

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 31

Übungsaufgaben

AUFGABE 31.1. Zeige, dass das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n in der Tat ein Skalarprodukt ist.

AUFGABE 31.2. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass die Einschränkung des Skalarproduktes auf U ebenfalls ein Skalarprodukt ist.

AUFGABE 31.3. Es sei V ein komplexer Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass der Realteil dieses Skalarproduktes ein Skalarprodukt auf dem zugrunde liegenden reellen Vektorraum ist.

AUFGABE 31.4. Es seien

$$f, g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x) = -x^2 + 1$ und $g(x) = x^2 + x + 3$. Berechne $\langle f, g \rangle$ im Sinne von Beispiel 31.6.

AUFGABE 31.5. Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes reelles Intervall mit $a < b$ und sei $V = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ und $f, g \in V$ sei

$$\langle f, g \rangle_n := \sum_{i=0}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right) g\left(a + i \frac{b-a}{n}\right).$$

Welche Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt $\langle -, - \rangle_n$, welche nicht? Welche Beziehung besteht zwischen $\langle -, - \rangle_n$ und dem Skalarprodukt aus Beispiel 31.6?

AUFGABE 31.6. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\| - \|$. Zeige, dass die sogenannte *Parallelogrammgleichung*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

gilt.

AUFGABE 31.7. Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass in der Abschätzung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

von Cauchy-Schwarz genau dann die Gleichheit gilt, wenn v und w linear abhängig sind.

AUFGABE 31.8. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und der zugehörigen Norm $\| - \|$.

a) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

gilt.

b) Zeige, dass bei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ die Beziehung

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i \|v + iw\|^2 - i \|v - iw\|^2).$$

AUFGABE 31.9. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass der zugehörige Abstand die folgenden Eigenschaften besitzt (dabei sind $u, v, w \in V$).

- (1) Es ist $d(v, w) \geq 0$.
- (2) Es ist $d(v, w) = 0$ genau dann, wenn $v = w$.
- (3) Es ist $d(v, w) = d(w, v)$.
- (4) Es ist

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w).$$

AUFGABE 31.10. Es seien $(V_1, \langle -, - \rangle_1)$ und $(V_2, \langle -, - \rangle_2)$ reelle Vektorräume mit Skalarprodukten. Zeige, dass auf dem Produktraum $V_1 \times V_2$ durch

$$\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle := \langle v_1, w_1 \rangle_1 + \langle v_2, w_2 \rangle_2$$

ein Skalarprodukt definiert ist.

AUFGABE 31.11. Sei $n \geq 2$. Zeige, dass für die Norm $\|x\| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ auf dem \mathbb{R}^n kein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ existiert mit der Eigenschaft $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

AUFGABE 31.12. Zeige, dass ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum durch

$$d(u, v) := \|u - v\|$$

zu einem metrischen Raum wird.

AUFGABE 31.13.*

Es seien $P = (\frac{3}{4}, -1)$ und $Q = (2, \frac{1}{5})$ zwei Punkte im \mathbb{R}^2 . Bestimme den Abstand zwischen diesen beiden Punkten in der

- a) euklidischen Metrik,
- b) der Summenmetrik,
- c) und der Maximumsmetrik.
- d) Vergleiche diese verschiedenen Abstände der Größe nach.

AUFGABE 31.14.*

Es sei A eine nichtleere Menge, $n \in \mathbb{N}_+$ und $M = A^n$ das n -fache Produkt der Menge mit sich selbst.

a) Zeige, dass auf M durch

$$d(x, y) = d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \#\{i \mid x_i \neq y_i\}$$

eine Metrik definiert wird.

b) Bestimme zu $A = \{a, b, c\}$ und $n = 4$ den Abstand $d((a, a, b, c), (c, a, b, a))$.

c) Liste für $A = \{a, b, c\}$ und $n = 3$ alle Elemente aus der offenen Kugel $U((a, a, b), 2)$ auf.

AUFGABE 31.15. Es sei M die Menge aller (Personen)-Bahnhöfe in Deutschland. Zu $a, b \in M$ sei

$$d(a, b)$$

die (zeitlich) kürzeste fahrplanmäßige Verbindung von a nach b . Handelt es sich dabei um eine Metrik?

Es sei T eine Menge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine Funktion. Dann nennt man

$$\|f\| := \|f\|_T = \sup(|f(x)| \mid x \in T)$$

das *Supremum* (oder die *Supremumsnorm*) von f . Es ist eine nichtnegative reelle Zahl oder ∞ .

AUFGABE 31.16. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T . Zeige, dass M ein komplexer Vektorraum ist.

AUFGABE 31.17. Es sei T eine Menge und

$$M = \{f : T \rightarrow \mathbb{C} \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen auf T . Zeige, dass die Supremumsnorm auf M folgende Eigenschaften erfüllt.

- (1) $\|f\| \geq 0$ für alle $f \in M$.
- (2) $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ ist.
- (3) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in M$ gilt

$$\|\lambda f\| = |\lambda| \cdot \|f\|.$$

- (4) Für $g, f \in M$ gilt

$$\|g + f\| \leq \|g\| + \|f\|.$$

AUFGABE 31.18. Es sei T eine Menge und E ein euklidischer Vektorraum. Es sei

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E . Zeige, dass die Supremumsnorm auf M eine Norm ist.

AUFGABE 31.19. Es sei T eine Menge, E ein euklidischer Vektorraum und

$$M = \{f : T \rightarrow E \mid \|f\|_T < \infty\}$$

die Menge der beschränkten Abbildungen von T nach E . Zeige, dass eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus M genau dann gegen $f \in M$ gleichmäßig konvergiert, wenn diese Folge im durch die Supremumsnorm gegebenen metrischen Raum M konvergiert.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 31.20. (4 Punkte)

Es seien

$$f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(x) = 2x^3 - x + 3$ und $g(x) = -5x^2 + 4x - 7$. Berechne

$$\langle f, g \rangle, \|f\|, \|g\|$$

im Sinne von Beispiel 31.6.

AUFGABE 31.21. (3 Punkte)

Sei V ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Bestätige

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4 \langle x, y \rangle.$$

AUFGABE 31.22. (4 Punkte)

Es sei $V = \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Zeige, dass V versehen mit der Abbildung

$$\langle -, - \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (A, B) \mapsto \text{Spur}(B^t A)$$

ein euklidischer Vektorraum ist.

AUFGABE 31.23. (5 Punkte)

Es seien n Punkte P_1, P_2, \dots, P_n in der Kreisscheibe B mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1, also in $B = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, 0) \leq 1\}$, gegeben. Zeige, dass es einen Punkt $Q \in B$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{i=1}^n d(P_i, Q) \geq n$$

gibt.

AUFGABE 31.24. (3 Punkte)

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| \leq 1$ und $\|w\| = 1$. Zeige, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\|v + aw\| = 1$ gibt.