Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 17

> Was die Menschen verbindet, ist nicht der Glaube, sondern der Zweifel
>
> Peter Ustinow

Universelle Eigenschaft der Determinante

Die für die Determinante charakteristischen Eigenschaften, multilinear und alternierend zu sein und die Bedingung, dass die Determinante der Einheitsmatrix gleich 1 ist, legt die Determinante eindeutig fest.

Definition 17.1. Es sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Eine Abbildung

$$\triangle\colon\ V^n \longrightarrow K$$

heißt *Determinantenfunktion*, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) $\triangle$ ist multilinear.
(2) $\triangle$ ist alternierend.

Lemma 17.2. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei*

$$\triangle\colon\ \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K$$

eine Determinantenfunktion. Dann besitzt $\triangle$ folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn man eine Zeile von M mit $s \in K$ multipliziert, so ändert sich $\triangle$ um den Faktor s.*
(2) *Wenn in M eine Nullzeile vorkommt, so ist $\triangle(M) = 0$.*
(3) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich $\triangle$ mit dem Faktor -1.*
(4) *Wenn man zu einer Zeile ein skalares Vielfaches einer anderen Zeile dazuaddiert, so ändert sich $\triangle$ nicht.*
(5) *Wenn $\triangle(E_n) = 1$ ist, so ist für eine obere Dreiecksmatrix $\triangle(M) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.*

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Multilinearität. (3) folgt aus Lemma 16.8. Zu (4) betrachten wir die Situation, wo zur s-ten Zeile das a-fache der

r-ten Zeile addiert wird, $r < s$. Aufgrund der schon bewiesenen Teile ist dann

$$\triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s + av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ av_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + a\triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} = \triangle \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(5). Wenn ein Diagonalelement 0 ist, so sei $r = \max\{i|\, a_{ii} = 0\}$. Zu der r-ten Zeile kann man durch Hinzuaddieren von geeigneten Vielfachen der i-ten Zeilen, $i > r$, erreichen, dass aus der r-ten Zeile eine Nullzeile wird, ohne dass sich der Wert der Determinantenfunktion ändert. Nach (2) muss dieser Wert dann 0 sein. Wenn kein Diagonalelement 0 ist, so kann man durch wiederholte Skalierung erreichen, dass alle Diagonalelemente zu 1 werden, und durch Zeilenadditionen kann man erreichen, dass die Einheitsmatrix entsteht. Daher ist

$$\triangle(M) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}\triangle(E_n) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

□

SATZ 17.3. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es genau eine Determinantenfunktion*

$$\triangle \colon \operatorname{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K$$

mit

$$\triangle(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1\,,$$

wobei e_i die Standardvektoren sind, nämlich die Determinante.

Beweis. Die Determinante besitzt aufgrund von Satz 16.9, Satz 16.10 und Lemma 16.4 die angegebenen Eigenschaften. Zur Eindeutigkeit. Zu jeder Matrix M gibt es eine Folge von elementaren Zeilenumformungen derart, dass das Ergebnis eine obere Dreicksmatrix ist. Dabei ändert sich nach Lemma 17.2 bei einer Vertauschung von Zeilen der Wert der Determinante mit dem Faktor -1, bei der Umskalierung einer Zeile um den Skalierungsfaktor und bei der Addition einer Zeile zu einer anderen Zeile gar nicht. Daher ist eine Determinantenfunktion durch die Werte auf einer oberen Dreiecksmatrix bzw. nach Skalierung und Zeilenaddition sogar auf der Einheitsmatrix festgelegt. □

Der Determinantenmultiplikationssatz

Wir besprechen weitere wichtige Sätze über Determinanten.

SATZ 17.4. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gilt für Matrizen $A, B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ die Beziehung*

$$\det(A \circ B) = \det A \cdot \det B\,.$$

Beweis. Wir fixieren die Matrix B. Es sei zunächst det $B = 0$. Dann ist nach Satz 16.11 die Matrix B nicht invertierbar und damit ist auch $A \circ B$ nicht invertierbar und somit wiederum det $AB = 0$. Sei nun B invertierbar. In diesem Fall betrachten wir die wohldefinierte Abbildung

$$\delta\colon \operatorname{Mat}_n(K) \longrightarrow K,\ A \longmapsto (\det A \circ B)(\det B)^{-1}.$$

Wir wollen zeigen, dass diese Abbildung gleich der Abbildung $A \mapsto \det A$ ist, indem wir die die Determinante charakterisierenden Eigenschaften nachweisen und Satz 17.3 anwenden. Wenn $z_1, \ldots, z_n$ die Zeilen von A sind, so ergibt sich $\delta(A)$, indem man auf die Zeilen $z_1B, \ldots, z_nB$ die Determinante anwendet und mit $(\det B)^{-1}$ multipliziert. Daher folgt die Multilinearität und die alternierende Eigenschaft aus Aufgabe 16.26. Wenn man mit $A = E_n$ startet, so ist $A \circ B = B$ und daher ist

$$\delta(E_n) = (\det B) \cdot (\det B)^{-1} = 1.$$

□

Satz 17.5. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$\det M = \det M^{tr}.$$

Beweis. Wenn M nicht invertierbar ist, so ist nach Satz 16.11 die Determinante 0 und der Rang kleiner als n. Dies gilt auch für die transponierte Matrix, so dass deren Determinante wiederum 0 ist. Sei also M invertierbar. Wir führen diese Aussage in diesem Fall auf die entsprechende Aussage für Elementarmatrizen zurück, wofür sie direkt verifiziert werden kann, siehe Aufgabe 16.11. Es gibt nach Lemma 12.7 Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ derart, dass

$$D = E_s \cdots E_1 M$$

eine Diagonalmatrix ist. Es ist dann

$$D^{\text{tr}} = M^{\text{tr}} E_1^{\text{tr}} \cdots E_s^{\text{tr}}$$

bzw.

$$M^{\text{tr}} = D^{\text{tr}} (E_s^{\text{tr}})^{-1} \cdots (E_1^{\text{tr}})^{-1}.$$

Die Diagonalmatrix D ändert sich beim Transponieren nicht. Da die Determinanten von Elementarmatrizen sich beim Transponieren auch nicht ändern, gilt

$$\begin{aligned}
\det M^{\text{tr}} &= \det \left(D^{\text{tr}} (E_s^{\text{tr}})^{-1} \cdots (E_1^{\text{tr}})^{-1} \right) \\
&= \det D^{\text{tr}} \cdot \det (E_s^{\text{tr}})^{-1} \cdots \det (E_1^{\text{tr}})^{-1} \\
&= \det D \cdot \det \left(E_s^{-1} \right) \cdots \det \left(E_1^{-1} \right) \\
&= \det \left(E_1^{-1} \right) \cdots \det \left(E_s^{-1} \right) \cdot \det D \cdot \\
&= \det \left(E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} \cdot D \right) \\
&= \det M.
\end{aligned}$$

□

Daraus folgt, dass man die Determinante auch berechnen kann, indem man „nach einer Zeile entwickelt“, wie die folgende Aussage zeigt.

Korollar 17.6. *Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_{ij} diejenige Matrix, die entsteht, wenn man in M die i-te Zeile und die j-te Spalte weglässt. Dann ist (bei $n \geq 2$ für jedes feste i bzw. j)*

$$\det M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}.$$

Beweis. Für $j = 1$ ist die erste Gleichung die rekursive Definition der Determinante. Daraus folgt die Aussage für $i = 1$ aufgrund von Satz 17.5. Durch Spalten- und Zeilenvertauschung folgt die Aussage daraus allgemein, siehe Aufgabe 17.5. □

Die Determinante einer linearen Abbildung

Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung eines Vektorraumes der Dimension n in sich. Diese wird bezüglich einer Basis durch eine Matrix $M \in \mathrm{Mat}_n(K)$ beschrieben. Es liegt nahe, die Determinante dieser Matrix als Determinante der linearen Abbildung zu definieren, doch hat man hier das *Problem der Wohldefiniertheit*: die lineare Abbildung wird bezüglich einer anderen Basis durch eine „völlig“ andere Matrix beschrieben. Allerdings besteht zwischen den zwei beschreibenden Matrizen M und N und der Basiswechselmatrix B aufgrund von Korollar 11.11 die Beziehung

$$N = BMB^{-1}.$$

Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes ist daher

$$\det N = \det \left(BMB^{-1} \right) = (\det B)(\det M)(\det B)^{-1} = \det M,$$

so dass die folgende Definition in der Tat unabhängig von der Wahl einer Basis ist.

Definition 17.7. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich einer Basis durch die Matrix M beschrieben werde. Dann nennt man

$$\det \varphi := \det M$$

die *Determinante* der linearen Abbildung φ.

Adjungierte Matrix und Cramersche Regel

Definition 17.8. Zu einer quadratischen Matrix $M \in \operatorname{Mat}_n(K)$ heißt

$$\operatorname{Adj} M = (b_{ij}) \text{ mit } b_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ji}\,,$$

wobei M_{ji} die Restmatrix zur j-ten Zeile und zur i-ten Spalte ist, die *adjungierte Matrix* von M.

Achtung, bei der Definition der Einträge der adjungierten Matrix werden Zeilen und Spalten vertauscht.

Satz 17.9. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann ist*

$$(\operatorname{Adj} M) \cdot M \;=\; M \cdot (\operatorname{Adj} M) \;=\; (\det M) E_n$$

Wenn M invertierbar ist, so ist

$$M^{-1} \;=\; \frac{1}{\det M} \cdot \operatorname{Adj} M.$$

Beweis. Sei $M = (a_{ij})_{ij}$. Die Koeffizienten der adjungierten Matrix seien

$$b_{ik} = (-1)^{i+k} \det M_{ki}\,.$$

Die Koeffizienten des Produktes $(\operatorname{Adj} M) \cdot M$ sind

$$c_{ij} \;=\; \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki}.$$

Bei $j = i$ ist dies $\det M$, da es sich bei dieser Summe um die Entwicklung der Determinante nach der j-ten Spalte handelt. Sei $j \neq i$ und es sei N die Matrix, die aus M entsteht, wenn man in M die i-te Spalte durch die j-te Spalte ersetzt. Wenn man N nach der i-ten Spalte entwickelt, so ist dies

$$0 \;=\; \det N \;=\; \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{kj} \det M_{ki} \;=\; c_{ij}.$$

Also sind diese Koeffizienten 0, und damit stimmt die erste Gleichung. Die zweite Geichung ergibt sich ebenso, wobei man die Entwicklung der Determinante nach den verschiedenen Zeilen ausnutzen muss. □

Satz 17.10. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & c_n
\end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Es sei vorausgesetzt, dass die beschreibende Matrix $M = (a_{ij})_{ij}$ invertierbar sei. Dann erhält man die eindeutige Lösung für x_j durch

$$x_j = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & c_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & c_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\det M} .$$

Beweis. Für eine invertierbare Matrix M ergibt sich die Lösung für das lineare Gleichungssystem $Mx = c$, indem man M^{-1} anwendet, d.h. es ist $x = M^{-1}c$. Unter Verwendung von Satz 17.9 bedeutet dies $x = \frac{1}{\det M}(\text{Adj } M)c$. Für die j-te Komponente bedeutet dies

$$x_j = \frac{1}{\det M} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} (\det M_{kj}) \cdot c_k \right) .$$

Der rechte Faktor ist dabei die Entwicklung der Determinante der Matrix im Zähler nach der j-ten Spalte. $\square$

Beispiel 17.11. Wir lösen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramerschen Regel. Es ist

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}} = -\frac{11}{23}$$

und

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}} = \frac{30}{23} .$$

Abbildungsverzeichnis