Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2021/2022**

Elliptische Kurven

Arbeitsblatt 20

Aufgaben

Aufgabe 20.1. Zeige, dass auf einer endlichen kommutativen Gruppe G jede Funktion $h \colon G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine schwache Höhenfunktion ist.

Aufgabe 20.2. Zeige, dass ein Körper mit einem Betrag zu einem metrischen Raum wird.

Aufgabe 20.3. Berechne die folgenden Standardbeträge von rationalen Zahlen.

(1) $|13|_5$,
(2) $|-1|_{16}$,
(3) $\left|\frac{100}{33}\right|_2$,
(4) $\left|\frac{-121}{169}\right|_{13}$.

Aufgabe 20.4.*

Berechne den Abstand zwischen den beiden rationalen Zahlen $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{13}$, wenn $\mathbb{Q}$ mit dem 2-adischen Standardbetrag versehen ist.

Aufgabe 20.5. Es sei p eine Primzahl und $|-|_p$ der zugehörige Standardbetrag. Zeige $|p^n|_p = p^{-n}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 20.6.*

Es seien p und q verschiedene Primzahlen und seien $|-|_p$ und $|-|_q$ die zugehörigen Standardbeträge. Zeige, dass durch

$$h(x) := |x|_p \cdot |x|_q$$

kein Betrag auf $\mathbb{Q}$ gegeben ist.

Aufgabe 20.7. Es sei p eine Primzahl und $|-|_p$ der zugehörige Standardbetrag. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{Q}$. Zeige, dass diese Folge genau dann eine Nullfolge bezüglich des gegebenen Betrags ist, wenn die Folge der p-Exponenten von x_n bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Aufgabe 20.8. Konstruiere eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen, die bezüglich jedes Standardbetrages gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 20.9. Zeige, dass ein Betrag auf einem Körper K genau dann nichtarchimedisch ist, wenn die Abschätzung

$$|f+g| \leq \max(|f|, |g|)$$

für alle $f,g \in K$ gilt.

Aufgabe 20.10. Es sei $|-|$ ein Betrag auf einem Körper K. Wir setzen im nichtarchimedischen Fall $\delta = 0$ und im archimedischen Fall $\delta = 1$. Zeige, dass die Abschätzung

$$|f+g| \leq 2^\delta \cdot \max(|f|, |g|)$$

für alle $f,g \in K$ gilt.

Aufgabe 20.11. Es sei K ein Körper mit einem nichtarchimedischen Betrag $|-|$. Zeige, dass $\{f \in K \mid |f| \leq 1\}$ ein Unterring von K ist.

Aufgabe 20.12. Es sei K ein Zahlkörper, R der zugehöriger Zahlbereich, $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal von R, $\operatorname{ord}_{\mathfrak{p}}(-)$ die zugehörige Bewertung auf K und $|-|_{\mathfrak{p}}$ der zugehörige Betrag. Zeige

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ f \in K \mid |f|_{\mathfrak{p}} \leq 1 \right\}.$$

Aufgabe 20.13.*

Es sei R der Zahlbereich zur endlichen Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$ und sei $\mathfrak{p} \subseteq R$ ein maximales Ideal mit $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$. Es sei e der Verzweigungsindex von $\mathbb{Z}_{(p)} \subseteq R_{\mathfrak{p}}$ und f der Trägheitsgrad von $\mathfrak{p}$ über (p). Zeige

$$|p|_{\mathfrak{p},\,\mathrm{nat}} = p^{-ef}.$$

Abbildungsverzeichnis