Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 26

Dezimalbrüche

Zu jeder rationalen Zahl x kann man die Potenzen x^n, $n \in \mathbb{Z}$, betrachten. Bei ganzzahligem $x \geq 2$ sind die x^n (beliebig) groß für positives n und (beliebig) klein für negatives n. Solche Potenzen stellen ein wichtiges Vergleichsmaß für die Größenordnung von Zahlen dar. Da wir im Dezmialsystem arbeiten, sind insbesondere die Zehnerpotenzen 10^n, $n \in \mathbb{Z}$, wichtig. Für $n \geq 0$ treten die Zehnerpotenzen insbesondere bei der Dezimaldarstellung natürlicher Zahlen auf. Die Zehnerpotenzen zu negativem n spielen auch eine wichtige Rolle bei der Erfassung und Beschreibung von beliebigen rationalen Zahlen.

Definition 26.1. Eine rationale Zahl, die man mit einer Zehnerpotenz als Nenner schreiben kann, heißt *Dezimalbruch*.

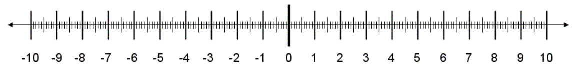
Dezimalbrüche sind beispielsweise sämtliche ganzen Zahlen (man kann $1 = 10^0$ als Nenner nehmen), ferner Zahlen wie

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{53}{100}, -\frac{271}{1000}, \frac{3}{1000000}, \ldots .$$

Nach unserer Definition liegt ein Dezimalbruch vor, wenn man die dadurch gegebene rationale Zahl mit einer Zehnerpotenz als Nenner schreiben kann. Das heißt nicht, dass die Zahl in dieser Form vorliegen muss. Beispielsweise sind auch die Brüche

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{7}{5}, \frac{13}{20}, -\frac{7014}{500}$$

Dezimalbrüche, da man sie nach einer Erweiterung mit einer Zehnerpotenz als Nenner schreiben kann. Dies gilt für alle Brüche mit der Eigenschaft, dass in der Primfaktorzerlegung des Nenners nur Potenzen von 2 und von 5 vorkommen. Wenn der Bruch gekürzt ist, so sind genau die Brüche der Form $\frac{a}{2^i 5^j}$ die Dezimalbrüche, siehe Aufgabe 26.11.



Die Linealversion des Zahlenstrahles markiert neben den ganzen Zahlen die ganzzahligen Vielfachen des Dezimalbruches $\frac{1}{10}$. Wenn man den Meter als Einheit nimmt, zeigt es die ganzzahligen Vielfachen von $\frac{1}{1000}$.

Einen Dezimalbruch $\frac{a}{10^m}$ (mit $m \geq 0$) kann man auch in der Form $a10^{-m}$ schreiben. Dies ergibt wohl die kompakteste Charakterisierung eines Dezimalbruches, eine rationale Zahl der Form

$$a \cdot 10^k \text{ mit } a, k \in \mathbb{Z}\,.$$

Aus dieser Darstellung ist unmittelbar ersichtlich, dass man Dezimalbrüche miteinander addieren und multiplizieren kann und dabei wieder einen Dezimalbruch erhält.

Lemma 26.2. *Die Summe und das Produkt von zwei Dezimalbrüchen ist wieder ein Dezimalbruch. Das Negative eines Dezimalbruches ist ein Dezimalbruch. Die Menge der Dezimalbrüche bilden einen Ring*[1] *innerhalb der rationalen Zahlen.*

Beweis. Die Brüche seien

$$x = a \cdot 10^k$$

und

$$y = b \cdot 10^\ell$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$. Wegen der Symmetrie können wir $k \geq \ell$ annehmen. Dann ist

$$a \cdot 10^k + b \cdot 10^\ell = a \cdot 10^{k-\ell} \cdot 10^\ell + b \cdot 10^\ell = \left(a \cdot 10^{k-\ell} + b\right) \cdot 10^\ell$$

wieder von der gleichen Bauart, also ein Dezimalbruch. Für das Produkt ist

$$a \cdot 10^k \cdot b \cdot 10^\ell = a \cdot b \cdot 10^{k+\ell}.$$

Die anderen Behauptungen sind ebenfalls klar. □

Die Menge der Dezimalbrüche bilden keinen Körper, da zwar sämtliche ganzen Zahlen Dezimalbrüche sind, ihre inversen Elemente aber im Allgemeinen nicht. Beispielsweise sind 3^{-1} und 7^{-1} keine Dezimalbrüche. Für zwei Dezimalbrüche ist es einfach, einen Hauptnenner zu finden, da die Nenner im gekürzten Fall grundsätzlich von der Form $2^i 5^j$ sind. Insofern spielt sich bei Rechnungen mit Dezimalbrüchen alles Wesentliche im Zähler ab.

Beispiel 26.3. Es ist

$$-7 + \frac{3}{100} + \frac{9}{5} - \frac{99}{1000} = \frac{-7000}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{1800}{1000} - \frac{99}{1000} = \frac{-5269}{1000}$$

und

$$\frac{27}{100} \cdot \frac{11}{1000} = \frac{297}{100000}.$$

[1]Man spricht von einem Unterring.

Dezimaldarstellung für Dezimalbrüche

Wenn man für einen Dezimalbruch, sagen wir

$$\frac{2318}{1000},$$

für den Zähler die Dezimalentwicklung einsetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{2318}{1000} &= \frac{2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0}{10^3} \\ &= \frac{2 \cdot 10^3}{10^3} + \frac{3 \cdot 10^2}{10^3} + \frac{1 \cdot 10^1}{10^3} + \frac{8 \cdot 10^0}{10^3} \\ &= 2 + 3 \cdot 10^{-1} + 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

In diesem Sinne kann man jeden Dezimalbruch auf die Form

$$\pm \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

mit Ziffern $a_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ und ganzen Zahlen

$$k \leq \ell,$$

wobei der untere Summationsindex k bei einem echten Dezimalbruch (also keiner ganzen Zahl) negativ ist. Von dieser Beobachtung her ist es naheliegend, die Dezimaldarstellung auf Dezimalbrüche auszudehnen. Dadurch erhält man abbrechende[2] „Kommazahlen“.

Definition 26.4. Es sei ein Dezimalbruch

$$\frac{a}{10^k}$$

mit $a = \pm b \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, und $k \in \mathbb{N}$ gegeben, und es sei

$$b = \sum_{i=0}^{n} b_i 10^i = b_n \cdots b_1 b_0$$

die Dezimaldarstellung von b. Dann nennt man

$$\pm b_n \cdots b_k, b_{k-1} \cdots b_1 b_0$$

die *Darstellung des Dezimalbruches im Dezimalsystem.*

Diese Darstellung verwendet also direkt die Zifferndarstellung von b, wobei allein ein Komma eingeführt wird, und zwar so, dass hinter dem Komma genau k Ziffern stehen, nämlich die hinteren k Ziffern $b_{k-1}, \ldots, b_0$ von b. Dabei darf man hintere Nullen weglassen. Wenn b weniger als k Stellen besitzt, muss man dies vorne durch hinreichend viele Nullen auffüllen. Wegen Satz 14.1 ist diese Darstellung eindeutig.

Für $a = b = 1$ ergibt sich die folgende Tabelle.

[2] Bei unendlichen Kommazahlen handelt es sich um ein viel komplizierteres Konzept, das wir erst richtig im zweiten Semester verstehen werden.

	Potenz	Bruch	Kommazahl
	10^0	$\frac{1}{1}$	1
	10^{-1}	$\frac{1}{10}$	$0,1$
	10^{-2}	$\frac{1}{100}$	$0,01$
	10^{-3}	$\frac{1}{1000}$	$0,001$
	10^{-4}	$\frac{1}{10000}$	$0,0001$
	10^{-5}	$\frac{1}{100000}$	$0,00001$

Die Potenz 10^{-n} ist also der Bruch, wo im Nenner n Ziffern stehen, nämlich eine 1 und $n-1$ Nullen, und das ist zugleich die Kommazahlen, bei der nach dem Komma n Ziffern stehen, nämlich $n-1$ Nullen und eine 1. Für Umrechnungen ist auch folgende Beobachtung hilfreich: Wenn man eine Kommazahl mit 10 multipliziert, so verschiebt sich das Komma um eine Stelle nach rechts, wenn man sie mit 10^{-1} multipliziert, verschiebt sich das Komma um eine Stelle nach links. Die Stelle zu 10^{-k} nennt man auch die k-te Nachkommastelle.

Das Rechnen mit Kommazahlen ist einfach, allerdings ist das richtige Setzen des Kommas eine Fehlerquelle.

Beispiel 26.5. Dezimalbrüche im Dezimalsystem addiert man wie ganze Zahlen im Zehnersystem, d.h. man addiert von hinten nach vorne mit Übertrag, wobei die beiden Kommata deckungsgleich sein müssen. Beispielsweise ist

$$53,273$$

$$\underline{25,648}$$

$$78,921.$$

Dieses Verfahren ist korrekt, da im Wesentlichen die Zähler bezogen auf einen gemeinsamen Nenner addiert werden.

Beispiel 26.6. Dezimalbrüche im Dezimalsystem multipliziert man wie ganze Zahlen im Zehnersystem, d.h. man multipliziert die eine Zahl nacheinander mit allen Ziffern der anderen Zahl. Abschließend muss man das Komma richtig setzen. Dazu zählt man die Stellen hinter den Kommata der beiden Zahlen zusammen und setzt an der entsprechenden Stelle im Produkt von hinten gezählt das Komma. Dabei muss man, wenn hinten die Zahlen mit 2 bzw. 5 enden, die sich ergebende 0 mitzählen (bei ganzen Zahlen darf man die ja auch nicht weglassen), auch wenn sie letztendlich weggelassen werden darf. Dieses Verfahren ist korrekt, da ihm die Gleichung

$$a \cdot 10^k \cdot b \cdot 10^\ell = a \cdot b \cdot 10^{k+\ell}$$

zugrunde liegt. Bei nicht zu großen und nicht zu kleinen Zahlen kann man auch durch eine Überschlagsrechnung entscheiden, wo das Komma hingehört.

Bemerkung 26.7. Der Größenvergleich zwischen zwei Dezimalbrüchen im Dezimalsystem ist einfach (wir beschränken uns auf positive Zahlen). Man schreibt die beiden Zahlen übereinander, wobei die beiden Kommata übereinander stehen müssen. Dann vergleicht man wie bei den ganzen Zahlen von links nach rechts.

Approximation durch Dezimalzahlen

Eine wichtige Motivation zur Einführung der rationalen Zahlen war, beliebige Längen, die beispielsweise bei der gleichmäßigen Unterteilung einer gegebenen Strecke auftreten, möglichst gut messen zu können. Dies können wir erst dann präzise formulieren, wenn wir die reellen Zahlen zur Verfügung haben. Die folgende Aussage zeigt, dass man rationale Zahlen selbst schon beliebig gut mit Dezimalbrüchen *approximieren* (annähern) kann. Wenn es also nur darum geht, beliebige Längen approximativ zu beschreiben, so sind die Dezimalbrüche genauso gut wie die deutlich größere Menge aller rationalen Zahlen.

Lemma 26.8. *Zu jeder rationalen Zahl q und jedem $k \in \mathbb{N}_+$ gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ derart, dass*

$$\frac{a}{10^k} \leq q < \frac{a+1}{10^k}$$

gilt. D.h., dass man jede rationale Zahl beliebig gut (nämlich mit einem Fehler, der maximal gleich $\frac{1}{10^k}$ ist) durch Dezimalbrüche approximieren kann.

Beweis. Es sei

$$a := \lfloor q 10^k \rfloor .$$

Dann ist

$$a \leq q 10^k < a+1 .$$

Division durch 10^k ergibt die Behauptung. Der Zusatz ergibt sich daraus, dass man nach Korollar 25.6 jede beliebige positive Fehlergenauigkeit ϵ durch eine geeignete negative Zehnerpotenz unterbieten kann. $\square$

In diesem Satz gibt das k über die Potenz 10^{-k} vor, wie groß der Fehler sein darf. Man sagt dann auch, dass die Approximation bis zur k-ten Nachkommaziffer genau ist.

Es sei $q = \frac{z}{n}$. Wenn man beispielsweise einen Taschenrechner mit acht Nachkommastellen hat, so ergibt sich zu $k = 8$ die Zahl a als Ergebnis, wenn man $z : n$ eingibt und das Komma in der Darstellung ignoriert.

Beispiel 26.9. Wir wenden Lemma 26.8 auf $q = \frac{3}{7}$ mit $k = 9$ an. Eine Rechnung des Taschenrechners mit menschlichen Korrekturen liefert

$$0,428571428 < \frac{3}{7} < 0,428571429 .$$

Die beiden Dezimalbrüche links und rechts sind also eine Approximation des wahren Bruches $\frac{3}{7}$ mit einem Fehler, der kleiner als $\frac{1}{10^9}$ ist.

Die Rechnung im vorangehenden Beispiel beruht auf dem Divisionsalgorithmus, den wir noch nicht besprochen haben. Der Satz besagt, dass es eine solche eindeutig bestimmte Zahl geben muss. Dass die angeführten Abschätzungen gelten, kann man einfach überprüfen, indem man die beiden Dezimalzahlen mit 7 multipliziert.

Mit der Approximation von rationalen Zahlen durch Dezimalzahlen geht die Dezimalrundung einher. Bei der Rundung auf eine ganze Zahl schaut man einfach nach der ganzzahligen Approximation und nimmt von der unteren und der oberen Approximation diejeninge, die näher ist (wobei man bei gleichem Abstand abrundet). Bei der Dezimalrundung zur Stellenanzahl k (bzw. zur Genauigkeit 10^{-k}) führt man dies für die Nenner a bzw. $a+1$ in der Approximation durch. Die Zahl $47,2940574$ ist beispielsweise auf zwei Nachkommastellen gerundet gleich $47,29$. Häufig finden sich auch Rundungsangaben von der Form $7,3 \cdot 10^k$.

Halbierung und Division durch 5

Einen im Dezimalsystem gegebenen Dezimalbruch kann man einfach durch 10 teilen, indem man einfach das Komma um eine Stelle nach links verschiebt. Die Zahl 10, die die Grundlage des Dezimalsystems ist, hat die beiden Teiler 2 und 5. Durch diese beiden Zahlen kann man ebenfalls teilen und erhält wieder einen Dezimalbruch (was für andere Primzahlen nicht stimmt), wobei diese Divisionen algorithmisch besonders einfach durchzuführen sind. Eine Besonderheit liegt darin, dass die Ziffern des Ergebnisses nur von der entsprechenden und von der um eins höherstelligen Ziffer des Dividenden abhängen. Man braucht keinen Übertrag und kann an jeder beliebigen Stelle anfangen.

Verfahren 26.10. Es sei

$$z = \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

ein Dezimalbruch, für den die Halbierung (also die Division durch 2) durchgeführt werden soll. Dazu führt man für jede Ziffer a_i für

$$i \geq k-1$$

die Division mit Rest durch 2 durch, d.h. man berechnet

$$a_i = 2b_i + r_i .$$

Aus diesen Zahlen berechnet man

$$c_i = b_i + 5r_{i+1} .$$

Dies sind die Ziffern der Halbierung von z, also

$$\frac{z}{2} = \sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i .$$

Da die Ziffern a_i zwischen 0 und 9 liegen, sind die b_i zwischen 0 und 4 und die r_i sind 0 oder 1. Ohne die Division mit Rest kann man diesen Algorithmus auch mit der folgenden Fallunterscheidung darstellen. Es ist

$$c_i = \begin{cases} \frac{a_i}{2}, & \text{falls } a_i \text{ und } a_{i+1} \text{ gerade}, \\ \frac{a_i}{2} + 5, & \text{falls } a_i \text{ gerade und } a_{i+1} \text{ ungerade}, \\ \frac{a_i - 1}{2}, & \text{falls } a_i \text{ ungerade und } a_{i+1} \text{ gerade}, \\ \frac{a_i - 1}{2} + 5, & \text{falls } a_i \text{ und } a_{i+1} \text{ ungerade}. \end{cases}$$

Beispiel 26.11. Wir wollen den Dezimalbruch $509,273$ mit dem Verfahren halbieren. Wir fangen hinten an, auch wenn wir an jeder Stelle anfangen könnten, und zwar an der Stelle mit dem Index -4 (die Zehntausendstel-Stelle). Es ist $a_{-4} = 0$, und weil $a_{-3} = 3$ ungerade ist, ist

$$c_{-4} = 5.$$

Aus $a_{-3} = 3$ ergibt sich $b_{-3} = \frac{3-1}{2} = 1$ und da $a_{-2} = 7$ ungerade ist, ist

$$c_{-3} = 6.$$

Aus $a_{-2} = 7$ ergibt sich $b_{-2} = \frac{7-1}{2} = 3$ und da $a_{-1} = 2$ gerade ist, ist

$$c_{-2} = b_{-2} = 3.$$

So fährt man weiter und erhält schließlich

$$254,6365 .$$

Lemma 26.12. *Der Algorithmus zur Berechnung der Halbierung eines Dezimalbruches ist korrekt.*

Beweis. Es sei

$$z = \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

gegeben und es sei $a_i = 2b_i + r_i$ mit $b_i \in \mathbb{N}$ und r_i gleich 0 oder 1 und

$$c_i = b_i + 5r_{i+1}.$$

Da $a_i \leq 9$ ist, ist diese Zahl eine erlaubte Ziffer. Zum Nachweis der Korrektheit müssen wir einfach das Ergebnis $\sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i$ mit 2 multiplizieren und zeigen, dass man so z zurückerhält. Es ist

$$2 \cdot \left(\sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i \right) = \sum_{i=k-1}^{\ell} 2 \cdot c_i 10^i$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=k-1}^{\ell} 2 \cdot (b_i + 5r_{i+1})\, 10^i \\
&= \sum_{i=k-1}^{\ell} (2b_i + 10r_{i+1})\, 10^i \\
&= \sum_{i=k-1}^{\ell} 2b_i 10^i + \sum_{i=k-1}^{\ell} 10r_{i+1} 10^i \\
&= \sum_{i=k-1}^{\ell} (a_i - r_i)\, 10^i + \sum_{i=k-1}^{\ell} r_{i+1} 10^{i+1} \\
&= \sum_{i=k-1}^{\ell} a_i 10^i - \sum_{i=k-1}^{\ell} r_i 10^i + \sum_{i=k-1}^{\ell} r_{i+1} 10^{i+1} \\
&= z - \sum_{i=k-1}^{\ell} r_i 10^i + \sum_{j=k}^{\ell+1} r_j 10^j \\
&= z,
\end{aligned}
$$

wobei sich die beiden Summanden rechts wegheben, da r_{k-1} und $r_{\ell+1}$ gleich 0 sind. □

Auch für die Division durch 5 gibt es einen entsprechenden Algorithmus.

VERFAHREN 26.13. Es sei

$$z = \sum_{i=k}^{\ell} a_i 10^i$$

ein Dezimalbruch, für den der fünfte Anteil (also die Division durch 5) berechnet werden soll. Dazu führt man für jede Ziffer a_i für

$$i \geq k - 1$$

die Division mit Rest durch 5 durch, d.h. man berechnet

$$a_i = 5b_i + r_i.$$

Aus diesen Zahlen berechnet man

$$c_i = b_i + 2r_{i+1}.$$

Dies sind die Ziffern der Fünftelung von z, also

$$\frac{z}{5} = \sum_{i=k-1}^{\ell} c_i 10^i.$$

LEMMA 26.14. *Der Algorithmus zur Berechnung des fünften Anteils eines Dezimalbruches ist korrekt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 26.26. □

Ein weiterer wichtiger Gesichtspunkt in diesem Zusammenhang ist, dass die Division durch 2 das gleiche ist wie Multiplikation mit $0,5$ (also im Wesentlichen Multiplikation mit 5) und dass die Division durch 5 das gleiche ist wie die Multiplikation mit $0,2$. Daher kann man die zuletzt genannten Ergebnisse zur Division durch 2 bzw. 5 auch mit Bemerkung 16.4 begründen.

Die in dieser Vorlesung angestellten Betrachtungen kann man in jedem Zahlensystem wie hier im Zehnersystem durchführen. Die Aussagen gelten entsprechend, wobei die zuletzt genannten Ergebnisse dann für die Teiler der Grundzahl gelten.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Zahlenstrahl 2.gif , Autor = Benutzer Daniel Wolf2 auf de Wikipedia, Lizenz = gemeinfrei 2