Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 3

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 3.1. Formuliere die *binomischen Formeln* für zwei reelle Zahlen und beweise die Formeln mit Hilfe des Distributivgesetzes.

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.2. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ (a,b) \longmapsto a-b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 3.3. Man untersuche die Verknüpfung

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\ (x,y) \longmapsto \min(x,y),$$

auf Assoziativität, Kommutativität, die Existenz von einem neutralen Element und die Existenz von inversen Elementen.

Aufgabe 3.4. Es sei S eine Menge und

$$G = \{F : S \to S \mid F \text{ bijektiv}\}.$$

Zeige, dass G mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen eine Gruppe ist.

Aufgabe 3.5.*

Sei G eine Gruppe. Zeige, dass

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$$

für alle $x \in G$ ist.

Aufgabe 3.6. Sei G eine Gruppe und $x, y \in G$. Drücke das Inverse von xy durch die Inversen von x und y aus.

Aufgabe 3.7. Man konstruiere eine Gruppe mit drei Elementen.

Aufgabe 3.8. Sei R ein Ring und seien $\spadesuit$, $\heartsuit$ und $\clubsuit$ Elemente in R. Berechne das Produkt

$$(\spadesuit^2 - 3\heartsuit\clubsuit\heartsuit - 2\clubsuit\heartsuit^2 + 4\spadesuit\heartsuit^2)(2\spadesuit\heartsuit^3\spadesuit - \clubsuit^2\spadesuit\heartsuit\spadesuit)(1 - 3\clubsuit\heartsuit\spadesuit\clubsuit^2\heartsuit)\,.$$

Wie lautet das Ergebnis, wenn der Ring kommutativ ist?

Aufgabe 3.9. Es sei R ein kommutativer Ring und $f, a_i, b_j \in R$. Zeige die folgenden Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i + \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) f^k$$

und

$$\sum_{i=0}^{n} a_i f^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j f^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k f^k \text{ mit } c_k = \sum_{r=0}^{n} a_r b_{k-r}\,.$$

Aufgabe 3.10.*

Beweise die allgemeine binomische Formel, also die Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Elemente $a, b \in K$ in einem Körper K.

Aufgabe 3.11. Sei R ein Ring und M eine Menge. Definiere auf der Abbildungsmenge

$$A = \{f : M \to R \mid f \text{ Abbildung}\}$$

eine Ringstruktur.

Aufgabe 3.12. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}\,,$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$

(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}\,.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also

$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w) \cdot (y + z) - (z + w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel"

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.13. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz", also

$$a + (bc) \;=\; (a + b) \cdot (a + c),$$

nicht gilt.

Aufgabe 3.14. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition" und eine „Multiplikation", die diese Regeln „repräsentieren".

Aufgabe 3.15. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

Aufgabe 3.16. Es sei K ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein Körperelement n_K zuordnen kann, so dass 0_K das Nullelement in K und 1_K das Einselement in K ist und so dass

$$(n + 1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n + m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften ebenfalls gelten.

AUFGABE 3.17. Skizziere den Graphen der reellen Addition

$$+ \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graphen der reellen Multiplikation

$$\cdot \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

AUFGABE 3.18. Es sei K ein Körper mit

$$2 \neq 0.$$

Zeige, dass für $f, g \in K$ die Beziehung

$$fg = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 3.19. (3 Punkte)

Sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt $\cap$ als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition ein kommutativer Ring ist.

AUFGABE 3.20. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper K die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes $a \in K$ ist die Abbildung

$$\alpha_a \colon K \longrightarrow K,\ x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes $b \in K$, $b \neq 0$, ist die Abbildung

$$\mu_b \colon K \longrightarrow K,\ x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

Aufgabe 3.21. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei $a, c \in \mathbb{N}_+$ (und $b, d, b+d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit $a, b, c, d, b+d \neq 0$, wo diese Regel gilt.

Aufgabe 3.22. (6 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 3.23. (4 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0)\,,$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.