發行の要旨及使用法

本誌は學生諸氏が繁雜なる復習を容易にし、記憶力を增進せしめんが爲に、從來の類書と異りたる新形式を以て編輯せられたるものなり。蓋カード式の便利は何人も認むる所なれども、未だ各學科に亘れるものなきを遺憾とし、多年教授に經驗ある各專門大家に執筆を請ひ、綴り方に就き幾多の新工風を凝らしたるもの即ち本綴なりとす。

是れが使用法等に就きては、使用者自ら便宜の方法を執るべきも試みに其一二の例を示さん。

一　使用者は、カード表面の略表に依りて、其事實を答へ、後裏面を見て答の正否を檢すべし。

一　右の方法に依り、毎日カードの數を定めて順序に復習し、記憶し終はりたる物は位置を換へ、記憶し難き物は殘し置きて更に復習すべし。

一　又各學科中より、特に復習せんとする部分、又は記憶し難きもののみを集めて練習するも一方法たり。

一　斯くして記憶し得たらば、左欄の參考問題につきて更に練習を試むべし。答案はカード中にて解するを得ん。

一　一學科の全體を通覽せんと欲せば、カードの裏面のみを見るべし。疑問あらば索引に依りて同じくカードの裏面を見よ、直に氷解すべし。

一　各教科書中の事項は網羅したれども數學に於ける問題の如き遺漏は使用者自らカードを製し、充分に補足して完全のものとせらるべし。

一　右の便利を計らん爲、本社に於て、同形同質の紙に罫を引き、穴を穿ち實費を以て發賣せり。

（實用新案登錄一一六五一號）

カード式三角目次

一、角ノ測リ方

1. 〔角ノ單位〕 角ヲ計ルニ普通用ヒラルルハ六十分法ト弧度法トノ二種ナリ。
六十分法トハ一直角ノ九十分ノ一ヲ一度ト名ヅケ一度ノ六十分ノ一ヲ一分ト名ヅケ，一分ノ六十分ノ一ヲ一秒ト名ヅクルモノヲ云フ。此ノ度分秒ヲ表ハスニ °′″ ヲ以テス，例ヘバ五十七度十七分四十四秒ヲ 57° 17′ 44″ ト記スルガ如シ。
弧度法トハ任意ノ圓ニ於テ半徑ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ中心ニ於ケル角ニテ測ル法ヲ云フ，而シテ此ノ角ヲらぢあんト云フ。
六十分法ヲ又英法トモ云フ，而シテ此ノ角ノ計リ方ハ測量，航海，星學等實地ノ計算ニ於テ一般ニ用ヰラルルモノナリ。

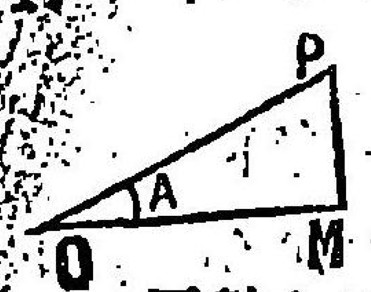
一らぢあんハ $\frac{1}{\pi}$(2 直角)$=57°17'44''8$ ナリ。

尙ホ以上ノ角ノ計リ方ノ外ニ百分法ト稱スルモノアリ，一直角ノ百分ノ一ヲ一度ト名ヅケ，一度ノ百分ノ一ヲ一分ト名ヅケ，一分ノ百分ノ一ヲ一秒ト名ヅクルモノヲ云フ，之レヲ佛法トモ云フ，而シテ度分秒ノ記號ハ六十分法ト等シク °′″ ヲ以テス。

2. 〔各單位間ノ關係〕 或ル角ヲ弧度法ニテ計リタルモノヲ θ トシ六十分法ニテ計リタルモノヲ D トスルトキハ此ノ兩者ノ間ニ次ギノ關係アリ。

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180°}\quad \therefore\ \theta=D\times\frac{\pi}{180°},\quad D=\theta\times\frac{180°}{\pi}$$

二、鋭角ノ三角函數

1. 

此ノ直角三角形ノ鋭角Aニ關シテOPヲ斜邊, PMヲ垂線, OMヲ底邊ト云ヒ次ギノ如キ六個ノ關係ヲ作リ之ヲ三角函數ト云フ。

第一 $\frac{MP}{OP}=\frac{垂線}{斜邊}$, 之ヲAノ正弦ト名ヅケ sinA ト記ス

第二 $\frac{OM}{OP}=\frac{底邊}{斜邊}$, 之ヲAノ餘弦ト名ヅケ cosA ト記ス

第三 $\frac{MP}{OM}=\frac{垂線}{底邊}$ 之ヲAノ正切ト名ヅケ tanA ト記ス

第四 $\frac{OM}{MP}=\frac{底邊}{垂線}$ 之ヲAノ餘切ト名ヅケ cotA ト記ス

第五 $\frac{OP}{OM}=\frac{斜邊}{底邊}$, 之ヲAノ正割ト名ヅケ secA ト記ス

第六 $\frac{OP}{MP}=\frac{斜邊}{垂線}$, 之ヲAノ餘割ト名ヅケ cosecA ト記ス

餘割正割餘切ハ夫々正弦餘弦正切ノ反對ナリ。

三、角ノ計リ方ニ關スル問題

1. 通常用フル角ノ單位ハ何々ナリヤ, 其定義ヲ與ヘ且ツ兩者ノ關係ヲ求メヨ　(33 海兵)
2. 直角ヲ單位トスル時 0.678 ナル角ヲ六十分法ニテ表ハセ。
3. 次ギノ諸角ノ値ヲ直角ヲ單位トシテ表ハセ。
   (a) 9°.16′45″　(b) 49°
4. 二等邊三角形ノ各底角ガ頂角ノ二倍ナル時各角ノ度數ヲ求ム。
5. 半徑五尺ノ圓ノ中心ニ於テ三十度ニ對スル弧ノ長サヲ求ム
6. 三角形ノ一角ハ四十五度ニシテ一角ハ $\frac{1}{2}$ らぢあんナラバ其第三角ハ何度ナルカ, 又幾らぢあんナルカ。　(31 海兵)

練習問題

1. 直角ヲ單位トスル時次ギノ値ヲ有スル諸角ヲ六十分法ニテ表ハセ
   (a) 1.583　(b) 0.695　(c) 0.0432
   (d) 0.00357　(e) $\frac{25}{32}$
2. 正五邊形,正八邊形, 正十邊形ノ各角ヲ六十分法ニテ示セ　答　正五邊形ノ各角ハ 1.2 直角
   正八邊形ノ各角ハ 1.5 直角
   正十邊形ノ各角ハ $\frac{8}{5}$ 直角

〔注意〕 本問題ハ幾何學定理ヲ應用スベシ

三、角ノ測リ方ニ關スル問題（解）

1. 説明中ニアリ

2. $0.678\times 90=61.020$（度）

 $0.02\times 60=1.2$（分）

 $0.2\times 60=12$

 故ニ　0.678 直角 $=61^\circ 1' 12''$

3. (a)　$60\,\underline{|45''}$ $\quad$ (b)　$90\,\underline{|49}$

 $.75$ $\qquad\qquad\qquad$ $.544\ldots\ldots$

 16

 $60\,\underline{|16'.75}$ $\qquad\qquad$ $49^\circ=.544$ 直角

 $.2625$

 9

 $90\,\underline{|9^\circ.2625}$

 $.1029\ldots\ldots\ldots$

 $9^\circ\,16'\,45''=0.1029$ 直角

4. 三角形ノ内角ノ和ハ二直角ナル故　頂角ハ

 2 直角 $\div 5=\dfrac{2}{5}$ 直角

 $\dfrac{2}{5}$ 直角 $=\quad 90^\circ\times\dfrac{2}{5}=36^\circ$

 底角　$=36^\circ\times 2=72^\circ$

5. $30^\circ=\dfrac{30\pi}{180}$ らぢあん $=\dfrac{\pi}{6}$ らぢあん

 5 尺 $\times\dfrac{\pi}{6}=5$ 尺 $\times\dfrac{3.1416}{6}=2.62$ 尺

6. $180^\circ-45^\circ-\dfrac{180^\circ}{2\pi}=135^\circ-\dfrac{90^\circ}{\pi}$

 $\left(135^\circ-\dfrac{90}{\pi}\right)\times\dfrac{\pi}{180}=\left(\dfrac{3}{4}\pi-\dfrac{1}{2}\right)$ らぢあん

四、鋭角三角函數ノ問題

1. 直角三角形ノ三邊ノ比ガ $1:2:\sqrt{5}$ ナルトキ小ナル角ノ正弦,餘弦，正切ヲ求メヨ。

2. 三角形 ABC ニ於テ C 角ハ直角ニシテ且ツ $AC=3$ $BC=4$ ナレバ A 角ノ三角比各如何。（32 商船）

3. C ニ於テ直角ヲ有スル三角形 ABC ニ於テ $\tan A=3, AC=\dfrac{17}{3}$ ナルトキ AB ハ如何。

4. 30° ノ角ヲ有スル直角三角形ノ斜邊ガ 1 尺五寸ナレバ他ノ二ツノ邊ハ各如何ナルカ

 但シ $\cos 30=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$.

練　習　問　題

1. 直角三角形ノ三邊ノ比ガ次ギノ如クナルトキハ小ナル角ノ三角函數ヲ求メヨ

 $8:15:17$

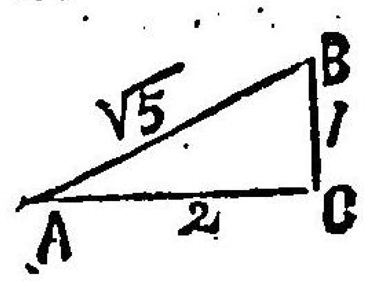
2. 直角三角形 ABC ガ C 角ニ於テ直角ヲナシ此ノ直角三角形ノ二邊ガ下ノ如クナレバ角 BAC ノ三角函數ヲ求メヨ

 (a)　$AB:AC=13:14$,　(b)　$AC:BC=3:7$,

 (c)　$AB:BC=3:2$

3. 矩形ノ相隣レル二邊ガ m 寸及 n 寸ナルトキ此ノ矩形ノ二ツノ對角線ガ交ハリテナス角ノ正切ハ幾何ナルカ。

四、 鋭角三角函數ノ問題 (解)

1. 

I 正弦 $= \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

餘弦 $= \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

正切 $= \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

2. $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{9+16} = 5$ (上圖利用)

∴ 正弦 $= \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$, 餘弦 $= \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$.

正切 $= \frac{BC}{AC} = \frac{4}{3}$, 餘切 $= \frac{AC}{BC} = \frac{3}{4}$.

正割 $= \frac{AB}{AC} = \frac{5}{3}$, 餘割 $= \frac{AB}{BC} = \frac{5}{4}$.

3. $\tan A = \frac{BC}{AC} = 3$

$BC = 3.AC = 3 \times \frac{17}{3} = 17$

$AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2 + 17^2}$

$= \sqrt{\frac{17^2 + 17^2 \times 3^2}{3^2}} = \sqrt{\frac{17^2(1+9)}{3^2}} = \frac{17}{3}\sqrt{10}$

4. 底邊 $= 15$ 寸 $\times \cos 30^\circ = 15$ 寸 $\times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7.5\sqrt{3}$ 寸

高サ $= 15$ 寸 $\times \sin 30^\circ = 15$ 寸 $\times \frac{1}{2} = 7{\cdot}5$ 寸

五、 三角函數相互ノ關係

1. 第一ノ關係

$\sin A.\operatorname{cosec} A = 1$ $\quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}$

$\cos A.\sec A = 1$ $\quad \sec A = \frac{1}{\cos A}$.

$\tan A.\cot A = 1$ $\quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$.

2. 第二ノ關係

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$

3. 第三ノ關係

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$

$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

問 題

4. 一ツノ角ノ總ベテノ圓函數ヲ其角ノ正弦ニテ表ハセ (33 美術)

5. 下式ヲ證明スベシ
$\tan A + \cot A = \sec A.\operatorname{cosec} A$ (34 商船)

練 習 問 題

1. A ガ任意ノ角ナルトキ次ギノ關係アルコトヲ記セ
(a) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
(b) $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$
(c) $\operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$ (34. 海兵)(38. 海兵)

2. $\tan A \sin A + \cos A = \sec A$ ヲ證セ。 (34, 美術)

3. $\frac{1}{\tan^2 A + 1} + \frac{1}{\cot^2 A + 1} = 1$ ヲ證セヨ

4. $\sin^3 A \cos A + \cos^3 A \sin A = \sin A \cos A$ ヲ證セヨ

五、三角函數相互ノ關係（解）

1. $\sin A.\operatorname{cosec}A=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}.\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}=1$

   $\cos A.\sec A \quad =\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}.\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}=1$

   $\tan A.\cot A \quad =\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}.\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}=1$

2. $\tan A=\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}\div\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\frac{\sin A}{\cos A}$,

   $\cot A=\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}=\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}\div\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}=\frac{\cos A}{\sin A}$

3. $\sin^2A+\cos^2A=\left(\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}\right)^2+\left(\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}\right)^2$

   $=\frac{\text{垂邊}^2+\text{底邊}^2}{\text{斜邊}^2}=\frac{\text{斜邊}^2}{\text{斜邊}^2}=1$

   $1+\tan^2A=1+\left(\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}\right)^2=\frac{\text{底邊}^2+\text{垂線}^2}{\text{底邊}^2}=\left(\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}\right)^3$

   $=\sec^2A.$

   $1+\cot^2A=1+\left(\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}\right)^2=\frac{\text{垂線}^2+\text{底邊}^2}{\text{垂線}^2}=\left(\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}\right)^2$

   $=\operatorname{cosec}^2A.$

4. $\cos^2A+\sin^2A=1 \quad \cos A=\sqrt{1-\sin^2A}$

   $\tan A=\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2A}} \quad \cot A=\frac{\sqrt{1-\sin^2A}}{\sin A}$

   $\sec A=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2A}} \quad \operatorname{cosec}A=\frac{1}{\sin A}$

5. $\tan A+\cot A=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\cos A.\sin A}$

   $=\frac{1}{\cos A.\sin A}=\sec A.\operatorname{cosec}A$

六、三角函數相互ノ關係問題（其一）

1. Express in terms of tan all other circular function of θ. (31 三高)

2. $(\tan A+\sec A)^2=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$ (35 商船)

練　習　問　題

1. cotA ヲ以テ他ノ凡テノ圓函數ヲ表ハセ。
2. $(1+\tan A)^2+(1-\tan A)^2=2\sec^2A$ ヲ證セ。
3. $\cot^2A-\cos^2A=\cot^2A\cos^2A$ ヲ證セ (33 商船)
4. $\left(\frac{\tan A}{\sin A}\right)^2=1+\frac{\sin^2A}{\cos^2A}$ ヲ證セ

六、三角函數相互ノ關係問題（解）其一

1. $\tan\theta$ ガ與ヘラレタルトキ他ノ凡テノ圓函數ヲ求ムルニアリ　$\cot A=\dfrac{1}{\tan A}$

$$\sec A=\sqrt{1+\tan^2A}\qquad \because\ 1+\tan^2A=\sec^2A$$

$$\therefore\ \cos A=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2A}}$$

$$\sin A=\tan A\cos A\qquad \because\ \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\therefore\ \sin A=\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2A}}$$

$$\mathrm{cosec}A=\sqrt{1+\cot^2A}\ (\because\ 1+\cot^2A=\mathrm{cosec}^2A)$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2A}}=\sqrt{\frac{1+\tan^2A}{\tan^2A}}$$

2. 左邊$=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2=\left(\dfrac{\sin A+1}{\cos A}\right)^2$

$$=\frac{\sin^2A+2\sin A+1}{\cos^2A}$$

$$=\frac{1-\cos^2A+2\sin A+1}{\cos^2A}=\frac{2(\sin A+1)-\cos^2A}{1-\sin^2A}$$

$$=\frac{2(\sin A+1)-(1-\sin^2A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$$

$$=\frac{(1+\sin A)\{2-(1-\sin A)\}}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$$

$$=\frac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$$

別法　左邊$=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2=\left(\dfrac{\sin A+1}{\cos A}\right)^2$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2A}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$$

六、三角函數相互ノ關係ノ問題 其二

1. 下式ヲ證明スベシ

$$(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$$

（32. 商船）

2. $(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\mathrm{cosec}A$ ヲ證明セヨ。

（33. 商船）

3. 下ノ式ヲ證セヨ

$$2(\sin^6A+\cos^6A)-3(\sin^4A+\cos^4A)+1=0$$

（31. 海兵）

練習問題

1. $\sin^6A+\cos^6A=1-3\cos^2A+2\cos^4A$ ヲ證セヨ。
2. 下ノ二式ヲ證明セヨ。
   (a) $\sin^6A-\cos^6A=(2\sin^2A-1)(1-\sin^2A+\sin^4A)$
   (b) $\sin^6A-\cos^6A=(1-2\cos^2A)(1-\cos^2A+\cos^4A)$
3. $(1+\sin A+\cos A)^2(1-\sin A-\cos A)^2=4\sin^2A\cos^2A$ ヲ證明セヨ。
4. $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ ナレバ、$\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$ ナルコトヲ證明セヨ。　（32. 海機）
5. $\tan A+\sin A=m$, $\tan A-\sin A=n$ ナレバ $m^2-n^2=4\sqrt{mn}$ ナルコトヲ證セヨ　（32. 陸士）

六、三角函數相互ノ關係問題(解)其二

1. 左邊$=\{(1+\sin A)+\cos A\}^2=(1+\sin A)^2$
$+2(1+\sin A)\cos A+\cos^2 A$
$=(1+\sin A)^2+2(1+\sin A)\cos A$
$+(1+\sin A)(1-\sin A)$
$=(1+\sin A)\{(1+\sin A)+2\cos A+(1-\sin A)\}$
$=(1+\sin A)(2+2\cos A)=2(1+\sin A)(1+\cos A)$

2. 左邊$=\sin A.\tan A+\sin A.\cot A+\cos A.\tan A$
$+\cos A.\cot A$

$$=\sin A.\frac{\sin A}{\cos A}+\sin A\frac{\cos A}{\sin A}+\cos A\frac{\sin A}{\cos A}+\cos A.\frac{\cos A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A}+\cos A+\sin A+\frac{\cos^2 A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\cos A}+\frac{\cos^2 A}{\cos A}+\frac{\sin^2 A}{\sin A}+\frac{\cos^2 A}{\sin A}$$

$$=\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos A}+\frac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\sin A}$$

$$=\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\sin A}=\sec A+\operatorname{cosec} A$$

3. $\sin^6 A+\cos^6 A=(\sin^2 A)^3+(\cos^2 A)^3$
$=(\sin^2 A+\cos^2 A)\{(\sin^2 A)^2-\sin^2 A\cos^2 A+(\cos^2 A)^2\}$
$=1\times\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A\}$
$=1-3\sin^2 A\cos^2 A=1-3(1-\sin^2 A)\sin^2 A$
$=1-3\sin^2 A+3\sin^4 A.$
$\therefore\ 2(\sin^6 A+\cos^6 A)=2-6\sin^2 A+6\sin^4 A.$
$3(\sin^4 A+\cos^4 A)=3\{\sin^4 A+(1-\sin^2 A)^2\}$
$=3\{\sin^4 A+1-2\sin^2 A+\sin^4 A\}$
$=3(2\sin^4 A-2\sin^2 A+1)$
$=6\sin^4 A-6\sin^2 A+3$
$\therefore$ 左邊$=2-6\sin^2 A+6\sin^4 A-6\sin^4 A$
$+6\sin^2 A-3+1=0$

七、特殊ノ角ノ三角函數

1. 表ヲ用ヒズシテ, 30° 及 60° ノ三角比ヲ見出セ。
(34. 海兵)

2. 或角ノ正弦 (sine), 餘弦 (cosine), 及正切 (tangent) ノ定義ヲ記セ; 且ツ四十五度ノ角ニ對スル此等ノ價ヲ定メヨ．
(32 海兵)

練習問題

1. 三十度ノ正弦, 餘弦, 正切ヲ示セ。 (36 盛農)

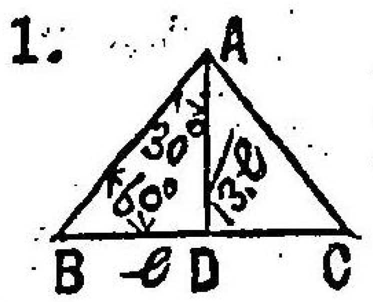
2. 下式ノ値ヲ小數二桁マデ求メヨ。

$$\frac{\tan 60^\circ-\tan 30}{\sin 60^\circ-\sin 45}$$
(37 海機)

3. $\tan A=\dfrac{3}{4}$ナルトキ下式ノ値ヲ求メヨ

(a) $\dfrac{\sin A-\cos A}{2\sin A-3\cos A}$, (b) $\dfrac{\sec A-\operatorname{cosec} A}{2\sec A-3\operatorname{cosec} A}$

七、特殊ノ角ノ三角函數（解）



1. ABC ヲ正三角形トセバ，垂線 AD ハ角 BAC 及之ニ對スル邊 BC ヲ二等分スレバ，$\angle ABC=60°$，$\angle DAB=30°$

今 BD ヲ l トスレバ，

$BA=2l,\quad DA=\sqrt{(2l)^2-l^2}=\sqrt{3}.l$

$$\therefore\quad \sin 60°=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}.l}{2l}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

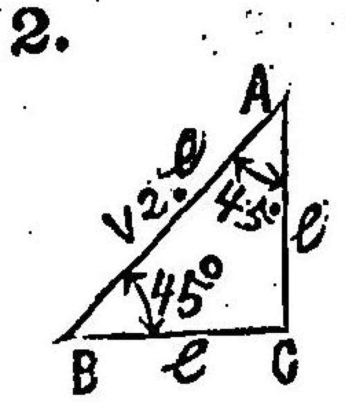
$$\cos 60°=\sin 30°=\frac{l}{2l}=\frac{1}{2}.$$

$$\tan 60°=\cot 30°=\frac{\sqrt{3}.l}{l}=\sqrt{3}$$

$$\cot 60°=\tan 30°=\frac{l}{\sqrt{3}.l}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\sec 60°=\mathrm{cosec}\,30°=\frac{2l}{l}=2.$$

$$\mathrm{cosec}\,60°=\sec 30°=\frac{2l}{\sqrt{3}.l}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$



2. 角 ABC ノ正弦 (sine) トハ斜邊ヲ以テ垂線 AC ヲ除シタルモノナリ。角 ABC ノ餘弦トハ斜邊ヲ以テ底邊ヲ除シタルモノナリ。又角 ABC ノ正切トハ底邊ヲ以テ垂線ヲ除シタルモノナリ。

今 ABC ヲ直角二等邊三角形ナリトセバ，二ツノ銳角 ABC, CAB ハ何レモ 45° ナリ。

今 BC 及 CA ノ長サヲ l トスレバ，

$AB=\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2}.l.$

$$\therefore\quad \sin 45°=\cos 45=\frac{l}{\sqrt{2}.l}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \tan 45=\frac{l}{l}=1.$$

八、特殊ノ角ノ三角函數ノ問題

1. 或ルーツノ角ノ函數ヲ用ヒテ其二分ノ一ノ角ノ三角函數ヲ表ハセ。
2. 15° ノ三角函數ヲ求ム。

練　習　問　題

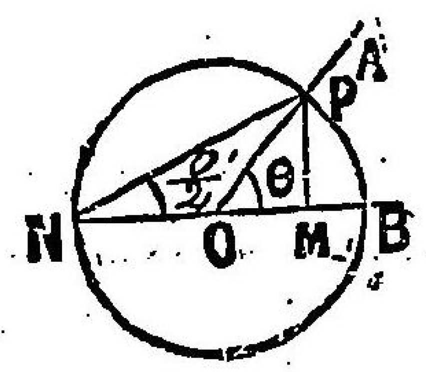
1. 前ノ方法ニヨラズシテ 15° ノ三角函數ヲ求メヨ。
注意　問題1解釋ノ圖ニ於テ OP ヲ N ト定ムレバ θ ナル角ノ函數ニヨリテ PM, OM ヲ求ムルコトヲ得，從ヒテ NP モ容易ニ求ムルコトヲ得ベシ。
2. 75° ノ三角函數ヲ求メヨ。

之レニ屬スル試驗問題ハ次ギノ如シ。

1. 十五度ノ正弦及餘弦ヲ問フ。　(35 商船)
2. $\sin 15°$ ノ値ヲ求メヨ。　(35 海機)
3. 表ニヨラズシテ $\cos 15°$ ヲ求メヨ。　(32 陸士)
4. $\cos 75°=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ナルコトヲ示セ。　(31 海兵)
5. 75° ナル角ノ正切ヲ求メヨ。　(39 A醫)
6. $\sin 75°+\sin 15°$ ヲ求メヨ。　(36 千醫)
7. $\tan 7°.5$ ノ値ヲ求メヨ，而シテアル角ノ tangent ガコレト同ジ値ヲ有スル如キ角ノ一般ノ公式ヲ記セ。　(38 札農)
注意　本問題ハ問題〔1〕ニテ證明セルコトニヨリテ諸子ハ容易ニ解シ得ベシ。

八、特種ノ角ノ三角函數問題（解）

1.



任意ノ角 AOB ヲ θ トス。OA 上ニ任意ノ一點 P ヲ取リ OP ヲ半徑トシ O ヲ中心トシテ圓ヲ畫ケ。BO ヲ延長シ圓ト N ニ於テ交ラシメ NP ヲ結ビ付ケヨ。然レバ角 BNP ハ $\frac{\theta}{2}$ ナリ。

P ヨリ OB ヘ垂線 PM ヲ引ケ。圓ノ半徑 OP ノ長サヲ l トセヨ。然ルトキハ

$\frac{MP}{OP}=\sin\theta$, $\frac{OM}{OP}=\cos\theta$. $MP=l\sin\theta$, $OM=l\cos\theta$.

$\therefore NM=l+l\cos A$. $\therefore \tan\frac{\theta}{2}=\frac{MP}{NM}=\frac{l\sin\theta}{l+l\cos\theta}$

$=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$. $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ ヲ用ヒテ他ノ函數ヲ求ムルコトハ容易ナリ。「之レハ前ニ説ケリ」。

2. $\tan 15^\circ=\tan\frac{30^\circ}{2}=\frac{\sin 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$

$\cot 15^\circ=\frac{1}{\tan 15^\circ}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\times\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

$\operatorname{cosec} 15^\circ=\sqrt{1+\cot^2 15^\circ}=\sqrt{1+4+4\sqrt{3}+3}$

$=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

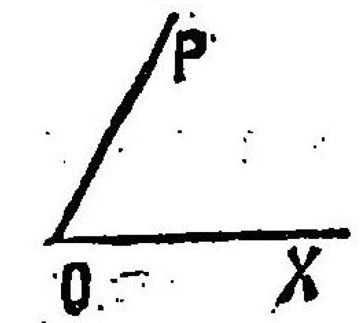
$\sin 15^\circ=\frac{1}{\operatorname{cosec} 15^\circ}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\mathrm{coc}\,15^\circ=\cot 15^\circ \sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sec 15^\circ=\frac{1}{\cos 15^\circ}=\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

九、任意ノ角ノ三角函數 其一

1. 任意ノ角

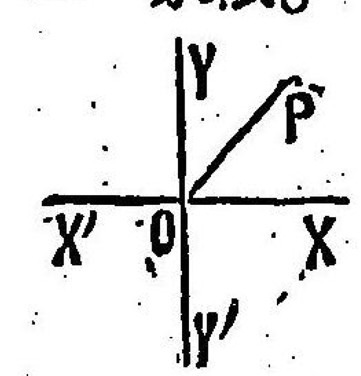


同一ノ點 O ヨリ引ケル二直線 OX, OP アリ，OP ガ最初 OX ノ位置ニアリテ OX ニ重ナリテ居タリトシ而シテ O 點ヲ中心トシテ左ニ廻轉シテ OP ノ位置ニ至リタリトスル𪜈ハ其ノ OP ノ廻轉ノ量ヲ OX, OP ノ爲ス角ト云ヒ，OP ヲ廻轉線ト云ヒ，OX ヲ首線ト云フ。又 O 點ヲ原點ト云フ。

2. 角ノ正負　OP ガ OX ヨリ廻轉スルニ時計ノ針ノ廻轉ト同一ノ廻轉即チ右廻轉ヲナス場合ト時計ノ針ノ廻轉ト逆ニ廻轉スル即チ左廻轉ヲナス場合トノ二樣アリ。左廻轉ヲナス場合ニ畫ケル角ヲ正角トシ，右廻轉ヲナス場合ニ畫ケル角ヲ負角トスルヲ常例トス。而シテ正角ヲ表ハスニハ正數ヲ以テシ。負角ヲ表ハスニハ負數ヲ以テス。

OP ガ次第ニ廻轉シテ再ビ OX ト合スルニ至レバ OP ハ 360° ノ角ヲ畫ク尚廻轉スル𪜈ハ OX ニ來タリテ 720° ノ角ヲ畫ク斯ク OP ノ廻轉ハ幾廻轉モナシ得ルヲ以テ角ノ値ニハ限ナシ。

3. 象限。



OP ガ 90°, 180°, 270° 廻轉シタル𪜈ノ位置ヲ夫々 OY, OX′, OY′ トス，此各位置ニ於ケル直線ノ間ヲ象限ト云ヒ，XOY, YOX′, X′OY′, Y′OX′ ヲ夫々第一，第二，第三，第四象限ト云フ。

九、 任意ノ角ノ三角函數 其二

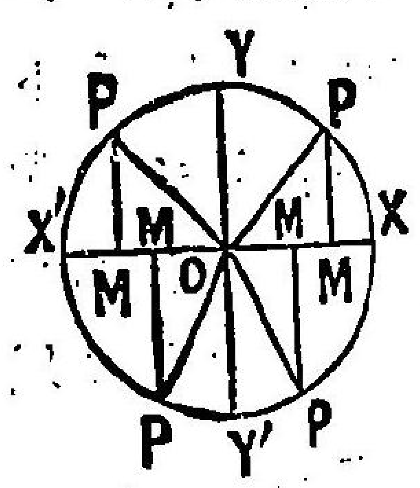
4. 任意ノ三角函數ノ定義。 任意ノ三角函數ノ定義トシテハ先キニ三角函數ノ定義トシテアゲタルモノニ次ギノ三定義ヲ加フ。

第一　斜邊ハ常ニ廻轉線上ニ取リテ其ノ符號ハ正トス。

第二　底邊ハ首線上ニアル時正トシ首線ノ延長上ニアル時負トス。

第三　垂線ハ首線及其ノ延長ニ對シ廻轉線ガ正ナル角ヲ爲ス側ニアル時正トシ廻轉線ガ負ナル角ヲ爲ス側ニアル時負トス。

5. 三角函數ノ符號。 角 XOP ヲ A トス。



A ガ第一象限ニアル場合ニハ PM ハ正, OM ハ正, OP ハ常ニ正故ニ $\frac{PM}{OP}=\sin A$ ハ正, $\frac{OM}{OP}=\cos A$ ハ正 $\frac{PM}{OM}=\tan A$ ハ正。

A ガ第二象限ニアル場合ニハ OP, PM ハ正, OM ハ負ナリ, 故ニ
$\frac{PM}{OP}=\sin A$ ハ正, $\frac{OM}{OP}=\cos A$ ハ負, $\frac{PM}{OM}=\tan A$ ハ負 A ガ第三象限ニアル場合ニハ OP ハ正. PM, OM ハ負ナリ故ニ
$\frac{PM}{OP}=\sin A$ ハ負, $\frac{OM}{OP}=\cos A$ ハ負, $\frac{PM}{OM}=\tan A$ ハ正。A ガ第四象限ニアル場合ニハ OP ハ正, PM ハ負 OM ハ正ナリ故ニ
$\frac{PM}{OP}=\sin A$ ハ負, $\frac{OM}{OP}=\cos A$ ハ正, $\frac{PM}{OM}=\tan A$ ハ負。

九、 任意ノ角ノ三角函數 (其二)

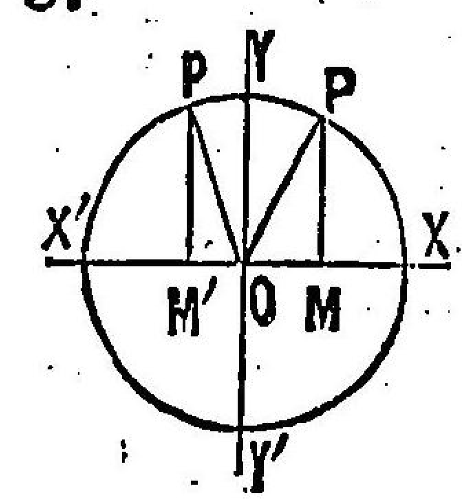
6. $n\times360^\circ+A$ ナル角ノ三角函數。n ガ零或ハ任意ノ整數ナレバ $n\times360^\circ+A$ ナル角ハ常ニ A 角ト合スルヲ以テ次ギノ如キ關係アリ。

$\sin(n\times360^\circ+A)=\sin A$. $\cos(n\times360^\circ+A)=\cos A$。
$\tan(n\times360^\circ+A)=\tan A$. $\cot(n\times360^\circ+A)=\cot A$。
$\sec(n\times360^\circ+A)=\sec A$.
$\mathrm{cosec}(n\times360^\circ+A)=\mathrm{cosec}A$。

7. 0°, 90° 等ノ三角函數。 0°, 90°, 等ノ角ハ直角三角形ヲ作ル能ハズ故ニ先キノ定義ニヨリテ三角函數ヲ求ムル能ハザルヲ以テ之レ等ノ場合ニハ角ガ漸々ソレ等ノ角ニ近ヅクモノトスレバ其ノ三角函數モ漸々ソレ等ノ角ノ三角函數ニ近ヅクモノナレバ其ノ近ヅキタル極限ノ値ヲ以テソレ等ノ角ノ三角函數トス。

90° ノ三角函數ヲ求メン。

8.



$\sin XOP=\frac{MP}{OP}$ ナリ 今角 XOP ガ漸々増シテ XOY ニ近ヅク時ハ MP ハ漸々増シテ OY ニ近ヅク, XOP 角ヲ XOY 角ニ充分ニ近ツカシムル時ハ其ノ差ハ何程ニテモ小ナラシムルヲ得ル。故ニ sinXOP ハ漸々増シテ $\frac{OP}{OP}$ 即チ 1 ニ近ツキ, 角 XOP ヲ充分 90° ニ近ツカシムル時ハ sinXOP ト 1 トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシムルコトヲ得即チ角XOP ガ90° トナル時正弦ノ極限ハ 1 トナル。故ニ

$\sin 90^\circ=1$

九、 任意ノ三角函數（其四）

又 $\cos XOP=\dfrac{OM}{OP}$ ナリ。

角 XOP ヲ充分ニ 90° ニ近ヅカシムルヰハ OM ハ如何程ニテモ小トスルコトヲ得ルヲ以テ餘弦ハ如何程ニテモ小トスルコトヲ得，而シテ角 XOP ガ 90° トナリタルヰノ餘弦ノ極限ハ 0 ナリ。
故ニ　$\cos 90^\circ=0$

又 $\tan XOP=\dfrac{MP}{OM}$ ナリ。

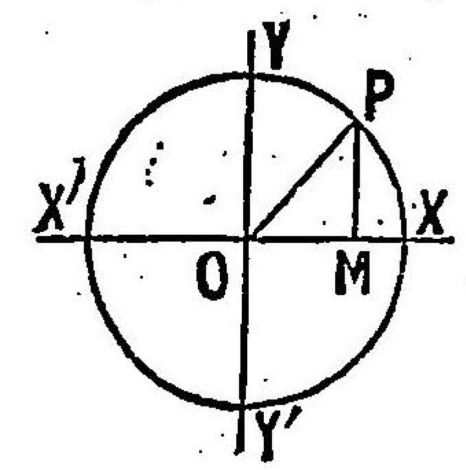
角 XOP ヲ充分ニ 90° ニ近ヅカシムルヰハ MP ハ漸々極限 OP ニ近ヅキ OM ハ極限 0 ニ近ヅクサレバ正切ハ漸々大トナリ角 XOP ヲ充分ニ 90° ニ近ヅカシムレバ如何程ニテモ大トスルコトヲ得；而シテ角 XOP ガ 90° トナリタルヰノ正切ノ極限ハ無究大トナル。故ニ

$$\tan 90^\circ=\infty$$

今第一象限ニアル角 XOP ガ漸々増シテ XOY ニ近ヅク場合ト第二象限ニアル角 XOP′ ガ漸々減ジテ XOY ニ近ヅク場合トヲ考フルニ正弦ニ於テハ正ニシテ1ヨリハ小ナルモノヨリ1ニ近ヅキ極限ニ至リテ1トナル。餘弦ノ場合ニハ XOP ガ増シテ XOY ニ近ヅクヰハ正ニシテ XOP′ ガ減ジテ XOY ニ近ヅクヰハ負ナリ而シ其ノ極限ニ至リテ何レモ0トナル。又正切ニ付イテハ XOP ガ増シテ XOY ニ近ヅクヰニ正ニシテ XOP′ ガ減ジテ XOY ニ近ヅクヰハ負ナリ而シテ其ノ極限ニ於テハ何レモ無究大トナル。0°, 180°, 270° 等ノ角ノ三角函數ニ付イテハ學者自カラ研究シテ之レヲ表ニ作リ次ギニアグル表ト比較セバ大ニ研究トナルベシ。

九、 任意ノ角ノ三角函數 其五

8. 三角函數ノ値ノ變化。
角 A ガ 0° ヨリ 360° マデ増ス場合ノ正弦ノ値ノ變化ヲ述ベン



$\sin A=\dfrac{MP}{OP}$，角 A ガ減ジテ 0° トナルヰハ MP ハ減ジテ遂ニ 0 トナル。従ヒテ正弦ハ 0 トナル角 A ガ 0° ヨリ漸々増シテ 90° ニ近ヅクヰハ MP ハ 0 ヨリ漸々増シテ OP ニ近ヅク而シテ正ナリ 故ニ正弦ハ 0 ヨリ増シテ 1 ニ近ヅギ角 A ガ 90° ニ至レバ正弦ハ 1 トナル。

角ガ 90° ヨリ漸々増シテ 180° ニ近ヅクヰハ，MP ハ漸々減ジテ限リナク小トナリ 0 ニ近ヅク而シテ正ナリ，故ニ正弦ハ 1 ヨリ漸々減ジテ角 A ガ 180° トナレバ 0 トナル。
角ガ 180° ヨリ漸々増シ 270° ニ近ヅケバ MP ハ漸々増シ OP ニ近ヅケ而負ナリ，故ニ正弦ハ 0 ヨリ漸々減シテ角 A ガ 270° ニ至レバ −1 トナル。
角ガ 270° ヨリ漸々増シ 360° ニ近ヅクヰハ MP ハ漸々減ジテ限クナク小トナリ而シテ負ナリ故ニ正弦ハ −1 ヨリ漸々増シテ角ガ 360° ニ至ルヰハ 0 トナル而シテ角ガ尚増シテ 360° 以上トナルヰハ正弦ノ値ノ變化ハ上述ノ變化ヲ繰ク返ス。
他ノ三角函數ノ變化ハ學生自カラ研究シテ之レヲ表ニ作リ次ギニアグル表ト比較セバ大ニ研究トナルベシ。

九、任意通ノ三角函數(其六)

9. 0°, 90°, 180°, 270° 等ノ三角函數表

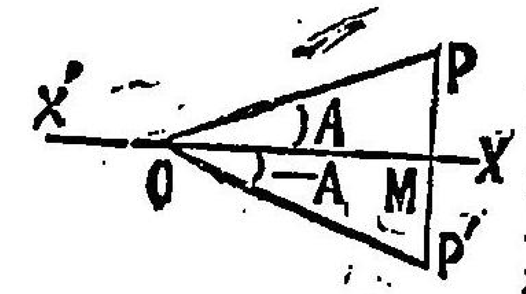
	0°	90°	180°	270°	
sin	0	1	0	−1	
cos	1	0	−1	0	
tan	0	∞	0	∞	
cot	∞	0	∞	0	
sec	1	∞	−1	∞	
cosec	∞	1	∞	−1	

10. 三角函數ノ値ノ變化表

	第一象限ニ於テ	第二象限ニ於テ	第三象限ニ於テ	第四象限ニ於テ	
sinA ハ漸々	0 ヨリ 1	1 ヨリ 0	0 ヨリ −1	−1 ヨリ 0	至ル
cosA 〃	1 〃 0	0 〃 −1	−1 〃 0	0 〃 1	〃
tanA 〃	0 〃 +∞	−∞ 〃 0	0 〃 +∞	−∞ 〃 0	〃
cotA 〃	+∞ 〃 0	0 〃 −∞	+∞ 〃 0	0 〃 −∞	〃
secA 〃	1 〃 +∞	−∞ 〃 −1	−1 〃 −∞	+∞ 〃 1	〃
cosecA 〃	+∞ 〃 1	1 〃 +∞	−∞ 〃 −1	−1 〃 −∞	〃

一〇、餘角、補角等ノ三角函數ノ關係 其一

1. 任意ノ角 A ノ三角函數ト角 (−A) ノ三角函數トノ關係 $\widehat{XOP}$, $\widehat{XOP'}$ ヲ A, −A トシ二角ノ廻轉線上ニ相等シキ長サ OP, OP′ ヲ取ルトキハ P, P′ ヲ連ヌル直線 PP′ ハ OX 又ハ其延長ト直交ス, 其ノ交點ヲ M トセヨ。然ルトキハ底邊 OM ハ二角ニ共通ニシテ, 斜邊 OP=OP′, 垂線 MP=MP′, 而シテ垂線ハ符號ヲ異ニス, 故ニ



$$\sin(-A)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A$$

$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A$$

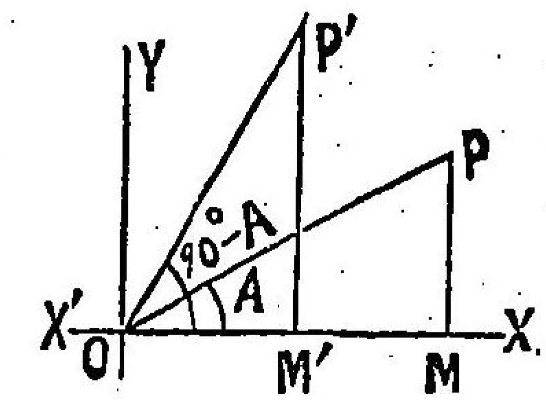
$$\tan(-A)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A$$

$$\cot(-A)=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot A$$

$$\sec(-A)=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

$$\mathrm{cosec}(-A)=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}=-\mathrm{cosec}A.$$

2. 互ニ餘角ナル二ツノ三角函數ノ關係



$\widehat{XOP}$, $\widehat{XOP'}$ ヲ A, 90°−A トシ二角ノ廻轉線上ニ相等シキ長サ OP, OP′ ヲ取リ. P, P′ ヨリ OX 又ハ其延長ニ垂線 PM, P′M′ ヲ作リ其ノ足ヲ M. M′ トセバ OP=OP′, M′P′=OM, OM′=MP ナルヲ以テ此ノ兩角ノ三角函數ノ間ニ次ギノ關係アリ。

一〇、餘角、補角等ノ三角函數ノ關係其二

$$\sin(90°-A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

$$\cos(90°-A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin A.$$

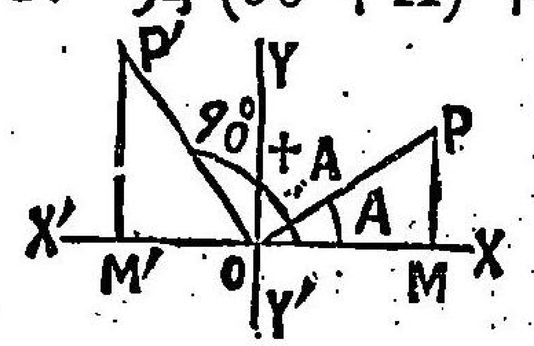
$$\tan(90°-A)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{MP}=\cot A.$$

$$\cot(90°-A)=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{MP}{OM}=\tan A.$$

$$\sec(90°-A)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec}A,$$

$$\operatorname{cosec}(90°-A)=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec A,$$

3. 角 (90°+A) ト角 A トノ三角函數ノ關係



左圖ニ於テ，OP'=OP, P'M'=OM, PM=OM,

$$\sin(90°+A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

$$\cos(90°+A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A.$$

$$\tan(90°+A)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot A,$$

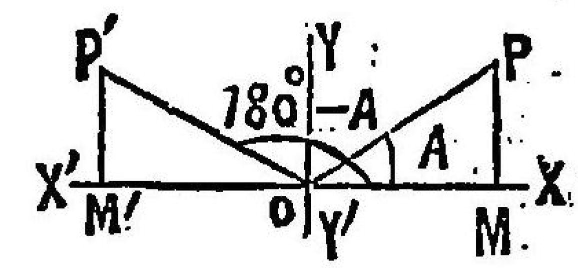
$$\cot(90°+A)=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A.$$

$$\sec(90°+A)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-MP}=\operatorname{cosec}A.$$

$$\operatorname{cosec}(90°+A)=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

一〇、餘角、補角等ノ三角函數ノ關係 其三

4. 互ニ補角ナル二ツノ三角函數ノ關係



$\widehat{XOP}$, $\widehat{XOP'}$ ヲ A, 等 180°−A トシ角ノ廻轉線上ニ等長ニ OP, OP' ヲ取リ P 及ビ P' ヨリ OX 又ハ其延長ニ垂線ヲ作リ其足ヲ M 及 M' トセバ $\widehat{P'OM'}=\widehat{POM}$ $\widehat{P'M'O}=\widehat{PMO}$, P'O=PO ∴ P'M'=PM. M'O=MO 故ニ

$$\sin(180°-A)=\frac{P'M'}{OP'}=\frac{PM}{OP}=\sin A.$$

$$\cos(180°-A)=\frac{OM'}{OP}=\frac{-OM}{OP}=-\cos A.$$

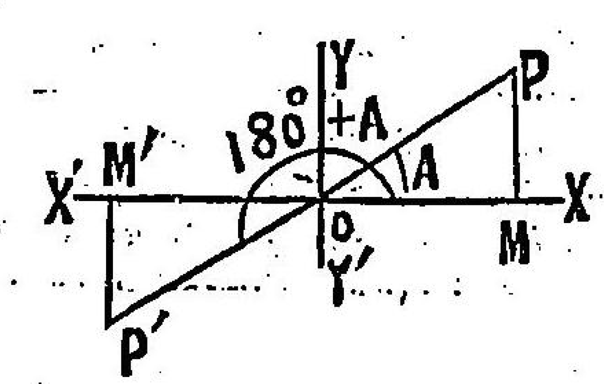
$$\tan(180°-A)=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{PM}{-OM}=-\tan A.$$

$$\cot(180°-A)=\frac{OM'}{P'M'}=\frac{-OM}{PM}=-\cot A.$$

$$\sec(180°-A)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-OM}=-\sec A.$$

$$\operatorname{cosec}(180°-A)=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{OP}{PM}=\operatorname{cosec}A.$$

5. 180°+A ト A トノ三角函數ノ關係



$\widehat{XOP}$, $\widehat{XOP'}$ ヲ A 及ビ 180°+A トシ角ノ廻轉線上ニ相等シキ長サ OP 及 OP' ヲ取リ P 及ビ P' ヨリ OX 又ハ其ノ延長上ニ垂線 PM, PM' ヲ作リ垂線ノ足ヲ M 及 M' トス。△P'OM' ト △POM トニ於テ

$\widehat{OP'M'}=\widehat{OPM}$, $\widehat{P'OM'}=\widehat{POM}$ P'O=PO
∴ P'M=PM, M'O=MO ナリ故ニ

一〇、餘角、補角等ノ三角函數ノ關係 其四

$$\sin(180^\circ+A)=\frac{P'M'}{OP}=\frac{-PM}{OP}=-\sin A.$$

$$\cos(180^\circ+A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-OM}{OP}=-\cos A.$$

$$\tan(180^\circ+A)=\frac{P'M'}{OM'}=\frac{-PM}{-OM}=\tan A.$$

$$\cot(180^\circ+A)=\frac{OM'}{P'M'}=\frac{-OM}{-PM}=\cot A.$$

$$\sec(180^\circ+A)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-OM}=-\sec A.$$

$$\mathrm{cosec}(180^\circ+A)=\frac{OP'}{P'M'}=\frac{OP}{-PM}=-\mathrm{cosec}A.$$

以上列擧シタル三角函數ヲ表示スルコト次ギノ如シ。

角 / 函數	−A	90°−A	90°+A	180°−A	180°+A	n×360°+A
sin	−sinA	cosA	cosA	sinA	−sinA	sinA
cos	cosA	sinA	−sinA	−cosA	−cosA	cosA
tan	−tanA	cotA	−cotA	−tanA	tanA	tanA
cot	−cotA	tanA	−tanA	−cotA	cotA	cotA
sec	secA	cosecA	−cosecA	−secA	−secA	secA
cosec	−cosecA	secA	secA	cosecA	cosecA	cosecA

一一、任意ノ角ノ三角函數ノ問題 其一

1. 與ヘラレタル角 θ ノ正弦ヲ知リテ餘弦ヲ求ムル時ハ次式ヲ用フルニ當リ正負ヲ如何ニ撰定スルヤ。
$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$ (39 海兵)
2. tanA ヲ以テ sinA, 及 cosA ヲ表ハス式ヲ作レ。 (34 商船)
3. $\tan x=\sqrt{3}$ ナル時ハ $\sec x$ ノ値如何。 (36 商船)
4. cosA ヲ cotA ニテ表セ。 (40 海兵)

練　習　問　題

1. $\tan\theta=\frac{4}{3}$ ナレバ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ノ値如何。 (33 商船)
(答 θ ガ第一象限ニアル場合
$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$
θ ガ第三象限ニアル場合
$\sin\theta=-\frac{4}{5}$, $\cos\theta=+\frac{3}{5}$
∵ tangent ガ $\frac{4}{3}$ ナル時ノ角 θ ハ第一若シクハ第三象限ニアレバナリ。)
2. $\tan A=\frac{8}{15}$ ナル時 sinA 及 cosA ノ値ヲ求メヨ。 (35 海機)
3. $\tan A=2-\sqrt{3}$ ナラバ cosA ノ値如何。 (37 商船)
4. $\tan 238^\circ=\frac{3}{4}$ トセバ $\sin 238^\circ$ 及 $\cos 122^\circ$ ノ値如何 (40 水産)

一一、任意ノ角ノ三角函數ノ問題
(解) 其一

1. θ ナル角ノ大サニヨリテ或ハ正號ヲ取リ或ハ負號ヲ取ル。$\cos\theta$ ノ値ハ θ ガ第一象限及ビ第四象限ニアル時ハ正ニシテ第三象限及第四象限ニアル時ハ負ナリ。故ニ θ ガ $2n\times180°+A$,及ビ$2n\times180°-A$ ナル場合ニハ正號ヲ取リ。$(2n+1)180°-A$ $(2n+1)\times180°+1$ ナル場合ニハ負號ヲ取ル。
但シ上式ニ於テ A ハ一直角ヲ越ヘザル正角ニシテ n ハ整數ナリ。
2. $1+\tan^2A=\sec^2A$ ニヨリテ次ノ如クシテ求メラル
$$1+\tan^2A=\frac{1}{\cos^2A} \qquad \cos^2A=\frac{1}{1+\tan^2A}$$
$$\cos A=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2A}}$$ 而シテ
$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}, \qquad \sin A=\tan A\cos A$$
$$\therefore\ \sin A=\pm\frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2A}}$$
3. $1+\tan^2A=\sec^2A$ ニヨリテ
$$\sec^2A=1+(\sqrt{3})^2=4 \qquad \therefore\ \sec A=\pm2$$
4. $1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$ ニヨリテ次ギノ如クシテ求メラル
$$1+\cot^2A=\frac{1}{\sin^2A}, \qquad \sin A=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2A}}$$
然シテ $\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$, $\cos A=\sin A\cot A$
$$\therefore\ \cos A=\pm\frac{\cot A}{\sqrt{1+\cot^2A}}$$

一一、任意ノ角ノ三角函數ノ問題其二

1. $\sin A=\frac{5}{13}$ ナル時 $\tan A$ ノ値如何 (35 商船)
2. 第二象限ニアル角ノ三角函數ヲ其角ノ正切ニテ表ハセ (35 海兵)

練　習　問　題

1. $135°(=180°-45°)$ ノ總テノ三角函數ヲ求ム。 (35 大工)

本問題ハ $180°-A$ ト A トノ三角函數ノ關係即チ互ニ補角ナル二ツノ角ノ三角函數ノ關係ニヨリテ容易ニ三角函數ヲ求ムルコトヲ得。

2. 三十度及百二十度ノ六ツノ圓函數ノ値ヲ求ム。 (40 商船)

本問題ハ $90°+A$ ト A トノ三角函數ノ關係ニヨリテ容易ニ解クコトヲ得。

一一、任意ノ角ノ三角函數ノ問題
(解) 其二

1. 正弦ガ $\frac{5}{13}$ ナル角 A ハ第一象限ニアルカ若シクハ第二象限ニアリ。$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\pm\sqrt{1-\sin^2 A}}\quad\because\ \cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}.$$

$$\therefore\ \tan A=\frac{\frac{5}{13}}{\pm\sqrt{1-\frac{25}{169}}}=\pm\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}}=\pm\frac{5}{12}$$

正負中 A 角ガ第一象限ニアル角ナルトキハ正ヲ取リ第二象限ニアル角ナルトキハ負ヲ取ル。

2. 第二象限ニアル角ハ一般ニ $(2n+1)\times180-A$ ナリ 今 $\tan[(2n+1)\times180-A]$ ヲ知ルトキハ

$$\cot[(2n+1)\times180^\circ-A]=\frac{1}{\tan[(2n+1)\times180^\circ-A]}$$

$$-\sin(2n+1)\times180^\circ-A]=\frac{\tan[(2n+1)\times180^\circ-A]}{\sqrt{1+\tan^2[(2n+1)\times180^\circ-A]}}$$

$$\cos[(2n+1)\times180^\circ-A]=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2[(2n+1)\times180^\circ-A]}}$$

$$[\sec(2n+1)\times180^\circ-A]=\sqrt{1+\tan^2[(2n+1)\times180^\circ-A]}$$

$$-\operatorname{cosec}[(2n+1)\times180^\circ-A]=\frac{\sqrt{1+\tan^2[(2n+1)\times180^\circ-A]}}{\tan[(2n+1)\times180-A]}$$

第二象限ニ於テハ三角函數ノ値ハ正弦ト餘割ハ正ニシテ他ハ負ナリ。負ナル値ヲ有スル正切ニテアラハシタルヲ以テ正弦ト餘割ハ負トナレルナリ。

一一、任意ノ角ノ三角函數ノ問題 其三

1. sin225°, cos240°, tan315° ノ値ヲ問フ。(35 東工)
2. sin195° ノ値ヲ小數點以下第四位マデ精確ニ算出スベシ。(41 大工)
3. 330° 及 −225° ノ正弦, 餘弦及正切ノ値ヲ求ム。(36 海兵)
4. −45°, 135°, −300°, 750° ノ正弦及餘弦ヲ求ム。(38 海兵)
5. cos675°, cosec660° ノ値ヲ求メヨ。

練 習 問 題

1. (*a*) 正角及負角ヲ說明セヨ。
   (*b*) −30°, 150°, −150°, −210° ノ正弦及餘弦ヲ書ケ。(35 海兵)
2. sin390°+sin(−675°)+sin420°+sin510°−sin135°+sin120° ノ値ヲ求メヨ。

一一、任意ノ角ノ三角函數ノ問題

1. $\sin 225^\circ=\sin(180^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$

$\tan 315^\circ=\tan(-45^\circ)=-\tan 45^\circ=-1$

2. $\sin 195^\circ=\sin(180^\circ+15^\circ)=-\sin 15^\circ$

$\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\frac{2.4495-1.4142}{4}=\cdot 2588$

$\therefore\ \sin 195^\circ=-0.2588.$

3. $\sin 330^\circ=\sin(-30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$

$\cos 330^\circ=\cos(-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 330^\circ=\tan(-30^\circ)=-\tan 30^\circ=-\sqrt{3}$

$\sin(-225^\circ)=\sin 135^\circ=\sin(90^\circ+45^\circ=\cos 45^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos(-225^\circ)=\cos 135^\circ=\cos(90^\circ+45^\circ)=-\sin 45^\circ$

$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan(-225^\circ)=\tan 135^\circ=\tan(60^\circ+45^\circ)=-\cot 45$。

$=-1$

4. $\sin(-45^\circ)=-\sin 45^\circ=\frac{-1}{\sqrt{2}}\cos(-45^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

135° ノ正弦ノ餘角ノ値ハ第三問題ニアリ。

$\sin(-300)=\sin 60=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \cos(-300)=\cos 60=\frac{1}{2}$

$\sin(750^\circ)=\sin(2\times 360^\circ+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

$\cos(750^\circ)=\cos(2\times 360^\circ+30)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\cos 675^\circ=\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\operatorname{cosec}(660^\circ)-\operatorname{cosec}60^\circ=-\frac{2}{\sqrt{3}}$

一一、任意ノ角ノ三角函數ノ問題 其四

1. Aナル角ガ 0° ヨリ 360° マデ變ズル時ハ sinA, cosA, (sinA+cosA) ノ變化ヲ表ニテ表ハセ。

(37 海兵)

練習問題

1. Aナル角ガ 0° ヨリ 360° マデ變ズル時ハ sinA−cosA ハ如何ニ變化スルカ。

2. $\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\tan(180^\circ+\theta)}\cdot\frac{\cot(90^\circ-\theta)}{\tan(90^\circ+\theta)}\cdot\frac{\cos(360^\circ-\theta)}{\sin(-\theta)}=\sin\theta$

ナルコトヲ證セヨ。

3. $\frac{\sin(-\theta)}{\tan(180^\circ+\theta)}-\frac{\tan(90^\circ+\theta)}{\cot\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin(90^\circ+\theta)}=3$

ナルコトヲ證セヨ。

4. 0° ト 180° トノ間ニ於テ $\sin x$ ガ $\cos 50^\circ$ ヨリ小ナルタメノ x ノ範圍ヲ求メヨ。 (41 海兵)

一一、 任意ノ角ノ三角函數ノ問題

1. (解) 其四

函數＼角	0°	30°	45°	60°	90
sinA	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosA	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
sinA+cosA	1	$\frac{1+\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	$\frac{1+\sqrt{3}}{2}$	1

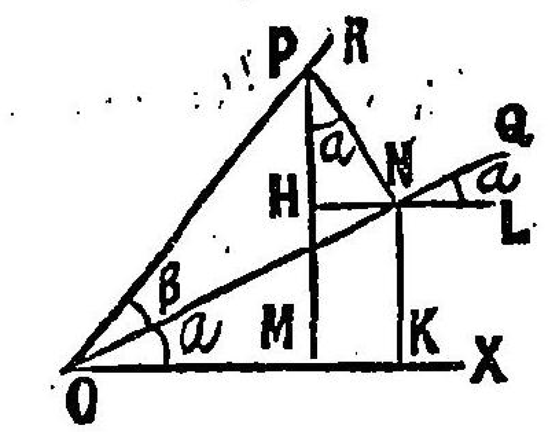
函數＼角	120°	135°	150°	180°	210°
sinA	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
cosA	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
sinA+cosA	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$

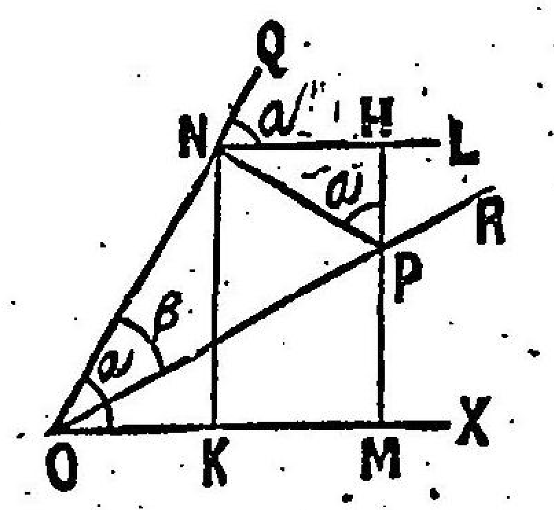
函數＼角	225°	240°	270°	300°	315°
sinA	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
cosA	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
sinA+cosA	$-\sqrt{2}$	$-\frac{(1+\sqrt{3})}{2}$	-1	$\frac{1-\sqrt{3}}{2}$	0

函數＼角	330°	360°
sinA	$-\frac{1}{2}$	0
cosA	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
sinA+cosA	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1

一二、 二ツノ角ノ三角函數 其一

1. 二角ノ和及ビ差ノ正弦餘弦ノ公式





上記ノ二圖ニ於テ XOQ ヲ角 α トシ, QOR ヲ角 β トス. 然ルトキハ XOR ハ角 $(\alpha\pm\beta)$ ナリ。角 $(\alpha\pm\beta)$ ヲ畫キタル廻轉線 OR 上ニ任意ノ點 P ヲ取リ P ヨリ OX 及 OQ ヘ夫々垂線 PM 及 PN ヲ引ケ而シテ N ヨリ MP 及 OX ヘ夫々垂線 NH 及 NK ヲ引ケバ

$$\widehat{HPN}=90^\circ-\widehat{HNP}=\widehat{QNL}=\widehat{QOX}$$

故ニ $\sin(\alpha\pm\beta)=\frac{MP}{OP}=\frac{MH\pm HP}{OP}=\frac{KN}{OP}\pm\frac{HP}{OP}$

$$=\frac{KN\cdot ON}{ON\cdot OP}\pm\frac{HP\cdot NP}{NP\cdot OP}=\frac{KN}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}\pm\frac{HP}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\sin XOQ.\cos QOR\pm\cos HPN.\sin QOR$$

$\therefore\ \sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\pm\cos\alpha.\sin\beta.$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\frac{OM}{OP}=\frac{OK\mp MK}{OP}=\frac{OK}{OP}\mp\frac{NH}{OP}$$

$$=\frac{OK\cdot ON}{ON.OP}\mp\frac{NH.NP}{NP.OP}=\frac{OK}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}\mp\frac{NH}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\cos XOQ\cdot\cos ROQ\mp\sin HPN.\sin ROQ$$

$\therefore\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\mp\sin\alpha.\sin\beta$

玆ニハ α,β 及ビ其和或ハ差ガ一直角ヲ越エザル場合ニ於テ説明セシモ之レ等ノ公式ハ α,β ガ如何ナル値ヲ有スル場合ニ於テモ適合ス。

2. 二角ノ和ト差ノ正弦或ハ餘弦ノ積ノ公式

(公式)

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

公式ノ證明

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)\\&=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\&=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta\\&=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta\\&=\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&=\sin^2\alpha-\sin^2\beta\end{aligned}$$

又 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$$\begin{aligned}&=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta\\&=(1-\cos^2\alpha)\cos^2\beta-\cos^2\alpha(1-\cos^2\beta)\\&=\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\beta\\&=\cos^2\beta-\cos^2\alpha\end{aligned}$$

(公式) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

(公式ノ證明)

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)\\&=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta\\&=\cos^2\alpha-\sin^2\beta\end{aligned}$$

又 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$$\begin{aligned}&=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\\&=(1-\sin^2\alpha)\cos^2\beta-\sin^2\alpha(1-\cos^2\beta)\\&=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\beta\\&=\cos^2\beta-\sin^2\alpha\end{aligned}$$

3. 二角ノ和ト差トノ正切及ビ餘切ノ公式

(公式) $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$

公式證明

$$\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}\\&=\frac{(\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta)\div\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta)\div\cos\alpha\cos\beta}\\&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

(公式) $\cot(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$

公式證明

$$\begin{aligned}\cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cos(\alpha\pm\beta)}{\sin(\alpha\pm\beta)}\\&=\frac{(\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta)\div\sin\alpha\sin\beta}{(\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta)\div\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}$$

4. 二角ノ和及ビ差ノ正弦餘弦ノ公式ヨリ下ノ四式ヲ得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)&=2\sin\alpha\cos\beta\\\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\sin\beta\\\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\\\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)&=2\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

其ノ然ル所以ハ學生ノ容易ニ知ルヲ得ベシ

5. 今 $\alpha+\beta=S$, $\alpha-\beta=T$ トスレバ

$\dfrac{S+T}{2}=\alpha$, $\dfrac{S-T}{2}=\beta$ ナルヲ以テ又次ギノ四式ヲ得

一二、二ツノ角ノ三角函數　其四

$$\sin S+\sin T=2\sin\frac{S+T}{2}.\cos\frac{S-T}{2}$$
$$\sin S-\sin T=2\cos\frac{S+T}{2}.\sin\frac{S-T}{2}$$
$$\cos T+\cos S=2\cos\frac{S+T}{2}.\cos\frac{S-T}{2}$$
$$\cos T-\cos S=2\sin\frac{S+T}{2}.\sin\frac{S-T}{2}$$

以上ノ公式ハ重要ナレバ再ビ下ニ列記ス。

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha.\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha.\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$$
$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$$
$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\pm\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$
$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha.\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha.\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha.\cos\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha.\sin\beta$$
$$\sin S+\sin T=2\sin\frac{S+T}{2}.\cos\frac{S-T}{2}$$
$$\sin S-\sin T=2\cos\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}$$
$$\cos T+\cos S=2\cos\frac{S+T}{2}.\cos\frac{S-T}{2}$$
$$\cos T-\cos S=2\sin\frac{S+T}{2}.\sin\frac{S-T}{2}$$

之レ等ノ公式ハ何レモ重要ニシテ應用廣ケレバ學生ハ充分ニ證明法ヲ了解スルト同時ニ暗記スベシ

一三、二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題　其一

1. $\cos A=\frac{40}{41}$, $\cos B=\frac{60}{61}$ トシテ $\sin(A+B)$ ノ値ヲ計算セヨ。但シ A, B ハ何レモ直角ヨリ小ナル正角トス。 (34 海機)
2. 四十五度及三十度ノ三角函數ヲ用ヒテ $\sin15°$ ノ値ヲ計算セヨ。 (35 海兵)(35 東商)
3. $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ヨリ $\cos(A+B)$ ヲ求メヨ。
   但シ A, B ハ 0° ト 90° トノ間ニアルモノトス。 (41 海兵)
4. 次ギノ式ヲ證明セヨ。
   $\cos(A-30°)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$

練　習　問　題

1. $\sin A=\frac{1}{4}$, $\sin B=\frac{4}{5}$ ナレバ $\sin(A+B)$ ノ値如何。 (37 商船)
   (A, B ノ位置ニヨリテ符號ヲ注意スベシ。
2. $\cos A=\frac{3}{5}$. $\sin B=\frac{5}{13}$ ヲ與ヘテ $\sin(A+B)$ ノ値ヲ求ムルコト。 (36 陸士)
3. $\sin A=\frac{2}{3}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ヲ知リテ $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A-B)$ ヲ求メヨ。但シ A, B ハ孰レモ 0° ト 90° トノ間ニアルモノトス。
4. A 及 B ハ共ニ第一象限ニアル角ニシテ,
   $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{3}{5}$ ナリ. A+B ナル角ノ正弦及ビ餘弦ヲ求ム。 (36 海兵)

一三、二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題 其二

1. $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{40}{41}\right)^2}=\frac{9}{41}$

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{60}{61}\right)^2}=\frac{11}{61}$

$\therefore\ \sin(A+B)=\sin^2 A\cos^2 B+\cos^2 A\sin^2 B$

$=\left(\frac{9}{41}\right)^2\times\left(\frac{60}{61}\right)^2+\left(\frac{40}{41}\right)^2\times\left(\frac{11}{61}\right)^2$

$=\frac{9^2\times60^2+40^2\times11^2}{41^2\times61^2}=\frac{485200}{6255001}=0.07757$ 約

2. 公式 $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha.\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ヲ用ヒテ

$\sin(45^\circ-30)=\sin45^\circ.\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ$

$\therefore\ \sin15^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1.4142(1.7321-1)}{4}$

$=\frac{1.4142\times.7321}{4}=.35355\times.7321=.258833955.$

3. $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}$

$=\sqrt{\frac{169-25}{169}}=\frac{12}{13}$

$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ \cos(A+B)=\cos A.\cos B-\sin A\sin B$

$=\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{65}$

4. $\cos(A-30^\circ)=\cos A\cos30^\circ+\sin A\sin30^\circ$

$=\cos A\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin A\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos A+\sin A)$

一三、二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題 其三

1. $\sin45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルコトヲ知リテ，
$\mathrm{cosec}15^\circ=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ ナルコトヲ記セ　(35 陸士)

2. $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$, $\sin y=\frac{5}{13}$, $\cos y=\frac{12}{13}$, ナル時 $\sin(x+y)$ 及 $\cos(x+y)$ ノ値ヲ求ム。　(33 農實)

練習問題

1. 二ツノ角ノ正弦及餘弦ヲ用ヒテ其ノ角ノ和及差ノ正弦及餘弦ヲ表ハス公式ヲ列記シ，次ノ二ツノ角ノ正弦及餘弦ヲ計算セヨ。
(*a*) 105°, (*b*) 15°　(38 海兵)

2. 圖ニヨリテ次ギノ公式ヲ證明スベシ。
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　(33 美術)

3. $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ ナルコトヲ證セヨ。　(35 海兵)

4. $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$
圖ヲ以テ上式ヲ證明セヨ。　(32 美術)(39 京醫)

5. 下ノ式ヲ證明スベシ。
$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$　(33 商船)

6. 下式ヲ證セヨ。
$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\sin^2 A$　(40 商船)

一三、 二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題 (解) 其三

1. $\sin 30^\circ = \sqrt{1-\cos^2 30^\circ} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$

依テ

$\sin(45^\circ-30^\circ) = \sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \quad \operatorname{cosec} 15^\circ = \frac{1}{\sin 15^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$= \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}$

$= \frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$

2. $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

$= \frac{3}{5} \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{4}{13}\left(\frac{9}{5}+1\right) = \frac{4}{13} \times \frac{14}{5} = \frac{56}{65}$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$= \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{3}{13}\left(\frac{16}{5}-1\right) = \frac{3}{13} \times \frac{11}{5} = \frac{33}{65}$

玆ニ説明セルハ x, y ヲ正ノ鋭角トシテ解シタレド若シ此ノ制限ヲ附セザル𪜈ハ $\sin x, \cos y$ ハ各々正負二ツノ値ヲ取リ得ルヲ以テ

$\sin(x+y) = \left(\frac{-3}{5}\right) \times \left(\frac{-12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$

$\sin(x+y) = \left(\frac{-3}{5}\right) \times \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-16}{65}$

$\sin(x+y) = \left(\frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{-12}{13}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{-16}{65}$

其他凡テノ場合ニ付イテ學生ハ研究スベシ。

一三、 二ツノ角ノ三角函數應用問題 其三

1. $\sin 15^\circ = \cos 75^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ナルコトヲ證セヨ。

2. $\tan 75^\circ = \cot 15^\circ = 2+\sqrt{3}$ ナルコトヲ證セヨ。

3. $\tan\alpha = \frac{7}{3}, \ \tan\beta = \frac{3}{4}$ ナル𪜈 $\tan(\alpha+\beta)$ ノ値ヲ求ム。

4. $\tan(45^\circ \pm \theta) = \frac{1 \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\theta}$ 上式ヲ證明セヨ。

5. $\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$ ナルコトヲ證明セヨ。

練習問題

1. $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ナルコトヲ證明セヨ。

2. $\cot 75^\circ = \tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. $\cot(45^\circ \pm \theta) = \frac{\cot\theta \mp 1}{\cot\theta \pm 1}$ ナルコトヲ證明セヨ。

4. $\cot\beta \pm \cot\theta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$ ナルコトヲ證明セヨ。

一二、二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題
(解) 其三

1. $\sin 15^\circ = \sin(92^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

2. $\tan 75^\circ = \tan(95^\circ - 15^\circ) = \cot 15^\circ = \cot(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \frac{\cot 45^\circ \cot 30^\circ + 1}{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ} = \frac{1 \times \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

3. $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

$$= \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{8+9}{12}}{1 - \frac{6}{12}}$$

$$= \frac{\frac{17}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$$

4. $\tan(45^\circ \pm \theta) = \dfrac{\tan 45^\circ \pm \tan\theta}{1 \mp \tan 45^\circ \tan\theta} = \dfrac{1 \pm \tan\theta}{1 \mp \tan\theta}$

5. $\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \pm \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha.\cos\beta}$

$$= \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}$$

一三、二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題
(解) 其 四

1. 下式ヲ證明セヨ。

$$\sin(45^\circ + \theta) = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\sqrt{2}}$$

2. 下式ヲ證明セヨ。

$$\sin(30^\circ - \theta) + \sin(30^\circ + \theta) = \cos\theta.$$

3. $\sin(\theta - 60^\circ) = \frac{1}{2}(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta)$

上式ヲ證明スベシ。

4. $\cos(\theta + 45^\circ) + \sin(\theta - 45^\circ) = 0$

上式ヲ證明スベシ。

5. $\sin^2(\theta + 45^\circ) + \sin^2(\theta - 45^\circ) = 1$

上式ヲ證明スベシ。

練 習 問 題

1. $\cos(30^\circ - \theta) - \cos(30^\circ + \theta) = \sin\theta$

上式ヲ證明セヨ。

$$\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta) = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$$

上式ヲ證明セヨ。

2. $\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A$

一三、二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題
(解) 其四

1. $\sin(45°+\theta)=\sin45°\cos45°\sin\theta$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+\sin\theta)$$

2. $\sin(30°-\theta)+\sin(30°+\theta)$

$$=\sin30°\cos\theta-\cos30°\sin\theta+\sin30°\cos\theta+\cos30°\sin\theta.$$
$$=2\sin30°\cos\theta=2\times\tfrac{1}{2}\cos\theta=\cos\theta.$$

3. $\sin(\theta-60°)=\sin\theta\cos60°-\cos\theta\sin60°$

$$=\sin\theta\times\frac{1}{2}-\cos\theta\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta)$$

4. $\cos(\theta+45°)+\sin(\theta-45°)$

$$=\cos\theta\cos45°-\sin\theta\sin45°$$
$$+\sin\theta\cos45°-\cos\theta\sin45°$$
$$=\cos\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\sin\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}-\cos\theta\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=0$$

5. $\sin^2(\theta+45°)=\cos\{90°-(\theta+45°)\}=\cos(45°-A)$

(互ニ餘角ナルニツノ角ノ三角函數ノ關係)

$$=\cos\{-(\theta-45°)\}=\cos(\theta-45°)$$

(角 A ノ三角函數ト角 (−A) ノ三角函數トノ關係)

$\therefore\quad \sin^2(\theta+45°)+\sin^2(\theta-45°)$

$$=\cos^2(\theta-45°)+\sin^2(\theta-45°)=1$$

$\sin^2A+\cos^2\theta=1.$ ナレバナリ

一三、二ツノ角ノ三角函數應用問題
其五

1. 下式ヲ證明スベシ。

$$\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$$
$$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$$

2. 下式ヲ證明スベシ。

$\tan(A+B+C)$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

3. 下式ヲ證明スベシ。

$$(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2=2\{1+\cos(\alpha-\beta)\}$$

4. 下式ヲ證明スベシ。

$$\sin60°+\sin30°=2\sin45°.\cos15°$$

練習問題

1. $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$

$$-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$$

上式ヲ證明セヨ。

2. $\cot(A+B+C)$

$$=\frac{\cot A\cot B\cot C-\cot A-\cot B-\cot C}{\cot A\cot B+\cot B\cot C+\cot A\cot C-1}$$

上式ヲ證明セヨ。

3. $\sin40°-\sin10°=2\cos15°\sin15°$

上式ヲ證明セヨ。

一三、二ツノ角ノ三角函數ノ應用問題 (解) 其五

1. $\sin(A+B+C)=\sin\{A+(B+C)\}$
$=\sin A\cos(B+C)+\cos A\sin(B+C)$
$=\sin A\{\cos B\cos C-\sin B\sin C)$
$\quad+\cos A\{\sin B\cos C+\cos B\sin C\}$
$=\sin A\cos B\cos C-\sin B\sin C\sin A$
$\quad+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$
$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$
$\quad+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C$

2. $\tan(A+B+C)=\tan\{A+(E+C)\}$

$$=\frac{\tan A+\tan(B+C)}{1-\tan A\tan(B+C)}=\frac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}{1-\tan A\times\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}$$

$$=\frac{\tan A(1-\tan B\tan C)+\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan A\tan B-\tan A\tan C}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan A\tan C}$$

3. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha+\sin\beta)^2$
$=\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta$
$\quad+\sin^2B$
$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta$
$\quad+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$
$=1+1+2\cos(\alpha-\beta)=2\{1+\cos(\alpha-\beta)\}$

4. $\sin60^\circ+\sin30^\circ=\sin(45^\circ+15^\circ)+\sin(45^\circ-15^\circ)$
$=\sin45^\circ\cos15^\circ+\cos45^\circ\sin15^\circ$
$\quad+\sin45^\circ\cos15^\circ-\cos45^\circ\sin15^\circ$
$=2\sin45^\circ\cos15^\circ.$

一四、倍角ノ三角函數 其一

1. 二倍角ノ三角函數ノ公式

(一) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(二) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

(三) $\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(四) $\cot2\alpha=\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}$ (五) $\sin\alpha=2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}$

(六) $\cos\alpha=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

(七) $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ (八) $\cot\alpha=\dfrac{\cot^2\frac{\alpha}{2}-1}{2\cot\frac{\alpha}{2}}$

(九) $\cos^2\alpha=\dfrac{\cos2\alpha+1}{2}$ (十) $\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$

以上諸公式ノ證明。

(一) $\sin2\alpha=\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$
$=2\sin\alpha\cos\alpha$

(二) $\cos2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$
$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$

又 $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha$
$=1-2\sin^2\alpha.$

(三) $\tan2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(四) $\cot 2a=\cot(a+a)=\dfrac{\cot a\cot a-1}{\cot a+\cot a}=\dfrac{\cot^2 a-1}{2\cot a}$

(五) $\sin a=\sin\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\right)=\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}+\cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{a}{2}$

$=2\sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}$

(六) $\cos a=\cos\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\right)=\cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{a}{2}-\sin\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{a}{2}$

$=\cos^2\dfrac{a}{2}-1+\cos^2\dfrac{a}{2}=2\cos^2\dfrac{a}{2}-1$

又 $\cos^2\dfrac{a}{2}-\sin^2\dfrac{a}{2}=1-\sin^2\dfrac{a}{2}-\sin^2\dfrac{a}{2}$

$=1-2\sin^2\dfrac{a}{2}$

(七) $\tan a=\tan\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\right)$

$=\dfrac{\tan\dfrac{a}{2}+\tan\dfrac{a}{2}}{1-\tan\dfrac{a}{2}\tan\dfrac{a}{2}}=\dfrac{2\tan\dfrac{a}{2}}{1-\tan^2\dfrac{a}{2}}$

(八) $\cot a=\cot\left(\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}\right)$

$=\dfrac{\cot\dfrac{a}{2}\cot\dfrac{a}{2}-1}{\cot\dfrac{a}{2}+\cot\dfrac{a}{2}}=\dfrac{\cot^2\dfrac{a}{2}-1}{2\cot\dfrac{a}{2}}$

(九) $\cos 2a=2\cos^2 a-1 \quad \therefore \quad \cos^2 a=\dfrac{\cos 2a+1}{2}$

(一〇) $\cos 2a=1-2\sin^2 a \quad \therefore \quad \sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

2. 三倍角ノ三角函數公式。

(一) $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$

(二) $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

(三) $\tan 3a=\dfrac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

(四) $\cot 3a=\dfrac{\cot^3 a-3\cot a}{3\cot^2 a-1}=\dfrac{3\cot a-\cot^3 a}{1-3\cot^2 a}$

(五) $\sin^3 a=\dfrac{3\sin a-\sin 3a}{4}$

(六) $\cos^3 a=\dfrac{3\cos a-\cos 3a}{4}$

以上公式ノ證明。

(一) $\sin 3a=\sin(2a+a)=\sin 2a\cos a+\cos 2a\sin a$

$(\sin 2a=2\sin a\cos a$ 又 $\cos 2a=1-2\sin^2 a)$

$\therefore \quad =2\sin a\cos^2 a+(1-2\sin^2 a)\sin a$

$=2\sin a(1-\sin^2 a)+(1-2\sin^3 a)\sin a$

$=3\sin a-4\sin^3 a$

(二) $\cos 3a=\cos(2a+a)=\cos 2a\cos a-\sin 2a\sin a$

$(\cos 2a=2\cos^2 a-1$, 又 $\sin 2a=2\sin a\cos a)$

$\therefore \quad =(2\cos^2 a-1)\cos a-2\sin^2 a\cos a$

$=(2\cos^2 a-1)\cos a-2(1-\cos^2 a)\cos a$

$=4\cos^3 a-3\cos a$

(三) $\tan 3a=\tan(2a+a)=\dfrac{\tan 2a+\tan a}{1-\tan 2a\tan a}$

$=\dfrac{\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}+\tan a}{1-\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\times\tan a}=\dfrac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

一四、倍角ノ三角函數ノ問題 其四

(四) $\cot 3\alpha=\cot(2\alpha+\alpha)=\dfrac{\cot 2\alpha\cot\alpha-1}{\cot\alpha+\cot 2\alpha}$

$$=\frac{\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}\times\cot\alpha-1}{\cot\alpha+\dfrac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}}$$

$$=\frac{\cot^3\alpha-3\cot\alpha}{3\cot^2\alpha-1}=\frac{3\cot\alpha-\cot^3\alpha}{1-3\cot^2\alpha}$$

(五),(六)ハ(一),(二)ヨリ容易ニ證セラル

二分ノ一角ノ三角函數公式。

(一) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$ (二) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

$\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ ナルヲ以テナリ。

(三) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$ (四) $\cot^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$

(一)(二)公式ヨリ直チニ得ラル。

(五) $\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

同樣ニ $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ ヲ乘ズルコトニヨリテ

$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(六) 從ッテ $\cot\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

一五、倍角ノ三角函數ノ問題 其一

1. 下式ヲ證明スベシ。

$\left(\sin\dfrac{\theta}{2}+\cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2=1+\sin\theta.$ (34 商船)

2. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ 及 $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ ノ値ヲ求メヨ。 (36 海機)

3. $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$ ナルトキ $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ ノ値ヲ求メヨ。 (37 海機)

練習問題

1. $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ ナルトキ $\cos 2\theta$ 及 $\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

2. $\sin x=\dfrac{3}{5}$ ニヨリテ $\tan 2x$ ノ値ヲ算出スベシ。 (40 海兵)

3. $\cos x=\dfrac{3}{4}$ ナルトキ $\cos 2x$ 及 $\sin 2x$ ノ値ヲ求メヨ。

一五、倍角ノ三角函數ノ問題 (解) 其一

1. $$\left(\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$=1+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=1+\sin\theta.$$

2. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{5}{4}$ 兩邊ヲ二乘スルトキハ

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{25}{16}\quad\therefore\ 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{25}{16}$$
$$\therefore\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}$$

又上式ノ兩邊ヲ三乘スルトキハ

$$\sin^3\theta+3\sin^2\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos^2\theta+\cos^3\theta=\frac{125}{64}$$
$$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{125}{64}-(3\sin^2\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos^2\theta)$$
$$3\sin^2\theta\cos\theta+3\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$
$$=\frac{9}{16}\times\frac{3}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{135}{128}$$
$$\therefore\ \sin^3\theta+\cos^3\theta=\frac{125}{64}-\frac{135}{128}=\frac{115}{128}$$

3. $$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$
$$\cos^22\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)^2=\cos^4\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta$$
$$\sin^4\theta+\cos^4\theta=\cos^22\theta-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)^2=\frac{1}{2}\sin^22\theta.$$
$$=\frac{1}{2}(1-\cos^22\theta)=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{25}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{16}{25}=\frac{16}{50}$$
$$\therefore\ \sin^4\theta+\cos^4\theta=\left(\frac{3}{5}\right)^2-\frac{16}{50}=\frac{18-16}{50}=\frac{1}{25}$$

一五、倍角ノ三角函數問題 其二

1. $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ ナルトキ $\sin3\theta$ ノ値ヲ求ム。
2. $\sin18^\circ$ 及ビ $\cos18^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。
3. 下式ヲ證明セヨ。
$$\sin2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$
4. 下式ヲ證明セヨ。
$$2\cos2\theta\sec^2\theta=1-\tan^2\theta.$$
5. 下式ヲ證明セヨ。
$$\cot\theta-\sin^4\theta=\cos2\theta.$$

練習問題

1. 36° ノ正弦及餘弦ヲ求ム。
2. 下式ヲ證明セヨ。
$$\cos36^\circ-\sin18^\circ=\sin30^\circ$$
3. 下式ヲ證明セヨ。
$$\cos2\theta=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$
4. $\tan A+\cot A=\dfrac{2}{\sin2A}$ ナルコトヲ證セヨ。

(32 陸士)

一五、 倍角ノ三角函數ノ問題（解）其二

1. $\sin 3\theta=2\sin\theta-4\sin^3\theta$ （三倍角ノ公式）

$$=3\times\frac{2}{5}-4\times\left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$=\frac{6}{5}-\frac{32}{125}=\frac{150-32}{125}=\frac{118}{125}$$

2. $\theta=18^\circ$ トス $5\theta=90^\circ$ $\therefore$ $2\theta=90^\circ-3\theta.$

$$\therefore\ \sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3=4(1-\sin^2\theta)-3$$

$$=1-4\sin^2\theta$$

$$4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0.$$

$$\therefore\ \sin\theta=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

銳角ノ正弦ハ正號ナルヲ以テ

$$\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

依テ $\cos 18^\circ=\sqrt{1-\sin^2 18^\circ}=\sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$

$$=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

3. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\cos^2\theta$

$$=2\tan\theta\times\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

4. $2\cos 2\theta\sec^2\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\times\frac{1}{\cos^2\theta}$

$$=\cos^2\theta\times\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1-\tan^2\theta$$

5. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$$=1\times(\cos^2\theta-\sin^2\theta)=\cos^2\theta.$$

一五、 倍角ノ三角函數ノ問題 其三

1. 次ノ恒等式ヲ證セヨ。

$$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$ （40 名工）（41 陸士）

2. 下式ヲ證明セヨ。

$$2\operatorname{cosec}2\theta=\tan\theta+\cot\theta.$$

3. 下式ヲ證明セヨ。

$$\operatorname{cosec}2\theta=\frac{\cot^2\theta+1}{2\cot\theta}$$

練習問題

1. 下式ヲ證明セヨ。

$$2\operatorname{cosec}2\theta=\sec\theta.\operatorname{cosec}\theta.$$

2. 下式ヲ證明セヨ。

$$\operatorname{cosec}2\theta=\frac{\cot^2\theta+1}{2\cot\theta}.$$

3. 次ギノ恒等式ヲ證セヨ。

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$$

一五、 倍角ノ三角函數ノ問題（解）其四

1. $$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\left(\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\div\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\div\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

別法。

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta,\quad -\cos\left(\frac{\pi}{2}+6\right)=\sin\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta,\quad -\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta.$$

$$\therefore\ \frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

2. $$2\operatorname{cosec}2\theta=2\times\frac{1}{\sin2\theta}=2\times\frac{1}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\theta+\cot\theta.$$

3. $$\operatorname{cosec}2\theta=\frac{1}{\sin2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\div\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta\div\cos^2\theta}=\frac{1+\tan^2\theta}{2\tan\theta}.$$

一五、 倍角ノ三角函數ノ問題（解）其四

1. 次式ヲ證明セヨ。

$$\sec\theta+\tan\theta=\tan\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$$ （41 東工）

2. 次式ヲ證明セヨ。

$$\frac{2\sin\theta+\sin2\theta}{2\sin\theta-\sin2\theta}=\cot^2\frac{\theta}{2}.$$

練 習 問 題

1. 次式ヲ證明セヨ。

$$\sec\theta-\tan\theta=\tan\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)$$

2. $\frac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=\tan\frac{\theta}{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. 次式ヲ證明セヨ。

$$\left(\sin\frac{\theta}{2}\pm\cos\frac{\theta}{2}\right)^2=1\pm\sin\theta.$$

一五、 倍角ノ三角函數ノ問題（解）其四

1. $\sec\theta+\tan\theta=\dfrac{1}{\cos\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\div\cos\frac{\theta}{2}}{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\div\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\tan45^\circ+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan45^\circ\tan\frac{\theta}{2}}=\tan\left(45^\circ\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\because\quad \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}.$$

別法。

$$\sec\theta+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos(90^\circ+\theta)}{\sin(90^\circ+\theta}.$$

$$=\tan\frac{90^\circ+\theta}{2}=\tan\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$$

2. $\dfrac{2\sin\theta+\sin^2\theta}{2\sin\theta-\sin2\theta}=\dfrac{2\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$$=\frac{2\sin\theta(1+\cos\theta)}{2\sin\theta(1-\cos\theta)}=\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{1-\cos^3\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}=\cot^2\frac{\theta}{2}.$$

一六、 正弦餘弦ノ和或ハ差トノ乘積トノ關係公式 其一

$$\left.\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)&=2\sin\alpha.\cos\beta\\
\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha.\sin\beta\\
\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)&=2\cos\alpha.\cos\beta\\
\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)&=2\sin\alpha.\sin\beta
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots 1$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\alpha+\sin\beta&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\sin\alpha-\sin\beta&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\beta+\cos\alpha&=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\\
\cos\beta-\cos\alpha&=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots 2$$

以上公式ノ證明。

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=2\sin\alpha.\cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=2\cos\alpha\sin\beta.$

$\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)+(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=2\cos\alpha\cos\beta.$

$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=2\sin\alpha\sin\beta.$

一六、正弦餘弦ノ和或ハ差ト乘積トノ關係公式 其二

$$\sin\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta+\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\beta-\cos\alpha=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

二ツノ角ノ正弦或ハ餘弦ノ和或ハ差ヲ積ノ形ニ變ゼントスレバ(2)式ニヨリテ之レヲ爲スコトヲ得又反對ニ積ヲ和或ハ差ノ形ニ變ゼントスルニハ(1)式ヲ以テスルコトヲ得ベシ。

一七、分角ノ三角函數 其一

1. $\cos A$ ヲ知リテ $\sin\frac{A}{2}$ 及 $\cos\frac{A}{2}$ ヲ求ムルコト。

$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ ナルニヨリ

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

コレニヨリテ $\cos A$ ヲ與フルトキハ $\cos\frac{A}{2}$ 及 $\sin\frac{A}{2}$ ノ値ハ各二ツヅヽアリ　即チ $\cos A$ ノ完全ナル解ハ $2n\times180^\circ\pm\alpha$ ナレバ

$\frac{A}{2}=n\times180^\circ\pm\frac{\alpha}{2}$ ニシテ正弦，餘弦共ニ二ツノ値ヲ有スレバナリ，コノ事ハ又圖上ニヨルモ明カナリ。

サレド A 自身ヲ與フルトキハ $\frac{A}{2}$ ハ一定ノ角ナルヲ以テ唯一ツノ値ノミ

2. $\sin A$ ヲ知リテ $\sin\frac{A}{2}$ 及 $\cos\frac{A}{2}$ ヲ求ムルコト

$$2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A\qquad \sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1$$

ナルニヨリ。

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A,\quad \left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2$$
$=1-\sin A$　故ニ $\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$

$$\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$$

コレヨリ　$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}$$

一七、分角ノ三角函數 其二

$\sin A$ ヲ與フルトキハ $\sin\frac{A}{2}$ 及 $\cos\frac{A}{2}$ ノ値ハ四ツアリ。$\sin A$ ノ完全ナル解ハ $A=2n\times180^\circ+\alpha$ 或ハ $A=(2n+1)\times180^\circ-\alpha$ ナルニヨリ。

$\frac{A}{2}=n\times180^\circ+\frac{\alpha}{2}$ 或ハ $\frac{A}{2}=n\times180^\circ+\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$

ナリ。而シテ此各ニ對シ正弦及餘弦ノ値ハ二ツヅヽアリ。

モシ A 自身ヲ與フルトキハ $\frac{A}{2}$ ハ一定ナルヲ以テ $\cos\frac{A}{2}$ 及 $\sin\frac{A}{2}$ 共ニ唯一ツノ値ヲ取ル。

而シテ $\sqrt{1+\sin A}$, $\sqrt{1-\sin A}$ ノ符號ノ定メ方ハ次ノ如クス。

$$\sqrt{1+\sin A}=\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\sqrt{2}\sin\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$$

$$\sqrt{1-\sin A}=\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=-\sqrt{2}\cos\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$$

故ニ $\sqrt{1+\sin A}$ ノ符號ハ $\sin\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$ ト同符號ヲ取リ $\sqrt{1-\sin A}$ ハ $\cos\left(45^\circ+\frac{A}{2}\right)$ ト異符號ヲ取ル。

3. $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$ ヨリ $\tan\frac{A}{2}$ ニ關シテ解キ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2 A}}{\tan A}$$ ヲ得。

$\tan A$ ヲ與フルトキハ $\tan\frac{A}{2}$ ノ値二ツアリ。

一八、分角ノ三角函數ノ問題

1. $\cos72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ヲ與ヘ之ニ依リテ三十六度ノ角ノ三角函數ヲ計算セヨ。 (34 東工)

2. $\tan150^\circ=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ知リテ $\tan75^\circ$ ヲ求ム。 (41 五高)

練習問題

1. $\cos315^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ヲ知リテ $157.^\circ5$ ノ正弦及餘弦ヲ求ム。 (37 海兵)

2. $A=120^\circ$ ナルトキ次ノ各式ニオケル符號ヲ定メヨ。

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

3. $A=240^\circ$ ナルトキ次式ニオケル符號ヲ定メヨ。

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$$

一八、分角ノ三角函數ノ問題(解)

1. $\cos72^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ 36°ノ函數ハ正ヲトル

$$\sin36^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos72^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\cos36^\circ=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$$

$$=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{4}$$

$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$ トシテトケバ

$\sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1$ トナル

故ニ $\cos36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

2. $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}$ ニヨリ

$$\tan75^\circ=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2150^\circ}}{\tan150^\circ}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{1+\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}\mp2$$

$\tan75^\circ$ ハ正ナレバ分子ノ $\mp$ ノ中+ヲトリテ

$\tan75^\circ=\sqrt{3}+2$

一九、恒等式其一

1. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$\cos65^\circ+\cos55^\circ+\cos175^\circ=0$ (40 仙醫)

2. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

$\sin2A\cos A+\cos4A\sin A=\sin3A\cos2A$

3. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

$4\sin A\sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)=\sin3A$

(35 札農)

4. $\sin3\theta+\sin2\theta+2\sin\dfrac{3}{2}\theta\cos\dfrac{\theta}{2}$ ヲ相乘積ノ形ニ直セ。

(36 商船)

5. 次ノ式ヲ證セヨ。

$\dfrac{\sin A+\sin nA+\sin(2n-1)A}{\cos A+\cos nA+\cos(2n-1)A}=\tan nA$ (41 臨醫)

練　習　問　題

1. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

$1+\cos6\theta-\cos10\theta-\cos4\theta$

$=4\sin2\theta\cos3\theta\sin5\theta$ (39 金醫)

2. $\sin(A-B)+\sin(B-C)+\sin(C-A)$

$=4\sin\dfrac{A-B}{2}\sin\dfrac{A-C}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}$ ヲ證明セヨ。

(37 海兵)

一九、恒等式(解)其一

1. $\cos 65^\circ+\cos 55^\circ+\cos 175^\circ$
$=\cos 65^\circ+\cos 175^\circ+\cos 55^\circ$
$=2\cos 55^\circ\cos 120^\circ+\cos 55^\circ$
$=\cos 55^\circ(2\cos 120^\circ+1)$
$=\cos 55^\circ(2\times(-\frac{1}{2})+1)=0$

2. $\sin 2A\cos A+\cos 4A\sin A$
$=\frac{1}{2}\{\sin 3A+\sin A+\sin 5A-\sin 3A\}$
$=\frac{1}{2}(\sin A+\sin 5A)=\frac{1}{2}(2\sin 3A\cos 2A)$
$=\sin 3A\cos 2A$

3. $4\sin A\sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)$
$=2\sin A\{\cos 2A-\cos 120^\circ)$
$=2\sin A(1-2\sin^2 A+\frac{1}{2})$
$=2\sin A(\frac{3}{2}-2\sin^2 A)=3\sin A-4\sin^3 A$
$=\sin 3A.$

4. $\sin 3\theta+\sin 2\theta+2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}$

$$=2\sin\frac{5}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{5}{2}\theta+\sin\frac{3}{2}\theta\right)$$
$$=4\cos\frac{\theta}{2}\sin 2\theta\cos\theta$$

5. $\dfrac{\sin A+\sin nA+\sin(2n-1)A}{\cos A+\cos nA+\cos(2n-1)A}$

$$=\frac{\sin nA+2\sin nA\cos(n-1)A}{\cos nA+2\cos nA\cos(n-1)A}$$
$$=\frac{\sin nA(1+2\cos(n-1)A)}{\cos nA(1+2\cos(n-1)A)}=\tan nA.$$

一九、恒等式其二

1. 次ノ恒等式ヲ證セヨ。

$$\frac{\sin 3A-\sin 2A}{\sin 3A+\sin 2A}=\tan\frac{5A}{2}\cot\frac{A}{2}$$ (39 水産)

2. 次ノ恒等式ヲ證セヨ。

$$\cos\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

3. 次ノ恒等式ヲ證セヨ。

$$\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}=2$$ (38 陸士)(39 金醫)

4. 次ノ恒等式ヲ證セヨ。

$$\frac{\sin B+\sin 5B}{\cos B-\cos 5B}=\cot 2B$$

練　習　問　題

1. 次ギノ恒等式ヲ證明セヨ。

$$\cos\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

2. 次ギノ恒等式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\cos A-\cos 5A}{\sin A+\sin 5A}=\tan 2A$$

3. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

$\cos 5\theta-\cos 7\theta=2\sin 6\theta\sin\theta.$

一九、恒等式(解)其二

1. $$\frac{\sin 3A-\sin 2A}{\sin 3A+\sin 2A}=\frac{2\cos\frac{3A+2A}{2}\sin\frac{3A-2A}{2}}{2\sin\frac{3A+2A}{2}\cos\frac{3A-2A}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{5A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos\frac{5A}{2}\sin\frac{A}{2}}=\tan\frac{5A}{2}\cot\frac{A}{2}$$

2. $$\cos\alpha+\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\beta$$

$$=2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

3. $$\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}=\frac{\sin 3A\cos A-\cos 3A\sin A}{\sin A\cos A}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\{\sin(3A+A)+\sin(3A-A)\}-\frac{1}{2}\{\sin(3A+A)-\sin(3A-A)\}}{\sin A\cos A.}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin 2A+\frac{1}{2}\sin 2A}{\sin A\operatorname{co}A}=\frac{\sin 2A}{\frac{1}{2}\sin 2A}=2$$

4. $$\frac{\sin B+\sin 5B}{\cos B-\cos 5B}=\frac{2\sin\frac{B+5B}{2}\cos\frac{B-5B}{2}}{2\sin\frac{5B+B}{2}\sin\frac{5B-B}{2}}$$

$$=\frac{\cos(-2B)}{\sin 2B}=\frac{\cos 2B}{\sin 2B}=\cot 2B.$$

一九、恒等式其三

1. A, B, C ハ一ツノ三角形ノ角ナルトキ次ノ式ヲ證明スベシ。

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}$$ (36 東商)

2. $$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$ ナルコトヲ證明セヨ。

(37 商船)

3. 次式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

練習問題

1. A, B, C ハ一ツノ三角形ノ角ナルトキ次ノ式ヲ證明スベシ。

$$\frac{\sin B-\sin A}{\cos A-\cos B}=\cot\frac{A+B}{2}$$ (36 陸士)

2. 次式ヲ證明スベシ。

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$$

3. 下式ヲ證明スベシ。

$$\frac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}=\tan 2A$$ (35 商船)

一九、恒等式(解)其三

1. $$\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\times\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}$$

2. $$\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}=\frac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}$$

3. $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

一九、恒等式其四

1. $\sin(150°+A)+\sin(150°-A)$ ヲ簡約セヨ。

(33 一高)

2. $\tan(\alpha+60°)\tan(\alpha-60°)=\dfrac{1+2\cos2\alpha}{1-2\cos2\alpha}$ ヲ證明セヨ。

(33 二高)

3. 次式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

4. 次式ヲ證明セヨ。

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

練習問題

1. $\cot\theta-\tan\theta=2\cot2\theta$ ヲ證明セヨ。

2. $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\sin2\alpha+\sin2\beta)$

3. $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$ ヲ證明セヨ。

4. $\dfrac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$ ヲ證明セヨ。

一九、恒等式(解)其四

1. $\sin(150°+A)+\sin(150°-A)$

$=2\sin 150°\cos A$

$\because$ 公式 $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$=2\sin(180°-150°)\cos A \quad \because \sin\alpha=\sin(180°-\alpha)$

$=2\sin 30°\cos A$

$=2\times\frac{1}{2}\cos A=\cos A$

2. $\tan(\alpha+60°)\tan(\alpha-60°)$

$$=\frac{\sin(\alpha+60°)\cdot\sin(\alpha-60°)}{\cos(\alpha+60°)\ \cos(\alpha-60°)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{2\alpha+120°}{2}\sin\frac{2\alpha-120°}{2}}{2\cos\frac{2\alpha+120°}{2}\cos\frac{2\alpha-120°}{2}}$$

$$=\frac{\cos 120°+\cos 2\alpha}{\cos 120°-\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{-\cos(180°-120°)-\cos 2\alpha}{-\cos(180°-120°)+\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{-\cos 60-\cos 2\alpha}{-\cos 60+\cos 2\alpha}=\frac{-\frac{1}{2}-\cos 2\alpha}{-\frac{1}{2}+\cos 2\alpha}$$

$$=\frac{1+2\cos 2\alpha}{1-2\cos 2\alpha}.$$

3. $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

4. $$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

一九、恒等式其五

1. $\alpha=\frac{\pi}{17}$ ヲ與ヘテ $\frac{\cos 3\alpha\cos 13\alpha}{\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$ ノ値ヲ求ム。 (39 大醫)

2. 次ノ式ヲ證明セヨ。

$\cot A-\tan A=\cot 2A$ (38 陸士)

3. $\sec(45°+\alpha)\sec(45°-\alpha)=2\sec 2\alpha$ ナルコトヲ證明セヨ。 (31 一高)

4. 下ノ式ヲ證明セヨ。

$\frac{\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos 5\alpha+\cos}=\tan\alpha$ (31 海兵)

練習問題

1. $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}+\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ ヲ證明セヨ。

(32 東商)

2. $\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=-\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\tan\frac{\alpha-\beta}{2}$ ヲ證明セヨ。

3. $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\beta-\cos\alpha}=\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$ ヲ證明セヨ。

一九、恒等式(解)其五

1. $a=\dfrac{\pi}{17}$ $\quad\because 17a=\pi$

然ルニ公式 $\cos a=-\cos(\pi-a)$ ニヨリテ

$\cos 13a=-\cos(\pi-13a)=-\cos(17a-13a)=-\cos 4a$

又公式 $\cos\beta+\cos\alpha=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ニヨリテ

$$\cos 3a+\cos 5a=2\cos\frac{5a+3a}{2}\cos\frac{5a-3a}{2}=2\cos 4a\cos a$$

$$\therefore\ \frac{\cos a\cos 13a}{\cos 3a+\cos 5a}=\frac{\cos a(-\cos 4a)}{2\cos 4a\cos a}=-\frac{1}{2}$$

2. $\cot A-\tan A=\dfrac{\cos A}{\sin A}-\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{\cos^2A-\sin^2A}{\sin A\cos A}$

$$=\frac{\cos 2A}{\frac{1}{2}2\sin A\cos A}=\frac{\cos 2A}{\frac{1}{2}\sin 2A}$$

$$=2\cot 2A$$

3. $\sec(45°+a)\sec(45°-a)=\dfrac{1}{\cos(45°+a)\cos(45°-a)}$

$$=\frac{1}{\cos\frac{90°+2a}{2}\cos\frac{90°-2a}{2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}2\cos\frac{90°+2a}{2}\cos\frac{90°-2a}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 2a+\cos 90°)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos 2a}=2\sec 2a$$

4. $$\frac{\sin 5a-\sin 3a}{\cos 5a+\cos 3a}=\frac{2\cos\frac{5a+3a}{2}\sin\frac{5a-3a}{2}}{2\cos\frac{3a+5a}{2}\cos\frac{3a-5a}{2}}$$

$$=\frac{\cos 4a\sin a}{\cos 4a\cos(-a)}=\frac{\sin a}{\cos a}=\tan a.$$

一九、恒等式其六

1. 下式ヲ證明スベシ。

$1+\tan a\tan\dfrac{a}{2}=\sec a$ (39 商船)

2. 下ノ恒等式ヲ證セヨ。

$$1+\tan(A+B)\tan(A-B)=\frac{1-2\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2A}$$

(37 札農)

練習問題

1. 下ノ恒等式ヲ證セヨ。

$\cot\theta-\tan\theta=2\cos 2\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta$

2. 下ノ恒等式ヲ證セヨ。

$\cot\theta+\tan\theta=2\cos 2\theta$

3. 下ノ恒等式ヲ證セヨ。

$\cot^2\theta-\tan^2\theta=\dfrac{4\cot 2\theta}{\sin 2\theta}$

4. 下ノ恒等式ヲ證セヨ。

$\dfrac{1-\tan^2(45°+A)}{1+\tan^2(45°-A)}=-\sin 2A.$

5. 下ノ恒等式ヲ證セヨ。

$\dfrac{1-\tan^2(45°-A)}{1+\tan^2(45°-A)}=\sin 2A,$ (36 札農)

一九、恒等式（解）其六

1. $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$

$$\therefore\ 1+\tan\alpha\tan\frac{\alpha}{2}=1+\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$=1+\frac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}+2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{1+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$$

2. $1+\tan(A+B)\tan(A-B)=1+\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$

$$=1+\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2\beta}$$

$$=\frac{\cos^2A-\sin^2\beta+\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$$

$$=\frac{1-2\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$$

一九、恒等式其七

1. $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan2A$ ヲ證明セヨ。

(34 海兵, 35 商船, 38 東高)

2. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$$ (36 大隊)

3. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$ ナルバ

$\tan\dfrac{1}{2}\theta=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{1}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

(40 商船)

練習問題

1. 二次方程式 $x^2-2px+q^2=0$ ニ於テ

$p=\dfrac{1}{2}\sec\theta$　$q=\dfrac{1}{2}\tan\theta$ ナルトキ

其兩根ハ $\dfrac{1}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$　$\dfrac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

(39 名工)

2. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ ナレバ

$\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\tan\dfrac{1}{2}(\alpha-\beta)\ \tan\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$ (41 商船)

一九、恒等式(解)其七

1. $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)$

$$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}-\frac{1-\tan A}{1+\tan A}=\frac{(1+\tan A)^2-(1-\tan A)^2}{1-\tan^2 A}$$

$$=\frac{4\tan A}{1-\tan^2 A}$$

而シテ $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

故ニ $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan 2A$

2. $$\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}-\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin B}{\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)}=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$$

3. $\cos\theta=\dfrac{\cos\alpha-e}{1-e\cos\alpha}$ トスレバ

$$1+\cos\theta=\frac{(1-e)(1+\cos\alpha)}{1-e\cos\alpha}\quad 1-\cos\theta=\frac{(1+e)(1-\cos\alpha)}{1-e\cos\alpha}$$

故ニ $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{(1+e((1-\cos\alpha)}{(1-e)(1+\cos\alpha)}$

$$=\frac{1+e}{1-e}\tan^2\alpha$$

故ニ $\tan\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\tan\dfrac{\alpha}{2}$

一九、恒等式其八

1. 若シ $A+B+C=2\pi$ ナルトキ次ノ式ヲ證セヨ

$\sin A+\sin B+\sin C$

$$=4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$$ (32 二高)

2. A, B, C ハ一ツノ三角形ノ角ナリ，次式ヲ證セ。

$$\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(37 商船及高師, 38 山商, 40 山商及水產, 41 千醫)

3. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキハ

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$ (34 大工)

4. A, B, C ガ一ツノ三角形ノ角ナルトキ下ノ式ヲ説明セヨ。

$$\cos A+\cos B+\cos C-1=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(40 仙工, 41 東大農, 41 千醫)

練習問題

1. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次ノ等式ヲ證セヨ。

$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C$

(40 陸士)

2. $A+B+C+D=360^\circ$ ナレバ次ノ式ヲ證セヨ。

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos D$

$$=4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$$ (41 八高)

一九、恒等式（解）其八

1. $\sin A+\sin B+\sin C=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$
$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$
$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$
$=2\sin\frac{A+B}{2}2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$
$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}$

2. $\sin A-\sin B+\sin C=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$
$=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$
$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)$
$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$
$=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}=4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$

3. $\sin2A+\sin2B+\sin2C=2\sin(A+B)\cos(A-B)$
$+2\sin C\cos C=2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B)$
$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$
$=2\sin C(2\sin A\sin B)=4\sin A\sin B\sin C$

4. $\cos A+\cos B+\cos C-1=\cos A+\cos B-\{\cos(A+B)+1\}$
$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos^2\frac{A+B}{2}$
$=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)$
$=2\sin\frac{C}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

一九、恒等式其九

1. A, B 及 C ヲ三角形ノ角トスルトキハ次ノ關係式アルコトヲ證セ。
$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

2. 三角形 ABC ニ於テ次ノ恒等式ヲ證明セヨ。
$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$
$=1+\sec A\sec B\sec C$ (41 盛農)

3. $A+B+C=180°$ ナルトキ，
$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$ ナルコトヲ證セ。 (41 大工)

練習問題

1. 三角形 ABC ニ於テ
$\tan\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\sec\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}=\tan\frac{B}{2}+\cos\frac{B}{2}\sec\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}$
(41 商船)

2. 三角形 ABC ニ於テ $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ ガ等差級數ヲナストキハ $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}=3$ ヲ證明セヨ。

3. $A+B+C=180°$ ナルトキ次ノ等式ヲ證セヨ。
$\frac{\sin A+\sin B-\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}$ (33 東高師)

一九、恒等式(解)其九

1. $\tan(A+B)=-\tan C=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

故ニ $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

故ニ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

別法 $\tan(A+B+C)$

$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

$\tan(A+B+C)=\tan 180^\circ=0$

故ニ $\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$

即チ $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

2. $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$

$$=\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}+\frac{\sin C\sin A}{\cos C\cos A}$$

$$=\frac{\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

然ルニ $\cos(A+B+C)=\cos 180^\circ=-1$

即チ $\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$
$-\sin B\sin C\cos A-\sin C\sin A\cos B=-1$

故ニ $\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B$
$=\cos A\cos B\cos C+1$

故ニ $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$

$$=\frac{\cos A\cos B\cos C+1}{\cos A\cos B\cos C}=1+\sec A\sec B\sec C$$

3. $\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)+\left(90^\circ-\dfrac{B}{2}\right)+\left(90^\circ-\dfrac{C}{2}\right)=180^\circ$ ナルニヨリコレヲ三角形ノ角ト考フレバ 1 ト同ジク

$\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$ ヲ得

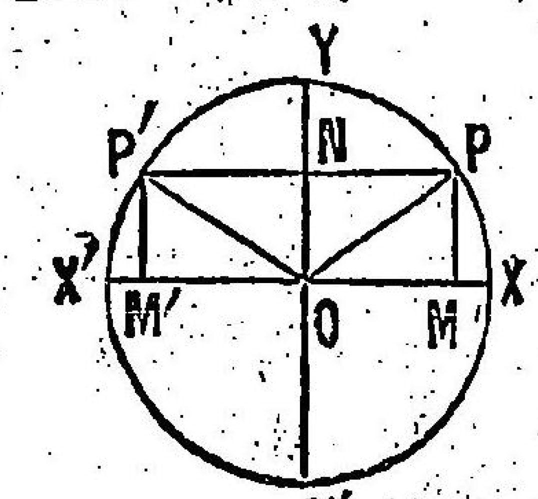
二〇、三角方程式其一

1. 三角方程式 トハ未知角ノ三角函數ヲ含ム方程式ヲ云フ 例ヘバ $\sin x=\dfrac{1}{2}$ ノ如シ

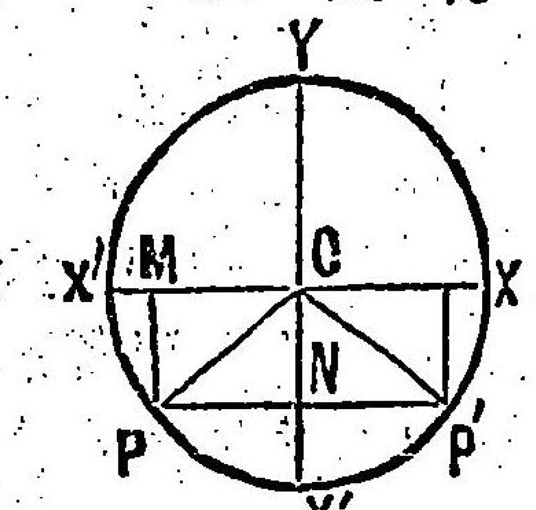
三角方程式ハ通常ノ代數方程式トハ其趣ヲ異ニシ上記ノ方程式ヲ解クハ sine ガ $\dfrac{1}{2}$ ナル角ヲ求ムルニアレバコレニ適スル x ノ値ハ幾ツモアリ。

30° ハ其中ノ一ツニ過ギズシテ此他 30° ニ 360° ノ倍數ヲ加ヘタルモノ及 $180^\circ-30^\circ=150^\circ$ 又ハコレニ 360° ノ倍數ヲ加ヘタルモノハ皆求ムル答ナリ。

2. $\sin x=a$ ノ完全ナル解 ($\operatorname{cosec} x=a$ モ之ニ倣フ)。



甲図



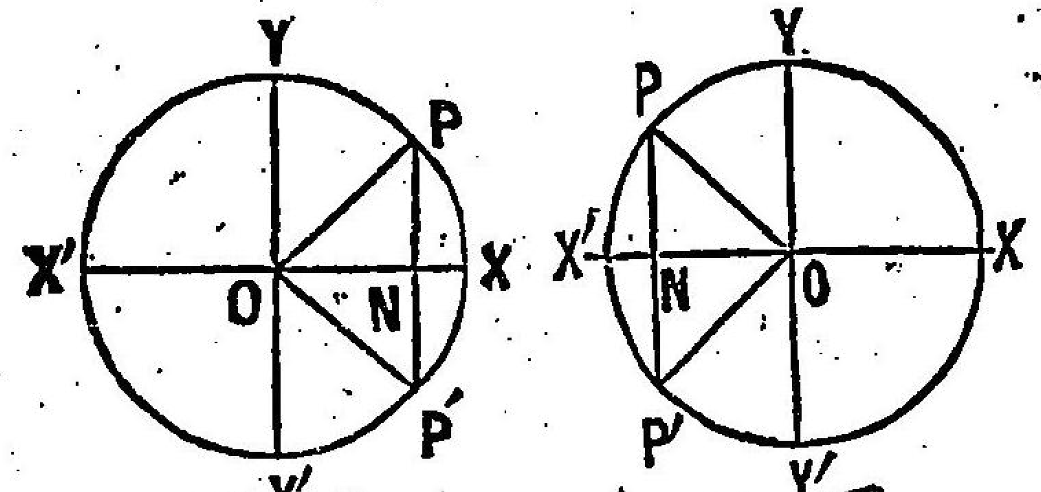
乙図

單位ノ長サヲ半徑トシテ圓 O ヲ畫キ互ニ垂直ナル二ツノ直徑 XX′, YY′ ヲ作リ ON ヲ a ノ長サニ等シク作リ (a ガ正ナラバ甲圖ノ如ク負ナラバ乙圖ノ如ク) N ヨリ XX′ ニ平行ニ PP′ ヲ作リ OP, OP′ ヲ結ベバコノ二ツハ sine ガ a ニ等シキ角ノ廻轉線 (OX ヲ基線トス) ノ位置ヲ示ス $\angle POX$ ヲ A トスレバ OP ノ位置ノ角ハ $2p\times180^\circ+A$, OP′ ノ位置ノ角ハ $2p\times180^\circ+(180^\circ-A)$ 即チ $(2p+1)\times180^\circ-A$ コノ二ツヲ合シテ $n\times180^\circ+(-1)^nA$ ヲ以ヲ表ハサルコレ $\sin x=a$ ノ完全ナル解ナリ。

二〇、三角方程式其二

3. $\cos x=a$ ノ完全ナル解 ($\sec x=a$ モ之ニ倣フ)

前記ノ如ク一ツノ圓ヲ畫キコレニ互ニ垂直ナル直徑XX′, YY′ヲ作リXX′上ニ



甲図　乙図

ON ヲ a ニ等シク作リ (a ガ正ナラバ甲圖ノ如ク負ナラバ乙圖ノ如ク) N ヲ過リ YY′ ニ平行ニ PP′ ヲ作リ OP OP′ ヲ結ベバ此兩線ヲ廻轉線 (OX ヲ基線トス) トスル角ハ cosine ガ a ナル角ナリ $\angle XOP=A$ トスレバ

OP ヲ廻轉線トスル角ハ $2n\times180^\circ+A$

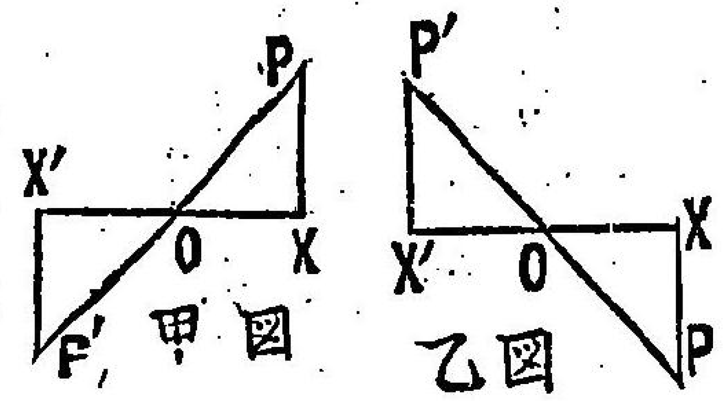
OP′ ヲ廻轉線トスル角ハ $2n\times180^\circ-A$

コレヲ合シテ $2n\times180^\circ\pm A$

コレ $\cos x=a$ ノ完全ナル解ナリ。

4. $\tan x=a$ ノ完全ナル解 ($\cot x=a$ モ之ニ倣フ)

XX′ ニオイテ垂線ヲ作リ PX, P′X′ ヲ共ニ a ノ長サニ等シク作ルトキハ OP,OP′ ハ tangent ガ a ナル角ノ廻轉線ノ



位置ナリ, OP ヲ廻轉線トスルモノハ $2p\times180^\circ+A$; OP′ ヲ廻轉線トスルモノハ $(2p+1)\times180^\circ+A$, 之ヲ合シテ $n\times180^\circ+A$ 之完全ナル解ナリ。

二一、三角方程式問題 其一

1. 0° ト 180° トノ間ニ於テ下ノ方程式ニ適スル x ノ總テノ値ヲ求メヨ。

$2\cos^2x+3\sin x=3$ (38 海機)

2. 下式ヲ解キテ θ ノ値ヲ求ムベシ。

$\sin^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$ (34 商船)

3. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$3\tan^2x-\sec^2x=1$ (33 實農)

4. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$\sin^2x+\cos2x=\cos x$ (39 海兵)

練習問題

1. $6\sin A+\mathrm{cosec}A=5$ ニ於テ角 A ヲ求ム。

($A=n\pi+(-1)^n30^\circ$ (33 東商)

又ハ $n\pi+(-1)^n x$

x ハ $\sin A=\frac{1}{3}$ ノ最小正角)

2. $5\sin x=\cos2x+2$ ナル方程式ニ適スル x ノ最小値ヲ求ム。 (35 大工)

(30°)

3. 次ノ式ニ適合スル θ ノ總テノ値ヲ求ム。

$\cos^2\theta=1$ (34 東工)

($n\times180^\circ$)

4. 790° ト 880° トノ間ニオイテ $\tan2\theta=\sqrt{3}$ ニ適フ θ ノ値如何。 (33 海機)

(140°)

二一、三角方程式ノ問題(解)其一

1. $2\cos^2 x+3\sin x=3$, $2(1-\sin^2 x)+3\sin x=3$
$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$
$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$　$\sin x=\frac{1}{2}$ 或ハ 1 一般ノ解ハ $n\times180^\circ+(-1)^n30^\circ$ 及 $n\times180^\circ+(-1)^n90^\circ$ ヨノ 0°—180° 間ノ角ハ　30°　150°　90°

2. 與式ヨリ　$1-\cos^2\theta-2\cos\theta+\frac{1}{4}=0$
$4\cos^2\theta+8\cos\theta-5=0$
$(2\cos\theta+5)(2\cos\theta-1)=0$
コレヨリ　$\cos\theta=-\frac{5}{2}$ 或ハ $\frac{1}{2}$
$\cos\theta<1$ ナルニヨリ $-\frac{5}{2}$ハ取ラズ
$\theta=2n\times180^\circ\pm60^\circ$

3. 與式ヨリ
$3\tan^2 x-(1+\tan^2 x)=1.$　$2\tan^2 x=2$
$\tan^2 x=1$　$\tan x=\pm1.$
$x=n\times180^\circ+45^\circ$ 或ハ $n\times180^\circ-45^\circ$
即チ $n\times180^\circ\pm45^\circ$

4. 與式ヨリ
$1-\cos^2 x+2\cos^2 x-1=\cos x$
$\cos^2 x-\cos x=0$, $\cos x(\cos x-1)=0$
$\cos x=0$ 又ハ 1
$x=2n\times180^\circ\pm90^\circ$ 又ハ $2n\times180^\circ$
即チ $n\times180^\circ+90^\circ$ 或ハ $2n\times180^\circ$

二一、三角方程式問題其二

1. $2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2$ ヲ解ケ。 (38 海兵)
2. $\sin 2x-\cos x=0$ ヨリ x ノ値ヲ求ム。
但シ x ハ 0° ヨリ 180° ノ間ニ在ルモノトス (33 陸士)
3. 次ノ方程式ニ適スル θ ノ値ヲ求ム。 (33 東工)
$\cos3\theta+8\cos^3\theta=0$
4. $3\tan\theta+\cot\theta=5\operatorname{cosec}\theta$ ヲ解ケ。 (36 盛農)

練習問題

1. $\cot\theta-\tan\theta=\sec\theta-\operatorname{cosec}\theta$ ヲ解ケ。 (38 商船)
$(90^\circ\times(4n-1)$　$180^\circ\times(2n+1)$　$180^\circ\times n+45^\circ)$
2. $\sin\theta+\sin2\theta+\sin3\theta=0$ ナル式ヲ滿足スル θ ノ値ヲ見出セ。 (39 山商)
$(90^\circ\times n,$　$180^\circ\times2n\pm120^\circ)$
3. $\cos\theta+\cos2\theta+\cos3\theta=0$ ニ適スル θ ノ正ニシテ 180° ヨリ小ナルモノヲ求メヨ。 (39 專檢)

二一、三角方程式ノ問題（解）其二

1. 與式ヨリ $2\sin^2\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta=2$

$\sin^2\theta+2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=1$

$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1=0$

$\sin^2\theta=1$ 或ハ $\frac{1}{2}$

$\sin\theta=\pm1$ 或ハ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

コレヨリ

$\theta=n\times180^\circ+(-1)^n90^\circ,\ n\times180^\circ+(-1)^n(-90^\circ)$

$n\times180^\circ+(-1)^n45^\circ\ \ n\times180^\circ+(-1)^n(-45^\circ)$

之ヲ合シテ $n\times180^\circ\pm90^\circ$ 及 $n\times180^\circ\pm45^\circ$

2. 與式ヨリ $2\sin x\cos x-\cos x=0$

コレヨリ $\cos x=0$ 或ハ $\sin x=\frac{1}{2}$

$x=2n\times180^\circ\pm90^\circ\ \ n\times180^\circ+(-1)^n30^\circ$

即チ x ハ 90° 30° 150°

3. 與式ヨリ $4\cos^3\theta-3\cos\theta+8\cos^3\theta=0$

$3\cos\theta(4\cos^2\theta-1)=0$

$\cos\theta=0$ 或ハ $\cos\theta=\pm\frac{1}{2}$

$\theta=2n\times180^\circ\pm90^\circ$ 或ハ $2n\times180^\circ\pm60^\circ$

及 $2n\times180^\circ\pm120^\circ$.

マトメテ $90^\circ\times(2n+1)$ 及 $n\times180^\circ\pm60^\circ$ ニテ可

4. 與式ヨリ $\frac{3\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin\theta}$

$\frac{3\sin^2\theta+\cos^2\theta-5\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=0$

$3\sin^2\theta+\cos^2\theta-5\cos\theta=0$

コレヨリ $2\cos^2\theta+5\cos\theta-3=0$

$\cos\theta=-3$ 或ハ $\frac{1}{2}$ -3 ハ捨テ $\theta=2n\times180^\circ\pm60^\circ$.

二一、三角方程式問題其三

1. $\cos\theta-\cos7\theta=\sin4\theta$ ヲ解ケ。 （40 專檢）

2. $\sin7\theta-\sin\theta=\sin3\theta$ ヲ解ケ。

3. 次ノ方程式ヲ解ケ。

$\cos(A+B)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(A-B)=\frac{1}{2}$

4. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ナル方程式ヲ満足スル 360° 以下ノ θ ノ値ヲ求ム。 （40 大工）

5. 次ノ二式ヨリ θ ヲ消去セヨ。

$a\sin\theta+b\cos\theta=c$

$b\sin\theta+a\cos\theta=d$ （32 海機）

練習問題

1. $\cos2\theta-\cos4\theta=\sin\theta$ ナル方程式ヲ解ケ。

$(n\times180^\circ,\ n\times60^\circ+(-1)^n10^\circ)$ （37 海兵）

2. $\sin A+\sin B=a,\ \cos A+\cos B=b$

$\cos(A-B)=c$ ヲ與ヘテ A 及 B ヲ消去セヨ （40 大工）

$(a^2+b^2=2+c)$

二一、三角方程式問題(解)其三

1. $\cos\theta-\cos7\theta=2\sin4\theta\sin3\theta$ ナルニヨリ與式ハ

$2\sin4\theta\sin3\theta=\sin4\theta$

$\sin4\theta=0$ 或ハ $\sin3\theta=\frac{1}{2}$

前者ヨリ $4\theta=n\times180^\circ$ $\theta=n\times45^\circ$

後者ヨリ $3\theta=n\times180^\circ+(-1)^n30^\circ$

$\theta=n\times60^\circ+(-1)^n10^\circ$

2. $\sin7\theta-\sin\theta=2\cos4\theta\sin3\theta$ ナレバ與式ハ

$2\cos4\theta\sin3\theta=\sin3\theta$

コレヨリ $\sin3\theta=0$ 或ハ $\cos4\theta=\frac{1}{2}$

$\theta=n\times60^\circ$ 或ハ $n\times90^\circ\pm15^\circ$

3. $\cos(A+B)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリ $A+B=45^\circ$

$\sin(A-B)=\frac{1}{2}$ ヨリ $A-B=30^\circ$

依テ $A=37.5^\circ$ $B=7.5^\circ$

4. $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヨリ $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=\frac{1}{2}$

即チ $\cos45^\circ\sin\theta+\sin45^\circ\cos\theta=\sin60^\circ$

即チ $\sin(45^\circ+A)=\sin60^\circ$

$45^\circ+\theta=n\times180^\circ+(-1)^n60^\circ$

$\theta=n\times180^\circ+(-1)^n60^\circ-45^\circ$, 15°, 75°

5. 二ツノ方程式ヨリ $\sin\theta$ $\cos\theta$ ヲ未知數トシテ解ケバ

$\sin\theta=\frac{ac-bd}{a^2-b^2}$ $\cos\theta=\frac{bc-ad}{a^2-b^2}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ ナルニヨリ

$\frac{(ac-bd)^2}{(a^2-b^2)^2}+\frac{(bc-ad)^2}{(a^2-b^2)^2}=1$

二二、對數ノ性質其一

1. 對數ノ意義 $a^x=y$ 之チ $\log_a y=x$ ト記スルトキ x チ a チ底トシタル y ノ對數ト云フ，即チ與ヘラレタル數ノ對數トハ其數ニ等シカラシムルタメニ底チ羃スベキ指數チ云フ

例ヘバ $3^5=243$ ナルニヨリ 3 チ底トシタル 243 ノ對數ハ 5 ナリト云フ。

2. 對數ノ性質 (1) 底ノ何タルニ拘ラズ 1 ノ對數ハ零ナリ

何トナレバ a^0 ハ a ノ値ノ如何ニ關セズ常ニ 1 ナレバナリ。

(2) 底自身ノ對數ハ 1 ナリ

何トナレバ $a^1=a$ ナレバナリ。

(3) 積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シ

$\log_a m=x$ $\log_a n=y$ トスレバ

$m=a^x$ $n=a^y$

故ニ $mn=a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

依テ $\log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$

(4) 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數チ減ジタルモノニ等シ

$\log_a m=x$ $\log_a n=y$ トスレバ

$m=a^x$ $n=a^y$

故ニ $\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

依テ $\log_a\frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n$

二二、對數ノ性質其二

(5) 或數ノ羃ノ對數ハ其數ノ對數ニ羃ノ指數ヲ乗ジタルモノニ等シ

$\log_a m=x$ トスレバ

$a^x=m$

故ニ $m^p=(a^x)^p=a^{px}$

依テ $\log_a m^p=px=p\log_a m$

(6) 底ヲ異ニシタル同一ノ數ノ對數ノ關係

$\log_a m=x \quad \log_b m=y$ トスレバ

$m=a^x=b^y$

即チ $a^x=b^y$

依テ $a^{\frac{x}{y}}=b \quad b^{\frac{y}{x}}=a$

故ニ $\frac{x}{y}=\log_a b \quad \frac{y}{x}=\log_b a$

依テ $y=x\log_b a=\frac{x}{\log_a b}$

(注意) 之ヨリ又 $\log_b a\times\log_a b=1$ ナルコトヲ知ル。

3. 〔對數ノ種類〕數學上用フル對數ニ自然對數（或ハネピール對數）ト常用對數トノ二種アリテ前者ハ理論上ニ用ヒラレ後者ハ實用ニ供セラル

自然對數ノ底ハ無限對數 $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}$ ……ノ和即チ 2.71828……ニシテ通常 e ヲ以テ之ヲ示ス

常用對數ノ底ハ 10 ナリ

二三、常用對數其一

1. $10^0=1 \quad 10^1=10 \quad 10^2=100$

$10^3=1000$…… ナルニヨリ

$\log_{10}1=0 \quad \log_{10}10=1 \quad \log_{10}100=2 \quad \log_{10}1000=3$……

常用對數ノ底ナル 10 ハ書カザルヲ通常トス

又 $0.1=\frac{1}{10}=10^{-1} \quad 0.01=10^{-2}$……

故ニ $\log 0.1=-1 \quad \log 0.01=-2$

2. 同一ノ數字ヨリ成リテ單ニ小數點ノ位置ノミ異ル數ノ對數ハ唯整數ニオイテ差アルノミナリ

何トナレバ一ツノ數ヲ N トスレバコレト位ノミヲ異ニスル數ハ N ニ 10 ノ羃ヲ乗除シタルモノニ等シキニヨリ

$\log N\times10^p=\log N+\log 10^p=\log N+p$

$\log\frac{N}{10^p}=\log N-\log 10^p=\log N-p$

例ヘバ $\log 4.215=0.62480$ ニシテ $\log 421.5$

$=\log 4.215+\log 100=2+0.62480$

$\log .04215=\log 4.215-\log 100=0.62480-2$

3. 假數及指標，上記ノ性質ヲ利用シテ負數トナルベキ場合ニモ小數部分ハ常ニ正トシテ之ヲ記ス例ヘバ $0.62480-2=-1.37520$ トナルベキヲ $\overline{2}.62480$ ト記ス凡テ對數ノ整數部分（負トナルトキハ上記ノ如クシ）ヲ指標ト云ヒ小數部分ヲ假數ト云フ。

二三、常用對數其二

4. 與ヘラレタル數ノ指標ハ視察ニヨリテ直チニ求ムルコトヲ得

n 桁ノ整數ハ 10^n ヨリ小ニシテ 10^{n-1} ヨリ大ナル數ナレバ

或數ノ對數ノ指標ハ其整數部分ノ桁數ヨリ 1 丈小ナリ

小數ニオイテハ小數點以下零ノ數ガ n アリテ初メテ有效數字ノアル數ハ $10^{-(n+1)}$ ト 10^{-n} トノ間ノ數ニシテ其對數ハ $-(n+1)+$ 正ノ小數 ナルガ故ニ小數ノ對數ノ指標ハ小數點以下初メテ有効數字ノアルマデノ零ノ數ヨリ 1 多キ負數ナリ

逆ニ對數ノ指標ヲ知リテ直チニ本數ノ桁數ヲ知リ得ベシ

5. 對數表。數多ノ數ノ對數ノ近似値ヲ小數點以下或位マデ計算（以下ハ四捨五入）之ヲ表ニ作リタルモノヲ對數表ト云フ

對數ノ指標ハ直チニ求メ得ベキニヨリ對數表ニハ假數ノミニテ指標ハ揭ゲズ

表中ニアル假數ノ桁數ニヨリテ名ヲ付ケ五桁ノ對數，七桁ノ對數表等ノ名アリ。

6. 表中ニアル數ノ對數ヲ求ムルコト

例 485.4 ノ對數ヲ求ム

表ヨリ $\log 4.854=0.68610$

$\log 485.4$ ノ指標ハ 2 ナリ

故ニ $\log 485.4=2.68610$

二三、常用對數其三

7. 表中ニアル對數ニ對スル數ヲ求ムルコト

例 對數ガ $\bar{1}.65437$ ナル數ヲ求ム

表ヨリ假數ガ .65437 ナル數ハ 4512 ナルコトヲ知リ指標ハ $\bar{1}$ ナレバ求ムル數ハ 0.4512 ナリ

8. 表中ニナキ數ノ對數ヲ求ムルコト

例 $\log 48.543$ ヲ求ム

差ガ小ナルトキハ數ノ差ハ其對數ノ差ニ比例スルモノナルニヨリ

$\log 48.54=1.68610$

$\log 48.55=1.68619$

ニオイテ數ノ差ハ .01 ニシテ其對數ノ差ハ .00009 ナレバ $\log 48.543$ ガ $\log 48.54$ ヨリ大ナル數ハ次ノ比例ニヨリテ求ムルコトヲ得

$.01 : 0.003=.00009 : x$

$$x=\frac{.003\times.00009}{.01}=0.000027$$

故ニ $\log 48.543=1.68610+.000027=1.68613$ ナルコトヲ知ル. 對數表ニハ比例部分 ($p.p$) ナル部分アリテ上記ノ計算ヲ一々スルコトヲ避ケ相隣ル二數ノ對數ノ差（對數ノ末位ヲ一位ト見做シ）ニ .1 .2 .3 .4...... .9 ヲ乘ジタル積ヲ記シタル部分アリテ直チニ計算スルコトヲ得ベシ。

二三、常用對數 其四

9. 表中ニナキ對數ニ對スル數ヲ求ムルコト

例 log ガ 4.55294 ナル數ヲ求ム

表中ニオイテ最近ク此假數ヲ夾ム二ツノ對數ニ對スル數ヲ求ムルニ

$$\begin{array}{rl} \log 3.572 = 0.55291 \\ \underline{\log 3.573 = 0.55303} \\ .001 \quad .00012 \end{array}$$

$$55294 - .55291 = 0.00003$$

依テ次ノ比例ヲ得

$$12 : 3 = .001 : x$$

$$x = .00025$$

$$3.572 + .00025 = 3.57225$$

故ニ求ムル數ハ 35723 トス

此場合ニモ比例部分ヲ應用スルコトヲ得 即チ p.p ニオイテ 12 ト記シアル所ニテ差 3 ニ最モ近キ數 3.6 ノ左側ノ數字 3（此位ハ表ノ數ノ終リノ桁ヲ十位ト見做シタル數ナリ）ヲ加フレバ可ナリ

二四、三角函數ノ對數

三角函數ノ對數表 正弦及餘弦ハ常ニ1ヨリ小ナルヲ以テ此等ノ對數ノ指標ハ負數ナリ

然レドモ負數ヲサクルタメニ三角函數ノ對數ニハ10ヲ加ヘタルモノヲ記スヲ通常トス

例ヘバ sin15°40′ ノ對數ハ $\bar{1}.43143$ ナレドモ 9.43143 トアリ，故ニカヽル表ヲ用フルニ當ツテハ 10 ヲ減ズルヲ要ス，但シ其對數ノ後ニ −10 ヲ附記スレバ足レリ，モシ −10 ヲ附記セザルトキハ log トカクベキ代リニ L ト書ス

比例部分ノ用法等數ノ對數ノ場合ヨリ類推スルコトヲ得レドモ次ニ注意スベキ二三ノ點ヲ述ベン

（イ） 正弦及正切ハ角ノ增スニツレテ增加スルモノナレバ此等ノ對數ヲ求ムル時表中ニ其數ナキトキハ之ヲ夾ム二角ノ中小ナル角ノ對數ニ比例部分ヲ加フベシ。

（ロ） 餘弦及餘切ハ角ノ增加スルニ從ヒ減小スルモノナレバ此等ノ對數ヲ求ムルニハ之ヲ夾ム二角ノ中小ナル角ノ餘弦及餘切ヨリ比例部分ヲ減ズベシ

對數ヨリ角ヲ求ムル場合モ推シテ知ルベシ

例 Lsin25°34′45″ ヲ求ム

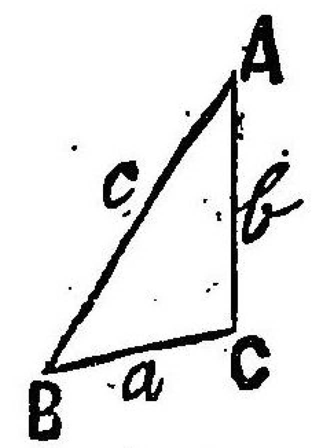
$$\begin{array}{rr} L\sin 25^\circ 34' = & 9.63504 \\ 40'' = & 18 \\ 5'' = & 2.2 \\ \hline L\sin 25^\circ 34' 45'' = & 9.63524. \end{array}$$

二五、對數表ニヨル直角三角形解法

1. ABC ヲ直角三角形（C ヲ直角トス）トシ a, b, c ヲ角 A, B, C ノ對邊トス，a, b ヲ與ヘテ角 A, B 及邊 c ヲ求ムルコト

$\tan A=\dfrac{a}{b}$ ナルニヨリ

$\log \tan A=\log a-\log b$



コレヨリ A ヲ求ムルコトヲ得

A ヲ求ムレバ B=90°−A ヨリ B ヲ得ベシ

$c^2=a^2+b^2$ ヨリ c ヲ求ムルコトヲ得レドモ次ノ如クスルヲ便トス

$\dfrac{a}{c}=\sin A$ ナルニヨリ

$\log c=\log a-\log \sin A$

2. 斜邊 c 及他ノ一ツノ邊 a ヲ與ヘテ他ノ邊ヲ求ムルコト

$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$ ナレバ

$\log b=\dfrac{1}{2}\{\log(c+a)+\log(c-a)\}$

3. 一角 A 及一邊 b ヲ與ヘテ他ノ一邊ヲ求ムルコト

$c=\dfrac{b}{\cos A}$ ナレバ

$\log c=\log b-\log\cos A$

ヨリ c ヲ求メ得ベシ

二六、三角形ノ角ト邊トノ關係 其一

1. 角及邊ノ表ハシ方

三角形ノ三ツノ角ヲソレゾレ A, B, C トスレバ之ニ對スル邊ハソレゾレ a, b, c トスルヲ通常トス。

2. 三角形ノ角ノ三角函數ノ正負

A+B+C=180° ナレバ何レノ角モ 0° ト 180° トノ間ノ角ナリ，從ツテ

正弦ハ常ニ正ニシテ正弦ヲ與フルトキハソレニ適スル角ハ二ツアリ

餘弦及正切ハ正或ハ負ニシテ此等ヲ與フルトキハソレニ適スル角ハ唯一ツナリ。

又一ツノ角ノ半分ハイヅレモ 0° ト 90° トノ間ノ角ナレバ此等ノ三角函數ハ皆正ニシテ其三角函數ヲ與フルトキハソレニ適スル角ハ唯一ツナリ。

又三角函數ノ性質ニヨリ三角形ノ角ノ三角函數ニオイテハ次ノ如キ關係式アリ

A+B+C=180° ナルニヨリ

$\sin(A+B+C)=0,\ \cos(A+B+C)=-1$

$\sin\dfrac{A+B+C}{2}=1 \quad \cos\dfrac{A+B+C}{2}=0$

互ニ補角又ハ餘角ナル角ノ三角函數ノ關係ニヨリ

$\sin(A+B)=\sin C \quad \cos(A+B)=-\cos C$

$\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2} \quad \cos\dfrac{A+B}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$

直角三角形ニオイテハ

$\sin A=\cos B \quad \sin B=\cos A$

二六、三角形ノ角ト邊トノ關係 其二

1. $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

即チ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

2. $a=b\cos C+c\cos B$

(同様ニ $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$)

3. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(同様ニ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$)

以上ノ三ツハ互ニ他ノ關係ヨリ推定スルコトヲ得

4. 3ヨリ

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

5. $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, $\sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}$

$\sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$ $\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

6. $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$, $\cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}}$

$\cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

7. $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

$\tan\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

以上 1 ヨリ 6 マデハ別ニ問題トシテ證明セン 7 ハ 5 ト 6 トヨリ直チニ知リ得ベシ。

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題 其一

1. 三角形ニオイテ下式ヲ證スベシ

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

(32 二高, 33 東工, 33 海機, 33 農實, 34 海兵 37 農實, 37 商船)

2. 如何ナル三角形ニテモ次ノ關係アルコトヲ證セヨ

$a=b\cos C+c\cos B$

(32 二高, 34 陸士, 39 商船)

3. A, B, C ハ三角形ノ三ツノ角ナリ, 然ルトキハ,

$\sin A+\sin B>\sin C$ ナルコトヲ證明セヨ。

(34 陸士, 36 大工)

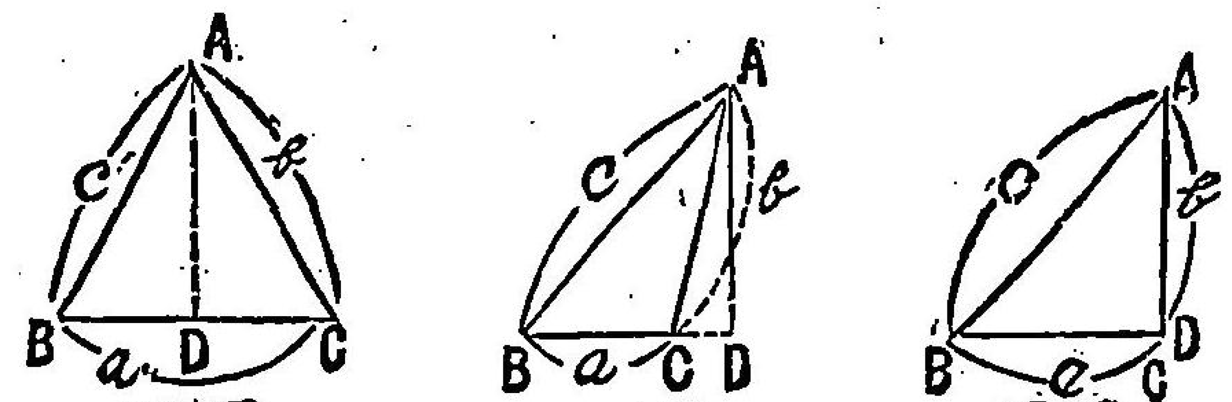
練 習 問 題

三角形 ABC ニ於テ若シ $A=2B$ ナラバ

$a=2b\cos B$ ナリコノ證明如何 (35 專檢)

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題
(解) 其一

1.



甲図　　乙図　　丙図

(甲圖) $AD=p$ トスレバ

$p=c\sin B \quad p=b\sin C$

故ニ $c\sin B=b\sin C$ 依テ $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$

(乙圖) $p=c\sin B$ 又 $p=b\sin ACD=b\sin C$

故ニ $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

(丙圖) $b=c\sin B$ 故ニ $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

$(\sin C=\sin 90^\circ=1)$

同様ニシテ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ ヲ得

故ニ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

2. (甲圖) $a=BD+DC=c\cos B+b\cos C$

(乙圖) $a=BD-DC=c\cos B-b\cos ACD$

$=c\cos B-b\cos(180^\circ-C)=c\cos B+b\cos C$

(丙圖) $a=c\cos B=c\cos B+b\cos C$

$(\cos C=\cos 90^\circ=0)$

同様ニ $b=c\cos A+a\cos C,\ c=a\cos B+b\cos A$

3. 1 ヨリ $\dfrac{a+b}{\sin A+\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ ニシテ $a+b>c$ ナレバナリ。

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題
其二

1. $\left.\begin{array}{l} a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \end{array}\right\}$ ヲ證明セヨ。

(39 商船, 39 山商)

2. $\left.\begin{array}{l} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}} \\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{array}\right\}$ ヲ證明セヨ。

(31 東商, 33 陸士)

3. $\left.\begin{array}{l} \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} \\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ca}} \\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}} \end{array}\right\}$ ヲ證明セヨ。

(32 一高, 33 外國, 39 商船)

練　習　問　題

1. $a=b\cos C+c\cos B,\quad b=c\cos A+a\cos C$

$c=a\cos B+b\cos A$ ヨリ 1 ノ式ヲ證明セヨ。

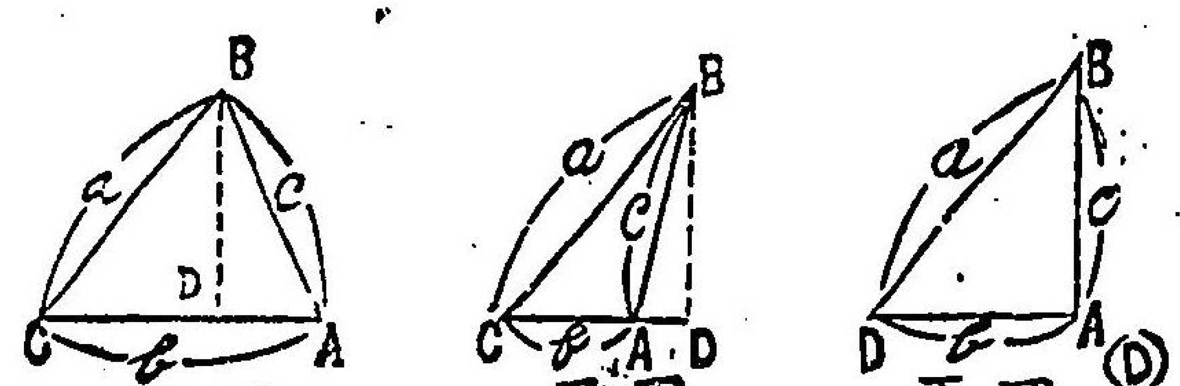
(此三式ニソレゾレ $a,\ -b,\ -c$ ヲ邊々ニ乘シテ相加フレバ得ベシ)

2. $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ ヨリ 1 ノ式ヲ證明セヨ

$\left(\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A}{2\sin B\sin C}\right.$ ヨリ得$\Big)$

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題
(解) 其二

1.



甲図　　乙図　　丙図

(甲圖) 幾何學ノ證明スル所ニヨレバ

$a^2=b^2+c^2-2b\mathrm{AD}=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

(乙圖) $a^2=b^2+c^2+2b.\mathrm{AD}$

$=b^2+c^2+2bc\cos\mathrm{BAD}=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

(丙圖) $a^2=b^2+c^2=b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}$

$(\cos\mathrm{A}=\cos 90^\circ=0)$

同様ニ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\mathrm{B}$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\mathrm{C}$.

2. 1 ヨリ $\cos\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ナルニヨリ $2\sin^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}$

$=1-\cos\mathrm{A}=1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$

$=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$

$\sin^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$

$\sin\dfrac{\mathrm{A}}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-b)}{bc}}\quad\left(s=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

同様ニ $\sin\dfrac{\mathrm{B}}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-c)(s-a)}{ca}}\sin\dfrac{\mathrm{C}}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

3. $2\cos^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}=1+\cos\mathrm{A}=1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b}$ ヨリ證明シ得ベシ。

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題
其三

1. $\sin\mathrm{A}=\dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ナルコト及

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\mathrm{S}$ トスレバ

$\dfrac{\sin\mathrm{A}}{a}=\dfrac{\sin\mathrm{B}}{b}=\dfrac{\sin\mathrm{C}}{c}=\dfrac{2\mathrm{S}}{abc}$ ナルコトヲ證セヨ。

2. $\dfrac{a-b}{a+b}=\dfrac{\tan\dfrac{\mathrm{A-B}}{2}}{\tan\dfrac{\mathrm{A+B}}{2}}$ ヲ證明セヨ。

3. $\tan\dfrac{\mathrm{A-B}}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}\cot\dfrac{\mathrm{C}}{2}$ ヲ證セヨ。

4. 三角形ノ三ツノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ a, b, c トスレバ

$(a+b)\sin\dfrac{\mathrm{C}}{2}=c\cos\dfrac{\mathrm{A-B}}{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

(41 二高)

練　習　問　題

1. 三角形 ABC ニ於テ A, B ヲ二角, a, b ヲ之ニ對スル二邊トスレバ, 次ノ關係アルコトヲ證セヨ。

$\dfrac{a+b}{a-b}=\tan\dfrac{\mathrm{A+B}}{2}\cot\dfrac{\mathrm{A-B}}{2}$

(35 東商, 38 名工, 41 三高)

2. 三角形 ABC ニオイテ $a\neq b$ ニシテ

$\tan\dfrac{\mathrm{A-B}}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$ ナル關係ヲ有スルトキ C ハ直角ナリ, 其證ヲ問フ。 (39 商船)

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題
(解) 其三

1. $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S$ トスレバ

$\sin A=\frac{2}{bc}S \qquad \frac{\sin A}{a}=\frac{2S}{abc}$

同様ニ $\frac{\sin B}{b}=\frac{2S}{abc},\ \frac{\sin C}{c}=\frac{2S}{abc}$

依テ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{2S}{abc}$

2. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ヨリ $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$

故ニ $\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$

$=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}$

3. $\tan\frac{A+B}{2}=\cot\frac{C}{2}$ 故ニ $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

4. $\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$

故ニ $(a+b)\sin\frac{C}{2}=c\cos\frac{A-B}{2}$

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題
其四

1. 三角形ニ於テ下ノ關係式ヲ證明セヨ。
$b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$ (36 商船, 37 商船)

2. 三角形ノ下式ヲ證明セヨ。
$\tan A=\frac{a\sin c}{b-a\cos c}$ (40 商船)

3. 三角形 ABC ニ於テ三ツノ角 A, B, C ニ對スル邊ヲ夫々 a, b, c トセバ $\frac{a-b}{c}=\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos C}$ ヲ證セヨ。 (40 專檢)

練習問題

1. 三角形ノ三ツノ角ヲ A, B, C トシ其對邊ヲ夫々 a, b, c トス $B=60^\circ$ ナルトキ
$\frac{a+c}{2b}=\sin(30^\circ+C)$ ナルコトヲ證明セヨ。
(38 大豫)

2. $\frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$ ヲ證明セヨ。
$\left(\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\right.$ ヨリ $\frac{2\sin A}{a}=\frac{b\cos B}{2\sin B\cos B}$
$\left.=\frac{b\cos B}{\sin 2B}\right)$

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題 (解) 其四

1. $b=c\cos A+a\cos C,\ c=a\cos B+b\cos A$ ナルニヨリ

$$
\begin{aligned}
b\cos B+c\cos C&=(c\cos A+a\cos C)\cos B\\
&\quad+(a\cos B+b\cos A)\cos C\\
&=c\cos A\cos B+a\cos C\cos B+a\cos B\cos C+b\cos A\cos C\\
&=2a\cos B\cos C+\cos A(c\cos B+b\cos C)\\
&=2a\cos B\cos C+a\cos A\\
&=a(2\cos B\cos C-\cos(B+C))\\
&=a(\cos B\cos C+\sin B\sin C)=a\cos(B-C)
\end{aligned}
$$

2. $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin C}{c}$ ヨリ $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}$ 又 $b=a\cos C+c\cos A$

ヨリ $c\cos A=b-a\cos C$

故ニ $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{a\sin C}{c\cos A}=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}$

3. $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$ ヨリ $\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin A-\sin B}{\sin C}$

$$
=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}
$$

$$
=\frac{\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\cos B-\cos A}{2\cos^2\frac{C}{2}}=\frac{\cos B-\cos A}{1+\cos A}
$$

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題 其五

1. A, B, C, a, b, c ハ一ツノ三角形ノ角及邊ナリ，然ルトキハ $\dfrac{a^2}{b^2-c^2}=\dfrac{\sin(B+C)}{\sin(B-C)}$ ナルコトヲ證セヨ。

(41 水産)

2. 三角形ノ三ツノ角ヲ A, B, C トシ其對邊ヲ a, b, c トスレバ次ノ關係アルコトヲ證セヨ

$$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$$

(33 二高, 37 商船)

3. 三角形ニ於テ次ノ關係ヲ證明スベシ

$$\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$ (37 農實)

練　習　問　題

1. 三角形ニ就テ下式ヲ證明スベシ

$$(a^2-b^2)\cot C+(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B=0$$

(38 商船)

2. ABCD ヲ圓ニ内接シ得ベキ四邊形トシ, $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ トスルトキハ

$$\cos B=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$ ナルコトヲ證セヨ。

(41 臨教)

3. 凸四角形ノ兩對角線ヲ d d' トシ其夾角ヲ α トスレバ其面積ハ $\dfrac{1}{2}dd'\sin\alpha$ ナルコトヲ證セヨ。

(31 二高)

二七、三角形ノ角ト邊トノ關係ノ問題 (解) 其五

1. $\frac{a^2}{b^2-c^2}=\frac{\sin^2A}{\sin^2B-\sin^2C}=\frac{\sin^2A}{\sin(B+C)\sin(B-C)}$

$=\frac{\sin^2A}{\sin A\sin(B-C)}=\frac{\sin A}{\sin(B-C)}=\frac{\sin(B+C)}{\sin(B-C)}$

2. $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ナルヲ以テ此値ヲ K トスレバ

$K=\frac{a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)}{\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)}$

$K\{\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)\}$

$=a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)$ 然ルニ

$\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)$

$=\sin^2B-\sin^2C+\sin^2C-\sin^2A+\sin^2A-\sin^2B=0$

故ニ $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$

3. $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}$

$=\frac{2bc\cos A}{2abc}+\frac{2ac\cos B}{2abc}+\frac{2ab\cos C}{2abc}$

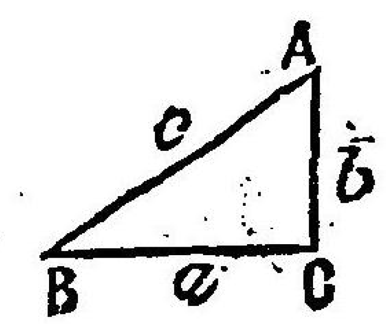
$=\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2abc}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

二八、直角三角形其一

1. 三角形ノ邊及ビ角ヲ三角形ノ元素ト云フ。
三個ノ元素ヲ知ルトキハ殘リノ元素ヲ求ムルコトヲ得, コレヲ三角形ヲ解クト云フ。

2. 次ギニ直角三角形ノ性質ヲ示サン



直角三角形ヲ ABC トシ三個ノ角ヲ各頂點ニ於ケル附號ヲ以テ表ハシ夫々 A, B, C トス。而シテ對邊ヲ夫々 a, b, c トシ C ヲ直角トス。

然ルトキハ次ギノ關係アリ。

$A+B=90^\circ$

$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B,\ \cos A=\frac{b}{c}=\sin B.$

$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B,\ \cot A=\frac{b}{a}=\tan B.$

$\sec A=\frac{c}{b}=\operatorname{cosec} B,\ \operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\sec B.$

$a=c\sin A=c\cos B=b\tan A=b\cot B.$

$b=c\cos A=c\sin B=a\cot A=a\tan B.$

$c=b\sec A=b\operatorname{cosec} B=a\operatorname{cosec} A=a\sec B.$

3. 直角三角形ヲ解クニ四ツノ場合アリ。

(一) 斜邊及ビ一銳角ヲ知ル場合

斜邊 C 及ビ一銳角 B ヲ知ルトキハ $A=90^\circ-B$ ヨリ A ヲ求メ而シテ

$a=c\sin A$, $b=c\cos A$ ニヨリテ a, b ヲ求メ得。

又 $a=c\cos B$, $b=c\sin A$ ニヨリテ a, b ヲ求メ得。

(二) 直角ノ一邊及ビ一銳角ヲ知ル場合

直角ノ一邊 b 及ビ銳角 B ヲ知ルトキハ $A=90^\circ-A$ ニヨリテ A ヲ求メ而シテ

$a=b\cot B$, $c=a\sec B$ ニヨリテ a, c ヲ求メ得

二八、直角三角形其二

（三）斜邊及ビ一邊ヲ知ル場合

斜邊 c 及ビ他ノ一邊 b ヲ知ルトキハ

$\sin B=\frac{b}{c}$, $A=90^\circ-B$, $a=c\sin A$ ニヨリテ

A, B, b ヲ求メ得。

（四）直角ノ二邊ヲ知ル場合

直角ノ二邊 a, b ヲ知ルトキハ

$\tan A=\frac{a}{b}$, $C=a\sec B$, $B=90^\circ-A$ ニヨリテ A, B, C ヲ求メ得。

4. 直角三角形ノ解キ方ヲ應用シテ高サ及ビ距離ノ測量ノ簡單ナル場合ヲ解キ得ベシ而シテ此ノ目的ニ對シテ測鎖，經緯儀，六分儀ナル三種ノ器械ヲ要ス。測鎖ハ距離ヲ測ルニ用ヒ經緯儀及ビ六分儀ハ角ヲ測ルニ用フ

次ギニ實用問題ニ於ケル重要ナル用語ヲアグ。

（一）一點ヲ過グル垂直線或ハ垂直面トハ此ノ點及ビ地球ノ中心ヲ過グル直線又ハ平面ヲ云フ。

（二）一點ヲ過グル水平線或ハ水平面トハ此ノ點ヲ過グル垂直線ト直角ニ交ハル直線又ハ平面ヲ云フ。

（三）或ル點ヲ觀測スルニ當リ其ノ點ト觀測器ノ中心トヲ結ビ付クル直線ガ觀測器ノ中心ヲ過グル水平面トナス角ヲ其點ガ水平面ヨリ上ニアルトキハ仰角又ハ高度ト云ヒ下ニアルトキハ俯角ト云フ。

（四）物體ノ距離或ハ高サヲ測量スルタメニ便宜上定メタル直線ヲ基線ト云フ。

二九、直角三角形ノ問題 其一

1. 直角三角形ノ一邊ノ長サヲ 1.25 尺トシ，其對角ノ大サヲ 30° トシテ他ノ二邊ノ長サヲ計算セヨ。 (34 海機)

2. 小丘アリ，其麓ヨリ頂上マデハ一町四十五間ニシテ麓ヲ望ミシニ俯角 (angle of depression) 三十度ナリト云フ，丘ノ高サ如何。 (32 海兵)

3. 一時間十哩ノ速力ヲ以テ東北ニ帆走ル汽船アリ，然ルトキハ一時間ニ幾哩ヅツ移動スルカ。 (33 農實)

練習問題

1. 一ツノ直線上ニ之ト A ナル角ヲナセル a 尺ノ直線ノ正射影ヲ作ルトキハ其長サ幾尺ナルカ。 (36 海兵)

2. 旗竿ノ影平地ニ於テ三十尺ニシテ大陽ノ高度 30° ナリ，竿ノ長サ如何，尺ノ小數ニ位マデ計算セヨ。 答 17.32 尺 (31 海兵)

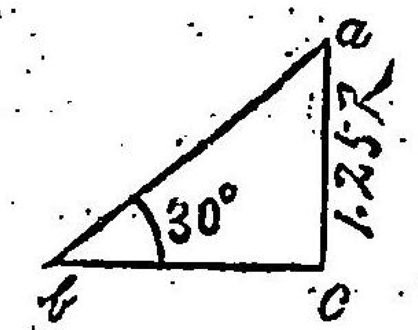
3. 五重ノ塔ヨリ基脚部ヲ去ルコト 500 尺ノ處ヨリ其頂上ヲ望メバ仰角 30° ナリトイフ，塔ノ高サ如何。 答 $\frac{500\sqrt{3}}{3}$ 尺 (32 美術)

4. 五重ノ塔ノ基脚ヨリ五十間ノ距離ニアル一點ヨリ仰角ヲ測リタルニ 30° ナルコトヲ知リ得タリ，塔ノ高サハ如何。 答 $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ (35 美術)

5. 直角ニ交ハル甲乙兩直線アリ，長サ a 尺ノ直線ガ甲トナス角ヲ 30° トス，甲乙兩直線上ニ於ケル此直線ノ正射影ノ長サヲ求ム。 (38 海兵)

答 $\frac{a}{2}$ 尺，$\frac{\sqrt{3}a}{2}$ 尺

二九、直角三角形ノ問題（解）其一

1. 

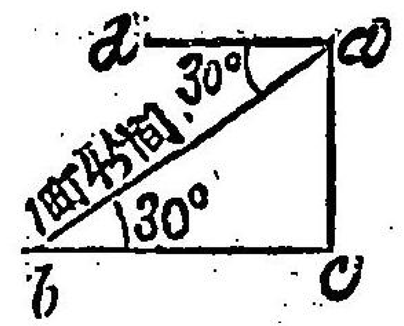
直角三角形ヲ abc トシ，一邊 ac ノ長サヲ 1.25 尺トシ，其ノ對角 abc ヲ 30° トス。
然ルトキハ

$$\tan 30=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{ac}{bc}=\frac{1.25}{bc}$$

$\therefore\ bc=1.25\times\sqrt{3}=1.25\times1.7321=2.17$ 弱　又

$$\sin30=\frac{1}{2}=\frac{ac}{ba}=\frac{1.25}{ab}$$

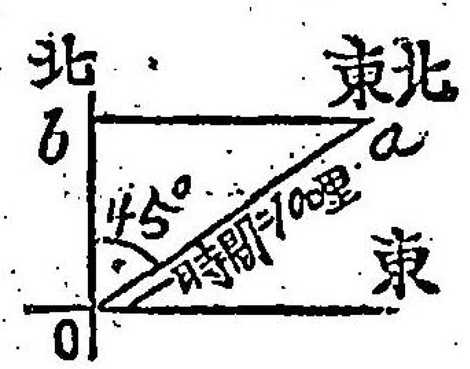
$\therefore\ ab=1.25\times2=2{\cdot}5.$

2. 

小丘ノ頂ノ點ヲ a トシ，麓ノ點ヲ b トス。a ヨリ垂直線ヲ下ダシ b ヨリ ab 及ビ今下セル垂直線トノナス平面内ニテ水平線ヲ引キ交點ヲ c トスレバ直角三角形 abc ヲ得。
今 a 點ニ於テ同上ノ平面内ニテ水平線 ad ヲ作レバ dab ハ俯角ニシテ 30° ナリ。故ニ直角三角形ノ abc 角ハ 30° ナリ。

$$\therefore\quad \sin30=\frac{ac}{ab}=\frac{ac}{1\text{町}45\text{間}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad ac=\frac{1\text{町}45\text{間}}{2}=30^{\text{間}}+22.5^{\text{間}}=52^{\text{間}}3\text{ 尺}$$

3. 

今汽船ガ 0 點ヲ發シ一時間ノ後ニ a ニ達シタリトスレバ $0a$ ハ十哩ニシテ，0 ヨリ北方ニ移レル距離ハ $0b$ ナリ。汽船ハ北東ニ進ミタルヲ以テ $a0b$ 角ハ 45° ナリ。

$$\therefore\quad 0b=10\times\cos45=10\times\frac{1}{\sqrt{2}}=7.06\text{ 哩}$$

二九、直角三角形問題 其二

1. 塔ノ基脚ヲ距ルコト 250 尺ノ地ニ於テ塔ノ項ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得タリト云フ其塔ノ高サ幾尺ナルカ。

2. 某所ニ於テ山ノ高度ヲ測リテ 60° ヲ得，更ニ其山上ニ聳エタル 100 尺ノ塔ノ高度ヲ測リテ 75° ヲ得ルトキハ，山ノ高サハ幾何，但シ $\tan75=2+\sqrt{3}$
（34 商船）

3. 高サ 100 尺ノ山上ニ直立セル塔アリ山ノ麓ノ一點ヨリ塔ノ項キ及ビ底ヲ觀測セシニ 60° 及ビ 45° ヲ得タリ塔ノ高サハ幾何。

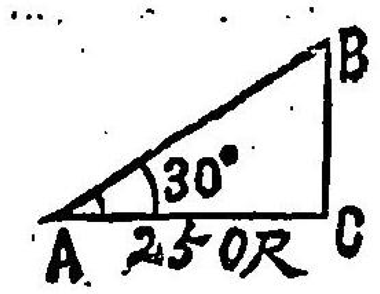
注意　第一　問題ハ直立セル物ノ基ニ達シ得ルトキ其ノ物ノ高サヲ測定スル一般ノ方法。
第二　問題ハ山上等ニ直立セル物體ノ高サヲ知リテ山ノ高サヲ測定スル一般ノ方法。
第三　問題ハ山ノ高サヲ知リ其山上ニ立テル塔等ノ高サヲ測ル一般ノ方法。
以上ノ方法ハ其應用廣ケレバ解法ヲ充分ニ了解スルヲ要ス。

練習問題

1. 某立木ヨリ 50 尺ノ距離ニ於テ其項ノ仰角ヲ測リ 30° ヲ得タリト云フ其木ノ高サ幾尺。
2. 長サ 10 尺ノ旗竿アリテ屋上ニ直立ス之レヲ家ノ基ト同一平面上ノ一點ニテ觀測シテ竿足ノ仰角 60°，竿頭ノ仰角 75° ヲ得タリト云フ此ノ家ノ高サ幾尺。
3. 高サ 30 尺ノ屋上ニ垂直ニ立テル旗竿アリ之レヲ家ノ基ト同水平面上ノ一點ニテ觀測シテ竿足ノ仰角 60° 竿頭ノ仰角 75° ヲ得タリト云フ此ノ旗竿ノ長サ幾尺。

二九、直角三角形問問（解）其二

1\.



BC ハ塔ノ高サ，A ハ觀測點，

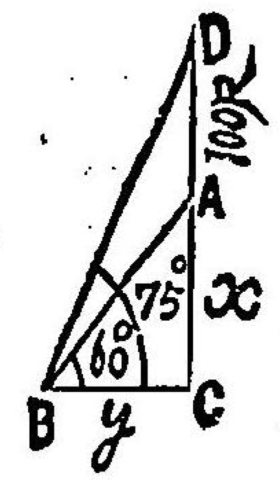
AC＝250 尺

$$BC=AC\tan BAC=250\tan30^\circ$$

$$=250\times\frac{1}{\sqrt{3}}=250\times0.5773$$

$$=144.3\text{ 尺}$$

2\.



AC ハ山ノ高サニシテ之レヲ x ニテ表ハス，AD ハ山上ニ立テル塔ノ高サニシテ 100 尺ナリ

AC ニ垂直ニ引ケル直線 BC 上ノ一點 B ヲ觀測點トシ BC ヲ y ニテ表ハス。

$$y\tan ABC=y\tan60^\circ=x,\quad y=\frac{x}{\tan60^\circ}.$$

$$y\tan DBC=y\tan75^\circ=x+100,\quad y=\frac{x+100}{\tan75}.$$

$$\therefore\quad \frac{x}{\tan60^\circ}=\frac{x+100}{\tan75^\circ}$$

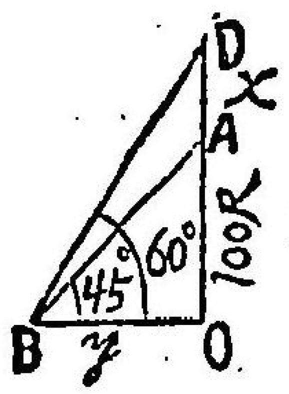
$$x\tan75^\circ=x\tan60^\circ+100\tan60^\circ.$$

$$\therefore\quad x(\tan75^\circ-\tan60^\circ)=100\tan60^\circ.$$

$$x=\frac{100\tan60^\circ}{\tan75^\circ-\tan60^\circ}=\frac{100\times\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-\sqrt{3}}$$

$$=50\times\sqrt{3}=86.6\text{ 尺}$$

3\.



$$y\tan45^\circ=100\qquad\therefore\quad y=\frac{100}{\tan45^\circ}.$$

$$y\tan60^\circ=100+x\qquad\therefore\quad y=\frac{100+x}{\tan60^\circ}$$

$$\therefore\quad \frac{100}{\tan45^\circ}=\frac{100+x}{\tan60^\circ},$$

$$100\tan60^\circ=100\tan45^\circ+x\tan45^\circ$$

$$x=\frac{100(\tan60^\circ-\tan45^\circ)}{\tan45^\circ}=\frac{100(\sqrt{3}-1)}{1}$$

$$=100(1.7321-1)=73.21\text{ 尺}$$

二九、直角三角形ノ問題 其三

1\. 某山ノ麓ト同一水平面上ノ相隔タルコト l ナル二點 A，B ニテ山頂ノ仰角ヲ觀測シテ α，β 角ヲ得タリ此ノ山ノ高サ及ビ觀測點ト山頂ヲ通ズル垂直線トノ距離ヲ求ム。

注意 本問題ハ直立セル物體ノ基ニ達スル能ハザルトキ水平面上ニアル便宜ノ二點ニ於テ其頂點ノ仰角ヲ測リ物體ノ高サ及ビ觀測點ト基トノ距離ヲ求ムル一般ノ方法ナリ，學生ハヨク記臆スルヲ要ス。

2\. 直立セル一塔アリ，其底ニ通ズル水平面ノ一點ニテ其頂ヲ見レバ仰角 30°27′ ナリ此點ヨリ塔ニ向ツテ同平面上猶ホ 100 尺ヲ進ミタル點ニ於テ頂ヲ見レバ 45° ナリ此平面上塔ノ高サ幾尺ナルカ。

但シ $\tan32^\circ20'=0.6330$，$\tan32^\circ30'=0.6371$ ナリトス。 (39 大豫)

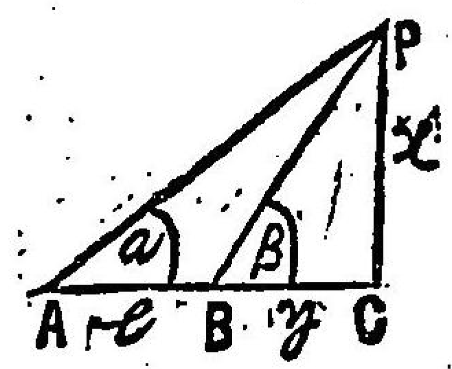
練 習 問 題

1\. 或ル人某寺院ノ高サヲ測ラントシ，一點ニ於テ高度ヲ測リテ 45° ヲ得，ソレヨリ 40 間進ミタル地點ニ於テ高度ヲ測リ 60° ヲ得タリト云フ，寺院ノ高サ幾間。 答 16.9 間强

2\. 河岸ニ於テ對岸ノ一樹ノ頂ヲ觀測シテ仰角 30° ヲ得タリソレヨリ 100 間退キテ觀測シタルニ 15° ヲ得タリト云フ木ノ高サ及ビ河幅ハ幾間ナルカ。

二九、直角三角形ノ問題（解）其三

1\.



PC$=x$, BC$=y$ ト定ム。

$AC-BC=AB$

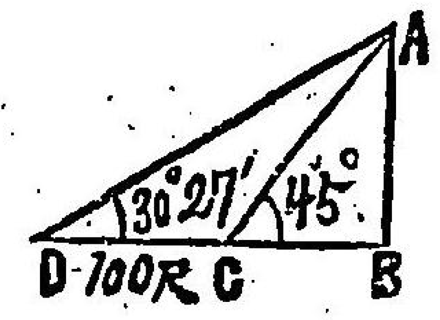
$PC\cot PAC-PC\cot PBC=AB$

$x\cot\alpha-x\cot\beta=l.$

$\therefore\quad x=\dfrac{l}{\cot\alpha-\cot\beta}.$

依リテ $y=x\cot\beta=\dfrac{l\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}.$

2\.



AB ヲ塔トシ其頂點 A ノ二觀測點 C, D ニ於ケル仰角ヲ夫々 45° 30°27′ トス。

DC＝100 尺ナリ。

$BD-BC=100$

$AB\cot ADB-AB\cot ACB=100$

$AB\cot 30°27'-AB\cot 45°=100$

$AB=\dfrac{100}{\cot 30°27'-\cot 45°}$

$\tan 32°20'=0.6330,\ \tan 32°30'=0.6371.$

故ニ角度 10′ ノ差ノタメニ tangent ノ値 41 ノ差アリ 7′ ノ差ノタメニハ tangent ノ値ノ差ハ $41\times 7\div 10=28.7$, 約 29 ナリ。

故ニ $\tan 30°27'=0.6330+29=0.6359.$

$\therefore\quad AB=\dfrac{100}{\dfrac{1}{0.6359}-1}=\dfrac{100}{\dfrac{1-0.6359}{0.6359}}=\dfrac{63.59}{.3641}$

$=175$ 尺弱。

二九、直角三角形ノ問題 其四

1\. 地上ノ高サガ二百五十メートルナル山ノ頂ヨリ觀測者ト同一ノ鉛直面上ニアル地面上ノ二目標ヲ望ミ，俯角 28°.8 及 33°.2 ヲ得タリトイフ。二目標ノ距離ハ幾何ナルカ。

函数＼角	4°	5°	28°	29°	33°	34°
正弦	0.0698	0.0872	0.4695	0.4848	0.5446	0.5592
餘切	14.3007	11.4301	1.8807	1.8040	1.5399	1.4827

(39 陸士)

2\. 人アリ巖上ニ立テル松樹ヲ望ミ，樹頭及ビ根際ノ仰角 60° 及 45° ヲ得，夫ヨリ同水平面上ニ a 尺退キテ再ビ樹頂ヲ望ミ仰角 30° ヲ得タリ，松樹ノ高サ及巖ノ高サ幾何。 (41 盛農)

練　習　問　題

1\. 平地上ニ築キタル臺上ニ直立セル柱アリ，地上ノ一點ニ於テ柱ノ底及頂ヲ望ミ仰角 30° 及 60° ヲ得次ニ臺ヨリ遠ザカルコト更ニ 25 尺ナル地點ニ於テ柱頭ノ仰角 45° ヲ得タリトイフ，柱ノ長サヲ求メヨ。　　答 $\dfrac{25(3+\sqrt{3})}{3}$ 尺　(40 陸士)

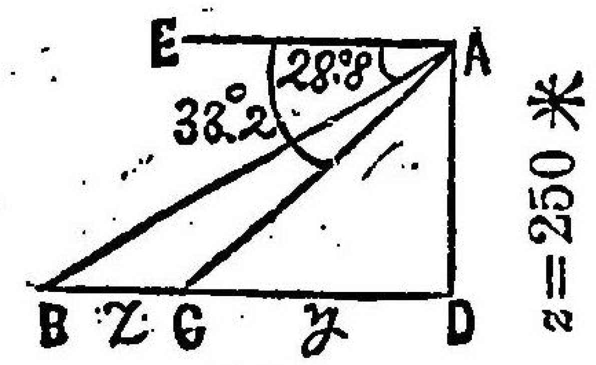
2\. 檣上ニ於テ浮標ノ俯角ヲ測リテ三十五度ヲ得，更ニ三呎下リテ又俯角ヲ測リ三十四度ヲ得ルトキハ浮標ノ距離如何。

但シ $\tan 35°=0.7$　　$\tan 34°=0.675$　　(32 商船)

答　120 呎

二九、 直角三角形問題 (解) 其四

1.



AD ヲ山ノ高サトシ之レヲ z ニテ表ハス。二目標ヲ B, C トシ BC ヲ x ニテ表ハス。又 CD ヲ y ヲ以テ表ハス。然ル片ハ

$y=z\cot EAC=250\cot 33^\circ.2$

$y+x=z\cot EAB=250\cot 28^\circ.8$

$\therefore \quad x=250\cot 28^\circ.8-250\cot 33^\circ.2$

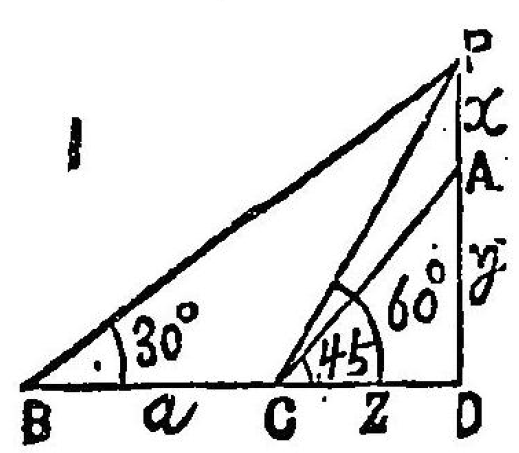
$\quad\quad =250(\cot 28^\circ.8-\cot 33^\circ.2)$

表ヲ用キテ

$\cot 28^\circ.8=1.8190,\ \cot 33^\circ.2=1.5880$ ヲ得ル, 依テ

$x=250(1.8190-1.5880)=250\times 0.231=57.75$ 米

2.



$(x+y)\cot 60^\circ=Z,\ y\cot 45^\circ=Z$

$\therefore \quad (x+y)\cot 60^\circ=y\cot 45^\circ \quad \ldots(1)$

$(x+y)\cot 30^\circ=a+y\cot 45^\circ$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

(1) 及 (2) ノ式ヨリ x ヲ消去スレバ厳ノ高サ y ヲ得ル。

$$x=\frac{y\cot 45^\circ-y\cot 60^\circ}{\cot 60^\circ},\quad x=\frac{a+y\cot 45^\circ-y\cot 30^\circ}{\cot 30^\circ}$$

$$\therefore \quad \frac{y\cot 45^\circ-y\cot 60^\circ}{\cot 60^\circ}=\frac{a+y\cot 45^\circ-y\cot 30}{\cot 30^\circ}$$

$$\frac{y-y\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{a+y-y\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\quad \left(y-\frac{y}{\sqrt{3}}\right)3=a+y-\sqrt{3}.$$

$$y=\frac{a}{2},\ \text{従テ}\ x=\frac{\dfrac{a}{2}\cot 45^\circ-\dfrac{a}{2}\cot 60^\circ}{\cot 60^\circ}=\frac{\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}$$

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{3}-1)$$

二九、 直角三角形ノ問題 其五

1. 眞直ナル道路ヲ歩メル人ガ或地點ニ於テ道路ト三十度ノ方向ニ或ル地物ヲ認メ, 夫レヨリ一里ヲ進ミテ又其ノ地物ヲ望ミシニ此時ハ道路ト六十度ノ方向ニ認メタリトイフ, 然ラバ地物ト道路トノ距離如何。 (39 船商)

2. 一船進行中北東及北北東ニ方リテ二個ノ燈臺ヲ見タリ, ソレヨリ正北ニ向テ進行スルコト 20 哩ニシテ再ビ以前ノ燈臺ヲ見タルニ其方位何レモ正東ナリシトイフ, 二燈臺ノ相距ルコト幾何。
但シ $\tan 22^\circ 30'=0.4142.$ (37 水産)

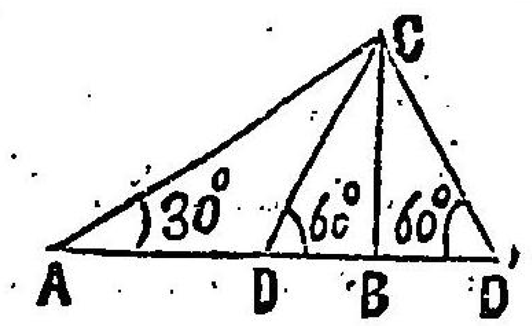
練　習　問　題

1. 投錨セル一汽船アリ, 海岸ニ沿ウタル直線上ノ一點ヨリ之ヲ測レバ其ノ直線ト 30° ノ角ヲナシ, 其線ニ沿ウテ進ムコト三百間ニシテ, 之レヲ測レバ 60° ノ角ヲナストイフ, 其直線ヨリ汽船マデノ最近距離ヲ問フ。但シ其距離二百間未滿ナルコトハ已ニ測知セラレタルモノトス。 (39 長商)
答　約 130 間

2. 圓形ノ一池アリ, 地上ノ一點ヨリ此池ヲ夾ム角度 60° ニシテ其點ヨリ池邊ニ至ル最近距離 15 間ナリ, 池ノ直徑幾間ナルカ。 (40 大臨)
答　30 間

二九、 直角三角形問題 (解) 其五

1.



最初 A 點ニテ地物ヲ認メ夫レヨリ一里ヲ進ミテ地物ヲ見タル時ノ點ハ圖示スル如ク D 點ニ於テモ 60°, D′ 點ニ於テモ亦 60° ナリ

今 D 點デ道路ト 60° ノ方向ニ認メタル場合ヲ取レバ

$AD=AB-DB.$

$AD=CB\cot CAB-CB\cot CDB.$

$AD=CB\cot 30^\circ-CB\cot 60^\circ.$

$\therefore\quad CB=\dfrac{AD}{\cot 30^\circ-\cot 60^\circ}$

$AD=1$ 里, $\cot 30^\circ=\sqrt{3}$, $\cot 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$CB=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{1}{1.7321-0.5773}$

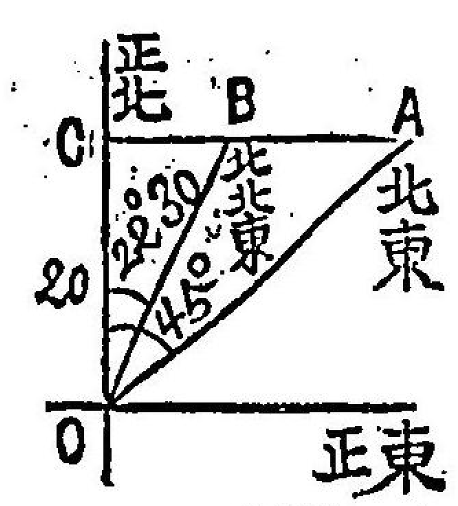
$=\dfrac{1}{1.1548}=0.866$ 里

次ギニ D′ 點ニ至リテ道路ト 60° ノ方向ニ認メタル場合ヲ取レバ角 ACD′ ハ直角ナリ

$\therefore\quad AC=AD'\cos 30^\circ=1\times\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$CB=AC\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}=0.432$ 里

2.



O 點ニテ A ノ燈臺ヲ北東ニ見, B ノ燈臺ヲ北北東ニ見ソレヨリ 20 里進ミ C 點ニテ兩燈臺ヲ正東ニ見タルヲ以テ

$AC=20\cot 45^\circ\qquad BC=20\cot 22^\circ 30'$

$\therefore AC-BC=20(\cot 45^\circ-\cot 2230')$

$=20(1-0.4142)=11.716$ 里

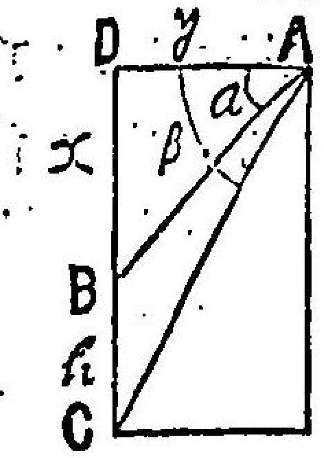
二九、 直角三角形ノ問題 其六

1. 山ノ麓ニ高サ h 尺ノ塔アリ, 山巓ニ於テ塔ノ頂及基礎ノ俯角ヲ測リ α 及 β 度ヲ得タリ, 山ノ高サヲ求ム。 (32 海機)
2. 高サ相等シキ兩塔アリ, 或人甲塔ヲ正南ニ乙塔ヲ正北ニ望ム所ニアリテ, 近キ甲塔ノ仰角ヲ測リテ六十度ヲ得, 又其所ヨリ正東ニ八十尺ノ所ニテ兩塔ノ仰角四十五度ト三十度トヲ得タリ, 塔ノ高サ及兩塔間ノ距離ヲ算出セヨ。 (41 七高)

練習問題

1. AB ナル塔アリ, 其基底 B ト同ジ水平面上ノ一點 C ヨリ塔ノ頂上 A ノ仰角 a ヲ測リ, 次ニ BC ノ延長線上ノ一點 D ヨリ A ノ仰角 b ヲ測レリ, CD ノ距離 l 尺ナルトキハ塔ノ高サ幾尺ナルカ。
2. 三角形 ABC ニ於テ $A=75^\circ$, $C=45^\circ$, 及 A ヨリ BC ニ下セル垂線ノ長サ 12尺 ヲ與ヘラレテ三邊ノ長サヲ見出セ。 (37 東商)
   答 $(4\sqrt{3}+12)$ 尺, $12\sqrt{2}$ 尺, $8\sqrt{3}$ 尺
3. 地上ノ一定點ヨリ空中ニアル直徑六間ノ輕氣球ヲ望ム視角 30° ニシテ, 其中心ノ仰角ハ 45° ナリ, 此ノ輕氣球ノ中心ガ地面ヲ去ル鉛直ノ高サヲ求ム
   答 $3(\sqrt{3}+3)$ 間 (35 東工)

二九、直角三角形ノ問題（解）其六

1. 

山巓ヲ A トシ麓ノ塔ヲ CB トス。A 點ヨリ水平線 AD ヲ引キテ CB ノ延長線ト D ニ於テ交ハラシム俯角ノ關係ハ圖示スル如シ

BC$=h$ 尺ナリ。今 AD$=y$, DB$=x$ トスレバ

$y=x\cot\alpha$, 又 $y=(x+h)\cot\beta$

$\therefore\ x\cot\alpha=(x+h)\cot\beta,\ x(\cot\alpha-\cot\beta)=h\cot\beta$

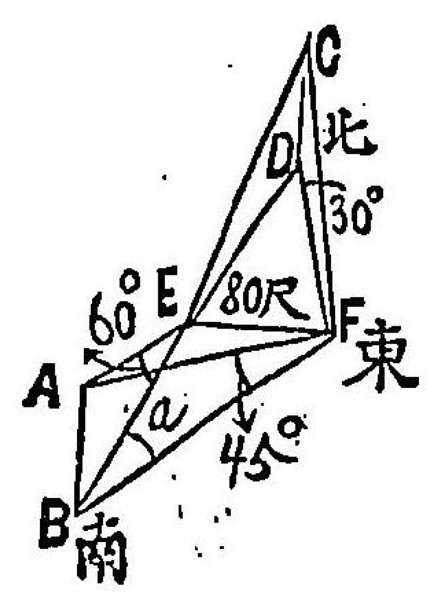
$$\therefore\ x=\frac{h\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$\therefore\ \text{山ノ高サ}=h+x=h+\frac{h\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

$$=\frac{h\cot\alpha-h\cot\beta+h\cot\beta}{\cot\alpha-\cot\beta}=\frac{h\cot\alpha}{\cot\alpha-\cot\beta}\text{尺}$$

學生ハ角ノ tangent ヲ使ヒテ次ギノ形ノ答ヲ求メヨ。

$$\text{山ノ高サ}=\frac{h\tan\alpha}{\tan\beta-\tan\alpha}\text{尺}$$

2. 

$$\tan45°=\frac{AB}{BF},\ \tan60°=\frac{AB}{BE}$$

$$\frac{BE}{BF}=\frac{\tan45°}{\tan60°}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cos\alpha.$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$BE=EF\cot\alpha=80\frac{1}{\sqrt{2}}=56.568$

$AB=BE\tan AEB=56.568\times\sqrt{3}=98$ 尺弱

$DF=CD\cot30°=AB\cot30°=98\times\sqrt{3}=169.7$ 尺强

$DE=\sqrt{DF^2-EF^2}=\sqrt{169.7^2-80^2}=171$ 尺强

$BD=BE+ED=56.6+171=227.6$ 尺强

二九、直角三角形ノ問題 其七

1. 某所ニ於テ其正東ニ飛颺セル輕氣球ノ仰角ヲ測リ 60° ヲ得，同時ニ其測點ヨリ正南一哩ノ所ニ於テ又仰角ヲ測リ 45° ヲ得タリ，然ルトキハ輕氣球ノ高サ如何。 (33 商船)

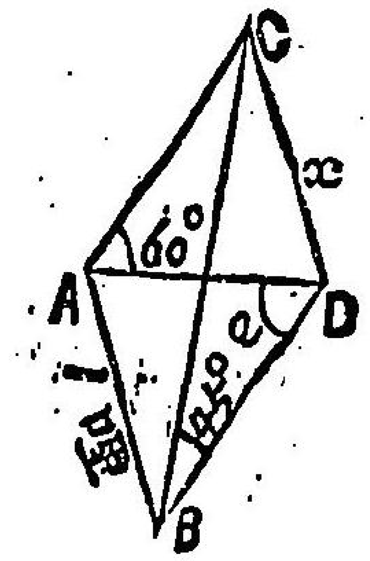
2. 三角形 ABC ニ於テ，B=75°, C=45° 又 B ヨリ AC ニ下セル垂線ノ長サハ 15 呎ナリ，然ルキハ此ノ三角形ノ三邊ノ長サ如何。

練習問題

1. 空中ニ飛颺スル輕氣球アリ，此ノ輕氣球ト同一垂直面內ニアル相去ルコト 3000 米ナル甲乙二地ニ輕氣球ヲ望ミ甲乙兩地ヲ連結スル直線ト夫々 45° 及ビ 60° ノ仰角ヲ得タリ，然ルキハ輕氣球ヨリ甲乙兩地ヲ連結スル線ニ至ル最短距離如何。

2. 地球ノ自轉ニヨリ緯度 45° 度ノ處ニ居ル人ハ一時間ニ幾哩空間ニ於テ運バルル譯ナルカ。但シ地球ノ半徑ヲ 40000 哩トス。 (41 大工)

二九、直角三角形問題（解）其七

1. 

CハAノ正東Dノ上ニ飛颺スル輕氣球トシ，BハAノ正南1哩ノ所トス，A及Bニ於ケルCノ仰角ハソレゾレ60°及45°ナリ。

今 $CD=x$，$A\hat{D}B=\alpha$ トス

$C\hat{A}D=60°$，$C\hat{B}D=45°$ ナルヲ以テ，

$$\tan 45° = \frac{DC}{BD},\quad \tan 60° = \frac{DC}{AD}$$

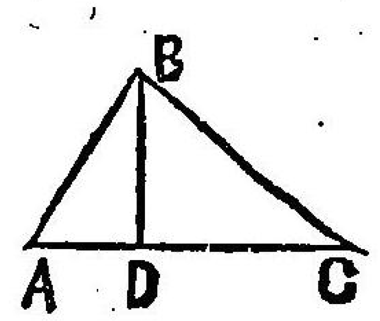
$$\therefore\ \frac{AD}{BD} = \frac{\tan 45°}{\tan 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore\ \frac{AD}{BD} = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ AD = AB\cot ADB = 1 \times \cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

故ニ $x = AD\tan CAD = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ 哩

2. 

$B=75°$，$C=45°$

$$\therefore\ A = 180° - (75°+45°) = 60°$$

$$AC = AD + DC$$
$$= BD\cot A + BD\cot C$$
$$= 15\cot 60° + 15\cot 45°$$
$$= 15 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + 15$$
$$= 5\sqrt{3} + 15 = 5(3+\sqrt{3})$$

$$BC = BD\,\mathrm{cosec}\,C = 15\,\mathrm{cosec}\,45° = 15\sqrt{2}$$

$$BA = BD\,\mathrm{cosec}\,A = 15\,\mathrm{cosec}\,60° = 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

三〇、三角形ノ解法其一

1. 二角 (B, C) ト其間ノ邊 (a) ヲ與フルトキ

$$A = 180° - (B+C)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$ ヨリ

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A} \quad c = \frac{a\sin C}{\sin A}$$

對數計算ニスレバ

$$\log b = \log a + \log\sin B - \log\sin A$$
$$\log c = \log a + \log\sin C - \log\sin A$$

2. 二邊 (b, c) ト夾角 A ヲ與フルトキ

$B+C = 180° - A$ ニヨリテ $B+C$ ヲ求メ

次ニ $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\tan\frac{B+C}{2}$ ニヨリテ

$B-C$ ヲ求メ $B+C$，ト $B-C$ トヨリ B, C ヲ得

第三邊 a ハ $a = \frac{b\sin A}{\sin B}$ ヨリ得ベシ 對數計算ニスレバ

$$\log\tan\frac{B-C}{2} = \log(b-c) + \log\tan\frac{B+C}{2} - \log(b+c)$$

$$\log a = \log b + \log\sin A - \log\sin B$$

又簡單ナル場合ニハ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ヲ用フルモ可ナリ，之ハ又補助角ヲ用フレバ 對數計算ニスルコトヲ得 即チ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b-c)^2 + 2bc(1-\cos A)$$
$$= (b-c)^2 + 4bc\sin^2\frac{A}{2}$$

$\tan\varphi = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$ トスレバ

$$a^2 = (b-c)^2(1+\tan^2\varphi) = (b-c)^2\sec^2\varphi$$

三〇、三角形ノ解法其二

3. 二邊 $(a,\ b)$ 及其一ツ (b) ニ對スル角 (B) ヲ與フルトキ

$$\sin A=\frac{a\sin B}{b}$$ ヨリ A ヲ求メ

$C=180°-(A+B)$ ヨリ C ヲ求ム

又 $C=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$ ヨリ C ヲ知リ得ベシ 對數計算トスレバ

$$\log\sin A=\log a+\log\sin B-\log b$$
$$\log C=\log b+\log \mathrm{sig}C-\log\sin B$$

次ニ $\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}$ ニツキテ吟味セン

一般ニハ此式ニ適スル A ノ値ハ二ツアリ

(i) $a<b$ ナル時 コノトキハ $A<B$ ナルガ故ニ A ハ鋭角ナルヲ要ス故ニ解ハ唯一ツナリ

(ii) $a=b$ ナル時 コノトキハ $A=B$ ナルガ故ニ與ヘラレタル角 B ガ鋭角ナラザルトキハ之ニ適スル解ハナケレドモ B ガ鋭角ナレバ A モ鋭角ニシテ解ハ一ツナリ

(iii) $a>b$ ナル時 コノトキハ $A>B$ ナレバ B ハ鋭角ナラサレバ之ニ適スル答ナシ, B ガ鋭角ナルトキハ次ノ三ツノ場合アリ

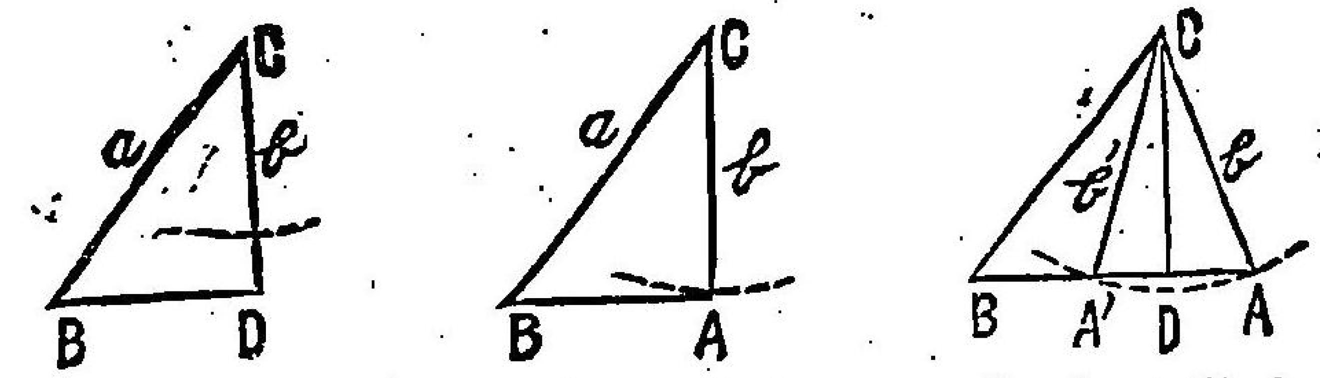
(イ) $a\sin B>b$ ナレバ $\dfrac{a\sin B}{b}>1$ 故ニ $\sin A$ ニ適スル答ナシ

(ロ) $a\sin B=b$ ナレバ $\dfrac{a\sin B}{b}=1$ $A=90°$ ナル解一ツノミ

(ハ) $a\sin B<b$ ナレバ $\dfrac{a\sin B}{b}<1$, A ノ値ハ二ツアリ。

三〇、三角形ノ解法其三

$\sin A=\dfrac{a\sin B}{b}$ ノ $a>b$ ニシテ B ガ鋭角ナルトキノ吟味ハ前記ノ三通リアリシガ之ヲ圖上ニ表ハストキハ次ノ三種トナル



(イ)ノ場合　(ロ)ノ場合　(ハ)ノ場合

$a\sin B$ ハ C ヨリ AB ニ下シタル垂線 CD ニ當ル 此吟味ハ又代數的ニ $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ ヲ c ニ關スル方程式ト見テ其方程式ノ判別式 $b^2-a^2\sin^2 B$ ヲ吟味スルモ同一ノ結果ヲ得ベシ

4. 三邊 $(a,\ b,\ c)$ ヲ與フルトキ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},\quad \tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

ヨリ A 及 B ヲ求メ之ニヨリテ $C=180-(A+B)$ ヨリ C ヲ求ム

之ヲ對數式トセバ

$$\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}$$
$$\log\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-c)+\log(s-a)-\log s-\log(s-b)\}$$

又 $\sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ 或ハ

$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ ヲ用フルモ可ナリ

三一、三角形ノ面積

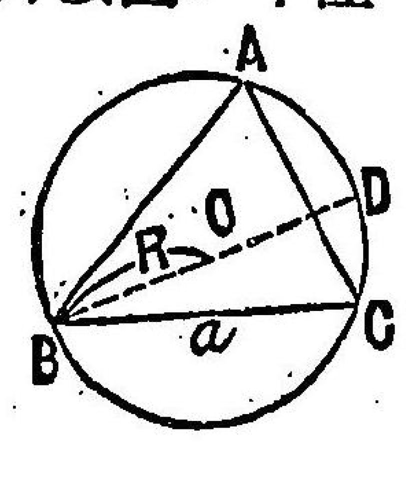
1. 三角形ノ面積 △ABC ノ A ヨリ BC(a) ニ下シタル垂線ヲ d トスレバ $d=b\sin C$ ナルニヨリ △ABC ノ面積ヲ S トスレバ

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C\ (\text{同様ニ})=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}bc\sin A$$

然ルニ又 $\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

故ニ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

2. 外接圓ノ半徑 外接圓ノ半徑ヲ R トスレバ



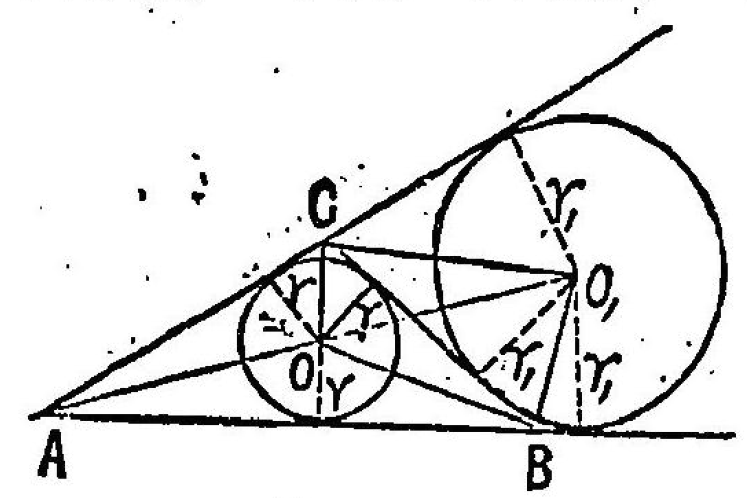
$\sin BDC=\sin A=\frac{a}{2R}$

故ニ $R=\frac{a}{2\sin A}$

依テ

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3. 內接圓ノ半徑 內接圓ノ半徑ヲ r トスレバ



$\triangle ABC=\triangle BOC+\triangle OCA+\triangle OAB$

$$=\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}+\frac{cr}{2}$$

$$=\frac{r}{2}(a+b+c)=rs$$

故ニ $r=\frac{S}{s}$

4. 傍接圓ノ半徑 BC ニ對スル傍接圓ノ半徑ヲ r_1 トスレバ

$\triangle ABC=\triangle O_1AB+\triangle O_1AC-\triangle O_1BC$

$$=\frac{br_1}{2}+\frac{cr_1}{2}-\frac{ar_1}{2}=\frac{r_1}{2}(b+c-a)=r_1(s-a)$$

故ニ $r_1=\frac{s}{s-a}$ 同様ニ $r_2=\frac{s}{s-b}$ $r_3=\frac{s}{s-c}$

三二、三角形ノ解法ノ問題 其一

1. 三角形 ABC ニ於テ B=75° C=60° $a=18$ ナリ c ヲ求メヨ。 (39 海機)

2. 水平面ニ四十五度傾斜セル長サ百尺ノ坂路アリ，傾斜ヲ減ジテ三十度トナサバ坂路ノ長サ幾尺トナルベキカ 答ハ小數以下第二位マデニ止ムベシ (36 東工)

3. 三角形 ABC ニ於テ
B=60°40′ C=59°10′ $a=10.62$ ナリ b ヲ問フ
$\log 106=2.0253$ $\log\sin 60°=9.9375-10$
$\log 107=2.0294$ $\log\sin 61°=9.9418-10$
(38 東商)

4. 三角形ノ二邊夫々五尺及七尺ニシテ其夾角六十七度ナリ，依テ第三邊ヲ求ム。 (34 東工)

練習問題

1. 三角形ノ一邊ノ長サハ 3456.78 ニシテ其兩端ニオケル角ハ 8°27′45″ ト 27°36′45″ ナリ他ノ二邊ノ長サヲ問フ。 (34 海兵)
(864, 2721)

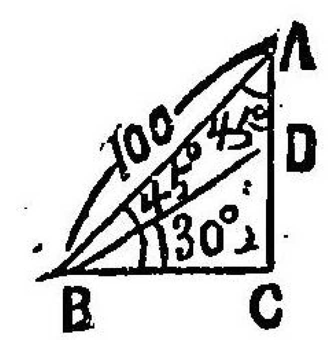
2. 三角形ノ二邊ノ長サ 4453.4 尺ト 2968.5 尺ニシテ其夾角ハ 74°21′24″ ナリ他ノ二角及一邊ヲ見出セ 但シ表ヲ用フルコトヲ得。 (35 海兵)
(63°19′24″, 42°19′12″, 3984.5)

三二、三角形解法ノ問題（解）其一

1. $A=180°-(75°+60°)=45°$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{18\sin 60°}{\sin 45°}=\frac{18\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=9\sqrt{6}$$

2. $\triangle ABD$ ニオイテ



$$\frac{100}{\sin(90°-30°)}=\frac{BD}{\sin 45°}$$

$$BD=100\times\frac{\sin 45°}{\sin 60°}$$

$$=100\times\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=100\times\frac{\sqrt{6}}{3}=81.65\text{尺}$$

3. $\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$ ニヨル

$\log a=\log 10.62=1.0261$

（log106 ト log107 トヨリ比例ニテ出ス以下準ズ）

$\log\sin B=\log 60°40'=9.9404-10$

$\log\sin A=\log\sin(180°-60°40'-59°10')$

$\quad=\log\sin 60°10'=9.9382-10$

故ニ $\log b=1.0282$

$$b=10.6+.1\times\frac{30}{41}=10.67$$

4. $b=7,\ c=5\ \ A=67.°$

$B+C=180°-67°=113°$ ト

$$\log\tan\frac{B-C}{2}=\log(b-c)+\log\tan\frac{B+C}{2}-\log(b+c)$$

ヨリ B, C ヲ定メ

$\log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B$ ヨリ a ヲ得

三二、三角形解法ノ問題 其二

1. 三角形 ABC ニ於テ $a=365$ 尺 $b=274$ 尺 $\cos C=0.81915$ ナルトキ c 邊ヲ分マデ計算セヨ。 (31 一高)

2. 三角形 ABC ニ於テ $a=30\sqrt{3},\ b=90,\ \angle A=30°$ ヲ知リテ $\angle B\ \angle C,\ c$ ヲ求ム。 (41 專檢)

3. 三角形アリ，其三ツノ邊ハ夫々 20, 21, 29 ナリト云フ，此三角形ノ最大角ヲ求メヨ。 (40 海機)

練　習　問　題

1. $\angle B=30°\ c=150\ b=50\sqrt{3}$ ナル條件ニ適合スル二ツノ三角形ノ中，一ツハ二等邊三角形，一ツハ直角三角形ナルコトヲ證明セヨ，
且大ナル三角形ノ第三邊ヲ見出セ。 (37 農實)

2. 山頂ニ於テ同方向ニアル二家屋ノ射角ヲ測リシニ $23°\ 20'$ 及 $18°\ 10'$ ヲ得タリ，又二家屋ノ距離ハ四百四十間ナリ，山ノ高サヲ求ム
對數表ヲ用ヒヨ。(603.3625 間)

三二、三角形解法ノ問題（解）其二

1. $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ニヨリ

$c^2=365^2+274^2-2\times365\times274\times.81915$

$=133225+75076-163846.383$

$=44454.617$

$c=\sqrt{44454.617}=210.84$

2. $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$

$\sin B=\dfrac{90\sin30^\circ}{30\sqrt{3}}=\dfrac{90\times\frac{1}{2}}{30\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$B=60^\circ$

$C=180^\circ-(60^\circ+30^\circ)=90^\circ$

$c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}=\dfrac{90\sin90^\circ}{\sin60^\circ}=\dfrac{90}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=60\sqrt{3}$

3. $a=29\quad b=21\quad c=20$

$s=\dfrac{29+21+20}{2}=35$

$s-a=6\quad s-b=14\quad s-c=15$

$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\dfrac{14\times15}{35\times6}}=1$

$\dfrac{A}{2}=45^\circ\quad A=90^\circ$

三二、三角形解法ノ問題 其三

1. A, B ハ海面上ノ二點ニシテ相去ルコト 2500 メートルナリ，A, B ノ兩所ニ於テ AB 線ノ直上ニアル輕氣球 C ヲ望ミタル視線ガ水平面トナス角ハ夫々 45° 及 60° ナリ，輕氣球ノ水平上ノ高サヲ問フ。 (37 東工)

2. 旅順口ノ正南 $\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$ 海里ノ沖ニ我封鎖艦隊ノ一部碇泊セリ，敵ノ一艦港口ヨリ S60° E ノ方向ニ遁竄スルヲ見テ直ニ我一艦或方向ニ 15 ノツト（一時間ニツキ 15 海里）ノ速サニテ二十分ノ後ニ追及セリトイフ，我艦ノ進行セシ方向及敵艦ノ速サヲ求ム。 (37 大工)

練 習 問 題

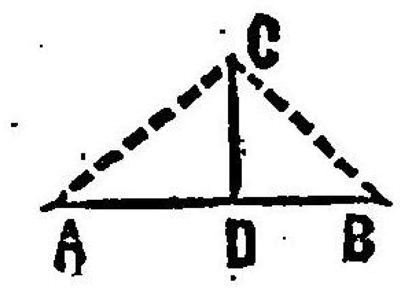
A 及 B ハ平面上ニアル二個ノ觀測點，C ハ山ノ頂上ニアル目標ニシテ，角 CAB ハ四十八度十分，角 ABC ハ六十六度二十分，距離 AB ハ百五十米，B ニ於ケル C ノ傾角ハ二十三度四十八分ナルトキハ平地上ニ於ケル C ノ高サハ幾米ナルカ

但シ $\sin65^\circ=.906$ $\sin66^\circ=.914$

$\sin67^\circ=.921$ (41 陸士)

三二、 三角形解法ノ問題（解）其三

1. $\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$



$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{2500}{\sin 75^\circ}$$

$$AC = 2500 \times \frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$$

$$= 2500 \times \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 2500 \times \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

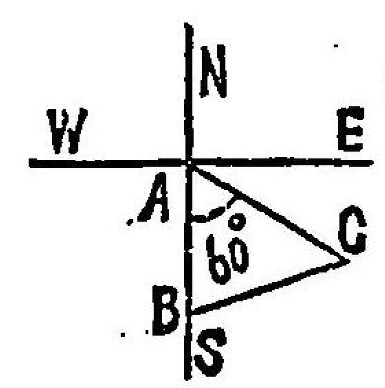
$$= 2500 \times \frac{2(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = 1250 \times (3\sqrt{2}-\sqrt{6})$$

高 $(CD) = AC\sin 30^\circ$

$$= 1250(3\sqrt{2}-\sqrt{6}) \times \frac{1}{2} = 1585 \text{ 强}$$

1585 米 强

2. A ヲ旅順口，B ヲ我碇泊所，C ヲ二艦ノ會合點トス



$A = 60^\circ$

$$AB = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

$$BC = 15 \times \frac{20}{60} = 5$$

$$\sin C = \sin(180^\circ - (60^\circ + B))$$

$$= \sin(60^\circ + B)$$

$$\frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{\frac{5\sqrt{6}}{3}}{\sin(60^\circ + B)} \text{ ヨリ}$$

$$\sin(60^\circ + B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad B = 75^\circ$$

コレヨリ又速力 $\frac{5}{2}(3\sqrt{2}+6)$ 浬ヲ得

三三、 反函數（逆三角函數）

1. 三角反函數トハ何ゾヤ　　(33 海兵)

2. $2\tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{2y}{1+y^2}$ ナルコトヲ證セヨ。

(34 陸士)

3. 下ノ式ヲ證セヨ

$$\tan^{-1}m + \tan^{-1}n = \tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$$

練　習　問　題

$\sin^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{4}$ ナルコトヲ證セヨ。

三三、反函數（逆三角函數）（解）

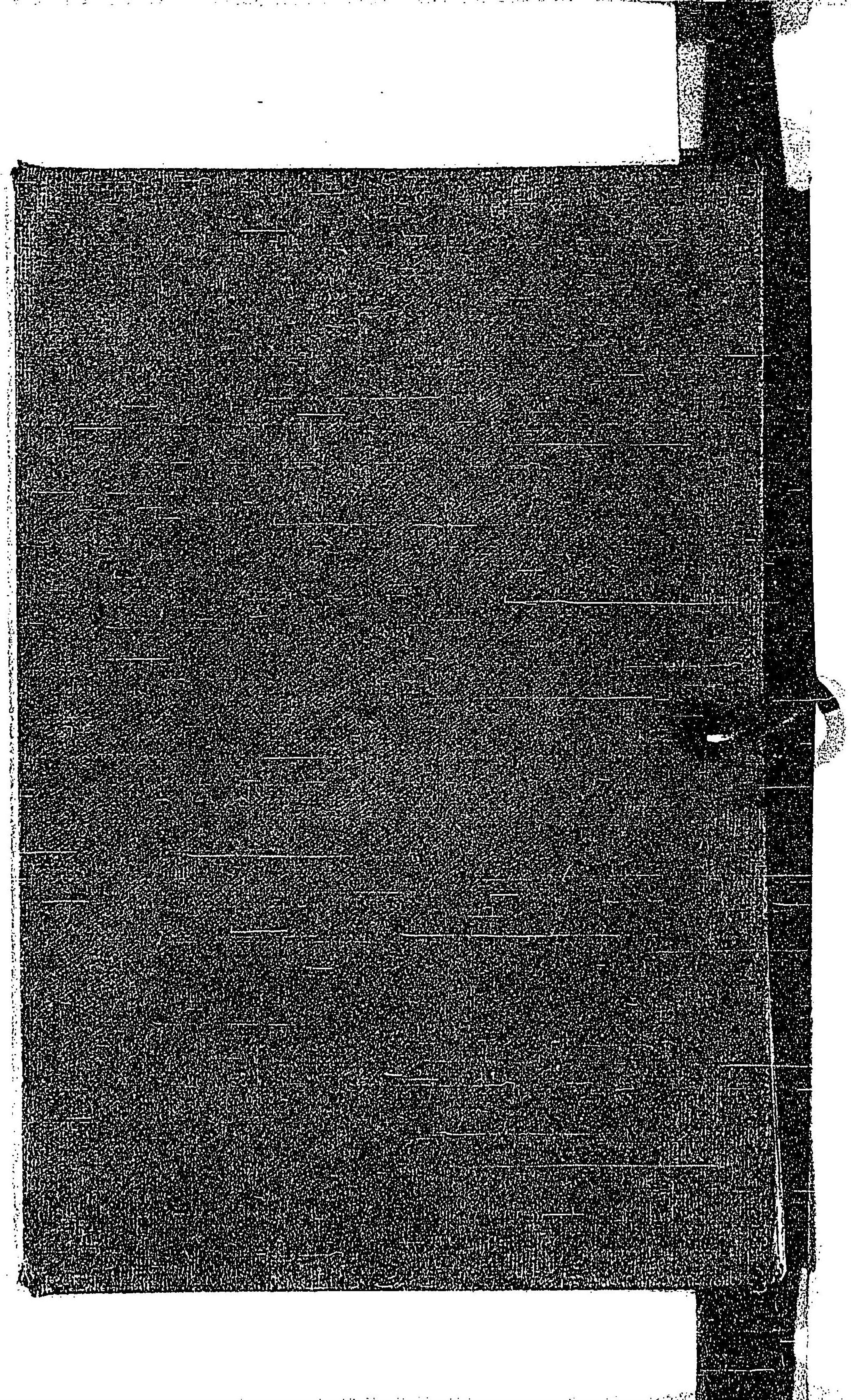
1. 逆函數 正弦ガ a ナルトキハ a ヲ其角ノ逆正弦ト云ヒ之ヲ $\sin^{-1}a$ 又ハ $\arcsin a$ ト記ス
他ノ函數モ之ニ準ズ
例ヘバ $\sin\theta=\frac{1}{2}$ ト $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{2}$ トハ同一ノ關係ヲ表ハス

2. $\tan^{-1}y=A$ トスレバ $\tan A=y$ 又 $2\tan^{-1}y=2A$
而シテ $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}=\frac{2y}{1-y^2}$
故ニ $\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}=2A$
依テ $2\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}$

3. $\tan^{-1}m=A$ $\tan^{-1}n=B$ トスレバ
$\tan A=m$ $\tan B=n$
$\tan(A+B)=\frac{1+\tan A\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{m+n}{1-mn}$
$A+B=\tan^{-1}m+\tan^{-1}n$
依テ $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$

明治四十四年一月二十二日印刷
明治四十四年一月二十五日發行

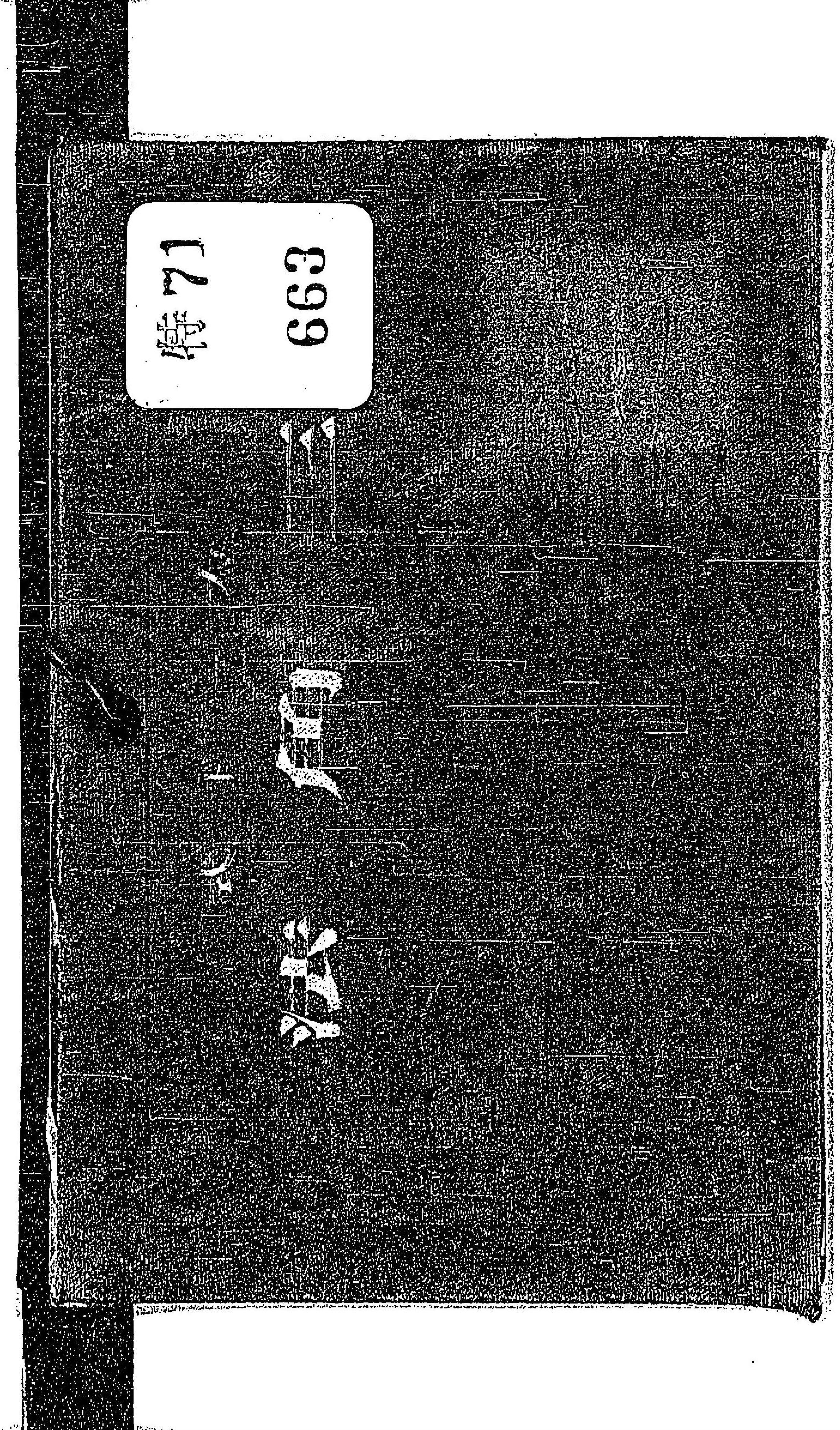
編輯兼發行者　東京市麹町區富士見町六丁目十番地　小酒井五一郎
印刷者　東京市牛込區榎町七番地　渡邊八太郎
印刷所　東京市牛込區榎町七番地　日清印刷株式會社
市麹町區富士見町六丁目十番地
座東京 二三六
英語研究社



カード式・三角法

小酒井五一郎／編

M44.1



發行の要旨及使用法

本誌は學生諸氏が繁雜なる復習を容易にし、記憶力を增進せしめんが爲に。從來の類書と異りたる新形式を以て編輯せられたるものなり。蓋カード式の便利は何人も認むる所なれども、未だ各學科に亘れるものなきを遺憾とし、多年教授に經驗ある各專門大家に執筆を請ひ、綴り方に就き幾多の新工風を凝らしたるもの即ち本綴なりとす。

是れが使用法等に就きては、使用者自ら便宜の方法を執るべきも試みに其一二の例を示さん。

一 使用者は、カード表面の略表に依りて、其事實を答へ、後裏面を見て答の正否を檢すべし。

一 右の方法に依り、毎日カードの數を定めて順序に復習し、記憶し終はりたる物は位置を換へ、記憶し難き物は殘し置きて更に復習すべし。

一 又各學科中より、特に復習せんとする部分、又は記憶し難きもののみを蒐めて練習するも一方法たり。

一 斯くして記憶し得たらば、左欄の參考問題につきて更に練習を試むべし。答案はカード中にて解するを得ん。

一 一學科の全體を通覽せんと欲せば、カードの裏面のみを見るべし。疑問あらば索引に依りて同じくカードの裏面を見よ、直に氷解すべし。

一 各教科書中の事項は網羅したれども尙數學に於ける問題の如き遺漏は使用者自らカードを製し、充分に補足して完全のものとせらるべし。

一 右の便利を計らん爲、本社に於て、同形同質の紙に罫を引き、穴を穿ち實費を以て發賣せり。

（實用新案登錄一一六五一號）

一、角ノ測リ方

1. 〔角ノ單位〕 角ヲ計ルニ普通用ヰラルルハ六十分法ト弧度法トノ二種ナリ。

六十分法トハ一直角ノ九十分ノ一ヲ一度ト名ヅケ一度ノ六十分ノ一ヲ一分ト名ヅケ一分ノ六十分ノ一ヲ一秒ト名ヅクルモノヲ云フ。此ノ度分秒ヲ表ハスニ °, ′, ″ ヲ以テス。例ヘバ五十七度十七分四十四秒ヲ 57° 17′ 44″ ト記スルガ如シ。

弧度法トハ任意ノ圓ニ於テ半徑ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ中心角ヲ以テ角ヲ測ル法ヲ云フ，而シテ此ノ角ヲ一らぢあんト云フ。

六十分法ハ又英法トモ云フ，而シテ此ノ角ノ計リ方ハ測量，航海，星學等實地ノ計算ニ於テ一般ニ用キラルルモノナリ。

$$一らぢあんハ\ \frac{1}{\pi}(2\ 直角)=57°17′44″8\ ナリ。$$

尙ホ以上ノ角ノ計リ方ノ外ニ百分法ト稱スルモノアリ，一直角ノ百分ノ一ヲ一度ト名ヅケ，一度ノ百分ノ一ヲ一分ト名ヅケ，一分ノ百分ノ一ヲ一秒ト名ヅクルモノヲ云フ；之レヲ佛法トモ云フ，而シテ度分秒ノ記號ハ六十分法ト等シク °, ′, ″ ヲ以テス。

2. 〔各單位間ノ關係〕 或ル角ヲ弧度法ニテ計リタルモノヲ θ トシ六十分法ニテ計リタルモノヲ D トスルトキハ此ノ兩者ノ間ニ次ギノ關係アリ。

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180°} \quad \therefore\ \theta=D\times\frac{\pi}{180°},\ D=\theta\times\frac{180°}{\pi}$$