Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 7

AUFGABE 7.1. Zeige, dass jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ eines beringten Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ wieder ein beringter Raum ist.

AUFGABE 7.2. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum mit $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Zeige, dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ ebenfalls $\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = 0$ ist.

AUFGABE 7.3. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der reellwertigen Funktionen, und $U \subseteq X$ eine dichte offene Teilmenge. Zeige, dass die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X),\ f \longmapsto f|_U,$$

injektiv ist.

AUFGABE 7.4. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der reellwertigen Funktionen, und $U \subseteq X$ eine dichte offene Teilmenge. Zeige, dass die Restriktionsabbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X),\ f \longmapsto f|_U,$$

nicht surjektiv sein muss.

AUFGABE 7.5. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Zeige, dass die Zuordnung, die einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ die Einheitengruppe $(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))^\times$ des kommutativen Ringes $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ zuordnet, eine Garbe von kommutativen Gruppen ist.

Diese Garbe bekommt einen eigenen Namen.

Zu einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ nennt man die auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq X$ durch

$$\Gamma\big(U, \mathcal{O}_X^\times\big) := (\Gamma(U, \mathcal{O}_X))^\times$$

definierte Garbe die *Einheitengarbe* auf X.

AUFGABE 7.6. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung von Morphismen beringter Räume wieder ein Morphismus beringter Räume ist.

Aufgabe 7.7. Zeige, dass zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ eines beringten Raumes $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Morphismus beringter Räume

$$(U, \mathcal{O}_X|_U) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

vorliegt.

Aufgabe 7.8. Es seien X und Y topologische Räume und $\varphi\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass dies einen Morphismus lokal beringter Räume induziert.

Aufgabe 7.9. Es seien L und M differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\varphi\colon L \to M$ eine differenzierbare Abbildung. Zeige, dass dies einen Morphismus lokal beringter Räume induziert.

Aufgabe 7.10. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, die wir einerseits mit der Garbe der stetigen Funktionen $C^0(-, \mathbb{R})$ und andererseits mit der Garbe der differenzierbaren Funktionen $C^1(-, \mathbb{R})$ zu einem beringten Raum machen. Zeige, dass es einen Morphismus beringter Räume $(M, C^0(-, \mathbb{R})) \to (M, C^1(-, \mathbb{R}))$ gibt, der topologisch die Identität ist, der aber kein Isomorphismus von beringten Räumen ist.

In den folgenden Aufgaben stehen lokale Ringe im Mittelpunkt.

Aufgabe 7.11. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass R genau dann ein lokaler Ring ist, wenn $a + b$ nur dann eine Einheit ist, wenn a oder b eine Einheit ist.

Aufgabe 7.12. Sei R ein kommutativer Ring. Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen.

(1) R hat genau ein maximales Ideal
(2) Die Menge der Nichteinheiten $R \setminus R^\times$ bildet ein Ideal in R.

Aufgabe 7.13. Sei R ein lokaler Ring mit Restekörper K. Zeige, dass R und K genau dann die gleiche Charakteristik haben, wenn R einen Körper enthält.

Aufgabe 7.14.*

Sei R ein lokaler Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R. Zeige, dass

$$R^\times \longrightarrow (R/\mathfrak{a})^\times$$

surjektiv ist.

Aufgabe 7.15. Bestimme die Unterringe der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, die lokal sind.

Aufgabe 7.16. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen. Zeige, dass der Restekörper in jedem Punkt von X gleich $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 7.17. Zeige, dass der einzige Körperisomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Identität ist.

Aufgabe 7.18. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen reellwertigen Funktionen. Wir betrachten dies als einen abstrakten beringten Raum, d.h. wir vergessen, dass es sich um Funktionen handelt, aber wir kennen nach wie vor den topologischen Raum und die Ringe und ihre Restriktionsabbildungen. Lässt sich daraus die Bedeutung der Ringelemente als Funktionen rekonstruieren?

Aufgabe 7.19. Es sei X ein topologischer Raum, versehen mit der Garbe der stetigen komplexwertigen Funktionen. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$(X, C^0(-, \mathbb{C})) \longrightarrow (X, C^0(-, \mathbb{C})),$$

die topologisch die Identität ist, und jede Funktion auf einer offenen Menge in ihre komplex-konjugierte Funktion überführt, ein Automorphismus beringter Räume ist. Folgere, dass man aus der Kenntnis von $(X, C^0(-, \mathbb{C}))$ als abstraktem beringten Raum nicht die Wirkungsweise der Ringelemente als Funktionen rekonstruieren kann.

Aufgabe 7.20. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

(1) f ist eine Einheit in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.
(2) Es gibt eine offene Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart, dass die Einschränkungen $s|_{U_i}$ Einheiten sind.
(3) Der Keim $f_P \in \mathcal{O}_{X,P}$ ist eine Einheit für jeden Punkt $P \in X$.

Aufgabe 7.21. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum. Zeige, dass durch

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \tau(X),\ f \longmapsto X_f,$$

ein Monoidhomomorphismus zwischen dem multiplikativen Monoid des globalen Schnittringes und dem Monoid der offenen Teilmengen von M (mit dem Durchschnitt als Verknüpfung) gegeben ist.

Abbildungsverzeichnis