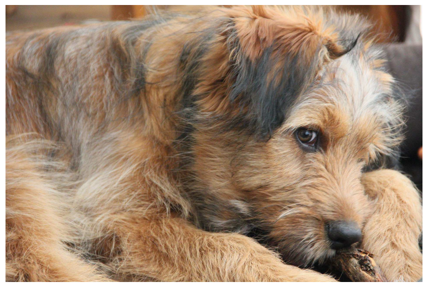
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 18



Vorli mag so ziemlich alles. Nur Handies findet sie blöd. Sie sind definitiv nix zum Fressen. Aber auch nix zum Spielen, da sie ablenken, ohne zu zerstreuen.

Die ganzen Zahlen

Wir haben in der letzten Vorlesung gesehen, dass die Gleichung

$$a + x = b$$

mit $a, b \in \mathbb{N}$ formulierbar ist, aber es dort bei $a > b$ keine Lösung gibt. Wir würden gerne von dieser Gleichung links und rechts a „abziehen", um links

$$a + x - a = x$$

und rechts die Lösung $b - a$ für x zu erhalten. Um dies durchführen zu können, müssen wir die natürlichen Zahlen zu einem größeren Zahlenbereich erweitern, nämlich zur Menge der ganzen Zahlen. Solche Zahlenbereichserweiterungen ziehen sich durch die gesamte Mathematik, egal ob in der Schule oder auf der Hochschule. Wir werden noch die Erweiterung von den ganzen Zahlen zu den rationalen Zahlen und von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen kennenlernen. Eine wichtige Motivation ist dabei, so wie hier, dass man Lösungen für gewisse Gleichungen finden möchte, für die es im Ausgangszahlenbereich keine Lösung gibt, und dass man diese Lösungen auch rechnerisch auffinden und handhaben möchte. Zugleich möchte man mit den neuen Zahlen möglichst viel machen können, was man im Ausgangsbereich kann, also beispielsweise nach wie vor addieren und multiplizieren, wobei auch die gleichen Gesetzmäßigkeiten weiter gelten sollen (*Permanenzprinzip*).

Da wir von nun an mit verschiedenen Zahlenbereichen arbeiten, wird es wichtig, zu betonen, in welchem Zahlenbereich wir uns befinden. Die Gleichung

$$5 + x = 2$$

besitzt in $\mathbb{N}$ keine Lösung. Diese Tatsache bleibt unabhängig davon bestehen, dass es in anderen Bereichen eine Lösung gibt.

Wir führen jetzt die Menge der ganzen Zahlen ein, auf denen wir dann bald die Verknüpfungen festlegen und die zugehörigen Rechengesetze nachweisen werden.

Definition 18.1. Die Menge der *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ besteht aus der Menge aller positiven natürlichen Zahlen $\mathbb{N}_+$, der 0 und der Menge $\{-n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$, deren Elemente die negativen ganzen Zahlen heißen.

Diese Definition hat den Vorteil, dass sie direkt ist und ohne mengentheoretische Überlegungen[1] (Äquivalenzrelationen) auskommt. Jede ganze Zahl gehört unmittelbar zu genau einem der drei Typen (positiv, 0 , negativ). Der Nachteil ist, dass die Verknüpfungen darauf, nämlich die Addition und die Multiplikation, die die gleichnamigen Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen fortsetzen sollen, nicht unmittelbar ersichtlich sind, sondern auf eine Weise festgelegt werden müssen, die zumindest auf den ersten Blick etwas willkürlich aussehen mag. Zugleich ist der Nachweis der Gesetzmäßigkeiten, wie beispielsweise das Assoziativgesetz, recht aufwändig, da man alle Kombinationen der möglichen Fälle untersuchen muss.

Das Minuszeichen $-$ kommt in dieser Definition nur im Sinne einer Bezeichnung vor, es ist Teil eines Namens (das *Vorzeichen*) für eine neue Zahl. Das Minuszeichen wird bald unterschiedliche Funktionen übernehmen, die man konzeptionell auseinanderhalten muss, siehe Aufgabe 18.7.

Bemerkung 18.2. Die negativen Zahlen kann man ausgehend von jedem Bezeichnungsystem für die natürlichen Zahlen bilden, die neuen Zahlen ergeben sich ja einfach aus den natürlichen Zahlen, indem man ein Minuszeichen davorsetzt. Beispielsweise sind

(1)
$$..., -|||, -||, -|, 0, |, ||, |||... .$$

(2)
$$..., -NNN0, -NN0, -N0, 0, N0, NN0, NNN0, ...$$

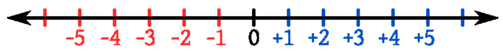
(3)
$$..., \text{minus drei}, \text{minus zwei}, \text{minus eins}, \text{null}, \text{eins}, \text{zwei}, \text{drei}, ...$$

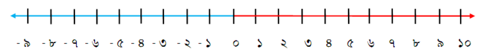
(4)
$$..., -c, -b, -a, 0, a, b, c, ...$$

(5)
$$..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$$

[1]Einen mengentheoretisch aufwändigeren Zugang zu den ganzen Zahlen werden wir im zweiten Semester kennenlernen.

angedeutete Auflistungen für alle ganzen Zahlen.





Insbesondere kann man den Zahlenstrahl zu einer Zahlengeraden erweitern und links von der 0 die negativen Zahlen $-1, -2, \ldots$ platzieren. Durch diese Anordnung entsteht eine Symmetrie am Nullpunkt, wobei die negative Zahl $-a$ der positiven Zahl a gegenüber liegt. Diese Symmetrie gilt insbesondere auf der Zahlengeraden. Wenn man die ganzen Zahlen dynamisch als (gleichlange) Schritte nach rechts bzw. nach links (oder nach vorne bzw. nach hinten oder nach oben bzw. nach unten) interpretiert, so sehen die negativen Zahl so „natürlich" wie die positiven Zahlen aus.

Wie verhalten sich die ganzen Zahlen bezüglich der Zählvorstellung (im Sinne der Nachfolgerabbildung) für die natürlichen Zahlen, die wir in der fünften Vorlesung kennengelernt haben? Die richtige Vorstellung ergibt sich, wenn man die Nachfolgerabbildung auf $\mathbb{Z}$ fortsetzt, und dabei gemäß der in Bemerkung 18.2 schon verwendeten Reihenfolge vorgeht (dort wurde die Nachfolgerabbildung durch die gewählte Anordnung schon vorweggenommen). Wenn man auf der Zahlenstrahl ist, so erhält man den Nachfolger in $\mathbb{N}$, indem man einen Schritt (einer fixierten einheitlichen Länge) nach rechts macht. Diese Interpretation des Nachfolgers lässt sich unmittelbar auf die Zahlengerade fortsetzen, der Nachfolger ist und bleibt der Schritt nach rechts (*Permanenzprinzip*).

Die algebraische Definition sieht folgendermaßen aus.

Definition 18.3. Unter dem *Nachfolger* $N(x)$ einer ganzen Zahl $x \in \mathbb{Z}$ versteht man die Zahl

$$N(x) := \begin{cases} N(a), & \text{falls } x = a \in \mathbb{N}\,, \\ -V(b), & \text{falls } x = -b \text{ mit } b \in \mathbb{N}_+\,. \end{cases}$$

In dieser Definition wird also Bezug auf die Nachfolgerabbildung in $\mathbb{N}$ (also $+1$) und die Vorgängerabbildung $V\colon \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}$ (also -1) Bezug genommen.

Lemma 18.4. *Die Nachfolgerabbilung $N\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ besitzt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Die Nachfolgerabbildung stimmt auf $\mathbb{N}$ mit der dortigen Nachfolgerabbildung überein.*

(2) *Die Nachfolgerabbildung ist bijektiv. (Die Umkehrabbildung wird als* Vorgängerabbildung V *bezeichnet.)*
(3) *Es ist* $N(-a) = -V(a)$ *und* $V(-b) = -N(b)$ *für* $a, b \in \mathbb{N}_+$.
(4) *Jede ganze Zahl lässt sich ausgehend von* 0 *durch eine Iteration der Nachfolgerabbildung oder eine Iteration der Vorgängerabbildung erreichen.*

Beweis. Siehe Aufgabe 18.9. □

Die Bijektivität der Nachfolgerabbildung bedeutet insbesondere, dass die Nachfolgergleichung $N(x) = z$ für jedes $z \in \mathbb{Z}$ eine eindeutige Lösung besitzt, nämlich den Vorgänger von z. Durch diese Zielsetzung kann man auch die ganzen Zahlen einführen. Man möchte für die 0 einen Vorgänger haben (den es innerhalb der natürlichen Zahlen nicht gibt), und diesen nennt man $V(0)$. Für diese neue Zahl möchte man wieder einen Vorgänger haben, diesen nennt man $V(V(0))$, davon möchte man wieder einen Vorgänger $V(V(V(0)))$ haben, u.s.w. Für den k-fachen Vorgänger $V^k(0)$ schreibt man dann $-k$.

Bemerkung 18.5. Welche Objekte bzw. Strukturen kann man mit den ganzen Zahlen zählen? Es gibt keine Mengen mit negativ vielen Elementen! Dennoch gibt es viele Situationen, wo man mit ganzen Zahlen sinnvoll zählen kann. Sobald es einen (*gerichteten*) *Prozess* zusammen mit einem zugehörigen gegenläufigen Prozess gibt, wie etwa einen Schritt nach rechts bzw. einen Schritt nach links zu machen, oder wenn man zwei sehr große Haufen (oder Körbe) an Äpfeln hat, und der Prozess ist, einen Apfel von dem einen Haufen zu dem anderen Haufen zu transportieren (mit dem umgekehrten Transport als dem gegenläufigen Prozess), so kann man die möglichen (hintereinander ausgeführten) Prozesse durch die ganzen Zahlen beschreiben: 7 (oder deutlicher +7) bedeutet 7 Äpfel von Haufen G nach Haufen H übertragen, -3 bedeutet drei Äpfel von Haufen H nach Haufen G übertragen. Hierbei muss man willkürlich festlegen, welche Prozessrichtung man als positiv ansehen möchte. Auch in der Hauswirtschaft werden die Einnahmen positiv und die Ausgaben negativ verbucht. Damit zusammenhängend werden negative Zahlen häufig als Schulden und positive Zahlen als Guthaben interpretiert.

Der Apfelkorb G

Der Apfelkorb H

Definition 18.6. Unter der *Negation* auf der Menge der ganzen Zahl $\mathbb{Z}$ versteht man die Abbildung $-\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, die durch

$$-(x) := \begin{cases} -a, \text{ falls } x = a \in \mathbb{N}\,, \\ b, \text{ falls } x = -b \text{ mit } b \in \mathbb{N}_+\,, \end{cases}$$

gegeben ist.

Hier tritt das Minuszeichen in einer zweiten Bedeutung auf, als Funktionssymbol. Für $a \in \mathbb{N}$ ist $-a = -a$, d.h. Vorzeichen und Funktionssymbol stimmen überein (das ist der Grund, warum man das gleiche Symbol verwenden kann), für $b \in \mathbb{N}$ ist $-(-b) = b$, wobei das vordere Minuszeichen das Funktionssymbol und das hintere Minuszeichen das Vorzeichen ist. Ferner gilt $-(-x) = x$ für jedes $x \in \mathbb{Z}$, wobei hier das Minuszeichen zweimal das Funktionssymbol bezeichnet. Die Negation ist auf dem Zahlenstrahl die Spiegelung an der 0, sie macht aus einen Schritt nach rechts ein Schritt nach links (und umgekehrt) und vertauscht Guthaben und Schulden.

Die Addition auf den ganzen Zahlen

Wir kommen zur Addition auf den ganzen Zahlen.

Definition 18.7. Auf den ganzen Zahlen wird folgendermaßen eine Verknüpfung, genannt *Addition*, eingeführt (dabei bezeichnen a, b natürliche Zahlen). Es ist

$$\begin{aligned} a + b &:= a + b, \\ a + (-b) &:= \begin{cases} a - b, \text{ falls } a \geq b\,, \\ -(b - a), \text{ falls } a < b\,, \end{cases} \\ (-a) + b &:= \begin{cases} b - a, \text{ falls } b \geq a\,, \\ -(a - b), \text{ falls } b < a\,, \end{cases} \\ (-a) + (-b) &:= -(a + b). \end{aligned}$$

Bemerkung 18.8. Die in Bemerkung 18.5 besprochenen Interpretationen für ganze Zahlen passen sehr gut zur Addition der ganzen Zahlen. Die Addition einer Reihe von Ausgaben oder Einnahmen führt zur Gesamteinnahme bzw. Gesamtausgabe; wenn man hintereinander mehrfach nach vorne (oder nach rechts) bzw. nach hinten (nach links) geht, so beschreibt die Addition den Gesamtbewegungsvorgang; wenn die einen Äpfel von G nach H und die anderen von H nach G schmeißen, so beschreibt die Addition den Gesamttransport. Hierzu muss man sich nur davon überzeugen, dass die über die Fallunterscheidung definierte Addition genau das macht, was im (Bewegungs-)Prozess geschieht. Wenn man beispielsweise zuerst a Äpfel von G nach H transportiert und dann b Äpfel ebenfalls von G nach H, so transportiert man insgesamt $a+b$ Äpfel von G nach H. Wenn man hingegen zuerst a Äpfel von G nach H transportiert und dann b Äpfel in die andere Richtung, also von H nach G transportiert, so hängt der Gesamtprozess wesentlich davon ab, ob a oder ob b größer (oder gleich) ist. Bei $a \geq b$ transportiert man insgesamt $a-b$ Äpfel von G nach H (vergleiche Satz 10.13), andernfalls transportiert man $b-a$ Äpfel von H nach G. Mit diesen Interpretationen werden auch die algebraischen Gesetze für die Addition ganzer Zahlen einsichtig.

Mit der Addition kann man die Nachfolgerabbildung ale Addition mit 1 und die Vorgängerabbildung als Addition mit -1 auffassen. Die Addition auf den ganzen Zahlen passt auch gut zu der Addition der natürlichen Zahlen, wenn man wie in der Definition 8.10 unter $x+y$ das Ergebnis versteht, das sich ergibt, wenn man von x ausgehend den y-fachen Nachfolger nimmt. Entsprechend stimmt $x+a$ mit dem a-fachen Nachfolger von x und $x+(-b)$ mit dem b-fachen Vorgänger von x überein (dabei ist $x \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in \mathbb{N}$).

Bemerkung 18.9. Innerhalb der ganzen Zahlen besitzt die mit den natürlichen Zahlen a, b formulierte Gleichung

$$a + x = b$$

eine eindeutige Lösung, nämlich $(-a)+b$. Bei $a \leq b$ ist das ja nach Definition die natürliche Differenz $b-a$, und bei $a > b$ ist nach Definition

$$(-a) + b = -(a-b),$$

und wegen

$$a \geq a - b \geq 0$$

ist nach der Definition der Addition und Lemma 10.14 (3)

$$a + (-(a-b)) = a - (a-b) = (a+b) - a = b.$$

Diese eindeutige Lösbarkeit überträgt sich auf eine Gleichung der Form

$$a + x = b$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$, siehe Aufgabe 18.24. Diese Aussage folgt auch aus Lemma 19.8 in Verbindung mit Satz 19.3.

Lemma 18.10. *Die Addition auf den ganzen Zahlen erfüllt die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Die Addition besitzt* 0 *als neutrales Element.*
(2) *Die Addition ist eine kommutative Verknüpfung.*
(3) *Die Addition ist assoziative Verknüpfung.*
(4) *Zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ gibt es ein $y \in \mathbb{Z}$ mit*

$$x + y = 0.$$

Beweis. (1) Dass 0 das neutrale Element ist, folgt unmittelbar aus den ersten beiden Teilen der Definition der Addition.

(2) Die Kommutativität der Addition beweisen wir mit einer Fallunterscheidung, je nachdem, ob die Summanden nichtnegativ (natürliche Zahlen) oder negativ sind. Wenn beide Summanden aus $\mathbb{N}$ sind, ergibt sich dies unmittelbar aus der Kommutativität der Addition in den natürlichen Zahlen. Wenn $x = a$ aus $\mathbb{N}$ ist und $y = -b$ negativ ist, so muss man eine weitere Fallunterscheidung vornehmen. Bei $a \geq b$ ist

$$x + y = a + (-b) = a - b$$

nach dem (der ersten Hälfte des) zweiten Teil der Definition, und ebenso ist

$$y + x = (-b) + a = a - b$$

nach dem (der ersten Hälfte des) dritten Teils der Definition. Bei $a < b$ ist wiederum

$$x + y = a + (-b) = -(b - a) = (-b) + a = y + x$$

nach den Definitionen. Wenn beide Zahlen negativ sind ergibt sich die Kommutativität sofort aus dem vierten Teil der Definition.

(3) Die Assoziativität nachzuweisen ist aufwändiger, da dann drei Zahlen x, y, z ins Spiel kommen, für die es jeweils mehrere Fälle gibt. Wenn eine der beteiligten Zahlen aber 0 ist, so ist die Aussage wegen der bewiesenen neutralen Eigenschaft der 0 klar. Wir müssen also nur noch die acht Fälle (in denen selbst jeweils wiederum Fallunterscheidungen gemäß der Größenbeziehung der beteiligten Elemente nötig sind) durchgehen, je nachdem, ob x, y, z positiv oder negativ sind.

Wenn beispielsweise $x = a, y = -b, z = -c$ mit positiven Zahlen a, b, c, ist, so ist

$$x + (y + z) = a + ((-b) + (-c)) = a + (-(b + c)).$$

Wenn $a \geq b + c$ ist, so ist dies $a - (b + c)$ (in $\mathbb{N}$), andernfalls ist dies $-((b + c) - a)$. Für die andere Klammerung ergibt sich

$$(x + y) + z = (a + (-b)) + (-c).$$

Bei $a \geq b + c$ ist einerseits

$$a \geq b$$

und andererseits

$$a - b \geq c.$$

Somit ist die zweite Klammerung in diesem Fall nach Aufgabe 10.29 ebenfalls gleich

$$(a + (-b)) + (-c) = (a - b) - c = a - (b + c).$$

Bei $a < b + c$ unterscheiden wir die Fälle $a \geq b$ und $a < b$. Bei $a \geq b$ ist $c \geq a - b$ und daher ist unter Verwendung von Lemma

10.14 (3)

$$(a+(-b))+(-c) = (a-b)-c = -(c-(a-b)) = -((c+b)-a).$$

Bei $a < b$ ist erst recht $a < b+c$ und somit ist nach Lemma 10.14 (2)

$$(a+(-b))+(-c) = (-(b-a))+(-c) = -((b-a)+c)) = -((c+b)-a).$$

Für die anderen Fälle siehe Aufgabe 18.23.

(4) Bei positivem x hat $-x$ die Eigenschaft, dass die Summe

$$x+(-x) = 0$$

ist, bei negativem x mit $x = -a$ mit $a \in \mathbb{N}$ erfüllt a die Eigenschaft.

$\square$

In beiden Fällen erfüllt also das Negative $-x$ zu x die Eigenschaft $x+(-x) = 0$.

Für die Assoziativität der Addition in $\mathbb{Z}$ geben wir noch ein weiteres einleuchtenderes Argument, das sich an der inhaltlichen Beschreibung der Addition von ganzen Zahlen als einen gerichteten Transport von Objekten (zwischen zwei Haufen, also mit Rücktransport) orientiert. Diese Interpretation deckt sich mit den Festlegungen in Definition 18.7. In dieser Interpretation ist aber das Assoziativgesetz unmittelbar einleuchtend, da man die Hintereinanderausführung von drei Transportprozessen als einen Gesamtprozess auffassen kann, aber auch die beiden ersten Prozesse zusammenfassen oder die beiden letzten zusammenfassen kann.

Die Multiplikation auf den ganzen Zahlen

Definition 18.11. Auf den ganzen Zahlen wird folgendermaßen eine Verknüpfung, genannt *Multiplikation*, eingeführt (dabei bezeichnen a, b natürliche Zahlen). Es ist

$$\begin{aligned} a \cdot b &:= a \cdot b, \\ a \cdot (-b) &:= -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot b &:= -(a \cdot b), \\ (-a) \cdot (-b) &:= a \cdot b. \end{aligned}$$

Der letzte Teil passt gut zu der Eigenschaft der Negation, zu sich selbst invers zu sein. Die Negation kann man insbesondere als Multiplikation mit der -1 auffassen. Dennoch sind

$$-(-z) = z$$

und

$$(-x)(-y) = xy$$

verschiedene Eigenschaften (Letzteres ist für $x, y \in \mathbb{N}$ eine Definition, und das Minuszeichen ist dabei das Vorzeichen, für beliebige x, y ist es eine daraus folgende Eigenschaft der Multiplikation, und das Minuszeichen ist das Funktionszeichen).

Bemerkung 18.12. Wie schon bei den natürlichen Zahlen ist die Vorstellung für die Multiplikation von ganzen Zahlen schwieriger als für die Addition, da bei der Addition beide Summanden die gleiche Rolle spielen (zumindest in der wichtigsten Interpretationen), während dies bei der Multiplikation nicht der Fall ist. Man kann nicht drei Äpfel mal fünf Äpfel ausrechnen. Wie bei den natürlichen Zahlen beschreibt der eine Faktor die Vielfachheit, mit der ein Prozess durchgeführt, den der andere Faktor quantitativ misst. Man kann also dreimal jeweils fünf Äpfel von G nach H transportieren und transportiert dann insgesamt 15 Äpfel von G nach H. Das gleiche erreicht man, wenn man fünfmal drei Äpfel von G nach H transportiert. Ebenso kann man a-mal b Äpfel in die andere Richtung von H nach G transportieren, und transportiert damit insgesamt ab Äpfel von H nach G. Ganze Zahlen (der Apfeltransport samt Richtung) mit einer natürlichen Zahl zu multiplizieren besitzt also eine passende natürliche Interpretation. Schwieriger ist es, wenn beide Zahlen negativ sind. Die Definition sagt, dass dann das Produkt der zugehörigen positiven Zahlen herauskommt. Dies kann man sich so vorstellen: Es sei P ein reversibler Prozess, der gegenläufige Prozess sei mit $-P$ bezeichnet. Für $n \in \mathbb{N}$ ist nP die n-fache Ausführung von P. Für negatives

$$n = -m$$

interpretiert man dann nP als die m-fache Ausführung des gegenläufigen Prozesses. Insbesondere ist

$$(-1)P = -P.$$

Multiplikation mit -1 führt also auf den gegenläufigen Prozess, und von daher ist es einleuchtend, auch

$$(-1)(-P) = P$$

zu setzen, da der gegenläufige Prozess zum gegenläufigen Prozess der Prozess selbst ist.

Auch von den gewünschten algebraischen Gesetzmäßigkeiten her ist die Festlegung Minus mal Minus ist Plus sinnvoll. Es soll

$$0x = 0$$

gelten und es soll das Distributivgesetz gelten. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{Z}$

$$0 = 0x = (n + (-n))x = nx + (-n)x.$$

Bei negativem $x = -a$ ergibt sich daraus

$$n(-a) + (-n)(-a) = 0.$$

Das Produkt $(-n)(-a)$ muss also bei Addition mit $n(-a)$ Null ergeben, dies ist aber gerade die charakteristische Eigenschaft von na. Also ist

$$(-n)(-a) = na.$$

Lemma 18.13. *Die Multiplikation auf den ganzen Zahlen ist eine kommutative assoziative Verknüpfung mit* 1 *als neutralem Element. Es gilt das Distributivgesetz.*

Beweis. Die Kommutativität der Multiplikation und die Eigenschaft, dass 1 das neutrale Element ist, folgt unmittelbar aus der Definition 18.11. Zum Nachweis des Assoziativgesetzes stellt man zunächst fest, dass 0 herauskommt, sobald ein Faktor 0 ist. Die verbleibenden acht möglichen Fälle kann man einfach abhandeln, da das Vorzeichen des Produktes nur davon abhängt, wie viele Zahlen positiv und wie viele Zahlen negativ sind, siehe Aufgabe 18.29.

Zum Nachweis des Distributivgesetzes

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$$

können wir, indem wir bei negativem x mit -1 multiplizieren, annehmen, dass x positiv ist (bei $x = 0$ gilt die Gleichung sowieso). Wenn y, z beide aus $\mathbb{N}$ sind oder beide negativ, so ergibt sich die Gleichung unmittelbar. Es sei also $y = a$ aus $\mathbb{N}$ und $z = -b$ negativ. Bei $a \geq b$ ist nach Satz 10.8 auch

$$xa \geq xb.$$

In diesem Fall ist somit nach Lemma 10.15

$$x \cdot (y+z) = x \cdot (a+(-b)) = x \cdot (a-b) = x \cdot a - x \cdot b = x \cdot a + x \cdot (-b) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Bei $a < b$ ist nach Satz 10.8 auch

$$xa < xb.$$

In diesem Fall ist somit wieder nach Satz 10.8

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= x \cdot (a+(-b)) \\ &= x \cdot (-(b-a)) \\ &= -(x \cdot (b-a)) \\ &= -(x \cdot b - x \cdot a) \\ &= x \cdot a + (-x \cdot b) \\ &= x \cdot a + x \cdot (-b) \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

□

Der Betrag

Definition 18.14. Unter dem *Betrag* $|n|$ einer ganzen Zahl n versteht man die Zahl selbst, falls diese positiv ist, oder aber die Zahl $-n$, falls n negativ (und $-n$ positiv) ist.

Der Betrag ist also stets eine natürliche Zahl.

Abbildungsverzeichnis