ISSN 0321—4796

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

Калининградский государственный университет

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

ВЫПУСК 16

Сборник научных трудов

Калининград — 1985

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КАЛИНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 16

Сборник научных трудов

Калининград - 1985

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Калининградского государственного университета

УДК 514.75

Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Сборник научных трудов.-Калининград, изд.Калинингр. ун-та,1985, с.128.

Статьи настоящего выпуска относятся к следующим разделам дифференциальной геометрии: многообразия квадрик в трехмерных и многомерных пространствах, дифференцируемые отображения, связности, теория гиперполос, теория сетей и распределений, дифференцируемые структуры, римановы метрики.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области геометрии.

Библиография: 82 названия.

Содержание

Б.А к м а т о в (Ошский пед.ин-т). О деформации связностей в структурном распределении η $(f\xi\eta\rho)$-структуры в $M_n(F)$ 5

Г.П.Б о ч и л л о (Томский ун-т). Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства $(m>n)$ 9

С.В.В е д е р н и к о в (Белорусский ун-т). Пространство комплексных структур. 14

Ю.Е.Г л и к л и х (Воронежский ун-т). О римановых метриках, обладающих римановым равномерным атласом. 17

Л.А.Ж а р и к о в а (Калининградский ун-т). Конгруэнция парабол с фокальными многообразиями высших порядков. 20

Е.Т.И в л е в (Томский политехн.ин-т). Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,n}$. 23

О.В.К а з н и н а (МГПИ им.В.И.Ленина). Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха. 27

С.В.К и р е е в а (Московский автодор.ин-т). О геометрии пары сетей. 30

М.В.К р е т о в (Калининградский ун-т). К геометрии комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве. 34

В.С.Ма л а х о в с к и й (Калининградский ун-т). Структуры, порожденные полем гиперквадрик. 37

М.Н.М а р ю к о в (МГПИ им.В.И.Ленина). О некоторых частичных отображениях евклидовых n-пространств 41

Г.М.а т и е в а (Омский пед.ин-т). Об одном классе плоских сетей. 45

В.В.М а х о р к и н (Калининградский ун-т). Конгруэнция квадратичных элементов в P_6 ..49

Е.А.М и т р о ф а н о в а (Калининградский ун-т). Инвариантная связность Картана в метрическом пространстве элементов второго порядка. 52

Ю.И.П о п о в (Калининградский ун-т). Об одномерных нормалях первого рода $H(M(\Lambda))$-распределения. . . .57

А.Г.Р е з н и к о в (Киевский ун-т).Об одномерных геодезических расслоениях группы Ли. . . . 67

Г.Л.С в е ш н и к о в а (Калининградский ун-т). Конгруэнции кривых второго порядка с трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями. 7I

Е.В.С к р ы д о в а (Калининградский ун-т).Об одном классе вырожденных конгруэнций,порожденных коникой и плоскостью. 75

Е.П.С о п и н а (Калининградский ун-т).Об одном классе конгруэнций эллипсоидов в аффинном пространстве. 8I

В.П.Т о л с т о п я т о в (Свердловский пед. ин-т).К геометрии векторного поля. 84

Т.П.Ф у н т и к о в а (КТИРПиХ).Об одном классе вырожденных конгруэнций,порожденных парой эллипсов. 87

В.Н.Х у д е н к о (Калининградский ун-т).Связность в главном расслоении,ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. .9I

В.П.Ц а п е н к о (КТИРПиХ).Связность в многообразии пар гиперплоскостей,индуцированном гиперконгруэнцией V_{n-1} 97

И.И.Ц ы г а н о к (МГПИ им.В.И.Ленина).Векторные поля в п-мерном аффинном пространстве. . . . I00

Ю.И.Ш е в ч е н к о (КТИРПиХ).О фундаментально-групповой связности. I04

Н.М.Ш е й д о р о в а (Калининградский ун-т). Задание двухсоставных распределений $\mathcal{H}^{\tau}_{m}\subset P_n$. . . .II0

С.В.Ш м е л е в а (ВИНИТИ АН СССР).Конгруэнции квадрик с вырождающейся поверхностью,порожденной фокальными точками второго порядка. II3

С е м и н а р. II7

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

Б. А к м а т о в

О ДЕФОРМАЦИИ СВЯЗНОСТЕЙ В СТРУКТУРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ $\eta(f\xi\eta\varrho)$ – СТРУКТУРЫ В $M_n(F)$

На многообразии почти комплексной структуры $M_n (n=2q)$ со структурным аффинором F ,оснащенном симметрической связностью Γ ,зададим распределение m-мерных линейных элементов Λ, определив его полем объекта Λ^J_i.

Индексы принимают следующие значения:

$J,K,L,\ldots=1,\ldots,n;\quad i,j,k,\ldots=1,2,\ldots,m;\quad \alpha,\beta,\gamma,\ldots=m+1,\ldots,n;$

$a,b,c,\ldots=1,\ldots,2m-n;\quad \sigma,\tau,\varrho,\ldots=2m-n+1,\ldots,m;\quad \varrho+\tau,\ldots=m+1,\ldots,n,$

где $p=n-m$.

Известно [1],что фундаментальным объектом первого порядка $\{\Lambda^J_i,\Lambda^J_{iK}\}$ распределения и объектом связности $\{\Gamma^J_{KL}\}$ можно охватить объект $\{N^J_\alpha\}$,определяющий на M_n распределение $(n-m)$-мерных линейных элементов N -нормально-оснащающее распределение $(\Lambda_x \cap N_x = T_x(M_n))$.При этом на распределении Λ возникает $(f\xi\eta\varrho)$-структура.

В настоящей работе рассматриваются некоторые связности на распределении η $(f\xi\eta\varrho)$ -структуры,в частности, φ-связность,полученная с помощью построенного тензора деформации $\hat{T}^a_{bc}$.Найдена также связь тензора деформации с тензором Нейенхейса N^a_{bc} аффинора f^a_b, индуцирующего на η почти комплексную структуру.

Используем следующую канонизацию репера:

$$\Lambda^J_i=\delta^J_i,\quad N^J_\alpha=\delta^J_\alpha;\qquad (1)$$

$$\Lambda^i_{jL}=0,\quad N^\alpha_{\beta L}=0.$$

Из дифференциальных уравнений компонент $\Lambda^J_i, N^J_\alpha, \Lambda^K_{iL}, N^\alpha_{\beta L}$, с учетом (1),получаем:

$$\omega^\alpha_\kappa = \Lambda^\alpha_{\kappa L}\,\omega^L, \quad \omega^i_\alpha = N^i_{\alpha L}\,\omega^L. \tag{2}$$

После такой канонизации репера значительно упрощаются охваты структурных объектов $(f\xi\eta\rho)$-структуры:

$$f^i_j = F^i_j, \quad \xi^i_\alpha = -F^i_\alpha,$$
$$\eta^\alpha_i = F^\alpha_i, \quad \rho^\alpha_\beta = F^\alpha_\beta. \tag{3}$$

Объекты $\overset{0}{\gamma}{}^i_{jL}$ и $\overset{0}{\gamma}{}^\alpha_{\beta L}$, определяющие связность на распределении Λ и N соответственно при осуществленной канонизации становятся подобъектами объекта Γ^J_{KL}:

$$\overset{0}{\gamma}{}^i_{jL} = \Gamma^i_{jL}, \quad \overset{0}{\gamma}{}^\alpha_{\beta L} = \Gamma^\alpha_{\beta L}. \tag{4}$$

В работе [2] найдены объекты $\{H^i_a\}, \{\Xi^i_{p+\tau}\}$ определяющие соответственно Λ-виртуальные распределения η и ξ:

$$dH^i_a - H^i_b v^b_a + H^\kappa_a \omega^i_\kappa = H^i_{aL}\,\omega^L, \tag{5}$$
$$d\Xi^i_{p+\sigma} - \Xi^i_{p+\tau}\,\omega^\tau_\sigma + \Xi^\kappa_{p+\tau}\,\omega^i_\kappa = \Xi^i_{p+\sigma L}\,\omega^L, \tag{6}$$

где

$$v^b_a = \omega^b_a + H^\tau_a\,\omega^b_\tau,$$
$$\omega^\tau_\sigma = \omega^{p+\tau}_{p+\sigma} - \eta^{p+\tau}_b\,\omega^b_\sigma - \eta^{p+\tau}_{\sigma L}\,\omega^L.$$

Проведем дальнейшую канонизацию репера

$$H^\sigma_a = 0, \quad \Xi^a_{p+\tau} = 0. \tag{7}$$

Из дифференциальных уравнений (5),(6) с учетом (7), следует

$$\omega^\sigma_a = H^\sigma_{aL}\,\omega^L, \quad \omega^a_\sigma = \tilde\Xi^{p+\tau}_\sigma\,\Xi^a_{p+\tau L}\,\omega^L, \tag{8}$$

где $\tilde\Xi^{p+\tau}_\sigma\,\Xi^\rho_{p+\tau} = \delta^\rho_\sigma$.

Такой канонический репер обозначим $R(H,\Xi)$. В работе [2] мы нашли охваты объектов $\overset{*}{\gamma}{}^a_{bL}$ и $\overset{*}{\gamma}{}^\tau_{\sigma L}$, определяющих связность на распределении η и распределении ξ. Относительно репера $R(H,\Xi)$ компоненты f^a_b аффинора f^i_j образуют тензор

$$df^a_b - f^a_c\,\omega^c_b + f^c_b\,\omega^a_c = f^a_{bL}\,\omega^L, \tag{9}$$

который на распределении η действует как аффинор почти комплексной структуры, т.е.

$$f^a_b f^b_c = -\delta^a_c. \tag{10}$$

Пусть $\hat\gamma^a_{bL}$ некоторая линейная связность, определенная на распределении η. Тогда компоненты $\hat\gamma^a_{bL}$ могут быть определены равенствами

$$\hat\gamma^a_{bL} = \overset{0}{\gamma}{}^a_{bL} + T^a_{bL}, \tag{11}$$

где T^a_{bL} -тензор деформации. Заметим, что компоненты T^a_{bc} в построенном каноническом репере также образуют тензор. Введем для них обозначения $\hat T^a_{bc}$:

$$\hat T^a_{bc} \overset{def}{=} T^a_{bc}. \tag{12}$$

Продолжив дифференциальные уравнения (9), получим:

$$df^a_{bL} - f^a_{cL}\,\omega^c_b - f^a_{bK}\,\omega^K_L + f^c_{bL}\,\omega^a_c - f^a_c\,\omega^c_{bL} + f^c_b\,\omega^a_{cL} = f^a_{bLK}\,\omega^K. \tag{13}$$

Из (13) следует, с учетом проведенной канонизации, что для f^a_{bc} выполняются следующие уравнения:

$$df^a_{bd} - f^a_{cd}\,\omega^c_b - f^a_{bc}\,\omega^c_d + f^c_{bd}\,\omega^a_c - f^a_c\,\omega^c_{bd} + f^c_b\,\omega^a_{cd} = f^a_{bdL}\,\omega^L. \tag{14}$$

Ковариантная производная $\tilde f^a_{bL}$ объекта f^a_b в связности $\overset{0}{\gamma}{}^a_{bL}$ определяется формулой:

$$\overset{\overset{0}{\gamma}}{\tilde f}{}^a_{bL} = f^a_{bL} + f^a_c\,\overset{0}{\gamma}{}^c_{bL} - f^c_b\,\overset{0}{\gamma}{}^a_{cL}. \tag{15}$$

Из (15), с учетом (11), имеем:

$$\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bL} = \overset{\overset{0}{\gamma}}{\tilde f}{}^a_{bL} + f^a_c\,T^c_{bL} - f^c_b\,T^a_{cL}. \tag{16}$$

Функции $\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bL}$ образуют тензор, причем в построенном каноническом репере компоненты $\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bc}$ образуют самостоятельный линейный однородный объект (тензор).

Введем обозначение:

$$\varphi^a_{bd} \overset{def}{=} \overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bd}. \tag{17}$$

Найдем такой охват компонент $\hat T^a_{bc}$, чтобы выполнялось условие:

$$\overset{\hat\gamma}{\tilde f}{}^a_{bc} = 0. \tag{18}$$

Т е о р е м а 1. Если компоненты тензора $\hat T^a_{bc}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\hat{T}^a_{bc} = -(\varphi^d_{bc} + \varphi^d_{cb}) f^a_d + (\varphi^a_{db} - \varphi^a_{bd}) f^d_c, \qquad (19)$$

то выполняются равенства (I8). Справедливо и обратное утверждение.

Тензор $\hat{T}^a_{bc}$ можно использовать для преобразования компонент $\overset{\circ}{\gamma}{}^a_{bc}$ объекта связности $\overset{\circ}{\gamma}{}^a_{bL}$. Система величин $\hat{\gamma}^a_{bc} = \overset{\circ}{\gamma}{}^a_{bc} + \hat{T}^a_{bc}$, $\hat{\gamma}^a_{b\sigma} = \overset{\circ}{\gamma}{}^a_{b\sigma}$, $\hat{\gamma}^a_{b\,p+\tau} = \overset{\circ}{\gamma}{}^a_{b\,p+\tau}$ также будет определять связность в распределении η. Тензор $\hat{T}^a_{bc}$ мы будем называть тензором "слабой" деформации связности $\overset{\circ}{\gamma}{}^a_{bL}$. Выясним геометрический смысл осуществленной деформации. Относительно связности $\hat{\gamma}^a_{bL}$ поле (9) структурного объекта f^a_b, определяющего почти комплексную структуру в распределении η, записывается следующим образом

$$df^a_b - f^a_c \hat{\omega}^c_b + f^c_b \hat{\omega}^a_c = \overset{\hat{\gamma}}{\nabla}{}^{}f^a_{bc}\,\omega^c + \overset{\circ}{\gamma}{}\!\!\overset{}{\nabla} f^a_{b\sigma}\,\omega^\sigma + \overset{\circ}{\gamma}{}\!\!\overset{}{\nabla} f^a_{b\,p+\sigma}\,\omega^{p+\sigma}. \qquad (20)$$

Кривые, принадлежащие распределению η, в построенном каноническом репере, определяются системой:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega^\sigma = 0, \quad \omega^a = \lambda^a \theta. \qquad (21)$$

Очевидно, что при смещении элемента распределения Λ по кривым, принадлежащим распределению η, объекты f^a_b ковариантно постоянны в связности $\hat{\gamma}^a_{bL}$.

Теорема 2. Связность $\hat{\gamma}^a_{bL}$, полученная деформацией связности $\overset{\circ}{\gamma}{}^a_{bL}$ при помощи тензора "слабой" деформации $\hat{T}^a_{bc}$, вдоль кривых, принадлежащих распределению η, является φ-связностью.

Тензор Нейенхейса аффинора

$$N^a_{bc} = \varphi^a_{bd} f^d_c - \varphi^a_{db} f^d_c - (\varphi^a_{cd} - \varphi^a_{dc}) f^d_b, \qquad (22)$$

и следовательно

$$N^a_{bc} = \hat{T}^a_{bc} - \hat{T}^a_{cb}. \qquad (23)$$

Список литературы

1. Акматов Б. Об инвариантном построении геометрии распределений m-мерных линейных элементов в дифференцируемом многообразии M_n. Рук. деп. ВИНИТИ. М., 1983, 35с. библ. 20 назв. 26 мая 1983. № 2874-83 Деп.
2. Акматов Б. О связностях в структурных распределениях индуцированной $(f^\xi_\eta, \eta f)$-структуры в M_n почти комплексной структуры. Рук. деп. ВИНИТИ. М., 1984.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. I6 I985

УДК 514.75

Г. П. Бочилло

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ Δ_m НА МНОГООБРАЗИИ ВСЕХ ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ n - МЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $(m>n)$

В работе продолжено изучение m-распределений на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства P_n. В смысле [1] Δ_m являются распределениями касательных элементов, порожденных m-мерными подмногообразиями гиперплоских элементов $\{A, \alpha\}$. Под гиперплоским элементом, как и в [2], понимается пара из точки A и инцидентной ей гиперплоскости α пространства P_n. В данной работе рассмотрены распределения Δ_m на M_{2n-1} в случае $n<m<2n-1$, $(m=n+m_0-1, 1<m_0<n)$. Доказана теорема, дающая геометрическую характеристику распределения Δ_m, построено его оснащение. Показано, что с Δ_m при $m>n$ ассоциируется инвариантное подраспределение $\tilde{\Delta}_{2n-m-1}$, причем $2n-m-1<n$. Отсюда следует, что в случае $n<m<2n-1$ могут быть использованы результаты из [3], [4]. В работе индексы принимают следующие значения: $\mathcal{I}, \mathcal{J} = 0, \overline{1,n}$; $i, j = \overline{1,n}$; $p, q, \tau = \overline{1,n-1}$; $a, b, c = \overline{1, m_0-1}$; $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} = \overline{m_0, n-1}$, $1<m_0<n$.

I. Распределения Δ_m на M_{2n-1} ($n<m<2n-1$). Присоединим к каждому элементу $\{A, \alpha\}$ многообразия M_{2n-1} точечные $R=\{A_{\mathcal{I}}\}$ и тангенциальные $\tau=\{\alpha^{\mathcal{I}}\}$ подвижные реперы, деривационные формулы которых имеют вид $dA_{\mathcal{I}} = \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} A_{\mathcal{J}}$, $d\alpha^{\mathcal{I}} = -\omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \alpha^{\mathcal{J}}$, причем 1-формы $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}}$ удовлетворяют условиям $d\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{I}} = \omega^{\mathcal{K}}_{\mathcal{I}} \wedge \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$, $\sum \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{I}} = 0$. Положив $A=A_0$, $\alpha=\alpha^n$ перейдем к реперам $R_0(\tau^0)$ нулевого порядка со структурными формами $\omega^p_0, \omega^n_0, \omega^n_p$ многообразия M_{2n-1}. Распределение Δ_m на M_{2n-1} можно определить системой $(2n-m-1)$ линейно независимых уравнений Пфаффа:

$$\omega^n_{\bar a}-\Lambda^n_{\bar a i}\,\omega^i_0-\Lambda^{na}_{\bar a}\,\omega^n_a=0. \qquad (I)$$

Система форм в (I), аннулирующихся на Δ_m, инвариантна относительно подгруппы стационарности гиперплоского элемента $\{A,\alpha\}$, что обеспечивается заданием на M_{2n-1} поля геометрического объекта $\Gamma_0=\{\Lambda^n_{\bar a i},\Lambda^{nb}_{\bar a}\}$,

$$\Delta\Lambda^n_{\bar a i}\equiv\nabla\Lambda^n_{\bar a i}+\Lambda^n_{\bar a i}\omega^0_0+\Lambda^{nb}_{\bar a}\Lambda^n_{\bar b i}\omega^{\bar b}_b+\Lambda^{nb}_{\bar a}\delta^n_i\omega^0_b-\delta^n_i\omega^0_{\bar a}=\bar\Lambda^n_{\bar a ij}\omega^j_0+\bar\Lambda^{np}_{\bar a i}\omega^n_p, \qquad (2)$$

$$\Delta\Lambda^{nc}_{\bar a}\equiv\nabla\Lambda^{nc}_{\bar a}-\Lambda^{nc}_{\bar a}\omega^n_n+\Lambda^{nb}_{\bar a}\Lambda^{nc}_{\bar b}\omega^{\bar b}_b-\omega^c_{\bar a}=-\Lambda^{nc}_{\bar a i}\omega^i_0-\Lambda^{ncp}_{\bar a}\omega^n_p.$$

2. Геометрическая интерпретация распределения Δ_m. Распределению Δ_m на M_{2n-1} при $n<m<2n-1$ принадлежат два неинволютивных в общем случае подраспределения, которые определяются, соответственно, системами:

$$\omega^n_{\bar a}-\Lambda^n_{\bar a i}\,\omega^i_0-\Lambda^{na}_{\bar a}\,\omega^n_a=0,\quad \omega^i_0=0, \qquad (3)$$

$$\omega^n_{\bar a}-\Lambda^n_{\bar a i}\,\omega^i_0-\Lambda^{na}_{\bar a}\,\omega^n_a=0,\quad \omega^n_p=\omega^n_0=0. \qquad (3')$$

Они представляют собою совокупности всех 1-семейств многообразия M_{2n-1}, вдоль которых неподвижны, соответственно, точка A_0 и гиперплоскость α^n. Обозначим указанные подраспределения $\Delta^{A_0}_{m_0-1}$ и $\Delta^{\alpha^n}_{m_0-1}$, соответственно.

Геометрическую характеристику объекту Γ_0 при условии $R\|\Lambda^n_{\bar a i}\|=n-m_0$ дает следующая

Т е о р е м а 1. Задание распределения Δ_m на M_{2n-1} ($n<m<2n-1$, $m=n+m_0-1$) эквивалентно оснащению многообразия M_{2n-1} полями (m_0-1)-плоскостей $\mathcal{L}_{m_0-1}$ и $(n-m_0)$-плоскостей ℓ_{n-m_0}, инцидентных A_0 и α^n одновременно и не имеющих общих точек, кроме A_0, а также отображением множества m_0-плоскостей, проходящих через $\mathcal{L}_{m_0-1}$, на множество $(n-m_0-1)$-плоскостей, инцидентных ℓ_{n-m_0}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая $[A_0\,dA_0]$, $[\alpha^n d\alpha^n]$ вдоль интегральных 1-семейств распределений $\Delta^{\alpha}_{m_0-1}$ и $\Delta^{A_0}_{m_0-1}$ соответственно, получаем, что $[A_0\,dA_0]\in\mathcal{L}_{m_0-1}=$ $=[A_0,A_a+\hat\Lambda^{\bar b}_{0a}A_{\bar b}]$, $[\alpha^n d\alpha^n]\supset\ell_{n-m_0}=[\alpha^n,\alpha^0+\Lambda^{na}_{\bar a}\alpha^{\bar a}]$, где $\Lambda^n_{\bar a a}=\Lambda^n_{\bar a\bar b}\hat\Lambda^{\bar b}_{0a}$, $\det\|\Lambda^n_{\bar a\bar c}\|\neq 0$. Для доказательства последней части теоремы перейдем к реперам $R_1(\tau^1)$ так, что $\mathcal{L}_{m_0-1}=[A_0A_a]$, $\ell_{n-m_0}=[\alpha^n\alpha^0]$, $\Lambda^{na}_{\bar a}=\Lambda^n_{\bar a a}=0$. Тогда определяющая распределение Δ_m система (I) уравнений Пфаффа принимает вид $\omega^n_{\bar a}-\Lambda^n_{\bar a\bar b}\,\omega^{\bar b}_0=0$, а условия (2) превращаются в соотношения

$$\omega^b_{\bar a}=\Lambda^{nb}_{\bar a i}\omega^i_0+\Lambda^{nbp}_{\bar a}\omega^n_p;\ \omega^{\bar b}_a=B^{n\bar b}_{ai}\omega^i_0+B^{n\bar bp}_a\omega^n_p;\ \Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^{\bar b}_n+\omega^0_{\bar a}=C^n_{\bar a ni}\omega^i_0+C^{np}_{\bar a n}\omega^n_p, \qquad (3)$$

$$\nabla\Lambda^n_{\bar a\bar b}+\Lambda^n_{\bar a\bar b}\,\omega^0_0=C^n_{\bar a\bar b i}\,\omega^i_0+C^{np}_{\bar a\bar b}\,\omega^n_p, \qquad (4)$$

где

$$B^{n\bar c}_{ai}=\Lambda^{\bar a\bar c}_n\bar\Lambda^n_{\bar a ai},\ B^{n\bar cp}_a=\Lambda^{\bar a\bar c}_n\bar\Lambda^{np}_{\bar a a},\ \Lambda^n_{\bar a\bar c}\Lambda^{\bar b\bar c}_n=\Lambda^n_{\bar c\bar a}\Lambda^{\bar c\bar b}_n=\delta^{\bar b}_{\bar a}, \qquad (5)$$

$$C^n_{\bar a ni}=-\bar\Lambda^n_{\bar a ni};\ C^{np}_{\bar a n}=-\bar\Lambda^{np}_{\bar a n},\ C^n_{\bar a\bar b i}=\bar\Lambda^n_{\bar a\bar b i},\ C^{np}_{\bar a\bar b}=\bar\Lambda^{np}_{\bar a\bar b}.$$

Система величин $\{\Lambda^n_{\bar a\bar b}\}$, удовлетворяющая уравнениям (4), образует невырожденный дважды ковариантный в общем случае несимметрический тензор, определяющий отображение множества m_0-плоскостей, инцидентных $\mathcal{L}_{m_0-1}$, на множество $(n-m_0-1)$-плоскостей, инцидентных ℓ_{n-m_0}, по специальным формулам. Вычисления показывают, что требование инвариантности описанной геометрической конструкции в реперах $R_1(\tau^1)$, приводит к соотношениям (3)-(4).

3. Инвариантное подраспределение $\widetilde\Delta_{2n-m-1}$. Система форм Пфаффа

$$\omega^n_{\bar a}-\Lambda^n_{\bar a\bar b}\,\omega^{\bar b}_0,\ \omega^a_0,\ \omega^n_a,\ \omega^n_0 \qquad (6)$$

относительно инвариантна в силу (4) и первых двух групп соотношений (3), обеспечивающих в реперах $R_1(\tau^1)$ инвариантность системы $(2n-m-1)$ форм Пфаффа $\omega^n_{\bar a}-\Lambda^n_{\bar a\bar b}\omega^{\bar b}_0$, аннулирующихся на распределении Δ_m. Из разложений $dA_0=\omega^0_0A_0+\omega^i_0A_i$; $d\alpha^n=-\omega^n_0\alpha^0-\omega^n_p\alpha^p-\omega^n_n\alpha^n$ заключаем, что вдоль интегральных 1-семейств подраспределения $\widetilde\Delta_{2n-m-1}$, определяемого уравнениями

$$\omega^n_{\bar a}-\Lambda^n_{\bar a\bar b}\,\omega^{\bar b}_0=0,\ \omega^a_0=0,\ \omega^n_a=0,\ \omega^n_0=0, \qquad (7)$$

имеем $[A_0\,dA_0]\in\ell_{n-m_0}$, $[\alpha^n d\alpha^n]\supset\mathcal{L}_{m_0-1}$, а также множество прямых в ℓ_{n-m_0}, инцидентных A_0, отображается на множество $(n-2)$-плоскостей в α^n, инцидентных $\mathcal{L}_{m_0-1}$. С другой стороны, в случае выполнения приведенных условий 1-семейство M_1 многообразия M_{2n-1} является интегральным 1-семейством распределения $\widetilde\Delta_{2n-m-1}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. 1-семейство M_1 многообразия M_{2n-1} является интегральным семейством распределения $\widetilde{\Delta}_{2n-m-1}$ тогда и только тогда, когда касательная $[A_0 dA_0]$ к линии $A_0(M_1)$ принадлежит ℓ_{n-m_0}, а характеристика $[\alpha^n d\alpha^n]$ гиперплоскости α^n инцидентна $\mathcal{L}_{m_0-1}$, причем прямой $x^{\bar a}[A_0 A_{\bar a}] \in \ell_{n-m_0}$ соответствует $(n-2)$-плоскость $x_{\bar a}[\alpha^n \alpha^{\bar a}] \supset \mathcal{L}_{m_0-1}$, где $x_{\bar a} = \Lambda^n_{\bar a \bar b} x^{\bar b}$.

4. Оснащение распределения Δ_m. Используя уравнения (4), (5) и их дифференциальные продолжения, находим, что система величин $\gamma_1 = \{\Lambda^n_{\bar a \bar b}, \Gamma^{na}_{\bar a \bar b}, \Gamma^n_{a \bar a \bar b}, \Gamma^n_{\bar c a \bar b}\}$, где

$$\Gamma^{na}_{\bar a \bar b} = A^{na}_{\bar a \bar b} + A^{na\bar c}_{\bar a}\Lambda^n_{\bar c \bar b};\ \Gamma^n_{a\bar a \bar b} = \Lambda^n_{\bar c \bar b}(B^{n\bar c}_{a\bar a} + B^{n\bar c\bar d}_{a}\Lambda^n_{\bar d \bar a}),\ \Gamma^n_{\bar c a \bar b} = C^n_{\bar c a \bar b} + C^{n\bar d}_{\bar c a}\Lambda^n_{\bar d \bar b}$$

и

$$\Gamma^{n\bar b}_{a\bar c} = \Lambda^{\bar a \bar b}_n(\bar\Lambda^n_{\bar a a \bar c} + \bar\Lambda^{n\bar d}_{\bar a a}\Lambda^n_{\bar d \bar c}) = B^{n\bar b}_{a\bar c} + B^{n\bar b\bar d}_{a}\Lambda^n_{\bar d\bar c},\ \Gamma^{n\bar a\bar b}_a = \Lambda^{\bar c\bar b}_n\Gamma^{n\bar a}_{a\bar c},\ \Gamma^{na\bar c}_{\bar a} = \Gamma^{na}_{\bar a\bar b}\Lambda^{\bar c\bar b}_n$$

образует самостоятельный объект, который является подобъектом фундаментального объекта первого порядка распределения Δ_m. Следовательно, γ_1 можно назвать фундаментальным подобъектом распределения $\widetilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Аналогично строится фундаментальный подобъект второго порядка распределения $\widetilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Используя компоненты γ_1, определим на M_{2n-1} поле $(n-m_0+1)$-пар $\{\ell_{n-m_0+1}, \mathcal{L}_{m_0-2}\}$, где $\ell_{n-m_0+1} = [\alpha^a - \frac{1}{n-m_0}\Gamma^{na\bar a}_{\bar a}\alpha^n]$, $\mathcal{L}_{m_0-2} = [A_a - \frac{1}{n-m_0}\Gamma^{n\bar a}_{a\bar a}A_0]$. Построенное поле вместе с тензором $\{\Lambda^n_{\bar a\bar b}\}$ порождает на M_{2n-1} $(n-m_0+1)$-распределение Δ_{n-m_0+1}, являющееся подраспределением. Из [3], [4] следует, что можно задать аффинную связность на M_{2n-1} с помощью нового поля гиперплоских элементов.

Т е о р е м а 3. Если на M_{2n-1} задано распределение Δ_m $(n<m<2n-1)$, то оснащение M_{2n-1} новым полем гиперплоских элементов может быть построено с использованием лишь компонент фундаментального подобъекта второго порядка распределения $\widetilde{\Delta}_{2n-m-1}$ (подраспределения Δ_m).

Справедливость утверждения вытекает из теоремы 2 в [3], которую следует применить к построенному с использованием компонент γ_1 подраспределению Δ_{n-m_0+1}. Заметим, что $n-m_0+1 = 2n-m < n$.

5. Геометрическая характеристика пары подпространств $\{\ell_{n-m_0+1}, \mathcal{L}_{m_0-2}\}$. В построенной паре подпространств ℓ_{n-m_0+1} -гармоническая поляра гиперплоскости α^n относительно фокусного конуса $K^{n-m_0}_{n-1}$ с вершиной ℓ_{n-m_0}, причем $K^{n-m_0}_{n-1} = \{\Gamma_{n-1}/\Gamma_{n-1} \supset \ell_{n-m_0}, \Gamma_{n-1} \supset \ell_{n-m_0} + d\ell_{n-m_0}\}$, а $\mathcal{L}_{m_0-2}$ -гармоническая поляра точки A_0 относительно фокусной поверхности $F^{n-m_0}_{m_0-2}$ в $\mathcal{L}_{m_0-1}$ и $F^{n-m_0}_{m_0-2} = \{M/M \in \mathcal{L}_{m_0-1}, M+dM \in \mathcal{L}_{m_0-1}\}$ вдоль интегральных I-семейств распределения $\widetilde{\Delta}_{2n-m-1}$. Поверхности $K^{n-m_0}_{n-1}$, $F^{n-m_0}_{m_0-2}$ определяются следующими уравнениями относительно тангенциальных (точечных) координат $x_0, x_a, x_{\bar a}, x_n$ $(x^0, x^a, x^{\bar a}, x^n)$:

$$K^{n-m_0}_{n-1}:\ x_0 = x_{\bar a} = 0,\quad \det\|\Lambda^n_{\bar a\bar b}x_n + \Gamma^{na}_{\bar a\bar b}x_a\| = 0, \tag{8}$$

$$F^{n-m_0}_{m_0-2}:\ x^n = x^{\bar a} = 0,\quad \det\|\Lambda^{\bar b\bar a}_n x^0 + \Gamma^{n\bar a\bar b}_a x^a\| = 0, \tag{9}$$

причем $m_0 \le (n-m_0)^2$. Поскольку компоненты объекта γ_1, используемые в уравнениях (8) и (9), в общем случае несимметричны и некососимметричны по индексам $\bar a, \bar b$, то кроме $K^{n-m_0}_{n-1}$ и $F^{n-m_0}_{m_0-2}$ в случае $m_0 \le \frac{1}{2}(n-m_0)(n-m_0+1)$ и несимметричности компонент γ_1 определяются поверхности

$$x_0 = x_{\bar a} = 0,\quad \det\|\Lambda^n_{[\bar a\bar b]}x_n + \Gamma^{na}_{[\bar a\bar b]}x_a\| = 0, \tag{8'}$$

$$x^n = x^{\bar a} = 0,\quad \det\|\Lambda^{[\bar b\bar a]}_n x^0 + \Gamma^{n[\bar a\bar b]}_a x^a\| = 0, \tag{9'}$$

а в случае $m_0 \le \frac{1}{2}(n-m_0)(n-m_0+1)$ и некососимметричности компонент γ_1 поверхности

$$x_0 = x_{\bar a} = 0,\quad \det\|\Lambda^n_{(\bar a\bar b)}x_n + \Gamma^{na}_{(\bar a\bar b)}x_a\| = 0, \tag{8''}$$

$$x^n = x^{\bar a} = 0,\quad \det\|\Lambda^{(\bar b\bar a)}_n x^0 + \Gamma^{n(\bar a\bar b)}_a x^a\| = 0. \tag{9''}$$

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Распределения касательных элементов.-Тр. геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР.М., 1971, т.3, с.29-48.

2. Онищук Н.М. Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного центроаффинного пространства $(m<n)$ -Геометрич.сб.вып.18, 1979, с.59-71.

3. Бочилло Г.П. К дифференциальной геометрии m-распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14.Калининград, 1983, с.18-22.

4. Бочилло Г.П. О дифференциальной геометрии m- распределений на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства $(m<n)$. Томский ун-т, Томск, 1983, 21с.(Рукопись деп.в ВИНИТИ АН СССР, 8 февраля, 1984, №762-84 Деп.).

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

С.В.В е д е р н и к о в

ПРОСТРАНСТВО КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР

Определим в алгебре $M(n)$ (квадратичных матриц порядка n над полем R) структуру G-пространства при помощи отображения $\alpha: G\times M(n)\to M(n): (a,x)\to axa^{-1}$, где $G=GL(n,R)$. Выделим орбиту с условием $\mathcal{K}=\{x\mid x\in M(n), x^2=-E\}$. Так как для любого $x\in\mathcal{K}$ найдется такое $a\in G$, что $x=a\varepsilon a^{-1}$, где $\varepsilon=\begin{pmatrix}0&E\\-E&0\end{pmatrix}$, то орбита определяется однозначно

$$\mathcal{K}=\{x\mid x=a\varepsilon a^{-1},\ a\in G\}. \qquad (1)$$

Очевидно, что любой элемент орбиты $\mathcal{K}$ есть оператор комплексной структуры, поэтому естественно назвать $\mathcal{K}$ пространством комплексных структур. Изучим геометрию этого пространства методом, разработанным в [1].

Как и в случае пространства пар касательное расслоение

$$T(\mathcal{K})=\{(x,\omega)\mid x\in\mathcal{K}, \omega\in M(n), x\omega+\omega x=0\} \qquad (2)$$

или

$$T_\varepsilon(\mathcal{K})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\beta&-\alpha\end{pmatrix}\,\Big|\,\alpha,\beta\in M\left(\tfrac{n}{2}\right)\right\}.$$

Так как $tr\,\omega=0$, то полиномиальные морфизмы $P: T(\mathcal{K})\to M(n)$: $(x,\omega)\to P(x,\omega)$ имеют следующий вид

$$P(x,\omega)=xP_1(\omega)+P_2(\omega). \qquad (3)$$

Аналогично случаю пространства пар определим билинейные формы на $\mathcal{K}$:

$$P: T(\mathcal{K})\oplus T(\mathcal{K})\to R: (x,\omega,\theta)\to tr\,[P(x,\omega,\theta)]=\langle\omega,\theta\rangle. \qquad (4)$$

В силу билинейности P относительно ω и θ и условий (2) следует, что

$$\langle\omega,\theta\rangle=\alpha\,tr(x\,\omega\theta)+\beta\,tr(x\theta\omega)+\gamma\,tr(\omega\theta);\quad \alpha,\beta,\gamma\in R.$$

Так как $tr(x\omega\theta)=-tr(\omega x\theta)=-tr(x\theta\omega)$, то форма

$$[\omega,\theta]=tr(x\,\omega\theta) \qquad (5)$$

кососимметрична (внешняя форма). Тогда $\langle\omega,\theta\rangle=\alpha[\omega,\theta]+\beta(\omega,\theta)$, т.е. любая билинейная форма на $\mathcal{K}$ является произвольной линейной комбинацией внешней формы и симметрической формы. Легко проверить, что симметрическая форма $(\omega,\theta)=tr(\omega\theta)$ невырожденна, и, следовательно, определяет инвариантную псевдориманову метрику на $\mathcal{K}$. Однако в общем случае структура не будет римановой, так как легко подобрать матрицу ω такую, что $(\omega,\omega)=0$, т.е. выбрать изотропное направление.

Введем невырожденный оператор

$$J_x: T_x(\mathcal{K})\to T_x(\mathcal{K}):\quad \omega\to x\omega, \qquad (6)$$

который определит на $\mathcal{K}$ почти комплексную структуру.

Т е о р е м а 1. На многообразии $\mathcal{K}$ имеется инвариантная почти комплексная структура, которая вместе с псевдоримановой и симплектической структурой определит на $\mathcal{K}$ инвариантную кэлерову метрику эллиптического типа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Невырожденная форма $[\omega,\theta]$ определит симплектическую структуру на $\mathcal{K}$, причем $[J_x(\omega),\theta]=[\omega,\theta]$. Замкнутость формы симплектической структуры очевидна, поэтому, следуя [2], нам осталось доказать согласованность введенных структур, т.е. равенство $(J_x(\omega),J_x(\theta))=(\omega,\theta)$. В самом деле $(J_x(\omega),J_x(\theta))=tr(x\omega x\theta)=-tr(x^2\omega\theta)=tr(\omega\theta)=(\omega\theta)$. По аналогии с [1] вводится средняя связность $\bar\nabla_X Y=\frac{1}{2}(\nabla_X Y+J\nabla_X JY)$. Очевидно, что она будет удовлетворять всем условиям связности, индуцированной кэлеровой структурой эллиптического типа.

Т е о р е м а 2. Кручение почти комплексной структуры многообразия $\mathcal{K}$ определяется полиномиальным морфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Непосредственными вычислениями показывается, что связность $\bar\nabla$ будет почти комплексной связностью [2]. Тогда ее кручение $t(X,Y)$

связано с кручением почти комплексной структуры $T(X,Y)$ формулой [3]:

$$T(JX,JY)-JT(JX,Y)-J(T(X,JY))-T(X,Y)=\frac{1}{2}t(X,Y). \quad (7)$$

Но

$$T(X,Y)=\nabla_X Y-\bar{\nabla}_X Y=h(X,Y),$$

где $h(X,Y)$ -2-я билинейная форма структуры J на многообразии $\mathcal{K}$.Форма $h(X,Y)$ будет определяться полиномиальным морфизмом по формуле (4).

Тогда и (7) будет определяться полиномиальным морфизмом, так как (6) выражается полиномом.

Список литературы

1.Ведерников С.В. Геометрия пространства пар.- Известия АН БССР.Рукопись депонирована в ВИНИТИ 15 апреля 1980г.,№ 1454-80 Деп.

2.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии,1979,т.9,с.5-246.

3.Кобаяси С.,Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, М.,1981,т.2.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Ю.Е.Гликлих

О РИМАНОВЫХ МЕТРИКАХ,ОБЛАДАЮЩИХ РИМАНОВЫМ РАВНОМЕРНЫМ АТЛАСОМ

При изучении ряда вопросов теории стохастических дифференциальных уравнений на многообразиях (см.[1,2]) предполагаются выполненными некоторые условия на многообразие,которые можно свести к единственному требованию:нужно,чтобы многообразие допускало риманову метрику,обладающую римановым равномерным атласом.В настоящей работе показано,что на любом многообразии существует риманова метрика,обладающая римановым равномерным атласом.Для доказательства мы модифицируем методы [3,4] исследования выпуклых окрестностей и полных метрик. В определенном смысле результаты работы являются обобщением [3]:метрика,обладающая римановым равномерным атласом,очевидно,является полной и,так же как в [3],указанная метрика может быть построена как конформная для любой заранее заданной метрики.

Пусть M -связное конечномерное риманово многообразие, ρ -функция риманова расстояния на M (см.[4]).

Определение. Атлас на M назовем равномерным римановым,если для любой точки $m\in M$ существует карта (U,φ), $U\ni m$ из этого атласа,такая,что U содержит метрический шар $B(m,\tau)$ с центром в m фиксированного радиуса $\tau>0$ относительно риманова расстояния ρ.

Отметим,что метрический шар $B(m,\tau)=\{n\in M \mid \rho(m,n)<\tau\}$, вообще говоря,не гомеоморфен шару модельного пространства и может иметь сложную топологическую структуру.

Теорема. Для любой римановой метрики на M существует конформная ей риманова метрика,обладающая римановым равномерным атласом.

2 Зак. 1401

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько технических утверждений.

Зададим на M риманову метрику $\langle,\rangle$, (т.е. $\langle,\rangle_m$ - скалярное произведение в касательном пространстве T_mM) и пусть d -соответствующее $\langle,\rangle$ риманово расстояние на M. Как известно (см.[5]), для любой точки $m\in M$ существует число $a(m)>0$, такое, что d -метрический шар $B(m,a(m))$ принадлежит нормальной координатной окрестности (карте) любой точки $n\in B(m,a(m))$. Обозначим через $\tau(m)$ точную верхнюю грань множества таких $a(m)$, для которых $B(m,a_1(m))\neq B(m,a_2(m))$ при любом $a_1(m)<a_2(m)$.

Если $\tau(m^*)=\infty$ для некоторой точки $m^*\in M$, то доказательство теоремы тривиально. Предположим, что $\tau(m)<\infty$ для всех $m\in M$.

Л е м м а 1. Для любых двух точек $m,n\in M$ выполняется неравенство

$$|\tau(m)-\tau(n)|\leqslant d(m,n). \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала рассмотрим случай $n\in B(m,\tau(m))$. Тогда $B(n,\tau(m)-d(m,n))\subset B(m,\tau(m))$, и по определению $\tau(n)$ имеем $\tau(n)\geqslant\tau(m)-d(m,n)$. Если $\tau(m)\geqslant\tau(n)$, то (1) доказано. Если $\tau(n)>\tau(m)$, то $m\in B(n,\tau(n))$ и, следовательно, $\tau(m)\geqslant\tau(n)-d(m,n)$, что и доказывает (1). Случай $m\in B(n,\tau(n))$ полностью аналогичен. В оставшемся случае, из того, что $n\notin B(m,\tau(m))$ и одновременно $m\notin B(n,\tau(n))$ вытекает, что $\tau(m)\leqslant d(m,n)$ и одновременно $\tau(n)\leqslant d(m,n)$. Следовательно, $|\tau(m)-\tau(n)|<d(m,n)$. Лемма доказана.

Без ограничения общности можно считать функцию $\tau(m)$ гладкой. Если это не так, то ее можно аппроксимировать гладкой функцией $\tau^*(m)$, $0<\tau^*(m)<\tau(m)$ для всех $m\in M$, для которой верно неравенство (1).

Введем на M новую риманову метрику $\langle,\rangle^*$ по формуле $\langle,\rangle^*_m=\frac{1}{\tau^2(m)}\langle,\rangle_m$. Риманово расстояние на M, соответствующее $\langle,\rangle^*$, обозначим через ρ.

Л е м м а 2. Пусть $d(m,n)\geqslant\tau(m)$. Тогда $\rho(m,n)\geqslant\frac{1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\gamma(t)$-произвольная кусочно-гладкая кривая, такая, что $\gamma(a)=m$, $\gamma(b)=n$. Обозначим ее длину в метрике $\langle,\rangle$ через L, т.е. $L=\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|\,dt$. Тогда ее длина в метрике $\langle,\rangle^*$ находится по формуле $L^*=\int_a^b\frac{\|\dot\gamma(t)\|}{\tau(\gamma(t))}dt$.

Используя классическую теорему о среднем, получаем

$$L^*=\frac{1}{\tau(\gamma(\tau))}\int_a^b\|\dot\gamma(t)\|\,dt=\frac{L}{\tau(\gamma(\tau))},$$

где $\tau\in[a,b]$. Далее, $L^*=\frac{L}{\tau(\gamma(\tau))-\tau(m)+\tau(m)}$ и по лемме 1 $L^*\geqslant\frac{L}{\tau(m)+d(m,\gamma(\tau))}$.

По условию $L\geqslant\tau(m)$. Кроме того, $d(m,\gamma(\tau))$ не превосходит длины γ на промежутке $[a,\tau]$, которая в свою очередь не превосходит L, т.е. $L\geqslant d(m,\gamma(\tau))$. Таким образом, $L^*\geqslant\frac{L}{L+L}=\frac{1}{2}$.

Так как (2) выполняется для произвольной γ, то $\rho(m,n)\geqslant\frac{1}{2}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Метрика $\langle,\rangle^*$ по построению конформна первоначальной метрике $\langle,\rangle$. По определению, нормальная карта метрики $\langle,\rangle$ в точке m содержит метрический шар $B(m,\tau(m))$ относительно расстояния d. Из леммы 2 следует, что при $\rho(m,n)<\frac{1}{2}$ выполняется неравенство $d(m,n)<\tau(m)$. Таким образом, нормальная карта метрики $\langle,\rangle$ в любой точке $m\in M$ содержит шар с центром в m радиуса $\frac{1}{2}$ относительно риманова расстояния ρ. Следовательно, $\langle,\rangle^*$-искомая метрика.

Список литературы

1. Белопольская Я.И., Далецкий Ю.Л. Уравнения Ито и дифференциальная геометрия.-Успехи математических наук, 1982, т.37, вып.3, с.95-142.
2. Elworthy K.D. Stochastic differential equations on manifolds (London Math. Soc. Lect. Notes 70. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982, 326 p.
3. Nomizu K., Ozeki H. The existence of complete Rimannian metrics.- Proc. Amer. Math. Soc., 1961, v. 12, p. 889-891.
4. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом.М., 1971.
5. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии.М., 1981, т.1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Л.А.Жарикова

КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ С ФОКАЛЬНЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

В трехмерном эквиаффинном пространстве продолжается изучение класса конгруэнций P парабол, начатое в работе [2]. Исследованы свойства конгруэнций $B^k(A)$ парабол, где k -порядок фокальной точки A конгруэнции. Доказано, что если точка A -фокальная точка второго (третьего) порядка, то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции P, установлены некоторые свойства конгруэнции $B^3(A)$.

Отнесем образующий элемент $\mathcal{F}$ конгруэнции P к реперу $R=\{A;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$. Начало A репера поместим в фокусе, образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями. Вектор $\vec{e}_1$ направим по касательной к параболе в точке A, вектор по диаметру параболы, проходящему через точку A, вектор $\vec{e}_2$ по касательной к линии, сопряженной фокальной линии $\omega^2=0$. В этом репере уравнение параболы $\mathcal{F}$ и система уравнений Пфаффа конгруэнции P имеют соответственно вид (1) и (2):

$$\begin{cases}(x^1)^2-2px^3=0, \quad p\neq 0,\\ x^2=0;\end{cases} \qquad (1)$$

$$\frac{dp}{p}=p_1\omega^1+p_2\omega^2,$$

$$\omega_1^1=-\frac{1}{8}\{(3a+c)\omega^1+(3b+e)\omega^2\}, \qquad (2)$$

$$\omega_1^2=f\omega^1+g\omega^2,$$

$$\omega_1^3=\omega^1,$$

$$\omega_2^1=(f-b)\omega^1+(g-c)\omega^2,$$

$$\omega_2^2=\frac{1}{8}\{(a+3c)\omega^1+(b+3c)\omega^2\},$$

$$\omega_2^3=-\omega^2, \qquad (2)$$

$$\omega_3^1=h\omega^1+k\omega^2,$$

$$\omega_3^2=\tau\omega^1+s\omega^2, \quad \omega^3=0.$$

Определение 1. Точка A тогда и только тогда является фокальной точкой k-порядка, когда ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases}\mathcal{F}=0, & x^2=0,\\ d\mathcal{F}=0, & dx^2=0,\\ d^2\mathcal{F}=0, & d^2x^2=0,\\ \dots & \dots\\ d^k\mathcal{F}=0, & d^kx^2=0\end{cases}$$

вдоль любого направления $\omega^i=t^i\tau\ (i=1,2)$.

Определение 2. Конгруэнцией $B^k(A)$ ($k\geqslant 2$) называется конгруэнция парабол P, если точка A является фокальной точкой k-порядка.

Из определений 1 и 2 следует, что конгруэнции $B^2(A)$ и $B^3(A)$ характеризуются соотношениями (3) и (4) соответственно

$$p=1, \quad f=g=s=0, \qquad (3)$$

$$p=1, \quad a=b=f=g=\tau=s=0. \qquad (4)$$

Анализируя систему (2) при условиях (3) и (4), приходим к заключению, что

1/ конгруэнции $B^2(A)$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов;

2/ конгруэнции $B^3(A)$ существуют и определяются с произволом трех функций одного аргумента;

3/ если фокальная точка A третьего порядка описывает невырождающуюся фокальную поверхность, то она является фокальной точкой произвольного порядка α $(\alpha \geqslant 4)$;

4/если точка A_* -фокальная точка второго (третьего порядка),то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции A;

5/для конгруэнции $B^3(A)$ справедливы следующие утверждения:

а/прямолинейные конгруэнции $\{A, \vec{e}_i\}, i=1,2$ -цилиндрические;б/ у прямолинейной конгруэнции $\{A, \vec{e}_3\}$ сдвоенный фокус совпадает с характеристической точкой плоскости $x^1 = 0$,а фокальная сеть линий - координатная; в/характеристическая точка плоскости параболы совпадает с точкой A, г/существует расслоение от конгруэнции парабол к конгруэнции $\{A, \vec{e}_2\}$.

Список литературы

1.Малаховский В.С. Конгруэнции парабол в эквиаффинной геометрии.-Тр.Томского ун-та,т.161,1962 ,с.76-86.

2.Вербицкая Л.А. Об одном классе конгруэнций парабол.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград,1980,вып.11,с.17-21.

3.Малаховская С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с невырождающимися фокальными многообразиями высших порядков.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.13.Калининград,1982,с.60-64.

4.Шмелева С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик в P_3 с двумя фокальными многообразиями второго порядка.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.15,Калининград,1984,с.115-120.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.Т.Ивлев

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕНЗОРА РИЧЧИ РАССЛОЕНИЯ $P_{n,n}$

В статье дается геометрическая интерпретация одного тензора,аналогично тензору Риччи пространства аффинной связности [1](с.151).

1.Рассматривается пространство $P_{n,n}$ проективной связности C с точечным образующим элементом A_0 в смысле [2].Компоненты тензора кручения-кривизны $R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij}$ $(\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0,1,\dots,n;\ i,j,k,\ell = 1,2,\dots,n)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (см.(2) в [2]):

$$\nabla R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij} + 2R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij}\omega^0_0 = R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}ij\ell}\,\omega^{\ell}_0, \quad R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}(ij)} = 0, \quad R^{\mathcal{K}}_{\mathcal{J}(ij)\ell} = 0. \qquad (1)$$

2.Рассматриваются на секущей n-поверхности $\mathfrak{M}_n$ расслоения $P_{n,n}$ следующие величины,удовлетворяющие в силу (1) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$a_{i0} = a_{0i} = R^{k}_{0ik}, \quad a_{ij} = \frac{1}{2} R^{k}_{(ij)k}, \qquad (2)$$

$$\nabla a_{i0} + a_{i0}\omega^0_0 = a_{0ij}\,\omega^j_0, \quad \nabla a_{ij} + 2a_{ij}\omega^0_0 - a_{0(i}\omega^0_{j)} = a_{ijk}\,\omega^k_0, \qquad (3)$$

$$a_{0ij} = R^{k}_{0ikj} + R^{k}_{jki} - R^{0}_{0ij}, \quad a_{ijk} = \frac{1}{2} R^{\ell}_{(ij)\ell k} - \frac{1}{2} R^{0}_{(ij)k}.$$

Из (3) следует,что величины a_{0i} образуют один раз ковариантный тензор в смысле Г.Ф.Лаптева [3],а величины a_{ik} -дважды ковариантный симметрический тензор.

Рассмотрим в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}$ некоторую точку $Y = y^{\mathcal{J}} A_{\mathcal{J}}$ и гиперплоскость Γ_{n-1} ,определяемую в локальных слоевых координатах уравнением:

$$x_i\, x^i = 0. \qquad (4)$$

Из формул (8) статьи [2] и уравнения (4) следует,что каждой Y и гиперплоскости Γ_{n-1} в слое P_n точки A_0 отвечает линейный гиперкомплекс $K_{n-1}(\Gamma_{n-1}, Y)$,определяемый уравнением:

$$x_i y^k R^i_{kjk} u^j v^k = 0. \qquad (5)$$

Геометрически этот гиперкомплекс представляет собой совокупность всех таких пар линейно-независимых направлений $u=(A_0 A_i)u^i$ и $v=(A_0 A_j)v^j$, что $\overset{*}{R}(u,v)Y \in \Gamma_{n-1}$, где $\overset{*}{R}(u,v)$ -проективитеты слоя P_n в себя в смысле [2] (см.(8)). Из (5) следует, что направлению A_0Y в нуль-системе линейного гиперкомплекса $\mathcal{K}_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y)$ отвечает гиперплоскость:

$$H_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y) \ni A_0 \; ; \; x_i y^k R^i_{kjq} y^j z^q = 0. \qquad (6)$$

Итак, каждой точке $Y=y^j A_j$ в слое P_n отвечает проективитет

$$\Pi(Y) = \{ y^k R^i_{kjq} y^j \} \qquad (7)$$

слоя P_n в себя, который гиперплоскость $\Gamma_{n-1} \ni A_0$ переводит в гиперплоскость $H_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y)$. Множество всех точек Y в слое P_n точки $A_0 \in \mathcal{M}_n$, которым отвечают проективитеты $\Pi(Y)$, являющиеся проективитетами W [4], в силу (7) и (2) образует гиперквадрику $Q^0_{n-1,2} \ni A_0$, определяемую уравнением

$$a_{ik} y^i y^k = 0. \qquad (8)$$

Отсюда заключаем, что гиперплоскость Γ^0_{n-1} в слое P_n точки A_0 расслоения $P_{n,n}$, определяемая в слоевых проективных координатах уравнением:

$$a_{0i} x^i = 0, \qquad (9)$$

является полярой точки A_0 относительно гиперквадрики $Q^0_{n-1,2}$. Такова геометрическая характеристика величин (2).

3. Расслоением $P^0_{n,n}$ называется расслоение $P_{n,n}$, у которого гиперплоскость Γ^0_{n-1} является неопределенной. Из (2) и (9) следует, что это расслоение характеризуется условиями:

$$a_{0i} = 0, \Longleftrightarrow \quad R^k_{0ik} = 0, \qquad (10)$$

которые с учетом (3) приводятся к соотношениям:

$$R^k_{0ikj} = R^k_{jik} + R^0_{0ij}. \qquad (11)$$

Из (3) в силу (10) следует, что величины a_{ij}, определенные по формулам (2), в случае расслоения $P^0_{n,n}$ образуют дважды ковариантный симметрический тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [3]. Из (8) и (10) вытекает следующая

Т е о р е м а 1. Расслоение $P^0_{n,n}$ есть расслоение $P_{n,n}$, у которого гиперквадрика $Q^0_{n-1,2} \subset P_n$ является гиперконусом с вершиной A_0.

4. Рассмотрим в случае расслоения $P^0_{n,n}$ следующие величины, удовлетворяющие в силу (1) соответствующим дифференциальным уравнениям:

$$G_{ij} = R^k_{ijk}, \qquad (12)$$

$$\nabla G_{ij} + 2\, G_{ij}\,\omega^0_0 = G_{ijk}\,\omega^k_0, \quad G_{ijk} = R^\ell_{ij\ell k} - R^0_{ijk}. \qquad (13)$$

Отсюда заключаем, что величины (12), не симметричные в общем случае по нижним индексам, образует дважды ковариантный тензор в смысле Г.Ф. Лаптева [3]. Этот тензор, следуя [1](стр.151), будем называть тензором Риччи расслоения $P^0_{n,n}$. Дадим геометрическую интерпретацию этому тензору.

Из (5) следует, что каждой точке Y и направлению $u=(A_0 A_j)u^j$ отвечает проективитет слоя P_n точки A_0 в себя:

$$\overset{*}{\Pi}(y,u) = \{ y^j u^k R^i_{jk\ell} \}, \qquad (14)$$

который гиперплоскость Γ_{n-1} переводит в гиперплоскость в слое P_n точки A_0 расслоения $P^0_{n,n}$, отвечающую направлению u в нуль-системе линейного гиперкомплекса $K_{n-1}(\Gamma_{n-1},Y)$. Поэтому в силу (11) и (12) каждому направлению $u=(A_0 A_i)u^i$ в слое точки A_0 расслоения $P^0_{n,n}$ отвечают две гиперплоскости

$$\overset{1}{G}_{n-1}(u):\; G_{ij}\, u^i v^j = 0, \quad \overset{2}{G}_{n-1}(u):\; G_{ij}\, u^j v^i = 0. \qquad (15)$$

Здесь гиперплоскость $\overset{1}{G}_{n-1}(u)\{\overset{2}{G}_{n-1}(u)\}$, отвечающая направлению u, представляет собой совокупность всех таких направлений $v=(A_0 A_i)v^i$ в слое P_n точки A_0, которым отвечают проективитеты $\overset{*}{\Pi}(v,u)\{\overset{*}{\Pi}(u,v)\}$, являющиеся проективитетами W в смысле [4]. В общем случае, гиперплоскости $G^1_{n-1}(u)$ и $G^2_{n-1}(u)$, отвечающие любому направлению u, не совпадают друг с другом. Совокупность всех направлений x в слое P_n точки A_0 расслоения $P^0_{n,n}$, которым отвечают гиперплоскости $G^1_{n-1}(x)$ или $G^2_{n-1}(x)$, проходящие через x, в силу (15),(12),(10) и (2) определяется уравнением

$$Q^0_{n-1,2}: \quad a_{ij}x^i x^j = 0, \qquad (16)$$

и образует гиперконус $Q^0_{n-1,2}$. С другой стороны, линейный гиперкомплекс C^0_{n-1} в слое P_n точки A_0 расслоения $P^0_{n,n}$, определяемый уравнением

$$c_{ij}x^i y^j = 0, \qquad (17)$$

где

$$c_{ij} = \frac{1}{2} G_{[ij]}, \qquad (18)$$

геометрически характеризуется тем, что каждому направлению $x = (A_0 A_i)x^i$ в нуль-системе этого линейного гиперкомплекса отвечает гиперплоскость, проходящая через x и $G^1_{n-1}(x) \cap G^2_{n-1}(x)$. Таким образом, симметрическая и кососимметрическая части тензора Риччи G_{ij} расслоения $P^0_{n,n}$ определяют в слое P_n точки A_0 гиперконус $Q^0_{n-1,2}$, определяемый уравнением (16), и линейный гиперкомплекс, определяемый уравнением (17) с учетом (18).

Заметим, что пространство аффинной связности является частным случаем расслоения $P^0_{m,n}$.

Список литературы

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976.

2. Ивлев Е.Т. О тангенциально-вырожденных расслоениях. В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 15. Калининград, 1984, с.32-38.

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр. Моск. матем. об-ва, I, 1953, с.275-382.

4. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б. К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. - 3-я научная конф. по матем. и мех. Вып. 1. Томск, 1973, с.50-52.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

О.В. Казнина

ОБ ОТОБРАЖЕНИИ СЕТЕЙ В ЗАДАЧЕ ФУБИНИ-ЧЕХА

В работе рассмотрено одно из свойств сетей Σ_p и $\overline{\Sigma}_p$, сохраняющееся в отображении $f: (V_p \subset E_n) \to (\overline{V}_p \subset E_{p+\tau})$. Найдены признаки некоторых свойств сетей $\Sigma_p \subset V_p$ и $\overline{\Sigma}_p \subset \overline{V}_p$.

1. В евклидовом пространстве E_n к гладкой поверхности V_p присоединим в каждой точке $x \in V_p$ репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, $(i,j = 1,\dots,p;\ \alpha,\beta = p+1,\dots,n)$ так, что векторы $\vec{e}_i$ образуют базис касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности V_p, $|\vec{e}_i| = 1$, а $\vec{e}_\alpha$ – базис нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ к V_p, причем $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Деривационные формулы репера R^x имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega^j_i \vec{e}_j + \omega^\alpha_i \vec{e}_\alpha, \quad d\vec{e}_\alpha = \omega^i_\alpha \vec{e}_i + \omega^\beta_\alpha \vec{e}_\beta. \qquad (1)$$

Рассмотрим отображение $f: (V_p \subset E_p) \to (\overline{V}_p \subset E_{p+\tau})$, где поверхность $\overline{V}_p$ получена проектированием поверхности V_p в фиксированную плоскость $E_{p+\tau}$ вдоль ортогонально дополнительной к ней плоскости $E_{n-(p+\tau)}$. Плоскость $E_{p+\tau}$ задана точкой σ и векторами $\vec{e}_{\hat{\alpha}}$ $(\hat{\alpha},\hat{\beta} = p+\tau+1,\dots,n)$ такими, что $\vec{e}_{\hat{\alpha}} \cdot \vec{e}_{\hat{\beta}} = \delta_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$. Присоединим к поверхности $\overline{V}_p$ в каждой точке $x_1 = f(x)$ репер $R^{x_1} = \{x_1, \vec{a}_i, \vec{a}_\tau\}$, $(\tau,\sigma = p+1,\dots,p+\tau)$, где

$$\vec{a}_i = \vec{e}_i - h^{\hat{\alpha}}_i \vec{e}_{\hat{\alpha}}, \quad \vec{a}_\tau = \vec{e}_\tau. \qquad (*)$$

Деривационные формулы репера R^{x_1} запишутся в виде

$$d\vec{x}_1 = \overline{\omega}^i \vec{a}_i, \quad d\vec{a}_i = \overline{\omega}^j_i \vec{a}_j + \overline{\omega}^\tau_i \vec{e}_\tau,$$
$$d\vec{e}_\tau = \overline{\omega}^i_\tau \vec{a}_i + \overline{\omega}^\sigma_\tau \vec{e}_\sigma. \qquad (2)$$

Дифференциальные уравнения отображения f имеют вид:

$$\overline{\omega}^i = \omega^i. \qquad (3)$$

Пользуясь соотношениями $(*)$, находим:

$$\overline{\omega}^j_i = \omega^j_i + \omega^{\hat\alpha}_i a^j_{\hat\alpha}, \qquad (4)$$

где $a^j_{\hat\alpha}$ -координаты вектора $\vec{a}_{\hat\alpha} = \vec{np}_{E_{p+\tau}} \vec{e}_{\hat\alpha}$ в репере R^{x_1}.
Аналогично, получаем

$$\overline{\omega}^\tau_i = \omega^\tau_i. \qquad (5)$$

Часть компонент второго тензора $b^\alpha_{ij} = \{b^\tau_{ij}, b^{\hat\alpha}_{ij}\}$ поверхности V_p и компоненты $\overline{b}^\tau_{ij}$ второго тензора поверхности $\overline{V}_p$ связаны следующим образом:

$$\overline{b}^\tau_{ij} = b^\tau_{ij}. \qquad (6)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3) и разрешая полученное по лемме Картана, находим:

$$\overline{\omega}^i_j - \omega^i_j = h^i_{jk}\omega^k, \quad h^i_{jk} = h^i_{kj}, \qquad (7)$$

где функции h^i_{jk} образуют тензор типа (I,2).
Сравнивая (4) и (7), получим выражения:

$$h^i_{jk} = b^{\hat\alpha}_{jk} a^i_{\hat\alpha}. \qquad (8)$$

2. Пусть на поверхности V_p задана сеть Σ_p, тогда на $\overline{V}_p$ определится ее образ-сеть $\overline{\Sigma}_p$. Векторы $\vec{e}_i$ будем брать на касательных к линиям сети Σ_p в точке x. Пусть сеть Σ_p является сопряженной. Рассмотрим линию ω^{j_0} сети Σ_p, $\omega^{j_0} \neq 0$, $\omega^k = 0$, $k \neq j_0$, индекс j_0 -фиксирован, обозначим касательный к ней вектор в точке x через $\vec{t} = t^{j_0}\vec{e}_{j_0}$, $t^{j_0} \neq 0$. Непосредственно из (8) следует: а/направление, заданное вектором $\vec{t}$, f-сопряжено с гиперплоскостью $T_{p-1} = [\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{j_0-1}, \vec{e}_{j_0+1}, \dots, \vec{e}_p]$ касательной плоскости $T_p(x)$; б/ если линия ω^{j_0} асимптотическая, то направление, заданное вектором $\vec{t}$, является f-главным (обратное в общем случае неверно).

Пусть направление, заданное вектором $\vec{t} = t^{j_0}\vec{e}_{j_0}$, f-сопряжено с любым направлением, определяемым вектором $\vec{\eta} = \eta^k \vec{e}_k$, не лежащим в гиперплоскости $T_{p-1}(x)$, тогда:

$$h^i_{j_0 k} t^{j_0}\eta^k = 0 \ (i \neq j_0) \Rightarrow h^i_{j_0 j_0} = 0 \ (i \neq j_0),$$
$$h^{j_0}_{j_0 k} t^{j_0}\eta^k = 0 \Rightarrow h^{j_0}_{j_0 j_0} = 0.$$

Значит, направление, заданное вектором $\vec{t}$, является f-главным. Верно и обратное. Следовательно: направление, касательное к линии ω^{j_0} сопряженной сети Σ_p является f-главным тогда и только тогда, когда оно f-сопряжено с любым направлением плоскости $T_p(x)$, не лежащим в плоскости $T_{p-1}(x)$.

3. Известно , что в рассматриваемом отображении образом сопряженной сети $\Sigma_p \subset V_p$ является сопряженная сеть $\overline{\Sigma}_p \subset \overline{V}_p$. Обозначим компоненты метрических тензоров поверхностей V_p и $\overline{V}_p$ соответственно через $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$, $\overline{\gamma}_{ij} = \vec{a}_i \vec{a}_j$. Используя (*), найдем

$$\overline{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j. \qquad (9)$$

Пусть сеть Σ_p -ортогональна, тогда $\gamma_{ij} = 0 \ (i \neq j)$. В каком случае сеть линий кривизны $\Sigma_p \subset V_p$ отображается в сеть линий кривизны $\overline{\Sigma}_p \subset \overline{V}_p$? Имеем

$$\overline{\gamma}_{ij} = 0 \ (i \neq j) \Leftrightarrow \sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j = 0 \quad (i \neq j).$$

Рассмотрим проекции векторов $\vec{e}_i$ на $E_{n-(p+\tau)}$ вдоль $E_{p+\tau}$ и подсчитаем скалярное произведение:

$$\vec{np}_{E_{n-(p+\tau)}} \vec{e}_i \cdot np_{E_{n-(p+\tau)}} \vec{e}_j = h^{\hat\alpha}_i \vec{\ell}_{\hat\alpha} h^{\hat\beta}_j \vec{\ell}_{\hat\beta} \quad (i \neq j),$$

или

$$\vec{np}_{E_{n-(p+\tau)}} \vec{e}_i \cdot np_{E_{n-(p+\tau)}} \vec{e}_j = \sum_{\hat\alpha} h^{\hat\alpha}_i h^{\hat\alpha}_j \quad (i \neq j)$$

Следовательно, справедливо утверждение:

Сеть линий кривизны Σ_p проектируется в сеть линий кривизны $\overline{\Sigma}_p \subset \overline{V}_p$ тогда и только тогда, когда ортогональны проекции векторов $\vec{e}_i$, касательных к линиям сети Σ_p, на пространство $E_{n-(p+\tau)}$ и в каждой точке $x \in V_p$ векторы $\vec{b}_{ij}$ $(i \neq j)$ лежат в плоскости $N_\tau(x)$.

4. Рассмотрим векторы $\vec{b}_{ij} = b^\alpha_{ij} \cdot \vec{e}_\alpha \ (i \neq j)$. Пусть $\vec{b}_{ij} \subset N_{(n-p)-\tau}(x)$, тогда $\vec{b}_{ij} = b^{\hat\alpha}_{ij}\vec{e}_{\hat\alpha}$, $b^\tau_{ij} = 0 \ (i \neq j)$. Следовательно, в силу (6), получим, что сеть $\overline{\Sigma}_p$ является сопряженной. Верно и обратное. Итак:

Сеть $\overline{\Sigma}_p$ является сопряженной тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in V_p$ векторы $\vec{b}_{ij}$ $(i \neq j)$ лежат в плоскости $N_{(n-p)-\tau}(x)$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

вып. I6 1985

УДК 514.75

С.В. Киреева

О ГЕОМЕТРИИ ПАРЫ СЕТЕЙ

В данной работе рассматривается в проективном пространстве отображение $g : \Omega \to \overline{\Omega}$, в котором каждая линия двойная, при этом области $\Omega < P_n$ и $\overline{\Omega} < P_n$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей.

Пусть задано отображение $g : (\Omega < P_n) \to (\overline{\Omega} < P_n) \mid A \to B \neq A$, в котором каждая линия двойная [I]. Области Ω и $\overline{\Omega}$ нормализованы одним и тем же семейством гиперплоскостей

$$A \to \Pi_{n-1}(A), \tag{1}$$
$$B \to \Pi_{n-1}(B), \tag{2}$$

$\Pi_{n-1}(A) = \Pi_{n-1}(B)$. Мы будем рассматривать только такое отображение g, для которого касательные к соответствующим двойным линиям $\ell, \overline{\ell}$ пересекаются в точке, которая принадлежит нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$.

В области Ω задана сеть Σ_n, $\overline{\Sigma}_n$ - образ сети в отображении g. К областям Ω и $\overline{\Omega}$ присоединены подвижные реперы $\mathcal{R}^A = \{A, A_i\}$; $\mathcal{R}^B = \{B, B_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где A_i, B_i - нормальные точки [3] касательных к линиям ω^i, $\overline{\omega}^i$ сетей Σ_n, $\overline{\Sigma}_n$. Для отображения g потребуем, чтобы инвариантные точки N_i^i ($i = 1, \dots, n$) [4], лежащие на прямой (AB), совпадали с точкой $C = (AB) \cap \Pi_{n-1}(A)$ - точкой пересечения прямой (AB) и нормализующей плоскости $\Pi_{n-1}(A)$. Тогда точки B, B_i в репере $\mathcal{R}^A$ имеют следующие представления

$$\vec{B} = \vec{A} + \gamma^i \vec{A}_i, \quad \vec{B}_i = \delta_i^j \vec{A}_j \tag{3}$$

В работе индексы $i, j, k, m, \dots$ пробегают значения I,2,... n. Связь между формами реперов $\mathcal{R}^A$, $\mathcal{R}^B$ выражается следующими равенствами:

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \quad \overline{\omega}_i^0 = \omega_i^0, \qquad \overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0, \quad \overline{\omega}_j^i = \omega_j^i - \gamma^i \omega_j^0. \tag{4}$$

Формулы (4) являются частным случаем формул (4), (10), (11), (12), выведенных в работе [4], в предположении, что функции $\gamma_i^j = \delta_i^j$. В той же работе [4] даны разложения дифференциалов $d\gamma_i^j$:

$$d\gamma_j^i - \gamma_k^i \omega_j^k + \gamma_j^k \omega_k^i - (\gamma^k \gamma_j^i + \gamma^i \gamma_j^k)\omega_k^0 = \gamma_{jm}^i \omega^m; \ \gamma_{jm}^i = \gamma_{mj}^i. \tag{5}$$

В нашем случае $\gamma_j^i = \delta_j^i$ и формулы (5) примут вид:

$$-\delta_j^i \gamma^k \omega_k^0 - \gamma^i \omega_j^0 = \gamma_{jm}^i \omega^m; \quad \gamma_{jm}^i = \gamma_{mj}^i. \tag{5a}$$

В данной работе мы будем рассматривать такое отображение g, для которого все функции γ^i в разложении точки B не равны нулю: $\gamma^i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Так как области $\Omega, \overline{\Omega}$ нормализованы и в них заданы сети $\Sigma_n, \overline{\Sigma}_n$, то формы $\omega_i^0, \overline{\omega}_i^0, \omega_i^j, \overline{\omega}_i^j$ $(i \neq j)$ - главные:

$$\omega_i^0 = a_{ik}^0 \omega^k, \quad \omega_i^j = a_{ik}^j \omega_0^k, \qquad \overline{\omega}_i^0 = \overline{a}_{ik}^0 \omega^k, \quad \overline{\omega}_i^j = \overline{a}_{ik}^j \omega_0^k. \quad (i \neq j) \tag{6}$$

Из формул (5a), (6) и (4) следует, что

$$a_{jm}^0 = a_{mj}^0, \quad \overline{a}_{jm}^0 = \overline{a}_{mj}^0, \tag{7}$$
$$\gamma^k \omega_k^0 = 0. \tag{8}$$

Равенства (7) означают, что нормализации (1), (2) эквиаффинные.

Формы ω_k^0 связаны одним соотношением (8), поэтому множество $\{\Pi_{n-1}(A)\}$ нормализующих плоскостей существенно зависит от ($n-1$) параметра.

Если при вычислении дифференциала dC [4] точки C воспользоваться формулой (8) и учесть, что $\gamma_i^j = \delta_i^j$, то $d\vec{C} = \varphi \vec{C}$ и, следовательно, множество $\{\Pi_{n-1}(A)\}$ нормализующих плоскостей образует связку с центром в точке С. Причем, если точка А смещается в направлении $(AC)=(AB)$, то нормализующая плоскость $\Pi_{n-1}(A)$ остается неподвижной. Тогда, как известно, направление (AB) называется особым для нормализации (1). Направление (BA) тоже будет особым для нормализации (2).

Т е о р е м а 1. Отображение g обладает следующими свойствами:

1) ранги нормализаций $A\to\Pi_{n-1}(A)$; $B\to\Pi_{n-1}(A)$ в общем случае равны $n-1$; 2) семейство нормализующих плоскостей образует связку с центром в точке С; 3) нормализации (1), (2) порождают эквиаффинные связности $\nabla,\overline{\nabla}$. Риманову связность нормализации порождать не могут; 4) тензоры кривизны и Риччи связностей ∇, $\overline{\nabla}$ совпадают; 5) распределения Δ_1, $\overline{\Delta}_1$ такие, что $\Delta_1(A)=(AB)$; $\overline{\Delta}_1(B)=(BA)$ являются особыми для нормализаций (1), (2); 6) если соприкасающиеся плоскости линий $\omega^i,\overline{\omega}^i$ ($i=1,2,\ldots,n$) сетей $\Sigma_n,\overline{\Sigma}_n$ совпадают, то множество этих плоскостей образует пучок с осью (AB), линии ω^i, $\overline{\omega}^i$ сетей $\Sigma_n,\overline{\Sigma}_n$ – плоские, лежащие в плоскостях (AA_iB).

Рассмотрим псевдофокусы F^j_i ($\overline{F}^j_i$) на касательных (AA_i) ((BB_i)) к линиям ω^i ($\overline{\omega}^i$) сети Σ_n ($\overline{\Sigma}_n$):

$$\vec{F}^j_i=-a^j_{ij}\vec{A}+\vec{A}_i \qquad (\vec{\overline{F}}^j_i=-(a^j_{ij}-\gamma^j a^0_{ij})\vec{B}+\vec{B}_i).$$

Точка $\mathcal{K}^j_i=(AB)\cap(F^j_i\overline{F}^j_i)$ будет совпадать с точкой С тогда и только тогда, когда направления $(AA_i),(AA_j)$ сопряжены относительно конуса Риччи. При этом прямые $(F^j_iF^i_j)$, $(\overline{F}^j_i\overline{F}^i_j)$ пересекаются в точке S_{ij}: $\vec{S}_{ij}=a^i_{ji}\vec{A}_i-a^j_{ij}\vec{A}_j$. Если направления $(AA_i),(AA_j),(AA_k)$ (i,j,k – различные) попарно сопряжены относительно конуса Риччи, то

1) $\Delta S_{ij}S_{jk}S_{ki}$ перспективен $\Delta A_iA_jA_k$ тогда и только тогда, когда относительный инвариант $a^j_{ij}a^k_{jk}a^i_{ki}+a^k_{ik}a^j_{kj}a^i_{ji}$ равен нулю; 2) точки S_{ij},S_{jk},S_{ki} лежат на одной прямой, если относительный инвариант $a^j_{ij}a^k_{jk}a^i_{ki}-a^k_{ik}a^j_{kj}a^i_{ji}$ равен нулю.

Можно показать, что справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 2. n-сопряженная система двойных линий при отображении g перейдет в n-сопряженную систему тогда и только тогда, когда касательные к линиям сети Σ_n сопряжены относительно конуса Риччи. При этом фокусы $F^j_i,\overline{F}^j_i$ соответствуют в гомографии, которая определяется парой реперов $\mathcal{R}^A$, $\mathcal{R}^B$. Прямые, соединяющие соответствующие фокусы $F^j_i,\overline{F}^j_i$, принадлежат связке с центром в неподвижной точке С.

Т е о р е м а 3. Геодезическая сеть Σ_n двойных линий перейдет при отображении g в геодезическую тогда и только тогда, когда сеть Σ_n – характеристическая. При этом все прямые (AA_i) лежат на конусе Риччи связности ∇.

Список литературы

1.Базылев В.Т. Многомерные сети двойных линий.– В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 1975,вып.6,с.19-25.

2.Базылев В.Т. Многомерные поверхности,сети и дифференцируемые отображения пространств.Уч.зап.МГПИ им. В.И.Ленина,1970,№ 374,т.1,с.28-40.

3.Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., Наука,1976.

4.Киреева С.В. О паре сетей.Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Калининград,1983, вып.14, с.26-31.

3 Зак. 1401

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

М.В. К р е т о в

К ГЕОМЕТРИИ КОМПЛЕКСОВ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

В данной работе в трехмерном аффинном пространстве исследуются подклассы $\overline{K}_3^{01}$ -изученных в работе [1] комплексов (трехпараметрических семейств) K_3^{01} эллипсоидов q, с которыми ассоциируются [2] дифференцируемые отображения, не пересекающиеся с классами $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_æ}$, $æ=\overline{1,6}$; [3]. На основе полученных геометрических свойств многообразий $\overline{K}_3^{01}$ найдено их безынтегральное представление.

В статье используются обозначения, введенные ранее в работе [1]. Отнесем эллипсоид q к каноническому реперу $R=\{A,\overline{e}_J\}$; $J, j, \ldots=\overline{1,3}$, который геометрически характеризуется следующим образом: вершина A помещается в центр C квадрики q, векторы $\overline{e}_J$ сопряжены, и концы A_J этих векторов лежат на эллипсоиде q и принадлежат его фокальному многообразию [4]; при этом индикатриса вектора $\overline{e}_1$ является прямой, параллельной вектору $\overline{e}_1$.

О п р е д е л е н и е. Назовем комплекс K_3^{01} комплексом $\overline{K}_3^{01}$, если индикатриса вектора $\overline{e}_2-\overline{e}_3$ является прямой, параллельной вектору $\overline{e}_1$.

Из определения комплекса $\overline{K}_3^{01}$ следует, что $b=0$, поэтому его система дифференциальных уравнений Пфаффа будет иметь вид:

$$\omega_J^J=-\omega^J,\quad \omega_1^2=\omega_1^3=0,\quad \omega_2^1=\beta\omega^3,\quad \omega_3^1=\beta\omega^2,$$
$$\omega_2^3=-\omega^3,\quad \omega_3^2=-\omega^2,\quad d\ln\beta=\omega^1+\omega^2+\omega^3,\qquad (1)$$

где по J нет суммирования.

Анализируя систему (1), убеждаемся в том, что комплексы $\overline{K}_3^{01}$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений с произволом десяти постоянных.

Обозначим асимптотические линии на поверхности (A_1), ассоциированной с комплексом $\overline{K}_3^{01}$, символами γ_1 и γ_2, которые в репере R задаются соответственно уравнениями:

$$\omega^2=0,\quad \omega^3=0.\qquad (2)$$

Уравнения φ-основной и ψ-основной гиперплоскостей [3], ассоциированных с многообразием $\overline{K}_3^{01}$, соответственно, имеют вид:

$$4X^1+5X^2+5X^3-4=0,\qquad (3)$$
$$3(3\beta^4+10\beta^2+8)X^1+(5\beta^4+24\beta^2+32)X^2+$$
$$+(5\beta^4+24\beta^2+32)X^3=4(\beta^2+2)(\beta^2+4).\qquad (4)$$

Используя уравнения (1)-(4), можно доказать, что имеет место

Т е о р е м а. Комплексы $\overline{K}_3^{01}$ обладают следующими геометрическими свойствами: 1/ прямые $\ell=(A_2,\overline{e}_1)$, $m=(A,\overline{e}_2)$ и $\overline{\ell}=(A_3,\overline{e}_1)$ -неподвижны; 2/ при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_1 прямая $\widetilde{m}=(A_1,\overline{e}_3)$ и координатная плоскость $(A,\overline{e}_1,\overline{e}_3)$ неподвижны; 3/ поверхность (A_3) вырождается в прямую, параллельную вектору $\overline{e}_1$, 4/ точка $P=A+\overline{e}_1+\overline{e}_2$ неподвижна при движении точки A_1 вдоль асимптотической линии γ_2; 5/ класс отображений, порожденный комплексом $\overline{K}_3^{01}$, не пересекается с классами $f_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_æ}$.

Найденные геометрические свойства комплекса $\overline{K}_3^{01}$ позволяют построить его безынтегральное представление. Для этого проводим следующие построения: 1/ зададим произвольную прямую ℓ и фиксируем на ней точку P; 2/ проводим прямую $\overline{\ell}$, параллельную прямой ℓ, и выбираем на ней точку A_3; 3/ задаем плоскость π, проходящую через прямую ℓ и не содержащую прямую $\overline{\ell}$; 4/ проводим на плоскости π через точку P прямую m; 5/ в плоскости π выбираем точку A, неинцидентную прямым ℓ и m, через эту точку проводим прямые, параллельные ℓ и m. В пересечении с прямыми m и ℓ получим точки A_1 и A_2.

С текущей точкой плоскости π совмещаем подвижной репер $\widetilde{R}=\{0,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ такой, что $0\equiv A$ и $\bar{e}_J=\overline{AA}_J$. Образующий элемент комплекса - эллипсоид q, соответствующий центру A, однозначно определяется точками A_J, центром A и сопряженными направлениями $\overline{AA}_J$. При движении точки A в плоскости π получается двухпараметрическое семейство эллипсоидов q, а при перемещении точки A_3 по прямой $\widetilde{\ell}$ получается комплекс квадрик q, который мы назовем комплексом $\overline{K}^{o1}_{3*}$.

Можно доказать, что построенный таким образом комплекс эллипсоидов q совпадает с комплексом $\overline{K}^{o1}_3$, т.е. определяется в репере $\widetilde{R}$ системой дифференциальных уравнений Пфаффа (1).

Список литературы

1. Кретов М.В. О некоторых подклассах комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве.-Калининградский ун-т, Калининград, 1981, 22 с., библиограф. 17 назв. (Рукопись деп. ВИНИТИ АН СССР 17 ноября 1981г., № 5272-81 Деп.)

2. Кретов М.В. Дифференциальная геометрия соответствий, ассоциированных с комплексами эллипсоидов.-Тезисы докладов УI Прибалтийской геометрической конференции. Таллин, 1984, с.66.

3. Кретов М.В. О специальных подклассах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1984, вып. 15, с.49-54.

4. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. Тр. геометрич. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, т.6, с.113-134.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

В.С. М а л а х о в с к и й

СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ ПОЛЕМ ГИПЕРКВАДРИК

Рассматривается n-мерное гладкое многообразие M_n, в каждом касательном пространстве $\mathcal{D}^1_n$ которого задана центральная невырожденная гиперквадрика Q.

Исследуются структуры, порождаемые на M_n полем гиперквадрик Q.

Пусть ω^i -базовые 1-формы гладкого многообразия M_n. Имеем [1]:

$$
\begin{aligned}
&d\omega^i=\omega^j\wedge\omega^i_j,\\
&d\omega^j_i=\omega^k_i\wedge\omega^j_k+\omega^k\wedge\omega^j_{ik},\\
&d\omega^i_{i_1i_2\dots i_p}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{s!(p-s)!}\,\omega^k_{(i_1\dots i_s}\wedge\omega^j_{i_{s+1}\dots i_p)k}+\omega^k\wedge\omega^j_{i_1\dots i_pk}.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Обозначим через x^i -координаты вектора $x\in\mathcal{D}^1_n$ или, что то же, координаты точки x центроаффинного пространства $\mathcal{D}^1_n$ относительно базиса $\{e_i\}$. Имеем:

$$x=x^i\vec{e}_i. \tag{2}$$

Уравнение центральной невырожденной гиперквадрики $Q\in\mathcal{D}^1_n$ с центром

$$C=c^ie_i \tag{3}$$

запишется в виде:

$$a_{ij}x^i(x^j-2c^j)-1=0, \tag{4}$$

причем

$$\det\|a_{ij}\|\neq 0. \tag{5}$$

Формы Пфаффа

$$\nabla a_{ij} = da_{ij} - a_{kj}\,\omega^k_i - a_{ik}\,\omega^k_j, \quad \nabla c^i = dc^i + c^k\omega^i_k \tag{6}$$

являются структурными формами гиперквадрики Q. Так как на многообразии M_n задано поле геометрического объекта $\{a_{ij}, c^k\}$, то

$$\nabla a_{ij} = a_{ijk}\,\omega^k, \quad \nabla c^i = c^i_j\,\omega^j. \tag{7}$$

Продолжая систему (7), находим

$$\Delta a_{ijk} = a_{ijkh}\,\omega^h, \quad \Delta c^i_j = c^i_{jk}\,\omega^k, \tag{8}$$

где

$$\Delta a_{ijk} = \nabla a_{ijk} - a_{hj}\,\omega^h_{ik} - a_{ih}\,\omega^h_{jk},$$
$$\Delta c^i_j = \nabla c^i_j - c^k\,\omega^i_{kj}, \tag{9}$$

причем

$$a_{ijk} = a_{jik}, \quad a_{ijkh} = a_{ijhk}, \quad c^i_{jk} = c^i_{kj}. \tag{10}$$

Уравнения (7) показывают, что многообразие M_n является римановым многообразием, на котором задано поле контравариантного вектора $\{c^i\}$.

Обозначим через a^{ij} приведенные миноры матрицы $\|a_{ij}\|$, т.е.

$$a^{ij}a_{jk} = \delta^i_k. \tag{11}$$

Объект связности Леви-Чивита $\{\Gamma^k_{ij}\}$ на многообразии задается формулой:

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}a^{kh}\,(a_{hij} + a_{hji} - a_{ijh}). \tag{12}$$

Имеем

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \tag{13}$$

$$\nabla\Gamma^k_{ij} + \omega^k_{ij} = \Gamma^k_{ijh}\,\omega^h, \tag{14}$$

где

$$\Gamma^k_{ijm} = \frac{1}{2}(a^{kh}(a_{hijm} + a_{hjim} - a_{ijhm}) - a^{kp}a^{hq}a_{pqm}(a_{hij} - a_{hji} - a_{ijh}). \tag{15}$$

Формы Пфаффа

$$\tilde{\omega}^j_i = \omega^j_i - \Gamma^j_{ik}\,\omega^k \tag{16}$$

являются формами связности, определяемой объектом [2]. Находим:

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \tilde{\omega}^i_k,$$
$$d\tilde{\omega}^j_i = \tilde{\omega}^k_i \wedge \tilde{\omega}^j_k + \frac{1}{2}R^j_{ikh}\,\omega^k \wedge \omega^h, \tag{17}$$

где

$$R^j_{ikh} = \Gamma^j_{ikh} - \Gamma^j_{ihk} + \Gamma^p_{ik}\Gamma^j_{hp} - \Gamma^p_{ih}\Gamma^j_{kp} \tag{18}$$

–тензор кривизны риманова пространства M_n.

Рассмотрим систему величин

$$F^j_i = c^j_i + c^k\,\Gamma^j_{ik}. \tag{19}$$

Имеем

$$dF^j_i = F^j_{ik}\,\omega^k + F^j_k\,\omega^k_i - F^k_i\,\omega^j_k, \tag{20}$$

где

$$F^j_{ik} = c^j_{ik} + c^h_k\,\Gamma^j_{ih} + c^h\,\Gamma^j_{hik}. \tag{21}$$

Следовательно $\{F^j_i\}$ –аффинор. Он определяет на многообразии M_n аффинную структуру.

Вектор

$$f^i = c^j F^i_j \tag{22}$$

задает в центроаффинном пространстве $\mathcal{D}^1_n$ инвариантную точку. Дважды ковариантный симметрический тензор

$$g_{ij} = a_{ik}F^k_j + a_{jk}F^k_i \tag{23}$$

задает на M_n ассоциированную риманову метрику, отличную в общем случае от метрики, определяемой тензором $\{a_{ij}\}$. Налагая дополнительные требования на аффинор $\{F^j_i\}$, мы получим различные классы гладких многообразий рассматриваемого типа. Например, если

$$F^k_i F^j_k = \varepsilon\,\delta^j_i, \quad \varepsilon^2 = 1, \tag{24}$$

то многообразие M_n оказывается наделенным структурой почти произведения (при $\varepsilon = +1$) или почти комплексной структурой (при $\varepsilon = -1$) [2].

При исследовании комплекса K гиперквадрик в аффинном пространстве A_n также возникает риманова связность Γ, не являющаяся в общем случае связностью Леви-Чивита. Выбором репера $R = \{A, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ приводим уравнение гиперквадрики Q и систему пфаффовых уравнений комплекса K соответственно к виду:

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2 - 1 = 0, \tag{25}$$

$$\omega^\alpha_\beta + \omega^\beta_\alpha = 2 b_{\beta\gamma} \omega^\gamma. \tag{26}$$

Полагая

$$\hat{\omega}^\alpha_\beta = \frac{1}{2}(\omega^\alpha_\beta - \omega^\beta_\alpha), \tag{27}$$

находим

$$d\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \hat{\omega}^\alpha_\beta + \frac{1}{2} S^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \tag{28}$$

$$d\hat{\omega}^\beta_\alpha = \hat{\omega}^\gamma_\alpha \wedge \hat{\omega}^\beta_\gamma + \frac{1}{2} R^\beta_{\alpha\gamma\eta} \omega^\gamma \wedge \omega^\eta, \tag{29}$$

где

$$S^\alpha_{\beta\gamma} = b^\alpha_{\beta\gamma} - b^\alpha_{\gamma\beta}, \quad R^\beta_{\alpha\gamma\eta} = b^\eta_{\alpha\gamma} b^\beta_{\eta\eta} - b^\gamma_{\alpha\eta} b^\beta_{\gamma\gamma} \tag{30}$$

-тензоры кручения и кривизны Γ.

Список литературы

1.Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.-Тр.геометрич. семинара ВИНИТИ АН СССР,1974,т.6,с.113-134.

2.Евтушик Л.Е.,Лумисте Ю.Г.,Остиану Н.М.,Широков А.П., Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии,т.9.Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР.М.,1979.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

М.Н. Марюков

О НЕКОТОРЫХ ЧАСТИЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ЕВКЛИДОВЫХ П-ПРОСТРАНСТВ

В данной работе рассматриваются некоторые свойства линий кривизны пары p-распределений, заданных в областях Ω и $\bar{\Omega}$ пространства E_n, между которыми установлен диффеоморфизм. Находится необходимое и достаточное условие их соответствия в отображении f.

В евклидовом пространстве E_n даны две области Ω и $\bar{\Omega}$ и диффеоморфизм $f: \Omega \to \bar{\Omega}$. Предполагается, что в области Ω задано распределение Δ_p $(1 \le p < n)$, а в области $\bar{\Omega}$ -распределение $\tilde{\Delta}_p$.

Пусть в главном нормальном пространстве N_q распределения Δ_p [2] зафиксировано поле одномерной нормали $[x, \vec{n}_0]$, где $\vec{n}_0$ -орт этой нормали. Для точки F, принадлежащей данной нормали, имеем $\vec{F} = \vec{x} + \rho \vec{n}_0$. Направления кривизны площадки $\Delta_p(x)$ относительно нормали $[x, \vec{n}_0]$ ([1],[2]) определяются требованием $d\vec{F} \in \Delta_{n-p}(x)$ при $d\vec{x} \in \Delta_p(x)$,

$$d\vec{F} \in \Delta_{n-p}(x) \quad \text{при} \quad d\vec{x} \in \Delta_p(x), \tag{1}$$

где $\Delta_{n-p}(x)$ -площадка, ортогонально дополнительная к $\Delta_p(x)$. В области Ω выберем подвижной репер $R^x = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, где единичные векторы $\vec{e}_i \in \Delta_p(x)$, $\vec{e}_\alpha = \Delta_{n-p}(x)$, причем $\vec{e}_{\alpha_0} = \vec{n}_0$ $(i = 1, \dots, p;\ \alpha = p+1, \dots, n)$. Требование (1) приводит к системе $\omega^i + \rho\, \omega^i_{\alpha_0}$. Дифференцирование тождеств $\vec{e}_{\alpha_0} \cdot \vec{e}_i = 0$ дает $\gamma_{ij} \omega^j_{\alpha_0} + \omega^{\alpha_0}_i = 0$. Отсюда следует, что формы $\omega^j_{\alpha_0}$-главные и $\omega^j_{\alpha_0} = -\gamma^{j\ell} \Lambda^{\alpha_0}_{\ell L} \omega^L$ $(L = 1, 2, \dots, n)$. Здесь $\Lambda^{\alpha_0}_{\ell L}$-подобъект первого фундаментального объекта распределения Δ_p. Учитывая, что при $d\vec{x} \in \Delta_p(x)$ формы ω^α равны нулю, для определения направлений кривизны площадки $\Delta_p(x)$ имеем систему

$$(\delta^i_j + \rho\, a^i_j)\, \omega^j = 0, \tag{2}$$

где
$$a^i_j = -\gamma^{i\ell}\Lambda^{\alpha_0}_{\ell j} \qquad (3)$$
есть аффинор. Интегральные кривые 1-распределений, определяемых собственными векторами поля этого аффинора, — p-ткань Σ_p линий кривизны распределения Δ_p относительно нормали $[x,\vec e_{\alpha_0}]$ ([1],[2]). Если в главном нормальном пространстве $\widetilde N_q$ распределения $\widetilde\Delta_p$ выбрано поле одномерной нормали $[y,\vec{\tilde n}_0]$, то аналогично можно определить p-ткань $\widetilde\Sigma_p$ линий кривизны этого распределения относительно нормали $[y,\vec{\tilde n}_0]$. В отображении f p-ткань Σ_p переходит в p-ткань $\bar\Sigma_p$, принадлежащую распределению $\bar\Delta_p = f_{*x}(\Delta_p)$, а p-ткань $\widetilde\Sigma_p$ переходит в отображении f^{-1} в p-ткань $\bar{\widetilde\Sigma}_p$, принадлежащую распределению $\bar{\widetilde\Delta} = f^{-1}_*(\widetilde\Delta_p)$. Каждой нормали распределения $\Delta_p(\widetilde\Delta_p)$ соответствует определенная нормаль распределения $\bar\Delta_p(\bar{\widetilde\Delta}_p)$. Действительно, пусть $n\in\Delta_{n-p}(x)$, а следовательно $\vec n = p^\alpha\vec e_\alpha$, $\vec{\bar n} = f_{*x}(\vec n) = p^\alpha\vec{\bar e}_\alpha$, где $\vec{\bar e}_\alpha = f_{*x}(\vec e_\alpha)$. Рассмотрим вектор
$$\vec{\hat n} = \vec{\bar n} - p^\alpha\bar\gamma^{ij}\hat\gamma_{\alpha j}\vec{\bar e}_i, \qquad (4)$$
где $\vec{\bar e}_i = f_{*x}(\vec e_i)$, $\bar\gamma^{ij}$ — контравариантные компоненты метрического тензора распределения $\bar\Delta_p$, а $\hat\gamma_{\alpha j} = \vec{\bar e}_\alpha\cdot\vec{\bar e}_j$. Имеем $\vec{\hat n}\cdot\vec{\bar e}_\ell = 0$, следовательно, $\hat n\in\hat\Delta_{n-p}(y)$, где $\hat\Delta_{n-p}(y)$ — площадка, ортогонально дополнительная к $\bar\Delta_p(y)$. Дифференцирование выражения (4) по вторичным параметрам дает $\delta\vec{\hat n} = 0$, следовательно, в области Ω имеем поле инвариантной нормали $[y,\vec{\hat n}]$ распределения Δ_p. Как показывает соотношение (4), векторам базиса $\vec e_\alpha$ соответствуют векторы $\vec{\hat e}_\alpha = \vec{\bar e}_\alpha - \bar\gamma^{ij}\hat\gamma_{\alpha j}\vec{\bar e}_i$. Они линейно независимы и образуют базис площадки $\hat\Delta_p(y)$.

Аналогичным образом каждой нормали распределения $\hat\Delta_p$ будет соответствовать некоторая нормаль распределения $\bar{\widetilde\Delta}_p$.

Выясним, в каком случае p-ткань линий кривизны $\Sigma_p(\widetilde\Sigma_p)$ распределения $\Delta_p(\widetilde\Delta_p)$ относительно нормали $[x,\vec e_{\alpha_0}]$ переходит в отображении $f(f^{-1})$ в p-ткань линий кривизны распределения $\bar\Delta_p(\bar{\widetilde\Delta}_p)$ относительно соответствующей нормали $[y,\vec{\hat e}_{\alpha_0}]$ ($[x,\vec{\hat{\tilde e}}_{\alpha_0}]$).

Рассмотрим решение этой задачи для распределения Δ_p

(для распределения $\widetilde\Delta_p$ оно аналогично). Поместим векторы $\vec e_i$ репера R^x на касательных к линиям p-ткани Σ_p. Тогда, как это следует из (2), $a^i_j = 0$ $(i\ne j)$. Пусть $\hat R^y = \{y,\vec{\bar e}_i,\vec{\hat e}_\alpha\}$. Деривационные формулы этого репера имеют вид
$$d\vec y = \hat\omega^i\vec{\bar e}_i + \hat\omega^\alpha\vec{\hat e}_\alpha,$$
$$d\vec{\bar e}_i = \hat\omega^j_i\vec{\bar e}_j + \hat\omega^\alpha_i\vec{\hat e}_\alpha, \qquad (5)$$
$$d\vec{\hat e}_\alpha = \hat\omega^i_\alpha\vec{\bar e}_i + \hat\omega^\beta_\alpha\vec{\hat e}_\beta.$$
Так как $\vec{\bar e}_i = f_{*x}(\vec e_i)$, то $\hat\omega^i = \bar\omega^i = \omega^i$. Дифференцируя тождества $\vec{\hat e}_\alpha\cdot\vec{\bar e}_i = 0$ и учитывая выражения для векторов $\vec{\hat e}_\alpha$ и формулы (5), получим
$$\hat\omega^j_\alpha = -\bar\gamma^{ij}\hat\gamma_{\alpha\beta}\bar\Lambda^\beta_{iL}\omega^L, \qquad (6)$$
где $\bar\Lambda^\beta_{iL}$ — подобъект первого фундаментального распределения $\bar\Delta_p$, причем $\bar\Lambda^\beta_{iL} = \Lambda^\beta_{iL} + H^\beta_{iL}$, где H^β_{iL} — подтензор H^J_{KL} $(J,K,L = 1,\dots,n)$, для которого $H^J_{KL}\omega^L = \bar\omega^J_K - \omega^J_K$, а $\hat\gamma_{\alpha\beta} = \vec{\hat e}_\alpha\cdot\vec{\hat e}_\beta$. Для точки Q нормали $[y,\vec{\hat e}_{\alpha_0}]$ имеем $\vec Q = \vec y + \mu\vec{\hat e}_{\alpha_0}$. Требование $d\vec Q\in\hat\Delta_{n-p}(y)$ при $d\vec y\in\bar\Delta_p(y)$ приводит к системе $\hat\omega^i + \mu\hat\omega^i_{\alpha_0} = 0$. Следовательно, учитывая (6) и то, что $\hat\omega^i = \bar\omega^i = \omega^i$ для определения направлений кривизны площадки $\bar\Delta_p(y)$ имеем систему $(\delta^i_j + \mu\bar a^i_j)\omega^j = 0$, где
$$\bar a^i_j = -\bar\gamma^{it}\hat\gamma_{\alpha_0\beta}\bar\Lambda^\beta_{tj} \qquad (8)$$
и $\bar a^i_j$, как видно из (8), есть аффинор. Отсюда вытекает следующая

Т е о р е м а. Для того, чтобы p-ткань $\bar\Sigma_p = f(\Sigma_p)$ была p-тканью линий кривизны распределения $\bar\Delta_p$ относительно нормали $[y,\vec{\hat e}_0]$ необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{\bar e}_i$ были собственными векторами аффинора $\bar a^i_j$. Можно показать, что в общем случае p-ткань $\bar\Sigma_p$ не является p-тканью линий кривизны относительно указанной нормали, но в ряде частных случаев это выполняется.

С л е д с т в и е. Если отображение f конформно и а/ p-ткань Σ_p ортогональна, б/ распределение Δ_p вполне интегрируемо, в/ $H^{\alpha_0}_{ij} = 0$ (в частности, если линии p-ткани Σ_p являются характеристическими), то в каждом из этих случаев p-ткань $\overline{\Sigma}_p = f(\Sigma_p)$ является p-тканью линий кривизны относительно соответствующей нормали.

Действительно, так как f конформно, то $\overline{\gamma}_{JZ} = \lambda \gamma_{JZ}$ $(J, Z = 1, \ldots, n)$ и $\hat{\Delta}_{n-p} = \overline{\Delta}_{n-p}$, где $\overline{\Delta}_{n-p} = f_*(\Delta_{n-p})$. Соотношение (4) дает $\vec{\hat{n}} = \vec{\overline{n}}$, в частности $\vec{\hat{e}}_\alpha = \vec{\overline{e}}_\alpha$. Из (3) и (8) вытекает

$$\overline{a}^i_j = a^i_j - \gamma^{it} H^{\alpha_0}_{tj} \qquad (9)$$

В случае а), учитывая, что ортогональный репер R^x переходит в отображении f в ортогональный репер R^y, можно показать, что $H^J_{KZ} = 0$ $(J = K, J \neq Z, Z \neq K)$, в частности, $H^{\alpha_0}_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Формулы (9) дают $\overline{a}^i_j = 0$ $(i \neq j)$.

В случае б), так как распределение Δ_p вполне интегрируемо, то p-ткань Σ_p ортогональна, и мы приходим к случаю а).

В случае в) имеет место соотношение $\overline{a}^i_j = a^i_j = 0$ $(i \neq j)$.

Список литературы

1. Тихонов В.А. Сети, определяемые распределениями в аффинном пространстве и их обобщения.-В сб.: Проблемы геометрии. Т.8. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1977, с.197-223.

2. Шинкунас Ю.И. О распределении m-мерных плоскостей в n-мерном римановом пространстве.-Труды геометрич. семинара. ВИНИТИ АН СССР. М., 1974, т.5, с.123-133.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып. 16 1985

УДК 514.75

Г. Матиева

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПЛОСКИХ СЕТЕЙ

В работе рассмотрены ортогонально дополнительные распределения Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ в евклидовом пространстве E_n. С помощью этих распределений построена сеть $\widetilde{\Sigma}_n$ и изучены некоторые ее свойства.

1. Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $\mathcal{R} = (x, \vec{e}_A)$, где $x \in E_n$ и $|\vec{e}_A| = 1$ $(A, B, C = 1, 2, \ldots, n)$. Деривационные формулы репера имеют вид $d\vec{x} = \omega^A \vec{e}_A$, $d\vec{e}_A = \omega^B_A \vec{e}_B$. Формы ω^A, ω^B_A удовлетворяют уравнениям инвариантности метрики $d g_{AB} = g_{AK} \omega^K_B + g_{KB} \omega^K_A$, где $g_{AB} = \vec{e}_A \cdot \vec{e}_B$ - ковариантные компоненты метрического тензора пространства E_n, и структурным уравнениям $\mathcal{D}\omega^A = \omega^B \wedge \omega^A_B$, $\mathcal{D}\omega^B_A = \omega^K_A \wedge \omega^B_K$.

Рассмотрим в E_n распределение Δ_p $(1 < p < n-1)$ и ортогонально дополнительное к Δ_p распределение $\overline{\Delta}_{n-p}$. Векторы $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$ репера расположим в подпространстве $\Delta_p(x)$, а векторы $\vec{e}_{p+1}, \ldots, \vec{e}_n$ - в подпространстве $\overline{\Delta}_{n-p}(x)$. При этом дифференциальные уравнения распределения Δ_p будут

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{iA} \omega^A \quad (i, j, k = 1, \ldots, p;\ \alpha, \beta, \gamma = p+1, \ldots, n), \quad (1)$$

а так как $\vec{e}_\alpha \in \overline{\Delta}_{n-p}(x)$, то $\omega^i_\alpha = \Lambda^i_{\alpha A} \omega^A$.

Система величин $\{\Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^\alpha_{i\beta}\}$ образует геометрический объект-фундаментальный объект первого порядка распределения Δ_p [4]. При этом компоненты Λ^α_{ij} и $\Lambda^\alpha_{i\beta}$ образуют тензоры в отдельности. Векторы

$$\vec{M}_p = \frac{1}{p} g^{ij} \Lambda^\alpha_{(ij)} \vec{e}_\alpha, \quad \vec{\overline{M}}_{n-p} = \frac{1}{n-p} g^{\alpha\beta} \Lambda^i_{(\alpha\beta)} \vec{e}_i$$

называются векторами средних кривизн распределений Δ_p и $\overline{\Delta}_{n-p}$ соответственно [3]. Если вектор средней кривизны распределения тождественно равен нулю, то распределение называется минимальным [3]. Будем считать, что распределения Δ_p, $\bar{\Delta}_{n-p}$ -не минимальны.

2.Дифференцируя тождества $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_\alpha = 0$, получим

$$\omega^i_\alpha = -g^{ik}\,\omega^\beta_k\, g_{\beta\alpha}$$

Отсюда имеем

$$\Lambda^i_{\alpha j} = -g^{ik}\,\Lambda^\beta_{kj}\, g_{\beta\alpha}$$

Так как система величин $\{\Lambda^\beta_{kj}\}$ образует тензор, то система величин $\{\Lambda^i_{\alpha j}\}$ тоже образует тензор.

Для вектора $\vec{\xi} = \xi^\alpha \vec{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_{n-p}(x)$ тензор $\Lambda^i_{\alpha j}$ определяет аффинор $\Lambda^i_j = \Lambda^i_{\alpha j}\xi^\alpha$ в пространстве $\Delta_p(x)$, а для вектора $\vec{a} = a^i\vec{e}_i \in \Delta_p(x)$ тензор $\Lambda^\alpha_{i\beta}$ определяет аффинор $\Lambda^\alpha_\beta = \Lambda^\alpha_{i\beta}\, a^i$ в пространстве $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$. В качестве вектора $\vec{\xi}$ берем вектор $\vec{M}_p$, а в качестве $\vec{a}$ -вектор $\vec{M}_{n-p}$. Тогда

$$\Lambda^i_j = \frac{1}{p}\Lambda^i_{\alpha j}\, g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)} = \Lambda^i_{\alpha j}\, m^\alpha,\quad \Lambda^\alpha_\beta = \frac{1}{n-p}\Lambda^\alpha_{i\beta}\, g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)} = \Lambda^\alpha_{i\beta}\,\bar{m}^i,$$

где

$$m^\alpha = \frac{1}{p}g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)},\quad \bar{m}^i = \frac{1}{n-p}g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)}$$

Пусть векторы $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p$ имеют собственные направления относительно аффинора Λ^i_j, а векторы $\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n$ - относительно аффинора Λ^α_β. Отсюда имеем

$$\Lambda^i_{\alpha j}\, m^\alpha = 0 \quad (i \neq j), \tag{2}$$

$$\Lambda^\alpha_{i\beta}\,\bar{m}^i = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{3}$$

Интегральные линии векторных полей $\vec{e}_i, \vec{e}_\alpha$ определяют сеть в пространстве E_n. Обозначим ее через $\tilde{\Sigma}_n$. Координатные векторы $\vec{e}_i, \vec{e}_\alpha$ репера направлены по касательным к линиям сети $\tilde{\Sigma}_n$. Поэтому формы ω^B_A $(A \neq B)$ главные [2]: $\omega^B_A = a^B_{AK}\,\omega^K$, где $a^\alpha_{iK} = \Lambda^\alpha_{iK}$, $a^i_{\alpha K} = \Lambda^i_{\alpha K}$. Аналитическими условиями, характеризующими сеть $\tilde{\Sigma}_n$ в пространстве E_n, являются соотношения (2),(3).

Сеть $\tilde{\Sigma}_n$ можно получить и другим путем. Выберем $n-p$ векторных полей $\vec{e}_\alpha \in \bar{\Delta}_{n-p}$ так, чтобы выполнялось условие [1]:

$$\nabla_{\vec{e}_\alpha}\vec{M}_{n-p} \in \Delta(\Delta_p, \vec{e}_\alpha), \tag{4}$$

где ∇ -символ ковариантного дифференцирования в E_n. Интегральные линии этих векторных полей называются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{M}_{n-p}) \subset \Delta_p[1]$. Так как в евклидовом пространстве абсолютный дифференциал совпадает с обычным дифференциалом, то из формулы (4) имеем:

$$d_\alpha \vec{M}_{n-p} = \frac{1}{n-p}g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)\alpha}\vec{e}_i + \frac{1}{n-p}g^{\gamma\sigma}\Lambda^i_{(\gamma\sigma)}\Lambda^\beta_{i\alpha}\vec{e}_\beta \in \Delta(\Delta_p, \vec{e}_\alpha).$$

Отсюда получим (3).

Аналогично выберем p векторных полей $\vec{e}_j \in \Delta_p$ так, чтобы выполнялось условие $\nabla_{\vec{e}_j}\vec{M}_p \in \Delta(\bar{\Delta}_{n-p}, \vec{e}_j)$ или

$$d_j\vec{M}_p = \frac{1}{p}g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)}\Lambda^i_{\alpha j}\vec{e}_i + \frac{1}{p}g^{k\ell}\Lambda^\alpha_{(k\ell)j}\vec{e}_\alpha \in \Delta(\bar{\Delta}_{n-p}, \vec{e}_j).$$

Отсюда получим (2). Таким образом, полученная сеть совпадает с сетью $\tilde{\Sigma}_n$. Из вышеизложенного следует

Т е о р е м а I. Направления векторов $\vec{e}_\alpha$ $(\vec{e}_i)$ являются собственными для аффинора Λ^α_β (Λ^i_j) тогда и только тогда, когда интегральные линии векторных полей $\vec{e}_\alpha$ $(\vec{e}_i)$ являются линиями кривизны относительно одномерного распределения $\Delta_1 = \Delta(\vec{M}_{n-p})$ $(\Delta_1 = \Delta(\vec{M}_p))$.

Рассмотрим операторы T и O, действующие на векторные поля X, Y пространства E_n по правилу [5]:

$$T_X Y = H\nabla_{VX}(VY) + V\nabla_{VX}(HY), \tag{5}$$

$$O_X Y = V\nabla_{HX}(HY) + H\nabla_{HX}(VY), \tag{6}$$

где H и V -операторы проектирования на $\Delta_p(x)$ и $\bar{\Delta}_{n-p}(x)$, соответственно ∇ -символ ковариантного дифференцирования в E_n. Тогда, если имеем (2), то из (6) получим, что

$$O_{\vec{e}_j}\vec{M}_p \parallel \vec{e}_j. \tag{7}$$

Обратно, если имеем (7), то из (6) следует (2). Аналогично, если имеем (3), то из (5) следует, что

$$T_{\vec{e}_\xi}\overrightarrow{M}_{n-p} \parallel \vec{e}_\xi\,. \qquad (8)$$

Обратно, если имеет место (8), то из (5) получим (3). Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. Данная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\widetilde{\Sigma}_n$ для некоторого p-мерного распределения, порождаемого этой сетью, тогда и только тогда, когда имеют место (7), (8).

С л е д с т в и е. Ортогональная голономная сеть Σ_n в E_n является сетью типа $\widetilde{\Sigma}_n$ для некоторого p-мерного распределения, порождаемого этой сетью.

Список литературы

1. Базылев В.Т. Сети на многообразиях. - Тр. геометрич. семинара. ВИНИТИ АН СССР. М., 1974, т.6, с.189-204.

2. Базылев В.Т. К геометрии плоских многомерных сетей. - Уч. зап. МГПИ им. В.И. Ленина, 1965, №243, с.29-37.

3. Кузьмин М.К. Сети, определяемые распределениями в евклидовом пространстве E_n, и их обобщения. - Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР, 1975, т.7, с.215-229.

5. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I. - Тр. Геометрич. семинара. ВИНИТИ АН СССР, М., 1971, т.3, с.49-94.

5. Gray A. Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. Jour. Math. and Mechanics, 1967, vol. 16, №7, p. 715-737.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

В.В. М а х о р к и н

КОНГРУЭНЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В $\mathbb{P}_6$

В шестимерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция квадратичных элементов. Выбор такого объекта исследования обусловливается тем, что это семейство квадратичных элементов является одним из простейших, у которого трансверсальным образом возникают критические точки первого порядка коранга два и, следовательно, возникают фокальные точки первого порядка коранга два, ранее не изучавшиеся.

Всякой конгруэнции квадратичных элементов в $\mathbb{P}_6$ естественным образом соответствует семейство квадратичных элементов. Пусть открытое множество $U \subset \mathbb{R}^2$ является пространством параметров рассматриваемой конгруэнции, тогда семейство квадратичных элементов будет [I] шестимерным подмногообразием Z в $U \times \mathbb{P}_6$ вместе с его проекцией на первый сомножитель

$$p: Z \to U\,. \qquad (1)$$

Кроме того, имеем проекцию на второй сомножитель

$$\pi: Z \to \mathbb{P}_6\,, \qquad (2)$$

причем для всякого $t \in U$, $\pi(p^{-1}(t))$ квадрика квадратичного элемента в $\mathbb{P}_6$, соответствующая параметру $t \in U$.

Будем считать, что отображение (2) является I-общим отображением [2], тогда множества $S_1(\pi)$ и $S_2(\pi)$ являются подмногообразиями в Z, причем

$$Z = S_0(\pi) \cup S_1(\pi) \cup S_2(\pi)\,, \qquad (3)$$

здесь $S_0(\pi)$ множество регулярных точек отображения π, $S_1(\pi)$ множество особых точек коранга один отображения π,

$S_2(\pi)$ множество особых точек коранга два отображения π. Из (3) следует

$$\pi(Z) = \pi(S_0(\pi)) \cup \pi(S_1(\pi)) \cup \pi(S_2(\pi)), \quad (4)$$

здесь $\pi(Z)$ конгруэнция квадратичных элементов в $\mathbb{P}_6$.

Для всякого $t \in U$ положим

$$Z_t = Z \cap p^{-1}(t), \quad S_0(\pi)_t = S_0(\pi) \cap p^{-1}(t),$$
$$S_1(\pi)_t = S_1(\pi) \cap p^{-1}(t), \quad S_2(\pi)_t = S_2(\pi) \cap p^{-1}(t).$$

Тогда

$$\pi(Z_t) = \pi(S_0(\pi)_t) \cup \pi(S_1(\pi)_t) \cup \pi(S_2(\pi)_t) \quad (5)$$

для всякого $t \in U$.

Здесь $\pi(S_1(\pi)_t)$ множество фокальных точек первого порядка коранга один квадрики $\pi(Z_t)$ конгруэнции $\pi(Z)$, а $\pi(S_2(\pi)_t)$ множество фокальных точек первого порядка коранга два квадрики $\pi(Z_t)$ конгруэнции $\pi(Z)$ [1].

Используя подвижной репер $\{A_\alpha\}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, 6)$ в $\mathbb{P}_6$ и располагая вершины $A_0, \ldots, A_5$ в плоскости L_t квадрики $\pi(Z_t) \subset \mathbb{P}_6$, а вершину A_6 вне плоскости L_t, подмногообразие Z в $U \times \mathbb{P}_6$ можно задать следующей системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \ (i, j, \ldots = 0, 1, \ldots, 5), \quad (6)$$

кроме того

$$\omega_i^6 = \Lambda_{ia} \tau^a, \quad \theta_{ij} = \Lambda_{ija} \tau^a, \quad (7)$$

$a, b, \ldots = 1, 2$, τ^a -инвариантные формы параметрической группы. Величины $a_{ij}, \Lambda_{ia}, \Lambda_{ija}$ зависят от параметра $t \in U$. Тогда [3] критические точки отображения (2) определяются системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \det \|A\| = 0, \quad (8)$$

где

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} \Lambda_{i1} x^i & \Lambda_{ij1} x^i x^j \\ \Lambda_{i2} x^i & \Lambda_{ij2} x^i x^j \end{Vmatrix}.$$

Фиксируя в системе (8) параметр $t \in U$, получим систему уравнений, определяющих фокальное многообразие первого порядка квадрики $\pi(Z_t) \subset \mathbb{P}_6$, которое в общем случае является трехмерным алгебраическим многообразием шестого порядка. Однако проведенный выше анализ с точки зрения теории особенностей дифференцируемых отображений показывает, что фокальное многообразие первого порядка является объединением многообразия $\pi(S_1(\pi)_t)$, определяемого системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \operatorname{rang} \|A\| = 1, \quad (9)$$

и многообразия $\pi(S_2(\pi)_t)$, определяемого системой уравнений

$$x^6 = 0, \quad a_{ij} x^i x^j = 0, \quad \Lambda_{ia} x^i = 0, \quad \Lambda_{ija} x^i x^j = 0. \quad (10)$$

Причем в уравнениях (8), (10) фиксирован параметр $t \in U$. Из уравнений (8), (10) следует, что многообразие $\pi(S_2(\pi)_t)$ является нульмерным алгебраическим многообразием порядка восемь, а многообразие $\pi(S_1(\pi)_t)$ представляет собой трехмерное алгебраическое многообразие шестого порядка, определяемое системой уравнений (8) при фиксированном $t \in U$, из которого удалено многообразие $\pi(S_2(\pi)_t)$.

В отличие от фокальных точек первого порядка коранга один, которые характеризуются "фокальностью" вдоль некоторых направлений, фокальные точки первого порядка коранга два характеризуются "фокальностью" вдоль всякого направления, что показывает следующая

Т е о р е м а. Касательная плоскость к поверхности, описываемой фокальной точкой первого порядка коранга два, лежит в касательной плоскости в этой точке к квадрике квадратичного элемента.

Список литературы

1. Махоркин В.В. Фокальные точки первого порядка.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.14. Калининград, 1983, с.116-119.

2. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М., 1977.

3. Фам Ф. Особенности процессов многократного рассеяния. М., 1972.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.А. Митрофанова

ИНВАРИАНТНАЯ СВЯЗНОСТЬ КАРТАНА В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В статье решается задача построения расслоенного пространства со структурной группой $A^2_m(n)$ преобразований и соответствующей связностью (A-связностью), инвариантно присоединенной к интегралу, распространенному по произвольной поверхности пространства соприкасающихся элементов.

Рассмотрим интеграл типа $S=\int\limits_{S_m} f(x^J, x^i_\alpha, x^i_{\alpha\beta})\, dx^1\wedge\ldots\wedge dx^m$, (1)

где

$$x^i_\alpha=\frac{\partial x^i}{\partial x^\alpha},\ x^i_{\alpha\beta}=\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}\quad (J=\overline{1,n};\ \alpha=\overline{1,m};\ i,j=\overline{m+1,n}),$$

распространенный по некоторой области поверхности S_m в пространстве элементов касания второго порядка многообразия V_n. Дифференциальные уравнения поверхности $S_m\subset V_n$ при соответствующей специализации репера имеют вид:

$$\omega^J=0,\quad \omega^i_\alpha=0,\quad \omega^i_{\alpha\beta}=P^i_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^\gamma. \qquad (2)$$

Запишем интеграл (I) через инвариантные формы ω^α: $S=\int\limits_{S_m} F\omega^1\wedge\ldots\wedge\omega^m$, где поле F удовлетворяет уравнению

$$\Delta F=dF-F\omega^\alpha_\alpha=F_\varkappa\omega^\varkappa+F^\alpha_i\,\omega^i_\alpha+F^{\alpha\beta}_i\,\omega^i_{\alpha\beta}. \qquad (3)$$

Здесь $\omega^J, \omega^J_K, \omega^J_{KL}$ – структурные формы расслоения реперов $H^P(V_n)$ с известными уравнениями структуры.

Наша задача заключается в том, чтобы фундаментальными объектами поля F возможно низшего порядка охватить поле объекта A-связности. Она решается при помощи канонизации объектов поля F, в результате которой формы $\{\omega^\beta_\kappa, \omega^\alpha_{\beta\gamma}, \omega^\kappa_{\beta\kappa}, \omega^\kappa_{\ell m}, \omega^i_{\alpha\beta\kappa}, \omega^i_{\alpha\beta\gamma}\}$ выразятся через базисные формы $\omega^R(\omega^\varkappa, \omega^i_\alpha, \omega^i_{\alpha\beta})$. Этот набор форм содержится в той оставшейся части, на которую отличаются структурные уравнения базисных форм ω^R, а также форм $\omega^i_\kappa, \omega^\alpha_\beta$, которые в будущем станут формами связности, от структурных уравнений группы $A^2_m(n)$ [1]. Для нахождения форм (4) дифференцируем внешним образом уравнение (3), получим выражение вида

$$\Delta F_\varkappa\wedge\omega^\varkappa+\Delta F^\alpha_i\wedge\omega^i_\alpha+\Delta F^{\alpha\beta}_i\wedge\omega^i_{\alpha\beta}=0, \qquad (5)$$

откуда по лемме Картана имеем

$$\text{а/}\ \Delta F^{\alpha\beta}_\kappa=dF^{\alpha\beta}_\kappa+\{{}^{\alpha\beta}_{\kappa}\}-F^{\alpha\beta}_\kappa\omega^\gamma_\gamma=F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_\ell\,\omega^\ell_{\lambda\mu}+F^{\alpha\beta}_\kappa{}^\gamma_\ell\,\omega^\ell_\gamma+F^{\alpha\beta}_{\kappa J}\,\omega^J,$$

$$\text{в/}\ \Delta F^\alpha_\kappa=dF^\alpha_\kappa+\{{}^\alpha_\kappa\}-F^\alpha_\kappa\omega^\beta_\beta-F\omega^\alpha_\kappa-F^{\lambda\mu}_\ell\,\tilde\omega^\ell_{\lambda\mu}{}^\alpha_\kappa=F^{\lambda\mu}_\ell{}^\alpha_\kappa\,\omega^\ell_{\lambda\mu}+F^{\alpha\beta}_{\kappa\ell}\,\omega^\ell_\beta+F^\alpha_{\kappa J}\,\omega^J, \qquad (6)$$

$$\text{с/}\ \Delta F_\alpha=dF_\alpha-F_\beta\,\omega^\beta_\alpha-F\omega^\beta_{\beta\alpha}-F^\beta_\ell\,\omega^\ell_{\alpha\beta}-F^{\beta\gamma}_\ell\,\omega^\ell_{\alpha\beta\gamma}=F_{\alpha R}\,\omega^R,$$

где

$$\tilde\omega^\ell_{\lambda\mu}{}^\alpha_\kappa=\omega^\ell_{\kappa\mu}\delta^\alpha_\lambda+\delta^\alpha_\mu\,\omega^\ell_{\kappa\lambda}-\delta^\ell_\kappa\,\omega^\alpha_{\lambda\mu};\ \{{}^\alpha_\kappa\}=F^\beta_\kappa\,\omega^\alpha_\beta-F^\alpha_\ell\,\omega^\ell_\kappa. \qquad (7)$$

Аналогично расписываются все другие фигурные скобки. Второе (частичное продолжение уравнения (5)) даст нам уравнения

$$\text{а/}\ \Delta F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_\ell=dF^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_\ell+\{{}^{\alpha\beta}_{\kappa}{}^{\lambda\mu}_{\ell}\}-F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_\ell\,\omega^\gamma_\gamma=F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_{\ell R}\,\omega^R,$$

$$\text{б/}\ \Delta F^{\alpha\beta}_\kappa{}^\gamma_\ell=dF^{\alpha\beta}_\kappa{}^\gamma_\ell+\{{}^{\alpha\beta}_{\kappa}{}^{\gamma}_{\ell}\}-F^{\alpha\beta}_\kappa{}^\gamma_\ell\,\omega^\sigma_\sigma+F^{\gamma(\alpha}_\kappa\,\omega^{\beta)}_\ell+F^{\alpha\beta}_\ell\,\omega^\gamma_\kappa-F^{\alpha\beta}_\kappa\,\omega^\gamma_\ell-F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_i\,\tilde\omega^i_{\lambda\mu}{}^\gamma_\ell=0, \qquad (8)$$

$$\text{с/}\ \Delta F^{\alpha\beta}_{\kappa\mathcal{Z}}=dF^{\alpha\beta}_{\kappa\mathcal{Z}}+\{{}^{\alpha\beta}_{\kappa\mathcal{Z}}\}-F^{\alpha\beta}_\kappa\,\omega^\sigma_{\sigma\mathcal{Z}}-F^{\alpha\beta}_\kappa{}^\gamma_i\,\omega^i_{\gamma\mathcal{Z}}-F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_i\,\omega^i_{\lambda\mu\mathcal{Z}}=F^{\alpha\beta}_{\kappa\mathcal{Z}R}\,\omega^R,$$

где по примеру формулы (7)

$$\{{}^\alpha_\kappa\}_{\mathcal{Z}}=F^\beta_\kappa\,\omega^\alpha_{\beta\mathcal{Z}}-F^\alpha_\ell\,\omega^\ell_{\kappa\mathcal{Z}}. \qquad (9)$$

Будем рассматривать тензор $F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_\ell$ как двухиндексный тензор с парой индексов $({}^{\alpha\beta}_{\kappa}), ({}^{\lambda\mu}_{\ell})$. Налагая на поле F первое условие невырожденности

$$\Phi=\det\|F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\lambda\mu}_\ell\|\neq 0, \qquad (10)$$

можно получить обратный тензор

$$F^{\alpha\beta}_\kappa{}^{\tau\sigma}_e\cdot F^{\ e}_{\tau\sigma}{}^i_{\lambda\mu}=\delta({}^{\alpha\beta}_{\kappa})({}^{i}_{\lambda\mu}). \qquad (11)$$

Для величин

$$F^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell} = F^{i\ \ \kappa}_{\lambda\mu\,\alpha\beta} F^{\alpha\beta\,\gamma}_{\ \ \kappa\,\ell}, \tag{12}$$

дифференциальные уравнения содержат формы $\tilde{\omega}^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell}$ в свободном виде

$$\Delta F^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell} = dF^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell} + \{{}^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell}\} + F^{i\ \ \gamma\ \kappa}_{\lambda\mu\,\ell\,\beta}\omega^{\beta}_{\kappa} - \tilde{\omega}^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell} = F^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell R}\omega^{R}. \tag{13}$$

Величины

$$\hat{F}^{\gamma}_{\ell} = F^{\gamma}_{\ell} - F^{\lambda\mu}_{\ \ i} F^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell} \tag{14}$$

имеют дифференциальные уравнения вида

$$\Delta \hat{F}^{\gamma}_{\ell} = d\hat{F}^{\gamma}_{\ell} + \{{}^{\gamma}_{\ell}\} - \hat{F}^{\gamma}_{\ell}\omega^{\beta}_{\beta} - F^{\gamma\ \kappa}_{\ell\ \beta}\omega^{\beta}_{\kappa} = F^{\gamma}_{\ell R}\omega^{R}, \tag{15}$$

где $F^{\gamma\ \kappa}_{\ell\ \beta} = (F - F^{i}_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}_{\ \ i})\delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{\kappa}_{\ell} + 2F^{i}_{\lambda\beta}F^{\lambda\gamma}_{\ \ i}\delta^{\kappa}_{\ell} + F^{\kappa}_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}_{\ \ \ell}\delta^{\gamma}_{\beta}$ –тензор, который при условии невырожденности $\varphi_1 = \det\|F^{\gamma\ \kappa}_{\ell\ \beta}\| \neq 0$ имеет обратный тензор $\hat{F}^{\beta\ i}_{\kappa\ \ell}$. Для величин $\Phi^{\alpha}_{\kappa} = \hat{F}^{\alpha\ i}_{\kappa\ \beta}\hat{F}^{\beta}_{i}$ дифференциальные уравнения

$$\Delta\Phi^{\alpha}_{\kappa} = d\Phi^{\alpha}_{\kappa} + \{{}^{\alpha}_{\kappa}\} - \omega^{\alpha}_{\kappa} = \Phi^{\alpha}_{\kappa R}\omega^{R} \tag{16}$$

показывают, что канонизация $\Phi^{\alpha}_{\kappa} = 0$ делает формы ω^{α}_{κ} главными. В дальнейшем мы будем считать, что все главные формы стоят в правых частях.

Геометрическим объектом $F^{i\ \ \gamma}_{\lambda\mu\,\ell}$ охватываются объекты

$$\Phi^{i}_{\kappa\alpha} = F^{i\ \beta}_{\alpha\beta\ \kappa},\quad \Phi^{\gamma}_{\alpha\beta} = F^{\kappa\ \gamma}_{\alpha\beta\ \kappa},\quad \tilde{\Phi}_{\gamma} = \Phi^{i}_{i\gamma} \tag{17}$$

с дифференциальными уравнениями

$$a/\ \Delta\Phi^{i}_{\kappa\alpha} = d\Phi^{i}_{\kappa\alpha} + \{{}^{i}_{\kappa\alpha}\} - (m+1)\omega^{i}_{\kappa\alpha} + \delta^{i}_{\kappa}\omega^{\beta}_{\beta\alpha} = \Phi^{i}_{\kappa\alpha R}\omega^{R},$$

$$в/\ \Delta\Phi^{\gamma}_{\alpha\beta} = d\Phi^{\gamma}_{\alpha\beta} + \{{}^{\gamma}_{\alpha\beta}\} - (n-m)\omega^{\gamma}_{\alpha\beta} - \delta^{\gamma}_{\alpha}\omega^{\kappa}_{\kappa\beta} - \delta^{\gamma}_{\beta}\omega^{\kappa}_{\kappa\alpha} = \Phi^{\gamma}_{\alpha\beta R}\omega^{R}, \tag{18}$$

$$c/\ \Delta\tilde{\Phi}_{\alpha} = d\tilde{\Phi}_{\alpha} - \tilde{\Phi}_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha} + (n-m)\omega^{\beta}_{\beta\alpha} - (p+1)\omega^{\kappa}_{\kappa\alpha} = \tilde{\Phi}_{\alpha R}\omega^{R}.$$

Эти уравнения позволяют провести канонизацию

$$\Phi^{i}_{\kappa\alpha} = \Phi^{\gamma}_{\alpha\beta} = \tilde{\Phi}_{\alpha} = 0, \tag{19}$$

при которой формы $\omega^{\kappa}_{\kappa\alpha}$, $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\omega^{i}_{\kappa\alpha}$ выражаются через формы $\omega^{\beta}_{\beta\gamma}$ и ω^{R}. Составим новые величины

$$F^{i}_{\lambda\mu J} = F^{i\ \ \kappa}_{\lambda\mu\,\alpha\beta}\cdot F^{\alpha\beta}_{\kappa J};\ \Phi^{i}_{\lambda\mu\gamma} = \tfrac{1}{3}(F^{i}_{\lambda\mu\gamma} + F^{i}_{\mu\gamma\lambda} + F^{i}_{\gamma\lambda\mu}),\ \Phi_{\alpha} = F_{\alpha} - F^{\lambda\mu}_{\ \ \ell}\Phi^{\ell}_{\lambda\mu\alpha}, \tag{20}$$

причем

$$\Delta\Phi_{\alpha} = d\Phi_{\alpha} + \Phi_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha} - \Phi_{\alpha}\omega^{\sigma}_{\sigma} + F^{\beta}_{\alpha}\omega^{\gamma}_{\gamma\beta} = \Phi_{\alpha R}\omega^{R}. \tag{21}$$

Если наложить на поле F третье условие невырожденности $\Phi_2 = \det\|\tilde{F}^{\beta}_{\alpha}\| \neq 0$, то найдется тензор $\bar{F}^{\beta}_{\gamma}$, обратный к $\tilde{F}^{\beta}_{\alpha}$. Тогда дифференциальные уравнения

$$\Delta\overset{*}{\Phi}_{\alpha} = d\overset{*}{\Phi}_{\alpha} - \overset{*}{\Phi}_{\beta}\omega^{\beta}_{\alpha} - \overset{*}{\Phi}_{\alpha}\omega^{\beta}_{\beta} + \omega^{\gamma}_{\gamma\alpha} = \bar{\bar{\Phi}}_{\alpha R}\omega^{R} \tag{22}$$

величин

$$\overset{*}{\Phi}_{\alpha} = \bar{F}^{\beta}_{\alpha}\Phi_{\beta} \tag{23}$$

позволяют выполнить канонизацию $\overset{*}{\Phi}_{\alpha} = 0$, в результате которой $\omega^{\gamma}_{\gamma\alpha}$, а следовательно и в силу (19), формы $\omega^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\omega^{i}_{\kappa\alpha}$ становятся главными. Все построенные до сих пор объекты охватываются фундаментальным объектом второго порядка. Продолжая уравнения (16), мы получим дифференциальные уравнения объектов третьего порядка

$$\Delta\Phi^{\alpha}_{\kappa\beta} = d\Phi^{\alpha}_{\kappa\beta} + \{{}^{\alpha}_{\kappa\beta}\} - \Phi^{\alpha\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ell}\omega^{\ell}_{\lambda\mu\beta} - \omega^{\alpha}_{\kappa\beta} = \bar{\Phi}^{\alpha}_{\kappa\beta R}\omega^{R},$$

$$\Delta\Phi^{\alpha\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ell} = d\Phi^{\alpha\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ell} + \{{}^{\alpha\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ell}\} = \Phi^{\alpha\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ell R}\omega^{R}.$$

Для величин $\tilde{\Phi}^{\alpha}_{\kappa\beta} = \Phi^{\alpha}_{\kappa\beta} - \Phi^{\alpha\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ell}\Phi^{\ell}_{\lambda\mu\beta}$ дифференциальные уравнения имеют вид: $d\tilde{\Phi}^{\alpha}_{\kappa\beta} + \{{}^{\alpha}_{\kappa\beta}\} - \omega^{\alpha}_{\kappa\beta} = \tilde{\Phi}^{\alpha}_{\kappa\beta R}\omega^{R}$. Отсюда видно, что, проводя канонизацию $\tilde{\Phi}^{\alpha}_{\kappa\beta} = 0$, формы $\omega^{\alpha}_{\kappa\beta}$ становятся главными. Учитывая теперь, что часть форм стали главными, $\Delta F^{i}_{\lambda\mu\gamma} = d\Phi^{i}_{\lambda\mu\gamma} + \{{}^{i}_{\lambda\mu\gamma}\} - \omega^{i}_{\lambda\mu\gamma} = \tilde{F}^{i}_{\lambda\mu\gamma R}\omega^{R}$, $\Delta F^{i}_{\lambda\mu\kappa} = dF^{i}_{\lambda\mu\kappa} + \{{}^{i}_{\lambda\mu\kappa}\} - F^{i\ \ \ell}_{\lambda\mu\,\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_{j}\omega^{j}_{\ell\kappa} - \omega^{i}_{\lambda\mu\kappa} = \tilde{F}^{i}_{\lambda\mu\kappa R}\omega^{R}$. При канонизации $F^{i}_{\lambda\mu\gamma} = 0$, $F^{i}_{\lambda\mu\kappa} = 0$ формы $\omega^{i}_{\lambda\mu\gamma}$ обращаются в главные, а

$$\omega^{i}_{\lambda\mu\kappa} = -F^{i\ \ \ell}_{\lambda\mu\,\alpha\beta}F^{\alpha\beta}_{j}\omega^{j}_{\ell\kappa} - \tilde{F}^{i}_{\lambda\mu\kappa R}\omega^{R}. \tag{24}$$

Наконец, для получения форм $\omega^{j}_{\ell\kappa}$ обратимся к относительному инварианту $\Phi = \det\|F^{\alpha\beta\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ \ell}\|$, дифференциальное уравнение которого имеет вид $\Delta\Phi = d\Phi - \Phi[a\omega^{\kappa}_{\kappa} + b\omega^{\gamma}_{\gamma}] = \hat{\Phi}^{\alpha\beta}_{\kappa}\omega^{\kappa}_{\alpha\beta} + \hat{\Phi}^{\alpha}_{\kappa}\omega^{\kappa}_{\alpha} + \Phi_{x}\omega^{x}$, где $a = m(m+1)$, $b = \frac{1}{2}(n-m)(m+1)(m-4)$. Введем в рассмотрение тензоры $\hat{F}^{i}_{\lambda\mu\gamma} = F^{i}_{\lambda\mu\gamma} - \Phi^{i}_{\lambda\mu\gamma}$, $\hat{\Phi}_{\gamma} = \hat{\Phi}^{\alpha\beta}_{i}\hat{F}^{i}_{\alpha\beta\gamma}$ и симметрический по κ и ℓ тензор $\Phi_{\kappa\ell} = \hat{\Phi}_{\alpha}\hat{\Phi}_{\beta}\hat{\Phi}_{\lambda}\hat{\Phi}_{\mu}F^{\alpha\beta\ \lambda\mu}_{\kappa\ \ \ \ell}$ с дифференциальными уравнениями

$$\Delta\Phi_{\kappa\ell} = d\Phi_{\kappa\ell} + \{\kappa\ell\} - \Phi_{\kappa\ell}(4a\omega^{i}_{i} + (4b+1)\omega^{\alpha}_{\alpha}) = \Phi_{\kappa\ell,i}\omega^{i} + \Phi_{\kappa\ell\alpha}\omega^{\alpha} + \Phi^{\alpha}_{\kappa\ell i}\omega^{i}_{\alpha} + \Phi^{\alpha\beta}_{\kappa\ell i}\omega^{i}_{\alpha\beta}. \tag{25}$$

Запишем частичное продолжение уравнений (24)

$$d\Phi_{\kappa\ell i} + \{\kappa\ell i\} - \Phi_{\kappa\ell i}(4a\omega^{j}_{j} + (4b+1)\omega^{\sigma}_{\sigma}) - \check{\Phi}^{p}_{\kappa\ell j}\omega^{j}_{pi} = \Phi_{\kappa\ell iR}\omega^{R}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, налагая на поле F четвертое условие невырожденности $\Phi_3 = \det \| \check{\Phi}^{p}_{\kappa\ell j} \| \neq 0$, используя обратный тензор $\hat{\check{\Phi}}^{\kappa\ell i}_{s}$ для $\check{\Phi}^{p}_{\kappa\ell j}$ с помощью соответствующей канонизации $\check{\Phi}^{j}_{ie} = \Phi_{\kappa p i} \hat{\Phi}^{\kappa p j}_{e} = 0$, сделаем формы $\omega^{j}_{i\kappa}$, и следовательно, в силу (24) формы $\omega^{i}_{\lambda\mu\kappa}$ главными. Таким образом, все формы (4) выражены через базисные формы ω^{k}, что позволяет заключить, что пространство S''_m является пространством с A-связностью, инвариантно присоединенной к интегралу (1); в результате чего возникают следующие структурные уравнения форм A-связности

$$d\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\beta} + \Omega^{\alpha},$$

$$d\omega^{i} = \omega^{\kappa} \wedge \omega^{i}_{\kappa} + \omega^{\alpha} \wedge \omega^{i}_{\alpha},$$

$$d\omega^{i}_{\alpha} = \omega^{j}_{\beta} \wedge (\delta^{\beta}_{\alpha} \omega^{i}_{j} - \delta^{i}_{j} \omega^{\beta}_{\alpha}) + \omega^{\beta} \wedge \omega^{i}_{\alpha\beta} + \Omega^{i}_{\alpha},$$

$$d\omega^{i}_{\alpha\beta} = \omega^{j}_{\lambda\mu} \wedge (\delta^{\lambda}_{\alpha} \delta^{\mu}_{\beta} \omega^{i}_{j} - \delta^{\lambda}_{\alpha} \delta^{i}_{j} \omega^{\mu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta} \delta^{i}_{j} \omega^{\lambda}_{\alpha}) + \Omega^{i}_{\alpha\beta},$$

$$d\omega^{\alpha}_{\beta} = \omega^{\gamma}_{\beta} \wedge \omega^{\alpha}_{\gamma} + \Omega^{\alpha}_{\beta},$$

$$d\omega^{i}_{\kappa} = \omega^{\ell}_{\kappa} \wedge \omega^{i}_{\ell} + \Omega^{i}_{\kappa}.$$

Таким образом, в силу теоремы Лаптева-Картана с пространством S''_m ассоциируется расслоение, наделенное A-связностью, инвариантно присоединенной к интегралу (1). В случае равенства нулю форм кривизны-кручения $\Omega = 0$ интеграл в подходящей системе координат выражается только через вторые производные.

Список литературы

1. Митрофанова Е.А. Однородное пространство представления группы $A^{p}_{m}(n)$. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 14. Калининград, 1983, с. 62-63.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

Ю.И.Попов

ОБ ОДНОМЕРНЫХ НОРМАЛЯХ ПЕРВОГО РОДА $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Настоящая работа является продолжением работ [7], [8] автора, посвященных построению общей теории регулярных трехсоставных распределений, которые мы назвали $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределениями [8]. $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределение - это тройка распределений проективного пространства P_n, состоящая из базисного распределения 1-го рода r-мерных линейных элементов $\Pi_r \equiv \Lambda$ (Λ-распределение), оснащающего распределения 1-го рода m-мерных линейных элементов $\Pi_m \equiv M$ ($m > r$) (M-распределение) и оснащающего распределения 1-го рода гиперплоскостных элементов $\Pi_{n-1} \equiv H$ ($r < m < n-1$) (H-распределение) с отношением инцидентности их соответствующих элементов в общем центре X следующего вида: $X \in \Lambda \subset M \subset H$.

Исследование ведется относительно специализированного репера $\mathcal{R}_1(H,M)$ [8, §3].

Под одномерными нормалями 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения мы понимаем одномерные нормали 1-го рода оснащающего H-распределения. В дифференциальной окрестности 2-го порядка построены поля нормалей 1-го рода $\mathfrak{P}(1_0)$ и $\mathfrak{Q}(1_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, ассоциированные с нормалью Михэйлеску 1-го рода $\mathfrak{M}(1_0)$. Построена конструкция, позволяющая с каждой одномерной нормалью ν 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения связать три однопараметрических пучка $(\nu, \mathfrak{P}_\nu)$, $(\nu, \mathfrak{Q}_\nu)$, $(\mathfrak{P}_\nu, \mathfrak{Q}_\nu)$ нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, где $\mathfrak{P}_\nu(1_0)$, $\mathfrak{Q}_\nu(1_0)$-одномерные нормали H-распределения, соответствующие в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази [3] соответственно плоскостям $p(L_0)$ и $q(L_0)$[8, § 5] Нордена-Тимофеева [4],[2].

Во всей работе мы придерживаемся обозначений работ [7],[8],а также следующей схемы использования индексов: $\bar{I},\bar{J},\bar{K}=\overline{0,n}$; $\alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}$; $\sigma,\tau,\rho,\varepsilon=\overline{1,n-1}$; $i,j,k=\overline{\tau+1,m}$; $a,b,c=\overline{1,m}$; $u,v=\overline{\tau+1,n-1}$; $p,q=\overline{1,\tau}$; $I,J,K=\overline{1,n}$.

<u>1.Нормаль $\mathfrak{N}$</u> . Сущность соответствия Бомпьяни-Пантази для распределения гиперплоскостных элементов [6],[3] состоит в том,что нормаль 2-го рода,соответствующая в проективитете Бомпьяни-Пантази некоторой нормали 1-го рода,является характеристикой элемента при смещении центра по кривым,принадлежащим распределению этих нормалей 1-го рода.

Пусть плоскость Нордена-Тимофеева $q(L_0)$,определенная объектом $\{q_{\sigma}\}$ [8,§ 5],является характеристикой гиперплоскости $H(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым,принадлежащим распределению нормалей 1-го рода $\mathfrak{N}(L_0)$,определяемых некоторым геометрическим объектом $\{\mathfrak{N}^{\sigma}_{n}\}$. Построим охват объекта $\{\mathfrak{N}^{\sigma}_{n}\}$.Предварительно найдем уравнения,определяющие характеристику гиперплоскости $H(L_0)$[8, § 4] в репере $\mathcal{R}_1(H,M)$ при смещении центра L_0 по кривым

$$\theta^{\sigma}_{0}=\mathfrak{N}^{\sigma}_{n}\theta^{n}_{0},\quad \theta^{n}_{0}=\mu^{n}\theta,\quad (\mu^{n}\neq 0,\ D\theta=\theta\wedge\theta_{1}), \tag{1}$$

принадлежащим распределению нормалей $\mathfrak{N}(L_0)$.
В результате получим

$$y^{0}+(A^{n}_{\sigma n}+A^{n}_{\sigma\rho}\mathfrak{N}^{\rho}_{n})y^{\sigma}=0,\quad y^{n}=0. \tag{2}$$

Введенные здесь функции [8,см.§ 3,§4]

$$A^{n}_{\sigma n}\equiv\{F^{n}_{an};H^{n}_{\alpha n}\}\equiv\{\Lambda^{n}_{pn},H^{n}_{in};H^{n}_{\alpha n}\}\equiv\{\Lambda^{n}_{pn};H^{n}_{un}\},$$
$$A^{n}_{\sigma\rho}\equiv\{F^{n}_{ab},H^{n}_{\alpha b};F^{n}_{a\beta},H^{n}_{\alpha\beta}\}\equiv\{B^{n}_{pq},B^{n}_{uq};\Lambda^{n}_{pv},H^{n}_{uv}\}\equiv\{A^{n}_{\sigma q},A^{n}_{\sigma v}\}, \tag{3}$$

в силу формул (3.62),(3.64),(4.17),(4.18),(4.79) работы [8] в репере $\mathcal{R}_1(H,M)$ удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\overset{(\theta)}{\nabla}A^{n}_{\sigma n}=A^{n}_{\sigma\tau}\theta^{\tau}_{n}+\theta^{0}_{\sigma}+A^{n}_{\sigma nK}\omega^{K}_{0}, \tag{4}$$
$$\overset{(\theta)}{\nabla}A^{n}_{\sigma\rho}=A^{n}_{\sigma\rho K}\omega^{K}_{0}. \tag{5}$$

Плоскость (2) совпадает с плоскостью Нордена-Тимофеева $q(L_0)$ тогда и только тогда,когда выполняются равенства

$$q_{\sigma}=-(A^{n}_{\sigma n}+A^{n}_{\sigma\rho}\mathfrak{N}^{\rho}_{n}). \tag{6}$$

В общем случае

$$A=\det\|A^{n}_{\sigma\rho}\|\neq 0, \tag{7}$$

что позволяет ввести в рассмотрение обращенный тензор $A^{\sigma\rho}_{n}$,удовлетворяющий уравнениям

$$\overset{(\theta)}{\nabla}A^{\sigma\rho}_{n}=A^{\sigma\rho}_{nK}\omega^{K}_{0} \tag{8}$$

и конечным соотношениям

$$A^{n}_{\sigma\tau}A^{\tau\rho}_{n}=\delta^{\rho}_{\sigma},\quad A^{n}_{\sigma\rho}A^{\tau\sigma}_{n}=\delta^{\tau}_{\rho}. \tag{9}$$

Свернув уравнения (6) с тензором $A^{\sigma\tau}_{n}$,представим их в виде

$$\mathfrak{N}^{\tau}_{n}=-A^{\tau\sigma}_{n}(q_{\sigma}+A^{n}_{\sigma n}). \tag{10}$$

Таким образом,(n-2)-мерные плоскости (6) и $q(L_0)$[8.§ 5] совпадают тогда и только тогда,когда имеет место формула (10) охвата объекта $\{\mathfrak{N}^{\tau}_{n}\}$,компоненты которого в репере $\mathcal{R}_1(H,M)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\mathfrak{N}^{\sigma}_{n}+\theta^{\sigma}_{n}=\mathfrak{N}^{\sigma}_{nK}\omega^{K}_{0}. \tag{11}$$

Отсюда следует,что поле геометрического объекта $\{\mathfrak{N}^{\sigma}_{n}\}$ определяет поле нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения.

<u>2.Нормаль Михэйлеску.</u> Нормаль Михэйлеску 1-го рода $\{M^{\sigma}_{n}\}$ H-распределения (или,что то же, $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-рас-

пределения) определяется во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента и имеет следующее строение (находится аналогично построениям Балазюк Т.Н. [1]):

$$M^\sigma_n = -\frac{1}{2(n+1)}\left(W^n_{\xi\tau\rho} + W^n_{\xi\tau n}H^n_\rho + W^n_{\rho\tau}H^n_{\xi n} + W^n_{\xi\rho}H^n_{\tau n} + W^n_{\xi\tau}H^n_{\rho n}\right) W^{\sigma\xi}_n \mathcal{W}^{\tau\rho}_n, \quad (12)$$

где совокупность функций $\{W^{\sigma\xi}_n\}$ образует обращенный тензор 1-го порядка (вообще говоря, несимметрический) для тензора $\{W^n_{\xi\rho}\}$ [8, § 2]:

$$W^{\sigma\xi}_n W^n_{\xi\rho} = \delta^\sigma_\rho, \quad W^{\sigma\xi}_n W^n_{\rho\sigma} = \delta^\xi_\rho, \quad \overset{(\vartheta)}{\nabla} W^{\sigma\xi}_n = W^{\sigma\xi}_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \quad (13)$$

а совокупность функций $\{\mathcal{W}^{\tau\rho}_n\}$ является обращенным симметрическим тензором 1-го порядка относительно симметрического тензора 1-го порядка

$$\mathcal{W}^n_{\xi\rho} = \frac{1}{2}\left(W^n_{\xi\rho} + W^n_{\rho\xi}\right). \quad (14)$$

Оператор $\overset{(\vartheta)}{\nabla}$ записан относительно форм $\vartheta^{\bar{x}}_{\bar{y}}$, являющихся компонентами инфинитезимального перемещения репера нулевого порядка $\mathcal{R}_\tau(H)$, определенного точками:

$$A_0, \quad T_\sigma = A_\sigma + H^n_\sigma A_n, \quad T_n = A_n. \quad (15)$$

Величины M^σ_n в репере $\mathcal{R}_\tau(H)$ удовлетворяют уравнениям

$$\overset{(\vartheta)}{\nabla} M^\sigma_n + \vartheta^\sigma_n = M^\sigma_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \quad (16)$$

а относительно репера $\mathcal{R}(H)$ [8, § 3] формулы охвата объекта $\{M^\sigma_n\}$ совпадают с формулами, введенными в работе [6], и удовлетворяют уравнениям вида

$$\nabla M^\sigma_n + \omega^\sigma_n = M^\sigma_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0. \quad (17)$$

В репере $\mathcal{R}_1(H,M)$ нормаль Михэйлеску $\mathfrak{M}(L_0)$ определяется системой уравнений:

$$y^\sigma = \mathfrak{M}^\sigma_n y^n, \quad (18)$$

где

$$\mathfrak{M}^i_n = M^i_n - \Lambda^i_q M^q_n; \quad \mathfrak{M}^p_n = M^p_n; \quad \mathfrak{M}^\alpha_n = M^\alpha_n, \quad (19)$$

причем величины M^σ_n удовлетворяют уравнениям (17). В силу этого относительно репера $\mathcal{R}_1(H,M)$ компоненты объекта $\{\mathfrak{M}^\sigma_n\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\mathfrak{M}^a_n + \mathfrak{M}^\alpha_n\theta^a_\alpha + \theta^a_n = \mathfrak{M}^a_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0, \quad (20)$$

$$\overset{(\theta)}{\nabla}\mathfrak{M}^\alpha_n + \theta^\alpha_n = \mathfrak{M}^\alpha_{n\varkappa}\omega^\varkappa_0. \quad (21)$$

3. Нормаль $\mathfrak{P}$. Построим еще одну нормаль 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, использовав построенную нами ранее нормаль 2-го рода H-распределения - плоскость Нордена-Тимофеева $\mathfrak{p}(L_0)$ [8, § 5]. Пусть в проективитете Бомпьяни-Пантази плоскость Нордена-Тимофеева, определенная объектом $\{\mathfrak{p}_\sigma\}$ [8, §5], является характеристикой гиперплоскости при смещении центра L_0 по кривым, принадлежащим распределению нормалей 1-го рода $\mathfrak{P}(L_0)$, определяемых некоторым геометрическим объектом $\{\mathfrak{P}^\sigma_n\}$. Построим охват искомого объекта $\{\mathfrak{P}^\sigma_n\}$ нормали $\mathfrak{P}(L_0)$, следуя работам [1],[6].

Характеристика гиперплоскости $H(L_0)$ при смещении центра L_0 по кривым

$$\theta^\sigma_0 = \mathfrak{P}^\sigma_n\theta^n_0, \quad \theta^n_0 = \mu^n\theta, \quad (\mu^n \ne 0, \ \mathcal{D}\theta = \theta\wedge\theta_1), \quad (22)$$

принадлежащим распределению нормали $\mathfrak{P}(L_0)$, определяется системой уравнений

$$y^0 + \left(A^n_{\sigma n} + A^n_{\sigma\tau}\mathfrak{P}^\tau_n\right)y^\sigma = 0, \quad y^n = 0. \quad (23)$$

(n-2)-мерная плоскость, определяемая в текущем элементе

$H(L_0)$ системой уравнений (23), совпадает с плоскостью Нордена-Тимофеева $p(L_0)$ тогда и только тогда, когда выполняются соотношения

$$p_\sigma = -(A^{n'}_{\sigma n} + A^{n}_{\sigma\tau} \wp^{\tau}_{n}). \qquad (24)$$

Свернув уравнения (24) с тензором $A^{\tau\sigma}_{n}$, удовлетворяющим условиям (9), приведем эти уравнения к виду

$$\wp^{\tau}_{n} = -A^{\tau\sigma}_{n}(p_\sigma + A^{n}_{\sigma n}). \qquad (25)$$

Значит, (n-2)-мерные плоскости (23) и $p(L_0)$ [8, § 5] совпадают тогда и только тогда, когда охват объекта $\{\wp^{\tau}_{n}\}$ имеет вид (25). Компоненты объекта $\{\wp^{\tau}_{n}\}$ в репере $R_1(H,M)$ удовлетворяют уравнениям

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \wp^{\tau}_{n} + \theta^{\tau}_{n} = \wp^{\tau}_{nx}\omega^{x}_{0}. \qquad (26)$$

Отсюда следует, что поле геометрического объекта $\{\wp^{\tau}_{n}\}$ определяет поле нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения. Так как охваты объектов $\{\wp^{\sigma}_{n}\}$ и $\{Q^{\sigma}_{n}\}$, определяющих соответственно одномерные нормали $\wp(L_0)$ и $Q(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, существенно зависят от выбранной нами одномерной нормали $\nu(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, то будем говорить, что нормали $\wp(L_0)$ и $Q(L_0)$ ассоциированны с одномерной нормалью $\nu(L_0)$. В общем случае такие нормали будем обозначать $\wp_\nu$ и Q_ν.

Отметим, что нормали 1-го рода $\wp(L_0)$ и $Q(L_0)$ $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения ассоциированны с нормалью Михэйлеску $\mathfrak{M}(L_0)$, так как соответствующие им при построении плоскости Нордена-Тимофеева $p(L_0)$ и $q(L_0)$ построены [8] с существенным использованием нормали Михэйлеску $\mathfrak{M}(L_0)$.

Можно показать, что среди объектов $\{Q^{\tau}_{n}\}$(10), $\{\mathfrak{M}^{\tau}_{n}\}$(19), $\{\wp^{\tau}_{n}\}$ (25) нет ни одной пары совпадающих и что ни один из них не является комбинацией двух других.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. Поля объектов $\{\wp^{\sigma}_{n}\}$, $\{Q^{\sigma}_{n}\}$, $\{\mathfrak{M}^{\sigma}_{n}\}$ определяют внутренним инвариантным образом во второй дифференциальной окрестности три однопараметрических пучка $(\wp,\mathfrak{M})$, $(Q,\mathfrak{M})$, $(\wp, Q)$ одномерных нормалей $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, ассоциированных с нормалью Михэйлеску $\mathfrak{M}(L_0)$.

З а м е ч а н и е. При $\tau = m$, т.е. в случае гиперполосного распределения плоскости $p(L_0)$ и $q(L_0)$ Нордена-Тимофеева оснащающего H-распределения совпадают [8] и, следовательно, $\wp(L_0) \equiv Q(L_0)$. Значит, в этом случае мы имеем только один пучок (из трех) нормалей $(\wp,\mathfrak{M})$ 1-го рода H-распределения, ассоциированный с нормалью Михэйлеску $\mathfrak{M}(L_0)$.

Имеет место более общее утверждение:

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ (t - порядок внутренней инвариантной нормали ν) внутренним инвариантным образом присоединяются три однопараметрических пучка $(\nu,\wp_\nu)$, (ν, Q_ν), $(\wp_\nu, Q_\nu)$ нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, ассоциированных с нормалью ν, где $\wp_\nu$, Q_ν -одномерные нормали H- распределения, соответствующие в обобщенном проективитете Бомпьяни-Пантази соответственно плоскостям p и q Нордена-Тимофеева.

Любая нормаль, принадлежащая одному из пучков $(\nu,\wp_\nu)$, (ν, Q_ν), $(\wp_\nu, Q_\nu)$ вместе с $H\Lambda$- виртуальной нормалью 1-го рода $\chi(L_0)$ [8,(4.8)] порождает двойственную нормализацию базисного Λ-распределения в смысле Нордена-Чакмазяна [5],[9]. Таким образом, имеет место

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ (t -порядок внутренней инвариантной нормали $\nu(L_0)$ 1-го рода H-распределения) внутренним инвариантным образом присоединяются к Λ-распределению три однопараметрических пучка двойственных нормализаций в смысле Нордена-Чакмазяна [5],[9] с общей осью плоскостью $\chi(L_0)$.

Аналогично, любая нормаль 1-го рода H-распределения, принадлежащая одному из пучков $(\nu, \mathcal{P}_\nu)$, $(\nu, \mathcal{Q}_\nu)$, $(\mathcal{P}_\nu, \mathcal{Q}_\nu)$, где ν - внутренняя инвариантная нормаль порядка $t \geqslant 2$, вместе с HM- виртуальной нормалью 1-го рода $\Phi(L_0)$ [8, (4.22)] порождает двойственную нормализацию в смысле Нордена-Чакмазяна.

В результате приходим к следующему предложению.

Теорема 4. В дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ внутренним инвариантным образом присоединяются к оснащающему M- распределению три однопараметрических пучка двойственных нормализаций в смысле Нордена-Чакмазяна с общей осью - плоскостью $\Phi(L_0)$.

4. Канонические касательные пучков $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$, $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$, $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$.

Рассмотрим три пучка $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$, $(\mathcal{Q}, \mathcal{M})$, $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$ инвариантных нормалей 1-го рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения, ассоциированных с нормалью Михэйлеску $\mathcal{M}(L_0)$, которые зададим соответственно в виде:

$$\mathcal{X}_n^\sigma(\vartheta) = \mathcal{P}_n^\sigma + \vartheta(\mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma) \equiv \mathcal{P}_n^\sigma + \vartheta \mathcal{X}_n^\sigma, \tag{27}$$

$$\mathcal{Y}_n^\sigma(\eta) = \mathcal{Q}_n^\sigma + \eta(\mathcal{Q}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma) \equiv \mathcal{Q}_n^\sigma + \eta \mathcal{Y}_n^\sigma, \tag{28}$$

$$\mathcal{Z}_n^\sigma(\varkappa) = \mathcal{P}_n^\sigma + \varkappa(\mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{Q}_n^\sigma) \equiv \mathcal{P}_n^\sigma + \varkappa \mathcal{Z}_n^\sigma, \tag{29}$$

где $\vartheta, \eta, \varkappa$ -абсолютные инварианты. Так как $\{\mathcal{M}_n^\sigma\}$, $\{\mathcal{P}_n^\sigma\}$, и $\{\mathcal{Q}_n^\sigma\}$- тензоры второго порядка, то каждая из совокупностей функций

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{X}_n^\sigma \overset{def}{=} \mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma, \quad \mathcal{Y}_n^\sigma \overset{def}{=} \mathcal{Q}_n^\sigma - \mathcal{M}_n^\sigma, \\ &\mathcal{Z}_n^\sigma \overset{def}{=} \mathcal{P}_n^\sigma - \mathcal{Q}_n^\sigma \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

образует тензор второго порядка:

$$\overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{X}_n^\sigma = \mathcal{X}_{nK}^\sigma \omega_0^K, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{Y}_n^\sigma = \mathcal{Y}_{nK}^\sigma \omega_0^K, \quad \overset{(\theta)}{\nabla} \mathcal{Z}_n^\sigma = \mathcal{Z}_{nK}^\sigma \omega_0^K. \tag{31}$$

Условно будем считать, что значению $\vartheta = \infty$ соответствует в плоскости текущего элемента H-распределения прямая $\mathcal{X}(L_0)$, по которой плоскость $[\mathcal{P}, \mathcal{M}]$ пучка $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$ сечет соответствующий элемент H-распределения, т.е. плоскость $H(L_0)$. Прямая

$$\mathcal{X} = [L_0, \mathcal{X}_n = \mathcal{X}_n^\sigma L_\sigma], \tag{32}$$

натянутая на точки $L_0, \mathcal{X}_n = \mathcal{X}_n^\sigma L_\sigma$, называется канонической касательной пучка $(\mathcal{P}, \mathcal{M})$.

Аналогичным образом находим, что прямые

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= [L_0, \mathcal{Y}_n = \mathcal{Y}_n^\sigma L_\sigma], \\ \mathcal{Z} &= [L_0, \mathcal{Z}_n = \mathcal{Z}_n^\sigma L_\sigma] \end{aligned} \tag{33}$$

являются каноническими касательными соответственно пучков (28) и (29). Резюмируя результаты этого пункта, приходим к выводу:

Теорема 5. В дифференциальной окрестности второго порядка к оснащающему H-распределению в каждом центре L_0 внутренним инвариантным образом присоединяются три однопараметрических пучка $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$, $(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ канонических касательных, порожденных пучками (27)-(29).

Геометрические объекты

$$\begin{aligned} &\{\mathcal{X}_n^u\}, \{\mathcal{X}_n^\alpha\}, \{\check{\mathcal{X}}_n^p \equiv \mathcal{X}_n^p - \chi_i^p \mathcal{X}_n^i - \chi_\alpha^p \mathcal{X}_n^\alpha\}, \\ &\{\mathcal{Y}_n^u\}, \{\mathcal{Y}_n^\alpha\}, \{\check{\mathcal{Y}}_n^p \equiv \mathcal{Y}_n^p - \chi_i^p \mathcal{Y}_n^i - \chi_\alpha^p \mathcal{Y}_n^\alpha\}, \\ &\{\mathcal{Z}_n^u\}, \{\mathcal{Z}_n^\alpha\}, \{\check{\mathcal{Z}}_n^p \equiv \mathcal{Z}_n^p - \chi_i^p \mathcal{Z}_n^i - \chi_\alpha^p \mathcal{Z}_n^\alpha\} \end{aligned} \tag{34}$$

являются тензорами второго порядка, равенство нулю которых характеризует взаимное расположение соответственно канонических касательных $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ (в каждом центре L_0) с инвариантными плоскостями $\Lambda(L_0)$, $M(L_0)$, $\chi(L_0)$ [8, §4], лежащими в гиперплоскости $H(L_0)$.

Действительно, имеют место следующие предложения [1]:

1/ каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)$ (соответственно $\mathcal{Y}(L_0)$, $\mathcal{Z}(L_0)$) тогда и только тогда принадлежит плоскости $\Lambda(L_0)$, когда тензор $\mathcal{X}_n^u$ (соответственно $\mathcal{Y}_n^u$, $\mathcal{Z}_n^u$) равен нулю;

2/каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)(\mathcal{Y}(L_0),\mathcal{Z}(L_0))$ тогда и только тогда принадлежит плоскости $M(L_0)$, когда тензор $\mathcal{X}^{\alpha}_{n}\ (\mathcal{Y}^{\alpha}_{n};\ \mathcal{Z}^{\alpha}_{n})$ равен нулю;

3/каноническая касательная $\mathcal{X}(L_0)(\mathcal{Y}(L_0),\mathcal{Z}(L_0))$ тогда и только тогда принадлежит плоскости $\chi(L_0)$ ([8, §4]), когда тензор $\check{\mathcal{X}}^{p}_{n}\ (\check{\mathcal{Y}}^{p}_{n};\ \check{\mathcal{Z}}^{p}_{n})$ равен нулю.

Список литературы

1.Балазюк Т.Н.Дифференциальная геометрия m-мерных линейных элементов,оснащенных конусом .II. ВИНИТИ АН СССР,М.,1978,23с.,библиогр.6 назв.(Рукопись деп. в ВИНИТИ 24 января 1978г., № 268-78 Деп.)

2.Домбровский Р.Ф.О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,r}$,в P_n .Всесоюзн.конф.по неевклидовой геометрии "150 лет геометрии Лобачевского".Казань, Тезисы докл.,1976,с.69.

3.Лаптев Г.Ф.,Н.М.Остиану.Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I. - Тр.Геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР, т.3,с.49-94.

4.Норден А.П.,Тимофеев Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств.-Известия высших учебн.заведений.Математика,1972,№ 8(123); с.81-89.

5.Норден А.П. Пространства аффинной связности.М., Наука,1976.

6.Остиану Н.М. Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве.-Тр.Геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР,1973,т.4,с.71-120.

7.Попов Ю.И. О голономности $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.15.Калининград,1984,с.71-78.

8.Попов Ю.И.Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства.I.Калининград,1984,93с.,библиограф.21 назв.(Рукопись деп.в ВИНИТИ АН СССР 2 июля 1984г.,№ 4481-84 Деп.).

9.Чакмазян А.В. Двойственная нормализация.-Докл. АН Арм.ССР,1959,28,№ 4,с.151-157.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

А.Г.Р е з н и к о в

ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ ГРУПП ЛИ

В работе [1] была выяснена связь между расслоениями трехмерной сферы S^3 со стандартной метрикой на геодезические окружности и сжимающими отображениями сферы S^2,также снабженной стандартной метрикой и расстоянием.Такой подход позволяет распространить указанную связь на случай расслоений групп. Пусть $H\subset G$ - компактные группы Ли,причем G связана, $M=G/H$ - соответствующее однородное пространство.Назовем подгруппу H обширной,если выполнены следующие условия:
1/нормализатор $N(H)$ подгруппы H совпадает с H;
2/действие H на проективизации факторпространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ транзитивное ($\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ -алгебры Ли групп G,H).

В силу компактности H пространство M можно снабдить G - инвариантной римановой метрикой,а сами группы G,H -би-инвариантными метриками. Легко видеть, что условие 2/ эквивалентно следующему:
2'/ группа G транзитивно действует на эквидистантных парах,т.е. если $\rho(x,y)=\rho(x_1,y_1)$,то существует $g\in G$ такой,что $gx=x_1,\ gy=y_1$ (ρ -риманово расстояние на M).В качестве примера обширной подгруппы $H\subset G$ можно поэтому взять вложения $SO(n)\subset SO(n+1)$ или $SU(n)\subset SU(n+1)$. Обширна и подгруппа $S^1\approx SO(2)\subset SU(2)\approx S^3$.
Мы получим полное описание расслоений группы G на вполне геодезические слои вида fHg ,где $f,g\in G$.
Прежде всего выясним,до какой степени элементы f,g определены множеством $F=fHg$. Пусть f' и g' -другие элементы,такие ,что $fHg=F=f'Hg'$. Имеем $f'^{-1}fHgg'^{-1}=H$;

пусть $f'^{-1}f=\alpha,\ gg'^{-1}=\beta$, так что $\alpha H\beta=H$. В частности, $\alpha\beta=h\in H$, откуда $\beta=\alpha^{-1}h$, и поэтому $\alpha H\alpha^{-1}=H$. Значит, в силу свойства 1/ элементы α,β лежат в H, так что $f\in f'H,\ g\in Hg'$.

Л е м м а I. Множество F вида fHg однозначно определяет два элемента $\bar f\in G/H$ и $\overline{g^{-1}}\in G/H$, где $\bar d=dH$. Очевидно, что и обратно, два элемента $\bar f,\bar g\in M=G/H$ определяют корректно многообразие $F=fHg^{-1}$. В дальнейшем такую пару $(\bar f,\bar g)\in M\times M$ будем называть ассоциированной с множеством F.

Л е м м а 2. Пусть $H\subset G$ -обширная группа, F_1,F_2 - два многообразия вида fHg, (x_1,y_1), (x_2,y_2) -ассоциированные с ними пары. Пересечение $F_1\cap F_2$ непусто тогда и только тогда, когда $\rho(x_1x_2)=\rho(y_1y_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_i=f_iH, y_i=g_iH, i=1,2$. Непустота $F_1\cap F_2$ означает, что существуют такие $\alpha,\beta\in H$, что $f_1\alpha g_1^{-1}=f_2\beta g_2^{-1}$, или, иначе $\beta^{-1}f_2^{-1}f_1\alpha=g_2^{-1}g_1$. С другой стороны, в силу G -инвариантности метрики и расстояния на M, $\rho(x_1x_2)=\rho(\bar f_1,\bar f_2)=\rho(\overline{f_2^{-1}f_1},\bar e)$; и аналогично $\rho(y_1,y_2)=\rho(\overline{g_2^{-1}g},\bar e)$. В силу условия 2/ равенство $\rho(x_1x_2)=\rho(y_1y_2)$ эквивалентно существованию такого элемента $\gamma\in G$, что $\gamma\bar e=\bar e$ и $\overline{\gamma f_2^{-1}f_1}=\overline{g_2^{-1}g_1}$, т.е. $\gamma\in H$ и существует такое $\delta\in H$, что $\gamma f_2^{-1}f_1=g_2^{-1}g_1\delta$. Лемма доказана.

Нам понадобится понятие сжимающего отображения, несколько отличное от обычного. Пусть N -компактное метрическое пространство с функцией расстояния ρ. Отображение $\psi: N\to N$ будем называть сжимающим, если $\rho(\psi x,\psi y)<\rho(x,y)$ для всех $x,y\in N$, $x\neq y$. Любое сжимающее отображение имеет единственную неподвижную точку.

Пусть теперь ξ -локально-тривиальное расслоение группы G на слои вида fHg, где H -обширная подгруппа. Рассмотрим подмножество $A\subset M\times M$, состоящее из пар, ассоциированных со слоями ξ. Через A^{-1} будем обозначать обратное отношение.

Т е о р е м а 1. Либо A, либо A^{-1} является графиком сжимающего отображения из M в M. Обратно, если $\varphi: M\to M$ - сжимающее отображение, A -его график, то множество многообразий F, ассоциированных с парами из A (или A^{-1}), определяет расслоение группы G на вполне геодезические слои вида fHg.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть B -база расслоения ξ; очевидно, $\dim B=\dim M$. Отображение $\tau: B\to M\times M$, сопоставляющее точке $p\in B$ пару из $M\times M$, ассоциированную с соответствующим слоем ξ, очевидно, непрерывно. Очевидно, что $A=\operatorname{Im}\tau$. Пусть τ_1,τ_2 -суперпозиции τ с проекциями на первый и второй сомножители $M\times M$, p и q - две различные точки B. Слои над p и q не пересекаются, поэтому по лемме 2, $\rho(\tau_1p,\tau_1q)\neq\rho(\tau_2p,\tau_2q)$. Так как обе части последнего неравенства непрерывно зависят от p, q, а B связно вместе с G, то либо всегда $\rho(\tau_1p;\tau_1q)>\rho(\tau_2p,\tau_2q)$, либо наоборот. Рассмотрим первый случай (второй разбирается аналогично). Имеем $\rho(\tau_1p,\tau_1q)>0$ т.е. τ_1 инъективно. Из теоремы об инвариантности области, совпадения размерностей B и M и компактности B и M следует, что τ_1 -гомеоморфизм. Значит $\tau_2\circ\tau_1^{-1}$ -корректно определенное сжимающее отображение.

Обратно, пусть $\varphi: M\to M$ -сжимающее отображение, $F(p)$ $(p\in M)$ -многообразие вида fHg, ассоциированное с парой $(p,\varphi(p))$. Мы хотим показать, что набор слоев $F(p)$ определяет расслоение G над M. Рассмотрим ситуацию локально, в некоторой окрестности O точки a. Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi(\bar a)=\bar a$ (общий случай сводится к этому при помощи суперпозиции со сдвигом). Пусть $s: O\to G$, $s(\bar a)=a$ -локальное сечение канонического расслоения $G\to M$, тогда, очевидно $F(p)=s(p)Hs(\varphi(p))^{-1}$. Слои $F(p)$ не пересекаются в силу леммы 2. Рассмотрим отображение $\varkappa: O\times H\to G$, $\varkappa(p,h)=s(p)hs(\varphi(p))^{-1}$. Оно, следовательно, инъективно и, как выше, является локальным гомеоморфизмом из-за совпадений размерностей. Пусть $N=\bigcup F(p)$. Мы видим, что N открыто в G и расслоено над M со слоем, гомеоморфным H. Следовательно, N

компактно,т.е. $M=G$. Теорема доказана.

Замечательно,что существует конструкция,позволяющая по сжимающему отображению однородного пространства $M=G/_H$ строить расслоения G на слои вида fHg без предположения обширности и даже компактности и связности G и H. А именно,пусть M снабжено инвариантной метрикой (автоматически полной), $\varphi: M\to M$ сжимающее отображение (если M некомпактно,то потребуем,как обычно, липшицевости с константой,меньшей единицы).Рассмотрим следующее отображение $\chi: G\to M$, $\chi(g)$ суть единственная неподвижная точка суперпозиции $\pi(g)\circ\varphi$,где $\pi(g): M\to M$ -действие g .Легко проверяется,что оно непрерывно.Изучим его слои.Пусть $p_0=f_0H\in M$, $\chi(d_0)=p_0$,т.е. $d_0\varphi(p_0)=p_0$. Если d лежит в том же слое,что и d_0 ,то имеем $d\varphi(p_0)=p_0$, или $dd_0^{-1}p_0=p_0$,т.е. $dd_0^{-1}f_0H=f_0H$, значит,для некоторого $k\in H$, $dd_0^{-1}f_0=f_0k$, откуда $d=f_0kf_0^{-1}d_0$. Ясно,что и обратно,если $d\in f_0Hf_0^{-1}d_0$,то $\chi(d)=p_0$. Итак, слои имеют вид fHg .Более того,элементы f и g могут быть выбраны непрерывно зависящими от p_0 ,поэтому χ - локально-тривиальное расслоение.

Отметим аналог нашей конструкции для конечных групп. Пусть M -конечное метрическое пространство с расстоянием ρ ,инвариантным относительно транзитивно действующей на эквидистантных парах группы G , H - группа изотропии.Тогда разбиения G на слои вида fHg также отвечают графикам таких отношений A ,которые "вполне неизометричны" в том смысле,что если $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A$, то $\rho(x_1,x_2)\neq\rho(y_1,y_2)$. Любое множество вида fHg состоит из поворота и отражения.Следовательно,имеется ровно $n!$ "вполне неизометричных" отношений.

Список литературы

1. Gluck H., Warner F.W. Great circle fibrations of the three-sphere.- Duke Math. J. 1983, vol.50, No. 1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

Г.Л.Свешникова

КОНГРУЭНЦИИ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМИ НЕВЫРОЖДАЮЩИМИСЯ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются невырожденные конгруэнции K^3 кривых второго порядка C [1], [2] с двумя трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями.

Отнесем конгруэнцию K^3 к реперу $R=\{A_\alpha\}, \alpha,\beta,\gamma=\overline{1,4}$. Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_\alpha=\omega_\alpha^\beta A_\beta$, причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства $\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta=\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^\beta$ и условию эквипроективности $\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3+\omega_4^4=0$. Вершины A_1 и A_2 репера R совместим с трехкратными фокальными точками коники C ,описывающими невырождающиеся поверхности,вершину A_3 поместим в полюс прямой A_1A_2 относительно коники C,вершину A_4 - в произвольную точку пространства вне плоскости коники.

Уравнения коники C в этом репере,с учетом соответствующей нормировки вершин,примут вид

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\ x^4=0. \tag{1}$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i^j,\ \omega_i^3,\ \omega_i^4,\ \omega_3^i,\ \omega_3^4,\ \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3\quad (i,j,k=1,2;\ i\neq j)$$

являются главными формами конгруэнции K^3 .Будем считать линейно независимые формы $\omega_i^4\overset{def}{=}\omega_i$ базисными формами конгруэнции K^3.

Пусть ℓ есть линия пересечения касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i , B_i -точка пересечения прямой ℓ с касательной к линии $\omega_j = 0$ на поверхности (A_i). Вершину A_4 зафиксируем на прямой ℓ так, чтобы она являлась четвертой гармонической точкой к точке A_3 относительно точек B_1 и B_2.

Конгруэнция K^3 относительно построенного геометрически фиксированного репера определяется системой уравнений Пфаффа

$$
\begin{gathered}
\omega_i^j = 0, \ \omega_1^3 = \Gamma_1^{3k}\omega_k, \ \omega_2^3 = \Gamma_2^{31}\omega_1 - \Gamma_1^{31}\omega_2, \ \omega_3^1 = \Gamma_2^{31}\omega_1 + \Gamma_3^{12}\omega_2, \\
\omega_3^2 = \Gamma_3^{21}\omega_1 + \Gamma_1^{32}\omega_2; \ \omega_4^1 = \Gamma_2^{31}(\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31})\omega_1 + \Gamma_4^{12}\omega_2, \\
\omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \ \omega_4^2 = \Gamma_4^{21}\omega^1 + \Gamma_1^{32}(\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31})\omega_2, \ \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \\
\omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 2\Gamma_3^{41}(\Gamma_3^{12} + \Gamma_1^{31})\omega_1 + 2\Gamma_3^{42}(\Gamma_3^{21} - \Gamma_1^{31})\omega_2
\end{gathered}
\tag{2}
$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (2). Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнции K^3 существуют с произволом двух функций двух аргументов.

Назовем конгруэнцией K_1^3 конгруэнцию K^3, у которой поверхность (A_3) является огибающей поверхностью семейства плоскостей коник C, а также существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4).

Конгруэнции K_1^3 выделяются из конгруэнций K^3 конечными соотношениями

$$
\Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = \Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = 0, \ \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21} = \Gamma_1^{32}\Gamma_2^{31}. \tag{3}
$$

Учитывая равенства (3) в системе (2) и осуществляя соответствующие нормировки вершин репера, получаем систему уравнений Пфаффа конгруэнции K_1^3 в виде:

$$
\begin{gathered}
\omega_i^j = \omega_3^4 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 0, \ \omega_1^3 = \omega_4^1 = \Gamma_1^{31}\omega_1 + \omega_2, \\
\omega_2^3 = \omega_4^2 = \omega_1 - \Gamma_1^{31}\omega_2, \ \omega_3^i = \omega_i, \ \omega_4^3 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \\
\omega_1^1 - \omega_2^2 = -\Gamma_4^{32}\omega_1 + \Gamma_4^{31}\omega_2, \ \omega_3^3 - \omega_4^4 = -(\Gamma_4^{32}\omega_1 + \Gamma_4^{31}\omega_2), \\
d\Gamma_1^{31} = -\Gamma_1^{31}(\omega_3^3 - \omega_4^4) + \Gamma_4^{31}\omega_1 - \Gamma_4^{32}\omega_2, \ (\Gamma_1^{31} \neq 0), \\
d\Gamma_4^{31} = \Gamma_4^{31}(\omega_4^4 - \omega_2^2), \ d\Gamma_4^{32} = \Gamma_4^{32}(\omega_4^4 - \omega_1^1).
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Доказано, что система уравнений (4) является вполне интегрируемой и определяет конгруэнции K_1^3 с точностью до постоянных.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции K_1^3 обладают следующими свойствами: 1/ фокусы луча A_3A_4 прямолинейной конгруэнции (A_3A_4) гармонически делят точки A_3 и A_4; 2/ торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2), (A_3A_4) и (A_iA_3) соответствуют; 3/ асимптотические линии на поверхностях (A_i) и (A_3) соответствуют; 4/ двойные точки Ермолаева фокальных поверхностей (A_1) и (A_2) гармонически делят точки A_3 и A_4.

Назовем конгруэнцией K_2^3 такую конгруэнцию K^3, для которой асимптотические линии на фокальных поверхностях (A_i) гармонически делят координатные линии $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 0$, а точка A_3 является характеристической точкой грани $(A_1A_2A_3)$.

Из условий определения конгруэнции K_2^3 получаем следующие конечные соотношения:

$$
\begin{gathered}
\Gamma_3^{12} = \Gamma_3^{21} = \Gamma_3^{41} = \Gamma_3^{42} = 0, \ \ \Gamma_4^{21} = -(\Gamma_1^{32})^2, \\
\Gamma_4^{12} = -(\Gamma_2^{31})^2, \ \Gamma_4^{12} = \Gamma_4^{21}, \ (\Gamma_1^{32})^2 - (\Gamma_2^{31})^2 = 0.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Так как $(\Gamma_1^{32})^2 - (\Gamma_2^{31})^2 = 0$, то возможны два случая. Случай $\Gamma_1^{32} - \Gamma_2^{31} = 0$ приводит к противоречию, поэтому существует только один класс конгруэнций K_2^3, для которого имеет место соотношение $\Gamma_1^{32} + \Gamma_2^{31} = 0$.

Система уравнений Пфаффа конгруэнции K_2^3 принимает вид

$$
\begin{gathered}
\omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_3^4 = \omega_4^3 = \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = \omega_1^1 - \omega_2^2 = 0, \\
\omega_3^3 - \omega_4^4 = 0, \ \ \omega_1^3 = \omega_1 + \omega_2, \ \ \omega_2^3 = -\omega_1 - \omega_2, \\
\omega_3^1 = -\omega_1, \ \ \omega_2^3 = \omega_2, \ \ \omega_4^1 = \omega_4^2 = -\omega_1 - \omega_2.
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Система уравнений (6) является вполне интегрируемой.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции K_2^3 обладают следующими свойствами: 1/ прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_3A_4) являются параболическими; 2/ фокусами лучей A_iA_3 прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) являются точки

A_i и A_3; 3/ фокусами лучей A_iB_i и A_iB_j прямолинейных конгруэнций (A_iB_i) и (A_iB_j) являются соответственно точки A_i, B_i и A_i, B_j; 4/торсы прямолинейных конгруэнций (A_iA_3) и (A_iB_i) соответствуют; 5/ существует двустороннее расслоение прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_3A_4); 6/поверхность (A_4) вырождается в прямую $E_{12}A_4$, где $E_{12}=A_1+A_2$; 7/ асимптотические линии на поверхностях (A_3), (E^*_{12}), (B_i) и (F_i), где E^*_{12} -четвертая гармоническая к точке E_{12} относительно вершин A_1 и A_2, а F_1 и F_2 -точки пересечения прямой $E_{12}A_3$ с коникой C, соответствуют.

Т е о р е м а 3. Фокальные поверхности (A_1) и (A_2) конгруэнции K^3_2 являются инвариантными квадриками, уравнения которых имеют соответственно вид:

$$2(x^2)^2+(x^3)^2-2x^3x^4-2x^1x^2=0, \qquad (7)$$

$$2(x^1)^2+(x^3)^2+2x^3x^4-2x^1x^2=0. \qquad (8)$$

Список литературы

1.Малаховский В.С. Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве.-Тр.Томского ун-та,1968.Геометрич.сб.,вып.3,1963, с.43-53.

2.Свешникова Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с двукратными невырождающимися фокальными поверхностями.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14,Калининград,1983,с.87-91.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.В. С к р ы д л о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ КОНИКОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве P_3 изучается один из специальных классов вырожденных [1] конгруэнций $(C_\rho)_{1,2}$, порожденных коникой C, описывающей однопараметрическое семейство, и плоскостью ρ, описывающей конгруэнцию с невырождающейся огибающей поверхностью.

Вырожденные конгруэнции такого типа характеризуются отображением, ставящим в соответствие каждой плоскости ρ единственную конику C, полным прообразом которой является одномерное подмногообразие $(\rho)_C$ плоскостей ρ. При этом каждое семейство $(\rho)_C$ высекает на огибающей поверхности плоскостей ρ некоторую линию Γ_C.

Отнесем пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, деривационные формулы которого имеют вид

$$dA_\alpha=\omega^\beta_\alpha A_\beta \quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3,4),$$

а линейные дифференциальные формы ω^β_α удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^\beta_\alpha=\omega^\gamma_\alpha\wedge\omega^\beta_\gamma$$

и условию эквипроективности

$$\omega^1_1+\omega^2_2+\omega^3_3+\omega^4_4=0.$$

Специализируем репер R таким образом, чтобы вершина A_4 совпадала с характеристической точкой плоскости ρ, вершины A_1 и A_2 совпадали с точками пересечения коники C и плоскости ρ, а вершина A_3 являлась полюсом прямой

A_1A_2 относительно коники C. Уравнения коники C и система пфаффовых уравнений вырожденных конгруэнций $(C_p)_{1,2}$ теперь приводятся соответственно к виду

$$(x^3)^2-2x^1x^2=0,\quad x^4=0;$$

$$\omega_i^j=\Gamma_i^j\omega_3^4,\quad \omega_i^4=\Gamma_i^4\omega_3^4,\quad \omega_3^4=\Gamma_3^{4k}\omega_k, \qquad (1)$$

$$\omega_4^1=\alpha\omega_1+\beta\omega_2,\quad \omega_4^2=\beta\omega_1+\gamma\omega_2,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^i\omega_3^4+\omega_j,$$

$$2\omega_3^3-\omega_1^1-\omega_2^2=\Gamma\omega_3^4,\quad \omega_4^3=0,\quad (\omega_3^4\neq 0),$$

где формы $\omega_i^3 \overset{def}{=} \omega_i$ приняты в качестве базисных, индексы i,j,k принимают значения $1,2$, причем здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и суммирование по i и j не производится.

Пронормируем вершины репера R таким образом, чтобы единичная точка $E_{1,2}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна касательной к линии Γ_c. В этом случае будет выполнено условие

$$\alpha\Gamma_3^{42}+\gamma\Gamma_3^{41}=0 \qquad (2)$$

и форма $\omega_1^1-\omega_2^2$ становится главной.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнциями K назовем конгруэнции $(C_p)_{1,2}$, для которых выполняются следующие условия: 1/ прямолинейные конгруэнции (A_iA_3) односторонне расслояемы к конгруэнции касательных к линиям Γ_c; 2/ асимптотические линии на огибающей поверхности семейства плоскостей P гармонически разделяют сеть, огибаемую прямыми (A_iA_3).

Аналитически условия определения записываются в виде

$$\omega_i^j\wedge(\omega_i+\omega_j)=0, \qquad (3)$$

$$(\omega_i^i-\omega_j^j-\omega_i^j+\omega_j^i)\wedge\omega_3^j=0, \qquad (4)$$

$$(\omega_i+\omega_j)\wedge\omega_3^j+(\omega_j^j-\omega_i^i)\wedge\omega_i^j=0 \qquad (5)$$

а также $\beta=0$.

Равенства (3) приводят к соотношениям

$$\Gamma_i^j(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})=0, \qquad (6)$$

причем при $\Gamma_3^{41}=\Gamma_3^{42}\overset{def}{=}k\neq 0$ из условий (5) будем иметь $(\Gamma_1^2-\Gamma_2^1)(\omega_1^1-\omega_2^2)\wedge\omega_3^4=0$. Если $\Gamma_1^2\neq\Gamma_2^1$, то последнее соотношение приводится к виду

$$(\omega_1^1-\omega_2^2)\wedge(\omega_1+\omega_2)=0. \qquad (7)$$

Учитывая (7) в (5), мы получаем противоречивое равенство $\omega_i\wedge\omega_j=0$.

Если $\Gamma_1^2=\Gamma_2^1$, то из условий (4) находим

$$(1+k(\Gamma_3^1+\Gamma_3^2))(\omega_1^1-\omega_2^2)\wedge(\omega_1+\omega_2)=0.$$

Так как равенство (7) приводит к противоречию, то из последнего соотношения будем иметь $1+k(\Gamma_3^1+\Gamma_3^2)=0$, откуда $\omega_3^1+\omega_3^2=0$. Замыкая полученное уравнение и учитывая условие (2), получим $\alpha=\gamma=0$. В этом случае характеристическая поверхность семейства плоскостей P вырождается в точку, что противоречит постановке задачи.

Таким образом, анализируя систему (3),(4),(5), убеждаемся, что $\Gamma_3^{41}\neq\Gamma_3^{42}$ и следовательно из соотношений (6) получим

$$\omega_i^j=0. \qquad (8)$$

В этом случае условия (4),(5) приводятся к виду

$$(\omega_i^i-\omega_j^j)\wedge\omega_3^j=0, \qquad (4')$$

$$(\omega_i+\omega_j)\wedge\omega_3^j=0. \qquad (5')$$

Складывая равенства (5'), получим $\Gamma_3^1+\Gamma_3^2=0$, откуда $\Gamma_3^1=-\Gamma_3^2\overset{def}{=}b$. Из (5') тогда будем иметь $b(\Gamma_3^{41}-\Gamma_3^{42})-1=0$. Складывая равенства (4'), находим

$$\omega_1^1-\omega_2^2=\varphi(\omega_1+\omega_2).$$

Перепишем соотношение (2) в виде $\dfrac{\Gamma_3^{41}}{\alpha}=-\dfrac{\Gamma_3^{42}}{\gamma}\overset{def}{=}\lambda$. Тогда $\Gamma_3^{41}=\alpha\lambda$, $\Gamma_3^{42}=-\gamma\lambda$, а также $b\lambda(\alpha+\gamma)=1$. Замыкая уравнения (8), получим $\Gamma_1^4=-\dfrac{b}{\alpha}$; $\Gamma_2^4=\dfrac{b}{\gamma}$. С учетом предыдущих соотношений будем иметь

$$\omega_1^4 = -\frac{1}{\alpha(\alpha+\gamma)}(\omega_4^1 - \omega_4^2), \quad \omega_2^4 = \frac{1}{\gamma(\alpha+\gamma)}(\omega_4^1 - \omega_4^2),$$
$$\omega_3^1 = -\alpha\omega_1^4 + \omega_2, \quad \omega_3^2 = -\gamma\,\omega_2^4 + \omega_1. \tag{9}$$

Осуществляя частичное продолжение системы (9) совместно с уравнениями $\omega_4^1 = \alpha\omega_1$, $\omega_4^2 = \gamma\omega_2$,находим

$$d\alpha + \alpha(2\omega_1^1 - \omega_3^3 - \omega_4^4) = -\frac{\Gamma\lambda\alpha^2(\alpha+\gamma)}{\gamma}\,\omega_1,$$
$$d\gamma + \gamma(2\omega_2^2 - \omega_3^3 - \omega_4^4) = \frac{\Gamma\lambda\gamma^2(\alpha+\gamma)}{\alpha}\,\omega_2, \tag{10}$$

а также

$$(\alpha-\gamma)(3\Gamma\lambda(\alpha+\gamma)+\varphi) = 0,$$
$$\Gamma\lambda(\alpha+\gamma) + 2\lambda\alpha\gamma + \varphi = 0. \tag{11}$$

При условии $\alpha \neq \gamma$ получим $\varphi = -3\Gamma\lambda(\alpha+\gamma)$ и следовательно $\Gamma = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$. Дифференцируя уравнение $2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = \frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}\omega_3^4$, получим $3\lambda^2\alpha^2\gamma^2 + 4 = 0$, откуда $\omega_1^1 - \omega_2^2 = -2\sqrt{-3}(\omega_1+\omega_2)$. Замыкание последнего уравнения имеет вид $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$, т.е. противоречиво. Таким образом, из (11) имеем $\alpha = \gamma$, $\varphi = -2\lambda\alpha(\Gamma+\alpha)$. Подставляя полученные соотношения в (10), будем иметь $d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_4^4) = 0$, а также $\Gamma + 2\alpha = 0$, $\varphi = 2\lambda\alpha^2$. Переобозначая $\lambda\alpha \overset{def}{=} t$, систему уравнений Пфаффа конгруэнций K окончательно запишем в виде

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^4 = \frac{1}{2\alpha}(\omega_j - \omega_i), \quad \omega_3^i = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_j),$$
$$\omega_3^4 = t(\omega_1 - \omega_2), \quad \omega_4^i = \alpha\omega_i, \quad \omega_4^3 = 0, \quad d\alpha + \alpha(\omega_3^3 - \omega_4^4) = 0, \tag{12}$$
$$2\omega_3^3 - \omega_1^1 - \omega_2^2 = -2\alpha\,\omega_3^4, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = 2\alpha t(\omega_1 + \omega_2).$$

Продолжая систему (12), находим

$$dt + t(\omega_4^4 - \omega_3^3) = 0, \tag{13}$$

причем замыкание последнего уравнения удовлетворяется тождественно.

Таким образом, конгруэнции K определяются вполне интегрируемой системой уравнений (12),(13).

Укажем некоторые свойства конгруэнций K .

1. Поверхности (A_i) огибаются семействами плоскостей $(A_i A_3 A_4)$,что непосредственно следует из равенств

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i A_3 + \omega_i^4 A_4.$$

2. Фокальные точки луча $A_1 A_2$ прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ гармонически разделяют вершины репера A_1 и A_2 ,причем одна из них совпадает с точкой $E_{1,2}$.

Свойство справедливо, т.к. фокальные точки $sA_1 + tA_2$ определяются уравнением $s^2 - t^2 = 0$.

3. Фокальные точки луча $A_3 A_4$ прямолинейной конгруэнции $(A_3 A_4)$ являются двойными точками гомографии пары поверхностей (A_1) и (A_2).

Фокусы $sA_3 + tA_4$ луча $A_3 A_4$ определяются уравнением $st + \alpha t^2 = 0$ и совпадают с точками A_3 и $A_4 - \alpha A_3$. Торсы прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ задаются уравнением $(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + \omega_2) = 0$. Имеем

$$dA_i\Big|_{\omega_i - \omega_j = 0} = \omega_i^i A_i + \omega_i A_3,$$

$$dA_i\Big|_{\omega_i + \omega_j = 0} = \omega_i^i A_i - \frac{1}{\alpha}\omega_i(A_4 - \alpha A_3),$$

откуда и следует утверждение 3.

4. Прямолинейные конгруэнции $(A_i A_4)$ являются конгруэнциями W .

Фокальными поверхностями конгруэнций $(A_i A_4)$ являются поверхности (A_i) и (A_4). Асимптотические линии этих поверхностей задаются одним и тем же уравнением $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = 0$,что и доказывает утверждение 4.

5. Плоскости коник C образуют пучок.

Характеристика плоскости коники C задается уравнением $x^1 - x^2 - 2\alpha t x^3 = 0$ и может быть определена точками $E_{1,2}$ и $M = 2\alpha t A_1 + A_3$. Имеем $d[E_{1,2}M] = (\ldots)[E_{1,2}M]$, т.е. характеристика неподвижна.

6. Конгруэнция касательных к линиям Γ_C односторонне расслояема к прямолинейным конгруэнциям $(A_i A_3)$.

Свойство справедливо, так как условия расслоения в силу системы (12) удовлетворяются тождественно.

Получено каноническое представление поверхности (A_4), ассоциированной с конгруэнциями K:

$$z = \frac{2}{3}\lambda(y^3 - x^3) + \frac{1}{2\alpha}(x^2+y^2) + [4].$$

Найден трехпараметрический пучок соприкасающихся квадрик к поверхности (A_4):

$$2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + a_{34}\left(2x^3x^4 - \frac{1}{\alpha}(x^1)^2 - \frac{1}{\alpha}(x^2)^2\right) + a_{33}(x^3)^2 = 0,$$

из которого выделен пучок квадрик Дарбу:

$$(x^1)^2+(x^2)^2 - 2\alpha t x^1x^3 + 2\alpha t x^2x^3 - 2\alpha x^3x^4 + b_{33}(x^3)^2 = 0,$$

а также квадрика Ли поверхности (A_4):

$$(x^1)^2+(x^2)^2-2\alpha t x^1x^3+2\alpha t x^2x^3 - 2\alpha x^3x^4 + (\alpha^2t^2-1)(x^3)^2 = 0.$$

Доказано, что линия Γ_c является линией Дарбу поверхности (A_4).

Найдены директриса Вильчинского, ось Чеха и ребро Грина поверхности (A_4). Эти три замечательные прямые совпадают друг с другом и определяются точками A_4 и $\alpha t A_1 - \alpha t A_2 + 2A_3$. Таким образом, канонический пучок поверхности (A_4) вырождается в прямую.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Е.П. Сопина

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЭЛЛИПСОИДОВ В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном аффинном пространстве A_3 исследуются конгруэнции V_2^3 эллипсоидов с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью.

Отнесем конгруэнцию квадрик Q к реперу $R=\{A,\bar{e}_\alpha\}$, $(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)$, где A - центр эллипсоида Q, вектор $\bar{e}_3$ направлен в фокальную точку M_3 эллипсоида Q, векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ лежат в плоскости, сопряженной направлению вектора $\bar{e}_3$ относительно Q, причем вектор $\bar{e}_1$ сопряжен вектору $\bar{e}_2$ и направлен по прямой AM, где M -характеристическая точка плоскости. Концы векторов $\bar{e}_\alpha$ расположены на эллипсоиде Q. Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость к поверхности (A) совпадает с плоскостью $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$. Уравнение квадрики Q относительно данного репера принимает вид:

$$F \equiv (x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0. \qquad (1)$$

Конгруэнция V_2^3 определяется системой уравнений Пфаффа:

$$\omega_i^i = \Gamma_i^{ik}\omega_k, \quad \omega_i^j = \Gamma_i^{jk}\omega_k \ (i\neq j), \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \qquad (2)$$
$$\omega^i = \Gamma^{ik}\omega_k, \quad \omega^3 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega^3 + \rho\,\omega_1 = 0,$$

формы

$$\omega_i^3 = \omega_i \qquad (i,j=1,2) \qquad (3)$$

здесь приняты в качестве базисных линейно независимых форм.

Назовем конгруэнцией V_2^{31} такую конгруэнцию V_2^3, у которой поверхность (M_3) вырождается в линию.

6 Зак. 1401

Конгруэнция V_2^{31} выделяется из конгруэнции V_2^3 конечными соотношениями:

$$\Gamma^{i1}+\Gamma_3^{i1}=\lambda\left(\Gamma^{i2}+\Gamma_3^{i2}\right). \tag{4}$$

Учитывая равенства (4) в системе (2), получаем систему уравнений Пфаффа для конгруэнции V_2^{31} в виде

$$\begin{gathered}\omega_i^i=\Gamma_i^{ik}\omega_k,\quad \omega_i^j=\Gamma_i^{jk}\omega_k\ (i\neq j),\quad \omega^3+\omega_3^3=0,\quad \omega^i=\Gamma^{ik}\omega_k,\\ \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,\quad \omega^3=\rho\,\omega_1=0,\quad \omega_3^1+\omega^1=\lambda\left(\omega^2+\omega_3^2\right).\end{gathered} \tag{5}$$

Замыкая $\omega^3+\omega_3^3=0$, находим

$$\Gamma^{12}+\Gamma_3^{12}=\Gamma^{21}+\Gamma_3^{21}. \tag{6}$$

Анализируя систему (5), убеждаемся, что конгруэнции V_2^{31} существуют и определяются с произволом шести функций двух аргументов.

Обозначим через M_α конец вектора $\bar{e}_\alpha$, M_α^* – конец вектора $-\bar{e}_\alpha$, ℓ_α – прямую, проходящую через центр эллипсоида Q и конец вектора $\bar{e}_\alpha$.

Т е о р е м а. Конгруэнции V_2^{31} обладают следующими свойствами: 1/ касательная к линии (M_3) параллельна плоскости $(A,\bar{e}_1,\bar{e}_2)$; 2/ точки M_3 и M_3^* не могут одновременно являться фокальными точками эллипсоида Q; 3/ если касательная плоскость к поверхности (A) параллельна координатной плоскости $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, то точка A является фокальной точкой прямолинейной конгруэнции (ℓ_3); 4/ если точка M_i является фокальной точкой эллипсоида Q, то касательная плоскость к поверхности (M_i) параллельна плоскости $(A,\bar{e}_j,\bar{e}_3)$; 5/ если точки M_i и M_i^* являются фокальными точками эллипсоида Q, то центры всех эллипсоидов конгруэнции располагаются на одной прямой (линии центров).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ В силу (5) имеем: $dM_3=\omega^1 e_1+\omega^2 e_2$. 2/ Если точка M_3^* является фокальной точкой эллипсоида Q, то получаем, что точка A является характеристической точкой плоскости, а этот случай исключается из рассмотрения. 3/ Уравнение для определения фокусов прямолинейной конгруэнции (ℓ_3) запишется в виде:

$$\begin{gathered}\mu^2\left(\Gamma_3^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{21}\Gamma_3^{12}\right)+\mu\left(\Gamma_3^{11}\Gamma^{22}+\Gamma^{11}\Gamma_3^{22}-\Gamma_3^{21}\Gamma^{12}-\right.\\ \left.-\Gamma^{21}\Gamma_3^{12}\right)+\Gamma^{11}\Gamma^{22}-\Gamma^{21}\Gamma^{12}=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Из условия коллинеарности касательной плоскости к поверхности (A) и плоскости $(A,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ имеем:

$$\Gamma^{21}=\Gamma^{12}=0. \tag{8}$$

Учитывая (8) в (7), получаем $\mu=0$, т.е. A – фокальная точка прямолинейной конгруэнции (ℓ_3). 4/ Запишем уравнения для определения фокальных точек и фокальных семейств конгруэнции V_2^{31}:

$$\begin{gathered}(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2-1=0,\\ (\Gamma_1^{11}-\rho)(x^1)^2+(\Gamma_2^{21}-\rho)(x^2)^2+(\Gamma_2^{11}-\Gamma_1^{21})x^1x^2+(1+\Gamma_3^{11})x^1x^3+\\ +(1+\Gamma_3^{21})x^2x^3+x^1\Gamma^{11}+x^2\Gamma^{21}-\rho x^3+\rho=0,\\ \Gamma_1^{12}(x^1)^2+\Gamma_2^{22}(x^2)^2+(\Gamma_2^{12}-\Gamma_1^{22})x^1x^2+\Gamma_3^{12}x^1x^3+(\Gamma_3^{22}+1)x^2x^3+\\ +\Gamma^{12}x^1+x^2\Gamma^{22}=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Пусть M_i – фокальная точка эллипсоида Q, то из уравнений (9) получим

$$\Gamma_i^{i1}+\Gamma^{i1}=0,\quad \Gamma_i^{i2}+\Gamma^{i2}=0. \tag{10}$$

Из равенств (10) следует, что касательные плоскости к поверхности (M_i) определяются соответственно точками M_i, $\bar{E}_{i1}$, $\bar{E}_{i2}$, где

$$\begin{gathered}\bar{E}_{11}=(\Gamma^{21}+\Gamma_1^{21})\bar{e}_2+(1-\rho)\bar{e}_3,\quad \bar{E}_{12}=(\Gamma^{22}+\Gamma_1^{22})\bar{e}_2,\\ \bar{E}_{21}=(\Gamma^{11}+\Gamma_2^{11})\bar{e}_1-\rho\,\bar{e}_3,\quad \bar{E}_{22}=(\Gamma^{12}+\Gamma_2^{12})\bar{e}_1+\bar{e}_3.\end{gathered}$$

5/ Пусть точки M_i и M_i^* являются одновременно фокальными точками эллипсоида Q, тогда из уравнений (9) получим:

$$\omega^i=0,\quad \omega_i^i=0,\quad \omega_3^i=0. \tag{11}$$

Имеем $d\bar{A}=\omega^3\bar{e}_3$, $d\bar{e}_3=\omega_3^3\bar{e}_3$. Следовательно, центры всех эллипсоидов располагаются на одной прямой.

Список литературы

1. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве. – Тр. геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113–136.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

В.П.Толстопятов

К ГЕОМЕТРИИ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

1.Присоединим к гладкой p-мерной поверхности $V_p \subset E_n$ подвижной репер $R^x=(x,\vec e_i,\vec e_\alpha)$, где $\vec e_i$ образуют базис касательного пространства $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а $\vec e_\alpha$ – базис нормального дополнения $N_x(V_p)$. Векторному полю $\vec\xi=\xi^i\vec e_i$ на поверхности V_p соответствует секущая поверхность $\overline V(\xi)$ 1-распределения $\Delta_1=\Delta(\vec\xi)$, уравнение которой $\vec{\bar x}=\vec x+\vec\xi$. Обозначим $c^k_i=\mu^k_i+\delta^k_i$, где $\mu^k_i=\nabla_{\vec e_i}\xi^k$ – ковариантные производные координат векторного поля. Пусть выполняется условие: $rang\,\|c^k_i,\ b^\alpha_{i\ell}\xi^\ell\|=p$. Тогда векторы

$$\vec a_i=c^k_i\vec e_k+b^\alpha_{i\ell}\xi^\ell\vec e_\alpha \qquad (1)$$

образуют базис касательного пространства к секущей поверхности в точке $\bar x$. Секущая поверхность при этом является p-мерной, будем обозначать ее $\overline V_p$. Присоединим к секущей поверхности $\overline V_p$ подвижной репер $R^{\bar x}=(\bar x,\vec a_i,\vec a_\alpha)$, где $\vec a_\alpha$ определяют базис нормального дополнения $N_{\bar x}(\overline V_p)$ к касательному пространству к секущей поверхности в точке $\bar x$. В общем случае для векторного поля $\vec\xi$ имеем

$$\vec\xi=t^i\vec a_i+t^\alpha\vec a_\alpha$$

II.Рассмотрим случай, когда $\vec\xi$ ортогонально секущей поверхности $\overline V_p$, т.е. $\vec\xi\in N_{\bar x}(\overline V_p)$. Имеем

$$\vec\xi\,\vec a_i=0 \qquad (2)$$

или

$$\mu^k_i\xi^\ell\gamma_{k\ell}+\xi^k\gamma_{ki}=0. \qquad (3)$$

то есть $\vec\xi\in\Phi$ – конусу второго порядка ($\Phi=c_{ij}\omega^i\omega^j=0$, $c_{ij}=c^k_i\gamma_{kj}$), лежащему в касательной плоскости к поверх-

ности V_p, образованному направлениями, при смещении по которым $d\vec x$ и соответствующее $d\vec{\bar x}$ ортогональны. Из (3) имеем

С л е д с т в и е 1. Ненулевое векторное поле $\vec\xi$ постоянной длины не может быть ортогонально секущей поверхности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\vec\xi$ векторное поле постоянной длины, то имеем

$$\vec\xi\,d\vec\xi=0. \qquad (4)$$

Так как $d\vec\xi=\mu^k_i\omega^i\vec e_k+b^\alpha_{i\ell}\xi^\ell\omega^i\vec e_\alpha$, то из (4) следует:

$$\mu^k_i\xi^\ell\gamma_{k\ell}=0. \qquad (5)$$

Если предположить, что векторное поле постоянной длины ортогонально секущей поверхности, то из (3) и (5) следует, что $\vec\xi$ нулевое векторное поле.

С л е д с т в и е 2. Если векторное поле $\vec\xi$, интегральные линии которого геодезические, ортогонально секущей поверхности, то $\nabla_{\vec\xi}\vec\xi=-\vec\xi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (3) можно записать иначе:

$$\vec\xi\cdot(\nabla_{\vec e_i}\vec\xi+\vec e_i)=0. \qquad (6)$$

Свернем (6) с ξ^i, получим:

$$\vec\xi\cdot(\nabla_{\vec\xi}\vec\xi+\vec\xi)=0. \qquad (7)$$

Если интегральные линии поля $\vec\xi$ геодезические, то $\nabla_{\vec\xi}\vec\xi=\lambda\vec\xi$. Из (7) следует $(\lambda+1)\cdot\vec\xi^2=0$. Так как нулевое векторное поле не входит в наше рассмотрение, то имеем $\lambda=-1$, т.е. $\nabla_{\vec\xi}\vec\xi=-\vec\xi$. Таким образом, если для векторного поля $\vec\xi$ имеем $\nabla_{\vec\xi}\vec\xi=\lambda\vec\xi$, $\lambda\neq-1$, то это векторное поле не может быть ортогонально секущей поверхности $\overline V_p$.

С л е д с т в и е 3. Градиентное векторное поле $\vec\xi$ ортогонально секущей поверхности тогда и только тогда, когда $\nabla_{\vec\xi}\vec\xi=-\vec\xi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть градиентное векторное поле $\vec\xi$ ортогонально секущей поверхности $\overline V_p$. Из условия градиентности

$$\mu^k_i\gamma_{kj}=\mu^k_j\gamma_{ki} \qquad (8)$$

и соотношения (3) имеем:

$$\mu^{\kappa}_{\ell}\xi^{\ell}\gamma_{\kappa i}+\xi^{\kappa}\gamma_{\kappa i}=0 \tag{9}$$

или

$$\mu^{\kappa}_{\ell}\xi^{\ell}+\xi^{\kappa}=0. \tag{10}$$

Таким образом, получаем:

$$\nabla_{\vec{\xi}}\vec{\xi}=-\vec{\xi}. \tag{11}$$

Достаточность. Пусть для градиентного векторного поля имеет место условие (11), которое равносильно (10) или (9). Так как $\vec{\xi}$ градиентное векторное поле, то имеет место условие (8). Тогда из (9) следует $\mu^{\kappa}_{i}\xi^{\ell}\gamma_{\kappa\ell}+\xi^{\kappa}\gamma_{\kappa i}=0$, т.е. $\vec{\xi}$ ортогонально секущей поверхности $\overline{V}_{p}$.

III. Рассмотрим другой возможный случай, когда векторное поле $\vec{\xi}$ касается секущей поверхности $\overline{V}_{p}$, т.е. секущая поверхность $\overline{V}_{p}$ является фокальной для направления $[x,\vec{\xi}]$. В этом случае естественно векторное поле назвать фокальным. Итак, поле $\vec{\xi}$ является фокальным тогда и только тогда, когда

$$\vec{\xi}=\xi^{i}\vec{e}_{i}, \quad \vec{\xi}=t^{\kappa}\vec{a}_{\kappa}. \tag{12}$$

Приходим к системе

$$\nabla_{\vec{t}}\vec{\xi}=\vec{\xi}-\vec{t}; \quad \ell^{\alpha}_{\kappa i}t^{\kappa}\xi^{i}=0. \tag{13}$$

Условия (12) и (13) эквивалентны, поэтому имеет место

Т е о р е м а. Векторное поле $\vec{\xi}$ является фокальным тогда и только тогда, когда на V_{p} существует векторное поле $\vec{t}$, сопряженное с направлением поля $\vec{\xi}$, для которого $\nabla_{\vec{t}}\vec{\xi}=\vec{\xi}-\vec{t}$.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 16 1985

УДК 514.75

Т.П. Ф у н т и к о в а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВЫРОЖДЕННЫХ КОНГРУЭНЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРОЙ ЭЛЛИПСОВ

В трехмерном аффинном пространстве исследуются вырожденные [1] конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$, порожденные парой эллипсов C_1 и C_2, причем эллипсы C_1 и C_2 имеют общую касательную, но не лежат в одной плоскости.

Многообразие (C_1) эллипсов C_1 -одномерное, а многообразие (C_2) эллипсов C_2 -двумерное, таким образом, каждому эллипсу C_1 соответствует однопараметрическое семейство $(C_2)_{C_1}$ эллипсов C_2.

Отнесем конгруэнцию $(C_1C_2)_{1,2}$ к реперу $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, вершина A которого помещена в точку касания эллипсов C_1 и C_2, концы векторов $\vec{e}_3$ и $\vec{e}_1$ совмещены соответственно с центрами O_1 и O_2 эллипсов C_1 и C_2, вектор $\vec{e}_2$ направлен по общей касательной эллипсов и нормирован.

Уравнения эллипсов C_1 и C_2 относительно выбранного репера записываются в виде:

$$C_1 : \quad (x^3)^2-2x^3+(x^2)^2=0, \quad x^1=0;$$

$$C_2 : \quad (x^1)^2-2x^1+a^2(x^2)^2=0, \quad x^3=0.$$

Конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$ определяются системой уравнений Пфаффа:

$$\begin{gathered}\omega^3=b\omega^1, \quad \omega^3_3=k\omega^1; \quad \omega^3_2=c\omega^1+\omega^2; \quad \omega^2_3=\ell\omega^1-\omega^2;\\ \omega^2_2=p\omega^1, \quad \omega^1_2=m\omega^1, \quad \omega^1_3=n\omega^1, \quad \omega^{\alpha}_1=\Gamma^{\alpha}_{1i}\omega^i;\end{gathered} \tag{1}$$

$$da=A_i\omega^i, \quad i=1,2; \quad \alpha=1,2,3; \quad \lambda=2,3,$$

и квадратичными уравнениями, полученными при внешнем дифференцировании системы уравнений (1). Здесь формы

ω^1, ω^2 приняты в качестве базисных.

Анализируя замкнутую систему уравнений, убеждаемся, что конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$ существуют с произволом четырех функций двух аргументов.

Конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$ характеризуются следующими свойствами: I/ прямолинейные конгруэнции $(A,\vec{e}_\lambda)$ имеют по одному семейству соответствующих торсов, общая фокальная поверхность прямолинейных конгруэнций $(A,\vec{e}_\lambda)$ является огибающей плоскостей эллипсов C_1; 2/ многообразие $(C_2)_{C_1}$ является фокальным [3]; 3/ точка A является фокальной точкой эллипса C_2 с соответствующим фокальным направлением $\omega^1=0$.

Т е о р е м а 1. Если точка A является сдвоенной фокальной точкой эллипса C_2, то линия (O_2) центров эллипсов C_2 многообразия $(C_2)_{C_1}$ -плоская; если же при этом характеристическая точка плоскости эллипса C_2 принадлежит прямой AO_2, то линия (O_2) является эллипсом, а точка $\vec{P}=\vec{A}+2\vec{e}_3$ является фокальной точкой эллипса C_2

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из системы уравнений

$$\begin{cases} (x^1)^2+a^2(x^2)^2-2x^1=0, \quad x^3=0, \\ x^1\omega_1^3+x^2\omega_2^3+\omega^3=0, \\ (1-x^1)(x^1\omega_1^1+\omega^1)+(x^2)^2(ada-a^2\omega_2^2)+x^1x^2(-\omega_2^1-a^2\omega_1^2)+x^2(\omega_2^1-a^2\omega^2)=0 \end{cases} \tag{2}$$

следует, что точка A является сдвоенной фокальной точкой эллипса C_2 с соответствующим фокальным направлением $\omega^1=0$ при

$$\Gamma_{12}^1=0. \tag{3}$$

В этом случае для линии (O_2) имеем:

$$d\vec{O}_2\Big|_{\omega^1=0}=(\Gamma_{12}^2\vec{e}_2+\Gamma_{12}^3\vec{e}_3)\omega^2, \quad d\vec{e}_2\Big|_{\omega^1=0}=\omega^2\vec{e}_3, \quad d\vec{e}_3\Big|_{\omega^1=0}=-\omega^2\vec{e}_2,$$

т.е. линия (O_2) -плоская.

Характеристическая точка плоскости эллипса C_2 принадлежит прямой AO_2, когда

$$\Gamma_{12}^3=0. \tag{4}$$

В этом случае направление касательной к линии (O_2) определяется вектором $\vec{e}_2$, т.е. линия (O_2) соответствует линии $\omega^1=0$ на поверхности (A), т.е. эллипсу C_1. Кроме того, из системы (2) и условий (3), (4) следует, что точка $\vec{P}=\vec{A}+2\vec{e}_3$ является фокальной точкой эллипса C_2. Теорема доказана.

Рассмотрим конгруэнции $(C_1C_2)_{1,2}$, для которых плоскости эллипсов C_2 являются касательными к поверхности (A), касательные к линии центров эллипсов C_1 параллельны соответствующим плоскостям эллипсов C_2 и линейчатая поверхность $(AO)_{\omega^1=0}$ прямолинейной конгруэнции (AO_2), соответствующая эллипсу C_1, является торсом. Такие конгруэнции назовем конгруэнциями K.

Аналитически конгруэнции K определяются условиями

$$\Gamma_{12}^3=0, \quad \kappa=0, \quad b=0. \tag{5}$$

Учитывая условия (5) в системе (1), получаем

$$\ell=0, \quad c=0, \quad \Gamma_{12}^2=0, \quad p=0. \tag{6}$$

В силу условий (5) и (6) конгруэнции K существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 2. Для конгруэнций K справедливы следующие свойства: I/ торсы прямолинейных конгруэнций $(A,\vec{e}_\alpha)$ соответствуют; 2/ координатные линии на поверхности (A) сопряжены; 3/ координатные линии $\omega^1=0$ (эллипсы C_1) на поверхности (A) являются линиями тени; 4/ все эллипсы многообразия (C_1) образуют каналовую поверхность; 5/ существуют аффинные расслоения [2] от прямолинейных конгруэнций $(A,\vec{e}_\alpha)$ к семействам плоскостей Π_α $(x^\alpha=0)$, $\alpha=1,2,3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Торсы прямолинейных конгруэнций $(A,\vec{e}_\alpha)$ определяются одним и тем же уравнением

$$\omega^1\cdot\omega^2=0,$$

значит они соответствуют.

2/ Асимптотические линии на поверхности (A) определяются уравнением

$$\Gamma_{11}^{3}(\omega^1)^2+(\omega^2)^2=0, \tag{7}$$

из которого следует справедливость свойства 2.

3/. Из формулы (7) и равенств

$$d\vec{A}\big|_{\omega^2=0}=\omega^1\vec{e}_1, \qquad d\vec{e}_1\big|_{\omega^1=0}=\Gamma_{12}^{1}\vec{e}_1\omega^2$$

получаем свойство 3.

4/. Так как

$$d\vec{A}\big|_{\omega^2=0}=\omega^1\vec{e}_1, \qquad d\vec{e}_2\big|_{\omega^2=0}=m\vec{e}_1\omega^1,$$

$$d\vec{e}_3\big|_{\omega^2=0}=n\vec{e}_1\omega^1, \qquad d\vec{e}_1\big|_{\omega^1=0}=\Gamma_{12}^{1}\vec{e}_1\omega^2,$$

то инфинитезимальные перемещения всех точек эллипса C_1 при $\omega^2=0$ происходят в одном и том же направлении, определяемом вектором $\vec{e}_1$. Линия центров эллипсов не является прямой, следовательно, все эллипсы C_1 принадлежат каналовой поверхности.

5/. В силу равенств (5), (6) условия

$$\begin{cases}\omega^\beta\wedge\omega^\alpha_\beta=0, & \alpha,\beta=1,2,3,\ \alpha\neq\beta,\\ \omega^\beta_\alpha\wedge\omega^\alpha_\beta=0,\end{cases}$$

указанных аффинных расслоений тождественно удовлетворяются. Теорема доказана.

Список литературы

1. Малаховский В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

2. Ткач Г.П. О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.143-152.

3. Фунтикова Т.П. Одномерные многообразия эллипсов в трехмерном эквиаффинном пространстве.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.10, Калининград, 1979, с.131-135.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

В.Н. Худенко

СВЯЗНОСТЬ В ГЛАВНОМ РАССЛОЕНИИ, АССОЦИИРОВАННОМ С МНОГООБРАЗИЕМ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ.

В n-мерном проективном пространстве рассматривается связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Введено композиционное оснащение этого многообразия. Получена геометрическая характеристика подобъектов и объекта связности.

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим невырожденное h-параметрическое многообразие $(h,h,n)^2_p$ квадрик Q_p. С этим многообразием ассоциируется многообразие B^h_n обобщенных пространственных элементов. Обобщенным пространственным элементом (L_ℓ, L_{p+1}) согласно [3] будем называть проективную плоскость L_{p+1} (p-мерной квадрики Q_p) вместе с инцидентной ей подплоскостью L_ℓ, которая возникает внутренним образом, например, как плоскость, натянутая на соответствующее количество характеристических точек квадрики.

Поместим вершины A_μ репера $R=\{A_1,\dots,A_{n+1}\}$ в плоскость L_ℓ, вершины $A_{\bar a}$ вне плоскости L_ℓ, но в плоскости L_{p+1} и вершины A_a вне плоскости L_{p+1}.

Здесь и в дальнейшем индексы принимают следующие значения:

$$\mu,\nu=1,2,3,\dots,\ell+1;$$
$$\bar a,\bar b,\bar c=\ell+2,\ell+3,\dots,p+2;$$
$$i=1,2,\dots,h; \qquad a=p+3,\dots,n+1.$$

Тогда уравнения плоскостей L_{p+1} и L_ℓ запишутся соответственно в виде:

$$x^a = 0, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x^a = 0, \\ x^{\bar a} = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система дифференциальных уравнений многообразия B^*_k обобщенных пространственных элементов примет вид

$$\omega^{\bar a}_{\mu} = M^{\bar a}_{\mu i}\tau^i, \qquad (3)$$

$$\omega^a_{\mu} = \Lambda^a_{\mu i}\tau^i, \quad \omega^a_{\bar b} = \Lambda^a_{\bar b i}\tau^i \qquad (4)$$

Здесь τ^i инвариантные формы аналитической группы преобразований k-мерного пространства параметров, удовлетворяющие системе уравнений

$$D\tau^i = \tau^k \wedge \tau^i_k,$$

$$D\tau^i_j = \tau^k_j \wedge \tau^i_k + \tau^k \wedge \tau^i_{jk} \ldots$$

Замкнем (3) и (4), получим

$$\nabla M^{\bar a}_{\mu i} + \Lambda^a_{\mu i}\,\omega^{\bar a}_a \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \tau^i), \qquad (5)$$

$$\nabla \Lambda^a_{\mu i} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \tau^i),$$

$$\nabla M^a_{\bar a i} - \Lambda^a_{\mu i}\,\omega^{\mu}_{\bar a} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \tau^i).$$

Дифференциальный оператор ∇ здесь действует по закону

$$\nabla \Lambda^a_{\mu i} = d\Lambda^a_{\mu i} - \Lambda^a_{\nu i}\,\omega^{\nu}_{\mu} + \Lambda^b_{\mu i}\,\omega^a_b - \Lambda^a_{\mu j}\tau^j_i.$$

С многообразием B^*_k, ассоциируется главное расслоение $G(B^*_k)$ со структурными уравнениями

$$D\tau^i = \tau^j \wedge \tau^i_j,$$

$$D\omega^{\nu}_{\mu} = \omega^{\nu_1}_{\mu} \wedge \omega^{\nu}_{\nu_1} + \tau^i \wedge \omega^{\nu}_{\mu i}, \quad D\omega^{\bar a}_{\bar b} = \omega^{\bar c}_{\bar b} \wedge \omega^{\bar a}_{\bar c} + \tau^i \wedge \omega^{\bar a}_{\bar b i} \qquad (6)$$

$$D\omega^{\nu}_{\bar b} = \omega^{\mu}_{\bar b} \wedge \omega^{\nu}_{\mu} + \omega^{\bar a}_{\bar b} \wedge \omega^{\nu}_{\bar a} + \tau^i \wedge \omega^{\nu}_{i\bar b},$$

$$D\omega^{\nu}_{b} = \omega^{\mu}_{b} \wedge \omega^{\nu}_{\mu} + \omega^{\bar a}_{b} \wedge \omega^{\nu}_{\bar a} + \omega^{a}_{b} \wedge \omega^{\nu}_{a},$$

$$D\omega^{\bar a}_{b} = \omega^{\bar b}_{b} \wedge \omega^{\bar a}_{\bar b} + \omega^{a}_{b} \wedge \omega^{\bar a}_{a} + \tau^i \wedge \omega^{\bar a}_{ib},$$

$$D\omega^{b}_{a} = \omega^{c}_{a} \wedge \omega^{b}_{c} + \tau^i \wedge \omega^{b}_{ia},$$

где

$$\omega^{\nu}_{\mu i} = M^{\bar a}_{\mu i}\,\omega^{\nu}_{\bar a} + \Lambda^a_{\mu i}\,\omega^{\nu}_a, \quad \omega^{\nu}_{\bar b i} = \Lambda^a_{\bar b i}\,\omega^{\nu}_a,$$

$$\omega^{\bar a}_{ib} = -M^{\bar a}_{\mu i}\,\omega^{\mu}_b, \quad \omega^{\bar a}_{\bar b i} = \Lambda^a_{\bar b i}\,\omega^{\bar a}_a - M^{\bar a}_{\nu i}\,\omega^{\nu}_{\bar b},$$

$$\omega^a_{ib} = -\Lambda^a_{\bar b i}\,\omega^{\bar b}_b - \Lambda^a_{\nu i}\,\omega^{\nu}_b.$$

Базой главного расслоения $G(B^*_k)$ является многообразие B^*_k (или область пространства параметров), а типовым слоем подгруппа стационарности обобщенного пространственного элемента (L_{p+1}, L_ℓ).

В главном расслоении $G(B^*_k)$ введем связность по Г.Ф.Лаптеву с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma^{\nu}_{\mu i}, \Gamma^{\nu}_{\bar b i}, \Gamma^{\bar b}_{\bar a i}, \Gamma^{\nu}_{b i}, \Gamma^{\bar a}_{b i}, \Gamma^{a}_{b i})$ на базе B^*_k

$$\nabla \Gamma^{\nu}_{\mu i} + \omega^{\nu}_{\mu i} = \Gamma^{\nu}_{\mu i j}\tau^j, \quad \nabla \Gamma^{\bar a}_{\bar b i} + \omega^{\bar a}_{\bar b i} = \Gamma^{\bar a}_{\bar b i j}\tau^j,$$

$$\nabla \Gamma^{\nu}_{\bar b i} + \omega^{\nu}_{\bar b i} + \Gamma^{\bar a}_{\bar b i}\,\omega^{\nu}_{\bar a} - \Gamma^{\nu}_{\mu i}\,\omega^{\mu}_{\bar b} = \Gamma^{\nu}_{\bar b i j}\tau^j,$$

$$\nabla \Gamma^{\nu}_{b i} - \Gamma^{\nu}_{\mu i}\,\omega^{\mu}_b + \Gamma^{\bar a}_{b i}\,\omega^{\nu}_{\bar a} - \Gamma^{\nu}_{\bar a i}\,\omega^{\bar a}_b + \Gamma^a_{b i}\,\omega^{\nu}_a = \Gamma^{\nu}_{b i j}\tau^j,$$

$$\nabla \Gamma^{\bar a}_{b i} + \Gamma^a_{b i}\,\omega^{\bar a}_a - \Gamma^{\bar a}_{\bar b i}\,\omega^{\bar b}_b + \omega^{\bar a}_{ib} = \Gamma^{\bar a}_{b i j}\tau^j,$$

$$\nabla \Gamma^a_{b i} + \omega^a_{ib} = \Gamma^a_{b i j}\tau^j.$$

Рассмотрим композиционное [1] оснащение многообразия B^*_k, которое состоит в присоединении к каждому обобщенному пространственному элементу (L_ℓ, L_{p+1}) плоскостей B, C, причем плоскость B -дополнительная к плоскости L_{p+1}, а плоскость C -дополнительная к плоскости L_ℓ внутри плоскости L_{p+1}. Зададим композиционное оснащение многообразия B^*_k с помощью систем точек

$$B_a = A_a + \lambda^{\mu}_a A_{\mu} + \lambda^{\bar b}_a A_{\bar b} \qquad (8)$$

и

$$C_{\bar a} = A_{\bar a} + \nu^{\mu}_{\bar a} A_{\mu}. \qquad (9)$$

Условия инвариантности оснащающих плоскостей запишутся в виде

$$\begin{cases} \nabla\lambda^{\mu}_{a} + \lambda^{\bar{b}}_{a}\,\omega^{\mu}_{\bar{b}} + \omega^{\mu}_{a} = \lambda^{\mu}_{ai}\tau^{i}, \\ \nabla\lambda^{\bar{b}}_{a} + \omega^{\bar{b}}_{a} = \lambda^{\bar{b}}_{ai}\tau^{i}, \end{cases} \tag{10}$$

$$\nabla\nu^{\mu}_{\bar{a}} + \omega^{\mu}_{\bar{a}} = \nu^{\mu}_{\bar{a}i}\tau^{i}. \tag{11}$$

Имеет место следующая

Т е о р е м а I. Композиционное оснащение многообразия B^{*}_{k} позволяет задать связность в главном расслоении $G(B^{*}_{k})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фундаментальный объект первого порядка $\Lambda=(\Lambda^{a}_{\mu i},\Lambda^{a}_{\bar{b}i},M^{\bar{a}}_{\mu i})$ многообразия B^{*}_{k}, оснащающие квазитензоры $\lambda(\lambda^{\mu}_{a},\lambda^{\bar{a}}_{a}),\ \nu=(\nu^{\mu}_{\bar{a}})$ позволяют охватить компоненты объекта связности по формулам:

$$\Gamma^{\nu}_{\mu i} = M^{\bar{a}}_{\mu i}\nu^{\nu}_{\bar{a}} + \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\nu}_{a} - \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar{b}}_{a}\nu^{\nu}_{\bar{b}},$$

$$\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}i} = \Lambda^{a}_{\bar{b}i}\lambda^{\bar{a}}_{a} - M^{\bar{a}}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar{b}} + \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar{a}}_{a}\nu^{\mu}_{\bar{b}},$$

$$\Gamma^{\nu}_{\bar{b}i} = \Lambda^{a}_{\bar{b}i}\lambda^{\nu}_{a} - M^{\bar{a}}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar{b}}\nu^{\nu}_{\bar{a}} - \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar{c}}_{a}\nu^{\nu}_{\bar{c}}\nu^{\mu}_{\bar{b}},$$

$$\Gamma^{a}_{bi} = -\Lambda^{a}_{\bar{b}i}\lambda^{\bar{b}}_{b} - \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b}, \tag{12}$$

$$\Gamma^{\bar{a}}_{bi} = M^{\bar{a}}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar{b}}\lambda^{\bar{b}}_{b} - \Lambda^{a}_{\bar{b}i}\lambda^{\bar{a}}_{a}\lambda^{\bar{b}}_{b} - \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar{a}}_{a}\lambda^{\bar{b}}_{b}\nu^{\mu}_{\bar{b}} - M^{\bar{a}}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b},$$

$$\Gamma^{\nu}_{bi} = -M^{\bar{a}}_{\mu i}\nu^{\nu}_{\bar{a}}\lambda^{\mu}_{b} - \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\nu}_{a}\lambda^{\mu}_{b} + M^{\bar{a}}_{\mu i}\nu^{\mu}_{\bar{b}}\nu^{\nu}_{\bar{a}}\lambda^{\bar{b}}_{b} +$$
$$+ \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar{c}}_{a}\nu^{\nu}_{\bar{c}}\nu^{\mu}_{\bar{b}}\lambda^{\bar{b}}_{b} - \Lambda^{a}_{\bar{b}i}\lambda^{\bar{b}}_{b}\lambda^{\nu}_{a} + M^{\bar{a}}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b}\nu^{\nu}_{\bar{a}} +$$
$$+ \Lambda^{a}_{\bar{b}i}\lambda^{\bar{a}}_{a}\nu^{\nu}_{\bar{a}} + \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\bar{a}}_{a}\nu^{\mu}_{\bar{b}}\nu^{\nu}_{\bar{a}} - \Lambda^{a}_{\bar{b}i}\lambda^{\bar{a}}_{a}\lambda^{\bar{b}}_{b}\nu^{\nu}_{\bar{a}} - \Lambda^{a}_{\mu i}\lambda^{\mu}_{b}\lambda^{\bar{a}}_{a}\nu^{\nu}_{\bar{a}}.$$

Из соотношений (I2) и следует утверждение теоремы.

Используя соотношения (8),(9),(I2), получим

$$dC_{\bar{a}} = \tilde{\omega}^{\bar{b}}_{\bar{a}}C_{\bar{b}} + (\ldots)^{\nu}_{\bar{a}}A_{\nu} + (\ldots)^{a}_{\bar{a}}B_{a}, \tag{13}$$

где

$$\tilde{\omega}^{\bar{b}}_{\bar{a}} = \omega^{\bar{b}}_{\bar{a}} - \Gamma^{\bar{b}}_{\bar{a}i}\tau^{i}. \tag{14}$$

Из равенств (13),(14) следует

Т е о р е м а 2. Подобъект $\Gamma_{1}=\{\Gamma^{\bar{b}}_{\bar{a}i}\}$ объекта Γ характеризуется проектированием на оснащающую плоскость C смежной с ней плоскости $C+dC$ из центра $L_{\ell}+B$.

Аналогично доказываются утверждения:

Т е о р е м а 3. Подобъект $\Gamma_{2}=\{\Gamma^{\nu}_{\mu i}\}$ объекта связности Γ характеризуется проектированием на плоскость L_{ℓ} смежной с ней плоскости $L_{\ell}+dL_{\ell}$ из центра $C+B$.

Т е о р е м а 4. Подобъект $\Gamma_{3}=\{\Gamma^{b}_{ai}\}$ объекта связности Γ характеризуется проектированием на плоскость B смежной с ней плоскости $B+dB$ из центра $L_{\ell}+C$.

Будем говорить, что плоскость переносится параллельно в связности, определяемой подобъектом Γ^{1} объекта связности Γ, если ковариантный дифференциал [2] квазитензора (задающего эту плоскость) относительно связности Γ^{1} равен нулю.

Преобразуем соотношения (I3) к виду

$$dC_{\bar{a}} = \mathcal{D}\nu^{\mu}_{\bar{a}}A_{\mu} + (\ldots)^{\bar{b}}_{\bar{a}}C_{\bar{b}} + (\ldots)^{b}_{\bar{a}}B_{b}. \tag{14}$$

Здесь

$$\mathcal{D}\nu^{\mu}_{\bar{a}} = d\nu^{\mu}_{\bar{a}} + \nu^{\nu}_{\bar{a}}\tilde{\omega}^{\mu}_{\nu} - \nu^{\mu}_{\bar{b}}\hat{\omega}^{\bar{b}}_{\bar{a}} + \tilde{\omega}^{\mu}_{\bar{a}}$$

ковариантный дифференциал квазитензора $\nu=(\nu^{\mu}_{\bar{a}})$, определяющего оснащающую плоскость C, а волной обозначены следующие формы связности

$$\tilde{\omega}^{\mu}_{\nu} = \omega^{\mu}_{\nu} - \Gamma^{\mu}_{\nu i}\tau^{i};\quad \tilde{\omega}^{\bar{b}}_{\bar{a}} = \omega^{\bar{b}}_{\bar{a}} - \Gamma^{\bar{b}}_{\bar{a}i}\tau^{i};\quad \tilde{\omega}^{\mu}_{\bar{a}} = \omega^{\mu}_{\bar{a}} - \Gamma^{\mu}_{\bar{a}i}\tau^{i}.$$

Из соотношений (I4) следует утверждение

Т е о р е м а 5. Оснащающая плоскость C переносится параллельно в связности $\Gamma^{1}=\{\Gamma^{\nu}_{\mu i},\Gamma^{\bar{a}}_{\bar{b}i},\Gamma^{\nu}_{\bar{a}i}\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости, натянутой на нее и оснащающую плоскость B.

Аналогично можно доказать утверждения

Т е о р е м а 6. Оснащающая плоскость B переносится параллельно в связности $\Gamma'' = \{\Gamma^{\bar a}_{\bar c i}, \Gamma^{a}_{bi}, \Gamma^{a}_{bi}\}$ тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости, натянутой на нее и плоскость $'L_{\ell}$.

Т е о р е м а 7. Оснащающую плоскость B нельзя перенести параллельно в связности

$$\Gamma''' = \{\Gamma^{\nu}_{\mu i}, \Gamma^{a}_{bi}, \Gamma^{\mu}_{bi}, \Gamma^{\bar a}_{\bar c i}, \Gamma^{a}_{bi}\}.$$

Список литературы

1.Норден А.П. Теория композиций.-В кн.:Проблемы геометрии.М.,1976,10,с.117-145.

2.Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.12, Калининград,1981,с.126-130.

3.Bucur W.Проективная классификация грассмановых соотношений и определение минимальных моделей совокупностей обобщенных пространственных элементов. Ann. math. pura ed appl, 1953, ap 434,1с.133-160.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

В.П.ЦАПЕНКО

СВЯЗНОСТЬ В МНОГООБРАЗИИ ПАР ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ,ИНДУЦИРОВАННОМ ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ V_{n-1}

В n-мерном проективном пространстве продолжается [1] изучение гиперконгруэнций V_{n-1} -(n-1)-параметрических невырожденных многообразий пар фигур (P,Q), где Q - гиперквадрика, а P -неинцидентная ей точка. Обозначим L_{n-1} -гиперплоскость, полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q, T_{n-1} -гиперплоскость, касательную к гиперповерхности S_{n-1}, описанной точкой P, а $\mathcal{M}$ - многообразие, порожденное парой гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1}, ассоциированное с гиперконгруэнцией V_{n-1}.

Подвижной репер $R = \{A, A_{\alpha}, A_n\}$ специализируем следующим образом: вершину $A \equiv A_0$ совместим с точкой P, вершины A_{α} (α,β,γ =1,2,...,n-1) поместим в (n-2)-мерное пересечение M_{n-2} гиперплоскостей L_{n-1} и T_{n-1}, а вершину A_n - в гиперплоскость L_{n-1} так, чтобы $A_n \notin M_{n-2}$. Относительно репера R гиперквадрика Q задается уравнением:

$a_{ij}x^i x^j + (x^0)^2 = 0$, где i,j =1,2,...,n. Система уравнений Пфаффа гиперконгруэнции V_{n-1} в репере R запишется в виде:

$$\omega^0_i = \mu_{i\beta}\,\omega^{\beta}_0, \quad \omega^n_{\alpha} = \Lambda_{\alpha\beta}\,\omega^{\beta}_0 \ (\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\beta\alpha}),$$
$$\omega^n_0 = 0, \qquad \nabla a_{ij} = a_{ij\beta}\,\omega^{\beta}_0.$$

Продолжая эту систему, получим

$$\nabla \mu_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\gamma}_0,$$
$$\nabla \mu_{n\beta} = \mu_{n\beta}\,(\omega^n_n - \omega^0_0) + \mu_{\gamma\beta}\,\omega^{\gamma}_n + \mu_{n\beta\gamma}\,\omega^{\gamma}_0,$$
$$\nabla \Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}\,(\omega^0_0 - \omega^n_n) + \Lambda_{\alpha\beta\gamma}\,\omega^{\gamma}_0,$$

$$\nabla a_{ij\beta} = a_{ij\beta\gamma}\,\omega_0^\gamma,$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом: $\nabla E_{a_1\ldots a_r} = dE_{a_1\ldots a_r} - E_{b a_2\ldots a_r}\omega^b_{a_1} - \ldots - E_{a_1\ldots a_{r-1} b}\,\omega^b_{a_r} + r\cdot E_{a_1\ldots a_r}\omega^0_0$.

С многообразием V_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_r(S_{n-1})$ со структурными уравнениями

$$d\omega_0^\alpha = \omega_0^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_0^0),$$

$$d\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \mu_{\beta\gamma}\,\omega_0^\gamma \wedge \omega_0 + \Lambda_{\beta\gamma}\,\omega_0^\gamma \wedge \omega_n^\alpha,$$

$$d\omega_n^\alpha = \omega_n^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_n^n \wedge \omega_n^\alpha + \mu_{n\beta}\,\omega_0^\beta \wedge \omega_0^\alpha,$$

$$d\omega_n^n = \Lambda_{\alpha\beta}\,\omega_n^\alpha \wedge \omega_0^\beta.$$

Базой главного расслоения $G_r(S_{n-1})$ является гиперповерхность S_{n-1}, а типовым слоем - подгруппа стационарности G_r пары гиперплоскостей (l_{n-1}, T_{n-1}). Фундаментально-групповую связность в $G_r(S_{n-1})$ зададим по Г.Ф.Лаптеву [2] с помощью поля объекта связности $\Gamma = (\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}, \Gamma^\alpha_\gamma, \Gamma_\gamma)$ на базе S_{n-1}, удовлетворяющего условиям:

$$\nabla \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \Lambda_{\beta\gamma}\,\omega_n^\alpha \equiv 0,$$

$$\nabla \Gamma^\alpha_\gamma + \Gamma^\alpha_\gamma(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \Gamma_\gamma \omega_n^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\omega_n^\beta \equiv 0,$$

$$\nabla \Gamma_\gamma - \Lambda_{\alpha\gamma}\,\omega_n^\alpha \equiv 0,$$

где символом $\equiv$ обозначено сравнение по модулю базисных форм ω_0^α.

Т е о р е м а 1. Присоединение к каждой паре фигур (P, Q) точки, лежащей в гиперплоскости l_{n-1} и не принадлежащей гиперплоскости T_{n-1}, позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_r(S_{n-1})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанную в теореме точку B зададим разложением $B = \lambda^\alpha A_\alpha + A_n$, причем из условия ее относительной инвариантности имеем

$$\nabla \lambda^\alpha = \lambda^\alpha(\omega_n^n - \omega_0^0) - \omega_n^\alpha + \lambda^\alpha_\beta\,\omega_0^\beta. \qquad (1)$$

Фундаментальный тензор $\Lambda_{\alpha\beta}$ и оснащающий квазитензор λ^α позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha \Lambda_{\beta\gamma};\quad \Gamma^\alpha_\beta = -\lambda^\alpha\lambda^\gamma\Lambda_{\gamma\beta},\quad \Gamma_\alpha = -\lambda^\beta\Lambda_{\beta\alpha}.$$

Т е о р е м а 2. Связность в ассоциированном расслоении $G_r(S_{n-1})$ возникает внутренним образом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве точки B достаточно взять точку $A_n - \mu^{\alpha\beta}\mu_{n\alpha}A_\beta$, определяемую самим многообразием V_{n-1}.

Т е о р е м а 3. Точка B переносится параллельно в связности Γ в том и только том случае, когда она смещается вдоль прямой AB.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя уравнения (1), найдем ковариантный дифференциал квазитензора λ^α - $\mathcal{D}\lambda^\alpha = \tilde{\lambda}^\alpha_\beta\,\omega_0^\beta$, где $\tilde{\lambda}^\alpha_\beta$ -ковариантные производные

$$\tilde{\lambda}^\alpha_\beta = \lambda^\alpha_\beta - \lambda^\gamma\Gamma^\alpha_{\gamma\beta} + \lambda^\alpha\Gamma_\beta - \Gamma^\alpha_\beta.$$

Для точки B справедливо соотношение

$$dB = \tilde{\omega}_n^n B + (\lambda^\alpha\mu_{\alpha\beta} + \mu_{n\beta})\,\omega_0^\beta A + \mathcal{D}\lambda^\alpha A_\alpha,$$

откуда получаем, что условия $\mathcal{D}\lambda^\alpha = 0$ параллельного переноса точки B в связности Γ определяют смещение точки B вдоль прямой AB.

З а м е ч а н и е. Гиперповерхность S_{n-1} нормализована в смысле А.П.Нордена , а именно: ее нормалью первого рода служит прямая AB, нормалью второго рода - плоскость M_{n-2}.

Т е о р е м а 4. Подобъект $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ объекта связности характеризуется проекцией на нормаль M_{n-2} смежной с ней нормали $M_{n-2} + dM_{n-2}$ из центра AB.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы получим, рассмотрев имеющие место равенства

$$d\bar{A}_\alpha = \omega_\alpha^0 \bar{A} + \omega_\alpha^n \bar{B} + \tilde{\omega}_\alpha^\beta \bar{A}_\beta.$$

Список литературы

1. Цапенко В.П. Семейство плоскостей, ассоциированных с гиперконгруэнцией V_{n-1}.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14,Калининград,1983,с.103

2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. -Проблемы геометрии,т.9.М.,1979,с.7-246.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

И.И.Ц ы г а н о к

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ В n-МЕРНОМ АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Теория векторных полей в трехмерном евклидовом пространстве является классическим разделом дифференциальной геометрии. Аффинная же теория векторных полей является менее изученной. Исследованию векторных полей в трехмерном аффинном пространстве посвящены статьи [1] и [2]. В настоящей работе ставится задача изучения аффинной геометрии векторных полей многомерного пространства. При ее решении существенную роль будет играть тензор типа (1,1), порождаемый векторным полем.

1. Рассмотрим аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $\{x, \vec{e}_i\}$, инфинитезимальные перемещения которого описываются уравнениями вида:

$$dx = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j \quad (i, j, k, \ell = 1, 2, \dots, n),$$

где формы ω^i, ω_j^i удовлетворяют следующим уравнениям структуры: $\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i$, $\mathcal{D}\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i$.

Пусть в некоторой области пространства A_n задано векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x) = a^i \vec{e}_i$. Тогда его координаты удовлетворяют уравнениям

$$da^i + a^\ell \omega_\ell^i = a_j^i \omega^j. \tag{1}$$

При их продолжении получаем

$$da_j^i - a_k^i \omega_j^k + a_j^k \omega_k^i = a_{jk}^i \omega^k \quad (a_{jk}^i = a_{kj}^i). \tag{2}$$

Система величин $A = (a_j^i)$ образует тензор типа (1,1), с его помощью вычисляется дифференциал векторного поля $\vec{a}$ в направлении, определенном вектором $\vec{\xi}$: $d_{\vec{\xi}}\vec{a} = (a_j^i \xi^j \vec{e}_i)\theta$, где $\omega^i = \xi^i \theta$ и $\mathcal{D}\theta = \theta \wedge \theta_1$. Учитывая, что тензор A задает линейное преобразование векторного пространства $T_x(A_n)$, равенству можно придать вид:

$$\nabla_{\vec{\xi}}\vec{a} = A(\vec{\xi}). \tag{3}$$

Различные векторные поля могут порождать один и тот же тензор A. Пусть $\vec{b}$ является одним из таких векторных полей, т.е.

$$\nabla_{\vec{\xi}}\vec{b} = A(\vec{\xi}): \tag{3^1}$$

Вычитая равенство (3) из (3^1), получим

$$\nabla_{\vec{\xi}}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0},$$

следовательно, $(\vec{b} - \vec{a})$-постоянный вектор.

2. Найдем такие направления в точке x, вдоль которой дифференциал вектора $\vec{a}(x)$ коллинеарен направлению смещения точки, т.е. $d\vec{a} = \lambda d\vec{x}$.

Это равенство назовем уравнением Родрига векторного поля $\vec{a}$. В силу (3) оно приводит к алгебраическому уравнению степени n: $\det\|A - \lambda E\| = 0$, корни которого назовем главными кривизнами, а направления, им соответствующие, - главными направлениями векторного поля $\vec{a}$. Таким образом, главные кривизны векторного поля $\vec{a}$ -это собственные значения тензора A, а главные направления - его собственные направления. Величины $H = \operatorname{tr} A$, $K = \det A$ назовем соответственно средней и полной кривизной векторного поля. При этом $\operatorname{tr} A = \operatorname{div}\vec{a} = \sum a_i^i$, а потому обращение в нуль выделяет соленоидальные векторные поля $\vec{a}$ [2].

Если же в некоторой области пространства $K = 0$, то $\operatorname{rang} A = r < n$, и существует ядро линейного преобразования, определяемого тензором A, причем $\dim(\ker A) = n - r$. Если $\vec{\xi} \in \ker A$, то $\nabla_{\vec{\xi}}\vec{a} = A(\vec{\xi}) = \vec{0}$ и векторное поле $\vec{a}$ будет постоянным вдоль ядра линейного преобразования, образующего $(n-r)$-мерное подпространство векторного пространства $T_x(A_n)$. Таким образом, в области пространства A_n определяется распределение $\Delta(\Delta_{n-r}(x) = (\ker A)_x)$ с постоянным вдоль каждого своего плоского элемента $\Delta_{n-r}(x)$ векторным полем $\vec{a}$. Можно доказать, что это распределение будет голономным.

3. Предположим, что векторное поле $\vec{a}$ имеет n различных главных кривизн $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Если при этом векторы подвижного репера совместить с главными направ-

лениями тензора A, этот тензор приведется к виду $a^i_j=\lambda_j\delta^i_j$. Линии, касающиеся в каждой своей точке главных направлений тензора A, образуют сеть Σ_n в области задания векторного поля $\vec{a}$. Назовем ее сетью линий кривизны векторного поля. Из уравнений (2) при этом следует, что

$$d\lambda_i = a^i_{ik}\,\omega^k, \quad \omega^i_j=\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}\,a^i_{jk}\,\omega^k \ (i\neq j). \qquad (4)$$

Вторая группа уравнений и задает сеть Σ_n. Условие голономности сети Σ_n записывается в виде $(\lambda_i-\lambda_k)a^i_{jk}=(\lambda_i-\lambda_j)a^i_{kj}$ $(i\neq j\neq k\neq i)$. Отсюда в силу (2) следуют соотношения $a^i_{jk}=0$ $(i\neq j\neq k\neq i)$, которые показывают, что эта сеть является n-сопряженной системой [3].

Поскольку теперь $d\vec{a}=\sum\lambda_i\omega^i\vec{e}_i$, то вдоль каждой своей линии кривизны векторное поле описывает развертывающуюся поверхность, и через каждую точку x пространства A_n проходит n таких поверхностей.

В случае, если все $\lambda_i=const$, то из первой группы уравнений (4) последуют равенства $a^i_{ik}=0$ при $i\neq k$ и сеть Σ_n линий кривизны векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x)$ является сетью Чебышева II рода [4].

Потребуем теперь, чтобы τ первых кривизн векторного поля совпадали: $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_\tau=\lambda$, а остальные $(n-\tau)$ были различны между собой. В этом случае $a^s_t=\lambda\delta^s_t$ $(s,t=1,2,\ldots,\tau)$, поэтому из уравнений (4) последуют равенства: $a^s_{t\alpha}=\delta^s_t\,a_\alpha$ $(\alpha,\beta=\tau+1,\tau+2,\ldots,n)$.

Сами же уравнения (4) примут вид

$$\omega^\alpha_t=\frac{1}{\lambda_\alpha-\lambda}\,a^\alpha_{tk}\,\omega^k,$$

$$\omega^s_\alpha=\frac{1}{\lambda-\lambda_\alpha}\left(a_\alpha\omega^s+a^s_{\alpha\beta}\,\omega^\beta\right), \quad \omega^\alpha_\beta=\frac{1}{\lambda_\alpha-\lambda_\beta}\,a^\alpha_{\beta k}\,\omega^k \qquad (5)$$

Уравнения (5) задают голономное распределение Δ_τ, каждый плоский элемент $\Delta_\tau(x)=[x,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_\tau]$ которого является τ-мерным подпространством в $T_x(A_n)$, а любое его одномерное направление является главным направлением векторного поля $\vec{a}$.

Вдоль любой интегральной поверхности $\omega^\alpha=0$ распределения Δ_τ имеем теперь

$$d\vec{e}_\alpha = a_\alpha\, d\vec{x} + \omega^\beta_\alpha\,\vec{e}_\beta.$$

Поэтому плоскости $[x,\vec{e}_{\tau+1},\ldots,\vec{e}_n]$ проходят через $(n-\tau-1)$-мерную фиксированную плоскость пространства A_n и образуют осевое оснащение [5] интегральной поверхности распределения Δ_τ.

В частном случае, когда $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=\lambda$, $d\vec{a}=\lambda d\vec{x}$, $\lambda=const$ и, следовательно, $\vec{a}=\lambda(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

4. Если потребовать для векторного поля $\vec{a}$, чтобы в каждой точке x вектор $\vec{a}(x)$ был собственным вектором тензора A, то согласно формуле (3) интегральные кривые векторного поля $\vec{a}$ будут прямыми и образуют прямолинейную конгруэнцию в A_n. Верно и обратное.

Список литературы

1. Georhiev G. Observatia ossupra geometria affine differentiable a cimpurilor de vectori. - Lu.v. conf. de geom. si topolog. Jasi, 1958, 127-128.

2. Слухаев В.В. Некоторые вопросы эквиаффинной геометрии векторного поля.-Тр.Томского ун-та, т.181, 1965, с.68-75.

3. Базылев В.Т. К теории плоских многомерных сетей.-Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина.М., 1965, с.29-37.

4. Либер А.Е. О чебышевских сетях и чебышевских пространствах.-Тр.семинара по векторному и тензорному анализу, 1974, вып.17, с.177-183.

5. Атанасян Л.С. Оснащенные многообразия частного вида в многомерном аффинном пространстве.-Тр.семинара по векторному и тензорному анализу, 1952, вып.9.с.351-410.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Ю.И.Ш е в ч е н к о

О ФУНДАМЕНТАЛЬНО-ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ

Исходя из точки зрения двухъярусных расслоений, дан интерпретация двум частным случаям структурных уравнений Лаптева пространства с фундаментально-групповой связностью.

1.Структурные уравнения пространства элементов Лаптева ([1],с.317) запишем в подробном виде ([2]с.44):

$$d\omega^{s_0} = \omega^{p_0}\wedge\omega^{s_0}_{p_0}, \tag{1}$$

$$d\omega^{s_1} = \frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \omega^{p_0}\wedge\omega^{s_1}_{p_0}, \tag{2}$$

$$d\omega^{s_2} = \frac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2} + C^{s_2}_{p_1q_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_2} + \frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1} + \omega^{p_0}\wedge\omega^{s_2}_{p_0}, \tag{3}$$

где

$$s_0, p_0, q_0 = \overline{-R+1,0}\ ;\quad s_1, p_1, q_1 = \overline{1,r}\ ;\quad s_2, p_2, q_2 = \overline{r+1,\tau},$$

а $C^{s_1}_{p_1q_{12}}$, $C^{s_2}_{p_{12}q_{12}}$ -структурные постоянные τ-членной группы Ли G, содержащей $(\tau-r)$-членную подгруппу H, причем, например, индекс q_{12} принимает значения индексов q_1 и q_2. Из уравнений (1)-(3) следует, что пространство элементов является частным случаем главного двухъярусного ступенчато-расслоенного пространства ([3],с.286-287). Уравнения (1) - это структурные уравнения базы B - области R-мерного дифференцируемого многообразия. Представим пространство элементов Лаптева, с одной стороны, в виде главного расслоения $G(B)$, типовым слоем которого является группа G. Слой G, в свою очередь, есть главное расслоение $H(G/H)$ с базой -множеством левых смежных классов G/H и типовым слоем - подгруппой H. Уравнения (1),(2) - это структурные уравнения расширенной базы M. Пространство элементов представим, с другой стороны, в виде главного расслоения $H(M)$, типовым слоем которого служит подгруппа H. Расширенная база M есть расслоение $G/H(B)$ с базой B, типовым слоем G/H и структурной группой G.

Таким образом, пространство элементов Лаптева представлено в виде двух главных расслоений $G(B)$ и $H(M)$ где $G=H(G/H)$, $M=G/H(B)$. Это пространство естественно обозначить символом $H(G/H(B))$, отражающим его двухъярусную структуру.

2.Рассмотрим расслоение $G(B)$, структурные уравнения (2),(3) слоевых форм которого запишем в виде

$$d\omega^{s_{12}} = \frac{1}{2}C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}\omega^{p_{12}}\wedge\omega^{q_{12}} + \omega^{p_0}\wedge\omega^{s_{12}}_{p_0} \quad (C^{s_1}_{p_2q_2}=0).$$

Связность в главном расслоении $G(B)$ задается по Лаптеву [4] с помощью форм $\tilde{\omega}^{s_{12}} = \omega^{s_{12}} - \Gamma^{s_{12}}_{p_0}\omega^{p_0}$, где компоненты объекта связности $\Gamma^{s_{12}}_{p_0}$ удовлетворяют уравнениям

$$d\Gamma^{s_{12}}_{p_0} - \Gamma^{s_{12}}_{q_0}\omega^{q_0}_{p_0} + \Gamma^{q_{12}}_{p_0}\omega^{s_{12}}_{q_{12}} + \omega^{s_{12}}_{p_0} = \Gamma^{s_{12}}_{p_0q_0}\omega^{q_0}, \tag{4}$$

причем $\omega^{s_{12}}_{q_{12}} = C^{s_{12}}_{q_{12}p_{12}}\omega^{p_{12}}$. Внешние дифференциалы форм связности $\tilde{\omega}^{s_{12}}$ приводятся к виду

$$d\tilde{\omega}^{s_{12}} = \frac{1}{2}C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}\omega^{p_{12}}\wedge\tilde{\omega}^{q_{12}} + R^{s_{12}}_{p_0q_0}\omega^{p_0}\wedge\omega^{q_0}, \tag{5}$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R^{s_{12}}_{p_0q_0} = \Gamma^{s_{12}}_{[p_0q_0]} - \frac{1}{2}C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}\Gamma^{p_{12}}_{[p_0}\Gamma^{q_{12}}_{q_0]}.$$

Полагая, что в уравнениях (1) формы $\omega^{s_0}_{p_0}$ имеют вид

$$\omega^{s_0}_{p_0} = R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{q_0} + 2R^{s_0}_{p_0q_1}\tilde{\omega}^{q_1},$$

получим, что уравнения (1),(5) дают нам частный случай структурных уравнений пространства с фундаментально-групповой связностью ([1],с.311), выделяемый условиями

$$R^{s_0}_{p_1q_1} = 0,\qquad R^{s_{12}}_{p_{01}q_1} = 0.$$

3. Возьмем расслоение $H(M)$ со структурными уравнениями, записанными в виде

$$d\omega^{s_{01}} = \omega^{p_{01}} \wedge \Omega^{s_{01}}_{p_{01}},$$

$$d\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \omega^{p_2} \wedge \omega^{q_2} + \omega^{p_{01}} \wedge \Omega^{s_2}_{p_{01}},$$

где

$$\Omega^{s_0}_{p_1} = 0, \quad \Omega^{s_{012}}_{p_0} = \omega^{s_{012}}_{p_0}, \quad \Omega^{s_{12}}_{p_1} = \frac{1}{2} C^{s_{12}}_{p_1 q_1} \omega^{q_1} + C^{s_{12}}_{p_1 q_2} \omega^{q_2}.$$

Рассмотрим формы

$$\bar\omega^{s_2} = \omega^{s_2} - \Pi^{s_2}_{p_0} \omega^{p_0} - \Pi^{s_2}_{p_1} \omega^{p_1},$$

внешние дифференциалы которых имеют вид:

$$d\bar\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \bar\omega^{p_2} \wedge \bar\omega^{q_2} + \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_1 q_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} + \omega^{p_0} \wedge \Delta\Pi^{s_2}_{p_0} +$$

$$+ \omega^{p_1} \wedge \Delta\Pi^{s_2}_{p_1} - \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \Pi^{p_2}_{p_{01}} \Pi^{q_2}_{q_{01}} \omega^{p_{01}} \wedge \omega^{q_{01}},$$

где

$$\Delta\Pi^{s_2}_{p_0} = d\Pi^{s_2}_{p_0} - \Pi^{s_2}_{q_0} \omega^{q_0}_{p_0} + \Pi^{q_2}_{p_0} \Omega^{s_2}_{q_2} - \Pi^{s_2}_{q_1} \omega^{q_1}_{p_0} + \omega^{s_2}_{p_0},$$

$$\Delta\Pi^{s_2}_{p_1} = d\Pi^{s_2}_{p_1} - \Pi^{s_2}_{q_1} \Omega^{q_1}_{p_1} + \Pi^{q_2}_{p_1} \Omega^{s_2}_{q_2} + C^{s_2}_{p_1 q_2} \omega^{q_2},$$

причем $\Omega^{s_2}_{q_2} = C^{s_2}_{q_2 p_2} \omega^{p_2}$. В соответствии с теоремой Картана-Лаптева [5] для задания связности в главном расслоении $H(M)$ необходимо и достаточно задать поле объекта связности $\Pi^{s_2}_{p_{01}}$ на расширенной базе M : $\Delta\Pi^{s_2}_{p_{01}} = \Pi^{s_2}_{p_{01} q_{01}} \omega^{q_{01}}$. Тогда формы связности $\bar\omega^{s_2}$ будут удовлетворять уравнениям

$$d\bar\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \bar\omega^{p_2} \wedge \bar\omega^{q_2} + \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_1 q_1} \omega^{p_1} \wedge \omega^{q_1} +$$

$$+ \bar R^{s_2}_{p_{01} q_{01}} \omega^{p_{01}} \wedge \omega^{q_{01}}, \tag{6}$$

где объект $\bar R^{s_2}_{p_{01} q_{01}}$, совпадающий с объектом кривизны лишь с точностью до постоянных слагаемых, имеет вид

$$\bar R^{s_2}_{p_{01} q_{01}} = \Pi^{s_2}_{[p_{01} q_{01}]} - \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \Pi^{p_2}_{[p_{01}} \Pi^{q_2}_{q_{01}]}.$$

З а м е ч а н и е 1. При менее детальном подходе, когда формы $\bar\omega^{s_2}$ записываются в компактной форме $\bar\omega^{s_2} = \omega^{s_2} - \Pi^{s_2}_{p_{01}} \omega^{p_{01}}$, для компонент объекта связности получаются уравнения

$$d\Pi^{s_2}_{p_{01}} - \Pi^{s_2}_{q_{01}} \Omega^{q_{01}}_{p_{01}} + \Pi^{q_2}_{p_{01}} \Omega^{s_2}_{q_2} + \Omega^{s_2}_{p_{01}} = \Pi^{s_2}_{p_{01} q_{01}} \omega^{q_{01}}.$$

В этом случае формы связности $\bar\omega^{s_2}$ удовлетворяют обычным уравнениям, из которых следуют уравнения (6).

4. Изучим расслоение $G/H(B)$, структурные уравнения слоевых форм которого запишем в виде

$$d\omega^{s_1} = \omega^{p_1} \wedge \Omega^{s_1}_{p_1} + \omega^{p_0} \wedge \omega^{s_1}_{p_0}.$$

Линейная дифференциально-геометрическая связность в расслоении $G/H(B)$ задается по В.И.Близникасу [6] с помощью форм $\bar\omega^{s_1} = \omega^{s_1} - L^{s_1}_{p_0} \omega^{p_0}$, причем компоненты объекта связности $L^{s_1}_{p_0}$ удовлетворяют уравнениям

$$dL^{s_1}_{p_0} - L^{s_1}_{q_0} \omega^{q_0}_{p_0} + L^{q_1}_{p_0} \Omega^{s_1}_{q_1} + \omega^{s_1}_{p_0} = L^{s_1}_{p_0 q_{01}} \omega^{q_{01}}. \tag{7}$$

Внешние дифференциалы форм связности $\bar\omega^{s_1}$ имеют вид

$$d\bar\omega^{s_1} = \bar\omega^{p_1} \wedge (\Omega^{s_1}_{p_1} - L^{s_1}_{q_0 p_1} \omega^{q_0}) + R^{s_1}_{p_0 q_0} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0}, \tag{8}$$

где компоненты объекта кривизны выражаются по формулам

$$R^{s_1}_{p_0 q_0} = L^{s_1}_{[p_0 q_0]} + L^{s_1}_{[p_0|q_1|} L^{q_1}_{q_0]}.$$

Уравнения (6),(8) приведем к виду

$$\begin{cases} d\bar\omega^{s_1} = \frac{1}{2} C^{s_1}_{p_1 q_1} \bar\omega^{p_1} \wedge \bar\omega^{q_1} + C^{s_1}_{p_1 q_2} \bar\omega^{p_1} \wedge \bar\omega^{q_2} + \\ + R^{s_1}_{p_0 q_0} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} + 2 R^{s_1}_{p_0 q_1} \omega^{p_0} \wedge \bar\omega^{q_1} + R^{s_1}_{p_1 q_1} \bar\omega^{p_1} \wedge \bar\omega^{q_1}, \\ \\ d\bar\omega^{s_2} = \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_2 q_2} \bar\omega^{p_2} \wedge \bar\omega^{q_2} + \frac{1}{2} C^{s_2}_{p_1 q_1} \bar\omega^{p_1} \wedge \bar\omega^{q_1} + \\ + R^{s_2}_{p_0 q_0} \omega^{p_0} \wedge \omega^{q_0} + 2 R^{s_2}_{p_0 q_1} \omega^{p_0} \wedge \bar\omega^{q_1} + R^{s_2}_{p_1 q_1} \bar\omega^{p_1} \wedge \bar\omega^{q_1}, \end{cases} \tag{9}$$

где

$$2R^{s_1}_{p_0q_1}=L^{s_1}_{p_0q_1}+\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}L^{p_1}_{p_0}+C^{s_1}_{p_2q_1}(\Pi^{p_2}_{p_0}+\Pi^{p_2}_{p_1}L^{p_1}_{p_0}),$$

$$R^{s_1}_{p_1q_1}=C^{s_1}_{[p_1|q_2|}\Pi^{q_2}_{q_1]},\quad R^{s_2}_{p_1q_1}=\bar{R}^{s_2}_{p_1q_1},$$

$$R^{s_2}_{p_0q_0}=\bar{R}^{s_2}_{p_0q_0}+2\bar{R}^{s_2}_{[p_0|q_1|}L^{q_1}_{q_0]}+(\bar{R}^{s_2}_{p_1q_1}+\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1})L^{p_1}_{[p_0}L^{q_1}_{q_0]},$$

$$R^{s_2}_{p_0q_1}=\bar{R}^{s_2}_{p_0q_1}+(\bar{R}^{s_2}_{p_1q_1}+\frac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1})L^{p_1}_{p_0}.$$

Выберем в уравнениях (1) формы $\omega^{s_0}_{p_0}$ в виде

$$\omega^{s_0}_{p_0}=R^{s_0}_{p_0q_0}\omega^{q_0}+2R^{s_0}_{p_0q_1}\bar{\omega}^{q_1},$$

тогда уравнения (1),(9) дают другой случай пространства с фундаментально-групповой связностью, выделяемый условиями $C^{s_2}_{p_1q_2}=0$, $R^{s_0}_{p_1q_1}=0$. Этот случай соответствует редуктивности однородного пространства G/H.

З а м е ч а н и е 2. Исходя из уравнений (4) и (7), запишем уравнения для компонент $\Gamma^{s_1}_{p_0}$ объекта связности $\Gamma^{s_{12}}_{p_0}$ и объекта связности $L^{s_1}_{p_0}$ следующим образом:

$$d\Gamma^{s_1}_{p_0}-\Gamma^{s_1}_{q_0}\omega^{q_0}_{p_0}+\Gamma^{q_1}_{p_0}C^{s_1}_{q_1p_2}\omega^{p_2}+\Gamma^{p_{12}}_{p_0}C^{s_1}_{p_{12}q_1}\omega^{q_1}+\omega^{s_1}_{p_0}=\Gamma^{s_1}_{p_0q_0}\omega^{q_0},$$

$$dL^{s_1}_{p_0}-L^{s_1}_{q_0}\omega^{q_0}_{p_0}+L^{q_1}_{p_0}C^{s_1}_{q_1p_2}\omega^{p_2}+\omega^{s_1}_{p_0}=\bar{L}^{s_1}_{p_0q_{01}}\omega^{q_{01}},$$

где

$$\bar{L}^{s_1}_{p_0q_0}=L^{s_1}_{p_0q_0},\quad \bar{L}^{s_1}_{p_0q_1}=L^{s_1}_{p_0q_1}-\frac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}L^{p_1}_{p_0}.$$

Отождествляя объекты $\Gamma^{s_1}_{p_0}$ и $L^{s_1}_{p_0}$, из записанных уравнений получим соотношения $\bar{L}^{s_1}_{p_0q_1}=C^{s_1}_{q_1p_{12}}\Gamma^{p_{12}}_{p_0}$, являющиеся условиями горизонтальности 1-го порядка ([2], с.454). Теперь объект $L^{s_1}_{p_0}$ будет задавать связность Ю.Г.Лумисте в однородном расслоении $G/H(B)$. В этом случае в системе (9) вместо форм $\bar{\omega}^{s_1}$ можно писать формы $\widehat{\omega}^{s_1}$.

З а м е ч а н и е 3. Отметим интересный момент, проявившийся во 2-й интерпретации. Мы использовали расслоение $G/H(B)$, типовой слой которого является общим однородным пространством, однако получили интерпретацию,

соответствующую редуктивному случаю.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.об-ва, т.2.М., 1953, с.275-382.

2. Лумисте Ю.Г. Связности в однородных расслоениях. -Матем.сб., 1966, т.69, с.434-469.

3. Остиану Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства. -Тр.геометрич.семинара, т.5.М., 1974, с.259-309.

4. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства.-Тр. 4-го Всесоюзного матем.съезда (1961), т.2, Л., 1964, с.226-233.

5. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально- геометрические структуры на многообразиях.-Проблемы геометрии, т.9.М., 1979.

6. Близникас В.И. Неголономное дифференцирование Ли и линейные связности в пространстве опорных элементов. -Литовский математич.сб., 1966, №2, с.141-209.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.16 1985

УДК 514.75

Н.М. Шейдорова

ЗАДАНИЕ ДВУХСОСТАВНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ $\mathcal{H}^{\tau}_{m} \subset P_n$

В работе приведены дифференциальные уравнения двухсоставного распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ [4] в репере нулевого порядка $\mathcal{R}^{o}$. Доказано, что распределения $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ существуют с произволом $\tau(n-\tau)+(n-m)(m-\tau)$ функций n аргументов.

При $m=n-1$ двухсоставное распределение $\mathcal{H}^{\tau}_{m} \subset P_n$ является гиперполосным распределением $\mathcal{H}_{\tau} \subset P_n$, которое рассмотрено в работе А.В.Столярова [3].

Индексы принимают следующие значения:

$$\bar{\mathcal{I}}, \bar{\mathcal{J}}, \bar{\mathcal{K}} = \overline{0,n}; \quad p,q = \overline{1,\tau}; \quad \alpha,\beta = \overline{m+1,n}; \quad a,b = \overline{1,m};$$
$$\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K} = \overline{1,n}; \quad i,j = \overline{\tau+1,m}; \quad u,v = \overline{\tau+1,n}.$$

При внешнем дифференцировании принимается оператор ∇, введенный в работе [1].

1. Отнесем проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{J}}\}$, инфинитезимальные перемещения которого:

$$dA_{\bar{\mathcal{J}}} = \omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}} A_{\bar{\mathcal{K}}}, \quad \text{где} \quad \mathcal{D}\omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{J}}} = \omega^{\bar{\mathcal{I}}}_{\bar{\mathcal{J}}} \wedge \omega^{\bar{\mathcal{K}}}_{\bar{\mathcal{I}}}, \quad \sum_{\bar{\mathcal{J}}} \omega^{\bar{\mathcal{J}}}_{\bar{\mathcal{J}}} = 0.$$

Совместим вершину A_0 репера $\{A_{\bar{\mathcal{J}}}\}$ с текущей точкой X пространства P_n, тогда структурные формы точки приводятся к каноническому виду $\omega^{\mathcal{J}}_{0}$. Такой репер обозначим $\mathcal{R}^{o}$.

О п р е д е л е н и е. Пару распределений

$$\Delta\Lambda^{u}_{p} \stackrel{def}{\equiv} \nabla\Lambda^{u}_{p} - \Lambda^{u}_{q}\Lambda^{v}_{p}\omega^{q}_{v} + \omega^{u}_{p} = \Lambda^{u}_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{0}, \quad (1)$$
$$\Delta M^{\alpha}_{a} \stackrel{def}{\equiv} \nabla M^{\alpha}_{a} - M^{\alpha}_{b}M^{\beta}_{a}\omega^{b}_{\beta} + \omega^{\alpha}_{a} = M^{\alpha}_{a\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{0} \quad (2)$$

соответственно τ-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение) и m-мерных плоскостей M (M-распределение) пространства P_n с отношением инцидентности

$$X \equiv A_0 \in \Lambda \subset M \quad (\tau < m \leq n-1) \quad (3)$$

их соответствующих элементов в каждом центре A_0 назовем двухсоставным распределением $\mathcal{H}^{\tau}_{m}$ [4],[5] или $M(\Lambda)$-

распределением проективного пространства P_n, в котором Λ-распределение назовем базисным, M-распределение — оснащающим.

Плоскости $\Lambda(A_0)$, $M(A_0)$ натянуты соответственно на точки

$$A_0, \; L_p = A_p + \Lambda^{u}_{p}A_u; \qquad A_0, M_a = A_a + M^{\alpha}_{a}A_{\alpha}. \quad (4)$$

Относительно репера $\mathcal{R}^{o}$ дифференциальные уравнения $M(\Lambda)$-распределения в P_n имеют вид ([2]; при $m=n-1$ см. [3]):

$$\nabla\Lambda^{u}_{p} - \Lambda^{u}_{q}\Lambda^{v}_{p}\omega^{q}_{v} + \omega^{u}_{p} = \Lambda^{u}_{p\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{0},$$
$$\nabla M^{\alpha}_{i} - M^{\beta}_{i}M^{\alpha}_{j}\omega^{j}_{\beta} - M^{\alpha}_{p}(\omega^{p}_{i} + M^{\beta}_{i}\omega^{p}_{\beta}) + \omega^{\alpha}_{i} = M^{\alpha}_{i\mathcal{K}}\omega^{\mathcal{K}}_{0}, \quad (5)$$

где

$$M^{\alpha}_{p} = \Lambda^{\alpha}_{p} - \Lambda^{i}_{p}M^{\alpha}_{i}. \quad (6)$$

Соотношения (6) характеризуют условия (3) инцидентности образующих элементов распределения (1) – (2). Система величин $\{\Lambda^{u}_{p}, \Lambda^{u}_{p\mathcal{K}}, M^{\alpha}_{i}, M^{\alpha}_{i\mathcal{K}}\}$ образует геометрический объект – фундаментальный объект 1-го порядка $M(\Lambda)$-распределения. Последующие продолжения полученных систем приведут к дифференциальным уравнениям для компонент фундаментальных объектов высших порядков $M(\Lambda)$-распределения. Последовательность фундаментальных объектов $M(\Lambda)$-распределения содержит на каждом этапе продолжения в качестве подобъекта фундаментальный объект соответствующего порядка басисного распределения (Λ-распределения).

2. Все уравнения, входящие в чистое замыкание системы (5), можно записать в виде

$$\Delta\Lambda^{u}_{p\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{K}}_{0} = 0, \quad \Delta M^{\alpha}_{i\mathcal{K}} \wedge \omega^{\mathcal{K}}_{0} = 0, \quad (7)$$

где

$$\Delta\Lambda^{u}_{p\mathcal{K}} \stackrel{def}{\equiv} \nabla\Lambda^{u}_{p\mathcal{K}} - \Lambda^{v}_{p\mathcal{K}}\Lambda^{u}_{q}\omega^{q}_{v} - \Lambda^{u}_{q\mathcal{K}}\Lambda^{v}_{p}\omega^{q}_{v} + (\Lambda^{u}_{q}\delta^{q}_{\mathcal{K}} - \delta^{u}_{\mathcal{K}})(\omega^{0}_{p} + \Lambda^{u}_{p}\omega^{0}_{u}) = \Lambda^{u}_{p\mathcal{K}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{0}, \quad (8)$$

$$\Delta M^{\alpha}_{i\mathcal{K}} \stackrel{def}{\equiv} \nabla M^{\alpha}_{i\mathcal{K}} - M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^{p}_{i} - M^{\alpha}_{a}M^{\beta}_{i\mathcal{K}}\omega^{a}_{\beta} - M^{\beta}_{i}(M^{\alpha}_{j\mathcal{K}}\omega^{j}_{\beta} + M^{\alpha}_{p\mathcal{K}}\omega^{p}_{\beta}) + (M^{\alpha}_{a}\delta^{a}_{\mathcal{K}} - \delta^{\alpha}_{\mathcal{K}})(\omega^{0}_{i} + M^{\beta}_{i}\omega^{0}_{\beta}) = M^{\alpha}_{i\mathcal{K}\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{0}. \quad (9)$$

Определяя характеры системы (7), получим

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = \tau(n-\tau) + (m-\tau)(n-m), \quad (10)$$

откуда число Картана $Q = \frac{1}{2} n(n+1)[\tau(n-\tau) + (m-\tau)(n-m)]$. Так как функции Λ^u_{pkj}, M^α_{ikj} симметричны по индексам k, j, их число $N = \frac{1}{2}(n+1)n[\tau(n-\tau) + (m-\tau)(n-m)]$. Таким образом, $Q = N$, и следовательно, система уравнений (5), определяющая $M(\Lambda)$-распределение в репере R^0, находится в инволюции.

Т е о р е м а . Двухсоставные распределения $\mathcal{H}^\tau_m \subset P_n$ существуют с произволом в $\tau(n-\tau) + (n-m)(m-\tau)$ функций n аргументов.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности I.-Тр.геометрич.семинара.ВИНИТИ АН СССР,1971,3,с.49-94.

2. Попов Ю.И. Инвариантные подпространства,ассоциированные с $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределением проективного пространства. I.Калининградский ун-т,Калининград,1984,93с.(Рукопись деп.в ВИНИТИ АН СССР,2.07.1984,№ 4481-84 Деп.)

3. Столяров А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов.-Проблемы геометрии.Итоги науки и техники.ВИНИТИ АН СССР,7,1975,с.117-151.

4. Шейдорова Н.М. К геометрии двухсоставных распределений $\mathcal{H}^\tau_m \subset P_n$.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.14.Калининград,1983,с.111-115.

5. Шейдорова Н.М. О нормализации двухсоставных распределений проективного пространства.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.15.Калининград,1984,с.111-114.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.16 1985

УДК 514.75

С.В.Шмелева

КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ,ПОРОЖДЕННОЙ ФОКАЛЬНЫМИ ТОЧКАМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции $\mathcal{D}$ невырожденных линейчатых квадрик Q, имеющие одну невырождающуюся фокальную поверхность (A_0) и одну вырождающуюся поверхность (A_3), описанную фокальными точками второго порядка. Доказано, что если (A_3)-линия, то существует пять и только пять попарно пересекающихся классов конгруэнций $\mathcal{D}$. Точка A_3 для таких конгруэнций является двукратной фокальной точкой квадрики.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{D}$ к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0A_i, A_3A_i -прямолинейные образующие квадрики $Q \in \mathcal{D}$ $(i, j, k = 1, 2)$. Квадрика Q задается уравнением:

$$\mathcal{F} \equiv X^1X^2 - X^0X^3 = 0, \quad (1)$$

причем конгруэнции $\mathcal{D}$ удовлетворяют следующей системе уравнений Пфаффа

$$\omega^3_0 = 0, \ \omega^0_3 = 0, \ \omega^j_i = a^j_{ik}\omega^k, \ \omega^3_i - \omega^j = c_{ik}\omega^k,$$
$$\omega^0_i - \omega^j_3 = \lambda_{ik}\omega^k, \ \omega^i_3 = b^i_k\omega^k, \ \Omega \equiv \omega^0_0 - \omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3 = h_k\omega^k, \quad (2)$$

где

$$c_{12} = c_{21}, \ \lambda_{12}b^1_1 - \lambda_{11}b^1_2 + \lambda_{22}b^2_1 - \lambda_{21}b^2_2 = 0, \quad (3)$$

$\omega^i \overset{def}{=} \omega^i_0$, ω^β_α $(\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3)$ - компоненты инфинитезимальных перемещений репера R.

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j

суммирование не производится.

Так как поверхность (A_3) вырождается в линию, то

$$\omega_3^i = t^i v, \qquad (4)$$

где v -некоторая ненулевая форма Пфаффа. Обозначим:

$$\mathcal{F}_i = h_i X^1 X^2 - a_{ii}^j (X^i)^2 - a_{ji}^i (X^j)^2 + \lambda_{\kappa i} X^\kappa X^3 + c_{\kappa i} X^\kappa X^0, \qquad (5)$$

тогда

$$d\mathcal{F} = (2\theta - \omega_0^0 - \omega_3^3)\mathcal{F} + \mathcal{F}_\kappa \omega^\kappa, \quad \mathcal{D}\theta = 0. \qquad (6)$$

Т е о р е м а 1. Если поверхность (A_3) вырождается в точку, то она является фокальной точкой любого порядка $m \in N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ в разложении

$$\mathcal{F} + d\mathcal{F} + \frac{1}{2} d^2\mathcal{F} + \ldots + \frac{1}{\kappa!} d^\kappa \mathcal{F} \qquad (7)$$

не может возникнуть член с $(X^3)^2$. Следовательно, координаты точки A_3 обращают в нуль (7) при любом натуральном κ.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $\mathcal{D}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{D}$, у которой A_3 -неподвижная точка, A_0 -фокальная точка второго порядка, A_i -фокальные точки.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{D}_0$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой Пфаффа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{D}_0$ приводится к виду:

$$\omega_0^3 = 0, \ \omega_3^0 = 0, \ \omega_3^i = 0, \ \omega_i^j = 0, \ \omega_i^3 - \omega^j = 0,$$
$$\omega_i^0 = \lambda \omega^j, \ \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \ d\ln\lambda + 2\omega_0^0 = 0. \qquad (8)$$

Чистое замыкание этой системы тождественно обращается в нуль. Следовательно, система (8) вполне интегрируема. Анализируя систему (8), убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Т е о р е м а 3. Конгруэнция $\mathcal{D}_0$ обладает следующими свойствами: 1/ поверхность (A_0) является квадрикой с прямолинейными образующими A_0A_i; 2/ фокальное многообразие квадрики Q состоит из точек A_0, A_3 и пары пересекающихся фокальных прямых A_0A_i; 3/ поверхности вырождаются в линии, касательные к которым пересекаются в точке $M = \lambda A_0 + A_3$; 4/ касательные к любым соответствующим друг другу линиям на поверхностях (A_0) и (M) пересекаются в точке, лежащей на прямой A_1A_2.

Исключим в дальнейшем из рассмотрения случай вырождения поверхности (A_3) в точку, т.е. будем считать, что t^1 и t^2 в формулах (4) не обращаются в нуль одновременно. Выделяются три подкласса таких конгруэнций: конгруэнции $\mathcal{D}_i (t^i \neq 0, t^j = 0)$ и конгруэнции $\mathcal{D}_3 \ (t^1 t^2 \neq 0)$.

Так как A_3 -фокальная точка второго порядка, то

$$t^1 \lambda_{11} + t^2 \lambda_{21} = 0, \quad t^1 \lambda_{12} + t^2 \lambda_{22} = 0. \qquad (9)$$

Т е о р е м а 4. Существуют два и только два непересекающихся класса конгруэнций $\mathcal{D}_i$: конгруэнции $\mathcal{D}_i'$, определенные с произволом трех функций двух аргументов и конгруэнции $\mathcal{D}_i''$, определенные с произволом пяти функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу равноправия точек A_1 и A_2 достаточно ограничиться рассмотрением конгруэнций $\mathcal{D}_1 \ (t^1 \neq 0, t^2 \neq 0)$. Из (9) находим:

$$\lambda_{11} = 0, \quad \lambda_{12} = 0.$$

Тогда

$$\omega_3^2 = 0, \quad \omega_1^0 = 0. \qquad (10)$$

Замыкая уравнения (10), получим

$$\omega_3^1 \wedge \omega_1^2 = 0, \quad \omega_1^2 \wedge \omega_2^0 = 0. \qquad (11)$$

Рассмотрим сначала общий случай, когда

$$\omega_1^2 \neq 0. \qquad (12)$$

Тогда получим:

$$\omega_3^1 = \omega_1^2, \quad \omega_2^0 = p\,\omega_3^1, \quad \omega_3^3 + \omega_2^3 - 2\omega_1^1 = q\,\omega_3^1. \qquad (13)$$

Система (2),(10),(13)-в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{D}_1'$ с произволом трех функций двух аргументов.

Если
$$\omega_1^2=0, \qquad (14)$$
то уравнения (11) тождественно удовлетворяются. Замыкая (14), также получим тождество. Система (2),(10),(14) - в инволюции и определяет конгруэнцию $\mathcal{D}_1''$ с произволом пяти функций двух аргументов. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Касательная плоскость к поверхности (A_i) конгруэнции $\mathcal{D}_i'$ содержит прямую A_jA_3; поверхность (A_i) конгруэнции $\mathcal{D}_i''$ вырождается в прямую линию.

Доказательство непосредственно вытекает из формулы
$$dA_i=\omega_i^i A_i+\omega_i^j A_j+\omega_i^3 A_3 \qquad (15)$$
и уравнений, характеризующих конгруэнции $\mathcal{D}_i'$ и $\mathcal{D}_i''$.

Т е о р е м а 6. Конгруэнции $\mathcal{D}_3$ существуют и определяются с произволом пяти функций двух аргументов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Система уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{D}_3$ приводится к виду:
$$\omega_0^3=0,\ \omega_3^0=0,\ \omega_3^2-\omega_3^1=0,\ \omega_1^0+\omega_2^0-2\omega_3^1=0,$$
$$\omega_3^1=b_k\omega^k,\ \Omega=h_k\omega^k,\ \omega_i^3-\omega^j=c_{ik}\omega^k, \qquad (16)$$
$$\omega_1^0-\omega_3^2=\lambda_1\omega^1-\lambda_2\omega^2,\ \omega_i^j=a_{ik}^j\omega^k,\ \omega_2^2-\omega_1^1+\omega_1^2-\omega_2^1=2\omega_3^1,$$
причем
$$b_2(2a_{11}^2+2a_{21}^1+r\lambda_1-2h_1)-b_1(2a_{12}^2+2a_{22}^1+r\lambda_2-2h_2)=0 \qquad (17)$$
Система (16),(17) - в инволюции и определяет конгруэнции $\mathcal{D}_3$ с произволом пяти функций двух аргументов.

Т е о р е м а 7. Точка A_3 является двукратной фокальной точкой квадрики
$$Q\in\mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3$$
и трехкратной фокальной точкой квадрики $Q\in\mathcal{D}_i''$.

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из условий кратности фокальной точки A_3.

С е м и н а р
по дифференциальной геометрии многообразий
фигур при Калининградском госуниверситете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 31 мая 1983 года.

Ниже приводится перечень докладов, обсужденных с 12 октября 1983 года по 30 мая 1984 года.

12.10.1983г. Ю.И.П о п о в. Дифференциально-геометрические структуры $H(M(\Lambda))$-распределения.

19.10.1983г. В.С.М и к у ц к и й. (г.Минск). Геометрический смысл φ -сопряженных связностей.

26.10.1983г. М.В.К р е т о в. О свойствах дифференцируемых отображений, ассоциированных с комплексами центральных невырожденных гиперквадрик в аффинном пространстве.

2.11.1983г. Е.В.С к р ы д л о в а. Вырожденные конгруэнции, порожденные кривой и плоскостью.

9.11.1983г. Е.П.С о п и н а. Конгруэнции гиперквадрик в A_n с фокальной конгруэнцией m -мерных квадрик.

16.11.1983г. Л.А.Ж а р и к о в а. Связности в расслоении, ассоциированном с конгруэнцией нецентральных квадратичных элементов в аффинном пространстве.

23.11.1983г. Т.П.Ф у н т и к о в а. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных парой эллипсов.

30.11.1983г. В.П.Ц а п е н к о. Аффинные связности, инвариантно присоединенные к специальному гиперкомплексу.

7.12.1983г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Связности в расслоениях, ассоциированных с пространством квадратичных элементов.

14.12.1983г. Н.М.Ш е й д о р о в а.О нормализации двухсоставных распределений проективного пространства.

21.12.1983г. М.Ф.Г р е б е н ю к. Проективные связности,ассоциированные со специальной гиперполосой.

28.12.1983г.В.С.М а л а х о в с к и й.О многообразии фигур в n-мерном однородном пространстве.

4.01.1984г.С.В.Ш м е л е в а (г.Москва).Об автоматизации поиска научной информации по геометрии.

11.01.1984г.В.В.М а х о р к и н.Фокальные точки второго порядка как вторичные особенности.

18.01.1984г.М.О.Р а х у л а (г.Одесса).Теория катастроф и дифференциальная геометрия.

25.01.1984г.Ю.И.Ш е в ч е н к о.О фундаментально-групповой связности.

1.02.1984г.Г.Л.С в е ш н и к о в а.Невырожденные конгруэнции кривых второго порядка с трехкратными фокальными поверхностями.

8.02.1984г.В.В.М а х о р к и н.Особые точки дифференцируемых отображений.

15.02.1984г.Л.Г.К о р с а к о в а.Об одном классе расслояемых пар многообразий.

22.02.1984г.Е.А.Щ е р б а к.Некоторые классы конгруэнций оснащенных коник в аффинном пространстве.

29.02.1984г.Б.А.А н д р е е в.Об одном классе сечений главных расслоений.

7.03.1984г.М.В.К р е т о в.Комплексы эллипсоидов с вырождающимися в линию многообразиями центров.

14.03.1984г.Ю.И.П о п о в.Об одномерных нормалях первого рода $\mathcal{H}(M(\Lambda))$-распределения.

21.03.1984г.Е.А.М и т р о ф а н о в а.Последовательность G - структур реперов высших порядков,

ассоциированных с главным расслоением группы $A^p_m(n)$ над базой R^n.

28.03.1984г. Н.К о р о в и н а.Вырожденные конгруэнции,порожденные коникой и инцидентной ей точкой.

4.04.1984г.В.Н.Х у д е н к о.О связностях,ассоциированных с многообразиями многомерных квадрик.

11.04.1984г.В.Б а р а н о в а. Конгруэнции квадрик с распадающимися на плоскости ассоциированными квадриками в проективном пространстве.

18.04.1984г. В.И.В е д е р н и к о в (г.Минск). φ-структуры в главных G-расслоениях.

25.04.1984г.В.И.В е д е р н и к о в (г.Минск).Симметрические пространства и сопряженные связности.

16.05.1984г.Э.А н и с е н к о.Конгруэнции орициклов в пространстве Н.И.Лобачевского.

23.05.1984г.В.С.М а л а х о в с к и й. Конгруэнции квадрик со специальными свойствами фокальных поверхностей.

30.05.1984г.И.К о м п а н и е ц.Конгруэнции пар фигур,образованных квадрикой и точкой в проективном пространстве.

УДК 514.75

О деформации связностей в структурном распределении η $(\ell\xi\eta\rho)$ -структуры в $M_n(F)$. А к м а т о в Б. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.5-8.

Найдена геометрическая интерпретация деформированной связности в структурном распределении η индуцированной $(\ell\xi\eta\rho)$ -структуры в $M_n(F)$.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Распределения Δ_m на многообразии всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства ($m>n$).Б о ч и л л о Г.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.9-13.

Дана геометрическая характеристика,построено оснащение,найдено инвариантное подраспределение распределения Δ_m на многообразии M_{2n-1} всех гиперплоских элементов n-мерного проективного пространства в случае $n<m<2n-1$.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Пространство комплексных структур.В е д е р н и к о в С.В.Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.14-16.

На основе метода полиномиальных морфизмов изучаются метрики и связности на однородном пространстве, состоящем из операторов комплексной структуры.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75.

О римановых метриках,обладающих римановым равномерным атласом. Г л и к л и х Ю.Е. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985, с.17-19.

Доказано,что для любой римановой метрики на произвольном многообразии существует конформная риманова метрика,обладающая римановым равномерным атласом,т.е. атласом,карты которого содержат метрические шары фиксированного ридиуса относительно риманова расстояния на многообразии.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Конгруэнции парабол с фокальными многообразиями высших порядков.Ж а р и к о в а Л.А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16,Калининград,1985, с.20-22.

В трехмерном эквиаффинном пространстве продолжается изучение класса P парабол.Исследованы свойства конгруэнций $B^k(A)$ парабол,где k -порядок фокальной точки A параболы из конгруэнции P .Доказано,что если точка A -фокальная точка 2-го (3-го) порядка,то она является двукратной (трехкратной) фокальной точкой конгруэнции P .Установлены некоторые свойства конгруэнции $B^3(A)$.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Об одном аналоге тензора Риччи расслоения $P_{n,n}$. И в л е в Е.Т. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.23-26.

Рассматривается классическое пространство проективной связности.На секущей поверхности вводятся геометрические объекты,построенные из компонент тензора кручения-кривизны и определяющие гиперквадрику в типовом слое.Наиболее подробно изучен случай,когда поляра точки касания относительно гиперквадрики является неопределенной.Дается геометрическая интерпретация тензора, аналогичного тензору Риччи пространства аффинной связности.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Об отображении сетей в задаче Фубини-Чеха. К а з н и н а О.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.27-29.

В n-мерном евклидовом пространстве исследуется отображение некоторых классов сетей в задаче Фубини-Чеха.

УДК 514.75

О геометрии пары сетей.К и р е е в а С.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.30-33.

В проективном пространстве P_n рассматривается отображение,в котором каждая линия - двойная.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

К геометрии комплексов эллипсоидов в аффинном пространстве.К р е т о в М.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.34-36.

На основе свойств дифференцируемых отображений, ассоциированных с трехпараметрическими семействами эллипсоидов в аффинном пространстве,выделяются и исследуются подклассы указанных многообразий.Найдено безынтегральное представление исследованных подклассов.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Структуры,порожденные полем гиперквадрик.М а л а х о в с к и й В.С.Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985,с.37-40.

Исследуется гладкое многообразие,в каждом касательном пространстве которого задана центральная невырожденная гиперквадрика.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

О некоторых частных отображениях евклидовых n-пространств. М а р ю к о в М.Н.Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16.Калининград,1985, с.41-44.

Исследуются свойства линий кривизны пары распределений Δ_p и $\bar{\Delta}_p$,заданных в областях Ω и $\widehat{\Omega}$ евклидова пространства E_n ,между которыми установлен диффеоморфизм.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Об одном классе плоских сетей.М а т и е в а Г. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16. Калининград,1975,с.45-48.

Найдены геометрические свойства сети,инвариантно-связанной с p-распределением в n-мерном евклидовом пространстве.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75

Конгруэнция квадратичных элементов в P_6.М а х о р к и н В.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.16,Калининград,1985,с.49-51.

В шестимерном проективном пространстве исследуется конгруэнция квадратичных пар элементов.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Инвариантная связность Картана в метрическом пространстве элементов второго порядка. М и т р о ф а н о в а Е.А. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 52-56.

Методом продолжений и охватов в сочетании с инвариантной операцией редуцирования расслоений реперов высших порядков строится редуктивная связность Картана.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Об одномерных нормалях первого рода $H(M(\Lambda))$-распределения. П о п о в Ю.И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 57-66.

Методом Г.Ф. Лаптева исследуются $H(M(\Lambda))$-распределения проективного пространства. В окрестности 2-го порядка построена нормаль Михэйлеску 1-го рода.

Библиография: 6 названий.

УДК 514.75

Вполне геодезические расслоения группы Ли. Р е з н и к о в А.Г. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16, Калининград, 1985, с. 67-70.

Доказывается, что расслоения группы G на слои вида $\{Hg\}$ однозначно соответствуют сжимающим отображениям однородного пространства G/H (при некоторых ограничениях на вложение компактных групп Ли H). Изучается аналог для конечных групп.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Конгруэнции кривых 2-го порядка с трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями. С в е ш н и к о в а Г.Л. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16 Калининград, 1985, с. 71-74.

В трехмерном проективном пространстве исследуются невырожденные конгруэнции кривых второго порядка с трехкратными невырождающимися фокальными поверхностями.

Библиография: 2 названия.

УДК. 514.75

Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных коникой и плоскостью. С к р ы д л о в а Е.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 75-80.

В работе в трехмерном проективном пространстве рассматривается класс вырожденных конгруэнций, порожденных коникой и плоскостью. Выделение класса осуществлено с помощью специальных свойств.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

Об одном классе конгруэнций эллипсоидов в аффинном пространстве. С о п и н а Е.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16, Калининград, 1985, с. 81-83.

В трехмерном аффинном пространстве исследуются конгруэнции эллипсоидов с одной вырождающейся в линию фокальной поверхностью.

Библиография: 1 название.

УДК 514.75

К геометрии векторного поля. Т о л с т о п я т о в В.Г. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 16. Калининград, 1985, с. 84-86.

Изучается векторное поле, заданное в некоторой области на p-поверхности многомерного евклидова пространства. Найден критерий фокальности этого поля, а также его ортогональности секущей поверхности.

УДК 514.75

Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных парой эллипсов. Ф у н т и к о в а Т.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I6. Калининград, 1985, с. 87-90.

В трехмерном эквиаффинном пространстве исследуются вырожденные конгруэнции, порожденные парой эллипсов.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Х у д е н к о В.Н. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I6. Калининград, 1985, с. 91-96.

В n-мерном проективном пространстве исследуется связность в главном расслоении, ассоциированном с многообразием обобщенных пространственных элементов. Введено композиционное оснащение этого многообразия, получена геометрическая характеристика объекта связности.

Библиография: 3 названия.

УДК 514.75

Связность в многообразии пар гиперплоскостей, индуцированном гиперконгруэнцией V_{n-1}. Ц а п е н к о В.П. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I6. Калининград, 1985, с. 97-99.

Исследуется связность в многообразии пар гиперплоскостей, индуцированном конгруэнцией пар фигур (P,Q), где Q -гиперквадрика, а P-неинцидентная ей точка. Дана геометрическая характеристика некоторым подобъектам объекта связности.

Библиография: 2 названия.

УДК 514.75

Векторные поля в n-мерном аффинном пространстве. Ц ы г а н о к И.И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I6. Калининград, 1985, с. 100-103.

Рассматривается основа аффинной геометрии векторного поля с использованием структуры соответствующего аффинора.

Библиография: 5 названий.

УДК 514.75.

О фундаментально- групповой связности. Ш е в ч е н к о Ю.И. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I6. Калининград, 1985, с. 104-109.

Исходя из точки зрения двухъярусных расслоений, дается интерпретация двум частным случаям структурных уравнений Г.Ф. Лаптева пространства с фундаментально-групповой связностью.

Библиография: 6 названий.

УДК 514.75

Задание двухсоставных распределений $H^{z}_{m} \subset P_n$. Ш е й д о р о в а Н.М. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I6. Калининград, 1985, с. 110-112.

Приведены дифференциальные уравнения двухсоставного распределения H^{z}_{m} в репере нулевого порядка. Найден произвол существования многообразий H^{z}_{m}.

Библиография: 4 названия.

УДК 514.75

Конгруэнции квадрик с вырождающейся поверхностью, порожденной фокальными точками второго порядка. Ш м е л е в а С.В. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. I6. Калининград, 1985, с. 113-116.

В трехмерном проективном пространстве исследуются конгруэнции невырожденных линейчатых квадрик, имеющих одну невырождающуюся поверхность, описанную фокальными точками второго порядка.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Выпуск 16

Сборник научных трудов

Сводный план 1985 года, поз. 1682

Редактор А. М. Соколова

Техн. редактор Н. Д. Шишкова. Корректор Д. Н. Гамзатова.
Подписано к печати 14.02.85. КУ 01133. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,0. Уч.-изд. л. 7,75.
Тираж 500 экз. Заказ 1401. Цена 80 коп.

Калининградский государственный университет,
236040, г. Калининград (обл.), ул. Университетская, 2.
Типография издательства «Калининградская правда»,
236000, г. Калининград (обл.), ул. К. Маркса, 18.

80 коп.