教育部審定

花縣徐甘棠譯述
紹興壽孝天校訂

第一編

布利氏

新式算學教科書

上海商務印書館出版

原序一

(譯者按近世教授算學,多墨守舊法,算術幾何三角,累級而升,惟恐隕越各科初級淺理雖多,然步驟既困,自難融會,聰明是塞,日力遂廢,是書編纂,獨出心裁,融合各法會通發揮,有盡去陳滓一爐而冶之妙.實教科至精之本.原書二序,一述是書編輯之史旁及美國教育,一述是書編次之法,暢言事理,皆證此編之美.茲特概舉譯要,庶窺大凡)

比年來美國中學教科。力行改革。首倡格致。而手工商學農務算學。皆接踵而上。列入講席。氣象一新。然著手更革時。議者深文周納。肆力抨擊。及今日人才蔚起。文學算學。皆不願舍諸科而獨立。即甚守舊者擯斥無厭。及下筆著書。亦新舊雜進。足知世變方殷。來軌無極。踵事增華者。其進正未可量也。

改良之徒。旣與頑舊抗。乃大力合諸科之要。以應學生之求。今日視爲重要有益者。厥爲監視問學之功。引學生發舒思力。而與人類精力奮勇之性。有恰合之度。然此非修改學科內容不可。變而通之。擴其腦力而充之。此眞教師廣求善法之良會也。

近數年諸科皆進。而算學獨後。代數祇稍更節目。引用圖線。排次問題。略去繁曲而已。雖變而尚不足以應世運。代數如是。則千載不變之歐几利德之幾何學又如何。今之教習。

常恨學生不明算學旨趣者何多。其頑舊者。甚以爲不必導學生至通曉之程度。夫學生不明教授之理者至於四分一。而擁皋比者。尙剌剌怨及門之不才。是其人不足與論教育。可以必矣。蓋其爲人絕無觀察社會之能力。洗酣舊籍。夢想高遠。失學校之眞生命。而尙以爲教員執去害馬之理以裁黜學生爲天職也。甚矣封於故見。不審歷史之誤人深矣。

中學算學教授法。須徹底再造。事理昭然如日月麗天。一九〇三年。美國算學會大會。會長所有建議。而贊成從新組織教科內容及教法者。陳詞紛上。交口敦促。芝加高大學教育院者。教育實驗之中心點也。乃以此事自任。一九〇三年以來。求算科再造之法。釋紛解難。決定非數科融合教授不可。是故本書隨事指列。深得發揮旁通之妙。稍具眼光者。皆趨重此種教法。而決其有教育之力。

是書由實驗而來。特敍其歷史如下。一九〇三至〇四年之間。芝加高大學及附屬中學算學教員會議。決行采用會通法。定算學之課程。後一年。用模寫法。印刷爲第一年教科書。閱年增修重刊。一九〇六年夏。修成中學通用本。署曰中學第一年算學。未幾。本大學印刷局。廣印以應別校之求。幷收回出版權。一九一〇年。續印"中學第二年算學"。自是以來。本大學附屬中學。遂專用此書。此書雖由十二年經驗而成。然布利士力一人執筆著述。考驗勤劬。勞苦功高。允宜以撰述之名歸之。著者嘗以此書教授。具有閱歷。凡所編次。曾

收奇效。略舉特異者如下。

1. 取算學各科性質最相近可互相發明者。貫串出之。習算之難。可釋然無餘。

2. 是書經同學教員評騭討論。刪繁增要。務求明達。雖無閱歷之講師。亦能按序指授。無有凝滯。蓋編次之良美。實臻實驗之絕頂也。

3. 心理研究。學務所重。是書取材。恰與學生心理相應。手捧耳聆。自能領悟。

4. 是編多述幾何。引人入勝。且能令學者奮入門之力。拾級而上。升堂入奧。直造玄妙。

此皆本書造福之犖犖大端。至若命詞之淺易。習題之秩序。條分節比。皆可稱道。總而言之。實津逮初學之輿梁。啓發思力之秘鑰也。今日十三四歲男女生習之。必知所以著想之道。而獲無窮之益。是則同人所深信者。

芝加高大學印務局司員

摩爾
米爾　同序
昃德

原序二

著者編是書時。所持以爲的者。略有數端。

(1) 凡中學初級算學。如代數幾何三角等。皆蒐取淺易。旁及深賾。淺者編入導級。務與初學宜。而引之宛轉入繁奧之處。

(2) 代數幾何三角三種算科。若第一年班生祇習一種而遺其餘。則往往不明算學之理。馴至廢學荒志。舊法。第一年生專習代數。窘於艱深。慚愧退衄者。所在多有。顧慮幾何。彌覺高深。無自信力。遂失鑽仰之誠。今合二者會通而教之。旣能了悟。興味自生。發揚蹈厲。必願踴躍進習他種。

(3) 代數幾何有密切關係。工程諸學。皆已明認。今兩科合教。實中學程。且兩科未完之理。皆可互補。而圖線公式。用達數理。尤有左提右挈之益。閱者一覽。自可了然。并能推深解繁。鞭辟入裏。故融會教授法。實令學生邁步於數學之途。若履康莊。平蕩無罣。本編始終談幾何。而以代數明之。而代數同時發展。解示圖形所不能達之理。

(4) 近年中學規定卒業之算學範圍稍窄。若如舊法。習算一年。所得甚寡。幾何學與人事境地相關之益。萬無了解處。

(5) 學生性喜實用。凡補益物事。願安承教。今授算者。能以各科精要分配初級。學生明睹美利。定生愛悅。著者深知代數高於幾何。允宜明白引用。互相發明。以收實益。若三角

術。尋常非至第三四年者。不能窺其緒論。然利用最廣。爲理非深。宜擇其基本名號。援引解題。本編據此理義。開卷未幾。卽詳釋名意。以牖初學。大抵測量法卽其實用也。

算學專習一科時。結果常得公式。代表算理。然公式實非初學所宜。惟會通法能除其蔽。旁通曲達。批隙導窾。理解旣暢。公式自明。較強記一式者。爲利溥矣。又算理非極要而不易明者。不宜過事著力。徒費精神。今之會通教法。標幾何之形。演形圖之性。學者步步入勝。發蒙振落。自悟定理。較之徒憑論理法敷陳者。難易不啻倍蓰。所謂公理。乃天然自知之理。宜布置合宜。務中窾會。若論理證法。書中間有。雖非正式。深可裨補。蓋學者藉此能知定理之確當。并可作第二年算科之備也。代數取題解理。最稱簡利。引而伸之。問題性質。皆可字列。爲益多矣。本編於代數條例。詳詞釋義。無有剩理。且免代字雜出不知用意之弊。誠以此也。

書中論理之處。區別明白。不苦初學。如正負數之義。無例之理。正負數之用等。必俟學生明習無號數字之意。運用變化之理。然後始高陳玄義。而學生之窘難去矣。

著者對於本中學新算學教員。必留意考其所苦。并廣求教員評騭本編采用之理法。而芝加高大學教育院。復以此爲實驗教育之書。或有批斥。因以修改。其結果。遂成一完美之敎科書。

中學教員之教授法。宜令學生不假助他人。自能誦習。著

者卽本此旨。研究中學生所苦以爲難者。避去不用。章末各有提要。使溫習一章之節目。第十九章敍別特異之題理。觸發學者之興味。蓋是書前後陳義頗廣。卽非健忘。亦易漏略。得此提之。冀補萬一。

本書編次勝於舊法。可簡舉如下。(1)學生能得算學較廣之基礎。一年之後。洞悉幾何要理代數公式。可以驅數馭題。凡函兩三未知數之方程。能合幾何代數演之。有手揮絲桐目送還雲之妙。(2)內容豐美。學生與其父兄。恆怪學堂授算。一年所得僅識一科。今旣會通。包羅自廣。解實用之題。去公式之錮。學生見代數術勝於幾何法。而三角術又有高出代數幾何之妙。禪房花木。曲徑通幽。興味無窮。益自奮勵。至若費時少。進步多。尤其餘事。

教員善於推移者。可由此引伸教授新法。譬之開殖新地。以舊遺之材。成異製之物。樣式豐而目的達。樂當無旣。且新材雜出尤能使教員對學生有所激發。則尤有裨益矣。

芝加高大學附屬中學算科主任布利士力序

學生讀書法

學生讀書時之習慣。較之所習之學科。尤爲重要。略舉讀書法如下。若執以爲繩準。則學者之腦。可成有力之機具。凡讀書。須以習課之時少而習得之課精爲主。

1. 定一日讀書之課程。劃定讀算之時刻。如此。可得聚精神辦一事之習慣。

2. 預備習此課時應用之物。如課書。劄記簿。尺。規。要用之特別紙件等。寫時須光由左來。

3. 明曉號定之課。教員號課時所提之義意。練習用筆記之。記時須確當。并記指示參觀之書。初習課時。先提出課中之要目。

4. 練習引用課書。則能助學者用別書。故書中之標目及注脚等之用意。須明白并常引用。

5. 習課不可失時。坐下卽讀。聚精會神。不爲外緣所動。務令學習之力。能聽令而行。

6. 讀書例。須從速讀過一遍。然後再精細覆讀。譬如欲解一題。必先讀過。確知何者爲已知數。何者爲未知數。而求證。明白了解。方行著手解題。

7. 讀書須獨習。練習獨自判題獨自解題。凡獨習者可稱忠實。

8. 試將所學者施諸實用凡日常之事。能展所學者卽爲之。且以素所熟習之理釋之。

9. 凡學課須有味。故參觀之書須搜讀。幷以所學告父母。而以最有興味者與之討論。

10. 常温習舊課。苟課中有未明者。則温習時必能了解。

11. 日中功課須預備。習慣依時應所求。實極端緊要。

以上各節。乃由芝加高大學附設中學用之學生讀書法引錄。凡學生欲知所以學。教習欲學生能得實用所學。則上說殊爲有用。

名人像傳

目　次

第十七章 函兩個或多個未知數之直線方程

第十八章 公式

第十九章 温習及補題

Sir Isaac Newton

奈端肖像

(1 之 前)

奈端小傳

奈端者。自有生民以來。第一大算學家物理學家也。奈。英國林肯西縣烏士合鎮人。生於 1642 年十一月二十五日。嘗肄業於江橋三一大學。算學之才。在學時已度越恆軌。夙嗜笛卡兒之幾何學。刻伯爾之光學。偉熱他之算術。温士官田之雜算。華利士之筆算等書。

1665 年。大學畢業。是年卽發明二項乘方例及流數術(卽微積術)。其後發明物理學各例。并地心吸力例。著作無算。朋交敦促。始肯付梓。往往成書後多年。方傳於世。嘗著一書。署名"筆算學會通"。實卽代數。書中初談正負分數。并用無窮數爲指數。其傑作爲"數理"。(舊稱奈端數理。卽李善蘭不敢譯者。見華衡芳學算筆談。)是書精深微渺。算學界推爲第一書。書凡三卷。梓於 1687 年。

奈端嘗受選任議員。入國會。1705 年。女皇安尼。爵以都尉世職。時國內格致名流。創格致會。名忠皇會。精研天算物理。推奈爲長。歷二十五年。又任江橋大學之地學會會長三十二年。

奈體不高。晚年稍碩。然中度勻稱。方頤。棕眼廣顙而形銳。三十歲後。髮有二毛作栗色。及老。皓髮盈頰。銀色披兩肩如織。主教本匿。嘗稱之爲極白之靈魂。波路曰。'奈端爲人極坦直忠實。對於爭名之仇。雖公正不疑。然頗傷量不廣"云。

奈端自評曰。"我所表示於世界者如何。余不自知。自我內視。則如一小童徜徉於大海之濱。時得一潤滑之圓石。或發見一美逾尋常之貝殼。而彼眞理之大洋。內蘊無窮。未發明之奧。方浩渺無際於余前"云。卒於倫敦。時 1727 年三月二十日。得年八十五。葬於威士文士打禮堂。

布利氏

新式算學教科書

第一章

直線

線段之量法

1. 直線. 放界尺於白紙上。以尖利鉛筆傍尺一畫。所作得之線。卽尋常所稱之直線。凡扯直之電線。繃緊之繩，日光穿小孔射入暗室之一段等。皆以此名詞稱之。

學室中能見有他種直線之式樣者。可指出。

2. 形學線. 上節所舉各式樣。性質不同。其所共有者爲長度。若以科學名詞讀之。則此'線'字。專指長而言。絕無闊窄厚薄之義。故凡形學線。祇有長而無寬無厚。

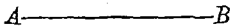
3. 點. 塵一點在空氣中。白粉一點在黑板上。針之極尖處。皆可爲點之式樣。此卽常用之字義。如以正當之科學意義言之。則粉之白色。塵之灰色。及微塵所佔之地位。皆所不計。故依科學論。點者所以示地位。無長寬厚之可言。

4. 點號法. 直線上一點之地位。本以一小豎畫或一點示之。如第一圖之三點是也。今以 A, B, C, 名之。科學法習慣。凡點。皆以大寫字母名之。

第一圖

5. 線段. 凡線上兩點中之一部。名爲線段。簡稱之曰線。如第一圖之 AB 及 BC. 皆以線字概之。

6. 長度量法. 界尺之邊。刻有分寸。將此邊傍第二圖 AB 線段放下。數由 A 至 B 之分寸數。凡以線段之長度。(如上圖 AB) 與已證定共知之段(如寸如碼)相比。稱爲量度此線段，依普通語言之。量度一線段者。即求此線段容該線段之倍數也。該線段。名基本單位。又名準箇。

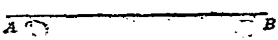


第　二　圖

2. 長之基本單位. 世界文明諸國。多以人足之長。爲長之基本單位。其結果。遂至規定之長度。各不相同。法蘭西國會。派員核設一定式長度。一七九三年。法國取所定者爲公量度。今日各國格致界。皆沿用此度。此度名米達。原物乃白金條。長若英尺1.1碼。大約爲地球北極至赤道沿經線長之一千萬分之一。米達均分一千度。每度名米利米達。十個米利米達爲一生的米達。十生的米達爲一地斯米達。十地斯米達爲一米達。

習　　題

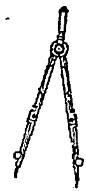
1. 用界尺以生的米達分度者。量第三圖 AB. 核計生的米達數。



第　三　圖

2. 用生的米達尺量此書篇頁之旁。

8. 規. 第四圖之規。乃量度之具。佳製之規甚準。於多種量度事甚有用。凡欲成最準之工者。須練習至隨時可用。



第四圖

9. 規之用法. 量線段可用規。第六節以尺量第二圖 $A\ B$ 之法。可以規代。先以規兩股之尖放於 A,B. 隨取起放於尺上。數兩尖中間之寸數,或生的米達數便可。

習 題

1. 用規量第二圖之 AB, 求寸數。

2. 用規量第三圖之 AB, 求生的米達數。

3. 用規量本書篇頁之長度。

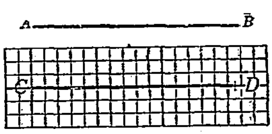
若長度不恰合寸數。則先計整寸數。其餘不及一寸者。可計有幾個一寸之八分一,或一寸之十六分一。

4. 隨意作兩點於紙上。估度其相距之長短。後用規再量之。更正前數。

10. 方格紙量法 下文之習題。可以解釋用方格紙量線段之法。(方格紙者。爲印定之紙。專爲科學工程繪圖之用。本館出售。)

習 題

1. 量第五圖 AB 之長度。求生的米達數。 用方格紙法。



第五圖

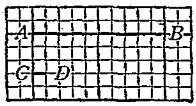
以規兩股尖。按於 A,B, 兩點。取起。以一尖按於格上之交點處。又一尖挨直線按下。如圖之 CD, 每

方格長闊各一生的米達。試計 CD 中間之生的米達數。其溢餘者。估算爲一生的米達之十分幾。將得數以小數式寫出。

2. 作一線段。以生的米達計其長短。將得數以小數式寫出。

3. 作一線段。量其長短之最近數。用小數式列出。小數寫兩位。

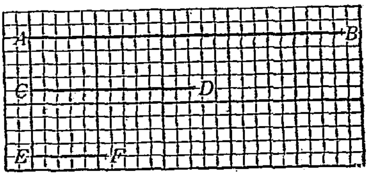
求小數兩位之法。須先求一長度。等於小方格十倍之長，而以此度之。如第六圖。AB 爲 1, CD 爲 .1, 何解？再懸忖 CD 均分十分，則 CD 之 .1, 爲 AB 之 .01。



第六圖

第七圖之 AB 線段爲 2.35, 何解？

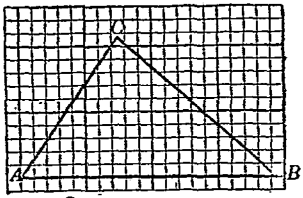
4. 量第七圖之 CD 及 EF 兩線段。求至小數二位。



第七圖

5. 作線數條。用規及方格紙量之。求長度至小數兩位。

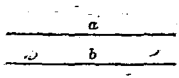
6. 量第八圖之 AB, BC, CA, 三段。得數求至小數兩位。



第八圖

7. 作一三角形。量其三邊之長度。至小數兩位。

11. 等線. 設一線段放於他一線段上。此段兩端恰合於彼段兩端。則此兩段。名爲相等。第九圖之 a 段 b 段。乃相等。讀法爲 a 等於 b. 寫法爲 $a=b$.



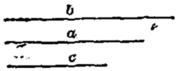
第九圖

習 題

1. 試作兩相等之線段。

12. 不等線. 設有 b 線段放於 a 段。所蓋過者僅爲 a 之一分,則 a 與 b 爲不等。寫法爲 $a \neq b$. 讀法 a 不等於 b.

第十圖 a 小於 b 而大於 c. 第一節寫法爲 $a<b$. 第二節寫法爲 $a>c$.

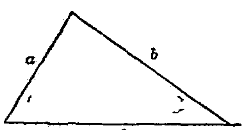


第十圖

13. 線段號. 上數節所論之線段。可用二法指明之。(一)於線之兩端。用大字母標出。(二)於線段之中間處。用小字母號之。第二法之小字母。常用以代該段之長。所以此小字母。可作爲一個數。而於量後得之。

14. 字母數. 凡一數以一字母指之者。爲字母數。第十一圖 a,b,c 所指之數。試以量法求之。

15. 數之代法. 凡數。可以線段或字母代之。凡以線段所代之數。可以量法得之。



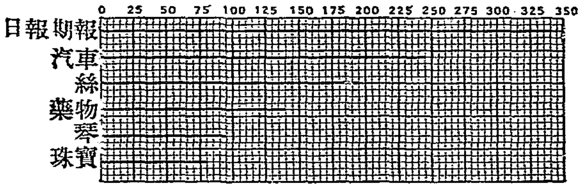
第十一圖

習 題

1. 用線代以下所列之數：3, 14, 4.5, 7.8, 2.45, 1.64, 32.

2. 任作數線。用量法求此數線所代之數。

16. **圖線表.** 以線段代數者。名曰數之圖線表。下圖所表。乃1909年美國人民應用及耗費之款。以百萬元起計。如珠寶一項。耗款76個百萬。卽七千六百萬元是也。



第　十　二　圖

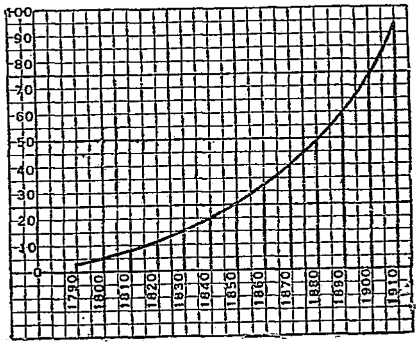
表示數量之法

17. 用圖表示統計數及格致研究誌記之數。極有用處。用此法者有數種。

第一法. 今將美國人口數。由1790年至1910年之報告取出。列成下表。

年	人口	年	人口
1790	3,929,214	1860	31,443,321
1800	5,308,483	1870	38,558,371
1810	7,239,881	1880	50,155,783
1820	9,638,453	1890	62,947,714
1830	12,860,702	1900	75,994,575
1840	17,063,353	1910	91,972,266
1850	23,191,876		

第二法. 以上之數。可用圖表中之線表出。如第十三圖法。則略一審視。上列之數。可全盤明瞭。且能一望卽知歷年人口數變更之情形。不必細查各線代表之數。最美之法。以線聯各表線之末端。如此。并可預指1920之人口數。此法之好處。在於比較各數。如國債,各國海軍,煤斤銷耗數等。



第 十 三 圖

學生可將上兩法。比較其佳處。

第三法. 凡事實可代以字母數者。今以下題之法示之。

如有車一連。於相等之時候。行相等之路程。此等行動。名"平動"。於一定之時(卽一句鐘)所經過之路。名該車之"速率"。所以該車如一點鐘行30里。其速率爲每點30里。如是該車行兩句鐘。其程爲2×30里。行三句鐘。其程爲3×30里。行四句鐘。其程爲4×30里。餘以此類推。故如行t句鐘。其程爲$t\times30$里。總言之。 程＝時×速率。

如以字母代之,卽爲 $d=t\times v$.……………………………(A)

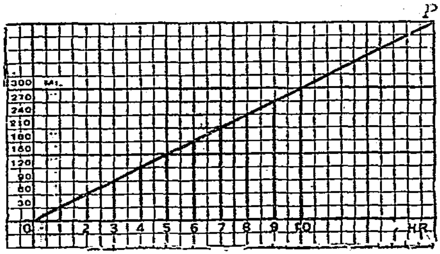
如此.若 $v=30$, 則 $t\times v$ 可代以下表之數。

鐘點數	1	2	3	4	5	6	7
行程里數	30	60	90	120	150	180	210

(*B*)

此數亦可以圖綫表明之。如第十四圖。是圖之線甚勻。蓋聯各線末點之線*OP*.乃直線也。如此。讀者一望便知當某時車行所過之程。(圖中之橫線代時,竪線代程。)

第十四圖



(*C*)

習　　題

1. 由圖綫表求車行十五句鐘之程.十二句鐘之程。

2. 某車行動速率。每句鐘20里。依上(*B*)表之法。求十句鐘所過之程。再以(*C*)圖表之法求之。

18. 格表根據數. 依下法作線。并指出線段所示之事。

習　　題

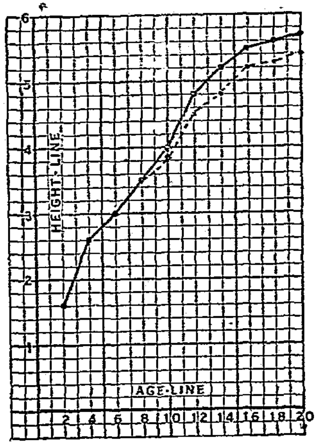
1. 下列之男女童高度。試以圖綫表作線。

年齡	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
男	1.6尺	2.6	3.0	3.5	4.0	4.8	5.2	5.5	5.6	5.7
女	1.6尺	2.6	3.0	3.5	3.9	4.5	4.8	5.2	5.3	5.4

於圖線內作一直實線如第十五圖。此線長一尺。各年齡之高度。以點誌之。以曲線聯各點。男童以實線。女子以虛線。

據圖表。男童以何年齡高最速。?

此答可按上表或圖線求得。



第十五圖

2. 美国之人口數。以百萬計。其進步自1790年起如下： 3.9, 5.3, 7.2, 9.6, 12.9, 17.1, 23.2, 31.4, 38.6, 50.2, 62.9, 76.0, 92.0 依上法。求此各數之線。

3. 某地每月之雨雪總數。以寸數算。三十年來之勻數。表列如下。

正月……2.80	五月……3.59	九月……2.91
二月……2.30	六月……3.79	十月……2.63
三月……2.56	七月……3.61	十一月…2.66
四月……2.70	八月……2.83	十二月…2.71

作線法。可將圖表內兩格之寬代一寸。依上列之根據數。先定點。然後以線聯之。指出該線所表示之狀。

4. 某學堂定例。凡學生之眼。年驗兩三次。計連驗十六年。下列之表。列明各班生近視之百分數。并由一班至高一班之增多數。依此等根據數。求作線。何時此增數爲最低。? 何時最高。? 指出此線之特別處。

班數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
百分數	2.8	4.6	7.8	11.7	12.1	15.3	17.0	22.5	29.7	36.
增數	–	1.8	3.2	3.9	.4	3.2	1.7	4.5	7.2	6.3

5. 1910 年美國人口數。以百萬計。按下表開列人種國名及父母種數。據此等根據數。求格表線。

	土著白父母土著	土著白父母外國人	外人白	黑	紅人	日本人	中國人
男	25.2	9.4	7.5	4.9	.13	.063	.067
女	24.3	9.5	5.8	4.9	.13	.009	.005

6. 緯線 42° (卽 42 度)處。每天之長短。由日出至日入。勻數如下。求作圖表線。

小時數	小時	小時
正月 16…9.5	五月 16…14.5	九月 15……12.5
二月 15‥10.5	六月 15…15.0	十月 16……11.2
三月 16‥11.9	七月 16…14.9	十一月 15….9.6
四月 15‥13.3	八月 16…13.9	十二月 16….9.1

7.　用上題之格紙,尺度,日期。求以下各地之均日長度線。

緯線 18°: 9.7, 10.8, 12.0, 13.3, 14.4, 14.9, 14.6, 13.7, 12.5, 11.2, 10.5, 9.5.

緯線 45°: 9.1, 10.4, 11.9, 13.5, 14.9, 15.6, 15.3, 14.1, 12.6, 11.1, 9.6, 8.8.

以上二緯度之日長度。據二線所表示。有何不同之處。?

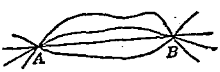
8.　某童每禮拜儲銀兩角。蓄於撲滿。試依上(*B*)法。表列每十禮拜所得之角數。用誌表線示之。又用字母。依上(*A*)法代各數。須記儲款數 C。常爲 2 乘禮拜數 W。

19. 試驗界尺法. 欲確知傍界尺所作之線是否平直。木匠常用下法試驗。: 由尺之此端。挨尺旁望至彼端。首尾兩端。可合爲一線。若中間各處。與首尾合爲一點。則此尺旁可爲平直。

驗試又法:　點兩點於紙上。將界尺放下。以尺旁挨此兩點。作直線一條。將尺首尾換調。仍挨此兩點再作一線。若兩線合而爲一。則可證此尺旁甚平直。

學生宜以上二法。試驗所用之尺。

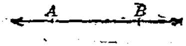
20. 合線. 依上節法。可知此線之兩點。與彼線之兩點相合。則此兩直線。必并爲一線。此兩線名爲合線。觀第十六圖。可知由此點至彼點。可作多線惟其中祇有一線



第十六圖

爲直線。換言之。凡經過兩點。祇可有一直線。此兩點。可定直線之位置。

21. **引長直線.** 兩點之間。旣祇可作一直線。則此線可以傍直邊伸展。第十七圖之線段。向兩端伸展。以箭形表示之。如此謂之"引長"。



第十七圖

試 A, B, C, 三點於紙。此三點不在一直線內。隨作 AB, BC, CA 三直線。量此三線。證明 CA 短於 CBA 之線。

22. 兩點間最短之線爲直線. 此理之科學正義。雖未深知。然平常之意。以此爲合。卽如有人欲以最速之度。由此點達彼點。必擇直線爲至短之線。畜生中亦有明此理者。如主人招狗。則狗必取直線往就其主。

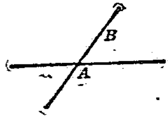
23. **公理.** 上文二十節二十二節內下有線畫之兩句。可作爲眞確。是名公理。凡曰公理。大抵詞義顯確。人皆以爲然者。公理之特別屬於幾何學者。時或稱爲"假定之理"。上兩節之公理。別書有稱爲假定理者。其意相同。惟本篇中若引此兩句。常寫爲公理一,公理二。學者須記之。

24. **交點.** 經過一點。可作多線。兩直線若祇有一點爲公共之點。此兩線名爲相交。而此點名爲交點。

習　　題

1. 過一點 A. 試作數線.

2. 設 A 爲兩線之交點。試證此線內之任一點 B.（第十八圖）不能合於彼線上。



第十八圖

25. 公理三. 兩直線。祇可相交於一點。蓋兩線若公有兩點則兩線必合爲一線。

提 要

26. 本章所教之名目詞意如下。：直線。線段。點。長度量法。長度準個。等線。不等線。字數。引長線。相合線。公理。交點。

27. 各器具之用法如下。：界尺用以作直線及量度。矩規用以定線段。方格紙用以量線繪圖。

28. 所用之號如下。：＝作相等用。＞作大於用。＜作小於用。≠作不等用。× 卽相乘。

29. 表示統計數及科學根據數。有三法如下。：

1. 列成表式。
2. 用線代各數。
3. 用字母代各實數。

30. 公理。

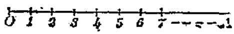
1. 兩點之間。祇可有一直線。
2. 兩點之間。直線爲至短之線。
3. 兩直線。祇可相交於一點。

第二章

加法減法

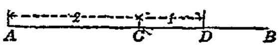
圖線加減法

31. 量度數. 第十九圖。由 O 點起。以一線準箇分段。使成爲形學之段數。如 1, 2, 3, 4, 等。依此法。則 1, 2, 3, 諸數。在 OA 線上，指出由 O 點起有幾個準箇。此法之 1, 2, 3, 4,…… 等數。卽爲數度。此等數。常見於米達尺，寒暑表，工程尺，等處。



第十九圖

32. 總數 設兩線。一長 2 生的米達。(以後簡稱生的)，一長一生的。以次放於一無窮長線上。如第二十圖之 AB。兩線相續。祇一點爲公有。於是連爲一線。如 AD 爲二生的及一生的之總數。寫法爲 $2+1=3$.

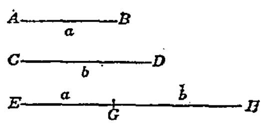


第二十圖

習題

1. 用線加法。求下列各兩數之總數。4 與 3, 2.2 與 3.1, 6 與 1.4.

2. 設 AB 與 CD 爲兩線。見二十一圖。以 a 與 b 代兩線之長度。求 $a+b$ 之總數。如 EH.



第二十一圖

Francois Viete

偉熱他肖像

(14 之 後)

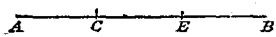
偉熱他小傳

偉熱他。1540年。生於法國方坦尼省保道城。1603年。卒於巴黎。壽六十三。偉氏有算學創始之才。1591年。刊偉氏算學中多代數新理要言。以是人稱爲近世代數之祖。書中以響音字母代未知之數。無音字母代已知之數。嘗討論三次及二次方程。發明求方程略數根之法。又設法解四十五次方程。此方程。以難解著於時。偉氏獨能釋之。解法用三角術。時法與西班牙啓釁。西人軍書用密碼。偉氏研究得其秘。凡截得之書悉解之。法王因其機。戰輒利。偉氏算術。爲一時疇人之最。學者宗之。性喜算。視布算爲行樂之具。著算書多種。讀者可於疇人傳中求之。

此題指示可用字母代線之法。用字代線之益處。乃於未得字母所代之數之前。可以作爲得其總數。

3 以 c 代二十一圖之 EH 長度。又量 AB, CD, EH. 證 $a+b=c$.

4. 用量法。證明二十二圖之 AB 全線。數等於 AC, CE, EB, 之總數。



第二十二圖

此第四習題。可得下公理。

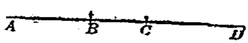
33. 公理 4. 全等於其分之和。

34. 公理 5. 全大於其分之任一分。

習題

1. 作 a, b, c 線三條。令 $a=3.4$ 生的。$b=2.3$ 生的。$c=1.5$ 生的。再作線等於 $a+b+c$.

2. 二十三圖之直線上。$AB=CD$. 用量法。證 $AC=BD$.



第二十三圖

3. 不用量法。證明二十三圖 $AC=BD$.

(證法) 既設 $AB=CD$ 二十三圖

又 $BC=BC$

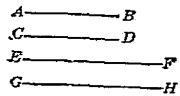
加法得 $AB+BC=CD+BC$

即 $AC=BD$ (公理四)

此題證法之第三級。可得公理如下.

35 公理 6. 相等數同加一數。得數相等。

1. 設 AB, CD 兩線(二十四圖)相等。又設 EF 與 GH 兩線相等。求 $AB+EF=CD+GH$. 用量法證之。



第二十四圖

2. 設 $a.b.c.d$ 代四線。其長度如下。

用量法證

$$\begin{array}{c} a=b \\ c=d \\ \hline a+c=b+d \end{array}$$

此題可得公理如下。

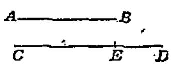
36. 公理 7. 相等數加相等數。得數相等。(此爲加法公理)

37. 公理第四至公理第七。雖此處祇設線段。惟凡物皆同此理。 卽如一班學生之數。必大於班中一行之數。 此屬公理何條。?

若以同數之蘋果放入兩箱內。兩箱原有之蘋果原相等。則加後兩箱之蘋果仍相等。 何解。?

設某課堂之學生數 a, 等於別課堂之學生數 b。又設第一課堂之女生數 c 等於第二課堂之女生數 d。由公理7. 可知 $a+c=b+d$。卽謂加入後。兩堂學生之數仍相等也。

38. 較數. 放直線 AB 如二十五圖於 CD 線上。使一端平齊。則餘出之 ED, 卽爲 CD 與 AB 之較數。此數可用別法指出。 第二十五圖卽 CD 減 AB 等於 ED. 寫法 $CD-AB=ED$.



(較數或作差數。又作餘數。俱通用。)

39. 號. 上文所用之＋及－兩號。與筆算學所用相同。讀作加減。凡有此兩號者。卽指明兩數須用加法或用減法。

習　題

1. 用圖表線法。表示6減3.5.

法如二十五圖。作 $AB=3.5$. $CD=6$. 然後量 ED.

2. 用線法。求某數 m 減去較小之數 s. m 與 s 之較數。以 d 代之。以量法證 $m-s=d$.

40. 方程. 上文之 $a+b=c$, $m-s=d$, $CD-AB=ED$. 各式。指明相等數。名之曰方程式。

習　題

1. 某人有田22畝。賣去8畝。所餘者爲 e 畝。將此數列出方程。

2. 某人有田22畝。賣去 s 畝。所餘若干。?

答數以方程式寫出。

3. 某人有田 p 畝。賣去 s 畝。所餘若干。?

以方程式。表示下列諸題各數之關係.

4. 某童有石球 m 個。又買 b 個。總共得 N 個。

5. 某班學生。男 b 個。女 g 個。共 p 個。

6. 某童每日得 c 個錢。共 d 日。總共有 C 個錢。

7. 資本 c 元。加入利益 p 元。共 a 元。

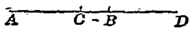
8. 某物買來用 b 元。賣出得 s 元。賠 l 元。

9. 列出 5 大於 n. c 大於 n. 7 小於 b, x 小於 n.

10. 兩數之較數爲 110。設小數爲 s。其大數爲何。?

11. 兩數之較數爲 d。設大數爲 l。其小數爲何。?

12. 二十六圖內 $AB=CD$. 量 AB, CD CB. 證 $AB-CB=CD-CB$.

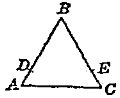


第二十六圖

13. 二十七圖內 $AB=BC$

又 $AD=CE$

用量法。證 $BD=BE$ 卽 $AB-AD=BC-CE$.



第二十七圖

從 12. 13 兩題。可得下公理。

41. 公理 8. 相等數同減一數。或同減相等數。較數必等。(此爲減法公理)

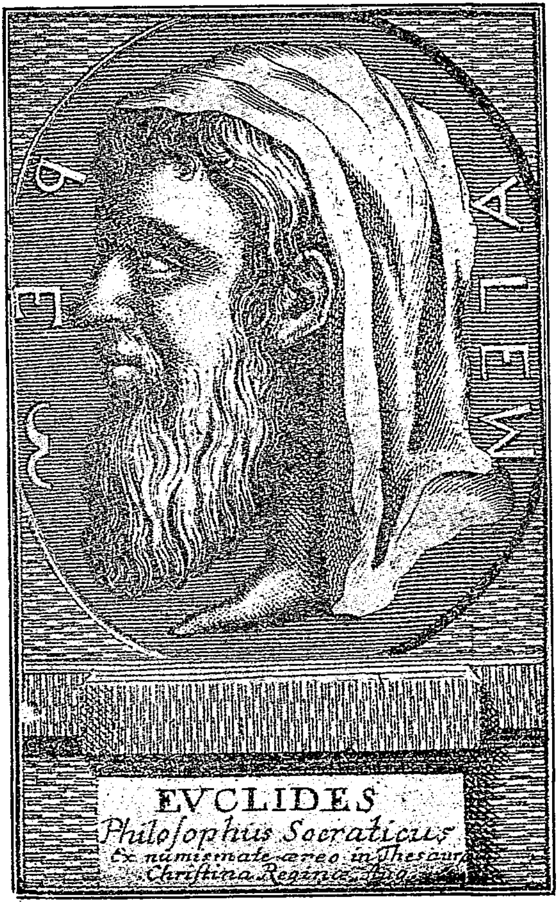
解明以下得數之原因。

1. $a=9$. $b=3$, 所以 $a+b=12$
2. $m=10$ $s=4$ 所以 $m-s=6$
3. $a=x$, $b=y$. 所以 $a+b=x+y$
4. $m=r$, $s=t$. 所以 $m-s=r-t$.

42. 公理 9. 等數加不等數。得數不等。兩得數大小之序。以兩不等數而定。

卽如設 $AB>CD$
又 設 $EF=GH$
故 $AB+EF>CD+GH$

或數目 $18>12$
又 $10=10$
故 $18+10>12+10$



歐几利得肖像

(18 之 後)

歐几利得小傳

歐几利得之生卒年月不可考。居埃及國之亞力山大城。紀元前306年至283年。以授算術稱於時。會遊學希臘雅典。受業於伯拉圖。亞里士多圖二人。洞明算術及亞氏名學。比任亞力山大算學校長。乃融會希臘算學。別爲條理以通之。成書一册。名曰幾何學初義。此書爲教科善本。古今所未有。希臘人嘗以幾何學內之證法。爲幾何之一部。其他算學士。又祇取定理之結果。歐几利得獨創新式理題。證法井然不紊。義法明簡其書卓越一時。學者爭習之。稱歐氏爲幾何學之祖。迄今二千五百年。歐几利得之名。竟與幾何學混稱。英國學童今日之讀幾何者。仍曰歐几利得是也。

近世幾何學教科書。形式條理。與歐氏原書無大差異。美國幾何習本。悉根據歐氏。略加損益。歐氏嘗命僕人。以金錢賞學生之誦習幾何者。引學生使人於勝。埃及王太子。以幾何精深。不易遽達。求歐氏示以捷徑。歐氏曰。“幾何學無王者之路”。以爲極深研幾。專恃思索。途雖迂折艱窘。然臻絕頂時。則妙境天開。得算學之奇趣云。

讀歐氏歷史者。當思今之習算者證解定理。與二千五百年前之習幾何者無異。且畢生所學終無大異。歐氏之書。眞可謂不廢江河萬古流矣。

43. 公理10. 不等數加同序之不等數。得數不等如前序。

即如設 $AB>CD$ 或數 $7>2$

又 設 $EF>GH$ $8>3$

故 $AB+EF>CD+GH$ 故 $7+8>2+3$

44. 公理11. 等數減不等數。得數不等。其序與前不等數相反。

設 $AB=CD$ 或數 $15=15$

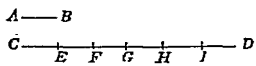
$EF>GH$ $3<10$

故 $AB-EF<CD-GH$ 故 $15-3>15-10$

45. 史略. 紀元前三百年。埃及國亞力山大城算學家歐几里得著算學教授書一本。名曰"算學要素"。書中始用線解釋加減乘三法。紀元後約二百五十年。算學士第柯番佗士。始用代數加減乘。1494年。意大利算學家怕斯奥利。始將加減乘除及開方根法之淺例刊布。

本章以後各段。將代數加減法之例解釋。

46. 乘法. 以二十八圖之 AB 線爲準箇量 CD. 令 $CE=EF=FG$ 等等。以 l 代 AB 長度。於是 $CE=l$, $CF=2l$. $CG=3l$. 餘類推。CF, CG, CH, 等線。名爲 AB 之乘數。



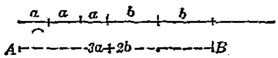
第二十八圖

47. 線之加減法. 代字數。可以用線表示加減法。

習　　題

1.　設 a 與 b 代兩數。求 $3a+2b$ 之總數。

以線代 a 與 b。既 $3a=a+a+a$, $2b=b+b$, 可以 a 為度。量直線三次。以 b 續量兩次。量得之 AB, 二十九圖,即為 $3a+2b$.



第二十九圖

2.　設 $a=1$, $b=2$ 以線求 $3a+2b$ 之總數。此題可以 1 生的代 a, 2 生的代 b.

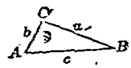
3.　設 x, y, z 代三個數。試以線求 $3x+y-2z$ 之數。

4.　設 $x=4.4$, $y=2.3$, $z=1.2$ 以線求 $3x+y-2z$ 之總數。

5.　設 $m=2.1$, 以線求 $3m+5m$.

周

48. 三角形. 有 A, B, C 三點。如三十圖。有 $a\ b\ c$. 三直線。連之。成三角形。凡三角形。有三角尖如 A, B, C. 及三邊如 a, b, c.



第三十圖

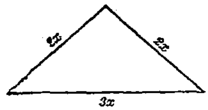
49. 周. 三角形三邊之總數。如三十圖 $a+b+c$, 即為此三角形之周。

習　　題

1.　有園一所。形為等邊三角形。每邊長 x 尺。若以籬繞此園。求籬之尺數。

第三十一圖

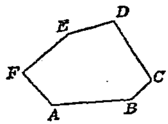
2. 三角形之邊爲 $2x$ 尺。$2x$ 尺。$3x$ 尺。求此形三邊之總數。見三十二圖。



第三十二圖

3. 三角形之邊爲 $2a$. $5a$, $6a$. 求此形之周。

50. **多邊形.** 三十三圖之 $ABCDEF$ 形。乃以數直線聯 A, B, C, D, E, F 諸點而成者。是爲多邊形。形之名。以邊數而定。如四邊。則名四邊形。五邊。則名五邊形。n 邊。則名 n 邊形。各邊之總數。爲該形之周。



第三十三圖

51. **等邊形.** 多邊形之各邊皆等者。是爲等邊形。

習　　題

以 p 代形之周數。試言以下各數是何形。

1. $p=3x$	*5.* $p=7x$	*9.* $p=12x$
2. $p=4x$	*6.* $p=8x$	*10.* $p=20x$
3. $p=5x$	*7.* $p=9x$	*11.* $p=nx$
4. $p=6x$	*8.* $p=10x$	*12.* $p=ax$

52. **同數.** 代字之同數。即該代字所代者。雖未決定代字數之前。該字亦可有一同數。

上節習題第一至第四若周爲60。求 x 之同數。

習　　題

1. 設 $p=60$ 求上節習題第五至第八之 x 同數。

2. 上節習題由 1 至 12. 設 $x=2$ 寸。$x=3$ 尺。$x=6$ 碼。可以次求 p 之同數。

法如 $p=3x=x+x+x=2+2+2=6$ 之類。

3. 設周 p 之數如下。試表列各多邊形之數。

$p=6x+4$, $p=4x+16$, $p=3x+3y$, $p=4x+2y$, $p=5x+3y$.

4. 設 $x=5$. $y=2$, $x=12$, $y=4$, $x=1$, $y=7$. 求上題周之同數。

5. 證 $4s$ 與 $4\times s$ 之數相同。

法設 $s=3$, 則 $4s=3+3+3+3=4\times 3$.

6. 證 $8p=8\times p$.

53. 獨項. 凡數如 $4s$, $8p$. $5c$ 等。皆爲獨項數。

54. 係數. 凡一項之數目字。如 2,3,4, 之於 $2x$,$3x$,$4y$. 各爲該代字之係數。若代字前無係數者。如 a, n. 等。其係數俱作一。故 a 卽 $1a$. n 卽 $1n$.

55. 似數不似數. 凡獨項數之代字同者爲似數。如 $5b$ 與 $8b$ 是也。若 $4b$ 與 $4a$. 則爲不似數。

56. 多項數. 凡代數式內有多項者。如 $4a+10$. $5x+6a-b$. 皆爲多項式。

57. 二項式.三項式. 多項式中。如祇有二項者。如 $2a+3b$, 謂之二項數。如有三項者。則謂之三項數。

代數加減法

58. 相似獨項數加法. 相似之獨項數。如 $4a$ 與 $3a$, 可定一例加之。此例解釋如下法。

求 $4a+3a$ 之總數最簡式。

既 $4a+3a=(a+a+a+a)^{※}+(a+a+a)=7a$.

故 $4a+3a=7a$.

故得例　相似獨項數之總數。乃一獨項數。其係數為各係數之和。而代字為各項之代字。

依此例。求以下各數之總數。:

$5x+6x$, $18n+5n+4n$, $a+3a+10a$, $12s+6s+s+16s$.

59. 上節之獨項加例。其用處可以下題明之。

某球場之入場劵。每條25銅圓。由約翰亨利,堅拿,威廉,占士五人售賣。約翰賣得56條。亨利75條。堅拿27。威廉83。占士69條。又在場口賣去123條。求總數。

第一解法	約翰	$56\times.25=$	\$14.00
	亨利	$75\times.25=$	18.75
	堅拿	$27\times.25=$	6.75
	威廉	$83\times.25=$	20.75
	占士	$69\times.25=$	17.25
	場口	$123\times.25=$	30.75
	總數		\$108.25

※此( )號.用以指明號內之數.由 $4a$ 及 $3a$ 而來.

第二解法	約翰	56 條	$56\times.25$
	亨利	75 ,,	$75\times.25$
	堅拿	27 ,,	$27\times.25$
	威廉	83 ,,	$83\times.25$
	占士	69 ,,	$69\times.25$
	場口	123 ..	$123\times.25$
	總數	433 條	$433\times.25=\$108.25$

第二解法較淺易。蓋各項有公同之因數.25。故可將各項之係數加合。寫於公因數之前。乘得便可。

習　　題

1.　入場券每條賣 x 銅圓。約翰賣60條。亨利78。堅拿45。威廉36。占士84。場門口賣出137條。求總數。

總數爲 $60x+78x+45x+36x+84x+137x=440x$

因各項有公因數 x. 故總數祇須寫各係數之總數於代字之前。便得。

試用第一解法求此題。答題請說明原因。

2.　設有苹果10枚。梨 5 枚。李 4 枚。能加合求總數否。幷言其故。

3.　以下三條。何條可以求總數。?

$4x+2.\quad 3y+2y.\quad 5a+2a+b.$

4.　某學堂長 l 尺。某人於禮拜一日行過 6 次。禮拜二行過 8 次。禮拜三行過 4 次。禮拜四行過10次。禮拜五10次。求此禮拜內。某在學堂行多少尺。?

5.　某圓競走場長 y 碼。當練習時。某童於禮拜一跑 6 圈。禮拜二 8 圈。禮拜三 10 圈。禮拜四 12 圈。禮拜五 14 圈。一禮拜內。共走若干碼。?

6.　加以下各數：

(1)　$4x+20x+7x+11x$　　(4) $\frac{1}{2}b+\frac{3}{8}b+\frac{1}{4}b$

(2)　$4y+1y+5y+2y+3y$　　(5) $(5z+z)+(4z+2z)$

(3)　$10m+4m+2m+2n+3n$　　(6) $12.5c+1.2c+4c$

7.　兩火車同時出站。分東西駛去。速率每小時 m 里。兩車各抵一鎮。一行八小時。一行 12 小時。求兩鎮相距里數。

60. 相似獨項數減法　兩相似獨項求較數之例。與求總數之例相似。可以下題明之。

試由 $7a$ 減去 $4a$

$$7a=a+a+a+a+a+a+a$$
$$4a=a+a+a+a$$

等數減等數。得 $7a-4a=a+a+a=3a$

故得例。兩相似獨項數之較數。乃一獨項數。其係數。乃兩係數之較數。而代字與兩數同。

習　　題

1.　求下列數之較數。

$10e-7e$, $13a-5a$, $14n-2n$; $18w-6w$, $3.48g-.25g$　$1.04x-.08x$, $\frac{2}{3}m-\frac{1}{4}m$. $\frac{5}{8}q-\frac{4}{7}q$.

2. 求下列各數之簡式。

(1) $5a+7a-4a$

$$5a+7a-4a=(5+7-4)a=8a$$

(2) $14x-x+3x$

(3) $13.5c+2.4c-c$

(4) $\frac{1}{3}b+\frac{7}{8}b-\frac{1}{4}b$

(5) $(8z-z)+(5z-2z)$

(6) $15x+(6x-4x)$

61. 交換例.

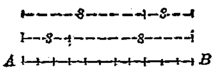
下列題解。足明交換例。

1. 約翰有兩種石球。一種 8 個。又一種 3 個。共有若干。?

求此題之法。可以 8 加於 3 或 3 加於 8 而得。如是

$$8+3=3+8.$$

2. 以線證明 $8+3=3+8$ (見第三十四圖)



第三十四圖

3. 如上兩題之法。證明 $4+3=3+4$.

4. 證 $a+b=b+a$.

5. 證 $a+b+c=c+a+b=b+c+a$.

由第 1 題至第 4 題足知加數與被加數互易。得數不變。此卽加法之交換例。

用交換例。以至善之法。加以下兩數。:

$875+316+25$.　$9903+4287+7$.

62. 括弧.

各弧號。如 ( ) 稱圓弧。〔 〕稱方弧。{ } 稱折弧。皆用以包括數目。且此括弧。可被括於他括弧之內。

如　$8+4+7+2=[(8+4)+7]+2.$

又如　$8+4+7+2+3=\{[(8+4)+7]+2\}+3.$

習　　題

1.　某童有三種石球。第一種 4 個。第二種 7 個。第三種 5 個。共有若干。?

欲求總數。可將第一種加入第二種。得數再加入第三種。

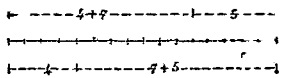
卽　$4+7+5=(4+7)+5$

或先將第二種加入第三種。然後將得數加入第一種。其方程式爲 $4+(7+5)=16.$

於是　$(4+7)+5=4+(7+5).$

何故。?

2.　以線證 $(4+7)+5=4+(7+5)$.見三十五圖。



第 三 十 五 圖

3.　以線證 $(a+b)+c=a+(b+c).$

4.　以線證

$$a+b+c+d=a+(b+c)+d=(a+b)+(c+d).$$

以上四題。足明下列之例。:

63. 加法結合例。 數項相加。任取兩項或多項之和而加入餘項。其結果相等。

習　　題

用交換例及結合例。以至善之法。解下列各題。:

1. $(4356+1483)+(4356-1483)$.

2. $(34+128)+66$.

3 $381+(436+19)$.

求下列題之簡式：

4. $x+\{7x+(4x-2x)+(3x-x)\}$.

5. $[15a-(3a+2a)]+[(8a-a)-4a]$.

6. $3m+[m+(7m-4m)+3m]-(5m-4m)$.

7. $3y-2y+[\{12y-8y-(2y+y)+7y\}-y]$.

提　　要

64. 本章所授各項列下。：量度數。總數。較數。方程。三角形。周。多邊形。四邊形。五邊形。六邊形。n 邊形。等邊形。代字同數。獨項數.係數。相似不相似項。多項式。二項式。三項式。

65. 本章所論之號如下。：加號 $+$;減號 $-$;圓弧號 $()$,方弧號 $[]$,折弧號 $\{\}$.

66. 公理

4. 全等於其分之和。

5. 全大於其分之任一分。

6. 等數同加一數。得數相等。

7. 等數加等數。得數相等。

8. 等數同減一數。或同減等數。較數必等。

9. 等數加不等數。得數不等。兩得數大小之序。依兩不等數而定

10. 不等數加同序之不等數。得數不等。而序如前。

11. 等數減不等數。得數不等。其序與前不等數相反。

67. 例。 相似項之總數(或餘數)爲一項。以各項係數之和(或較)爲係數。而代字爲各項之代字。

2. 加數與被加數互易。得數不變。(加法交換例。)

3. 數項相加。任取兩項或多項之和而加入餘項。其結果相等。(加法結合例。)

68. 代字之數。可以線證其加減法。

第三章

方程

解方程之公理用法

69. 方程之用. 前兩章所用之方程式。表示凡兩數相等或兩形度量相等者。可以用簡法表出。即如一物以平均速率經過之路。爲時乘速率。簡式爲 $d=v\times t$. 又如以 m 代原數。s 代減數。d 代差數。則差數等於原數減減數。可以簡式表之。爲 $d=m-s$. 方程式在算術中甚爲要緊。尤要者爲解題之用。因凡算術問題。俱可列作方程式也。

欲學方程。宜先從最淺之題下手。庶可以明白進步之新例。若能操縱此等新例解釋淺題。則將來可以駕馭複雜難題。

今有穀一袋。不知重。以 w 代之。如加入 8 兩之碼。則與 18 兩碼平。求穀之重量。?

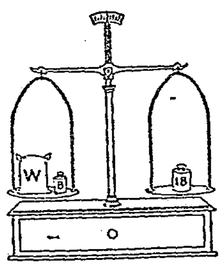
此題可用方程式列出如下。:

$$w+8=18. \quad 求\ w.$$

設從兩方取出 8 兩。則

$$w=10$$

故此袋穀重 10 兩。



第三十六圖

證 $w+8=18$

70. 方程之端. 方程式如 $w+8=18$. 其等號之兩端。可作爲天平。等號左端之數。名爲左端。右端之數。名爲右端。如此, $a+5=7$ 方程內。$a+5$ 爲左端。7 爲右端。

習 題

1. 以下各式。可用天平法口答得數。:

$w+5=7$, $w+2=4$, $3+w=8$, $10=5+w$

2. 上題各方程式。可用天平法證 w 之同數。

71. 定未知數之同數. 方程式如 $w+8=18$. 可以改爲問題如下。"以何數加 8 得18". 上文答此問之法。列爲方程式。作爲由天平兩盤內取去 8 兩。得答數。今以方程作天平。由兩端同取去一數。所餘仍爲一方程。故求未知數之法。可以列寫如下。:

$$\text{設}\quad w+8=18$$
$$8=8$$
$$\overline{\text{於是}\quad w\quad =10}$$

蓋等數同減一數。餘數亦等也。(41節減法之公理)

欲驗此結果合否。可將未知數之得數10.代入原方程中。得 $10+8=18$. 如此,方程兩端皆同一數。可知 $w=10$ 不錯。

72. 代法. 以數代回字母原佔之位。此法名爲代字母法。

73. 證消方程. 方程之兩端。能以一數代其代字使成爲同一數者。是謂該方程可用此一數證消。 如 2 可以證消 $x+4=6$. 何故。?

74. 根. 凡數能證消該方程者。即爲該方程之根數。

75. 解方程. 求得未知數之同數。能證消該方程者。此等法。謂之解方程法。

76. 覆證. 解方程所得之數。代入原方程未知數之處。驗過所得之結果不差者。是爲覆證。 若此結果數能證消該方程者。即爲該方程之根。

習　　題

解下列各方程題。并覆證得數。

1. $2+n=17$

$$\begin{array}{rl} \text{設} & 2+n=17 \\ & 2\ \ \ =2 \\ \hline \text{兩端減 2.得} & \ \ \ \ n=15 \end{array}$$

覆證　$2+15=17$. 此用代法。

得　$17=17$

2. $w+2=10$　　*4.* $l+7=18$　　*6.* $8+v=15$

3. $x+4=36$　　*5.* $d+10=14$　　*7.* $13=s+3$

8. 兩不知等重體。與 1 磅碼同秤。可與16磅及 1 磅碼平。求每體之重數。

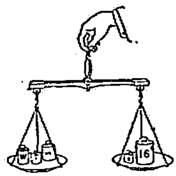
此題可以方程式開列如下。

$2w+1=17$, 求 w.

設兩端取去 1 磅,得

$2w=16$

則 $w=8$ 觀三十七圖



第三十七圖

9. 彈子三袋,其重各相等。與兩個 2 磅碼,同置於天平左盤上。右盤上有 12 磅碼及 4 磅碼各一。適得其平。求彈子每袋之重。

依方程式。可將原題列成

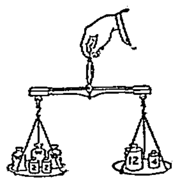
$$3w+4=16,$$

從兩盤内取去四磅碼。

得 $3w=12$

$w=4$

求得彈子每袋重 4 磅,見三十八圖。



第三十八圖

10. 證明下各題 w 之同數。可以天平法求得。:

$2w+6=16$, $3w+7=19$, $3w+10=28$, $5w+7=27$.

77. 用公理解方程. 上節 9, 10, 兩習題。可用公理解得如下。

$$\begin{aligned} \text{設}\quad 3w+4&=16 \\ 4&=4 \\ \hline \text{得}\quad 3w\quad &=12 \qquad \text{(此乃兩端減 4 而得)} \\ \frac{3w}{3} &= \frac{12}{3} \qquad \text{(以 3 除兩端)} \\ w &= 4 \qquad \text{(兩端消去分數)} \end{aligned}$$

指出得 $3w=12$ 所用之公理。

從 $3w=12$ 得 $w=4$ 之法。可得下公理。:

78. 公理12. 等數除等數。(除數0不在內)商數必等。(乘法公理)

如線 $AB=CD$. 則 $\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$. 又如 $8+4=10+2$ 則 $\frac{8+4}{2}=\frac{10+2}{2}$.

用公理解七十六節10題之習問。指明各級所用之公理。

79. 方程式 $n-2=5$. 可以改作問題。"何數減2得5".? 答數為7. 如方程兩端加2. 亦得。

解此方程之法。可列寫如下。:

設 $n-2=5$

$2=2$

得 $n+2-2=5+2$ 因等數加等數。總數必等。

故 $n=7$.

習　題

下列各方程。先改成口談之問題。後用公理按級解消。

1. $x-8=3$　2. $x-5=7$　3 $n-2=4$

4. $w-7=14$　5. $x-10=1$　※6 $10-x=3$

7. $2x-1=9$　8. $2x+6=16$　9. $3x+7=19$

※兩端先加 x. 後減3.

10. $3t+6=27$　11. $2t-11=21$　12. $4x-5=23$

13. $9k-15=93$　14. $9x+8=116$　15. $9x-7=74$

16. $4m+3.2=15.2$　17. $5n-1.4=8.6$　18. $8x+2=2x+5$

19. $5x+4=4x+7$　20. $2y+3=3y-5$　21. $7s-2=6s+8$

80. 公理13. 等數乘等數。積數相等。(此為乘法公理)舉例如下。

既　$3\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

又　$2=2$

於是　$2\times3\frac{1}{2}=2\times\frac{7}{2}$.

公理13.可用以消去方程之分數.如下。

設　$\frac{1}{2}x=9$

以2乘兩端　$2\times\frac{1}{2}x=2\times9$

消成簡式　$x=18$

習　題

解以下各方程。

1. $\frac{s}{7}=6$　3. $\frac{x}{6}=3$　5. $\frac{w}{10}=10$

2. $\frac{t}{8}=9$　4. $\frac{n}{4}=2$　6. $\frac{x}{5}=15$

81. 問題之以筆算或代數解者. 多種問題。可以筆算或方程式解得。凡以方程法解得之問題。其法名代數解法。

1. 有竿一枝。長20尺。截爲兩段。令此段長於彼段4倍。求截法。

筆算解法

短段有一定之長。

長段較此爲4倍。

全竿應爲短段之5倍。

全竿長20尺。

短段卽爲20尺之$\frac{1}{5}$卽4尺。

長段卽爲4×4尺卽16尺。

故兩段一長4尺。一長16尺。

代數解法

設n代短段之尺數。

則$4n$代長段之尺數。

$$n+4n \text{ 卽 } 5n=20.$$

$$n=4.$$

$$4n=16.$$

故兩段一長4尺。一長16尺。

2. 某農人以80尺籬。繞成長方形之欄。欲令欄長爲闊之3倍。求欄之長闊。

代數解法

設x代闊邊之尺數。

則$3x$代長邊之尺數。

於 $x+3x$ 即 $4x$. 爲籬周尺數之一半。即 40 尺。

故　$$4x=40.$$

$$x=10.$$

$$3x=30.$$

所以欄長 30 尺。闊 10 尺。

方程解得之問題

82. 代數解釋問題之程序. 從上節 1, 2 兩題之解法。可知解題緊要之程序如下。:

甲） 凡問題必有已知之數。而定餘未知之數。

乙） 凡解題未知數之一個。以字母 x 代之。

丙） 於是將題中事實。以代數法達之。其未知數 x. 當已知數用.

丁） 同一數之兩不同式。列爲等式。(以 = 號連於中。)

戊） 解此方程式。求未知數之同數。

己） 驗所得數確否。可將得數代入原題。若結果不錯。則合。

習　題

83. 形學題. 下列各題。有形學關係。而可以方程式解之者。

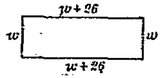
1. 等邊四邊形之周爲 48 尺。求形之邊。以 s 代一邊。則 $4s$ 爲全周。即 48 尺。故 $4s=48$.

2. 等邊六邊形之周爲 186. 求一邊之長。

3. 等邊十邊形之周爲 285. 求一邊之長。

4. 等邊十二邊形之周爲 264. 求一邊之長。

5. 四邊形之對邊各相等。見三十九圖。周爲 432 碼。長較寬多 26 碼。求形之長寬。



第三十九圖

6. 竪立之 22 尺竿。斷爲兩截。上截垂於下截之旁。差 6 尺至地。求兩截之長。畫圖求之。

7. 試作一長方脚球場。令長較寬多 $56\frac{2}{3}$ 碼。而長寬共 $163\frac{1}{3}$ 碼。

8. 試作一長方形。令一邊較別邊之 3 倍多 12 尺。而周爲 80 尺。

9. 花園一所。長爲寬之 5 倍。以籬 120 碼圍之。求長寬。

10. 地一段長 126 尺。截爲兩段。令此段長爲彼段長之 6 倍。求短段之長。

84. 問題之有數目關係者. 下列各題。使學者練習用代數式。明數目之關係。

1. 某數之 4 倍減 5. 得 35. 求此數。

2. 某數之 $\frac{8}{10}$ 加 12. 得 20. 求此數.

3. 若兩倍某數減 12. 其結果與某數加本數之 $\frac{3}{4}$ 相同. 求某數。

4.　6 倍某數。又加本數之$\frac{1}{2}$等於13求某數。

5.　4 倍某數。又加本數之$\frac{1}{5}$等於兩倍本數加11.　求某數。

6.　原數 3 倍之後加 4.等於25.求原數。

85. 連數問題.※

1.　兩連數之和爲 203. 求兩數。

設 x 代一數.則 $x+1$ 爲第二數。

2.　三連數之和爲 474. 求三數。

3.　兩連單數之和爲 204. 求兩數。(1, 3, 5, 7,……爲連單數)

設 $2x+1$ 代一數。則 $2x+3$ 代第二數。

4.　兩連雙數之和爲 278. 求兩數。

(設 $2x$ 代一數。則 $2x+2$ 代第二數。)

5.　三個連數之和爲 372. 求三數。

86. 雜題.

1.　甲所有之銀爲乙銀之 3 倍。爲丙銀之 4 倍。三人共銀 57 元。求每人應有之數。

2.　某農人之羊。爲其隣之羊三倍。及賣去22隻後。所餘適與某隣等。求此農人原有之羊。

※連數者.如 2 與 4. 爲 3 之連數.

3 $5247.分與甲乙二人。甲所得。較乙兩倍尚多$324.問每人應得若干。?

4. $75.分與兩人。一人所得。較別一人多 $27.問兩人各得若干。?

5. 甲乙丙三人。分取 1584 股票。甲所得較乙多 25 股。丙所得較乙多 50 股。三人各得若干股。?

6. 中學第一年班生投票選舉.共投 84 票。備選二人甲乙所得之票數相同。丙丁二人所得。各等於甲票之三倍。戊一人所得。等於丁票之 4 倍多 4.問每人各得票若干。?

7. 某人有田 160 畝。分配如下。:劃出一段作屋地。草場大如此地 4 倍。粟田大如草場 4 倍。麥田大如粟田之半。另留 15 畝爲牧地。求各田地之畝數。

8 某校脚球隊長。以銀行支票 $63.贈與客隊作費用。取銀時共有 $2 票及 $5 票兩種.問每種票應有若干張。?

9. 橙一箱。賣得銀 $3.60. 計賺得之利。爲原價之 $\frac{1}{5}$. 問原價若干。?

10. 某店之司理人。年受薪金 $2000. 另得紅利百分之一。該店一年獲利。爲入數 $700,000 之百分十。問該司理一年獲金若干。?

11. 某店股東二人。獲利 $5248.合議提出 $325 作慈善事業。其餘分法。此人所得爲彼人之兩倍。問每人應得若干。?

12. 某人一年之入息。支配如下。：十分一買衣物。三分一買食品。五分一作租金。餘下之 \$1320. 爲別種費用幷儲蓄。求是人是年入息數。

13. 某童有銀\$4儲於銀行。每禮拜續儲 4 角。其弟儲銀 \$16. 每禮拜取一角。問若干禮拜後。二人之儲數相等。?

14. 某人乘單車。欲於六日內行 148 里。第一日行若干里。第二第三兩日。各爲第一日之$\frac{7}{8}$.第四日爲第一日之$\frac{5}{8}$.第五日爲第一日之$\frac{1}{2}$.第六日須行20里方到。求各日所行之里數。

15. 某人 8 年後。其歲數爲其子今年歲數之 4 倍。其子今年12歲。求此人之年齡。

16. 今有銀 \$1278. 分與三人。第一人所得爲第二人之 3 倍。第二人所得爲第三人之兩倍。求三人應得之數。

17. 分 \$260 爲兩份。第一份較第二多 \$24. 問兩份各若干。?

習　題

87. 解以下各方程。：

1. $\frac{y}{2}+\frac{y}{4}=\frac{1}{3}$

解法：以各分母之小公倍數卽 12.乘方程之兩端。得

$$\frac{12y}{2}+\frac{12y}{4}=\frac{12}{3}$$

消去分數。得 $6y+3y=4$. 如此。方程中之分數解去。

併合相似項。得 $9y=4$.

以 9 除兩端。得 $y=\frac{4}{9}$.

得數須覆證。

2. $25z-17=113$

3. $28x+14=158$

4. $28x-9=251$

5. $20x+2x-18x=22$

6. $17x-3x+16x=105$

7. $17s+7s-13s=88$

8. $16t+2t-13t=22\frac{1}{2}$

9. $321x-109x+8x=22$

10. $404y-304y+12y=560$

11. $3.4x-1.2x+4.8x=70$

12. $3.5x+7.6x-8.6x=15$

13. $5.8y-3.9y+12.6y=58$

14. $6s-3.5s+5.5s=68$

15. $6.82s+1.18s-3.54s=42$

16. $8x-4.5x+5.2x=87$

17. $16.5x+15.8-2.3x=186.2$

18. $6.15y-1.65y+7.8=57.3$

19. $8y+6.875+2y=46.875$

20. $z+5.37z-8.73=61.34$

21. $1.3t-8.75t+6.87=57.87$

22. $15x+3.7x-9.23=65.69$

23. $3x+7x+15x-2x+5=74$

24. $2x+7x-3x-6=24$

25. $\frac{1}{4}x=6$

26. $\frac{1}{2}x=3$

27. $\frac{2}{3}x=8$

28. $\frac{5}{6}x=20$

29. $\frac{15}{a}=5$

30. $\frac{4}{x}=12$

31. $\frac{5}{z}=20$

32. $x+\frac{1}{2}x=6$

33. $x-\frac{1}{2}x=7$

34. $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=3$

35. $\frac{t}{3}-\frac{t}{6}=10$

36. $\frac{t}{5}+\frac{t}{3}=8$

37. $\frac{y}{4}-\frac{y}{7}=6$

38. $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x=18$

39. $6x-\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}x+7=129$

提　要

88. 本章所論之件如下：方程之兩端。代法。證消方程。方程根。解方程。覆證法。

89. 解方程所用之公理如下：

6,7. 等數同加一數或等數。總數必等。(加法公理)

8. 等數同減一數或等數。餘數必等。(減法公理)

12. 等數爲等數(0不在內)所除。商數必等。(除法公理)

13. 等數爲等數所乘。積數必等。(乘法公理)

90. 多數問題。以代數解之。較用筆算更易。

91. 用代數法解口說之問題。若按下列程序解去。甚有用。:

以字母代問題內所未知之數。

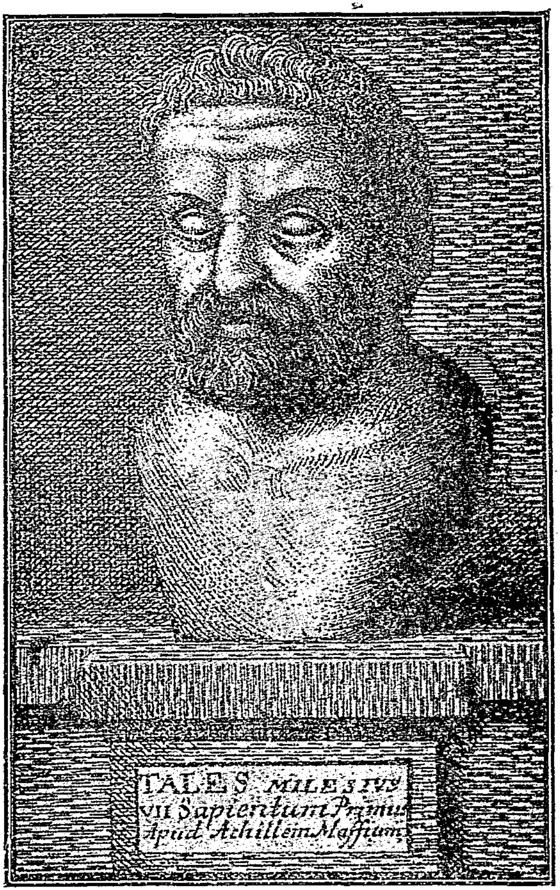
據題中節目。列成代數式。

兩式同等一數者。可列成方程。

解此方程。并覆證原數。

92. 方程式之有分數者。宜取各分母之小公倍數。乘方程內各項。消分數爲簡式。

93. 形學題中。有可以用方程法解之者。


TALES MILESIVS
VII Sapientum Primus
Apud Achillem Maffium

兌喇士肖像

(44 之後)

兌喇士小傳

兌喇士。小亞西亞之米利都人。生於紀元前 640 年。大抵爲腓尼基種人。少時經商。逐什一於埃及。習埃人之格致算術。嘗以量影法求得金字塔之高。埃王奇之。紀元前600年。回米利都。棄商賈事。開堂講哲學。爲希臘設學校之第一人。終其身研究格致哲學。旋以天文數學哲學名於時。兌習算。純用格致法。凡證題必用圖。以層級之思想明之。遂爲算學思想法之祖。

兌氏卒後百年。學校弦誦不輟。派達哥拉士之學。亦由此出。兌氏所論之幾何題。有六七條爲近世幾何之定理。然其證法。雖自謂確當。實無價值之可言。

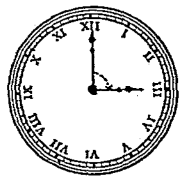
世傳兌喇士行事甚多。嘗野行墜塹而不自知。又嘗預言日蝕之期。以息兩族之爭。以此人列之於希臘七聖之一。其他各事。可於英文疇人傳求之。卒年約在紀元前 542 年。

第四章

角

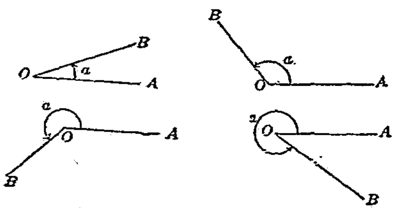
角分類

94. 角.時鐘向.反時鐘向之角. 時鐘之長針。繞軸而轉。所轉得之位如下列各數。求爲全周之幾分。如由12至3.?　12至6.?　12至9.?　12至4.?　12至8.?　12至2.?　12至10.?（見四十圖）。



第四十圖

設一線。如四十一圖之OA.繞定點O而轉。其方向如箭鏃所指至OB.卽稱爲轉過一角。該角可名a.此角亦可轉OB線至OA而成。如此轉法。名爲時鐘向。若第一轉法。則名爲反時鐘向。蓋其轉向與時鐘之針轉向相反也。由OA轉至OB所轉之數。卽爲OA與OB合成之角。

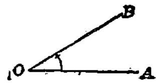


第四十一圖

95. 角之號. 角之號爲∠.諸角則用∠s.

96. 角之指名法. 凡角。可用一小字母書於角內以名之。如四十一圖之a.

然常用之法。於兩線相交成角之處。記以字母。而於此字母之前。加∠號以別之。如O角寫如$\angle O$是也。間或寫如$\angle AOB$或$\angle BOA$.第一與第三兩字母。指明成角之兩線。中間之字母。指明兩線之交點。



第四十二圖

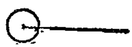
97. **邊.** 四十二圖成AOB角之AO,BO兩線。爲$\angle AOB$之邊。

98. **頂.** 成角兩線之交點。爲此角之頂。

99. **直角.平角.周角.** 如一直線繞線內一點而轉轉至一周之$\frac{1}{4}$.所成之角爲直角。四十三圖是也。若轉半周。

第四十三圖

第四十四圖



第四十五圖

則所成之角爲平角。四十四圖是也。所以平角之兩邊。合成一直線。而異其方向。若轉全周。則爲周角。四十五圖是也。

1. 試作一直角,一平角,一周角。

2. 試作一角。等於直線轉全周之$\frac{3}{4}$.又作一角。等於全周之$\frac{1}{3}$.

3. 證一周角。等於兩平角。四直角。

100. **銳角.鈍角.** 凡角小於一直角者爲銳角。如四十六圖。凡角大於一直角者爲鈍角。如四十七圖。

第四十六圖

第四十七圖

第四十八圖

1. 試作一銳角。一鈍角。

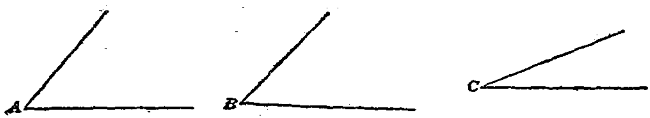
2. 試指出課堂內之直角。

3. 指出字母 A, 如第四十八圖之銳角及鈍角。

量　角　法

101. 角之比較. 角之比較法。將一角取起。放於別角上。頂與頂合。一邊與一邊合。若餘一邊與餘一邊合。則兩角相等。若不相合。則不等。其小者之一邊。必落於大角之內。

1. 比較四十九圖之 A 角與 B 角。B 角與 C 角。

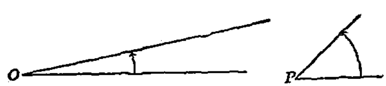


第　四　十　九　圖

先以薄紙描出 B 角。然後放於 A 角之上。如上法相比。

2. 作近似相等之兩角。後依上法比其大小。

102. 角之大小. 凡角既以直線繞一點轉成。可見角之大小。全視線之旋轉。而不論線之長短。所以五十圖 O 角之線。雖長於 P 角之線。而 P 角仍大於 O 角。

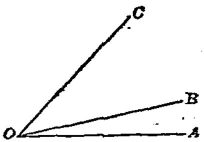


第　五　十　圖

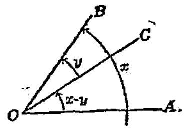
103. 以圖加減角法. 若一角放於別角之旁。使頂落於頂。此角之此邊。合於彼角之彼邊。是爲兩角相加。如五十一圖。

$\angle AOC=\angle AOB+\angle BOC$ 是也。

若放此角落彼角。使頂合頂。一邊相合。使小角在大角之內。如五十二圖。



第五十一圖



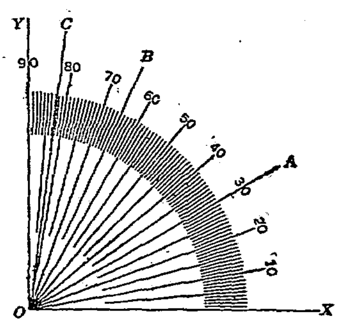
第五十二圖

$\angle AOC=\angle AOB-\angle BOC.$

1. 試作兩不等角。求兩角之和及其較。法與上節 1 題相同。

2. 設 x, y, z 代三角。令 $x>y, y>z$ ∴ 作 $x+y+z, x-y+z, x+y-z$.

104. 度.秒.分. 五十三圖之 XOY 直角。分爲 90 等分。每分爲一度。(1°).度常爲角之準個。一度可再分爲 60 等分。每分名分。(1′).每分又截爲 60 等分。每分名秒。(1″). 紀元前 180 年。希臘算學家協西忌利士。始將角分爲度。



第五十三圖

習　題

1.　全周之幾分幾爲一度。? 又一平角之幾分幾。一直角之幾分幾爲一度。?

2.　試讀 13°24′3.5″.

3.　20°14′22″ 之角有幾秒。?

4.　五十三圖之 $\angle XOA$ 有幾度。? $\angle XOB$ 有幾度。? $\angle AOB$, $\angle XOC$, $\angle AOC$ 各有幾度。

5.　時計上之長針。由 12 至 3. 含有幾度。? 12 至 6. 12 至 9. 12 至 4. 12 至 8. 12 至 2. 12 至 10. 各有幾度。?

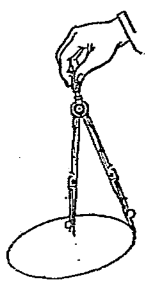
6.　時鐘之長短針。當 9 點時。6 點時。4 點時。2 點時。各函有幾度。幾個直角。幾個平角。?

7.　試隨手作 45°,60°,30°,90°,180°,360° 之角。

8.　兩個平角, 4 個直角, 一直角之 $\frac{2}{3}$, 一直角之 $\frac{7}{9}$, 一直角之 $\frac{1}{5}$, r 個直角。各函有幾度。

105. 圜.圜心.　開規使一尖放在五十四圖之 F 點。餘一尖上之鉛筆。匝繞作一曲線。此線名曰圜。如此。圜乃一合口之曲線。線上各點。同在一平面。而與又一尖之定點相距等遠。此定點。即圜心。

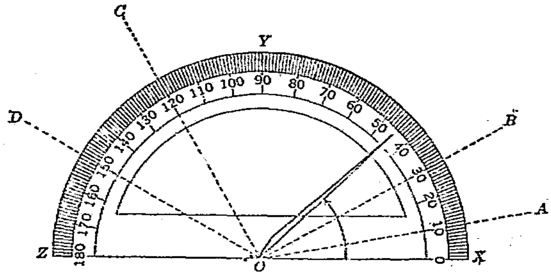
間有用"圜周"字樣。代此處之"圜"字者。



第五十四圖

半圓規量角法

106. 半圓規. 五十五圖之半圓規。為量角之器。規之圓邊。均分 180 度。若由心 O 處作直線。至圓邊各分點處。則在 O 處有 180 個等角。每角等於一度。(1°).



第五十五圖

107. 弧度. 五十五圖圜邊在兩相鄰點之中者。名為弧度。

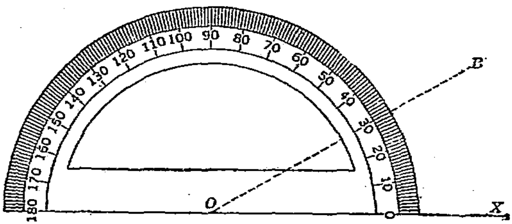
1. 譬如有指針。定於 O 而轉其方向。如五十五圖之箭形。當由 OX 轉至 OZ 時。經過幾個直角。? 經過幾個平角。? 經過幾度。?

2. 從五十五圖。求下列各角之度數直角數：XOZ, AOZ, COZ, XOA, XOB, XOY, XOB, XOC, XOD, AOB, AOY, BOD.

108. 半徑. 從圜心至圜周之直線為半徑。故五十五圖之 OX. 為 XYZ 圜之半徑.

109. 弧.弦. 圜周之一分爲弧。凡角之尖在圜心者。其兩邊引長割圜周之一段爲弧。凡直線在圜周內爲周所限者爲弦。

110. 半圜.象限. 凡弧等於半圜周者爲半圜。等於一周之四分一者爲象限。



第五十六圖

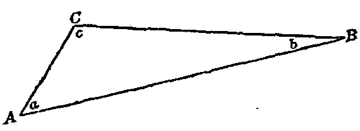
111. 量角. 如量五十六圖之XOB角。可用半圜規。將規之中心點。放於角尖O處。規之直邊O度處，落於角之OX邊。然後讀圜邊OB線所割之度。卽得。如本圖。則$\angle XOB=30°$.

習題

1. 任作一角。以半圜規量之。

2. 任作一三角形。內有角幾個。?讀角時。以三字讀之。

3. 依五十七圖之ABC三角形。塡答五十八圖之表。



第五十七圖

4. 任作一三角形。依其形填答五十八圖之表。

角	角之類 (如銳鈍等)	轉之數 (如全周,半周, 小過半周等)	度數 忖度者	度數 量得者	誤
a					
b					
c					
總數					

第五十八圖

三角形三角之和

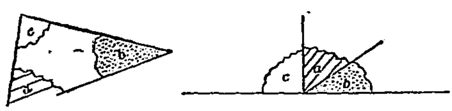
112. 三角形三角之和. 從上111節之3,4兩習題。可知三角形三角之和。等於一平角。卽180°.

113. 定理. 以形學法。可證明凡三角形三角之和等於一平角。凡題可以證確者爲定理。故三角形三角之和等於一平角。卽爲定理之一。

算學家之首先證此題者。大抵爲兌喇士。(紀元前640年生。卒於550年)。

習題

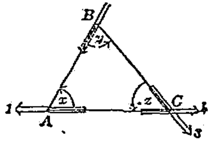
1. 任作一三角形。割出三角。挨密排併。如五十九圖。此三角之和。與何角相似。?



第五十九圖

2. 證三角形三角之和等於180°.可以旋繞鉛筆明之。法如下。:

任作一三角形。如六十圖。將筆放於1處。記其方向。轉筆至 x 角。遂移筆過 AB 至2處。轉筆至 y 角。復移筆過 BC 至3處。轉筆至 z 角。由3至4.



第六十圖

該筆至是。已轉 $x+y+z$, 須記筆之方向所指最後之地位。以兩周算。此筆已轉幾分之幾。? 轉過幾個平角。? 轉過幾度。?

3. 以方程式。指明 x, y, z 三角之和所等之度數。

據此方程。則三角中。如已知兩個。則第三個可推得。此法與測量極有關係。因量得兩角。則第三角可推而知也。

114. 問題.

解以下各題。并留意解法之程序。: 作三角形。依問題以字記各角。用112節之定理。列出方程。消此方程。求各角之同數。

1. 三角形之三角爲 $3x, x, 6x$. 求三角之度數。

2. 今有三角形。第一角。等於第二角兩倍。第三角。等於第一角三倍。求此形各角之度數。

3. 今有三角形。第一角爲第二角之六倍。而第三角爲第一角之 $\frac{1}{2}$. 求三角之度數。

4. 若三角形之三角相等。求三角之度數。

5. 若三角形之一角爲27°.其第二角較第三角大27°.求各角之度。

6. 三角形第一角爲第二角之$\frac{2}{7}$.第三角爲第一角之三倍。求各角。

7. 若三角形第一角爲第二角之$\frac{1}{3}$.而第三角爲第一角之$\frac{1}{2}$.求三角。

8. 三角形第一角大於第二角 18°.而第三角小於第二角 12°.求三角。

9. 三角形內。兩角之較爲 20°.而第三角爲 36°.求三角。

10. 三角形第一角大於第二角 25°.而第三角三倍於第一角。求三角。

11. 三角形第一角爲第二角之兩倍。第三角比第一角之三倍少9°.求三角。

12. 三角形第一角乃第二角之$\frac{1}{4}$.第三角爲第一角$\frac{1}{7}$加 18°.求三角。

13. 三角形第一角比第二角之3$\frac{1}{2}$倍減8°.第三角爲第二角之$\frac{1}{5}$.求三角。

14. 三角形第一角爲第二角之6倍加 18°.第三角爲第一角之$\frac{1}{2}$減7°.求三角。

15. 證三角形不能有兩直角。不能多過一個鈍角。

16. 今有三角形。內 a 角。與別三角形之 r 角等。又此形之 b 角。與彼形之 s 角等。證此形之 c 角。等於彼形之 t 角。

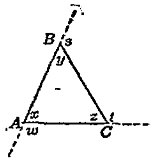
三角形外角之和

115. 外角. 六十一圖。三角形 ABC. 引長 AB 邊與 BC 邊所成之 s 角。稱爲外角。

1. 每一頂點可得幾外角。?

2. 三角形可有幾外角。?

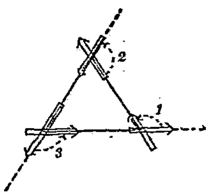
3. 任作一三角形。於頂點處引長一邊。量三外角。求三外角之和。此題每頂點祇取一外角。



第六十一圖

4. 依六十二圖之三角形。以轉鉛筆法。求三外角之和。

5. 三角形各頂點取一外角。證此三外角之和等於 360°. (法)六十一圖內。$x+w$ 有幾度。? $z+t$ 幾度。? $y+s$ 幾度。? 於是



第六十二圖

$$(x+w)+(z+t)+(y+s)=3\times180^\circ$$
$$=540^\circ.$$

此方程式。可寫爲

$$(x+y+z)+(w+s+t)=540^\circ$$

惟 $$x+y+z\qquad=180^\circ$$

所以 $$w+s+t=360^\circ$$

116. 內角. 三角形內之角。與外角相提並論者。則稱內角。

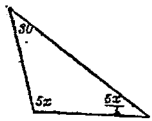
117. 證. 115 節第 5 題解題之法。為幾何學最常見之事。凡此種法。謂之為證。

習　　題

1. 三角形三外角各相等。求三內角之度。?

2. 求六十三圖六十四圖兩三角形之外角。

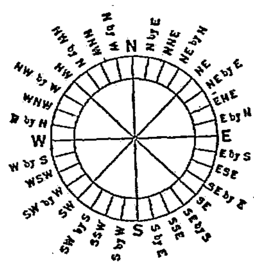
第六十三圖



第六十四圖

3. 隨手作以下各角。: 30°, 45°, 60°, 90°, 135°. 而以半圓規驗所作之角準否。

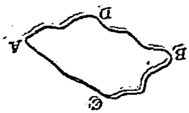
4. 六十五圖為航海用之羅盤。試指出下列各字之度數。: 由 E 至 SE, 由 W 至 NE; 由 N 至 E. 由 NW 至 SE. 由 S 至 NW, 由 WSW 至 E, 由 ENE 至 WNW.



第六十五圖

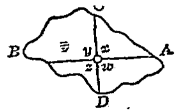
5. 作一角。再平分為二。後以半圓規驗其是否平勻。

6. 以六十六圖之紙式。摺成六十七圖。再摺之使 OA 落於 OB. 後展開如六十八圖。摺紋成 x, y, z, w 四角。此四角各相等。何解。?何以各為直角。?



第六十六圖

第六十七圖



第六十八圖

118. 上第六題。指示凡直角皆等之原理。

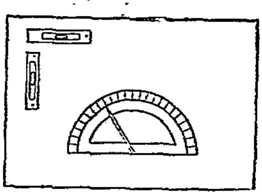
1. 以半圓規量法。證明三角形之外角。等於兩對內角之和。

2. 用量法。證凡角頂點之兩外角相等。

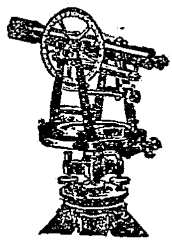
119. 三角形以角分類. 三角形內三角皆銳角者。名銳三角形。若有一角爲鈍角。名鈍三角形。若有一角爲直角。名直三角形。若三角互等。名等角三角形。或正三角形。

試證三角形內。如有一角爲直角。則餘兩角必爲銳角。

120. 屋外量角法. 欲量屋外之角。如二路交成之角等。其法如下。:


第六十九圖

釘半圓規於畫版上。如六十九圖。平放版於檯面或三足几上。移規之圓心。使落於所欲量之角頂點。再移畫版。使與地平齊。釘針二個於界尺之兩端。依角之邊。循直方向對準。記所見半圓規之度數。再移尺至又一邊。依前法記其度數。兩數相減。即爲此角之度。



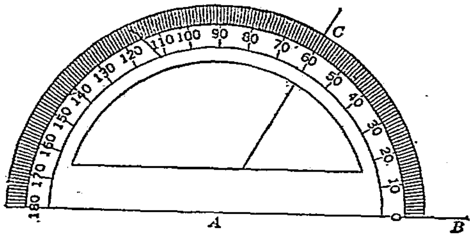
天文及測量所求之角度須極準。故測器須極精。七十圖之經緯儀是也。此器最要之部分。爲圓規上分度。以便量角時記其度數。器上之鏡。用以求角之兩邊。(猶之上法之界尺)。

第七十圖

求作一角與已知之角等

121. 用半圓規作已知之角. 試求作一角。與60°之角等。

作一無窮線如七十一圖之 AB. 放半圓規於此線上。使圓心在 A 點。0 度線在 AB 線。在 60° 處誌一點如 C. 取起半圓規。作 AC。BAC 角。即欲作之角。



第七十一圖

1. 以半圓規作下列各角。: 80°, $92\frac{1^\circ}{2}$, 170°, 36°, 91°, 160°.

2. 上題所列之角中。何爲銳角。?何爲鈍角。?

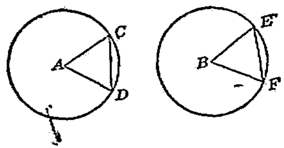
122. 斜角.斜線.垂線. 銳鈍兩種角爲斜角。斜角之兩邊互爲斜線。直角之兩邊。互爲垂線。

123. 用半圓規作角等於已知之角. 先用半圓規量已知之角。然後按 121 節之法。作一角與此角等。

用界尺及規。可作角與已知之角等。此法乃依下文所論弧角相關之理而得。此等角之頂為圓心。而以角邊所割之弧為度。故此等角為圓心角。

124. 定理. 等圓心角在同圓內或等圓內所割之弧必等。弦亦等。

設七十二圖。A 角與 B 角等。則 $\angle A$ 可與 $\angle B$ 合。(何故?)如此。A 圓周與 B 圓周合。(何解)。而 C 落於 E. D 落於 F. 所以 CD 弧與 EF 弧合。CD 弦與 EF 弦合。



第七十二圖

125. 定理. 同圓或等圓內等弧等弦。必為等角所割。

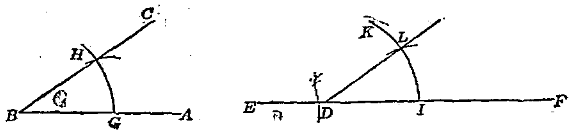
因七十二圖之 A 圓周可與 B 圓周合。如此。CD 弧合於 EF 弧。(何以如此?)。所以 $\angle A$ 等於 $\angle B$. (何解?).

126. 124 節與 125 節之定理。已解明用半圓規量角之故。蓋圓心角所割。即半圓規邊之弧度。所以凡角所函之角度。即等於所割之弧度。此理可簡舉如下。:

凡圓心角。可以所割之弧量之.

127. 問題. 己知線內己知之一點。求作一角。與己知之角等。

設 $\angle ABC$（七十三圖）爲已知之角。D 爲已知之點，在已知之線 EF 內。



第七十三圖

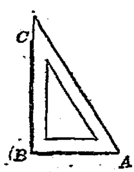
以 B 點 D 點爲心。以等徑作 GH 弧及 IK 弧。以 I 點爲心。GH 爲徑作弧。割 IK 於 L 點。作 DL 直線。

IDL 角。即所求之角。

用半圓規量 $\angle s$ GBH 及 IDL，證其是否不誤。

習　　題

1. 用象限規作一直角。如七十四圖。



第七十四圖

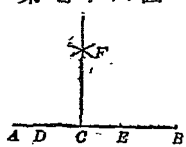
2. 用半圓規作直角。(見121節)。

3. 用界尺及規作直角。

(法)任作一直線。如七十五圖之 AB。

AB 線內任取一點如 C 爲心。以任一線爲半徑。作弧割 AB 線，得兩點如 D 與 E。

以 D 與 E 爲心。以任一線爲半徑作弧。兩弧相交於 F。



第七十五圖

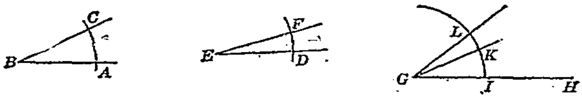
作 CF 線。BCF 角。即所求之角。

4. 用半圓規。求作一角。等於已知兩角之和。

(法)以半圓規先量兩角。後作一角。使等於兩角度數之和。

5. 用界尺及規作角。使等於已知兩角之和。

設 $\angle s\,ABC$ 及 DEF (七十六圖)爲已知之兩角。



第七十六圖

作法：作一直線。如圖 GH.

以 B,E,G 三點各爲心。以同半徑作 AC,DF,IL 三弧。

作 IK 弧 $=AC$ 弧。又 KL 弧 $=FD$ 弧。

IGL 角。卽所求之角。

證　$\angle ABC=\angle IGK$.(何故)

$\angle DEF=\angle KGL$(何故)

$$\angle ABC+\angle DEF=\angle IGK+\angle KGL$$

$$\angle ABC+\angle DEF=\angle LGL \quad \text{(何故)}$$

6. 設 x 爲已知之角。用 4,5 兩問題之法。作 $2x,3x$.

7. 設 x,y,z 爲三角。作 $x+y+z$.

8. 作一角。等於兩不等角之較。用半圓規。

9. 作一角。等於兩不等角之較。用界尺及規。

(法)用 5 問題之法。倒轉 KL 之方向。使在 KI 之內截割。

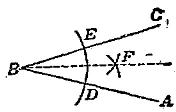
10. 設 x,y,z 爲三角。x 大於 y, y 大於 z. 作一角等於 $x-y+z$. 又作一角等於 $x+y-z$.

11. 用半圓規。將一角分爲 2, 3, 4,…… 等分。

(法)先量角。將所得之度數。以 2,3,4, …… 除之。然後按數如前法作線。

12. 用界尺及規。分已知之角爲兩等角。

設 $\angle ABC$ (七十七圖)爲已知之角。以 B 爲心。以任半徑作弧。割 BA 與 BC 於 D,E 兩點。以 D 與 E 爲心。以任半徑作弧。相交於 F. 作 BF 線。BF 線遂平分 $\angle ABC$ 爲兩等角。



第七十七圖

128. 平分一形. 凡將一形分爲兩等分。卽爲平分。

1. 用 127 節 12 題之法。平分一直角。可將此法與 127 節第 3 題相比。

2. 用上題之法。於線內已知之點。作一垂線。

3. 任作一三角形。以界尺及規。平分形內之三角。

提要

129. 本章所教授之項如下。: 角。銳,鈍,正,直,斜等角。時鐘向及反時鐘向轉。周轉。角邊。角頂。等角及不等角。角之大小。角度及弧度。分。秒。圓。圓心。圓半徑。圓之弧。圓之弦。象限及半圓。割弧。定理。證。三角形之外角內角。銳,鈍,正,斜及等邊諸三角形。平分一形。

130. 本章所用之新號如下。: 用 $\angle$ 代角。$\measuredangle$ 代諸角。$^\circ$ 代度。$'$ 代分。$''$ 代秒。

131. 凡角。可於角內用一小字母表之。又可於角外用大字母表之。又可用三大字母表之。首尾兩字母。指兩邊之點。中間之字母。指角頂點。

132. 以下各定理之眞意。撮要錄列。

1. 三角形內三角之和。等於一~~直~~平角。

2. 三角形三外角之和。等於 360°.

3. 三角形內兩角之和。等於對角之外角。

4. 等圜或同圜內之等角。所割之弧及弦必等。

5. 圜心角。可以所割之弧量之。

133. 半圜規乃量角之器。并用以作角與已知之角等。

134. 界尺與規。可用以加減角。可作角與已知之角等。可平分角。可作垂線至已知線內已知之點。

第五章

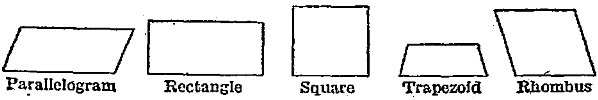
面積體積乘法

方形面積

135. 幾何學之原意. 凡地土。於售賣時或分析時須量度。希臘古文豪希勞都太士。嘗謂埃及人最初將國土行均田制。國內尼羅河嘗泛濫蕩激。田土崩潰。水退後。埃及人恢復原地。國王因正稅故。特派調查員量度。視其損失。以定賦稅。此等量度。卽爲幾何學之始。

幾何學 *Geometry.* 希臘文原意爲量地學。蓋 *Ge* 爲地。而 *Metron* 爲量也。

136. 各式四邊形. 凡地.田,草場,屋段等。常爲多邊形之式。下列各式。爲最常見之四邊形。



平行四邊形　長方形　正方形　梯形　斜方形

第七十八圖

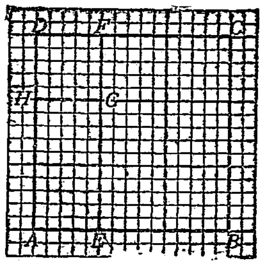
1. 七十八圖中。何形四邊俱等。何形四角俱等。?

2. 何四邊形有直角。?

3. 正方形與長方形不同者何在。? 正方形斜方形不同者何在。? 正方形與平行四邊形不同者何在。

4. 斜方形與平行四邊形不同者何在。?

137. 正方形面積.方邊爲整數者. 量正方形法。將正方形放於方格紙上。如七十九圖之$ABCD$.核數內容之方生的米達數。



第七十九圖

計法可如下。: 設AB邊長3生的。此正方形。可先分爲三個正長方形如$AEFD$.每長方形高3生的。又可分爲3個方生的。如$HGFD$。於是$ABCD$有3×3方生的。即9方生的。

此結果之9.即爲$ABCD$之面積。每個方生的如$HGFD$.爲面積之準個。

1. 依此法。求長4生的正方形之面積。

2. 求6生的長之正方形面積。

從上兩題。可知正方形內所函之小方形數。可將正方形之邊自乘而得。簡言其法如下。

正方形面積。等於形邊自乘。

正方形之長(或名底)既等於寬(或名高)。設A代正方形面積。a代邊長準個數。則$A=a\times a$.此可以別式表之如下。

$A=a^2$,　a^2之意。即$a\times a$.

138. 公式. 上兩節求正方形面積有兩法。第一爲幾何法。作一正方形圖。核數形內所函之方準個數。

第二爲代數法。將形之長度代入公式 $A=a^2$. 第二法顯然勝於第一法。方程 $A=a^2$. 名爲求正方形面積之公式。

下列各數。爲正方形之邊。試求正方形之面積。

4, 6, 10, 100, x, l, s.

139. 面積準個. 通用之面積準個。爲方米達(簡寫 *sq. m.*), 方的士米達 (*sq. dm.*), 方生的米達 (*sq. cm.*), 方米利達(*sq. mm.*). 方尺 (*sq. ft.*), 方寸 (*sq. in.*), 方碼 (*sq. yd.*). 以上各準個之邊。爲 1 *m*, 1 *dm*, 1 *cm*, 1 *mm*, 1 *ft*, 1 *in*, 1 *yd.*

地土面積。常以英畝核算。一英畝。函有 4,840 方碼。

試證 1 *sq. m.* = 100 *sq. dm.*, 1 *sq. dm.* = 100 *sq. cm.*,

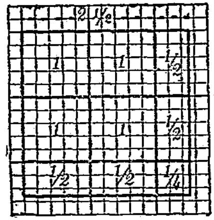
1 *sq. cm* = 100 *sq. mm.*

140. 正方形面積方邊爲分數者. 上 137 節。經已證明正方形之面積。若邊爲整數者。可代入 $A=a^2$ 式內求之。若邊之數爲分數者。亦可如前法求得。

習　　題

1. 正方形之邊爲 $2\frac{1}{2}$ *cm.* 求面積。

於長 $2\frac{1}{2}$ *cm.* 之直線上。作一正方形。并分之如八十圖。求大方形內各小分之和。



第八十圖

2. 設 $a=2\frac{1}{2}$ 代入公式 $A=a^2$. 證上題之得數不誤。

3. 正方形之邊爲 $1.5m.$ 求面積。

用小準個代大準個。如此可得整數之便利。如 $1\ m. = 10\ dm.$ 故 $1.5m=15dm.$ 代入公式 $A=a^2$. 得 $A=(15)^2 sq.\ dm. = 225\ sq.\ dm. = 2.25\ sq.\ m.$ 因 $\frac{1}{100}\ sq\ m = 1\ sq.\ dm.$ 也。

4. 用第 3 題之法。證第 1 題之得數。

改 $a=2\frac{1}{2}\ cm$ 爲

$a=2.5\ cm = 25\ m\ m.$

5. 正方形長 $2\frac{3}{4}m.$ 求面積。

改 $2\frac{3}{4}m.$ 爲 $2.75m=275cm.$ 代入 $A=a.$

6. 設 $a=2\frac{3}{4}$ 代入公式 $A=a^2$. 證明所得之數與 5 題得數合。

以上六題。解明正方形之邊爲分數。如 $a=1\frac{1}{4}m.$ 可改爲小數。卽 $1\frac{1}{4}\ m=1.25m.$ 又可改爲小準個之整數。如 $1.25m. =125cm.$ 代入 $A=a^2$ 公式中。求得方形面積之小準個數爲 $A=15{,}625\ sq.\ cm.$ 惟 $1\ sq\ cm = \frac{1}{10{,}000}\ sq.\ m.$ 故面積之原準個數。爲 $A=1.5625\ sq.\ m.$ 此結果。與設 $x=1\frac{1}{4}m$ 代入 $A=a^2$ 所得者相合。

由此可知 $A=a^2$ 之公式。可求正方形面積。無論形邊之爲整數或分數矣。

此理之結果。得下定理。

定理. 正方形之面積。等於邊之方。

$$A=a^2$$

長方形面積

141. 長方形面積之公式. 長方形面積之公式。可依求正方形面積公式之法得之。

習題

1. 設 b 代長方形之底。h 代長方形之高。於方格紙上作一長方形。令 $b=3cm.$ $h=4cm.$ 試計長方形內之方生的米達數。

2. 下列之 b 與 h 各數。可根據作長方形。并核計形內所容之方生的。以得其面積。: $b=3.4cm.$, $h=2cm.$, $b=4.2cm$ $h=2cm.$

3. 兩長方形。其一 $b=2.8m.$, $h=3.6m.$ 其二 $b=4.8m.$, $h=1.8$ 米達。求各形之面積。

4. 上三題之結果。可得下定理。試解之。

定理. 長方形之面積。等於底乘高。

$$A=b\times h.$$

用此公式。求以下各題。

5. 正方形之邊爲 4 尺，x 尺，.06 cm，2.48 米達。求各形之周及積。

6. 正方形之周爲64尺，$4x$ 尺，$8a$ 尺。求各形之面積。

7. 正方形地一段。面積2,500方尺。欲以籬圍之。籬長若干。

8. 長方形之底爲高之三倍。底與高之和爲16寸。求此形之底與高及面積。

9. 依方程式。求以下各長方形之餘一邊。

長方形之一邊爲 9 尺。面積爲15方尺。

長方形之一邊爲 9 尺。面積爲18方尺。

長方形之一邊爲 6 碼。面積爲12方碼。

長方形之一邊爲 4 碼。面積爲 A 方碼。

10. 圖一幅爲長方形。長22寸。闊17寸。用 $2\frac{1}{2}$ 寸之架鑲之。求架之面積及架邊之周。

11. 路長28尺。闊3尺。今以8寸長方磚砌之。須磚若干。?

12. 今有花園一所。形爲長方。長95尺。闊25尺。園內繞園邊砌路一條。闊 3 尺。又於長邊正中。砌二尺闊路橫過。問該園餘出之地。有若干方尺。?

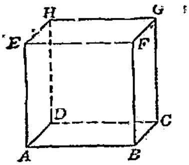
立方形及長立方形

142. 立方形. 實體如八十一圖所表示者。名爲立方形。凡立方形有六面。皆正方形。兩面合成一邊。故立方形有十二邊八角。

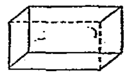
143. **長立方形.**

實體形如八十二圖。爲長立方形。其各面皆長方形。

長立方形有若干面。?角若干。?邊若干。?



第八十一圖

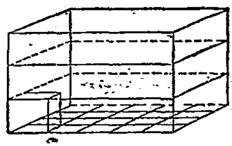


第八十二圖

立方形及長立方形之體積

144. **體積準個.** 凡量實體。須用一立方形。其邊等於長之準個。體內所容此小立方形之數。爲此形之體積。此立方形。爲體積準個。

145. **求長立方形之體積.** 設八十三圖代表一長立方形。長 5 寸。闊 4 寸。高 3 寸。形之平面。爲 5 寸長 4 寸闊。如此可鋪 5×4 個立方準個於是上。此體高三寸。可疊三層。故此形體積。有 3×5×4 立方準個。由此可知長立方體內容之準個數。爲長寬高三數相乘而得。



第八十三圖

此理可撮記如下。

定理. 長立方形之體積。等於長乘寬乘高。

設 V 代體積。l 代長。h 代高。w 代寬。公式爲

$$V=l\times h\times w.$$

146. **立方形體積.** 立方形體積算法。一如長立

方形。惟立方形之邊俱相等。故 145 節之定理。可改變如下。

立方形之邊。以 e 代之。其體積之公式。即爲 $V=e\times e\times e$。

此公式 $V=e\times e\times e$，可縮寫爲 $V=e^3$，讀作 V 等於 e 立方。e^3 即 $e\times e\times e$。

定理. 立方形體積。等於邊之立方。

$$V=e^3.$$

下列之數。乃立方形之邊。試求各形之體積。3, 4, 5, x, e.

圖繪方程

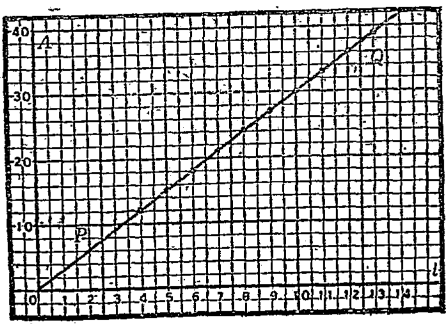
147. 第一章 17 節。用三法表示根據數。茲用以解下題。今有長方形十個。皆闊 3 寸。其長以次如下。4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13. 求各長方形之面積。

第一法。將各長方形之長列成表。以 l 代長。而相當之面積。按列如八十四圖之 I. 面積以 A 代之。

I

l	=	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	=	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39

II



第八十四圖

$III \quad A=3l$

第二法。各根據數。又可以圖格表列。由八十四圖之0處。順天平線橫列長數。又於各長度立垂直線代面積。(如4點之上作垂線代12).此各面積之末點。以直線連之。

第三法。方程式 $A=3l$. 代表作圖之根據數。八十四圖之直線PO. 卽爲 $A=3l$ 之圖線。

1. 設 $l=1, 2, 3, 14$. 試由八十四圖之圖格。求其面積。

2. 圖繪以下各方程。

1. $A=5l$	3. $L=2c+1$	5. $b=w^2$
2. $D=t+1$	4. $y=2x+3$	6. $y=x^2+3$

148. 直線方程。 凡方程作圖爲直線者。名直線方程。

獨　項　乘　法

149. 乘法之號。 公式 $A=b\times h$. $V=l\times h\times w$. $A=a^2$. $V=e^3$等。可表示幾個數之積數。能以幾何法顯之。卽如兩數之積。可以長方形代表。兩數卽長方形之長與高。

兩等數之積。及三等數之積。可以正方形及立方形代表。惟四個數以上之積。不能以幾何法代表。若代數學。則代法可以伸展。如 $a\times a=a^2$, $a\times a\times a=a^3$, $a\times a\times a\times a=a^4$. 讀作$a$四次方。$a\times a\times a\times a\times a=a^5$. 讀作 a 五次方。餘以此類推。

兩個不同之代字相乘。可兩字駢列。中間不加乘號。如 $x \times y$ 作 xy. 筆算學中常見 $x \times y$. 代數則專用 xy. 又有時寫作 $x \cdot y$. 亦甚便。

150. 指數.底.方積. 如 $x^2, x^3, x^4, \cdots\cdots x^n$. 各數中之 $2, 3, 4, \cdots\cdots n$ 各數。為 x 之指數。

x 五次方何意? x 六次方何意? x 七次方。 x 十次方。 x n 次方。各何意?

將此等數。寫成指數式。

凡數之指數。乃一數目或代字。寫於數之右上角處。指明本數之幾個乘數。如 6^3 即 $6 \times 6 \times 6$ 之積數。3 為指數。6 為底。其積數 6^3 為方積。故 $216 (=6^3)$. 即 6 之第三次方。

倘數無指數如 ax. 則指數作為 1, 如 a^1x^1.

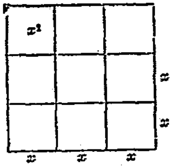
須知 $4x$ 即 $4 \cdot x$. 亦即以 4 乘 x. x^4 意即 $x \cdot x \cdot x \cdot x$. 亦即以 x 為因數而有 4 個。$3x$ 與 x^3, $5x$ 與 x^5 之別。亦與上相同。

習　　題

1. 設 $x=6$. 求以下各數之意義及同數。

(1) $2x$.	(2) x^2.	(3) $3x$.	(4) x^3.
(5) $4x$.	(6) x^4.	(7) $5x$.	(8) x^5.
(9) $2x^2$.	(10) $3x^2$.	(11) $5x^3$.	(12) $2x^4$.

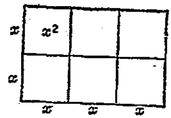
2. 於八十五圖內。指出 (1) $3x$ 之方形。其周為 $12x$. (2) 其方積為 $9x^2$.



第八十五圖

3. 以方程式。列出八十六圖長方形之周及面積。

4. 以圖明 $3a$ 乘 $5a$ 之長方形之面積及周。



第八十六圖

5. 將下列各數。縮爲極簡易之式。

$x\cdot x\cdot x\cdot x.$ $\quad \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}.$ $\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}.$

$\frac{m}{n}\cdot\frac{m}{n}.$ $\quad 1\frac{2}{3}\cdot 1\frac{2}{3}\cdot 1\frac{2}{3}.$

6. 求下列各獨項式之同數。

$2^3,\quad 11^2,\quad \left(\frac{1}{3}\right)^3,\quad 3^4,\quad (1.2)^2,\quad 7^3.$

7. 設 $a=4$, $x=3$, $b=1$, $y=2$. 求下各多項式之同數。

x^2+2x+1, $x^2+3\times y+y^2$, $a^3-2a^2b+3ab^2-b^3$.

8. 今有二人。同時離一地點。相背而行。每點一行 a 里一行 b 里。t 點鐘後。問二人相距幾遠?

9. 設 $x=4$. 求下各數之同數。$2x^2$, $(2x)^2$, $3x^2$, $(3x)^3$.

10. 設 $a=2$, $b=1$, $c=5$, $d=3$, $e=4$. 求下各式之相當數。

$$\frac{ab+bc+cd+de}{a+b+c+d},\quad \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{a+b+c+d},\quad \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{a+b}.$$

151. 同底之乘方積。

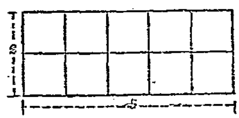
凡同底而兩乘方數不同者。可消爲簡式。如 $x^2 \cdot x^3 = xx \cdot xxx = x^5$. $x^3 \cdot x = xxx \cdot x = x^4$. 是也。

求下列各數之簡式。用口答。

1.	$4^2 \cdot 4^2$	*2.*	$8 \cdot 8^3$	*3.*	$10^2 \cdot 10^4$
4.	$a^2 \cdot a$	*5.*	$12^3\ 12^4$	*6.*	$a^3 \cdot a^3$
7.	$a \cdot a^5$	*8.*	$a^4 \cdot a^7$	*9.*	$b^2 \cdot b^5$
10.	$c \cdot c^8$	*11.*	$c^3 \cdot c^6$	*12.*	$x^3 \cdot x^8$
13.	$a \cdot x$	*14.*	$b \cdot c$	*15.*	$b \cdot b$
16.	$a \cdot a^6$	*17.*	$b \cdot b^3$	*18*	$K^2 \cdot K$
19.	$K^2 \cdot K^3$	*20.*	$a \cdot x^2$	*21.*	$a^2 \cdot x$
22.	$g \cdot t^2$	*23.*	$a^2 \cdot b$	*24.*	$x^2 \cdot y^2$

152. 交換例。

(亦爲秩序例) 欲明 $5 \times 2 = 2 \times 5$ 方程。可作一長方形。長 5 而闊 2. 如八十七圖。面積爲10小方形。即 2×5 個小方形。再作一長方形。長 2 而闊 5. 此形與八十七圖異者。不過方位而已。其面積爲 2×5 方積。



第八十七圖

今 5×2 及 2×5. 各代表同一之長方形。而不過異其方位。則 $5 \times 2 = 2 \times 5$.

1. 依此證 $7 \times 8 = 8 \times 7$。
2. 證 $ab = ba$.

此數題。解明凡因數相乘。其秩序可倒換。而積數不改。此理代數與筆算無異。此卽乘法之交換例。

用心算消下列各數爲簡式。

1. $4xy\cdot5x^2y^2$

$$4xy\cdot5x^2y^2=4\cdot5\cdot x\cdot x^2\cdot y\cdot y^2 \qquad (\text{衍解})$$

$$=20x^3y^3$$

2. $4b^2c\cdot5b^3c^2$

3. $abc\cdot a^2bc^2\cdot2abc^3$

4. $4x^2\cdot5x^2\cdot2x$

5. $2x\cdot x^2y$

6. $x\cdot3x^3$

7. $3x\cdot4xy$

8. $(.3a)(.4a^3b^2)$

9. $5\frac{1}{2}mk\cdot2m^2k$

10. $p^4\cdot3p^2q$

11. $(2xy)^2$

12. $(2m^2n^2)^3$

13. $(3a^2x)^2$

14. $2\cdot3\cdot5\cdot2\cdot5\cdot4$

15. $3\cdot5\cdot4\cdot4\cdot4$

16. $(3ax)(4a^2x)(8a^3x^2)$

獨項加法

153. 係數. 一項中任一因數之係數。爲此項其餘諸因數之積。如 $4axy$。則 4 爲 axy 之係數。又 $4a$ 可爲 xy 之係數。又 $4y$ 亦爲 ax 之係數。又如 $\frac{bc}{3}$。$\frac{b}{3}$ 爲 c 之係數。或 $\frac{c}{3}$ 爲 b 之係數。其餘類推。平常言某項之係數。多指數目字而言。如 $4axy$ 之係數常爲 4，$\frac{bc}{3}$ 之係數常爲 $\frac{1}{3}$，餘類推。如無係數如 a, x^4 等。則 1 爲其係數。意卽 $1a$, $1x^4$ 也。

154. 似項. 凡項有公共之字母因數。則稱之爲似項。如 $2x^2y^2$, $12x^2y^2$, $8x^2y^2$. 皆似項也。

155. 不似項. 凡項無公共字母因數者。則爲不似項。如 $4a^2$ 與 $3cb^2$ 是也。

習　　題

下列各多項式。可指出何項有公因數。名之曰相似。又聲明同因數之係數。然後銷爲簡式。用善法速算。不必用筆寫列。

1. $4a^2b+a^2b+5a^2b+3a^2b$

此題公因數爲 a^2b. 其係數爲 4, 1, 5, 3. 故 $4a^2b+a^2b+5a^2b+3a^2b=(4+1+5+3)a^2b=13a^2b$.

2. $4x+7x+20x+35x$
3. $ax+25x+bx+46x$
4. $ax+bx+cx+dx$
5. $8pq^2r+14pq^2r+12pq^2r$
6. $3a^2b+5a^2b+7a^2b+3a^2b$
7. $2ax+3xa+7xa+5ax$
8. $3pq^2+6tq^2+8rq^2+12sq^2$
9. $4axz+7cxz+5dxz+9exz$
10. $abm+pmq+xmy+mdc$
11. $3(a+b)+4(a+b)+12(a+b)$

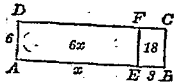
12.　$8(x^2+y^2)+16(x^2+y^2)+12(x^2+y^2)$

13.　$3\frac{2}{5}(pr+q^2)+5\frac{1}{2}(pr+q^2)+4\frac{3}{10}(pr+q^2)$

獨項乘多項法

156. 以圖格示獨項乘和數法. 試解下題

1.　長方形之邊爲 6 與 $x+3$. 試以方程式表之。



第八十八圖

$ABCD$ 之面積 $=6(x+3)$…(何解)…(1)

括弧之意。指明弧內之數。用 6 乘之。

作 EF 線。分 $ABCD$ 長方形爲二小長方形。於是

$ABCD=AEFD+EBCF$.(何解)…………(2)

惟　$AEFD=6x$.　　　(何解)…………(3)

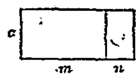
又　$EBCF=18$.　　　(何解)…………(4)

以 (1),(3),(4) 方程之同數。代入 (2) 方程。得

$6(x+3)=6x+18$.

2.　證八十九圖之 $a(m+n)=am+an$.

3.　以圖證 $d(a+b+c)=ad+bd+bc$.



第八十九圖

上 2,3, 兩題。可解釋下公理。

全等於其分之和。

157 分積. 上 2 題之 am 及 an.乃 $a(m+n)$之分積。何者爲 $d(a+b+c)$ 之分積?

158. 獨項乘多項之積　上文 156 節之 1, 2, 3, 等題。解明下理。

獨項乘多項式。法以獨項乘多項式之各項。所得分積加合。

1.　乘下各數。$2(3x+4y)$, $(x+2y)4a$, $3a+4b\cdot2c$, $5b\cdot4x+2y$.

2.　消下列各式爲簡式。先乘後加減。　$a(a+b)-b$, $(x+y)m-ym$,　$3x^2+4xy\cdot2x+10$.

3.　設 $a=4$, $b=1$, $c=3$. 求下列各式之同數。$(a+b)c$, $2(a+b)-c$,　$4a+2(b+c)$,　$8a+(3b+4c)$,　$3a(2ab+8-5c)$, $25c^3$,　a^b, $(2a+3)5+(4b+5)2$.

159. 以圖格示獨項乘較數法.　$(a-b)c$ 式之意。乃先由 a 減去 b. 後以 c 乘餘數。$(a-b)c$ 之積。可以幾何圖代表如下。

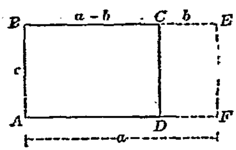
按九十圖

$ABCD=ABEF-DCEF$

$ABEF=ac$

$DCEF=bc$

$ABCD=(a-b)c$



第九十圖

以 $ABCD$, $ABEF$, 及 $DCEF$ 之同數。代入第一方程。得 $(a-b)c=ac-bc$.

習　　題

1. 指出上題所解之理。

2. 求下各數之積。

$(2x-3y)a$, $2(4x-6y)$, $2x(4a+5b-3c)$.

$(a^2-2ab+b^2)a$.

3. 乘下各數。$a^2b^3 \cdot b^2$, $8m^2n \cdot 4mn^2$, $(2x+4y)2$, $(4x^2-2x+3)2x$, $x^2y^2 \cdot x^2z$, $4rs^2t \cdot 3st^2$, $3x(x-y)$, $4y(x+y-2z)$.

4. 消 $5(2x-3y)+2(2x-y)+(x-4y)2x$. 為簡式。

5. 求下各式之因數。$ab+bc$, $xy+xz$, $2a+6b$, $2xy+10x$, $3x-6y$, $2ax-8ay$, $4xa^2-12xb^3$, $3xa^2b \times 9xy^2b$.

6. 長方形。闊為 $x-3$. 長為 x. 周長 66 碼。求長闊各若干碼?

7. 某正方形之面積。較某長方形少 32 $sq. cm$. 長方形闊與正方形等。長多 $8cm$. 求長方形之面積。

8. 12年後。某人之年紀。較之12年前恰兩倍。求此人現在之歲數。

9. 解以下各方程。求 x 之同數。

(1) $3(x+4)=22+x$

(2) $9(x+35)=5(2x+45)$

(3) $3(x+15)+5=2(2x+9)+4(x+3)$

(4) $\dfrac{2(x+2)}{3}=8$

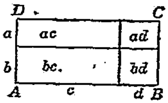
(5) $\frac{5(y+\frac{1}{2})}{7}=2\frac{6}{7}$

(6) $\frac{x+7}{5}+1=\frac{x+11}{14}+2$

(7) $9x=\frac{7x-34}{5}+22$

多項乘多項法

160. 圖乘法. $a+b$ 乘 $c+d$ 之積。可寫爲 $(a+b)(c+d)$. 可以長方形代表。長方形之邊爲 $a+b$ 與 $c+d$. 如九十一圖。

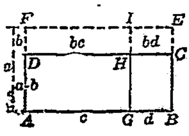


第九十一圖

長方形 $ABCD$ 函有四個長方形。卽 ac, bc, ad, 及 bd.

所以 $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$. 此方程之兩端。皆代表此長方形之面積。

$(a-b)(c+d)$ 之積。可以九十二圖之長方形代之。此形之邊爲 $(a-b)$ 與 $(c+d)$.



第九十二圖

$ABEF$ 長方形 $=ac+ad$. 從此長方形減去 bc 及 bd 兩長方形。得 $ABCD$.

所以 $(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd$.

此方程之兩端。皆代表長方形 $ABCD$.

試以長方形證下式。

$(a+b+c)(m+n)=am+bm+cm+an+bn+cn$.

161. 多項乘法. 從上160節。可得下理

多項式乘多項式。法將此式內每項遍乘彼式各項。所得各分積加合。

習　　題

1. 以161節之法。求下列各式之積。

(1) $(x+y)(a+b)$　　(2) $(x+y)(m+n)$

(3) $(a+x)(b+y)$　　(4) $(r+s)(a+x)$

(5) $12(7+6-4)$　　(6) $2a(3a^2-4a+2)$

2. 消下方程。求 s 之同數。

$$(s+2)(s+5)=(s+1)(s+2)+22.$$

3. 設 $x=3$, $y=2$. 求下各式之同數：

$(3x-2y)(2x+3y)$, $(2x^2-5x+6)(5x-3)$, $(7x^2y-3xy^2)(x^2y-y^2x)$.

4. 依以圖解多項式法。求下各方積。

(1) $(a+b)(a+b)=(a+b)^2$　　(2) $(c+d)^2$

(3) $(x+y)^2$　　(4) $(m+n)^2$

5. 作正方形。代表下列之各三項數式：

(1) $a^2+2ax+x^2$　　(2) $b^2+2bc+c^2$　　(3) $k^2+2kb+b^2$

(4) $s^2+2st+t^2$　　(5) x^2+6x+9　　(6) $c^2+8c+16$

6. 求上題各三項數式之因數。

7. 某長方形之面積爲96方碼。底長 $(8+x)$ 碼。高 8 碼。求底長若干碼?

8. 長方形之一邊爲 5 碼。又一邊爲 7 碼。今欲將長邊增長。使全面積爲前積之 $1\frac{3}{7}$ 倍。求增長之數。

162. 覆證. 凡題之覆證法。可任擇數代入方程之字母。消爲簡式。兩端得數同者便合。

習　　題

乘各式并覆證之。可用鉛筆列寫。

1. $3x(x^3+4xy+2y^2)$

$$3x(x^3+4xy+2y^2)=3x^2+12x^2y+6xy^2$$

覆證。設 $x=1,\ y=2.$

$$3x(x^3+4xy+2y^2)=3(1+8+8)=51$$

$$3x^4+12x^2y+6xy^2=3+24+24=51$$

2. $5\frac{1}{2}mk(9m^2+6mk+18k^2)$

3. $(a^2+2a+1)(a-3)$

4. $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

5. $(p+q+r)^2$

6. $(.4x-.3y+.7z)(10x+20y+30z)$

7. $(.4a+.3b)^2+(.6a+.2b)^2+(.2a+.3b)(.5a+.1b)$

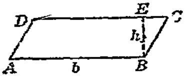
8. $(2x^3-7x+3)(2x+5)$

9. $(a^3-3y+5)(a^2+10)$

10. $(p^4+2p^2+7p)(2p-1)$

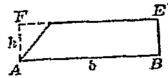
平行四邊形及三角形面積

163. 平行四邊形面積. 求平行四邊形如九十三圖 $ABCD$ 之面積。可作 BE 線與 AB 成正角。分此平行邊形爲兩分。一爲 BEC 三角形。一爲 $ABED$ 四邊形。將三角形剪出。移至左方。使 BC 落於 AD. 配成長方形。如九十四圖之 $ABEF$.



第九十三圖

於是 $ABEF$ 長方形 $=ABCD$ 平行四邊形。(何解?)惟 $ABEF=b\cdot h$. (何解?)所以 $ABCD$ 平行四邊形 $=b\cdot h$. (何解).



第九十四圖

如此可得下定理。:

定理 平行四邊形之面積。等於底乘高。簡式爲

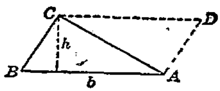
$$P=bh.$$

1. 設 $b=28$, $h=19$. 又 $b=16.3$, $h=14.6$, 求平行四邊形之積。

2. 平行四邊形之底,高,及面積。表列如下。求各未知數之同數:

高	底	積
$3x+2$	8	56
16	$5x-7$	288
$2x+1$	15	105
10	$3x+2$	110

164. 三角形面積. 三角形如九十五圖之 ABC. 可作 DC 及 AD 兩線,配成平行四邊形.而三角形即爲此四邊形之半.三角形與平行四邊形既同以 AB 爲底.又同以 h 爲高.故 ABC 三角形.等於 AB 乘 h 之半.(何解).如此可得下定理.



第九十五圖

定理 三角形之積.等於高乘底之半.簡式爲

$$T=\frac{1}{2}bh.$$

1. 設 $b=12$ 尺, $h=16$ 尺

又 $b=8.2$ 尺, $h=7.78$ 尺

求三角形之積.

2. 以下列各數列成方程.指出三角形之未知項.

底 $=6$ 尺	面積 $=24$ 方尺
底 $=6$ 尺	面積 $=9$ 方尺
高 $=4$ 碼	面積 $=16$ 方碼
高 $=a$ 尺	面積 $=a$ 方尺
高 $=c$ 寸	面積 $=b$ 方寸

165. 商數. 以 y 除 x 之商數.可寫作 $\frac{x}{y}$ 或 $x\div y$, 讀作 x 分 y.

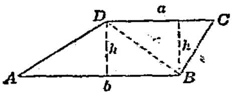
166. 梯形之積. 梯形如九十六圖之 $ABCD$. 可作 BD 線.分爲兩三角形而求其積.

ADB三角形 $=\frac{1}{2}hb$.（何解）

DBC三角形 $=\frac{1}{2}ha$.（何解）

故 $ABCD=\frac{1}{2}hb+\frac{1}{2}ha$.

或 $ABCD=\frac{1}{2}h(b+a)$.（何解）



第九十六圖

a 與 b 可稱爲梯形之底。如此得下定理。

定理 兩邊平行四邊形之積。等於高乘兩底和之半。

提要

167. 本章所授事項如下。平行四邊形。長方形。正方形。梯形。四邊形。形之面積。面積之準個。公式。立方形。長立方形。體積。體積之準個。指數。乘方。底。係數。似項。不似項。分積。商數。

168. 本章引用之號如下。指數。指出連乘等因數之個數。不等因數之積。用 × 號 · 號或無號以表之。除法用 ÷ 號。或此數在彼數之上。中以線表之。

169. 方程可作圖。凡方程之圖爲直線者。爲線方程。

170. 兩數之積。可以長方形之積表之。

171. 乘數題。可以簡數代入原題及所得之結果以覆證之。

172. 本章所授之代數理如下。

1. 交換例。因數相乘。可顛倒因數之序而積不改。

2. 獨項乘多項式。法以獨項遍乘多項式各項。而加合各分積。

3. 多項式乘多項。法以此式每項遍乘彼式各項。而加合各分積。

173. 本章之定理公式如下。

1. 正方形面積。等於邊之方。

2. 長方形面積。等於長乘寬。

3. 長立方形體積。等於長寬高相乘。

4. 立方形體積。等於邊之立方。

5. 平行四邊形之積。等於底乘高。

6. 三角形之積。等於底乘高之半。

7. 梯形積。等於高乘兩底和之半。

第六章

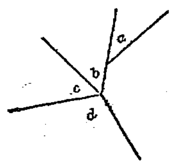
角耦

接角

174. 接角. 兩角同一頂。并公有一邊。則此兩角爲接角。餘兩邊非公有者。名爲外邊。

習題

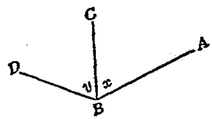
1. 九十七圖之 b 與 d. 是接角否？以理想答之。a 與 b, b 與 c 是接角否？



第九十七圖

2. 指出九十八圖 x 與 y 兩角之外邊及公邊。

3. 隨意作兩接角。使其和等於一直角。



第九十八圖

4. 作三銳角相接。其和等於一直角。

5. 作兩鈍角相接。其和等於三直角。

6. 作兩接角。一銳一鈍。其和等於兩直角。

7. 用半圓規作75°與85°接角。103°與57°又$31\frac{1°}{2}$及$2\frac{1°}{2}$等接角。證法。用算術求兩角之和。然後以半圓規量之。

8. 作兩直線相交。令兩接角相等。并用量法證此兩等角皆直角。

John Wallis

華利士肖像

(88 之後)

華利士小傳

華利士約翰。1616年11月22日。生於英國亞樹佛鎮。1703年10月28日。卒於牛津。華十五歲時。某日。見其兄手中算書之數號。突生特別之感觸。貸其書。甫十四日。盡通竅要。及長。習醫學。爲篤信人身血運之第一人。然嗜好仍在算學。

1649年。華利士任牛津大學幾何學教員。算學外。并著書談神學名學，哲學等。又創新法教聾啞。蓋多才藝之人也。任教職至死日。

華利士著筆算代數各一本。學校爭習用。奈端嘗言伊學代數。自華利士課本始。代數學以 ∥ 代平行線。自華利士始。精研微積學。於連乘理深有所發明。又求得

$$\pi=2\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots\cdots}.$$

π 代圓周率。當時算術無不通曉。凡高級之筆算代數。皆有發明增益。又奠近世分析幾何新術之基礎。欲多知此人之事跡。可讀波氏(*Ball*)所著之算學史。

175. 垂線. 兩直線相交。若兩接角等。則兩直線互爲垂線。

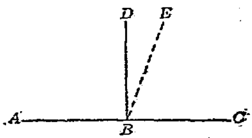
1。 九十九圖內。何線爲垂線。指出相等之接角。

第九十九圖

2。 以尺作兩線。使互爲垂線。

176. 定理。 已知線內已知之一點。祇可作一垂線。

一百圖 AC 線上之 B 點。若可有兩垂線。則 DBC 及 EBC 兩直角不相等。如此與凡直角相等之理相反。故無此理。

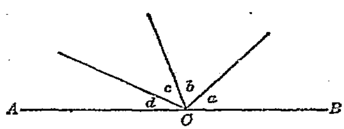


第一百圖

177. 作 $56°$ 與 $124°$ 兩接角。又 $19\frac{1°}{2}$ 與 $160\frac{1°}{2}$ $92°$ 與 $88°$ 等接角。以尺及直邊物。證接角之外邊爲一直線。此兩角之和。以何名稱之?

從此題得下定理。

定理 若兩接角之和等於一平角。則兩外邊。必同在一直線內。



第一百零一圖

直線內一點同旁諸接角之和

178. 於直線上一點。如一百零一圖 AB 線上之 C 點。作三線如圖。忖度每角之度。後以半圓規量之。

求一百零二圖表內之數。

角	a	b	c	d	和
估度	40				
量度	41				

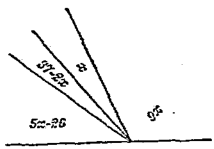
第一百零二圖

直線一旁諸接角之和。等於若干度乎?由此可得下理。

179. 定理. 直線一旁同以直線內一點爲項點之諸接角之和。等於一平角。卽 180°.

習題

1. 求一百零三圖每角之度。



第一百零三圖

依圖可寫爲

$$9x+x+(37-2x)+(5x-26)=180.$$

排正各項。得

$$9x+x-2x+5x+37-26=180$$

$$13x+11=180 \quad \text{何解}$$

$$13x=169 \quad \text{何解}$$

$$x=13 \quad \text{何解}$$

所以 $9x=117$

$$37-2x=11$$

$$5x-26=39$$

覆證：$x+9x+37-2x+5x-26=180.$

2. 用半圓規作一百零三圖。

3. 直線內一點上一旁所作之諸接角如下列各數試求其 x 之同數及各角之度。

第(1)(2)(3)三題試作圖明之。

(1) $x,\ 5x,\ 7x-2$

(2) $8x,\ 48-3x,\ 5x-22,\ 4x-14$

(3) $25\frac{2}{3}+5x,\ 8x+8\frac{5}{6},\ 3x,\ 9\frac{1}{2}+x$

(4) $3x,\ 2(x+9),\ x,\ 42-x$

(5) $2x,\ 2(x+10),\ x-18,\ 3(36-x)$

(6) $3(x-3),\ x+33,\ 2(41-x)$

(7) $2.8x+39.33,\ 1.2x-32.09,\ x+7.16$

(8) $6.93x,\ 4.82x,\ 1.27x+5.09,\ 138.91\text{-}9.02x$

(9) $\frac{3}{5}x,\ 88+\frac{1}{5}x$

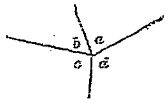
(10) $\frac{2}{3}x+10,\ 86-\frac{1}{3}x$

(11) $5/7x+14,\ 97-\frac{2}{7}x$

一點上諸接角之和

180. 一點上所作之諸接角其和可以下題得之。

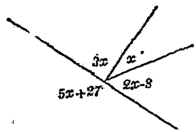
於一點上作四線。如一百零四圖。求每角之度。先忖度。後用半圓規。此諸度之和。等於若干度乎。?從此可得下定理。



第一百零四圖

定理. 繞一點全空間諸接角之和。等於一周角。卽360°.

1. 以方程法。求一百零五圖各角之度數。



第一百零五圖

繞一點全空間作角。下列各數代各角。求 x 及諸角之度。

用半圓規作 2, 3, 4 三題之圖。

2. $2x, x, 4x+40, 180-3x$

3. $x, 36+5x, 3x-9$

4. $3x, 5x, 5x+4x, 27-x$

5. $15x+16\frac{1}{2}, 37\frac{1}{2}-2x, 8x-9$

6. $3x, 5x+26\frac{2}{5}, 2x, 9x+143\frac{3}{5}$

7. $7x+24, 14x+53\frac{3}{8}, 120\frac{5}{8}-3x$

解以下各方程。

8. $15-6t+8t=25$　　*9.* $6t-7+4t=13$

10. $7y-3y+10y=39$　　*11.* $2(x-3)+12=18$

12. $8+5(s+7)=63$　　*13.* $18r+13-10r=75$

14. $\frac{x}{4}+5=9$　　*15.* $\frac{r}{3}+8-\frac{r}{5}=10$

16. $\frac{9x}{2}-\frac{5x}{3}=28$　　*17.* $\frac{26y}{3}-15+\frac{5y}{2}=52$

18. $3.7l-3.6-2.9l=2.4$　　*19.* $2x+4(x+10)+3x=130$

補 角

181. 補角. 兩角之和,等於一平角。(180°)則兩角互為補角。

若兩補角相接,則稱為接補角。

習 題

1. 試作兩接補角。

2. 50° 與 130° 是補角否。? 37° 與 133°, 60° 與 120°, 90° 與 90° 是互為補角否。?

3. 何度為 45° 之補角。? 何度為 $120\frac{1°}{2}$, 為 90°, 為 $a°$, 為 $x°$ 之補角。?

4. 寫出 $a°$, $b°$, $5d°$ $\frac{3c°}{2}$ 等角之補角?

5. 設 $a°$ 為 120° 之補角。a 所代若干?

6. 設 $x°+80°=180°$. $x°$ 之補角為何? $x°$ 之同數若干?

7. 今有方程 $a°+b°=180°$. 何角為 $a°$ 之補角。又何角為 $b°$ 之補角?

8. 以方程式表出下列兩角之互為補角。

(1) $x°$ 與 60°	(2) 70° 與 $y°$
(3) $b°$ 與 $c°$	(4) 50° 與 $x°+70°$
(5) $2x°+3°$ 與 $27x°-2°$	(6) $\frac{3}{4}x°$ 與 $\frac{17}{5}x°+112\frac{1°}{8}$

9. $x+3$ 度之補角為 $2x+27$ 度。求 x, $x+3$, 及 $2x+27$ 之同數。

此題可寫 $x+3+2x+27=180$ 何解 (1)

加似項得 $3x+30=180$ (2)

減30得 $3x=150$ (3)

以3除得 $x=50$ (4)

故 $x+3=53$ (5)

$2x+27=127$ (6)

覆證 $x+3+2x+27=180$

10. x°為$x^\circ+84^\circ$之補角。求兩角。

11. 今有兩補角。此角大於彼角98°。求兩角。

12. 今有兩補角。此角小於餘一角27°。求兩角。

13. 今有兩補角。此角為彼角之$3\frac{1}{2}$倍。求兩角。

14. 兩補角之較為110°。求兩角。

此題設x°為此角。而$x^\circ+110^\circ$為彼角。

15. 兩補角之較為21°，為$36\frac{1^\circ}{2}$，為$73\frac{1^\circ}{4}$，為d°。求兩角。

16. 今有一角與其補角之較為37°，求兩角。

17. 設補角為$5x^\circ$。則x°角之度若干？設補角為$7x^\circ$，為$3\frac{1}{2}x^\circ$。則x°角之度若干？

18. 今有一角。其補角為本角之四倍。問此角若干度。？若為8倍，為10倍，為$2\frac{1}{2}$倍，為$\frac{3}{4}$倍，為$\frac{1}{8}$倍。則此角各若干度？

19 以代數式列以下各題。

(1) 今有一角 x，試倍之。

(2) 3倍一角而加 $15°$

(3) 6倍一角而減 $29°$

(4) 某角與 $13°$ 之和。以4倍之。

(5) 某角與 $17°$ 之和。以 $\frac{2}{3}$ 乘之。

20. 以代數號列下各題。

(1) x 角之補角。

(2) 5倍某補角。

(3) 3倍某補角。

(4) 3倍補角加 $14°$.

(5) 3倍補角減 $16°$.

(6) 補角加 $10°$.

(7) 補角減 $18°$.

(8) 以4除補角。

(9) 補角之三分一。

(10) 補角加 $17°$.

(11) 補角之三分一加 $20°$.

(12) 補角之 $\frac{3}{5}$ 減 $19°$.

21. 設二倍某角。又加 $20°$ 於其補角。兩數之和爲 $280°$. 求此角及補角。

此題宜設 x 代某角。$180-x$ 代補角。則按題得方程

$$2x+(180-x+20)=280.$$

22. 設三倍某角.而補角減 112°.則兩數之和爲 168°.求此角及補角。

23. 某角及其補角之 $\frac{1}{3}$ 之和爲 90°.求兩角。

24. 某角加 12°.而以 5 除其補角.所得兩數之和爲 80°.求兩角。

25. 5 倍某角而加 20°.2 倍其補角而減 15°.所得數之和爲 401°.求兩角。

解以下各方程。

26. $2(x-5)+\frac{1}{2}(x-1)=3$　　27. $5(x-5)+(x+3)=2$

28. $\frac{15z}{2}-20+(z+12)=9$　　29. $\frac{x+5}{3}+\frac{2x-5}{5}-4=4$

30. $\frac{6(x-3)}{3}+\frac{x+3}{4}-3=5$

31. 下列每兩角爲補角.各求其 x 之同數

$\frac{x}{5}+\frac{x}{2}+172\frac{1}{2}$ 與 $\frac{3x}{10}-\frac{x}{4}$,　$x-\frac{x}{7}$ 與 $\frac{3x}{4}+90$

32. 作圖.指出等角之補角相等。

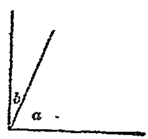
餘角

182. 餘角. 兩角之和爲一直角.則兩角互爲餘角。

習題

1. 何角爲一百零六圖 a 角之餘角? 何角爲 b 角之餘角?

2. 作二接餘角.兩角中能有一角爲鈍角否? 指出兩垂線.



第一百零六圖

3.　22°與68°, $43\frac{2}{3}^\circ$與$46\frac{2}{3}^\circ$, $89\frac{3}{8}^\circ$與$\frac{5}{8}^\circ$是否互爲餘角?

4.　何角爲60°, 爲30°, 爲$10\frac{3}{8}^\circ$, 爲$45\frac{5}{7}^\circ$, 爲a°, 爲n°, 爲x°之餘角?

5.　列出d°, $3c^\circ$, $\frac{5d^\circ}{3}$, $\frac{3s^\circ+2t^\circ}{5}$, $7(a+b)$度, $5x^2$度, $7y^3$度, $3x^2-5y^4$度,等之餘角。

6.　若40°與d°互爲餘角。則d°應爲若干度?

7.　若$y^\circ+70^\circ=90^\circ$. y之餘角若干? 何解? y之同數若干?

8.　今有方程式$c^\circ+d^\circ=90^\circ$. 何角爲c°之餘角。? 何角爲d°之餘角?

9.　以方程式明下列各耦角。使互爲餘角。

(1)　y°與50°　　(2)　30°與z°　　(3)　w°與x°

(4)　$a^\circ+30^\circ$與$a^\circ-20^\circ$

(5)　$2x^\circ+7^\circ$與$5x^\circ-2^\circ$

(6)　$3(x+7)$度與$5(2x-8)$度

(7)　$\frac{2}{3}x-15\frac{7}{9}$度與$26\frac{1}{2}x+43\frac{5}{8}$度。

10.　x°爲$x^\circ+48^\circ$之餘角。求兩角。

11.　某角大於其餘角24°. 求兩角。

12.　某角小於其餘角28°. 求兩角。

13.　x角爲$4x$角之餘角。x應有若干度? 若x角爲$6x$角或$5\frac{1}{2}x$角之餘角。則x角各應若干度?

14. 某角爲其餘角之三倍。此角應若干度。? 若爲七倍，爲六倍，爲 $3\frac{1}{3}$ 倍，爲 $\frac{4}{5}$ 倍，爲 $\frac{1}{9}$ 倍。則此角各應若干度?

15. 某角及其餘角之較爲 $83°$. 求兩角。

16. 若一角及其餘角之較爲 $21°, 36\frac{1°}{2}, 73\frac{1°}{4}, d°$. 求兩角各若干?

17. 某角與其餘角之較爲 $27°$. 求兩角。

18. 2 倍某角。又加 $40°$ 於其餘角。此兩數之和爲 $160°$. 求兩角。

19. 3 倍某角。其餘角減 $40°$. 此兩數之和得 $130°$. 求兩角。

20. 某角及其餘角之半之和爲 $75°$. 求兩角。

21. 若某角加 $15°$. 而以 3 除其餘角。則兩數之和爲 $75°$. 求兩角。

22. 3 倍某角後加 $20°$. 其餘角之 $\frac{2}{3}$ 減 $6°$. 所得兩數之和爲 $102°$. 求兩角。

解以下各方程。

23. $\frac{3x}{5}+88+\frac{x}{5}=180$

24. $\frac{4t}{7}+10-\frac{3t}{14}=15$

25. 作圖。證兩等角之餘角相等。

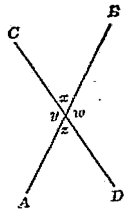
對　頂　角

183. 對頂角. 若兩角以頂點爲公點。以兩直線爲公邊而反其方向者。則此兩角爲對頂角。(如一百零七圖之 x 與 z 兩角)。

習 題

1. 指出一百零七圖之兩耦對頂角。

2. 以薄紙按於一百零七圖上。描 y 與 z 兩角。將描得之兩角。配於 x 與 w 兩角上。問兩對頂角之大小如何?



第一百零七圖

3. 上題所得之結果。可作兩直線相交。以半圓規量其對頂角而證之。

4. 試證一百零七圖之

$$x+y=180$$

$$y+z=180$$

$$x+y=y+z$$

故 $$x=z$$ (何解)

5. 依上題之法。證 $y=w$。

從 4,5 兩題。可得下定理.

定理. 兩直線相交。其對頂角必等。

習 題

1. 兩直線相交。作 $a, b, c, d,$ 四角。

若 $a=40°$, 則 b,c,d 三角各若干? 若 $a=90°$, 若 $a=62°15'$, 若 $a=40°20'10''$. 求 b,c,d 三角。

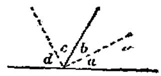
2. 平分兩接補角之兩線。互爲垂線證之。

證：一百零八圖 $a+b+c+d=180°$ 何解

$a=b$ 何解

$c=d$ 何解

故 $b+b+c+c=180°$ 何解



第一百零八圖

$2b+2c=180°$ 何解

$b+c=90°$ 何解

3. 兩直線相交。若對頂角爲 $3x+37$ 及 $5x+7$ (見百零九圖)。求 x 及四角。

因已知之角爲對頂角。故

$5x+7=3x+37$ 何解

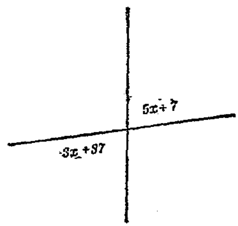
$5x=3x+30$ 何解

$2x=30$ 何公理

$x=15$ 何公理

$5x+7=5\cdot15+7=82$

$3x+37=3\cdot15+37=82$



第一百零九圖

餘兩角。每角爲 $180-82=98$. 何解

覆證 $82+98+82+98=360$.

4. 兩直線相交。求 x 及以下開列各對頂角。作(1)與(2)之圖。

(1) $7x+27$ 及 $4x+87$

(2) $3x-17$ 及 $x+103$

(3) $\frac{3}{5}x+16\frac{1}{2}$ 及 $\frac{2}{5}x+24\frac{1}{2}$

(4)　$2\frac{4}{11}x-13$ 及 $1\frac{1}{11}x+57$

(5)　$\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}x$ 及 $\frac{3}{2}x+42$

(6)　$\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-28$ 及 x

(7)　$5x+\frac{3x}{4}$ 及 $\frac{5x}{2}+130$

(8)　$\frac{7x}{4}-\frac{x}{6}$ 及 $\frac{2x}{3}+66$

(9)　$\frac{x}{3}+\frac{x}{6}$ 及 $\frac{x}{4}+18$

(10)　$\frac{7x}{2}-\frac{3x}{4}$ 及 $\frac{3x}{5}+8\frac{3}{5}$

5. 解以下各方程。

(1)　$\frac{z}{3}+16+\frac{z}{2}-14=7$

(2)　$\frac{2r}{3}-15+\frac{3r}{4}=8$

直三角形之銳角

184. 定理. 直三角形之兩銳角。互為餘角。試證此理之眞確。

設直三角形之兩銳角。此角大於彼角 3 倍。或此角大於彼角 5 倍。或此角為彼角之 $\frac{2}{3}$. 或為彼角之 $1\frac{1}{5}$. 或此角為彼角 7 倍而加 $6°$. 或為彼角之 $\frac{1}{2}$ 而減 $33°$. 求各兩角之數。

185. 直三角形之一銳角。為彼銳角之二倍。求兩銳角。作一直三角形。使函此兩角。

設對90°之邊。長於對30°之邊兩倍。則此圖合題。

由此題。可得下定理。

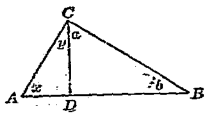
定理. 若直三角形之銳角爲30°及60°.則90°角之對邊。(名曰弦)爲30°角對邊之兩倍。

若直三角形之兩銳角等。求兩角之度數。作此三角形之圖。直角旁兩邊相比。長短如何。?

186 等腰三角形。 凡三角形有兩邊等者。爲等腰三角形。

習　　題

1. 一百十圖之 ABC, ADC, 及 BDC 皆爲直三角形。



第一百十圖

證 x 與 a 同爲一角之餘角。故相等。

證 y 與 b 相等。

2. 解以下各方程。

(1) $9+\frac{x}{5}-12+x=9$

(2) $\frac{3x-2}{7}-1=\frac{3}{7}$

(3) $9x-\frac{x}{9}-1=7\frac{8}{9}$

(4) $\frac{15r}{7}+15-\frac{3r}{14}=28\frac{1}{2}$

3. 以下所列。乃直三角形之兩銳角。求 x 及兩角。

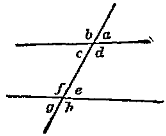
$\frac{x}{8}+2x$ 與 $\frac{87}{2}-\frac{5x}{6}$, $\frac{x}{8}+x$ 與 $\frac{x}{12}+\frac{35}{2}$.

一線割兩線所成之角

187. 若一線橫割兩線。如百十一圖。則成八個角。

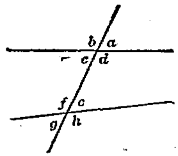
1. 作表列出各接補角。又以方程列出每兩接補角之關係。

2. 作表列出各交角。并以方程明之。



第一百十一圖

188. 一直線橫割兩線。如百十二圖。



第一百十二圖

則$\left\{\begin{array}{l} a\text{ 與 }e\\ b\text{ 與 }f\\ d\text{ 與 }h\\ c\text{ 與 }g\end{array}\right\}$角。名同位角。

c, d, e, f 等角。名內角。

a, b, g, h 等角。名外角。

$\left.\begin{array}{l} d\text{ 與 }e\\ c\text{ 與 }f\end{array}\right\}$角。在割線同旁。名同旁內角。

$\left.\begin{array}{l} d\text{ 與 }f\\ c\text{ 與 }e\end{array}\right\}$角。在割線內段兩旁相對。名內錯角。

$\left.\begin{array}{l} b\text{ 與 }h\\ a\text{ 與 }g\end{array}\right\}$角。在割線外段兩旁相對。名外錯角。

習　題

1. 若 $a=e$。證 $c=e$。

2. 若 $a=e$。證 b 與 e 為補角。

3. 若 $a=e$. 證 b 與 a 爲補角。

4. 若 $c=e$. 證 c 與 f 爲補角。

5. 若 $c=e$. 證 $a=g$.

6. 若 $c=e$. 證 $f=d$.

7. 若 $c+f=180°$. 證 $b=f$.

8. 若 $c+f=180°$. 證 $f=d$.

9. 若 $c+f=180°$. 證 $a+f=180°$.

10. 若 $c+f=180°$. 證 $c+h=180°$.

提　要

189. 本章所授各項列下。接角。對頂角。垂線。補角。餘角。等腰三角形。兩線與割線所成之同位角。內錯角。外錯角。割線同旁之內外角。直三角形之弦。

190. 各定理如下。

1. 於已知線內已知之一點。祇可作一垂線。

2. 若兩接角之和等於一平角。兩外邊必合爲一直線。

3. 直線一旁。同以直線內一點爲頂點。諸接角之和。等於一平角。

4. 繞一點全空間諸接角之和。等於一周角。

5. 等角之補角相等。

6. 等角之餘角相等。

7. 兩線兩交。其對頂角必等。

8. 直三角形之銳角.互爲餘角。

9. 若直三角形之兩銳角爲30°與60°.則90°角之對邊爲30°角對邊之兩倍。

註. 以上各定理.大抵爲派大哥拉士學校首先證明者.此校在意大利南境哥路頓城.約設於紀元前529年。

第七章

平行線.空間中之線與平面

平行線

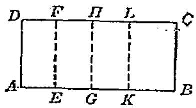
191. **平行線.** 一平面內之兩線。引長終不相遇者。是為平行線。

習題

1 指出案面之平行邊。又指出書中之紙,長方箱,立方木等之平行邊。又指出其他平行線之樣式。

2. 以量法。證長方形對邊。無論何處皆等遠。如百十三圖。

$EF=GH=KL.$



第一百十三圖

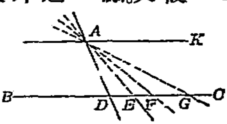
3 將長方形之對邊引長。證無論引長至何處。皆相距等遠。

192. 上兩題。足證下理

平行線任何點。相距皆等遠。

193. **平行之號.** 平行之號為 ∥.如謂 AB 與 CD 平行。可寫作 $AB \parallel CD$.

194. 設一百十四圖。A 為 BC 直線外之一點。又設 AD 直線。過 A 點。與 BC 線相交於 D 點。若 AD 繞 A 點而轉。則 D 循 BC 而移。變為 $E, F, G,$ 等。今設旋繞之中。



第一百十四圖

Pythagoras

派達哥喇士肖像

(106 之 後)

派達哥喇士小傳

派達哥喇士.腓尼基種人.紀元前569年.生於薩摩島.500年.被弒於意大利南境米大奔屯市.派氏爲道德家哲學家.尤精於神秘學幾何學筆算學.居常以天文學,力學,音樂授徒.其道德學哲學.皆根據數學.相傳數學 *Mathematic* 二字.乃派氏所倡用.意謂此學可以平常格致明之.其解幾何學 *Geometry*.與今日中學生所解數學之意相同.

派氏區分數學爲數種.純數卽筆算.實用數卽音樂.靜量卽幾何學.動量卽天文學.承派氏緒餘者.以此爲文學中應學之科.轉授數十年.是爲著名 *Quadrivium* 學之原始.而造成二千年高等教育.

派氏嘗學於腓利西地士及晏匿占文達爾二人.晏氏乃米利都人.兌喇士之高才生.派氏旣卒業.嘗遊埃及,加利達,小亞細亞習數學.旣歸.講學於薩摩.紀元前 529 年.遷居達蘭頓.未幾.至意大利南境哥路頓城.設校授哲學算數.學者日衆.傳仰後世.

派氏區學生爲兩級.曰門人.人數最多.曰派達哥拉徒.爲高才生.相結若兄弟.凡物皆公有.數學發明.祇示會中人.而歸其名於派達哥拉.有宣於衆享其名者.會中人溺之.此會尙有其他秘密事.關係政治.可於歷史中求之.會內規令.以自治和平修潔服從爲旨.勢力日大.漸干政權.自由派勢力派皆惡之.故激衆怒.誅派達哥拉徒數人.派氏遁.追弒之.派氏死.門徒散於意大利南境,西西利島,希臘.棄會內秘密.各立學校.授派氏之學.垂百年不絕.

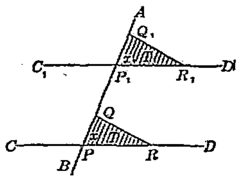
派氏幾何學.與近世學校初級幾何學相似.凡三角形,平行線,平行四邊形,與其他數理.皆具論大要.而不證明.論理法頗不穩健.最創始之學爲數理.後人多從之.派氏不著書.今之所得.多出自傳聞.其爲人篤守祕密.不以公是非爲理者.

有一地位如 AK. 此線不過 BC. 如此。倘有別線不與 AK 恰合。則必與 BC 在 D 點之左相交。此設喻可得下公理。

公理. 於線外一點。祇可作一直線與其線平行。

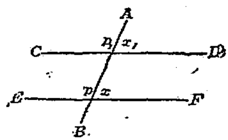
習題

1. 作一直線如一百十五圖 AB. 傍此線放 T 三角矩。使 PQ 邊與之相合。此三角矩由紙剪出。傍三角矩之 PR 邊作 CD 線。移三角矩。使 PQ 傍 BA 而上至 P_1Q_1 之地位。傍 P_1Q_1 作 C_1D_1 線。須知 $\angle x$ 之量未嘗有變。依 191 節之法。用量法證 CD 線內任兩點與 C_1D_1 線等遠。如此。$CD \parallel C_1D_1$. 何解?



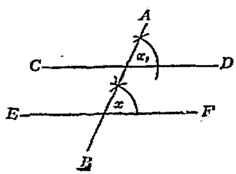
第一百十五圖

2. 作一直線。如百十六圖之 AB. AB 線內任取兩點如 P 與 P_1. 以半圓規作兩等角如 x 與 x_1. 依上題之法。證 $CD \parallel EF$.



第一百十六圖

3. 作一直線。如一百十七圖之 AB, 用規作 $\angle x = \angle x_1$, 證 $CD \parallel EF$.



第一百十七圖

195. 上三題指示用三角矩。半圓規。及規作平行線之法。三法皆以下定理爲根據。

定理. 一線割兩線。若同位角等。則兩線平行。

習　　題

1. 過一點作一線。與已知之線平行。

第一法。傍尺邊移三角矩。

第二法。過 A 點作一線。與已知線 l 相交於 B. 在 A 點作角與 B 角等。使 A 與 B 爲同位角。

2. 若兩線同爲一線之垂線。則兩線平行。試證之。

以 195 節之定理證之。

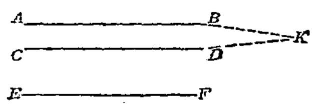
3. 證下列之定理。

兩直線爲一直線所割。若兩內錯角等。則兩線平行。

此題先以代數證內錯角等。則同位角等。後以 195 節證之。

4. 依 3 題法。證兩線爲一線所割。若割線同旁之兩內角互爲補角。則兩直線平行。

5. 證若兩線各與一線平行。則兩線必互平行。卽 AB 與 CD (一百十八圖) 各與 EF 平行。證 $AB \parallel CD$.



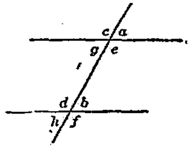
第一百十八圖

證　若 AB 與 CD 不平行。則兩線引長。必相遇如圖。設相遇之點爲 K. 則 KA 與 KC 皆與 EF 平行。然此事全不合理。(何解). 故 AB 與 CD 平行。

6. 指出有何情形。兩線方互相平行。

7. 作兩平行線幷一割線。如一百十九圖。量 a 與 b, c 與 d, e 與 f, g 與 h, 各同位角。幷比較其大小。

8. 作兩不平行線幷一割線。量各同位角而比較之。



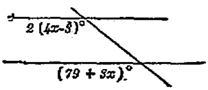
第一百十九圖

196. 上 7.8 兩題。足顯下定理。

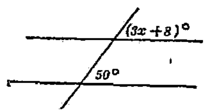
定理. 若兩平行線為一直線所割。其同位角必等。

習　　題

1. 兩平行線及割線所成之同位角。如一百二十圖及一百二十一圖所揭示。求 x 及圖內之八個角。



第一百二十圖



第一百二十一圖

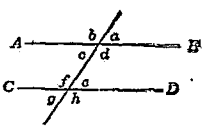
可用 196 節定理證之。

2. 證若兩平行線為一線所割。其內錯角必等。

先用196節證同位角相等。即 $a=e$. (一百二十二圖)後證內錯角相等。即 $e=c$.

3. 證若平行線為一線所割。割線同旁之內角。必互為補角。

證。一百二十二圖。$a=e$, 何解。$a+d=180°$. 何解。故 $e+d=180$. 何解。



第一百二十二圖

4. 一百二十二圖。AB 與 CD 為平行線。指出何角相等。何角互為補角。

5. 兩平行線及一割線所成之內錯角爲 $7(x+1)°$ 及 $(181-2x)°$. 求 x 及八個角。

6. 兩平行線及一割線所成之內錯角若爲 $(3x-5)°$ 及 $5(x-7)°$. 求 x 及八個角。

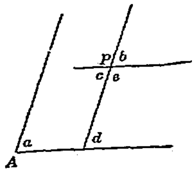
7. 設一百二十三圖 $\angle A$ 爲巳知之角。求作兩線過 P 點。與 A 角兩邊平行。

證 $a=b$.

證 $a=d$, 何解。$d=b$, 何解。故 $a=b$.

8. 證一百二十三圖 $a=c$.

9. 證一二十三圖 a 與 e 互爲補角。

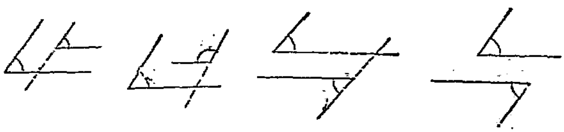


第一百二十三圖

197. 上 8,9 兩題。揭示下定理。

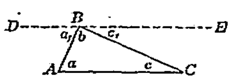
若兩角之兩邊兩兩平行。則兩角相等。或互爲補角。

以一百二十四圖所列之角證此題。



第一百二十四圖

198. 一百二十五圖 DE 與 AC 平行。證三角形三內角之和等於兩直角。



第一百二十五圖

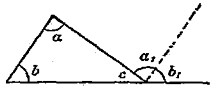
證 $a_1+b+c_1=180$. 何解

$a_1 \qquad = a$. 何解

$c_1 \qquad = c$. 何解

故 $a+b+c=180$. 何解

199. 以一百二十六圖證三角形之外角等於兩內對角之和。



第一百二十六圖

證　$a=a_1$　何解

$b=b_1$　何解

$a+b+c=180$　何解

$a_1+b_1+c=180$　何解

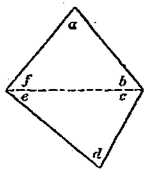
故　$a+b+c=a_1+b_1+c$　何解

或　$a+b=a_1+b_1$　何解

習　　題

1. 證四邊形四內角之和等於360°.(見一百二十七圖)

2. 若四邊形之四角第二角大於第一角 30°. 餘兩角皆依此以次遞增求四角各若干度。



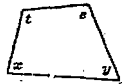
第一百二十七圖

3. 四邊形四角之比例爲 1:2:3:4. 求四角。

法以 a 代第一角。$2a$ 代第二角等等。

平行四邊形及梯形之角

200. **平行四邊形.** 四邊形之對邊兩兩平行者爲平行四邊形。



第一百二十八圖

201. **四邊形之隣角及對角.** 一百二十八圖之 x 與 y, y 與 s, s 與 t, t 與 x 等爲隣角。x 與 s, y 與 t 爲對角。

習　　題

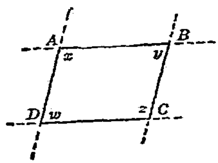
1. 以尺及半圓規。作一四邊形。使每兩隣角之邊爲3寸及5寸。兩邊中間之夾角。一爲60°.

2. 證平行四邊形之隣角互爲補角。(見一百廿九圖)

3. 證平行四邊形之對角相等。

4. 平行四邊形之對角。大於其隣角3倍。求四角各若干。

5. 平行四邊形兩隣角之較爲20°. 求四角各若干。?



第一百二十九圖

6. 平行四邊形內。3倍其一角而減其隣角。得30°. 求兩角各若干。?

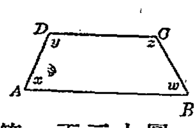
202. 梯形. 四邊形祇有兩邊平行者。爲梯形。

習　　題

1. 一百三十圖之梯形。證 x 與 y 互爲補角。

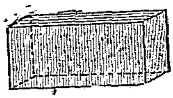
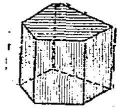
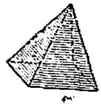
2. 證梯形之四內角。等於四直角。

3. 一百三十圖之 C 角。爲 B 角之 $\frac{5}{3}$, D 角爲 A 角之4倍。求各角若干?

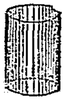


第一百三十圖

203. 體.面. 一百三十一圖之立方形。及一百三十二圖之長立方形。皆爲體。其他常見之體。爲一百三十三圖之角柱體。一百三十四圖之角錐體。一百三十五圖之圓柱體。一百三十六圖之圓錐體。及一百三十七圖之球體。

第一百三十一圖　第一百三十二圖　第一百三十三三十四圖



第一百三十五圖　第一百三十六圖　第一百三十七圖

凡體函有物質或硬或軟或重或輕或有色。皆充滿空間中限定之部。而以面與周圍之空間相隔。習幾何學者於論體時。祇留意於體之形狀大小。其餘顏色輕重密率等等。皆置之不論。獨研究體所佔空間之一部而已。凡此等體爲幾何體。

一百三十一圖至一百三十七圖中。何體有平面。? 何體有曲面。?

204. 平面. 凡面。任取兩點。作一直線。線內處處皆在面內者。此面爲平面。

指出課堂中物之有平面者。又指出面之非平面者。

凡欲驗平面。可以物之直邊抵於其上。直邊各點與面合。其面即平。

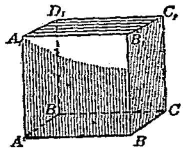
前既有過兩點祇可作一直線之理。故直線如有兩點在面內。則全線必在面內。

木匠欲決定一面是否平面。當用何法。?

205. 191 節曾言同一面內之兩線。若引長不相遇。則爲平行。然兩線若在空間引長不相遇。亦不必平行。

故一百三十八圖 A_1D_1 與 AB 不相遇。然亦不作爲平行。

指出課堂中之直線不相遇而不平行者。及其他平行者。



第一百三十八圖

206. **平行面.** 兩面引長終不相遇者。爲平行面。

如此。一百三十八圖之 $ABCD$ 與 $A_1B_1C_1D_1$ 兩面爲平行面。

207. **平行線與面.** 一百三十八圖 $ABCD$ 面內。任作何線。皆不與 $A_1B_1C_1D_1$ 面遇。何解。凡線引長任至何遠。終不與面遇者。此線與該面平行。

指出課堂中之線與面平行者。

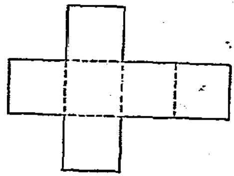
一百三十八圖之 BB_1. 乃 BC 及 BA 之垂線。凡過 B 點在 $ABCD$ 面上所作之線。BB_1 亦爲其垂線。此事可以方矩在木製之立方形上證之。BB_1 常稱爲 $ABCD$ 之垂線。

指出課堂中之線爲平面垂線者。卽如門旁之直邊。爲地面之垂線。(何解)

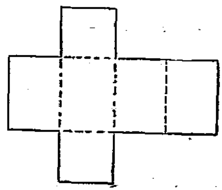
208. **線之垂於平面者.** 若一線與面相交。與此面內任何線爲垂線者。卽稱此線垂於此平面。凡線垂於別線上所用之號爲⊥。故謂 AB 垂於 CD. 可寫作 $AB \perp CD$.

幾何體之模型

209. **立方.** 立方形。可依一百三十九圖之法製成。如圖畫於厚紙上。循圖之墨線剪出。後依虛線摺合。以膠紙粘貼。卽爲立方形式。量形之邊。算全面之積。并求體積。


第一百三十九圖

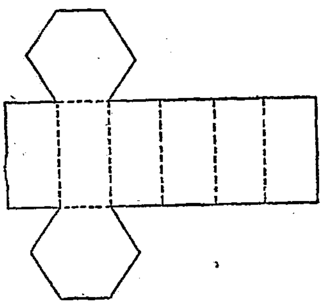
210. **長立方.** 長立方形。可依一百四十圖之法。製成模型。求形之體積及全面之積。


第一百四十圖

211. **角柱.** 依一百四十一圖之式。製一角柱模型。求全體之面積。

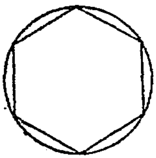
求六等邊形之面積。可分爲六個等邊三角形。量三角形之底及高。算其面積。

凡作六等邊形。先作一圓。以半徑爲度割其周。以線連各割點。卽成。如一百四十二圖。

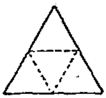

第一百四十一圖

212. **角錐.** 欲作棱錐模型。可依一百四十三圖及一百四十四圖爲之。

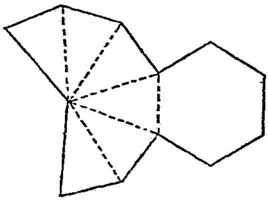
213. 圓錐. 任作兩不等圓。如一百四十五圖。使兩圓相切。令 C 點落於 D 點。後轉圓使常相切。至 C 落於 D 點。DED' 弧之長。與 A 圓周相等。後剪去 DBD' 部分。其餘卽爲圓錐之曲面。而以 A 圓爲底。



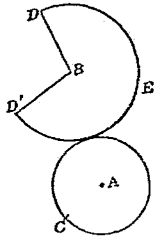
第一百四十二圖



第一百四十三圖



第一百四十四圖



第一百四十五圖

提要

214. 本章所授各款如下。平行線。四邊形之對角及隣角。體。角柱。角錐。圓柱。圓錐。球。平面。平行面。線與面平行或爲垂線。

215. 平行之號爲 ∥.垂線之號爲 ⊥.

216. 本章所授之定理及公理如下。

1. 平行線任何點相距皆等遠。

2. 於線外一點。祇可作一直線與其線平行。

3. 一線割兩線。若同位角等。或內錯角等。則兩線平行,

4. 兩線爲一線所割。若割線同旁兩內角互爲補角。則兩線平行。

5. 若兩線同爲一線之垂線。則兩線平行。

6. 若兩線各與一線平行。則兩線必互平行。

7. 若兩平行線爲一直線所割。則內錯角等。同位角等。割線同旁之兩內角。互爲補角。

8. 若兩角之邊兩兩平行。則兩角相等。或互爲補角。

9. 三角形之外角。等於兩內對角之和。

10. 平行四邊形之對角相等。

11. 平行四邊形之鄰角。互爲補角。

217. 所授之作法如下。

過已知線外之一點作一直線。與已知之線平行。

218. **幾何體之模型.** 如下。立方。長立方。角柱。角錐。圓錐。

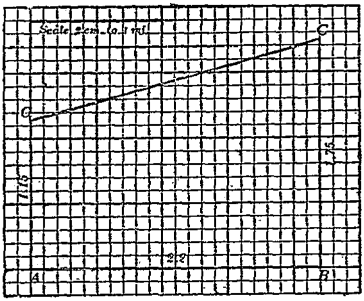
第八章

量空間之線相似形

比例尺作圖

219. 間接量法. 前章論角之大小及遠度之距。可以尺,矩,半圓規,等物直接量之。然問題中每有不能直接量其遠度者。如河岸相距之數。樹木之高度等。皆不便引尺量之。下題可表明倘不能直接量遠度及角度。可量有關係之線與角。而推得所欲知之數。此種量法。名曰間接量法。

今有人由一百四十六圖之O點。向南行1.15里。後向東行2.2里。復向北行1.75里。問距動身之點若干里?



第一百四十六圖

設方格內之2cm.代一里。作線代其遠近。如一百四十六圖。後量圖中之CO.此卽題中之求數。

220. 比例尺圖. 上題之遠近。以一百四十六圖之線表之。此法名比例尺。蓋以2cm.與一里相比也。

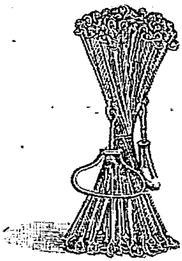
習　　題

1. 以 2cm. 代 1 里之比例尺。求下各遠度。2.34 里，1.06 里，3.90 里，0.15 里，2.63 里。

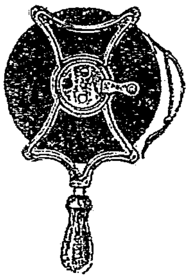
2. 今有人由 S 點向東行 45 碼。轉向北行 60 碼。直接求動身點與終點之相距。

以 1cm. 代 10 碼之比例作圖。

231. 測量器。 測量家常用之測量具。爲鋼量鍊。如一百四十七圖。繩量尺。如一百四十八圖。量角則用地平儀。鍊以鐵條製成。每條首尾有圈。以環續之。量遠時。須用一百四十九圖之鍊針。用以誌記每鍊之尾點。或量尺之末處。



第一百四十七圖　鋼量鍊



第一百四十八圖　繩量尺

第一百四十九圖　鍊針

習　　題

1. 今有人向南行 84 碼。乃轉東行 144 碼。復轉北行 120 碼。求動程點與末點之相距。

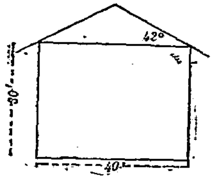
用 1cm. 代 12 碼之比例尺求之。

2. 今有兩人。同由一處動身。一向西行 5 里。乃轉北行 3 里。第二人向南行 4 里。乃轉東行 5 里。求兩人相距若干。?

3. 以 1cm. 代 2 尺之比例線繪房之圖。此房長24尺寬18尺。又求此房之對角線長若干?

4. 今有長方形。長16丈。寬12丈。試以 1cm. 代 4 丈之比例尺繪圖。并求此形之對角線。

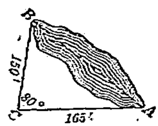
5. 以 1cm. 代10尺之比例尺。作屋後壁之圖。如一百五十圖。并求屋脊頂距地之高?



第一百五十圖

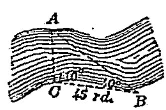
6. 華盛頓京之火車站。長760尺。寬 343 尺。候車客室佔地 220×130 方尺。此車站較議院尤大。議院長751尺。寬 350 尺。試用比例尺作兩處之圖及車站內之候車客室。

7. 某鐵路測量家。欲知某濕澤之長度。如一百五十一圖之 AB. 遂由 A 樹量至 C 石。得 165 尺。再由 B 樹量至 C 石。得 150 尺。C 角爲 $80°$. 求此澤之 AB 遠若干?



第一百五十一圖

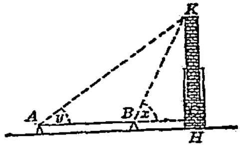
8. 今有工程師。欲求某河之闊 AC 而不過河。乃傍岸量至 BC. 復測得 B 與 C 兩角。試依一百五十二圖之數。$C110°$, $B40°$, $CB45$ 桿。作三角形。而求河之廣袤。



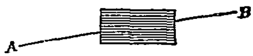
第一百五十二圖

9. 某童欲求製造廠煙囪之高 KH. 先以量角器在 A,B 兩地點。求得 x 與 y 兩角。量角器放於箱面。距地 $3\frac{1}{2}$ 尺。A,B 與煙囪。皆同在一平面。A 距 B 50尺。若地面甚平。$x=63°$, $y=33\frac{1°}{2}$. 則煙囪應高若干?

10. 一百五十四圖之 AB 線。穿過一高樓。試解明用比例尺法。如何可求得 AB 之相距。

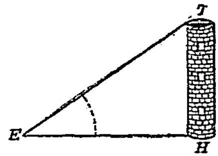


第一百五十三圖



第一百五十四圖

222. 高度角. 以望遠鏡依天平線平放。其方向如一百五十五圖之 EH. 直望 HT 塔。轉遠鏡使高直指塔頂 T。遠鏡轉高所成之角。名曰高度角。卽由測量處移望塔頂之度。



第一百五十五圖

習　　題

1. 何角在一百五十三圖之 A 點爲高度角。? 何角在 B 點爲高度角。?

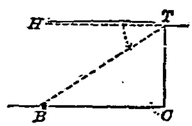
2. 太陽之高度角爲25°時。某樓之影長90尺。求樓之高

3. 樹一本高40尺。影落平地長60尺。求日之高度角。

4 某人測量一樹。距樹20碼。測得高度角38°. 求樹高。

5. 某塔之頂有旗柱一支。於地平面距塔脚50尺處。求得柱頂之高度角爲35°. 又求得塔頂之高度角爲20°. 求柱長若干。

223. 低度角. 於巖頂如一百五十六圖之 T 點。置望遠鏡。先依天平線放平。後轉鏡低至 B. 所得之 HTB 角。名低度角。



第一百五十六圖

習　題

1. 設一百五十六圖之巖高 100 尺。由 T 點所得之角爲 40°. 求 B 點距巖脚之遠。

2. 船一艘經某塔。塔高 120 尺。上有電射光燈。當船距塔 400 尺時。問電燈須低若干度。方能照見該船。?

3. 某巖之頂。高 150 尺。某船之低度角爲 25°. 求此船距巖底若干尺。

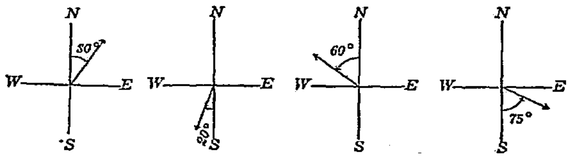
4. 某燈塔建於石上。海上有船。在塔頂測之。低度角爲 20°. 在石上測之。低度角爲 8°. 燈塔高 45 尺。求船距石之遠。

224. 地平經度. 凡線與南北經線所成之角度。爲地平經度。

一百五十七圖之箭形。其一讀爲東北 30°. 其二讀爲西南 20°. 其三讀爲西北 60°. 其四讀爲東南 75°. 英文以 N 代北。S 代南。E 代東。W 代西。故上數寫法爲 $N30°E$. $S20°W$. $N60°W$. $S75°E$.

習　題

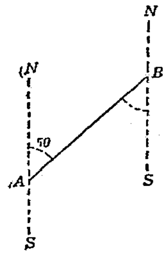
1. 用尺與半圓規作下各線。東北 45°. 西南 45°. 東南65°. 東北 65°. 西南 $47\frac{1}{2}°$. 西北 40°.



第一百五十七圖

2. 試用英字母寫上題之各角。

225. 方向角. 測量家立於一百五十八圖之 A 點。以望 B 點。由 A 至 B 之線。若依南北經線論。可名爲由 A 至 B 之方向角。故圖內 B 點。爲 A 之 $N50°E$. 而 A 點爲 B 點之 $S50°W$.



第一百五十八圖

何故 $\angle NAB$ 與 $\angle SBA$ 兩角相等。?

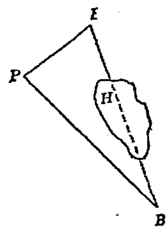
習　題

1. 礮臺 B 與 A。同在海岸。B 之方向角。乃 A 之 $N65°W$. 今有敵船一艘。在海面下錨。其地點乃 B 之東北 A 之西北。兩礮臺相距 7 里。求敵船距兩臺之遠近。

以 1cm. 代 1 里之比例尺作圖。先過 A 作南北線。後求得 B 點。再作 B 點之南北線。最後依題作線。求其相距。

2. 今有一點 Q. 在 P 點之東 6.4 里北 9.8 里。求 P,Q 兩點之相距。及 PQ 線與 P 點南北線所成之方向角。

3. 今有礮臺。如一百五十九圖之 B 點。與敵人礮臺 F. 中隔一山 H. 距山脚不遠處有 P 點。測得 F 在 P 東北 4 里。而 P 在 B 西北 6.25 里。試求 F 與 B 相距之遠。



第一百五十九圖

4. 某人欲量一河之廣袤而不過河。此河向西流。此人立於岸之 A 點。望對岸一樹。方向爲 $N20°E$. 乃東向傍岸行 50 碼至 B 點。再望樹。則方向爲 $N60°W$. 求此河闊若干。?

比　　例

226　數之比例. 以 3 除 6 所得之商數。即爲 6 與 3 之比例數。此數有時寫作 6：3.或作 $\frac{6}{3}$. 依最近新法。$\frac{6}{3}$ 爲最簡捷之式。故 3 比 4 爲 $\frac{3}{4}$. a 比 b 作 $\frac{a}{b}$. 凡數與某數之比例。可以第二數除第一數而得之。

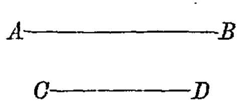
凡分數。皆可作爲比例數。即分子比分母。凡數與自己之比例爲一。

227. 線之比例. 設一線長 2 寸。別線長 3 寸。則第一線爲第二線之 $\frac{2}{3}$.

$\frac{2}{3}$ 即此兩線之比例。

設一線長 5 寸。別線長 7 寸。何數爲此兩線之比例?
凡求兩線之比例數。宜以簡便之準個(如寸或生的米達)量之。量得數互除。即得。如此。兩線之比例。即以同一之準個量兩線。其得數相比便是。

228. 比例線之表示法. 從上節觀之。可知兩線(如一百六十圖之 AB 與 CD) 之比例。意即 $\frac{AB\text{之量數}}{CD\text{之量數}}$。量法所用之準個。須兩線相同。



第一百六十圖

此比例之簡捷寫法。爲 $\frac{AB}{CD}$.

習　　題

1. 用 2cm。爲準個。求一百六十圖 $\frac{AB}{CD}$ 之比例。得數用小數爲分數。

2. 以碼量兩線。得 7 碼及 3 碼。求兩線比例數。

3. 若以尺量上題之線。數應若干。?比例應若干?

4. 任作兩線。以生的及寸量之。求兩種量數之比例數。量數須寫小數。比較兩數之結果。

229. 上 2,3,4, 三題。足顯量物之準個雖改。而所得之比例不改。

習　　題

1. 作兩線。使其比例爲 $\frac{2}{3}$. 問有多少耦線。其比例爲 $\frac{2}{3}$?

2. 試寫數幾耦。其比例爲 $\frac{5}{6}$.

3. 指出 $3x$ 與 $7x$. 可代表所有耦數其比例爲 $\frac{3}{7}$ 者。

4. 分 85 爲兩數。使有 2 : 3 之比例。

5. 分 84 爲三數。使有 3 : 4 : 5 之比例。

6. 有兩數。其比例爲 $\frac{5}{6}$. 若兩數各減 12. 則兩餘數之比例爲 $\frac{3}{4}$. 問此兩數若干。

7. 令有一數。加 12. 或 30 減去此數。所得之兩數。其比例爲 $\frac{5}{10}$. 問此數若干。

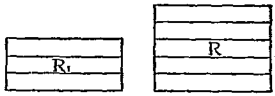
8. 今有兩線。其比例數爲 $\frac{2\frac{1}{2}}{3\frac{3}{4}}$. 其長線爲 30 生的米達。求短線長若干。

230. 多邊形之比例.及角之比例. 兩角之比例或兩多邊形之比例。皆以量得之數爲比例。

習　　題

1. 任作兩角。以半圓規量之。而求兩角之比例數。

2. R 與 R_1 兩長方形。(一百六十一圖) 以同度均分之。求比例。



第一百六十一圖

3. 三角形內之三角比例。爲1∶2∶3.求三角若干。

4. 繞一點全空間作三角。比例數爲 2∶3∶4. 求三角若干?

5. 2倍某角而8倍其補角。所得數之比例爲$\frac{1}{2}$.求兩角。

6 某角減8°.而加8°於其餘角。則所得數之比例爲$\frac{2}{7}$,求兩角。

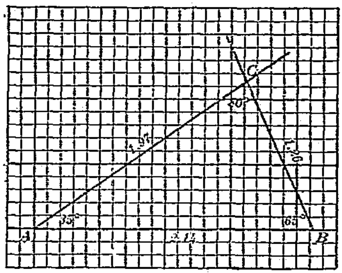
似　　形

231. 三角形作法. 二百十九節至二百二十五節。經解釋用間接量法求角與距。以下可將代數求距之法解示。此法較用比例尺作圖。尤爲簡便。

習　　題

1. 作三角形。形內三角爲35°, 65°, 80°. 幷量三邊。

任作一線。如一百六十二圖之 AB. 由 A 作線。與 AB 成角 35°. 又由 B 作線。使與 BA 成角 65°. 兩線相交成角 C. 量 C 角以知所作之兩角正當否。再量 AB, AC, CB 三線。得數可用小數。



第一百六十二圖

2. 作 AB. 較一百六十二圖之線略長。再作一三角形。使其角仍爲 36°, 65°, 80°. 并量其三邊。

3. 求 1, 2 兩題三角形相當邊之比例。比例數可寫兩小數位。試將所得之比例數。與同班生所得者比較。

4. 前 1, 2 兩題所得之兩三角形。試比較其形。此等形是否與同班生所作之形同様。? 所有三角形。大小同否。?

5. 任作兩三角形。大小不同。而角度皆爲 30 度 60 度 90 度。試比較其形式。測其各邊。並求其相當邊之比例。

6. 作兩三角形。大小不同。而三角皆爲 90°, 25°, 65°. 試比較兩形之大小及形式。又比較兩形相當邊之比例。

7. 任作一三角形。又作一三角形。使其角與前形相等。此兩形是否同式。? 是否此兩形必須同大小。比較兩形相當邊之比例。

232. 似三角形. 凡三角形同式者。名爲似三角形。似三角形。不必一定同大小。

233. 231 節由 1 至 7 各問題。可產生下定理。

定理. 三角形之三角。各與別三角形之相當角等。則兩形相似。

從上文。可知若兩三角形之相當角等。則兩形相當邊之比例亦等。此可以解釋下文似三角形及似多邊形之界說。

234. 似多邊形. 若兩等邊多邊形之相當角等。而相當邊之比例等。則兩形相似。

據此。則相似形甚多。如兩正方形,兩圓,兩等邊三角形。任一形與依樣以比例尺所作之形。影片與其放大之像及收小之像。皆相似。

似三角形。可作爲一個三角形而依樣放大或收小。又或可作爲依樣以比例尺別作三角形。

凡形相似者。以號∽示之。如$\triangle XYZ \sim \triangle X_1Y_1Z_1$。其意卽言 XYZ 與 $X_1Y_1Z_1$ 兩三角形相似也。

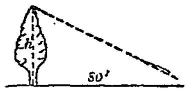
似形之問題

235. 由似形相當邊之比例相等之理。可知用代數能求其相距。

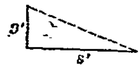
習題

1. 量某樹之高。

樹身與影線。及日光經樹頂由空中至地之線。成三角形。如一百六十三圖。樹影量得80尺。同時三尺長之竹竿。得影 8 尺。如一百六十四圖。竹竿與影及日光經竿頂至地之線成三角形。與樹影之三角形相似。何解?



第一百六十三圖

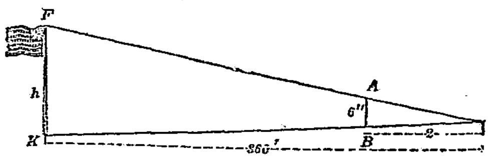


第一百六十四圖

設 h 代樹身之高。則得

$$\frac{h}{3}=\frac{80}{8},$$ 何解? 故 $h=30$.※

2. 某童欲求一旗柱之高。豎持一鉛筆。距眼 2 尺。如此恰可眼光與柱之上下齊平。若柱之距離 360 尺。而筆長 6 寸。則柱長應若干?



第一百六十五圖

3. 某屋之簷與脊尖所成之三角形。與屋下外樓所成之形相似。外樓之形爲 7 尺, 7 尺, 10 尺。而屋形之長邊爲 25 尺。求餘兩邊若干?

※據史家普魯達之記載。首用此法求高者。乃米利都城哲學家兌剌士。兌剌士以此法求得金字塔之高。

4. 三角形之邊爲 8, 10, 與 13. 其相似三角形最短之邊爲 11. 求餘兩邊。

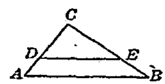
5. 某三角形之邊爲 4.6cm., 5.4cm., 6cm.。其相似三角形之相當邊爲 $x$cm. $y$cm. 及 15 cm. 求 x 與 y.

6. 某三角形之邊爲 1, 2, 與 3. 其相似三角形最長之邊爲 20. 求此形之餘兩邊。

7. 兩長方形花園。式同而大小異。其一長三丈闊 5 丈。其二闊 12 丈。問應長若干?

8. 屋地一段。與其內之小段相似。小段長 100 尺, 闊 150 尺。大段闊 300 尺。問應長若干?

9. 若作一線與已知三角形之一邊平行。而與餘兩邊相遇。成一三角形。試證此形與已知形相似。



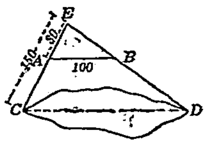
第一百六十六圖

先證一百六十六圖 ABC 三角形之角。與 DEC 三角形相當之角相等。後以 233 節之法證之。

10. 設一百六十六圖。$AC=21$, $BC=35$, $DC=3$, 求 EC.

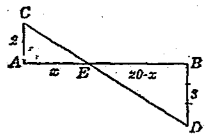
11. 設一百六十六圖。$AC=3+x$. $DC=3$. $BC=4$. $EC=1$. 求 x 及 AD 之長。

12. 欲求一百六十七圖湖之闊 CD. 先作 CED 三角形。又作 AB 與 CD 平行。量 EC, AE, 與 AB. 求 CD.



第一百六十七圖

13. 一百六十八圖之 AB 線長20尺。截爲兩段。使比例爲$\frac{2}{3}$。兩段各長若干。?



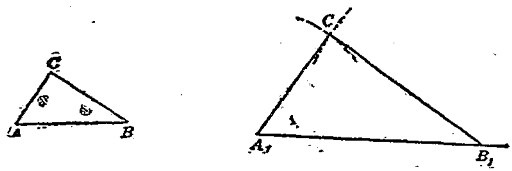
第一百六十八圖

作 $AC \perp AB$ 而長 2 準個。又作 $BD \perp AB$ 而長 3 準個。作 CD 線。證 AEC 與 EBD 兩三角形相似。用方程求 x。

14. 某線長24尺。求分作兩段。使其比例爲$\frac{7}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{5}$.

15. 任作一三角形。求作別三角形。其三邊各爲前形三邊之二倍。

設一百六十九圖 ABC 爲第一三角形。於另一無限長之線上截 A_1B_1 等於 AB 之兩倍。以 A_1 爲心。以兩倍 AC 之長爲半徑。作一小弧於 C_1 處。又以 B_1 爲心。以兩倍 BC 之長爲半徑。作一弧。與前弧相交於 C_1。作 A_1C_1 與 B_1C_1。$A_1B_1C_1$ 三角形。即求作之形。



第一百六十九圖

16. 上15題之兩三角形。試比較其式是相似否。? 量兩形相當之角。比較兩形相當邊之比例如何。? 相當之比例若干。?

17. 作一三角形。其三邊爲已知三角形之邊之三倍。比較相當邊之比例如何。? 兩形相似否。? 量相當之角。

236. 上15,16,17三題。可得下定理。

定理. 兩三角形。若相當邊之比例等。則兩形相似。

提要

237. 本章所授之事項如下:間接量法。比例尺作圖。高度角。低度角。地平經度。方向角。數之比例。線之比例。角之比例。多邊形之比例。似形。相似之號爲～。

238. 測量家及工程師所用之儀器量具如下。地平儀。鋼量鍊。鍊針。繩量尺。

239. 本章所揭示之定理如下、

1. 兩三角形。若此形三角與彼形相當之角等。則兩形相似。

2. 兩三角形。若相當邊之比例等。則兩形相似。

240. 間接量法求相距有兩法。

1. 量與遠有關連之線與角。用比例尺作圖。而推得所欲求之距。

2. 以相似之兩三角形。求得方程。三角形內之一邊爲所求之距。解方程。卽得求數。

241. 幾何學內相似多邊形之界說。爲相當角相等。而相當邊有等比例。

Archimedes

亞奇米德肖像

(132 之 後)

亞奇米德小傳

亞奇米德。西西利島敍喇古城人。生於紀元前 287 年。傳言亞氏與敍喇古王室有連。壷時肄業於埃及亞力山大之大學。爲算學士高農之及門弟子亞於力學最有心得。國家大工程。恆就商之。亞氏亦以此爲格致家實行試驗之法。創新法無算。皆應人事。今之求金銅雜質法。槓桿移船法。船上吸水法。平田法。皆亞所遺制也。某日。敍拉古王大船下水。亞氏宣言曰。移是區區。特小者耳。設空中有定點。可以置桿。則地亦可移轉云。

亞著書論算術及格致者甚多。當時格致界中之題理。討論殆遍。尤於平面立體幾何。獨宣義蘊。論圜理。首言圜周與徑之比例。在 $3\frac{1}{7}$ 與 $3\frac{10}{17}$ 之間。又論圜錐，圜柱，球體各體面相關之理。亞氏以球等於同高圜柱 $\frac{2}{3}$ 之題。要妙無倫。特命於己墳上。製石球柱以誌之。亞氏於格致算學。旣多所發明。論者稱之爲古代之奈端。讀者閱奈端列傳。可知此言不謬。

紀元前 212 年。羅馬方興。出兵略地。以舟師攻敍拉古。亞氏盡守禦之方。燔其舟。然敍人苦戰連年。卒不支。城破之日。亞氏方斗室中覃思算術。羅馬兵大掠。入亞室。亞斥其喧擾。遂遇害。羅馬督師聞之。惋惜不已。死之日。年七十五。

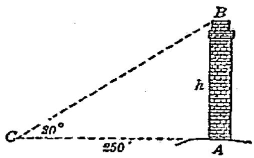
第九章

比例.[※] 變數. 等比例.

三角比例

242. 上章已將求相距之比例緊要處揭示.本章再將用比例解題之法.詳為討論.

今有新築之烟囪.如一百七十圖 AB. 人立處相距 250 尺.高度角約 $30°$. 試求烟囪之高.



第一百七十圖

此題如以比例尺作圖解之.甚易求得.

設 $\triangle A_1B_1C_1$. 如一百七十一圖.為比例尺依 $\triangle ABC$ 而作者.

第一百七十一圖

於是　$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$. 何解?

故　$\dfrac{h}{A_1B_1}=\dfrac{250}{A_1C_1}$, 即 $h=250\cdot\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1}$. 何解?

此最後之方程.若 $\dfrac{A_1B_1}{A_1C_1}$ 比例已知.則 h 之得數為 250 乘

※比例及等比例數.乃算學中最古之名目.埃及.巴比倫.中國.希臘.亞剌伯及歐羅巴中古之人.皆習用之.近世數學家多用方程術.等比例之用途替.

此比例數。然 $\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$ 可以從任何直三角形得之。此直三角形之一銳角爲 $30°$. 設一百七十一圖之 $\triangle A_1B_1C_1$ 及一百七十圖之 $\triangle ABC$ 代兩直三角形。而 $\angle C=\angle C_1=30°$. 此兩三角形既相似。故 $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

以 A_1B_1 乘此方程之兩端。得

$$AB=\frac{AC\times A_1B_1}{A_1C_1}.$$

以 AC 除兩端。得 $\frac{AB}{AC}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$.

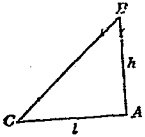
如此。求 AB 之問題。可解釋如下。任作一直角三角形。其一角爲 $30°$. 從此形求得 $\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$ 之比例數。以此數代入

$$h=250\cdot\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$$

之方程。卽求得 h.

243. 切線表。 以 C 代高度角。h 代高。如一百七十二圖。測量處到烟囱處之相距。以 l 代之。則方程式

$$h=l\cdot\frac{AB}{AC}.$$



第一百七十二圖

可以作爲求 h 之公式。$\frac{AB}{AC}$ 之比例數。可依 $\angle C$ 之大小算出。列爲表。任何高。皆可以測高度角 C. 幷求相距數 l. 然後以 l 乘 $\frac{AB}{AC}$ 之比例數。卽表中 C 角相當之數。$\frac{AB}{AC}$ 比例。名爲 $\angle C$ 之切線。其表名爲切線表。

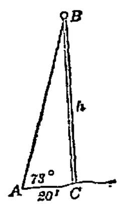
1° 至 89° 之正切線表

角度	正切	角度	正切	角度	正切	角度	正切	角度	正切
1	.02	19	.34	37	.75	55	1.43	73	3.27
2	.03	20	.36	38	.78	56	1.48	74	3.49
3	.05	21	.38	39	.81	57	1.54	75	3.73
4	.07	22	.40	40	.84	58	1.60	76	4.01
5	.09	23	.42	41	.87	59	1.66	77	4.33
6	.10	24	.44	42	.90	60	1.73	78	4.70
7	.12	25	.47	43	.93	61	1.80	79	5.14
8	.14	26	.49	44	.96	62	1.88	80	5.67
9	.16	27	.51	45	1.00	63	1.96	81	6.31
10	.18	28	.53	46	1.03	64	2.05	82	7.11
11	.19	29	.55	47	1.07	65	2.14	83	8.14
12	.21	30	.58	48	1.11	66	2.25	84	9.51
13	.23	31	.60	49	1.15	67	2.36	85	11.43
14	.25	32	.62	50	1.19	68	2.47	86	14.30
15	.27	33	.65	51	1.23	69	2.60	87	19.08
16	.29	34	.67	52	1.28	70	2.75	88	28.64
17	.31	35	.70	53	1.33	71	2.90	89	57.29
18	.32	36	.73	54	1.37	72	3.08		

習　　題

解下各題。

1. 一百七十三圖 BC 旗柱之繩。牽至距柱脚20尺。繩與地成角73°. 求旗柱之高。



第一百七十三圖

以　　$h=20\cdot\dfrac{BC}{AC}$ 爲公式。

從表得 $h=20(3.27)$.

故　　$h=65.4$, 或略數 65.

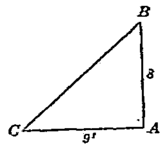
2. 一氣球上升。以繩繫於地 A 點斜偏 67°. 則正當氣球之點 C. 距 A 點139尺。設繫球之繩甚直。求氣球高若干?

3. 某飛機在空中。從 A 點測之得 $60°$. 正當飛機下之 C 點。距 A 點 300 碼。求飛機之高。

4. 距塔脚 259 尺。測得塔頂之高度角 $27°$. 求此塔高若干?

5. 一直柱長 8 尺。影落平地長 9 尺。求影尖之高度角若干?

比例 $\frac{AB}{AC}=\frac{8}{9}=.89$ 略數。如圖一百七十四。從切線表求得 C 角之相當角約為 $42°$. 此即答數。



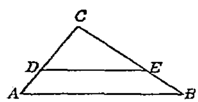
第一百七十四圖

6. 某樹為風所折。一端貼於地面。成直三角形。樹頂倒於地面成 $40°$ 角。其貼地之點距樹脚。量之得 48 尺.求此樹餘段之高。

7. 從某樓之簷。下望恰至對街之旁。其低度角為 $4°$.街之闊 45 尺。求此樓之高。

比　　例

244. 於方格紙上作三角形。如一百七十五圖之 ABC. 過 AC 內一點如 D. 作 DE 線與 AB 平行。求 $\frac{CD}{DA}$ 與 $\frac{CE}{EB}$ 兩比例。得數可求至小數兩位。



第一百七十五圖

如何比較此等比例。

此題可解下定理。

定理. 任作一線。與三角形之一邊平行。割餘兩邊。所割相當段之比例相等。

習　　題

1. 一百七十五圖。設 $DC=8$, $DA=2.5$, $CE=10.2$. 求 EB.

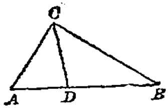
2. 設 $DC=4$, $DA=.27$. $CE=1\frac{1}{3}DC$. 求 EB.

3. 設 $DC=a$, $DA=b$, $CE=c$. 求 EB.

4 設一百七十五圖。$AD=DC$. 證 $BE=EC$.

5. 將 4 題所得。列成定理。

245. 作三角形。如一百七十六圖之 ABC. 平分 ACB 角。求 $\frac{AC}{CB}$ 與 $\frac{AD}{DB}$ 兩比例。比較兩比例如何?將所得之結果。自寫為定理。而與下定理比較。



第一百七十六圖

定理.* 平分三角形一角之線。割對邊為兩段。此兩段之比例。與三角形餘兩邊之比例等。

習　　題

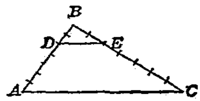
1. 設一百七十六圖內。$AC=3$ 寸, $BC=6$ 寸; AD比DB少 2 寸.試用上定理。求 AB 與 DB 之長。

2. 設一百七十六圖之 $AB=8$, $AC=4$, $CB=7.6$. 求 AB 兩段各若干?

---

*紀元前 408 年.希臘哲學士游道射士初證此理.亞奇米德士推廣此理.以及別題.

246. 作三角形。如一百七十七圖之 ABC。量 AB 而均分七段。截取 $BD=\frac{2}{7}AB$。如此。D 點分 AB。成 $\frac{2}{7}$ 之比例。依法分 CB。比例為 $\frac{2}{7}$。作 DE 線。量 BDE 與 DAC 兩角。



第一百七十七圖

若作圖妥善。則 BDE 與 DAC 兩角必等。證 DE 與 AC 平行。

此題得下定理。

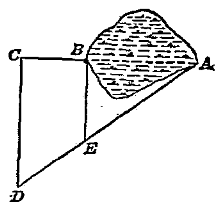
定理. 若三角形之兩邊。依同一之比例截分。連兩分點之線。必與第三邊平行。

習　　題

1. 設一百七十七圖。ABC 三角形之 $AD=4$, $DB=6$, $BE=10$. 若 $DE \parallel AC$. 則 EC 必為何數?

2. 試求一百七十八圖湖之闊 AB.

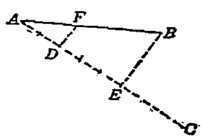
先在 AB 線上。求一點如 C. 由 C,B 兩點。作 CD 與 BE 兩線。各為 CB 之垂線。幷作 AD 線。量得 $CB=160$ 尺。$ED=175$ 尺。$EA=642$ 尺。求 A 與 B 相距若干?



第一百七十八圖

3. 求分一線為兩平分。

設一百七十九圖之 AB 為已知之線。過 A 點作 AC 線。與 AB 線成銳角.

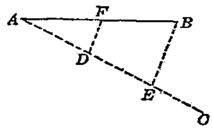


圖一百七十九圖

於 AC 線內截 $AD=DE$. 作 EB. 再作 $DF \parallel EB$. 試證 $AF=FB$. (見 244 節第 4 題)

4. 求分已知之線爲兩段。使其比例等於 $\frac{2}{3}$.

設一百八十圖 AB 爲已知之線。作 AC 線與 AB 線成銳角。在 AC 線上截 $AD=2$, 又 $DE=3$. 作 EB 線。過 D 點作 $DF \parallel EB$.

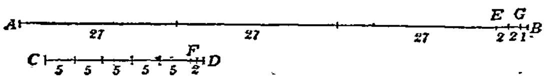


第一百八十圖

證 $\frac{AF}{FB}=\frac{2}{3}$

5. 求分一直線爲兩段。使其比例等於 $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{7}{9}$.

247. 以規求線比例. 設 AB 與 CD 如一百八十一圖。爲兩線。試求其比例。



第一百八十一圖

今設 AB 與 CD. 同有一公度。(兩線不能有公度者。後另解釋。)欲求公準個。其法如下。

先以短線 CD 度 AB. 所餘爲 EB. 較小於 CD. 次以 EB 爲度。量 CD. 所餘爲 FD. 較小於 EB. 再以 FD 爲度。量 EB. 所餘爲 GB. 又以 GB 量 FD. 無餘。則 GB 卽爲 AB 與 CD 兩線之公準個。兩線互度時。俱以規爲之。

以 GB 爲準個。量得 $AB=86$. $CD=27$.

故 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{86}{27}$

248. 大公約數. 247 節用規求兩線比例之法。不如第八章用方格紙或尺量度法之較有實用。然 247 節之法。用於別處。則甚有益。如用以尋筆算代數之大公約數。爲法極捷。蓋比例與分數。皆可因此縮小也。

試求86與27之大公約數。

試將以下之解法。與 247 節各級比較。

27)86(3	以較小之數27.除大數86.餘 5.
81	
5)27(5	以餘數 5.除較小數27.餘 2.
25	
2)5(2	以最後之餘數除前法數。餘 1.
4	
1)2(2	以餘數 1 除前法數 2. 無餘。
2	最後之商數1.卽爲86與27之大公約數。

249. 質數. 若兩數除 1 之外。無大公約數。則此兩數互爲質數。凡數除本數及 1 之外。無別數可除之者。名爲質數。

習 題

1. 求以下各兩數之大公約數。

(1) 73與16　(2) 1155與52　(3) 174與273

(4) 174與275　(5) 263與765　(6) 350與425

(7) 3542與5016　(8) 3795與2865.

2.　以線及規。求以下各兩數之大公約數。

73 與 16, 70 與 36, 45 與 42.

先以線代數。後以規量而互求之。

250. 約比例. 代數之分數可以約小。法與算術同。或以因數除分子分母。或以大公約數除兩數。皆能令比例即分數約小。

約小以下各分數。

1. $\frac{6}{15}=\frac{2\cdot3}{5\cdot3}=\frac{2}{5}$　2. $\frac{7}{14}$　3. $\frac{22}{66}$

4. $\frac{10}{36}$　5. $\frac{12}{16}$　6. $\frac{15}{24}$

7. $\frac{18}{30}$　8. $\frac{20}{36}$　9. $\frac{24}{48}$

10. $\frac{75}{100}$　11. $\frac{102}{141}$　12. $\frac{192}{240}$

13. $\frac{666}{909}$　14. $\frac{960}{1728}$　15. $\frac{805}{966}$

16. $\frac{2924}{5117}$　17. $\frac{803}{1752}$　18. $\frac{741}{1254}$

19. $\frac{1707}{2845}$　20. $\frac{550}{660}$　21. $\frac{455}{2310}$

22. $\frac{24x^3y^2}{18xy^2}$　23. $\frac{24x^3y}{18xy^2}=\frac{6\cdot4x\cdot x^2y}{6\cdot3x\cdot y\cdot y}=\frac{4x^2}{3y}$　23. $\frac{ab}{ac}$

24. $\frac{xy}{xz^2}$　25. $\frac{abx}{aby}$　26. $\frac{x^2y}{x^2z}$

27. $\frac{xy^2z}{xy^2w}$　28. $\frac{xyz}{m\cdot nx}$　29. $\frac{a(a+b)}{b(a+b)}$

30. $\frac{x^5y}{x^7z}$　31. $\frac{28m^3n^2k}{14m^2nk}$　32. $\frac{12abc^2}{4a^3b}$

33. $\dfrac{30ab^3cx}{6a^2c^2x^2}$　34. $\dfrac{m^2n^3pqr}{p^2q^3mn}$　35. $\dfrac{15a^4bc^2}{30a^4bc}$

36. $\dfrac{12a^2b^2c^2d}{60abc^2d^2}$　37. $\dfrac{18bx^2y}{12axy^2}$　38. $\dfrac{2dx^2z^2}{3cxy^2z}$

39. $\dfrac{63a^3b^4x^4}{7a^2b^5x^5}$　40. $\dfrac{15x^4yz^3}{3x^3yz}$　41. $\dfrac{25m^5n^6r^7}{5m^3n^4r^5}$

42. $\dfrac{7a^3b^4cx}{56a^5b^2c^3xy}$

正　變

251. 函數. 若行路每點鐘 2 里。所行得之遠爲 d. 所行之時爲 t. 則得方程 $d=2t$.

下列之表。將一點 2 點 3 點……所經過之程列出。此表指示鐘數變則所歷之程亦變。是路程依時而變。故程可稱爲時之函數。時與程皆爲變數。而速率 2 爲常數。

時數	1	2	3	4	5	6	7	8
里數	2	4	6	8	10	12	14	16

一數依賴別數而變。爲常見之事。如作工所得之資。全靠其人作工之時日。又如布匹之價。以其碼數而定。又如鐵之重量。以鐵之大小而定。餘可類推。幾何學內方形之面積。隨邊之長短而變。圓之面積。以徑之寬窄而異。等邊三角形之周。隨其邊而改。餘可推想。

252. 常數. 凡數爲一定者。名常數。

253. 變數. 一數若依級數而變者。名變數。

習 題

1. 從上表。求路程與相當時之比例。此等比例。比較如何?如此。足見程與時雖變。而比例不變。(即常數)

2. 某人每禮拜得工金20元。試指出此人某時所得之金。全靠時候。又指出時變則得數變。惟時與得數之比例。爲常數不變。

3. 以w代磅重數。以c代麵粉之總價。每磅價$3\frac{1}{2}$銅元。試將此三數列成方程。若w之數由1至10.求c之相當數。

w之同數與c之相當數。比例如何?

4. 若長方形之高爲5.試表列其底由1,至6之面積。若底變。則面積如何變?

以A代長方形之面積。b代底。以5爲高。列出長方形面積之方程。

是否b之同數變。則A之同數亦變?

$\frac{A}{b}$比例之同數。是否改變?

254. 正變. 若兩數。此數變。彼數亦變。使此數與彼數之相當同數所成之比例不變。則此數可謂與彼數正變。或此數與彼數有正比例。

如此。若$\frac{x}{y}$比例爲常數。x與y恆同變。則x可稱爲與y正變。$\frac{x}{y}=c$之代數方程。與謂x與y正變之意相同。

習　　題

以下各題。可用方程列出。

1.　某人之辛金 p. 與日數 t 有正比例。

依上界說。得 $\frac{p}{t}=k$. k 乃常數。即 $p=kt$.

2.　鋼條之重。與長有正比例。

3.　銀塊之重。與體積有正比例。

4.　某物行動速率平均。所經之路與時。有正比例。

5.　等邊三角形之面積。與其邊之方正變。

解以下各題。

6.　長方形之面積。若高不改。則隨其底而變。當面積27時。其底為 3. 問面積與底比例之常數如何?

因　$\frac{A}{b}=k, \frac{27}{3}=k$. 即 $k=9$.　　故　$\frac{A}{b}=9$.

若上題長方形之底為 8. 問面積若干?

8.　今有秤一桿。其平重之法。以錘距定點遠近而增減。當錘在 5 時。能平重20斤。問錘在 7 時。能平重若干?

9.　圓周之長。與圓徑正變。周與徑之恆比例為 3.14. 試將圓周 c 及徑 d 寫成方程。當圓周 157 時。其徑應長若干?

10.　凡物下墜。所經之路。與時之乘方正變。以 d 代路。t 代時。設一體下墜 5 秒。歷 400 尺。問 d 與 t^2 之恆比例

將 d 與 t^2 列出方程。

一秒鐘物體應墜若干？兩秒鐘應墜若干？三秒鐘墜若干？

11. x 與 y 同變。當 $x=20$ 時。$y=4$. 求 $y=17$. x 之同數若干？

12. 若 z 隨 x 而變。當 $x=4$ 時。$z=48$. 問當 $x=11$ 時。z 應若干？

13. 以硬紙剪數圓。徑之大小不同。轉圓紙於紙上。記周之長短。求圓周與徑之比例。將所得之結果。與同班生比較。是否圓周與徑正變是何理？

14. 某物體下墜之速。與時正變。試將速率 v 與時 t. 列成比例。

一物下墜歷 5 秒鐘。其速率爲 160 尺。問 8 秒鐘時。其速率若干？

15. 凡物移動有恆速率。則與時正變。今有車一輛。行時速率平均。6 時行 225 里。求速率若干？

16. 石一塊。由 560 尺高之樓下墜。問經幾秒鐘方抵地？(參觀第 10 題)

17. 存放資本之利息。與時正變。今有資本存 6 年。得利 \$200. 問歷 8 年 3 月。應得若干？

18. 球之面積。與球半徑乘方正變。今球之半徑 7 寸.得面積 616 方寸.若球面較上大兩倍。問球半徑若干？

19. 試指出正方形面積與邊之方爲正變。

20. 等邊三角形之面積。與邊之乘方正變。今有等邊三角形之邊爲2.面積爲$\sqrt{3}$.問若三角形之邊爲4.面積應若干。

21. 等邊三角形之高。與邊正變。今等邊三角形之高爲3.其邊爲$2\sqrt{3}$.問若等邊三角形之邊爲$\frac{4}{\sqrt{3}}$.其邊應若干?

22. 鐘擺搖動之時 t. 與鐘擺之長 e 之方根正變。今有鐘擺長 39.2 寸。每秒鐘擺一次。設鐘擺每 2 秒鐘擺一次。問長若干。

倒　　變

255. 倒變之界說. 251 至 254 節。已解釋量數中有此數因彼數而變者。如此數增則彼數隨之而增。此數減彼數亦隨之而減。惟數中有此數增反令彼數減。或此數減反令彼數增者。如作一定之工。人數增多。則時候減少。譬8人同建一房。12日完工。若16人同作。則6日可完。人數與日數。互爲倒變。或稱爲人數與日數作倒比例。

設有地一段。面積140方尺。今欲築籬繞之。使作長方形。若令作14尺闊。則長必10尺。若令作20尺闊。則長必7尺。餘可類推。如此。長與闊必互變。而長闊相乘之積爲常數。此題可解出下界說。若 xy 之積爲常數。而 x 與 y 同爲變數。則 x 與 y 爲倒變。若列作方程。則 $xy=k$. k 爲常數。

習 題

1. 下列各題。以方程式明之。

(1) 凡視物大小之形。與相距遠近爲倒變。

(2) 行一定之路。所需之時。與行動之速率倒變。

(3) 地吸力。與距遠之乘方倒變。

(4) 爐火之熱。與距遠之乘方倒變。

2. 設 $y=\frac{5}{x}$. 或 $y=\frac{a}{x}$. 指出 x 與 y 倒變。

3. 設變數 y 與 x 倒變。當 $x=1$ 時。$y=2$. 求 x 與 y 之方程。并求兩數相乘之同數。當 $x=8$ 時。求 y 之同數。

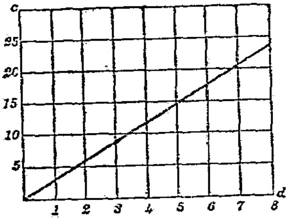
4. 工程一段。做成此工之人數。與時日爲倒變。若12人於28日能成功。問 3 人於幾日內方能做完?

5. 藏氣筒內之氣。壓力愈大。則體積愈縮小。按物理學。氣之體積。與壓力爲倒變。今有氣一筒。當壓力 3 磅時。體積 4立方寸。若壓力 6 磅。問體積若干?

256. 正變之圖. 254 節第 13 題之方程。$c=3.14d$. 指出圓周與徑同變。下列之表。學生將 c 與 d 之同數。續行補上。

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	0	3.1	6.3	9.4							

以圖代表$c=3.14d$方程。如一百八十二圖。



第一百八十二圖

將254節之8,10,11,14,四題之比例。用圖表出。

257. 倒變之圖.

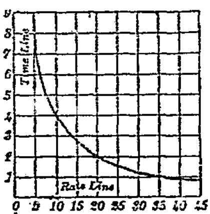
某車行42里。速率改變。設此車行程速率平均。每時45里。或每時40里。或每時35里。餘類推。則需時若干?

設t代時。r代速率。則本題之理。可以$t=\frac{42}{r}$表之。如此。時與速率。實爲倒變。何解?

本題既可以$t=\frac{42}{r}$方程表之。故t與r之數不同。可以表列之。

r	45	40	35	30	25	20	15	10	5
t	0.9	1.0	1.2	1.4	1.7	2.1	2.8	4.2	8.4

此題可以圖線表之。如一百八十三圖。研究圖線。試言速率由小增大。則時變如何。(圖中*Time line*.時線也。*rate line*.速率線也。)



第一百八十三圖

作方格圖線。表示下列方程。

$xy=8$. $xy=24$. $xy=30$.

等　比　例

258. 等比例. 似三角形之題。可以用等比例方程法解之。如$\frac{x}{3}=\frac{5}{27}$是也。凡兩比例相等之方程。謂之等比例。如$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}=\frac{3}{15}$, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 皆等比例也。等比例如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 可讀作a比b等於c比d. 等比例。有時寫作$a:b=c:d$.

問$\frac{2}{5}=\frac{5}{13}$. 是否爲等比例? $\frac{2}{7}=\frac{8}{25}$. 是否爲等比例? 并言明所答之理。

259. 中項外項. 等比例之第一及第四兩數。名外項。第二第三兩數。名中項。如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$等比例。a與d爲外項。b與c爲中項。

習　　題

1. 下列各等比例。試將每等比例之外項相乘。與內項相乘比較。$\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$, $\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$, $\frac{20}{2}=\frac{10}{1}$, $\frac{12}{3}=\frac{4}{1}$. 求得之相乘數如何?

2. 任作數等比例。比較中項之乘積。與外項之乘積。

從上兩題。得下定理。

定理. 等比例之中項相乘。等於外項相乘。

用此定理。察驗等比例。最爲簡便。蓋求中項外項之積。較之約小比例數。收功爲易也。

證　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$　方程。可以bd乘兩端。消去分數。然後約之。使爲最小之項。得$ad=bc$.

習　　題

解以下各題。

1. 分 \$2400 爲兩分。使其比例爲 2:1. 從 $\frac{2400-x}{x}=\frac{2}{1}$ 方程中求 x.

2. 若某數加 5 爲一數。另加 3 爲一數。又從某數減 3 爲一數。另減 4 爲一數。所得之四個數爲等比例。問此數爲何數?

3. 今有兩數。相比爲 3:7. 而兩數之和爲 50. 求兩數各若干?

4. 若 3 倍某數而加 5. 2 倍某數而加 2. 2 倍某數而加 9. 3 倍某數而加 3. 所得四數。恰爲等比例。求此數。

5. 今有長方形。長 7 闊 4. 又有一相似之長方形。其長爲 8. 問闊應若干?

6. 從下列各等比例中求 x. 將得數代回原方程中。覆證其是否不誤。

(1) $\frac{x}{160}=\frac{3}{5}$　　(2) $\frac{4}{x}=\frac{132}{3}$

(3) $\frac{18}{810}=\frac{x}{3}$　　(4) $\frac{200-x}{x}=\frac{7}{18}$

(5) $\frac{5+x}{3-x}=\frac{2+x}{4-x}$　　(6) $\frac{1+3a}{2a}=\frac{6a}{4a-1}$

(7) $\frac{x-12}{1-3x}=\frac{2}{1}$　　(8) $\frac{x+1}{10}=\frac{3x+2}{28}$

(9) $\frac{x+4}{x-13}=\frac{x+8}{x-14}$　　(10) $\frac{2-x}{3+x}=\frac{3-x}{1+x}$

(11) $\frac{x+5}{x+3}=\frac{x-3}{x-4}$　　(12) $\frac{4x-3}{2x+3}=\frac{4x+2}{2x+6}$

(13) $\frac{x-5}{4}=\frac{x+4}{16}$　　(14) $\frac{x+1}{2}=\frac{4x-5}{7}$

7. 某樹之影長96尺。同時5尺之竿影8尺。求樹高?

8. 若地圖上以2寸代21里。則50里。在圖上應長若干?

9. 解下各方程。

$$\frac{y+\frac{1}{4}}{y-\frac{1}{4}}=\frac{y+\frac{5}{3}}{y-1},\qquad \frac{1+\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{4}}=\frac{2-\frac{x}{3}}{1+\frac{x}{4}}.$$

合　金　題

解以下各題。

1. 銅與銀之合金重90兩。內有銅6兩。今欲加銀。使合重10兩中。有銅$\frac{2}{5}$兩。問應加若干?

設x代增入銀之兩數。

則$90+x$爲新合金重數。

$\frac{90+x}{6}$兩中有1兩銅。

依此。新合金之10兩中有$\frac{2}{5}$兩銅。則

$\frac{10}{\frac{2}{5}}$兩中有1兩銅。

故　$\frac{90+x}{6}=\frac{10}{\frac{2}{5}}$.　即 $\frac{2}{5}(90+x)=6\cdot 10$.

即　$36+\frac{2x}{5}=60$.　$x=60$.

2. 若海水80磅內含鹽40磅。問須添淡水若干。方能使45磅水含鹽$\frac{2}{3}$磅?

3. 今有時計売之合金一圓。重60兩。內有20兩爲金。問須增銅若干。方能令2兩重之売有金半兩?

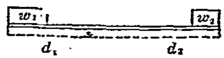
4. 今有合金重80兩。內有34兩爲金。問須加鎳質若干。方能令$1\frac{1}{2}$兩之手釧內。有金$\frac{1}{4}$兩?

5. 合金重a兩。內有金b兩。問須增別種金類若干。使合金c兩內含金d兩?

6. 炮銅內含錫與銅。大抵重4100磅內有銅3444磅。問須加錫若干。方能令2100磅中含銅1722磅?

橫　　桿　　題

一百八十四圖內。w^1與w^2兩重。恰令一桿齊平。此桿橫乘於一定點上。距定點兩端之長。爲d_1與d_2.惟遠與重有反比例。



第一百八十四圖

即　$\frac{d_1}{d_2}=\frac{w_2}{w_1}$.

1. 設 (1) $d_2=18$尺, $w_2=60$磅, $w_1=50$磅。

(2) $d_2=27$寸, $w_2=36$磅, $w_1=24$磅。求d_1若干?

2. 設 (1) $d_1=40$寸, $w_2=16$磅, $w_1=18$磅。

(2) $d_1=25$寸, $w_2=3.8$磅, $w_1=2.85$磅。求d_2若干?

3. 設 (1) $d_1=2.5$寸, $d_2=7.5$尺, $w_2=10.5$磅。

(2) $d_1=6.6$尺, $d_2=9.9$尺. $w_2=17$磅。求w_1若干?

4. 設 $d_1=3.5$ 尺，$d_2=8.5$ 尺，$w_1=30$ 磅求 w_2 若干？

溶質題

1. 海水內有鹽百分之 6. 問水須化散若干。方能令餘下之水含鹽百分之 8？

設 x 代化散之百分數。

則 $100-x$ 代水餘下之百分數。

因海水含鹽百分之 6. 故 $\frac{6}{100}\cdot100$ 爲鹽數。

因餘水含鹽百分之 8. 故 $\frac{8}{100}(100-x)$ 爲鹽數。因此

$$\frac{6}{100}\cdot100=\frac{8}{100}(100-x)$$

$$600=800-8x$$

$$x=25$$

2. 今有流質內百分之 90 爲消化質。問須化散若干方能令餘下之流質內含雜質百分 95？

3. 某醫生有藥水一種。含藥百分之 6. 今欲加水使淡。令水內含藥百分之 $3\frac{1}{2}$. 問須加水若干？

4. 某製藥師有水一種。內含藥百分之 95. 今欲改爲百分之 80. 問須加水若干方合用？

面積之等比例

證下定理。

260. 定理. 兩長方形之面積相比。如其長寬相乘之比。

證. 以R與R_1代兩形之面。b與b_1代兩形之底。而h與h_1代高。得

$R=bh$　何解

$R_1=b_1h_1$　何解

故　$\frac{R}{R_1}=\frac{bh}{b_1h_1}$　何解

261. 定理. 若兩長方形之底等。則兩形相比。如其高相比。

蓋　$\frac{R}{R_1}=\frac{bh}{b_1h_1}$. 約$\frac{bh}{b_1h_1}$使小。得

$\frac{R}{R_1}=\frac{bh}{b_1h_1}=\frac{h}{h_1}$ 因b與b_1可對消。

262. 定理. 若兩長方形之高等。則兩形相比。如其底相比。試證之。

習　題

1. 設$\frac{5}{4}=\frac{x}{8}$. 表示兩長方形面積及高之比例。求x之同數若干?

2. 某長方形之面積80方尺。底長10碼。另一長方形。面積相同而底長24碼。應高若干?

證下定理。

263. 定理. 平行方形之面積相比。如其高與底相乘之比。

264. 定理. 兩三角形面積相比。如其高與底相乘之比。

265. 定理. 若兩平行方形之底等。則兩形相比。如其高相比。

266. 定理. 若兩三角形之底等。則兩形相比。如其高相比。

提　要

267. 本章所授之新項如下。質數。約小分數。大公約數。正變。倒變。變數。常數。函數。等比例。外項。中項。方根之號以$\sqrt{\ }$明之。

268. 本章所授之定理如下。

1. 任作一線。與三角形之一邊平行。割餘兩邊。所割相當段之比例必等。

2. 平分三角形一角之線。割對邊爲兩段。此兩段之比例。與三角形餘兩邊之比例等。

3. 若三角形之兩邊。依同一之比例截分。連兩分點之線必與第三邊平行。

4. 等比例之外項相乘。等於中項相乘。

5. 兩長方形,兩平行方形,兩三角形相比。皆如其底高相乘之比。

6. 兩長方形,兩平行方形,兩三角形相比。若底等。則如其高相比。

7. 兩長方形,兩平行方形,兩三角形相比。若高等。則如其底相比。

269. 兩線之公度數。可用規互量而得之。兩數之大公約數。可依求兩線大公度數之法求得之。

270. 凡比例及分數。可用公因數除其分子及分母。約之使小。

271. 平常謂 x 與 y 正變。或 x 與 y 倒變。其理與 $x=ky$ 及 $xy=k$ 相同。此兩方程。皆可以圖格線表之。

272. 多數問題。如合金題,溶質題,槓桿題等。皆可以等比例解之。

Nicolo Tartaglia

佗達基利亞肖像

(156 之 後)

佗達基利亞小傳

尼高勞。姓方壨拿。佗達基利亞。其綽號也。1500年。生於意大利之布利施亞城。1512年城爲法軍所奪。法人縱軍大掠。其父死於難。佗演說止暴法人怒。刺傷之。終身莫能瘳。自是人稱之爲佗達基利亞猶言口吃人也。母貧。不能供佗十五日之學資。紙筆幷不給佗不以此自障。卒崛起爲當代著名代數大家。

是時算術競爭之風盛行。凡算家發明一理。卽持以難他人。法。互舉若干題刻期求解。能多解舉定之題者勝。佗嘗兩次競算皆勝。遂於算學得名。

佗之名傳於今日者。爲三次方程之解法。發明之時。爲1530年。佗在華老拿城講算學。1535年。溫尼斯城聘主講席。1543年。刋布論幾何及論亞奇米德之書幷算理三種。1546年。刋布"算學之發明"。內述三次方程解法。此法哥頓竊之。先時傳佈。學者稱爲哥頓法是也。佗卒於溫尼斯城時1557年。

第十章
相合之三角形
相合形

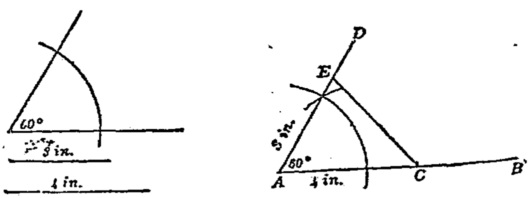
273. 上第八章。凡求相距遠近之問題。皆可以間接量法解之。法。作一形。與求距之形相似。量此形之距。然後用代數方程法。推得欲求之距。本章則欲由一形。其形式大小。與求距之形相同。而推得欲求之數。凡兩形之大小同。形式同。即名爲相合形。

本章問題之一。卽欲知依據何情狀。兩三角形方能相合。

習題

1　已知三角形之兩邊及其間之角。求作此三角形。

作法。譬如已知之兩邊爲 $3\,in.$ 及 $4\,in.$ 已知之角爲 $60°$.（$in.$ 爲英寸 inch 之短寫）



第一百八十五圖

從一百八十五圖 AB 線上。量 AC 等於 $4in.$ 在 A 點作角等於已知之角 $60°$. 即 $\angle DAC$. 由 AD 截 AE 等於 $3in.$ 最後作 EC 線。$\triangle AEC$. 卽求作之三角形。

2. 將上題作得之圖剪出。與同班生作得之三角形比較。是否能相合。

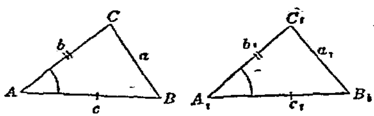
3. 作三角形。再作一三角形使兩邊及兩邊中間之角。與前三角形之相當邊及角等。試觀此兩形能相合否。

上 1,2,3, 三題。解示下定理。

274. 定理. 三角形。若兩邊及其夾角。與別三角形之兩邊及其夾角各等。則兩形相合。

此理之意。可如下法推述。

設一百八十六圖之 ABC 與 $A_1B_1C_1$ 兩三角形。$b=b_1$ $c=c_1$ $\angle A=\angle A_1$.



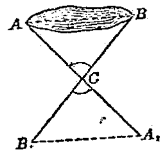
第一百八十六圖

設想 $\triangle A_1B_1C_1$ 落於 $\triangle ABC$. 令 c_1 邊與 c 齊。如此 B_1 落於 B. 何解? 既 $\angle A=\angle A_1$. 故 $\angle A$ 與 $\angle A_1$ 合。b_1 自然與 b 合。令 C_1 落於 C. 何解? 於是 a_1 必與 a 合。蓋兩點之間。祇可有一直線也。 ABC 形與 $A_1B_1C_1$ 形既無處不合。故兩形相合。

一百八十七圖之 AB 線。乃湖之闊。不能量度。設求之。

註. 相合之理.先用者.爲兌鼐士之學校.推廣之者.爲派達哥拉士學校.派氏按步演述.遂偉然成爲算學中一要術.

擇 C 點使能見 A 與 B. 作 AC. 引長至 A_1. 令 $A_1C=AC$. 依此法作 B_1C 等於 BC. 作 B_1A_1 線。 指出 A_1B_1C 與 ABC 兩三角形相合。 如此。AB 線可藉量 A_1B_1 線而得之。 何解?

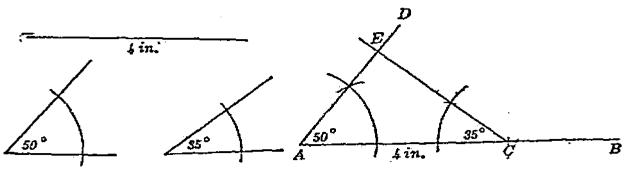


第一百八十七圖

習　　題

1. 已知三角形之兩角.及兩角所夾之邊。求作此形。

作法　譬兩角爲 35° 與 50°. 其邊爲 4 *in* 長。 作線如一百八十八圖之 AB. 截 AB 線至 C. 令 AC 等於 4 *in*. 在 A 點作 DAC 角等於 50°. 又在 C 點作角等於 35°. $\triangle ACE$. 卽求作之三角形。 何解?



第一百八十八圖

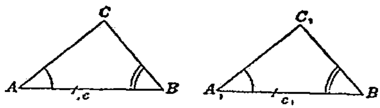
2　將前題作得之圖剪出。與同班生所作者相比。看兩三角形是否相合。

3　任作一三角形。再作一三角形。令兩角及其中間之邊。與前形相當之角及邊等。試觀此兩形。能相合否?

以上三題。可解明下定理。

275. 定理. 兩三角形。若此形之兩角及中間之邊。等於彼形之兩角及中間之邊。則兩形相合。

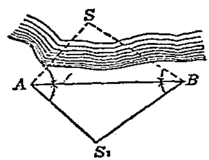
設兩三角形。如一百八十九圖之ABC與$A_1B_1C_1$. 內$c=c_1$, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$.



第一百八十九圖

設想將$\triangle A_1B_1C_1$放於$\triangle ABC$之上。令A_1 B_1合於AB. A_1角必能與A角合。何解? B_1角亦必與B角合。C_1點自必落於AC線與BC線之上。如此。C_1必落於C. 因C點乃AC與BC之公點也。故ABC與$A_1B_1C_1$兩三角形相合。

276. 證題法. 274節及275節兩定理之證法。乃將此形放於彼形之上。兩形密合。此等證法。名爲疊合法。此乃幾何學中證法之一種。



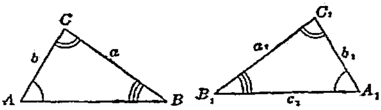
第一百九十圖

一百九十圖中S. 爲海上燈塔。今欲求A,B兩點距燈塔之遠。

作AB線。在A點作BAS_1角等於BAS角。在B點作ABS_1角。等於ABS角。量AS_1得2680尺。BS_1得3440尺。問AS與BS各長若干?須答出原理。※

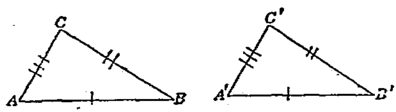
※ 275節之定理.首證之者.爲免剌士.用此法求得船距岸之遠度.

277. 相當部之識別法. 兩相合形之相當邊與角。可用種種方法識記。一百九十一圖字母下之小豎。指出C_1為C之相當點。A_1為A,B_1為B之相當點。又a_1為a,b_1為b,c_1為c之相當邊。於角處作一弧者。與合形相當角作一弧者等。餘作二弧三弧者。皆識別其相當角。餘可類推。



第一百九十一圖

又常用(′)號以指相當之度。如A'(讀A撇)與A相當。如一百九十二圖B'與B,C'與C各相當。又相當邊以一畫二畫三畫等識別之。皆如圖。



第一百九十二圖

278. 相合號. 兩形相合之號。恆用$\cong$以表之。$\backsim$指其相似。$=$指其相等。所以$\triangle ABC$與$\triangle A_1B_1C$相合。可寫作$\triangle ABC\cong\triangle A_1B_1C_1$.意謂此兩形式同量同也。

等腰及等邊三角形

279. 三角形相合之性質. 274與275兩節。已指示證三角形相合之法。較之疊合法尤為簡便。據此兩定理。證兩三角形相合。可免證此三角形之各件,等於彼三角形各件,然後方相合。如兩形有以下兩性質中之一種。卽足以明其相合。

1. 凡三角形。有兩邊及夾角各相等。

2. 凡三角形。有兩角及夾邊各相等。

此證法之用。可以證等腰三角形而表示之。

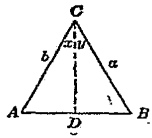
280. 定理. 等腰三角形之兩底角相等。

設 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形。即 $a=b$. 一百九十三圖。 證 $\angle A=\angle B$.

證。 作 CD 線。平分 $\angle C$. 即令 $x=y$.

證 $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.

於是 $\angle A=\angle B$. 因三角合形之相當部等也。*



第一百九十三圖

281. 合三角形法. 凡證兩線或兩角相等而爲兩相合三角形之相當部者。此法爲合三角形法。

習　　題

證以下各題。

1. **定理.** 等邊三角形。亦爲等角三角形。

用 280 節之定理證之。

2. 平分等腰三角形頂角之線。必平分其底。幷爲底之垂線。

用合三角形法證之。

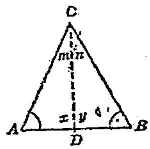
---

*首先證此定理者。爲兌刺士上列之法。或卽兌氏所用者.

3. **定理.** 直線之中點垂線內各點。與直線兩端之距必等。

4. 平分三角形一角之線。若為對邊之垂線。則此形為等腰三角形。

5. **定理.** 若三角形內有兩角等。則此形為等腰三角形。



第一百九十四圖

設一百九十四圖。A 與 B 兩角等。作 $CD\perp AB$. 即令 $x=y$.

$\triangle ADC$ 內。既有兩角與 $\triangle BDC$ 內兩角等。則 $m=n$. (見 114 節 16 題)

證 $\triangle ADC\cong\triangle BCD$.

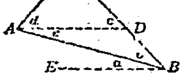
於是 $AC=BC$. 何解?

6. 等角三角形亦為等邊三角形。

用上 5 題之定理證之。

7. 平分三角形一邊之線。若過對角之頂點。此形必為等腰三角形。

8. **定理.** 若三角形之兩邊不等。則相對之兩角亦不等。較大之角。與較長之邊相對。



第一百九十五圖

設一百九十五圖 CB 長於 CA. 於 CB 線截 $CD=CA$. 作 AD 線。又過 B 作 $BE\parallel AD$.

$a+b=c.$ 何解。

$c=d.$ 何解。

故 $b+b=d.$ 何解。

惟 $d<d+e.$ 何解。

所以 $a+b<d+e.$ 何解。

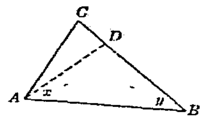
既 $a=e.$ 故 $b<d.$ 蓋不等數減等數。餘數不等也。

9. 定理. 若三角形內兩角不等。則相對之兩邊亦不等。較長之邊。與較大之角相對。

過 A 點作 AD 線。令 $x=y.$ 如一百九十六圖。於是 $AD=BD.$ 何解?

因 $AD+DC>CA.$ 故 $DB+DC>CA.$ 何解?

所以 $BC>CA.$



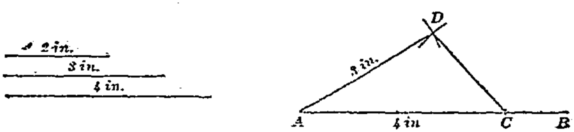
第一百九十六圖

282. 已知三角形之三邊。求作其形。

習 題

1. 已知三角形之三邊。求作其形。

作法。譬如形之三邊。其長爲 2 *in.*, 3 *in.*, 及 4 *in.*



第一百九十七圖

作線如一百九十七圖 AB. 截 AC. 令等於 4 *in*. 以 A 爲心。以 3 *in*. 爲半徑。作小弧於 D. 以 C 爲心。以 2 *in*. 爲半徑。作小弧。與前弧相交於 D. 作線連合 DA 與 DC. $\triangle ADC$ 卽所求之形。

2. 將上題作得之三角形剪出。與同班生作得者相比。看此等形是否相合。

上兩題。可證若兩三角形之相當邊等。則兩形相合。

3. 任取兩線。其和等於第三線。或少於第三線者。依上1題法作三角形。足知兩線之和必大於第三線者。此三線方能成一三角形。

4. 作一等邊三角形。邊之長爲 2 *in*.

5. 作等邊三角形。其邊長 $\frac{1}{2}$ *in*. 或 $\frac{3}{4}$ *in*. 或 1 *in*.

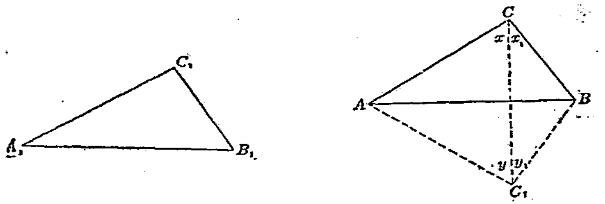
6. 用粉筆及繩。或黑板用之大規。作三角形。其邊爲 6 *in*. 8 *in*. 10 *in*.

7. 今用 100 尺長之鋼繩量尺。求三角形之角頂。三角形之邊爲 30 *in*. 50 *in*. 60 *in*. 問其法如何?

8. 已知等腰三角形之底及腰。求作其形。

283. 定理. 若此三角形之三邊。與彼三角形之各相當邊等。則兩形必相合。

設一百九十八圖 ABC 與 $A_1B_1C_1$. 代表兩三角形。$AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CA=C_1A_1$.



第一百九十八圖

設想$\triangle A_1B_1C_1$可以放於$\triangle ABC$之隣。令A_1B_1與AB相合。C與C_1各在AB線兩旁相對。作CC_1. 於是$AC_1=AC$. 何解？又$x=y$. 何解？因$BC=BC_1$. 故$x_1=y_1$. 何解？所以$x+x_1=y+y_1$. 卽$\angle C=\angle C_1$. 何解？證$\triangle ABC \cong \triangle ABC_1$.

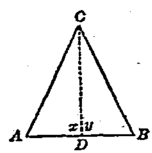
所以　$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$. 何解？

由上定理。可知三角形之邊。能定形之式樣大小。此理卽爲製造用具者所根據。

習題

證下各題。

1. **定理.** 若線外一點。距線之兩端等遠。則此點必在線之中點垂線內。



第一百九十九圖

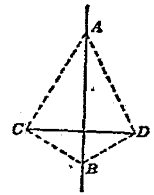
設一百九十九圖之C點。距A與B等遠。卽$AC=BC$. 作CD線。從C點至AB之中點D.

證$\triangle ADC \cong \triangle BDC$.

於是$x=y$. 又$CD \perp AB$.

故CD爲AB之中點垂線。

2. **定理.** 若線內有兩點。各與別線內兩點相距等遠。則此兩線必互爲垂線。



第二百圖

由上題。可知已知之兩點 A 與 B.(二百圖)各在 CD 線之中點垂線內。

惟因兩點間祇可作一直線。所以 AB 線與 CD 之中點垂線。必合爲一線。

284. **軌跡.** 283節第1題。證明線外之點。若距線兩端等遠。此點必在此線之中點垂線內。281節第3題。曾證凡點在此線之中點垂線內。距此線之兩端必等遠。

由此兩定理。可知凡線之中點垂線。乃距線兩端等遠各點所經之路。此點之路。名之曰軌跡。(軌跡者。謂點路之跡。其實卽線也。)

習　　題

1. 今有各點。距 P 點常爲10尺。同在一平面內。問此點之軌跡如何? 若相距爲 a. 軌跡如何? (答　10尺半徑之圓周。)

2. 距一點之遠已知。問空間中各點之軌跡如何?

3. 平面內有各點。與一直線之距常相等。問其軌跡如何?

4. 今有兩線平行。有各點距此兩線恆相等。問各點之軌跡如何?

5. 今空間中有各點。距已知之線恆等遠。問各點之軌跡如何?

6. 今空間中有各點。距地面恆 2 尺。問其軌跡如何?

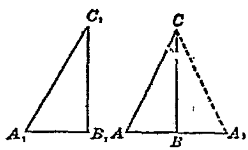
7. 今空間有各點。距已知之兩點恆等遠。問其軌跡如何?

直三角形

285. **定理.** 兩直三角形。若此形之弦與一邊。各等於彼形之弦與一邊。則兩形必相合。

設二百零一圖 ABC 與 $A_1B_1C_1$. 為兩直三角形。AC 弦與 A_1C_1 弦等。(凡對直角之邊名為弦。) 又 $BC=B_1C_1$.

令 $\triangle A_1B_1C_1$ 貼隣 $\triangle ABC$. 使 B_1C_1 與等邊 BC 相合。於是 ABA_1 為一直線。而 ACA_1 為三角形。何解?



第二百零一圖

證 $\triangle ACA_1$ 為等腰三角形。

於是 $\angle A=\angle A_1$. 何解?

證 $\triangle ABC \cong \triangle A_1BC$.

所以 $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle ABC$. 何解?

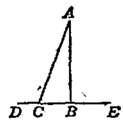
習題

證下各題。

1. 兩直三角形。若此形直角旁之兩邊。與彼形直角旁之兩邊等。則兩形必相合。

2. 兩直三角形。若此形之弦與一銳角。各等於彼形之弦與一銳角。則兩形必相合。

3. **定理.** 一點至一直線之垂線。爲此點距線之最短者。



第二百零二圖

設二百零二圖 AB 爲 DE 之垂線。又設 AC 爲由 A 至 DE 之別一線。

ABC 三角形之 $\angle C$ 爲銳角。何解? 故 $\angle C$ 較 $\angle B$ 爲小。何解? 所以 $AC>AB$. 何解?

4. 於直線之中點垂線內一點。作兩斜線至直線。若斜線與直線所成之角等。則兩斜線必等。

5. 於直線之中點垂線內一點。作兩斜線至直線。若斜線與垂線所成之角等。則兩斜線必等。

提　　要

286. 本章所授之新事項如下。合形。合形之相當部。軌跡。證法。

287. 相合之號爲 $\cong$。意言兩形能處處幷合也。

288. 求角度及相距之題。可以作合形之法解之。

289. 本章所授之三角形作法如下。

1. 已知兩邊及兩邊所夾之角。
2. 已知兩角及兩角所夾之邊。
3. 已知三邊。

290. 證法兩種如下。

1. 疊合法。此形疊於彼形之上。

2. 合三角形法。

291. 以下各定理。可決三角形相合之性。

1. 兩三角形。若其兩邊及兩邊之夾角互相等。則兩形相合。

2. 兩三角形。若其兩邊及兩邊之夾角互相等。則兩形相合。

3. 兩三角形之三邊兩兩相等。則兩形相合。

4. 兩直三角形。若此形之弦與一邊。與彼形之弦與一邊等。則兩形相合。

292. 等邊三角形之定理如下。

1. 等邊三角形。亦爲等角三角形。

2. 等角三角形。亦爲等邊三角形。

293. 等腰三角形之定理如下。

1. 等腰三角形之底角等。

2. 若三角形內兩角等。則此形必爲等腰三角形。

3. 平分等腰三角形頂角之線。爲底中點之垂線。

4. 平分三角形一角之線。若爲對邊之垂線。則此形爲等腰三角形。

5. 若三角形一邊中點之垂線過對角之頂。此形爲等腰三角形。

294. 不等形之定理如下。

1. 若三角形之兩邊不等。則兩邊之對角亦不等。較大之角與較長之邊相對。

2. 若三角形之兩角不等。則兩角之對邊亦不等。較長之邊與較大之角相對。

295. 垂線之定理如下。

1. 直線之中點垂線內各點。距線之兩端等遠。

2. 凡點距直線兩端等遠。則此點必在此線之中點垂線內。

3. 凡直線之中點垂線。即為距此線兩端等遠各點之軌跡。

4. 若此線內兩點。各與他線內兩點。相距等遠。則兩線必互為垂線。

5. 一點至一直線最短之線。為由此點至此線之垂線。

6. 由直線之中點垂線內任一點。作斜線至直線。若斜線與直線所作之角等。則兩斜線必等。

7. 由直線之中點垂線內任一點。作斜線至直線。若斜線與垂線所作之角等。則兩斜線必等。

第十一章

求作．對稱．圓．

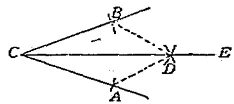
基礎作法

296. 前章已授數種作法。而未證其合否。此等作法大要。本章特爲討論。幷爲之證。

習題

1. 求平分一角（見127節12題）

作法如二百零三圖。欲證此作法。作 AD 與 BD 兩線。證



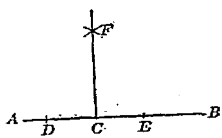
第二百零三圖

$$\triangle BDC \cong \triangle ADC.$$

於是　$\angle DCB = \angle DCA.$

2. 於直線內已知之點。作此線之垂線。（見127節3題及128節3題。）

如二百零四圖作之。依此法。F 與 C 兩點。各距 D 與 E 等遠。故 FC 爲 DE 之中點垂線。何解？所以 $FC \perp AB$.



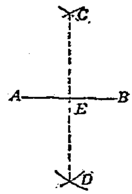
第二百零四圖

3. 說明直線內一點作垂線限於一之理。（見176節）

4. 求平分已知之線。

以 A 爲心。任取一度爲半徑。作弧如 C. 如 D. 又以 B 爲心。以前度爲半徑。作弧與前兩弧相交。作 CD. 與 AB 相交於 E. 於是 $AE = EB$.

依此作法。C與D各距A與B等遠。所以CD為AB之中點垂線。何解?



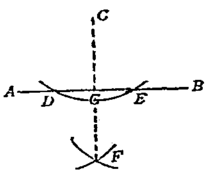
第二百零五圖

5. 求作直線之中點垂線。

作法與證。皆如上4題。

6. 求於線外一點。作該線之垂線。

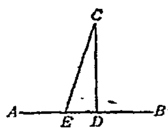
作此題之法。概如上2題。



第二百零六圖

證　二百零六圖。C與F依作法。各距D與E等遠。故CF為DE之中點垂線。何解?　故$CG\perp AB$.

7. 由一點至一線。祇可作一垂線。

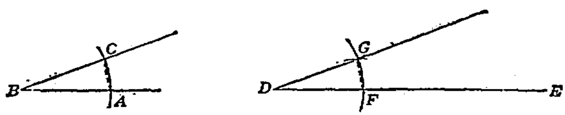


第二百零七圖

二百零七圖。若CD與CE皆為AB之垂線。則$\triangle EDC$有兩直角。此為不合理。因$\triangle EDC$三角之和大於兩直角也。

8. 於直線內一點作一線。使所成之角。等於已知之角。(見125節)

作CA與GF兩線。二百零八圖。



第二百零八圖

證　$\triangle CBA \cong \triangle GDF$

故　$\angle ABC = \angle FDG$.

297. 296節之基礎作法。現可用以作較難之題。須知無分度之尺及規。爲作此等題唯一之器。✣

基礎作法之用

習題

1. 過線外已知之一點作線。與已知之線平行。(參觀194節3題)

2. 已知三角形兩邊及兩邊之夾角。求作其形。(參觀273節1題)

3. 已知三角形兩角及兩角之夾邊。求作其形。(參觀274節1題

4. 已知三角形之三邊。求作其形。(參觀282節1題)

5. 求作一角等於60°.

法如作等邊三角形。證形內之角等於60°.

6. 作以下各角。30°, 15°, 120°. (作此題及下數題。皆不許用半圓規。)

7. 求作 90°, 45°, 22°30′ 諸角。

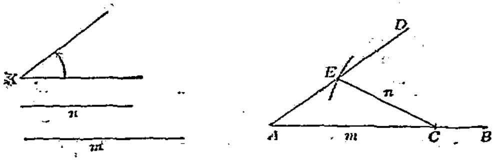
8. 求作 135°, 75°, 165° 諸角。

9. 已知三角形之兩~~角~~及一~~角~~之對~~邊~~。求作其形。

边　边　角

✣ 希臘哲士伯拉圖.(紀元前429至384年)以幾何學爲習哲學之基礎.伯拉圖欲學者明初級幾何學之意義.簡捷明瞭.遂决令學者求作時.祇用無分度之尺及規.

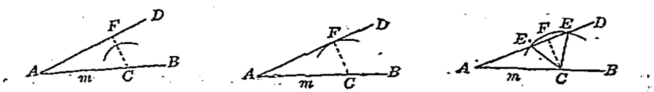
設二百零九圖。m 與 n 爲已知之邊。$\angle K$ 爲已知之角。



第二百零九圖

作法。任作一線如 AB. 截 AC 令等於 m. 於 AB 線之 A 點作一角。等於 $\angle K$. 以 C 爲心。以 n 爲半徑。作弧。與 AD 相交於 E. 作 CE. $\triangle ACE$ 爲求作之形。

商論。此題之作法。間有不能作者。蓋 n 若太小。則不能與 AD 線相交。故此已知之三件。不能成一三角形。凡 n 較由 C 至 AD 之垂線 CF(二百十圖)略短者。則三角形不能作。

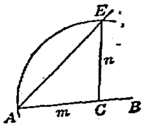


第二百十圖　第二百十一圖　第二百十二圖

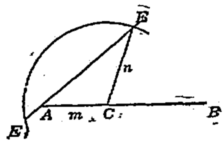
若 $n=CF$.(二百十一圖)弧與 AD 在 F 點相切。而 $\triangle ACF$. 卽爲求作之形。

若 $n>CF$. 而 $n<m$.(二百十二圖)則弧線割 AD 者兩點。如 E 與 E_1. 則 ACE 及 ACE_1 兩三角形。皆與題合。

若 $n=m$.(二百十三圖)及 $n>m$.(二百十四圖)則此題之作法。祇得一個三角形。卽 $\triangle ACE$.



第二百十三圖



第二百十四圖

298. 依上第 9 題作法。祇得一個三角形者。爲二百十一圖，二百十三圖，二百十四圖。據此三圖。可得下相合之定理。

直

1. 兩三角形。若相當之弦及一邊兩兩相等。則兩形相合。(參觀 211 節)

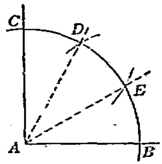
2. 兩等腰三角形。若此形之兩腰及底角。與彼形之相當部等。則兩形相合。(參觀 213 節)

3. 兩三角形。若此形之兩邊及對大邊之角。與彼形之相當邊角等。則兩形必相合。(參觀 214 節)

習　　題

1. 求分一直角爲三平分。[※]

※分直角爲三平分之法。求得者爲期頗古。然欲以尺與規分任何角爲三平分。其法甚難。此爲幾何學中最有名之題。求之者已費無限心力。雖算學家發明新法者不少。聰明亦未嘗誤用。然今日已證明欲以尺與規三平分任何角。實無定法云。



第二百十五圖

以 A 爲心。任取一度爲半徑。作長弧。割直角兩邊於 B 點 C 點。以 B 爲心。以前度爲半徑。作小弧於 D. 以 D 爲心。以 DC 爲半徑。作弧於 E。 AD 與 AE 兩線。即分直角爲三平分。

因 $\angle BAD=60°$. 何解? 故 $\angle DAC=30°$. 何解?

指出 $\angle DAE=30°$.

2. 已知直三角形之弦及一邊。求作其形。

3. 已知直三角形之弦及一銳角。求作其形。

4. 已知等腰三角形之底角及高。求作其形。

5. 作一直三角形。兩銳角爲 60° 與 30°.

法　作一等邊三角形。後作高線。分爲兩個直三角形。此直三角形之弦。與對 30° 角之邊比較。所得如何?

6. 已知等邊三角形之高。求作其形。

對稱

299. 對稱. 若以手對平面鏡。鏡裏之像。與手同式同大小。手與像。可謂對稱。而以鏡之平面爲中界。

其他物事可解對稱者。如手套一對。園門前之兩柱。印得之紙與印模等。餘可類推。

300. 獨體之對稱 人之首。兩目之中。平分而下。則兩面對稱。若以數面論。則立方體亦對稱。因此等平面之地位。乃相對也。 問分球體爲對稱之平面有若干?試指別種實體之有對稱者。

301. 平面形之對稱. 若以墨水作一形於紙上。乘其未乾。印於他紙上。得一像。原形與像。即爲對稱。

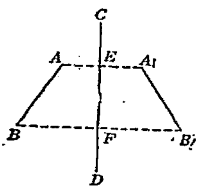
習　　題

1. 今有AB線。(二百二十六圖)求以CD線爲中界。作線與之對稱。

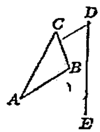
由A作$AA_1\perp CD$,令$AE=EA_1$.如前作$BB_1\perp CD$,令$BF=FB_1$.作A_1B_1. 於是以CD爲中界。AB與A_1B_1對稱。

2. 求作一三角形。以DE爲中界。與$\triangle ABC$對稱。

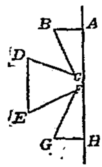
依前題法。作線與AB,BC,及CA.三線對稱。(二百十七圖)



第二百十六圖



第二百十七圖



第二百十八圖

3. 求作一形。與$ABCDEFGH$形對稱。(二百十八圖)

302. 對稱之軸. 兩形對稱而以一線爲中界。若此中界線爲兩形所有相當點聯線之中點垂線。則此線名爲對稱之軸。指出二百十六圖之對稱軸。

習　　題

1. 證兩平面形若有軸對稱。則兩形必相合。

用疊合法。將此形放於彼形之上。兩形相當之點。必處處相合。

2. 作等腰三角形之對稱軸。

3. 證等腰三角形平分頂角之線爲對稱軸。并指出293節所述等腰三角形之性質。多由對稱形而來。

4. 等邊三角形。能有幾條對稱軸? 直方形有若干軸? 長方形有若干軸?

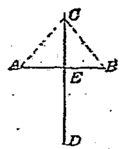
5. 指出第1題所述對稱軸之理。可用於縫級,印字製模,繪屋圖等事。

303. 幾何理有極易從對稱形之理而得者。試指出下數題皆眞確。

1. 直線之中點垂線內。任一點。距直線兩端等遠。

設二百十九圖 CD 爲 AB 之中點垂線。CD 既爲 AB 之對稱軸。則 $\angle AEC$ 能與 $\angle BEC$ 相合。

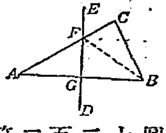
所以 AC 與 BC 相合。



第二百十九圖

2. 直線之中點垂線外之點。距直線兩端之遠不等。

設二百二十圖 ED 爲 AB 之中點垂線。以 ED 爲軸。令 AGF 繞之而轉。至此面所成爲折線 BFC. 得

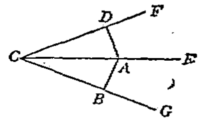


第二百二十圖

$AC=AF+FC=BF+FC>BC$. 何解?

3.　角之平分線內任一點。距角之兩邊等遠。

設CE為$\angle GCF$之平分線。(二百二十一圖)



第二百二十一圖

設$AD \perp CF$. 又$AB \perp CG$. 若以CE為軸。令$\angle GCA$繞之而轉。則GC將落於FC. 故CE為此角之對稱軸。所以AB必與AD合。因從一點至直線。祇可作一垂線也。

4.　角之平分線外任一點。距角之兩邊不等遠。

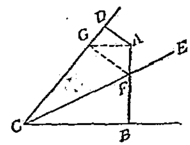
設CE為$\angle BCD$之平分線。(二百二十二圖)

設$AD \perp CD$. 又$AB \perp CB$. 繞CE轉$\angle FCB$至彼面。AFB線變為AFG折線。

惟　$AF+FG>AG$.　何解?

又　$AG>AD$.　何解?

所以　$AF+FG>AD$.　何解?

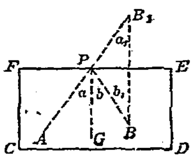


第二百二十二圖

304.　上兩題聯合。可得下定理。

定理.　角之平分線。為角內距兩邊等遠各點之軌跡。

二百二十三圖。長方形$CDEF$. 代表一牙球檯。又設A為牙球。今欲擊球。使先至FE邊之P點。然後反擊B球。求P點。



第二百二十三圖

先求一點B_1. 以FE為中界。而與B點對稱。AB_1與FE兩線之交點P. 即所求之點。

蓋從物理學。得知若在P點作FE之垂線。又射角a等於折角b。則牙球由A射至P。必反激回射B。

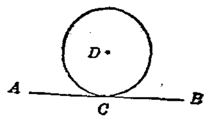
欲證$a=b$。先證$a=a_1$。$b=b_1$。$a_1=b_1$。

圓

305. 圓與圓弧。可用以作多種形。然以圓作形之先。宜略熟圓之性質。

306. **切線.** 一直線。無論引長若干遠。祇與圓相切於一點。此線為切線。

二百二十四圖。AB線與D圓相切於C點。



第二百二十四圖

307. **切點.** 圓與切線之公點。名為切線點。或名切點。

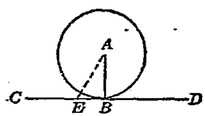
308. **定理.** 交切點之半徑。必與切線互為垂線。

因切線上。除切點外之任一點如E。二百二十五圖。必在圓之外。故AE線必較半徑長。即

$AE>AB$。

如此。AB線乃由圓心A至CD線上最短之線。

所以AB為CD之垂線。



第二百二十五圖

309. **定理.** 一直線。在半徑之外端與半徑為垂線此線必為圓之切線。

若二百二十五圖。AB 爲 CD 之垂線。則必較各線如由 A 至 CD 之 AE，爲更短。故 AE 較長於半徑。而 E 自必在 A 圓之外。

E 既爲 CD 上除 B 外之任一點。故 B 乃 CD 線與圓獨一之公點。所以 CD 爲圓之切線。

310. 正多邊形. 凡多邊形邊等而角亦等者。爲正多邊形。

311. 內接多邊形. 多邊形。其角尖俱在圓周上者。爲內接多邊形。圓周函此多邊形。

312. 外切多邊形. 多邊形。其邊爲圓之切線者。爲外切多邊形。圓周爲多邊形所函。

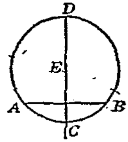
習　　　　題

1. 已知圓周之一點。求作此點之切線。

法　先至此點作半徑。後在此點作半徑之垂線。

2. 已知之圓求圓心。

任作一弦。如二百二十六圖之 AB。再作 AB 弦中點之垂線。CD 線必過圓心。何解？求 CD 之平分點 E。E 卽圓心。



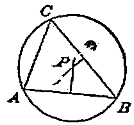
第二百二十六圖

3. 過已知之兩點。求作一圓。

問過兩點能作若干圓？

4. 求作三角形之外接圓。

設 ABC 爲已知之三角形。(二百二十七圖) 作 AB 與 CB 兩邊之中點垂線。此兩垂線。必有圓心在內。何解?



第二百二十七圖

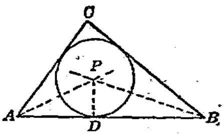
如此。此兩線必在圓心相交。

設 P 爲兩垂線之交點。P 既距 A 與 B 等遠。又距 C 與 B 等遠。則必距 A 與 C 等遠。所以若以 P 爲心。以 PC 爲半徑。所作之圓。必過 A,B,C 三點。

5.　證二百二十七圖 AC 之中點垂線必過 P.

6.　求作三角形之內切圓。

設二百二十八圖。ABC 爲已知之三角形。作 A 角與 B 角之平分線。以兩線相交之點 P 爲圓心。由 P 至 AB 之垂線 AD 爲半徑。作圓。此圓卽求作之內切圓。



第二百二十八圖

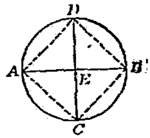
7.　證上題所得之圓。與 ABC 三角形之邊相切。

先證 P 距 BA 與 BC 等遠。次證 P 距 AB 與 AC 等遠。於是 P 距 CA 及 CB 等遠。所以以 P 爲心，以 PD 爲半徑，所作之圓。與 $\triangle ABC$ 之邊相切。(參觀 309 節)

8.　證二百二十八圖 C 角之平分線。必過 P 點。

9.　求作圓之內接方形。

作圓之兩徑。使互爲垂線。如二百二十九圖 AB 與 CD. 作線連 A,B,C,D 四點。$ACBD$ 四邊形。即求作之形。



第二百二十九圖

10. 證二百二十九圖所作之 $ACBD$ 形爲正方形。

證 AED, DEB, BEC, AEC 四三角形皆相合。所以四形之邊 $AD=DB=BC=CA$. 何解?

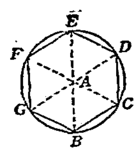
證 $\angle s\, EAD, ADE, EDB, DBE$ 等。皆 45° 角。再證 $\angle s\, DAC, ADB, DBC, BCA$. 皆爲 90° 角。

11. 求作圓之外切方形。

作 A,C,B,D 四點之切線。(二百二十九圖)所成之四邊形。即求作之形。

12. 求作圓之內接正六邊形。

設二百三十圖。A 爲已知之圓。圓周上任取一點如 B 爲心。以圓之半徑爲半徑。作弧如 C. 又以 C 爲心。以前度爲半徑。作弧如 D. 依此法作弧。如 E,F,G. 作線連 B,C,D,E,F,G 六點。所成之 $BCDEFG$ 形。即求作之六邊形。



第二百三十圖

13. 證上題作得之六邊形爲正多邊形。

證 $BAC, CAD, \cdots\cdots GAB$ 六個三角形。皆爲等邊形。故 $BC=CD=DE$ 等等。

證 $\angle s\, BCD, CDE, \cdots\cdots$ 等。皆等於 120°. 所以皆相等。

提要

313. 本章所授之事項如下。對稱。對稱之面。對稱之軸。圓之切線。切點。正多邊形。內接及外切多邊形。

314 前章所授之基礎作法。本章證之。

315. 基礎作法。施用於複雜之題。

316. 對稱形。可用以解求作之題。及求證之定理。

317. 本章已證軌跡之定理如下。

角內距角兩邊等遠之軌跡。爲角之平分線。

318. 本章已證下各定理。

1. 半徑外端之垂線。必爲圓之切線。
2. 由切點所作之半徑。必爲切線之垂線。

319. 已授之求作題如下。

1. 求已知圓之心。
2. 求作三角形之內切圓。
3. 求作三角形之外接圓。
4. 求作圓之內接方形。
5. 求作圓之內接正六邊形。

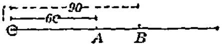
第十二章

正數. 負數. 號例.

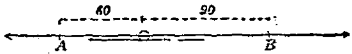
正數負數之用

320. 前數章。凡幾何之題。皆以幾何法及代數術解之。以下數章。將代數文字之加減乘除四法推展。使方程解題法愈明。代數之用愈廣。不徒限於幾何題。即一切幾何外之題。皆可以代數求之。若游刃焉。

今有A,B兩車。於早八時離某站。兩時後。A距原站60里。B距原站90里。問A與B相距若干? 試從二百三十一及二百三十二兩圖。指出此題有兩答數。以兩車所行之順逆方向而定。



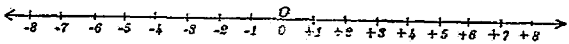
第二百三十一圖



第二百三十二圖

321. **識別線方向之號.** 算學中凡量線。欲明其方向。恆以正號(+)明此方向。而以負號(−)指彼方向。如以正號即加號。指向右行或向上行。則以負號即減號。指向左行或向下行。此等號寫於數字之前。可表明線之長與方向。如此。二百三十一圖。$OA=+60$. $OB=+90$. 惟二百三十二圖。$OA=-60$. $OB=+90$.

322. 數尺. 321節之理既明。則線之長短方向。皆可以數明之。如二百三十三圖。此等數。皆以幾何法列於線上。而以O點定其左右。



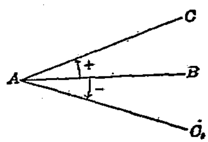
第二百三十三圖

此等列法。名爲數尺。或名代數尺。

323. 正數.負數. 凡數前有加號者爲正數。若有減號。則爲負數。加號不必常寫於數之前。故凡數。如前無號者。則此數必作爲正數。惟減號則不能省。

324. 絕對值. 一數不計其號祇言其數者。爲絕對值。如 $+4$ 之絕對值爲4. -7 之絕對值爲7是也。

325. 正角.負角. 轉二百三四十圖之AB線。繞A而行。使至AC成BAC角。若轉AB向反對之方向行。成BAC_1角。欲表示此兩角爲不同方向者。可以加號指其一。而以減號指其二。常法。線繞行之方向。與時鐘針行之方向逆者。所成之角爲正角。以加號表之若與時針順者。則爲負角。而以減號表之。※



第二百三十四圖

※算學家哀拉.(舊作尤拉.生於1707年.卒於1783年.)首以正負兩號指角度. 哥斯算學士.始將正負角之理法.推廣完美.

習　　題

1. 試作以下諸角。凡作角應從天平線起。如二百三十四圖之 AB. $+45^\circ$, $+90^\circ$, $+160^\circ$, $+270^\circ$, -30°, -45°, -180°, -270°, -360°.

2. 今有一線。先轉 $+75^\circ$ 之角。後轉 -40° 角。試答此線最後所成之角。大小方向如何?

326. 正熱度,負熱度. 熱度之讀法。乃於寒熱表上。先定一點。名爲圈(O)點。凡度數在 O 以上者爲正度。在 O 以下者爲負度。

試指出下列各熱度之意。-4, -2, 0, $+3$, $+8$, $+8$, $+4$, $+3$, $+1$, 0, -1, -2.

習　　題

算術內。+ 號指明其數須加。− 號指其數當減。

下列各題。可明代數學內正負兩數之用。

1. 設某人負欠之款。以減號記之。而囊中所有。以加號別之。若其人欠款及存項。如下列之數耦。問其人款項如何。 +\$1200 與 −\$1000, +\$73 與 −\$50, −\$75 與 +\$60, −\$300 與 +\$1000.

2. 車一輛。由某地點向北行 18 里。(+18 里) 後轉向南行 10 里。(−10 里。) 問此車距原地點若干里?

3. 今有某人。由某地點向東行(+)。或向西行(−)。所行之數如下各數耦。問距原點若干? +16里後 −6里, −20里後 +28里, −18里後 +18里, +100里後 +50里。

4. 地球儀赤道以北之緯度。以加號記之。以南之緯度。以減號別之。試言下列各緯度之意。+28°, +2°, −18°, +12°, −10°.

5. 童子某。囊中無錢。是日博得錢5角(+50銅元。)用去4角(−50銅元。)問該童有錢若干?

6. 若用加號指向前向上,向右,向東,博得,存項,入息,加,增長。則減號所指爲何?

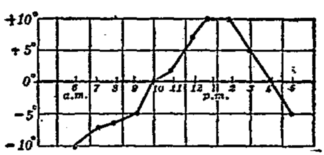
圖線根據數

327. 正數負數。皆可以圖格線代表之。

習題

1. 冬日,早六時起。直至晚五時。每時之熱度。記之如下。−10°, −8°, −7°, −5°, 0°, +2°, +8°, +10°, +10°, +5°, 0°, −5°. 將以上各數。於方格紙上以點誌之。(二百三十五圖)以線連各點如圖。所成之折線名熱度線。

時	熱　度
6	−10°
7	−8°
8	−7°
9	−5°
10	0°
11	+2°
12	+8°
午後 1	+10°
2	+10°
3	+5°
4	0°
5	−5°



第二百三十五圖

從此熱度線。可以知一日內熱度之變遷。何時最冷？何時最熱？何時變遷最速？何時方變？等。皆可一一覽而知。若欲查知熱度成更佳之圖。可密記熱度。如十五分鐘一記，或半句鐘一記，便可。(圖中之$a.m.$指午前。$p.m.$指午後也)

2. 以方格紙作線。表示下列每點鐘熱度。從8點鐘起。$+2°, -2°, -4°, -2°, +2°, +4°, +4°, +8°, +10°$.

3. 北部某城。每月平均之熱度如下。

一月	$-4°$	五月	$+42°$	九月	$+48°$
二月	$-7°$	六月	$+52°$	十月	$+37°$
三月	$+14°$	七月	$+62°$	十一月	$+25°$
四月	$+26°$	八月	$+60°$	十二月	$+2°$

試作熱度線。

4. 某地每日之均平熱度。一連列十四日。爲 $+8°, 0°, -10°, +12°, -6°, +14°, +15°, +2°, -5°, +15°, +20°, 0°, 0°, +10°$. 試據此作線。

5. 某船行程。每禮拜所經之緯度如下。$+42°, +38°, +30°, +20°, +12°, +2°, -1°, -6°, -3°, +12°$. 作此等緯度圖線。并言何時此船過赤道。

6. 1911年十二月以前38年間。芝加高城之熱度。每月熱度最高最低及匀扯之數。表列如下。

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
−20	−21	−12	17	27	40	50	49	32	14	−2	−23
64	63	81	88	94	98	103	98	98	87	75	68
24	25	34	46	56	66	72	71	65	53	39	29

作此三熱度線於一圖格紙上。

7. 下列之數。乃1892年至1912年。美國與奧國貿易入口貨比對數。凡出口貨多於入口用正號。入口貨多於出口用負號。

$-6.19, -9.48, -6.37, -4.38, -5.20, -4.13, +.98, +.83,$

$-2.03, -2.84, -3.98, -3.41, -2.14, +1.07, +1.02, -.87,$

$+.75, -1.21, -2.45, +2.56, +5.67.$

作此等數之圖格線。

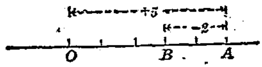
歷史注。最初用＋號－號之時。乃十五世紀。1460年。有醫生名屈文者。著書一本。名商務算學。書中恆用此兩號識別贏虧。1540年。法國算學家偉熱他。始用此兩號為加減之簡寫號。1596年。笛卡兒出。始用此兩號以別線上之數。

正負數之加法

328. 圖線加法. 正數及負數之加合。可以圖線為之。

習　　題

1. 以圖線求(+5)與(−2)之和。



第二百三十六圖

設(+5)爲向東行之路。(−2)爲向西行之路。求此人先行(+5)里後行(−2)里。所停之處。距原地點若干?幷方向如何?此相距。可作爲經過路之遠。

由二百三十六圖 O 點起。向左截至 A, 令等於 5. 再由 A 向左截至 B. 等於 2. B 點在 O 之右。相距 3. 卽 (+3). 此可以用方程及號表示之。如 $(+5)+(-2)=(+3)$.

2. 以圖線求下各數耦之和。

$(+6)+(+2)$, $(-6)+(+2)$, $(+6)+(-2)$, $(-6)+(-2)$, $(+15)+(-10)$, $(+15)+(-20)$, $(-18)+(+24)$, $(-12)+(-9)$.

329. 正數負數。可以設想＋與－兩號。指示兩反對之事物而倂合之。如得與失,入息與費用等。

習　　題

1. 求 (+25) 與 (−31) 二數之和。

設 (+25) 代賺得之 \$25. 而 (−31) 代賠去之 \$31. 最後所缺之 \$6. 卽二數之和。故　$(+25)+(-31)=(-6)$.

2. 依上題之法。求下列各數。

+15	−15	+15	−15	+38	−38	+38	−38
+ 8	− 8	− 8	+ 8	+19	−19	−19	+19

330. **代數加法.** 研究上二題所得之結果。可知正負兩數。可依下二例加合。

1. 欲加兩同號數。先求二絕對值之和。然後以兩項公號。寫於數前。

2. 欲加合正數與負數。先求兩絕對值之較。然後以大數之號。寫於數前。

習題

用正負兩數解以下各題。欲求和數。可用 330 節之例。後用 329 節之法。覆證所得之結果。

1. 午間寒熱表得 0° 下 3°. 傍晚較暖 8°. 問此時寒熱表之度應若干?

2. 某船行於靜水時。速率每時 3 里。若行於河中。順流而下。河流每時 2 里。問船行每時速率若干? 若逆流而行。每時速率若干?

3. 汽船一艘。行於靜水中。每時 12 里。若河流每時 2.4 里。問該船順流而下。每時速率若干? 若逆流而上。每時速率應若干?

4. 某人之產業值 $3600. 欠項共 $1400. 問此人之財政如何?

5. 今有小氣球。上升之力有 9 兩。若附以 6 兩之物。問此球升起抑下墜?

6. 一氣球提 6 兩之石上升。是時上升之力有 8 兩。問升力之和若干?

331. 三項及多項之加法. 以下各題。將三項或多項之正數負數相加。

習 題

1. 某童得其父與銀 \$4. 母與銀 \$3.50. 支雜貨 \$3. 又支鐵器 \$3.75. 問尙餘若干?

$$(+4)+(3.50)+(-3)+(-3.75)=+.75$$

2. 將下列三條數。改爲問題。如前題之式。幷解之。

$$(+4)+(3.50)+(3.75)+(-3)$$

$$(+4)+(-3)+(3.50)+(-3.75)$$

$$(+3.50)+(-3)+(+4)+(-3.75)$$

3. 比較上 1 與 2 兩題之結果如何?

4. 將 $(+8)+(-6)+(+4)$。換其先後秩序相加。而求各法所得之和數。

332. 交換例. 上 2, 3, 4 三題。可見正負兩數。亦可以交換例理之。正數及負數之和。與其更換秩序之和無異。

習 題

1. 升降機一駕。由某層樓上升 65 尺。降下 91 尺。升上 52 尺。又下 13 尺。再上 65 尺方停。問該機是時。距原停處若干尺?幷在何方向?

2. 某船由緯線 $+20°$. 駛行緯線 $+13°$. 再駛 $-60°$. 後駛 $+40°$. 復行 $-10°$. 問是後該船在何處?

3. 今有船從緯度 $-50°$ 起行。其行程如下。$+10°, -5°, +18°, -7°, +38°, -12°, +60°$. 問船在何處?

4. 若加數個正負數。何法爲最簡捷?

5. 某貨莊欠各製造廠款項如下。\$475.50, \$240.00, \$638.50. 而各店之欠該莊者如下。\$360.20, \$159.45, \$520.70 該莊現存銀 \$1254.00. 問其財政如何?

6. 求以下各數之和數。

$+50$	$+35$	-45	$+75$	-236	$+8x$	$-14a$
$+25$	-38	-20	$+13$	$+780$	$-6x$	$-46a$
-18	$+24$	$+60$	-86	-95	$-4x$	$+77a$
-6	-15	$+55$	$+8$	$+45$	$+7x$	$-5a$

7. 指出兩數之號不同而絕對值同者。其所得之和數爲 0.

8. 求 $(-3x)+(-2x)+(+6x)+(+10x)+(-5x)$ 之和數。并以 $x=2$ 代回原題及和數。以覆證之。

9. 鐵一塊。增熱 $20.4°$. 後涼低 $4°$. 最後復熱 $2°$. 問與原熱度改變如何?

10. 以口答下各加數。

(1) $\begin{array}{r} +5 \\ -3 \\ \hline \end{array}$　　(2) $\begin{array}{r} +8 \\ -5 \\ \hline \end{array}$　　(3) $\begin{array}{r} +7 \\ -10 \\ \hline \end{array}$

(4) $\begin{array}{r} +6 \\ -8 \\ \hline \end{array}$ (5) $\begin{array}{r} -\ 7 \\ +10 \\ \hline \end{array}$ (6) $\begin{array}{r} -2 \\ +5 \\ \hline \end{array}$

(7) $\begin{array}{r} -16 \\ +\ 4 \\ \hline \end{array}$ (8) $\begin{array}{r} -3 \\ +1 \\ \hline \end{array}$ (9) $\begin{array}{r} +\ 6 \\ +10 \\ \hline \end{array}$

(10) $\begin{array}{r} -8 \\ -4 \\ \hline \end{array}$ (11) $\begin{array}{r} +\ 3 \\ +10 \\ \hline \end{array}$ (12) $\begin{array}{r} -7 \\ -2 \\ \hline \end{array}$

(13) $\begin{array}{r} -8a \\ +4a \\ \hline \end{array}$ (14) $\begin{array}{r} +\ 7x \\ -10x \\ \hline \end{array}$ (15) $\begin{array}{r} -12m \\ +16m \\ \hline \end{array}$

(16) $\begin{array}{r} +24n \\ -\ 6n \\ \hline \end{array}$ (17) $\begin{array}{r} +\frac{3}{4} \\ +\frac{5}{8} \\ \hline \end{array}$ (18) $\begin{array}{r} -\frac{7}{8} \\ +\frac{3}{4} \\ \hline \end{array}$

(19) $\begin{array}{r} +\frac{11}{16} \\ -\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$ (20) $\begin{array}{r} +3\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{3} \\ \hline \end{array}$ (21) $\begin{array}{r} -5\frac{1}{4} \\ -2\frac{3}{8} \\ \hline \end{array}$

(22) $\begin{array}{r} +4\frac{3}{4} \\ -6\frac{1}{8} \\ \hline \end{array}$ (23) $\begin{array}{r} -6\frac{2}{3} \\ +8\frac{5}{6} \\ \hline \end{array}$ (24) $\begin{array}{r} +7\frac{3}{5} \\ -7\frac{4}{5} \\ \hline \end{array}$

(25) $\begin{array}{r} -12\frac{1}{2} \\ -\ 2\frac{1}{2} \\ \hline \end{array}$ (26) $\begin{array}{r} -18\frac{1}{3} \\ +26\frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$ (27) $\begin{array}{r} -2.12 \\ -1.88 \\ \hline \end{array}$

(28) $\begin{array}{r} +3.16 \\ -4.08 \\ \hline \end{array}$ (29) $\begin{array}{r} -13\frac{1}{2} \\ +23\frac{3}{8} \\ \hline \end{array}$ (30) $\begin{array}{r} -6.69 \\ +8.04 \\ \hline \end{array}$

(31) $\begin{array}{r} +\ 8.95 \\ -11.25 \\ \hline \end{array}$ (32) $\begin{array}{r} -16r \\ +18r \\ \hline \end{array}$ (33) $\begin{array}{r} -3.2s \\ -6.8s \\ \hline \end{array}$

(34) $\begin{array}{l} +7\frac{2}{3}x \\ -6\frac{5}{6}x \\ \hline \end{array}$　(35) $\begin{array}{l} +32b^2c \\ -28b^2c \\ \hline \end{array}$　(36) $\begin{array}{l} +18v^2y^3 \\ -24v^2y^3 \\ \hline \end{array}$

(37) $\begin{array}{l} +8ax \\ -6ax \end{array}$　(38) $\begin{array}{l} -12x^2y \\ -\ 7x^2y \end{array}$　(39) $\begin{array}{l} -68m\ {}^2 \\ -75mr^2 \end{array}$

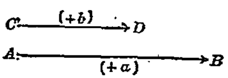
(40) $\begin{array}{l} -6\frac{1}{2}cd^2 \\ +3\frac{2}{3}cd^2 \\ \hline \end{array}$　(41) $\begin{array}{l} +4.5x^2yz \\ -\ \ 8x^2yz \\ \hline \end{array}$　(42) $\begin{array}{l} +2.4ab^2c \\ -6.2ab^2c \\ \hline \end{array}$

正負數之減法

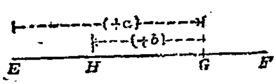
333. 圖線減法. 正負數皆可用方格線減之。以明其理。

1. 由 $+a$ 減去 $+b$.

設二百三十七圖。AB 代表 $(+a)$ 數之量及方向。又設 CD 代 $(+b)$. 欲表示相減之意。可作一無限長之線。如二百三十八圖 EF. 依 $+a$ 之方向。截 EG 等於 $(+a)$. 復由 G 反向截至 H, 使等於 $(+b)$.



第二百三十七圖



第二百三十八圖

EH 卽爲 $(+a)$ 與 $(+b)$ 之較。

如此。$EH=(+a)-(+b)$.

2. 證二百三十八圖之EH.可以用$(+a)$加$(-b)$之法爲之卽$(+a)-(+b)=(+a)+(-b)$.

3. 用圖線證以下各數相等。

$(+5)-(+3)=(+5)+(-3)$,

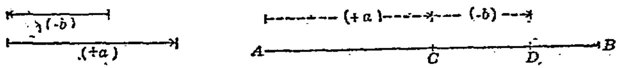
$(+8)-(+10)=(+8)+(-10)$,

$(+6)-(+7)=(+6)+(-7)$.

4. 由$(+a)$減$(-b)$.

於二百三十九圖線上依$(+a)$之方向截至C.使等於$(+a)$.再由C依$(-b)$之反向截至D.

AD卽爲$(+a)$與$(-b)$之較數所以$AD=(+a)-(-b)$.



第二百三十九圖

5 證二百三十九圖之AC.可以用$(+a)$加$(+b)$之法作之。卽$(+a)-(-b)=(+a)+(+b)$.

6. 用圖線證下各方程。

$(+6)-(-3)=(+6)+(+3)$, $(+4)-(-5)=(+4)+(+5)$,

$(+8)-(-8)=(+8)+(+8)$, $(+7)-(-4)=(+7)+(+4)$.

7. 用圖線證下各方程。

$(-8)-(-4)=(-8)+(+4)$, $(-4)-(+6)=(-4)+(-6)$,

$(-3)-(-4)=(-3)+(+4)$, $(-7)-(+2)=(-7)+(-2)$,

$(-a)-(-b)=(-a)+(+b)$, $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$.

334. 代數減法. 上 333 節。解明兩數相減之法。可依下例爲之。

例　兩數相減。將減數改號。然後與前數相加。

算術之數相減。可作爲正數而依上例爲之。如 $7-5=(+5)-(+5)=(+7)+(-5)=2$. 算術惟大數方能減去小數。若代數。則數無論大小。皆可互減。卽如

$$7-10=(+7)-(+10)=(+7)+(-10)=-3.$$

習　題

下列各題。從上數減去下數。

1. $\begin{array}{r}+19\\-10\\\hline\end{array}$	2. $\begin{array}{r}-66\\-25\\\hline\end{array}$	3. $\begin{array}{r}-75\\+25\\\hline\end{array}$
4. $\begin{array}{r}+\ 8\\+10\\\hline\end{array}$	5. $\begin{array}{r}+\frac{7}{8}\\+\frac{3}{4}\\\hline\end{array}$	6. $\begin{array}{r}-\frac{5}{8}\\-\frac{1}{4}\\\hline\end{array}$
7. $\begin{array}{r}+\frac{7}{9}\\-\frac{2}{3}\\\hline\end{array}$	8. $\begin{array}{r}-\frac{9}{10}\\+\frac{2}{3}\\\hline\end{array}$	9. $\begin{array}{r}-6v^2\\+\ v^2\\\hline\end{array}$
10. $\begin{array}{r}-13c^3\\+\ 8c^3\\\hline\end{array}$	11. $\begin{array}{r}-\ 9c\\-15c\\\hline\end{array}$	12. $\begin{array}{r}+7b^2\\-9b^2\\\hline\end{array}$
13. $\begin{array}{r}-8m^3\\+3m^3\\\hline\end{array}$	14. $\begin{array}{r}+a\\-a\\\hline\end{array}$	15. $\begin{array}{r}+6.75a^3\\-7.25a^3\\\hline\end{array}$
16. $\begin{array}{r}-3.16c^2\\-0.89c^2\\\hline\end{array}$	17. $\begin{array}{r}+6(x+z)\\-7(x+z)\end{array}$	18. $\begin{array}{r}-9(c-s)\\+3(c-s)\\\hline\end{array}$

19.	$-4.76t$ $+9.67t$	*20.*	$+.82a^2$ $-3.75a^2$	*21.*	$-0.75c$ $-0.90c$
22.	$+.80m$ $+1.42m$	*23.*	$+2.03y$ $-5.24y$		

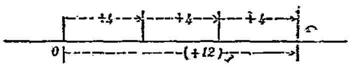
乘積正負號之例

335. 圖線乘法，兩數之絕對值相乘及所得積數之號。皆可以幾何法定之。

習題

1. 求 $(+4)$ 與 $(+3)$ 之相乘積。

$(+3)(+4)$ 與 $3(+4)$ 相同。故得 $(+3)(+4)$ 等於 $(+4)+(+4)+(+4)=(+12)$. 以幾何學論。$(+3)$ 乘 $(+4)$ 卽以 $(+4)$ 爲度。依其方向。連度三次。如二百四十圖。如此 $(+3)(+4)=(+12)$



第二百四十圖

2. 求 (-4) 乘 $(+3)$ 之積。

$(+3)(-4)$ 既與 $3(-4)$ 相同。故得 $(+3)(-4)=(-4)+(-4)+(-4)=(-12)$. 作圖明 $(+3)(-4)$. 卽以 (-4) 爲度。依其方向連度三次。如此 $(+3)(-4)=(-12)$.

3. 求 $(+4)$ 與 (-3) 之相乘積。

譬如交換例能用於正負數。卽因數之秩序雖改換。而所得之積不改。則依上題。$(-3)(+4)=(+4)(-3)=(-12)$. 此亦可以 $(+4)$ 爲度。反己之方向連度三次。則與 $(-3)(+4)$ 所得之結果相同。如此。$(-3)(+4)=-12$.

試作圖線求此積。

4. 求(-4)與(-3)之相乘積。

依上三題合理之法。可知$(-3)(-4)$之意。即以(-4)爲度。反己之方向連度三次。如此。$(-3)(-4)=+12$.

336. 乘積正負號之例. 335節之四題。可以解明積數之號之例。

例一 兩同號因數之積爲正數。

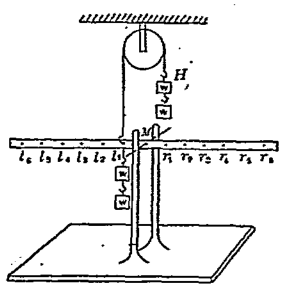
例二 兩不同號因數之積爲負數。

求下相乘之積數。(1)用上二例。(2)用幾何圖法。

$(-2)(-3)$, $(+3)(-2)$, $(-2)(+4)$, $(+2)(+8)$, $(-3)(-5)$, $(+3)(-5)$, $(-2)(+5)$, $(-2)(-5)$, $(-3)(+6)$.

337. 旋轉勢. 乘積號例。可以二百四十一圖之槓桿明之。一輕桿之中點穿孔。平置之。孔之兩旁。各於均度處穿孔。如圖。以等重之錘碼數個。驗得如下。

1. 懸碼兩個$2w$,於l_1處。碼重能令桿轉。記應用若干碼懸於轆轤上之鈎H處。方能相抵使桿不轉。乃移l_1處之兩碼$2w$至l_2,又記H鈎處須加若干重。方能相抵不轉。



第二百四十一圖

2. 依同樣之法。求$2w$,在l_3, l_4, l_5,等處時。H加重相抵槓桿不轉之數。依上兩法。多次試驗之後。查得

1. 桿之轉勢。其變動。隨重距中點 M 而變。

2. 桿之轉勢。等於重與中點距數之相乘積。

若移重於右端。則所得之結果與上同。不過旋轉之方向不同而已。

338. 旋轉之方向. 下法用以區別旋轉之兩方向。已爲算學家公用。若桿轉如時鐘指針之轉法。名爲時鐘轉。若轉向與時鐘轉法相反。名爲逆時鐘轉　重量之加於桿上壓桿使下者。常用－號以記之。重量之在 H 鉤牽桿使上者。恆以＋號誌之。

339. 桿臂. 桿一端加重之處距定點之遠。爲桿臂。由定點量向右之桿臂爲＋。向左者爲－。

譬如由 M 量至 r_1 之距。可以 $+1$ 代之。則由 M 至 r_4 爲 $+4$. 由 M 至 l_3, 以 -3 代之。餘可類推。

340. 正負數乘法. 用二百四十一圖之儀器。可求正負數之積。

習　　題

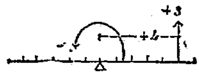
1. 求 $(+4)$ $(+3)$ 之積。

無論用何法。皆可用以求積數。所得之結果。必與算術求得者相合。爲 $(+12)$.

設 $(+4)$ 代桿臂之右四度。$(+3)$ 爲牽桿向上之力。旋轉之方向爲逆時鐘轉。若定此方向爲正。則轉勢得(以 T 代轉勢之力。)

$$T=(+4)(+3)=(+12).$$

與算術所得4×3之數相合。



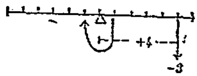
第二百四十二圖

2. 用桿法求下列各條之積數。

$(+2)(+4)$, $(+10)(+6)$, $(+a)(+b)$.

3. 求$(+4)(-3)$之積數。

此題之意。乃加三錘碼之重於桿右端第四度處。壓之使下。如二百四十三圖。旋轉之方向爲時鐘轉。宜號之爲負。蓋與正方向相反也。



第二百四十三圖

於是得　$T=(+4)(-3)=(-12)$.

4. 用桿法示$(-4)(+3)=(-12)$.

5. 用桿法示$(-4)(-3)=(+12)$.

6. 將上1, 3, 4, 5, 四題所得之結果。與336節之號例相比較。

7. 用乘積號例。求下列各數之積。宜用心算口答。

(1)　$(+5)(+3)$	(2)　$(-5)(+3)$
(3)　$(-5)(-3)$	(4)　$(+5)(-3)$
(5)　$(+3)(+6)$	(6)　$(+2)(-2)$
(7)　$(-6)(-2)$	(8)　$(-3)(-4)$
(9)　$(-4)(+2)$	(10)　$2\cdot-3$
(11)　$-3\cdot-4$	(12)　$\left(\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{1}{4}\right)$

(13) $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{5}{6}\right)$　　(14) $\left(+\frac{3}{4}\right)\left(+\frac{5}{9}\right)$

(15) $\left(-\frac{7}{8}\right)\left(-\frac{3}{14}\right)$　　(16) $\left(+\frac{7}{11}\right)\left(-\frac{5}{6}\right)$

(17) $\left(-6\frac{3}{4}\right)\left(-6\frac{3}{4}\right)$　　(18) $\left(+6\frac{3}{4}\right)\left(-6\frac{3}{4}\right)$

(19) $\left(-6\frac{3}{4}\right)\left(+6\frac{3}{4}\right)$　　(20) $\left(+6\frac{3}{4}\right)\left(+6\frac{3}{4}\right)$

(21) $(+3)(-a)$　　(22) $(-3)(-x)$

(23) $(-7)(+rs)$　　(24) $(-a)(+pq)$

(25) $(-c)(-pr)$　　(26) $\left(-3\frac{4}{5}\right)\left(+xy\right)$

(27) $\left(-5\frac{1}{6}\right)\left(-xz\right)$　　(28) $\left(-5\frac{1}{2}a\right)\left(+b\right)$

(29) $\left(-2\frac{1}{2}c\right)\left(-2\frac{1}{2}d\right)$　　(30) $\left(+7\frac{1}{3}x\right)\left(-7\frac{1}{3}y\right)$

(31) $(+5)(-gl^2)$　　(32) $(-7)(-g^2l)$

(33) $(-10)(v^2x)$　　(34) $(+12)(-ay^2)$

(35) $(-16)(+abc^2)$　　(36) $(+bc)(-a)$

0之乘數

341. 4×0之積。意即$0+0+0+0=0$.故普通言之。$a\times0=0$,何解? 又$a\times0=0\times a$ 故$0\times a=0$.何解? 此可以解明下定理.

若乘數中有一因數爲0.則積數爲0.

習　題

1. 用桿法。示$a\times0=0$, $0\times a=0$.

2. 長方形之長寬爲a與b. 設b不動。平分a爲2.成兩長方形。其長寬爲$\frac{a}{2}$與b. 又平分$\frac{a}{2}$爲2.成長方形之長寬爲$\frac{a}{4}$與b. 問此小長方形之面積若干?

3. 設長方形之長寬如下各耦。求各形之面積。$\frac{a}{8}$, b. $\frac{a}{16}$, b. $\frac{a}{32}$, b.……若長方形之一邊。依此逐漸減小。趨近於0問面積如何改變? 指出由此得$0\times b=0$.

幾個因數之積

342. 設有數個因數。求其積。可以第一因數乘第二。所得積數乘第三。餘可類推。倘欲求簡便。可將因數排列。然後相乘。

習　題

1. 求下各條之積數。

$$(+3)\cdot 4\cdot(-6)\cdot 5\cdot(-2),$$

$$3\cdot 5\cdot(-2.8)\cdot(-1.2),$$

$$\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{9}{2}\right)$$

2. 求下列各條之乘方數。$(-1)^2$, $(-1)^3$, $(-1)^4$, $(-2)^2$, $(-2)^3$, $(-2)^4$, $(-2)^5$, $(-3)^2$, $(-3)^4$.

3. 設$x=-3$. 求$2x^3-4x^2-5x+3$之同數。

4. 設$x=-2$. 求$x^3-3x^2y+4xy^2-5y^3$之同數。

5. 設$x=10$. 求$5x^3+6x^2+3x+4$之同數。

6. 比較下列各數耦。$(-2)^3$ 與 -2^3, $(-2)^4$ 與 -2^4, $(-x)^3$ 與 $-x^3$, $(-x)^4$ 與 $-x^4$.

7. 設有七個因數。有四個爲正數。三個爲負數。問積數之號如何?

8. 是何乘方數。能令負數之積爲正數?又何乘方數。令負數積爲負數?

除法正負號之例

343. 除數.實數.法數.商數. 今以3除12之意。卽欲求一數乘3而得12.如此。已知之數爲積數12及因數3.欲求得別一因數。卽爲除法。以3除12之除法。常寫如下。$\frac{12}{3}$, $12:3$, $12\div3$, 或 $12/3$. 共四法。

代數之除法。與算術相同。兩因數之積及一因數已知。欲求第二因數之法。亦名除法。已知之積卽實數。已知之因數卽法數。除後所得之結果爲商數。

習　　題

1. 若 $-10=(+2)(-5)$. 則 $(-10)\div(+2)$ 必爲若干? $\frac{-10}{+2}=?$ $\frac{10}{-5}=?$

2. 答下列各題。并言明其故。

(1) $(+12)\div(+3)=?$　　(2) $(+12)\div(+4)=?$

(3) $(-12)\div(+3)=?$　　(4) $(-12)\div(-4)=?$

(5) $(-12)\div(-3)=?$　　(6) $(-12)\div(+4)=?$

(7) $(+12)\div(-3)=?$　　(8) $(+12)\div(-4)=?$

344. 依除法之界說。

$$(+ab)\div(+a)=(+b)\text{ 蓋 }(+a)(+b)=(+ab)$$

$$(+ab)\div(-a)=(-b)\text{ 蓋 }(-a)(-b)=(+ab)$$

$$(-ab)\div(+a)=(-b)\text{ 蓋 }(+a)(-b)=(-ab)$$

$$(-ab)\div(-a)=(+b)\text{ 蓋 }(-a)(+b)=(-ab)$$

研究此等方程。并指出下兩款商數之號：

1. 若實數法數之號相同。（卽兩數同爲正號。或同爲負號。）

2. 若實數法數之號不同。(卽一負一正)。

據此。可自製除法正負號之例。而與下列者比較。

除法正負號之例

345. 若實法兩數之號相同。商數之號爲正。若實法兩數之號不同商數之號爲負。

習題

1. 用上例。答下列各題之商數。

(1) $\dfrac{+18}{+2}=?$　(2) $\dfrac{+18}{-2}=?$　(3) $\dfrac{-18}{+2}=?$

(4) $\dfrac{-18}{-2}=?$　(5) $\dfrac{+18}{+9}=?$　(6) $\dfrac{+18}{-9}=?$

(7) $\dfrac{-18}{+9}=?$　(8) $\dfrac{-18}{-9}=?$　(9) $\dfrac{xy}{y}=?$

(10) $\dfrac{-xy}{y}=?$　(11) $\dfrac{-xy}{-x}=?$　(12) $\dfrac{-xy}{-y}=?$

2. 冬時某天早晨。寒熱表得 $-4°$. 正午得 $-1°$. 傍晚得 $-6°$. 問是日平均熱度若干?

欲求平均熱度。宜以記熱度之次數。除熱度之和數。

3. 作商數之界說。并指出凡數以本數除之其商數皆爲1.

4. 指出凡數若以1除之。則本數卽爲商數。

5. 指出無論以何數除0. 得數皆爲0.

346. 以0除實數. 凡$\frac{1}{0}$, $\frac{2}{0}$, $\frac{-5}{0}$, $\frac{a}{0}$………等之商數。絕無意義。蓋無論以何數乘0. 不能得1, 2, -5, a,…也。$\frac{0}{0}$之商數。爲無定之數因無論以何數乘0. 皆得0也。

故今後可設想。所有商數。其法數皆非0. 亦不等於0。

習　　　　題

1. 解下列各方程。

(1) $x+14=10$　　(2) $-4x=8$

(3) $3\div x=-3$　　(4) $\frac{2}{3}x=-\frac{10}{6}$

(5) $x\div\frac{3}{4}=-\frac{8}{6}$　　(6) $2x\div\frac{4}{5}=\frac{6}{25}$

2. 求下列各數之商數。能以心算更佳。

(1) $\left(+\frac{3}{4}\right)\div\left(+\frac{1}{3}\right)$　　(2) $\left(-\frac{7}{8}\right)\div\left(+\frac{3}{4}\right)$

(3) $\left(+\frac{7}{8}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$　　(4) $\left(+\frac{5}{7}\right)\div\left(+\frac{2}{7}\right)$

(5) $\left(+\frac{5}{7}\right)\div\left(-\frac{3}{7}\right)$　　(6) $\left(+\frac{5}{6}\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)$

(7) $\left(-\frac{5}{6}\right)\div\left(+\frac{3}{5}\right)$　(8) $\left(+\frac{5}{7}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$

(9) $\left(-\frac{5}{7}\right)\div\left(-\frac{3}{4}\right)$　(10) $\left(-\frac{7}{8}\right)\div\left(+\frac{5}{8}\right)$

(11) $\left(-\frac{5}{6}\right)\div\left(-\frac{2}{7}\right)$　(12) $\left(+\frac{3}{7}\right)\div\left(+\frac{5}{6}\right)$

(13) $\left(-\frac{3}{7}\right)\div\left(-\frac{5}{6}\right)$　(14) $\left(-\frac{5}{6}\right)\div\left(+\frac{2}{7}\right)$

(15) $\left(+\frac{11}{12}\right)\div\left(-\frac{3}{5}\right)$　(16) $(-2a)\div(+2)$

(17) $(-2a)\div(-a)$　(18) $(-5b)\div(+5)$

(19) $(12x)\div(-4x)$　(20) $(-a)\div(-\frac{1}{2}a)$

(21) $(+a)\div(-\frac{1}{4}a)$　(22) $(-a^3)\div(+a)$

(23) $(+a^2)\div(-a^2)$　(24) $(-a^4)\div(+a^3)$

(25) $(-6a^3)\div(+3a)$　(26) $(+4ab)\div(-b)$

(27) $(+4ab)\div(-2a)$　(28) $(-3ax)\div(+3x)$

(29) $(-2xy)\div(+xy)$　(30) $(+6\frac{2}{3}r)\div(-3\frac{1}{4}r)$

5. 求下列各題之同數。

(1) $(+3x^4)\div(-x^2)\div(-x)$,

$(-3x)\cdot(-4x^3)\div(-6x^2)$,

設 $x=-2$, 則 $(5x^3-3x^2)\div 2x$ 得若干?

(2) 設 $a=6$, $b=5$, $\frac{a^3-a^2b}{a^2}=?$

(3) 設 $x=-2$, $\frac{-14x^4(x^2-4x+4)}{7(-x)^3}=?$

提　要

347. 本章所授者如下。

1. 正數負數。可用以分別反對之意義。如向上與向下。向左與向右。得與失等。餘可類推。

2. 統計數有正負兩數者。可以圖線法表示之。

3. 正數負數。可以圖線加減之。

4. 兩同號之數相加。乃兩絕對值之和而以公號寫於其前。

5. 兩不同號之數相加。乃兩絕對值之較。而以較大數之號寫於其前。

6. 加得之和數。不因加數改換先後而變。

7. 欲減一數。可將減數改號。而與原數相加。

8. 兩同號數之相乘積爲正數。不同號者爲負數。

9. 桿旋轉之勢。等於力及桿臂之相乘積。

10. 若因數中有一個爲0.則積數亦爲0.

11. 求乘積之時。因數之秩序。可以更換。

12. 若法實兩數同號。則商數爲正。若法實兩數不同號。則商數爲負。

13. 凡數相乘。可以圖線爲之。亦可用轉桿解釋正負相乘之理。

Blaise Pascal

巴 斯 加 肖 像

(210 之 後)

巴斯加小傳

巴斯加聰明絕世天生算學家也法蘭西之卡來文城人。生於1623年六月十九。死於1662年八月十九。葬於巴黎。巴八歲。即顯其算術才。父師幷力禁之。不可得十二歲。覃思幾何。度越常人。著書論幾何之理多所發明。其父知巴斯加之性近算。乃以歐几利得幾何書使讀。才數禮拜。巴已精熟無倫。年十四。列席於法國幾何家之格致會。年十六。著書論圓錐曲線。遂爲此支之祖。年十八。創製重要之算器一種。是後轉致力於格致實驗及宗教。最後專志於算術。圓錐題有新理。學者稱爲巴斯加定理。即巴之遺著。復以三角數定二項式伸張時之係數決疑術之理。輪擺線之理。數目不能除之理。皆巴所發明。巴篤信宗教。深自刻苦。嘗藏鐵蒺藜之服。偶涉遐想。即刺股出血。又自力於學。勤劬過度。卒以此戕其生。卒年僅三十九。

第十三章
加法及減法
溫習加法例

348. 第二章67節所載之代數例。能統括代字相加法。亦可以範圍正負數加法。

1. 交換例. 以圖線解

$$(+8)+(-3)=(-3)+(+8).$$

此可以解交換例。即

加數之秩序雖改。而和數不改。

2. 結合例. 以圖線解

$$(-5)+(+3)+(-2)=[(-5)+(+3)]+(-2)=(-5)+[(+3)+(-2)].$$

此可以解結合例。即

幾個數相加。先求兩個或多個之和而後與餘數相加。或求後數個之和而與前數相加。所得之和數同。

349. 似項. 凡數項若公有一因數者。則以該因數論。可稱爲相似。即名似項。如

$\frac{2}{3}x^2y^2$, $12x^2y^2$, $-8x^2y^2$ 爲似項。何解?

$\sqrt{5}\,a^2bc^3$, $10a^2bc^3$, $-3a^2bc^3$ 亦相似。何解?

350. 不似項. 數項中絕無公因數者。名爲不似項。如 $4a^2$ 與 $-3cb^2$ 是也。

習　　題

指出下列各題。因有何因數而稱之爲似項。又指出公因數之係數。

1. $4x,\ -7x,\ 20x,\ -35x$

2. $ax,\ -25x,\ -bx,\ 46x$

3. $-8pq^2r,\ -14pq^2r,\ -12pq^2r$

4. $3a^2b,\ -5a^2b,\ +7a^2b,\ -3a^2b$

5. $2ax,\ 3ax,\ -7ax,\ -5ax$

6. $-3pq^2,\ 6tq^2,\ -8kq^2,\ 12sq^2$

獨項加法

351. 求以下各題之和數。列成多項式。而加合似項。

習　　題

1. $4a^2b,\ -a^2b,\ -5a^2b,\ a^2b,\ -3a^2b.$

此題公因數爲 a^2b. 而各項之係數爲 $4, -1, -5, 1, -3$. 此等係數之和爲 -4. 所以求得之數爲 $-4a^2b$.

2. $10xy^2,\ -4xy^2,\ -2xy^2,\ +xy^2,\ -5xy^2.$

此題公因數爲 xy^2. 各項之係數爲 $10, -4, -2, +1, -5$. 其和爲 0. 所以求得之數爲 0. 何解?

3. $+15a,\ -7a,\ +18a$

4. $-18x^2,\ -12x^2,\ +15x^2,\ -3x^2$

5. $+2\frac{1}{2}ab+3\frac{1}{3}ab,\ -4\frac{1}{2}ab,\ -5\frac{2}{3}ab$

6. $+27abc,\ -35abc,\ +10abc,\ -2abc$

7. $3(a+b),\ -4(a+b),\ 12(a+b)$

8. $-8(x^2+y^2),\ -24(x^2+y^2),\ 17(x^2+y^2)$

9. $-3\frac{2}{5}(pr-q^2),\ +5\frac{2}{3}(pr-q^2),\ -4\frac{7}{10}(pr-q^2)$

10. $18(mp-3s)^2,\ -15(mp-3s)^2,\ -37(mp-3s)^2,\ 14(mp-3s)^2$

11. $a(x+y+z),\ -b(x+y+z),\ -c(x+y+z),\ d(x+y+z)$

12. $15ax^2,\ -7bx^2\ 8dx^2,\ -5cx^2$

13. $5s^2t,\ -12x^2y,\ +7x^2y,\ -2s^2t$

14. $-27\frac{2}{3}ab,\ +18\frac{1}{3}cd,\ 15\frac{1}{5}ab,\ 14\frac{2}{5}cd$

15. $5ax,\ -3x,\ x$

16. $9a^2b^2,\ -3c^3y^3,\ 4a^2b^2,\ -4c^3y^3,\ -3a^2b^2$

17. $3mp^2,\ -8mp^2,\ +5a^2x,\ -3a^2x,\ -4mp^2,\ 2a^2x$

18. $-4st,\ -t,\ 3t,\ +5st$

19. $ar^2p,\ -r^2p,\ -br^2p,\ pr^2,\ -cpr^2$

20. $27(a+b)^2,\ +4c,\ +15a,\ -12c,\ -15(a+b)^2,\ -8a$

21. $a(a-b),\ b(a-b),\ -c(a-b)$

22. $a^2(a+b),\ -2ab(a+b),\ b^2(a+b)$

23. $-6\frac{1}{3}(a+b),\ \frac{1}{2}(a^2+b^2),\ -\frac{1}{4}(a^2+b^2),\ +8\frac{2}{3}(a+b)$

24. $r^3(r+p),\ -3r^2(r+p),\ 3r(r+p),\ r+p$

多項加法

352. 多項加法例。可由下兩題解得之。

1. 某學堂之總梯分四截。各截之級數爲 a, b, c, d。若學童每日上落 8 次。升降共若干級?

若學童某。於星期一日上落五次。星期二日上落 6 次。星期三日上落 4 次。星期四日上落 5 次。星期五日上落 4 次。問每星期。該學童共升降多少級。

星期一	$10a+10b+10c+10d$
星期二	$12a+12b+12c+12d$
星期三	$8a+8b+8c+8d$
星期四	$10a+10b+10c+10d$
星期五	$8a+8b+8c+8d$
	$48a+48b+48c+48d$

以加似項法。加合此多項式。

2. 加 $+27x^2-15xy+18y^2$

$-13x^2+30xy-5y^2$

和數爲 $14x^2+15xy+13y^2$，乃由加多項式中之似項而得。

平常此等加法。可排列如下。

$$(27x^2-15xy+18y^2)+(-13x^2+30xy-5y^2)$$
$$=+14x^2+15xy+13y^2$$

353. 次數 凡數之次數。乃該數之指數。如 x^2, y^3, z^4 爲第二次第三次第四次之數。

獨項式 $5ab^2x^3y^2$. a 爲第一次。b 與 y 爲第二次。x 爲第三次。

354. 獨項式之次數. 式內各代字因數之指數之和。爲該項之次數。

如x^2爲第二次。$4xy^2$爲三次。$3x^2y^3$爲六次是也。

355. 多項式之次數. 多項式約至最簡之式後。式中某項次數最高者。卽爲該多項式之次數。如$x^2+xy+2x+2y+4$式爲二次。$x^4+2x^3+2x^4-3x^2-6x-3x^4+7$爲三次。雖式中有四次之項。然約爲簡式。則消去也。

356. 降冪數. 凡多項式。以x最高次數者排第一。較小一次者排第二。如此類推。至無x之項置於式末。則此多項式。名爲降冪數。如多項式$x^3+2x^4-3x^2+4x^3+7+x$若按降冪數排列。則爲$2x^4+5x^3-3x^2+x+7$.

357. 升冪數. 若一式排列之次序。如$7+x-3x^2+5x^3+2x^4$. 則此式名升冪數。蓋每項x之指數。以次增多也。

求下數多項式之和。

$-4x^2+2x^3-3x+6,\ 7-x^2,\ 6x^3-4x+3,\ -2x^3-2x^2+7$

依x之指數。按降冪數排列。

$$
\begin{array}{rrrr}
+2x^3 & -4x^2 & -3x & +6 \\
 & -x^2 & & +7 \\
+6x^3 & & -4x & +3 \\
-2x^3 & -2x^2 & & +7 \\
\hline
6x^3 & -7x^2 & -7x & +23
\end{array}
$$

加合

覆證 設 $x=1$.得

$$\begin{array}{rrrrl}
2x^3 & -4x^2 & -3x & +6 & =1 \\
 & -x^2 & & +7 & =6 \\
6x^3 & & -4x & +3 & =5 \\
-2x^3 & -2x^2 & & +7 & =3 \\
\hline
6 & -7 & -7 & +23 & =15
\end{array}$$

358. 352節至357節各題。可以解釋多項式相加之例。

多項式加法. 多項式相加。即各似項相加。

習　　題

加下列各題。幷消至最簡式。以數代其字母覆證之。

1. $5a+3b+9c,\ 2a-10b-2c$
2. $3x+4y+2z,\ 4x+6y-5z$
3. $2x+5y+7z,\ x-8y+3z$
4. $6a+15c-17b-8d,\ -7a+21d+15b-12c$
5. $7m-n+3p,\ 5m-4p,\ 2m+6n-5p$
6. $-3a-7b+14c,\ -11a+20b-34c$
7. $3m+16n+4p,\ m-4n+6p,\ 2m-2n-10p$
8. $14k-11l+12m,\ -3k+12l-6m,\ -12k+l-2m$
9. $2sx-6y+14z,\ -22x+11y+2z,\ 11x-10y+8z$
10. $7a^2-15c^2+23b^2,\ -6a^2+12c^2-21b^2$
11. $x^2+2xy+y^2,\ x^2-2xy+y^2,\ x^2-4xy,\ 4xy+y^2$

12. $29xy-7y^2+24x^2,\ -14xy-36x^2+36y^2$

13. $6.2x^2-12.5xy-2.5y^2,\ -4.1x^2+6xy+.03y^2$

14. $\frac{5}{8}x^2-\frac{1}{3}xy-\frac{1}{4}y^2,\ -x^2-\frac{2}{3}xy+2y^2,\ \frac{2}{5}x^2-xy-5y^2$

15. $8a^3-7a^2-11a,\ -6a^2+2a+10,\ 4a^3+9a-5$

16. $5x^3-10x^2-2x-12,\ -9x^3+x^2-7x+14,\ 3x^3-x+5$

17. $9x^3-3x^2+4x-7,\ -4x^3+3x^2+2x+8,\ 4x^3-2x+8x-4$

18. $p^3+3p^2+4p-6,\ -p^2-2p+1,\ p^2-1,\ 3p^3+2p+2$

19. $-18a^2b^2+12a^4-8a^3b,\ 4\frac{1}{2}a^3b-a^2b^2+3\frac{3}{8}a^4$

20. $-23a^2b+41a^2c+56c^2b-15b^2c,\ -6a^2b+26a^2c+59c^2b-26b^2c,$

$25a^2c+19b^2c-18c^2b$

21. $5(a+b)-7(a^2+b^2)+8(a^3+b^3),$

$-4(a^3+b^3)+5(a^2+b^2)-5(a+b)$

22. $5a^3(a+b)-6a^2b(a^2+b^2)+3ab^2(a^3+b^3),$

$a^2b(a^2+b^2)+a^3(a+b)-7ab^2(a^3+b^3)$

23. $\frac{3}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}(a-b+c)+\frac{4}{5}(a+b-c)+1\frac{1}{5}(-a+b+c),$

$-\frac{2}{3}(a+b+c)+\frac{4}{3}(a-b+c)-\frac{5}{4}(a+b-c)-\frac{5}{6}(-a+b+c)$

24. $5(a+b)^3-7(a+b)^2+4(a+b),$

$3(a+b)^3-2(a+b)^2-5(a+b)$

25. $2(x+y)^2-6(x+y)+1,\ -5(x+y)^2+3(x+y)-6,$

$(x+y)^2-(x+y)+2$

26. $6(lr+t)+7(l-n)+tz,\ 5tz-8(lr+t)-5(l-n),$

$3(lr+t)-(l-n)-4tz$

獨項減法

359. 前 334 節。經已解明代數減法。可以依下例變為加法。

求兩數之較。可改減數之號而加之。

如 $\left.\begin{matrix}+5x\\-7x\end{matrix}\right\}$上減下。可變為$\left\{\begin{matrix}+5x\\+7x\end{matrix}\right.$上加下。

習　　題

下列各題。上數減去下數。

1.

$16x$	$-4a$	$-10s$	$-7\frac{1}{2}a$	$+15x^2$
$-5x$	$+17a$	$-2s$	$+3\frac{1}{2}a$	$-17x^2$

2.

$5m^2px$	$-8\frac{2}{3}(p+q)$	$-7\frac{2}{3}(x-y)$	$+11m^2(a-2b)$
$-4m^2px$	$+14\frac{1}{3}(p+q)$	$-5\frac{1}{3}(x-y)$	$+29m^2(a-2b)$

360. 減數列於原數之下。法多不便。代數學常兩數順列一行。而以減號 $-$ 連之。如 $(+5x)-(-7x)$。同於 $(+5x)+(+7x)$。卽 $+5x+7x$。卽 $+12x$ 是也。

如減去第二層之工。可寫如下。

$$(+5x)-(-7x)=5x+7x=+12x$$

習　　題

下列各題。消為簡式。試用口答。

1. $(+5ab)-(12ab)$, $(5x^2y)-(-3x^2y)$, $(-12ab^4)-(+8ab^4)$

2.　$(-18p^3q^3)-(63p^3q^3)$, $(+75s^2gb)-(-75s^2gb)$

3.　$(-2x^3y)-(+2x^3y)$, $(-27a^2r^2)-(-54a^2r^2)$

4.　$(-3\frac{1}{2}hk^2v)-(-2.4hk^2v)$, $(4{,}7p^3q^2)-(-4\frac{1}{5}p^3q^2)$

5.　$\{-5(a+b)\}-\{+7(a+b)\}+\{2(a+b)\}$

6.　$\{+18\frac{2}{3}(a+b+c)\}-\{25\frac{1}{3}(a+b+c)\}$

7.　$\{+4(t^2-f^2)\}-\{-2(t^2-f^2)\}+\{10(t^2-f^2)\}$

8.　$\{-3.4(v^2-h^2)\}+\{-4.5(v^2-h^2)\}-\{2.1(v^2-h^2)\}$

多項減法

361. 若原數與減數皆爲多項式。則似項相減便得。

譬如今有銀15圓8雙角30角。減去7圓4雙角10角。可先由15圓減去7圓。餘8圓。8雙角減4雙角。餘4雙角。30角減10角。餘20角。便得答數。

如此。可知代數多項式減法。與獨項式減法無異。而可改爲加法。

如　$$\left.\begin{array}{r}+9x^2-14xy-12y^2\\ -7x^2+5xy-15y^2\end{array}\right\}\ \text{可變爲}\ \left\{\begin{array}{r}+9x^2-14xy-12y^2\\ +7x^2-5xy+15y^2\\ \hline 16x^2-19xy+3y^2\end{array}\right.$$

習　題

1.　上多項式減去下式。

(1)　$$\begin{array}{r}a^2+2ab+b^2\\ a^2-2ab+b^2\\ \hline\end{array}$$

(2)　$$\begin{array}{lrr}4x^2-2xy & & +8y^2\\ 4x^2 & -4x^2y & -y^2\\ \hline\end{array}$$

(3)　$$\begin{array}{r}x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\ -3x^2y+3xy^2-3y^3\\ \hline\end{array}$$

2.　由 $c^3-2a^2c-d^3-r^2$ 減 $-a^2c-3d^3-r^2-c^3$.

此減法。可直寫如下。

$$c^3-2a^2c-d^3-r^2+a^2c+3d^3+r^2+c^3$$

加似項。得 $2c^3-a^2c+2d^3$.

3.　由 $-17x^4+16y^4+4x^3y-29xy^3-35x^2y^2$ 減 $+15y^4-41x^2y^2+8x^3y-18x^4-25xy^3$. 如上2題法。

4.　由 $12ab-3cd+12xy$ 減 $3ab+2cd-11xy$.

5.　由 $8xy-3x+4y$ 減 $-4xy+3x-4y$.

6.　由 $16m^3-8mn^2+4n^2$ 減 $7m^3-4m^2n+14n^3$.

以上各題。可解明下例。

多項式減法.　用心算改多項式減數之號。與原數相加。

習　　題

下列各題如列出之號爲減號。可用心算改減數之號。不必覆寫各數。

1.　$(+17x^2-14xy-15y^2)-(-16x^2+12xy-9y^2)$

2.　$(45x^2y^2-27x^4+81y^4)-(73x^4+4y^4+65x^2y^2)$

3.　$(27x^3-6x^2y+8y^3)-(-15x^3+8xy^2-4y^3)$

4.　$(-56g^4+27g^3h-14gh^3)-(-13g^3h+18g^2h^2-6gh^3)$

5.　$(-5a^2x+10bxy+24b^2y-18axy)$

$$-(-6b^2y+12axy-4a^2x-2bxy)$$

6. $(-9m^2pq-5m^3p-14m^2q^2)-(-6m^3p-10m^2pq-13m^2q^2)$

7. $(2r^3+r^2s+rs^2+2s^3)-(r^3+3r^2s+3rs^2+s^3)$

8. $(+4x^3-3x^2y+12y^3-7xy^2)-(2y^3-3xy^2+4x^2y+7x^3)$

9. $(\frac{1}{2}l^3-3\frac{1}{2}lm^2+4\frac{1}{3}m^3-3l^2m)-(\frac{3}{4}lm^2+5\frac{1}{2}l^2m-2l^3-3m^3)$

10. $(5\frac{2}{3}abc-7\frac{1}{2}a^2b-8\frac{2}{5}b^2c-6\frac{1}{3}c^2a)$

$$-(4\frac{1}{3}a^2b-5\frac{2}{3}c^2a+3\frac{1}{5}abc+7\frac{1}{3}b^2c)$$

11. $(3.4v^3s^4-5.7v^4s^3+9.8v^6s^2)-(-1.7v^4s^3-3.2v^6s^2-4v^3s^4)$

12. $(4t^4-7\frac{1}{2}f^3)-(3\frac{1}{2}t^3f-7.6t^4+5\frac{2}{3}tf^3+6f^3)$

$$+(2\frac{1}{2}t^3f-3\frac{1}{3}tf^3)$$

13. $(-2\frac{1}{2}k^3ml+7.5k^2m^2l-3.24km^3l)$

$$-(3\frac{1}{4}km^3l-3.6k^2m^2l-5.4k^3ml)$$

14. $(3ax^3-4syz^3)-(-2ax^3+4y^3-5z^3+3syz^3)-(2y^3+3z^3)$

15. $(-5mv^2-3mvu+4mu^2,-(+3mv^2-6muv-4nuv+9mu^2)$

16. 由1至15各題。移去括弧後。減數之號如何。試比較之。

17. 多項式括弧前之減號與式之關係。試定一例以明之。

18. 若括弧前爲加號試定一例以明其關係。

括弧消去法

362. 括弧.* 凡數欲聚合者。常以括弧()括之。別種號同用者。爲〔〕, {} 及$\overline{\quad}$. 凡$(a+b)\div(a-b)$, 或$[a+b]\div[a-b]$, 或$\{a+b\}\div\{a-b\}$, 或$\dfrac{a+b}{a-b}$ 等。皆同一意。即以 $a-b$ 除 $a+b$ 也。 依此類推。如由 $a+b$ 減去 $c-d$. 可用下任一法寫出。如$(a+b)-(c-d)$, $[a+b]-[c-d]$, $\{a+b\}-\{c-d\}$ 或$a+b-\overline{c-d}$. 皆可。

習　　題

1. 指出下三題之意。

(1) $7-\{5+(8-2)\}$

(2) $-3-[5-\{-4+6\}]$

(3) $2(a+b)-4\{a-\overline{2a-3b}\}$

2. 消以下各題至簡式。

(1) $4-\{5-(t^2-4)\}$

(2) $8\frac{1}{2}-\{4k^3-(3k^3-5\frac{1}{2})\}$

(3) $4t^2-\{t^2-3t^3+\overline{3t^2-t^3}\}$

(4) $2f-[6f-\overline{3g-4f}-(2g-4f)]$

(5) $9x-\{5y-(6y+7z)-(7y-4z)\}$

---

* 紀元後1572年.意大利人邦卑利.於所著算書內.初用括弧.及偉熱他出.始用此()〔〕{}三號. 算學士基列.將用括弧之條理詳定.最後1637年.笛卡兒始用$\overline{\quad}$.

(6)　$-3a^4+[4a^3-(3a^3-5a^2)-(4a^2+3a)]$

(7)　$16e^2\times\{-42e^2-(3e^2+2)\}-(50e^2+3)$

(8)　$7.5p^3-(3.5p^3-\overline{4.2p^3+1.6p^2}-\overline{3.4p^2-4.5p}]$

(9)　$3l^3-\{2p^2+l^3-\overline{p^2+r}\}-[p^2-r-(l^3+r)]$

(10)　$105s^2-\overline{14st+3t^2}+\{4st-2t^2-(5s^2-2st)\}$

(11)　$-[3rl-(3r^2-3l^2)]-\{4r^2-\overline{5rl-2t^2}\}+(2r^2+2t^2)$

提　要

363. 本章所授者如下。次數。獨項式次數。多項式次數。升羃及降羃。括弧。

近世代數一畫之用處。

1. 分數用一畫以別分子分母。

2. 凡開方根。一畫之下。皆爲求根之數。

364. 正負二數所能用之例如下。

1. 交換例。加數之秩序雖改。然和數不變。

2. 結合例。幾個數相加。先求兩數或多數之和。而後與他數相加。或求後數個之和。而與前數相加。所得之結果相同。

3. 似項相加。公因數之前。寫係數之和。

4. 多項式相加。即似項相加。

5. 求兩數之較。可改減數之號而加之。

6. 多項式相減。可將被減式每項之號改換。而與前式相加。

7. 括弧之前有＋號者。可以移去括弧。而各號不改。

8. 括弧之前有－號者。移去括弧時。須盡改弧內各項之號。

Leonardo of Pisa

利安拿度肖像

(224 之 後)

利安拿度小傳

利安拿度。姓腓布納斯。以字行。自六世紀至十六世紀間。論算術者皆推利。1175 年。利生於意大利之披河城。卒於1250年。童時。隨父流寓非洲北境亞路支耳國之表基亞城。入學。習亞喇伯之算學及記號。遍讀亞喇伯算學家何化利芝米之書。遊埃及敍利亞及沿地中海諸名城。與算家遊。1200 年回披沙。始著書論算學及代數。類多何化利芝米之言。是書 1202 年刊行。學者誦習。是書言亞喇伯數字算法之利。黜羅馬舊法之煩。並概舉代數及藉幾何學得公式之妙。其說略如本書十五章。書中解方程及二次方程淺題。又以數目題釋公例。略如本書之法。其敍述亞喇伯算史之益。足知歐人算學遠不相及。亞人所發明。且未嘗知聞。大抵此書爲歐洲談算術代數之鼻祖。數百年來。言算者必及之。

利別著一書。名幾何演習術。又一書專論正方。用以解代數題。皆爲學者傳習。

第十四章
乘法及除法
獨項乘法

365. 凡求兩獨項及多個獨項之積。可設 152 節之交換例。能轄正數及負數。

求下題之積。$(2a^2b)(-3ab^2)(-4b^3)$.

此題之號。以 336 節之號例定之得 +. 何解? 各因數可排列如下。$2\cdot3\cdot4a^2\cdot a\cdot b\cdot b^2\cdot b^3$, 卽先求數目之積。後求代字之積。

相乘後。得

$$(2a^2b)(-3ab^2)(-4b^3)=+24a^3b^6.$$

此題可解明下列之獨項乘法。

獨項乘法. 求兩項或多項之積。

1. 以乘法之號例。定相乘積之號。
2. 求數目因數之積。
3. 以代字因數之積乘前積。

求下題之積。并設 $a=1, b=1, x=2, y=3$. 覆證之。

$$(2ay)(-4a^2bx)(-3ab^2x^3y^2)=+2\cdot4\cdot3a\cdot a^2\cdot a\cdot b\cdot b^2\cdot x\cdot x^3y\cdot y^2=+24a^4b^3x^4y^3.$$

覆證　$(6)(-8)(-216)=10,368.$

$$24\cdot1\cdot1\cdot16\cdot27=10,368.$$

習　題

1. 求下各題之積。試以心算求之。

(1) $(+17)(+25)(-8)$

(2) $(2mt^2)(-3m^2t)(-5m^2)$

(3) $(6a^2b^2c^2)(4a^2b^2)(3a^2b^2c^2)(5a^2b^2c^2)$

(4) $(+8.2a^2mb)(-3.5amn^2b^2)(4.3m^2n^2b)$

(5) $(-3xpq^2r)(-2\frac{1}{3}xp^2qr)(-4zpqr^2)$

(6) $(\frac{3}{5}a^2b)(-\frac{10}{9}ab^2x)(-\frac{2}{15}abx^2)$

(7) $(-2\frac{1}{2}x^2y)(-5\frac{1}{2}x^2y^3z)(+16x^3yz^4)$

(8) $(-5\frac{1}{3}p^2q^3)(+5\frac{1}{4}q^2r^3)(-1\frac{1}{7}r^2p^3)$

(9) $(4\frac{1}{2}t^3s^2u^3)(-2\frac{2}{3}t^2s^5u^{12})(-\frac{1}{12}t^{10}s^7u^8)$

(10) $(\frac{3}{5}a^2x)(-10aby)(-6ay)(\frac{1}{4}xy)(\frac{1}{6}ab)$

(11) $(\frac{2}{3}by^2)(\frac{6}{5}a^2bx^2y)(-\frac{10}{4}ax^2y)$

(12) $(-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, (-2)^5$

(13) $(-3)^1, (-3)^2, (-3)^3, (-3)^4$

(14) $(-2)^2(-3)^2(-4)(2)^3$

(15) $(-a)^2(-a^2)(-a^2)(-a)^3$

(16) $(-a^2)(+a^4)(-a^3)(+a)^2$

(17) $(-a)^2(-a)^4(-a)^3(+a^4)$

(18) $(a^5)^2(-a^3)^1(-a^2)^5(a^3)$

(19) $(3p^2)^2(-p^3)^5(-5p^4)^2$

(20) $(2\frac{1}{2}x^3)^2(-\frac{2}{5}x^5)^2(3x^7)^2$

(21)　$(a+b)^3(a+b)^5(a+b)^2$

(22)　$3(x+y)^5(x-y)^4\,4(x+y)^3(x-y)^6$

2.　求以下各題之答數。

(1)　$(-3)(-2)+(4)(-5)-(-3)(2)-(-2)^3$

(2)　x^2+6x+9 設 $x=2$, 又設 $x=-3$. 求答數。

(3)　設 $x=-2$, 求 $x^4-3x^3+2x^2+4x+6=$ 若干。

3.　下列各數。爲兩因數之相乘積。求兩因數。

$36x^2y^3z,\ -72a^4b^2,\ 51p^4qr^2,\ -18a^2bx^3$

4.　解以下各方程。

$$\frac{x}{6}=-\frac{1}{12},\ -\frac{x}{a^2}=-a^5,\ \frac{x}{a}=-b$$

獨項乘多項法

366. 分配例.　第五章 158 節。曾言獨項乘多項式之法如下。以獨項遍乘多項式各項。而加所得之分積。此爲乘法之分配例。

習　　題

求以下各題。幷以數代字母覆證之。

1.　$5x(x^2-3xy+5y^2)$

$$\begin{array}{r} x^2-3xy+5y^2 \\ 5x \\ \hline \end{array}$$

得積　$5x^3-15x^2y+25xy^2$

覆證　設 $x=1,\ y=2$

則 $$5x(x^2-3xy+5y^2)=5(1-6+20)=5\cdot 15=75$$

又 $$5x^3-15x^2y+25xy^2=5-30+100=75$$

2. $6\frac{2}{3}ab(3a^2-6ab+12b^2)$

3. $3a(4a-5b)+5b(6a-3b)$

4. $-5.7x^3(\frac{12}{19}abx-1\frac{4}{19}aby-2\frac{2}{19}xyz+\frac{7}{19}byz)$

5. $(3a^2b^3+4ab^2+2b^3)2ab^2$

6. $(x^3y^4-4x^4y^5+6x^2y^7-9x^5y^4)3.5x^2y^3$

7. $2(3a-2b)-5(a+3b)+2(3a-b)$

8. $2a+b(a-2b)+(4a-b)3+b$

9. $(x^2-5x+6)2x-(x+1)3x^2-x(x^2-7x+4)$

10. $5a^2(2\frac{1}{5}a^2-4\frac{1}{2}ab-3.5b^2)-4b^2(3\frac{1}{3}a^2+2ab-2\frac{3}{8}b^2)$

11. $4x^3(3x-2y)-2xy(3x-2y)+(3x-2y)6y^2$

12. $2(3a^2-4\frac{1}{2}ab+7b^2)-(4a^2+5\frac{2}{3}ab-8\frac{1}{2}b^2)$

13. $x^5-[3x(x^2-2)-2x^2(x+1)]$

14. $4a[(1-a)2a^2+(3a+1)3a^2]$

15. $5a\{4a-2(3a-4b)+5(4a-3b)\}$

16. $2a\{5(4a-7b-3c)-6(5a+4b-8c)\}$

17. $-4x[2x^2+3x\{4(x-1)-5(x-2)\}]$

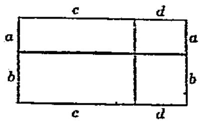
18. $5y^3-[3y^3-2y\{4y(y+3)-5y(2y+6)\}]$

多項乘多項法

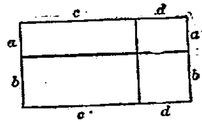
367. 若長方形之邊爲多項式。則其面積可截爲數個長方形。其邊之數較爲簡易。

習　　題

1. 用重畫分線。指出二百四十四圖之長方形。爲兩長方形之和。又爲四長方形之和。



第二百四十四圖



第二百四十五圖

2. 指出二百四十五圖之長方形。(1)爲兩長形之和。(2)爲四長方形之和。

3. 設長方形之邊。如下列各條。爲兩個或多個長方形之和。求該形之面積。所得之多項式。消爲簡式。

	長	闊
1.	$3+4$	$6+2$
2.	$a+6$	$a-2$
3.	a^2+b^2+2ab	$a+b$
4.	$x^2+2xy+y^2$	$x-y$
5.	$a-b$	$a^2-2ab+b^2$
6.	$5+x$	$25+10x+x^2$

第 1, 2, 3, 三題。初求得爲兩長方形之和。如 1 題 $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)$. 此兩積名爲分積。欲求最後之積。將此兩分積再消之。得

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

此可以解多項式相乘之法。

多項式相乘法.　此式之每項遍乘彼式之每項。而加各分積。

習　　題

乘下各題。

1.　$(a^2+ab+b^2)(a+b)$

乘時可排列如下。

$$\begin{array}{lll} & a^2+ab+b^2 & \\ & a+b & \\ \hline \text{第一次分積} & a^3+a^2b+ab^2 & =a(a^2+ab+b^2) \\ \text{第二次分積} & a^2b+ab^2+b^3 & =b(a^2+ab+b^2) \\ \hline \text{總積} & a^3+2a^2b+2ab^2+b^3 & =(a+b)(a^2+ab+b^2) \end{array}$$

2.　$(ax+by)(ax-by)$

3.　$(a^3+ab^2+b^3)(a+b)$

4.　$(p^2+2p+1)(p-3)$

5.　$(2\frac{1}{2}a^2-3\frac{1}{3}b^3)(12a^3-6b^2)$

6.　$(\frac{1}{3}pt-\frac{1}{2}ts)(\frac{3}{4}pt-\frac{2}{3}ts)$

7.　$(a+b+c+d)^2$, $(a+b-2c)^2$

8.　$(-2a-3b+c)^2$, $(a^2+b^2-3c^3)^2$

9.　$(2a^2+b^2+3c^2)(2a^2+b^2-3c^2)$

10.　$(.5x-.4y-.3z)(10x-20y+30z)$

11.　$(3y^2-45xy+6x^2)(3y^2-5x^2)$

12. $(ax+by+cz)(ax+by-cz)$

13. $(ax+by-cz)^2$, $(ax-by-cz)^2$

14. $(\frac{1}{3}ms-\frac{1}{4}st-\frac{2}{3}tm)(6m-12s+18t)$

15. $(-1.4l^2-2.5ml+.9m^2)(.2l^2-lm-.1m^2)$

16. $(a^2+ab+b^2)(a-b)(a+b)$

17. $(4x^2+2xy+y^2)(2x+y)(2x-y)$

18. $(x+b)^3$, $(a-b)^3$, $(2x-y)^3$, $(x+2y)^3$

19. $(4.6abc+1.2ab^2)(4a^2c-5a^2b)$

20. $(p^2+pr-r^2)(p^2+pr+r^2)$

21. $(9k^2-3kt+t^2)(9k^2+5kt-t^2)$

22. $(9x^2-6xy+y^2)(9x^2+6xy+y^2)$

23. $(5a+2b)^3-(5a-2b)^3$

24. $4\frac{1}{2}mn(4m^2-6mn+9n^2)-3mn^2(13\frac{1}{2}n-9m)$

25. $(2p^2+q^2)^2-(2p^2-q^2)^2-4p^2(p-2q)^2$

26. $(2f-3h)^2-(2f+3h)^2+(2f-3h)(2f+3h)$

27. $(.5x-.6y)^2-(.5x+.6y)^2-(.5x+.6y)(.5x-.6y)$

算術數目乘法

368. 算術之數目相乘。即為多項式相乘之一種。

如多項式 $a\cdot10^3+b\cdot10^2+c\cdot10+d$. 設 $a=2, b=5, c=1, d=3$. 則多項式變為 $2\cdot10^3+5\cdot10^2+1\cdot10+3=2000+500+10+3=2513$.

習　　題

1. 以 347 乘 482.

482 如寫成多項式,可作 $400+80+2$, 或作 $4\cdot10^2+8\cdot10+2$. 347 可寫作 $3\cdot10^2+4\cdot10+7$. 如此。$(482)(347)=(4\cdot10^2+8\cdot10+2)(3\cdot10^2+4\cdot10+7)$.

相乘

$$
\begin{array}{r}
4\cdot10^2+8\cdot10+2 \\
3\cdot10^2+4\cdot10+7 \\
\hline
12\cdot10^4+24\cdot10^3+6\cdot10^2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
16\cdot10^3+32\cdot10^2+8\cdot10 \qquad\quad \\
+28\cdot10^2+56\cdot10+14 \\
\hline
12\cdot10^4+40\cdot10^3+66\cdot10^2+64\cdot10+14
\end{array}
$$

此卽等於

$$120000+40000+6600+640+14=167254.$$

2. 寫 32569 爲多項式。依 10 列爲降羃數,

3. 用第 1 題法以 3 乘 3462.

4. 用第 1 題法。求 287×453 之積。

369. 十進數. 數目旣可列爲多項式而以 10 進。故名爲十進數。

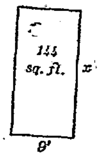
故如以 $x=10$. 則由多項式 $2x^3+5x^2+7x+6$. 可得十進數。

370. 數之別種進法. 設以別數代 x. 則得別種進法。與算學常用之進法不同。如 $x=12$. 則上式變爲 $2\cdot12^3+5\cdot12^2+7\cdot12+8$. 此等進法。有時較十進法尤爲簡易。此法名爲12進法。印度算家以 5 爲底。而以 5 爲進數。

獨項除法

371. 367 節。曾言長方形之邊已知。則其面積易求。此處則解明若面積與一邊已知。則餘邊可求。

習　題



第二百四十六圖

1. 若長方形之面積爲 144 *sq. ft.*(方呎)。底闊 9*ft.*(呎)。求高若干?

2. 若長方形面積爲 144 *sq. ft.* 底闊 16*ft*, 12*ft*, 8*ft*, 72*ft*. 求各高應若干?

372. 除法. 欲求以 2 除 8. 意卽求何數乘 2 得 8.(參觀 343 節)。普通言之以一數除某數。所得之第三數若轉乘該數。卽得回某數。

習　題

1. 證凡數以本數除之得 1.

因 $n\cdot1=n$. 故依 372 節。得 $\frac{n}{n}=1$.

2. 證凡數以 1 除之得本數.

3. 證無論以何數(非 0)除 0. 得 0.

4. 證若兩因數之乘積。以一因數除之。得別因數.

5. 下列之法。時或可證 $4=7$. 求此法之謬。

設 a 與 b 兩數相等。卽 $a=b$.

則 $a-b=0$.　故 $4(a-b)=0$. $7(a-b)=0$.

依此可得 $4(a-b)=7(a-b)$. 何解?

以 $a-b$ 除方程之兩端。得 $4=7$.

6. 以 $5a$ 除 $25a^2b$.

第一法　因 $5ab\cdot 5a=25a^2b$. 故 $25a^2b\div 5a=5ab$.

第二法　因 $25a^2b=5a\cdot 5ab$. 故 (依上 4 題)

$$\frac{25a^2b}{5a}=\frac{5ab\cdot 5a}{5a}=5ab.$$

7. 求下各數之商數。 $\frac{a^6}{a^4}$, $\frac{a^5}{a^3}$, $\frac{a^{10}}{a^2}$, $\frac{a^7}{a^5}$.

8. 求下各商數。

$8x\div 4$	$18a^4b^5c^6\div 9ab^5c^3$
$-25a^5b^6\div 5a^3b^4$	$(x+y)^4\div(x+y)^2$
$30^4b^3\div -6ab^2$	$(-a)^4b^3(-c)^3\div(-a)^2b(-c)$

約 簡 分 數 法

373. 約簡分數. 凡分數。若分子分母同以一數約之。所得之商數不改。此理代數與算術同。若以大公因數除分子分母。名爲約分數至簡式。

習　　題

約下各題至簡式。

1. $\dfrac{63a^3b^4c^4}{-7a^2b^5c^6}$

分數之號爲一。何解?

兩數皆可以 7 除之。代字 a^3 與 a^2 可以用 a^2 除。b^4 與 b^5 可以用 b^4 除。c^4 與 c^6 可以用 c^4 除。

約分數之法。可以排列如下。

$$\frac{63a^3b^4c^4}{-7a^2b^5c^6}=\frac{\overset{9\cdot a\cdot 1\cdot 1}{63a^3b^4c^4}}{\underset{-1\cdot 1\cdot b\cdot c^2}{-7a^2b^5c^6}}=\frac{9a}{-bc^2}=-\frac{9a}{bc^2}$$

2. $\frac{xy}{xz}$

3. $\frac{56a^5}{a^8}$

4. $\frac{6a^3b^2}{-2a^2b^3}$

5. $\frac{-6x^5y^2z^4}{3xy^2z^3}$

6. $\frac{15r^4st^3}{3r^8st^2}$

7. $\frac{6x^2yz^2}{2xy}$

8. $\frac{-25a^5b^6c^7}{5a^3b^4c^5}$

9. $\frac{-1.69x^4y^5z^6u^5a^8}{-1.3a^4w^2x^2y^3z^4}$

10. $\frac{+12\frac{1}{2}t^2u^5s^4}{-2\frac{1}{2}ts^4u^3}$

11. $\frac{12(-a)^4b^5(-c)^6}{3(-a)^2b^3(-c)^4}$

12. $\frac{14(a+b)^3}{-7(a+b)^2}$

13. $\frac{-94(x^2-y^2)^5}{-2(x^2-y^2)^3}$

14. $\frac{-3.43(a^2+2ab+b^2)^8}{49(a^2+2ab+b^2)^4}$

15. $\frac{5\frac{2}{12}x^5y^4(a^2+b^2)^7}{2\frac{13}{22}x^2y^3(a^2+b^2)^5}$

16. $\frac{-45m^4n^3w^2z}{9m^2n^4w^3}$

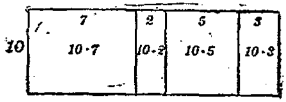
17. $\frac{-51x^6y^5z^6}{1.7ax^4y^5z^6}$

獨項因數

374. 前 367 節內。已言已知兩因數求積數之法。此處可揭示已知乘積反求因數之法。此法恆稱曰劈因數。

習　　題

1. 今有四個相隣之花畦。如二百四十七圖。其面積可依下兩法列出。



第二百四十七圖

$10\cdot7+10\cdot2+10\cdot5+10\cdot3$

或 $10(7+2+5+3)$

故 $10\cdot7+10\cdot2+10\cdot5+10\cdot3=10(7+2+5+3)$

此兩法。何者爲最簡易? 其理何在?

2. 今有四個相隣之長方形。皆以 a 爲高。而底則爲 a, $3ab$, b, c。試用兩法明此四長方形之總面積。此兩法所得之式列成方程。

3. 今有三隣花畦。其總面積爲 $x^4+3x^3y+4x^2y^2$ 方尺。式中每項代每畦之面積。三畦之長相等。問各畦之闊若干?

4. 下列各長方形之面積。求其長闊。

$4x^2-3xy$　　　　$3m^5-12m^3n+6mn^4$

$5x^3-10x^2y+15xy^2$　　　　$15x^4-10x^3+5x^2$

$14a^2b^3c^2-21a^3b^2c^2+35a^2b^2c^2$　　　　$10x^3-4x^2+6x+2$

375. 374節習題1至4.可解明下列之多項式。求獨項因數法。

先求多項式中各項之大獨項公因數。此即多項式之一因數。

以此因數除多項式。其結果即多項式之別因數。

習　題

1. 劈 $14x^2y^2z-7x^3y^3z^2+28xy^2z^3$ 之因數。

先以忖度法求得最大公因數為 $7xy^2z$. 以 $7xy^2z$ 除多項式之各項。得 $2x-x^2yz+4z$.

故 $14x^2y^2z-7x^3y^3z^2+28xy^2z^2=7xy^2z(2x+x^2yz+4z)$.

2. 求 374 節第 4 題各多項式之因數。

3. 求下各式之因數。

$5a-10b$	$ax+ay-az$
$17x^2-289x^3$	$4a^2x^3-12a^3x^4-20a^4x^3$
$16x^2-2abx$	$5mx+10m^2x^2-40m^3x^3$

約簡分數

習　題

376. 約下列各題至極小之項。

1. $\dfrac{27a^4b^5c^6-18a^5b^6c^7-54a^6b^7c^8}{-9a^7b^8c^9}$

分子之因數為 $9a^4b^5c^6$ 與 $(3-2abc-6a^2b^2c^2)$.

此分數可寫作 $\dfrac{9a^4b^5c^6(3-2abc-6a^2b^2c^2)}{-9a^7b^8c^9}$.

以 $9a^4b^5c^6$ 除分子分母得

$$-\frac{3-2abc-6a^2b^2c^2}{a^3b^3c^3}.$$

2. $\dfrac{39ab+9a^2}{3a^2}$　　*3.* $\dfrac{36a^3x+8ax^3}{-12a^4x^4}$

4. $\dfrac{36x^2y^4-42x^5y^6z}{-12x^3y^5}$　　*5.* $\dfrac{20a^3b-15a^2b^2+30ab^3}{5ab}$

6. $\dfrac{10x^2y-15x^3y^2+5x^3y}{-5xy}$　　*7.* $\dfrac{16a^3x^2y-44a^2x^3z}{4a^2x^2}$

8. $\dfrac{35ab^8c^3-42a^3b^4c^3-49a^8b^4c^3+21a^3b^5c^7}{7ab^3c^3}$

9. $\dfrac{12am^2n^3-16bm^3n^2+40abm^2n^2-28a^2m^2n^2}{-4mn}$

10. $\dfrac{-15p^{15}q^{10}-12p^{27}q^{14}+9a^8p^{14}q^{16}-27abcp^5q^{10}}{3p^2q^8}$

11. $\dfrac{4abc(3abc-5a^2b^2c^2-7ab^2c+6ab^4c)}{-2a^2bc^2}$

12. $\dfrac{2x(4yz-6x^2y^2)-8y^2(5xz^2-1\frac{1}{2}x^3)}{4xyz}$

13. $\dfrac{15a^3b^4c^5-9a^4b^3c^2-45a^2b^3c^5+21a^5b^4c^3-3a^4b^5c^4}{3a^2b^3c^2}$

14. $\dfrac{21abdpqs-35abcpqt-42acdpts}{-7ap}$

15. $\dfrac{15(x+y)^5-25(x+y)^8-35(x+y)^3}{-5(x+y)^3}$

多項除法

377. 欲除多項式。以上所述各法。皆須引用。凡加法減法乘法及兩項除法。俱須溫習。以資應用。

以 412 除 86932.

常法如下

$$\begin{array}{r|l} 86932 & 412 \\ \underline{824} & \text{商數}=211 \\ 453 & \\ \underline{412} & \\ 412 & \\ \underline{412} & \end{array}$$

試將86932與412排成多項式。可以寫作80000+6000+900+30+2, 及400+10+2. 兩數相除。法如下。

$$\begin{array}{r|l} 80000+6000+900+30+2 & 400+10+2 \\ \underline{80000+2000+400} & \text{商數}=200+10+1 \\ 4000+500+30 & \\ \underline{4000+100+20} & \\ 400+10+2 & \\ \underline{400+10+2} & \end{array}$$

又將兩多項式。以10之方次列成降冪數除之。其狀如下。

$$\begin{array}{r|l} 8\cdot10^4+6\cdot10^3+9\cdot10^2+3\cdot10+2 & 4\cdot10^2+1\cdot10+2 \\ \underline{8\cdot10^4+2\cdot10^3+4\cdot10^2} & \text{商數}=2\cdot10^2+1\cdot10+2 \\ 4\cdot10^3+5\cdot10^2+3\cdot10 & \\ \underline{4\cdot10^3+1\cdot10^2+2\cdot10} & \\ 4\cdot10^2+1\cdot10+2 & \\ \underline{4\cdot10^2+1\cdot10+2} & \end{array}$$

378. 研究兩多項式之除法。可得以下各條。

1　實數第一項爲法數第一項所除得之數。卽商數第一項數。

2. 以商數第一項乘法數。其積由實數減去。

3. 以法數第一項除餘數第一項。所得卽商數第二項。

4. 以商數第二項乘法數。所得積由餘數減去。

5. 商數以下各項求法。皆依上兩項之法。循序得之。

6. 自始至終。兩多項式。皆須依一字之方數。順一序排去。

習　　題

1. 以 $4x^2+x+2$ 除 $8x^4+6x^3+9x^2+3x+2$.

$$\begin{array}{r|l} 8x^4+6x^3+9x^2+3x+2 & 4x^2+x+2 \\ \underline{8x^4+2x^3+4x^2} & \text{商數}=2x^2+x+1 \\ 4x^3+5x^2+3x & \\ \underline{4x^3+\ x^2+2x} & \\ 4x^2+\ x+2 & \\ \underline{4x^2+\ x+2} & \end{array}$$

2. 以 $a+b$ 除 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$$
\begin{array}{l|l}
a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 & a+b \\
\underline{a^3+\ \ a^2b} & \text{商數}=a^2+2ab+b^2 \\
\quad 2a^2b+3ab^2 & \\
\quad \underline{2a^2b+2ab^2} & \\
\qquad\qquad ab^2+b^3 & \\
\qquad\qquad \underline{ab^2+b^3} &
\end{array}
$$

3. 以 $x+y$ 除 x^3+y^3.

$$
\begin{array}{l|l}
x^3+y^3 & x+y \\
\underline{x^3+x^2y} & \text{商數}=x^2-xy+y^2 \\
-x^2y+y^3 & \\
\underline{-x^2y-xy^2} & \\
\qquad +xy^2+y^3 & \\
\qquad \underline{+xy^2+y^3} &
\end{array}
$$

379. 覆證除法. 凡除法恰合者。最後必無餘數。若以商數乘法數。必得回實數。此法可用以覆證所得之數。

習　　題

下列各題。除後以乘法覆證之。

1. 以 (a^2-3a+2) 除 (a^3-a^2-4a+4)
2. 以 $(a-3)$ 除 $(a^3-5a^2+10a-12)$
3. 以 $(1+2x)$ 除 $(1+5x+6x^2)$
4. 以 $(3t+4s)$ 除 $(9t^2+24st+16s^2)$
5. 以 $(4x+7y)$ 除 $(1.2x^2+.5xy-2.8y^2)$
6. 以 $(2k-7t)$ 除 $(6k^3-31k^2t+47kt^2-42t^3)$
7. 以 $(x-2y)$ 除 $(10x^3-5xy^2-54y^3-4x^2y)$
8. 以 $(3a-2b)$ 除 $(27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3)$
9. 以 $(9a^2-12ab+4b^2)$ 除 $(27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3)$

10. 以 $(3t^3-2s^3)$ 除 $(9t^6-12t^3s^3+4s^6)$

11. 以 $(2x^3+3y^3)$ 除 $(4x^6+12x^3y^3+9y^6)$

12. 以 $(5x^2-3y^2)$ 除 $(3y^4+15x^3y-9xy^3-25x^4+10x^2y^2)$

13. 以 $(7x^3-4x^2+3x-1)$ 除 $(7x^5+10x^4-26x^3+17x^2-11x+3)$

14. 以 $(3+4a-5a^2)$ 除 $(15+8a-32a^2+32a^3-15a^4)$

15. 以 $(4u^2+.3v^2)$ 除 $(64u^6+14.4u^4v^2+1.08u^2v^4+.027v^6)$

16. 以 $(x-y)$ 除 (x^3-y^3)，以 $(3t+4s)$ 除 $(27t^3+64s^3)$

17. 以 $(x-1)$ 除 (x^5-1)，以 $(x-1)$ 除 (x^6-1)

18. 以 $(x-y)$ 除 (x^5-y^5)，以 $(x-y)$ 除 (x^6-y^6)

19. 以 $(8a^3-b^3)$ 除 $(64a^6-b^6)$，以 $(4x^2-5r^2)$ 除 $(16x^4-25r^4)$

20. 以 $(4x^2+2xy+y^2)$ 除 $(8x^3-y^3)$

21. 以 $(.2st+v)$ 除 $(.008s^3t^3+v^3)$

22. 以 $(16a^4+4a^2b^2+b^4)$ 除 $(64a^6-b^6)$

23. 以 $(.04s^2t^2-.2stv+v^2)$ 除 $(.008s^3t^3+v^3)$

24. 以 $(9m^4+6m^2n^2+4n^4)$ 除 $(27m^6-8m^6)$

25. 以 $(3m^2+2n^2)$ 除 $(27m^6+8n^6)$

26. 以 $(a+b)$ 除 $(a^3+a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+b^3)$

27. 以 $(a^2+b^2+c^2)$ 除 $(a^3+a^2b+ab^2+ac^2+bc^2+b^3)$

提要

380. 本章所授者如下分積。十進數。求因數。除法。

381. 本章所授各法如下。獨項乘法。獨項乘多項式法。多項乘多項法。獨項除法。約簡分數法。多項除多項法。

382. 乘法之分配例。獨項乘多項常依下例：

以獨項遍乘多項式各項。而加乘得之積。

383. 本章研究所得者。

若積數中一因數爲某數所除。則該積數亦爲某數所除。

凡數若以本數除之。得 1.

凡數以 1 除之。得本數。

無論以何數(非 0)除 0. 得 0.

384. 數目。可以 10 之乘方數。列成多項式。

385. 多項式之獨項因數。可以忖度得之。以此獨項數除多項式。可得別因數。

386. 以一多項式除別多項式之法。與算術兩數相除之法恰同。

第十五章

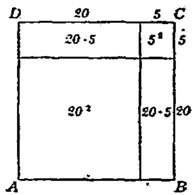
特別積.劈因數.二次方程

二項乘方法

387. 代數中常見之乘數。宜從速解明。庶得應用之益

388. **二次方之三項式.** 設二百四十八圖。$ABCD$ 爲正方形。其邊長25尺。可指示 $ABCD$ 之面積。等於四段之和。所謂四段。卽 $20^2, 20\cdot5, 20\cdot5, 5^2$. 此數可以方程表之。卽

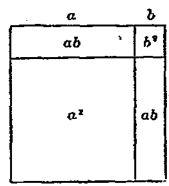
$(20+5)^2=20^2+2\cdot20\cdot5+5^2$.



第二百四十八圖

依此。可解明二百四十九圖之面積可以下方程明之。卽

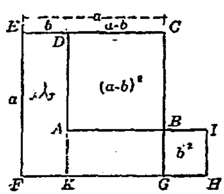
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$



第二百四十九圖

此三項式 $a^2+2ab+b^2$. 乃二次式。可名爲二次三項式。又因此三項式代表一方形之面積。故又名二次方三項式。

389. 設二百五十圖 $ABCD$. 代表一正方。其邊爲$(a-b)$尺長。可指出$ABCD$之面積。等於 $EFGC+GHIB-FKDE-KHIA$。



第二百五十圖

所以 $(a-b)^2=a^2+b^2-ab-ab$. 何解? 此式可以寫作

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

此三項式 $a^2-2ab+b^2$. 亦爲一二次方三項式.

試作圖解明下列之二項方爲二次方三項式。

$(p+q)^2$, $(p-q)^2$, $(x+y)^2$, $(x-y)^2$ $(m+n)^2$, $(m-n)^2$

390. 二項乘方法.

二項乘方。可以乘法得之。不必用圖。

用乘法求下列各方之三項式。

1. $(m-x)^2$ $(m-x)^2=(m-x)(m-x)=m^2-2mx+x^2$

2. $(a+b)^2$ 3. $(p-k)^2$

4. $(p+k)^2$ 5. $(x-y)^2$

6. $(m+)x^2$

習此。須知二項之方。可以直接得之。法求首項方加末項方。然後或加或減 2 倍兩項之相乘積。其加減。以次項之＋－兩號而定。

習題

直接寫出下列各方之三項式。

1. $(x+p)^2$ 2. $(v+a)^2$ 3. $(x-p)^2$

4. $(x+5)^2$ 5. $(y-7)^2$ 6. $(4a-1)^2$

7. $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)^2$ 8. $(.4a-.3t)^2$ 9. $(k-r)^2$

10. $(r+y)^2$ 11. $(k+n)^2$ 12. $(r-y)^2$.

13. $(h-p)^2$　*14.* $(g-f)^2$　*15.* $(3px-4qy)^2$

16. $(6xyz+1)^2$　*17.* $(5a+2b)^2$　*18.* $(7xy+z)^2$

19. $(3a-4b)^2$　*20.* $[(a+b)+3]^2$　*21.* $[(a-b)+z]^2$

22. $[(k+b)-s]^2$　*23.* $[(a-b)-2c]^2$　*24.* $[(ax+y)-z]^2$

391. 數目乘方法. 數目乘方。如列該數爲二項式而求之。則其法甚易。

習　　題

求下列各數之方。

1. 53

$$53^2=(50+3)^2=50^2+2\cdot50\cdot3+3^2$$
$$=2500+300+9=2809$$

2. 68

$$68^2=(70-2)^2=4900-280+4=4624$$

3. 13　*4.* 14　*5.* 15　*6.* 21

7. 31　*8.* 38　*9.* 43　*10.* 72

11. 81　*12.* 91　*13.* 89　*14.* 103

劈正方三項式之因數

392. 前 390 節。已言兩項之方爲三項式。內有首項方。加或減(以兩項中間之號而定)二倍兩項積。加末項方。 如此。凡三項式內有兩項皆方數。(皆正數)餘一項恰爲前兩項之方根積之二倍。則必爲兩項方根之和或較之方。 其和與較。以餘一項之號而定。

既得此理。則可藉以求三項方式之因數。

習　　　題

覓下列三項式之因數。皆以研審得之。

1. $k^2+6kl+9l^2$

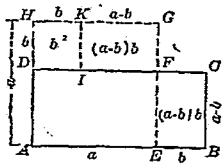
k^2 與 $9l^2$ 爲 k 與 $3l$ 之方、而 $6kl$ 爲兩方根之相乘積之二倍。

故 $$k^2+6kl+9l^2=(k+3l)(k+3l)=(k+3l)^2$$

2. $x^2+2xy+y^2$
3. $a^2-2ab+b^2$
4. $m^2+4mn+4n^2$
5. b^2-6a+9
6. $k^2+8k+16$
7. $a^2+10ab+25b^2$
8. $49-140n^2+100n^4$
9. $a^2b^2c^2+8abc+16$
10. $16x^2+24xy+9y^2$
11. $25k^2+70ks+49s^2$
12. $16p^2+72pq+81q^2$
13. $121a^2-242ab+121b^2$
14. $81x^2-126xy+49y^2$
15. $169r^2-260r+100$
16. $256m^2+96mn+9n^2$
17. $49x^6-154x^3y+121y^2$
18. $625m^4+50m^2v^2+v^4$
19. $169r^2-78rt^2+9t^4$
20. $25x^2y^2+40xyz+16z^2$
21. $36r^2s^2-84rst+49t^2$
22. $9a^2b^2+48abmn+64m^2n^2$
23. $49a^2k^2+42akxy+9x^2y^2$
24. $25p^2q^2-60pqs+36s^2$
25. $81a^2+180abcd+100b^2c^2d^2$
26. $64m^2n^2+320mnp+400p^2$
27. $225k^2-120kl+16l^2$
28. $100x^2+280xy+196y^2$
29. $64x^2y^2+80xyz+25z^2$
30. $16x^2-56xyz+49y^2z^2$
31. $4p^2-36pqr+81q^2r^2$

兩數之和較相乘積

393. 兩數之和及較之相乘積。可藉長方形得之。此形之邊。為兩線之和及兩線之較。設二百五十一圖 $ABCD$ 為長方形。其邊為 $(a+b)$ 與 $(a-b)$。



第二百五十一圖

$$ABCD=AEFD+EBCF.\quad \text{何解?}$$

$$=AEFD+IFGK.\quad \text{何解?}$$

$$=AEGH-DIKH.$$

$$=a^2-b^2$$

所以　$(a+b)(a-b)=a^2+b^2.$

作圖求下列數之相乘積即兩方之較。

$(a+x)(a-x)$, $(m+n)(m-n)$, $(y+4)(y-4)$

394. 兩數之和及較之相乘積。可以乘法逕得之。

習　　題

以乘法求下列數之積即兩方之較。

1. $(a+x)(a-x)$

$(a+x)(a-x)=a^2+ax-ax+x^2=a^2-x^2$

2. $(r+4)(r-4)$　　3. $(t+q)(t-q)$

4. $(p+s)(p-s)$　　5. $(y+b)(y-b)$

此數題所得之結果。可引伸得一法。直求兩數之和較相乘積。如下。

求兩數之方。首數方減末數方。

習　題

求下列各題之兩方較。不用乘法。直列出。

1. $(2a+3b)(2a-3b)$　　2. $(3x-4z)(3x+4z)$

3. $(5p+3s)(5p-3s)$　　4. $(\frac{1}{2}r+\frac{1}{3}t)(\frac{1}{2}r-\frac{1}{3}t)$

5. $(\frac{2}{5}xy-\frac{2}{3}xz)(\frac{2}{5}xy+\frac{2}{3}xz)$　　6. $(4abc-3)(4abc+3)$

7. $(1+5p^2q^2)(1-5p^2q^2)$　　8. $(1-a)(1+a)(1+a^2)$

9. $(u-v)(u+v)(u^2+v^2)$　　10. $(10a+7bc)(10a-7bc)$

兩方較劈因數

395. 方程式 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. 可推出劈 a^2-b^2 因數之法。簡言之。兩方較之因數。爲兩方根之和乘兩方根之較。

習　題

求下列兩項式之因數。并以乘法覆證之。

1 $256x^2-y^2$

$256x^2$ 之方根爲 $16x$, 而 y^2 之方根爲 y.

故 $256x^2-y^2=(16x+y)(16x-y)$

2. x^2-y^2　　3. $16b^2-25b^2$　　4. $49a^2-9b^2$

5. $m^2n^2-144r^2$　　6. $189u^2-81v^2$　　7. $16-25y^2$

8. $169d^2h^2s^2-225t^4$

9. $9m^2-121u^2g^4$

10. $49a^2-100b^2g^2$

11. $196-361a^4k^6t^2$

12. $225b^{10}-f^4g^6h^{14}$

13. r^4-s^4

14. $81m^4-16n^4r^4$

15. x^8-y^8

16. $256a^4-625c^4d^8$

17. m^6-n^6

18. $a^{10}-b^{10}$

19. $64x^6-9$

20. $(r+3s)^2-16t^2$

21. $(2a+b)^2-9c^4$

22. $(5x^2-3y^3)^2-16z^4$

23. $(x^2-y)^2-z^6$

396. 劈兩方較因數之法。可以推得劈數目兩方較之捷法。

求下各題之答數。

1. 81^2-19^2

2. 137^2-37^2

3. 137^2-63^2

4. 126^2-26^2

5. 1017^2-17^2

6. 511^2-489^2

397. 求三項式之方. 作一方形。其邊爲 $a+b+c$.

指出 $$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

如何方能直求三項式之方數?

直列下兩式之答數。$(a+2b+3c)^2$, $(x-3y+z)^2$.

兩二項式如 $(ax+b)(cx+d)$ 之積

398. 欲得兩二項式 $(ax+b)$ $(cx+d)$ 相乘積之捷法。可由研究兩式相乘之結果而獲之。

$$\begin{array}{l} \quad ax+b \\ \quad cx+d \\ \hline acx^2+bcx \\ \qquad +adx+bd \\ \hline acx^2+(bc+ad)x+bd \end{array}$$

從此可知積之第一項。爲兩式首項積。末項爲兩式末項積。中項爲兩式首尾項互乘積之和。

習　　　題

求下列各題之積。宜多用心算推之。

1. $(3x+5)(2x+3)$

寫次式於首式之下。

$$\begin{array}{l} 3x+5 \\ \underline{2x+3,} \end{array}$$ 於此可見兩首項積爲 $6x^2$. 兩末項積爲 15. 兩首尾項互乘積之和爲 $9x+10x=19x$.

故 $(3x+5)(2x+3)=6x^2+19x+15$.

2. $(5x+4)(3x+2)$　　*3.* $(3x-5)(2x+3)$

4. $(5x+4)(3x-2)$　　*5.* $(2x-7)(4x+3)$

6. $(3x-5)(2x-3)$　　*7.* $(5x-4)(3x-2)$

劈三項式 ax^2+bx+c 之因數

399. 三項式如上 398 節 1 至 7 題所求得者。皆屬此 ax^2+bx+c 式。劈此等三項式之因數。可由下列之法得之。

劈 $3x^2+17x+10$ 之因數。

試列出此式首尾兩項能得之因數如下.

$$\begin{array}{ccc} +3x & & +10 \\ & \times & \\ +x & & +1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} +3x & & +1 \\ & \times & \\ x & & +10 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} +3x & & +5 \\ & \times & \\ +x & & +2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} +3x & & +2 \\ & \times & \\ +x & & +5 \end{array}$$

最後一式。兩交互乘數之和等於 $17x$，故此兩式。即爲劈得之因數。

所以　$3x^2+17x+10=(3x+2)(x+5)$

習　　題

依此法。劈下列各題之因數。

1. $2x^2+11x+12$	2. $8c^2+46c-12$
3. $3x^2-17x+10$	4. $8z^2-31z+21$
5. $5x^2-38x+21$	6. $11a^2-23ab+2b^2$
7. $7k^2+123k-54$	8. $12t^2+31st-15s^2$
9. $5m^2-29mn+36n^2$	10. $10r^2-23r-5$
11. $6b^2-29b+35$	12. $6f^2-f-77$
13. $102-11a-a^2$	14. $15+37z-8z^2$
15. $1-6xy+5x^2y^2$	16. $2x^2+7x+6$
17. $14x^2+53xy+14y^2$	18. $5x^2+13x-6$
19. $17a^2+6a-11$	20. $8p^2-14p-39$

習　　題

400. 劈下各題之因數。

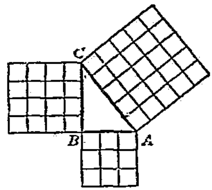
1. c^2-c-56	2. $48x^2-3y^2$
3. $a^2b^2+a^2b+ab^2$	4. $72r^2+41r-45$

5. $x^2y^2-5xy+4$	6. a^2-64
7. $x^2yz+xy^2z+xyz^2$	8. $a^2bc^3-2abc^3-8bc^3$
9. $4ax^2-9ay^2$	10. $18x^2+37x+19$
11. $7bx^2+42bxy+63by^2$	12. $6a^2b+12ab^2+18a^2b^2$
13. p^4-16	14. $7b^2+41bc-6c^2$
15. $810a^4c^2-10b^4c^3$	16. p^2q^2r-r
17. $38x^3y^4+57x^4y^3-19x^3$	18. $9x^2-4xy-13y^2$
19. $a^3b^3c^2+a^2b^3c^3+a^3b^2c^3$	20. $450-2a^2$
21. $c^2-16c+64$	22. $b+15b^2-16$
23. $a^4b^2-6a^3b+9a^2$	24. $12a^2xy+12axy+3xy$
25. x^2+4x-5	26. $15+19a^2-34a$
27. $81a^2-1$	28. $5b^2+10b-15$
29. $5a^2-5b^2$	30. $6x^2-56y^2+41xy$
31. $a^2k^3-2abk^3+b^2k^3$	32. $3a^2-9ab-210b^2$
33. ax^3+ax^2+ax+a	34. $30c^2-31c+8$
35. ax^4-100a	36. $9m^2-24mn+16n^2$
37. a^3+a^2+a	38. $36a^2+27ab+2b^2$
39. $a^2b^2+18ab+80$	40. $4x^2+32xy+39y^2$

派達哥拉氏定理

401. 直三角形之邊。有一種極淺易之關係。可藉以解幾何學中之問題。

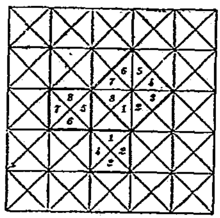
1. 作直三角形。令直角旁之兩邊一爲 3, 一爲 4, 如二百五十二圖之△*ABC*. 以同度求 *AC* 之長。再於每邊上作正方。并按度作小方形。皆如圖。核計小方形之數。試比較弦方與餘兩邊方之和。所得之結果列成方程。



第二百五十二圖

(按直三角形之三邊。一爲弦。餘兩邊。中國舊稱豎者爲股橫者爲句。或句股互稱。今後仍之。似較簡便。又直三角形。可簡稱句股形。)

2. 審視二百五十三圖。將弦方與句方股方之和比較如何?



第二百五十三圖

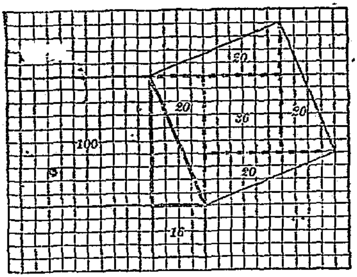
402. 上兩題所列。可得下定理。

派達哥拉氏定理. 凡直三角形句方股方之和。等於弦方。

此定理。於幾何學中久已著名。自希臘算學家派達哥拉氏之後始得名。人皆信派氏乃最初證得此題之人。

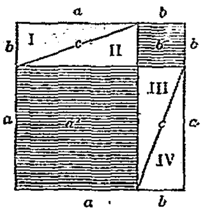
習　　題

1. 核計二百五十四圖之小方形。證弦方等於句方股方之和。

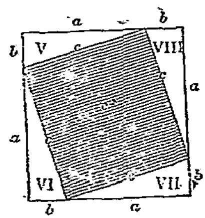


第二百五十四圖

2. 設二百五十五圖及二百五十六圖之 c 代弦之長。a 與 b 代句與股之長。作線長等於 $a+b$.於此線上作正方。分此等方形如圖。



第二百五十五圖



第二百五十六圖

證三角形 $I, II, III, IV, \cdots\cdots VIII$ 皆相合。

證二百五十五圖 $(a+b)$ 之正方。等於

$$a^2+b^2+(I+II+III+IV).$$

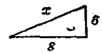
證二百五十六圖 $(a+b)$ 線之方。等於

$$c^2+(V+VI+VII+VIII).$$

所以若由 $(a+b)$ 線之方形內除去四個合三角形。其餘下之 a^2+b^2.與 c^2 相等。

故 $a^2+b^2=c^2$.

3.　若直三角形之句與股爲6與8.問弦長若干?



第二百五十七圖

以x代弦如二百五十七圖。

則　$x^2=8^2+6^2=64+36.$

$x^2=100.$

$x=10.$

故弦等於10.

4.　今有磚牆。長16尺。高12尺。若扯一線。由牆下角至牆上對角。問線長若干?

5.　若直三角形之弦30尺。股18尺。句長若干。

6.　直三角形之句股相比。若3:4.其弦長35尺。問句股長若干?

此題可以$3x$與$4x$代句股。

7.　今有梯長20尺。恰倚於窗欄上。窗距地16尺。若地甚平正。梯脚至牆。應距若干?

8.　正方形之對角長12.問邊長若干?周長若干?

凡數如80,或a,或$x+y$等。皆非正方形。其方根可揭示如下。$\sqrt{80}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{x+y}$.

9.　正方形之對角線爲a.問周長若干?

10.　若直三角形之面積爲54方尺。句長12尺。問弦長若干?

11. 若直三角形之面積爲 r 方尺。句長 b 尺。求弦 h 等於若干?

12. 直三角形之面積爲 216 方尺。勾長 48 尺。求三角形之周若干。

13. 直三角形之面積爲 s 方尺。勾長 b 尺。求三角形之周若干?

14. 今平地上有一樹。爲風所折。斷而仍連。斜倒於地。下截高 36 尺。上截之頂擱地處。距樹脚 27 尺。問此樹原高若干?

15. 上題之折樹。設上截長 t 尺。樹頂距脚 f 尺。求此樹原高若干?

16. 長方形之邊爲 a 與 b. 對角線爲 d. 證 $d^2=a^2+b^2$. 與 $d=\sqrt{a^2+b^2}$.

17. 正方形之邊爲 a. 對角線爲 d. 證 $d=a\sqrt{2}$.

18. 直三角形之弦長 c. 股長 b. 試證勾 $a=\sqrt{c^2-b^2}$ $=\sqrt{(c-b)(c+b)}$.

19. 以 17 題所得之結果爲公式。求正方形之對角線。正方形之邊長 4 尺, 1.2 尺, 3.42 米達。

20. 以 18 題所得之結果爲公式。若 $c=40$ 寸, $b=24$ 寸, $c=.625$ 尺, $b=.375$ 丈。求 $a=$ 若干?

若 $c=4, b=3$. 證 $a=\sqrt{7}$. 方形之邊。若非用根號。不能示其恰合之數。祇可求 7 之方根。得其略近數。

算術數字之方根

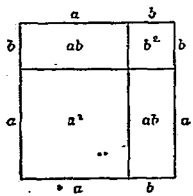
403. 欲求數之方。以本數自乘一次卽得。如 346 之方為 $346 \cdot 346 = 119716$. 惟欲求何數自乘一次得 119716. 則其法甚複雜。

404. 兩項式之方。可由下公式得之。公式為

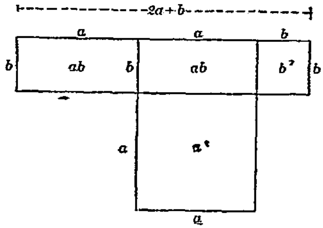
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \cdots\cdots\cdots I$$

幾何學代此公式者。為二百五十八圖。

試由二百五十九圖。將長方形 ab 放於別處。



第二百五十八圖



第二百五十九圖

則 I 公式。可變而為 II 公式。

$$(a+b)^2 = a^2 + (2a+b)b \cdots\cdots\cdots II$$

可用 II 公式求任一數之方根。

405. **方根之數位。** 下列各習題。可藉以斷定方根之數位。

習　　題

1. 指出單位數之方。有一位或兩位。

試將 1 至 9 各整數之方列出。便得。

2. 指出一位或兩位數之方根。爲一位數。(整數)。

3. 求下列各數之方根。祇求整數。3, 5 7, 18, 27, 39, 50, 65, 89.

4. 指出凡兩位數之方。爲三位或四位數。祇計整數。

5. 指出凡三位或四位數之方根。爲兩位數。(整數)。

6. 求下列各數之方根。祇求整數。110, 150, 209, 630. 1625, 8274.

下列之表乃撮取1至6題之義及其伸展之理。

數之數位	1	2	3	4	5	6
方數之數位	1或2	3或4	5或6	7或8	9或10	11或12

由此可知一數乘方之整數位。爲原數數位之兩倍或兩倍而少1. 此可以推及求某數之方根整數位之數。任一數。(或整數或帶小數)。可於小數點起向左推去。每兩位用微畫號記之。則方根之位數。等於兩位之次數。如54783可畫得三次。如 5'47'83. 其最左之次。僅得一位。故 54783 之方根。爲三位數。皆整數。

求 729 之方根。

先依上法。向左每兩位畫一號。得7'29.

故 729 之方根有兩位。何解?

方根十位之數。其極大者。須乘方不能大於 7. 卽不能爲 3. 故此數爲 2.

設以x代個位之數。則$\sqrt{729}=20+x$

又卽　　$729=(20+x)^2=400+(2\cdot20+x)x.$

故　　$729-400=(2\cdot20+x)x.$

卽　　$329=(2\cdot20+x)x.$

x之同數，可試而得。因$2\cdot20=40$. 又因$8\cdot40=320$. 故可試用8. 惟$(2\cdot20+8)8=384$. 大於329. 可棄之。試用較小之數7. 求得$(2\cdot20+7)7=329$. 所以$x=7$. 而$\sqrt{729}=20+7$

$$=27$$

406. 求729之方根法。可用下簡約之法爲之。

(a)

$$\sqrt{729}=20+7$$

$$\begin{array}{r}20^2=400\\ \hline 329\\ (2\cdot20+7)7=329\\ \hline\end{array}$$

(b)

省寫0得$\sqrt{729}=27$

$$\begin{array}{r}2^2=4\\ \hline 329\\ 47\cdot7=329\\ \hline\end{array}$$

407. **求方根之法.** 求方根法省寫0者。其層級如下。

(1)　從小數點起。向左每二位微作一畫區別之。如7′29.

(2)　求一最大之數。此數之方不能大於7. 卽 2.

(3)　所得之數乘方。由7減去。然後寫下後兩位。如329.

(4)　以兩倍方根十位數(卽4)。試除不理個位之餘數。(卽32)。

(5) 上(4)所得之結果。卽方根之個位數。以此數加入前兩倍方根十位數。然後再以此數乘之。得 329.

(6) 上(5)所得之積。由(3)之餘數減去。若積大於餘數。則求一較前少之數。再依(5)爲之。若減去有餘。則原數非正方數。

習題

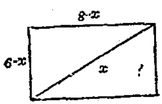
求下列各數之方根。

4096, 1444, 676, 2116, 784, 4761, 20736.

二次方程

408. 二次方程. 幾何學題。常可以列出方程。其未知數最高之方數爲二次方。此等方程。名曰二次方程。

今有長方形。對角線較一邊長 8. 較餘一邊長 9. 求對角線之長。



第二百六十圖

設以 x 代對角線.如二百六十圖。則長方形之兩邊爲 $x-8, x-9$.

故 $x^2=(x-8)^2+(x-9)^2$.

此方程消至簡式。爲 $x^2-34x+145=0$.

解此方程。卽本章所欲授者。

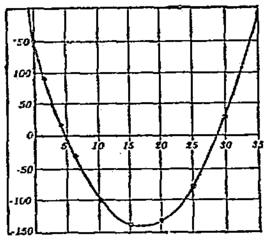
409. 此 $x^2-34x+145$ 之式。常名爲二次函數。又名方函數。又因 $x^2-34x+145=0$. 最大之乘方爲二次。故稱爲二次方程。

410. 圖線解法。 此方程 $x^2-34x+145=0$. 可以圖線解之。

以 y 代函數 $x^2-34x+145$. 求得 x 與 y 相當之數。列成下表。(二百六十一圖)

x	y
0	145
2	81
4	25
6	−23
10	−95
15	−140
20	−135
25	−80
30	25
35	175

第二百六十一圖



第二百六十二圖

據此表作圖線。線式如二百六十二圖。審視圖線。可知此函數有兩點爲0. 卽 $x=5$ 與 $x=29$. 如此。此 $x^2-34x+145=0$ 方程。可以 $x=5$ 及 $x=29$ 而解之。試以此 x 之兩同數。代入方程覆證之。

習　　題

1. 今有石一塊下墜。初一秒落16尺。其所墜之程。等於秒數方乘此數。設以 t 代時。s 代程。卽得 $s=16t^2$.

設　(1)　$t=4$ 秒,　　(2)　$t=11.5$ 秒。　求 s.

設　(1)　$s=64$ 尺,　　(2)　$s=1600$ 尺。　求 t.

作圖線。表示 $16t^2$ 之函數。

2. 今有石向下擲若石自墜之路。爲秒數方乘16尺。石既下擲。應加下擲之速率與秒數之相乘積。其方程爲 $s=vt+16t^2$. (v代下擲應行之速率)

設 $v=3, t=3$, 或7, 或12. 求s.

設 $v=3$。作 $vt+16t^2$ 之圖線。

3. 以圖線解下列各方程。

(1)	$x^2-8x+12=0$	(2)	$x^2-6x+5=0$
(3)	$x^2-5x-6=0$	(4)	$x^2-3x-10=0$
(5)	$x^2-10x+24=0$	(6)	$x^2-10x+25=0$
(7)	$4x^2-12x+5=0$	(8)	$4x^2+8x-5=0$

以劈因數法解二次方程

411. 解 $x^2-8x+12=0$ 之方程。

$$x-8x+12=0$$

劈因數。得 $(x-2)(x-6)=0$。

則此方程。若 $x-2=0$, 或 $x-6=0$. 皆可解消。蓋幾個因數相乘。若一因數爲0. 則積數亦爲0.

從 $x-2=0$. 得 $x=2$.

覆證。$2^2-8\cdot2+12=4-16+12=0$.

從 $x-6=0$. 得 $x=6$.

依上法覆證不誤。

據此。可知2與6. 皆爲此方程之根。

習　　題

以劈因數法解下列各方程。并覆證所得之結果。

1. $x^2-3x+2=0$　　2. $y^2-4y+3=0$

3. $m^2=m+2$　　4. $n^2+5n=6$

5. $a^2+7a+6=0$　　6. $m^2=4m+12$

7. $k^2+k=56$　　8. $r^2+51=20r$

9. $b^2=4b+77$　　10. $c^2+112=23c$

11. $\dfrac{x^2}{15}=\dfrac{x}{5}+\dfrac{2}{3}$　　12. $\dfrac{x^2}{10}-3=\dfrac{13x}{10}$

13. $\dfrac{x^2}{21}-\dfrac{4x}{7}=\dfrac{4}{3}$　　14. $\dfrac{x^2}{6}=\dfrac{x}{2}+9$

15. $\dfrac{4x}{5}=\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{7}{3}$　　16. $\dfrac{x}{2}+\dfrac{15}{7}=\dfrac{x^2}{14}$

17. $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{6x}{13}=7$　　18. $\dfrac{4x}{x-1}+\dfrac{x-10}{x}=4$

19. $\dfrac{5y-1}{9}+\dfrac{3y-1}{5}=\dfrac{10y}{9}-\dfrac{4}{9y}$　　20. $\dfrac{a+7}{9-4a^2}=\dfrac{1-a}{2a+3}+\dfrac{4}{2a-3}$

解下列各題。

21. 三角形之底。較高長 4 寸。面積為 30 方寸。求此形之底與高。

22. 今有長方形。長為闊之兩倍。設此形增長 20 尺。增闊 24 尺。則面積為此積之雙倍。問此形長闊各若干?

23. 今有長方田。其周為 60 丈。面積為 200 方丈。求田之長寬。

24. 平地上一樹。折而下垂。樹頂在地之點。距樹脚50尺。樹下段。爲全樹高之五分二而加20尺。求樹原高若干?

以配方法解二次方程

412. 解二次方程。用劈因數法之外。又有配方法。

習題

解以下各題。

1. 今有長方形。長10碼.又一正方形。其邊與長方形之寬等。而長方形之積。較正方形之積大21方碼。求正方形之面積。

試指出代數式 $x^2-10x+21=0$ 爲此題之方程。

將此方程。寫作

$$x^2-10x=-21$$

加25於方程之兩端。令左端成三項式正方。

$$x^2-10x+25=4$$

即 $$(x-5)^2=4$$

求兩端之方根.須記4有兩方根。爲 $+2$ 與 -2.如

$$x-5=\pm 2. ※$$

用+號。 $x-5=2.$ 得 $x=+7.$

用-號。 $x-5=-2.$ 得 $x=+3.$

※方根公理。凡數皆有兩方根.惟號相反.其數皆指絕對值言。

以此兩同數。代入方程 $x^2-10x+21=0$ 覆證之。

此種解方程之法。名爲配方法。

2.　長方形之一邊爲5寸。餘一邊等於一正方形之邊。長方形面積與正方形面積之和。爲36方寸。求長方形餘一邊之長。

試言 $y^2+5y-36=0$ 爲此題之代數式。

解此方程。可用配方法如下。

$$y^2+5y+\frac{25}{4}=36+\frac{25}{4}=\frac{169}{4}$$

$$y+\frac{5}{2}=\pm\frac{13}{2}$$

$$y=\frac{-5\pm13}{2}=4\text{ 或 }-9.$$

故餘一邊之長爲4寸。

413.　二次方程普通解法。常得兩數。惟此並非謂凡題能成二次方程者皆得兩答。題之本性。常有二次式所得之兩個答數。或一個或兩個全無意義者。若二次方程所得之兩答數。皆不能爲解題之數。則此題之性本不能解。或本來反對。或題目錯誤。若欲確知何得數能與題之性合。須將所得之數代入題目。觀其是否與題性合。其不合者棄去。

用圖線法解二次方程。祇能得 x 之略數。與相當之二次方程略合。若代數解法。則能得二次方程之恰合求數。

習　　題

以配方法解下列各二次方程幷覆證之。

1. $4x^2-12x+5=0$

以 x^2 之係數除方程之兩端得

$$x^2-3x+\frac{5}{4}=0.$$

此可以寫作 $x^2-3x=-\frac{5}{4}$

以 x 係數之半乘方得數加入方程之兩端得

$$x^2-3x+\frac{9}{4}=1.$$

即
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=1.$$

求方程兩端之方根得

$$x-\frac{3}{2}=\pm 1.$$

故
$$x=\frac{3}{2}\pm 1.$$

$$x=\frac{5}{2}\text{ 或 }\frac{1}{2}.$$

以此兩數代入原方程覆證之。

2. $6x^2-17x-14=0$
3. $6x^2+7x-20=0$
4. $9x^2+30x-24=0$
5. $4s^2+45s-36=0$
6. $10s^2-21s-10=0$
7. $12s^2-71s+42=0$
8. $4x^2+8x-5=0$
9. $x^2+2x-3=0$
10. $x^2+4x+3=0$
11. $x^2+4x-5=0$

12. $a^2+8a-20=0$

13. $y^2+14y+45=0$

14. $t^2+14t-51=0$

15. $k^2-85=12k$

16. $z^2=10z+24$

17. $u^2-91=6u$

18. $r^2+3r+2=0$

19. $m^2+5m+6=0$

20. $10x^2+21x-10=0$

21. $h^2+40=13h$

22. $x^2+x=42$

23. $x^2+6x+5=0$

24. $\frac{x^2}{24}-\frac{x}{3}=-\frac{1}{2}$

25. $\frac{5}{z}=\frac{z-1}{z}+\frac{z}{z-1}$

26. $\frac{2t+3}{t+8}-\frac{2t+9}{3t+4}=0$

27. $\frac{k+1}{k+2}-\frac{k+3}{k+4}=\frac{8}{3}$

解以下各題。

28. 今有長方田。長較寬多 4 碼。面積60方碼。求田之長寬。

29. 直三角形之弦長10尺。股較勾長 2 尺。求勾,股,各長若干?

30. 兩正方田面積之和。爲61方丈。此田之邊較彼田之邊多長 1 丈。求兩方田之邊。

31. 今有煤箱能容煤 6 噸。若箱深 6 尺。長如深與寬之和。并設煤每噸佔地40立方尺。求箱之長寬若干?

32. 沿路有電桿若干枝。如欲每哩(5280呎)減少 2 枝。則電桿之距離。須增加24呎。問每哩原有電桿若干?

提　　要

本章所授如下。

414. 有種乘數。常見於代數中者。可用心算求得之。此等數如下：兩項數乘方。三項數乘方。兩數之和與較相乘積。兩因數如 $ax+b$ 與 $cx+d$ 者之積。

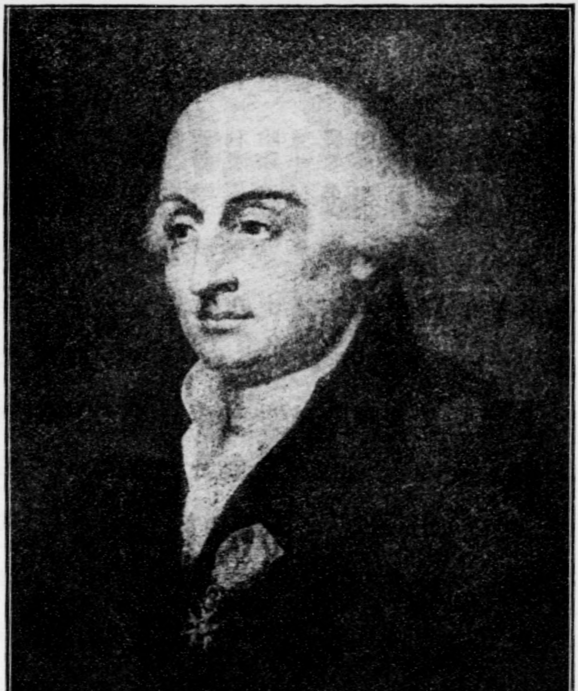
415. 下列各種多項式。可審察直得其因數。二次方三項式。兩方之較。二次三項式如 ax^2+bx+c.

416. 凡數目。皆可依 $a^2+2ab+b^2$ 之公式。求其方數。

417. 派達哥拉氏定理之數種解法。

418. 數目之求方根法。

419. 二次方程。可用圖線,劈因數,配方,等法解之。



Joseph Louis Lagrange

拉果蘭諸肖像

(268 之 後)

拉果蘭諸小傳

十八世紀之大算學家。議者皆推拉果蘭諸。拉生於意大利土連城。時1736年一月二十五日。1813年四月十日。卒於巴黎。拉無所憑籍。以才能自拔。至算學家絕頂。十七歲前。不嗜算。偶讀天算家哈利(郎發見哈利彗星之人)之說。悅之。注全力習算。甫一年以算學名。任炮備學堂講師。時算學中有難題。算家皆束手。拉氏自創新法解釋。哀拉見之。稱揚不置拉氏突進爲算學第一人。年才十九耳。

1758年。設土連學堂。著書凡五卷。極深研幾。迥絕凡流1761年。世界推爲算學第一。1766年。哀拉去柏林。承俄皇后之聘。移講席至聖彼得堡。普魯士國扶列達力大王。致書拉果蘭諸云。"歐洲第一大王。禮聘歐洲第一算學家"。其欽慕如此。拉氏應之。居柏林者二十二年。於算學多創奇理。1787年。大扶列達力崩。法王魯意十六。聘回巴黎。無何革命。覆皇室。全國鼎沸。兵禍相尋者二十年。拉氏研算授徒。皓首不輟。

算史記其人曰。人中材。體靈動。藍睛白面。血色不華。性畏事恐怯。雖有奇功。人冒之。輒遜讓不與較。帝王常與游者三人。大扶列達力。魯意十六。拿波倫。

第十六章

一次方程函一未知數之題

題及方程之解法

420. 算術及代數之題解. 前章各題,已指出解題時以字母代數之益。算術中有多數題可用代數解之。異常顯淺者。此事可以比較算術及代數之解法而得之。

今有人欲往某處,行 9 里後,核算尚須行全路之$\frac{7}{10}$方抵其地。問路長若干?

算術解法

按題,$\frac{10}{10}$爲全路之長。

全路之$\frac{7}{10}$,乃未行之路。

$\frac{10}{10}-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$,乃已行之路。

今 9 里爲已行之路。

故全路之$\frac{3}{10}$等於 9 里。

即 „ „ „ $\frac{1}{10}$ „ „ 3 里。

„ „ „ $\frac{10}{10}$ „ „ 30 里。

故路長30里。

代數解法

設 x 代全路之里數。

於是 $9+\frac{7x}{10}=$全路。

故 $9+\frac{7x}{10}=x$.

解之 $10x=7x+90$.

$3x=90$.

$x=30$.

421. 演題及解題. 代數學所謂演題者。即以各號表示題中之關連。演題與解題能敏捷者。必須由於熟習。凡題內所陳之意義。皆可以方程達之。欲得此方程。可循下列各例。

I. 以字母代未知數後。將此數相關之事實。以號連綴成方程。

習　題

將下題演出後。解之。并覆證之。

1. 何數加 6 得 13?

列題

$n+6=13$.

解此方程。并將得數代入覆證之。

2. 某數之三分二減 12. 等於 4. 求此數。

列題

某數之三分二減 12. 等於 4.

$x\frac{2}{3}-12=4$.

解此方程。并覆證之。

3.　將下列各方程。以口述問題法達之。幷求 x 之同數。

(1)　$x-17=19$　　　(2)　$66=x+18$

(3)　$2.8=2x+1.9$　　　(4)　$2x-3=3x-7$

(5)　$18-x=4x-3$　　　(6)　$8x-16=7x-9$

方程中間。有可以依下法得者。

II　以代字及數目。求得題中兩不同之式。而可列之使相等者。

如此。此兩不同之式。各與一數等。故可以號演成方程。

習　　　題

1.　長方形之長爲寬之 3 倍。其周爲40寸。求此形之長寬。

求周之不同式。而列之使相等。

2.　三角形之三角爲 x, $2x$, 及 $3x$ 度。求三角之度若干？

3.　勾股形之兩銳角爲 $4x$ 及 $5x$ 度。求兩銳角各若干？

422.　未知數之識別法.　凡未知之數。原可任用字母代之。然通常用法。多以 x, y, z 及二十六字母後幅之字母代未知數。若前幅之字如 a, b, c, d, l, m, k, 等。恆用以代已知之數

解下列各方程。求 x. 即用方程中其他之數目及字母等爲 x 之同數。

1.　$2x-28a=x-11a.$

2.　$4x+b=5x-19b.$

423. 解方程. 凡方程解得之數。卽另一方程。其未知之數獨在一端。此方程。乃用89節所述之公理。*

算式變換中之最要者。爲消去括弧。如下題解法所示。

兩倍某童之現在年歲。與該童前10年歲數三倍之較。爲該童現在之年歲。問此童年若干?

列題 $2x-3(x-10)=x.$ (1)

因 $-3(x-10)=-3x+30.$ 故 $2x-3x+30=x.$ (2)

因 $2x-3x=-x.$ 故 $-x+30=x.$ (3)

兩端各加 x. $30=2x.$ (4)

以 2 除之. $15=x.$ (5)

此童之年紀爲15歲。

依題之所述覆證之。指出得 (4) 與 (5) 兩方程之公理。

習題

解下各方程。并覆證所得之結果。

1. $5x+9=3x+17.$

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 5x+9 & = & 3x+17 \\
\text{兩端各減}3x. & 3x & = & 3x \\
\hline
 & 2x+9 & = & 17 \\
\text{兩端各減 }9. & 9 & = & 9 \\
\hline
 & 2x & = & 8
\end{array}
$$

(指出所用之公理)

以 2 除兩端。 $\frac{2x}{2}=\frac{8}{2}$

卽 $x=4.$ (指出所用之公理)

---

*紀元前 813年至833 年之間.亞喇伯算家何化爾芝米著算書.初述解方程之法.書名 *Aldshebr*. 意言方程之項.由此溜遷至彼端也.此字變作 *Algebra* 阿爾熱巴喇.卽今之代數.

覆證：　$5x+9=5\cdot4+9=29$

$3x+17=3\cdot4+17=29$

故 4 爲 $5x+9=3x+17$ 方程之根。

以上解法。可用心算減去全寫之工。如

$$5x+9=3x+17.$$

兩端同減 $3x+9$，得 $2x=8$.

以 2 除之。　　$x=4$　　是也。

2. $5x+17=8x-2$

3. $3x+5=5x-15$

4. $6x-7=10x+1$

5. $5x-17+3x-5=x-1$

6. $6x-7-8x+115=0$

7. $5(x-1)=3(x+1)$

8. $8(3-2x)=2(5-x)=28$

9 $-3x-24=33(2-x)$

10. $5(1-13x)=35-105x$

11. $11-3(x-2)=x-8$

12. $3x-2(x+5)=6x-20$

13. $3(x-2)+15=5x-3$

14. $\frac{3x}{4}+5=x+3$

15. $\frac{x}{4}+2x-8=3x-5$

16. $\frac{3x}{4}-9x=-5-10x$

17. $8+2x+\frac{x}{4}=1\frac{3}{4}+\frac{2x}{3}$

18. $\frac{2x+3}{5}-\frac{x-2}{3}=\frac{7}{5}$

19. $\frac{3x-2}{7}-\frac{1-4x}{3}=8\frac{4}{21}$

20. $\frac{3(5-x)}{4}+\frac{6-x}{5}=2x$

21. $\frac{1}{2}(5y-3)-\frac{1}{3}(5y-2)=5$

22. $\frac{3}{4}(7n+4)+\frac{2}{3}(7n-1)=10n+2$

23. $(y-7)(y-8)=(y-5)(y-9)$

24. $(4m-5)(3m+1)=12m(m+1)$

25. $x(x-1)-x(x-2)=4(x-3)$

此題兩端乘 4.

數目關連之題

424. 下各題。以代數式述數目之關連演之以資熟練，

1. 兩倍n之八分一加25.等於n之半。列式。

2. 倍某數。加本數與4之和之三倍。求以號列之。{此式為 $2x+3(x+4)$}。

3. 列出倍某數後。減去三倍本數與 4 之較。

答 $2x-3(x-4)$.

凡曰某數與某數之較。須知前數必為原數。後數必為減數。如 8 與 4 之較。卽 $8-4$. 4 與 8 之較。卽 $4-8$ 是也。

4. 列出倍某數後。減某數與 2 之較之三倍。

5. 列出 4 倍某數與 3 之較。減去此數與 1 之較之三倍。 答 $4(x-3)-3(x-1)$.

6. 以號明倍某數加 3 倍本數與 4 之較等於13.

7. 3 倍某數與 8 之較之$\frac{1}{4}$為 10. 求此數。答式為 $\frac{3(x-8)}{4}=10$. 解之。

8. 三倍某數。則較此數之$\frac{1}{3}$大56.求此數。

9. 何數以2.5乘之得40.

10. 三倍某數加五倍本數得72.求此數。

11. 若 4 倍某數加 1. 又減 1. 兩得數之比例爲 5. 求此數。

12. 五倍某數。加 3. 其和以本數與 4 之和除之。商數等於 4. 求此數。

13. 余思想中有一數。爾可以由下列各根據數得之。若此數加 3 後。以此數減 5 乘之。所得積。以此數減 7 除之。其結果與此數加 1 無異。

14. 某人今年 40 歲。其子 7 歲。問經若干年後。其父之歲數。大於子之歲數兩倍。

15. 今有父母與子三人之歲數。共得 75. 母之歲數。爲其子歲數之三倍。父之歲數。爲其母歲數之 $1\frac{1}{6}$ 倍。問三人年各若干?

16. 某童之年。若兩倍之。則較此童二年前之歲數多 16. 問童年若干?

17. 若倍某童之年。而與 10 年前童歲之 3 倍相較。則餘數恰爲某童之年。問某童之年歲幾何?

18. 有連續數三個。其和與 3 相較。等於 27. 求三數。(設 $x, x+1, x+2$, 代三數。)

19 兩連續數之方之較爲 19. 求兩數。

式爲 $x^2-(x-1)^2=19$.

20 兩連續數之方之較爲 273. 求兩數。

21. 兩連續數之方之較爲 a. 求兩數。

22. 兩連續雙數之方之較爲28. 求兩數。

(設 $2x, 2x-2$, 代兩數)。

23. 兩連續雙數之方之較爲 100. 求兩數。

24. 兩連續雙數之方之較爲 a. 求兩數。

25. 兩連續單數之方之較爲48. 求兩數。

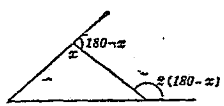
26. 兩連續單數之方之較爲 s. 求兩數。

(以上兩題設 $2x+1$, $2x-1$ 代兩數)

幾　何　題

425. 下列各題,函有幾何之關連。用代數列出其關連之外,須於未得方程之前,作圖表示之。

1. 等腰三角形,底之外角,爲頂之外角之兩倍,求形內三角之大小。



第二百六十三圖

以 x 代頂角,二百六十三圖,頂角之外角爲 $180°-x$. 故底外角爲 $2(180°-x)$. 由此得底內角爲 $180°-2(180°-x)$. 何解? 求三角形第三內角若干?

指出 $x+2[180°-2(180°-x)]=180°$. 并演解之.

2. 今有一角,爲其接補角之 45 倍,求兩角各若干?

3. 勾股形兩銳角之較爲 $18°12'$. 問兩角各若干?

4. 長方形之長,較寬三倍尚多2. 其周爲60. 求此形之長寬。

5. 長方形之周爲20寸。若底減4而高加2.則面積不變。求長方形之長寬。

6. 等腰三角形之周長360寸。底長75寸。求兩腰各長若干?

7. 某中學之課堂。其長爲寬之$\frac{8}{5}$.若長減3尺而闊加3尺。則課堂爲正方形。求堂之長寬。

8. 方形之積與長方形之積相等長方形之底較方形邊長12尺。而高則較方形邊短4尺。求兩形之長寬。

9. 三角形之高較底短5寸。若依底作正方形。則此三角形之面積。較此方形之半積尚少20方寸。求三角形之高與底。

10. 美京華盛頓之金庫。長較寬多222尺。庫之四周。共長1500尺。求長寬。

11. 紐約市偏西溫尼車站之長。較寬兩倍少80尺。又等於周減700尺之$\frac{1}{4}$.求該站之長寬

12. 今有長方鋼片一塊。其周爲240寸。寬82.24寸。求片之寬與面積。若此片厚$\frac{5}{8}$寸。又設鋼片一方尺厚$\frac{1}{8}$寸者重5.1磅。問該片應重若干?

13. 三角形三邊之長。如3:4:5之比例。若形周長108寸。求三邊各長若干?

14. 勾股形之一銳角。較其他銳角大8倍。求兩銳角。

15. 若等腰三角形之一底角爲50°.求餘兩角。

16. 三角形之一角。較別一角之五倍尙多5°.若餘兩角之最小者爲19°.求第三角。設對最大角之邊爲60尺。試以比例尺作此三角形。

17. 兩平行線爲一線所割。割線一旁之兩內角爲$\frac{3}{5}x$及$88°+\frac{1}{5}x$. 求x及兩角。

18. 勾股形之兩銳角爲$\frac{1}{3}x+7°$及$41°-\frac{1}{6}x$.求x及兩角。作此三角形。

19. 兩接補角以$\frac{5}{7}x+29°$及$97°-\frac{2}{7}x$別之。求x及兩角。

20. 三角形內之三角爲69°. $\left(\frac{x}{4}+77\right)°$. $\left(\frac{x}{3}+80\right)°$.求$x$及形內未知之角。

運動題

426. 速率. 距. 時. 若火車每點鐘行30里。卽謂此車之速率每點30里。若人行每分鐘35碼.則可謂此人行路之速率每分鐘35碼。

凡一體所行之程。(卽距)以所行之時及所行速率而定。下題可指出速率,距時,三事之關連。

習題

1. 車之速率.每點鐘40里。若午後一點離站。問兩點,三點.4點,5點.時各距站若干里? 又3點20分.4點30分,6點45分時。各距站若干?

2. 以 d 代所行之距。若速率每點鐘60里。共行5點鐘。d 等於若干?

3. 設 d 代所行之距。t 代時。r 代速率。表示 $d=rt$。以口說達此方程之意。

4. 指出由 $d=rt$ 可得 $r=\frac{d}{t}$ 及 $t=\frac{d}{r}$. 并以口說達此兩方程之意。

427. 速率.距.時之關連. 上節3與4兩題之方程。足解明若 d, r, t. 三數之中。有兩數已知。或以代數號列題。則第三數可藉前兩數而得。

習　題

1. 今有鳥一。於兩點30分鐘內飛行80里。設飛行平均。求其速率。

2. 聲音每秒鐘行1080尺。若電閃後歷3.5秒方聞雷聲。問雷起處之遠若干?

3. 若聲音每秒行 f 尺。於電閃後。歷 s 秒後方聞雷聲。問雷起處之遠若干?

4. 今有一樹距人2376尺為雷所擊。歷時 $2\frac{1}{5}$ 秒。雷聲方達耳端。試求聲音每秒之速率?

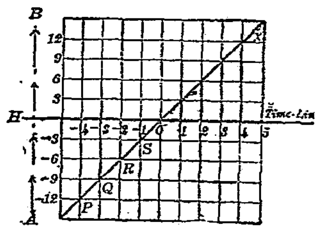
428. 圖線解運動題。 運動題可以圖線解之。

1. 今有人行直路。如二百六十四圖之 AB. 依箭形之方向而行。速率每時3里。H 為其人之家。問

4點鐘前距家幾遠	離家後1點鐘幾遠
3點鐘 " " " " "	" " " 2點鐘 " "
2點鐘 " " " " "	" " " 3點鐘 " "
1點鐘 " " " " "	" " " 4點鐘 " "

其未抵家以前之鐘數。以－號別之。過家後之鐘數。以＋號誌之。以圖格上之0點左右平線爲時線。按正負畫分。如圖。於－4至＋4中間各點作垂線。與距家之遠相當。其小方形之邊卽3里。於是圖上得 $P, Q, R, S, \cdots\cdots X$ 各點。若以線連綴此等點。恰成一直線 PX. 圖中之 *Time line* 者。時線也。下圖同。

時	距
−4	−12
−3	−9
−2	−6
−1	−3
1	3
2	6
3	9
4	12



第二百六十四圖

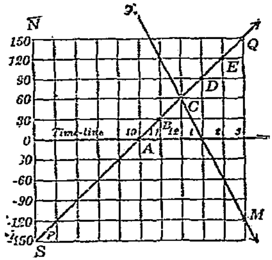
此直線 PX. 乃幾何線足以代表由 A 至 B 此人平均速率之移動。

2. 從上圖指出離家後 $3\frac{1}{2}$ 鐘。其人距家幾遠? 又從圖指出離家後 $4\frac{1}{2}$ 里，及 $3\frac{1}{3}$ 里。其時各應如何?

3　早十點時貨車一連離0站向北行。速率每點30里午後一點鐘時快車一連經0站逆向行駛。速率每點60里。問何時幷何地兩車相遇？

圖　線　解　法

於二百六十五圖之時線上。設小方之邊代一點之時。於每一分點上作垂線。其長等於每點距站之遠。小方之垂線邊代30里。按題得$A, B, C, \cdots\cdots$等點。以PQ直線聯此諸點。PQ線即爲貨車之圖線。



第二百六十五圖

依此法求得LM線爲快車之圖線。PO與LM兩線相交之C點。指出兩車相遇之地距站之遠。及相遇之時爲12點。如此兩車距站60里於十二點時相遇。

代　數　解　法

(1)　設x代10點後至兩車相遇之鐘數。

(2)　於是每車之時t。速率r。距d。如下。

$$\text{貨車}\begin{cases} t=x \\ r=30 \\ d=30x \end{cases}$$

$$\text{快車}\begin{cases} t=3-x & \text{因貨車開後 3 點鐘方過站} \\ r=60 \\ d=60(3-x) \end{cases}$$

(3) 因兩車相遇之處。其距站皆相同。故得方程

$$30x=60(3-x).$$

(4) 解(3)所得之方程。

4 以圖線解下題。

甲由丙點動身。順流下行。每點鐘速率8里。3分鐘後。乙由丙點動身。速率每點10里。問距丙點幾遠乙追及甲? 又何時追及?

習題

以代數法解下各題。

1 慢車一速速率每點30里。慢車行後兩點。快車動程。速率每點50里。問後車追及前車時。距動程處幾遠? 幷須幾點?

(1) 設 x 代前車爲後車追及之鐘數。

(2) 按題中所陳各節。則

	快車		慢車
	$t=x$		$t=x+2$
	$r=50$		$r=30$
故	$d=50x$	故	$d=30(x+2)$

(3) 因兩車所經之路等遠。可得下方程。

$$50x=30(x+2)$$

(4) 解此方程。求 x 之同數。幷求得 d。

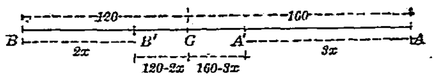
2. 快車一連。速率每點40里。於貨車開行後1點4分動程。於一點36分後追及貨車問貨車每點鐘。能行若干里?

3. A與B兩人所居。相距33里　B欲會A較A早一點鐘動程。若A每點行5里。B每點行$4\frac{1}{2}$里。問兩人何時何地相遇?

4. 甲乙兩市相距288里。今有二人。各從一市同時動身相會二人行路之速率相比。如3∶5.閱3日二人相遇。問每人日行各若干里?

5 甲立於門之東160碼。乙立於門之西120碼二人同時動身向門行。甲每秒行3碼乙每秒行2碼。問何時二人距門之遠相等?

二百六十六圖。可協助求得此題之方程。



第二百六十六圖

6. 芝加高與乾沙士城相距498英里。今有車二連。各從一城同時動程。由芝加高城去者。每點行40英里。由乾沙士者每點50英里。問何時何地二車相遇?

作圖。代表相距。及方程。

7. 早6點鐘時。車一連。離紐約往巴化蘆市及九點。第二車動程。第一車每點30英里。第二車每點50英里。問後車追及前車之時爲何時?并距紐約幾里?

8. 某人搖舟順流行。每點6英里。回時逆流。每點3里。若來回共9點。此人下行。應得若干里?

9. 車兩連。同時由S站開行。往東者速率每點35英里。往西者速率較快$\frac{1}{7}$英里。問兩車相距100英里。須時若干?

10. 甲,乙,丙三市。俱在一直路上。甲至乙20里。今有人由乙往丙。速率每點5里。同時有汽車一輛由甲往丙。速率每點30里。問何時何地車追及人?

11. 早10點時。貨車一連。由A站啓行。速率每點32里。11點鐘時。有快車一連。速率每點72里。經站追貨車而去。問何時何地兩車相遇?

12. 火車一連。速率平均。若此車之速率。每點加快6里。則8點鐘內所行之程。與原速率減慢7里行11點鐘之程恰相等。求此車之原速率如何?

429. 繞圓線之行動. 下列各題。其行動循圓線而速率平均。

習 題

1. 二童繞圓周同方向而走。其一速率每分110碼其二每分98碼。圓周長36碼。設二人同在一點動身。問何時二人再會?

(1) 解明於x分鐘內。二人一走$110x$碼。一走$98x$碼。

(2) 於是 $110x=98x+36$ 可表示走較快之童。須多走一圓周。方能追及較慢之童。

(3) 解(2)所得之方程。

2 設上題二童相背而走。何時二童相遇?

3. 汽車二輛。繞一圓湖之岸而行。其一行一周。須 2 點 45 分。其二須 3 點 30 分。設兩車同向行。動程後。何時再遇?

(1) 設 x 代所須之鐘數。

(2) $\begin{cases} \dfrac{1}{2\frac{3}{4}} \text{ 爲第一汽車一點內所行圓周之分數。} \\ \dfrac{1}{3\frac{1}{2}} \text{ 爲第二車一點鐘內所行圓周之分數。} \end{cases}$

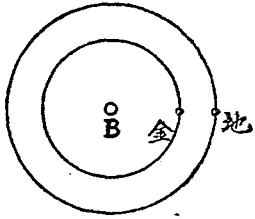
(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{2\frac{3}{4}} \text{ 爲第一車於 } x \text{ 點鐘內所行之圓周數。} \\ \dfrac{x}{3\frac{1}{2}} \text{ 爲第二車於 } x \text{ 點鐘內所行之圓周數。} \end{cases}$

(4) $\begin{cases} \text{因快車較慢車。須多行一圓周。方相遇。} \\ \text{故得 } \dfrac{x}{2\frac{3}{4}} = \dfrac{x}{3\frac{1}{2}} + 1. \end{cases}$

4. 金星繞日一周。須 224.7 日。即約 $7\frac{1}{2}$ 月。設地動程時如二百六十七圖所示。問須多少日。金星方能與地與日。同在一直線內?

金星之速率。每月行一周之 $\frac{2}{15}$。即地一周之 $\frac{1}{12}$。設 x 代所求之月數。

此題之方程。可依上題之法得之。



第二百六十七圖

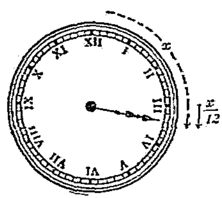
5. 金星繞日一周之時。作爲$7\frac{1}{2}$月。水星繞日一周須3月。問金星水星與日同在一直線內之後。須多少月。三曜方能再同在一直線內?

時 鐘 題

430. 時鐘指針之移動。可以解示一種機械之圓動。

1. 三點與四點之間。何時鐘內之兩指針相合

(1) 設二百六十八圖，x 代三點鐘後兩指針相合所須之分數。卽 x 代指分針由 3 點鐘起追及指點針所經過之分數。



(2) 於是 $\frac{x}{12}$ 爲指點針同時所經過之分數。何解?

(3) 因12點至3點之分數爲15.故第二百六十八圖得 $x=15+\frac{x}{12}$.(全等於其分之和。)

(4) 解此方程。求 x 之同數。

2. 兩點至 3 點之間。何時兩指針相合?

3 3 點至 4 點之間。何時兩指針成直角?

作圖。表示指分針及指點針所經過之分數。

4. 3 點與 4 點之間。何時兩指針相距16分之地位?

5. 7 點與 8 點之間何時兩指針到相反之方向?

6. 十二點鐘時。兩指針相合。問何時此兩針再相合?

7. 兩點半鐘時。兩指針所成之角爲何角?

8. 設時鐘之指分針欲追過指點針15分。須用若干分鐘?

9. 五點與六點之間。何時兩指針相合?

10 八點與九點之間。何時指分針在指點針之前10分?何時兩指針相合?何時在指點針後10分?

習　　題

解下各方程.

1. $4(2x+9)+3(x-9)=\dfrac{13(x-5)}{7}$

2. $2(x-1)+3(x-2)=4(x+3)$

3. $5x-2k=2k+3x$

4. $ax+ad=bd-bx$

5. $a^2x+b=b^2x+a$

6. $(2y-5)(4y-7)=8y^2+52$

7. $(a+x)^2-x^2=b^2$

8. $(n+4)(n+3)-(n+2)(n+1)=42$

9. $\dfrac{3x}{4}+37+\dfrac{2x}{3}+109=180$

10. $\dfrac{2x}{3}+93+\dfrac{x}{2}-180=18$

11. $2\left(\dfrac{x}{5}+\dfrac{x}{6}\right)-180=\dfrac{1}{2}\left(309-\dfrac{x}{3}\right)$

12. $2\left(\dfrac{x}{2}+x\right)-90+\dfrac{1}{6}(x+210)=90$

13. $100-4\left(x+\dfrac{x}{16}\right)=\dfrac{1}{3}(261-5x)-80$

14. $\dfrac{5}{6}\left(12y-\dfrac{6}{5}\right)-80=4+\dfrac{6}{7}\left(14y+\dfrac{7}{6}\right)$

15. $\frac{1}{7}(5n-1)-\frac{1}{3}(4n-2)=8$

16. $\frac{1}{4}(1-s)=\frac{1}{5}(2-s)+\frac{1}{6}(3+s)$

17. $t-15-\frac{1}{6}(9t-2)-\frac{3}{4}t-\frac{1}{3}=0$

18. $5.8x+3.69=3.96+2.8x$

19. $.374x-.53+1.2x+.06=.8+1.32x$

20. $.3(1.5x-.8)=.6(5.1+.2x)$

21. $.05(20x-3.2)=.8(4x+.12)-11.256$

22. $1.4x-1.61-\frac{.21x+.012}{.8}=1.3x$

23. $\frac{1-2x}{.25}-\frac{2x-.5}{12.5}+\frac{2x-\frac{1}{5}}{5}=\frac{6.35-5x}{3}$

24. $\frac{.4x+.39}{7}-\frac{.2x-.66}{.9}=\frac{.08x+.38}{.2}$

百分法及利息題

431. 百分法及利息之題中。有可以用一次方程解之者。

1. 求 \$120 之百分一若干?

所謂百分一。卽 $\frac{1}{100}$. \$120 之百分一。卽 \$120 乘 $\frac{1}{100}$. 所以答數爲 $\frac{\$120}{100}$.

2. \$120 之百分四若干?

因 \$120 之百分一。爲 $\$120\cdot\frac{1}{100}$.

故 \$120 之百分四。爲 $\$120\cdot\frac{4}{100}=\frac{4\cdot\$120}{100}$.

3.　求 \$120 之百分 6, 之百分 $7\frac{1}{2}$, 之百分 r. 各若干?

4.　求 \$25 之百分 8. \$250 之百分 8. \$$b$ 之百分 8. 各若干?

5.　求 \$20 之百分 r. \$80 之百分 r. \$$b$ 之百分 r. 各若干?

6.　設 b 爲本數。r 爲百分幾。(下作利息率) p 爲得數。指出

$$p=b\times\frac{r}{100}。\qquad(1)$$

并解出如按分數乘例。可寫作

$$p=\frac{b\cdot r}{100}.\qquad(2)$$

7.　上題所得之 (2) 式。試以口說述之。

8.　\$175 之利息率爲百分 4. 求兩年之利。5 年之利。$\frac{3}{4}$ 年之利。$2\frac{7}{8}$ 年之利。t 年之利。

9.　求 5 年 \$600 之利息。若利息率爲百分 3. 爲百分 5. 爲百分 8. 爲百分 $6\frac{1}{2}$. 爲百分 r. 各應若干?

10.　求 t 年 \$160 之利息。若利息率爲百分 6. 爲百分 $3\frac{1}{2}$. 爲百分 r. 各得若干?

11.　若利息率爲百分 6. 歷時 3 年。問本銀 \$200. 或 \$360. 或 \$756. 或 \$$p$. 各得若干?

12　求 \$$p$ 歷 t 年。年利百分 5. 應得利若干?

13.　設本 \$$p$. 歷 t 年。利息率百分 r. 求總利 i 等於若干?

14. 下列之式。試解說明白。

$$i=p\times\frac{r}{100}\times t=\frac{p\times r\times t}{100}.$$

432. 上14題所得之結果。乃有本,利息率,時,三款而求利息之公式。

習　　題

1. 今有本 \$225 歷時5年。利息率百分 $2\frac{1}{2}$. 求利息。

設 $p=225$. $r=2.5$. $t=5$. 代入上 14 題之公式。求得之。

2. 銀行存款 \$2,800. 歷 8 年。利息率百分 5. 問入息共若干?

3. 設利息率百分 5. 本銀 \$450 之利若干? 375 斗穀之百分20若干? 1800 人之百分 15 若干?

4. 某雜貨店於某日。賣貨獲銀\$315. 內賺得原價百分12. 問賺銀若干?

解明按題得式　$x+\frac{x\cdot 12}{100}=315.$

5. 某商賣貨。賠去 \$345. 其所賠爲原價之百分9. 問原價若干?

6. 1910 年美國全國學生數。達 17813852 名。1911 年增加之數。爲百分之 1.25. 問是年共若干名?

7. 今有銀 \$1000. 擬分存兩處生息。其一利息率百分6 其一利息率百分 4. 問此款如何分作兩分。使所得之利相同?

8.　今有銀 \$2000. 分兩處生息。其一利息率百分 4. 其二百分 5. 問如何分放，使得利相同？

9　問利息率百分 4 之款。須若干。方能生利與 \$2500 利息率百分 6 者相同？

10.　今有款。利息率百分 $5\frac{1}{2}$，歷時 4 年。所得之利。與 \$3300 利息率百分 3 歷 8 年者相同。問此款若干？

11.　問何法分 \$1400 於兩處生息。使利息率百分 4 所得之利。爲百分 3 者之兩倍？

12.　款 \$22000. 分兩處生息。一處利息率百分 5. 一處百分 6. 問如何分法。使兩處之利相同？

雜　質　題

433. 下列各題之總數。可以兩法列成方程。解所得之方程。

1.　青銅之製法。5 分錫。16 分銅，今有青銅大鐘一口。重 4800 磅。問銅與錫各若干？

第一法，設 x 代錫之磅數。則得方程式 $x+\dfrac{16x}{5}=4800$. 解之求 x. 後求 $\dfrac{16x}{5}$.

第二法。(免分數)。設 $5x$ 代錫磅數，則得 $5x+16x=4800$. 求得 x. 然後求 $5x$ 與 $16x$.

2　火藥內含硫磺 1 分。硝 6 分。木炭 1 分。問 120 磅火藥內。硫磺，硝，木炭各若干？

3. 若火藥內含硝 4 分硫礦 2 分木炭 3 分。問 200 磅火藥內。各質應佔若干?

4 若火藥製法如上 3 題。今燃放一炮用藥50磅。問燒去硝若干?

5 通行用之麪包酵粉內。含果精 4 分粉 1 分蘇打1分。今有酵粉 18 磅。問各質應佔若干

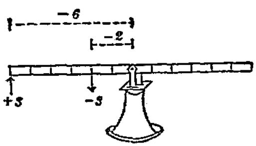
6. 今有混合質一塊重 240 磅。內有銅 3 分。鐵 5 分。炭 4 分。問各質各重若干?

7. 今有時表殼重 2 兩殼之金爲 14 卡力。卽全重24分之14,爲金。問此殼之純金。應重若干?

8. 今有混合之物一塊。內含物質如下。每炭 5 分有鐵 3 分。又每鐵 7 分。有銅 2 分。若物重 124 磅。問炭,鐵.銅三種各重若干

槓 桿 題

434. 槓桿例. 平常用力所發生之題。欲以方程解之。須先明此等力之例方可。



第二百六十九圖

桿一具如二百六十九圖。加力如下。於桿之(-6)處。加以(+3)之力。又於桿之(-2)加以(-3).

加桿之轉勢。其總轉勢爲

$$(+3)(-6)+(-3)(-2)=(-18)+(+6)=-12.$$

此得數。若以算學之話言達之。卽此桿必依負向動。卽時鐘動。

若以(+2)之力加於(−3)處又以(−3)力加於(−2)處如二百七十圖。則總轉勢爲

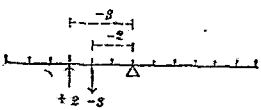
$$(+2)(-3)+(-3)(-2)=(-6)+(+6)=0.$$

此結果卽言橫桿不動。

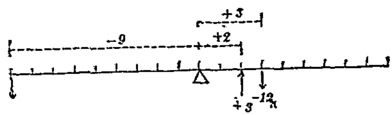
若以(+3)之力加於(+2)處。又以(−4)力加於(−9)處。再以(−12)加於(+3)處如二百七十一圖。其總轉勢爲

$$(+3)(+2)+(-4)(-9)+(-12)(+3)=+6+36-36=+6.$$

此結果。指出橫桿循正向動。卽反時鐘動。



第二百七十圖



第二百七十一圖

以上之試驗法。可知兩力或數力同時加於桿上。其總轉勢卽各分轉勢以代數法加合。若得數爲0.桿定而不動。若得數非0.則桿轉如和數之號所指。

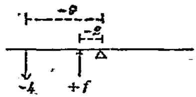
如此下例。足以從桿題求得方程。

桿轉勢之例. 若各轉勢之和等於0.則桿平。

習　題

用上桿轉例。解下各題。

1. 若(-4)之力。加於桿之-9.如二百七十二圖。又加$+f$力於-2.問f之力須若干。方能令桿平?



第二百七十二圖

若桿平而不動。則各轉勢之和。等於0.故列式如下。

$$(f)(-2)+(-4)(-9)=0. \qquad (1)$$

乘之得 $$-2f+36=0. \qquad (2)$$

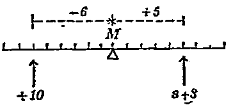
減36得 $$-2f=-36. \qquad (3)$$

以-2除之 $$f=18. \qquad (4)$$

覆證：由方程(1).得

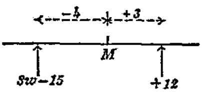
$$(+18)(-2)+(-4)(-9)=(-36)+(+36)=0.$$

2. 桿如二百七十三圖。爲二力所平。其一$+10$在-6處。其二$s+3$在$+5$處。求s及$s+3$各若干?



第二百七十三圖

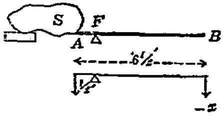
3. 一力爲$3w-15$.如二百七十四圖.加於-4處.與力$+12$加於$+3$處相平。求w及$3w-15$.



第二百七十四圖

4. 二百七十五圖之AB.爲粗棍。長$6\frac{1}{2}$尺。定於F.距$A\frac{1}{2}$尺。大石一塊。在A處下壓。重1800磅。今有人欲起該石。問在B處須用多少力?

(此題棍之重不計。)

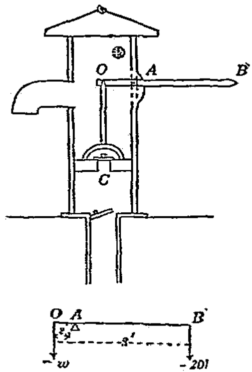


第二百七十五圖

5. 若F定點距A $\frac{1}{2}$尺。(二百七十五圖)問A處須重若干。方能與B處200磅之壓力平?

6. 若棍之情形。一如4題。惟定點F距A 3寸。問B處須用力若干?

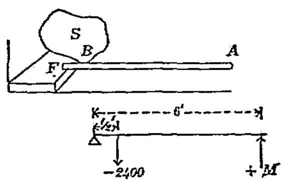
7. 吸水機如二百七十六圖。乃由井吸水之一法。OB柄以A針貫之。使可以提B使高。推活塞C使下。水由C口活罨流上。活塞C.以OC桿連於OB.若$OA=2$寸。$OB=3$尺。在B處用20磅力下壓。問能起之水重若干?



第二百七十六圖

8. 若各種情形一如7題。於B處加力68磅。問0處能起重若干?

9. 石一塊如二百七十七圖s.重2400磅。停於FA桿之B點。B距F定點6寸。FA桿長6尺。問必須在A處用力若干。方能移動該石?



第二百七十七圖

10. 解以下各方程。

(1) $3x+15=x+25$　　(2) $9x-8=25-2x$

(3) $16+3x=6+x$　　(4) $20-4x=8-10x$

(5) $\frac{x-3}{15}+\frac{x+2}{4}=6$　　(6) $x-\frac{-x}{5}-\frac{2}{7}=7\frac{5}{7}$

(7) $\frac{7s+5}{11}-\frac{s+5}{3}=0$　　(8) $\frac{s-1}{s+1}=\frac{s+7}{s+17}$

(9) $x-\frac{6-x}{2}=2-(x-5)$　　(10) $cx-\frac{a^2(x-3)}{c}=\frac{3a^2}{c}-\frac{a-c}{c}$

(11) $s(s-1)-s(s-2)=3$　　(12) $(s+3)=s+3(s+8)$

(13) $-\frac{s-1}{3}-\frac{s-2}{4}=2$

(14) $(s+1)(s+3)=(s+2)(s+5)-13$

(15) $4(s+6)-2(s-3)=38$

(16) $\frac{1}{(s+3)(s+6)}=\frac{1}{(s+2)(s+8)}$

(17) $\frac{s-4}{3}+\frac{s+4}{7}=\frac{s+20}{10}+\frac{s-5}{5}$

(18) $\frac{2s-3}{4}-\frac{s+5}{2}-\frac{s-1}{2}=-1\frac{3}{4}$

(19) $(5y+6)(2y+3)=11y+26+10y^2$

(20) $0=(9y+4)(8y+9)-72y^2+39y-75$

(21) $(120y^2+75y-165)\div 15=2y(4y-3)$

(22) $(78y^2+37y-63)\div(6y+7)=64y-5(11y-15)$

(23) $ay+by+cy=d+e$　　(24) $\frac{y}{a}+\frac{c}{b}=\frac{y}{b}+\frac{c}{a}$

(25) $\frac{y-2a}{3b}=\frac{y-3b}{2a}$　　(26) $\frac{c}{y}+\frac{b}{c}=\frac{b}{y}+\frac{c}{b}$

提　　要

435. 本章曾授各種求方程之法如下。

I. 以字母代未知數按題目所述該數相關之各節。以代數號連綴列之。

II. 依據題目中之數。求兩不同樣之式。然後列之爲方程。

436. 字母中之 x, y, z. 及後幅之字母。恆用以代未知之數。其前段之字母如 a, b, c, k, l, m 等。代已知之數。

437. 解方程之法。卽將未知數獨留於一端。爲此時。須兼用加減乘除各公理行之。

438. 本章曾授特別之法可以協助解演一種題目。如題目有幾何之關係者。須作圖以明之。常有幾何題可以代數列出方程運動題。可以據速率,時,距,三者中之兩件。而以代數法列之其第三件。卽以方程法由兩件推得之。方程之理。爲距等於速率乘時。卽 $d=r\cdot t$.

439. 時鐘題。雜質題百分利息題。槓桿題。皆藉以練習用代數解題之法。

440. 桿例。若桿平。則所有轉勢之和須等於0.

第十七章

函兩個或多個未知數之直線方程

兩線方程之系

441. 問題中。常有兩未知數而得兩直線方程者。此兩方程合成一系。(直線方程。即一次方程。)

今有兩數。3 倍第一數。減去 2 倍第二數。等於 9. 若 3 倍第二數。則較 2 倍第一數大 4. 求兩數。

設 x 與 y 代所求之兩數。從題之上截。得

$$3x-2y=9. \qquad \cdots\cdots(1)$$

從題之下截。得

$$3y=4+2x. \qquad \cdots\cdots(2)$$

解兩方程求 y.

$$y=\frac{3x-9}{2} \qquad \cdots\cdots(1')$$

又

$$y=\frac{2x+4}{3} \qquad \cdots\cdots(2')$$

(1′) 與 (2′) 兩方程。皆以 x 之項明 y. 凡 x 之同數。皆與 y 爲相當數。卽 (1′) 中如 $x=7$. 則 $y=6$ 是也。

442. **一系方程之解法.** x 與 y 之同數。能完滿兩方程者。卽爲兩方程之公解法。凡兩方程有公解法。名爲同理方程。而此二方程。卽爲一系之方程。

欲解 441 節之問題。卽求一系方程(1)與(2) 或 (1′)或(2′) 之解法。

下節即將解法兩種詳演。以示學者。

圖線解一系方程之法

443. 兩未知數方程之圖線。

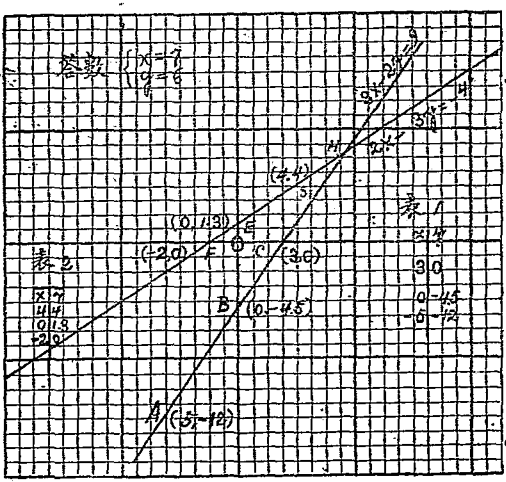
欲得 $y=\frac{3x-9}{2}$ 方程圖線。最敏捷之法。爲

(1)　設 $x=0$.　　則 $y=-\frac{9}{2}=-4.5$.

(2)　設 $y=0$.　　則　　$\frac{3x-9}{2}=0$. $3x=9$. $x=3$.

如此。此方程有兩解法。爲 $x=0$. $y=4.5$. 及 $x=3$. $y=0$.

此兩對得數。足作一圖線。若欲得更準之線。可再求第三數。任設 $x=-5$. 則 y 之相當數爲 -12. 將此方程之三個解法表列。如二百七十八圖之(表1)。



第二百七十八圖

依此得 $y=\frac{2x+4}{3}$ 之三個解法。(見二百七十八圖左之表 2).表中之 $y=1.3+$. 乃 $\frac{4}{3}$ 之略數。

表中每一個解法。即爲圖線之一點。如得數$(-5,-12)$.乃由 0 向左數 5 度。復轉下數 12 度。得點 A. 照此法求得 $B, C, D, E,$ 及 F 諸點。繼作 ABC 及 DEF 兩線。

444. 縱橫線. x 與 y 每一對同數。定 $A,B,C,$ 等點。即爲 $A,B,C,$ 等點之縱橫線。

習　　題

1. 若二百七十八圖之線極準。則 $y=\frac{3x-9}{2}$ 方程之任何解得之數。所定之點。皆在 ABC 線之內。欲證此。可求此方程之別個 x 與 y 之同數不在表內者。而定其點之所在。

2. 二百七十八圖之 ABC 線內。無論何點。皆爲 $3x-2y=9$ 之解得數。試證之。再由 ABC 線內任一點解此方程。

445. 無定方程.※ 上 1 與 2 兩題。解明圖線之點。皆爲方程之解得數。故線之點既無窮。則方程之解得數亦無窮。因此故凡一方程而有兩未知數者。名爲無定方程。言答

※紀元後三四世紀之間亞力山大城哲學士地奥芬德.始研究無定方程.故無定方程.又名地奥芬德方程.

法國哲學家笛卡兒.始發明定平面上一點之法.以距兩垂線之縱橫線而定.此兩線.恆以 x 與 y 代之.笛氏指出方程中有兩未知數者.雖爲無定.然 x 與 y 之同數能解此方程者.皆能定線內之一點.即本方程所代者.

笛卡兒肖像

(300 之後)

笛卡兒小傳

笛卡兒法蘭西之拉希村人。生於1596年三月三十一日。童時體尫羸。八歲肄業於耶穌會學校畢業。1612年。遊巴黎。潛心於算術者二年。是時貴族能藉以顯達者。祇二途。曰軍隊。曰教堂。笛欲以武功顯。隸茂禮斯王軍籍。營於荷蘭之布列打城。軍中無事。專志哲學格致算術諸科。笛體小頭巨。高額隆準。黑髮下垂至眉際。聲微弱。狀冷酷。如好私自利。傳言伊凡學問之不能得益者。皆絕不置思。1649年。承瑞典王后之聘。至士得堪城。僅數月。以肺疾卒。時1650年二月十一日。1637年。笛著書論研究法。附卷談幾何。笛之懷疑哲學派。久爲學者棄去。而笛之名。反藉附卷以傳。卷中以代數求幾何方程。其有功代數如下。

1. 初以二十六字母後幅之字代未知數。前幅字代已知數。

2 創用指數。如今日之通行式。

3. 最先認定方程中各項。可遷至一端。

4 定求方程正負根數之限。此例。後名笛卡兒例。

5. 用無定係數解方程法。

6. 多邊形面角邊相關之理。所謂哀拉定理者。笛先言之。

以上各節及其他著述。於算學補益至多。較偉勢他尤佳。"近世代數之祖"。尤宜以之稱笛。且笛之幾何學。已創分析幾何學之局。論者皆謂笛實分析幾何之創始人云。

數無定也。惟兩方程同屬一系。則答數有定。　如 ABC 線任一點之縱橫線。皆可為 $y=\frac{3x-9}{2}$ 之解得數。又 DEF 線內任一點之縱橫線。為 $y=\frac{2x+4}{3}$ 之解得數。故 ABC 與 DEF 兩線之交點 H. 為兩線之公解數。即 $x=7$. $y=6$. 此兩數為 H 點之縱橫線。亦即兩方程之唯一答數也。

446. **提要.** 下列之法。即以圖線解一系方程之法。

1. 求每方程之兩個解得數。如求三個更佳。

求此最捷之法設 $x=0$. 求得 y 之同數。又設 $y=0$. 求得 x 之同數。後任設 x 等於一數。求得 y 之第三同數。若同數為分數。可取略數至小數一位。

2. 將解得數列表。

3. 以得數作圖線。

4. 求兩線之交點。并交點之縱橫線。

5. 此交點之縱橫線。即此一系方程之解得數。

習　題

以圖線法解下各題.

1. $x+2y=17$, $3x-y=2$

2. $2x-\frac{3y}{2}=3$, $x+2y=7$

3. $7x+3y=-36$, $5x+2y=7$

4. $9x-6y=36$, $13x+5y=11$

5. $2x-3y=4$, $4x+5y=30$

6. $x+2y=11$, $x-\frac{y}{2}=1$

7. $8x+5y=44$
$2x-y=2$

8. $11x+7y=40$
$3x-5y=4$

9. $x-2y=0$
$x=4$

10. $x-2=0$
$y=-3$

447. 準式. 若直線方程有兩個或多個未知數者.所有未知數之項移至方程之一端。餘已知數之項遷至彼端.而相似項已加合。如 $2x-3y=7$ 者。此方程卽名爲準式。

習　　題

將下各方程列爲準式。

1. $7x=8-9y$

2. $\frac{4}{3}w+5=\frac{t}{3}$

3. $\frac{m+3p}{5}-\frac{3m-p}{2}=4$

4. $\frac{x+y-3}{2}-\frac{x-y+4}{3}=0$

448. 圖線解題之不利便處. 以圖線解一系方程其最不利便者.乃難於求恰合之解得數。以下各節.將代數之解法.揭示能得妥合之同數。代數法.又可推廣以解三個或多個未知數之方程。然以實用計.如解格致問題之方程.則圖線解法所得之略數.平常可以合題。

二未知數方程之代數解法

449. 以加減消去法.

(*a*)某童起程往某地.速率平均。行五點鐘後。忽遇損礙。行動速率故慢。再行 3 點。抵一處。距家26 里。(*b*)若此童因損礙回家.則行3點後。距家14里。問遇礙前後之速率各如何?

設 x 與 y 代遇礙前後之速率。

從(a)得　$5x+3y=26$

從(b)得　$5x-3y=14$

$$\begin{aligned} 10x &= 40 &\quad& \text{(加法公理)} \\ x &= 4 && \text{(除法公理)} \\ 6y &= 12 && \text{(減法公理)} \\ y &= 2 && \text{(除法公理)} \end{aligned}$$

以 $x=4, y=2$ 代入原兩方程覆證之。

問以何法由(1)(2)兩式得 $10x=40$ 之方程?以此法從(1)(2)兩式消去何項?因 y 項之係數如何.故能以加法消去?$6y=12$ 之方程.用何法由(1)(2)兩式得之?因 x 項之係數如何.故能以減法消得此式?

此種消法.名爲加減消法.

以此法解下各一系方程。

1. $l+s=24.5$
   $l-s=8.5$

2. $m+4n=4$
   $m-2n=16$

450. 上節所述之法.未知數之係數必相等方可.若係數不等.則有下法可用。

解下之一系方程。

$$5x+3y=26 \qquad (1)$$

$$4x-7y=2 \qquad (2)$$

若以(2)方程 x 之係數乘(1)方程又以(1)方程 x 之係數乘(2)方程。則所得之兩新方程中 x 之係數如何?

用何法由此兩新方程消去 x 項?又何法從(1)(2)兩方程消去 y 項?

玆列出完滿之解法。

$$\begin{array}{llll} 7\times(1) & 35x+21y=182 & 4\times(1) & 20x+12y=104 \\ 3\times(2) & 12x-21y=6 & 5\times(2) & 20x-35y=10 \\ \hline 故 & 47x=188 & & 47y=94 \\ & x=4 & & y=2 \end{array}$$

若 x 之同數既已尋得。可以此同數代入任一方程中。求得 y 之同數。如

$$5x+3y=26$$
$$5\cdot4+3y=26$$
$$3y=6$$
$$y=2$$

覆證之。代入(1).得 $5\cdot4+3\cdot2=26$.

代入(2).得 $4\cdot4-7\cdot2=2$.

451. 提要. 以加減消方程之法如下。

1. <u>令一未知數之係數。在兩方程中皆相同。</u>

爲此。可用合宜之數乘兩方程.

2. 若未知數之係數不同號,則用加法,若同號,則用減法消去一未知數。

習　　題

解以下各一系方程。

1. $4x+3y=13$ $\quad$ $3x+2y=9$

2. $5x+4y=22$ $\quad$ $3x-7y=-15$

3. $3x-5y=51$ $\quad$ $2x+7y=3$

4. $2t-7s=58$ $\quad$ $-9t+4s=69$

5. $13x+10y=59$ $\quad$ $11x-9y=15$

6. $-5s+9p=4$ $\quad$ $7s+6p=-80$

7. $25R+14r=385$ $\quad$ $-15R+9r=30$

8. $21u+66v=111$ $\quad$ $14u-26v=2$

9. $33A-28B=38$ $\quad$ $22A+35B=79$

10. $66m+55n=308$ $\quad$ $77m-15n=201$

11. $12x+15y=66$ $\quad$ $16x-25y=-2$

12. $8h-21y=33$ $\quad$ $6h+35y=177$

13. $7x+5y=17$ $\quad$ $11x-3y=5$

14. $6a-4b=2$ $\quad$ $5a+7b=43$

15. $-11x+9y=16$ $\quad$ $4x+8y=28$

16. $3u-2v=4$ $\quad$ $-7u+13v=-1$

17. $9R-2r=44$ $\quad$ $6R-r=31$

18. $13u-6v=22$ $\quad$ $4u+9v=61$

19. $\frac{2h}{7}+\frac{5k}{2}=33$ $\frac{3h}{4}-\frac{2k}{5}=17$

20. $4x+5y=14$ $3x-2y=-1$

21. $\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}y=9$ $\frac{x}{3}+\frac{1}{2}y=7$

22. $7x-2y=8$ $3x+4y=18$

23. $2m+11k=50$ $11m+2k=41$

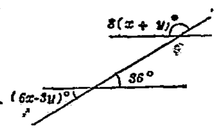
24. $s+6p=4s+5p$ $(s+4)-(5p-s)-s=0$

25. $\frac{4R}{3}-\frac{1}{4}r=5$ $\frac{5R}{2}-\frac{2r}{3}=7$

幾　　何　　題

452. 下列各幾何題。解時能得兩未知數之方程。

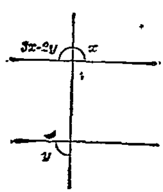
1. 一直線割兩平行線。其角如二百七十九圖所記。求 x 與 y 及八角。



第二百七十九圖

2. 一直線割兩平行線。其角如二百八十圖。求 x 與 y 及八角。

3. 一直線割兩平行線。其同位角爲 $(x+y)°$ 與 $2(x+y)°$. 第二角之接角爲 $120°$. 求 x 與 y 及未知之角。



第二百八十圖

4. 一直線割兩平行線。其兩錯角爲 $(5y-2x)°$ 與 $(9x+y)°$. 第二角之接角爲 $86°$. 求 x, y 與未知之角.

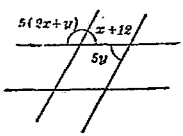
5.　一直線割兩平行線。割線旁之兩內角爲 $(14x-y)^\circ$ 與 $(6x+y)^\circ$. 又此兩角之較爲 14°. 求 x, y 與未知之角。

6.　一直線割兩平行線。割線旁之兩內角爲 $(4x-y)^\circ$ 與 $5(2y+x)^\circ$. 兩內錯角爲 $5(2y+x)^\circ$ 與 125°. 求 x, y 與未知之角。

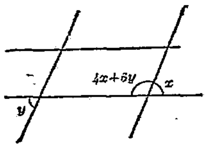
7.　三角形內一角較餘兩角之和少 64°. 較餘兩角之較少 16°. 求三角。

8　兩平行線與兩平行線相交.其角如二百八十一圖及二百八十二圖所示。求 x, y 及各角。

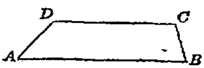
9.　梯形如二百八十三圖 $ABCD$. C 角爲 A 角之三倍。D 角爲 B 角之五倍。求各角。



第二百八十一圖



第二百八十二圖



第二百八十三圖

10.　勾股形兩銳角之較 36°. 求兩角之度若干?

11.　長方形之一邊爲 5. 又一長方形之一邊爲 3. 兩形面積之和爲 65. 其較爲 35. 求兩長方形之邊.

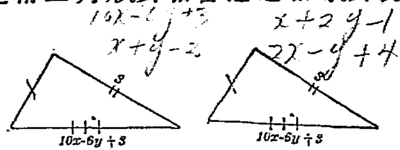
12.　兩長方形。其一之邊爲 5 與 x. 其二之邊爲 3 與 y. 面積之和爲 49. 如長方形之邊爲 3 與 x, 則其面積較長方形邊爲 5 與 y 者多 9. 求 x 與 y.

13.　兩三角形之底相同。其一面積72方寸。其二面積60方寸。若二倍第一形之高而加三倍第二形之高。等於54寸。求兩形之高。

14.　梯形之高為8而面積為56.若底線增長如上下兩底之和。則面積為72.求此形之上下兩底。

15.　梯形之下底為24.面積為150.若以下底線之$\frac{1}{6}$增入上底線。則面積為170.求此形之高及上底線。

16.　二百八十四圖之兩三角形。其相當之邊相等。其長如圖上所記。x與y之同數。兩形皆同。求x與y.



第二百八十四圖

17.　兩圓周長之比例為2.6倍第一圓之半徑。減4倍第二形之半徑。等於14.求兩圓徑及兩圓周。

圓周之長為$2\pi r$.　$\pi=\frac{22}{7}$略數。

18.　兩圓之面積相比。如4：36.第一形半徑之半。加第二形半徑之$\frac{1}{7}$.等於$6\frac{1}{2}$.求兩形之半徑及面積。

圓之面積為πr^2.　故$\frac{\pi x^2}{\pi y^2}=\frac{4}{36}$.求此方程兩端之方根。

運　動　題

453. 專速率及關連速率. 一貨車前行。其速率為每點x里。若車夫行於車面。由後向前。速率每點y里。則

此人較地面行動之速率。名專速率。等於其人在車面步行之速率(即關連速率)加入車行之速率。試以 x 與 y 之項明專速率。

若車夫行於車面之關連速率爲 y. 而車之速率爲 x. 又設車夫行動之方向與車行之方向相反。試求此人之專速率。

習　　　題

1. A 與 B 兩車同向一方向行。相挨而過。其一每點行30里。其二每點40里。問 A 與 B 之關連速率如何? 若兩車逆向行。其關連速率又如何?

2. 兩車同一方向行。其關連速率爲每點10里。若逆方向行。其關連速率爲每點70里。求每車之速率。

3. 一船順流搖下。20分鐘行4里。若逆流而歸。須35分。求此船行於靜水時速率若干?又水流之速率若干?

4. 輪船一艘。順流而下。每半點行 $7\frac{1}{2}$ 里。逆流而上。每半點行 $4\frac{1}{2}$ 里。問此船行於靜水速率如何。又水流之速率如何。

5. A 與 B 同走450碼第一次 B 在 A 前60碼動身。而 A 先到18秒。第二次 B 先30秒鐘動身。勝 A 10碼。求 A 與 B 二人之速率。

雜　　　題

454. 有數目關連之問題。 以下各題。可練習用數目關連列成方程之法。

1 兩數之較等於17.其和等於167.求兩數。

2. 13乘第一數。減去3倍第二數。得41. 若11乘第一數。與8乘第二數之和。爲18. 此兩數各若干?

3 3噸硬煤與兩噸烟煤之價。共$32. 若價錢不變。則兩噸硬煤及6噸烟煤值$43.50.問兩種煤每噸値若干?

455. 數位題。

1. 某數之十位爲4.個位爲3. 以號指出此數之十位數。又指出此數之個位數。

2 某數之十位數爲t.個位數爲u 指出此數之個位數?

3. 某數以$10t+u$明之。若兩位之數倒轉(卽t爲個位數。而u爲十位數。)此數如何寫法?

4. 若某數之十位與個位。爲x與4.爲x與y.爲y與x.可按數以號列之。

5. 若三位數之位爲a, b.與c.爲c, a,與b.爲x, z.與y.爲y, z,與x.試以號列出各數。

6. 某數之個位數較十位數少3. 若將此等位數倒寫。所成之數。較前數少27 求以號列出數式。

7. 某數有兩位。此兩位之數之和而四倍之。則等於本數。若兩位數倒寫。所成之數。較原數大27.問此數若干?

8. 今有數祇兩位。又一數。恰爲前兩位倒置之數。此兩數之較爲18. 兩位之和恰爲8. 問此兩數各若干?

9. 今有兩位數等於 7 倍兩位之和而減 9. 若兩位倒轉所成之數較原數少 18. 求原數若干?

456. 利息題.

1. 某人存款一處得利百分八惟別處存款失利百分 3. 若存款總數為 \$22000. 實獲利銀 \$140 問每處存款若干?

2. 兩處存款一得利百分 $3\frac{1}{3}$. 一得利百分 $5\frac{1}{2}$. 一年共得 \$150. 若第一宗款得利百分 $8\frac{3}{4}$. 第二宗得利百分 $3\frac{1}{2}$. 則每年之入息可得 \$175. 問兩處存款各若干?

3. 某人兩處存款一利息率百分 4. 一利息率百分 5. 年得利息 \$158. 再將此兩款另存一利息率百分 5. 一百分 6. 所得利較前多 \$36. 求兩款各若干?

4. 有銀 \$2500. 分兩處生利一處利息率百分 3.5. 一處百分 4. 第二處所得之利較第一處少 \$.5. 問兩處存款各若干?

5. 銀 \$4500. 分兩處生利一利息率百分 3.5. 一利息率百分 4.5 第一處存 5 年所得之利較第二處存兩年所得尚少 \$15. 求兩處存款

分 數 方 程

457. 解下列各題。

1. $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=\frac{7}{6}$　　$\frac{x+y}{3}+\frac{x-y}{4}=\frac{5}{4}$

2. $\frac{6-4R}{3}=\frac{3H-8}{2}$　　$3R-4=\frac{8H-2}{5}-1$

3. $(2u+3):5=(3v+5):7$　　$7u:4v=77:40$

4. $3x-\frac{2x-y}{4}=5+\frac{x+7}{5}$　　$5x-8+\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}-\frac{7-5y}{2}$

5. $c-27=\frac{17-2c}{3}-\frac{5d-8}{2}$　　$16-2d=\frac{2c-d}{4}-\frac{55+c}{5}$

6. $\frac{r-2}{r-3}=\frac{v+4}{v+5}$　　$\frac{r+1}{r+2}=\frac{v+3}{v-4}$

7. $\frac{2m}{5}-\frac{5n}{6}=-\frac{1}{2}$　　$\frac{m}{6}+\frac{5n}{9}=\frac{5}{2}$

8. $\frac{2.2g+.8}{1.5}=\frac{.5h-.4}{.3}$　　$\frac{.5g-.3}{.2}=\frac{1.5h-.5}{2.5}$

9. $\frac{1u}{7}-\frac{2}{3}(w+1)=\frac{1}{3}(u-1)-9$　　$\frac{1}{6}(w+1)-u=\frac{1}{2}(w-1)-10$

10. $3b-5-\frac{2a-b}{4}=\frac{a+7}{5}$　　$\frac{2a}{3}-\frac{1}{2}+5a-8=\frac{7-5b}{2}$

11. $a+\frac{1}{2}(3a-b-1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}(b-1)$　　$\frac{1}{10}(7b+24)=\frac{1}{5}(4a+3b)$

12. $\frac{6-H}{2}-\frac{R+5}{5}=-12$　　$\frac{1}{3}(12+H)-\frac{1}{9}(R-4)=4$

13. $-\frac{20-2k}{3}+\frac{5k}{6}=\frac{H}{6}+\frac{4k-19}{3}$　　$5-\frac{2k+21}{3}=-\frac{H+5k}{6}$

三個或多個之方程系

458. 解以下各題.

今有數三個。3倍第一數。5倍第二數。3倍第三數之和。等於22. 5倍第一數。3倍第二數之和。減4倍第三數。等於-1. 4倍第一數。兩倍第二數之和。減5倍第三數。餘數爲-7. 求三數。

設x, y, 與z代三數按題目各節。可得三方程爲

$$3x+5y+3z=22 \qquad (1)$$

$$5x+3y-4z=-1 \qquad (2)$$

$$4x+2y-5z=-7 \qquad (3)$$

從(1)與(2)消去x. 又從(1)與(3)或(2)與(3)消去x. 則所得之兩新方程。有何兩未知數?

從(1)與(2)消去z;

$$\begin{array}{lrcr l} 4\times(1) & 12x+20y+12z & = & 88 & (4) \\ 3\times(2) & 15x+9y-12z & = & -3 & (5) \\ \hline \text{加得} & 27x+29y & = & 85 & (6) \end{array}$$

次從(1)與(3)消去z.

$$\begin{array}{lrcr l} 5\times(1) & 15x+25y+15z & = & 110 & (7) \\ 3\times(3) & 12x+6y-15z & = & -21 & (8) \\ \hline & 27x+31y & = & 89 & (9) \end{array}$$

解(6)與(9). 得$x=1$, $y=2$.

代入(2)得$5\cdot1+3\cdot2-4z=-1$

$$z=3.$$

如此,此方程系之解法。得 $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$

若將 x, y. 與 z 之同數代入 (1), (2), 與 (3). 可覆證之。

覆證 (1) $3\cdot1+5\cdot2+3\cdot3=22$. 即 $22=22$.

覆證 (2) $5\cdot1+3\cdot2-4\cdot3=-1$. 即 $-1=-1$.

覆證 (3) $4\cdot1+2\cdot2-5\cdot3=-7$. 即 $-7=-7$.

以上解方程系之法。可分三級。

1. 由三方程中。取兩不同對方程。同消去一未知數。

上題之未知數。乃用加減兩法消去。

2. 如此得兩未知數之兩方程。再依解兩方程之法。解所得之兩新方程。

3. 以求得之兩未知數之同數代入任一方程之有第三未知數者。解此最後之方程。

習　　題

1. 三角形內兩角之和。大於第三角 26°. 若 5 倍前兩角之較。則比第三角多 8°. 求每角之度。

2. 兩數之和。較第三數之 3 倍多 2. 兩數之較等於第三數。若兩倍第三數加第二數。則較第一數多 4. 求三數。

3. 三角形之角為 A, B, 與 C. $\frac{1}{4}A+\frac{B}{8}=C$. 又 $\frac{1}{2}A+\frac{1}{10}B=\frac{1}{2}C+30$. 求 A, B, C 三數。

4. 解以下各一系方程。

(1) $3x+y-2z=-1$ $-4x+2y+3z=9$ $5x+3y-2z=5$

(2) $2u+2v+w=9$ $u+3v+2w=13$ $3u-3v+4w=9$

(3) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=\frac{23}{12}$ $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}z=\frac{7}{3}$ $\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=\frac{9}{4}$

(4) $a+3b+5c=21$ $3a-2b-4c=22$ $4a-3b-6c=28$

(5) $2p+2s+3v=4$ $3p+4s+6v=7$ $p+2s+6v=4$

(6) $4x-4y+8z=3$ $x+y+z=0$ $x-y-4z=2$

(7) $3x+4y+6z=2x+6y+5z=4x+2y+9z=68$

(8) $\frac{A}{2}+\frac{B}{4}-\frac{C}{5}=1$ $\frac{A}{3}-\frac{B}{2}+\frac{C}{3}=12$ $\frac{A}{4}-\frac{B}{4}-\frac{C}{2}=-13$

(9) $2x+3y+z=\frac{3}{4}$ $5x-2y+z=\frac{17}{20}$ $3x+y+2z=\frac{4}{5}$

(10) $7x+5y-2z=\frac{53}{6}$ $5x-2y+3z=5$ $2x+9y-5z=\frac{29}{6}$

(11) $x+y+z=3$ $x-y+z=6$ $-y+3z+x=12$

(12) $4u-v=50$ $5v-2w=40$ $6w-u=15$

(13) $5x+3y=45$ $7y-2z=27$ $3z-4x=-12$

(14) $3v-2u=\frac{2}{5}$ $7u-4w=\frac{1}{2}$ $10w-2v=\frac{1}{10}$

(15) $H+K=2$ $K+R=4$ $R+H=6$

(16) $x+y+z=1$ $2x+3y+4z=-3$ $3x-4y-5z=14$

(17) $x+2y+3z=14$ $2x+y+z=7$ $.3x+.2y+.2z=1.3$

(18) $x+1=2(y+1)$ $y+2=z+1$ $\frac{4}{5}(z+3)=x+1$

(19) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=3 \quad 1-\frac{y}{2}=4 \quad 3z-2x=10 \quad s-\frac{t}{2}=6 \quad t+z=14$

(20) $x+y+z+u=10 \qquad x-y+z+u=6 \qquad x+y-z+u=4$

$x+y+z-u=2$

459. 解下列各題。

1. 某數有三位,此三位之和爲 16. 若三位倒列成新數。較原數少 396. 若中位移至第一。則新數較原數少 90. 求此數。

2. 某數有三位。三位之數之和得 15.第二位數。等於第一位之倍減第三位。若三位之數倒列。則此新數。較原數少 198. 問原數若干?

3. 款一宗 $18000. 分放如下。第一處利息率百分 3.5. 第二處百分 5. 第三處百分 4. 得利共 $750. 若第一處利息率百分 4. 第二處百分 3. 第三處百分 6. 則年利共得 $840. 問每處放銀若干?

4. 某人如下法存款三宗第一處利息率百分 5.第二處百分 4. 共得銀 $490. 又第二處百分 5. 第三處百分 3. 共得銀 $540. 存款三宗共銀 $19000. 問每宗若干?

提　　要

460. 本章所授各節如下。兩個或多個未知數之方程系。方程系之解法。以加減消法。一點之縱橫線。無定方程。兩個或多個未知數之方程之準式。專速率。關連速率。

461. 含兩個或多個未知數之方程系。可用加減兩法消而解之。方程系函兩未知數者。可以圖線解之。

462. 問題中可特別演成方程函數個未知數者。為幾何題。運動題。數位題。及利息題。

463. 欲以圖線解方程。每方程先求兩個或三個解數。作圖線。求兩線之交點復求此點之縱橫線。

464. 以相消法解方程。宜令一未知數之係數相同。然後兩方程或加或減。未知數之一可以消去。

465. 方程系如有三未知數。可從三方程中求兩耦方程。皆消去同一未知數者。如此得兩方程函兩未知數。再解此兩方程。求得兩未知數之同數。以此兩同數代入任一原方程中。求得餘一未知數。若一系中未知數多於三個者。依法求之。

第十八章

公　　式

公式可作通例

466. **公式.** 凡算學中解說之意。常可以代數號列之。使意義明白而簡淺。如云"長方形之面積等於長寬相乘"。若以A代積。l代長。h代寬。得簡式爲$A=lh$. 云距等於速率乘時。可寫成方程$d=rt$. 餘可類推。此種字與號之式。不特較口述之式更易明白。且應用時。可以數代回式中之字而易得答數。卽如長方形之長爲2寸寬3寸。若設$l=2, h=3$. 代入$A=lh$式中。則面積立卽求得,

凡用字母及號替代數目及話言。列出普通式或例者。名爲公式。公式卽代數方程。若各字母除一個外。皆知其同數。則此未知數之同數。可以解方程而得之。如球之體積。可列成公式爲$v=\frac{4}{3}\pi r^3$. v代球積。$\pi=\frac{22}{7}$略數。r爲球半徑。若$14\frac{1}{7}=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}r^3$. 亦卽$\frac{99}{7}=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}r^3$. 以11除兩端。得$\frac{9}{7}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{7}r^3$. 由此求得$r=1\frac{1}{2}$寸.

467. **運動題之公式.** 此等公式。用以解運動題。

習　　題

1. 某快車之速率。為每點45里。貨車起程後 $1\frac{1}{2}$ 鐘始開行。於 $2\frac{3}{4}$ 點鐘內追及。求貨車每點鐘內之速率。

平均動之公式。為 $d=rt$. d 代行程。r 代速率。t 代時。

設 r 代貨車之速率。

於是 $4\frac{1}{4}=$ 貨車行動之時。

故 $4\frac{1}{4}r=$ 貨車所行之程。

$45=$ 快車之速率。

$2\frac{3}{4}=$ 快車所行之時。

故 $2\frac{3}{4}\cdot 45=123\frac{3}{4}=$ 快車所行之程。

因此 $4\frac{1}{4}r=123\frac{3}{4}$.

$r=29\frac{2}{17}$.

2. 某快車之速率。每點 R 里。貨車開後 h 點始開行。於 t 點內追及。求貨車每點之速率。

設 $r=$ 貨車之速率。

於是 $h+t=$ 貨車行程之時。

$(h+t)r=$ 貨車所行之程。

$R=$ 快車速率。

$t=$ 快車行之時。

$Rt=$ 快車所行之程。

故 $(h+t)r=Rt$。

$$r=\frac{Rt}{(h+t)}.$$

3. 用 $r=\dfrac{Rt}{h+t}$ 方程作公式解上 1 題。

設 $R=45$. $t=2\frac{3}{4}$. $h=1\frac{1}{2}$.

4. 某快車之速率每點 40 里。貨車行後一點 4 分起程。於一點 36 分鐘內追及。問貨車每點鐘能行幾里?

用 2 題之公式解之。

5. 以 R,t,r 之項求 h。

消去 $r=\dfrac{Rt}{h+t}$ 方程之分數。得 $hr+tr=Rt$. 故 $hr=Rt-tr$.

而 $h=\dfrac{Rt-tr}{r}$.

468. 工程題之公式。 工程題。乃習題之最易得公式者。

習　　題

1. 甲於 5 天內能成一工程。若乙爲之。須 7 天。問二人合作。須若干天成之?

設 n 代二人同作之天數。

則 $\dfrac{1}{n}=$ 二人同作一天之工。

$\dfrac{1}{5}=$ 甲一天所成之工。

$\dfrac{1}{7}=$ 乙一天所成之工。

故 $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=\frac{1}{n}$.

以 $35n$ 乘之得 $7n+5n=35$.

$$12n=35.$$

$$n=2\frac{11}{12}.$$

如此。若天數非 5 非 7 者。可以類推。代 5 與 7 而用之

2. 甲於 a 天內能成一工程。若乙爲之。須 b 天。問二人合作。須若干天?

設 $n=$ 二人合作之天數。

則 $\frac{1}{n}=$ 二人合作一天內所成之工。

$\frac{1}{a}=$ 甲一天所成之工。

$\frac{1}{b}=$ 乙一天所成之工。

故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{n}$.

以 abn 乘之。得 $bn+an=ab$

$$(b+a)n=ab$$

$$n=\frac{ab}{a+b}.$$

凡題目與第 1 題相類者。皆可以 $n=\frac{ab}{a+b}$ 爲公式而解之。 即如欲解 1 題。設 $a=5$. $b=7$. 則得 $n=\frac{5\cdot 7}{5+7}=\frac{35}{12}=2\frac{11}{12}$.

3. 甲於10天內能建一牆。 若乙築之。須14天。 若二人合作。須若干天?

用 2 題之公式解之。

4. A 與 B 二人同築一籬。7 天可完工。若 B 獨作須 12 天。問 A 獨作須若干天?

用公式解之。

5. 解 $n=\dfrac{ab}{a+b}$ 方程。求 a 或 b。

消去分數。得 $na+nb=ab$.

$$na-ab=-nb.$$

$$a(n-b)=-nb.$$

$$a=-\frac{nb}{n-b}.$$

習　　　題

1. 下列各算術例。試用字母與號列之。

(1) 積等於法商兩數相乘。

(2) 實數為法商兩數相乘加餘數。

(3) 分數與整數之相乘積。等於整數乘分子而以分母除之。

(4) 兩同母分數之和。等於兩分子之和而以公分母除之。

(5) 以整數除分數。等於以整數乘分母之積除分子。

(6) 分數除分數。等於倒轉法數之分數。而與實數之分數相乘。

(7) 分數之方根。等於分母之方根除分子之方根。

(8)　分數之方。等於分母之方除分子之方。

2.　將下列各公式。以口說述之。如算術之例。

(1)　$p=\frac{b\times r}{100}$.(百分法例)

(2)　$i=\frac{prt}{100}$.(利息例)

(3)　$\frac{n_1}{d_1}+\frac{n_2}{d_2}=\frac{n_1d_2+n_2d_1}{d_1d_2}$.(分數加例)

(4)　$\frac{n_1}{d_1}-\frac{n_2}{d_2}=\frac{n_1d_2-n_2d_1}{d_1d_2}$.(分數減例)

(5)　$\frac{n_1}{d_1}\times\frac{n_2}{d_2}=\frac{n_1n_2}{d_1d_2}$.(分數乘例)

(6)　$\frac{n_1}{d_1}\div\frac{n_2}{d_2}=\frac{n_1}{d_1}\times\frac{d_2}{n_2}$.(分數除例)

3.　以下列各題列式。

(1)　某體所經之程。等於速率乘時。

以 d 代程。r 代速率。t 代時列之。

(2)　工程之率。等於以作工之時。除所成之工。

以 P 代工程率。w 代所成之工。t 代時。

(3)　鐘擺搖動之時 t。等於 π 乘擺長 l 之方根。所得積。以地心吸力 g 除之。

(4)　速率。等於以所歷之時除所過之距。

(5)　體積之動勢。等於體行之速率乘體積。

(6)　一體向上拋擲至極高處。所經之時。等於拋擲時之速率。以地心吸力除之。又物體極高之處。等於二倍地心吸力除擲時速率之方。

4. 將下列各公式。以通常話言述之。

(1) 若一體下墜至 t 秒之速率。以 r_t 代之。又地心吸力 g 爲增速率。則 $r_t=gt$.

(2) 某種流質之密率爲 d. 其流動之速率爲 v. 因流動。故壓力 p 遂減少。其式爲 $p=\frac{1}{2}dv^2$.

(3) 一體下墜。歷時 t 秒。設所經之路爲 s. 則 $s=\frac{1}{2}tg^2$. 是時速率之式。爲 $v=\sqrt{2gs}$.

(4) 某體之積。以 V 代之。洗入一種流質內。流質之密率爲 D. 則流質托此體之力 $F=Dgv$. g 爲地心吸力。(亞奇米德例)

(5) 凡氣質若熱度不改。則壓力 p 改至壓力 p' 時。體積 v 改至 v'. 得式 $pv=p'v'$. (此乃貝爾氏例)

求公式之同數

469. 求下列各公式內字母之同數。

1. 物體行動之程。等於時乘速率。即 $D=rt$.

若 (1) $r=$ 每秒 30 尺。$t=5$ 秒。求 D.

又 (2) $r=$ 每點 50 里。$t=17$ 點。求 D.

2. 長方形之面積。等於長寬相乘。即 $A=ab$.

若 (1) $a=24$ 尺。$b=13$ 尺。　求 A.

$a=3.5$ 寸。$b=10.2$ 寸。　求 A.

3. 三角形之面積。等於底乘高之半。式爲 $A=\frac{1}{2}ab$.

設 (1) $b=12$ 尺。$a=16$ 尺。　求 A.

(2) $b=8.2$ 竿。$a=7.78$ 竿。　求 A.

4. 平行四邊形之面積。等於底乘高。式爲 $A=ba$.

設 (1) $b=28$, $a=9$.　求 A.

(2) $b=16.3$, $a=14.6$.　求 A.

5. 二重。w_1 與 w_1. 分置於桿之兩端。二重與定點之距 d_1 與 d_2. 恰與二重成反比例。桿遂平。式爲 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{w_2}{w_1}$.

設 (1) $d_2=18$ 尺。$w_2=60$ 磅。$w_1=50$ 磅。求 d_1.

(2) $d_2=27$ 寸。$w_2=36$ 磅。$w_1=24$ 磅。求 d_1.

又 (1) $d_1=40$ 寸。$w_2=16$ 磅。$w_1=18$ 磅。求 d_2.

(2) $d_1=25$ 寸。$w_2=3.8$ 磅。$w_1=2.85$ 磅。求 d_2.

6. 任何物體之重 w. 等於體積 v 乘密率 d. 式爲 $w=vd$.

設 $v=64$ 立方寸。　$d=16.2$ 磅。　求 w.

$w=648$ 磅。　$d=12.2$ 磅。　求 v.

$w=800$ 磅。　$v=160$.　求 d.

7. 以一力 p 牽一重 w. 上斜面。斜面長 l 尺高 h 尺。則得式如下。$w=\frac{l}{h}p$.

設 $w=120$ 磅。$l=20$ 尺。$p=60$ 磅。求 h.

8. 物體下墜之路。等於16尺乘秒數之方。式爲 $s=16t^2$.（s 代下墜之路。）

設 $t=4$ 秒。又 11.5 秒。求 s.

$s=64$ 尺。又 1600 尺。求 t.

9. 一石下擲所行之路。等於16尺乘秒數之方,加下擲之速率與秒數之相乘積。式爲 $s=16t^2+vt$.

設 $t=12$ 秒。 $v=$ 每秒3尺。 求 s.

$t=8$ 秒。 $v=$ 每秒7尺。 求 s.

$t=5$ 秒。 $s=500$ 尺。 求 v.

10. 鐘擺每擺一次之時 t. 等於 $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ l 代鐘擺之長。

設 g 之略數爲32. π 等於 $\frac{22}{7}$.

若 $l=8$ 尺。又 $l=\frac{392}{121}$ 尺。 求 t.

$t=1$ 秒。又 $t=4$ 秒。 求 l.

11. 圓周之長,略等於 $\frac{22}{7}$ 乘圓徑。式爲 $C=\pi d$. (C 代圓周。d 代圓徑。)

設 $d=21$ 尺。 或7尺。 或 $\frac{1}{2}$ 尺。 求 C.

$C=88$ 尺。 或66尺。 或16尺。 求 d.

12. 球之體積。等於 $\frac{4}{3}\pi$ 乘半徑之立方。式爲 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$.

設 $r=\frac{7}{2}$ 尺。 或11尺。 或2尺。 求 V.

13. 圓之面積。等於 π 乘半徑之方。式爲 $A=\pi r^2$.

設 $r=3$ 尺。或 7 尺。或 21 尺。求 A.

$A=154$ 方尺。或 220 方尺。求 r.

14. 兩轆轤之圓徑爲 D 與 d. 各等於22與24. 兩轆轤之中點相距爲 a. 今以皮帶連之。設 a 爲九尺。帶長之式爲

$l=\pi\frac{D+d}{2}+2a$. 求 l.

15. 長立方體之長寬高爲 a, b, c. 與斜對線 d 之關係。爲 $d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. 設 $a=5$. $b=4$. $c=3$. 求 d.

16. 圓平環帶一。外內兩圓之半徑爲 R 與 r. 其面積 $A=\pi(R^2-r^2)$. 設 $R=12$. $r=10$. 求 A.

17. 設 a, b, 與 c. 代三角形之三邊。s 代三角形周之半。則面積等於 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. 設三邊爲 10, 6, 與 8. 又爲 10, 17, 與 21. 又爲 3, 4, 與 5. 又爲 5, 12, 與 13. 求各面積.

18. 物下墜之例 $h=\frac{v^2}{2g}$. 設 $v=11$. $g=32.2$. 又設 $v=2$. $g=32.2$. 求 h.

19. $\frac{Wl}{4}=\frac{sbh^2}{6}$. 設 $W=6748$. $l=5.5$. $s=3500$.

$b=6$. 求 h.

又設 $W=4954$. $l=3$. $s=2500$.

$b=5.5$. 求 h.

20. $X=\frac{Er}{Ir-E}$. 設 $E=0.056$. $r=2$. $I=1.4$. 求 X.

21. $R=\frac{rr'}{r+r'}$. 設 $r=11.5$. $r'=6.5$

又設 $r=13$. $r'=15$. 求 R.

22. $E=\frac{MV^2}{2}$. 設 $M=12$. $V=5$.

$M=11$. $V=9$ 求 E.

設 $E=8$. $V=4$

$E=50$. $V=5$. 求 M.

23. $\frac{F}{P}=\frac{h}{2\pi r}$. 設 $F=25$, $r=18$, $h=\frac{3}{4}$. 求 P.

24. $h=\frac{s^2}{4(2r-h)}$. 設 $s=425$, $h=8$. 求 r.

25. $\frac{P}{W}=\frac{dr}{2\pi lR}$ 設 $R=20$, $l=10$, $r=9$, $P=75$,

$d=\frac{1}{2}$. 求 W.

求公式中任一代字之同數

470. 公式中任求一代字而以餘代字爲項。

解下各方程。

1. 梯形之面積公式。爲 $A=\frac{b+b'}{2}h$. 從此式求 h, 求 b, 求 b'。

2. 利息公式爲 $i=\frac{prt}{100}$. 求 p, 求 r, 求 t. 求 pr, 求 rt, 各如何?

3. 方錐體積公式。爲 $V=\frac{1}{3}bh$. 求 h.

4. 百度表以法倫海表爲項之公式。乃 $C=\frac{5}{9}(F-32)$. C 代百度表之熱度。F 代法倫海表之熱度。求 F.

5. 桿例公式爲 $pd=PD$. 求 p, 求 D, 求 d, 求 P.

6. $C=\frac{E}{R+r}$. 求 E, 求 R, 求 r.

7. $\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}$. 求 f_1, 求 f_2 求 F.

8. $pv=p_0v_0\left(1+\frac{t}{273}\right)$. 求 p_0v_0, 求 t. (按此式爲氣體漲大例。)

9. $R=\frac{l^2}{6d}+\frac{d}{2}$. 求 l.

10. $C=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$. 求 C_1, 求 C_2.

11. $\frac{1}{8}Wl=\frac{Is}{c}$. 求 W, 求 s, 求 $\frac{1}{c}$.

12. $ax-bx=6a-6b$. 求 x.

13. $cx+ax=a^2-c^2+2ac$. 求 x.

14. $ax-\frac{x-a}{c}=a^2$. 求 x.

15. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{1}{ab}$. 求 a.

16. $cx-\frac{a^2(x-3)}{c}=\frac{3a^2}{c}-\frac{a-c}{c}$. 求 x.

17. $\frac{x}{a}-\frac{x}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}$. 求 x.

18. $\frac{x}{4b}-\frac{x}{3a}=\frac{6a-8b}{12ab}$. 求 x.

提　要

471. 本章所授如下。

1. 算學之云謂。可以代數號誌列爲公式。得簡明之益。
2. 用公式。可解一種問題。祇須以列出之數代入便得。
3. 算術中之例。可以公式簡法代之。
4. 公式內任一代字。可以餘各代字明之。解此式。求此字母便得。

第十九章

溫習及補題

第一章

472. 量線法.

1. 述出下各項之意義：直線。幾何線。線段。長之準個。

2. 任作一線。并量長度。至兩小數位。

3. 任作一三角形。量其邊。略數至兩小數位。

4. 車一連。行駛速率每點24里。以圖線代表每12點鐘所歷之程。

5. 1913及1914年。某雜誌廣告之行數。大略如下表所列。試據以作圖線。并言線所指者如何。

月		一月	二月	三月	四月	五月	六月
行數	1913	12000	11700	13600	15900	18400	16600
	1914	13600	16000	19000	20200	21400	20100

月		七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
行數	1913	14800	12700	13300	16000	18700	25000
	1914	15800	15000	15700	16900	20000	26100

6. 下表乃某天一日內之熱度。

Leonhard Euler

哀拉肖像

(330 之後)

哀拉小傳

哀拉。瑞士國卑士爾城人。生於1707年四月十五日。時歐洲大算家。以卑士爾爲最盛。潘奴利一姓五人。皆以算顯。論者至稱其城爲算家出產地。哀拉執業於潘奴利約翰之門。1725年。往俄京聖彼得堡任教職。1741年。應普魯士王大扶烈達力之聘。遊柏林。閱二十五年。再回俄國。歸聖彼得堡後三年。目矐不能視。仍講授不輟。卒時1783年九月七日。

哀拉論算之書成巨帙。談理幾遍。算學中之派別。釐之使清。加以證解。近世之分析學。尤多所發明。凡今日通曉之數學。皆經哀拉疏釋。疇人傳之最能益人者。當推哀拉。雖體例或淆。然疏導之功廣矣。

1748年。哀拉著"分析微分導言"。前半廣論代數方程之理及三角學。釐三角術與天文學爲二。使三角術爲數學之一支。書中以 e 代訥伯爾對數之天然底數。以 π 代圓周與徑之比例。其後半論分析幾何學。又著書論微積學。哀拉所著書。不可勝計。茲特舉其著者。

午前2點	4點	6點	8點	10點	12點	午後2點	4點	6點	8點	10點	12點
70°	66°	65°	66°	68°	77°	81°	81°.5	83°	82°	80°	77°

據此作熱度線。并線之狀所示爲何?

第二章

473. 圖線加減法.

1. 下列各得數是何意。并以線解之。

(1) 若 $a=3$. $b=5$. 則 $a+b=8$.

(2) 若 $m=8$. $n=2$. 則 $m-n=6$.

(3) 若 $a=x$. $b=y$. 則 $a+b=x+y$.

(4) 若 $a=s$. $b=t$. 則 $a-b=s-t$.

2. 作 $3a+4b-2c$ 之線。

3. 若 $m=2.4$, 作 $3m+4m$ 之線。

474. 周.

1. 若三角形之三邊爲 $2l$, $6l$, $5l$. 求周。若 $l=1.2$, 周之長若干?

2. 述出下各項之意義：三角形。周。多邊形。四等邊形。五邊形。六邊形。n 邊形。

3. 述出下列各項之義：係數。項。獨項式。二項式。三項式。多項式。

4. 下列各方程。以圖明之。設 p 爲周。$p=4x$. $p=6x+18y$. $p=3x+4x+5x$.

5. 設 $x=4$, $y=2$, 又 $x=1.3$, $y=2.7$, 求上 4 題 p 之同數。

475. 代數加減法.

1. 述如何加獨項式。

2. 加下各式。

$4a+7a+10a$, $2a+5b+5b+6a+3b$, $12.4x+3.8x$.

3. 述如何求兩似項之較。

4. 化下各式至極簡之式。 $12x-8x$. $5.7y-2.8y$. $(8a-a)-(5a-2a)$.

5. 任舉一式。以明加法之交換例。

6. 解加法之結合例。

7. 化下兩式爲簡式。

$$a+\{10a+(8a-6a)+(4a-a)\}$$

$$10b-b+[\{16b-2b-(3b+b)+5b\}-b]$$

第 三 章

476. 以公理解方程之用。

1. 言下列各項之意義：方程。解方程。覆證。方程之根。證消一方程。

2. 指出 $4p+9=17$ 方程之 p 如何能求得，而兩端常平。大

3. 述解方程之公理。

4 解下列各方程。將每級所用之公理指出。并覆證。

$10x-9=65.\quad \frac{n}{5}=14.\quad a+\frac{1}{3}a=12.\quad \frac{5}{t}=20.$

$x+5.37x-8.73=61.34.$

5. 3倍某數大於40之數。與40大於此數之數相同。問此數若干?

6 6倍某數減6.等於4倍某數加1.求此數。

7. 一直線長20寸。截爲兩段。此段加14寸。與彼段加10寸相等。求兩段各長若干。

8. 求兩連續數。其和等於247.

9. 長方田之長。爲寬之3倍。繞此田之籬長744尺。問田闊若干?

第　四　章

477. 角分類.

1. 當兩點鐘時。兩指針所成之角有幾度?6點鐘時幾度?8點鐘幾度?

2. 作一直角。一平角。一周角。

3. 作一銳角。一鈍角。

478. 角之量法.

1. 祇用鉛筆與尺。作 40°, 75°, 135°, 270° 之角。用半圓規量而覆證之。

2. 直角之何份為 1 度?

3. 一度內有幾分?一分內有幾秒?

479. 半圓規之用.

1. 述下各項之意義：圓。弧。半徑。半圓。象限。每一項作一圖明之。

2. 作一鈍角三角形。量各角。求三角和之數。

480. 三角形三角之和

1. 設 x, y, z 代三角形內三角之度數。何方程可表示 x, y, z 互相關連?

2. 揭示三角形三內角之和。等於 $180°$.

3. 三角形之第一角較第二角大 $30°$。第三角較兩倍第一角尚大 $10°$. 問各角若干?

4. 指出三角形三外角之和等於 $360°$.

5. 三角形之三外角。第一較第二大 $30°$. 第三等於第一之半加 $15°$. 求三外角。

6. 述下各項之意義：鈍三角形。銳三角形。正三角形。等角三角形。等邊三角形。每一形作圖顯之。

7. 表示同圓或等圓之等圓心角,必割等弧及等弦。

8. 表示同圓或等圓內之等弧或等弦,必割等圓心角。

481. 求作題.

1. 用半圓規作角,等於已知角。

2. 祇用尺與規。於已知線內已知之點。作角等於已知之角。

3. 用半圓規作一直角。

4. 用尺與規作直角。

5 用尺與規。作角等於兩已知角之和。

6. 用尺與規。作角等於兩已知角之較。

7. 平分一已知之角。

8. 於直線內已知之點。求作該線之垂線。

第　五　章

482. 正方之面積.

1. 作圖代表下列各四邊形。平行四邊形。長方形。方形。梯形。斜方形。

2. 列方形面積之公式。

3. 求方形 2.4 寸邊。$5\frac{2}{3}$ 寸邊. 13 寸邊之面積。

4. 方形之周爲 $16a$. 求形之面積。

483. 長方形之面積.

1. 列長方形面積之公式。

2. 今有長方形之畫框。長 18 寸。寬 12 寸。框木闊 $2\frac{1}{4}$ 寸。求此框之面積。

484. 立方與長立方.

1. 列出立方體積之公式。

2. 列出長立方形體積之公式。

3. 立方之邊12寸。問此形之全面積若干?

4. 長立方體之邊。長 6 寸。闊 8 寸。高 10 寸。求此形之全面積。

5. 立方形之邊長 l. 求全面積及體積。

6. 長立方體之邊為 a, b, c. 求形之全面積及體積。

485. 作方程圖線.

1. 作 $y=10x-2$ 方程之圖線。

2. 作 $y=2x^2+1$ 方程之圖線。

486. 獨項式乘法.

1. 述下各項之意義：指數。底。乘方。各舉一式以明之。

2. 設 $x=2$. 求下各項之同數。$4x$, x^4, $4x^3$, $(2x)^3$, $\frac{x^2+4}{x+2}$, x^3+x^2+x-7, $x^2 \cdot x^3$, $x \cdot x^4$.

3. 以式樣解乘法之交換例。

4. 消下各相乘積為簡式。

$$3a^2bc \cdot 2ab^2c \cdot 4ab^2, \qquad 10a^2 \cdot 5a^2 \cdot 2a,$$

$$(3ab)(2a^2b)(10a^2b^2); \quad (6a^2vxy^2)^3.$$

487. 獨項加法.

1. $2a^2bx$ 項中。何者為 a^2bx 之係數?何者為 x 之係數?何者為 a^2x 之係數?

2. 一項中因數之係數是何意?

3. 約下各多項式至最簡之式。

$4a+7a+15a$

$mx+4x+nx+3x$

$4(x+y)+2(x+y)+(x+y)$

$2.5(a^2+b^2)+3.4(a^2+b^2)+(a^2+b^2)$

488. 獨項乘多項式法.

1. 以長方形法求 $x+4$ 與 a 之積。

2. 乘下各條： $x(a+5b)$， $x+y\cdot m$， $a^4+3a^2\cdot 2b^2+b^4$， $2b(a+b-3c)$， $5+x(2x+3)$， $2m(3m^2+2m+7)$。

3. 劈下各題之因數： $ab+ac$， x^2-xy， $5xy-15x^2$， $ab^2c+a^2bc^2$， $6x^2y+12xy+18x^2y^2$， $38a^3y^4+57a^4y^3-19a^3$。

4. 解下各方程：

$$\frac{x+3}{7}=\frac{x-2}{6},\quad \frac{4}{n}+3=\frac{3}{n}+4,\quad \frac{1}{3f}+\frac{1}{2f}=1.$$

489. 多項式乘多項式.

1. 用圖代表多項式。求下兩條之積：

$(a+b)(a+b)$， $(m+n)(2x+2y)$。

2. 作二長方形。可藉下乘積得其面積。$ab+ac$，$2xy+4x^2$。

3. 作二正方形。其面積可以下式得之。$m^2+2mn+n^2$，a^2+6a+9。

4. 求下兩條之相乘積：

$(x^2+2x+1)(x+1)$，$(a^2+2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2)$。

490. 平行方形及三角形之面積.

1. 表示平行四邊形之積。等於底與高之相乘積。

2. 表示三角形之積。等於底與高相乘積之半

3. 表示梯形之積。等於兩底和乘高之半。

第　六　章

491. 接角.

1. 何者爲接角? 作兩接角之圖。

2. 何者爲垂線?

3. 表示已知線內已知之一點。祇可作一垂線。

4. 一直線同旁兩接角之和。等於若干?

5. 直線之一旁。於線內一點作數角。以 $3x$, $2(x+9)$, x, $42-x$ 別之。求 x 及各角之度。作圖。

6. 繞一點之周圍,在平面上作數角。問此諸角之和。等於若干?

7. 繞一點周圍分作數角。以 x, $36+5x$, 與 $3x-9$ 識別之。求 x 及各角之度。作圖。

492. 補角.

1. 何者爲補角? 以圖解明所答。

2. 兩補角之較爲 $110°$. 求兩角。

3. 若一角加 $12°$. 其補角以 5 除。得數之和等於 $80°$. 求兩角。

493. 餘角.

1. 何者爲餘角? 以圖表示所答。

2. 一角與其餘角之較爲27°.求兩角

3. 若一角加15°.其餘角以3除.兩得數之和等於75°.求兩角。

494. 對頂角.

1. 何者爲對頂角?作圖明之。

2. 顯示若兩線相交.其對頂角必等。

3. 兩對頂角以$5x+\frac{3x}{4}$及$\frac{5x}{2}-130$識別之.求x及兩角.作圖示此兩角。

495. 直三角形之銳角.

1. 表示直三角形之兩銳角互爲餘角。

2. 直三角形之兩銳角以$\frac{x}{8}+2x$與$\frac{87}{2}-\frac{5x}{6}$別之.求$x$及兩角。

3. 若直三角形之兩銳角爲30°與60°.則弦與最短邊相比如何?

496. 方程.

1. 解$\frac{2a-2}{14}-\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$.

2. 解$\frac{30x}{7}+30-\frac{6x}{14}=37$.

3. 解 $2(a-2)+\frac{a-3}{4}-4=4$.

497. 一線割兩線之耦角.

1. 若同位角等。則內錯角亦必等。證之。

2. 若同位角等。證割線同旁之內角互爲補角。

3. 若內錯角等。證同位角必等。

第　七　章

498. 平行線.

1. 何時可稱兩線爲平行?

2. 若兩平行線爲一直線所割。則比較同位角。所得如何? 若兩已知線爲一線所割。能令同位角等。問已知之兩線爲何線?

3. 表示兩線同爲一線之垂線。則兩線必平行。

4. 若兩線爲一線所割。其內錯角等。則兩線必平行。證之。(用497節3題)

5. 若兩線爲一線所割,兩同旁內角互爲補角。則兩線平行。證之。

6. 證若兩線各與一線平行。則兩線必自平行。

7. 證兩平行線爲他線所割。其內錯角必等。割線同旁之內角。互爲補角。 何以藉此作線與已知之線平行?

8. 證若兩角之邊兩兩平行。則兩角相等。或互爲補角。

9. 兩平行線與割線所成之同位角。以 $2(4x-3)^\circ$ 及 $(79+3x)^\circ$ 識別之。求 x 及兩角?

10. 證三角形三內角之和等於 180°.(作平行線證之。)

11. 證三角形之外角。等於形內兩對角之和。

12. 平行四邊形是何意?

13. 證平行四邊形之對角等。

14. 證平行四邊形之兩隣角互爲補角。

15. 平行四邊形之兩隣角。若三倍一角。而減別一角。則等於 30°. 求每角之度數。

16. 作圖代表下各形：立方。長立方。角柱。角錐。圓柱。圓錐。球。

17. 按上題各形之圖。指出下各項：平行線。平行面。線與面平行。平行線爲一線所割。非平行線爲直線所割。直線互爲垂線。平面之垂線。

第　八　章

499. 比例尺作圖.

1. 間接量法是何意?

2. 工程師欲求某河之廣 AC. 先沿岸作 BC 線。量 ACB 與 ABC 兩角。若 $BC=45$ 竿。$\angle ACB=110^\circ$. $\angle ABC=40^\circ$. 用比例尺求 AC.

3. 旗柱頂之高度角爲 38°. 測量師所立之處。距柱 20 碼。問柱高若干?

4.　某巖之頂高150尺。船在海面之低度角為 25°，問該船距巖頂遠若干？

5.　從 B 礮臺望敵人之礮臺 F，中間有物障礙。求得 P 點。F 在此點東北 4 里。而 P 在 B 之西北 6.24 里。求 F 距 B 之遠。

500. 比例.

1.　兩數之比例是何意？ 以數式明之。

2.　兩線之比例為何？

3.　何數加 12 又從 30 減去此數。兩得數之比例為 $\frac{5}{10}$？

4.　分 81 為三分。使三分之比例。如 2：3：4. 求三數。

501. 似形.

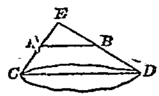
1.　何為似形？

2.　述相似三角形三邊之關係。兩形之角。比較如何？

3.　三角形之三邊為 8, 10, 與 13. 似形最短之邊為 11. 求餘兩邊。

4.　樹之影長 90 尺。同時 4 尺之竿得影 60 尺。求樹之高。

5.　圖上之 CD 代湖之廣。AB 與 CD 平行。若 $AB=100$ 尺。$AE=30$ 尺。$CE=150$ 尺。求湖之廣。



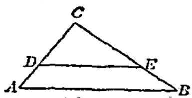
第　九　章

502. 三角形之比例.

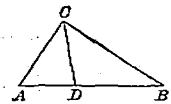
塔頂之高度爲 27°. 測量師所立之地。距塔脚 259 尺。求此塔之高。先用比例尺法。後用三角法。

503. 比例.

1. 本題附屬之圖。DE 與 AB 平行。若 $DC=4$. $AD=27$. $CE=1\frac{1}{3}DC$. 求 EB. 說出得方程之理.



2. 本題附屬之圖。CD 平分 C 角。若 $AC=3$ 寸。$BC=6$ 寸。又 AD 較 DB 少 2 寸。說出得方程解題之原理。求 AD.



3. 平分任一線。

4. 求分一線爲兩段。使有 $\frac{3}{4}$ 之比例。

5. 祗用尺與規。求已知兩線之比例。

6. 求 3542 與 5016 兩數之大公約數。

7. 約 $\frac{63a^3b^3x^4}{7a^2b^4x^6}$ 爲最簡之式。

8. 如何能約一比例至最簡之式?

504. 變.

1. 述下列各項之意義：變數。常數。函數。以數式明示各項之意。

2. x 與 y 正變之語是何意?

3. 存款所生之利與時。有正變之關係。若存款 6 年得利 $200. 問今存 8 年。應得利若干?

4. 物體下墜所經過之路。與下墜所歷時之方。有正變之關係。設 d 代路，t 代時。若物墜 400 尺歷時 5 秒。列出此四數之方程。作方程之圖線。

5. x 與 y 爲倒變。此語是何意?

6. 某物所見之形。隨距之遠近倒變。卽距數愈大。則形狀愈小。設 s 代形之大小。d 代距。試列方程達此理。

505. 等比例.

1. 何謂等比例? 寫數個樣式以明之。

2. 證等比例中內項之相乘積，等於外項相乘積。

3. 試分 \$2400 爲兩分，使有 $\frac{5}{7}$ 之比例?

4. 解下方程。$\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+3}{x+1}$.

5. 若海水 80 磅內含鹽 4 磅。問須加淡水若干。方能令新流質中每 45 磅含鹽 $\frac{2}{3}$ 磅?

6. 若 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{w_2}{w_1}$. 設 $d_2=27$ 尺。$w_2=36$ 磅。又 $w_1=24$ 磅。求 d_1.

7. 設有流質。內含鹽類百分 90，問須流質百分之幾化氣飛去。方能得鹽類百分 95?

8. 證兩長方形之面積相比。如兩形長寬之積相比。

9. 證若兩方形之底相同。則兩形相比，如其高相比。

10. 證兩三角形面積相比。如其底與高之積相比。

11. 證若兩三角形之底相同。則兩形相比，如其高相比。

第十章

506. 相合。

1. 何謂合形?

2. 證若三角形之兩邊及夾角.各等於彼三角形之兩邊及夾角。則兩形相合

3. 上2題之定理。如何用法.方能求得不可到之相距?

4. 證若此三角形之兩角及夾邊.各等於彼三角形之兩角及夾邊。則兩形相合。

5. 證等腰三角形之兩底角相等。

6. 證等邊三角形亦爲等角三角形。

7. 證平分等腰三角形頂角之線。亦平分底線.且爲垂線。

8. 證直線之中點垂線內各點.距直線之兩端等遠。

9. 證若平分三角形內一角之線。亦平分對邊而爲垂線。則此形必爲等腰三角形。

10. 證若三角形內有兩角互等.則此形爲等腰三角形。

11. 證等角三角形亦爲等邊三角形。

12. 證三角形之兩邊不等。則兩邊之對角亦不等。

13. 證三角形一邊之中點垂線過對角之頂點。則此形爲等腰三角形。

14. 證三角形之兩角不等。則兩角之對邊亦不等。

15. 證若三角形之三邊與別三角形之三邊兩兩相等。則兩形相合。

16. 證若一線內兩點距別線內兩點各等遠。則聯首兩點之線。必爲聯次兩點之線之中點垂線。

17. 何爲距直線兩端等遠之軌跡?

18. 證兩直三角形。若此形之弦與一邊。各等於彼形之弦與一邊。則兩形相合。

9. 證由一點至一線最短之距。爲由此點至此線之垂線。

20. 證由直線之垂線內任一點.作兩斜線至直線。使與垂線所成之角等。則兩線必等。

第十一章

507. 基礎作法.

1. 平分一角。用何種法證此作法? 作此平分角之圖。并證之。

2. 於已知線內之一點。作線之垂線。作圖述出證此作法所引之原理。證所作之線。

3. 平分一直線。作圖。用何定理證此作法?證之。

4. 作直線之中點垂線。作圖并證之。以此作得之線。與3題比較。比較3題與4題。

5. 於線外任一點。作線之垂線。作此圖。證法根據何原理? 證之。

6.　已知線內之一點。作一線。使與原線所成之角。等於已知之角。作圖。用何種證法？證之。

508. 基礎作法之用途。

1.　已知下列各節。試按之作三角形：已知兩邊及夾角，或兩角及夾邊，或三邊，或兩邊及一邊之對角。

2.　據以下所知之各節。作直三角形：弦與兩邊之任一邊。弦與兩角之任一角。

3.　已知等腰三角形之高及底角。求作此形。

4.　已知等邊三角形之高。求作此形。

5.　直三角形之兩銳角。爲30°與60°. 求作其形。

6.　作下諸角：60°,30°,15°,120°,90°,45°,22°30′,135°,75°,165°.

7.　三平分一直角。

8.　直線外一點。求經此點作線與此線平行。

509. 定理。

1.　過直線內已知之一點，至此線祇可作一垂線。說出其故。

2.　過直線外已知之一點。至此線祇可作一垂線。

510. 對稱.

1.　試舉數種式樣解對稱之體。

2.　說出幾個單體以平面爲界而對稱。

3.　作數圖。以線爲界而對稱。

4. 何爲對稱之軸?

5. 以對稱之形法。建設下列各定理：

a) 直線之中點垂線內各點。距線之兩端等遠。

b) 直線之中點垂線外任一點。距線兩端之遠不等。

c) 角之平分線內各點。距角之兩邊等遠。

d) 角之平分線外任一點。距角兩邊之遠不等。

6. 證角內距兩邊等遠之軌跡。爲角之平分線。

511. 圓。

1. 說出下各項之意義并作圖以明之：切線。切點。正多邊形。內接多邊形。外切多邊形。

2. 證下各定理。

a) 切點之半徑。必爲該點切線之垂線。

b) 直線若在半徑外點爲半徑之垂線。則此線爲圓之切線。

3. 求下列各題之作法：

a) 於圓周之一點作切線。

b) 求已知圓之心。

c) 過已知之兩點。求作一圓。

d) 作三角形之外接圓。

e) 作三角形之內切圓。

f) 作圓之內接正方形。

g) 作圓之外切正方形。

h) 作圓之內接六邊形。

i) 證三角形三邊之中點垂線必經外接圓之心。

k) 證三角形三角之平分線必經內切圓之心。

第十二章

512. 正負兩數之用.

1. 何爲正數，何爲負數?

2. 述出絕對値之意。

3. 述出正數負數中之用法并解之。

4. 根據下列之熱度表作圖線。

午前8點	9點	10	11	12	午後1點	2點	3點	4點	5點	6點
$-6°$	$-4°$	$-2°$	$-2°$	$+4°$	$+3°$	$+3°$	$+2°$	$+0°$	$-2°$	$-3°$

513. 正負數之加法.

1. 以圖線求下數之和：

$(+5)+(+3)$, $(+5)+(-3)$, $(-5)+(+3)$, $(-5)+(-3)$

2. 說出正負數相加之例。

3. 以代數法求 1 題之和。

4. 兩個或多個代字之數加法何種爲最簡便.

5. 求下各數之和：$+49, +35, -45, +75, -236$. 又 $25x$, $-38x, -20x, 30x, -6x$.

6. 加下各條：

$+25a$	$+3\frac{1}{3}x$	$-3.14k$	$-24a^2b$	$-2.3x^2yz^2$
$-7a$	$-2\frac{1}{2}x$	$+4.27k$	$+18a^2b$	$-6.5x^2yz^2$

514. 正負數之減法。

1. 述出代數之加法。

2. 下列各式。從上數減去下數。

$-\frac{7}{6}$	$+\frac{9}{5}$	$+18c$	$-6.3a^2$	$-4.2(a+b)$
$+\frac{2}{3}$	$+\frac{7}{10}$	$-12c$	$-7.2a^2$	$+2.7(a+b)$

515. 正負數乘法。

1. 述出乘法之號例。

2. 求下列數之積：

$(+2)(+8)$, $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(+\frac{6}{5}\right)$, $(+3)(-x)$, $\left(-7\frac{1}{2}a\right)\left(-3\frac{1}{3}b\right)$

3. 以力與桿臂之項明轉勢。

4 下列各數。第一因數爲力第二因數爲桿臂。求轉勢。

$(+2)(-3)$, $(-2)(-3)$, $(-2)(+3)$, $(+2)(+3)$

5. 求下列各條之積。

$0\times b$, $b\times 0$, $(+3)(0)(+4)$, $(1.4)(-3.2)(0)$

6. 設 $x=0$ 或 3, 或 1, 或 -2 或 -4. 求 $3x^3-2x^2+7x-4$ 式之同數。

516. 正負數之除法.

1. 述除法之號例。

2. 證 $\frac{+x}{-y}=\frac{-x}{+y}=-\frac{+x}{+y}$.

3. 求下各項之商數。

$\left(-\frac{7}{4}\right)\div\left(-\frac{3}{8}\right)$, $(-2x)\div(+6x)$.

$(+4ab)\div(+b)$, $(-3.6x^2)\div(4xy)$.

第十三章

517. 加法例.

1. 解加法之交換例。

2. 解加法之結合例。

518. 獨項加法.

1. 加下各獨項。

$+12x, -3x, +14x$ $\quad$ $(-5ak), (+2bk), (+ck)$

$2(m+n), -6(m+n), (m+n)$ $\quad$ $a(x+y), b(x+y), -c(x+y)$

$14(a^2b-c), -8(a^2b-c)$ $\quad$ $3a^2b, -5xy, +7a^2b, +2xy$

519. 多項式加法.

1. 述如何加多項式。

2. 將下式。依 x 之指數。列成降冪式及升冪式。

$x^5+x^4y-2x^2y^3-7y^5-3x^3y^2+8xy^4$

3. 加下各多項式。

$-4\frac{1}{2}a^2b+16ab^2-7b^3+a^3$, $\quad -4a^3+8ab^2-2b^3-2\frac{1}{2}a^2b$

4. 加 $7(x-y)-4(x+y)+4.7$.

$9(x+y)+3(x-y)-9.7$, $6(x-y)+2.7-3(x+y)$

設 $x=2$, $y=1$. 覆證所得之結果。

520. 獨項減法.

1. 述出如何求兩獨項之較。

2. 由上項減去下項：

$$\begin{array}{cccc} -12a & -7.5x & +16a^2bc & +17.2(x-3y^2) \\ +\ 3a & -2.3x & -20a^2bc & +22.6(x-3y^2) \\ \hline \end{array}$$

3. 消下兩式：$-(8.4a^2b^2c^2)-(-6.3a^2b^2c^3)$, $\{-4.5\{x^2-y^2)\}-\{-7.6(x^2-y^2)\}$

521. 多項式減法.

1. 說出如何求兩多項式之較.

2. 減下式。

$(2.4x^2-7.3xy+16y^2)-(-3.7x^2+2.4xy-10y^2)$

3. 由 $16-15.30+14(x-5yz)-13(5y-x)$ 減 $32-16.30+8(5y-z)$. 式中所列之乘數不必乘合。(芝加高大學)✣

522. 消括弧.

下式以加減消為簡式。

1. $3x-[4y-(3y+7x)]$

2. $5p^3-\{3p^2-(2p^2+7p^3)-(3p^2+4p^3\}-(p^3+rp^2)$

✣(芝加高大學)之意乃此題為芝加高大學入學時考試之題.下注某大學者俱仿此.

3. 消括弧。$a^2-\{2ab-[b^2-(c^2-\overline{2cd-d^2})]\}$ 按式移去各種括弧。(芝加高大學)

第　十　四　章

523. 獨項乘法。

1. 說出如何乘獨項。

2. 求下列各數之相乘積。并設數替代字覆證之：

$(+22)(-14)(-3)$, $(-2\frac{1}{3}ax^2y)(-4\frac{1}{6}a^2xy)(-3x^2)^2(-2x)^3(x^2)^4$.

3. 設 $x=2$, 或 $x=-3$. 求 $x^2-12x+4$ 之同數。

524. 獨項乘多項式。

1. 說出獨項如何乘多項。

2. 如下式所示相乘。并以數代入。覆證之：

$4x+3x(x-2y)+(2x-3y)x$, $2a\{2b-3(4a-b)+4(3a-5b)\}$

525. 多項乘多項。

1. 說出如何多項乘多項。

2. 以 $a+b-c$ 乘 $pa^2+qb^2-rc^2$. (芝加高大學)

3. 以 $x^6-2x^3y^3+y^6$ 乘 $x^6+2x^3y^3+y^6$.

4. 以 $5x-3y+xy+5$ 乘 $13x-12y-xy+3$.

526. 約分數。

1. 說出如何約分數至簡式。

2. 約下各分數至簡式：

$\dfrac{-25a^4bc^8}{12a^8bc^2}$ $\dfrac{60x^2y-45xy^2+90xy}{15xy}$

$\dfrac{(-x)^2y(-z)^3}{5(-x)^4y^2(-z)}$ $\dfrac{20(a+b)^5-15(a+b)^6+30(a+b)^8}{-5(a+b)^3}$

527. 多項除多項。

1. 以 $x+y$ 除 $x^3+x^2y+xy^2+xz^2+yz^2+z^3$

2. 以 $2y^3-3xy^2-4x^2y+6x^3$ 除

$10x^3y^2-14x^4y+12x^5-x^2y^3-8xy^4+4y^5$. 并設 $x=y=1$. 代入。得數覆證之。(芝加高大學)

第十五章

528. 特別積。

1. 作圖表示 $(c+d)^2=c^2+2cd+d^2$.

2. 說出求二項式之方。不用圖而直寫出之法。

3. 求三項式等於下列數之積：

$(p-r)^2$, $(.4xy-.3z)^2$, $[(m+n)-t]^2$.

4. 從下相乘數直接求兩方之較：

$(3b-2c)(3b+2c)$, $(1+\frac{2}{3}x^2)(1-\frac{2}{3}x^2)$, $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

5. 求下三項式之方直寫出得數：

$(2m-4s+t)^2$ $(a-.3b+2)^2$

529. 劈因數。

1. 劈下三項式之因數。

$49-140n^2+100n^4$, $49m^2n^2+42mnxy+9x^2y^2$

2. 求下兩項式之因數：

$1-25y^2$, $196-225\,l^2k^2y^2$, x^6-y^6, $(a^2-b)^2-c^4$

3. 劈下三式之因數：

$(x^2-29xy+35y^2)$, $2a^2+11a+12$, $102-11m-m^2$

530. 派達哥拉氏定理.

1. 說出派達哥拉氏定理。

2. 正方之對角線以邊之項明之。

531. 方根.

求下兩數之方根：6241, 643204.

532. 二次方程。

1. 以圖線解兩方程。

$$x^2-6x=-12,\quad m^2-\frac{3m}{2}=\frac{27}{16}.$$

2 以劈因數法解下題：

$$n^2+28=11n,\quad 3c^2+c-2=0.$$

3. 以配方法解下題：

$$x^2+10x=24,\quad 4y^2+20y=-9.$$

4. 勾股形之弦長5尺股較勾長1尺求勾股各長若干?

第十六章

533. 方程解法.

1. 述解一次方程兩一未知數之法。

2. 解下各方程。

(1) $4x+16=9x+11$.

(2) $5+3x+\frac{2x}{3}=1\frac{2}{3}+\frac{x}{7}$.

(3) $\frac{3x+1}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{7}{4}$.

(4) $(2x-1)(x-3)=(x-5)(2x+4)$.

(5) $\frac{1}{3}(1-x)=\frac{1}{4}(2-x)+\frac{1}{6}(3+x)$.

(6) $.8(10x-2.3)=.05(5x+.4)-2.45$.

(7) $\frac{3x+5}{x-5}-\frac{6x+13}{3}=2x$.

(8) $ay-\frac{3b^2}{a}=\frac{b^2(y-3)}{a}-\frac{b-a}{a}$.

3. 解下各題：

(1) 勾股形兩銳角之較爲 $22°14'$. 求兩角。

(2) 長方形之周長24寸。若此形之長端加4寸。而底減2寸。則所得之面積。仍與前積同。此形之長寬各如何?

(3) 三角形三邊之比例。如5：6：13.若底長144寸。試求三邊。

(4) 三角形之三角。以 $(x+8)°$, $2(x+8)°$, 及 $(2x+4)°$ 代之。求 x 及三角。

(5) 兩平行線爲直線所割。割線一旁之兩內角爲 $\frac{2}{7}x$ 與 $\frac{3}{2}x-20$. 求 x 及兩角。

(6) 3倍某數加21.得數以某數與3之和除之。其結果等於4.求此數。

(7) 父之年46.子之歲8.問若干年後。父之歲大於其子3倍?

(8) 兩連續雙數之方之較為18.求兩數。

(9) 兩人相距25里。同時起行。其速率為每點$3\frac{1}{2}$及每點4里.問須幾時。二人方能相晤? (耶路大學)

(10) 某人乘汽車。$3\frac{1}{4}$點鐘內行50里。設此人行野外時。速率每點20里。行於城市時。每點8里。問此人經過郊野應幾里? (耶路大學)

(11) 某書室之長較寬多8尺.若長寬各加2尺。則房之面積較多60方尺。問書室原長寬各若干? (耶路大學)

(12) 今將$2000分兩處生利。其一利息率百分4.其二利息率百分3.第一處一年所得之利。較第二處所得者為兩倍。問此款如何分法? (芝加高大學)

(13) 求兩連續單數。其兩數自乘方之較為152. (芝加高大學)

(14) 某戲院之座票。成人每票25銅圓。童子每票10銅圓.計共賣得銀$18.75.座上觀者共117人。問座中童子若干人? (十銅圓作一角。十角作一元。) (耶路大學)

(15)　銀$1050.區分爲兩股。存放生利。第一股利息率百分 4.存放 6 年。所得之利金。與第二股利息率百分 5 存12年之金相同。求此款如何區法？（普連士頓大學）

(16)　8 點與 9 點之間。何時兩針相合？何時兩針成直角？何時兩針之方向相反？

(17)　桿一具。長 18 尺。重 40 磅距中點三尺處。有物托之。今欲於距定點最遠之端。用力提之使平。問用力若干？

(18)　甲乙二人。同立於木板上。甲距定點 5 尺。乙距 7 尺。若甲重 126 磅。問乙重若干。方令板平？

第　十　七　章

534.　兩線方程函兩未知數之系。

1.　何爲同系之方程？

2.　述出以圖線求同系方程之法。

3.　以圖線解下系。

(1) $\begin{cases}2x-3y=4\\4x+2y=1\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}4x+7y=-27\\x-2y=12\end{cases}$

4.　若一方程中有數個未知數。何時方可名之爲準式？

5.　述出以相消法解同系方程之法。

6.　以加減相消法解下各題：

(1) $\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{37}{15}$　$\frac{2x}{3}-\frac{y}{3}=1$　　(2) $\frac{x}{3}-y=1$　$x+\frac{y}{2}=4$

7. 兩平行線與割線所成之內錯角爲 $(x+4y)^\circ$ 與 70°. 割線一旁之兩內角爲 $(8y-10)^\circ$ 與 $(5x+y+5)^\circ$. 求 x,y 與未知之角。

8. 某人有兩子。長子大於次子 6 年。兩年後。其人之年恰爲兩子歲數之倍。惟 6 年前。則爲二子合年之 4 倍。問各人年齡若干? (普連士頓大學)

9. 二車速率之較。爲每點 5 里。其快車較慢車行 280 里而少一點鐘。問兩車之速率各若干? (耶路大學)

10. 今有兩位數。此兩位之數之和爲 10.若從原數減54. 所得之結果。與原數位倒轉之數相同。求此數。

11. 某人存款兩宗。一利息率百分 4. 一利息率百分 5. 每年所得之利金 \$500. 後再放。一利息率百分 5. 一利息率百分 6. 每年得利金 \$600. 問兩款各若干?

12. 三角形有兩角相等。第三角等於餘兩角之和。求三角各若干?

13. 解下方程。求 m 與 n.

$$\frac{7m+8}{5}-\frac{7n-1}{4}=-4.$$

$$\frac{2m-4}{2}+\frac{n-1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

作兩方程之圖。解之并覆證之. (芝加高大學)

解下方程。求 a, b, 與 c.

$$3a+b-2c=-1.$$

$$2a-b+3c=9.$$

$$b+3a-c=2.$$ (芝加高大學)

15. 解下同系方程。

$$2x+3y+5=0.$$

$$6y+5z\quad=7.$$

$$3x+10z-1=0.$$

明白揭出答數。再以得數代入原方程證之。(哈佛大學)

第十八章

535. 公式卽通例。

1. 何爲公式?

2. 某人乘馬行 p 里。然後步行返家。每點 q 里。計往返費時 t 點。求騎馬行之速率。(耶路大學)

3. 快車之速率。每點45里。貨車開行後 a 點動程。於 b 點鐘內追及貨車。求貨車之速率。

536. 公式之同數。

1. 若 $s=16t^2+vt$. 設 $t=10$, $v=5$, 求 s.

2. $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ 又 $r=\frac{d}{2}$. 設 $d=7$. 求 v.

3 $h=\frac{v^2}{2g}$. 設 $h=25$. $g=32$. 求 v.

4. $R=\frac{rr'}{r+r'}$. 設 $R=50$. $r'=15$. 求 r.

537. 下列各式中.任取一字母.求以餘字母所成之等項.

1. 解 $C=\frac{5}{9}(F-32)$，求 F.

2. 解 $S=\frac{n}{2}(a+l)$，求 a.

3. 解 $A=\frac{h}{2}(b_1+b_2)$，求 b_2

4. 解 $S=\frac{rl-a}{r-l}$. 求 l.

5. 解 $\frac{x}{a}+\frac{a-2x}{3}+4=3a$，求 x.

6. 解 $1-\frac{4(3a+4x)}{a}=\frac{5(3a+2x)}{a}$，求 x.

7. 解 $\frac{1}{E}-\frac{1}{P}=\frac{1}{S}$，求 E，求 P，求 S.

號

= 相等	28 節	∥ 平行	193 節
> 大於	28 ,,	⊥ 垂於	208 ,,
< 小於	28 ,,	∠ 角	95 ,,
≠ 不等	28 ,,	∠s 諸角	95 ,,
+ 加	39 ,,	△ 三角形	234 ,,
− 減	39 ,,	△s 諸三角形	234 ,,
× 乘	28 ,,	∽ 似	234 ,,
÷ 除	343 ,,	≅ 相合	278 ,,
( ) 括弧	62 ,,	(°) 度	104 ,,
[ ] 方括弧	62 ,,	(′) 分	104 ,,
{ } 折括弧	62 ,,	(″) 秒	104 ,,

公式

直三角形	$a^2+b^2={}^2$
圓	$c=2\pi$ 或 πd
長方形面積	$A=bh$
正方形面積	$A=s^2$
平行四邊形面積	$A=bh$
三角形面積	$A=\frac{1}{2}bh$
梯形面積	$A=\frac{1}{2}h(b+b')$
圓面積	$A=\pi r^2$
動程	$d=rt$

元(1745)

教育部審定批詞

布利氏新式算學教科書

呈及布利氏新式算學教科書第一二册均悉查是書獨闢蹊徑融合代數幾何三角各法鉤元提要會通發揮憑入事相關之問題解滯澀易忘之公式批隙導窾曲類旁通能使學者造詣於算術之境可獲舉一反三之效其去墨守陳規僅據論理法敷設之舊籍實不可以道里計第二編所述幾何三角各題隨事引證不拘一格極運用變化之理至若措詞之淺顯習題之結構條分比節允稱完備譯筆亦復明朗修潔准予審定作爲中等學校及甲種實業學校算術科用書

十二年一月三十一日

部(487)

Breslich's First-Year Mathematics

The Commercial Press, Limited

中華民國十四年二月初版
十九年十二月十版

(布利氏)新式算學教科書(第一編)
(每册定價大洋壹元陸角)
(外埠酌加運費匯費)

譯述者 花縣徐甘棠
校訂者 紹興壽孝天
發行者 商務印書館
印刷所 商務印書館 上海北河南路北首寶山路
總發行所 商務印書館 上海棋盤街中市
分售處 商務印書分館 北京天津保定奉天吉林龍江濟南太原開封西安南京杭州蘭谿安慶蕪湖南昌漢口長沙常德衡州成都重慶廈門福州廣州潮州香港梧州雲南貴陽張家口新嘉坡

八〇五五白