Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 14

Quasikohärente Moduln auf affinen Schemata

Zu einem komutativen Ring R sind die R-Moduln wichtig und charakteristisch für den Ring, etwa Ideale, Restklassenringe, projektive Moduln, der Modul der Kählerdifferentiale u.s.w. Diese Moduln wollen wir im Kontext des Spektrums, also in einer geometrisierten Form, wiederfinden. Der Aufbau erfolgt parallel dazu, wie die Strukturgarbe auf dem Spektrum eingeführt wird.

Beispiel 14.1. Es sei M ein R-Modul über dem kommutativen Ring R. Dann kann man eine Prägarbe von Moduln definieren, indem man zu einer offenen Menge $U \subseteq X$ die Festlegung

$$\mathcal{P}(U) = \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f$$

trifft. Dies sind Moduln über dem Ring $\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f$ und es liegen natürliche Restriktionshomomorphismen vor, die mit den Modulstrukturen verträglich sind. Der Halm dieser Prägarbe in einem Primideal $\mathfrak{p}$ ist $M_{\mathfrak{p}}$

Definition 14.2. Es sei $(X, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Spek}(R)$ das affine Schema eines kommutativen Ringes R und sei M ein R-Modul. Unter dem zu M gehörenden *$\mathcal{O}_X$- Modul* $\widetilde{M}$ auf X versteht man die Zuordnung, die jeder offenen Menge $U \subseteq X$ die kommutative Gruppe

$$\Gamma\left(U, \widetilde{M}\right) = \left\{ (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U} \in \prod_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}} \mid \text{ für alle } \mathfrak{p} \in U \text{ gibt es } m \in M \text{ und } f \in R \text{ mit } \mathfrak{p} \in D(f) \subseteq U \text{ un} \right.$$

zusammen mit der Skalarmultiplikation

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \times \Gamma\left(U, \widetilde{M}\right) \longrightarrow \Gamma\left(U, \widetilde{M}\right), \left((g_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}, (s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U}\right) \longmapsto (g_{\mathfrak{p}} s_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in U},$$

zuordnet, und wobei jeder Inklusion $U \subseteq V$ die natürliche Projektion zugeordnet wird.

Wenn man mit dem Ring R selbst startet, so erhält man die Strukturgarbe.

Lemma 14.3. *Zu einem R-Modul über einem kommutativen Ring R ist $\widetilde{M}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf dem affinen Schema $X = \operatorname{Spek}(R)$.*

Beweis. Dies beruht darauf, dass $\widetilde{M}$ als Vergarbung zur Prägarbe $U \mapsto \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f$ definiert wird und die Modulstruktur sich auf die Vergarbung vererbt. □

Lemma 14.4. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $x \in X$ ein Punkt, der dem Primideal $\mathfrak{p}$ entspreche. Es sei M ein R-Modul mit der zugehörigen Modulgarbe $\widetilde{M}$. Dann ist der Halm dieser Garbe gleich*

$$\widetilde{M}_x = M_{\mathfrak{p}}.$$

Beweis. Dies ergibt sich aus Beispiel 14.1 und Lemma 5.2 (2). □

Lemma 14.5. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und sei M ein R-Modul mit der zugehörigen Modulgarbe $\mathcal{O}_X$-Modul $\widetilde{M}$. Es sei $f \in R$. Dann ist*

$$\Gamma\left(D(f), \widetilde{M}\right) = M_f.$$

Insbesondere ist der globale Schnittmodul gleich $\Gamma\left(X, \widetilde{M}\right) = M$.

Beweis. Wir beweisen den angeführten Spezialfall. Es gibt einen natürlichen R-Modulhomomorphismus $M \to \Gamma\left(X, \widetilde{M}\right)$. Dieser ist injektiv, da man das Nullsein eines Elementes lokal testen kann, vergleiche Lemma Anhang 1.1. Zum Nachweis der Surjektivität sei $s \in \Gamma\left(X, \widetilde{M}\right)$ ein globales Element. Dies bedeutet, dass es eine offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

und Elemente

$$s_i = \frac{a_i}{f_i^{k_i}}$$

mit $a_i \in M$ gibt, die als Schnitte über

$$D(f_i) \cap D(f_j) = D(f_i f_j),$$

also als Elemente in $M_{f_i f_j}$ übereinstimmen. Nach Korollar 8.6 können wir annehmen, dass I endlich ist. Ferner können wir die k_i durch ihr Maximum k ersetzen (was natürlich die lokalen Zähler a_i auch ändert). Die Verträglichkeit $\frac{a_i}{f_i^k} = \frac{a_j}{f_j^k}$ bedeutet die Existenz von Gleichungen

$$(f_i f_j)^m a_i f_j^k = (f_i f_j)^m a_j f_i^k$$

in M, wobei wir m als ein Maximum gewählt haben. Nach Proposition 8.4 ((2), (4)) erzeugen die f_i, $i \in I$, das Einheitsideal. Dies gilt dann auch für die f_i^{m+k}, $i \in I$, d.h. es gibt $g_i \in R$ mit

$$1 = \sum_{i \in I} g_i f_i^{m+k}.$$

Wir setzen

$$a := \sum_{i \in I} g_i a_i f_i^m.$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} af_j^{m+k} &= \left(\sum_{i\in I} g_i a_i f_i^m\right) f_j^{m+k} \\ &= \sum_{i\in I} g_i (f_i f_j)^m a_i f_j^k \\ &= \sum_{i\in I} g_i (f_i f_j)^m a_j f_i^k \\ &= a_j f_j^m \left(\sum_{i\in I} g_i f_i^{m+k}\right) \\ &= a_j f_j^m . \end{aligned}$$

Dies bedeutet wiederum $a = \frac{a_j}{f_j^k} = s_j$ in M_{f_j}, d.h. der Schnitt wird von einem Modulelement repräsentiert.

Wir betrachten nun die Situation auf $D(f)$. Diese entspricht aber der behandelten Situation, wenn man M_f als neuen Modul ansetzt. $\square$

Beispiel 14.6. Im quadratischen Zahlbereich $R = A_{-5} = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathbb{Z}[T]/(T^2+5)$ gilt die Gleichheit

$$2 \cdot 3 = 6 = (1+\sqrt{5}\mathrm{i})(1-\sqrt{5}\mathrm{i}).$$

Wir betrachten das Ideal $I = (2, 1+\sqrt{-5})$ (das ein Primideal ist und kein Hauptideal) und die zugehörige Idealgarbe $\widetilde{I}$ auf $X = \operatorname{Spek}(R)$. Das Spektrum wird durch die beiden offenen Mengen $D(2)$ und $D(3)$ überdeckt. Es ist $\widetilde{I}|_{D(2)} \cong \mathcal{O}_X|_{D(2)}$, da 2 zum Ideal gehört und daher das Ideal in der Nenneraufnahme R_2 zum Einheitsideal wird. In der Nenneraufnahme R_3 (also auf $D(3)$) ist hingegen

$$2 = \frac{1-\sqrt{5}\mathrm{i}}{3}(1+\sqrt{5}\mathrm{i})$$

und somit ist I_3 ein Hauptideal mit dem Erzeuger $1+\sqrt{5}\mathrm{i}$. Daher ist $\widetilde{I}|_{D(3)} \cong \mathcal{O}_X|_{D(3)}$ und $\widetilde{I}$ ist eine invertierbare Garbe.

Beispiel 14.7. Wir betrachten in der A_{n-1}-Singularität

$$R = K[X,Y,Z]/(XY - Z^n)$$

das Ideal $I = (X, Z)$. Es definiert auf dem Spektrum $\operatorname{Spek}(R)$ eine Idealgarbe $\widetilde{I}$ und damit auch die eingeschränkte Idealgarbe $\widetilde{I}|_U$ auf dem quasiaffinen Schema

$$U = D(X,Y,Z) = D(X,Y) = \operatorname{Spek}(R) \setminus \{(X,Y,Z)\} \subset \operatorname{Spek}(R).$$

Diese eingeschränkte Idealgarbe ist auf U invertierbar, da wegen $X \in I$ und wegen $X = \frac{Z^{n-1}}{Y} Z$ (in R_Y) Isomorphien $\widetilde{I}|_{D(X)} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)}|_{D(X)}$ und $\widetilde{I}|_{D(Y)} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spek}(R)}|_{D(Y)}$ vorliegen. Dagegen ist $\widetilde{I}$ auf dem gesamten Spektrum nicht invertierbar, da das Ideal in der Lokalisierung $R_{(X,Y,Z)}$ kein Hauptideal ist.

Lemma 14.8. *Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ das affine Schema zu einem kommutativen Ring R und es sei $\varphi \colon M \to N$ ein R-Modulhomomorphismus zwischen R-Moduln. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus*

$$\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N},$$

der global mit φ übereinstimmt.

Beweis. Zu jedem $f \in R$ muss wegen der Verträglichkeit mit den Restriktionen das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\left(X, \widetilde{M}\right) = M & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & \Gamma\left(X, \widetilde{N}\right) = N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma\left(D(f), \widetilde{M}\right) = M_f & \longrightarrow & \Gamma\left(D(f), \widetilde{N}\right) = N_f \end{array}$$

vorliegen, wodurch die untere Abbildung eindeutig festgelegt ist. Durch diese Festlegung wird sodann ein eindeutiger Prägarbenhomomorphismus und über die Vergarbung ein eindeutiger Garbenhomomorphismus festgelegt. □

Lemma 14.9. *Es sei R ein kommutativer Ring und es sei*

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Dann liegt auf dem affinen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ zu R die kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \widetilde{L} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N} \longrightarrow 0$$

von quasikohärenten $\mathcal{O}_X$-Moduln vor.

Beweis. Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

führt zu jedem Primideal $\mathfrak{p}$ nach Lemma Anhang 2.2 zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow L_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0\,.$$

Wegen Lemma 14.4 ist dies die Halmversion der Modulhomomorphismen zwischen $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$ im Punkt $\mathfrak{p}$. Nach Lemma 6.3 bedeutet dies die Exaktheit des Garbenkomplexes. □

Lemma 14.10. *Es sei R ein kommutativer Ring, es seien M und N Moduln über R und es seien $\widetilde{M}$ und $\widetilde{N}$ die zugehörigen Modulgarben auf $X =$ Spek (R). Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N} \, = \, \widetilde{M \otimes_R N}.$$

Beweis. Es ist $M_f \otimes_{R_f} N_f \, = \, (M \otimes_R N)_f$. Wir betrachten die Prägarbe

$$U \longmapsto \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} \, M_f \otimes_{R_f} N_f = \operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} \, (M \otimes_R N)_f\,.$$

Die Vergarbung der rechten Seite ergibt nach Definition die quasikohärente Garbe $\widetilde{M \otimes_R N}$. Zu offenen Mengen $U \subseteq D(f)$ gibt es kanonische Modulhomomorphismen

$$M_f \otimes_{R_f} N_f \longrightarrow \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f\right) \otimes_{\left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f\right)} \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} N_f\right),$$

was zu einem Modulhomomorphismus

$$\left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f \otimes_{R_f} N_f\right) \longrightarrow \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} M_f\right) \otimes_{\left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} R_f\right)} \left(\operatorname{colim}_{U \subseteq D(f)} N_f\right),$$

für jede offene Menge führt. Diese sind mit den Restriktionen verträglich, so dass ein Prägarbenhomomorphismus vorliegt. Dieser überträgt sich nach Lemma 5.2 (1,5) auf die zugehörigen Garben. Nach der Vorbemerkung ist die Vergarbung links gleich $\widetilde{M \otimes_R N}$ und die Vergarbung der rechten Seite ist nach Definition gleich $\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$. Da der Homomorphismus in den Halmen ein Isomorphismus ist, liegt nach Lemma 4.6 überhaupt ein Isomorphismus vor. $\square$

Quasikohärente Moduln

Für beliebige Schemata sind diejenigen Modulgarben besonders wichtig, die auf affinen Stücken wie $\widetilde{M}$ aussehen.

Definition 14.11. Ein $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *quasikohärent*, wenn es eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit $U_i = \operatorname{Spek}(R_i)$ und R_i-Moduln M_i derart gibt, dass $\mathcal{M}|U_i = \widetilde{M_i}$ ist.

Insbesondere ist die Strukturgarbe auf einem Schema eine quasikohärente Garbe, da sie auf den affinen offenen Mengen $U = \operatorname{Spek}(R)$ mit $\widetilde{R}$ übereinstimmt. Invertierbare Garben sind ebenfalls quasikohärent.

Man kann zeigen, dass bei einer quasikohärenten Garbe bereits für jede offene affine Teilmenge $U \subseteq X$ die eingeschränkte Garbe gleich der Modulgarbe zu einem Modul über dem Ring $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist.

Definition 14.12. Ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul $\mathcal{M}$ auf einem Schema $(X, \mathcal{O}_X)$ heißt *kohärent*, wenn es eine offene affine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ derart gibt, dass $\Gamma(U_i, \mathcal{M})$ ein endlich erzeugter $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-Modul ist.

Bei einem affinen Schema Spek (R) entsprechen sich die quasikohärenten Moduln und die R-Moduln. Insbesondere haben auf einem affinen Schema die quasikohärenten Moduln $\mathcal{M}$ „viele“ globale Schnitte, mit deren Hilfe man $\mathcal{M}$ verstehen und rekonstruieren kann. Dies gilt keineswegs für quasikohärente Garben auf nichtaffinen Schemata, insbesondere gilt es oft nicht für projektive Schemata. Dort kommt es sogar oft vor, dass für komplizierte quasikohärente Moduln die globale Auswertung der Nullmodul ist. In einem solchen Fall kann man aber mit Hilfe von geeigneten invertierbaren Garben den Modul so „hindrehen“ (twisten), dass die getwistete Version globale Schnitte besitzt. Wegweisend ist der folgende allgemeine Satz. Man beachte, dass Elemente $g \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ mit $\mathcal{L}$ invertierbar und $s \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ über die Vergarbung Elemente $g^n s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M})$ definieren, wobei $\mathcal{L}^n$ die n-te Tensorpotenz von $\mathcal{L}$ bezeichnet.

Satz 14.13. *Es sei $\mathcal{M}$ ein quasikohärenter $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem noetherschen Schema $(X, \mathcal{O}_X)$. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X,*

$$g \in \Gamma(X, \mathcal{L})$$

ein globaler Schnitt mit dem Invertierbarkeitsort X_g. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Zu einem globalen Schnitt $r \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ mit $r|_{X_g} = 0$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $g^m r = 0$ in $\Gamma(X, \mathcal{L}^m \otimes \mathcal{M})$.*
(2) *Zu einem Schnitt $s \in \Gamma(X_g, \mathcal{M})$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$g^n s \in \Gamma(X_g, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M})$$

von einem globalen Schnitt aus $\Gamma(X, \mathcal{L}^n \otimes \mathcal{M})$ herrührt.

Beweis. Es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche offene affine Überdeckung derart, dass die Einschränkungen von $\mathcal{L}$ auf die U_i trivial sind. Wir betrachten die Situation

$$V_i = X_g \cap U_i \subseteq U_i,$$

hier ist also V_i eine offene Teilmenge des affinen Schemas $U_i = \operatorname{Spek}(R_i)$. Es ist

$$\mathcal{M}|_{U_i} = \widetilde{M_i}$$

mit einem R_i-Modul M_i. Unter dem Isomorphismus $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ entspricht die Einschränkung von g auf U_i einer Funktion $f_i \in R_i$ und für den Invertierbarkeitsort gilt $X_g \cap U_i = D(f_i)$. Somit ist

$$\Gamma(V_i, \mathcal{M}) \cong (M_i)_{f_i}.$$

(1) Sei $r_i = r|_{U_i} \in M_i$. Die Einschränkung davon auf V_i ist nach Voraussetzung gleich 0 und daher gibt es ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit

$$f_i^{m_i} r_i = 0$$

in M_i, und dies gilt auch für alle größeren Exponenten. Übersetzt nach $\mathcal{L}^{m_i} \otimes \mathcal{M}$ bedeutet dies, dass das globale Element $g^{m_i} r$ eingeschränkt auf U_i gleich 0 ist. Somit erhalten wir mit

$$m = \max(m_i, i \in I)$$

ein m derart, dass $g^m r$ auf sämtlichen U_i gleich 0 wird. Aufgrund der Garbeneigenschaft ist dann $g^m r$ gleich 0 auf X.

(2) Der vorgegebene Schnitt $s \in \Gamma(X_g, \mathcal{M})$ liefert durch Einschränkung Schnitte

$$s_i \in \Gamma(V_i, \mathcal{M}) = \Gamma(D(f_i), M_i) = (M_i)_{f_i}.$$

Es ist also $s_i = \frac{t_i}{f_i^{\ell_i}}$ mit $t_i \in M_i$. Dabei kann man die ℓ_i erhöhen, so dass wir annehmen können, dass eine solche Darstellung für jedes i mit einem gemeinsamen ℓ vorliegt. Dies bedeutet, dass die Einschränkungen von $g^\ell s \in \Gamma\big(X_g, \mathcal{L}^\ell \otimes \mathcal{M}\big)$ auf $X_g \cap U_i$ jeweils von einem Element

$$t_i \in \Gamma\big(U_i, \mathcal{L}^\ell \otimes \mathcal{M}\big)$$

herrühren. Die t_i sind im Allgemeinen nicht verträglich. Es ist aber die Einschränkung von $t_i - t_j$ auf $X_g \cap U_i \cap U_j$ gleich 0. Nach dem ersten Teil, angewendet auf $X_g \cap U_i \cap U_j \subseteq U_i \cap U_j$, ergibt sich, dass es ein m_{ij} derart gibt, dass $g^{m_{ij}}(t_i - t_j)$ gleich 0 in $\Gamma\big(U_i \cap U_j, \mathcal{L}^{\ell + m_{ij}} \otimes \mathcal{M}\big)$ ist. Wir multiplizieren die Situation mit g^m, wobei m das Maximum aller m_{ij} ist, und erhalten dann die Verträglichkeit und somit mit $n = \ell + m$ die Existenz einer globalen Fortsetzung von $g^n s$.

$\square$

Abbildungsverzeichnis