皆同一確度.就中二面點數之和爲 8 時,則如下表所示,共有 5 種.

第一骰子	2	3	4	5	6
第二骰子	6	5	4	3	2

故二面點數之和爲 8 之或然率爲 $\frac{5}{6^2}$ 即 $\frac{5}{36}$.

又此題亦可另行解之如下.

別解　將　$(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6)$ ……(1)

$$(b_1x+b_2x^2+b_3x^3+b_4x^4+b_5x^5+b_6x^6)\quad\cdots\cdots(2)$$

二式相乘時,其x^8之係數為

$$(a_2b_6+a_3b_5+a_4b_4+a_5b_3+a_6b_2).\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將上式各項之添數與前表相比較時,可知其中項數等於投二骰子其二面點數之和為 8 時之數.隨之投二骰子其二面點數之和為 8 時之數,等於

$$a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=1,$$

$$b_2=b_3=b_4=b_5=b_6=1.$$

時(3)式之數值;或等於置

$$a_1=a_2=a_3=\cdots\cdots=a_6=1,$$

$$b_1=b_2=b_3=\cdots\cdots=b_6=1.$$

時(1),(2)二式之積中x^8之係數.如將(1),(2)式之積計算之,則為

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2=x^2\frac{(1-x^6)^2}{(1-x)^2}$$

$$=x^2(1-2x^6+x^{12})(1+2x+\cdots\cdots\cdots+7x^6+\cdots\cdots\cdots)$$

$$=x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+5x^8+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

故得二面點數之和為 8 時之數為 5.可知所求之或然率為$\frac{5}{36}$.

133. 或然率之第二定義 有盛有m個球之布袋,設其球中之k個為白球.今於此袋中取出一球後再行納入於袋中,第二次復行取出一球後再行納入於袋中,第三次復行取出一球後再行納入於袋中,如此取納,以迄於N次.設N之值非常大時,則白球被取出之次數,殆等於全體次數

之$\frac{k}{m}$.即假設N_1, N_2,…………等爲非常大數,如上所述,將一球出納N_1, N_2,…………等次,如白球被取出次數各爲r_1, r_2,……,則

$$\frac{r_1}{N_1},\ \frac{r_2}{N_2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等分數皆殆等於$\frac{k}{m}$.(參照後述第 139 節大數法則.)

故設某袋中有球m個,其中白球究有若干不得而知時;設N爲非常大數,則如上述方法,將其中之球取納N次,如其白球被取出之次數爲r,則分數$\frac{r}{N}$必與$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots\cdots, \frac{m-1}{m}, 1$等數中任一數大約相等.設$\frac{r}{N}$與$\frac{k}{m}$大約相等時,則設想其袋中之白球爲$k$個,決無大差.(但袋與球不能有任何裝置,如有裝置時,則$\frac{r}{N}$當然不能與$0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \cdots\cdots, 1$中之任一數近似的相等.)

又如用後述第 140 節所論之柏茲定理時,設一袋中盛有m個球,其中白球個數不能明瞭,則如上述,將其中之球取納N次,(N爲非常大數)如其白球被取出次數爲r,而$\frac{r}{N}$大略與$\frac{k}{m}$相等時,則可證明其以後一次試行時白球被取出之或然率大略等於$\frac{k}{m}$.

總合上述事實,設N爲非常大數,於N次試行中某事象生起之次數爲r,則分數$\frac{r}{N}$大略有其一定之值.而此值得視爲代表其後一次試行其事象生起之或然率.故得以此

値爲或然率之定義.此卽或然率之第二定義也.

將一骰子投擲至非常多之次數時,如其骰子之構造處處皆同,則其 1 點之面現出次數,殆等於全體現出次數之 $\frac{1}{6}$.又不正之骰子如投擲至非常多之次數時,則其 1 點之面現出次數與其全體次數之比,亦略有一定之値.此比,卽其骰子 1 點之面現出之或然率也.

又由死亡生存表,設 20 歲之人 93268 人中,其達於 30 歲尙行健在者爲 86292 人時,則以此事實爲基礎,得 20 歲之人此後 10 年間生存之或然率爲 $\frac{86292}{93268}$ 云者,亦係由此或然率之第二定義所得者.

如此,可知第二定義(或謂之經驗的定義)於不能由第一定義(或謂之數學的定義)以決定時,尙能確定其或然率之意義.

134. 反排事象之或然率 有二個以上事象,如其中某一事象生起,則其他各事象決不能生起時,則此諸事象,謂之互相反排.例如投一骰子,其 1 點之面現出與 2 點之面現出,互相反排是.

定理 設 $E_1, E_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, E_m$ 爲互相反排事象,其諸事象之或然率各爲 $p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, p_m$ 時,則此諸事象中任一事象生起之或然率爲 $p_1+p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_m$.

例如投一骰子,其 1 點之面 3 點之面與 5 點之面現出之或然率各爲 $\frac{1}{6}$,而此三事象彼此互相反排,故點數爲奇數之面之現出或然率,爲 $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$,卽 $\frac{1}{2}$ 是.

此定理之證明如下.

證明　設全體機會之數為 n,則 E_1 於 np_1 個機會生起,E_2 於 np_2 個機會生起,以下皆同.而此諸事象同時不能有二個以上生起,故此諸事象中之任一事象,應於 $np_1+np_2\cdots\cdots+np_m$ 個之機會生起.故其或然率為

$$\frac{np_1+np_2+\cdots\cdots+np_m}{n}=p_1+p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_m.$$

135. 獨立事象及從屬事象之或然率　有二個以上事象,如其中某事象不拘其生起與否,其他事象生起之或然率皆一定不變時,則此諸事象,謂之彼此獨立.否則謂之互相從屬.

連續二次投一骰子時,其第一次 1 點之面之現出,與第二次 1 點之面之現出,為彼此獨立.又由盛有白球三個,黑球四個之袋中,連續二次各取出一球時,其第一次之白球現出,與第二次之白球現出,則為互相從屬.因設第一次取出者為白球時,則第二次白球現出之或然率為 $\frac{2}{6}$;而第一次取出者非白球時,則第二次白球現出之或然率為 $\frac{3}{6}$ 故也.

獨立事象與從屬事象,有時總括之稱為複合事象.茲將關於獨立事象與從屬事象之定理述之於下.

定理 1.　設 $E_1, E_2, \cdots\cdots\cdots, E_m$ 為獨立事象,其或然率各為 $p_1, p_2, \cdots\cdots\cdots, p_m$ 時,則此諸事象悉數生起之或然率為 $p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot p_m$.

例如連續二次投一骰子時,其 1 點之面連續現出二次

之或然率爲$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$,即$\frac{1}{36}$是.

定理 2. 設$E_1, E_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, E_m$爲從屬事象,其$E_1$之或然率爲$p_1$,假定$E_1$生起後$E_2$之或然率爲$p_2$,又假定$E_1, E_2$,皆生起後$E_3$之或然率爲$p_3$,如此順次類推時,則$E_1, E_2, \cdots\cdots\cdots, E_m$悉數生起之或然率爲$p_1\cdot p_2\cdot\cdots\cdots\cdots\cdots\cdot p_m$.

例如於盛有白球三個黑球四個之布袋中連續二次各取出一球時,則白球連續二次被取出之或然率爲

$$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$$

是.

上述二定理之證明,完全相同.茲將$m=2$時之證明法,揭之於下.至其一般之證明,則可用數學的歸納法以證明之.

證明 設E_1, E_2爲二個獨立事象或二個從屬事象,

E_1, E_2共同生起時之數爲α,

E_1生起E_2不生起時之數爲β,

E_1不生起E_2生起時之數爲γ,

E_1, E_2共同皆不生起時之數爲δ,

但此$\alpha+\beta+\gamma+\delta$個機會,其生起之確度,皆屬相同.

因所有各機會之數爲$\alpha+\beta+\gamma+\delta$,其$E_1, E_2$共同生起時之數爲$\alpha$,故設以$p$表$E_1, E_2$雙方皆行生起時之或然率,則

$$p=\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

又於E_1生起之所有機會,其E_2生起時之數爲α, E_2不生

起時之數為 β,故E_1生起之或然率p_1為

$$p_1=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}.$$

如E_1生起時,則E_2於 $\alpha+\beta$ 個機會中之 α 個生起之,故其或然率p_2為

$$p_2=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

因得 $$p=p_1p_2.$$

136. 例解

例 1. 有 A,B 二袋,A袋中盛有白球三個黑球五個,B袋中盛有白球四個黑球六個,今任意置手於二袋中之一袋取出二球時,求其二球皆為白球之或然率.

解 先求置手於 A,B 二袋中一袋之或然率,得置手於 A 袋中之或然率為 $\frac{1}{2}$.

設手置入於 A 袋中時,則其取出二白球之或然率為

$$\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}.$$

故得置手於 A 袋中取出二白球之或然率為

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{56}.$$

同理,置手於 B 袋中取出二白球之或然率為

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{15}.$$

但置手於 A 袋中與置手於 B 袋中為反排事象,故得所求之或然率為

$$\frac{3}{56}+\frac{1}{15}=\frac{101}{840}.$$

例 2. 甲解問題之或然率爲$\frac{1}{4}$,乙解問題之或然率爲$\frac{2}{3}$,今使二人同解一問題時,求其能解之或然率如何.

解 因甲解問題之或然率爲$\frac{1}{4}$,乙解問題之或然率爲$\frac{2}{3}$,

故 甲不能解問題之或然率爲$\frac{3}{4}$,

乙不能解問題之或然率爲$\frac{1}{3}$.

隨之得甲乙二人同能解之或然率 $=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$,

甲能解,乙不能解之或然率 $=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}$,

乙能解,甲不能解之或然率 $=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}$.

因上述三方面事象互相反排,故甲乙二人中最少有一人能解之或然率,爲上述三或然率之和.即

$$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}.$$

此問題亦可解之如下.

別解 甲不能解之或然率爲$\frac{3}{4}$,

乙不能解之或然率爲$\frac{1}{3}$,

故甲乙二人皆不能解之或然率$=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$.

隨之得甲乙二人中至少有一人能解之或然率爲

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

於二反排事象A, B,其中必有一事象生起時,則此二事象,謂之互爲餘事象.投一骰子時,其奇數點面之現出與偶數點面之現出,卽互爲餘事象也.

餘事象或然率之和爲 1.如例 2 之第二解法,即係利用此種性質者.因甲乙二人中至少有一人能解之事象,與甲乙二人皆不能解之事象互爲餘事象;而由 1 減去甲乙二人皆不能解之或然率時,即得甲乙二人中至少有一人能解之或然率也.

例 3. 有 A,B 二人,依 A,B 順序順次投擲一骰子,公約最初投得骰面之點爲 1 者勝,求 A,B 二人獲勝之或然率各如何.

解　A 之獲勝時如下.

第一次 A 投之,其現出之面爲 1 點時.第一次 A 投之,其現出之面不爲 1 點,第二次 B 投之,其現出之面亦不爲 1 點,待第三次 A 投之,其現出之面爲 1 點時.即第三次現出之面始爲 1 點時.第四次現出之面不爲 1 點,第五次現出之面始爲 1 點時.以下依此類推.

第一次現出之面爲 1 點之或然率 $=\frac{1}{6}$.

第三次現出之面始爲 1 點之或然率

$$=\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}.$$

第五次現出之面始爲 1 點之或然率 $=\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}$.

以下依此類推.

但此諸事象皆彼此反排,故設 A 之獲勝或然率爲 p 時,則

$$p=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\cdot\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{6}{11}.$$

B之獲勝或然率雖可依同法求之,但於求得A之獲勝或然率後,由1減去其或然率卽可.卽B之獲勝或然率爲$\frac{5}{11}$是.

本題亦可另行解之如下.

別解　設A之獲勝或然率爲p,B之獲勝或然率爲q.茲先就B之獲勝時研究之.如第一次A投出1點之面時,則B卽不勝.如第一次A投出1點以外之面時,則第二次輪至於B.此時B之獲勝或然率,變成最初A之所有或然率卽p是.故最初B之所有或然率q,等於第一次A投出1點以外之面之或然率$\frac{5}{6}$,與最初A所有之或然率p之積.卽

$$q=\frac{5}{6}p.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又對於A之獲勝時研究之.如第一次A投出之面爲1點時,則甚佳.(其或然率爲$\frac{1}{6}$)若第一次A投出1點以外之面時,則第二次輪至於B,故A之獲勝或然率變爲最初B之所有或然率q.故

$$p=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}q.\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)與(2)二式以求p, q時,卽得$p=\frac{6}{11}$, $q=\frac{5}{11}$.

於上例,其投至n次爲止,1點之面不現出之或然率卽A與B皆不能勝之或然率爲$\left(\frac{5}{6}\right)^n$.故投至$n$次爲止,$A$或$B$獲勝之或然率爲$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.此值於$n$成無限大之極限成爲1.卽

$$p+q=1.$$

由上式及(1),(2)二式中之一式,卽可求得 p,q 之值.

137. 關於獨立試行之定理

定理 設某事象於一次試行時,其生起之或然率爲 p,不生起之或然率爲 $q.$ $(=1-p)$ 則於 n 次試行時,其事象恰生起 r 次之或然率爲

$${}_nC_r p^r q^{n-r}.$$

例如投一骰子,其 1 點之面現出之或然率爲 $\frac{1}{6}$,不現出之或然率爲 $\frac{5}{6}$.故投一骰子連續至十次,其 1 點之面現出三次之或然率爲

$${}_{10}C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

是.

玆就上例證明本定理於下.

投骰十次,自第一次至第三次 1 點之面連續現出三次,至第四次 1 點之面卽不現之或然率,如置 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{5}{6}$,則爲 p^3q^7.

一般,投骰十次,其特別三次爲 1 點之面現出,餘七次不爲 1 點之面現出之或然率,亦爲 p^3q^7.

但 1 點之面僅現出三次,其餘七次,1 點之面全不出現時之數爲 ${}_{10}C_3$, 且皆彼此反排.故所要求之或然率等於將 ${}_{10}C_3$, 個 p^3q^7 加合之和,卽爲

$${}_{10}C_3p^3q^7.$$

由此定理,可知將 $(p+q)^n$ 依二項定理展開時,其各項卽

表於 n 次試行中,其事象恰生起 n 次, $n-1$ 次,……………
之或然率.

又於 n 次試行中,其事象至少生起 r 次之或然率

$$p^n+{}_nC_{n-1}p^{n-1}q+\cdots\cdots\cdots\cdots+{}_nC_rp^rq^{n-r}$$

如注意及 $(p+q)^n=1$ 時,則可知其能以

$$1-\{q^n+{}_nC_1pq^{n-1}+\cdots\cdots+{}_nC_{r-1}p^{r-1}q^{n-r+1}\}$$

表之.

例如連續十次投一骰子,其1點之面至少現出二次之或然率爲

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{10}+{}_{10}C_9\left(\frac{1}{6}\right)^9\left(\frac{5}{6}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots+{}_{10}C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8$$

或 $$1-\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+{}_{10}C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^9\right\}$$

是.

例: 連續 n 次投一銀幣時,求其表面現出奇數次之或然率,

解 表面僅現出一次之或然率 $={}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

表面恰現出三次之或然率 $={}_nC_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$,

表面恰現出五次之或然率 $={}_nC_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}$,

……………………………………=…………………

……………………………………=…………………

因以上各現出方法皆互相反排,故所求之或然率爲

$${}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_nC_3\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_nC_5\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\{{}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 2^{n-1}=\frac{1}{2}.$$ （見前第130節之II段）

138. 期望金額　設某事象生起之或然率爲p,茲有人約定如其事象生起時,即行收受勝利金 a 元,則此時此人之期望金額,謂之ap元.

又設 $E_1, E_2,$…………等爲反排事象,其生起之或然率各爲 $p_1, p_2,$………… 等,如約定E_1生起時,則得a_1元;E_2生起時,則得a_2元;…………;則此人之期望金額,謂之 $(a_1p_1+a_2p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots)$ 元.

例如投一骰子,其約定 1 點之面現出,則獲勝利金60元之人之期望金額爲

$$\left(60\times\frac{1}{6}\right)\text{元. 即}\quad 10\text{圓.}$$

又投一骰子,如約定 1 點之面現出,則得 1 元;2 點之面現出,則得 2 元;………;6 點之面現出,則得 6 元時;則此人之期望金額爲

$$\left(1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}\right)\text{元}=\frac{7}{2}\text{元}$$

是.

普通舉行之抽彩辦法,爲與期望金額有密切關係者.例如某校舉行紀念會時,於餘興中,聚集全校學生 100 人每人各出銅元20枚,製成百籤.計頭等10籤,每籤得銅元50枚;二等20籤,每籤得銅元30枚;三等20籤,每籤得銅元20枚;四等50籤,每籤得銅元10枚;而令各生抽之,因

抽中頭等之或然率 $p_1=\frac{10}{100}$,

抽中二等之或然率 $p_2=\frac{20}{100}$,

抽中三等之或然率 $p_3=\frac{20}{100}$,

抽中四等之或然率 $p_4=\frac{50}{100}$,

故得各人之期望金額為

$$50^{枚}\times\frac{10}{100}+30^{枚}\times\frac{20}{100}+20^{枚}\times\frac{20}{100}+10^{枚}\times\frac{50}{100}=20\text{枚}.$$

即各人之期望金額,與其所出金額相一致,此種抽彩辦法,由數學上觀察之,當為一種公正之分配.至若一般商店為吸引顧客而舉行之贈彩,及類似賭博之彩票等.將頭二等籤之價值定為非常之高,藉以引動人心,而其籤數極少;同時隨等級愈低,其籤數愈多,結果使

$$a_1p_1+a_2p_2+a_3p_3+\cdots\cdots\cdots\cdots<\text{各人所出金額}$$

而於其間漁利,趨之者實愚不可及.

又關於抽彩先後之利益,一般人皆以為後抽者損,其實不然,玆說明之於下.

設三人抽三籤,其中二籤有彩,由甲先抽時,則其抽中之或然率為 $\frac{2}{3}$.其次為乙抽,則因

甲未抽中乙抽中之或然率 $=\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{3}$,

甲抽中乙亦抽中之或然率 $=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$,

故乙抽中之或然率為 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,與甲相同.再設丙最後

抽之,因

甲抽中,乙亦抽中,丙復抽中之或然率$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 0=0$,

甲未抽中,乙抽中,丙亦抽中之或然率$=\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times 1=\frac{1}{3}$,

甲抽中,乙未抽中,而丙抽中之或然率$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{3}$,

故丙抽中之或然率爲$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,與甲,乙均同.可知抽彩時爭先恐後者,在數學上觀之,亦爲愚人.

139. **大數法則** 設某事象於一次試行時之或然率爲p,則其事象於n次試行中恰生起r次之或然率爲

$${}_nC_r p^r q^{n-r}\quad(q=1-p),$$

已如前第137節所述.如此值以W_r表之,則

$$\sum_{r=0}^{n} W_r=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r p^r q^{n-r}=(p+q)^n=1,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} rW_r&=\sum_{r=1}^{n} r\frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}p^r q^{n-r}\\&=np\sum_{r=1}^{n}\frac{(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{(r-1)!}p^{r-1}q^{n-r}\\&=np\sum_{r=1}^{n}{}_{n-1}C_{r-1}p^{r-1}q^{n-r}\\&=np(p+q)^{n-1}=np,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{r=2}^{n} r(r-1)W_r&=\sum_{r=2}^{n} r(r-1)\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}p^r q^{n-r}\\&=n(n-1)p^2\sum_{r=2}^{n}{}_{n-2}C_{r-2}p^{r-2}q^{n-r}\\&=n(n-1)p^2(p+q)^{n-2}\\&=n(n-1)p^2.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)\end{aligned}$$

將(2),(3)兩式邊邊相加,得

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 W_r = np\{1+(n-1)p\} = np(np+q).$$

$$\therefore \quad \sum_{r=0}^{n}(r-np)^2 W_r = \sum_{r=0}^{n}(r^2-2npr+n^2p^2)W_r$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r^2 W_r - 2np\sum_{r=0}^{n} rW_r + n^2p^2\sum_{r=0}^{n} W_r$$

$$= np(np+q) - 2npnp + n^2p^2 = npq.$$

以n^2除上式之兩邊,因得

$$\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{r}{n}-p\right)^2 W_r = \frac{pq}{n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

設 δ 爲所與任意之小正數,(δ 無論小至如何程度均可)以Σ'表對於滿足

$$\left|\frac{r}{n}-p\right| < \delta.$$

之 r 各值之和,以Σ''表對於滿足

$$\left|\frac{r}{n}-p\right| \geqq \delta.$$

之 r 各值之和時,則

$$\sum_{r=0}^{n}\left(\frac{r}{n}-p\right)^2 W_r = \Sigma'\left(\frac{r}{n}-p\right)^2 W_r + \Sigma''\left(\frac{r}{n}-p\right)^2 W_r$$

$$> \Sigma''\left(\frac{r}{n}-p\right)^2 W_r > \delta^2 \Sigma'' W_r.$$

由(4)式之關係,得

$$\frac{pq}{n} > \delta^2 \Sigma'' W_r. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

又 $\quad \Sigma' W_r + \Sigma'' W_r = \sum_{r=0}^{n} W_r = 1.$

卽 $\quad \Sigma'' W_r = 1 - \Sigma' W_r.$

故由(5)式之關係,得

$$\frac{pq}{n\delta^2}>1-\Sigma' W_r.$$

或 $$\Sigma' W_r>1-\frac{pq}{n\delta^2}.\quad\cdots\cdots(6)$$

上式如以文字敍述之,則爲下述定理.

定理 1. 設某事象於一次試行生起之或然率爲 p,於 n 次試行中生起之次數爲 r 時,則 r 滿足

$$\left|\frac{r}{n}-p\right|<\delta.$$

關係之或然率較 $1-\frac{pq}{n\delta^2}$ 爲大.(但 $q=1-p$, δ 爲任意之小正數)此定理謂之揭悲歇夫之定理.

例如連續六萬次投一骰子,其 1 點之面現出之次數 r 滿足 $\left|\frac{r}{60000}-\frac{1}{6}\right|<\frac{1}{100}$ 之或然率,卽 1 點之面現出次數位於次數 9400 與 10600 間之或然率,較

$$1-\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}{60000\times\left(\frac{1}{100}\right)^2}, \doteqdot 0.976$$

爲大.$\left[此時 p=\frac{1}{6},\ q=\frac{5}{6},\ n=60000,\ \delta=\frac{1}{100}\right]$.

又於(6)式之右邊,如 n 之值增至甚大,可使其任意接近於 1.故得結論如下.

定理 2. 設某事象一次試行之生起或然率爲 p,於 n 次試行中其生起之次數爲 r 時,則對於所與之任意小正數 δ,其

$$\left|\frac{r}{n}-p\right|<\delta$$

之關係能成立之或然率,由 n 之值增至甚大,可使其任意接近於1.

上述結論,如再行淺顯的敍述之,則為

定理 3. 如 n 增至非常大時,其 $\frac{r}{n}$ 約等於 p,殆甚確實.

上述法則,謂之大數法則.

140. 原因之或然率 以上所論者,為依據既知之原因而計算其事象生起之或然率,本節更就觀察事象之生起,而計算其事象由某原因生起之或然率方法,述之於下.

有二布袋,設其中一袋盛有白球 5 個黑球 2 個,而他袋則盛有白球 2 個黑球 4 個.今若置手於二袋中任一袋取出一球時,如求其球為白球之或然率,則為知其原因而求其事象生起或然率之問題.反之,如置手於二袋中任一袋,取出一球,其球為白球時,如求其球由第一袋取出之或然率,即成為由事象而求其原因之或然率問題.

茲將關於原因之或然率之基礎定理,述之於下,

定理 有互相反排之原因 $C_1, C_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, C_n$ 等,此諸原因之生起或然率(事象未生起以前既知原因之或然率)各為 $P_1, P_2, \cdots\cdots\cdots\cdots, P_n$, 其一事象 E 由原因 C_1 所生起之或然率為 p_1,由原因 C_2 所生起之或然率為 p_2 以下類推,如知此事象 E 由此諸原因中某一原因生起時,則此事象真由原因 C_r 所生起之或然率(即事象生起既知原因 C_r 之或然率)為

$$\frac{P_r p_r}{P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots\cdots + P_n p_n}.$$

上述定理,謂之柏兹之定理.

例如有二布袋,其中一袋盛有白球 5 個黑球 2 個,他袋盛有白球 2 個黑球 4 個.今置手於此二袋中任一袋,取出一球,得知其球爲白球,而求其手置入於第一袋中之或然率時;則此問題之原因有二.(1)置手於第一袋中 (C_1),(2)置手於第二袋中 (C_2) 是也.而在不知白球被取出以前,其設想曾經置手於第一袋中,與設想曾經置手於第二袋中,皆有同一之確度,卽 $P_1=P_2=\frac{1}{2}$ 是.

設曾經置手於第一袋中取出一球,則其球爲白球之或然率爲 $\frac{5}{7}$.卽由第一原因,其事象所應生起之或然率 p_1 爲 $\frac{5}{7}$.同理,設曾經置手於第二袋中取出一球,其球爲白球之或然率,卽由第二原因其事象所應生起之或然率 p_2 爲 $\frac{2}{6}$.隨之由白球曾經被取出之事實判斷之,其曾經置手於第一袋中之或然率爲

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}}=\frac{15}{22}.$$

此定理之證明如下.

證明 原因 C_r 生起,且於此原因之下,事象 E 生起之複事象或然率爲

$$P_r p_r. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

隨之於 n 個原因中之任一原因,其事象之生起或然率爲

$$P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots\cdots\cdots+P_np_n.$$

又原因C_r生起,且於此原因之下,事象E生起之複事象,因其事象E已經生起,故其事象可視爲由原因C_r所生起之複事象.如此變換其觀察方法時,此複事象之或然率爲

$$(P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots+P_np_n)\pi_r. \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

上式中之π_r,爲事象既經生起時,其事象眞由C_r所生起之或然率.置(1),(2)二式相等時,得

$$\pi_r=\frac{P_rp_r}{P_1p_1+P_2p_2+\cdots\cdots+P_np_n}.$$

P_r與π_r雖同爲原因C_r之或然率,但P_r爲事象未生起以前所判斷C_r之或然率,π_r爲事象既生起以後所判斷C_r之或然率.於此定義,其P_r謂之原因C_r之事前或然率,π_r謂之其事後或然率.

系　事前或然率皆相等時,則

$$\pi_r=\frac{p_r}{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}.$$

例 1.　袋中有四球,其中白球之數不得而知.今於其中取出一球恰爲白球,求其袋中白球之數爲三之或然率.

解　此問題之原因有五,茲列舉之於下.

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
無白球	一白	二白	三白	四白

此五原因之事前或然率可視爲相等,而

$$p_1=0,\quad p_2=\frac{1}{4},\quad p_3=\frac{2}{4},$$

$$p_4=\frac{3}{4},\quad p_5=1.$$

故所求之或然率 $=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+1}=\dfrac{3}{10}$.

〔注意〕 因 $p_1=0$. 故第一原因之 C_1 如開始卽行除去之,其所得結果亦同.

例 2. 袋中有球 μ 個,今於其中取出一球後再行納返於袋中,如是連取 n 次,其所得者常為白球.求其袋中有白球 $k(k\leqq\mu)$ 個之或然率.

解 此問題原因有 μ 個.(參照例 1 之注意)

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & C \\ \text{一白} & \text{二白} & \mu\text{白} \end{array}$$

設原因 C_r 之事前或然率為 P_r,原因 C_r 眞確時,N 次連續取出白球之或然率 p_r 成為 $\left(\dfrac{r}{\mu}\right)^N$.

故所求之或然率

$$\pi_k=\frac{P_k\left(\dfrac{k}{\mu}\right)^N}{P_1\left(\dfrac{1}{\mu}\right)^N+P_2\left(\dfrac{2}{\mu}\right)^N+\cdots\cdots+P_\mu\left(\dfrac{\mu}{\mu}\right)^N}$$

$$=\frac{P_k k^N}{P_1+P_2\cdot 2^N+\cdots\cdots+P_\mu\cdot\mu^N}.$$

141. 證言之或然率 證言之或然率,不外為原因或然率之一種,茲舉例示之於下.

例 1. 有 A,B 二人,其 A 言中之或然率為 p, B 言中之或然率為 q,求 A,B 二人皆謂已生起事象之眞實生起或然率.

解 對於 A,B 二人一致皆謂已生起時,其原因有二.一

爲其事象實際上已經生起(C_1),其他則爲其事象並未生起(C_2).

如實際上其事象曾經生起時,(設原因C_1爲眞)則A與B一致證言已經生起之或然率(即相當於前條之p_1)爲pq.如實際上其事象並未生起,而A與B一致證言已經生起,則A與B皆未言中.如此,A與B皆言而不中之或然率(即相當於前條之p_2)爲$(1-p)(1-q)$,故其事象眞實生起之或然率爲

$$\pi_1=\frac{P_1pq}{P_1pq+P_2(1-p)(1-q)}.$$

上式中之P_1, P_2,爲原因C_1, C_2之事前或然率.同理,其事象眞實未曾生起之或然率爲

$$\pi_2=\frac{P_2(1-p)(1-q)}{P_1pq+P_2(1-p)(1-q)}.$$

〔未聞A, B二人之言前能爲P_1期待之事象,於既聞A, B二人之言後則能爲π_1之期待也.〕

例 2. 一袋中有球10個,其中9個爲黑球,1個爲白球.今有於20次談話中19次言中之人,證言由此袋中取出一白球.求白球眞由此袋中取出之或然率.

解 C_1白球被取出時,

C_2黑球被取出時.

設C_1, C_2之事前或然率爲P_1, P_2,則$P_1=\frac{1}{10}$, $P_2=\frac{9}{10}$.

若C_1爲眞時,則此人證言白球之或然率p_1爲$\frac{19}{20}$.若C_2爲眞時,則此人證言白球之或然率爲$\frac{1}{20}$.故所求之或然率爲

$$\pi_1=\frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{19}{20}}{\frac{1}{10}\cdot\frac{19}{20}+\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{20}}=\frac{19}{28}.$$

例 3. A曰眞之或然率爲$\frac{3}{4}$,B曰眞之或然率爲$\frac{4}{5}$,C曰眞之或然率爲$\frac{6}{7}$時,求A,B一致皆謂曾經生起而C謂未曾生起事件眞實生起之或然率.但事前或然率,皆屬相等.

解 若其事件爲眞時則A,B證言謂已經生起,C謂未曾生起之或然率(p_1)爲$\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}$.若其事件不眞時,則$A,B$證言謂已經生起,$C$謂未曾生起之或然率$(p_2)$爲$\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{7}$.故所求之或然率爲

$$\frac{\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}}{\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}\times\frac{6}{7}}=\frac{2}{3}.$$

問題二十三

1. 袋中有球n個,其形相同,但各於其上附有1, 2, ……, n等號碼.今於袋中取出二球,求附有1, 2號碼之二球被取出之或然率.

2. 於前問之袋中取出三球時,求其中附有1之號碼之球被取出之或然率.

3. 袋中有白球a個,赤球b個,黑球c個,今於此袋中取出一球,求其球爲白球之或然率.

4. 於問題 3 之袋中取出四球時,求(a)四球均爲白球之或然率;(b)二球爲白球二球爲赤球之或然率.

5. 投三骰子,求其現出點數之和爲 9 之或然率與爲 10之或然率何者爲大.

6. 袋中有白球 5 個,黑球 6 個,今於此中順次取出一球,連取三次時,求其現出順序爲白黑白之或然率如何.

7. 於贈彩籤13條中,計有贈品者僅只 3 條,求第一次抽取者及第二次抽取者之損益如何.

8. 將骰子三粒同時投之,求其中二面點數爲 1 之或然率.

9. 將銀元一枚連投 n 次,(或將銀元 n 枚同時投之)求其表面僅行現出一次(或僅一個)之或然率.

10. 於某種勝負之比賽,其 A 之技倆爲 B 之技倆之二倍;求 B 勝二次之前,A 勝三次之或然率.

11. 將一骰子連投 n 次,求其 1 點之面恰現出 2 次,2 點之面恰現出三次之或然率.

12. 第一袋中有白球一黑球一,第二袋中有白球二黑球一,第三袋中有白球三黑球一;今於此三袋中各取出一球,求其球色配合之方法,以何者爲最多.

13. 袋中置有 1 之號碼之劵 1 枚,2 之號碼之劵 2 枚,3 之號碼之劵 3 枚,…………,n 之號碼之劵 n 枚.今有人約定由此袋中取出一劵,如其號碼爲 r,則得銀 r 元.求此人之期望金額如何.

14. 有人投骰子二粒,約定如其現出點數之和爲 r 時,

則得銀 r 元.求此人之期望金額如何.

15. 有二布袋,第一袋中置有白球 3 個黑球 5 個,第二袋中置有白球 2 個黑球 6 個.今置手於二袋中之任一袋,取出一球,其球爲白球.次納返其球於袋中,再行置手於二袋中之任一袋,復行取出一球,亦爲白球.求二次皆係置手於第一袋中之或然率.

16. 袋中有四球,分黑白二色,今任意取出一球而其球爲白球.求其袋中存有白球三個之或然率.

17. 袋中有四球,今於其中取出一球爲白球時,則將此球納返袋中後再行取出一球,其球爲白球之或然率如何.

18. 甲曰眞之或然率爲 p,乙曰眞之或然率爲 q.今有某事件生起,質之於甲,則謂係聞之於乙者.求某事件眞實生起之或然率.

19. A之談話,四次中有三次爲眞.B之談話,五次中有四次爲眞.今由盛有白球一個黑球九個之袋中任意取出一球時,A, B二人一致皆確言其所取出之球爲白球.求白球眞被取出之或然率.

20. 某法庭由法官12人組成之,其各法官下正當判斷之或然率爲$\frac{9}{10}$,求其宣告判決正當時之或然率.

第二十二章　無限級數

142. 無限級數之性質　級數之項數有限時,謂之有限級數.其項數無限時,謂之無限級數.如前第十六章所研究各級數,即爲有限級數是.本章更就無限級數研究之於下.

設 $u_1, u_2, u_3, \cdots\cdots\cdots\cdots, u_n, \cdots\cdots\cdots\cdots$爲依一定規則排列之各數,其項數無限時,置

$$\begin{aligned}
S_1 &= u_1,\\
S_2 &= u_1+u_2,\\
S_3 &= u_1+u_2+u_3,\\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
S_n &= u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n,
\end{aligned}$$

則隨 n 之漸次增加,S_n 之結果,不外下述三種.

I.　S_n 隨 n 增至成無限大時,漸次接近於一定之有限值 S;換言之,即可使 S 與 S_n 之差,較任何小之正數 ε 爲小.即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

時,則無限級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$, 謂之收斂.或謂之收斂於 S.其 S 則謂之無限級數之和.

〔注意〕 無限級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 之和，爲使 n 增加成無限大時 S_n 之極限值，與通常所謂之和，其意義稍有不同．故求無限級數之和時，不可任意變更其項之順序．

II. S_n 隨 n 增加至成無限大時，其絕對值亦漸次增加至較任何大之正數爲大；即

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\pm\infty$$

時，則無限級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$，謂之發散．

III. S_n 隨 n 之增加，不成無限大，亦不取一定之有限值，常與 n 之變化而變化時，則無限級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$，謂之振動．

玆就等比級數

$$a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^n+\cdots\cdots$$

說明其收斂，發散，振動之各性質如下．

I. $-1<r<1$ 時．

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$

$$=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

然 $\quad -1<r<1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$.

隨之 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{a}{1-r}$.

可知 $-1<r<1$ 時，此級數爲其和等於 $\dfrac{a}{1-r}$ 之收斂級數．

II. $r=1$ 時．

$$S_n=a(1+1+1+\cdots\cdots+1)=an.$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

可知 $r=1$ 時,此級數發散.

III. $r>1$ 或 $r<-1$ 時.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

然 $\quad |r|>1$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \pm\infty.$

隨之 $\quad \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \pm\infty.$

可知 $r>1$ 或 $r<-1$ 時,此級數亦均發散.

IV. $r=-1$ 時.

$$S_n = a(1-1+1-1+1-\cdots\cdots\cdots).$$

此時如取偶數個項,其和爲 0;取奇數個項,其和爲 a. 卽不拘 n 爲任何正數,其

$$S_{2n}=0, \quad S_{2n+1}=a.$$

故此級數雖取有限之値,但其和由 n 之變化而異.卽 $r=-1$ 時,此級數振動於 0 與 a 間.

於無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots,$$

其第 n 項以後之級數

$$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

謂之原級數之剩餘.通常皆以符號 R_n 表之.由上述定義,當易於推得下述定理.

定理 1. 無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots$$

收斂之必要且兼充分條件,爲 n 增加成無限大時,則 R_n 較

任何小之正數爲小.卽

$$\lim_{n\to\infty} R_n=0.$$

系. 於收斂級數,如使 n 充分增加,則 $n+1$ 項之值,卽開始減少,待 $n\longrightarrow\infty$ 時,減少至成爲 0. 卽

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0.$$

此因 $\lim_{n\to\infty} u_n\neq0$ 時,則, $\lim_{n\to\infty} R_n\neq0$ 故也.

定理 2. 判定無限級數之收斂,發散,或振動諸性質時,雖將其最初有限數項除去之,亦屬無礙.

證明 因級數 n 項之和 S_n,不關其級數之收斂或發散,常爲有限之值;故雖省去此諸項,其 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不過增減一有限數值,與其收斂或發散等之判定,毫無影響.

143. 正項級數

定理 1. 正項級數之各項悉較某有限數(雖任何小之有限數均可)爲大時,則此級數爲發散級數.

證明 於無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots.$$

設其各項皆較某有限數 a 爲大時,則

$$S_n>na.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_n>\lim_{n\to\infty} na=\infty$$

例 1. 判定 $\frac{1}{2}+\frac{1+x}{2+x}+\frac{1+2x}{2+2x}+\cdots\cdots+\frac{1+(n-1)x}{2+(n-1)x}+\cdots\cdots\cdots.$ (但 $x>0$)

解 因其一般項與 $\frac{1}{2}$ 之差爲

$$\frac{1+(n-1)x}{2+(n-1)x}-\frac{1}{2}=\frac{(n-1)x}{2\{2+(n-1)x\}},$$

故 $n>1$ 時,(即除初項以外之各項)各項悉較 $\frac{1}{2}$ 爲大.隨之此級數爲發散級數.

定理 2. 正項級數中後項對於其相隣前項之比,不拘 n 之值如何,常較小於 1 之數 k 爲小時,則此級數爲收斂級數.

證明 於無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots,$$

其 $\frac{u_2}{u_1}<k,\quad \frac{u_3}{u_2}<k,\cdots\cdots,\frac{u_n}{u_{n-1}}<k,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}<k,\cdots\cdots,$ 而 $k<1$,

則

$$\begin{aligned}S&=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\\&=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_1}+\cdots\cdots+\frac{u_n}{u_1}+\cdots\cdots\cdots\right)\\&=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\cdots+\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\right.\\&\qquad\left.\cdots\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right)\\&<u_1(1+k+k^2+\cdots\cdots+k^{n-1}+\cdots\cdots)=u_1\frac{1}{1-k}.\end{aligned}$$

即 $\quad S<u_1\frac{1}{1-k}.$

故 S 爲有限級數.但此級數爲正項級數,無振動之事.可知必爲收斂級數.

定理 3. 正項級數中後項對於其相隣前項之比,皆較大於 1 之數 k 爲大時,則此級數爲發散級數.

證明 由假定,其

$$\frac{u_2}{u_1}>k,\ \frac{u_3}{u_2}>k,\ \cdots\cdots,\frac{u_{n+1}}{u_n}>k,\ \cdots\cdots,\text{而 } k>1,$$

$$\therefore\quad u_1<u_2<u_3<\cdots\cdots<u_n<u_{n+1}<\cdots\cdots\cdots.$$

隨之 $$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n>nu_1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} S_n>\lim\ nu_1=\infty.$$

定理2及3總括之,則爲 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$ 時,則無限級數收斂;如 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$ 時,則無限級數發散.因此定理係由法國算學家打蘭柏路所發見者,故亦謂之打蘭柏路之定理,爲判定正項級數收斂性時常用之定理.

例 2. 判定 $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

解 $$\because\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{n+1},$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=0<1,$$

故此級數爲收斂級數.

例 3. 判定 $\frac{1!}{x}+\frac{2!}{x^2}+\frac{3!}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{n!}{x^n}+\cdots\cdots\cdots.$ 但 $(x>0)$.

解 $$\because\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n+1}{x}.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\infty>1.$$

故此級數爲發散級數.

例 4. 判定 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots.$

解 $$\because\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+1},$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

即此級數不能由打蘭柏路之方法以判定之.(見下述定理 5)

定理 4. 於二正項級數

$$A=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots,$$

$$B=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots;$$

I. 設 A 為收斂級數而 B 之各項皆較與其對應之 A 級數中各項為小時則 B 亦為收斂級數.

II. 設 A 為發散級數而 B 之各項皆較與其對應之 A 級數中各項為大時,則 B 亦為發散級數.

證明 I. 因不拘 r 之值如何,皆 $u_r>v_r$. 隨之 $B<A$. 但 A 有其一定值,故 B 亦有其一定值.即 B 亦為收斂級數.

II. 可依 I 段之證明方法,同樣以證明之.茲不贅.

例 5. 設 a, b, x 各為正數,且 $a<b$ 時,證明

$$\frac{(a+x)}{(b+x)}+\frac{(a+x)(2a+x)}{(b+x)(2b+x)}+\frac{(a+x)(2a+x)(3a+x)}{(b+x)(2b+x)(3b+x)}+\cdots$$

為收斂級數.

解 因 a, b, x 各為正數,且 $b>a$ 故設 $r>1$ 時,則

$$\frac{ra+x}{rb+x}<\frac{a+x}{b+x}.$$

故所與無限級數之各項小於下列無限級數中與其對應之各項.

$$\frac{a+x}{b+x}+\frac{(a+x)^2}{(b+x)^2}+\frac{(a+x)^3}{(b+x)^3}+\cdots\cdots\cdots.$$

但上列級數為等比級數,其公比為 $\frac{a+x}{b+x}$,而 $\frac{a+x}{b+x}<1$,由

定理 2, 此級數爲收斂級數.故所與級數亦爲收斂級數.

定理 5. 正項級數 $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\cdots\cdots\cdots$, 於 $p>1$ 時收斂,於 $p\leqq 1$ 時發散.

證明 I. $p>1$ 時

將所與級數分爲各羣如下.

第一羣	$\frac{1}{1^p}$,	一項.
第二羣	$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}$,	二項.
第三羣	$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}$,	四項.
第四羣	$\frac{1}{8^p}+\frac{1}{9^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{14^p}+\frac{1}{15^p}$,	八項.
	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,	$\cdots\cdots$.
	$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$,	$\cdots\cdots$.

於第二羣,其 $\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}}$.

於第三羣,其 $\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{7^p}<\frac{4}{4^p}=\frac{1}{2^{2p-2}}$.

於第四羣,其 $\frac{1}{8^p}+\cdots\cdots+\frac{1}{15^p}<\frac{8}{8^p}=\frac{1}{2^{3p-3}}$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$.

故所與級數較等比級數

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{2p-2}}+\frac{1}{2^{3p-3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲小.但此等比級數之公比爲 $\frac{1}{2^{p-1}}$, 而 $p>1$ 時 $\frac{1}{2^{p-1}}<1$. 故

由定理 2,此級數為收斂級數.隨之所與級數亦為收斂級數.

II. $p=1$ 時

此時所與級數成為

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots.$$

第一羣 $=1.$

第二羣 $=\frac{1}{2}.$

第三羣 $=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$

第四羣 $=\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{8}>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$

$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$

$\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$

如上法所分之羣其各羣皆較 $\frac{1}{2}$ 為大,卽

$$S>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2}+\cdots\cdots\cdots.$$

由定理 1,可知所與級數發散.

III. $p<1$ 時

$$\because\quad 2^p<2,\quad 3^p<3,\quad 4^p<4,\ \cdots\cdots n^p<n,\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad S>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由(II)段結果,$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots$ $\because$ 發散.故所與級數亦發散.

〔注意 1〕 $p=1$ 時,此級數謂之調和級數,如例 4 所示,不能由打蘭柏路之方法以審察其收斂與否.

〔注意 2〕 調和級數最初百萬項之和僅及21,故其以

後各項之和成無限大.

例 6. 判定 $\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

解 因所與級數為於調和級數中省去其最初14項者,故由第 142 節定理 2 及本節定理 5,此級數為發散級數.

例 7. 判定 $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$.

解 因所與級數係於定理 5 中之級數置 $p=3$ 而得者,由定理 5,故為發散級數.

定理 6. 設二正項級數各對應項之比皆為定值時,則此二級數同為收斂級數,或同為發散級數.

證明 設二正項級數為

$$A=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots,$$

$$B=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots.$$

因二級數各項皆為正數,故由第88節之定理 1,其 $\frac{A}{B}$ 必介於最大值之分數 $\frac{u_r}{v_r}$ 及最小值之分數 $\frac{u_s}{v_s}$ 間.故 $\frac{A}{B}$ 之值亦為有限值.隨之如 A 之值有限;則 B 之值亦屬有限;如 A 之值無限,則 B 之值亦屬無限.卽本定理已被證明.

例 8. 判定 $\frac{8}{2\cdot3}+\frac{16}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{8n}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\cdots$.

解 因所與級數與

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

級數各對應項之比為

$$\frac{8r}{(r+1)\,(r+2)}\div\frac{1}{r}=\frac{8r^2}{(r+1)\,(r+2)},$$

不拘 r 之值如何,皆 $1<\frac{8r^2}{(r+1)(r+2)}<8$. 而由定理 5, $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots$ 爲發散級數.故所與級數亦爲發散級數.

144. 交錯級數 正項級數之審斂法,已如前第 143 節所述.茲更將含有正項及負數之無限級數審斂法研究之於下.

所謂含有正項及負項之級數,當係指其所含之正負項俱係無限項而言.因設級數中所含之正項或負項爲有限項時,則將此級數分爲二部分,使其各正項爲一部分,各負項爲一部分;如負項之數有限,則負項部分之級數爲有限級數,而正項部分之級數爲正項無限級數;如正項之級數有限,則悉變其負項部分之符號,亦得一正項無限級數,此正項級數已於第 143 節中曾經研究之故也.

定理 1. 於含有正負項之級數,若將其負項悉變爲正項後所得之級數仍行收斂時,則此級數爲收斂級數.

證明 設 $A=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots$.

爲含有正負項之級數,將此級數之負項悉變正項後所得之級數爲

$$B=u^1{}_1+u^1{}_2+\cdots\cdots+u^1{}_n+\cdots\cdots\cdots,$$

則 $\qquad A<B.$

但 B 有一定之值,故 A 亦有一定之值.卽 A 爲收斂級數.

將含正負項級數之負項悉數變爲正項後其級數仍行收斂時,則此級數謂之絕對收斂級數.又含有正負項之級

數雖屬收斂,但如將其負項悉變爲正項後即行發散時,則此級數謂之條件收斂級數.

例 1. 判定$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots\cdots\cdots\cdots$.

解 將所與級數之負項悉變爲正項時,則成

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由第 143 節之定理 5, 上列級數爲收斂級數.故所與級數爲絕對收斂級數.

如例 1 所示之級數,其正負項交互排列時,謂之交錯級數.

定理 2. 於交錯級數

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

設$u_1>u_2>u_3>u_4>\cdots\cdots\cdots u_n>\cdots\cdots$時,則此級數之和必爲正數,且較$u_1$爲小.

證明 由初項數起,設其偶數個項之和爲S_{2n},奇數個項之和爲S_{2n+1},即

$$S_{2n}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+u_{2n-1}-u_{2n},$$

$$S_{2n+1}=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}+u_{2n+1},$$

時,因上列二級數可改書成

$$S_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots\cdots+(u_{2n-1}-u_{2n}),\ \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$S_{2n+1}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots\cdots\cdots-(u_{2n}-u_{2n+1}),\cdots(2)$$

之形式,而(1)式括弧內之數悉爲正,故

$$S_{2n+1}>S_{2n}>0.$$

又(2)式括弧內之數亦悉爲正,故

$$u_1 > S_{2n+1}.$$

$$\therefore \quad u_1 > S_{2n+1} > 0.$$

定理 3. 於交錯級數

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

設 (1) $u_1 > u_2 > u_3 > \cdots\cdots > u_n >, \cdots\cdots\cdots\cdots,$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

時,則此級數爲收斂級數.

證明 由定理 2,此級數之和爲有限值,故不發散.次設 n 項以下之和爲 R_n 時,則

$$R_n = \pm(u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - u_{n+3} + \cdots\cdots\cdots\cdots).$$

又由定理 2,

$$u_n > u_n - u_{n+1} + u_{n+2} - \cdots\cdots > 0.$$

由假設, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. 故 R_n 之極限爲 0.故此級數爲收斂級數.

上述定理,謂之來卜尼兹之定理.

例 2. 判定 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots\cdots\cdots\cdots.$

解 此級數由定理 3 雖可知其爲收斂級數,但將其負項悉變爲正項後所得之級數

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

由第 143 節之定理 5,爲發散級數.故所與級數爲條件收斂級數.

145. 關於無限級數移項之定理 於有限級數,雖任意變更其項之順序,其和不變.而於無限級數則不然,此事已

於第 142 節注意中述及之,茲更舉例說明之於下.

於無限級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots,\quad(1)$$

因 $u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots$, 且 $u_n=\frac{\pm1}{n}$,故 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pm1}{n}=0$.

故由第 144 節之定理 3,此級數爲收斂級數.設將此級數之順序變更之,使其一正項之後隨以二負項成

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

時,以 S_n 代(1)式 n 項之和,T_n 代(2)式 n 項之和,則

$$\begin{aligned}T_{3n}&=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}\right)-\frac{1}{4n}\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)\\&=\frac{1}{2}S_{2n}.\end{aligned}$$

同理, $T_{3n+1}=\frac{1}{2}S_{2n}+\frac{1}{2n+1}$,

$$T_{3n+2}=\frac{1}{2}S_{2n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}.$$

然 $\frac{1}{2n+1}$ 及 $\frac{1}{4n+2}$ 於 n 成無限大時,其極限值皆爲 0.故於 $n\longrightarrow\infty$ 之極限,T_{3n}, T_{3n+1}, T_{3n+2} 皆等於 $\frac{1}{2}S$.故其結果不同.

茲將關於無限級數移項之定理述之於下.

定理 1. 收斂之正項級數,雖任何變更其項之順序,仍行收斂,其和相同.又發散之正項級數,雖任何變更其項之順序,仍亦發散.

證明 設所與正項級數為

$$S=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots,\quad(1)$$

變更其項之順序後之級數為

$$T=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots.\quad(2)$$

設級數(1)收斂時其和為 S,則不論 ε 為如何小之正數,對於無限大之 n,其

$$S_n>S-\varepsilon$$

不等式能成立.又級數(2)含有級數(1)之所有項,故令

$$T_p=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_p,$$

將 p 之值取至充分大使 T_p 含有 S_n 之所有項時,則

$$S>T_p\geqq S_n>S-\varepsilon.$$

$$\therefore\quad T_p>S-\varepsilon.$$

隨之對於 $q\geqq p$ 之 q,皆

$$T_q>S-\varepsilon.$$

又級數(2)決不能含級數(1)以外之項,故不論 q 之值如何大,皆

$$S\geqq T_q.$$

$$\therefore\quad S\geqq T_q>S-\varepsilon.$$

因 ε 無論如何小之正數均可,故於其極限,得

$$S=T.$$

即原級數(1)收斂時,則級數(2)亦收斂,其和 T 等於原級

數之和.

再級數(1)發散時,級數(2)亦不可不發散,因設級數(2)不發散時,則因正項級數不能振動,故必收斂.隨之將級數(3)之項之順序變更之,使成級數(1)時,由本定理之前段,級數(1)亦不可不收斂,與假定相矛盾.故級數(2)必發散.

定理 2. 含正負項之級數如爲絕對收斂時,則不論如何變更其項之順序,仍行收斂,其和相同.

證明 設 $$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

爲一般含正負項之絕對收斂級數,即設 $u_1, u_2, \cdots\cdots$ 悉爲負或一部分爲正,他部分爲負時,則由假定,其

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots+|u_n|+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

爲收斂級數.故

$$(u_1+|u_1|)+(u_2+|u_2|)+(u_3+|u_3|)+\cdots\cdots(3)$$

亦爲收斂級數,其中決無負項.次變更級數(1)之順序使成

$$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(4)$$

同時作成下列級數

$$|v_1|+|v_2|+|v_3|+\cdots\cdots+|v_n|+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(5)$$

時,因級數(2)爲收斂之正項級數,故級數(5)亦爲收斂級數.級數(5)既爲收斂級數,則由第 144 節之定理 1,其級數(4)亦爲收斂級數.設級數(1),(2),(3),(4)之和各爲 S, S', S'', S''',則由級數(4)及(5),作成

$$(v_1+|v_1|)+(v_2+|v_2|)+(v_3+|v_2|)+\cdots\cdots\quad(6)$$

時,則此級數亦爲收斂級數,其和與(3)無異,故其和爲 S''.

然由級數(1),(2),(3),得

$$S+S'=S''.$$

又由級數(4),(5),(6),得

$$S'''+S'=S''.$$

$$\therefore\quad S=S'''.$$

146. 複項級數

定理 1. 於二無限級數

$$A=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$B=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

設 A 爲收斂級數而 B 之各項皆不較某一定數爲大時,則

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

亦爲收斂級數.

證明 設級數 B 之各項皆不較某一定數 k 爲大時,則

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n<ku_1+ku_2+\cdots\cdots+ku_n.$$

但 $ku_1+ku_2+\cdots\cdots+ku_n=k(u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n)=kS_n.$

$\because\quad \lim\limits_{n\to\infty}S_n=S,$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty}kS_n=k\lim\limits_{n\to\infty}S_n=kS.$

$\therefore\quad u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots<kS.$

即 $u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots$ 爲收斂級數.

定理 2. 於二無限級數

$$A=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots,$$

$$B=v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots,$$

設 A 爲發散級數而 B 之各項皆不較某一定數爲小時,則

$$u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots\cdots$$

亦爲發散級數.

證明 設級數 B 之各項皆不較某一定數 k 爲小時,則

$$u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n>ku_1+ku_2+\cdots\cdots+ku_n.$$

但 $ku_1+ku_2+\cdots\cdots+ku_n=k(u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n)=kS_n.$

∵ $\lim\limits_{u\to\infty}S_n=\infty,$

∴ $k\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty.$

∴ $u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots>k\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty.$

即 $u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots$ 爲發散級數.

定理 3. 設交錯級數 $u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots$ 其 $u_1>u_2>u_3>\cdots\cdots>u_n>\cdots\cdots$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,同時正負項級數 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots$ 收斂或有限的振動時,則 $u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots\cdots$ 爲收斂級數.

證明 置 $S_n=v_1+v_2+\cdots\cdots\cdots+v_n$ 時,則有下列之恆等式存在.

$$v_1u_1+v_2u_2+\cdots\cdots+v_nu_n=S_1(u_1-u_2)$$
$$+S_2(u_2-u_3)+\cdots\cdots+S_{n-1}(u_{n-1}-u_n)+S_nu_n.$$

因 $u_1>u_2>u_3>\cdots>u_n$, 故無限級數 $(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+\cdots\cdots$ 之各項皆爲正,且其 n 項之和爲 u_1-u_n 又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 故此級數爲收斂級數.然由假定,級數 $v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ 收斂或有限的振動,故設此級數 r 項之和爲 S_r,則其對於某一定數 k 常有下式之關係.

$$|S_r|<k.\quad r=1,2,3,$$

故 $\sum\limits_{r=1}^{\infty}S_r(u_r-u_{r+1})$ 爲收斂級數.又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_nu_n=0.$ 因 $u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots=\lim\limits_{r\to\infty}\Sigma S_r(u_r-u_{r+1})+\lim\limits_{n\to\infty}S_nu_n$, 故 $u_1v_1+u_2v_2+\cdots\cdots+u_nv_n+\cdots\cdots$ 亦爲收斂級數.

定理 4. 設二無限級數

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots$$

$$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數,其極限值各爲S, T,又其中一級數爲絕對收斂時,則

$$u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_1)+\cdots$$

亦爲收斂級數,其極限值等於S, T之相乘積.

證明 置 $S_n=u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$,

$$T_n=v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n,$$

$$U_n=u_1v_1+(u_1v_2+u_2v_1)+\cdots\cdots+(u_1v_n+u_2v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_1),$$

且假定$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$爲絕對收斂級數時,則

$$S_nT_n=U_n+V_n.$$

但

$$\begin{aligned}V_n=&u_2v_n+u_3v_{n-1}+\cdots\cdots+u_nv_2\\&+u_3v_n+\cdots\cdots+u_nv_3\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+u_nv_n\\\hline=&u_2v_n+u_3(v_n+v_{n-1})+\cdots\cdots+v_n(v_n+v_{n-1}+\cdots\cdots+v_3+v_2).\end{aligned}$$

設 n 爲偶數卽 $n=2m$ 時,則

$$V_n=\{u_2(v_{2m})+u_3(v_{2m}+v_{2m-1})+\cdots\cdots+u_m(v_{2m}+\cdots\cdots+v_{m+2})+u_{m+1}(v_{2m}+\cdots\cdots+v_{m+1})+\cdots\cdots+u_{2m}(v_{2m}+\cdots\cdots+v_2)\}.$$

設 n 爲奇數卽 $n=2m+1$ 時,則

$$V_n=\{u_2v_{2m+1}+u_3(v_{2m+1}+v_{2m})+\cdots\cdots+u_m(v_{2m+1}+\cdots\cdots+v_{m+3})$$

$$+u_{m+1}(v_{2m+1}+\cdots\cdots+v_{m+2})+\cdots\cdots+u_{2m+1}(v_{2m+1}+\cdots+v_2)\}.$$

然由假定, $v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ 爲收斂級數,故 m 之值取至充分大時,則

$$|v_{2m}|,\quad |v_{2m}+v_{2-1}|,\cdots\cdots\cdots\cdots,|v_{2m}+\cdots\cdots+v_{m+2}|,$$

及

$$|v_{2m+1}|,\quad |v_{2m+1}+v_{2m}|,\cdots\cdots\cdots\cdots,|v_{2m+1}+\cdots\cdots+v_{m+3}|,$$

可使較任何小之正數 ε_m 爲小.(此處 ε 之下方附以 m 字者,表示其 ε 由 m 之值而變化也.)

又因 $v_1+v_2+\cdots\cdots+v_n+\cdots\cdots$ 爲收斂級數,故

$$|v_{2m}+\cdots\cdots\cdots\cdots+v_{m+1}|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$|v_{2m}+\cdots\cdots\cdots\cdots+v_2|,$$

及

$$|v_{2m+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+v_{m+2}|,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$|v_{2m+1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+v_2|,$$

等皆爲有限數.設其中之最大者爲 h, 則

$$|V_n|<\varepsilon_m(|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots\cdots\cdots+|u_m|)$$
$$+h(|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\cdots\cdots\cdots\cdots+|u'_n|).$$

上式中之 u'_n, 於 n 爲偶數時表 u_{2m},n 爲奇數時表 u_{2m+1}.

因 $u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots$ 爲絕對收斂級數,故 $|u_2|+|u_3|+\cdots\cdots+|u_m|$ 爲有限數,而 $|u_{m+1}|+|u_{m+2}|+\cdots\cdots+|u'_n|$ 於 n 成爲無限大時之極限値爲 0.(因 n 成無限大時,m 亦成無限大故也.)

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}|V_n|=0.$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_nT_n=\lim_{n\to\infty}U_n.$$

$$\text{即}\quad \lim_{n\to\infty}U_n=S\cdot T.$$

147. 冪級數 凡形式爲

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

之級數,謂之冪級數.其 x 爲變數而 $a_0, a_1, a_2,\cdots$ 等則爲常數.

由第 144 節之定理 1,設正項級數

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots\cdots\cdots+|a_nx^n|+\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

收斂時,則級數(1)亦收斂,甚明.又級數(1)之收斂與發散,由其 x 之值而定.故下述定理至爲重要.

定理 1. $x=b$ 時,設無限級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots+a_nx^n+\cdots\cdots\cdots$$

各項之絕對值較某有限正數 c 爲小,則 $|x|<|b|$ 時,此級數爲絕對收斂級數.

證明 因對於 n 之各值,皆

$$|a_nb^n|<c.$$

隨之對於 n 之各值,其

$$|a_nx^n|=|a_nb^n|\cdot\left|\frac{x}{b}\right|^n<c\left|\frac{x}{b}\right|^n.$$

故
$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

之各項較

$$c+c\left|\frac{x}{b}\right|+c\left|\frac{x}{b}\right|^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

之對應項爲小.

然級數(2)爲等比級數,於 $\left|\frac{x}{b}\right|<1$ 即 $|x|<|b|$ 時收斂.當級數

(2)收歛時,隨之級數(1)亦收歛,例如級數 $1+2x+x^2+2x^3+\cdots\cdots$ 於 $|x|<1$ 時收歛是.

系 1. 設 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 於 $x=b$ 時收歛,則於 $|x|<|b|$ 時,此級數爲絕對收歛級數.

系 2 設 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 於 $x=b$ 時發散,則於 $|x|>|b|$ 時,此級數亦發散.

此因 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 對於絕對值較 b 爲大之 x 值收歛時,則於 $x=b$ 時,亦不可不收歛故也.

由上述二系結果,設使 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 收歛之 x 各正值指定 A_1 級,使 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 發散之 x 各值指定 A_2 級時,則 A_1 級各數,皆較 A_2 級各數爲小.隨之 A_1 中有最大數存在,或 A_2 中有最小數存在,二者必居其一.設此數爲 λ,則 λ 表級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 之收歛界限.此級數於 $|x|<\lambda$ 時,絕對收歛,而於 $|x|>\lambda$ 時發散.

例如級數 $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots$,及 $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots\cdots$ 之收歛界限 λ 爲 1; $x=\lambda=1$ 時,$x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\cdots$ 發散,而 $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\cdots\cdots$ 收歛是.

定理 2. 於級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$,設其比 $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 接近於某一定極限 μ 時,則 μ 爲其收歛界限.

證明 由第 143 節定理 2 及 3,級數

$$|a_0|+|a_1x|+|a_2x^2|+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於 $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|<1$ 即 $|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ 時收歛,而於 $\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right|>1$ 即

$|x|>\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$時發散.故 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ 之極限值 μ,爲此級數之收斂界限.

例 1. 求 $1+\dfrac{3}{5}x+\dfrac{3\cdot5}{5\cdot10}x^2+\cdots\cdots+\dfrac{3\cdot5\cdots\cdots(2n+1)}{5\cdot10\cdots\cdots\cdots5n}x^n+\cdots\cdots$ 之收斂界限.

解 $\because\quad \dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{5(n+1)}{2n+3}=\dfrac{5+\dfrac{5}{n}}{2+\dfrac{3}{n}},$

$$\therefore\quad \mu=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{5}{n}}{2+\dfrac{3}{n}}=\frac{5}{2}.$$

例 2. 證明 $1+\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots$ 對於 x 各有限值皆爲收斂級數.

解 $\because\quad \dfrac{a_n}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{n!}\div\dfrac{1}{(n+1)!}=n+1,$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

即 $\mu=\infty.$

例 3. 證明 $x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots\cdots$於 $|x|<1$ 時收斂,而於 $|x|>1$ 時發散.

解 $\because\quad \dfrac{a_n}{a_{n+1}}=-\dfrac{1}{n}\div\dfrac{1}{n+1}=-\dfrac{n+1}{n}.$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=-\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=-1.$$

即 $\mu=1.$

此級數於 $x=1$ 時收斂,(第 144 節定理 3)而於 $x=-1$

時發散.(第 143 節定理 5)

例 4. m 爲有理數,證明 $1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2$ $+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots$ 於 $|x|<1$ 時收斂,於 $|x|>1$ 時發散.

解 $\because$
$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots n}$$
$$\div\frac{m(m-1)\cdots(m-n)}{1\cdot 2\cdots\cdots(n+1)}=\frac{n+1}{m-n},$$
$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{m-n}=-\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{m}{n}}=-1.$$

卽 $\mu=1$.

148. 二項級數 n 爲正整數時,有限級數
$$1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\cdots\cdots\cdots$$
之和爲 $(1+x)^n$,已於前第 128 節中證明之.又由第 147 節之例 4, n 不爲正整數時,所與級數成爲無限級數,於 $|x|<1$ 之條件下收斂.茲更就 n 爲任意有理數,此級數收斂時之和爲 $(1+x)^n$,證明之於下.

因所與級數爲 x 及 n 之函數,而本節所研究者,以 n 爲主,故通常皆以 $\phi(n)$ 表之.又爲便宜起見,其級數中 x^r 之係數,皆以 n_r 表之.卽
$$n_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}.$$
隨之設 m 及 n 爲任意二數,則
$$\phi(m)=1+m_1x+m_2x^2+m_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\phi(n)=1+n_1x+n_2x^2+n_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\phi(m+n)=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots\cdots.$$

其 $\phi(m)\phi(n)=\phi(m+n)$,可證明之如下.

$|x|<1$ 時,卽級數 $\phi(m)$, $\phi(n)$ 收斂時,其 $\phi(m)\phi(n)$ 之積如下.

$$\begin{array}{rl|l|l|l}
\phi(m)\phi(n)=1 & +m_1 & x+\quad m_2 & x^2+m_3 & x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & +\ n_1 & +m_1n_1 & +m_2n_1 & \\
 & & +\quad n_2 & +m_1n_2 & \\
 & & & +\quad n_3 &
\end{array}$$

然由問題二十一之第22問,

$$m_1+n_1=(m+n)_1,\quad m_2+m_1n_1+n_2=(m+n)_2,\cdots\cdots,$$

$$m_r+m_{r-1}n_1+\cdots\cdots+m_1n_{r-1}+n_r=(m+n)_r.$$

$$\therefore\quad \phi(m)\phi(n)=1+(m+n)_1x+(m+n)_2x^2+(m+n)_3x^3+\cdots$$

$$=\phi(m+n).$$

反復上式之關係,得

$$\phi(m)\phi(n)\phi(p)=\phi(m+n)\phi(p)=\phi(m+n+p).$$

其對於 $\phi(m)\phi(n)\phi(p)\phi(q)\cdots\cdots\cdots$ 任意有限個因式乘積之關係皆準此.隨之對於證明下述一般二項定理之準備,卽已完成.

定理 設 n 爲任意有理數而 $|x|<1$ 時,則級數

$$\phi(n)=1+\frac{n}{1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots$$

之和爲 $(1+x)^n$.

證明 $n=0$ 及 $n=1$ 時,此級數爲 1 及 $1+x$.

$$\therefore\quad \phi(0)=1,\qquad \phi(1)=1+x.$$

I. n爲正整數時　此時

$$\phi(n)=\phi(1+1+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項止})$$
$$=\phi(1)\phi(1)\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 個因式止}$$
$$=\{\phi(1)\}^n=(1+x)^n.$$

卽指數爲正整數時,本定理眞確.

II. n爲任意之正有理分數$\frac{p}{q}$時　此時

$$\left\{\phi\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q=\phi\left(\frac{p}{q}\right)\phi\left(\frac{p}{q}\right)\cdots\cdots\cdots\text{至 } q \text{ 個因式止}$$
$$=\phi\left(\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots\cdots\text{至 } q \text{ 項止}\right)$$
$$=\phi(p)=(1+x)^p.$$
$$\therefore\quad \phi\left(\frac{p}{q}\right)=(1+x)^{\frac{p}{q}}.$$

卽指數爲正有理分數時本定理亦屬眞確.

III. n爲任意之負有理數 $-s$ 時　此時因

$$\phi(-s)\phi(s)=\phi(-s+s)=\phi(0)=1,$$
$$\therefore\quad \phi(-s)=\frac{1}{\phi(s)}=\frac{1}{(1+x)^s}$$
$$=(1+x)^{-s}.$$

卽指數爲任意之有理數時,本定理皆屬眞確.

如上所證明之定理,謂之一般之二項定理.一般二項定理之展開式,謂之二項級數.

系 1. 設n爲有理數而 $|x|<|a|$ 時,則

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots\cdots$$

證明　$(a+x)^n=a^n\left(1+\dfrac{x}{a}\right)^n$

$$=a^n\left(1+n\cdot\frac{x}{a}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{a^2}+\cdots\cdots\right)\cdots\cdots(1)$$

$$=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

因上式中級數(1)於 $\left|\dfrac{x}{a}\right|<1$ 或 $|x|<|a|$ 時收斂,故級數(2)亦於 $|x|<|a|$ 時收斂.

系 2.　$(1-x)^{-n}=\dfrac{1}{(n-1)!}[1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots(n-1)+(2\cdot 3\cdots\cdots n)x$

$+\cdots\cdots+\{(r+1)\cdots\cdots(r+n-1)\}x^r+\cdots\cdots]$

系 3.　$(1\pm x)^{-\frac{p}{q}}=1\mp\dfrac{p}{1!}\dfrac{x}{q}+\dfrac{p(p+q)}{2!}\left(\dfrac{x}{q}\right)^2$

$$\mp\frac{p(p+q)(p+2q)}{3!}\left(\frac{x}{q}\right)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例 1.　試依 x 之昇冪順序展開 $(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}$.

解　$(1+2x+3x^2)^{\frac{1}{3}}=\{1+(2x+3x^2)\}^{\frac{1}{3}}$

$$=1+\frac{1}{3}(2x+3x^2)+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2}(2x+3x^2)^2$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{2\cdot 3}(2x+3x^2)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}x^2-\frac{68}{81}x^3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例 2.　求無限級數 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}+\cdots\cdots\cdots$ 之和.

解　將所與級數改書成

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots\cdots\equiv S$$

時,由系 3,可知所與級數爲$(1-x)^{-\frac{1}{2}}$之展開式其x之值可由 $\frac{x}{2}=\frac{1}{3}$ 以求得之.即

$$\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1\cdot2}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots\cdots=1+S.$$

$$\therefore \qquad S=\sqrt{3}-1.$$

例 3. 求 $\sqrt{99}$ 及 $\sqrt[3]{30}$ 之近似值.

解 $$\sqrt{99}=10\left(1-\frac{1}{100}\right)^{\frac{1}{2}}=10\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{100}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots\right\}$$

$$=10\{1-0.005-0.0000125-\cdots\cdots\}\doteq9.949875.$$

$$\sqrt[3]{30}=3\left(\frac{30}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=3\left(\frac{27}{30}\right)^{-\frac{1}{3}}=3\left(1-\frac{1}{10}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$=3\left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)+\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)}{1\cdot2}\left(\frac{1}{10}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$=3+0.1+0.006+\cdots\cdots\doteq3.107.$$

149. 指數級數 無限級數

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

對於x各有限值皆行收斂,已如前第 147 節例 2 中證明之.設 $x=1$ 時,則此級數成爲

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

上列級數之和,通常皆以 e 表之. e 之近似值可求得之如下.

$$1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}=2\cdot5, \qquad \frac{1}{3!}=0.166666666666,$$

$$\frac{1}{4!}=0.041666666666,\quad \frac{1}{5!}=0.008333333333,$$

$$\frac{1}{6!}=0.001388888888,\quad \frac{1}{7!}=0.000198412698,$$

$$\frac{1}{8!}=0.000024801587,\quad \frac{1}{9!}=0.000002755731,$$

$$\frac{1}{10!}=0.000000275573,\quad \frac{1}{11!}=0.000000025052,$$

$$\frac{1}{12!}=0.000000002087,\quad \frac{1}{13!}=0.000000000160,$$

$$\frac{1}{14!}=0.000000000011,\quad \cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

將上列各分數之值相加,得$S_{15}=2.718281828452$.此值至少至小數第十位止,正確無誤.因計算中略去之部分

$$\frac{1}{15!}+\frac{1}{16!}+\frac{1}{17!}+\cdots\cdots\cdots,$$

即 $$\frac{1}{15!}\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{16.17}+\cdots\cdots\right),$$

較 $$\frac{1}{15!}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\cdots\cdots\right)$$

爲小,而 $\frac{1}{15!}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\cdots\cdots\cdots\right)$最多不過0.000000000001故也.

定理 1. 設$f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$f(y)=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

時,則 $f(x).f(y)=f(x+y)$.

證明 因 $f(x)$, $f(y)$ 不論 x, y 之值如何,皆爲收斂級數.

故由第 146 節之定理 4, 此二級數之相乘積, 亦爲收斂級數. 隨之

$$f(x)\cdot f(y)=1+(x+y)+\left(\frac{x^2}{2!}+xy+\frac{y^2}{2!}\right)$$

$$+\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y}{1}+\frac{x}{1}\cdot\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}\right)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2!}+\frac{(x+y)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=f(x+y).$$

系　設 $f(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$f(y)=1+\frac{y}{1!}+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

時, 則　$f(x)f(y)f(z)\cdots\cdots=f(x+y+z+\cdots\cdots\cdots)$.

定理 2.　$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots=e^x$

證明　I.　x 爲正整數 m 時　此時於 $f(x)f(y)f(z)\cdots\cdots\cdots=f(x+y+z+\cdots\cdots)$ 中置 $x=y=z=\cdots\cdots=1$ 而令其個數爲 m 時, 則

$$f(m)=\{f(1)\}^m.$$

但　$f(1)=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\cdots\cdots=e,$

$\therefore$　$f(m)=\{f(1)\}^m=e^m.$

因　$x=m,$

$$\therefore \quad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

II. x 爲正分數 $\frac{p}{q}$ 時　此時置 $x=y=z=\cdots\cdots=\frac{p}{q}$ 而令其個數爲 q 時,則

$$\left\{f\left(\frac{p}{q}\right)\right\}^q=f\left(\frac{p}{q}\times q\right)=f(p)=f(1)^p=e^p.$$

$$\therefore \quad f\left(\frac{p}{q}\right)=e^{\frac{p}{q}}.$$

因
$$f\left(\frac{p}{q}\right)=1+\frac{p}{q}+\frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{p}{q}\right)^3+\cdots\cdots,$$

而
$$x=\frac{p}{q}.$$

$$\therefore \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

III. x 爲負有理數 $-s$ 時　此時

$$f(-s)=\frac{1}{f(s)}=\frac{1}{e^s}=e^{-s}.$$

因
$$e^{-s}=1+\frac{(-s)}{1!}+\frac{(-s)^2}{2!}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

而
$$x=-s,$$

$$\therefore \quad e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

總合上述結果,可知對於 x 各有理值,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

皆能成立.此級數 $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots$, 謂之指數級數.

定理 3. 設 $a>0$ 時,則

$$a^x=1+\frac{x}{1!}\log_e a+\frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}(\log_e a)^n+\cdots$$

證明　置 $a=e^k$ 而取以 e 爲底之對數時,得

$$\log_e a=k.$$

然　$$a^x=(e^k)^x=e^{kx}.$$

$$\therefore\quad a^x=1+\frac{kx}{1!}+\frac{(kx)^2}{2!}+\frac{(kx)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

以 $k=\log_e a$ 代入於上列級數中,得

$$a^x=1+\frac{x}{1!}\log_e a+\frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3+\cdots\cdots\cdots.$$

例 1.　求 $\sqrt{e}$ 之近似值至小數第四位止.

解　$$\sqrt{e}=e^{\frac{1}{2}}=f\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\cdots\cdots.$$

但　$1+\frac{1}{2}=1.5,$　　$\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2=0.125,$

$\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3=0.0208333333,$　$\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2}\right)^4=0.0026041666,$

$\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5=0.0002604166,$

將列上諸分數之值相加,得 $S_6=1.6486979165$. 其略去部分爲 $\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\cdots\cdots\cdots$. 因

$$\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6<\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6+\frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots\cdots<\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$\left\{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right\},$$

可知此略去部分介於 $\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^6$ 與 $\frac{1}{6!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$ 之間.即略去部分

較0.00002爲大而較0.00005爲小.

$$\therefore \quad 1.648717<\sqrt{e}<1.648747.$$

即 $\quad \sqrt{e}=1.6487\cdots\cdots\cdots\cdots.$

例 2. 求 $1+\frac{2}{1!}+\frac{3}{2!}+\frac{4}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(n+1)}{n!}+\cdots\cdots\cdots$之和.

解 原式 $=1+\frac{1+1}{1!}+\frac{2+1}{2!}+\frac{3+1}{3!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}+\cdots)+(1+\frac{2}{2!}+\frac{3}{3!}+\frac{4}{4!}+\cdots)$$

$$=(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots)+(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots)$$

$$=e+e=2e.$$

150. 對數級數 $a>0$ 時,由上節之定理 3,得

$$a^x=1+\frac{x}{1!}log_e a+\frac{x^2}{2!}(log_e a)^2+\frac{x^3}{3!}(log_e a)^3+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

今於上式置 $a=1+y$ 時,則成爲

$$a^x=(1+y)^x=1+\frac{x}{1!}log_e(1+y)+\frac{x^2}{2!}\{log_e(1+y)\}^2+\cdots.$$

但 $|y|<1$ 時,由第148節之定理,得

$$(1+y)^x=1+xy+\frac{x(x-1)}{2!}y^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}y^3+\cdots.$$

$$\therefore \quad 1+xy+\frac{x(x-1)}{2!}y^2+\cdots\cdots+\frac{x(x-1)\cdots(x-r+1)}{r!}y^r+\cdots$$

$$=1+\frac{x}{1!}log_e(1+y)+\frac{x^2}{2!}\{log_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因上列等式爲恆等式,故比較其 x 之係數時,得

$$log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots.$$

此級數 $y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots$，謂之**對數級數**.對數級數於 $|y|<1$ 時收斂,已如第 147 節例 3 所證明.

下列三式,可由對數級數直接以推得之.

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\log_e\frac{1+y}{1-y}=\log_e(1+y)-\log_e(1-y)=2\left\{y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\right\}.$$

$$\log_e\left\{(1+y)(1-y)\right\}=\log_e(1+y)+\log_e(1-y)$$

$$=-2\left\{\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}+\cdots\cdots\right\}.$$

例 1. 證明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$

解 $\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)=n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\cdots\cdots\right)$

$$=1-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1.$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e^1=e.$$

例 2. 求無限級數 $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$之和.

解. 於 $\log_e(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{4}y^4+\cdots\cdots\cdots$

當 $x=\frac{1}{3}$ 時,即得所與之級數.隨之所得級數之和為

$$\log_e(1+y)=\log_e\frac{4}{3}.$$

例 3. 求無限級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\cdots\cdots$ 之和.

解　置 y 以代 $\frac{1}{2}$ 時,則所與級數僅含 y 之奇數冪,而

$$log_e\frac{1+y}{1-y}=2\left\{y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\cdots\right\},$$

$$\therefore \text{原式}=\frac{1}{2}log_e\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}log3=log\sqrt{3}.$$

例 4. 求無限級數 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^6}+\cdots\cdots$ 之和.

解　置 y 以代 $\frac{1}{3}$,則所與級數僅含 y 之偶數冪,而

$$log_e\{(1+y)(1-y)\}=-2\left\{\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}+\frac{y^6}{6}+\cdots\cdots\right\},$$

$$\therefore \text{原式}=-\frac{1}{2}log_e\left\{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{1}{2}log_e\frac{9}{8}$$

$$=log_e\frac{3}{2\sqrt{2}}=log_e\frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

151. 對數表之計算法　以 e 爲底之對數,謂之自然對數.計算任意數之自然對數近似値時,如利用對數級數,則至爲便利.茲說明之於下.

於公式

$$log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots$$

中置 $-y$ 以代 y 時,得

$$log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots-\frac{y^r}{r}\cdots\cdots\cdots.$$

$$\therefore \log_e\frac{1+y}{1-y}=\log_e(1+y)-\log_e(1-y)$$

$$=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right).$$

置 $y=\frac{m-n}{m+n}$,則 $\frac{1+y}{1-y}=\frac{m}{n}$.故上式成爲

$$\log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\}.$$

如以任意數值代入於上列公式中之 m, n,卽可求得各數之自然對數.例如求 2 之自然對數時,於公式中置 $m=2$, $n=1$,卽可.卽

$$\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right)=0.693147\cdots\cdots.$$

又求 3 之自然對數時,於公式中置 $m=3, n=2$, 卽可.卽

$$\log_e\frac{3}{2}=\log_e 3-\log_e 2=2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$=0.405465.$$

$$\therefore \log_e 3=0.693147\cdots\cdots+0.405465=1.09861\cdots\cdots.$$

等是.繼續此法,可求得任何數之自然對數近似值.其近似值與原對數之差,由計算時級數之項取之愈多而愈行減少.

某數關於以 e 爲底之自然對數求得後,則此數關於以 10 爲底之常用對數,亦易於算出之.因

$$\log_a n=\log_e n\times\frac{1}{\log_e a}=\log_e n\cdot\log_a e.$$

故求得某數之自然對數後,更以 $\log_{10}e$ 乘之,卽得該數之常用對數.此 $\log_{10}e$, 謂之對數率,其值約爲 0.43429………

問題二十四

判定下列各級數爲收斂級數,抑爲發散級數.

1. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{5\cdot6}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

2. $\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{(a+2b)(a+3b)}+\frac{1}{(a+4b)(a+5b)}+\cdots\cdots$

3. $\frac{3}{4}+\frac{3\cdot4}{4\cdot6}+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot6\cdot8}+\cdots\cdots+\frac{3\cdot4\cdots\cdots(n+2)}{4\cdot6\cdots\cdots(2n+2)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

4. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{3\cdot6\cdot9}+\cdots\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(2n-1)}{3\cdot6\cdot9\cdots\cdots3n}+\cdots\cdots\cdots$

5. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

6. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1+3x}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

7. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

8. $\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^2}{1+x^4}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{1+x^{2n}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

9. $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+3x^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+nx^n}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

10. $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{x}{2\cdot3}+\frac{x^2}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

11. $1-\frac{x}{1+a}+\frac{x^2}{1+2a}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{1+na}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

12. $\frac{1}{1^k}+\frac{x}{3^k}+\frac{x^2}{5^k}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{(2n+1)^k}+\cdots\cdots\cdots$

13. $\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{(1+x)^2}+\frac{3x^3}{(1+x)^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

14. $\cdots\cdots+2^3x^{-3}+2^2x^{-2}+2x^{-1}+1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

展開下列各式成無限級數.

15. $|x|<1$ 時 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$

16. $|x|<1$ 時 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

17. $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$

18. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

19. $log_e(1-x+x^2)$

20. $log_e\left(\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}\right)$

求下列各無限級數之和.

21. $1+\frac{2}{6}+\frac{2\cdot 5}{6\cdot 12}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{6\cdot 12\cdot 18}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

22. $\frac{3}{18}+\frac{3\cdot 7}{18\cdot 24}+\frac{3\cdot 7\cdot 11}{18\cdot 24\cdot 30}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

23. $\frac{3}{4}+\frac{3\cdot 5}{4\cdot 8}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

24. $1+\frac{1+2}{2!}+\frac{1+2+3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n!}+\cdots\cdots\cdots$

25. $\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{n^3}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

26. $\frac{1^2}{1!}+\frac{1^2+2^2}{2!}+\frac{1^2+2^2+3^2}{3!}+\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4!}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$+\frac{1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2}{n!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

27. $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\cdots\cdots$

$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)$

28. $\frac{4}{1\cdot 3}-\frac{6}{2\cdot 4}+\frac{12}{5\cdot 7}-\frac{14}{6\cdot 8}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

29. 求 $\sqrt{14}$ 之近似值至小數第四位止.

30. 求 $\sqrt[5]{3^5-2}$ 之近似值至小數第五位止.

31. n 爲正整數時,證明 $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)^n$ 展開式中 x^r 之係數爲 $\frac{(2n+r-1)!}{r!(2n-1)!}$.

32. n爲較 1 爲小之正數時,證明 $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\cdots$ 之 x^n 係數爲 1.

33. 證明 $\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots\right)\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\right)=1.$

34. 證明 $\frac{e^2-1}{e^2+1}=\dfrac{\frac{1}{1!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots}{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots}.$

35. 求 $\log_e(1+x+x^2+x^4)$ 展開式中 x^n 之係數.

36. $y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots$時,證明 $x=y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots.$

第二十三章　一般方程式之性質

152. 一般方程式　凡含一未知數文字例如x之n次有理整方程式,皆可化成下列之標準形式.

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其係數$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$等,爲確定之數字時,則(1)式謂之數字方程式.爲未定之數字時,則(1)式謂之一般方程式.又其最後之係數a_n,有時常稱之爲絕對項.

一般方程式之係數$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$等全不爲0時,則此方程式謂之完全方程式.如其中有一個或數個爲0時,則此方程式謂之不完全方程式.於完全方程式或不完全方程式中,設其各係數$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$皆爲實數時,一般皆假定其第一係數$a_0$爲正.又設其各係數皆爲有理數時,則一般皆假定其各係數爲不含公因數之整數.

方程式(1)之兩邊如各以a_0除之,亦可化成下列之第二標準形式.

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n=0$$

此第二標準形式之最初係數爲1.

又　　$b_1=\frac{a_1}{a_0},\ b_2=\frac{a^2}{a_0},\cdots\cdots,b_n=\frac{a_n}{a_0}.$

第二標準形式較第一標準形式之便利尤多.本書以後凡言方程式 $f(x)=0$ 時,皆係指上述之第一或第二標準形式而言.

定理 1. 設 a 爲 $f(x)=0$ 之根時,則 $f(x)$ 能爲 $x-a$ 所整除.反之,設 $f(x)$ 能爲 $x-a$ 整除時,則 a 爲 $f(x)=0$ 之根.

證明 由前第43節之定理 1, $f(x)$ 爲 $x-a$ 除得之剩餘爲 $f(a)$.如 a 爲 $f(x)=0$ 之根時,則此剩餘 $f(a)$ 爲 0.即 $f(x)$ 爲 $x-a$ 所整除.反之,若 $f(x)$ 能爲 $x-a$ 所整除時,則其剩餘 $f(a)$ 爲 0.隨之 a 爲 $f(x)=0$ 之根.

定理 2. n 次方程式例如

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

有 n 個根.但僅有 n 個.

證明 見第43節定理 2 之系 1.

例 1. 證明 3 爲 $f(x)=x^3-2x^2-9=0$ 之根.

解

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -2 & +0 & -9 & \underline{3} \\ & 3 & 3 & 9 & \\ \hline 1 & 1 & 3 & 0=f(3) & \end{array}$$

由綜合除法,以 $x-3$ 除 x^3-2x^2-9 所得剩餘 $f(3)$ 爲 0,故 3 爲 $f(x)=0$ 之根.

例 2. 解 $x^3-3x^2+5x-3=0$ 方程式.

解

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -3 & +5 & -3 & \underline{1} \\ & 1 & -2 & +3 & \\ \hline 1 & -2 & 3 & 0 & \end{array}$$

由視察方法,可知 1 爲所與方程式之一根.以 $x-1$ 除

x^3-3x^2+5x-3 所得低次方程式爲 $x^2-2x+3=0$,此二次方程式之根,由第58節之定理,爲 $1\pm i\sqrt{2}$. 故所求方程式之根爲

$$1,\ 1+i\sqrt{2}\ 及\ 1-i\sqrt{2}.$$

153. 根與係數之關係

設 n 次方程式

$$f(x)=x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1}x+b_n=0\ \cdots\cdots$$

之 n 個根爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$, 則由第43節之定理 2,

$$f(x)=A(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_n).\cdots\cdots\cdots$$

因 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n\equiv A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),\cdots\cdots$

故比較 x 最高冪之係數時,得知 $A=1$.將上式之右邊展開之而比較其兩邊 x 同冪之係數時,得

$$b_1=-(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n),$$
$$b_2=(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n),$$
$$b_3=-(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n),$$
$$\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$b_n=(-1)^n a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n.$$

因得一定理於下.

定理 於方程式 $x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n$, 其

I. x^{n-1}之係數,與n個根之和變更符號後之值相等;

II. x^{n-2} 之係數,與由 n 個根中各取二個所作之積之和相等;

III. x^{n-3} 之係數,與由 n 個根中各取三個所作之積

之和變更符號後之值相等;

IV. 一般,x^{n-r} 之係數,與由 n 個根中各取 r 個所作之積之和與 $(-1)^r$ 之相乘積相等.

系 1. n 次方程式之實根,爲其絕對項之約數.

系 2. 設 n 個根皆爲正數時,則方程式之係數,交錯爲正數,負數.

系 3. 設 n 個根皆爲負數時,則方程式之係數,皆爲正數.

方程式之根與係數間雖有上述之關係,而此諸關係於解方程式時,實際上並無若何用處.因由此諸關係以求根時,其困難與解原方程式相同故也.但得知方程式之根間所存某特別關係以解其方程式,及知根之關係而求其係數間之關係等時,則以應用前述諸關係爲便.

例 1. 知方程式 $x^3-5x^2-16x+80=0$ 二根之和爲 0,解此方程式.

解 設所與方程式之三根爲 α, β, γ,則由根與係數之關係,得

$$\alpha+\beta+\gamma=5. \cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-16. \cdots\cdots(2)$$

$$\alpha\beta\gamma=-80. \cdots\cdots(3)$$

又其二根之和爲 0,故

$$\alpha+\beta=0. \cdots\cdots(4)$$

隨之由此(1),(2),(3),(4)四方程式以求 α, β, γ,即可.

以(4)式代入(1)式及(2)式時,得

$$\gamma=5,\quad \alpha\beta=-16.$$

隨之得 α, β 之値各爲$4, -4$.

例 2. 求方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之二根等於他二根之和之條件.

解 設所與方程式之四根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 時,則

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=-p. \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=q. \cdots\cdots(2)$$

$$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta=-r. \cdots\cdots(3)$$

$$\alpha\beta\gamma\delta=s. \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

設 $$\alpha+\beta=\gamma+\delta. \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

則以(5)式代入(1)式中,得

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta=-\frac{p}{2}. \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

因(2)式及(3)式可書成

$$q=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta$$

$$-r=\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)$$

之形式,故以(6)式之値代入上列二式中時,得

$$q=\frac{p^2}{4}+\alpha\beta+\gamma\delta.$$

$$-r=-\frac{p}{2}(\alpha\beta+\gamma\delta).$$

由上列二式消去 $\alpha\beta+\gamma\delta$ 時,得

$$r=\frac{p}{2}\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

或 $$p^3-4pq+8r=0. \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(7)式卽爲所與方程式四根間成立(5)式關係之必要條

件也.於(5)式之關係中置 $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ 或 $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ 時,能歸着於同一條件,甚明.故(7)式為二根之和等於他二根之和之必要條件.

又(7)式為二根之和等於他二根之和之充分條件,亦可證明之如下.

以由(1),(2),(3)三式所得 p, q, r 之值代入於(7)式時,得

$$p^3-4pq+8r=-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3+4(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)-8(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\beta+\beta\gamma\delta)\cdots\cdots(8)$$

(8)式右邊為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之三次式,而 $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ 時,此三次式成為 0,已如上所證明.故(8)式之右邊含有 $\alpha+\beta-(\gamma+\delta)$ 一因式.同理,此三次式亦含有 $\alpha+\gamma-(\beta+\delta)$, $\alpha+\delta-(\beta+\gamma)$ 各因式.故(8)式之右邊可書成

$$k(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)(\alpha+\delta-\beta-\gamma)$$

之形式.但 k 為不含 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之數係數.比較 α^3 之係數時,可知 $k=-1$.

$$\therefore\quad p^3-4pq+8r=-(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)(\alpha+\delta-\beta-\gamma).$$

隨之如 $p^3-4pq+8r=0$ 時,則

$$\alpha+\beta=\gamma+\delta,\text{或}\ \alpha+\gamma=\beta+\delta,\text{或}\ \alpha+\delta=\beta+\gamma.$$

即二根之和等於他二根之和.故(7)式為所與關係之充分條件.

154. 根之對稱式 二次方程式之根之對稱式,能以其係數之有理式以表之,已如第62節所述.茲更就 n 次方程式之根之對稱式,亦能以其係數之有理式表之,舉例說明

之於下.

由第 153 節方程式之根與係數之關係,設方程式

$$x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+b_n=0$$

之 n 個根為 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$,則

$$b_1=-(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n)=-\Sigma a_1.$$

$$b_2=(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}a_n)=\Sigma a_1a_2.$$

$$b_3=-(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots\cdots+a_{n-2}a_{n-1}a_n)=-\Sigma a_1a_2a_3.$$

$$\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

$$b_n=(-1)^na_1a_2a_3\cdots\cdots a_n.$$

此 $\Sigma a_1, \Sigma a_1a_2, \Sigma a_1a_2a_3, \cdots\cdots\cdots, a_1a_2\cdots\cdots a_n$, 卽為關於 $a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_n$ 之對稱式也.又

$$\Sigma a_1^2=(\Sigma a_1)^2-2\Sigma a_1a_2,$$

$$\Sigma a_1^2a_2=\Sigma a_1\Sigma a_1a_2-3\Sigma a_1a_2a_3,$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故可知 Σa_1^2 及 $\Sigma a_1^2a_2, \cdots\cdots$ 等,皆可以 Σa_1 與 Σa_1a_2 及 Σa_1 與 $\Sigma a_1a_2, \cdots\cdots$ 等整式以表之.卽能以方程式之係數 $b_1, b_2, \cdots\cdots\cdots, b_n$ 等之整式以表之.

例 1. 設方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之四根為 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 試計算 (1) $\Sigma\alpha^2$; (2) $\Sigma\alpha^2\beta\gamma$; (3) $\Sigma\alpha^3\beta$; (4) $\Sigma\alpha^2\beta^2$;

解 (1) $\Sigma\alpha^2=(\Sigma\alpha)^2-2\Sigma\alpha\beta=p^2-2q.$

(2) 以 $\Sigma\alpha$ 乘 $\Sigma\alpha\beta\gamma$ 時,生成 $\alpha^2\beta\gamma$ 及 $\alpha\beta\gamma\delta$ 形式之項.其 $\alpha^2\beta\gamma$ 為 α 與 $\alpha\beta\gamma$ 之積,僅一次出現;而 $\alpha\beta\gamma\delta$ 為 α 與 $\beta\gamma\delta$, β 與 $\alpha\gamma\delta$, γ 與 $\alpha\beta\delta$, δ 與 $\alpha\beta\gamma$ 之積,共有四次出現.故

$$\Sigma\alpha^2\beta\gamma=\Sigma\alpha\Sigma\alpha\beta\gamma-4\Sigma\alpha\beta\gamma\delta=pr-4s.$$

(3)
$$\Sigma\alpha^3\beta=\Sigma\alpha^2\Sigma\alpha\beta-\Sigma\alpha^2\beta\gamma$$
$$=(p^2-2q)q-(pr-4s)=p^2q-2q^2-pr+4s.$$

(4) 以 $\Sigma\alpha\beta$ 乘 $\Sigma\alpha\beta$ 時,生成 $\alpha^2\beta^2$, $\alpha^2\beta\gamma$, $\alpha\beta\gamma\delta$ 三種形式之項.其 $\alpha^2\beta^2$ 之項僅一次;$\alpha^2\beta\gamma$ 爲 $\alpha\beta$ 與 $\alpha\gamma$ 及 $\alpha\gamma$ 與 $\alpha\beta$ 之積,共二次;$\alpha\beta\gamma\delta$ 爲 $\alpha\beta$ 與 $\gamma\delta$, $\alpha\gamma$ 與 $\beta\delta$, $\alpha\delta$ 與 $\beta\gamma$, $\beta\gamma$ 與 $\alpha\delta$, $\beta\delta$ 與 $\alpha\gamma$, $\gamma\delta$ 與 $\alpha\beta$ 之積,共六次出現.故

$$\Sigma\alpha^2\beta^2=(\Sigma\alpha\beta)^2-2\Sigma\alpha^2\beta\gamma-6\alpha\beta\gamma\delta$$
$$=q^2-2(pr-4s)-6s=q^2-2pr+2s.$$

例 2. 設方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 之三根爲 α,β,γ, 試計算 (1) $\Sigma\frac{1}{\alpha^2}$; (2) $\Sigma\frac{1}{\alpha^2\beta^2}$; (3) $\Sigma\frac{1}{\alpha^4}$.

解 (1)
$$\Sigma\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\Sigma\beta^2\gamma^2=\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\{(\Sigma\beta\gamma)^2-2\alpha\beta\gamma\Sigma\alpha\}$$
$$=\frac{1}{\frac{d^2}{a^2}}\left\{\frac{c^2}{a^2}-2\frac{bd}{a^2}\right\}=\frac{c^2-2bd}{d^2}.$$

又
$$\Sigma\frac{1}{\alpha^2}=\left(\Sigma\frac{1}{\alpha}\right)^2-2\Sigma\frac{1}{\alpha\beta}=\left(\frac{\Sigma\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}\right)^2-2\frac{\Sigma\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{c^2-2bd}{d^2}.$$

(2)
$$\Sigma\frac{1}{\alpha^2\beta^2}=\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\Sigma\gamma^2=\frac{1}{\frac{d^2}{a^2}}\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}\right\}=\frac{b^2-2ac}{d^2}.$$

(3)
$$\Sigma\frac{1}{\alpha^4}=\left(\Sigma\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-2\Sigma\frac{1}{\alpha^2\beta^2}.$$

由 (1) 與 (2) 之結果,

$$\therefore\quad \Sigma\frac{1}{\alpha^4}=\frac{1}{d^4}\{(c^2-2bd)^2-2(b^2-2ac)d^2\}.$$

155. 導函數 於 x 之函數 $y=f(x)$, 設 $x=x_1$ 時,函數之

値爲 y_1,x 增加 h 後,函數之値爲 y_1+k,則

$$y_1=f(x_1),\quad y_1+k=f(x_1+h).$$

$$\therefore\quad k=f(x_1+h)-f(x_1).$$

即 k 爲函數 y 對於 x 增加 h 時之增加部分也.當 h 收斂於 0 時 $\frac{k}{h}$ 之比之極限値,即

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h},$$

謂之對於 $x=x_1$ 之値函數 $f(x)$ 之<u>微係數</u>.或稱<u>微分商</u>.例如於 $f(x)=x^2$,

$$k=f(x_1+h)-f(x_1)=(x_1+h)^2-x_1^2=2hx_1+h^2.$$

$$\therefore\quad \frac{k}{h}=2x_1+h.$$

隨之 $$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=2x_1.$$

故對於 $x=x_1$ 之値,函數 x^2 之微係數爲 $2x_1$ 是.

於函數 $f(x)=x^2$, 無論其 x_1 爲如何之數,其對於 $x=x_1$ 之値,函數 x^2 之微係數爲 $2x_1$, 仍爲 x_1 之函數.故以 x 代其 x_1 時,即得 x 之函數.此函數謂之原函數 $f(x)$ 之<u>導函數</u>.即導函數爲由

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

所決定之 x 函數也.

表 $y=f(x)$ 之導函數時,一般多用 y', $f'(x)$ 等符號.例如 $y=x^2$ 時, $y'=2x$ 是.

玆略述有理整式導函數之求法二三則於下.

I. x^m之導函數

置 $$f(x)=x^m$$

時,則

$$k=f(x+h)-f(x)=(x+h)^m-x^m$$

$$=mx^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^{m-2}h^2+\cdots\cdots+h^m$$

$$\frac{k}{h}=mx^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^{m-2}h+\cdots\cdots+h^{m-1}$$

$$\therefore\quad f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{k}{h}=mx^{m-1}.$$

〔注意〕 函數$f(x)=(x+a)^m$之導函數爲 $m(x+a)^{m-1}$,可與上法同樣以求得之.

II. $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m$之導函數

$$k=f(x+h)-f(x)=a_0\{(x+h)^m-x^m\}$$
$$+a_1\{(x+h)^{m-1}-x^{m-1}\}+\cdots\cdots+a_{m-1}\{(x+h)-x\}.$$

$$\frac{k}{h}=a_0\frac{(x+h)^m-x^m}{h}+a_1\frac{(x+h)^{m-1}-x^{m-1}}{h}+\cdots+a_{m-1}.$$

$$\therefore\qquad f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{k}{h}=a_0\cdot mx^{m-1}+a_1\cdot(m-1)x^{m-2}+\cdots+a_{m-1}$$

$$=ma_0x^{m-1}+(m-1)a_1x^{m-2}+\cdots\cdots+a_{m-1}.$$

III. 積之導函數

設 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 爲 x 之有理整式,置

$$f(x)=f_1(x)f_2(x)$$

$$k=f(x+h)-f(x)=f_1(x+h)f_2(x+h)-f_1(x)f_2(x)$$
$$=f_1(x+h)\{f_2(x+h)-f_2(x)\}+f_2(x)\{f_1(x+h)-f_1(x)\}.$$

$$\therefore \quad \frac{k}{h}=f_1(x+h)\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}+f_2(x)\frac{f_1(a+h)-f_1(x)}{h}.$$

隨之 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=f_1(x)f'_2(x)+f'_1(x)f_2(x).$$

例 1. 求 $f(x)=x^3$ 之導函數.

解 $$k=f(x+h)-f(x)=(x+h)^3-x^3=3hx^2+3h^2x+h^3.$$

$$\frac{k}{h}=3x^2+3hx+h^2.$$

$$\therefore \quad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=3x^2.$$

例 2. 求 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 之導函數.

解 $$\because \quad f(x)=\frac{1}{x^2}=x^{-2},$$

$$\therefore \quad f'(x)=-2x^{-2-1}=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}.$$

例 3. 求 x^5-3x^2+x-1 之導函數.

解 $$\because \quad f(x)=x^5-3x^2+x-1,$$

$$\therefore \quad f'(x)=5x^4-6x+1.$$

例 4. 求 $(x-1)^5(x+2)^7$ 之導函數.

解 $$\because \quad f(x)=(x-1)^5(x+2)^7,$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad f'(x)&=(x-1)^5\cdot 7(x+2)^6+5(x-1)^4\cdot(x+2)^7\\&=(x-1)^4(x+2)^6\{7(x-1)+5(x+2)\}\\&=3(x-1)^4(x+2)^6(4x+1).\end{aligned}$$

156. 重根 有理整式 $f(x)$ 能為 $(x-a)^k$ (k 為正整數) 所整除時,其 a 為方程式 $f(x)=0$ 之根,當不待言.設 $f(x)$ 能為 $(x-a)^k$ 整除,而不能為 $(x-a)^{k+1}$ 所整除,換言之,即 $f(x)$

適合有 $(x-a)$ 因式 k 個時,則 a 謂之方程式 $f(x)=0$ 之 k 次等根.或謂之 k 重根.

設方程式 $f(x)=0$ 有 a 根 k 重時,置

$$f(x)=(x-a)^k\phi(x),\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

則 $\phi(x)$ 爲 x 之有理整式,而 $\phi(a)\neq 0$. 故由上節III段積之導函數之求法,作成 $f'(x)$ 時,則

$$f'(x)=(x-a)^k\phi'(x)+k(x-a)^{k-1}\phi(x)$$
$$=(x-a)^{k-1}\{(x-a)\phi'(x)+k\phi(x)\}.$$

如置 $\phi_1(x)=(x-a)\phi'(x)+k\phi(x)$ 時,則

$$f'(x)=(x-a)^{k-1}\phi_1(x).\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

因 $\phi_1(a)=k\phi(a)\neq 0$,故得二定理於下.

定理 1. 方程式 $f(x)=0$ 之根全體皆相異時,則 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 間無公因式.

定理 2. 方程式 $f(x)=0$ 之根有二重根時,則 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 間有一公因式;又有 r 重根時,則 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 間有 $r-1$ 個公因式.

例: 證明 $x^5-10x^2+15x-6=0$ 有三重根.

解 置 $f(x)=x^5-10x^2+15x-6.$

則 $f'(x)=5(x^4-4x+3).$

求 $f(x)$ 與 $f'(x)$ 之 $H.C.F$ 時,得 x^2-2x+1. 因 $x^2-2x+1=0$ 有 1 之等根,故 $x^5-10x^2+15-6=0$ 有 1 根三重.

157. 判別式 如第46節所述,交代式與交代式之積爲對稱式.故以某一方程式之根之最簡交代式自乘之,其結果成爲其根之對稱式,能以其方程式係數之有理整式以

表之.此有理整式,謂之其方程式之判別式.

例 1. 求$x^2+px+q=0$之判別式.

解 設所與方程式之二根爲α_1及α_2,則此二根之最簡交代式爲$\alpha_1-\alpha_2$.又設其判別式爲D,則

$$D=(\alpha_1-\alpha_2)^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2=p^2-4q.$$

例 2. 求$x^3+3px+q=0$之判別式.

解 設所與方程式之三根爲$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,則此三根之最簡交代式爲$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)$.又設其判別式爲$D$,則

$$D=(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2.$$

由方程式之係數與根之關係,得

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0,\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=3p.$$

$$\therefore\quad \alpha_1+\alpha_2=-\alpha_3,\quad \alpha_1\alpha_2=3p-(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_3=3p+\alpha_3^2.$$

$$\therefore\quad (\alpha_1-\alpha_2)^2=(\alpha_1+\alpha_2)^2-4\alpha_1\alpha_2=\alpha_3^2-4(3p+\alpha_3^2)$$
$$=-3(\alpha_3^2+4p).$$

同理, $$(\alpha_1-\alpha_3)^2=-3(\alpha_2^2+4p).$$
$$(\alpha_2-\alpha_3)^2=-3(\alpha_1^2+4p).$$

隨之得 $$D=-27(\alpha_1^2+4p)(\alpha_2^2+4p)(\alpha_3^2+4p)$$
$$=-27\{\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2+4p\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2+16p^2\Sigma\alpha_1^2+64p^3\}.$$

但 $$\Sigma\alpha_1^2=(\Sigma\alpha_1)^2-2\Sigma\alpha_1\alpha_2=-6p.$$
$$\Sigma\alpha_1^2\alpha_2^2=(\Sigma\alpha_1\alpha_2)^2-2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Sigma\alpha_1=(3p)^2.$$

$$\therefore\quad D=-27\{q^2+4p(9p^2)+16p^2(-6p)+64p^3\}$$
$$=-27(q^2+4p^3).$$

判別式於代數學上,有重要意義.例如某方程式至少有一對等根之必要且兼充分條件,爲其判別式爲0是.此因

判別式爲方程式之根之最簡交代式之平方,如方程式有二以上之重根時,則其交代式中之因式,至少有一爲0故也.例如二次方程式$x^2+px+q=0$二根相等之必要且兼充分條件,爲$p^2-4q=0$,及三次方程式$x^3+3px+q=0$至少有一對等根之必要且兼充分條件爲$q^2+4p^2=0$是.

又於具有實係數之方程式,其根爲虛數或實數,與判別式之符號,有密切關係.例如於二次方程式,其二根爲相異實數之條件,爲判別式爲正;又二根爲相異虛數之條件,爲判別式爲負,如第58節所述是.其他如三次方程式之根之虛實,亦能由其判別式之符號以決定之.

如後第169節所述,凡具有實係數方程式之虛根,皆成對發生.即設a, b各爲實數,某方程式有$a+b\sqrt{-1}$(但$b\neq 0$)之根存在時,則亦必有$a-b\sqrt{-1}$之根存在也.故於具有實係數之三次方程式,其一根常爲實數,而他二根或俱爲實數或俱爲虛數.

設三次方程式三根俱爲實根且各不相等時,則其判別式

$$D=\{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3)\}^2$$

爲正,甚明.反之,設其中二根例如α_1, α_2爲虛根,

$$\alpha_1=a+bi,\quad \alpha_2=a-bi$$

時,則

$$\begin{aligned}D&=\{2bi(a-\alpha_3+bi)(a-\alpha_3-bi\}^2\\&=-4b^2\{(a-\alpha_3)^2+b^2)\}^2<0.\end{aligned}$$

故得一定理於下.

定理 1. 設三次方程式三根俱爲實根且各不相等時,則

$$D>0.$$

設三次方程式中三根中至少有二根相等時,則

$$D=0.$$

又設三次方程式三根中有二虛根時,則

$$D<0.$$

因上述定理之假設,各方面俱已包括無遺,且其結論彼此不能相容,故其逆定理亦眞.卽下述定理亦屬眞確.

定理 2. 設 $D>0$ 時,則三次方程式之三根俱爲實根,且各不相等.

設 $D=0$ 時,則三次方程式三根中至少有二根相等.

設 $D<0$ 時,則三次方程式三根中有二虛根.

問題二十五

1. 知方程式 $x^3+3x^2-16x-48=0$ 二根之和爲 0,解此方程式.

2. 知方程式 $x^3-9x^2+26x-24=0$ 之三根成等差級數,解此方程式.

3. 知方程式 $3x^3+x^2-15x-5=0$ 二根之和爲 0,解此方程式.

4. 知方程式 $2x^3+7x^2+4x-3=0$ 二根之和爲 -2,解此方程式.

5. 知方程式 $9x^4+42x^3+13x^2-84x+36=0$ 之根爲二對

重根,解此方程式.

6. 設方程式 $x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0$ 之根悉為重根,求其係數間之關係若何.

7. 求方程式$x^3+px^2+qx+r=0$三根成等比級數之條件.

8. 知方程式 $x^3+8x^2+5x-50=0$ 有二重根,解此方程式.

9. 設 a, b, c, d 為相異正數,$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 為方程式

$$\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}+x+d=0$$

之根時,證明

$$\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}+\frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)}$$
$$+\frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)}=0.$$

10. 設$x^n-1=0$之根為$1, \alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$時,證明$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\cdots\cdots=n$.

11. 求方程式$x^3-px^2+qx-r=0$三根之立方和.

12. 求方程式 $2x^3-3x^2-4x-5=0$ 三根之平方和.

13. 設方程式$x^3+px^2+qx+r=0$之三根為 α, β, γ,則以 $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ 為根之方程式如何.

14. 設方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ 之根為 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$, 證明 $\Sigma\frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{p_1p_{n-1}}{p_n}-n$.

15. 知方程式$x^4+2x^3-21x^2-22x+40=0$之四根成等差級數,解此方程式.

16. 知方程式 $3x^4-40x^3+130x^2-120x+27=0$ 之四根成等比級數,解此方程式.

17. 知方程式 $6x^3-11x^2+6x-1=0$ 之三根成調和級數,解此方程式.

18. 求下列諸函數之導函數

(a) $c\sqrt{x}$, (b) $\dfrac{a}{x}$ (c) $\sqrt{a^2-x^2}$

(d) $(a+x)^m(b+x)^n$ (e) $x^2(a+x)^3(b-x)^4$

19. 由判別式判斷下列三方程式之根.

(a) $x^3-6x^2+6x-2=0$

(b) $x^3-12x+16=0$

(c) $x^3-6x^2+11x-6=0$

20. 求下列方程式之重根.

(a) $x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$

(b) $3x^4+16x^3+24x^2-16=0$

第二十四章　方程式之變換

158. 特殊變換　以與所與方程式$f(x)=0$之根有一定關係之數爲根而作成新方程式時,謂之**變換其方程式**.茲將特殊之簡單變換數種,說明之於下.

I.　設方程式$f(x)=0$之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$,求作以$-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots\cdots, -\alpha_n$ 爲根之方程式.即求以變更$f(x)=0$之根之符號所得之數爲根之方程式.

因$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$爲方程式 $f(x)=0$ 之根,故得

$$f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n).$$

於上列恆等式如置 $-y$ 以代 x 時,得

$$f(-y)\equiv a_0(-y-\alpha_1)(-y-\alpha_2)(-y-\alpha_3)\cdots(-y-\alpha_n)\cdots(1)$$

置(1)式之右邊等於0時所得之方程式,其根爲$-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots\cdots, -\alpha_n$, 甚明.故 $f(-y)=0$ 即爲所求之方程式.

設所與方程式$f(x)=0$爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

時,則所求方程式爲

$$a_0(-y)^n+a_1(-y)^{n-1}+a_2(-y)^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0.$$

即　$$a_0y^n-a_1y^{n-1}+a_2y^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^na_n=0.$$

或用 x 以代 y 書作

$$a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^na_n=0,$$

亦可.例如以變更方程式 $4x^5-7x^3+3x^2-5=0$ 之根之符號所得之數爲根之方程式,爲 $4x^5-7x^3-3x^2+5=0$ 是.

II. 設方程式 $f(x)=0$ 之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$, 求作以 $k\alpha_1, k\alpha_2, k\alpha_3, \cdots\cdots, k\alpha_n$, 爲根之方程式.卽求以 $f(x)=0$ 之根 k 倍之數爲根之方程式.

因 $\quad f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n),$

故置 $\quad x=\dfrac{y}{k}$

時,則

$$f\left(\frac{y}{k}\right)\equiv a_0\left(\frac{y}{k}-\alpha_1\right)\left(\frac{y}{k}-\alpha_2\right)\left(\frac{y}{k}-\alpha_3\right)\cdots\left(\frac{y}{k}-\alpha_n\right).\cdots(2)$$

置(2)式之右邊等於 0 時所得之方程式,其根爲 $k\alpha_1, k\alpha_2, k\alpha_3, \cdots\cdots, k\alpha_n$,甚明.故 $f\left(\dfrac{y}{k}\right)=0$ 卽爲所求之方程式.

設所與方程式 $f(x)=0$ 爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

時,則所求方程式爲

$$a_0\left(\frac{y}{k}\right)^n+a_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+a_2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0.$$

卽 $\quad a_0y^n+a_1ky^{n-1}+a_2k^2y^{n-2}+\cdots\cdots+a_nk^n=0.$

或用 x 以代 y 書作

$$a_0x^n+a_1kx^{n-1}+a_2k^2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_nk^n=0,$$

亦可.例如以方程式 $36x^3+12x^2+5x-2=0$ 之根之 6 倍爲根之方程式爲 $36x^3+12\cdot6x^2+5\cdot6^2x-2\cdot6^3=0,$

卽 $\quad x^3+2x^2+5x-12=0$

是.

III. 設方程式$f(x)=0$之根為 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$, 求作以 $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \cdots\cdots, \frac{1}{\alpha_n}$ 為根之方程式.即求以$f(x)=0$之根之逆數為根之方程式.

因 $$f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n).$$

故置 $$x=\frac{1}{y}$$

時,則

$$f\left(\frac{1}{y}\right)\equiv a_0\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_3\right)\cdots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right). \cdots(3)$$

因置(3)式之右邊等於 0 所得方程式之根為 $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \cdots\cdots, \frac{1}{\alpha_n}$, 故 $f\left(\frac{1}{y}\right)=0$ 即為所求之方程式.

設所與方程式$f(x)=0$為

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

時,則所求方程式為

$$a_ny^n+a_{n-1}y^{n-1}+a_{n-2}y^{n-2}+\cdots\cdots+a_0=0.$$

或用 x 以代 y 書作

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_0=0,$$

亦可.

其經此種變換而仍行不變之方程式,謂之**相反方程式**. 例如方程式 $2x^3+5x^2-5x-2=0$ 經此種變換後仍為 $2x^3+5x^2-5x-2=0$, 即此方程式為相反方程式也.(參閱第66節之III)

設相反方程式之根爲$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$，則$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \cdots\cdots, \frac{1}{\alpha_n}$亦爲其全體之根,可知$\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}, \cdots\cdots, \frac{1}{\alpha_n}$等,不外將$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$等之順序變換而成.故設$\alpha_1$爲原方程式之根時,則$\frac{1}{\alpha_1}$亦爲原方程式之根,而此二根（設其相異時）之次數不可不相等.

IV. 設方程式$f(x)=0$之根爲$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$,求作以$\alpha_1-k, \alpha_2-k, \alpha_3-k, \cdots\cdots, \alpha_n-k$爲根之方程式.即求以由方程式$f(x)=0$之根減去$k$所得之差爲根之方程式.

因 $$f(x)\equiv a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n),$$

故置 $$x=y+k$$

時,則

$$f(y+k)\equiv a_0(y+k-\alpha_1)(y+k-\alpha_2)(y+k-\alpha_3)\cdots\cdots\cdots(y+k-\alpha_n).\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

因置(4)式之右邊等於0所得方程式之根爲$\alpha_1-k, \alpha_2-k, \alpha_3-k, \cdots\cdots, \alpha_n-k$，故$f(y+k)=0$即爲所求之方程式.

設所與方程式$f(x)=0$爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0,$$

則所求方程式爲

$$a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+a_2(y+k)^{n-2}+\cdots+a_n=0.\cdots(5)$$

設上列方程式右邊化成$c_0y^n+c_1y^{n-1}+c_2y^{n-2}+\cdots\cdots+c_n$之形式時,則新方程式爲

$$c_0y^n+c_1y^{n-1}+c_2y^{n-2}+\cdots\cdots+c_n=0.$$

其$c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$等,雖可由展開(5)式之左邊以得之,但

亦可求之如下.

因 $$a_0(y+k)^n+a_1(y+k)^{n-1}+\cdots+a_n=c_0y^n+c_1y^{n-1}+\cdots+c_n$$

爲恆等式,故置 $y+k=x$ 時,得

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=c_0(x-k)^n+c_1(x-k)^{n-1}+\cdots+c_n.$$

故以 $x-k$ 除整式 $f(x)$ 時,得商

$$f_1(x)=c_0(x-k)^{n-1}+c_1(x-k)^{n-2}+\cdots\cdots+c_{n-1},$$

及剩餘 c_n.如斯卽得 c_n.次再以 $x-k$ 除 $f_1(x)$ 時,得商

$$f_2(x)=c_0(x-k)^{n-2}+c_1(x-k)^{n-3}+\cdots\cdots+c_n,$$

及剩餘 c_{n-1}.如斯復得 c_{n-1}.依此法順次求之,其 $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots\cdots, c_0$ 之值,可一一求出.

例 1. 求作以由方程式 $2x^3-5x^2+3x+2=0$ 之根減 3 所得之差爲根之方程式.

解 因以一次式除整式而求其商及剩餘時,以用綜合除法爲便,故其計算如下.

$$\begin{array}{rrrr|l}
2 & -5 & 3 & 2 & \underline{k=3} \\
 & 6 & 3 & 18 & \\
\hline
2 & 1 & 6 & \multicolumn{1}{|l}{20=c_3} & \\
 & 6 & 21 & & \\
\hline
2 & 7 & \multicolumn{1}{|l}{27=c_2} & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
2 & \multicolumn{1}{|l}{13=c_1} & & & \\
\hline
2=c_0 & & & &
\end{array}$$

故得所求方程式爲 $2x^3+13x^2+27x+20=0$.

例 2. 試變換方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$,作成一自乘羃

之係數爲 0 之方程式.

解　因以由所與方程式之根減 k 所得之差爲根之方程式爲

$$(y+k)^3+p(y+k)^2+q(y+k)+r=0,$$

卽 $$y^3+(3k+p)y^2+\cdots\cdots=0,$$

隨之如使 $k=-\frac{p}{3}$ 時,則 y^2 之項卽行消去.故作成由所與方程式之根減去 $-\frac{p}{3}$ 所得之差爲根之方程式卽可.如此所求得之方程式,爲

$$y^3+\left(-\frac{p^2}{3}+q\right)y+\left(\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r\right)=0.$$

159. 一般變換　由方程式 $f(x)=0$ 及 $y=-x$ 消去 x 時,得新方程式 $f(-y)=0$.此新方程式之根與原方程式之根,僅異其符號而絕對值相等.換言之,卽設 $f(x)=0$ 之根爲 x, $f(-y)=0$ 之根爲 y 時,則 x 與 y 間有 $y=-x$ 之關係存在.

一般,由 x 之 n 次方程式 $f(x)=0$ 與 $y=\phi(x)$ 之關係式消去 x 得 y 之 n 次方程式 $F(y)=0$ 時,則 $f(x)=0$ 之根 x 與 $F(y)=0$ 之根 y 間,有 $y=\phi(x)$ 之關係存在.換言之,卽設 $f(x)=0$ 之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$ 時,則 $F(y)=0$ 之根爲 $\phi(\alpha_1), \phi(\alpha_2), \phi(\alpha_3), \cdots\cdots, \phi(\alpha_n)$ 也.因設 $f(x)=0$ 之根爲 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots, \alpha_n$ 時,則 $f(\alpha_i)\equiv 0$, $(i=1, 2, 3, \cdots\cdots, n)$ 置 $\beta_i\equiv\phi(\alpha_i)$, 則與由

$$f(x)=0, \quad y=\phi(x)$$

消去 x 而得 $F(y)=0$ 之徑路完全相同;由 $f(\alpha_i)\equiv 0$ 及 $\beta_i\equiv\phi(\alpha_i)$

消去α時,即得$F(\beta_i)=0$.故$\beta_i(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$爲方程式$F(y)=0$之根,而此新方程式爲$n$次方程式,除此$n$根以外並無他根存在,

上節所述各種變換,即不外此一般變換中之特別數種.例如求作以$f(x)=0$之根之逆數爲根之方程式時,於原方程式$f(x)=0$及$y=\dfrac{1}{x}$消去x即可;又求作以由$f(x)=0$之根減k所得之差爲根之方程式時,於原方程式$f(x)=0$及$y=x-k$消去x即可等是.茲更舉數例解之於下.

例 1. 求作以方程式$x^3+px^2+qx+r=0$之根之平方爲根之方程式.

解 設原方程式

$$x^3+px^2+qx+r=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之根爲x,所求方程式之根爲y,則有

$$y=x^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之關係存在.故由此關係式及原方程式消去x時,即得所求之方程式.

由方程式(1),得

$$x(x^2+q)=-(px^2+r).$$

將上式兩邊各自乘,得

$$x^2(x^2+q)^2=(px^2+r)^2.$$

以(2)式x^2之值代入上式中,得

$$y(y+q)^2=(py+r)^2.$$

即
$$y^3+(2q-p^2)y^2+(q^2-2pr)y-r^2=0.$$

上列方程式,即爲所求之方程式也.

例 2. 設方程式 $x^3+3px+q=0$ 之根爲 α, β, γ, 求作以 $(\beta-\gamma)^2, (\gamma-\alpha)^2, (\alpha-\beta)^2$ 爲根之方程式.

解 由方程式之根與係數之關係,得

$$\beta+\gamma=-\alpha, \beta\gamma=3p-\alpha(\beta+\gamma)=3p+\alpha^2.$$

$\therefore$ $$(\beta-\gamma)^2=(\beta+\gamma)^2-4\beta\gamma=\alpha^2-4(3p+\alpha^2)=-3(4p+\alpha^2).$$

同理, $$(\gamma-\alpha)^2=-3(4p+\beta^2).$$
$$(\alpha-\beta)^2=-3(4p+\gamma^2).$$

故設以 x 表原方程式之根,y 表所求方程式之根時,則 x 與 y 間,有

$$y=-3(4p+x^2) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之關係存在.由此關係式與原方程式消去 x 時,卽得所求方程式.

由 (1) 式,得

$$x^2=-\left(\frac{y}{3}+4p\right). \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由原方程式,得

$$x(x^2+3p)=-q.$$

卽 $$x^2(x^2+3p)^2=q^2. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由 (2) 及 (3) 式消去 x 時,得

$$-\left(\frac{y}{3}+4p\right)\left(-\frac{y}{3}-p\right)^2=q.$$

卽 $$(y+12p)(y+3p)^2+27q^2=0. \cdots\cdots(4)$$

上式爲 y 之三次方程式,故爲所求之方程式.

〔注意〕 因上列方程式(4)之絕對項爲 $27(4p^3+q^2)$,與 $-(\beta-\gamma)^2\ (\gamma-\alpha)^2\ (\alpha-\beta)^2$ 相等.故可知原方程式之判別式

$(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2$, 等於 $-27(4p^3+q^2)$.

160. 方程式之項之消除 如第 158 節所述,以由 $f(x)=0$ 之根減去一數 k 所得之差爲根作成方程式時,其方程式之一般形式爲

$$c_0y^n+c_1y^{n-1}+c_2y^{n-2}\cdots\cdots+c_n=0.$$

吾人如將 k 之值取之適當,使 y^{n-1} 以下之某一係數 $c_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 成爲 0 時,則所得新方程式中,卽缺少該項.此種方法,於解三次,四次方程式時,至爲重要.玆舉例說明之於下.

例 1. 變換方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$, 使所得新方程式缺少第二項.

解 設以由所與方程式之根減 k 之差爲根所作成之方程式爲

$$c_0y^3+c_1y^2+c_2y+c_3=0$$

時,則由綜合除法,其 c_0, c_1, c_2, c_3,等之值如下:

$$\begin{array}{cccc|l}
a & b & c & d & \underline{k} \\
 & ak & ak^2+bk & ak^3+bk^2+ck & \\
\hline
a & ak+b & ak^2+bk+c & \multicolumn{2}{|l}{ak^3+bk^2+ck+d=c_3} \\
 & ak & 2ak^2+bk & & \\
\hline
a & 2ak+b & \multicolumn{3}{|l}{3ak^2+2bk+c=c_2} \\
 & ak & & & \\
\hline
a & \multicolumn{4}{|l}{3ak+b=c_1} \\
\hline
a=c_0 & & & &
\end{array}$$

故所得新方程式爲

$$ay^3+(3ak+b)y^2+(3ak^2+2bk+c)y+(ak^3+bk^2+ck+d)=0.$$

於上列方程式,如使 $3ak+b=0$ 即使 $k=-\dfrac{b}{3a}$ 時,則成爲

$$ay^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+\left(d-\frac{bc}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}\right)=0.$$

或 $$y^3+\frac{3ac-b^2}{3a^2}y+\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a^2}+\frac{2b^3}{27a^3}=0.$$

上列方程式,卽爲所求之方程式也.

例 2. 變換方程式 $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$, 使所得新方程式缺少第二項.

解 設以由所與方程式之根減 k 之差爲根所作成之方程式爲

$$c_0y^4+c_1y^3+c_2y^2+c_3y+c_4=0$$

時,則由綜合除法,其 c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 等之值如下.

$$\begin{array}{llll|l|l}
a & b & c & d & e & \underline{k} \\
 & ak & ak^2+bk & ak^3+bk^2+ck & ak^4+bk^3+ck^2+dk & \\
\hline
a & ak+b & ak^2+bk+c & ak^3+bk^2+ck+d & ak^4+bk^3+ck^2+dk+e=c_4 & \\
 & ak & 2ak^2+bk & 3ak^3+2bk^2+ck & & \\
\hline
a & 2ak+b & 3ak^2+2bk+c & 4ak^3+3bk^2+2ck+d=c_3 & & \\
 & ak & 3ak^2+bk & & & \\
\hline
a & 3ak+b & 6ak^2+3bk+c=c_2 & & & \\
 & ak & & & & \\
\hline
a & 4ak+b=c_1 & & & & \\
\hline
a=c_0 & & & & &
\end{array}$$

故所得新方程式爲

$$\begin{aligned}&ay^4+(4ak+b)y^3+(6ak^2+3bk+c)y^2\\&\quad+(4ak^3+3bk^2+2ck+d)y\\&\quad+(ak^4+bk^3+ck^2+dk+e)=0.\end{aligned}$$

於上列方程式,如使$4ak+b=0$即使$k=-\dfrac{b}{4a}$時,則成為

$$ay^4+\left(c-\frac{3b^2}{8a}\right)y^2+\left(d+\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}\right)y$$
$$+\left(e-\frac{3b^4}{256a^3}+\frac{b^2c}{16a^2}-\frac{bd}{4a}\right)=0.$$

或
$$y^4+\frac{8ac-3b^2}{8a^2}y^2+\frac{8a^2d+b^3-4bc}{8a^3}y$$
$$+\frac{e}{a}-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}=0.$$

上列方程式,卽為所求之方程式也.

問題二十六

1. 求以變更下列方程式之根之符號所得之數為根之方程式.

(a) $x^5+7x^4+7x^3-8x^2+x+1=0$

(b) $x^7+3x^5+x^3-x^2+7x+2=0$

2. 求作以方程式 $3x^4-4x^3+4x^2-2x+1=0$ 之根之 3 倍之數為根之方程式.

3. 求作以方程式 $x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-1=0$之根之 6 倍之數為根之方程式.

4. 求作以方程式 $x^3-\frac{5}{2}x^2-\frac{7}{18}x+\frac{1}{108}=0$ 之根之 6 倍之數為根之方程式.

5. 求作以方程式 $x^4-3x^3+7x^2+5x-2=0$之根之逆數為根之方程式.

6. 求作以由方程式 $x^4-5x^3+7x^2-17x+11=0$ 之根減

4 所得之差爲根之方程式.

7. 求作以由方程式 $x^5+4x^3-x^2+11=0$ 之根減 3 所得之差爲根之方程式.

8. 求作以方程式 $4x^5-2x^3+7x-3=0$ 之根加 2 所得之和爲根之方程式.

9. 求作以方程式 $3x^4+7x^3-15x^2+x-2=0$ 之根加 7 所得之和爲根之方程式.

10. 求作以方程式$x^3+px^2+qx+r=0$之根之立方爲根之方程式.

11, 求作以方程式$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$之根之平方爲根之方程式.

12. 設方程式 $a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4=0$ 之根爲 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 求作以 $\beta\gamma+\alpha\delta, \gamma\alpha+\beta\delta, \alpha\beta+\gamma\delta$ 爲根之方程式.

13. 變換方程式$x^3-6x^2+4x-7=0$,使所得新方程式缺少第二項.

14. 變換方程式 $x^4+8x^3+x-5=0$, 使所得新方程式缺少第二項.

15. 變換方程式 $x^4-8x^3+x^2+x-6=0$, 使所得新方程式缺少 x^3 之項,

16. 變換方程式 $x^4-4x^3-18x^2-3x+2=0$, 使所得新方程式缺少第三項.

第二十五章　複素數

161. **複素數**　當解方程式時,吾人爲使方程式普遍的有根起見,特創設一新數 i,使 $i^2=-1$ 時,此 i 謂之虛數.設 b 爲任意實數,則虛數之一般形式爲 bi.又設 a, b 各爲實數,其由 $+, -$ 等號連結而成之 $a+bi$ 及 $a-bi$ 等數,謂之複素數.複素數之計算規則,爲

(A)　$a=c, b=d$ 時,則 $a+bi=c+di$;

(B)　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;

(C)　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$;

(D)　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$;

(E)　$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i$;但 $c+di\neq 0$,

等,已如第25節所述.茲將代數學上所謂三大原則之交換法則,配分法則及結合法則等對於複素數亦能適用,證明之於下.

I.　加法之交換法則

即　$(a+bi)+(c+di)=(c+di)+(a+bi)$.

證明　由(B),得

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $(c+di)+(a+bi)=(c+a)+(d+b)i.$ ············(2)

因 a, b, c, d 各爲實數,故

$$a+c=c+a,\quad b+d=d+b.$$

故(1),(2)二式相等.

II. 乘法之交換法則

即 $(a+bi)(c+di)=(c+di)(a+bi).$

證明 由(C),得

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i. \cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $(c+di)(a+bi)=(ca-db)+(bc+da)i.$ ·········(2)

然 $(ac-bd)=(ca-db),\quad (ad+bc)=(bc+da),$

故(1),(2)二式相等.

III. 乘法之配分法則

即 $\{(a+bi)+(c+di)\}(e+fi)=(a+bi)(e+fi)$
$+(c+di)(e+fi).$

證明 因 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$

故左邊 $=\{(a+c)+(b+d)i\}(e+fi)$

$=\{(a+c)e-(b+d)f\}+\{(b+d)e+(a+c)f\}i$

$=(ae+ce-bf-df)+(be+de+af+cf)i.$

又右邊 $=(ae-bf)+(be+af)i+(ce-df)+(de+cf)i$

$=(ae+ce-bf-df)+(be+de+af+cf)i,$

故兩邊相等.

IV. 加法之結合法則

即 $\{(a+bi)+(c+di)\}+(e+fi)=(a+bi)$
$+\{(c+di)+(e+fi)\}.$

證明　左邊$=\{(a+c)+(b+d)i\}+(e+fi)$

$$=(a+c+e)+(b+d+f)i$$

右邊$=(a+bi)+\{(c+e)+(d+f)i\}$

$$=(a+c+e)+(b+d+f)i.$$

故兩邊相等.

V.　乘法之結合法則

即　$\{(a+bi)(c+di)\}(e+fi)=(a+bi)\{(c+di)(e+fi)\}.$

證明　左邊$=\{(ac-bd)+(bc+ad)i\}(e+fi)$

$$=\{(ac-bd)e-(ad+bc)f\}$$

$$+\{(ad+bc)e+(ac-bd)f\}i$$

$$=(ace-bde-adf-bcf)$$

$$+(ade+bce+acf-bdf)i,$$

右邊$=(a+bi)\{(ce-df)+(cf+de)i\}$

$$=\{a(ce-df)-b(cf+de)\}$$

$$+\{b(ce-df)+a(ef+de)\}i,$$

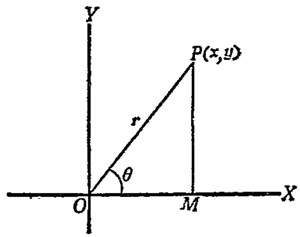
故兩邊相等.

如以上所證明,可知適用於實數之三大原則,對於複素數亦能適用.且實數不過爲複素數 $a+bi$ 之 $b=0$ 時特殊之數.故複素數之範圍,實遠較實數爲廣.即視實數包含於複素數中,亦無不可.

設二複素數之和或積爲實數時,則此二複素數,互謂之共軛複素數.例如 $a+bi$ 與 $a-bi$,互爲共軛複素數是.

162. 複素數之幾何學的表示法　有一複素數 $x+yi$ 於此,今於某直交坐標軸之平面上作成 (xy) 點時,則與任

意之複素數對應,此平面上僅能求得一點.反之,此平面上任意一點,亦與一複素數對應,故 (x, y) 點,謂之<u>表複素數 $x+yi$ 之點</u>.或簡稱之爲<u>點 $x+yi$.</u>



第十〇圖

因所有各實數皆能以 x 軸上之點表之,及所有各虛數皆能以 y 軸上之點表之,故此 x 軸謂之<u>實軸</u>;y 軸謂之<u>虛軸</u>.又含實軸與虛軸之平面,謂之<u>複素數平面</u>.

由上所述,可知複素數界爲二次元之平面.隨之二數之大小云者,於複素數界失其意義.因實數系於數軸上某一點向他一點進行時,有向左向右之一定方向;而於複素數平面上由某一點連續的向他點進行時,可有無限之方向故也.

設表複素數 $x+yi$ 之點爲 P,其與原點之距離 OP 爲 r,又以 θ 表 POX 角時,則

$$r=\sqrt{x^2+y^2}; \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \cdots\cdots(2)$$

r 及 θ 均可由上列二式之關係以決定之.其 r 謂之複素數 $x+yi$ 之<u>率</u>或稱<u>絕對值</u>.θ 謂之<u>偏角</u>.例如 $1+i$ 之絕對值爲 $\sqrt{2}$,偏角爲 $\frac{\pi}{4}$;又 $1-\sqrt{3}\ i$ 之絕對值爲 2,偏角爲 $-\frac{\pi}{3}$ 等是.

$x+yi=0$ 時,其 $x=0, y=0$, 隨之 $x+yi$ 之絕對值 r 亦爲 0. 反之,絕對值爲 0 之複素數爲 0. 故複素數爲 0 一語,其意義與複素數之絕對值爲 0 相同.但複素數爲 0 時,其偏角則完全不定.

設複素數 $x+yi$ 之絕對值及偏角各爲 r, θ, 則

$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta.$$

故複素數 $x+yi$ 常可以

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

之形式表示之.反之,$(r>0)$ 如上式形式所書成之複素數,其絕對值爲 r, 偏角爲 θ. 因設此複素數之絕對值爲 r' 偏角爲 θ' 時,則

$$r(\cos\theta+i\sin\theta)=r'(\cos\theta'+i\sin\theta').$$

$$\therefore \quad r\cos\theta=r'\cos\theta', \quad r\sin\theta=r'\sin\theta'.$$

利用上式之關係及 $r, r'>0$ 時,即可得

$$r=r', \quad \theta=\theta'+2n\pi, \text{（}n\text{ 爲0或整數）}$$

故也.

表複素數 $x+yi$ 之絕對值 $\sqrt{x^2+y^2}$ 時,通常皆以符號 $|x+yi|$ 表之.又 $x+yi$ 謂之複素數之 xy 形, $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 謂之複素數之 $r\theta$ 形.

163. 複素數之積,商之絕對值及偏角 設二複素數 z_1, z_2 之絕對值各爲 r_1, r_2, 偏角各爲 θ_1, θ_2 時,則

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1), \quad z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2).$$

$$\therefore \quad z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

$$+i(sin\theta_1cos\theta_2+cos\theta_1sin\theta_2)\}$$
$$=r_1r_2\{cos(\theta_1+\theta_2)+isin(\theta_1+\theta_2).$$

因上式右邊之絕對值爲r_1r_2,偏角爲$\theta_1+\theta_2$,故得一定理於下.

定理 1. 二複素數之積之絕對值,等於其二絕對值之積;又二複素數之積之偏角,等於其二偏角之和.

定理1如擴張之,更可得下述之一般定理.

定理 2 n個複素數之積之絕對值,等於其諸絕對值之積;又n個複素數之積之偏角,等於其諸偏角之和.

又因

$$\frac{1}{z_2}=\frac{1}{r_2(cos\theta_2+isin\theta_2)}=\frac{1}{r_2}(cos\theta_2-isin\theta_2),$$

$$\therefore\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(cos\theta_1+isin\theta_1)(cos\theta_2-isin\theta_2)$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\{cos(\theta_1-\theta_2)+isin(\theta_1-\theta_2)\}$$

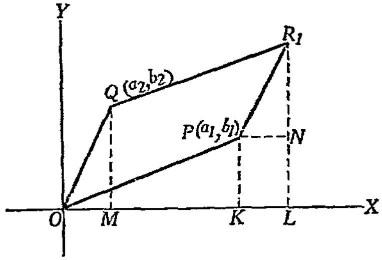
故復得一定理於下.

定理 3. 二複素數之商之絕對值,等於其二絕對值之商;又二複素數之商之偏角,等於由被除數之偏角減去除數偏角之差.

164. 二複素數之和,差,積,商之幾何學的表示法 於複素數平面上求得表二複素數z_1,z_2之點P,Q時,則表此二複素數之和,差,積,及商之點,可依下法以求得之.

I 設$z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z=z_1+z_2$時,則

$$z=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i.$$



因P點之坐標爲a_1, b_1;Q點之坐標爲a_2, b_2;故設以OP,OQ爲二邊之平行四邊形與O相對之頂點爲R_1時,則R_1點之坐標爲 a_1+a_2, b_1+b_2.

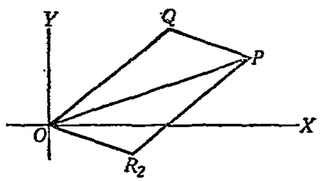
因由Q,P,R_1三點各引與y軸平行之直線,設此三直線各與x軸之交點爲M, K, L; 又由P點引與x軸平行之直線交R_1L於N點時,則

$$OQ \underline{\parallel} PR_1, \quad OM \parallel PN, \quad MQ \parallel NR_1;$$

$$\triangle OMQ \equiv \triangle PNR_1,$$

隨之 $$PN = OM = a_1, \quad NR_1 = MQ = b_2,$$

故也.故表$z=z_1+z_2$之點爲R_1.

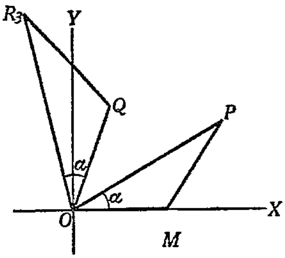


II　設$z=z_1-z_2$時,則$z_1=z_2+z$.故表z之點R_2爲以OQ, OR_2爲二邊之平行四邊形對於O之頂點恰爲P點之點.隨之由P點與$\overrightarrow{QO}$平行且相等引線段PR_2時,則R_2即爲表$z=z_1-z_2$之點.

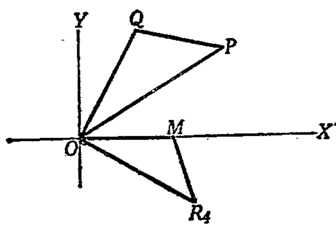
III　設$z=z_1z_2$,則

$$\frac{|z|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{1}.$$

又因 z 之偏角等於 z_1 及 z_2 之偏角之和,故設表 1 之點爲 M,表 z 之點爲 R_3,則 $\triangle OQR_3$ 與 $\triangle OMP$ 於同方向相似.隨之其 R_3 點可由作圖以求得之.



IV. 設 $z=\dfrac{z_1}{z_2}$, 表 z 之點爲 R_4 時,則 $\triangle OPQ$ 與 $\triangle OMR_4$ 於同方向相似.隨之其 R_4 可由作圖以求得之.但 M 爲表 1 之點.



167. 多廡布路之定理

定理 設 n 爲實數時,則

$$\cos n\theta+i\sin n\theta$$

等於 $$(\cos\theta+i\sin\theta)^n,$$

或爲其一值.

證明 I. n 爲正整數時

由第 163 節之定理 2,得

$$(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots\cdots(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=\cos(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots\cdots+\theta_n)$$
$$+i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\cdots\cdots+\theta_n).$$

於上列等式中置

$$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\cdots\cdots=\theta_n$$

時,即成爲

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

II. n爲負整數時

此時如置 $n=-m$, 則m爲正整數,而

$$(\cos m\theta-i\sin m\theta)(\cos m\theta+i\sin m\theta)=1.$$

$$\therefore\quad \cos m\theta-i\sin m\theta=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}.$$

然m爲正整數,故由I之結果,得

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^m=\cos m\theta+i\sin m\theta.$$

$$\therefore\quad \cos m\theta-i\sin m\theta=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}.$$

隨之得

$$\cos(-m\theta)+i\sin(-m\theta)=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}.$$

再以n轉代 $-m$ 時,得

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

III. n爲分數時

此時如置$n=\frac{p}{q}$則 p,q 互爲素整數,且 q 爲正.故由I之結果,得

$$\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^q=\cos\theta+i\sin\theta.$$

故 $\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}$爲$\cos\theta+i\sin\theta$之$q$次根之一.換言之,即

$$\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}$$

等於

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}$$

之一值.今如各取其 p 乘冪時,得

$$\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^p=\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta$$
$$=\cos n\theta+i\sin n\theta,$$

及
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=(\cos\theta+i\sin\theta)^n.$$

故此時 $\cos n\theta+i\sin n\theta$ 亦爲 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n$ 之一值.

因無理數可視爲有理數之極限,又某數之無理數乘冪可視爲其數有理數乘冪之極限,故本定理於 n 爲無理數時,亦能成立.

上述定理,謂之多麻布路之定理.

例 1. 求 $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$ 之值.

解
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^9$$
$$=\cos 3\pi+i\sin 3\pi=-1.$$

例 2. 求 $(1+i)^5=$ 之值.

解
$$(1+i)^5=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^5$$
$$=4\sqrt{2}\left\{\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right\}=-4(1+i).$$

166. 二項方程式之解法 二項方程式

$$x^n-A=0$$

可應用多麻布路之定理以解之,玆述之於下.但 n 爲正整數,A 爲既知之複素數.

設 A 爲 $a+bi$, 置 $a=R\cos\alpha$, $b=R\sin\alpha$ 時,則

$$x^n=R(\cos\alpha+i\sin\alpha).$$

設 $\qquad r(\cos\theta+i\sin\theta)$

爲所與方程式之一根時,則由多麻布路定理.

$$r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=R(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$

$$\therefore \quad r^n\cos n\theta=R\cos\alpha,$$

$$r^n\sin n\theta=R\sin\alpha.$$

將上列二等式各自乘後相加,得

$$r^{2n}=R^2.$$

$$\therefore \quad r^n=R.$$

隨之得

$$\cos n\theta=\cos\alpha, \quad \sin n\theta=\sin\alpha.$$

$$\therefore \quad n\theta=\alpha+2k\pi.$$

上式中之 k 爲任意整數,故得所與方程式被假定之根之形式爲

$$\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right). \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

於上式中給予 k 以完全數列中 n 個相連之數值時,卽得所與方程式之 n 根.因 $\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$ 之值以 n 爲週期而循環,故僅有 n 根.上列 n 次根之公式,亦可改書之如下.

$$\left\{\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right)\right\}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

設置 $R=1, \alpha=0$ 時,則方程式 $x^n=A$ 成爲一般之形式 $x^n=1$. 隨之得 1 之 n 次根爲

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2),$$

例 1. 解 $x^3=a^3$ 方程式.

解 因 $\left(\frac{x}{a}\right)^3=1$,

故由公式(2),得

$$\frac{x}{a}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

設 $k=0$ 時,則 $\frac{x}{a}=1$;

$k=1$ 時,則 $\frac{x}{a}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$k=2$ 時,則 $\frac{x}{a}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

今置 $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})=\omega$

時,則

$$\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})=\omega^2.$$

故得所與方程式之根即 a^3 之立方根,爲

$$a,\ a\omega,\ a\omega^2.\ 但\ \omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}).$$

例 2. 解 $x^4+a^4=0$ 方程式.

解 因 $\left(\frac{x}{a}\right)^4=-1=\cos\pi+i\sin\pi$,

故由公式(1),得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^4=\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}.$$

設 $k=0$ 時,則 $\frac{x}{a}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$;

$k=1$ 時,則 $\frac{x}{a}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i)$;

$k=2$ 時,則 $\frac{x}{a}=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$;

$k=3$ 時,則 $\frac{x}{a}=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$.

故得所與方程式之根,即 $-a^4$ 之四次根,爲

$$\frac{a}{\sqrt{2}}(1\pm i),\quad \frac{a}{\sqrt{2}}(-1\pm i).$$

問題二十七

試以 xy 形表下列諸數.

1. $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
2. $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$
3. $2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$
4. $4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

試以 $r\theta$ 形表下列諸數.

5. $1+i$
6. $1-i$
7. $-i$
8. $4i$
9. $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$
10. $-2+2\sqrt{3}i$

試以 xy 及 $r\theta$ 形表下列各數之積.

11. $(-2+2i)(2+2i)$
12. $(-2-2i)(2+2i)$
13. $(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$

14. $(3+i\sqrt{3})(2+2i)$

將下列各分數之分母 z 先化成 $r\theta$ 形,然後以 $r\theta$ 形表其商.

15. $\dfrac{2}{1+i}$

16. $\dfrac{1+i}{1-i}$

17. $\dfrac{-2+2i}{-4i}$

18. $\dfrac{-2+2\sqrt{3}i}{1+i\sqrt{3}}$

19. $\dfrac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

求下列各式之值.

20. $\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

21. $(3+i\sqrt{3})^3$

22. $(1+i)^{10}$

23. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$

解下列諸方程式.

24. $x^3=27$

25. $x^4=16$

26. $x^5=1$

27. $x^5=32$

28. $x^5+a^5=0$

29. $x^6+1=0$

30. $x^9+1=0$

第二十六章　三次及四次方程式之解法

167. 三次方程式之解法　三次方程式之一般形式,爲

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由第 160 節之例 1,置 $y+k$ 以代 x,使 $k=-\dfrac{b}{3a}$ 變換其方程式時,得

$$ay^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+\left(d-\frac{bc}{3a}+\frac{2b^3}{27a^2}\right)=0.\cdots\cdots\cdots(2)$$

以 a 除上列方程式之兩邊,而以 p 代其 y 項之係數,q 代絕對項之係數時,則方程式(2)成爲

$$y^3+py+q=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但　　$$p=\frac{3ac-b^2}{3a^2},\quad q=\frac{d}{a}-\frac{bc}{3a_2}+\frac{2b^3}{27a^3}.\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

因函數 y^3+py+q 可書作 $y(y^2+p)+q$,設

$$y(y^2+p)=-q \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

時,則 $y^3+py+q=0$ 甚明.置

$$\therefore p=-3uv,\quad -q=u^3+v^3,$$

則方程式(5)成爲

$$y(y^2-3uv)=u^3+v^3.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$y=u+v$ 能滿足方程式(6),隨之亦能滿足方程式(3),甚

明.如吾人能以 p 與 q 表 u 與 v 時,則 $u+v$ 之值,卽爲所求方程式(3)之根.

由方程式

$$-3uv=p;$$

得

$$v=-\frac{p}{3u}.$$

以上式中之 v 值代入於方程式

$$u^3+v^3=-q,$$

得

$$u^3-\frac{p^3}{27u^3}+q=0.$$

卽
$$27u^6+27qu^3-p^3=0.$$

$$\therefore \quad u^3=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}.$$

$$\therefore \quad u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

隨之
$$v=-\frac{p}{3u}=\frac{-p}{3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}.$$

以 $\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$ 乘上式之分子,分母,得

$$v=\frac{-p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)\left(-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right)}}$$

$$=\frac{-p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}}=\frac{-p\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}}{3\times-\frac{p}{3}}.$$

卽 $$v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

$$\therefore\quad y=u+v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\mp\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

因上式根號中之複號,任取其上方或下方之號,其值皆同.故所求方程式爲

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

設 u_1 爲 $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 之立方根之一,而於滿足 $-3uv=p$ 之關係,與 u_1 對應之 v 值爲 v_1,則方程式(3)之根爲

$$y=u_1+v_1.$$

由第 166 節之例 1,設 u_1 爲 $-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ 之立方根之一時,則其餘二根爲 $u_2=u_1\omega$, $u_3=u_1\omega^2$. 但 ω, ω^2 各爲 1 之立方根.其

$$\omega=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\quad \omega^2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3}).$$

隨之與 u_2, u_3 對應之 v 值 v_2, v_3, 各爲

$$v_2=-\frac{p}{3u_2}=-\frac{p}{3u_1\omega}=\frac{v_1}{\omega}=\frac{v_1\omega^2}{\omega^3}=v_1\omega^2.$$

$$v_3=-\frac{p}{3u_3}=-\frac{p}{3u_1\omega^2}=\frac{v_1}{\omega^2}=\frac{v_1\omega}{\omega^3}=v_1\omega.$$

故得方程式(3)之三根如下.

$$y_1=u_1+v_1$$

$$y_2=u_1\omega+v_1\omega^2$$

$$y_3=u_1\omega^2+v_1\omega$$

但 $u_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$, $v_1=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$,

而 $-3u_1v_1=p$.

如第 157 節例 2 所述,上式根號中之 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$, 謂之三次方程式之判別式.即設

$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$ 時,則三次方程式三根俱爲實數,且各不相等;

$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$ 時,則三次方程式三根俱爲實數,且至少有二根相等;

$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ 時,則三次方程式三根中一爲實數,二爲共軛複素數.

例 1. 解 $x^3-3x^2+6x-4=0$ 方程式.

解 因 $a=1,\ \ b=-3,\ \ c=6,\ \ d=-4,$

隨之得 $k=1,\ \ p=3,\ \ q=0.$

$\therefore\ \ u_1=1,\ \ v_1=-1.$

$\therefore\ \ y_1=0,\ \ y_2=\omega-\omega^2=i\sqrt{3}\quad y_3=\omega^2-\omega=-i\sqrt{3}.$

$\therefore\ \ x_1=1,\ \ x_2=1+i\sqrt{3},\ \ x_3=1-i\sqrt{3}.$

例 2. 解 $x^3-15x-4=0$ 方程式.

解 $$x_1=\sqrt[3]{2+\sqrt{121}i}+\sqrt[3]{2-\sqrt{121}i}$$
$$=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}=(2+i)+(2-i)=4.$$
$$x_2=(2+i)\omega+(2-i)\omega^2=-2-\sqrt{3}.$$
$$x_3=(2+i)\omega^2+(2-i)\omega=-2+\sqrt{3}.$$

168. 四次方程式之解法 四次方程式之一般形式,爲

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由第 160 節之例 2,置 $y+k$ 以代 x,使 $k=-\frac{b}{4a}$ 變換其方程式時,得

$$ay^4+\left(c-\frac{3b^2}{8a}\right)y^2+\left(d+\frac{b^3}{8a^2}-\frac{bc}{2a}\right)y$$
$$+\left(e-\frac{3b^4}{256a^3}+\frac{b^2c}{16a^2}-\frac{bd}{4a}\right)=0.$$

以 a 除上列方程式之兩邊而置

$$\frac{8ac-3b^2}{8a^2}=p,\quad \frac{8a^2d+b^3-4bc}{8a^3}=q,$$
$$\frac{e}{a}-\frac{3b^4}{256a^4}+\frac{b^2c}{16a^3}-\frac{bd}{4a^2}=r,$$

時,則成爲

$$y^4+py^2+qy+r=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

與第 167 節之方法相同,置

$$y=u+v+w,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將方程式(3)兩邊各自乘,得

$$y^2=u^2+v^2+w^2+2(uv+uw+vw).$$

卽 $$y^2-(u^2+v^2+w^2)=2(uv+uw+vw).$$

將上列方程式兩邊各再自乘,得

$$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2+(u^2+v^2+w^2)^2$$
$$=4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+8(u^2vw+uv^2w+uvw^2).$$

即 $$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2-8uvw(u+v+w)$$
$$+(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=0.$$

即 $$y^4-2(u^2+v^2+w^2)y^2-8uvwy+(u^2+v^2+w^2)^2$$
$$-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=0. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

將方程式(4)與(2)之同次項之係數比較之,得

$$u^2+v^2+w^2=-\frac{p}{2}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$uvw=-\frac{q}{8}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

及 $$(u^2+v^2+w^2)^2-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=r.$$

因上列最後一方程式可書作

$$\frac{p^2}{4}-4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)=r,$$

$$\therefore \quad u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2=\frac{p^2-4r}{16}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

由方程式(5),(6),(7),得下列之一組方程式.

$$\left.\begin{aligned} -(u^2+v^2+w^2)&=\frac{p}{2} \\ +(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)&=\frac{p^2-4r}{16} \\ -(u^2v^2w^2)&=\frac{-q^2}{64} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

由第 153 節方程式之根與係數之關係,其 u^2, v^2, w^2, 實為方程式

$$t^3+\frac{p}{2}t^2+\frac{p^2-4r}{16}t-\frac{q^2}{64}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

之根.此方程式(9)爲 t 之三次方程式,可由上節之解法以解之.

設其三根各爲 t_1, t_2, t_3, 則

$$y=u+v+w=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}.$$

上式中根號前之符號,於滿足

$$uvw=-\frac{q}{8}$$

之關係下,可任意取之.但亦不過下列數種.即

$$\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=\sqrt{t_1}(-\sqrt{t_2})(-\sqrt{t_3})$$
$$=(-\sqrt{t_1})\sqrt{t_2}(-\sqrt{t_3})=(-\sqrt{t_1})(-\sqrt{t_2})\sqrt{t_3}$$

故得所求方程式(2)之根,爲

$$\left.\begin{aligned} y_1&=\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\\ y_2&=\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\\ y_3&=-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\\ y_4&=-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

〔注意〕解四次方程式時,無論用如何方法,(代數的方法)途中皆不可不經過一度三次方程式之解法.此三次方程式,謂之誘歸方程式.

例 解 $x^4-58x^2-192x-135=0$ 方程式.

解 因 $p=-58,\ q=-192,\ r=-135,$

故得所與方程式之誘歸方程式爲

$$t^3-29t^2+244t-576=0.$$

將上列方程式依上節方法解之,得

$$t_1=4,\quad t_2=9,\quad t_3=16.$$

故得所求方程式之根,為

$$x_1=2+3+4=9,$$

$$x_2=2-3-4=-5,$$

$$x_3=-2+3-4=-3,$$

$$x_4=-2-3+4=-1.$$

問 題 二 十 八

解下列諸方程式.

1. $x^3+4x-5=0$
2. $x^3-12x-65=0$
3. $x^3+6x^2+3x+2=0$
4. $x^3-9x^2+36x-48=0$
5. $x^3-6x^2+6x-2=0$
6. $x^4+x^2+4x-3=0$
7. $x^4-6x^2-3x+2=0$
8. $x^4-5x^2+6x+3=0$
9. $x^4+8x^3+25x^2+40x+25=0$
10. $x^4-8x^3+21x^2-16x-7=0$

第二十七章　具實係數之方程式

169. 具實係數方程式之虛根

定理　設 α, β 各爲實數,具實係數之方程式 $f(x)=0$ 有 $\alpha+\beta i\,(\beta \neq 0)$ 形式之虛根時,則亦必有 $\alpha-\beta i$ 形式之虛根.

證明　因

$$(x-\alpha-\beta i)(x-\alpha+\beta i)=(x-\alpha)^2+\beta^2,$$

故設以 $(x-\alpha)^2+\beta^2$ 除 $f(x)$ 所得之商爲 $f_1(x)$, 剩餘爲 $Rx+R'$,則 $f_1(x)$ 之係數及 R, R', 皆爲實數.而

$$f(x)\equiv\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}f_1(x)+(Rx+R').\cdots\cdots(1)$$

今設 $f(x)=0$ 有 $\alpha+\beta i$ 之根時,則因置 $x=\alpha+\beta i$ 時,其 $f(x)=0$, 故得

$$0=R(\alpha+\beta i)+R'.$$

卽　$$(R\alpha+R')+R\beta i=0.$$

$$\therefore\quad R\alpha+R'=0,\ R\beta=0.$$

隨之得　$$R=0,\ \ R'=0.$$

以上式之值代入於(1)式中,得

$$f(x)\equiv\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}f_1(x).$$

上式明示 $f(x)$ 能爲 $x-\alpha+\beta i$ 所整除.換言之,卽 $\alpha-\beta i$ 爲 $f(x)=0$ 之根.

系 1. 設 $\alpha+\beta i$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之 k 次等根時,則 $\alpha-\beta i$ 亦爲其 k 次等根.

因設 $\alpha+\beta i$ 爲 $f(x)=0$ 之 k 次等根,$\alpha-\beta i$ 爲其 m 次等根,而 $k>m$ 時,則 $f(x)$ 能爲 $\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^m$ 所整除;設其商爲 $Q(x)$,則 $Q(x)$ 之係數皆爲實數;其方程式 $Q(x)=0$ 有 $\alpha+\beta i$ 形式之根 $k-m$ 個,而 $\alpha-\beta i$ 之根全無,不合理甚明.同理,$k<m$ 時,亦不合理.故必 $k=m$,卽必如系所云也.

系 2. 方程式 $f(x)=0$ 之虛根之數必爲偶數.凡奇數次之方程式至少必有一實根.如實根之數較 1 爲多時,則其個數必爲奇數.又偶數次之方程式必有偶數個實根.但所謂偶數云者,0 亦包括於其中.

系 3. 具實係數之整式 $f(x)$,能以 $(x-\alpha)^2+\beta^2$ 形式具實係數之二次因式若干個,與具實係數之一次因式若干個之積以表之.卽

$$f(x)=a_0A_1(x)A_2(x)$$

但 a_0 爲 $f(x)$ 中 x 最高冪之係數,$A_1(x)$ 爲對應於 $f(x)=0$ 之虛根之二次式之積

$$\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1\}\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2\}\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$A_2(x)$ 爲對於於 $f(x)=0$ 之實根之一次式之積

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

設無虛根時,則 $A_1(x)=0$;無實根時,則 $A_2(x)=0$.故又得下述之系.

系 4. 方程式 $f(x)=0$ 不具實根時,則 $f(x)$ 對於 x 之所有各實數值,皆同一符號.其符號與 x 最高冪之係數或不

含 x 之絕對項相一致.

因此時 $f(x)$ 能以具有實係數 $(x-\alpha)^2+\beta^2$ 形式之二次因式若干個,與 x 最高冪係數之積以表之,故 $f(x)$ 對於 x 所有各實數值,皆與 x 最高冪之係數同一符號;又 $f(x)$ 旣對於 x 所有各實數值同一符號,則其符號亦不能不與 $x=0$ 時之符號,即不含 x 之絕對項之符號相同也.

系 5. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 對於 x 適當大之正數值,能與 a_0 同一符號.

此因予較方程式 $f(x)=0$ 實根中最大者爲大之正值於 x 時,則 $f(x)$ 常與 a_0 之符號相同故也.

系 6. $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$ 對於絕對值適當大之 x 負值,能與 $(-1)^na_0$ 同一符號.

因作成 $f(-x)$ 時,則

$$f(-x)=(-1)^na_0x^n+(-1)^{n-1}a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n.$$

而此整式對於 x 適當大之正值與 $(-1)^na_0$ 同一符號,隨之 $f(x)$ 對於絕對值適當大之 x 負值,亦與 $(-1)^na_0$ 同一符號故也.

170. 介於二數間之根之數

定理 1. 設 a, b 各爲實數,方程式 $f(x)=0$ 於 a 與 b 間全然無根或有偶數個根時,則 $f(a)$ 與 $f(b)$ 同一符號.反之, $f(x)=0$ 於 a 與 b 間有奇數個根時,則 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相異.但 $f(a)\fallingdotseq 0$, $f(b)\fallingdotseq 0$.

證明 爲便利起見,特假定 $a<b$. 由上節定理之系 3, $f(x)$ 可改書之如下.

$$f(x)=kA_1(x)A_2(x).$$

但 k 爲不含 x 之實數, $A_1(x)$ 爲對應於方程式 $f(x)=0$ 之虛根之二次式之積, $A_2(x)$ 爲對應於 $f(x)=0$ 之實根之一次式之積.即

$$A_1(x)=\{(x-a_1)^2+\beta_1^2\}\{(x-a_2)^2+\beta_2^2\}\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$A_2(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_m).$$

因 $kA_1(x)$ 對於 x 之任何實數值其符號皆同,故隨 $A_2(a)$ 與 $A_2(b)$ 之爲同符號或爲異符號,而 $f(a)$ 與 $f(b)$ 亦爲同符號或爲異符號.

今設 ai 較 a 爲小時,則 $a-ai$ 與 $b-ai$ 俱爲正;又 ai 較 b 爲大時,則 $a-ai$ 與 $b-ai$ 俱爲負,其符號皆同.反之,設 ai 介於 a, b 之間時,則 $a-ai$ 與 $b-ai$ 異其符號.故設 $a_1, a_2, \cdots\cdots\cdots, a_m$ 中介於 a, b 間之數爲 r 個,則

$$A_2(a)=(a-a_1)(a-a_2)\cdots\cdots(a-a_m),$$

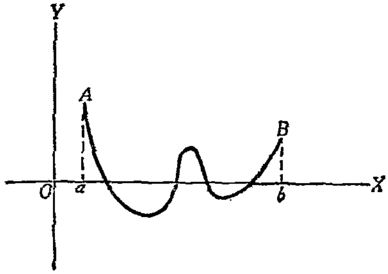
與 $$A_2(b)=(b-a_1)(b-a_2)\cdots\cdots(b-a_m),$$

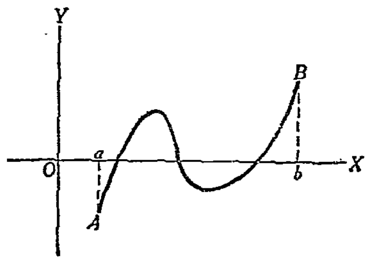
於 r 爲偶數時 ($r=0$ 亦在內) 其符號相同, r 爲奇數時其符號相異.隨之 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號,亦由 r 爲偶數而相同, r 爲奇數而相異.即本定理已被證明.

因本定理之假設包羅無遺,且其結論互相排拒,故其逆定理亦眞.即下述定理亦眞也.

定理 2. 設 a, b 各爲實數, $f(a), f(b)$ 之符號相同時,則方程式 $f(x)=0$ 於 a, b 二數間有偶數個根存在.(全然無根時亦包含在內.) 反之, $f(a), f(b)$ 之符號相異時,則方程式 $f(x)=0$ 於 a, b 二數間有奇數個根存在.

此定理如以幾何學的方法說明之,則至爲明瞭.卽於函數$f(x)$之圖表,設其對於$x=a$之曲線上之點A,與對於$x=b$之曲線上之點B,同位於x軸之同側時;則此曲線於A,B間,或全不與x軸相交,或與x軸相交偶數次.反之,設其對於$x=a$之曲線上之點A,與對於$x=b$之曲線上之點B,各位於x軸之一側時;則其曲線必於A,B間與x軸相交奇數次.





例　試分離方程式$f(x)=x^4-5x^3+x^2+10x-5=0$之根.

解　因

x	$-\infty$	0	∞
$f(x)$	$+$	$-$	$+$

故可知所與方程式之正根爲一個或三個.又其負根亦爲一個或三個;但所與方程式可書作

$$f(x)=x^3(x-5)+x^2+9x+(x-5),$$

故$x\geqq5$時,則$f(x)>0$.卽方程式$f(x)=0$不能有較5爲大之正根.又

$$f(x)=(x^4-5)-5x(x^2-2)+x^2.$$

故 $x\leqq-2$ 時,則 $f(x)>0$. 卽方程式 $f(x)=0$ 不能有較 -2 爲小之負根.而

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

故可知所與方程式之正根有三,於 $(0,1)$, $(1,2)$, $(4,5)$ 間各有一根.又

x	0	-1	-2
$f(x)$	$-$	$-$	$+$

可知所與方程式之負根有一,位於 $(-1,-2)$ 間.

〔注意 1〕 較 $f(x)=0$ 正根中任何根爲大之數,謂之其正根之上限.又較其負根中任何根爲小之數,謂之其負根之上限.如上例之 5(隨之較 5 爲大之數皆然)爲其正根之上限,而 -2(隨之較 -2 爲小之數皆然)爲其負根之上限是.

〔注意 2〕 方程式 $f(x)=0$ 負根之上根,爲方程式 $f(-x)=0$ 正根之上限變其符號者.

171. 德卡路特之符號規則

定理 方程式 $f(x)=0$ 正根之數,不較其各項係數符號變化之數爲多.例如於方程式

$$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+7x-6=0,$$

如僅書其各項係數之符號時,則爲

$$+\ -\ +\ +\ -$$

卽 $+-$ 或 $-+$ 變化之數共計 3 個,故可斷定此方程式之

正根不較 3 為多是.

證明　於證明本定理之前,先證明以 $x-a(a>0)$ 乘某多項式時,其乘積各項符號之變化,較原多項式符號之變化,至少增加一個如下.

設多項式係數之符號為

$$+ - - - + - + - -$$

今以 $x-a$ 乘之,則其符號之變化如下.

$$\begin{array}{cccccccccc}
+ & - & - & - & + & - & + & - & - & \\
 & - & + & + & + & - & + & - & + & + \\
\hline
+ & - & \mp & \mp & + & - & + & - & \mp & +
\end{array}$$

卽最初以 x 相乘時,其符號與原式相同,而以 $-a$ 相乘時,其第二部分之積與原式全相反,如上式所示.

因乘積第二項皆為負,其符號雖與原多項式相同,但第三項及第四項,則為 + 或為 −,不能決定.設第二,第三,第四三項之符號為 − − − 或 − − + 時,則此部分符號變化之數,與原式無異.又為 − + + 時,因第五項為 +,故亦與原式無異.但如為 − + − 時,則符號之變化,確較原多項式多 1.

然乘積最後之項必與原多項式最後之項異其符號,故不論第九項為 + 或 −,其符號之變化,必增加一個,隨之以 $x-a(a>0)$ 乘任何多項式,其各項符號之變化,至少必增加一個.

應用上述符號變化之理論時,可證明本定理如下.

設 $f(x)=0$ 之 p 個正根為 $\alpha, \beta, \cdots\cdots$,其他 $n-p$ 個根為 $\alpha', \beta', \cdots\cdots$, 則

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots(x-\alpha')(x-\beta')\cdots\cdots$$

爲便利起見,置其乘積一部分

$$(x-\alpha')(x-\beta')\cdots\cdots=\varphi(x),$$

卽置

$$f(x)=\varphi(x)(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

因以$x-a$乘多項式$\varphi(x)$時,其符號之變化至少增加一個,隨之以對應於p個正根之因式$(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $\cdots\cdots$,同乘$\varphi(x)$時,其符號之變化,較$\varphi(x)$符號之變化,至少增加p個.換言之,卽$f(x)$符號之變化,較$\varphi(x)$原有符號之變化,至少多p個.故$f(x)=0$正根之數,不能超過其符號變化之數.

系　因方程式$f(x)=0$之負根爲$f(-x)=0$之正根,故$f(x)=0$負根之數,不較$f(-x)=0$符號變化之數爲多.

上述定理,謂之**德卡路特之符號規則**.

〔**注意**〕應用德卡路特之符號規則時,亦可推定方程式虛根之數.例如於方程式

$$f(x)=x^6+5x^5+2x^3+3x^2-x+1=0$$

其正根之數不能超過2個,又

$$f(-x)=x^6-5x^5-2x^3+3x^2+x+1=0$$

之符號變化爲2,故$f(x)=0$之負根亦不能超過2個,隨之可推定原方程式之虛根至少有2個是.

問題二十九

1. 以$3+5i$及$4-2i$爲根,作成具有實係數之最低次方程式.

2. 設$\alpha+\beta i(\beta\neq0)$為方程式$x^3+px+q=0$之根時,證明$-2\alpha$亦為此方程式之根.

3. 證明方程式$x^3-9x-m(x^2-1)=0$不論m為正數或負數,皆有三個實根.

4. 於方程式$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$,設其絕對值最大之負係數為$-N$,證明$N+1$為此方程式正根之上限.

分離下列諸方程式之根.

5. $2x^3-12x-5=0$

6. $2x^3-4x-1=0$

7. $x^3-2x^2-3x+3=0$

8. $x^3+2x^2-5x-5=0$

9. $x^4-4x^3-2x^2+3x+1=0$

10. $x^4+6x^3-25x^2+10x+9=0$

11. 證明$x^3+3x^2+x+1=0$不具正根.

12. 證明$x^3+2x+1=0$有一負根及二虛根.

13. 證明$2x^4+3x^2+6x-5=0$有二實根及二虛根.

14. 證明$x^4+4x^2+2x-15=0$有一正根一負根及二虛根.

第二十八章　數字方程式

172. 數字方程式實根近似值之求法　茲將關於係數爲數字之方程式正根近似值之求法,舉例說明之於下.

例　計算 $f(x)=x^3+2x^2-23x-70=0$ 之正根近似值.

解　由前第 157 節之方法,作成所與方程式之判別式時,其值較 0 爲小,故可知此方程式僅有一實根.因

$$f(5)=-10<0,$$
$$f(6)=80>0.$$

隨之所與方程式僅有一介於 5, 6 二數間之正根存在.卽 $f(x)=0$ 僅有一正根 $5.\alpha\beta\gamma\cdots\cdots$. 但 α, β, γ, 各表其根小數第一,二,三,…… 位之整數.

I.　將所與方程式之根減 5 時,得方程式

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & 2 & -23 & -70 & \underline{5} \\
 & 5 & 35 & 60 & \\
\hline
 & 7 & 12 & -10 & \\
 & 5 & 60 & & \\
\hline
 & 12 & 72 & & \\
 & 5 & & & \\
\hline
 & 17 & & &
\end{array}$$

$$f_1(x)=x^3+17x^2+72x-10=0.$$

上列方程式於 0, 1 二數間,僅有一根 $0.\alpha\beta\gamma\cdots\cdots$.

置 $x=0.1,\ 0.2,\cdots\cdots$ 而驗 $f_1(x)$ 符號之變化時,得知

$$f_1(0.1)<0,\quad f_1(0.2)>0.$$

隨之可知介於 0, 1 二數間之 $f_1(x)=0$ 之根,介於0.1, 0.2二數間.換言之,即 $\alpha=1$.

II. 次將方程式 $f_1(x)=0$ 之根減 0.1 時,得方程式

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & 17 & 72 & -10 & 0.1 \\
 & 0.1 & 1.71 & 7.371 & \\
\hline
 & 17.1 & 73.71 & -2.629 & \\
 & 0.1 & 1.72 & & \\
\hline
 & 17.2 & 75.43 & & \\
 & 0.1 & & & \\
\hline
 & 17.3 & & &
\end{array}$$

$$f_2(x)=x^3+17.3x^2+75.43x-2.629=0,$$

上列方程式於 0, 0.1 二數間僅有一根 $0.0\beta\gamma\cdots\cdots$.

置 $x=0.01, 0.02,\cdots\cdots$ 而驗 $f_2(x)$ 符號之變化時,得知

$$f_2(0.03)<0,\quad f_2(0.04)>0.$$

可知介於 0, 0.1 二數間之 $f_2(x)=0$ 之根,介於0.3, 0.4二數間.換言之,即 $\beta=3$.

繼續上法計算之,其所求得方程式 $f(x)=0$ 之正根近似值之精密程度,可隨心所欲.此種方法,謂之忽拿之方法.忽拿方法,不論方程式之根爲有理數或無理數,均能適用之.

又本例方程式之根之第三位數 3,亦可如下法想像以

得之.

因方程式 $f_2(x)=0$ 於 0, 0.1 二數間僅有一根存在,設此根爲 k 時,則

$$k^3+17.3k^2+75.43k-2.629=0.$$

但 k^3 與 $17.3k^2$, 比之於 $75.43k$ 與 2.629,甚爲微小.故棄去此二項時,得

$$75.43k-2.629\doteqdot 0.$$

此卽表示能以棄去 $f_2(x)=0$ 之 x^3, x^2 之項所得方程式

$$\varphi_2(x)=75.43x-2.629=0$$

之根 0.03 爲 k 之近似值也.

其他關於 $f(x)=0$ 之根之第四,五,……等位之數,亦均能依同樣方法想像而得之.

再用忽拿方法計算方程式之正根時,如欲避免其變換方程式中所發生之小數,可於作成其變換方程式之前,先將各變換方程式之根 10 倍之卽可.例如於本例欲除去 $f_2(x)=0$ 中之小數時,可將 $f_1(x)=0$ 之根 10 倍後之方程式

$$F_1(x)=x^3+170x^2+7200x-10000=0$$

以代方程式 $f_1(x)=0$ 而取作第一變換方程式.因 $f_1(x)=0$ 有較 0.1 爲大之根,隨之 $F_1(x)=0$ 有較 1 爲大之根.故以由 $F_1(x)=0$ 之根減 1 所得之數爲根之方程式,不可不爲 10 倍 $f_2(x)=0$ 之根後之方程式

$$x^3+173x^2+7543x-2629=0.$$

同理,由上列方程式復行作成變換方程式時,其係數亦將發生小數.故亦須以 10 倍此方程式之根後所得方程式

$$F_2(x)=x^3+1730x^2+754300-2629000=0$$

以代方程式$f_2(x)$而取作第二變換方程式.如此繼續求之,卽可.

綜合上述各項,可知計算本例 $f(x)=x^3+2x^2-23x-70=0$ 之正根時,其算式如下.

1	2	-23	-70	5.134
	5	35	60	
	7	12	-10	
	5	60		$f_1(0.1)<0$
	12	72		$f_1(0.2)>0$
	5			
1	170	7200	-1000	1
	1	171	7371	
	171	7371	-2629	
	1	172		$\frac{2629}{7543}=0.3+4$
	172	7543		
	1			
1	1730	754300	-2629000	3
	3	5199	2278497	
	1733	759499	-350503	
	3	5208		
	1736	764707		$\frac{350503}{764707}=0.4+$
	3			
	1739			

173. 省略算 忽拿之數字方程式解法,雖能予吾人以精密結果,但繼續此法時,不久卽遭遇大數,致計算上發生困難.故本節更將其省略計算之方法,舉例說明之於下.

例　計算 $f(x)=x^3+2x^2-23x-70=0$ 之正根近似值.

解　由上節計算之結果,得知此方程式之正根為 5.13……,其第三變換方程式應為

$$x^3+17390x^2+76470700x-350503000=0.\cdots\cdots\cdots(1)$$

以 1000 除上列方程式之兩邊時,得

$$0.001x^3+17.39x^2+76470.7x-350503=0.\ \cdots\cdots(2)$$

因上列方程式有接近於 4 之正根,故對於其根,$0.001x^3$, $0.39x^2$, 及 $0.7x$ 等,比之於 x 之一次項及絕對項,甚為微小.隨之於方程式將其係數之小數點以下四捨五入所得方程式

$$17x^2+76471x-350503=0.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

之根,殆略與方程式(2)之正根(與 4 接近)相等.由此方程式之根減 4 後再以 10 倍之,得方程式

$$17x^2+766070x-4434700=0.$$

$$\begin{array}{rrr|l}
17 & 76471 & -350503 & \underline{4} \\
 & 68 & 306156 & \\
\hline
 & 76539 & -44347 & \\
 & 68 & & \\
\hline
 & 76607 & &
\end{array}$$

即　$$0.17x^2+7660.7x-44347=0.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

與由方程式(2)得方程式(3)之方法相同,於方程式(4)中將其係數之小數點以下四捨五入作成方程式

$$7661x-44347=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

時,則方程式(4)之正根,可由方程式(5)之正根近似的表示

之.繼續此法時,其 $F_3(x)=0$ 之正根近似值,可簡單的計算之如下.

		1		
$\cancel{1}$	$17\cancel{3}\cancel{9}$	$7467\cancel{0}\cancel{7}$	-350503	0.004578
		68	306156	
		76539	-44347	
		68		
		76607		
		1		
	$\cancel{1}\cancel{7}$	$766\cancel{0}\cancel{7}$	-44347	
			38305	
		$766\cancel{1}$	-6042	
			5362	
		7		
		$76\cancel{6}$	-680	
			616	

故得原方程式之正根約等於5.134578.

174. 有數正根之方程式 設方程式之正根在二個以上時,只須其諸根不爲重根,亦能用忽拿之方法以求得之.茲舉例說明之於下.

例 計算 $f(x)=x^3-7x+7=0$ 之正根.

解 因 $x\geqq 2$ 時,

$$f(x)=(x^3-7x+6)+1$$
$$=(x-1)(x-2)(x+3)+1>0,$$

故可知 $x=2$ 爲正根之上限.而 $f(1)=f(2)=1$, 隨之如 $f(x)=0$於 1, 2 二數間有根存在時,則不可不有二個.

作成 $f\left(\frac{3}{2}\right)$ 時,其 $f\left(\frac{3}{2}\right)<0$. 故 $f(x)=0$ 於 1, 2 二數間有二根存在.今使 $f(x)=0$ 之根減 1 作成變換方程式

$$f_1(x)=x^3+3x^2-4x+1=0$$

置 $x=0.1, 0.2, \cdots\cdots$ 而驗 $f_1(x)$ 之符號時,得知

$$f_1(0.3) \quad +, \qquad f_1(0.4) \quad -;$$

$$f_1(0.6) \quad -, \qquad f_1(0.7) \quad +.$$

即 $f_1(x)=0$ 於 0.3, 0.4 及 0.6, 0.7 各二數間,均有一根存在.由忽拿方法,可求得此二根之近似值爲 0.35688 及 0.69202.故得原方程式 $f(x)=0$ 之正根爲 1.35688 及 1.69202.

〔注意〕 因方程式 $f(x)=0$ 與方程式 $f(-x)=0$ 之根僅異其符號,故求 $f(x)=0$ 之負根時,於求得 $f(-x)=0$ 之正根後變更其符號即可.隨之如應用忽拿之方法於 $f(-x)=0$ 時,亦可求得 $f(x)=0$ 之負根近似值.

問 題 三 十

應用忽拿方法,將下列各方程式被指定之根計算至小數點第二位,再用省略算計算至第五位.

1. $x^3+2x-5=0(1, 2)$ 間
2. $x^3+2x-18=0(2, 3)$ 間
3. $x^3-6x^2-8x+40=0(2, 3)$ 間
4. $x^3-6x^2-8x+40=0(6, 7)$ 間
5. $x^3+6x^2-x-20=0(-2, -3)$ 間
6. $x^3+6x^2-x-20=0(-5, -6$ 間

7. $x^4-12x^2+12x+4=0(1,2)$間

8. $x^4-10x^2-4x+8=0(3,4)$間

第二十九章　行列式

175. 轉倒　n個物件之順列,全體有$n!$個.今於此$n!$個順列中任取其一以爲標準時,則其他順列中二物件之順序,有與標準順列中二物件之順序相同者,亦有與標準順列中二物件之順序相異者.例如於1, 2, 3三數所成之順列,取123以爲標準順列時,則於312順列,其1與2之順序與標準順列相同,而3與1, 3與2之順序與標準順列相反是.

某順列中二物件之順序與標準順列中二物件順序相反時,其二物件間謂之有一轉倒.如此所得順序相反之二物件組數,謂之其順列轉倒之數.例如取1 2 3爲標準順列時,則312順列於3與1, 3與2間各有一轉倒,隨之此順列有二個轉倒是.

轉倒數爲偶數之順列,謂之偶順列,爲奇數之順列,謂之奇順列.例如取1234爲標準順列時,則3412於3與1, 3與2, 4與1, 4與2間各有一轉倒,計全體共有四轉倒,故爲偶順列;又4312於4與3, 4與1, 4與2, 3與1, 3與2間各有一轉倒,計全體共有五轉倒,故爲奇順列是.

以後凡關於數字之順列,皆規定取其依自然數之順序

而排列者爲標準.又關於文字之順列,則規定取其依 abc …… 之順序而排列者爲標準.

定理 交換順列中之二物件時,其轉倒之數,依奇數個而增減.

例如於3214順列中交換其2與4時,則得3412順列,前者轉倒之數爲3,(奇數)而後者轉倒之數爲4(偶數)是.

證明 設將一順列中相隣二物件 p, q 交換之,其 pq 間有轉倒時,則 qp 間無轉倒;又 pq 間無轉倒時,則 qp 間有轉倒.故無論如何,其 p, q 間之轉倒數,必有一個增減.而此二物件以外各物件間之轉倒,不因此二物件之交換而變更.故順列中之轉倒數,僅有一個之增減.

次交換其不相隣接之二物件 p, q 時,設 p 與 q 間有 r 個物件 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_{r-1}, a_r$,則先將 p 與 a_1 交換之,次復將 p 與 a_2 交換之,如此順次交換,待 p 交換至 q 之位置後,再行將 q 與 a_r 交換,次復將 q 與 a_{r-1} 交換,如此順次交換,待 q 交換至 p 之最初位置爲止.如此將相隣二物件交換 $2r+1$ 之結果,與一次交換 p 與 q 同,甚明.因交換相隣二物件時,其轉倒之數僅有一個增減,故如此交換奇數次後,其轉倒之數亦依奇數個而增減,甚明.卽本定理已被證明.

由上述定理,可知由 n 個物件所成之 $n!$ 個順列中,其半數爲偶順列,半數爲奇順列.因設取其偶順列全部而交換其中某特別二物件時,則成爲全體各不相同之奇順列,隨之其奇順列之數,不較偶順列之數爲少;又由同理,偶順列

之數,亦不較奇順列之數為少故也.

176. 行列式之定義 如下式排列之n^2個數,其各數謂之<u>原素</u>.

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{matrix}$$

於上列n^2個原素中,由其各列(橫線)各取一原素,又各行(縱線)各取一原素作成乘積時,一般可得

$$a_\alpha b_\beta c_\gamma \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

形式之積.但$\alpha\beta\gamma\cdots\cdots$表由$n$個數$1, 2, 3, \cdots\cdots, n$所成順列之一.今將此積依其文字順序排列之,(即如$(A)$所示)設其數字間轉倒之數為偶數,則附以$+$號;為奇數,則附以$-$號,而將積之全體加合之,其代數和謂之前列$n^2$個原素之行列式,而以符號

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

表之.例如如前第70節及第73節所述之

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

等是.其前方附有＋或－號之積,謂之行列式之項將行列之項一一詳書之,謂之展開其行列式.

因偶順列之數與奇順列之數相等,故行列式中具正號之項與具負號之項,亦各相等.

行列式之横線,謂之列;縱線,謂之行.行之數與列之數相等,甚明.此數,謂之行列式之次數.即 n^2 個原素之行列式,為 n 次行列式也.

於 n 次行列式(1),其貫穿 $a_1, b_2, c_3, \cdots\cdots$ 等原素之對角線,謂之主對角線.由此諸原素所成之項 $a_1\ b_2\ c_3\cdots\cdots$,謂之主項.又行列式有時亦有用其沿主對角線之原素以表之者,例如行列式(1)亦可書作

$$|a_1\ b_2\ c_3\cdots\cdots\cdots\cdots|$$

是.

於上列 n^2 個原素中,由其各列各取一原素及各行各取一原素所作成乘積,不論其原素之順序如何變换,其文字間轉倒之數與數字間轉倒之數之和,皆常為偶數或常為奇數.因於其積中交換二原素時,其文字間轉倒之數依奇數個增減,同時數字間轉倒之數亦依奇數個增減,隨之其和必依偶數個增減;而由積之一種排列移於他種排列時,可由二原素之變換繼續以得之故也.例如將 $a_4d_2c_1b_3$ 之第一原素 a_4 與第三原素 c_1 交換之書作 $c_1d_2a_4b_3$ 時,其文字間

轉倒之數與數字間轉倒之數之和,在前者爲 7,(奇數)在後者爲 5(奇數)是.隨之可得一結論如下.

於前列 n^2 個原素中,由其各列各取一原素及各行各取一原素所作成乘積,設依其文字順序排列之其數字間轉倒之數爲偶數,則依其數字順序改書之,而其文字間轉倒之數亦爲偶數.又前者爲奇數時,則後者亦爲奇數.

利用上述結果時,n 次行列式之定義,亦可改述之如下.

由前列 n^2 原素中各列各取一原素及各行各取一原素作成乘積,設依其數字順序排列之其文字間轉倒之數爲偶數則附以＋號,爲奇數則附以－號,而將積之全體加合之;其代數和,謂之前列 n^2 原素之行列式.

上述定義,如與前述定義合併之,則爲

由 n^2 個原素中各列各取一原素及各行各取一原素作成乘積,設依列(行)之順序排列之其行(列)間轉倒之數爲偶數則附以＋號,爲奇數則附以－號,而將積之全體加合之;其代數和,謂之此 n^2 原素之行列式.

〔注意〕於三次行列式,其含與主對角線平行線上原素之項爲正項,含與其他對角線平行線上原素之項爲負項

177. 行列式之性質

定理 1. 交換行列式之行與列,其行列式之值不變.即

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \vdots & \vdots \\ a_2 & b_2 & c_2 & \vdots & \vdots \\ a_3 & b_3 & c_3 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

證明 因將左邊行列式之各項依列中原素順序排列之及右邊行列式之各項依行中原素順序排列之,則得同一之展開式故也.

由此定理,可知行列式中關於行之定理,可應用之於列;又關於列之定理,亦可應用之於行.

定理 2. 行列式列中(或行中)各原素之公因數,可括出於行列式之外以爲行列式之因數.例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots\cdots a_n \\ kb_1 & kb_2 & kb_3\cdots\cdots\cdots kb_n \\ c_1 & c_2 & c_3\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

證明 因設左邊行列式爲 Δ 時,則

$$\Delta=\Sigma\{\pm a_\alpha(kb_\beta)c_\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$
$$=k\Sigma(\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots).$$

其複號隨 $\alpha\beta\gamma\cdots\cdots$ 爲偶順列取 +,爲奇順列取 −.

$$\therefore\quad \Delta=k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3\cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3\cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

系 行列式中有各原素皆爲 0 之一列(或行)時,則其行列式爲 0.

定理 3. 交換行列式之二列(或行)時,則行列式變

更其符號.例如

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots c_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots b_n \\ a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots\cdots a_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

證明 設左邊行列式爲 Δ,右邊行列式爲 Δ',將 Δ,Δ' 展開式之各項依其列中原素之順序排列之,則

$$\Delta=\Sigma(\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots),$$

$$\Delta'=\Sigma(\pm c_\alpha b_\beta a_\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots).$$

卽 Δ 中之項 $a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots\cdots$,與 Δ' 中之項 $c_\alpha b_\beta a_\gamma\cdots\cdots$ 卽 $a_\gamma b_\beta c_\alpha\cdots\cdots$ 之號相同.但 $\alpha\beta\gamma\cdots\cdots$ 與 $\gamma\beta\alpha\cdots\cdots$,其一方爲偶順列時,則他方爲奇順列.故於 Δ 中 $a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots\cdots$ 與 $a_\gamma b_\beta c_\alpha\cdots\cdots$ 之號相異.換言之,卽 Δ 中之各項,皆爲變更 Δ' 各項之符號而得者.

$$\therefore\quad \Delta=-\Delta'$$

定理 4. 行列式中二列(或二行)之對應原素相等時,則行列式之值爲 0.

例如於

$$\therefore\quad \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

其 $a_1=c_1,\ a_2=c_2,\ a_3=c_3,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ a_n=c_n$ 時,則 $\Delta=0$.

證明　此時如交換行列式之第一列與第三列時,其行列式之值不變.然由定理 3,交換行列式之二列時,其所得行列式與原行列式之符號相反,即

$$\Delta=\Delta' \text{ 同時復 } \Delta=-\Delta'$$

$$\therefore \quad \Delta=0$$

系　行列式中二列（或二行）之對應原素成比例時,其行列式之值為 0.例如於

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

其 $\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_2}{c_2}=\frac{a_3}{c_3}=\cdots\cdots=\frac{a_n}{c_n}$ 時,則 $\Delta=0$.

證明　因置 $\frac{a_1}{c_1}=k$ 時,則

$$a_1=kc_1,\ a_2=kc_2;\ a_3=kc_3,\cdots\cdots\cdots\cdots,a_n=kc_n;$$

$$\therefore \quad \Delta=\begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 \cdots\cdots kc_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots c_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

其右邊行列式第一列與第三列之對應原素相等,故由本定理,其值為 0 故也.

例 1. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 之值.

解 因所與行列式第一列與第二列之對應原素成比例,故由定理 4 之系,其值為 0.

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 10 & 15 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

例 2. 分解 $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ 為因式.

解 因 Δ 為關於 a, b, c 之三次同次式而置 $a=b$ 時,則其第一行與第二行之對應原素相等,隨之 Δ 之值為 0. 故 Δ 能為 $a-b$ 所整除.同理,Δ 亦能各為 $b-c, c-a$ 所整除.

$$\therefore \quad \Delta = k(a-b)(b-c)(c-a)$$

但 k 為數係數.比較 a^2b 之係數時,得 $k=1$.

$$\therefore \quad \Delta = (a-b)(b-c)(c-a)$$

〔注意〕 Δ 為關於 a, b, c 之交代式,(因於 a, b, c 中交換其二文字時,由定理 3, Δ 變更其符號故也.) 行因式分解時,如利用此性質,則至為簡便.

定理 5. 行列式中一列(或行)各原素悉由二數之和而成時,則此行列式可分解成二行列式之和.例如

$$\begin{vmatrix} a_1+a'_1 & a_2+a'_2 & a_3+a'_3 \cdots\cdots\cdots a_n+a'_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \cdots\cdots a'_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

證明 因左邊行列式如以Δ表之,則

$$\Delta=\Sigma\{\pm(a_\alpha+a'_\alpha)b_\beta c_\gamma\cdots\cdots\cdots\cdots\}$$
$$=\Sigma(\pm a_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots\cdots)+\Sigma(\pm a'_\alpha b_\beta c_\gamma\cdots\cdots)$$

恰等於右邊二行列式之和故也。

〔注意〕應用本定理,反之,可將二行列式化成一行列式。

系 行列式中二列各原素悉由二數之和而成時,則此行列式可分解成四行列式之和。

定理 6. 以一數同乘行列式中某一列(或行)而與他列(或行)之對應原素相加,其行列式之值不變.例如

$$\begin{vmatrix} a_1+kc_1 & a_2+kc_2 & a_3+kc_3\cdots a_n+kc_n \\ b_1 & b_2 & b_3\cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3\cdots\cdots\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3\cdots\cdots c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

證明 因左邊行列式可分解成

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots\cdots\cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \text{與} \begin{vmatrix} kc_1 & kc_2 & kc_3 & \cdots\cdots & kc_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots\cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

二行列式之和,而第二行列式由定理 4 之系,其值為 0 故也.

設 $k=1$ 或 $k=-1$ 時,則其結果如下.

系 將行列式中某列(或行)原素各與他列(或行)之對應原素相加或相減,其行列式之值不變.

例 3. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ 之值.

解 將所與行列式以 Δ 表之而由其第三列減第二列,又由第二列減第一列時,則

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

上列行列式第二列與第三列之對應原素相等,故由定理 4,其值為 0.

$$\therefore \quad \Delta = 0$$

178. 小行列式 於行列式中取去其含某原素之行與列時所作成之行列式,謂之關於其原素之小行列式.例如

於 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 關於 a_1 之小行列式爲 $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$，而關於 b_3 之小行列式爲 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ 是.

因 $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ 爲關於行列式 Δ 中原素 a_1 之小行列式,故通常皆以符號 Δa_1 表之,又 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ 爲關於行列式 Δ 中原素 b_3 之小行列式,同樣以符號 Δb_3 表之.

定理

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = a_1\Delta a_1 - a_2\Delta a_2 + a_3\Delta a_3 - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}a_n\Delta a_n$$

證明 於所與行列式中,其含 a_1 之項因於第二列以下不能取第一行之原素,故其和爲 $a_1\Delta a_1$, 甚明.

次於行列式中交換其第一行與第二行時,則

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \cdots\cdots & a_n \\ b_2 & b_1 & b_3 \cdots\cdots & b_n \\ c_2 & c_1 & c_3 \cdots\cdots & c_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

故其含 a_2 項之和爲 $-a_2\Delta a_2$

再將其第三行與第二行交換後復與第一行交換之,則

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots & c_n \\ \cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \cdots\cdots & a_n \\ b_3 & b_1 & b_2 \cdots\cdots & b_n \\ c_3 & c_1 & c_2 \cdots\cdots & c_n \\ \cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots & & & \end{vmatrix}$$

故其含 a_3 項之和為 $a_3 \varDelta_{a_3}$.

如此繼續行之,即得所與行列式

$$\varDelta = a_1\varDelta_{a_1} - a_2\varDelta_{a_2} + a_3\varDelta_{a_3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}a_n\varDelta_{a_n}$$

系 由行或列之交換,可得下列諸等式.

$$\varDelta = -b_1\varDelta_{b_1} + b_2\varDelta_{b_2} - \cdots\cdots + (-1)^n b_n\varDelta_{b_n}$$

$$\varDelta = a_1\varDelta_{a_1} - b_1\varDelta_{b_1} + c_1\varDelta_{c_1} - \cdots\cdots + \cdots\cdots$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

〔注意〕本定理明示求 n 次行列式之值時,歸着於求 $n-1$ 次行列式之值.在行列式之某列或某行中其原素多為 0 時,最為適用.

例 求 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ 之值.

解 將所與行列式以 $\varDelta$ 表之而以 2 乘第二列後加於第一列,次以第二列加於第三列,再以 3 乘第二列後加於第四列,則成

$$\Delta=\begin{vmatrix}0&-3&5&7\\-1&-3&2&1\\0&-1&4&2\\0&-5&7&1\end{vmatrix}$$

故關於上列行列式第一行各原素作成小行列式時,得

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3&5&7\\-1&4&2\\-5&7&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3&5&7\\1&4&2\\5&7&1\end{vmatrix}$$

於上列行列式以 -3 乘其第二列後加於第一列,次以 -5 乘其第二列後加於第三列,然後關於其第一行各原素作成小行列式時,得

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0&-7&1\\1&4&2\\0&-13&-9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&1\\-13&-9\end{vmatrix}=76$$

179. 餘因式 行列式 $\begin{vmatrix}a_1\ a_2\ a_3\cdots\cdots\cdots a_n\\b_1\ b_2\ b_3\cdots\cdots\cdots b_n\\c_1\ c_2\ c_3\cdots\cdots\cdots c_n\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{vmatrix}$ 有時亦常展開之如下.

$$\begin{aligned}\Delta&=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3+\cdots\cdots+a_nA_n\\&=b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+\cdots\cdots+b_nB_n\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

或 $\Delta=a_1A_1+b_1B'+c_1C_1+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$=a_2A_2+b_2B_2+c_2C_2+\cdots\cdots\cdots$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

卽 A_1 爲含於 Δ 中 a_1 係數之代數和,B_1 爲含於 Δ 中 b_1 係數之代數和,故以小行列式表之,則其關係如下.

$$A_1=\Delta_{a_1}\quad A_2=-\Delta_{a_2}\quad A_3=\Delta_{a_3}\cdots\cdots$$
$$B_1=-\Delta_{b_1}\quad B_2=\Delta_{b_2}\quad B_3=-\Delta_{b_3}\cdots\cdots$$
$$\cdots=\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots=\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots$$

其 $A_1, A_2, A_3, \cdots\cdots, B_1, B_2, B_3, \cdots\cdots$ 等,各謂之 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots$ 等之餘因式.

餘因式之性質如下.

於行列式之某列(或行)以該原素之餘因式乘其原素而加合之,其和等於原行列式.

於行列式之某列(或行)以他列(或行)之對應原數乘其原素而加合之,其和爲 0.

例如 $b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3+\cdots\cdots+b_nB_n=\Delta\cdots\cdots(1)$

$c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3+\cdots\cdots+c_nB_n=0\quad\cdots\cdots(2)$

(1)式能成立,甚明,欲證明(2)式時,因(2)式之左邊爲於(1)式左邊中置 $b_1=c_1, b_2=c_2, b_3=c_3, \cdots\cdots, b_n=c_n$ 而得者,故等於於行列式 Δ 中以 $c_1, c_2, c_3, \cdots\cdots, c_n$ 置換 $b_1, b_2, b_3, \cdots\cdots, b_n$ 而得者.隨之(2)式之左邊爲0.

180. 聯立一次方程式之解法 行列式之起源,原基因於方程式之解法.本節茲就行列式對於聯立方程式解法

之應用,略述之於下,藉使學者得窺見其一斑.

設聯立三元一次方程式爲

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以上列三方程式未知數係數所作行列式中 a_1, a_2, a_3 三原素之餘因式 A_1, A_2, A_3 順次各乘其一方程式後相加,得

$$(a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3)x+(b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3)y$$
$$+(c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3)z=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3 \cdots(4)$$

由餘因式之性質,上式左邊 x 之係數爲 Δ,而 y, z 之係數爲 0.

$$\therefore \quad \Delta x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$$

但

$$d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

故設 $\Delta \neq 0$ 時,則

$$\therefore \quad x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

同理,

$$y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

反之,如上所求得 x, y, z 之值,亦能滿足方程式(1),(2)及(3),因(5),(6),(7)三式可改書成

$$x=\frac{d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3}{\Delta},\quad y=\frac{d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3}{\Delta},$$

$$z=\frac{d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3}{\Delta}$$

故以 a_1, b_1, c_1 順次各乘上列一式後邊邊相加時,得

$$a_1x+b_1y+c_1z=\frac{d_1(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)}{\Delta}$$

$$+\frac{d_2(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2)}{\Delta}+\frac{d_3(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3)}{\Delta}$$

但 $a_1A_1+bB_1+c_1C_1=\Delta,\quad a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0,$

$$a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3=0$$

$$\therefore\quad a_1x+b_1y+c_1z=d_1$$

卽能滿足方程式(1).同理,(5),(6),(7)三式中 x, y, z 之值,亦能滿足方程式(2)及(3).

181. 聯立一次方程式之根之討論 聯立三元一次方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

於其未知數係數所成行列式 Δ 不爲 0 時,有一組根存在,已如上節所述.本節更就 $\Delta=0$ 時,討論之於下.

為便利起見,其於Δ中同時消去某一行一列所得之二次行列式,或同時消去某二行二列所得之一次行列式,(即係數)權稱之為A系統之行列式.又由未知數係數及絕對項所成四個三次行列式

$$\Delta,\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

及同時由其消去某一行一列或二行二列所得之二次及一次行列式,權稱之為B系統之行列式.則有一重要定理如下.

定理 於A系統行列式中求其值不等於0之次數最大者,同樣,由B系統行列式中亦求其值不等於0之次數最大者.設此二行列式之次數相等時,則聯立方程式之根不定,否則不能.

證明 I 設B系統行列式中有三次行列式不為0者,例如

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

時,因 $\Delta=0$ 其次數不等,故聯立方程式之根不能.因如假定方程式(1),(2),(3)之根為x', y', z'時,則

$$a_1x'+b_1y'+c_1z'=d_1$$
$$a_2x'+b_2y'+c_2z'=d_2$$
$$a_3x'+b_3y'+c_3z'=d_3$$

$$\therefore \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x'+b_1y'+c_1z' & b_1 & c_1 \\ a_2x'+b_2y'+c_2z' & b_2 & c_2 \\ a_3x'+b_3y'+c_3z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=x'\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+y'\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+z'\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

與(4)式之假定相反故也.即此時聯立方程式之根不能,

II. 設屬於A, B系統中之三次行列式皆爲 0 而A系統中之二次行列式例如

$$\Delta a_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$$

時,則此行列式亦屬於B系統中,其次數相等,隨之方程式之根不定.因以任意之值k代入於方程式(2),(3)之x後移項,得

$$b_2y+c_2z=d_2-a_2k$$
$$b_3y+c_3z=d_3-a_3k$$

而$\Delta a_1\neq 0$,故由此可得y, z之一組值.即

$$y=\frac{\begin{vmatrix} d_2-a_2k & c_2 \\ d_3-a_3k & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta a_1} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2-a_2k \\ b_3 & d_3-a_3k \end{vmatrix}}{\Delta a_1}$$

上列式中y, z之值亦能滿足方程式(1).因假設對於$x=k$及上式y, z之值

$$a_1k+b_1y+c_1z\neq d_1$$

時,則

$$(a_1k+b_1y+c_1z-d_1)\,\Delta a_1\neq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

而上式可改書之如下.

$$(a_1k+b_1y+c_1z-d_1)\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1k+b_1y+c_1z-d_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1k+b_1y+c_1z-d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2k+b_2y+c_2z-d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3k+b_3y+c_3z-d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

與(5)式之結果相反.故此時所與方程式之根為

$$x=k\ (k\text{為任意數}),\ y=\frac{\begin{vmatrix} d_2-a_2k & c_2 \\ d_3-a_3k & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta a_1},\quad z=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2-a_2k \\ b_3 & d_3-a_3k \end{vmatrix}}{\Delta a_1}.$$

其值不定.

III. 設屬於 A 系統之三次及二次行列式皆為 0 而 B 系統中之行列式例如

$$\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}\neq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

時,因行列式之次數不等,故聯立方程式之根不能.因設聯立方程式至少有一組根存在,其根為 x', y', z' 時,則

$$a_2x'+b_2y'+c_2z'=d_2,\qquad a_3x'+b_3y'+c_3z'=d_3;$$

隨之 $$\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_2x'+b_2y'+c_2z' \\ a_3 & a_3x'+b_3y'+c_3z' \end{vmatrix}=x'\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$+y'\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+z'\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

(6)式之假定相反故也.

〔注意〕二次行列式悉成爲 0 時,學者可自行研究之.

例 解 $x+y+z=1$ 聯立方程式.

$$ax+by+cz=d$$

$$a^2x+b^2y+c^2z=d^2$$

解 由前第 179 節之公式,x, y, z 之分母相同,皆爲

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$x\text{之分子}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(d-b)(b-c)(c-d)$$

$$y\text{之分子}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & d & c \\ a^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix}=(a-d)(d-c)(c-a)$$

$$z\text{之分子}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix}=(a-b)(b-d)(d-a)$$

$$\therefore\quad\begin{cases} x=\dfrac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{(d-b)(c-d)}{(a-b)(c-a)} \\ y=\dfrac{(a-d)(d-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)} \\ z=\dfrac{(a-b)(b-d)(d-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\dfrac{(b-d)(d-a)}{(b-c)(c-a)} \end{cases}$$

182. 消去法　設方程式之數較未知數之數爲多時,則其諸方程式對於同一未知數成立時之條件,可求之如下.例如於聯立二元一次方程式

$$a_1x+b_1y=c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$a_3x+b_3y=c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

由其(1),(2)二式,得

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}},\quad y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

方程式(1),(2),(3)三式同時成立時,其由(1),(2)二式所得 x, y 之一組值,不可不滿足(3)式.即不可不

$$-a_3\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}+b_3\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=c_3$$

去分母後移項,得

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

即

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

因得一重要定理如下.

定理　聯立方程式 $\begin{array}{l} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{array}$ 同時成立之必要條件,

爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

〔注意〕此條件爲必要條件,而非充分條件.例如於

$$x+y+a=0 \quad x+y+b=0 \quad x+y+c=0$$

其 a, b, c 各不相等時,雖 Δ 爲 0,尙不能同時成立是.

由

$$ax^2+bx+c=0$$
$$px^2+qx+r=0$$

消去 x 之方法,雖已於前第79節中述及之,茲更用錫爾佛司脫之方法重行求之如下.

上列二方程式之公共根能同時滿足下列四方程式,甚明.

$$ax^3+bx^2+cx=0$$
$$ax^2+bx+c=0$$
$$px^3+qx^2+rx=0$$
$$px^2+qx+r=0$$

於上列一組聯立方程式置 X 以代 x^3,Y 以代 x^2, Z 以代 x 時,得

$$aX+bY+cZ=0$$
$$aY+bZ+c=0$$
$$pX+qY+rZ=0$$
$$pY+qZ+r=0$$

上列方程式不可不同時成立,故其消去式爲

$$\begin{vmatrix} a & b & c & o \\ o & a & b & c \\ p & q & r & o \\ o & p & q & r \end{vmatrix}=0$$

上列行列式如展開之,則與第79節所求得者完全一致.

183. 行列式之乘法

定理 二同次行列式之積,等於一行列式,其次數與原行列式相等.

證明 爲簡便起見,特取三次行列式證明之於下.即證明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_1' & a_2' & a_3' \\ b_1' & b_2' & b_3' \\ c_1' & c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1a_1'+a_2a_2'+a_3a_3' & a_1b_1'+a_2b_2'+a_3b_3' & a_1c_1'+a_2c_2'+a_3c_3' \\ b_1a_1'+b_2a_2'+b_3a_3' & b_1b_1'+b_2b_2'+b_3b_3' & b_1c_1'+b_2c_2'+b_3c_3' \\ c_1a_1'+c_2a_2'+c_3a_3' & c_1b_1'+c_2b_2'+c_3b_3' & c_1c_1'+c_2c_2'+c_3c_3' \end{vmatrix}\cdots(1)$$

以 D 表右邊之行列式,由前第 176 節之定理 5 逐次求之,此行列式可分成27個行列式之和.即

$$D=\Sigma\begin{vmatrix} a_\alpha a_\alpha' & a_\beta b_\beta' & a_\gamma c_\gamma' \\ b_\alpha a_\alpha' & b_\beta b_\beta' & b_\gamma c_\gamma' \\ c_\alpha a_\alpha' & c_\beta b_\beta' & c_\gamma c_\gamma' \end{vmatrix}=\Sigma a_\alpha' b_\beta' c_\gamma'\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 Σ 爲對於 $\alpha=1,2,3;\ \beta=1,2,3;\ \gamma=1,2,3$ 之和.

設 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 中有相等者,則

$$\begin{vmatrix} a_\alpha & a_\beta & a_\gamma \\ b_\alpha & b_\beta & b_\gamma \\ c_\alpha & c_\beta & c_\gamma \end{vmatrix}=0$$

故(2)式中之行列式不等於 0 者,其 α, β, γ 皆相異.隨之 D 能為

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

所整除.即

$$D=k\Delta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

因 D 為關於 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ 之三次同次式,而 Δ 亦然,故 k 為與此各文字無關係之數.隨之如以特別之值代入於各文字中,其 k 不變.今置 $a_1=b_2=c_3=1$, $a_2=a_3=b_1=b_3=c_1=c_2=0$ 時,則(3)式成為

$$\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

即 $$k=\begin{vmatrix} a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \\ a_3' & b_3' & c_3' \end{vmatrix}$$

隨之(1)式之關係,已被證明.

例 設 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$, 其 Δ 中各原素 $a_1, a_2, a_3, \cdots$

……之餘因式爲 A_1, A_2, A_3, ……時,證明 $\Delta^2=\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$,

解　由本節之公式,將 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ 以一行列式表之而應用餘因式之性質時,則

$$\Delta\times\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix}=\Delta^3$$

故設 $\Delta\neq 0$ 時,則

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\Delta^2$$

問題三十一

證明下列各等式.

1. $\begin{vmatrix} 18 & 13 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$

2. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 16 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}=0$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 21 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}=0$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix}=xyz$

5. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3+yzu \\ 1 & y & y^2 & y^3+zux \\ 1 & z & z^2 & z^3+uxy \\ 1 & u & u^2 & u^3+xyz \end{vmatrix}=0$

6. $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}=-a(a-b)^3$

求下列各行列式之值.

7. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}$

分解下列各行列式爲因式.

15. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$

19. 設 a, b, c 各不相等,且

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix}=0$$

時,證明 $abc(ab+bc+ca)=a+b+c$.

20. 求適合於 $\begin{vmatrix} a & b & x \\ b & 2a+b & 2x \\ x & 2x & 3(a+b) \end{vmatrix}=0$ 之 x 值.

解下列各聯立方程式.

21. $ax+by=2a+3b$

$bx+ay=3a+2b$

22. $2x-y+z=3$

$x+y+z=0$

$3x+y-z=2$

23. $ax+by+cz=a$

$bx+cy+az=b$

$cx+ay+bz=c$

24. $x+y+z=a+b+c$

$ax+by+cz=ab+bc+ca$

$(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

25. 由 $ax^2+2bxy+cy^2=0$

$a'x^2+2b'xy+c'y^2=0$

消去其 x, y.

26. 由 $(z+x-y)(x+y-z)=ayz$

$(x+y-z)(y+z-x)=bzx$

$$(y+z-x)(z+x-y)=cxy$$

消去其 x, y, z.

27. 求 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 之積.

28. 求 $\begin{vmatrix} a & b & -c \\ -a & b & c \\ a & -b & c \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y & -z \\ -x & y & z \\ x & -y & z \end{vmatrix}$ 之積.

29. 求 $\begin{vmatrix} a & bi \\ bi & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & di \\ di & c \end{vmatrix}$ 之積.

30. 求 $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$ 之積.

附錄一 對數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.0000	.0043	.0086	.0128	.0170	.0212	.0253	.0294	.0334	.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	.0414	.0453	.0492	.0531	.0569	.0607	.0645	.0682	.0719	.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	.0792	.0828	.0864	.0899	.0934	.0969	.1004	.1038	.1072	.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	.1139	.1173	.1206	.1239	.1271	.1303	.1335	.1367	.1399	.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	.1461	.1492	.1523	.1553	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	.1761	.1790	.1818	.1847	.1875	.1903	.1931	.1959	.1987	.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	.2041	.2068	.2095	.2122	.2148	.2175	.2201	.2227	.2253	.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	.2304	.2330	.2355	.2380	.2405	.2430	.2455	.2480	.2504	.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	.2553	.2577	.2601	.2625	.2648	.2672	.2695	.2718	.2742	.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	.2788	.2810	.2833	.2856	.2878	.2900	.2923	.2945	.2967	.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	.3010	.3032	.3054	.3075	.3096	.3118	.3139	.3160	.3181	.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	.3222	.3243	.3263	.3284	.3304	.3324	.3345	.3365	.3385	.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	.3424	.3444	.3464	.3483	.3502	.3522	.3541	.3560	.3579	.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	.3617	.3636	.3655	.3674	.3692	.3711	.3729	.3747	.3766	.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	.3802	.3820	.3838	.3856	.3874	.3892	.3909	.3927	.3945	.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	.3979	.3997	.4014	.4031	.4048	.4065	.4082	.4099	.4116	.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	.4150	.4166	.4183	.4200	.4216	.4232	.4249	.4265	.4281	.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	.4313	4330	.4346	.4362	.4378	.4393	.4409	.4425	.4440	.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	.4472	.4487	.4502	.4518	.4533	.4548	.4564	.4579	.4594	.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	.4624	.4639	.4654	.4669	.4683	.4698	.4713	.4728	.4742	.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843	.4857	.4871	.4886	.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983	.4997	.5011	.5024	.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119	.5132	.5145	.5159	.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5237	.5250	.5263	.5276	.5289	.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378	.5391	.5403	.5416	.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	.5441	.5453	.5465	.5478	.5490	.5502	.5514	.5527	.5539	.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	.5563	.5575	.5587	.5599	.5611	.5623	.5635	.5647	.5658	.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	.5682	.5694	.5705	.5717	.5729	.5740	.5752	.5763	.5775	.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	.5798	.5809	.5821	.5832	.5843	.5855	.5866	.5877	.5888	.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	.5911	.5922	.5933	.5944	.5955	.5966	.5977	.5988	.5999	.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	.6021	.6031	.6042	.6053	.6064	.6075	.6085	.6096	.6107	.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	.6128	.6138	.6149	.6160	.6170	.6180	.6191	.6201	.6212	.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	.6232	.6243	.6253	.6263	.6274	.6284	.6294	.6304	.6314	.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	.6335	.6345	.6355	.6365	.6375	.6385	.6395	.6405	.6415	.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	.6435	.6444	.6454	.6464	.6474	.6484	.6493	.6503	.6513	.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	.6571	.6580	.6590	.6599	.6609	.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	.6628	.6637	.6646	.6656	.6665	.6675	.6684	.6693	.6702	.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	.6758	.6767	6776	.6785	.6794	.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	.6812	.6821	.6830	.6839	.6848	.6857	.6866	.6875	.6884	.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	.6902	.6911	.6920	.6928	.6937	6946	.6955	.6964	.6972	.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	.6990	.6998	.7007	.7016	7024	.7033	.7042	.7050	.7059	.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	.7076	.7084	.7093	.7101	.7110	.7118	.7126	.7135	.7143	.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	.7160	.7168	.7177	.7185	.7193	.7202	.7210	.7218	.7226	.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	.7243	.7251	.7259	.7267	.7275	.7284	.7292	.7300	.7308	.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	.7324	.7332	.7340	.7348	7356	.7364	.7372	.7380	.7388	.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	.7404	.7412	.7419	.7427	.7435	.7443	.7451	.7459	.7466	.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	.7482	.7490	.7497	.7505	.7513	.7520	.7528	.7536	.7543	.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	.7559	.7566	.7574	.7582	.7589	.7597	.7604	.7612	.7619	.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	.7634	.7642	.7649	.7657	.7664	.7672	.7679	.7686	.7694	.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	.7709	.7716	.7723	.7731	.7738	.7745	.7752	.7760	.7767	.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	.7782	.7789	.7796	.7803	.7810	.7818	.7825	.7832	.7839	.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	.7853	.7860	.7868	.7875	.7882	.7889	.7896	.7903	.7910	.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	.7924	.7931	.7938	.7945	.7952	.7959	.7966	.7973	.7980	.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	.7993	.8000	.8007	.8014	.8021	.8028	.8035	.8041	.8048	.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	.8062	.8069	.8075	.8082	.8089	.8096	.8102	.8109	.8116	.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	.8129	.8136	.8142	.8149	.8156	.8162	.8169	.8176	.8182	.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	.8195	.8202	.8209	.8215	.8222	.8228	.8235	.8241	.8248	.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	.8261	.8267	.8274	.8280	.8287	.8293	.8299	.8306	.8312	.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	.8325	.8331	.8338	.8344	.8351	.8357	.8363	.8370	.8376	.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	.8388	.8395	.8401	.8407	.8414	.8420	.8426	.8432	.8439	.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	.8451	.8457	.8463	.8470	.8476	.8482	.8488	.8494	.8500	.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	.8513	.8519	.8525	.8531	.8537	.8543	.8549	.8555	.8561	.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	.8573	.8579	.8585	.8591	.8597	.8603	.8609	.8615	.8621	.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	.8633	.8639	.8645	.8651	.8657	.8663	.8669	.8675	.8681	.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	.8692	.8698	.8704	.8710	.8716	.8722	.8727	.8733	.8739	.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	.8751	.8756	.8762	.8768	.8774	.8779	.8785	.8791	.8797	.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	.8808	.8814	.8820	.8825	.8831	.8837	.8842	.8848	.8854	.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	.8865	.8871	.8876	.8882	.8887	.8893	.8899	.8904	.8910	.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	.8921	.8927	.8932	.8938	.8943	.8949	.8954	.8960	.8965	.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	.8976	.8982	.8987	.8993	.8998	.9004	.9009	.9015	.9020	.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	.9031	.9036	.9042	.9047	.9053	.9058	.9063	.9069	.9074	.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	.9085	.9090	.9096	.9101	.9106	.9112	.9117	.9122	.9128	.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	.9138	.9143	.9149	.9154	.9159	.9165	.9170	.9175	.9180	.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	.9191	.9196	.9201	.9206	.9212	.9217	.9222	.9227	.9232	.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	.9243	.9248	.9253	.9258	.9263	.9269	.9274	.9279	.9284	.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	.9294	.9299	.9304	.9309	.9315	.9320	.9325	.9330	.9335	.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	.9345	.9350	.9355	.9360	.9365	.9370	.9375	.9380	.9385	.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	.9395	.9400	.9405	.9410	.9415	.9420	.9425	.9430	.9435	.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	.9445	.9450	.9455	.9460	.9465	.9469	.9474	.9479	.9484	.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	.9494	.9499	.9504	.9509	.9513	.9518	.9523	.9528	.9533	.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	.9542	.9547	.9552	.9557	.9562	.9566	.9571	.9576	.9581	.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	.9590	.9595	.9600	.9605	.9609	.9614	.9619	.9624	.9628	.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	.9638	.9643	.9647	.9652	.9657	.9661	.9666	.9671	.9675	.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	.9685	.9689	.9694	.9699	.9703	.9708	.9713	.9717	.9722	.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	.9731	.9736	.9741	.9745	.9750	.9754	.9759	.9763	.9768	.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	.9777	.9782	.9786	.9791	.9795	.9800	.9805	.9809	.9814	.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	.9823	.9827	.9832	.9836	.9841	.9845	.9850	.9854	.9859	.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	.9868	.9872	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899	.9903	.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	.9912	.9917	.9921	.9926	.9930	.9934	.9939	.9943	.9948	.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	.9956	.9961	.9965	.9969	.9974	.9978	.9983	.9987	.9991	.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

附錄二　答　數

問　題　一

1. 315.　　2. 0.

3. (a) 4,　(b) $\frac{1}{4}$,　(c) 5,　(d) $\frac{1}{81}$.

4. (a) $8\sqrt{3}$,　(b) $31-12\sqrt{3}$,　(c) 31.

5. (a) 1,　(b) $x^{x}y^{y}z^{z}$,　(c) 1.

6. (a) $\sqrt[3]{14}<6$,　(b) $2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}$,

　(c) $\sqrt[5]{16}>\sqrt[6]{3}>\sqrt[10]{6}$.

7. (a) $a^{\frac{13}{5}}$,　(b) $a^{\frac{1}{24}}$,　(c) $b^{-\frac{4}{5}}$,　(d) 52,　(e) 0.

8. 0.　　9. (a) $x=15,\ y=7$;　(b) $x=2,\ y=45$.

10. (a) 11,　(b) 53,　(c) -1,　(d) $2(a^2-b^2)$.

問　題　二

1. (a) a^2b+10b^3　(b) $3a^2+2b^2+c+ab-4ac+bc$,

　(c) a^4,　(d) $-4a^3-4a^2b-21ab^2+11b^3$.

2. (a) $-5a^4+3a^3b-3ab^3+5b^4$,　(b) $2x^2-7xy+7y^2$,

　(c) $-a-\frac{13}{6}b-\frac{8}{3}c$,　(d) $3x^3+6x^2-7x+11$.

3. (a) $x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$,

(b) $a^3+b^3+c^3-3abc$,

(c) $a^4+b^4+c^4+d^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2a^2d^2-2b^2c^2-2b^2d^2$
$-2c^2d^2+8abcd$,

(d) $-a^6x^6+a^5bx^5y+2a^4b^2x^4y^2-3a^3b^3x^3y^3+2a^2b^4x^2y^4$
$+ab^5xy^5-b^6y^6$.

4. (a) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,

(b) $a^3+b^3+c^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2)+6abc$,

(c) $a^3+b^3+c^3-d^3+3(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2-a^2d+ad^2$
$+b^2c+bc^2-b^2d+bd^2-c^2d+cd^2)$
$+6(abc-abd-acd-bcd)$,

(d) $a^4+b^4-c^4+2a^2b^2+2a^3b+2ab^3-2a^3c+2ac^3-2b^3c$
$+2bc^3-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2$.

5. (a) x^3+y^3, (b) $x^2-2xy-2y^2$,

(c) $2x^3+\frac{7}{3}x^2y+\frac{2}{9}xy^2+\frac{182}{135}y^3$ 與剩餘 $\frac{223}{405}y^4$,

(d) $a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-a^2c-ac^2-b^2c-bc^2+2abc$.

6. (a) x^4-1, (b) y^5-x^5,

(c) $6x^4-5x^3y+14x^2y^2-5xy^3+6y^4$,

(d) $x^8+a^4x^4+a^8$.

7. (a) $1-2x+3x^2$, (b) $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$,

(c) x^2+5x+6, (d) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

8. (a) $5a^2-3b^2-2c^2$, (b) x^3+x^2+x+1,

(c) $7+8x^2+5x^3$, (d) $x^2-x+2-x^{-1}+x^{-2}$.

9. (*a*) $x-8$, (*b*) x^2-xy+y^2,

(*c*) $3x^2-x-4$, (*d*) $1-3x^2+2x^4$.

10. (*a*) 35172. (*b*) 55626,

(*c*) 726.21, (*d*) 99.066.

11. (*a*) 1.3956, (*d*) 39.2,

(*c*) 25. (*d*) 7.0444.

12. (*a*) $\dfrac{8a^8}{a^8-x^8}$, (*b*) $\dfrac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$,

(*c*) $\dfrac{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}{(b-c)(c-a)(a-b)}$,

(*d*) -2, (*e*) $\dfrac{2abc(a+b+c)}{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$,

(*f*) $\dfrac{x(1+x^2)}{1+x}$.

13. (*a*) $\sqrt{a^5}-a^2\sqrt[3]{b^4}+\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b^8}-ab^4+\sqrt{a}\sqrt[3]{b^{16}}-\sqrt[3]{b^{20}}$,

(*b*) $\sqrt[3]{a^{10}}\sqrt[6]{x^{25}}-\sqrt[3]{a^8x^{10}}\sqrt{y}+a^2y\sqrt{x^5}-\sqrt[3]{a^4x^5}\sqrt{y^3}$

$+\sqrt[3]{a^2}\sqrt[6]{x^5}y^2-\sqrt[2]{y^5}$,

(*c*) $a^2+b^2\sqrt[3]{x^2}+c^2\sqrt[3]{x^4}-ab\sqrt[3]{x}-bcx-ac\sqrt[3]{x^2}$,

(*d*) $(-\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})$

$(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$.

14. (*a*) $a\sqrt{b}+2\sqrt{2}$, (*b*) $8xy\sqrt[6]{xy}$,

(*c*) $3\sqrt[4]{xy}$, (*d*) $512xy^2\sqrt{x}$,

(*e*) $3\sqrt[6]{4a^2b}$.

15. (a) $\frac{\sqrt{ab}}{b}$, (b) $\frac{x(x-\sqrt{x^2-y^2})}{y^2}$,

(c) $\frac{7a+b-8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}$, (d) $\frac{x+\sqrt{x^2-y^2}}{y}$.

問 題 三

1. $8xy(x^2+y^2)$. 2. $5(x+y)(7x^2+11xy+7y^2)$.

3. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

4. $(ax-by)(bx+ay)$.

5. $\{a+b-3(c+d)\}\{a+b-5(c+d)\}$.

6. $(a+b)(ax+by+c)$.

7. $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$.

8. $(x^2+7x+26)(x-1)(x+8)$.

9. $(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^6+x^3y^3+y^6)$.

10. $(x^2+y^2)(x^8-x^6y^2+x^4y^4-x^2y^6+y^8)$.

11. $(2x-3a)(3x+2b)$.

12 $2a^2b(7+4ab)^2$.

13. $(x+y+a+b)(x+y-a-b)(a-b+x-y)(a-b-x+y)$.

14. $(x+5)(x-2)(x+2)(x+1)$.

15. $(a-x)(b-ax-x^2)$. 16. $(x+y-z)^2$.

17. $(x^2+x+a+1)(x^2-x-a+1)$.

18. $(a-b)(a-c)(b-c)$.

19. $(2x-y+a)(x-2y-a)$. 20. $(x+36)(x-64)$.

21. $(3x-16)(x-14)$. 22. $(4x+9)(3x-16)$.

23. $(x+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{29}}{2})(x+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{29}}{2})$.

24. $(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$.

25. $(x^2+8x+10)(x+2)(x+6)$.

26. $(x+4)(x+6)(x^2+10x-14)$.

27. $(x^2+4x+1)(x-2)(2x-1)$.

28. $(x+a+b)(x-a+b)(x+a-b)(x-a-b)$.

29. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

30. $(a-2b+c)(a^2+4b^2+c^2+2bc-ca+2ab)$.

31. $2x-1$. 32. x^2-2.

33. $4a^2-2a+1$. 34. x^2+2x+2.

35. $mx+ny$. 36. $2x^2-3x+1$.

37. $x^2-3ax+5a^2$. 38. $x-5$.

39. $5x^2-1$. 40. $x-1$.

41. $x^3y^3(x^2-y^2)^2$. 42. $12(a^2-b^2)(a^2-4b^2)$.

43. x^6-a^6. 44. $(x-4)(3x-2)(3x^2+2x+1)$.

45. $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)$.

46. $(x-1)(3x-2)(x^3+6x^2+11x+6)$.

47. $2(x+2)(x-2)^2(x+3)(x-1)$.

48. $x^5+7x^4-10x^3-70x^2+9x+63$.

49. x^2-x-6. 50. x^2-3x+2, x^2-4x+3.

問 題 四

1. 5500. 2. 2039 3. 597. 4. 0.

5. 21324.　　　　6. $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{a}{c}$ 或 $\frac{c}{d}$.

9. $Q(x)=2x^4-2x^3+4x^2-3x+2$, $R=-23$.

10. $Q(x)=3x^3+x^2-2x-1$, $R=-4$.

11. $Q(x)=x^3-x^2+x-1$, $R=0$.

12. $Q(x)=x^2-3x+4$, $R=5$.

16. $x-5$.　　　　17. 3.

18. $3(b-c)(c-a)(a-b)$.　　　　19. $(a-b)(b-c)(c-a)$.

20. $(a+b)(b+c)(c-a)$.　　　　21. $(a-b)(b-c)(c-a)$.

22. $(x-2)(x+3)(2x+1)$.　　　　23. $(x-2)(x^2-3x+7)$.

24. $(x+1)(x+4)(x-10)$.　　　　25. $a=21$, $b=2$.

問　題　五

1. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)$.

2. $-(a-b)(a-c)(b-c)(a+b+c)$.

3. $(a-b)(a-c)(b-c)(bc+ca+ab)$.　　　　4. $21(abc)^2$.

5. $(a-b)(a-c)(b-c)\{a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

6. $4abc$.　　　　7. $4(a-b)(a-c)(b-c)$.

8. $80abc(a^2+b^2+c^2)$.

9. $(a-b)(a-c)(b-c)\{a^3+b^3+c^3+b^2c+c^2a+a^2b+bc^2$
$+ca^2+ab^2+abc\}$.

10. $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$.

11. $-xyz\{2(x^2+y^2+z^2)+5(yz+zx+xy)\}$.

12. $-2(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

13. $(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$.

14. $3(a+b)(b+c)(c+a)$.

15. $12abc(a+b+c)$.

16. $a+b+c$.

17. $bc+ca+ab$.

18. $\dfrac{x+y+z}{(y+z)(z+x)(x+y)}$.

19. a^2.

20. $a^3+b^3+c^3+3abc$.

21. $L(a^3+b^3+c^3)+M(b^2c+c^2a+a^2b+ab^2+bc^2+ca^2)+Nabc$.

問　題　六

23. $A=1,\ B=3.\ C=6$.

24. $L=0,\ M=-1$.

25. $m=-15,\ n=-36$.

25. $L=24$.

27. $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$.

28. $m=-5,\ n=1$.

29. $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

30. $\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{2}{x+4}$.

31. $x+6+\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{16}{x-2}+\dfrac{81}{2(x-3)}$.

32. $1-\dfrac{a^2}{(a-b)(x+a)}-\dfrac{b^2}{(a-b)(x+b)}$.

33. $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$.

34. $\dfrac{-3}{x+1}-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{2}{(x+2)^2}$.

35. $\dfrac{1}{3(x-1)}-\dfrac{x^2+x+1}{3(x^3+2)}+\dfrac{2}{(x^3+2)^2}$.

36. $\dfrac{5}{x+2}+\dfrac{3x-1}{x^2+1}+\dfrac{2x+5}{(x^2+1)^2}$.

問　題　七

1. 0.　　2. 12.　　3. $a+b$.

4. $\frac{1}{2}(a+b)$.　　5. $\frac{1}{2}(a+b)$.　　6. 0.

7. -6.　　8. $-a$.　　9. 0.

10. $-\frac{1}{3}(a+b+c)$.　　11. $\frac{2ab+b^2-a^2}{2b}$.

12. $\frac{2\lambda+1}{3}$, $\lambda<-\frac{1}{2}$.　　13. $-\frac{\lambda-2\lambda}{3\lambda+1}$.

14. $\frac{5-3\lambda}{3(2+\lambda)}$.　　15. $3\lambda-4$.

問　題　八

1. $\frac{4}{3}$.　　2. 3, $-\frac{1}{3}$.　　3. $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{4}$.

4. 0, a.　　5. 0, $\frac{a}{2}$.　　6. a, b.

7. a, b.　　8. 1, $\frac{a-b}{b-c}$.　　9. $a-2b$, $2a-b$.

10. $a>0$時 $\lambda<-\frac{b^2-4ac}{4a}$, $a<0$時 $\lambda<-\frac{b^2-4ac}{4a}$.

11. $\lambda>-\frac{13}{12}$.　　12. 2或-1.

13. $m=-1$時一根不能,一根不定.又$m=0$時二根皆不可能.

14. ± 2.

15. $a^2c^2x^2-(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)x+a^2c^2=0$.

16. $ax^2+kbx+k^2c=0$.

17. $ax^2+(2ah+b)x+ah^2+bh+c=0$.

18. (a) $qx^2+px+1=0$. (b) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.
(c) $qx^2-p^2x+p^2=0$.

19. (a) p^2-4q. (b) $-p^5+5p^3q-5pq^2$.
(c) $-\frac{p}{q}$.

20. $ac-b^2=0$.

問 題 九

1. -2.

2. 1.

3. $\frac{1}{2}(a+b)$.

4. $-\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.

5. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

6. $\frac{bc+ca+ab\pm\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2-abc(a+b+c)}}{a+b+c}$.

7. a, $\frac{b(a+b)\pm\sqrt{b^2(a+b)^2+4a^2b^2}}{2a}$.

8. $\frac{a}{2}(1\pm\sqrt{19})$.

9. 3, -1, $1\pm2\sqrt{19}$.

10. 3, $-\frac{21}{13}$.

11. a, b, $\frac{1}{2}(a+b)$.

12. a, b, $\frac{1}{2}\{a+b\pm\frac{1}{63}(a-b)\sqrt{-63}\}$.

13. $0, 3.$

14. $b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}.$

15. $a, \frac{4a-b}{3}.$

16. $\frac{5(a+b)-\sqrt{5}(a-b)}{10}.$

17. $a, b, \frac{a+b\pm i(a-b)\sqrt{7}}{2}.$

18. $a, b, c\ -(a+b+c).$

19. $1, -2, \frac{-1\pm\sqrt{-23}}{2}.$

20. $-1, -2, \frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}.$

21. $3, -1, \frac{2\pm\sqrt{61}}{2}.$

22. $-\frac{5}{2}a, \frac{-5\pm a\sqrt{10}}{2}.$

23. $-1, \frac{a-b\pm\sqrt{b^2-2ab-3a^2}}{2a}$

24. $2, \frac{1}{2}, \frac{-3\pm\sqrt{-7}}{4}.$

25. $3, \frac{1}{3}, \frac{-1\pm\sqrt{-8}}{3}.$

26. $1, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}.$

27. $1, -1, i, -i.$

28. $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}a, \pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}a.$

29. $2, \frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}.$

30. $\pm1, \pm i, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm i\sqrt{\frac{1}{2}}.$

問 題 十

1. $x=1, y=2, z=3.$

2. $x=3, y=\frac{1}{2}, z=\frac{2}{5}.$

3. 不定.

4. $x=\frac{2}{3}, y=-4, z=-\frac{3}{5}.$

5. $x=\frac{2}{3}, y=3, z=2.$

6. $w=1, x=5, y=0, z=-3.$

7. $w=1,\ x=2,\ y=3,\ z=4.$

8. $w=1,\ x=3,\ y=5,\ z=7.$

9. $x=y=z=\dfrac{k}{a+b+c}.$

10. $x=a(b-c),\ y=b(c-a),\ z=c(a-b).$

11. $x=\dfrac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)},\ y=\dfrac{(k-c)(k-a)}{(b-c)(b-a)},\ z=\dfrac{(k-a)(k-b)}{(c-a)(c-b)}.$

12. $x=0,\ y=1,\ z=0.$

13. $x=abc,\ y=bc+ca+al,\ z=a+b+c.$

14. $x=1,\ y=5,\ z=36.$

15. $x=-a+b+c,\ y=a-b+c,\ z=a+b-c.$

16. $x=\dfrac{ap}{al+bm+cn},\ y=\dfrac{bp}{al+bm+cn},\ z=\dfrac{cp}{al+bm+cn}.$

17. $x=\dfrac{\lambda+6}{5\lambda-1},\ y=-\dfrac{3\lambda-13}{5\lambda-1},\ \lambda=\dfrac{1}{5}$時不能,$\lambda=2$時不定.

18. $x=\dfrac{\lambda^2+12\lambda-8}{(5\lambda-1)(\lambda-2)},\ y=-\dfrac{3\lambda^2-15\lambda+14}{(5\lambda-1)(\lambda-2)},\ \lambda=\dfrac{1}{5}$ 或 2 時不能.

19. $x=1,\ y=-1,\ \lambda=\dfrac{1}{5}$或2時不定.

20. $x=-\dfrac{2\lambda}{\lambda-1},\ y=-\dfrac{4}{\lambda-1},\ \lambda=1$ 時不能, $\lambda=2$時不定.

21. $x=\dfrac{a^2+b^2}{a+b},\ y=\dfrac{a^2+b^2}{b-a},\ a^2+b^2=0$或$a^2-b^2=0$時不能.

22. $x=a+b-c,\ y=a-b+c,\ a+b+c=0$時不定.

23. $x=\dfrac{(a+\alpha)(a+\beta)}{(a-b)},\ y=\dfrac{(b+\alpha)(b+\beta)}{b-a},\ \alpha-\beta=0$ 時不定,

$\alpha-\beta \neq 0$, $a-b=0$時不能.

24. 不定.

問題十一

1. $\left.\begin{array}{l}x=12\\y=11\end{array}\right\}$. 2. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{8}{15}\\y=\frac{1}{15}\end{array}\right\}$.

3. $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(a+\sqrt{4b-3a^2})\\y=\frac{1}{2}(-a+\sqrt{4b-3a^2})\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}(a-\sqrt{4b-3a^2})\\y=\frac{1}{2}(-a-\sqrt{4b-3a^2})\end{array}\right\}$.

4. $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2aq^2-p+2q\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p^2}\\y=\dfrac{-2aq-2\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p}\end{array}\right\}$.

$\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{2aq^2-p-2q\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p^2}\\y=\dfrac{-2aq+2\sqrt{a(aq^2-bp^2-p)}}{p}\end{array}\right\}$.

5. $\left.\begin{array}{l}x=12\\y=7\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-7\\y=-12\end{array}\right\}$. 6. $\left.\begin{array}{l}x=a\\y=b\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=2a-b\\y=2b-a\end{array}\right\}$.

7. $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{-9+\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\\y=\dfrac{1}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{9-\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\\y=\dfrac{-1}{\sqrt{67-a-7\sqrt{91-3a}}}\end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-9-\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}} \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{9+\sqrt{91-3a}}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}} \\ y=\dfrac{-1}{\sqrt{67-a+7\sqrt{91-3a}}} \end{array}\right\}.$$

8. $$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{a}{\sqrt{a+b}} \\ y=\dfrac{b}{\sqrt{a+b}} \end{array}\right\},\qquad \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{a}{\sqrt{a+b}} \\ y=-\dfrac{b}{\sqrt{a+b}} \end{array}\right\}.$$

9. $a^4-3a+3\neq 0$ 時

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{2a-1}{a^2+1-\sqrt{(2a-1)(a+2)}} \\ y=\dfrac{\sqrt{(2a-1)(a+2)}}{a^2+1-\sqrt{(2a-1)(a+2)}} \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{2a-1}{a^2+1+\sqrt{(\ a-1)(a-2)}} \\ y=\dfrac{-\sqrt{(2a-1)(a+2)}}{a^2+1+\sqrt{(2a-1)(a+2)}} \end{array}\right\}.$$

10. $$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-a^2-5+\sqrt{a^4-22a^2+25}}{4a} \\ y=\dfrac{a^2-5-\sqrt{a^4-22a^2+25}}{2a} \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{-a^2+5+\sqrt{a^4-22a^2+25}}{4a} \\ y=\dfrac{a^2-5+\sqrt{a^4-22a^2+25}}{2a} \end{array}\right\}.$$

11. $$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=-\dfrac{\sqrt{21}+1}{7} \\ y=-\dfrac{\sqrt{21}-4}{7} \end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\sqrt{21}-1}{7} \\ y=\dfrac{\sqrt{21}+4}{7} \end{array}\right\}.$$

12. $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a+b}{2}\\y=\dfrac{a-b}{2}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a+b+(a-b)i}{4}\\y=\dfrac{a-b-(a+b)i}{4}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a+b-(a-b)i}{4}\\y=\dfrac{a-b+(a+b)i}{4}\end{array}\right\}$.

13. $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=a-\sqrt[3]{ab^2}\\y=b-\sqrt[3]{a^2b}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=a-\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{ab^2}\\y=b-\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\sqrt[3]{a^2b}\end{array}\right\}$.

$\left.\begin{array}{l}x=a-\dfrac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})^2\sqrt[3]{ab^2}\\y=b-\dfrac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})^2\sqrt[3]{a^2b}\end{array}\right\}$.

14. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=4\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-4\sqrt{\dfrac{2}{3}}\\y=-\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\end{array}\right\}$.

15. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-2\\y=-3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{16}{9}\sqrt{3}\\y=-\dfrac{12}{9}\sqrt{3}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}\\y=\dfrac{13}{9}\sqrt{3}\end{array}\right\}$.

16. $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\\y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}\\y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2+b^2}\end{array}\right\}$.

17. $\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{a}{3}\\y=b\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-\dfrac{a}{3}\\y=-b\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=a\\y=\dfrac{b}{3}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-a\\y=-\dfrac{b}{3}\end{array}\right\}$.

18. $\left.\begin{array}{l}x=2\\y=4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{7}{3}\\y=-\frac{14}{3}\end{array}\right\}$.

19. $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=-6\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{array}\right\}$.

20. $\left.\begin{array}{l}x=1\\y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=-1\\y=-2\end{array}\right\}$.

21. $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{a+b}{2ab}\\y=\frac{b-a}{2ab}\end{array}\right\}$.

22. $\left.\begin{array}{l}x=b\\y=a\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{l}x=\frac{a^2}{b}\\y=\frac{b^2}{a}\end{array}\right\}$.

23. $c^4=b^4-\frac{1}{2}(a^2-b^2)^2$.

24. $a^2+b^2+c^2-4=abc$.

25. $d^2=a^3+b^3+c^3-3abc$.

26. $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$.

27. $abc=(a+b+c-4)^2$.

28. $2(a^3-c^3)=3(a^2-b^2)(a-d)$.

問題十二

1. $x=52+13t$,
 $y=26+7t$.

2. $x=840-10t$,
 $y=-560+7t$.

3. $x=25+19t$,
 $y=2-7t$.

4. $x=4+13t$,
 $y=1+7t$.

5. $x=9+11t$,
 $y=7+9t$.

6. $x=64+69t$,
 $y=44+49t$.

7. $x=4+9t$,
 $y=8-7t$.

8. $x=15t-7$,
 $y=17t-10$.

9. $x=3s+23t-9,$
$y=-2t+1,$
$z=s.$

10. $x=10-6s+5t,$
$y=-s+4t,$
$z=2s-3t.$

11. $\left.\begin{matrix}x=40\\y=0\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=30\\y=7\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=20\\y=14\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=10\\y=21\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=0\\y=28\end{matrix}\right\}.$

12. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}\right\}.$

13. $\left.\begin{matrix}x=1\\y=10\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=14\\y=2\end{matrix}\right\}.$

14. $\left.\begin{matrix}x=696\\y=3\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=625\\y=18\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=554\\y=33\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=128\\y=123\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=57\\y=138\end{matrix}\right\},$
$\left.\begin{matrix}x=199\\y=108\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=270\\y=93\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=341\\y=78\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=412\\y=63\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=483\\y=48\end{matrix}\right\}.$

15. $\left.\begin{matrix}x=2\\y=3\end{matrix}\right\}.$

16. $\left.\begin{matrix}x=4\\y=17\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}x=21\\y=11\end{matrix}\right\},\left.\begin{matrix}x=38\\y=5\end{matrix}\right\}.$

17. $\left.\begin{matrix}x=4\\y=8\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=11\\y=5\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}y=18\\y=2\end{matrix}\right\}.$

18. $x=2+19t,$
$y=8+31t,$
$z=3-18t.$

19. $x=30+11t,$
$y=50+6t,$
$3=20-15t.$

20. $\left.\begin{matrix}x=4\\y=0\\z=2\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=3\\y=1\\z=1\end{matrix}\right\},\ \left.\begin{matrix}x=2\\y=2\\z=0\end{matrix}\right\}$

問 題 十 三

1. $x>2$ 或 $x<1\frac{1}{2}.$

2. $x<1$ 或 $3>x>2.$

3. $x>-1$（除 $x=1$）.

4. $-3<x<-1.$

5. $x>0.$

6. $1<x<2.$

7. $1<x<3-\sqrt{2}$ 或 $2<x<3+\sqrt{2}$.

8. $x<-3a$, $-a<x<a$, $x<2a$.

9. $\frac{3}{2}\geqq x>1$　　10. $\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x\leqq 3$.

11. $x\leqq a$或$b<x<b-\frac{1}{2}+\sqrt{a-b+\frac{1}{4}}$.

12. $x<-a$, $-b\geqq x\geqq -a$, $x>+\sqrt{ab}$.　　13. $x>1$.

14. $p\geqq+\sqrt{2}$, 或 $+\sqrt{2}>p\geqq 2-\sqrt{2}$ 時,不拘 x 之值如何,皆能成立;$2-\sqrt{2}>p>0$時,

$$\frac{(2-p^2)^2-\sqrt{(2-p^2)^4-64p^4}}{8p^2}>\frac{(2-p^2)^2+\sqrt{(2-p^2)^4-64p^4}}{8p^2}$$

$p=0$ 時,$x\leqq -1$ 或 $-1<x<0$.

問題十四

1. 甲 1 斗,乙 4 升.　2. 640.

3. 快車每時45哩慢車每時30哩.

4. 遲 2 秒.　5. 不能.

6. $a=0, b=1$.時 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 之九數.

7. 59.　8. 甲 90 分,乙 72 分,丙 60 分.

9. 60 里.　10. 等邊爲$\frac{p^2+h^2}{2p}$底邊爲$\frac{p^2-h^2}{p}$.

11. 4 盞.　12. 24 日,甲 8 角,乙 6 角.

13. 9 斗.　14. $tv+\frac{v^2}{g}-\sqrt{\frac{v^3}{g}\left(2t+\frac{v}{g}\right)}$.

15. 三邊爲 b, b, $\sqrt{3}b$ 或三邊皆爲 a.

16. 速度每時 2 里,距離 16 里;或速度每時$\frac{4}{3}$里,距離$8\frac{8}{9}$哩.

17. 345.

18. $\frac{1}{2}(p+r-\sqrt{p^2-6pr+r^2})$,$\frac{1}{2}(p+r+\sqrt{p^2-6pr+r^2}$, $p-r$.

19. 大部分爲51,或52,或53.

20. $\frac{4}{5}$.

21. 7,或 8,或 9.

22. $26\frac{4}{21}$分鐘.

23. 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 中之一.

24. 124號柱與125號柱之間.

25. 距AB弦$\frac{d^2+b^2-a^2}{2d}$.

26. $q-p$, $\frac{1}{2}(p+q+d)$, $\frac{1}{2}(p+q-d)$.

27. $AP=\frac{1}{5}(2l+r\pm\sqrt{r^2+4rl-l^2})$.

28. $AB=\frac{1}{2}\{l-z+\sqrt{a(a-2z)}\}$,

$AC=\frac{1}{2}\{l-z-\sqrt{a(a-2z)}\}$. 但$z=a+l\pm\sqrt{2a(l+a)}$.

29. 二等邊直角三角形.

30. $\left.\begin{matrix}82\\18\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}47\\53\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}12\\88\end{matrix}\right\}$.

31. $\left.\begin{matrix}2\\74\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}15\\55\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}28\\36\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}41\\17\end{matrix}\right\}$.

32. $\left.\begin{matrix}71\\9\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}40\\30\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}9\\51\end{matrix}\right\}$.

33. 68, 146, 224, 302, 380,$\cdots\cdots$

34. $\left.\begin{matrix}5\\42\\53\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}10\\24\\66\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}15\\6\\79\end{matrix}\right\}$

35. $\left.\begin{matrix}15\\82\\15\end{matrix}\right\}$, $\left.\begin{matrix}50\\40\\30\end{matrix}\right\}$.

問題十五

1. 0. 2. $-\infty$. 3. 27.

4. $\frac{1}{2}$. 5. $2(1-\frac{1}{\sqrt{3}})<\lambda<2(1+\frac{1}{\sqrt{3}})$.

10. $\lambda<-3$時,3位於二根之間;$\lambda=-3$時,3爲二根中之大者; $-3<\lambda<1$ 時,3較二根中之大者爲大;$\lambda=1$時,3較二等根爲大.

11. $2<\lambda<\frac{7}{3}$. 12. -4與9之間之值. 13. $-\frac{(a-b)^2}{4}$.

14. 極小值$2a$,極大值$-2a$. 11. 正方形.

19. 弦爲其點二等分時其值極小,弦爲經過其點之直徑時,其值極大.

20. 二等邊直角三角形.

問題十六

1. $(b+c-a):(a+c-b)$, $(a+c-b):(a+b-c)$.

2. $(m+n):(m-n)$. 4. 2或-24.

5. 0. 9. $\pm(a^2-b^2)$, $\pm\frac{c}{d}$.

7. $\frac{y^2}{a}$, $(1+x)^2$. 17. 178.6立方寸弱.

18. 約87日. 19, 1.77.

20. 3.376噸.

問題十七

13. 極小值 (*a*) $x=-3$ 時,$y=-8$. (*b*) $x=1$ 時,$y=4$.
(*c*) $x=1$ 時,$y=13$.

14. 極大值 (*a*) $x=-3$ 時,$y=10$. (*b*) $x=1$ 時,$y=4$.
(*c*) $x=2$ 時,$y=0$.

15. (*a*) 2, 3. (*b*) -2, -3. (*c*) $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{5}$.

16. (*a*) 2·4, 6·3, −2·7. (*b*) 1·7, −2·2, −5·5.

17. (*a*) 1·5, 2·6, −0·3, −3·8. (*b*) 0·7, 3·2, −1·2, −2·7.

18. (*a*) 1·5, −1·8. (*b*) 2·1, −1·6.

19. $\left.\begin{array}{l}x=4+13t\\y=1+7t\end{array}\right\}$ 20. $\left.\begin{array}{l}x=9+11t\\y=7+9t\end{array}\right\}$ 21. $\left.\begin{array}{l}x=4+9t\\y=8-7t\end{array}\right\}$

22. $\left.\begin{array}{r}1\\3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-1\\-3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}1\\-4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-1\\4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}3\\1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-3\\-1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}3\\-4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-3\\4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}4\\-1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-4\\1\end{array}\right\}$
$\left.\begin{array}{r}4\\-3\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-4\\3\end{array}\right\}$.

23. $\left.\begin{array}{r}2\\-1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-2\\1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}3\\4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-3\\-4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}12\\1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-12\\-1\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}37\\4\end{array}\right\}$, $\left.\begin{array}{r}-37\\-4\end{array}\right\}$.

問 題 十 八

2. 2, 4, 6, 8 或 −2, −4, −6, −8. 3. 2, 4, 8.

7. 6, ±12, 14, ±48,…………………………

8. 3, 9, 15 6. $\frac{5}{2}$, 5, 10 20, 40, 80, 160.

10. $\frac{1-(n-1)r^{n}}{1-r}+\frac{r^{2}(1-r^{n-2})}{(1-r)^{2}}$.

11. $v=\frac{1}{5}\left(\frac{k+k_1+k_2+k_3+k_4}{S}-\frac{k_1-k}{d}\right).$

$u=\frac{1}{5}\left(\frac{k+k_1+k_2+k_3+k_4}{S}-\frac{k_2-k_1}{d}\right).$

……………………………………………….

………………………………………………….

但d為此級數之公差S為其總和.

12. $(n+1)(2n+1).$ 13. $(n+1)^2(4n+1).$

14. $(n+1)^2(2n^2+4n+1).$ 15. $\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1).$

16. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{3}n(n+1)(x+2).$

17. 220. 18. 650. 19. 880. 20. 10.

問題十九

1. 9.0740. 2. $\bar{1}.4713.$ 3. 2.8452.
4. 2208. 5. 5.134. 6. 0.2502.
7. 0.000001405. 8. 0.2871. 9. 0.09714.
10. 117位. 11. (a) 3.1636. (b) $\bar{1}.8851.$
(c) 4.6232. (d) 0.3186. (e) 0.9775.
12. 6個. 13. 4322. 14. 2946.
15. 4.292. 16. −6.831. 17. 14.
18. 7. 19. 約22.57丈. 20. 558.4尺.
21. (a) $2\log 2$, (b) $\log 2$. 22. $\frac{22}{17}$.
23. $x=3$ 24. $x=3$. 27. 約5057元.

28. 約1494元. 29. 約14845元.

問題二十一

1. 96. 2. 12. 3. 576.

4. 672. 5. 3456. 6. 360.

7. 2880. 8. 487635,455126. 9. ${}_{10}C_5 \cdot {}_{12}C_8 \cdot {}_{18}C_{12}$.

10. 25200. 11. 2520. 12. 144.

13. $\frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5!}$.

14. 36. 15. 120. 16. 9^5.

17. 243. 18. 3^{12}. 19. $\frac{1}{2}n(n-1)$.

20. $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$. 21. n^2-n+2.

問題二十二

1. (a) $a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5+28a^2b^6+8ab^7+b^8$

(b) $27x^3-27x^2y+9xy^2-y^3$.

(c) $243x^5-135x^3+30x-\frac{10}{3x}+\frac{5}{27x^3}-\frac{1}{243x^5}$.

(d) $a^{20}-10a^{15}x+45a^{10}x^2-120a^5x^3+210x^4-252a^{-5}x^5+210a^{-10}x^6-120a^{-15}x^7+45a^{-20}x^8-10a^{-25}x^9+a^{-30}x^{10}$.

3. $10a^6$. 4. 38760或190.

6. $\frac{1}{3^{300}}\times\frac{(300)!}{(200)!(100)!}\times 2^{200}$. 7. 6.

8. (a) 387601×2^{14}. (b) 226. (c) 70.

10. 312. 11. 0. 12. 39.

問 題 二 十 三

1. $\frac{2}{n(n-1)}$. 2. $\frac{3}{n}$. 3. $\frac{a}{a+b+c}$.

4. (a) $\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)(a+b+c-3)}$.

(b) $\frac{6a(a-1)b(b-1)}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)(a+b+c-3)}$.

5. $\frac{25}{216}$, $\frac{27}{216}$. 6. $\frac{4}{33}$. 7. 無損益.

8. $\frac{5}{72}$. 9. $\frac{n}{2^n}$. 10. $\frac{16}{27}$.

11. $\frac{n!}{2!3!(n-5)!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{4}{6}\right)^{n-5}$. 12. 二白一黑.

13. $\frac{1}{3}(2n+1)$. 14. 7. 15. $\frac{9}{25}$.

16. $\frac{3}{8}$. 17. $\frac{P_1+4P_2+9P_3+16P_4}{4(P_1+2P_2+3P_3+4P_4)}$.

18. $pq+(1-p)(1-q)$. 19. $\frac{4}{7}$ 20. 約為1.

問 題 二 十 四

1. 收斂. 2. 收斂. 3. 收斂.

4. 收斂. 5. 發散. 6. 發散.

7. $x>1$ 收斂, $x \ngtr 1$ 發散. 8. $x<1$ 收斂, $x \nless 1$ 發散.

9. $x>1$ 收斂, $x \not> 1$ 發散. 10. $x \not> 1$ 收斂, $x>1$ 發散.

11. $x \not> 1$ 收斂, $x>1$ 發散. 12. $x<1$ 收斂, $x>1$ 發散, $x=1, k>1$ 收斂, $x=1, k \not> 1$ 發散.

13. $x>-\frac{1}{2}$ 收斂. 14. $|x|>2$ 收斂.

15. $1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3\cdots\cdots\cdots\cdots$

16. $1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$

17. $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

18. $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

19. $-x+\frac{x^2}{2}+(1-\frac{1}{3})x^3+\frac{x^4}{4}-(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})x^6-\cdots\cdots\cdots\cdots$

20. $2\{x-2\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-2\cdot\frac{x^9}{9}+\cdots\cdots\cdots\cdots\}$

21. $\sqrt[3]{4}$. 22. $\frac{1}{5}\{8\sqrt[4]{27}-17\}$.

23. $2\sqrt{2}-1$. 24. $\frac{3}{2}e$.

25. $5e$. 26. $\frac{17}{6}e$.

27. $\frac{1}{2}\log 2$. 28. $\log 2$.

29. 3.7416. 30. 2.99507. 31. $\frac{1}{n}$.

問題二十五

1. $-3, \pm 4.$ 2. $2, 3, 4.$

3. $-\frac{1}{3}, \pm\sqrt{5}.$ 4. $-\frac{3}{2}, -1\pm\sqrt{2}.$

5. $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -3, -3.$

6. $a_2=\frac{3}{8}a_1^2,\ a_3=\frac{1}{16}a_1^3,\ a_4=\frac{1}{256}a_1^4.$

7. $q^3-p^3r=0.$ 8. $-5, -5, 2.$

11. $p^3-3pq+3r.$ 12. $6\frac{1}{4}.$

13. $x^3-qx^2+prx-r^2=0,$ 15. $-5, -2, 1, 4.$

16. $\frac{1}{3}, 1, 3, 9.$ 17. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$

18. (*a*) $\frac{c}{2\sqrt{x}}.$ (*b*) $-\frac{a}{x^2}.$ (*c*) $-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$

(*d*) $(a+x)^{m-1}(b+x)^m\{m(b+x)+n(a+x)\}.$

(*e*) $\{2ab-(6a-5b)x-9x^2\}x(a+x)^2(b-x)^3.$

19. (*a*) 二虛,一實. (*b*) 三實根,其中二根相等.

(*c*) 三相異實根.

20. (*a*) $-1, -1, -1.$ (*b*) $-2, -2, -2.$

問題二十六

1. (*a*) $x^5-7x^4+7x^3+8x^2+x-1=0.$

(*b*) $x^7+3x^5+x^3+x^2+7x-2=0.$

2. $x^4-4x^3+12x^2-18x+27=0.$

3. $x^3-3x^2+24x-216=0.$

4. $x^3-15x^2-14x+2=0.$

5. $2x^4-5x^3-7x^2+3x-1=0.$

6. $x^4+11x^3+43x^2+55x-9=0.$

7. $x^5+15x^4+94x^3+305x^2+507x+353=0.$

8. $4x^5-40x^4+158x^3-308x^2+303x-129=0.$

9. $3x^4-77x^3+720x^2-2876x+4058=0.$

10. $x^3+(p^3-3pq+3r)x^2+(q^3-3pqr+3r^2)x+r^3=0.$

11. $x^4-(p^2-2q)x^3+(q^2-2pr+2s)x^2-(r^2-2qs)x+s^4=0.$

12. $x^3-\frac{6a_2}{a_0}x^2+\frac{4}{a_0^2}(4a_1a_3-a_0a_4)x-\frac{8}{a_0^3}(2a_0a_3^2-3a_0a_2a_4 +2a_1^2a_4)=0.$

13. $x^3-8x-15=0.$

14. $x^4-24x^2+65x-55=0.$

15. $x^4-23x^2-59x-48=0.$

16. $x^4+8x^3-111x-196=0$ 或 $x^4-8x^3+17x-8=0.$

問題二十七

1. $\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{3}{2}i.$

2. $1+i\sqrt{3}.$

3. $-\sqrt{3}+i.$

4. $4i.$

5. $\sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4}+isin\frac{\pi}{4}).$

6. $\sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4}-isin\frac{\pi}{4}).$

7. $cos\frac{\pi}{2}-isin\frac{\pi}{2}.$

8. $4(cos\frac{\pi}{2}+isin\frac{\pi}{2}).$

9. $cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}.$

10. $4(cos\frac{2\pi}{3}+isin\frac{2\pi}{3}).$

11. $-8,8(cos\pi+isin\pi).$

12. $-8i,8(cos\frac{3\pi}{2}+isin\frac{3\pi}{2}).$

13. $4i, 4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$.

14. $6-2\sqrt{3}+i(6+2\sqrt{3}), 4\sqrt{6}\,(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$.

15. $\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4})$.

16. $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

17. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$.

18. $2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$.

19. $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

20. 1.

21. $24\sqrt{3}\,i$.

22. $32i$.

23. 1.

24. $3, 3w, 3w^2$.

25. $\pm2, \pm2i$.

26. $1, \cos\frac{k\pi}{5}\pm i\sin\frac{k\pi}{5}, k=2,4$.

27. $2, 2(\cos\frac{k\pi}{5}\pm i\sin\frac{k\pi}{5}), k=2, 4$.

28. $-a, a(\cos\frac{\pi}{5}\pm i\sin\frac{\pi}{5}), a(\cos\frac{3\pi}{5}\pm i\sin\frac{3\pi}{5})$.

29. $\cos\frac{k\pi}{6}\pm i\sin\frac{k\pi}{6}, k=1, 3, 5$.

30. $-1, \cos\frac{k\pi}{9}\pm i\sin\frac{k\pi}{9}, k=1, 3, 5, 7$.

問題二十八

1. $-a-b,\ -aw-bw^2,\ -aw^2-bw$.
2. $5,\ 4w+w^2,\ 4w^2+w$.
3. $-2-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}, -2-\sqrt[3]{3}\,w-\sqrt[3]{9}\,w^2,$
   $-2-\sqrt[3]{3}\,w^2-\sqrt[3]{9}\,w$.

4. $3+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}, 3+\sqrt[3]{3}w-\sqrt[3]{9}w^2, 3+\sqrt[3]{3}w^2-\sqrt[3]{9}w.$

5. $2+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}, 2+\sqrt[3]{4}w+\sqrt[3]{2}w^2, 2+\sqrt[3]{4}w^2+\sqrt[3]{2}w.$

6. $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1\pm i\sqrt{11}}{2}.$ 7. $-1, -2, \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$

8. $\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3\pm i\sqrt{3}}{2}.$ 9. $\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3\pm i\sqrt{11}}{2}.$

10. $\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}, \dfrac{5\pm i\sqrt{3}}{2}.$

問 題 二 十 九

1. $x^4-14x^3+102x^2-392x+680=0.$
5. $(2,3), (0,-1), (-2,-3)$ 間各一根.
6. $(1,2), (0,-1), (-1,-2)$ 間各一根.
7. $(0,1), (2,3), (-1,-2)$ 間各一根.
8. $(1,2), (0,-1), (-3,-4)$ 間各一根.
9. $(0,1), (4,5)$ 間各一根 $(0,-1)$ 間二根.
10. $(1,2), (2,3), (0,-1), (-8,-9)$ 間各一根.

問 題 三 十

1. 1.32826. 2. 2.36723.
3. 2.40327. 4. 6.25683.
5. −2.15412. 6. −5.52601.
7. 1.50595. 8. 3.23603.

問 題 三 十 一

7. $-46.$ 8. $188.$

9. $x^2.$ 10. $4abc.$

11. $0.$ 12. $1+a^4+a^8.$

13. $4a^2b^2c^2.$ 14. $a^2+b^2+c^2+d^2+1$

15. $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$

16. $(x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$

17. $(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(d-b).$

18. $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z).$

20. $2a \neq b$ 時 $x=-(a+b)$ 或 $(a+b)$ $2a=b$ 時不定.

21. $x=2,\ y=3.$ 23. $x=1,\ y=-1,\ z=0.$

23. $x=1,\ y=z=0.$

24. $x=\dfrac{b+c}{2},\ y=\dfrac{c+a}{2},\ z=\dfrac{a+b}{2}.$

25. $4(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(a'c-ac')^2.$

26. $abc=(a+b+c-4)^2.$

27. $108.$ 28. $16abcxyz.$

29. $(a^2+b^2)(c^2+d^2).$ 30. $4a^2b^2c^2.$

附錄三 中英學語對照表

第一章

代數學 *Algebra*
加號 *Sign of addition*
減號 *Sign of subtraction*
乘號 *Sign of multiplication*
除號 *Sign of division*
等號 *Sign of equality*
括弧 *Bracket, Parenthesis*
括線 *Vinculum*
不等號 *Sign of inequality*
計算符號 *Sign of operation*
關係符號 *Sign of relation*
代數的符號 *Algebraic symbol*
式 *Expression*
代數式 *Algebraic expression*
等式 *Equality*
不等式 *Inequality*
左邊 *Left side*
右邊 *Right side*
公式 *Formula*
數值 *Numerical value*

第二章

數 *Number*
自然數 *Natural number*
自然數列 *Natural scale*
和 *Sum*
項 *Term*
加法 *Addition*
結合法則 *Associative law*
交換法則 *Commutative law*
被減數 *Minuend*
減數 *Subtrahend*
差 *Difference*
餘數 *Remainder*
減法 *Subtraction*
零 *Zero* (數) *Nought* (數字)
數字 *Figure*
有効數字 *Significant figure*
被乘數 *Multiplicand*
乘數 *Multiplier*
積 *Product*
連乘積 *Continued product*
因數 *Factor*
乘法 *Multiplication*
配分法則 *Distributive law*
被除數 *Dividend*
除數 *Divisor*
商 *Quotient*
除法 *Division*
整除 *Divisible*
完全數列 *Complete scale*
負數 *Negative number*
正數 *Positive number*
負號 *Sign of negative*
正號 *Sign of positive*
絕對值 *Absolute value*
代數的和 *Algebraic sum*
分數 *Fraction*
分子 *Numerator*
分母 *Denominator*
整數 *Integer*
通分 *Reduction to a common denominator*
約分 *Reduction of fraction*
不可約分數 *Irreducible fraction*
逆數 *Reciprocal*
有理數 *Rational number*
有理數系 *Rational system*
原點 *Origin*
平方 *Square*

立方 *Cube*
n 次羃 *nth power*
乘羃 *Power*
指數 *Exponent, Index*
底 *Base*
方根 *Root*
根號 *Radical sign*
根指數 *Radical index*
指數法則 *Index law*
羣 *Group*
級 *Class*
無理數 *Irrational number*
不盡根數 *Surd*
近似值 *Approximate value*
實數 *Real number*
實數系 *Real system*
虛數 *Imaginary number*
複素數 *Complex number*

第 三 章

已知數 *Known quantity*
常數 *Constant*
變數 *Variable*
整式 *Integral expression*
分數式 *Fractional expression*
有理式 *Rational expression*
無理式 *Irrational expression*
有理整式 *Rational integral expression*
正項 *Positive term*
負項 *Negative term*
單項式 *Monomial*
二項式 *Binomial*
三項式 *Trinomial*
多項式 *Polynomial*
係數 *Coefficient*
同類項 *Like term*
降羃 *Descending power*
昇羃 *Ascending power*
同次式 *Homogeneous expression*
分離係數法 *Method of detached coefficient*
長除法 *Long division*
展開 *Expand*
剩餘 *Remainder*
開方 *Evolution*
開平方法 *Extraction of square root*
開立方法 *Extraction of cubic root*
有理分數式 *Rational fraction*
真分數式 *Proper fraction, Pure fraction*
繁分數式 *Complex fraction*
連分數式 *Continued fraction*
根式 *Radical*
有理化因式 *Rationalizing factor*

第 四 章

因式 *Factor*
因式分解 *Factorization*
公因式 *Common factor*
最高公因式 *Highest common factor*
連除法 *Continued division*
歐几里得之算法 *Euclidian Algorithm*
倍式 *Multiple*
公倍式 *Common multiple*
最低公倍式 *Least common multiple*

章 五 第

元 *Element*
絕對項 *Absolute term*
必要條件 *Necessary condition*
充分條件 *Sufficient condition*
剩餘定理 *Remainder theorem*
綜合除法 *Synthetic division*

第 六 章

對稱式 *Symmetrical expression*
交代式 *Alternating expression*
循環順序 *Cyclical order*

第七章

恆等式 *Identity*
方程式 *Equation*
條件恆等式 *Conditionary identity*
未定係數法 *Principle of indeterminate coefficient*
分項分數式 *Partial fraction*

第八章

未知數 *Unknown quantity*
根 *Root*
解 *Solution*
解方程式 *To solve equation*
一元方程式 *Equation with one unknown quantity or Simple equation*
二元方程式 *Equation with two unknown quantities*
多元方程式 *Equation with many unknown quantities*
有理整方程式 *Rational and integral equation*
分數方程式 *Fractional equation*
無理方程式 *Irrational equation*
一次方程式 *Linear or simple equation*
二次方程式 *Quadratic equation*
高次方程式 *Equation of higher degree*
同值 *Equivalent*
移項 *Transposed*
討論 *Discussion*
不定 *Indeterminate*
不能 *Impossible*
二重根 *Double root*
判別式 *Discriminant*
增根 *Additional root*
方程式論 *Theory of equation*
相反方程式 *Reciprocal equation*
二項方程式 *Binomial equation*

第九章

聯立方程式 *Simultaneous equation*
聯立二元一次方程式 *Simultaneous equation of the first degree with two unknown quantities*
聯立三元二次方程式 *Simultaneous equation of the second degree with three unknown quantities*
加減消去法 *Elimination by addition and subtraction*
代入消去法 *Elimination by substitution*
等置消去法 *Elimination by comparision*
未定係數法 *Method of undetermined multipliers*
行列式 *Determinant*
同次方程式 *Homogeneous equation*
消去法 *Elimination*
消去式 *Eliminant*

第十章

不定方程式 *Indeterminate equation*
的阿蕃塘士方程式 *Diophantine equation*

第十一章

絕對不等式 *Absolute inequality*
條件不等式 *Conditional inequality*
解不等式 *To solve inequality*
相加平均 *Arithmetic mean*
相乘平均 *Geometric mean*

第十二章

應用問題 *Problem*

第十三章

函數 *Function*
極限值 *Limiting value*
無限大 *Infinity*
有限數 *Finite number*
不定形 *Indeterminate form*
形式上之不定形 *Apparently indeterminate form*
與數 *Given number*
極小值 *Minimum value*
極小 *Minimum*
極大值 *Maximum value*
極大 *Maximum*

第十四章

比 *Ratio*
前項 *Antecedent*
後項 *Consequent*
優比 *Ratio of greater inequality*
劣比 *Ratio of less inequality*
反比 *Reciprocal ratio*
複比 *Compound ratio*
叠比 *Duplicate ratio*
三叠比 *Triplicate ratio*
比例 *Proportion*
外項 *Extreme*
內項 *Mean*
連比例 *Continued proportion*
比例中項 *Mean proportional*
第三比例項 *Third proportional*
正變 *Vary as*
反變 *Vary inversely as*
變數法 *Variation*

第十五章

坐標 *Co-ördinates*
坐標軸 *Axis of co-ördinates*
縱坐標 *Ordinate*
橫坐標 *Abscissa*
橫軸 *Axis of x*
縱軸 *Axis of y*
直交坐標軸 *Rectangular co-ördinates*
直線 *Straight line*
曲線 *Curve*
圖 *Graph*
拋物線 *Parabola*
雙曲線 *Hyperbola*
轉換點 *Turning point*
轉換值 *Turning value*
格子點 *Lattice point*

第十六章

級數 *Series*
等差級數 *Arithmetical progression*
公差 *Common difference*
初項 *First term*
末項 *Last term*
等差中項 *Arithmetical mean*
等比級數 *Geometrical progression*
公比 *Common ratio*
等比中項 *Geometrical mean*
無限等比級數 *Infinite numbers of term of the geometrical progression*
調和級數 *Harmonical progression*
調和中項 *Harmonic mean*
積彈 *Piles of shot*

第十七章

對數 *Logarithm*
常用對數 *Common logarithm*
對數表 *Table of logarithm*
指標 *Characteristic*
假數 *Mantissa*
指數方程式 *Exponential equation*
對數方程式 *Logarithmic equation*
複利 *Compound interest*
年金 *Annuity*

現值 *Present worth*
永久年金 *Perpetual annuity*

第十八章

數學的歸納法 *Mathematical induction*

第十九章

順列 *Permutation*
組合 *Combination*
階乘 *Factorial*
圓順序 *Circular permutation*

第二十章

二項定理 *Binomial theorem*
展開式 *Expansion*
一般項 *General term*
二項係數 *Coefficient of binomial expansion*
多項定理 *Multinomial theorem*

第二十一章

同一確度 *Equally likely*
或然率 *Probability*
成功機會 *Favourable case*
失敗機會 *Unfavourable case*
反排事象 *Exclusive events*
獨立事象 *Independent events*
從屬事象 *Dependent events*
複合事象 *Compound events*
餘事象 *Complementary events*
期望金額 *Expectation*
大數法則 *Law of large numbers*
揩悲歇夫之定理 *Tchebycheff's theorem*
揩兹之定理 *Bayes' theorem*
事前或然率 *A priori probability*
事後或然率 *A posteriori probability*
證言之或然率 *Probability of testimony*

第二十二章

有限級數 *Finite series*
無限級數 *Infinite series*
收斂 *Convergent*
發散 *Divergent*
振動 *Oscillate*
打關柏路之定理 *D' Alembert's theorem*
交錯級數 *Alternating series*
絕對收斂級數 *Absolutely convergent series*
條件收斂級數 *Conditionary or Semi convergent series*
來卜尼兹之定理 *Leibnitz's theorem*
羃級數 *Power series*
收斂界限 *Limit of convergent*
二項級數 *Binomial series*
指數級數 *Exponential series*
對數級數 *Logarithmic series*
自然對數 *Natural logarithm*
對數率 *Logarithmic modulus*

第二十三章

數字方程式 *Numerical equation*
一般方程式 *General equation*
微係數 *Differential coefficient*
微分商 *Differential quotient*
導函數 *Derived function*
重根 *Multiple root*

第二十四章

變換 *Transformation*

第二十五章

共軛複素數 *Conjugate complex number*
實軸 *Real axis*
虛軸 *Imaginary axis*
複素數平面 *Plane of complex numbers*
率 *Modulus*

偏角　*Argument, Amplitude*
多麻布路之定理 *De Moivre's theorem*

第二十六章

三次方程式 *Cubic equation*
四次方程式 *Biquadratic equation*
誘歸方程式 *Reducing Cubic*

第二十七章

上限　*Superior limit*
德卡路特之符號規則 *Descartes' rule of sign*

第二十八章

納拿之方法 *Horner's method*

第二十九章

轉倒　*Inversion*
偶順列 *Even permutation*
奇順列 *Odd permutation*
列　*Row*
行　*Column*
主對角線 *Principal diagonal*
主項　*Principal term*
小行列式 *Minor*
餘因式 *Cofactor*
錫爾佛司脫之方法 *Sylvester's method*

世界

傅氏高中代數學 [illegible] 價洋二元[illegible]分

中華民國二十二年十月印刷
中華民國二十二年十月出版

新課程標準世界中學改本

傅氏高中代數學（全一冊）

定價大洋二元二角五分
（外埠酌加運費匯費）

編著者　傅溥

發行者　世界書局有限公司代表人　沈知方

出版印刷者　上海大連灣路　世界書局

發行所　上海及各省　世界書局

本書負責校對者楊　咸