Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Arbeitsblatt 85

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 85.1. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\, (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n,$$

eine Linearform. Es sei M der Graph dieser Funktion, den wir als riemannsche Mannigfaltigkeit auffassen. Zeige, dass zwischen den Volumina entsprechender Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und des Graphen eine konstante Beziehung besteht.

Aufgabe 85.2. Berechne den Flächeninhalt der Sphäre mit Hilfe von Korollar 85.1.

Aufgabe 85.3. Diskutiere die Rotationsfläche S zu

$$M = \left\{ (\sin \frac{1}{y}, y) |\, y > 0 \right\}$$

um die x-Achse A. Ist S eine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3 \setminus A$? Ist die Menge S abgeschlossen in $\mathbb{R}^3$? Ist der Abschluss von S in $\mathbb{R}^3$ eine Mannigfaltigkeit?

Aufgabe 85.4.*

Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche, die entsteht, wenn man den Graphen

$$\Gamma = \{(x, e^x) |\, x \leq 0\}$$

um die x-Achse rotieren lässt, kleiner als 10 ist.

Aufgabe 85.5. Bestätige, dass die in Beispiel 85.6, Beispiel 85.7 und Beispiel 85.8 angegebenen Abbildungen ihr Bild auf der Einheitssphäre haben und bis auf eine Nullmenge surjektiv sind.

Aufgabe 85.6. Bestimme die (partiell definierten) Umkehrabbildungen zu den in Beispiel 85.6, Beispiel 85.7 und Beispiel 85.8 angegebenen Abbildungen.

Aufgabe 85.7. Zeige, dass Längenkreise und Breitenkreise auf der Erdkugel senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 85.8. Wie lange ist der 30-ste Breitenkreis auf der Erde (man setze den Erdradius mit 6370 km an).

Aufgabe 85.9. Welcher Prozentanteil der Erde wird in einem Moment von der Sonne beschienen (die Sonne soll wegen ihrer Entfernung als punktförmig angesetzt werden)?

Aufgabe 85.10. Bestimme das Infimum und das Supremum der Länge der Bilder der Großkreise auf der in Beispiel 85.6 beschriebenen Karte.

Aufgabe 85.11. Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathcal{V}(M) \longrightarrow \mathcal{E}^1(M),\, F \longmapsto \omega_F,$$

mit

$$(\omega_F(P))\,(v) \,:=\, \langle F(P), v \rangle_P\,,$$

linear ist.

Aufgabe 85.12. Begründe Bemerkung 84.4.

Aufgabe 85.13. Es sei V ein n-dimensionaler reeller orientierter Vektorraum und λ ein translationsinvariantes Maß auf V. Zeige, dass die Zuordnung

$$V \times \cdots \times V \longrightarrow \mathbb{R},\, (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto \pm\lambda(P(v_1, \ldots, v_n)),$$

wobei das Vorzeichen positiv zu wählen ist, wenn die Vektoren die Orientierung repräsentieren, eine alternierende multilineare Abbildung ist.

Aufgabe 85.14. Es sei

$$\varphi\colon\, \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

(mit $m = n - 1 \geq 0$) eine stetig differenzierbare Funktion, die in jedem Punkt der Faser M über $0 \in \mathbb{R}$ regulär sei. Wir fassen M als eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit auf. Zeige, dass zwischen der Volumenform τ aus Korollar 83.6 und der kanonischen Volumenform ω die Beziehung

$$\tau(P, v_1, \ldots, v_m) \,=\, \pm \,||\,\text{Grad}\ \varphi(P)\,||\, \omega(P, v_1, \ldots, v_m)$$

besteht.

Aufgabe 85.15. Bringe Korollar 85.1 und Beispiel 83.9 mit Hilfe von Aufgabe 85.143 miteinander in Verbindung.

Aufgabe 85.16. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^\ell$$

(mit $m = n - \ell \geq 0$) eine stetig differenzierbare Abbildung, die in jedem Punkt der Faser M über $0 \in \mathbb{R}^\ell$ regulär sei. Wir fassen M als eine orientierte riemannsche Mannigfaltigkeit auf. Es sei vorausgesetzt, dass die Gradienten

$$\operatorname{Grad} \varphi_1(P), \ldots, \operatorname{Grad} \varphi_\ell(P)$$

für jeden Punkt von $P \in M$ senkrecht aufeinander stehen. Zeige, dass zwischen der Volumenform τ aus Korollar 83.6 und der kanonischen Volumenform ω die Beziehung

$$\tau(P, v_1, \ldots, v_m) \;=\; \pm \, || \operatorname{Grad} \varphi_1(P) || \cdots || \operatorname{Grad} \varphi_\ell(P) || \, \omega(P, v_1, \ldots, v_m)$$

besteht.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 85.17. (5 Punkte)

Wir betrachten den Graph M der Funktion

$$\psi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto y + x^2,$$

als riemannsche Mannigfaltigkeit. Berechne den Flächeninhalt des Graphen oberhalb des Quadrats $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Aufgabe 85.18. (5 Punkte)

Es sei

$$M = \left\{ (x, x^2) | \, x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

die Parabel, also der Graph der Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^2.$$

Zeige, dass die zugehörige Rotationsfläche um die x-Achse keine Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 85.19. (4 Punkte)

Man stelle eine Kugeloberfläche als Rotationsfläche dar und berechne damit den Inhalt der Kugeloberfläche.

Aufgabe 85.20. (4 Punkte)

Man stelle einen Torus als Rotationsfläche dar und berechne damit seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 85.21. (6 Punkte)

Bestimme den „Abstand“ zwischen Osnabrück und Bangalore (den Erdradius mit 6370 km ansetzen) in den beiden folgenden Sinnen.

a) Entlang der Erdoberfläche (Luftlinie).

b) Durch die Erde (Maulwurfslinie).

Aufgabe 85.22. (6 Punkte)

Wie lange ist das Bild des 30-sten Breitenkreises auf den in Beispiel 85.6, Beispiel 85.7 und Beispiel 85.8 beschriebenen Karten (man setze den Erdradius mit 6370 km an)?