大學用書

# 應用力學

（下冊）

季文美編譯



龍門聯合書局印行

大學用書

# 應用力學

（下冊）

李文美編譯

龍門聯合書局印行

# 目　錄

# 第三篇　動力學

## 第八章　質點動力學



## 第九章　剛體動力學



### §1.　平移運動



### §2.　迴轉運動

### §4. 效率. 能的散逸



## 第十一章　衝量與動量



### §1. 衝　量



### §2. 動　量



### §3. 衝量動量原理

# 第四篇 專門題材

## 第十二章 機械振動



## 第十三章 均 衡



## 第十四章 急 螺

## 第十五章 再論相對運動



## 第十六章 調速器



## 附錄一 二次矩 轉動慣量

### §1. 平面面積的轉動慣量

## §2. 物體的轉動慣量



# 附 錄 二

V.2

# 第三篇　動力學

## 第八章　質點動力學

**98. 緒言**　動力學研討物理物體運動的定律.

如有不平衡的力系作用於物體,則物體的運動情形必生改變;力系的不平衡部份,即力系的合力,可以說是改變運動的原因.　由經驗知,物體運動的改變,並非全由作用於物體的力(力系的合力)所決定,同時亦受物體本身性質的影響.　例如:不同的力系,依次分別作用於同一物體,固不產生相同的運動改變;但相同的力系,如分別作用於不同的物體,所產生的運動改變,亦彼此互異.

作用於物體的力系,物體的性質,與物體運動的改變,此三者間關係的密切,雖早由人類經驗所指出,但此種關係能以明確的完全的形式寫出,則爲許多卓越的學者研究結果的累積,歷時達數世紀之久.牛頓(Isaac Newton 1642—1727)根據其對於天體運動的觀察,並綜結前人研究的結果,於1687年發表力學三大原理(Principia),普通名爲牛頓運動定律.

牛頓運動定律,僅能直接應用於受力作用的一質點的運動.　而工程中所遇到者,則常爲受力作用的物體(一組質點,或一質點系).　運動的物體,可能爲剛體或非剛體(包括彈性物體,塑體,流體等);作用於物體的力系,可能使物體產生任何種運動.　但本書中所論的物體,大多視爲理想的剛體;所論的運動,亦普通限於平移運動,迴轉運動,與平面運動.

**99. 動力學的一般問題**　無論物體有何種運動,動力學問題的普通性質是一樣的,即:—物理的物體,受不平衡的力系所作用,此力系有一

合力(力或力偶,或力與力偶),使物體的運動發生改變;且在任一問題中,均須應用牛頓運動定律,求出下述三者間的固定關係:(1)力系的合力,(2)物體在動力學上的性質(質量,轉動慣量,等),(3)物體運動的改變. 表示此種關係的方程式,名爲物體的運動方程式,可用以決定某一物體受某已知力系作用時的運動,亦可用以求出某一物體有已知運動時所需作用於物體的力系.

物體的運動方程式,所包含的三種因素中:運動的改變,即加速度,可用距離、時間、與速度表示之,已詳第二篇;一力系的合力的求法,已詳第二章,現僅須稍加複習(見下節),表明合力的特徵與動力學一般問題的關係;物體足以影響其本身運動的性質,則須詳加討論,見第 101 節.

**100. 力系的特徵** 力系中唯一能影響物體運動的部份,僅爲力系中的不平衡部份,即力系的合力. 與本章中所論各種運動有關的力系,均爲共面,故力系的合力,或爲一個力,或爲一力偶(第 28 節). 如合力爲一個力,則影響物體運動的合力,其特徵爲:(1)力的大小,(2)力的作用線的位置,與(3)力的指向(第 5 節). 如合力爲一力偶,則足以影響物體運動的合力,其特徵爲:(1)力偶的轉矩,(2)力偶的指向,與(3)力偶作用平面的方位(第 15 節).

物體的運動方程式,必須有足夠的數目,使合力的上述各項特徵,能完全包括. 本書中所論的運動,須有三個方程式,包含力系沿 $x$ 軸向分力的代數和,$y$ 軸向分力的代數和,與對於某軸的力矩的代數和(第 30 節).

**101. 慣性與質量** 在運動發生改變時,物體能阻礙或抵抗改變的性質,名爲物體的慣性. 任何物理物體,均具有慣性;但不同的物體,所具有的慣性,數量不同. 換言之,各物體如均以相等的加速度改變其運動,則各物體均將發生抵抗,阻礙其改變,但抵抗性的大小,因而使物

體改變運動所需的力的大小，則彼此不等.(註1)

一物體的慣性的數量，亦卽物體對於以某一加速度改變運動時的抵抗性的大小，可用物體的質量衡量之。質量的意義說明如下.

設自一均質的鋼塊，鋸出若干小鋼塊，其體積各爲 1, 2, 3, 10 立吋等. 由實驗知，使各小鋼塊以同一加速度改變運動時所遇的抵抗力，與各鋼塊的體積的大小成正比. 可見物體的慣性與物體所含物質的多寡成正比.

其次，設有一物體，受一個力 $F_1$ 單獨作用時，所產生的加速度令爲 $a_1$. 同法，以 $F_2$, $F_3$ 等各力，依次單獨作用於此物體，所產生的加速度令各爲 $a_2$, $a_3$ 等. 由多次實驗的結果知

$$\frac{F_1}{a_1}=\frac{F_2}{a_2}=\frac{F_3}{a_3}=\cdots\cdots\cdots\cdots\text{常數，令爲 }C.$$

或，單獨作用於此物體的任何力 $F$，與其所產生的加速度 $a$ 之比，必爲一常數，卽

$$\frac{F}{a}=C. \tag{1}$$

可見一物體的慣性有一固定值，並不隨作用力、速度、與加速度的大小而變更. 上式中的常數 $C$ 卽可用以衡量慣性的大小.

由上述二實驗，可知質量可定義爲物體的一種物理性質，用以衡量物體的慣性，其大小與物體所含的物質的多寡成正比，而在不同的作用力、速度、與加速度時，恆爲一常數.(註2) 故如以 $M$ 代表質量的大小，卽可取 $C=kM$，式中 $k$ 爲一比例常數. 於是(1)式可寫爲

註1. 物體阻礙運動改變的慣性，與彈性材料阻礙變形的彈性，頗相類似. 例如：尺寸相同的橡皮桿與鋼桿，當有拉力作用於桿端使其伸長時，兩桿內均將發生阻礙伸長的應力，在某一限度內且均依照相同的定律（應力與伸長成正比例），但單位伸長相同時，應力的大小則彼此不等；正如使兩物體產生同一加速度所需力的大小，彼此不等.

註2. 物體的質量是物體的一種性質，用以衡量物體的慣性，而非物體所含物質的量. 正如溫度是用以衡量一物體的某種性質（物體冷熱的程度），而非物體所含的熱量.

$$\frac{F}{a}=kM. \qquad (2)$$

自由降落的物體，僅受重力 $W$ 的作用，其加速度已由實驗量出為 $g$ (32.2 呎/秒$^2$，或 980 糎/秒$^2$)． 故由(1)式知

$$\frac{W}{g}=\frac{F}{a}=C. \qquad (3)$$

由(2)式與(3)式，得

$$\frac{W}{g}=kM. \qquad (4)$$

如 $W, M$，與 $g$ 的單位，能如此選擇，適使(4)式中的 $k$ 等於 1 (詳第103節)，則物體所含質量的單位數，可由其重量用下式計算：

$$M=\frac{W}{g}.$$

**102. 牛頓定律** 牛頓根據其對於行星運動的研究，發表運動定律．行星的大小，與其運動範圍比較，極為微小(註)，故牛頓定律僅能直接應用於一質點． 物體為質點的組合，各質點的加速度並不相同 (除平移運動的物體外)，須將牛頓定律加以引伸後，方能應用於運動的物體．

牛頓運動定律可陳述如下：

> **第一定律** 作用於質點的力系，如合力等於零，則此質點必將永遠靜止，或繼續沿直線方向等速運動．
>
> **第二定律** 質點如受到一個力的作用，必有沿此力方向的加速度；加速度的大小，與力的大小成正比，而與質點的質量成反比．
>
> **第三定律** 對於任一作用力，必有一反作用力，大小相等，方向相反． 即，甲質點如受到乙質點的作用力，則乙質點必同時受到甲質點的反作用力；此二質點間互相作用的二力，必相等、相反、共線．

牛頓運動定律是力學的基礎，故須加以較詳盡的討論．

---

註 參閱 185 頁足註.

1. 第一定律有時名爲慣性定律，初由伽利略(Galileo, 1564—1642)所發現．設有物體，以某一初速，在表面粗糙的水平板上滑動，此物體的速度，將迅速減低，滑動至極短距離後，卽行停止．如以一較光滑的物體，以同一初速，在較光滑的水平面上滑動，則物體可滑動至較遠的距離，然後停止．如以更光滑的物體，在更光滑的水平面上滑動(例如極光滑的鋼珠，在極光滑的玻璃面上)，則滑動的時間愈長，所經的距離亦愈遠；物體的運動，愈與等速直線運動相接近．由此推論，設摩擦力與空氣阻力，竟能完全去消，物體將永遠沿直線方向等速運動．換言之，任何質點，均有保持其原有速度的習性，倘非被外力所迫逼，質點將永遠沿直線方向(速度的方向不變)，等速(速度的大小不變)運動．靜止是等速運動的一特例，速度等於零．

第一定律可以說是力的定義，力的作用是質點運動改變的原因．至於力與運動改變兩者間數量的關係，則須由第二定律說明之．

2. 第二定律亦先由伽利略所發現，惟當時未曾有明確的陳述．由歷史上極著名的落體試驗，已知同一物體，如受某不變的外力作用，必產生一不變的加速度，不同的物體，如各僅受重力的作用，則加速度彼此相等，與物體的性質無關：自同一高度落下的鷄毛與鉛球，設無空氣阻力，應同時到達地面．爲便於實驗時的觀察，伽利略利用極光滑的斜面，以減低落體的速度．變更斜面與水平面所成的角度 $\alpha$，圖349($a$)，則滑動物體的加速度 $a$，與自由落體的加速度 $g$ 的關係爲

$$a = g\sin\alpha. \qquad (a)$$

$\alpha$ 角接近零度時，可得加速度接近於零的近似等速運動；$\alpha$ 接近 $\pi/2$ 時，$a$ 接近於 $g$.


圖 349.

爲測定使斜面上滑動物體產生加速度的力，伽氏又作圖 349(*b*) 所示的實驗：設摩擦力的影響能完全消除，則使斜面上的物體維持平衡所需的力爲 $W_1$，

$$W_1 = W \sin \alpha. \qquad (b)$$

由 (*a*)，(*b*) 兩式，可知質點的加速度，與作用於質點的力（或力系的合力）成正比。

伽氏由上述等加速直線運動試驗所得的結論，復經牛頓加以證實，並加以引伸，發表爲第二定律。

此定律對於質點受某力作用前的運動，並未加以限制；即某一力作用於某一質點，無論質點原爲靜止，或原有沿任何方向的任何運動，必產生某一定的加速度，與質點受到此力前的運動情形無關。

同樣，此定律對作用於質點的力的數目，亦並未加以限制：任何共點力系，同時作用於一質點，則力系中每一個力，均各產生沿該力方向與該力大小成正比的加速度，與各該力單獨作用時所產生的結果，完全相同。故質點的合加速度，應等於力系各力單獨產生的加速度的矢量和。但此種加速度均沿各力的作用方向，並均與各力的大小成正比，故合加速度必與共點力系合力的大小成正比，並沿合力的方向。

設作用於質點的力系，並無合力，則加速度等於零，質點或爲靜止，或爲等速直線運動．由此可知，第一定律可以說是第二定律的一特例．（註）

3. 由第一，第二兩定律，已可決定一質點受力後的運動情形．但研究一組質點或剛體的運動，必須用到第三定律，詳第 108 節．

馬拉車（作用），車亦拉馬（反作用）；磁吸鐵（作用），鐵亦吸磁（反作用）；人推桌子（作用），桌子亦推人（反作用）；脚使足球前進（作用），足球使脚後退（反作用）；任何作用力，必有一相等、相反、共線的反作用力．一個力不能單獨存在，力必須是成對的．作用力與反作用力，如成對地作用於同一物體，則不發生任何外效應；反之，如分別作用於兩

註　第一定律，另具有其他重要的物理意義，不能歸併爲第二定律

個物體，則各照第二定律改變兩物體的運動． 牛頓第二定律，能加以引伸，使可應用於物體的運動，卽全賴第三定律．

**103．牛頓第二定律的數學陳述．單位**　牛頓第二定律，可用數學公式表示如下：

$$F=kma,$$

式中 $a$ 代表質點的加速度；$F$ 代表作用於質點的力，或力系的合力；$m$ 代表質點的質量；$k$ 爲一常數，其値隨所用的單位而定． 本書中，普通用 $M$ 表示一物體的質量，用 $m$ 或 $dM$ 表示物體中一質點的質量．

爲計算時方便起見，動力學中所用單位，適使常數 $k$ 等於 1． 卽 1 單位的力，作用於 1 單位的質量，產生 1 單位的加速度． 工程中，普通取力與加速度的單位爲基本單位，故質量的單位爲導出單位；卽受 1 單位力作用適能產生 1 單位加速度的質量，取爲單位質量，使 $m=F/a$. 此種單位制度名爲**重力制**(Gravitational system)．

因 $m=F/a=W/g$，如力的單位爲磅，加速度的單位爲呎/秒²，則 1 磅力作用於重 1 磅的物體，所產生的加速度爲 32.2 呎/秒²；而 1 磅力作用於重 32.2 磅的物體，所產生的加速度爲 1 呎/秒²；故英美工程界選取重 32.2 磅的物體的質量爲單位質量，名爲'g 磅'($g$-pound，或 geepound)，或名爲**斯勒**(Slug)． 同理，如以瓩爲力的單位，米/秒² 爲加速度的單位，則可用重 9.8 瓩的質量作爲單位質量．

設取力的單位爲導出單位，而以質量、長度、與時間，作爲基本單位，則名爲**絕對制**(Absolute system)　例如，以 1 克重的物體的質量作爲單位質量，長度用糎，時間用秒，則使 1 克質量產生 1 糎/秒² 加速度所需的力取爲 1 單位力，名爲**達因**． 各種單位制，可列表如下(表中肥體的字代表基本單位)：

| 單位制名稱 | | 長度 | 時間 | 力 | 質量 | 採用者 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 英制 | 重力制 | 呎 | 秒 | 磅 | 磅·秒²/呎(斯勒) | 英制各國工程界 |
| | 絕對制(fps) | 呎 | 秒 | 磅·呎/秒²(磅達 poundal) | 磅 | 無人採用 |
| 公制 | 重力制 | 米 | 秒 | 瓩 | 瓩·秒²/米 | 公制各國工程界 |
| | 絕對制(mks) | 米 | 秒 | 瓩·米/秒²(大達因 Dyne) | 瓩 | 全世界各國物理學界 |
| | 或 cgs) | 糎 | 秒 | 克·糎/秒(達因 dyne) | 克 | |

**104. 質點的運動方程式** 圖 350 示一共點力系，有 $F_1, F_2, F_3$ 等力，作用於質量爲 $m$ 的質點，而產生加速度 $a$. 本節中所擬求出者，卽爲作用於質點的力、質點的質量、與質點的加速度三者間的關係. 令力系的合力爲 $R$，其與坐標軸 $x, y$，與 $z$ 所成的角度，令各爲 $\theta_x, \theta_y$，與 $\theta_z$. 由牛頓第二定律，知 $R=ma$. 此式等號左右，各乘以 $\cos\theta_x$，得

$$R\cos\theta_x = ma\cos\theta_x \quad 或 \quad R_x = ma_x.$$

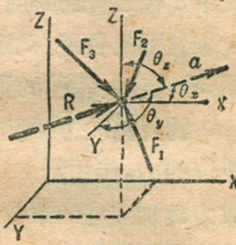


圖 350.

但 $R_x$ 爲力系各力沿 $x$ 軸向分力的代數和，卽 $R_x=\Sigma F_x$，故得 $\Sigma F_x = ma_x$. 同理，可求出沿 $y$ 軸向與 $z$ 軸向的類似關係。故質點的運動方程式爲

$$\Sigma F_x = ma_x,$$
$$\Sigma F_y = ma_y,$$
$$\Sigma F_z = ma_z.$$

**105. 解答動力學習題的步驟** 解答動力學習題時，最好依照下述步驟. 下列各例題，卽依照所述步驟加以解答；題中所指物體，均可視爲質點. 但關於剛體運動的習題，亦可用同樣步驟解答，詳第九章.

解題主要步驟，分述如下：

(1) 細讀題目，確知何者爲已知量，何者爲待求量. 最好先畫一草圖，已知與待求各量，卽在圖上標明. 解題中所遇困難，常因此步工作的疏忽而起.

(2) 物體的運動情形須待解答中決定者，先畫出完全的分離體圖（畫法詳第 40 節）. 卽畫出此物體，及（其他各物體）作用於此物體的所有各力. 由此步工作，卽可決定各運動方程式的左項 ($\Sigma F_x$, $\Sigma F_y$ 等).

(3) 妥善選擇坐標軸，並寫出運動方程式. 坐標軸須在分離體圖中畫出. 普通選取一軸與質點的加速度平行，並與加速

度同指向，常較方便：如此則沿其他各軸向均無加速度，且運動方程式的右項可有正值．同理，如物體有迴轉運動，最好選取一軸與代表角加速度的矢量平行，並同一指向．

(4) 觀察已寫出各運動方程式，是否足够完全求出各未知量。如方程式的數目，少於未知量的數目，卽設法加寫其他方程式（例如運動學的方程式等），並解各方程式，求出全數未知量．

(5) 如習題包括幾個物體的運動，而由一個物體所能寫出的方程式，並不能求出各未知量，可取另一物體（或一組物體）爲分離體，作用於此分離體的某一個（或多個）力，與作用於第一分離體的相同． 將此分離體依照上述四步驟，寫出所有各方程式． 聯立解出此二組方程式，往往已可決定全數未知量．

注意：下列例題中，假定各運動物體，均可作爲質點看待． 解答時，並特別強調說明上述各步驟．

## 例　　題

433. 圖 351． 無重量（或重量可略去不計）不伸長（或伸長可略去不計）的軟繩，跨過光滑的水平圓柱面，兩端懸有物體 $A$ 與 $B$。 $A$ 重 40 磅，$B$ 重 30 磅．試求繩內拉力．

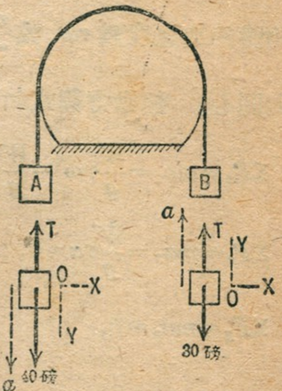



圖　351

解　因圓柱面並無摩擦力，繩又絕對柔軟，故全繩內拉力完全相同．又因此繩毫無伸長，故 $A$ 與 $B$ 的加速度，必大小相等． 是以同一未知量，拉力 $T$，作用於 $A$，亦作用於 $B$．$B$ 的分離體圖，示如圖 351 右下角．照第 105 節(3)，選取坐標軸，可寫出一個

運動方程式，即

$$\Sigma F_y = ma_y \text{ 或 } T-30=\frac{30}{32.2}a. \qquad (1)$$

式中有兩個未知量，故僅用上式，不能求出 $T$ 值. 照第 105 節(5)，另作 $A$ 的分離體圖(作用於 $A$ 的力系，亦包括拉力 $T$). 於是又可寫出一個運動方程式，即

$$\Sigma F_y = ma_y \quad \text{或} \quad 40-T=\frac{40}{32.2}a. \qquad (2)$$

聯立解(1)，(2) 兩式，可得

$$T=34.3\text{ 磅}; \qquad a=4.60\text{ 呎/秒}^2.$$

434. 一小物體重 4 磅，懸於軟繩的下端. 繩長 5 呎，以等角速 $\omega$ 繞垂直線迴轉，圖 352. 如繩與垂直線成 30° 角，試求繩內拉力 $T$ 與物體的線速 $v$.

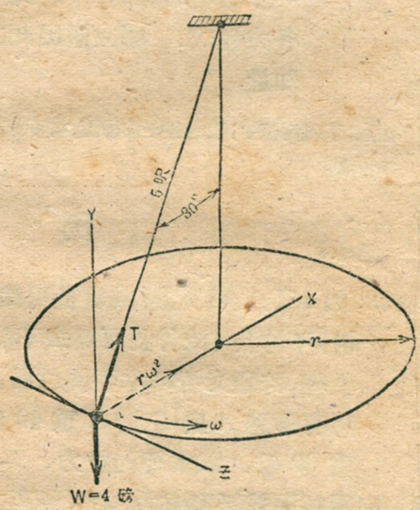


圖 352.

解 此物體沿水平面圓周等速運動，在任一瞬時，均受兩個力作用，即 $T$ 與 $W$，示如圖 352. 物體的加速度爲 $r\omega^2$，或 $\frac{v^2}{r}$，朝向圓心。運動方程式如下：

$$\Sigma F_x = ma_x = \frac{W}{g}r\omega^2 = \frac{W}{g}\frac{v^2}{r}, \quad (1)$$

$$\Sigma F_z = ma_z = \frac{W}{g}r\alpha = 0, \quad \because \quad \alpha=0, \quad (2)$$

$$\Sigma F_y = ma_y = 0, \qquad \because \quad a_y = 0. \qquad (3)$$

由(1)式得 $$T\cos 60^\circ = \frac{4}{32.2}\times\frac{v^2}{5\sin 30^\circ} \qquad (4)$$

由(3)式得

$$T\cos 30^\circ-4=0 \qquad \therefore \quad T=4.62\text{ 磅}. \qquad (5)$$

以(5)式的 $T$ 值代入(4)式，可求出 $v$. 卽

$$4.62\cos 60^\circ=\frac{4}{32.2}\times\frac{v^2}{5\sin 30^\circ}.$$

得
$$v^2=\frac{4.62\times 0.5\times 32.2\times 5\times 0.5}{4}=46.3.$$

故
$$v=6.8\text{ 呎/秒}.$$

435. 圖 353. $B$ 桿下端，支於水平的光滑銷釘 $O$，上端固連一小物體 $A$；$B$ 桿質量可略去不計. 設自垂直靜止位置，使 $A$ 與 $B$ 稍向右移，然後讓其圍繞 $O$ 自行轉動，試證 $B$ 至水平位置時，$A$ 的線速爲 $\sqrt{2gr}$.

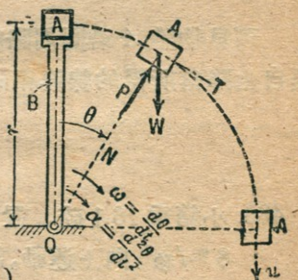



圖 353.

**解** 作用於 $A$ 的力爲：重量 $W$，與 $B$ 桿對於 $A$ 的反力 $P$. 分離體圖示如圖353. $A$ 的運動方程式如下：

$$\Sigma F_t=ma_t \text{ 或 } W\sin\theta=\frac{W}{g}r\frac{d^2\theta}{dt^2}, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_n=ma_n \text{ 或 } W\cos\theta-P=\frac{W}{g}r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2. \qquad (2)$$

由(1)式知

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{g}{r}\sin\theta. \qquad (3)$$

(3)式左右兩邊，各乘以 $\dfrac{d\theta}{dt}$，可得

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{g}{r}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}. \qquad (4)$$

(4)式對 $t$ 積分之，結果爲

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-\frac{g}{r}\cos\theta+C.$$

因在 $\theta=0$ 的位置，$\frac{d\theta}{dt}=0$；故積分常數 $C=\frac{g}{r}$。

代入上式得

$$\omega=\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{r}(1-\cos\theta)}\ .$$

$B$ 桿成水平時，$\theta=\frac{\pi}{2}$，　$\omega=\sqrt{\frac{2g}{r}}$。

此時 $A$ 的線速為

$$v=r\omega=r\sqrt{\frac{2g}{r}}=\sqrt{2gr}.$$

可見物體 $A$ 沿圓周路線，到達 $O$ 點水平面時的線速，與沿垂直直徑自由降落所得的線速相同。

## 習　題

436. 小箱重 16.1 磅，置於昇降梯的地板上． 如昇降梯以等加速度 8 呎/秒$^2$，向上運動，試求地板所受的壓力。

答　$P=20.1$ 磅.

437 氣球重 400 磅，其垂直方向的分加速度為向上 2 呎/秒$^2$． 水平方向的風壓，使氣球沿與垂直線成 30° 角的斜向上昇． 試求氣球的水平分加速度，及其所受的水平風壓．

答　1.15 呎/秒$^2$；14.35 磅.

438. 一繩下端，懸物重 120 磅，以等加速度向下降落． 如繩所能承受的最大拉力為 80 磅，問向下加速度最小應為若干？

答　$a=10.73$ 呎/秒$^2$.

439. 圖 354． 物體 $A, B$，與 $C$，各重 10 磅，20 磅，與 30 磅． 聯接 $B$ 與 $C$ 的繩，繞過無重量無摩阻力的滑輪． 如水平面與物體 $A, B$ 的摩擦

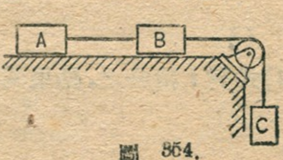


圖 354.

係數爲 0.2，試求物體的加速度，及聯接 $A$ 與 $B$ 的繩內拉力。

答 $a=12.9$ 呎/秒$^2$；$T=6$ 磅。

440. 某人在地面上，僅能舉重 150 磅；而在以某等加速度向下運動的電梯內，則能舉重 200 磅。試求電梯的加速度。設在向上加速（加速度的大小與前相同）的電梯內，問此人能舉重若干？

441. 一物體以初速 2400 呎/分，沿與水平面成 $20°$ 角的斜面，向上投出。設物體與斜面的摩擦係數爲 0.2，問物體在靜止前共經若干距離？是否即維持靜止？如不能維持靜止，問需若干時間方能自最高點回至原處（即斜面下端）？

答 $s=46.9$ 呎；否；$t=4.35$ 秒。

442. 汽車重 3000 磅，沿水平公路，以等加速度於 6 秒鐘內由 10 哩/時加速至 40 哩/時。如空氣阻力可略去不計，試求路面作用於輪胎的水平分力。 答 $F=683$ 磅。

443. 圖 355。物體 $B$ 重 12 磅，自 $O$ 點垂一軟繩，下端懸有小球 $A$，重 4 磅。設有作用於 $B$ 的水平力 $P$，徐緩增加至 8 磅後維持不變，$B$ 與水平面的摩擦力可略去不計，試求軟繩與垂直線所成的角度 $\theta$。 答 $\theta=26°34'$。

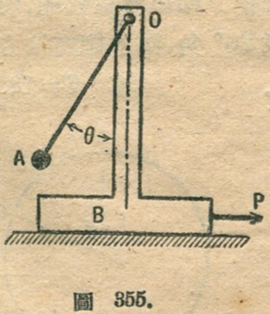



圖 355.

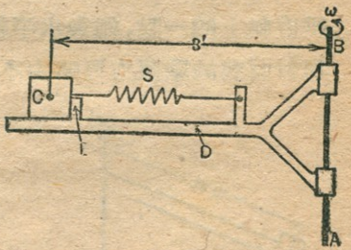



圖 356.

444. 圖 356。剛架 $D$ 以等速 30 轉/分繞垂直軸 $AB$ 迴轉。物體 $C$ 重 10 磅，在未迴轉時，彈簧 $S$ 的拉力爲 20 磅。如 $C$ 與 $D$ 的摩擦力可略去不計，試求在迴轉時 $C$ 作用於 $E$ 的壓力。

445. 小物體 $A$，重 4 磅，以長 2 呎的無重軟繩繫於 $O$ 點，圖 357．$A$ 在垂直平面內繞 $O$ 點沿圓弧運動．如在 $\theta=30°$ 時，繩內拉力爲 6 磅，試求此時 $A$ 的線速．　　　答　$v=6.39$ 呎/秒．

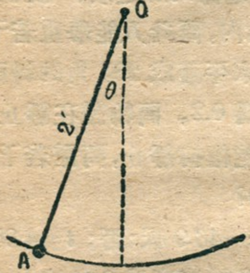



圖 357.

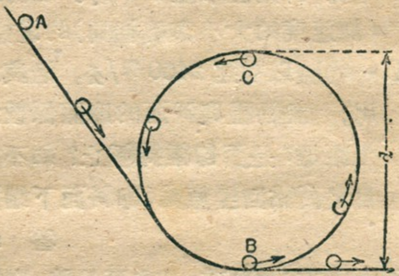



圖 358.

446. 圖 358．鋼球自 $A$ 點滑下，至 $B$ 點後走入垂直平面內的環形軌道．如至 $C$ 點時，鋼球並不脫離軌道，試證明此時鋼球的最小線速應爲 $\sqrt{\dfrac{gd}{2}}$．假定摩擦力可略去不計．

447. 小物體重 12 磅，置於傾角 20° 的斜面上，圖 359．斜面與物體共同以等角速 20 轉/分繞垂直軸迴轉．如以無重軟繩，將物體繫於垂直軸上的一點，繩與水平線成 20° 角，試求繩內拉力 $T$．物體與斜面間的摩擦力可略去不計．　　　答　$T=18.5$ 磅．

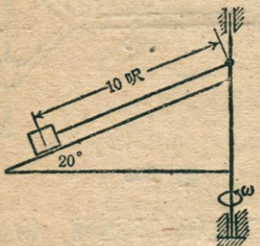



圖 359.

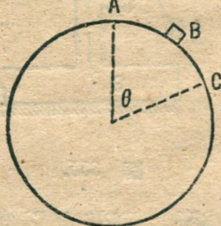



圖 360.

448. 小物體 $B$，靜止於光滑球面的頂點 $A$，圖 360．稍加移動後，即自

行沿球面滑動，到達 $C$ 點後與球面脫離． 試求 $\theta$ 角．

答　$\theta=\cos^{-1}\frac{2}{3}=48°11'$.

449. 物體 $A$ 重 $W$ 磅，懸以直徑 $d$ 的無重軟繩，圖 361．捲軸以等角速 $\omega$ 弧度/秒 迴轉時，設物體 $A$ 沿垂直線上昇，試求繩內拉力．

答　$T=W\left(1+\frac{\omega^2 d}{2\pi g}\right)$.

450. 圖 362 所示單擺，球重 1 磅，線長 2 呎，先用手使其靜止於位置 1．釋放後，擺動至垂直位置時，線的中點被一木釘所阻止，故僅有線的下段隨球擺動至最右位置 2．試求由位置 1 至位置 2 所歷時間，並計算在位置 2 時線內的拉力．

答　$t=0.67$ 秒；$P=0.732$ 磅．

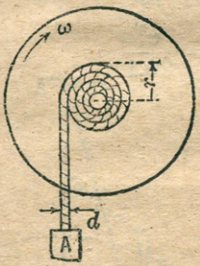


圖 361.

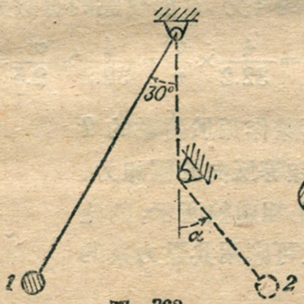


圖 362.

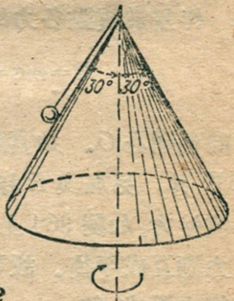


圖 363.

451. 正圓錐頂角 $2\alpha=60°$，圖 363，以等角速 $N$ 轉/分 繞垂直錐軸迴轉． 從頂點用細線懸一質點，重 1 磅，亦隨同迴轉．(a) 試求計算線內拉力 $P$ 與質點作用於錐面的壓力 $Q$ 的方程式．(b) 用適當比例尺，畫出 $P-N$ 與 $Q-N$ 曲線，比例尺須在圖上標明．

答　$P=0.866+0.85N^2l10^{-4}$ 磅；

$Q=0.500-1.47N^2l10^{-4}$ 磅．

**106. 慣性力法**　第 104 節中，已經指出，作用於質點的力系，其合力為一個力，如質點的質量為 $m$，所產生的加速度為 $a$，則合力的大小等

於 $ma$,其方向與 $a$ 相同.其次,因作用於質點的各力必成共點力系,故合力的作用線必經過質點. 是以除實際力系外,設另有一假想力,與 $ma$ 大小相等方向相反,同時作用於質點,則質點將成平衡,而平衡方程式卽可應用於動力學問題的解答. 此假想力$(-ma)$名爲質點的**慣性力**. 因合力$(ma)$名爲質點的**有效力**(Effective force),故$(-ma)$亦稱爲**逆有效力**. 讀者須深徹瞭解,慣性力是假想力,實際上並無此力作用於質點. 加上此假想力,不過使動力學習題,可以應用平衡方程式,求出解答,方法上有時較爲簡捷而已.

## 例 題

452. 試用慣性力法解答題 434.

**解** 作用於質點各力的合力 $R$(卽質點的有效力)爲

$$R=ma=\frac{4}{32.2}\times\frac{v^2}{r}=\frac{4}{32.2}\times\frac{v^2}{2.5}=\frac{v^2}{20.1},$$

方向朝圓心 $O$. 如實際作用於質點的 $T$ 與 $W$ 外,另加與 $R$ 相等反向的假想力,卽慣性力,如圖 364 上粗虛線所示,則此三力應互成平衡.故可應用共點力系的平衡方程式,卽

$$\Sigma F_y=T\cos 30°-4=0,$$

$$\therefore\quad T=4.62 \text{ 磅}.$$

$$\Sigma F_z=4.62\sin 30°-\frac{v^2}{20.1}=0,$$

得 $v^2=46.4$, 或 $v=6.8$ 呎/秒.

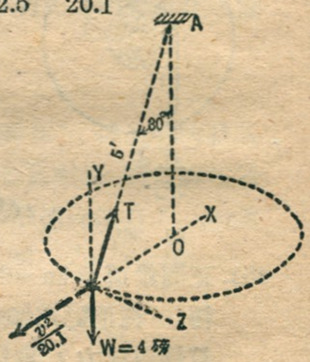



圖 364.

## 習 題

453. 試用慣性力法解答題 447.

454. 物體 $A$ 與 $B$,各重 48 磅與 32 磅,置於光滑的水平架上, 圖 365.

物體與架共同以等角速 40 轉/分繞垂直軸迴轉. 試求 $E$ 作用於 $B$ 的壓力. 假定水平架 $E$ 作用 $A$ 於 $B$ 的摩擦力可略去不計.

答　$R_E=26.1$ 磅.

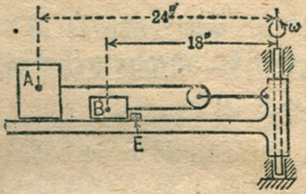



圖 365.

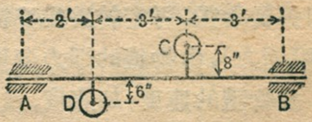



圖 366.

455. 圖 366. 球 $C$ 與 $D$, 各重 8 磅與 12 磅, 固聯於轉軸 $AB$, 圖 366, 共同以等角速 100 轉/分迴轉. 設軸與連桿的重量, 均可略去不計, 試求在圖示位置, 軸承 $A$ 與 $B$ 的反力.

**107. 與位移成比例的力. 自由振動**　作用於週期運動或振動物體的力系, 其合力常為物體位移的函數. 彈簧所作用的拉力或推力, 其大小即與聯接於彈簧端物體的位移成正比. 本節目的, 在使讀者對物體的週期性直線運動, 先作一簡略的研究(較詳盡的討論, 見第十二章). 作用於此種物體的合力, 其大小與物體對於動路上某固定點的位移成正比.

圖 367 示一小物體(作為質點看待), 重 $W$, 懸於螺線彈簧的下端, 使彈簧有一靜力伸長 $\delta_{st}$(註), 物體在靜力平衡的位置. 設用手

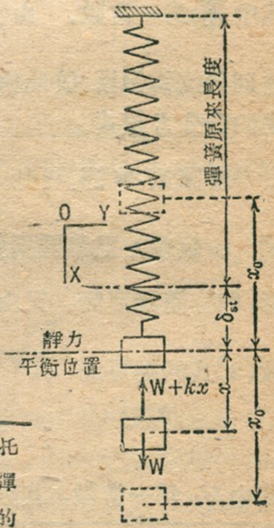



圖 367.

註　將物體懸掛至彈簧下端時, 物體重量先用手全部托住, 徐緩釋放, 使彈簧陸續伸長, 直至物體重量適與彈簧的拉力成平衡, 物體靜止不動. 物體靜止時彈簧的伸長, 名為靜力伸長.

將物體徐緩下拉，使有向下位移 $x_0$（自平衡位置量起）時，靜止後突然放手，則物體將作週期性的上下運動．物體所受的力，仍僅為重力與彈簧拉力．

物體在振動中的任一位置，位移為 $x$，自物體的靜力位置量起，假定向下者為正，向上者為負；作用於物體的力，示如分離體圖（圖 367）．$k$ 即彈簧常數，可定義為使彈簧伸長（或縮短）一單位長度所需的拉力（或壓縮力），由物體的靜力平衡條件，可知 $k=W/\delta_s$.（註）

設物體的速度，加速度，及所受的力，均以向下為正，向上為負，則物體的運動方程式，$\Sigma F_x=ma_x$，可寫為

$$-(W+kx)+W=\frac{W}{g}a_x=\frac{W}{g}\frac{d^2x}{dt^2}. \tag{1}$$

簡化之，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{kg}{W}x, \tag{2}$$

式中 $\frac{kg}{W}$ 為一常數．由(2)式知，物體的加速度與位移 $x$ 成正比，而指向則與位移相反；故此物體的運動為簡諧運動．(2)式即質點的簡諧運動的微分方程式．

參閱第 86 節，可知 (2)式中的 $\frac{kg}{W}$，相當於 $a=\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ 式中的 $\omega^2$；$\omega$ 代表一點沿圓周運動對於圓心的角速，此點在任一直徑上的投影，即作簡諧運動．又由第 86 節，已知 $\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$ 的解為 $x=r\cos\omega t$，故(2)式的解可為

$$x=C_1\cos\sqrt{\frac{kg}{W}}\,t, \tag{3}$$

式中 $C_1$ 為一常數，其值隨物體始動時的情形而定．本節中已假定將

註　較廣義地說，彈簧常數等於使物體恢復原來平衡位置的力，除以物體此時的位移．

物體徐緩下拉至 $x_0$ 時靜止後突然放手，如振動的時間即從此時開始計算，則在 $t=0$ 的時候，$x=x_0$，$v=0$．以 $t=0$ 與 $x=x_0$ 代入(3)式，可得 $C_1=x_0$．故知質點在自由振動中，位移 $x$ 與時間 $t$ 的關係爲

$$x=x_0\cos\sqrt{\frac{kg}{W}}t, \tag{4}$$

式中的 $x$ 與 $x_0$，均爲物體自靜力平衡位置量出的距離或位移．

(4) 式中 $x$ 的最大值，名爲振幅，通常以 $A$ 代表之．因 $\cos\sqrt{\frac{kg}{W}}t$ 的最大值等於 1，故 $A$ 即等於 $x_0$。

物體完成一次振動所需的時間，名爲週期，通常以 $T$ 代表之．即 $\cos\sqrt{\frac{kg}{W}}t$ 之值繼續變更，經過所有各值後，又復回至原值時，所費的時間．故 $T$ 即算式 $\sqrt{\frac{kg}{W}}t=2\pi$ 中的 $t$ 值，得

$$T=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}}. \tag{5}$$

可見振動週期僅隨物體重量與彈簧常數的比例而定，與振幅的大小無關．如物體輕，彈簧強，則振動的週期短；反之，如物體重，彈簧弱，則振動的週期長．如物體重量與彈簧常數，同比例增減，則振動週期維持不變．

週期的倒數，即在每單位時間內所完成的振動次數，名爲頻率，以 $f$ 代表之，

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \tag{6}$$

應用(5)，(6)兩式，即可由極易量取的 $\delta_{st}$，計算自由振動的週期與頻率．

讀者必須注意，上列各式，僅能應用於無阻尼的自由振動(Free vibration without damping)，振動的物體，除其本身的重量(即地球作用於物體的重力)外，僅受到一個或一組彈簧所作用的力，此力的大小

與物體的位移成正比，其方向必使物體回復至靜力平衡的位置。如除上述二力外，物體在運動時將遇到與速度方向相反的阻力，例如浸在液體中的物體的振動，則爲**阻尼振動**(Damped vibration)；與速度反向的阻力，名爲**減振力**或**阻尼力**。如除彈簧力與物體的重力外，振動的物體，同時另受一週期性的力所作用，則物體的運動，不論同時有無摩阻力作用，均名爲**強迫振動**(Forced vibration)；此力的週期如適與振動系的**固有週期**(Natural period)，即由(5)式算出的週期，相等，則此種運動情形，稱爲**共振**(Resonance)。上列各式，對於阻尼振動與強迫振動，均不能應用。(註)

在機器與結構中，共振現象，普通須竭力設法避免；但有時則故意引起共振，加以利用。游泳池旁的跳板，一端固着，一端懸空；跳水者(尤其是在空中連翻觔斗的花式跳水者)跑至懸空端後，往往上下搖擺若干次，使板端振幅因共振而增大至某一程度，然後縱身一躍。伐木者在近根的樹幹上，用鋸斧砍出深槽後，往往卽自幹梢繫出兩繩，各沿左右斜向拉動，至樹梢向前彎至某一程度時，將繩放鬆，樹梢卽向後回彈；迨樹梢開始向前振動時，兩繩又復緊拉；如是反復多次，樹幹振幅因共振而繼續增大，至在樹根附近折斷爲止。盪鞦韆者利用身體的屈曲與伸直，亦可因引起共振而愈盪愈高。此種共振現象的利用，全憑直覺與經驗，理論說明詳第十二章。

## 例 題

456 重 800 磅的機器，靜置於重 200 磅的平台上。平台四角支以完全相同的四個彈簧。另有 100 磅力，垂直向下，作用於平台的中心，使彈簧均各縮短 $\frac{1}{4}$ 吋。設將 100 磅力突然除去，則平台將上下振動(假定僅有平移，並無迴轉)。試求頻率與振幅。

解 此振動系的彈簧常數爲

$$k=\frac{100}{\frac{1}{4}}=400 \text{ 磅/吋}.$$

註 自由振動與強迫振動，各可分爲有阻尼的與無阻尼的。

由(6)式知頻率 $f$ 爲

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{400\times(12\times 32.2)}{1000}}=1.98\ \text{週/秒}.$$

因 $k$ 的單位爲磅/吋，故 $g$ 的單位須爲吋/秒$^2$.

振動的振幅，卽(4)式中的 $x_0$，等於 $\frac{1}{4}$ 吋.

## 習　題

457. 一螺線彈簧，上端固着，下端垂重量 20 磅，彈簧伸長 2 吋. 設將 20 磅重量，用手托住，使彈簧恢復其原來長度後，突然放手. 試求此物體運動的振幅與頻率.　答　$A=2$ 吋；$f=2.21$ 週/秒.

458. 汽車底盤每彈簧荷重 $P$ 磅，縮短 3 吋. 如另有一垂直力使彈簧增加壓縮後卽突然除去，試求汽車振動的頻率.

答　$f=1.81$ 週/秒.

459. 一均質稜柱形桿，重 60 磅，用兩彈簧支於水平位置，示如圖368. 設將桿自靜力平衡位置，下拉 3 吋，然後突然釋放，令其自由振動，則其頻率爲 2.21 週/秒. 設兩端的彈簧完全相同，此桿僅有平移運動(並無迴轉)，試求每彈簧的彈簧常數.

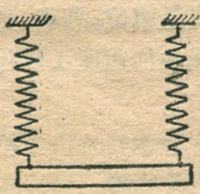


圖 368.


圖 369.

460. 圖 369 示一單擺(Simple pendulum). 無重細線，長 $l$；下端懸一小球 $A$，重 $W$. 如用手使球(與繩)靜止於圖示位置後，突然釋放，則此球將左右擺動. 如 $\theta$ 爲極小角，球的動路可視爲直線，試證明：擺動的週期爲 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

提示：因 $\theta$ 角極小，故 $\sin\theta$ 可視為等於 $\theta$，使物體回復至平衡位置的力為 $P\sin\theta=P\theta$（近似）；方程式 $P\cos\theta=W$，亦可用 $P=W$（近似）代替．

461. 均質稜柱形桿，重 $W$（圖 370），置於兩個相同圓盤的頂緣，適成水平． 兩盤以相等的角速相向迴轉． 桿與盤緣間的摩擦係數為 $\mu$． 如將桿沿水平方向自對稱位置向右移動 $x$ 後，即讓其自由運動，試證明：(a)此桿將作簡諧運動，(b)計算摩擦係數的方程式為 $\mu=\dfrac{4\pi^2a}{gT^2}$．

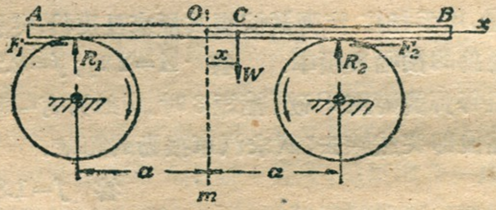



圖 370.

## 總 習 題

462. 定義：(a)物體的重量，(b)物體的質量．

463. 下述定義有無錯誤？ 工程中慣用的質量單位，斯勒，是一物體的質量，如有力 1 磅作用於此物體，將產生加速度 1 呎/秒²．

464. 用你自己的語句，陳述牛頓第二定律．
想比較兩小物體重量的時候，我們常會本能地依次把各物體在手中顛動． 此種方法，比僅用手托住各物體，何以會使我們得到比較準確的估計？

465 用你自己的語句，陳述牛頓第三定律。
說明馬拉車車亦拉馬，而馬與車仍能前進的原因．

466. 一人自高 50 呎的窗口，緣繩下地． 設此人重 150 磅，而繩的拉力不能大於 125 磅，求此人到達地面時的最低速度．

答 $v=23.2$ 呎/秒．

467 兩繩跨過一光滑的水平圓柱面，四端下垂．一邊的兩端，同繫於重 50 磅的物體；在另一邊，兩繩繩端各懸一物體，其重量各爲 40 磅與 30 磅．試求繩內拉力及物體的加速度．

答 $T_{30}=25$ 磅；$T_{40}=33.3$ 磅；$a=5.37$ 呎/秒$^2$．

468. 圖 371．軟鏈長 $l$，總重 $w_1 l$．一部份置於光滑水平的桌面上；另一部份垂直下懸．試求此鏈的運動方程式．

提示：此鏈可視爲兩質點組成，其重量各爲 $w_1 x$ 與 $w_1(l-x)$．假定在桌邊轉折處鏈內拉力爲 $T$，可分別寫出兩部份鏈的運動方程式．消去 $T$，即得所求的微分方程式．

答 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=g\dfrac{x}{l}$．

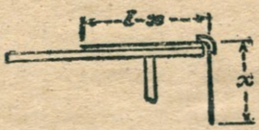



圖 371.

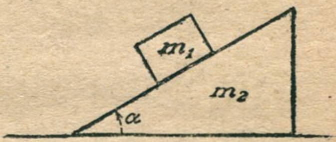



圖 372.

469 $\alpha$ 角尖劈質量 $m_2$，置於水平面上，圖 372．另一物體質量 $m_1$，沿斜面下滑．如摩擦力可略去不計，試求計算 $m_1$ 與 $m_2$ 的加速度的方程式．

提示：$m_1$ 與 $m_2$ 均可視爲質點．先求出位移 $x_1, y_1$ 與 $x_2$ 間的關係，然後對兩物體分別應用牛頓定律．

答 $\dfrac{d^2x_1}{dt^2}=g\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1+m_1\sin^2\alpha/m_2}$，向左；

$$\frac{d^2x_2}{dt^2}=m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}/m_2,\ \text{向右；}$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{d^2x_1}{dt^2}(1+m_1/m_2)\tan\alpha．$$

# 第九章 剛體動力學

**103. 緒論．分析方法** 在前章中已曾指出，動力學習題的普通性質，可陳述如下：物理物體，受一力系所作用，此力系有一合力，使物體的運動發生改變；普通習題中所須求出的，卽爲下列三者間的相互關係：(1)力系的合力，(2)物體的性質（質量，惰性，等），與(3)物體運動的改變．本章中所論剛體的各種運動，此三因素間的關係，均可用下述步驟求出：

(1) 將物體視爲一組質點所組成；任一質點的加速度 $a$，其大小與方向，均可應用運動學（第六章，第七章）的知識，由物體的運動情形決定．

(2) 由質點的加速度 $a$ 及其質量 $m$，卽可應用牛頓第二定律，求出產生此加速度所需的有效力，其大小爲 $R=ma$，方向與 $a$ 相同．但 $R$ 爲實際作用於質點的各力的合力，故 $R$ 又可由實際各力表示之．如此則質點的質量、加速度、與實際作用的力，三者間的關係卽可求出．

物體中，有的（大多數）質點，僅受內力的作用（除重力外），卽僅被同物體的其他質點所作用；有的質點，則受到內力與外力（其他物體所作用的力）同時作用．

(3) 已知物體中每一質點的有效力（大小與方向），卽每一質點的 $m$ 與 $a$ 的乘積，則全物體的有效力的合力，卽可用第二章所述的方法求出．作用於運動物體的力系，本章中均假定爲共面力系．故合有效力的特徵，可用三個方程式表示之，卽關於各有效力的 $x$ 軸向分力，$y$ 軸向分力，及對於某一軸的力矩．

(4) 第(3)步中，由各質點的有效力($ma$)，求出全物體的合有

效力；但合有效力亦爲作用於所有各質點的各力的矢量和，包括所有各內力與所有各外力．而在求全數各力的 $x$ 軸向分力代數和，$y$ 軸向分力代數和，與對於某軸的力矩代數和時，各內力均兩兩抵消，因同一物體中各質點互相作用的力，必相等、相反、共線(牛頓第三定律)，對整個物體，並不發生任何外效應．故知

作用於一物體所有各質點的有效力的合力，即合有效力，與此物體的外力的合力完全相同．或，

合有效力，如逆轉方向，與外力同時作用於物體，則此物體將成平衡．

以上兩種陳述，即達倫物原理 (D'Alembert's principle)．應用上列第二種陳述，可知僅須在運動物體上，除原有各外力外，另加一假想力，即可將動力學問題，改變爲靜力學的問題．第 106 節的慣性力法，即達氏原理的應用．

以上所論，假定物體與運動平面成對稱，故作用於各質點的有效力相當於在運動平面內作用的共面力系；所有各外力亦假定爲均在運動平面內作用．如此則物體的運動可用三個方程式完全決定．工程中最常遇到的動力學問題，關於剛體的平移、迴轉、與平面運動，大多均可用根據上述假定所得的三個方程式解答之．

但剛體運動，對上述各假定，不一定完全符合；如此則常須用到六個運動方程式，方能獲出完全的解答．

**109. 質點系的質心運動** 上節所列步驟，可先用以求出動力學的一重要原理，即質心運動原理．此原理對任何質點系，無論剛體或非剛體，均可應用．

設有一組質點(圖 373)，其質量各爲 $m', m'', m'''$ 等，各被任何力系所作用，沿任一方向作任何運動．質心運動原理即表示下述三者間的關係，作用於此質點系的外力，全質點系的質量，與質點系中一點，即質心，的加速度．此原理可導出如下：

圖 373 (*a*)中僅畫出三質點，爲方便起見，假定均在平面中運動．作用於每一質點使其發生加速度的力，示如同圖(*b*)．作用於每一質點的力，可分爲：**內力**，即質點系中其他質點作用於此質點的力；與**外力**，即此質點系以外的物體作用於此質點的力． 例如，圖 373(*b*)，作用於

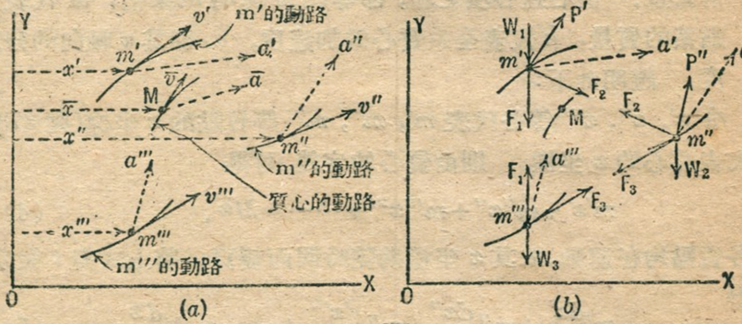



圖 373.

質點 $m'$ 的力有：內力 $F_1$ 與 $F_2$；外力 $W_1$（重力）與 $P'$.

第一步． 每質點的質量，假定均爲已知；$a'$, $a''$, $a'''$ 等各爲 $m'$, $m''$, $m'''$ 等的加速度．

第二步． 作用於任一質點的力系的合力，必等於 $ma$，其作用線經過質點，其方向與 $a$ 相同． 此合力沿任一 $x$ 軸向的分力爲 $ma_x$，等．

第三步． 作用於所有各質點的所有各力的合力，其 $x$ 軸向的分力爲

$$R_x = m'a_x' + m''a_x'' + m'''a_x''' + \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

第四步． 但此合力的 $x$ 軸分力，亦可由實際作用於所有各質點的各力表示之． 作用於質點的力包括外力與內力． 故

$$R_x = (\Sigma F_x)_{外力} + (\Sigma F_x)_{內力} = m'a_x' + m''a_x'' + m'''a_x''' + \cdots (2)$$

由牛頓第三定律，知$(\Sigma F_x)_{內力}=0$，因全質點系的內力必成對地作用，每對內力均相等、相反、共線，而互相抵消．故如以 $\Sigma F_x$ 代表外

力的 $x$ 軸向分力代數和,可得

$$\Sigma F_x = m'a_x' + m''a_x'' + m'''a_x''' + \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3)$$

上式右邊如逐項計算,必須先求出每一質點的加速度. 工作將異常繁重. 但右邊各項之和,即等於 $M$ 與 $\bar{a}_x$ 的乘積: $M$ 代表全質點系的質量, $\bar{a}$ 代表全系質心的加速度, $\bar{a}_x$ 即其 $x$ 軸向的分加速度. 證明如下:

令 $x'$, $x''$, $x'''$ 等各代表 $m'$, $m''$, $m'''$ 等質點的 $x$ 坐標(圖 373 $a$), $\bar{x}$ 代表質心的 $x$ 坐標. 則由質心的定義,可得

$$m'x' + m''x'' + m'''x''' + \cdots\cdots = M\bar{x}. \qquad (4)$$

因各質點均在運動,故其 $x$ 坐標將隨時間而變更. 將上式對 $t$ 微分之,可得

$$m'\frac{dx'}{dt} + m''\frac{dx''}{dt} + m'''\frac{dx'''}{dt} + \cdots\cdots = M\frac{d\bar{x}}{dt}, \qquad (5)$$

或

$$m'v_x' + m''v_x'' + m'''v_x''' + \cdots\cdots\cdots = M\bar{v}_x. \qquad (6)$$

(6)式表示關於質點系動量的一重要原理,將於第十一章中用到.

將(5)式對 $t$ 微分之,即得

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} + m''\frac{d^2x''}{dt^2} + m'''\frac{d^2x'''}{dt^2} + \cdots\cdots = M\frac{d^2\bar{x}}{dt^2}. \qquad (7)$$

或

$$m'a_x' + m''a_x'' + m'''a_x''' + \cdots\cdots\cdots\cdots = M\bar{a}_x. \qquad (8)$$

故(3)式可寫為

$$\Sigma F_x = M\bar{a}_x.$$

同法,可求出沿 $y$ 軸向與 $z$ 軸向各量的方程式. 是以表示下述三者間關係的方程式(即作用於質點系的外力、全系的質量、與全系質心的加速度)為

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= M\bar{a}_x \\ \Sigma F_y &= M\bar{a}_y \\ \Sigma F_z &= M\bar{a}_z \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

如作用於質點系的外力,其合力為一個力,以 $R$ 代表之, 則上列三個方程式相當於下面的一個方程式

$$R = M\bar{a}, \qquad (10)$$

式中 $M$ 代表全質點系的質量，而 $\bar{a}$ 則代表全系質心的加速度.

(9)式，或(10)式，所表示的原理，有時名爲質**心運動原理**，可簡化許多習題的解答，在動力學中極爲重要， 此原理可用文字陳述如下：

> 設有不平衡的力系（外力），作用於一物體（無論剛體或非剛體），則力系的合力，如爲一個力，等於物體的質量與物體質心的加速度的乘積，合力的方向與質心加速度的方向相同.

但合力的作用線，普通並不一定通過物體的質心.

## §1. 平移運動

**110. 平移運動的剛體動力學** 剛體在平移中的運動方程式，可依照第108節所述的四個步驟求出之. 圖 374($a$)示一剛體，受 $P,W,N$ 等外力作用，而作平移運動. 假定此物體與運動平面成對稱；並爲方便起見，將物體視爲由許多小立方塊所組成，每塊體積極小，即可視爲一質點.

**任一質點的加速度**——因物體作平移運動，故所有各質點的加速度完全相同，令爲 $a$.

**作用於任一質點的有效力**——作用於任一質點的各力（圖上未畫出），使質點的質量 $m$ 產生加速度 $a$，其合力由牛頓第二定律知爲 $ma$，並與 $a$ 同方向. 此合力卽作用於一質點的有效力. 故各質點的有效力，$m_1 a$, $m_2 a$ 等(圖 374 $a$)，組成一共面平行力系.

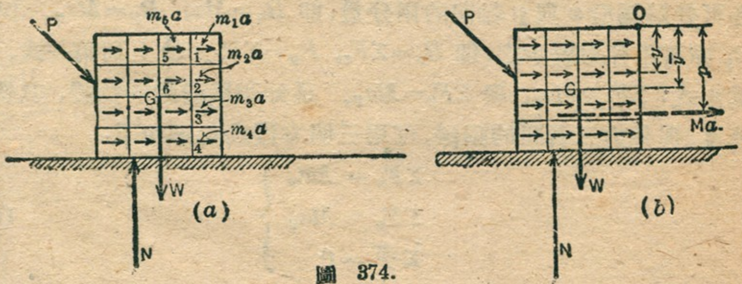



圖 374.

**有效力的合力**——有效力的合力爲一個力，可用第二章所述方法求出之：其大小等於 $\Sigma ma = a\,\Sigma m = Ma$，式中 $M$ 代表物體的質量；其方向與物體的加速度 $a$ 的方向相同． 合力的作用線可應用力矩原理（第26節）求出如下：圖 374 $(b)$，由任一點 $O$，至任一有效力 $ma$ 的作用線的距離，令爲 $y$；而至合有效力 $Ma$ 的作用線的距離，令爲 $p$．則

$$Ma\cdot p = \Sigma(ma\cdot y) = a\,\Sigma my, \tag{1}$$

或

$$p = \frac{\Sigma my}{M} = \frac{M\bar{y}}{M} = \bar{y}, \tag{2}$$

式中 $\bar{y}$ 代表由 $O$ 點至物體質心的垂直距離． 故知合力的作用線應通過物體質心 $G$，而並非如圖 374 $(b)$ 中虛線所示的位置．

總結：平移運動的剛體，有效力的合力爲一個力，其大小等於 $Ma$，其作用線通過物體的質心，其方向與物體的加速度 $a$ 的方向同．

**有效力與外力的關係**——由達倫勃原理，可知各外力的合力，與各有效力的合力，完全相同，即：外力的合力亦爲一個力（令爲 $R$），與 $a$ 同方向，其大小等於 $Ma$，其作用線通過物體的質心 $G$． 因合力的作用線通過 $G$，故合力對於 $G$ 的力矩（即各外力對於 $G$ 的力矩的代數和）必等於零；以方程式表示之，即 $\Sigma\bar{T}=0$，$\bar{T}$ 代表外力對於 $G$ 的力矩．是知作用於平移剛體的外力，可用下列二式表示之：

$$\left.\begin{aligned} R &= Ma \\ \Sigma\bar{T} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

令 $x$ 與 $y$ 爲運動平面中互相垂直的任意二軸；上列第一式的左右兩邊，各可分解爲沿 $x$ 與 $y$ 軸向的兩分量，即 $R_x = Ma_x$，$R_y = Ma_y$． 但 $R_x$ 與 $R_y$ 亦可用外力表示之，即 $R_x = \Sigma F_x$，$R_y = \Sigma F_y$．故上列第一式，可分寫爲兩式：$\Sigma F_x = Ma_x$，與 $\Sigma F_y = Ma_y$．是知平移運動的物體，其質量、加速度、與外力三者間的關係，可用三個方程式表示如下：

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= Ma_x \\ \Sigma F_y &= Ma_y \\ \Sigma\bar{T} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

上列第一、二兩式，亦可由第 109 節(9)式直接寫出，因 (9) 式可以應用於任何物體(剛體或非剛體)的任何運動。

**慣性力法** 因有效力的合力($Ma$)，亦即外力的合力；故如在 $P, W, N$ 等外力之外，另加一逆有效力，即與 $Ma$ 相等、反向、共線的假想力，同時作用於物體，示如圖 375 ($b$)，則此物體將成平衡，而可應用平衡方程式

$$\Sigma F_x = 0,\ \Sigma F_y = 0,\ \Sigma M = 0。$$

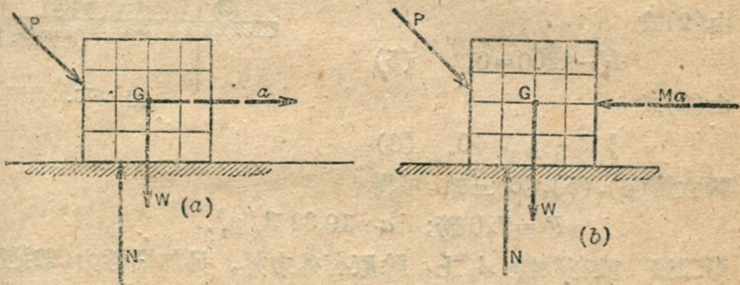



圖 375.

此假想力名爲物體的**逆有效力**或**慣性力**。 運動物體加上慣性力後，即可應用平衡方程式，將動力學問題改變爲靜力學問題。詳見下列各例。

注意：分析並解答動力學問題時，須依照第 105 節所列各步驟。

## 例題

470. 長方體 $A$，橫斷面 3 呎×3 呎，高 5 呎，重 1200 磅(圖 376)，置於水平車 $B$ 上。$B$ 有沿水平方向的加速度 $a$。設 $A$ 與 $B$ 間的摩擦力，足夠阻止滑動；欲使 $A$ 不致向後傾倒，問 $B$ 的加速度 $a$ 最大可至若干？

解 物體 $A$ 受兩個力，即重量 $W$ 與反力 $R$，所作用而作平移運動。爲方便起見，將 $B$ 作用於 $A$ 的反力 $R$，分解爲通過 $O$ 點的兩個分力：法線反力 $N$，與摩擦力 $F$；在物體即將傾倒時，$R$ 力必經過 $O$ 點。

**第一法** 物體 $A$ 的運動方程式為

$$\Sigma F_x = Ma_x, \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = Ma_y, \qquad (2)$$

$$\Sigma T = 0. \qquad (3)$$

取 $x$ 軸與 $a$ 同方向，則 $a_x = a$，而 $a_y = 0$.

由(1)式

$$F = \frac{1200}{32.2}a, \qquad (4)$$

由(2)式

$$N - 1200 = 0, \qquad (5)$$

由(3)式

$$\frac{5}{2}F - \frac{3}{2}N = 0. \qquad (6)$$

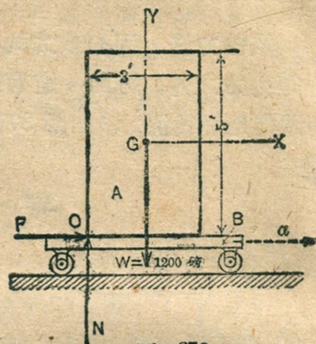


圖 376.

聯立解(4), (5), (6)三式，可得

$$F = 720\text{ 磅}; \quad a = 19.32\text{ 呎/秒}^2.$$

**第二法** 設在物體 $A$ 上，除原有外力外，另加慣性力(即逆有效力)，則 $A$ 將成平衡(達倫勃原理)，故可應用平衡方程式.

平移物體 $A$ 的慣性力為

$$Ma = \frac{1200}{32.2}a,$$

其方向與 $a$ 的相反，其作用線通過物體的質心. 此假想力與原有各外力，將使物體維持平衡，圖 377. 此力系的平衡方程式(第 44 節)為

$$\Sigma F_x = F - \frac{1200}{32.2}a = 0,$$

$$\Sigma F_y = N - 1200 = 0,$$

$$\Sigma M_o = \frac{1200}{32.2}a \times \frac{5}{2} - 1200 \times \frac{3}{2} = 0.$$

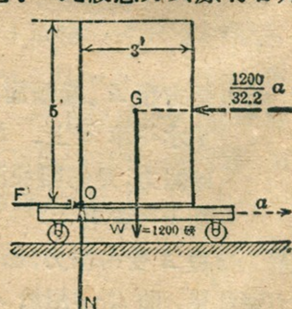


圖 377.

聯立解上列三式，結果與由第一法所得者

完全相同.

注意：用平衡方程式求解時，$\Sigma M_o=0$ 的力矩中心 $O$，可取運動平面上的任一點；但如用運動方程式求解，則必須用 $\Sigma T=0$，即必須取物體的質心，作爲力矩中心.

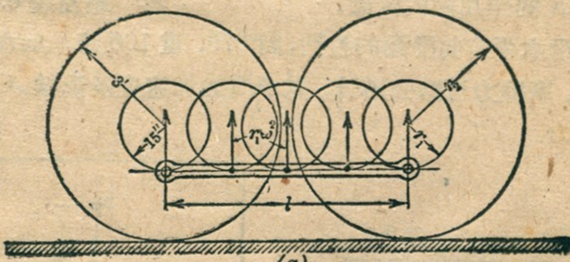
471. 機車輪上的平行桿，圖 378 ($a$)，重 400 磅．曲柄長 $r_1=15$ 吋，車輪半徑 $r_2=3$ 呎．如機車線速爲 50 哩/時，試求平行桿在最低位置時，曲柄銷對於平行桿兩端的反力.

**解**　在任一瞬時，平行桿上所有各質點的加速度，均彼此相等．平行桿在最低位置時，桿上各點對於機車底盤的加速度，垂直向上，其大小爲 $\omega^2 r_1$。角速度 $\omega$ 可求出如下：

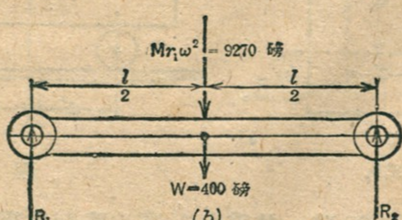
$$\omega=\frac{v}{r_2}=\frac{5280\times 50}{60\times 60}\times\frac{1}{3}=24.44\ \text{弧度/秒}.$$

全桿的合有效力，作用線通過桿的質心，其大小爲

$$Ma=M\omega^2 r_1=\frac{400}{32.2}\times(24.44)^2\times\frac{15}{12}=9270\ \text{磅}.$$



($a$)



($b$)

圖 378.

設將合有效力反向，並假想此逆有效力與桿的其他外力同時作用，示如圖 378 ($b$)，則力系將成平衡．

實際外力與假想的逆有效力，組成一平行力系．其平衡方程式（第 43 節）爲

$$\Sigma F=0, \qquad (1), \qquad \Sigma M=0。 \qquad (2)$$

用(1)式，

$$R_1+R_2-9270-400=0.$$

用(2)式，

$$R_1\times l-(9270+400)\times\frac{l}{2}=0。$$

故

$$R_1=R_2=4835 \text{ 磅}.$$

## 習　題

472. 設題 470 的小車 $B$ 與物體 $A$ 的加速度爲 10 呎/秒$^2$，試求法線反力 $N$ 的作用線的位置．　　　　答　距左邊 0.724 呎．

473. 可沿水平方向滑動的拉門，圖 379，重 160 磅．如水平力 $P=60$ 磅，摩擦力可略去不計，試求門的加速度及滾輪 $A$ 與 $B$ 所受的反力．

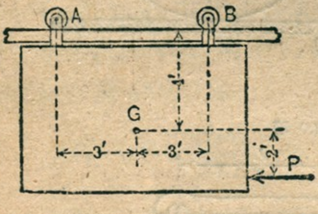



圖 379.

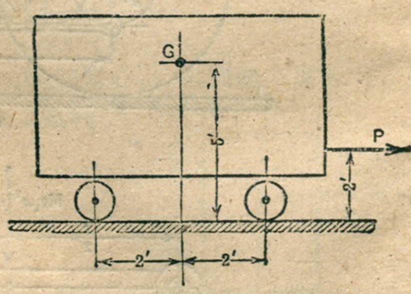



圖 380.

474. 四輪小車重 800 磅，其重心 $G$ 高出路面 5 呎，圖 380．水平力 $P=120$ 磅．如摩擦力可略去不計，試求小車的加速度及前後

每對車輪所受的反力．又如 $P$ 力的作用線通過重心 $G$，試求每對車輪所受的反力．　　答　$a=4.83$ 呎/秒$^2$；$R_1=310$ 磅；

$R_2=490$ 磅；$R_1=R_2=400$ 磅．

475. 圖 381． 均質稜柱形桿 $AB$，重 64.4 磅；上端用光滑銷釘，下端用無重彈簧 $DB$，與 $C$ 架相聯而成垂直．$C$ 重 128.8 磅．全系質心高出路面 18 吋，在 $F$ 左 3 吋．當有 $P$ 力作用時，$C$ 架(連同 $AB$ 桿)以等加速度 6 呎/秒$^2$ 沿光滑水平面滑動．試求 $P$ 力，及在 $E$ 與 $F$ 的反力．

答　$P=36$ 磅；$R_E=53.0$ 磅；$R_F=140.2$ 磅．

476. 試求上題中彈簧 $DB$ 的拉力．假定 $C$ 架沿水平面滑動時，$AB$ 桿的位置必成垂直．

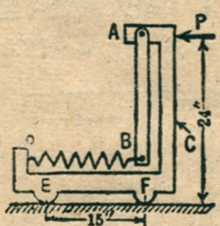



圖 381.

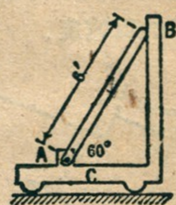



圖 382.

477. 圖 382． 均質稜柱形桿 $AB$，重 120 磅，下端用光滑銷釘與 $C$ 架相聯，上端斜倚於 $C$ 架的光滑垂直壁 $B$．欲使 $B$ 點桿端與直壁間的壓力等於零，試求 $C$ 架沿水平方向的加速度．

答　$a=18.6$ 呎/秒$^2$．

478. 均質圓片，半徑 4 呎，下緣置於光滑水平面上．除其本身重量及平面的反力外，設受圖 383 所示各力所作用，試證明：此圓片將沿水平面滑動而無滾動．又如圓片的加速度爲 8 呎/秒$^2$，試求圓片的重量及平面的反力．

答　$W=208$ 磅；$N=226$ 磅．

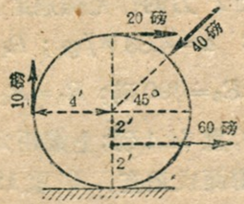



圖 383.

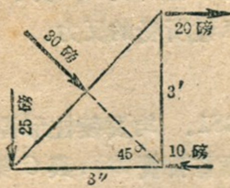



圖 384.

479. 均質立方體的一半，除本身重量 40 磅外，受力如圖 384 所示。各力均作用於物體的對稱平面內．試求此力系(包括重量)的合力及物體的加速度．

480. 圖 385．物體 $A$，重 644 磅，置於 20° 斜面上，摩擦係數為 0.2；以一軟繩，跨過無摩擦力無重量的滑輪後，與物體 $B$ 相連． 欲使 $A$ 沿斜面向上滑動而不傾倒，問 $B$ 的最大重量可至若干? 並求此時的加速度．　　答 $W=1340$ 磅；$a=16.2$ 呎/秒$^2$．

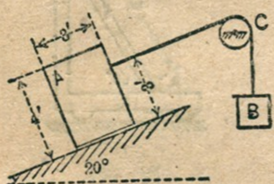



圖 385.

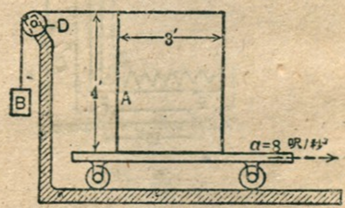



圖 386.

481. 圖 386．小車以等加速度 $a=8$ 呎/秒$^2$，沿水平方向運動．車上置有 3 呎 ×2 呎 ×4 呎的長方體 $A$，重 1000 磅． 如 $A$ 與車板間決無相對滑動，欲使 $A$ 不致傾倒，問 $B$ 的重量最大可至若干? 假定滑輪 $D$ 無摩擦力，亦無重量．

482. 如上題中 $B$ 重 100 磅，加速度 $a$ 為 8 呎/秒$^2$，試求 (車板作用於 $A$ 的)法線反力的作用線．　　答 距左邊 0.504 呎．

483. 圖 387．小車以等加速度 4.83 呎/秒$^2$，沿斜面向上行駛；車板適成水平，板上置一均質長方體，重 644 磅．試求作用於長方體的摩

擦力(假定並無滑動),法線反力,及距離 $b$.

答　89.2 磅; 681 磅; 0.804 呎.

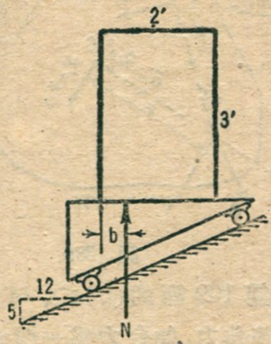



圖 387.

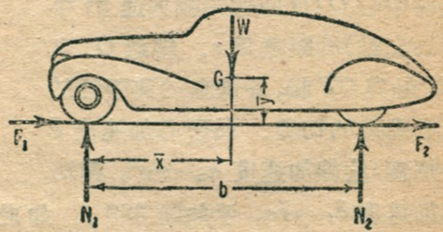



圖 388.

484. 裝有四輪制動閘的汽車, 圖 388, 刹車時適使前後各對車輪的摩擦力彼此相等, 即 $F_1 = F_2$; 而後輪即將對路面發生滑動. 如 $W = 3500$ 磅, $b = 112$ 吋, $\bar{x} = 68$ 吋, $\bar{y} = 28$ 吋, 車輪與路面的靜摩擦係數為 0.6, 試求由 60 哩/時刹車停止所需的最短距離, 並計算 $F_1$, $N_1$, $F_2$, 與 $N_2$ 等力.

答　215 呎; 981 磅; 1870 磅; 981 磅; 1630 磅.

## §2. 迴轉運動

**111. 迴轉剛體的動力學**　剛體繞一固定軸迴轉時, 其運動方程式, 亦可依照第 108 節所述步驟求出之. 但因質心運動的方程式, 可以應用於任何物體的任何運動(第 109 節), 故必可應用於剛體的迴轉運動. 本節中僅須加求另一方程式, 即包含各外力力矩的運動方程式.

應用質心運動方程式於剛體的迴轉, 可說明如下. 圖 389 示一剛體, 圍繞經過 $O$ 點的固定軸迴轉. 作用於剛體的外力計有: 重力 $W$, 力 $P_1$, 及迴轉軸的反力 $P$. 假定剛體與運動平面成對稱, 各外力亦均作用於運動平面內. 在任一瞬時, 體內所有各質點, 對於迴轉軸的角速

度 $\omega$ 與角加速度 $\alpha$, 完全相同;但各質點的線速度與線加速度, 則與自質點至迴轉軸的距離 $r$ 成正比. 令 $G$ 代表物體的質心, 其與迴轉軸或迴轉中心 $O$ ($O$ 即迴轉軸與運動平面的交點)的距離爲 $\bar{r}$. 經過 $O$, 取 $ON$ 軸與 $OT$ 軸, 各垂直於與平行於質心動路的切線. 將質心加速度 $\bar{a}$ 分解爲:法線加速度 $\bar{a}_n=\bar{r}\omega^2$, 與切線加速度 $\bar{a}_t=\bar{r}\alpha$, 示如圖 389. 如此則第109節的(9)式, 可寫爲 $\Sigma F_n=M\bar{r}\omega^2$ 與 $\Sigma F_t=M\bar{r}\alpha$. 作用於剛體的各外力, 如合力爲一個力, 則上列二式可代表合力的大小與指向, 合力的作用線尚待決定; 如各外力的合力爲一力偶, 則力偶轉矩的大小與指向, 亦尚待求出. 合力的力作用線, 或力偶的大小與指向, 須用力矩方程式表示之, 此式可依照第108節所述步驟, 求出如下:

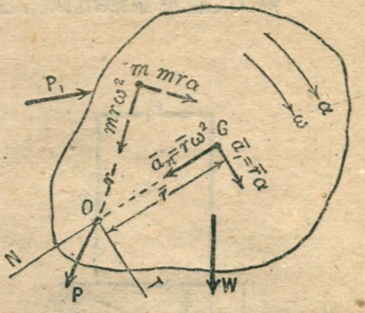



圖 389.

作用於任一質點(質量 $m$, 加速度 $a$)各外力的合力 (即質點的有效力) $ma$, 可分解爲兩個分力, 即 $mr\omega^2$ 與 $mr\alpha$, 示如圖 389. 因法線分力 $mr\omega^2$ 的作用線, 必通過 $O$ 點, 故質點的有效力對於 $O$ 的力矩, 等於切線分力 $mr\alpha$ 對於 $O$ 的力矩, 即 $mr^2\alpha$. 剛體內所有各質點的有效力, 對於轉軸或 $O$ 點的力矩, 其代數和爲 $\Sigma mr^2\alpha=\alpha\,\Sigma mr^2=I_o\alpha$, $I_o$ 即物體對於轉軸的轉動慣量(附錄一).

但作用於任一質點的有效力, 等於作用於該質點的各外力與各內力的矢量和. 故各質點的有效力, 對於轉軸的力矩和, 應與作用於各質點的所有各外力與內外, 對於同軸的力矩和相等. 是知

$$(\Sigma T_o)_{外}+(\Sigma T_o)_{內}=I_o\alpha.$$

但物體中所有各質點的內力, 對於轉軸的力矩和, 即 $(\Sigma T_o)_{內}$, 應等於零; 如以 $\Sigma T_o$ 代表所有各外力對於轉軸的力矩和, 則 $\Sigma T_o=I_o\alpha$. —

故知繞一固定軸迴轉的剛體, 如取 $ON$, $OT$ 軸如圖 389 所示, 其運

動方程式爲

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_n &= M\bar{r}\omega^2\\ \Sigma F_t &= M\bar{r}\alpha\\ \Sigma T_o &= I_o\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

工程中所常遇到的剛體迴轉運動，大多符合下述條件：剛體與運動平面成對稱，且各外力組成或相當於在對稱平面內作用的共面力系；故(1)式已足夠用以作完全的分析。如上述條件並不完全符合，則當須用到六個方程式，方能求出全數未知量.

如物體繞質心軸(通過質心的轉軸)迴轉，則 $O$ 與 $G$ 重疊，$\bar{r}=0$，(1)的第一、二兩式右邊，均等於零。$t$ 軸與 $n$ 軸的方位成爲不定，可任意選擇。取運動平面內互相垂直的任意二線，作爲參考軸 $x$ 與 $y$，(1)式可寫成

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= 0\\ \Sigma F_y &= 0\\ \Sigma\bar{T} &= \bar{I}\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

式中 $\Sigma\bar{T}$ 代表各外力對於迴轉軸(經過質心)的力矩代數和，$\bar{I}$ 代表剛體對於此質心軸的轉動慣量。

由(2)式極易看出，作用於繞質心軸迴轉剛體的外力，其合力爲一力偶，力偶的轉矩等於 $\bar{I}\alpha$。如剛體繞質心軸等角速迴轉，則各外力的合力等於零，剛體成平衡.

## 例　題

485. 圖 390. 兩球直徑均爲 12 吋，各重 64.4 磅，用細長剛桿(重量可略去不計)相連，繞垂直質心軸 $y$ 在水平面內迴轉。設有一力偶 $C$ 使其於 4 秒鐘內由靜止加速至 30轉/分，試求 $C$ 的大小。如力偶的二力之一，爲一

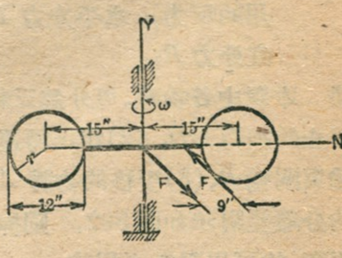



圖 390.

水平力 $F$，其作用線與轉軸相距 9 吋，另一力即為轉軸對於剛桿的反力，試求此 $F$ 力的大小.

**解** 應用運動方程式

$$\Sigma F_x=0, \quad (1), \quad \Sigma F_y=0, \quad (2), \quad \Sigma \bar{T}=\bar{I}\alpha. \quad (3)$$

由(3)式知

$$\Sigma \bar{T}=C=\bar{I}\alpha=2(\tfrac{2}{5}Mr^2+Md^2)\alpha$$

$$=2\left[\frac{2}{5}\times\frac{64.4}{32.2}\times\left(\frac{6}{12}\right)^2+\frac{64.4}{32.2}\times\left(\frac{15}{12}\right)^2\right]\alpha=6.65\,\alpha.$$

但 $$\alpha=\frac{\omega-\omega_0}{t}=\frac{30\times2\pi}{60\times4}=0.785\ \text{弧度/秒}^2.$$

故 $$C=6.65\times0.785=5.23\ \text{磅·呎}.$$

因 $$C=F\times\frac{9}{12}, \qquad \therefore\ F=5.23\div\frac{9}{12}=6.97\ \text{磅}.$$

486. 圖 391 示一制動設備，$CD$ 桿與閘輪周緣間的摩擦力，可用以控制物體 $A$ 下降的速度. 鼓輪半徑 $r_1=6$ 呎，閘輪半徑 $r_2=7$呎. 轉動部份共重 2000 磅，對於 $O$ 軸的迴轉半徑(附錄一) $k_0=4$呎. $A$ 重 1000 磅. 輪閘摩擦係數為 $\frac{1}{4}$，而轉軸的摩擦力可略去不計. 如有水平力 100 磅作用於 $C$，試求 $A$ 的加速度 $a$；無重軟繩內的拉力 $P$ 及軸承所作用的反力，水平分力 $R_1$ 與垂直分力 $R_2$.

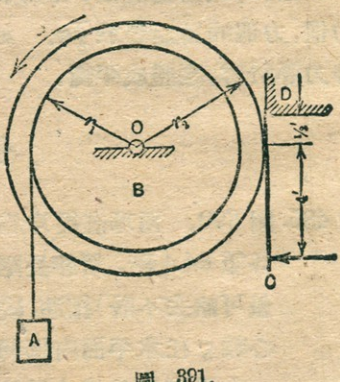


圖 391.

**解** 本題中各物體，可分為三組：(1)靜止的閘桿 $CD$，(2)作迴轉運動的鼓輪與閘輪 $B$，(3)平移的物體 $A$. 每組的分離體圖示如圖 392. 閘桿 $CD$，受一共面非共點力系所作用，而成平衡，故可用平衡方程式

$$\Sigma F_x=0, \quad \Sigma F_y=0, \quad \Sigma M_D=0。 \qquad (1)$$

本題中僅用到(1)的最後一式.

迴轉部份的運動方程式為

$$\Sigma F_x=0, \quad (2), \quad \Sigma F_y=0, \quad (3), \quad \Sigma \overline{T}=\overline{I}\alpha。 \qquad (4)$$

除上列(4)式外,尙有表示摩擦力的方程式,即

$$F=\mu N。 \qquad (5)$$

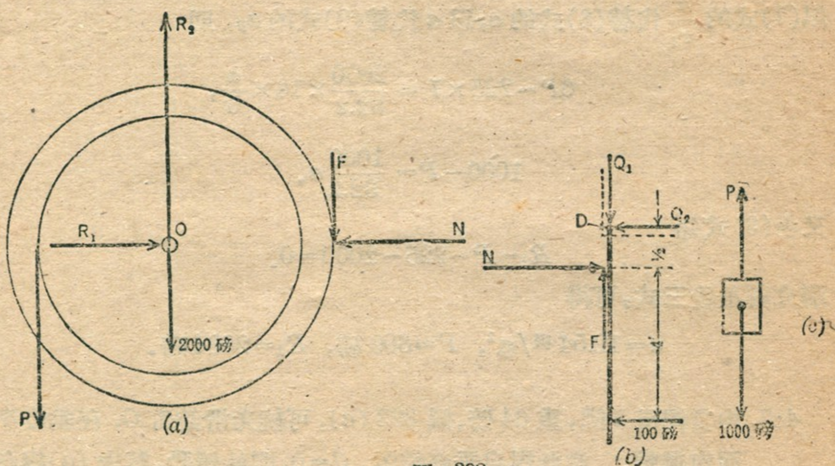



圖 392.

物體 $A$ 則僅需一個運動方程式,即

$$\Sigma F_y=Ma_y. \qquad (6)$$

$A$ 的 $y$ 軸向加速度,即其總加速度,且與鼓輪輪緣的切線加速度相等,故得

$$a_y=a=a_t=r_1\alpha。 \qquad (7)$$

應用上列各方程式:

由(1)得

$$-100\times4.5+0.5N=0, \qquad \therefore \quad N=900\text{ 磅}.$$

由(5)得

$$F=\tfrac{1}{4}\times900=225\text{ 磅}。$$

由(2)得

$$R_1-N=0,\qquad \therefore\ R_1=N=900\text{ 磅}.$$

由(4)得

$$6P-225\times 7=\frac{2000}{32.2}\times 4^2\times \alpha, \tag{8}$$

由(6)得

$$1000-P=\frac{1000}{32.2}\times a_y. \tag{9}$$

以(7)式的 $\frac{a}{r_1}$ 代替(8)式的 $\alpha$，以 $a$ 代替(9)式的 $a_y$，則

$$6P-225\times 7=\frac{2000}{32.2}\times 16\times\frac{a}{6},$$

$$1000-P=\frac{1000}{32.2}a.$$

又由(3)式知

$$R_2-P-225-2000=0.$$

聯立解最後三式，可得

$$a=12.54\text{ 呎/秒}^2,\ P=609\text{ 磅},\ R_2=2834\text{ 磅}.$$

487. 均質桿長 2 呎，重 64 磅，圖 393 ($a$)，可繞光滑銷釘 $O$，在垂直平面內迴轉． 設此桿自垂直位置，$\theta=0$，開始轉動，試求 ($a$)桿在

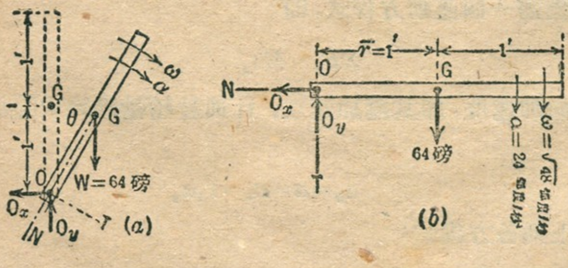



圖 393.

任一角位移 $\theta$ 時的角速度 $\omega$，($b$) 在 $\theta=90°$ 時銷釘作用於桿的

水平與垂直分反力. $g=32$ 呎/秒$^2$.

解 桿的角位移等於$\theta$時,作用於桿的外力,示如圖 393 ($a$). 運動方程式爲

$$\Sigma F_n = M\bar{r}\omega^2, (1), \quad \Sigma F_t = M\bar{r}\alpha, (2), \quad \Sigma T_o = I_o\alpha. (3)$$

由(3)式得

$$64\sin\theta = \frac{1}{3}\times\frac{64}{32}\times 4\times\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

故

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = 24\sin\theta,$$

上式左右兩邊各乘以 $\frac{d\theta}{dt}$,並對於 $t$ 積分之,得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -24\cos\theta + C.$$

因在 $\theta=0°$ 時, $\omega=0$, 故知 $C=24$.

代入上式,得

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{48(1-\cos\theta)}.$$

在 $\theta=90°$ 時, $\omega=\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{48}$, $\alpha=\frac{d^2\theta}{dt^2}=24$. 桿在此時的分離體圖,示如圖 393 ($b$). 應用(1)式與(2)式,

$$\Sigma F_n = M\bar{r}\omega^2 \quad 或 \quad O_x = \frac{64}{32}\times 1\times 48$$

$$\therefore\ O_x = 96\ 磅.$$

$$\Sigma F_t = M\bar{r}\alpha \quad 或 \quad 64 - O_y = \frac{64}{32}\times 1\times 24$$

$$\therefore\ O_y = 16\ 磅.$$

## 習題

488. 均質球體,重 500 磅,直徑 15 吋,以角速 500 轉/分 繞質心軸迴轉。經過球心而與轉軸垂直的平面上,有一與球面相切的阻力,使球的轉速,等率減低,至第 5 秒鐘末,適至靜止。如轉軸的摩擦力可略去不計,試求此阻力的大小。　　答　40.6 磅.

489. 圖 394.　均質圓柱,重 193.2 磅,直徑 1 呎,以角速 120 轉/分迴轉.　設有 $P$ 力作用於閘桿,使圓柱角速於 4 秒鐘內等率減低至 40 轉/分,動摩擦係數為 0.1,試求 $P$ 力.

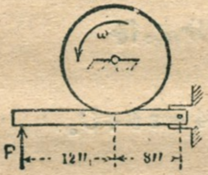



圖 394.

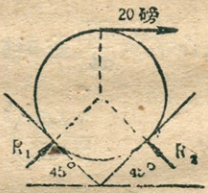



圖 395.

490. 圖 395.　均質圓柱,重 64.4 磅,半徑 2 呎,支於兩光滑斜面上.設有與圓柱軸線成垂直的 20 磅力,沿圓柱面切線方向作用,試求圓柱的角加速度,及斜面的反力 $R_1$ 與 $R_2$.

答　$\alpha=10$ 弧度/秒$^2$; $R_1=31.4$ 磅; $R_2=59.7$ 磅.

491. 圖 396.　圓盤 $A$,下連鼓輪,輪上繞有軟繩;繩的一端跨過無摩擦力無重量的滑輪後,懸有物體 $C$.　物體 $C$ 的下降,使 $A$ 與 $B$ 繞垂直軸 $YY$ 轉動.　盤上固連一小物體 $D$.　$A, B, C$, 與 $D$ 的重量各為 128.8 磅, 32.2 磅, 16.1 磅, 與 8.05 磅.　試求 (a) 圓盤的角加速度, (b) $D$ 的切線加速度, (c) 自靜止開始轉動的第 4 秒末, $D$ 的法線加速度.

答　(a) 0.662 弧度/秒$^2$; (b) 1.99 呎/秒$^2$; (c) 21.1 呎/秒$^2$.

492. 圖 397.　圓盤重 24 磅,直徑 4 呎.　繞一與圓心 $C$ 相距 8 吋的垂

直軸，以角速 90 轉/分 在水平面內迴轉。 小物體，重 12 磅與 4 磅，各固連於圓盤上的 $A$ 與 $B$。試求轉軸作用於圓盤的水平力。並求使圓盤於 4 秒鐘內等率加速至 120 轉/分 所需的力矩。

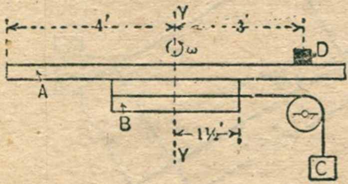


圖 396.

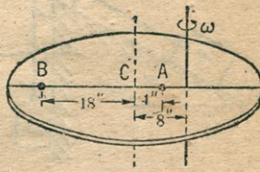


圖 397.

493. 圖 398($a$)。 曲柄 $AD$ 與連桿 $DC$，可使均質稜柱形桿 $BE$ 在垂直平面內，繞 $B$ 點左右擺動。$B$，$C$，與 $D$，均用光滑銷釘連接。$BE$ 桿，重 16.1 磅，在圖示位置，其角速度 $\omega$ 爲 60 轉/分，沿順鐘

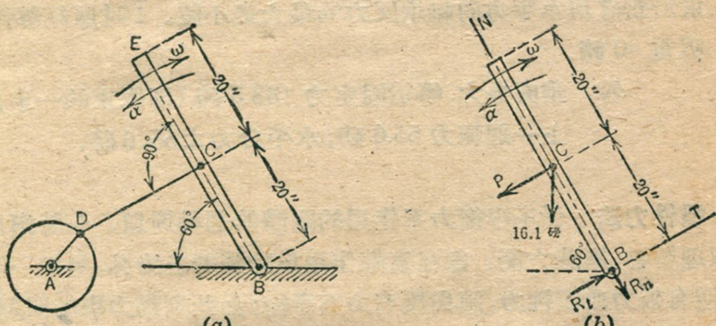


圖 398.

向，其角加速度爲 40 弧度/秒$^2$，沿逆鐘向。試求此時連桿在 $C$ 點所作用的拉力 $P$，及 $B$ 點銷釘的反力 $R$。

答 $P=36.4$ 磅；$R=21.9$ 磅。

494. 圖 399。$A$ 塊重 866 磅，其與 30° 斜面的摩擦係數爲 $\mu=0.1$。$B$ 塊重 644 磅，用繞過滑輪 $C$ 的軟繩與 $A$ 相連。$C$ 輪重 322 磅，半徑 12 吋，作用於輪軸的摩擦力，相當於 10 呎·磅的力矩。 如

繩與滑輪間並無滑動，試求(1) $A$ 與 $B$ 的加速度，(2) 繩內的最大拉力。　　答　(1) $a=2.43$ 呎/秒$^2$；(2) $S_{max}=595$ 磅.

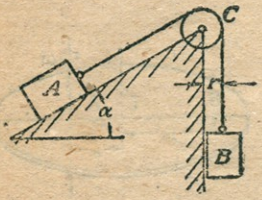



圖 399.

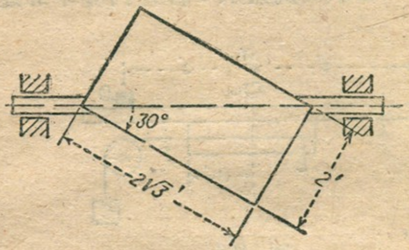



圖 400.

495. 圖 400. 鋼鈑厚 1 吋，闊 2 呎，長 $2\sqrt{3}$ (約 3.46) 呎，以角速 100 轉/分，繞水平的對角線迴轉。左右兩軸承，中心距離 5 呎。試求沿垂直與水平方向軸承反力的最大最小值. 1 吋厚鋼鈑，每方呎重 40 磅.

答　垂直分力，等於固定力 138.5 磅 (即鈑重的一半)，加上一迴轉力 55.6 磅；水平分力 ±55.6 磅.

**112. 慣性力法**　受不平衡力系作用的剛體的迴轉問題，有時應用達倫勃原理解答，頗感方便. 即在實際作用於物體的各力外，另加一假想力，即逆有效力或慣性力，適與原有力系平衡；如此則動力學的問題，可應用平衡方程式，照靜力學問題的方法，求出解答。欲用此種方法，有效力的合力，自必先須完全求出。茲將此合力的求法，依照轉軸通過與不通過質心的兩種情形，分述如下。

**I. 轉軸不通過剛體的質心**——由第 111 節知，剛體的轉軸，如不通過質心，則有效力的合力(亦即外力的合力)為一個力。此合力沿 $n$ 與 $t$ 軸向的分力，各為 $M\bar{r}\omega^2$ 與 $M\bar{r}\alpha$. 合力的作用線，僅需求出其與 $n$ 軸的交點，即可決定。例如，圖 401，設將此合力分為 $M\bar{r}\omega^2$ 與 $M\bar{r}\alpha$，兩

分力作用於合力與 $n$ 軸的交點，此交點與 $O$ 點的距離 $q$，可應用力矩原理求出如下：由第 111 節知，剛體中所有各質點的有效力，對於 $O$ 軸的力矩和，等於 $I_o\alpha$。其次，各有效力的合力，對於 $O$ 軸的力矩代數和，即等於合力的切線分量，$M\bar{r}\alpha$，對於 $O$ 軸的力矩，因法線分量 $M\bar{r}\omega^2$ 必通過迴轉中心．故由力矩原理知

$$M\bar{r}\alpha\cdot q = I_o\alpha.$$

但 $I_o = Mk_o^2$，$k_o$ 代表剛體對於 $O$ 軸的迴轉半徑．於是上式可寫爲

$$M\bar{r}\alpha\cdot q = Mk_o^2\alpha,$$

得
$$q = \frac{k_o^2}{\bar{r}}.$$

是知合有效力，與 $n$ 軸相交於距迴轉中心 $\frac{k_o^2}{\bar{r}}$ 的一點，一如圖 401 所示。因合有效力與各外力的合力完全相同，故如假想將圖 401 中虛線所示兩力，逆轉指向後，與原有外力同時作用於此剛體，則剛體將成平衡，而可應用平衡方程式。

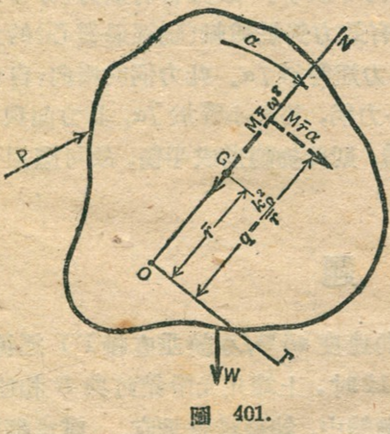



圖 401.

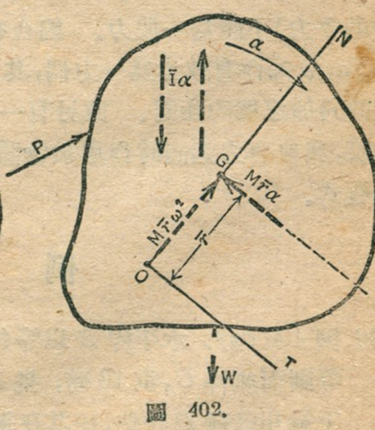



圖 402.

因 $k_o$ 普通不等於 $\bar{r}$，故合有效力的作用線普通不經過質心 $G$。但合有效力可分解爲一力偶與經過 $G$ 的一個力，力的大小與方向均與原

來的合有效力相同(第18節),力偶的大小極易證明爲等於$\bar{I}\alpha$,因

$$M\bar{r}\alpha(q-\bar{r})=(Mk_o^2-M\bar{r}^2)\alpha=\bar{I}\alpha.$$

故如將慣性力偶$\bar{I}\alpha$及經過質心的慣性力$M\bar{r}\omega^2$與$M\bar{r}\alpha$,與實際各外力同時作用於剛體,則此剛體將成平衡.

**離心力**——作用於迴轉物體的慣性力的$n$軸向分力,$M\bar{r}\omega^2$,名爲物體的**離心力**. 如物體以等角速度迴轉($\alpha=0$),離心力卽等於慣性力的全部. 此種所謂"力"的性質,讀者常易誤解. 實際的力必有一物體作用於另一物體,但慣性力則僅有被作用的物體,而施力的物體則並不存在. 慣性力只是一假想力,設將此假想力與實際外力同時作用,則物體將成平衡. 例如,等速迴轉的物體,設除原有實際各外力外,另加一離心力,則此物體將成平衡.

**II. 轉軸通過剛體的質心**——物體繞質心軸迴轉,則$\bar{r}=0$,因而合有效力的兩分量,$M\bar{r}\alpha$與$M\bar{r}\omega^2$,亦均等於零. 故知合有效力(亦卽各外力的合力)不能爲一個力. 因合有效力對於轉軸(現經過質心)的力矩爲$\bar{I}\alpha$,故知合有效力爲一力偶,其力矩等於$\bar{I}\alpha$. 此力偶的指向,自與物體的角加速度的相同. 設另有一力偶,其大小等於$\bar{I}\alpha$,其方向與$\alpha$的相反,與原有力系同時作用於物體,則此物體將成平衡,故可應用平衡方程式.

## 例題

496. 圖403(*a*). 水平桿$B$以等角速度45轉/分繞垂直軸$YY$迴轉. 等斷面細桿$C$,重16磅,長12吋,上端用光滑銷釘與$B$相連,下端用軟繩$D$拉住,使其在迴轉中,始終維持垂直. 試求繩內拉力,及$E$點銷釘作用於$C$桿的反力.

**解** $C$桿的分離體圖,示如圖403(*b*). 此桿繞垂直軸$YY$迴轉,受三

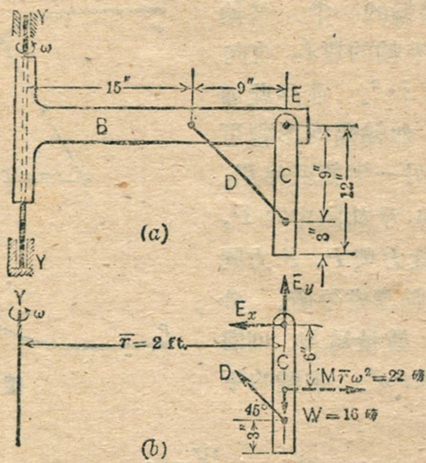



圖 403.

個外力所作用，即 $W, D$, 與 $E$（圖上畫出 $E$ 的水平與垂直分力，$E_x$ 與 $E_y$）.

設在上述各力外，另加慣性力，則 $C$ 桿將成平衡. $C$ 桿並無角加速度，$\alpha=0$, 因而 $M\bar{r}\alpha=0$; 故慣性力即等於 $M\bar{r}\omega^2$. 其大小為

$$M\bar{r}\omega^2=\frac{16}{32.2}\times 2\times\left(\frac{45\times 2\pi}{60}\right)^2=22.0\text{ 磅}.$$

其作用線通過 $C$ 桿的質心，指向朝外. 如此則圖 403-(b) 所示 $W$, $D$, $E_x$, $E_y$, 與 $M\bar{r}\omega^2$ 等力，使 $C$ 桿成平衡. 應用平衡方程式：

$$\Sigma F_x=22-E_x-D\cos 45^\circ=0,$$
$$\Sigma F_y=E_y+D\cos 45^\circ-16=0,$$
$$\Sigma M_E=22\times 6-D\times 9\cos 45^\circ=0.$$

聯立解上列各式，可得

$$D=20.7\text{ 磅},\quad E_x=7.33\text{ 磅},\quad E_y=1.33\text{ 磅},\quad E=7.45\text{ 磅}.$$

497. 飛輪以等角速迴轉，周緣線速為 $v$. 設輪緣厚度與平均半徑 $r$ 比較，極為微小，輪幅的影響可略去不計，試求輪緣內的應力，即周應力(Hoop stress).

解 圖 404 示飛輪的一半．飛輪等速迴轉時，此半輪的質心，有向心的法線加速度 $\bar{r}\omega^2$． 產生此加速度所需的力，如輪幅的影響可略去不計，必為另一半輪所作用，沿輪緣切線方向，示如圖中的 $P$，$P$． 設另有慣性力與 $P$，$P$ 力同時作用，則此半輪應成平衡． 命半輪重量為 $W$，質量為 $M$，則慣性力的大小為 $M\bar{r}\omega^2$． 半輪的平衡方程式為

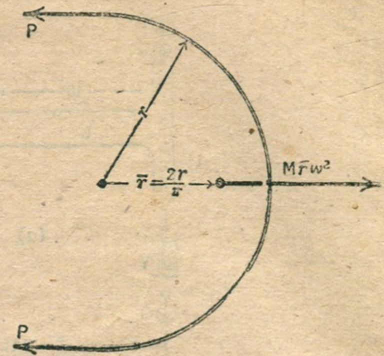



圖 404.

$$2P=M\bar{r}\omega^2=\frac{W}{g}\bar{r}\omega^2.$$

因輪緣厚度假定為極小，故半輪的質心，可視為與半圓圓弧的形心相重疊，其與圓心的距離為 $\bar{r}=\frac{2r}{\pi}$（題 253）． 代入上式得

$$P=\frac{1}{2}\frac{W}{g}\times\frac{2r}{\pi}\omega^2=\frac{Wr\omega^2}{g\pi}.$$

$P$ 即所謂周向拉力 (Hoop tension)．

如輪緣斷面為 $a$，材料每單位體積的重量為 $k$，則周應力 $s=P/a$. 重量 $W=\pi rak$． 故

$$s=\frac{W}{g}\times\frac{r}{\pi}\times\frac{\omega^2}{a}=\frac{\pi rak}{g}\times\frac{r}{\pi}\times\frac{\omega^2}{a}=\frac{kr^2\omega^2}{g}.$$

以 $v=r\omega$ 代入，得

$$s=\frac{kv^2}{g}.$$

可見薄緣飛輪迴轉時，如輪幅的影響略去不計，則輪緣內的應力與線速的平方成正比．

498. 火車沿曲線軌道行駛時，如內外兩鐵軌高度相同(即均位於同一水平面上)，則鐵軌將有側向壓力作用於輪緣。設將外鐵軌墊高 $e$，使枕木與水平面成 $\theta$ 角(圖 405)，則火車以某一線速行駛時，側向壓力可等於零。如鐵路的曲線半徑 $r$，火車線速 $v$，與兩軌間的中心距離 $d$，均爲已知，試求使側壓等於零的 $\theta$ 與 $e$。$\theta$ 名爲偏斜角，$e$ 名爲超高度(Superelevation)。

解 圖 405。令 $\theta$ 爲所求的偏斜角，輪緣側壓適等於零。鐵軌作用於車輪的反力，$R_1$ 與 $R_2$，均與軌道平面(或枕木)成垂直。因火車的質心在水平面上沿曲線等速運動，故慣性力等於 $Mr\omega^2$，其作用線經過質心 $G$。此慣性力如與外力($W, R_1$ 與 $R_2$)同時作用，應成平衡力系，故 $R_1$ 與 $R_2$ 的合力 $R$ 的作用線，亦必經過 $G$。即外力 $W, R$，與慣性力 $Mr\omega^2$，組成共面共點力系。應用平衡方程式

$$\Sigma F_x = 0, \text{ 或 } R\sin\theta = \frac{W}{g}\frac{v^2}{r},$$

$$\Sigma F_y = 0, \text{ 或 } R\cos\theta = W.$$

上列第一式除以第二式，得

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr}.$$

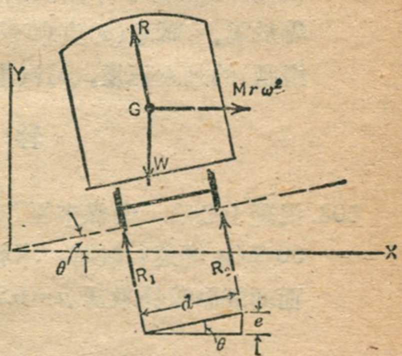


圖 405.

$\theta$ 角頗小時，$\tan\theta$ 可謂與 $\sin\theta$ 相等。由圖知 $\sin\theta = e/d$ ($d$ 普通用 4.9 呎)，故

$$e = \frac{v^2 d}{gr}.$$

如 $d$ 與 $r$ 的單位爲呎，$v$ 的爲 呎/秒，$g$ 的爲 呎/秒$^2$，則 $e$ 的單位爲呎。

曲線公路，所需的路面傾斜角，亦可用同法計算，適使路面作用於膠輪的側向摩擦力等於零。

設圓弧的弦長 100呎，所對的圓心角爲 1 度(1°)，則名爲 1 度曲線。弦長 100 呎所對的圓心角爲 2°，則名爲 2 度曲線，依此類推。

## 習題

499. 生鐵飛輪或帶輪，周緣線速普通限制爲 6000 呎/分（有時用 1 哩/分）。如輪輻的影響可略去不計，試求輪緣内相當於此線速的周應力。生鐵重 450 磅/立呎。 答 970 磅/方吋.

500. 如生鐵的最大抗伸應力爲 20,000 磅/方吋，問直徑 4 呎的飛輪最快可至若干轉/分？生鐵重 450 磅/立呎.

501. 鐵路的曲線半徑爲 1800 呎. 如行車速度爲 50 哩/時，試求外軌所需的超高度. 答 $e=5.45$ 吋.

502. 某公路曲線半徑爲 $r$，汽車總重 $W$，重心 $G$ 高出路面 $h$，前輪（或後輪）間距離爲 $d$，路面與膠輪間的摩擦係數爲 $\mu$，路面傾斜角 $\theta$ 等於零. 試求 (a) 汽車不致發生側滑（即沿公路曲線半徑向外滑動）的最大速度，(b) 汽車不致傾覆的最大速度.

答 $(a)\ v=\sqrt{\mu gr}$; $(b)\ v=\sqrt{\dfrac{grd}{2h}}$.

503. 混凝土公路，曲線半徑 500 呎. 路面偏斜角 $\theta$，適使汽車在以 30 哩/時等速行駛時，車輪的側向摩擦力等於零. 如膠輪與路面的靜摩擦係數爲 $\mu=0.2$，試求汽車開始發生側滑時的速度.

答 $\theta=6°51'4$; $v=49.5$ 哩/時.

504. 繞垂直軸迴轉的水平盤上，距轉軸 9 吋處，置有一小物體，其與盤面的摩擦係數爲 2/3. 欲使此物體不致滑動，試求 (a) 盤的最高角速度，(b) 盤的最高角加速度.

答 $\omega=5.35$ 弧度/秒; $\alpha=28.6$ 弧度/秒$^2$.

505. 圖 406. 桿 $AC$ 重 16.1 磅，隨同 $D$ 架以等角速 30 轉/分繞垂直軸 $YY$ 迴轉. $B, C, D$ 三點，均用光滑銷釘連接. 試求 $CD$ 桿的拉力，及銷釘 $B$ 作用於 $AC$ 的水平分力. $CD$ 桿的重量可略去不計. 答 $CD=4.65$ 磅; $B_x=13.15$ 磅.

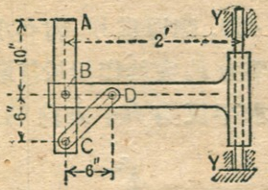



圖 406.

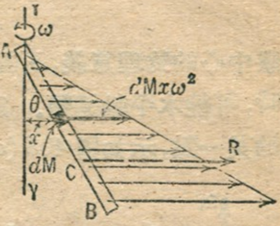



圖 407.

506. 均質稜柱形桿 $AB$,圖 407, 長 $l$, 質量 $M$, 以等角速 $\omega$ 繞垂直軸 $YY$ 迴轉. 如桿與轉軸成 $\theta$ 角,試求慣性力 $R$ 的大小與作用線,及轉軸作用於桿的水平與垂直分反力.

答 $R=\frac{1}{2}Ml\omega^2\sin\theta$; $AC=\frac{2}{3}l$;

$A_x=-\frac{1}{2}Ml\omega^2\sin\theta$; $A_y=Mg$.

507. 均質矩形門,高 8 呎闊 4 呎,可繞一垂直邊的頂底兩點的鉸鏈轉動. 此門以某一等角速迴轉時,下端鉸鏈的水平反力適等於零. 試求此角速. 答 $\omega=2.83$ 弧度/秒.

508. 均勻細桿長 6 呎, 重 20 磅, 上端支以一水平光滑銷釘, 而成垂直. 設有水平力 20 磅,作用於桿的中點, 使其繞銷釘迴轉, 試求 $(a)$桿的角加速度, $(b)$質心的線加速度, $(c)$轉軸作用於桿的水平反力.

答 $(a)$8.05 弧度/秒$^2$; $(b)$24.15 呎/秒$^2$; $(c)$ 5 磅.

509. 衝床的飛輪,直徑 8 呎,輪緣重 1 噸. 每衝一孔,歷時 0.5 秒,飛輪角速由 100 轉/分 等率減至 80 轉/分. 全輪有六輪輻,各長 3.5 呎. 試求由輪緣經每一輪輻傳至輪轂的力矩. 假定輪緣厚度與直徑比較極為微小,輪輻與輪轂的重量均可略去不計.

答 607 磅•呎.

**113. 打擊中心** 圖 408. 通過剛體的迴轉中心 $O$ 與質心 $G$ 的直線上,與 $O$ 相距 $q=k_o^2/\bar{r}$ 的一點, $P$, 名為此剛體的打擊中心(Center of percussion). $k_o$ 代表剛體對於轉軸 $O$ 的迴轉半徑, $\bar{r}$ 為質心 $G$ 至轉軸的

距離。

打擊中心的物理意義，可說明如下。圖 408，剛桿重 $W$，當有水平力作用時，可繞水平軸迴轉。設有一向右水平力 $F$，突然作用於打擊中心上面的某一點，示如圖 408 ($a$)，則轉軸的水平反力 $R_2$，方向朝左。

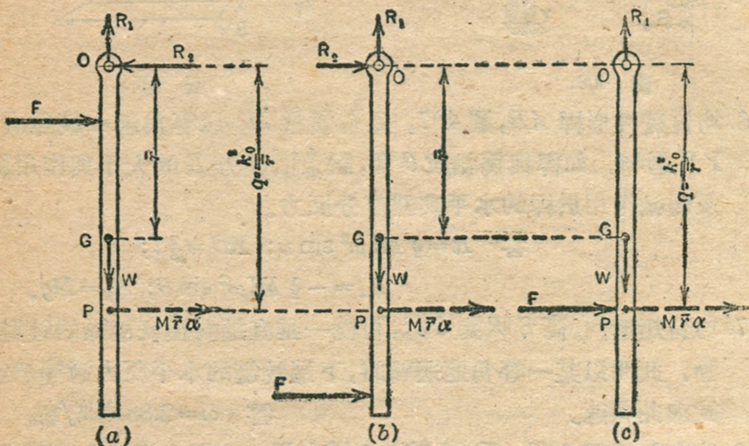



圖 408.

$F$ 的作用線愈與 $O$ 靠近，$R_2$ 亦愈大。反之，設有一向右水平力 $F$，突然作用於打擊中心的下面，示如圖 408($b$)，則轉軸的水平反力，方向朝右，$F$ 的作用線距 $O$ 愈近，則 $R_2$ 愈小。設 $F$ 力的作用線適經過 $P$ 點，示如圖 408 ($c$)，則 $F$ 力將與剛體的合有效力的切線分量 $M\bar{r}\alpha$ 共線，轉軸的水平反力 $R_2$ 適等於零。水平力 $F$ 的作用線無論如何移動，$F$ 與 $R_2$ 的合力必經過打擊中心 $P$，其大小等於 $M\bar{r}\alpha$。

用木棍擊球（棒球）時，或用榔頭打木樁時，兩手虎口，有時被震而生劇痛，其原因即由於撞擊點並非木棍或榔頭對於手（迴轉中心）的打擊中心，因而有 $R_2$ 作用。

## 習　題

510. 題 508. 問 20 磅力的作用線，須與懸點相距若干呎，適使懸點的

水平反力等於零? 答 $q=4$ 呎。

511. 均勻細桿長 6 呎，懸於經過其上端的水平軸，而成垂直。設有與桿垂直的 $F$ 力，120 磅，其作用線依次在懸點下 2 呎，3 呎，4 呎，5 呎，與 6 呎，試分別求轉軸的水平反力的大小與方向。

答 60 磅，與 $F$ 反向；30 磅，反向；$O$；30 磅，與 $F$ 同向；60 磅，同向。

## §3. 平面運動

**114. 平面運動的剛體動力學** 在平面運動中，剛體內任一點至某固定平面的距離，維持不變(參閱第 96 節)。與此固定平面平行而經過質心的平面，名為剛體的運動平面。為便於分析，仍假定物體與運動平面對稱，所有外力亦均在此平面內作用，組成(或相當於)一共面力系。如此則此剛體共有三個運動方程式，其中兩式可由第 109 節(9)式直接寫出，即 $\Sigma F_x=M\bar{a}_x$ 與 $\Sigma F_y=M\bar{a}_y$，因 (9) 式可應用於作任何運動的任何物體；其餘一式，包含外力的力矩，則可依照第 108 節所述步驟，求出如下。

圖 409 示一剛體，受一不平衡的力系所作用，而作平面運動；在任一瞬時，其角速度令為 $\omega$，角加速度令為 $\alpha$。因剛體內任何二點間的距離均永恆不變，故對於與運動平面垂直的任一軸，剛體內所有各點的角速度與角加速度，均必同為 $\omega$ 與 $\alpha$。任一點的線速度與線加速度，則隨點的所在地位而異。

由第 96 節知，剛體的平面運動，在任一瞬時，均可視為由兩種運動所組成：對於與運動平面垂直並相交於任一點 $O$ 的任一軸的純迴轉運動，及與 $O$ 點同線速度同線加速度的平移運動。故剛體內任一質點的運動均包含兩部份：(1)對於 $O$ 的迴轉運動，(2)與 $O$ 相同的運動。是以與 $O$ 相距 $r$ 的任一質點，因剛體的迴轉運動而有法線加速度 $a_n=r\omega^2$，與切線加速度 $a_t=r\alpha$；因剛體的平移運動而有與 $O$ 相同的 $a_o$。各加速度分量，如均乘以質點的質量，則得作用於此質點的有效力的分量。此

種有效力的分量示如圖 410. 爲方便計，分解 $ma_o$ 爲 $m(a_o)_x$ 與 $m(a_o)_y$.

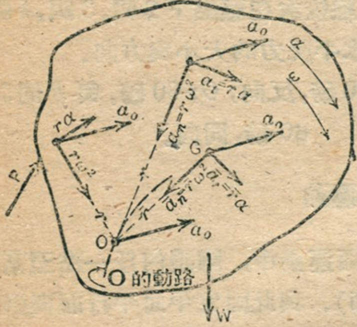



圖 409.

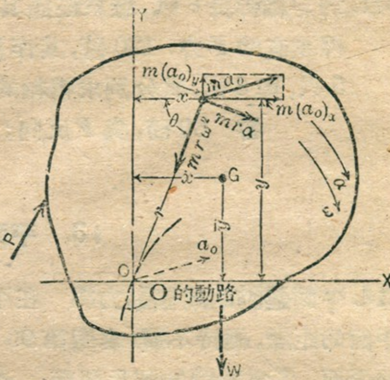



圖 410.

各質點的有效力，對於 $O$ 的力矩代數和

$$
\begin{aligned}
&=\Sigma mr\alpha\cdot r+\Sigma m(a_o)_x\,y+\Sigma m(a_o)_y\,x\\
&=\alpha\Sigma mr^2+(a_o)_x\,\Sigma my-(a_o)_y\,\Sigma mx\\
&=I_o\alpha+M\bar{y}\,(a_o)_x-M\bar{x}\,(a_o)_y. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

但體內所有各質點有效力的力矩代數和，亦應等於所有各外力與所有各內力（即各質點間的作用與反作用）對於同軸的力矩代數和. 故

$$(\Sigma T_o)_{外}+(\Sigma T_o)_{內}=I_o\alpha+M\bar{y}\,(a_o)_x-M\bar{x}\,(a_o)_y. \qquad (2)$$

由牛頓第三定律知整個剛體的內力，必成對地作用，每對內力均相等、相反、共線，而互相抵消，故 $(\Sigma T_o)_{內}=0$. 如以 $\Sigma T_o$ 代表外力對於 $O$ 軸的力矩代數和，則(2)式可寫爲

$$\Sigma T_o=I_o\alpha+M\bar{y}\,(a_o)_x-M\bar{x}\,(a_o)_y. \qquad (3)$$

因迴轉平面內任一點，均可取爲迴轉中心，亦即力矩中心，$O$. 如取質心 $G$ 爲力矩中心（即 $O$ 與 $G$ 重疊），圖 410，則 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 均等於零，$a_o$ 成爲 $\bar{a}$，$I_o$ 成爲 $\bar{I}$，$\Sigma T_o$ 成爲 $\Sigma\bar{T}$. 如此則平面運動中剛體的運動方程式爲

$$\left.\begin{aligned}\Sigma F_x &= M\bar{a}_x\\ \Sigma F_y &= M\bar{a}_y\\ \Sigma T &= \bar{I}\alpha\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

不僅在 $O$ 與 $G$ 相重疊時，(3)式方可簡化為 $\Sigma T_o=I_o\alpha$；如 $O$ 點的加速度 $a_o$ 等於零，或 $a_o$ 係沿經過 $O$ 與 $G$ 的直線方向（此時可取 $OG$ 線為 $x$ 軸，於是 $(a_o)_y=0$, $\bar{y}=0$），雖 $O$ 與 $G$ 並不互相重疊，(3)式中的 $M\bar{y}(a_o)_x-M\bar{x}(a_o)_y$，亦均等於零。

## 例題

512. 均質圓柱，直徑 3 呎，重 805 磅，沿傾角 30° 的斜面，向下滾動（並無滑動），圖 411. 圓柱質心初速為 $\bar{v}_0=50$ 呎/秒. 試求(1)質心的加速度，(2)摩擦力的大小，(3)在第10秒鐘末質心的速度 $\bar{v}$.

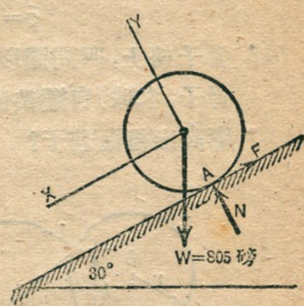


圖 411.

解 圓柱作平面運動，受三個力所作用，即 $F$, $N$, 與 $W$，示如圖 411. 運動方程式為

$$\Sigma F_x=M\bar{a}_x,\qquad(1)$$

$$\Sigma F_y=M\bar{a}_y,\qquad(2)$$

$$\Sigma T=\bar{I}\alpha.\qquad(3)$$

由(1)得

$$805\sin 30^\circ-F=\frac{805}{32.2}\bar{a}_x.\qquad(4)$$

由(2)得

$$-805\cos 30^\circ+N=0,\ 因\ \bar{a}_y=0.\qquad(5)$$

由(3)得

$$\frac{3}{2}F=\frac{1}{2}\frac{805}{32.2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\alpha,\qquad(6)$$

由三個方程式，不能求出四個未知量，故須寫出另一方程式. 由運

動學(參閱題 401)知

$$\bar{a}_x = \bar{a} = r\alpha = \tfrac{3}{2}\alpha. \qquad (7)$$

以(7)式的 $\alpha$ 代入(6)式,可得

$$F = \frac{25}{2}\bar{a}.$$

上式代入(4)式,可求出

$$\bar{a}_x = \bar{a} = 10.73 \text{ 呎/秒}^2, \qquad \therefore \quad F = \frac{25}{2}\times 10.73 = 134.1 \text{ 磅}.$$

因質心作等加速直線運動,可應用下式求速度:

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}t,$$

故知

$$\bar{v} = 50 + 10.73\times 10 = 157.3 \text{ 呎/秒}.$$

513. 彈子檯上,四周圍以彈簧襯墊,其橫斷面示如圖 412 ($a$)。欲使彈子(木球)自襯墊回彈後,與檯面間無摩擦力作用,問襯墊內緣應高出檯面若干?

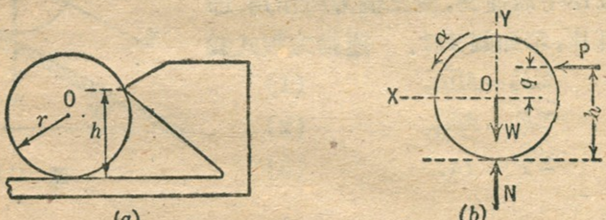



圖 412.

解 令彈子半徑爲 $r$, 襯墊內緣高出檯面 $h$. 彈子撞到襯墊後,如與檯面間並無摩擦力作用,則分離體圖,示如圖 412($b$)。彈子作平面運動,(假定並無繞垂直軸的旋轉)。運動方程式如下:

$$\Sigma F_x = M\bar{a}_x, \quad (1), \qquad \Sigma F_y = M\bar{a}_y, \quad (2), \qquad \Sigma \bar{T} = \bar{I}\alpha. \quad (3)$$

依次應用上列各式,可得

$$P = \frac{W}{g}\bar{a}_x, \quad N - W = 0, \quad Pq = \frac{2}{5}\frac{W}{g}r^2\alpha = \frac{2}{5}\frac{W}{g}r^2\frac{\bar{a}_x}{r}.$$

由上列第一與第三式，得

$$\frac{W}{g}\bar{a}_x q=\frac{2}{5}\frac{W}{g}r\bar{a}_x.$$

故　　　　$q=\frac{2}{5}r$,　即　$h=\frac{7}{5}r$.

設 $h$ 超過上值，則檯面作用於彈子的摩擦力，方向朝左，圖 412 ($b$)；設 $h$ 小於上值，則摩擦力將朝右作用(與彈子運動方向相反)。

## 習　題

514. 均質圓球，沿與水平面成 $\theta$ 角的斜面下滾，並無滑動．試求球心的加速度及最小摩擦係數．　　答　$\frac{5}{7}g\sin\theta$; $\frac{2}{7}\tan\theta$.

515. 均質圓柱，置於水平的車板上，使能沿軌道方向滾動，車板所作用的摩擦力，足夠阻止圓柱的滑動．　如車板有沿軌道方向的加速度 3 呎/秒$^2$，試求圓心對於軌道的加速度．

　　答　$a=1$ 呎/秒$^2$.

516. 均質圓柱重 $W$，半徑 $r$；與軸線垂直的對稱面上，周圍挖有深 $\frac{1}{2}r$ 的圓槽(圖 413)，槽內繞繩，繩端有力 $\frac{1}{2}W$ 作用，如圓柱可沿水平面滾動而無滑動，試求圓心的加速度。

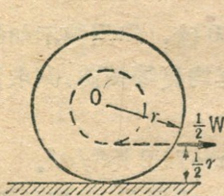



圖 413.

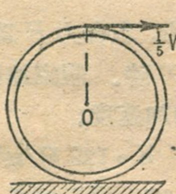



圖 414.

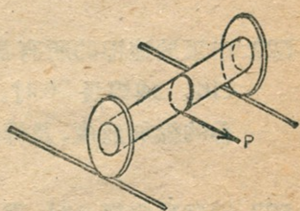



圖 415.

517. 薄壁圓筒，重 $W$ 磅。當有水平力 $\frac{1}{5}W$ 磅沿頂緣切線方向作用時(圖 414)，圓筒將沿水平面滾動，但無滑動．　試求圓心加速度，及筒與平面間的摩擦力．　　答　$a=6.44$ 呎/秒$^2$; $F=0$.

518. 兩個相同的均質圓盤，各重 20 磅，直徑 2 呎。　固連於水平軸的

兩端，示如圖 415. 軸重 40 磅，直徑 6 吋，中心平面上繞有細繩，繩端有與軸周下面相切的水平力 $P$，沿軌道方向作用. 如 $P$ 力等於 8 磅，問此兩圓盤將向前滾，抑向後滾？並求軸線沿軌道方向的加速度. 答 $a=1.91$ 呎/秒$^2$.

519. 設將前題的繩端，在中心平面上加繞半圈，使 $P$ 力反向，作用線與軸周頂面相切. 試求軸線的加速度.

520. 均質圓球，重 100 磅，半徑 $r$ 呎，置於水平面上，摩擦係數為 1/10. 設有水平力 20 磅，其作用線高出水平面 $\frac{1}{2}r$ 呎，使球開始運動，試求($a$)球心的線加速度，($b$)球的角加速度. 問($c$)此球將作何種運動？ 答 $a=3.22$ 呎/秒$^2$; $\alpha=0$; 平移.

521. 一均質球，與一均質圓柱，自同一水平線，同時自靜止開始，沿同一斜面下滾，均無滑動。 問球與柱何者滾得較快？

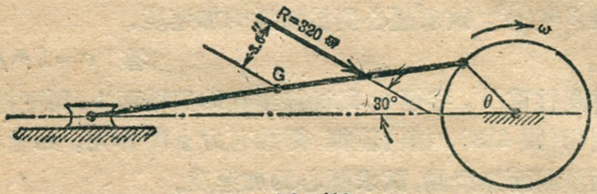



圖 416.

522. 作用於連桿的所有各外力，其合力 $R$ 為 320 磅，作用線示如圖 416. 連桿長 30 吋，重 80 磅. 假定連桿為均質等斷面，試求質心的線加速度，及桿的角加速度.

答 $\bar{a}=129$ 呎/秒$^2$; $\alpha=74.2$ 弧度/秒$^2$.

523. 均質球半徑 8 吋，重 161 磅. 通過球心，有一水平軸，軸繫軟繩，使球沿粗糙的 30° 斜面上滾. 繩經無重滑輪後，懸有物體 $B$，重 100 磅(圖 417)。 試求 $B$ 的加速度及繩內拉力.

524. 圖 418，物體 $A$ 重 40 磅，包括兩圓盤，半徑 8 吋；中聯圓軸，半徑 2 吋；形狀與圖 415 所示者相似；對圓心軸的迴轉半徑為 5 吋. 軸上繞繩；繩經無重滑輪後，另端繫有物體 $B$，重 60 磅，與水平

面的摩擦係數爲 0.2. 如 $A$ 沿 60° 斜面向下滾動，並無滑動，試求繩內拉力及 $B$ 的加速度.

答 $T=21.86$ 磅; $a=5.29$ 呎/秒$^2$.

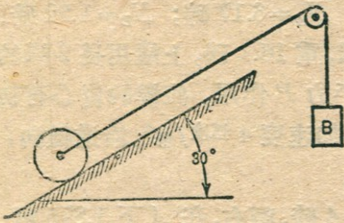



圖 417.

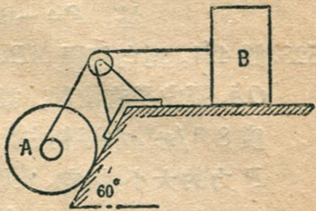



圖 418.

525. 方板每邊長 12 呎，兩邊成水平，其餘兩邊與水平線成 30° 角. 一均質圓柱，沿對角線向下滾動，並無滑動；自上角開始時，速度爲零. 試求圓柱到達下角時，質心的速度.

526. 均質圓柱，直徑 1 呎，在與軸垂直的中心平面上，繞有軟繩，示如圖 419. 圓柱開始下降時，繩適拉緊. 試求 $(a)$ 圓柱質心的加速度，$(b)$ 圓柱的角加速度，$(c)$ 質心在最初 2 秒鐘內所經的距離.

答 $\bar{a}=21.4$ 呎/秒$^2$; $\alpha=42.9$ 弧度/秒$^2$; $s=42.9$ 呎.

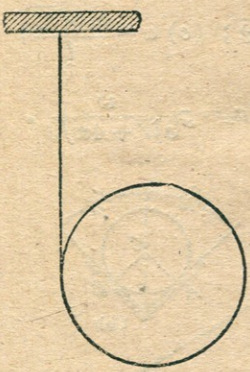


圖 419.

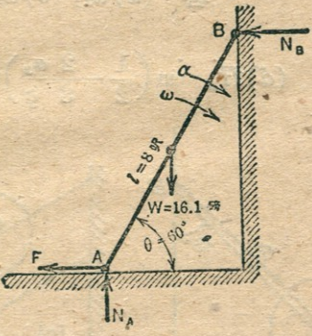



圖 420.

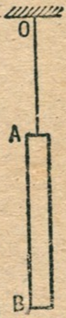



圖 421.

527. 均質稜柱形桿 $AB$ (圖 420)，重 16.1 磅，長 8 呎，兩端各沿光滑

的水平面與垂直面滑動，$A$ 端有水平力 $F$ 作用。設在圖示位置（$\theta=60°$），桿的角加速度爲 $\alpha=3$弧度/秒$^2$，角速度爲 $\omega=2$弧度/秒，試求 $F$, $N_A$, 與 $N_B$。

答　$F=-0.03$ 磅；$N_A=6.17$ 磅；$N_B=1.22$ 磅。

528. 圖 421，均勻細桿 $AB$，長 3 呎，重 16.1 磅，上端用長 2 呎的軟繩 $OA$，懸成垂直位置。設有水平力 $P$ 作用，使桿的質心有初加速度 8 呎/秒$^2$，水平朝右；桿有角加速度 4 弧度/秒$^2$，沿逆鐘向；試求 $P$ 力的大小，指向，及作用線。

答　$P=4$ 磅，朝右，在 $A$ 下 1.875 呎。

529. 均勻細桿，長 $l$，重 $w$，上端斜倚光滑直壁，下端用光滑銷釘連至均質圓柱的軸心，圖 422。柱重 $W$，半徑 $r$，靜置於水平面上。自圖示位置，開始向左滾動，並無滑動，$A$ 的初加速度爲 $a_x$（水平）。

(a) 用運動學原理求 $B$ 的加速度。

(b) 用運動學原理，求 $G$ 的加速度，及 $AB$ 桿角加速度。

(c) 寫出 $AB$ 桿的運動方程式。

(d) 求 $A$ 的水平反力。

(e) 應用牛頓定律，求出此反力與 $a_x$ 的關係，並計算 $a_x$。

答　(a) $a_x$；(b) $a_x/\sqrt{2}$；(c) $\alpha=\dfrac{a_x\sqrt{2}}{l}$；

$$(d)\ H_A=w\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\frac{a_x}{g}\right);\quad (e)\ a_x=g\frac{w}{3W+4w/3}.$$

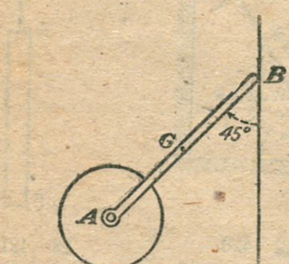



圖 422.

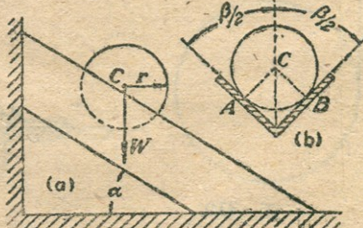



圖 423.

530. 球重 $W$，半徑 $r$，沿 V 形斜槽向下滾動，並無滑動。槽軸與水平面成 $\alpha$ 角，示如圖 423 ($a$)，槽的橫斷面，示如圖 423($b$)。試求球心的加速度。又如接觸點 $A$ 與 $B$ 的摩擦係數為 $\mu$，欲使球不致滑動，問 $\alpha$ 角應有何種限制?

答 $a_c=\dfrac{g\sin\alpha}{1+\dfrac{2}{5}\csc^2\dfrac{\beta}{2}}$; $\tan\alpha<\mu\left(\dfrac{5}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}+\csc\dfrac{\beta}{2}\right)$.

531. 兩圓柱各重 32.2 磅，直徑 1 呎，軸線均成水平，沿 30° 斜面向下滾動，柱上置有長板，圖 424，重 64.4 磅。如各接觸點均無滑動，試求圓柱質心的加速度，及各接觸點的摩擦力。

答 $a=8.78$ 呎/秒$^2$; $F_A=F_C=5.85$ 磅，向上;

$F_B=F_D=1.46$ 磅，向上。

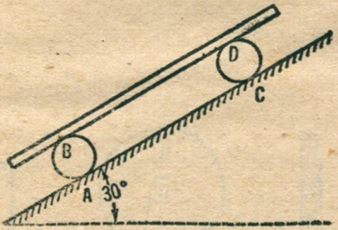


圖 424.

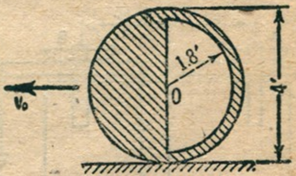


圖 425.

532. 圓柱直徑 4 呎，重 1610 磅，橫斷面示如圖 425. 向左滾動，在圖示位置，$O$ 點速度為 $V_o=4$ 呎/秒. 除本身重量及平面的反力外，並無其他外力. 試求角加速度，摩擦力，及法線壓力.

答 $+3.34$ 弧度/秒$^2$; $-230$ 磅; $+1520$ 磅。

## 總習題

533. 寫出剛體的三個運動方程式：($a$)平移，($b$)迴轉，繞不通過質心的迴轉軸，($c$)平面運動.

534. 用你自己的語言，($a$)陳述達倫勃原理；($b$)定義物體的慣性力；

(c) 說明離心力的意義.

535. 如一剛體以某角加速度繞一固定軸迴轉,外力的合力,在何種情形下為(a)一個力? (b)一力偶.

536. 一剛體作平面運動,(a)如質心速度 $\bar{a}=0$, 而角加速度 $\alpha\neq0$, 則對作用於剛體的合力可得何種結論? (b)如 $\bar{a}\neq0$, 而 $\alpha=0$, 可得何種結論?

537. 火車速度為 30 哩/時,行駛至 0.4% 下坡時,將蒸汽關閉. 如車輛阻力為 10 磅/噸,試求在第 100 秒鐘末的車速.

答 27.8 哩/時

538. 圖 426. 門重 300 磅, $A$, $B$ 與滑軌的摩擦係數為 $^1/_4$. 欲使門有加速度 4 呎/秒$^2$, 試求 $P$ 力. 並求作用於 $A$ 與 $B$ 的垂直反力.

答 $P=112$ 磅; $R_A=43.9$ 磅; $R_B=256$ 磅.

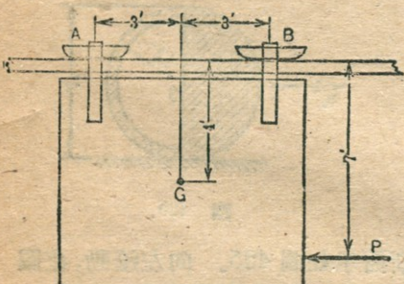



圖 426.

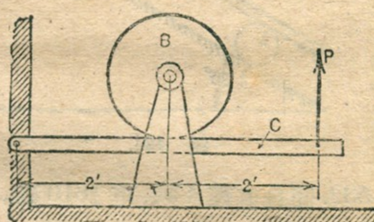



圖 427

539. 均質圓柱 $B$, 圖 427, 重 2000 磅, 半徑 10 吋; $P$ 力作用於閘桿, 使圓柱轉速於 3 秒鐘內由 120 轉/分 等率減至 30 轉/分. 如 $B$ 與 $C$ 的摩擦係數為 0.2, 轉軸摩擦力可略去不計, 試求 $P$ 力. 並求轉軸作用於圓柱的水平與垂直反力. 答 $P=203$ 磅.

540. 木船重 300 磅, 停於靜水中, 甲板平面長 12 呎. 一人重 150 磅, 立於船的一端, 以等加速度 10 呎/秒$^2$ 跑至另端後, 跳入水中. 假

定水爲一理想流體，無黏性阻力，試求船與人（當作一物體）的質心加速度：$(a)$在此人開始跑動之前，$(b)$在甲板上跑動時，$(c)$已跳離船頭之後，落水之前．並求$(d)$此人在甲板上跑動時，船的質心加速度。

541. 圖 428．$A$ 球重 4 磅，$B$ 球重 12 磅，連以無重細桿，使其能繞垂直軸在水平面上迴轉．設角速爲 80 轉/分，試求使直軸彎曲的水平力。可視 $A, B$ 與細桿爲一質量系解之。

答　$R=14.5$ 磅。

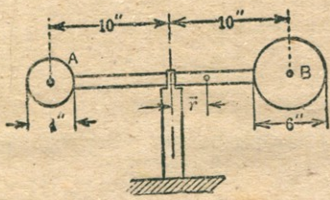



圖 428.

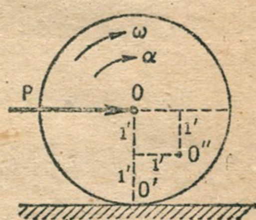



圖 429.

542. 圓盤重 100 磅，直徑 4 呎，沿水平直軌向右滾動．在某一瞬時，角速度 2 弧度/秒，角加速度 4 弧度/秒$^2$．試求所需作用於圓盤的 $P$ 力：用三種方法解答，分別取 $O, O'$，與 $O''$（圖 429）爲力矩中心。$O'$ 的加速度朝向圓心，$O''$ 的加速度則等於零。

答　$P=37.3$ 磅。

543. 圖 430。$A$架以角速 $\omega=40$轉/分繞垂直軸迴轉．外端用光滑銷釘 $E$ 連一垂直桿 $B$．$B$ 重 20 磅，長 16 吋，頂端連有 $C$ 球。$C$ 重 8 磅，直徑 4 吋．試求 $E$ 與 $F$ 作用於 $B$ 的反力。

答　$E=89.0$ 磅，

$\theta_2=161°40'$；　$F=46.3$ 磅。

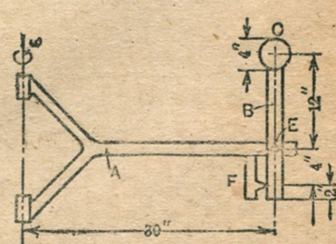



圖 430.

# 第十章 功與能

**115. 緒言** 在第八、第九兩章中，我們已由牛頓運動定律，求出力、質量、與加速度間的關係；並已將此種關係，應用於物體受不平衡力系所作用時的運動. 在牛頓定律中，直接用到的物理量，祇有力、質量、與加速度等三種. 但加速度可由速度、距離、與時間三者中任何二量表示之. 故在動力學中，我們共已用到六種物理量，卽力、質量、加速度、速度、距離、與時間. 由這六種量，可以組成許多種其他的物理量，其中最重要的是：功、功率、能、衝量、與動量. 許多工程問題的分析，如應用功、能等量，比直接用牛頓定律，遠較簡捷. 此種量的基本概念，及其對工程問題的應用，雖亦可謂直接得自日常的經驗，但各量間的明確關係，則完全以牛頓運動定律爲基礎.

本章目的，在說明功與能的涵義，並討論表示兩者間關係的若干原理. 關於工程問題，應用功與能的分析方法，固亦不外以牛頓定律爲根據；但卽在頗爲簡單的問題中，例如剛體的平移、迴轉、與平面運動，有時已比直接應用力、質量、與加速度，較爲方便. 至於分析非剛體（包括彈性物體，塑體，流體）的，性質較爲繁複的運動問題時，則功能原理的應用，特感重要. 事實上非剛體如水、蒸汽、與空氣等力學性質的研究，大多以功能原理爲根據. 故功能原理在水力學、熱力學、與流體力學中，均佔極重要的地位.

## §1 功與功率

**116. 功的定義** 一個力作用於某運動物體，力的作用點，如有沿力的作用方向的分位移，則此力與此分位移的乘積，定義爲此力對於此物體所做的功. 此分位移名爲有效位移.

又，力的作用點的位移，與此力沿位移方向的分力的乘積，與上述

乘積相同，亦可作爲功的定義。 沿位移方向的分力，名爲**工作分力**.

由上述定義，可知功的大小完全由力與位移所決定，與作用點改變位置的快慢無關。如力的作用點固定不動，則不論作用時間的久暫，所做的功必等於零。

上述定義，對物體的運動狀態及是否有其他力同時作用，均無任何限制。設有多個力同時作用於一運動物體，則無論物體作何種運動，每個力所做的功，各可照上述定義計算。

由上述定義，可知在工作分力與位移指向相反時，所做的功爲負值.

**117. 表示功的算式** 令 $w$ 代表 $F$ 力所做的功，$s$ 代表 $F$ 力作用點的位移。 功的計算方法，可照上述定義，將幾種重要的特例分述如下：

I. 力的大小與方向均固定不變，並與位移同方位，例如將物體以等加速度垂直上舉所需的力。則

$$w=F\cdot s.$$

II. 力的大小與方向均固定不變，但力的作用線與位移成 $\theta$ 角，圖431。則

$$w=F\cos\theta\cdot s=F_t\cdot s,$$

式中以 $F_t$ 代表的 $F\cos\theta$，卽與作用點的位移相切的工作分力。

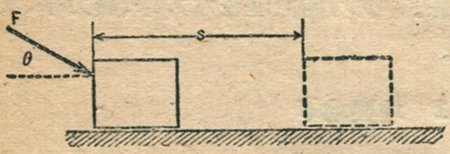



圖 431

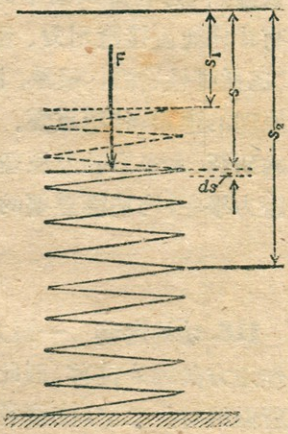



圖 432.

III. 力的方向不變，且與位移的方向相同，其大小則並不固定；例如，使彈簧(圖432)伸長或縮短的軸向 $F$ 力，及在進汽瓣

關閉後蒸汽作用於活塞的壓力等．在極小位移 $ds$ 中，力的大小可視爲不變．故相當於微分位移 $ds$，$F$ 所做的功，由(I)知爲 $dw=Fds$．位移由 $s_1$ 至 $s_2$，此力所做的功共爲

$$w=\int_{s_1}^{s_2}F\,ds=F_{av}\cdot\Delta s,$$

式中 $\Delta s$ 卽 $s_2-s_1$，$F_{av}$ 代表 $F$ 對於位移(不是時間)的平均值．如 $F$ 爲 $s$ 的已知函數，則上式積分普通極易計算．

IV. 力的大小與方向均不固定，例如發動機的連桿作用於曲柄銷的壓力，圖 433．將 $F$ 力分解爲法線分力 $F_n$，與切線分力 $F_t$．$F_n$，因與力作用點的動路(在本例中爲一圓周)垂直，並不做功．$F_t$ 則恆與位移同方向，相當於位移 $ds$，$F_t$ 所做的功爲 $F_t ds$，與(III)完全相同．故位移由 $s_1$ 至 $s_2$，$F$ 所做的功共爲

$$w=\int_{s_1}^{s_2}F_t\,ds.$$

無論力的作用點沿任何曲線移動，上式均可應用．設力的作用點沿半徑 $r$ 的圓周移動，則位移 $ds$ 可用下式表示，$ds=rd\theta$．

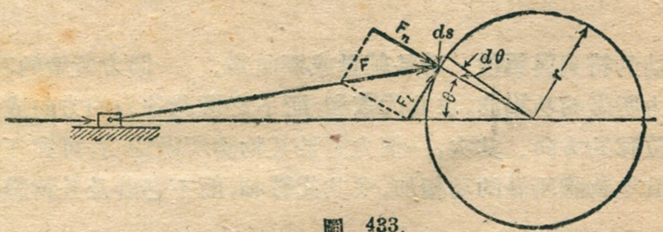



圖 433.

於是

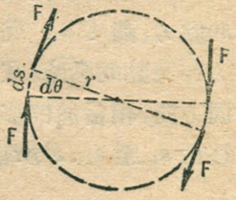
$$w=\int_{s_1}^{s_2}F_t\,ds=\int_{s_1}^{s_2}F_t r\,d\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}T\,d\theta,$$

式中 $T$ 代表 $F$ 力對於圓周中心的轉矩．設在角位移 $\theta=\theta_2-\theta_1$ 中，轉矩的大小與方向均固定不變，則

$$w=T\int_{\theta_1}^{\theta_2}d\theta=T(\theta_2-\theta_1)=T\cdot\theta.$$

對動路中心的轉矩為 $T$(固定不變)的 $F$ 力，其作用點繞圓一週，所做的功為 $w=T\cdot 2\pi$。如 $F$ 力在單位時間內繞圓周 $n$ 次，則此力在單位時間內所做的功為 $w=T\cdot 2\pi n$.

**118. 力偶所做的功** 設有力偶 $F\cdot 2r$ 作用於一物體，圖 434，則相當於角位移 $d\theta$，力偶的二力所做的功為 $2F\,ds$ 或 $2Fr\,d\theta$. 但 $F\cdot 2r$ 即力偶的轉矩。故在角位移 $d\theta$ 中，力偶所做的功等於力偶的轉矩 $T$ 與力偶的角位移 $d\theta$ 的乘積。在角位移 $\theta=\theta_2-\theta_1$ 中，力偶所做的功共為




$$w=\int_{\theta_1}^{\theta_2}T\,d\theta.$$

圖 434.

設力偶的轉矩，大小與方向均固定不變，則在角位移 $\theta$ 中，所做的功即為 $w=T\theta$.

**119. 功的符號與單位** 功是純量或無向量。一個力所做的功，可與其他各力所做的功相加，求其代數和，而不必顧及各力的方向或各力的作用點位移的方向。其次，一個力對於某物體所做的功，可與任何其他力對於其他物體所做的功相加，求其代數和，而不必計及各物體的運動情形。

力的工作分力，與力的作用點的位移，如指向相同，則此力對於物體所做的功，照定義應為正值；如工作分力與位移指向相反，則此力對於物體所做的功，應為負值。故使物體減速的力，對物體做有負功。

一單位力沿其作用方向運動一單位距離，所做的功，即取為一單位功；故功的單位隨力與距離的單位而定；工程中常用的單位為吋·磅.

呎·磅，粎·瓩等.(註) 較大的單位則為馬力·時與瓩·時，定義詳第 122 節。

**120. 功的圖示與計算** 應用積分法計算一個變力所做的功，則工作分力 $F_t$ 必須是位移 $s$ 的已知函數. 設 $F_t$ 不能用 $s$ 的函數表示，或函數過於複雜不便應用，則 $F_t$ 與 $s$ 的關係可作圖或曲線表示之，而 $F_t$ 所做的功，則可用作圖法求出如下：取 $F_t$ 為縱坐標，$s$ 為橫坐標，相當於力作用點的某一位置，有一對 $F_t$ 與 $s$ 的對應值，在圖上可畫出一點，連接此種點所成的曲線名為**工作分力·距離曲線**，或 $(F_t-s)$ 曲線，圖 435.

由第 117 節知，變力所做的功為 $w=\int_{s_1}^{s_2}F_t\,ds$. 但 $F_t\,ds$ 代表 $(F_t-s)$ 曲線下一極小矩形的面積(圖 435)，而在 $s_1$ 與 $s_2$ 兩縱線間，此曲線下的總面積為

$$面積=\int_{s_1}^{s_2}F_t\,ds.$$

故知相當於位移由 $s_1$ 至 $s_2$，一個力所做的功，等於在縱線 $s_1$ 與 $s_2$ 之間的 $F_t-s$ 曲線下的面積. 此種圖名為示功圖. 如縱坐標的比例尺為 1 吋＝50 磅，橫坐標 1 吋＝5 呎，則 $F_t-s$ 曲線下的面積 1 方吋，代表功 250 呎·磅.

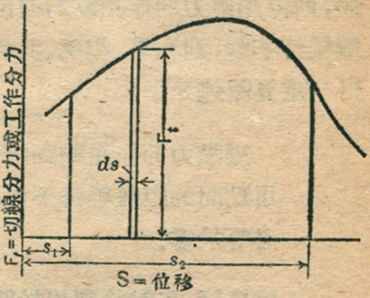



圖 435.

$F_t-s$ 曲線下的面積，可用 $F_t$（對於距離）的平均值，即曲線的平均縱坐標，乘以力作用點所經的總距離（即 $s_2-s_1$）得之. 如有面積計，則任何形狀的面積，均極易量出. 亦可將面積分為許多縱向狹條，應用辛普生定則，求得相當準確的結果. 有時僅須估計功的約量，則面積的

註 工程用的重力制中，功的單位，並無專名. 在絕對制中，則功的單位達因·糎，名為爾格(Erg). $10^7$ 爾格，名為焦耳(Joule).

衡量無需十分精密

**121. 一力系對於物體所做的功** 以上所論，僅指一個力或一力偶對於物體所做的功。但一物體普通受幾個力同時作用，即受一力系所作用。一力系對於物體所做的功，等於各力所做的功的代數和；普通與力系的合力所做的功並不相等。例如，作用於螺線彈簧的兩端而使其伸長的 $F$, $F$ 力，彈簧的伸長愈多，所需的 $F$ 力愈大，每力均有沿其作用方向的位移，故均做有正功；但兩力相等、相反、共線，其合力恆等於零。

設將上述彈簧代以一靜止的剛桿，兩端有軸向的 $F$, $F$ 力作用，相等、相反、共線，則無論 $F$ 力的大小如何變化，因每一力的作用點均未移動，故兩力所做的功均等於零。如剛桿並不靜止，而可有任何種運動，則桿端兩力的作用點均有位移；但極易證明，設兩力作用點間的距離維持不變，則相等、相反、共線的 $F$, $F$ 力，所做的功仍等於零。故可得一重要陳述如下：

> **無論力的作用點如何運動，無論力的大小如何更改，如兩力作用點間的距離維持不變，則相等、相反、共線的兩個力所做的功，必等於零。**

上述事實，在討論應用於剛體的功能原理時，特為重要（第131節）。因剛體內任何兩點間的距離，均假定為永恆不變；而由牛頓定律知剛體內任何兩質點互相作用的力，必相等、相反、共線；故無論剛體如何運動，內力所做的功，必等於零。

作用於一質點的力系，必為共點力系，各力作用點間的距離必等於零。故每對相等、相反、共線的力所做的功，必等於零；因而全力系各力對於質點所做功的代數和，必等於力系的合力所做的功。

一力系對於某物體所做的功，與力系的合力所做的功雖不一定彼此相等，但有時則二者確屬相等。例如，地球作用於一物體的各質點的力所做的功，無論物體如何運動，必與其合力（即物體的重力）所做的功

相同. 此事實可陳述如下:

無論物體如何運動,物體的重力所做的功,等於物體的重量與物體重心的垂直位移的乘積.

## 例題

544. 圖436所示彈簧,被軸向載荷 $P$ 壓短 $s=4$ 吋. 彈簧係數爲200磅/吋. 試求(變)載荷在壓縮彈簧中所做的功.

解 在彈簧縮短 $y$ 時,所需載荷令爲 $P_y$. 由第117節(*III*)知

$$w=\int_0^s P_y dy$$

但 $$P_y=200y$$

故 $$w=\int_0^s 200\,y\,dy$$

$$=\frac{200\,s^2}{2}=\frac{200}{2}(4)^2(\text{當}s=4)$$

$$=1600\text{ 吋·磅}.$$

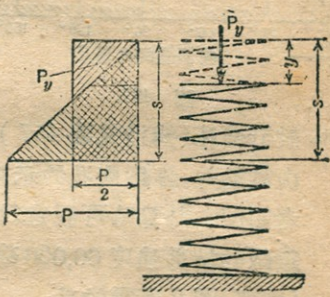


圖 436.

因 $w=\frac{200\,s^2}{2}$ 亦可寫爲 $w=\frac{200s}{2}\times s=\frac{P}{2}\times s=$ 示功圖的三角形面積,亦等於平均載荷與總位移的乘積,亦卽爲與示功圖三角形面積相同的矩形所代表的功.

545. 作用於曲柄銷的工作分力 $F_t$(圖433)名爲切線力. 某蒸汽機的切線力與曲柄銷位置的關係,示如圖437. 所用比例尺爲:縱坐標1吋=24磅/方吋活塞面積,橫坐標1吋=曲柄銷圓周上對應於30°角的弧長. 曲線下的面積共爲11.5方吋. 曲柄長7.5吋,活塞直徑14吋. 試由圖計算一衝程所做的功.

解 曲柄銷圓上的30°弧長=3.92吋.

示功圖面積1方吋=24×3.92=94.2吋·磅.

每方吋活塞面積一衝程所做的功爲

$$94.2\times 11.5=1083\text{ 吋·磅}=90.2\text{ 呎·磅}.$$

故活塞一衝程所做的功共爲 $90.2\times\dfrac{\pi\times 14^2}{4}=13,900$ 呎·磅.

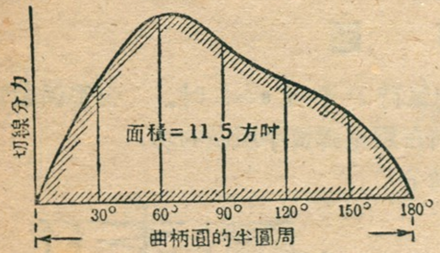



圖 437.

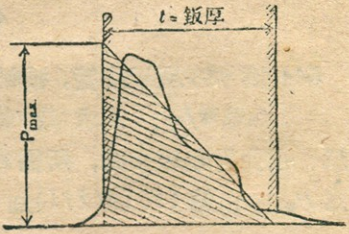



圖 438.

546. 設計衝床(構造見圖 457)時，必須預知將一鈑衝孔所需的功. 由試驗知，鋼鈑衝孔的示功圖，其形狀與圖 438 中的粗曲線所示者類似. 計算時可假定爲一直角三角形，最大壓力 $P_{max}$ 相當於鋼鈑的抗剪強度 60,000 磅/方吋. 試求在 $\frac{5}{8}$ 吋(厚)鋼鈑衝一 $\frac{7}{8}$ 吋(直徑)圓孔所需的功.

**解**
$$P_{max}=\text{抗剪面積}\times\text{抗剪強度}=\pi td\times 60,000$$
$$=\pi\times\tfrac{5}{8}\times\tfrac{7}{8}\times 60,000=103,000\text{ 磅}.$$

假定示功圖成三角形，則每衝一孔所需的功爲

$$w=\text{平均壓力}\times\text{鈑厚}$$
$$=\frac{P_{max}}{2}\times t=\frac{103,000}{2}\times\frac{5}{8}=32,200\text{ 吋·磅}.$$

547. 圓柱半徑 $r$ 呎，重 $W$ 磅，圖 439，沿與水平面成 $\phi$ 角的斜面向下滾動，並無滑動. 試求對於圓柱所做的功.

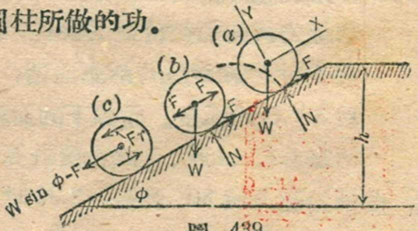



圖 439.

**解** 作用於圓柱的力，有重力 $W$，法線反力 $N$，與摩擦力 $F$(圖 439$a$). 設經過圓柱的質心，加上相等相反的 $F,F$ 力(圖439$b$)，對物體的運動並無影響. 再將

$W$ 分解為 $x$ 與 $y$ 兩軸向的分力；圖 $(a)$ 所示三個力，可歸併為一個力 $W\sin\phi-F$，與一力偶 $Fr$，示如圖 439$(c)$，故質心移動 $\bar{s}$ 時，外力對於圓柱所做的功為

$$w=(W\sin\phi-F)\bar{s}+Fr\cdot\theta.$$

但質心所經的距離 $\bar{s}$，等於圓柱所滾過的斜面之長 $s$。且 $s=r\theta$，$\theta$ 卽圓柱的角位移。卽

$$\bar{s}=s=r\theta.$$

故
$$\begin{aligned} w &= W\sin\phi\cdot s-Fs+Fs \\ &= W\sin\phi\cdot s \text{ 呎·磅.} \end{aligned}$$

可見摩擦力 $F$ 並不做功，因如無滑動，則 $F$ 的作用點的位移方向與 $F$ 成垂直。同理，法線反力 $N$ 亦並未做功，因 $N$ 的作用點在 $N$ 的方向並無位移。故對於圓柱做功的僅有重力 $W$。重力 $W$ 所做的功，應等於 $Wh$（第 121 節），而由圖 439 知 $h=s\sin\phi$，故 $w=Ws\sin\phi$。與以上計算所得的結果相同。

## 習　題

548. 汽車重 3500 磅，沿斜坡向上滑動 300 呎。每水平距離 50 呎，斜坡昇高一呎。與坡路平行的摩擦阻力共為汽車重量的 0.08。試求在此 300 呎距離中，外力對於汽車所做的功。

答　$w=-105{,}000$ 呎·磅。

549. 木箱重 80 磅，被一力 $P=60$ 磅沿 30° 斜面向上拖動，圖 440。摩擦係數為 $\frac{1}{4}$。試求在木箱滑動 20 呎的距離中，每力對於木箱

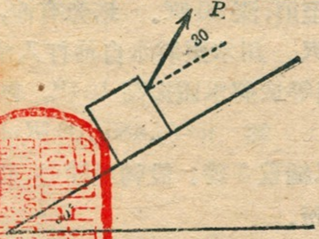


圖 440.

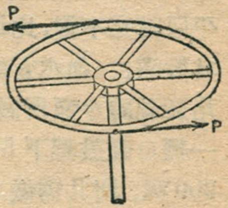


圖 441.

所做的功，及各力對於木箱所做功的總量.

答　42.8 呎·磅.

550. 開閉汽瓣的手輪，直徑 18 吋，圖 441. $P$, $P$ 二力，各 20 磅，沿切線方向作用，組成一轉矩. 如關閉汽瓣時共需轉動 8 轉，試求所做的功.

551. 圖 442，蒸汽機的示功圖：縱坐標代表蒸汽壓力，1吋＝100磅/吋$^2$；橫坐標代表活塞所走的距離，1 吋 ＝ 5 吋. 示功圖面積 2.5 吋$^2$. 橫向長 3 吋（卽衝程 ＝15 吋）. 活塞直徑 14 吋. 試求每衝程蒸汽對於活塞所做的功，及平均有效壓力.

答　$w$＝16,000 呎·磅.

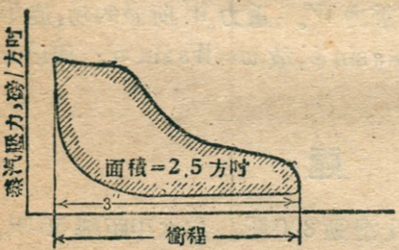



圖 442.

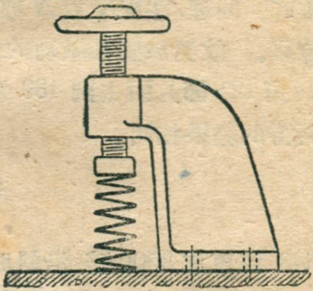


圖 443.

552. 圖 443 所示螺旋，每吋 4 線，卽小輪右轉 4 圈，可使彈簧縮短 1 吋. 如摩擦力矩平均爲 20 吋·磅，彈簧常數爲 200 磅/吋，欲使彈簧縮短 3 吋，問所需作用於小輪的功應爲若干?

553. 圓柱形水塔，直徑 6 呎，自底至頂，深 60 呎. 塔旁有池，池中水平面固定不變，比塔底低 40 呎. 用水泵將水自池打入水塔，使其裝滿. 如水管的摩阻力適等於將水頭提高 10 呎，試求將水塔裝滿時水泵所做的功.　答　$w$＝8,485,700 呎·磅.

554. 一繩自圓鼓懸下 500 呎，每呎繩重 5 磅. 設轉動圓鼓，將繩繞上 200 呎，問共需做功若干呎·磅.

答　$w$＝400,000 呎·磅.

555. 小物體 $D$ 可沿半圓軌道滑動,圖444. $AD$ 為一彈簧,繫於 $A$;在未受力時,原長 1 呎,而使其伸長 1 吋,需力 5 磅. 試求 $D$ 由 $B$ 滑動至 $C$ 時,彈簧對於 $D$ 所做的功.

答　$w=24.8$ 呎·磅.

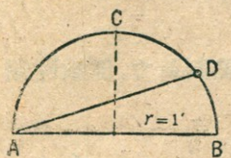



圖 444.

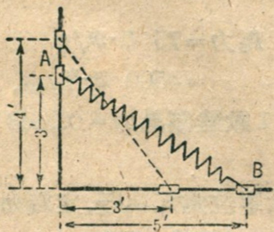



圖 445.

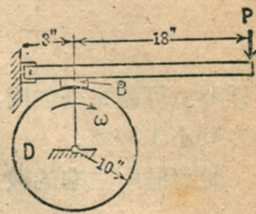



圖 446.

556. 滑塊 $A$ 與 $B$,連以彈簧. 彈簧常數為 100 磅/呎,在未受力時,原長 4 呎. 設將 $A$ 與 $B$ 自圖 445 的虛線位置,移動至實線位置,試求對於彈簧所做的功.　答　$w=117.5$ 呎·磅.

557. 圖 446. 閘桿右端 $P$ 力為 20 磅,閘鞋 $B$ 與鼓輪 $D$ 間的摩擦係數為 0.40. 試求在鼓輪迴轉 10 轉中,對於鼓輪所做的功. 輪軸與軸承的摩擦力可略去不計.　答　$w=-2930$ 呎·磅.

**122. 功率的定義**　功率定義為做功的時間率. 如在時間 $t$ 內做功的快慢為一定,共做功 $w$,則功率 $P=\dfrac{w}{t}$. 如做功的快慢並不一定,則任一瞬時的功率為 $P=\dfrac{dw}{dt}$.

**功率的單位**　功率亦無向量. 其單位可用任一功的單位除以時間. 重力制中常用呎·磅/秒,瓩·粎/秒;而絕對制中則常用達因·糎/秒(即爾格/秒)與焦耳/秒.

工程中普通用較大的功率單位,較為方便. 重力制中的馬力可定

義爲(註)

$$1\ 馬力=550\ 呎\cdot磅/秒$$
$$=33,000\ 呎\cdot磅/分。$$

通用於英、美、各國，亦名英美制馬力；我國工程界亦多採用。歐洲大陸所用的馬力，則定義爲

$$1\ 馬力=75\ 瓩\cdot粎/秒$$
$$=4500\ 瓩\cdot粎/分。$$

兩種馬力可謂完全相同，1 歐陸制馬力 = 0.9863 英美制馬力，即歐陸制馬力較小 1.37%。

絕對制中功率的較大單位爲瓦與瓩，定義如下：

$$1\ 瓦=10^7\ 爾格/秒。$$
$$1\ 瓩=1000\ 瓦。$$

瓦與瓩在電機工程中廣泛採用。其與英制馬力的關係如下：

$$1\ 馬力=746\ 瓦。$$
$$1\ 瓩=1.34\ 馬力。$$

普通折算，用下列簡式已足夠準確：1 馬力 = $\frac{3}{4}$ 瓩，1 瓩 = $\frac{4}{3}$ 馬力。

相當於功率單位的馬力與瓩，功的較大單位在工程中常用者爲馬力·時與瓩·時。1馬力的機器繼續工作1小時所做的功即1馬力·時。

故　　1 馬力·時 = 33,000 × 60 = 1,980,000 呎·磅。

同理　　1 瓩·時 = 1.34 × 1,980,000 = 2,650,000 呎·磅。

**123. 功率的計算式**　設有大小固定的 $F$ 力，沿位移方向作用，其作用點於單位時間內經過距離 $v$，例如機車的固定拖力，則在單位時間內所做的功等於 $Fv$。　單位時間內所經距離 $v$ 即力作用點的線速。　如 $F$ 的單位爲磅，$v$ 的單位爲 呎/秒，則此力(或作用此力的物體)的功率爲

---

註　馬力的定義，係由瓦特(James Watt)所創立。機器的 1 馬力，實際比 1 匹強壯的馬做功的時間率大得多。 瓦特的目的在使顧客對買去的蒸汽機感到滿意，故意把馬力定義得很大。

$$\text{馬力}=\frac{Fv}{550}.$$

如 $F$ 與 $v$ 均非常數，則上式僅表示力為 $F$ 線速為 $v$ 時的瞬時馬力。又如 $F$ 力的作用線與力作用點的位移方向不同，則須用力的工作分量或切線分力 $F_t$，代替上式中的 $F$。但工程中實際應用的，並非瞬時馬力，而是一循環或若干循環的平均馬力。例如往復式的蒸汽機或內燃機，平均馬力的公式為

$$\text{馬力}=\frac{2\,plan}{33{,}000\,m},$$

式中 $p$ 代表蒸汽（或燃氣）作用於活塞的平均有效壓力（磅/方吋），$l$ 為衝程的長度（呎），$a$ 為活塞面積（方吋），$n$ 為轉速（轉/分）；$m$ 代表一常數：雙作用（Double acting）蒸汽機，$m=1$；二衝程內燃機，$m=2$；應用於四衝程內燃機，則 $m=4$。

$$\text{歐陸馬力}=\frac{2\,plan}{4500\,m}.$$

式中 $p$, $l$, $a$, 與 $n$ 的單位各為 瓩/方糎，粎，方糎，與 轉/分。

平均有效壓力的求法，見題551。故如發動機的衝程、活塞面積、與轉速，均為已知，即可由示功圖計算馬力。如此計算所得的馬力，名為**指示馬力**。

設力偶的轉矩 $T$ 固定不變，在角位移 $\theta$ 中所做的功為 $F\cdot\theta$（第118節）。如力偶在單位時間內轉動 $\omega$ 弧度，換言之，如以 $\omega$ 代表力偶所作用的物體的轉速，單位為 弧度/秒，則力偶 $T$ 的功率為

$$\text{馬力}=\frac{T\omega}{550}.$$

$$\text{歐陸馬力}=\frac{T\omega}{75}.$$

兩式中 $T$ 的單位各為磅·呎與瓩·粎。如力偶的轉矩與轉速均非常數，則上式僅代表在轉矩為 $T$ 轉速為 $\omega$ 時的瞬時馬力。但工程中應用的，

普通均爲一循環或若干循環的平均馬力而非瞬時馬力.

## 習題

558. 一機車有固定拖力 35,000 磅,使列車綫速於某一時間內由 30 增至 40 哩/時. 試求機車的馬力 (*a*) 在此時間之初, (*b*) 在此時間之末; 及 (*c*) 在此時間中機車的平均馬力。

答 (*a*)2800 馬力; (*b*)4200 馬力; (*c*)3500 馬力.

559. 一人轉動某絞盤的曲柄,柄長 15吋. 在曲柄圓周上的四點,此人所作用的切線力 $F_t$,示如圖 447. 試畫切線作力圖(隨手畫出,不用比例尺),由圖估計切線作力的平均值,並計算此人的平均功率(以馬力爲單位)。 假定轉速爲 40 轉/分.

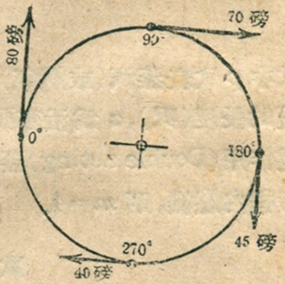


圖 447.

560. 同一轉軸上,裝有兩皮帶輪,相距10 呎。 一輪用皮帶連至蒸汽機,接受 3 馬力; 另輪用皮帶拖動其他機器。 設此軸轉速爲 150 轉/分,試求傳至轉軸的力矩。

答 105 磅•呎.

561. 3 馬力的電動機, 拖動一水泵,將水 200,000 立呎自水池打入水塔,塔中水平面高出池面 20 呎. 如打水設備的總效率爲 80%,試求打水所需的時間.

562. 設題 551 的蒸汽機爲雙作用式,轉速 250 轉/分,試求其指示馬力.

答 243 馬力.

## §2 能

**124.** 能的定義 一物體(或一質點)的能,定義爲此物體做功的本領. 一個力必有作用此力的物體,故所謂一個力所做的功,實則作用此力的物體所做的功. 此物體可以做功,卽因其含有能. 因物體的性質、位

置、與運動情形，可具有各種不同的能，例如熱能、化學能、電能、機械能等。由人類經驗知，任何種能在某許多適當條件下，均可轉變為任何其他種能。

物體的機械能，對動力學的關係最為密切，將在以下各節中，詳加討論。其他各種能，則僅在第 129 節中稍有提及。機械能分為位能（或名勢能）與動能。

由定義知，能亦為無向量。任一質量系所含的能等於各質點的能的代數和，與各點的運動方向無關。

能的單位與功的單位相同。詳見第 119 節。

**125. 位能**　一物體因其重心的位置或因其各質點的相對位置，而具有做功的本領，定義為此物體的**位能**。例如，在某一高度的水，下流時可使其推動水輪而做功；被拉長（或被壓短）的彈簧，被壓縮的空氣（或蒸汽）均因其各質點的相互位置，可以推動某物體而做功。嚴格地說，如無地心吸力，則在某一高度的水，將並無向下流動的趨勢；故水的位能，事實上並非水單獨所具有，而應為水與地球所共同具有的；但普通均假想地球為固定不動，故為方便計，就稱為水的位能。

一物體所儲位能的量，是相對於某一基準情形計算的。例如，在高處的物體的位能，普通取地面或海平面為基準面；被壓縮或被拉伸的彈簧所儲的位能，普通取彈簧未受外力（除重力外）時的狀態為基本狀態；壓縮空氣的位能是以自由空氣為基準狀態等。取不同的基準情形，可以算出不同量的位能。所以能，與運動相似，祇是相對的而非絕對的。

是以在某種情形下，一物體所儲位能的量，應定義為物體的重心由某高度移動至基準面時，或物體由某狀態改變至基準狀態時，所可能做功的量，假定物體的其他性質均無改變。但上述定義並不明確，除非滿足下述條件：物體系因儲有位能而所可能做功的量，並不隨物體改變位置時所歷的途徑或方式而增減，而完全決定於物體的最初與最末的位置或狀態。滿足此種條件的質量系，名為**保守質量系**。在此種質量系

改變位能時，作用於質量系的力系名爲**保守力系**。

保守質量系，在工程中時常遇到。事實上，任一剛體，如除位置外並無其他改變，且作用於剛體的力系中並無摩擦力（或可略去不計），即爲一保守質量系。最普通的例是：(1)在高處的物體（無論是否剛體）與地球；對於此物體所做的功，無論物體如何移動，必等於物體重心的垂直位移與物體重量的乘積（第121節）。(2)彈性物體（彈簧，空氣等），在任一應變情形(Strained condition)下所儲有的位能，亦與達到此情形所歷的步驟與方式無關。基準情形當然可以隨便選擇(註)，但爲方便計，必使物體的位能大於零或等於零，而非負值。故一質點系的位能，等於各質點的位能的算術和。

質量系改變位能時，如有摩擦力作用，則名爲**非保守質量系**；作用於非保守質量系的力系，名爲**非保守力系**。動力學問題包括非保守力系者，大多以質量系的動能較爲重要，詳下節。

## 習　題

563. 一螺旋彈簧，重 20 磅，彈簧常數爲 200 磅/吋。設以海平面爲基準面，以彈簧未受力（除重力外）時的形態爲基準形態，試求彈簧在海平面上被壓短 3 吋時的位能，及在高出 100 呎的塔頂上被壓短 3 吋時位能。

答　$E_p=75$ 呎•磅；$E_p=2075$ 呎•磅。

564. 物體 $B$，重 60 磅，懸於軟繩的一端。軟繩另端跨過無重無摩擦力的滑輪，與垂直彈簧相連，圖 448。彈簧係數爲 40 磅/吋。設有垂直向下的 $P$ 力，由零逐漸增加至50磅，作用於 $B$，試求 $(a)$ 彈簧，及 $(b)$ 彈簧與 $B$，位能的改變。

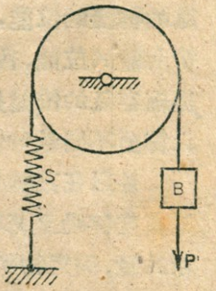


圖 448.

註　一質量系的絕對位能，我們無法計算，好在工程上所用到的，祇是位能的增減，故基準情形可以任意選擇。

答　(a) $\Delta E_p = 106$ 吋·磅；(b) $\Delta E_p = 31$ 吋·磅。

**126. 動能**　物體因運動或速度而具有的做功的本領，名爲物體的動能。物體因儲有動能，可以抵抗外力而做功，同時因此種外力的作用，物體的動能與運動，將發生改變。例如，水注(Water jet)可推動水輪，衝床的飛輪可使鏨刀在鋼鈑上衝孔等。在做功的時間內，水注與飛輪的速度，均發生改變。

一物體在任一瞬時所儲有動能的量，可定義爲此物體抵抗使其速度減低的外力所可能做功的量。換言之，即物體的速度由某瞬時値減低至零(即靜止)的過程中所可能做功的量。是以表示一物體(即質量系)的動能的式子，必應包括兩種因素：物體的運動(速度)，與物體能影響運動改變的動力學性質(如質量，轉動慣量等)。但所謂質量系的速度，只是含糊籠統的說法，因質量系中各質點的速度，普通並不彼此相同。下節中，將先求出一質點的動能。因爲能是純量，而動能又均爲正値(詳下節)，故質量系的動能即等於全系中各質點的動能的算術和。但質點的動能，並非僅在計算物體(或質點系)的動能時方纔用到。許多工程問題中的物體，均可作爲質點看待，因而即可應用計算質點的動能的方法，求出此種物體的動能。

**127. 質點的動能**　設有某物體(爲方便計，假定爲剛體)的一質點，質量爲 $m$，沿圖 449 所示路線，由位置 $P'$ 運動至位置 $P''$，其速度在 $P'$ 時爲 $v$，因沿途質點抵抗外力而做功，至 $P''$ 時速度等於零。外力(作用於一質點的各力，必爲共點力系)對於質點所做的功，應等於各外力的合力 $R$ 所做的功。或，$w=\int_{s_1}^{s_2} R_t\,ds$。但由動能的定義知，此質點的動能，$E_K$，即等於質點抵抗外力所可能做的功。故一質點的動能，可用下式作爲定義：

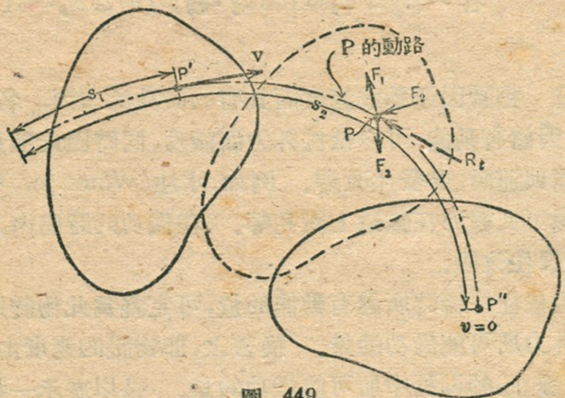



圖 449.

$$E_K = -w = -\int_{s_1}^{s_2} R_t\, ds.$$

因 $$R_t = ma_t,\quad a_t = \frac{dv}{dt},\quad 與\ \frac{ds}{dt} = v.$$

故

$$E_K = -\int_{s_1}^{s_2} R_t ds = -\int_{s_1}^{s_2} ma_t ds = -\int_{s_1}^{s_2} m\frac{dv}{dt} ds$$

$$= -\int_v^0 m\frac{ds}{dt} dv = -\int_v^0 mv dv = \frac{1}{2} mv^2.$$

可見質量爲 $m$ 速度爲 $v$ 的質點，其動能等於 $\frac{1}{2}mv^2$。或

$$E_K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g} v^2.$$

**單位** 設 $W$, $g$, 與 $v$ 的單位，各爲磅，呎/秒$^2$，與呎/秒，則 $E_K$ 的單位爲呎·磅。能的單位與功的單位相同。

## 習 題

565. 試用第85節(4)式證明：等加速直線運動的質點，在速度等於 $v$ 的瞬時，其動能爲 $\frac{1}{2}mv^2$。

566. 在 76 哩外轟擊巴黎的德國遠距炮，長 118 呎，彈丸直徑 8.15 吋，重 264 磅，自炮口射出時初速約爲 5000 呎/秒，大概於 3 分鐘後到達巴黎，末速約爲 2300 呎/秒，彈丸所達最大高度約 24 哩。如彈丸迴轉的動能略去不計，試估計彈丸剛離炮口與將落地時的動能，及在彈道中平均每秒鐘內損失的動能。

567. 一鋼球，重 1 磅，繫於繩的一端，繩長 3 呎，以角速度 120 轉/分，繞繩的另端沿半徑 3 呎的圓周等速迴轉。試求此鋼球的動能。

答 $E_K = 22.0$ 呎·磅。

**128. 物體的動能** 因爲能是純量，故物體（無論剛體或非剛體）的動能，等於各質點的動能的算術和。即任何質量系的動能爲

$$E_K = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2.$$

但爲便於應用，剛體的動能，最好能由全物體的質量（或轉動慣量等），與物體的角速度，或物體中某一點（例如質心）的線速度計算之。在平移、迴轉、與平面運動中的剛體，計算動能的式子，可求出如下：

I. 平移的剛體——無論剛體的運動爲直線平移或曲線平移，在任一瞬時，體內所有各質點的線速度彼此完全相同。換言之，在任一瞬時，上式中的 $v$ 爲一常數，與各質點的相對位置無關。故

$$E_K = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} v^2 \Sigma m.$$

但 $\Sigma m$ 即物體或全質量系的質量，可用 $M$ 代表之。得

$$E_K = \tfrac{1}{2} M v^2.$$

II. 迴轉的剛體——純迴轉的剛體，在任一瞬時，體內所有各質點對於迴轉中心 $O$ 的角速度，完全相同，即等於剛體的角速度 $\omega$，與各質點的相對位置無關。圖 450，與迴轉軸相距 $r$ 的質點 $P$，其線速度 $v$ 即等於 $r\omega$，故剛體的動能爲

$$E_K = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = \tfrac{1}{2} \Sigma m (\omega r)^2 = \tfrac{1}{2} \omega^2 \Sigma m r^2.$$

但 $\Sigma m r^2$ 即物體對於迴轉軸的轉動慣量，通常以 $I_o$ 代表之。如以

$I_o = \Sigma mr^2$ 代入上式,得

$$E_K = \tfrac{1}{2} I_o \omega^2.$$

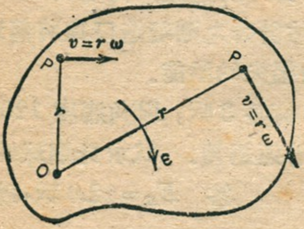



圖 450.

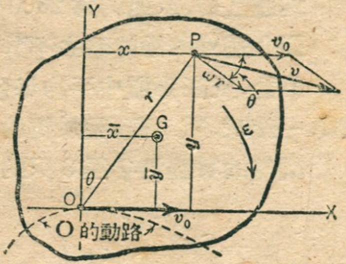



圖 451.

III. **平面運動中的剛體**——由第 96 節知,剛體的平面運動,在任一瞬時,均可視爲由兩種運動所組成:一爲純迴轉運動,以垂直於運動平面而通過該平面內任一 $O$ 點的直線爲迴轉軸;另一爲與 $O$ 點(名爲基點)相同的平移運動。故剛體內任一質點 $P$ 的線速度 $v$,圖 451,應等於 $P$ 對於 $O$ 的線速度 $\omega r$ 與 $O$ 的線速度 $v_o$ 的矢量和。因剛體內任何兩點,決不能有沿通過該兩點的直線方向的相對速度,故速度 $\omega r$ 必與 $OP$ 或 $r$ 垂直。因此得

$$v^2 = (\omega r)^2 + v_o^2 + 2\, v_o \omega r \cos\theta.$$

爲方便計,即取基點 $O$ 爲原點,取 $x$ 軸與 $v_o$ 同方向,圖 451。剛體的動能於是可由全物體的質量 $M$,物體的角速度 $\omega$,與體內任一點(本節中爲 $O$ 點)的線速度 $v_o$,表示如下:

$$E_K = \Sigma \tfrac{1}{2} mv^2 = \tfrac{1}{2} \Sigma m(\omega^2 r^2 + v_o^2 + 2 v_o \omega r \cos\theta)$$
$$= \tfrac{1}{2} \Sigma m\omega^2 r^2 + \tfrac{1}{2} \Sigma m v_o^2 + \Sigma m v_o \omega r \cos\theta$$
$$= \tfrac{1}{2} \omega^2 \Sigma mr^2 + \tfrac{1}{2} v_o^2 \Sigma m + \omega v_o \Sigma mr \cos\theta.$$

但 $\Sigma mr^2$ 爲物體對於 $O$ 軸的迴轉慣量,即 $\Sigma mr^2 = I_o$。同時,$r\cos\theta = y$,故 $\Sigma mr\cos\theta = \Sigma my = M\bar{y}$,$M$ 即物體的質量,而 $\bar{y}$ 則爲物體質心至 $x$ 軸的距離。故如取 $x$ 與 $y$ 軸如圖 451 所示,則剛體的動能爲

$$E_K = \tfrac{1}{2} I_o \omega^2 + \tfrac{1}{2} M v_o^2 + M\bar{y}\omega v_o \qquad (1)$$

因運動平面內任一點，均可取爲基點 $O$；如選取質心爲基點，則 $\bar{y}=0$，而 $I_o$ 成爲 $\bar{I}$，$v_o$ 成爲 $\bar{v}$。故剛體的動能爲

$$E_K = \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + \tfrac{1}{2}M\bar{v}^2. \qquad (2)$$

讀者必須注意：剛體在任一瞬時的平面運動，雖可視爲由對於基軸的迴轉及與基軸相同的平移兩種運動所組成，且基軸可以任意選擇；但平面運動中剛體的動能，除選取質心爲基點的特例外，則並不等於剛體的迴轉動能與平移動能之和。(註)

**另一方法**——由第 97 節知，剛體的平面運動亦可視爲繞零速度的瞬時中心的純迴轉運動。如(1)式中的基點 $O$，即取在瞬時中心 $i$，則 $v_o=0$，而 $I_o=I_i$，於是

$$E_K = \tfrac{1}{2}I_i\omega^2. \qquad (3)$$

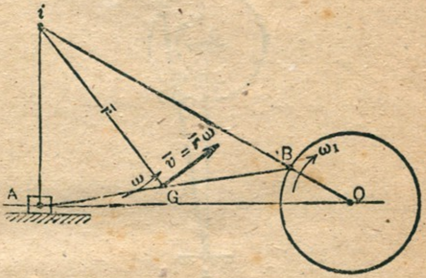



圖 452.

上式極易改變爲(2)式。以圖 452 所示的連桿爲例，得

$$E_K = \tfrac{1}{2}I_i\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\bar{I}+M\bar{r}^2)\omega^2 = \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 + \tfrac{1}{2}M\bar{v}^2.$$

## 習題

568. 細長桿重 50 磅，長 3 呎，繞通過桿的一端的垂直軸，以等角速 120 轉/分在水平面上迴轉，試求此桿的動能。

答　$E_K=368$ 呎·磅。

569. 煤礦中用的吊車，車箱重 6 噸。捲繞繩纜的鼓輪重 7 噸，直徑 14 呎，迴轉半徑 6 呎。試求車箱以 40 呎/秒 垂直上昇時，車箱與鼓輪的動能。　答　$E_K=554,000$ 呎·磅。

註　另一特例爲：所取基點的線速度矢 $v_o$ 通過質心 $G$。讀者可自行證明，此時(1)式右邊的第三項亦等於零

570. 圖 453。 $OB=10$ 吋; $OA=3$ 呎; $\theta=30°$; 曲柄 $OB$ 的角速度 $\omega=50$ 轉/分; 搖桿 $AD$ 長 4.5 呎, 重 22.7 磅。試求搖桿的動能。

答 $E_K=4.95$ 呎·磅。

571. 圓環(或空圓柱)外半徑為 $r$, 重 20 磅, 對於中心軸的迴轉半徑為 $\sqrt{\frac{5}{8}}r$。 自靜止開始, 沿與水平成 30° 角的斜面向下滾動(並無滑動), 圖 454。 ($a$)試求在滾動所經距離為 $s=10$ 呎時, 圓環


圖 453.

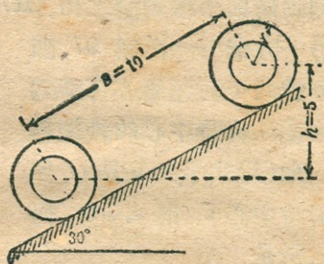



圖 454.

質心的速度與圓環的動能。($b$)設圓環自由降落, 在經過垂直距離 $h=5$ 呎時, 問質心的速度與圓環的動能應各為若干?

答 ($a$) $\bar{v}=13.5$ 呎/秒, $E_K=100$ 呎·磅;

($b$) $\bar{v}=17.9$ 呎/秒, $E_K=100$ 呎·磅。

572. 均質球重 48.3 磅, 沿水平面滾動, 並無滑動, 球心速度為10呎/秒。試求球的動能: ($a$)以垂直直徑的下端為基點, ($b$)以球心為基點, ($c$)以垂直直徑的頂端為基點。

129. 非機械能　第 125-6 節中, 我們曾說某物體因其重心的位置, 或物體中各部份(或各質點)的相對位置, 或物體的運動, 而有做功的本領, 此種物體我們說它具有機械能, 即位能或動能。 可能做功的量, 是衡量能量的方法。

但有許多物體所儲的能(即做功的本領),不能如位能與動能,由物體(或物體的各部份)的位置,或物體的運動,直接衡量其大小或增減。此種能名爲非機械能。 例如,汽油與煤,在燃燒中發生大量的熱,使空氣的溫度與壓力同時增高,或使水變爲高壓的蒸氣,因而可在內燃機或蒸汽機中做功;此種物體(汽油與煤等),因其所具有的化學性質,經化合後,即可在某種條件下變爲位能與動能者,我們說它具有化學能。而蒸汽或空氣,因加熱而增加的能,我們說它具有熱能。又如有電流的銅線在磁場中即可自行運動(電動機的原理),因而具有做功的本領,我們說此種物體具有電能。

由經驗與實驗,已知宇宙間的能,既無法創造,亦無法毀滅;但在某種條件下,某一種能可以轉變爲另一種能。例如:自地面垂直上拋的物體,在到達最大高度之前,物體的動能陸續轉變爲位能,而在向下降落時,則物體的位能又陸續恢復爲動能。 在摩擦中,機械能轉變爲熱能;而在熱機中則一部份熱能可轉變爲機械能。 在發電機中,機械能變爲電能;而在電動機中,則電能又逆變爲機械能。 蓄電池充電時,電能轉變爲化學能;而在放電時則化學能又逆變爲電能。宇宙間各種能,在繼續不斷地轉變,但不生不滅,能的總量恆爲一定。

其實,物體的非機械能亦可以說是物體中各分子(或比分子更小的質點)的動能或位能。 但此種能的多少,無法直接量出,而必須使其轉變爲物體的機械能後,方能衡量。 故仍名爲非機械能。

由實驗知,778呎•磅的功或機械能,可以轉變爲1英熱單位(B.t.u.)的熱能; 反之,1英熱單位的熱能如完全轉變爲機械能或功,則可得778呎•磅。 我們說1英熱單位的功當量是778呎•磅,而1呎•磅的熱當量是 $^1/_{778}$ 英熱單位。用數式表示,則

1 英熱單位 = 778 呎•磅。

在公制中,用 1 大卡 = 426.6 粎•瓩。

機械能可以全部轉變爲熱能,且無需特別的設備;而自熱能轉變爲機械能,則不特需要一定的設備與條件,且無論如何,決不能全部轉變。

某定量的電能可以全部轉變爲熱能，而熱能則無論如何不能全部轉變爲電能．反之，電能與機械能則可全部互相轉變，除極小的摩擦損失之外．可以全部轉變爲其他種能的，如電能與機械能，名爲高級能 (High grade energy)，而熱能，因其不能全部轉變爲其他種能，名爲低級能．宇宙間各種自然現象中，能的轉變，都是由高級能變爲低級能． 此陳述即名爲能的退化原理(Principle of degradation of energy)．

非剛體的力學問題，不易直接應用牛頓定律(包括力，質量，與加速度)分析者，普通均以能不滅原理與能退化原理爲分析的基礎．故此種原理，在熱力學，流體力學，電動力學，與化學物理學等課程中，佔極重要的地位．

## §3. 功能原理

**130. 引言** 以下各節，將說明關於機械能的若干原理，並應用於物體(大多爲剛體)的運動，此種物體內各質點的運動假定均爲已知． 力學中許多問題，雖亦可直接應用力、質量、與加速度的原理求出解答；但應用功能的原理的分析方法，在工程的動力學問題中仍極重要，有時遠較簡捷．

**131. 功與動能的原理** I. 應用於一質點的——圖 455，令 $A'$ 與 $A''$ 爲物體在運動中的兩個位置．物體的運動因有不平衡力系 ($F_1, F_2, F_3$, 與 $F_4$) 的作用而有改變．爲方便計，假定此物體係由許多小立方體所組成，彼此互相固連(例如用膠水)，每一小立方體均可視爲物體的一質點．令 $P$ 爲此種質

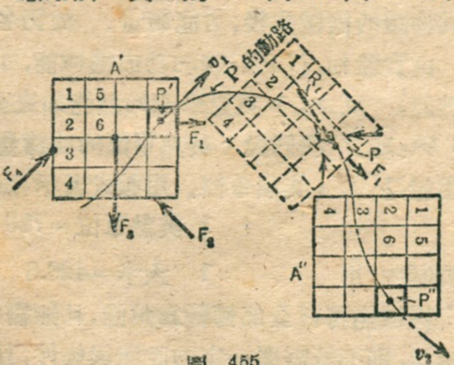



圖 455.

點之一，沿圖示動路，由 $P'$ 運動至 $P''$，因受不平衡的力系所作用，其速度由 $v_1$ 改變爲 $v_2$。在某一瞬時，作用於 $P$ 各力的合力令爲 $R$，此合力沿動路切線方向的分量令爲 $R_t$。各質點中，有的僅受到內力，即同物體其他質點所作用的力；有的則除內力之外，同時受到外力。

在質點 $P$ 由位置 $P'$ 動至位置 $P''$ 的途中，作用於 $P$ 的各力所做的功爲 $w=\int_{s_1}^{s_2} R_t ds$。但 $R_t ds$ 亦可由下列關係用質點的質量 $m$ 與速度 $v$ 表示之：

因 $$R_t = ma_t;\qquad a_t=\frac{dv}{dt},\quad 而\quad v=\frac{ds}{dt};$$

故 $$w=\int_{s_1}^{s_2} R_t ds=\int_{s_1}^{s_2} ma_t ds=\int_{s_1}^{s_2} m\frac{dv}{dt}ds$$

$$=\int_{v_1}^{v_2} m\frac{ds}{dt}dv=\int_{v_1}^{v_2} mv dv=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\tfrac{1}{2}mv_1^2$$

$=\Delta E_K=$ 質點動能的增加。

即：運動物體（無論剛體或非剛體）的某質點，在任一位移中，作用於此質點各力所做的功，等於在此位移中質點動能的增加。用方程式表示之，即

$$w=\Delta E_K=\tfrac{1}{2}mv_2^2-\tfrac{1}{2}mv_1^2.$$

II. **應用於一質點系的**——因功與能均爲純量，故對於全質點系所做的功，即等於對於各質點所做的功的代數和；全質點系動能的改變，亦等於各質點動能改變的代數和。但對於全質點系所做的功，應等於各外力所做的功（$w_e$）加上各內力所做的功（$w_i$）。故得

$$w_e+w_i=\tfrac{1}{2}\Sigma mv_2^2-\tfrac{1}{2}\Sigma mv_1^2=\Delta E_K.$$

即：作用於質點系的全數內力與外力，在質點系（無論各質點間的距離有無改變）任一位移中所做的功，等於在此位移中質點系動能的改變。

III. 應用於剛體的——由第121節知,在任一質量系中無論其為剛體或非剛體,內力必成對地作用,每對內力彼此相等、相反、共線;如質量系為一剛體,則每對內力的作用點間的距離,固定不變,故每對內力,因而全數各內力,所做的功,必等於零。卽剛體在任何運動中,$w_i=0$。故

$$w_e = \Delta E_K.$$

卽;作用於剛體的外力,在剛體的任一位移中所做的功,等於在此位移中剛體動能的改變。

雖工程中所遇到的物體,決非剛體,但外力使固體內各質點間距離發生改變所做的功,如與外力使整個固體發生位移所做的功相比較,普通均可略去不計。

上述原理,如應用於剛體的平移、迴轉、與平面運動,則由第128節的結論,可得

(1) 平移運動 $w_e = \frac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2)$.

(2) 迴轉運動 $w_e = \frac{1}{2}I_o(\omega_2^2 - \omega_1^2)$。

(3) 平面運動 $w_e = \frac{1}{2}M(\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2) + \frac{1}{2}\bar{I}(\omega_2^2 - \omega_1^2)$.

## 例題

573. 某機車的拖力,最大為51,000磅。所拖貨車總重2000噸。車輛阻力(鐵軌的摩擦力與空氣阻力)應隨行車線速與每節車的總重而改變,假定平均為8磅/噸。設全車沿$\frac{1}{2}\%$斜坡(卽每水平距離100呎昇高$\frac{1}{2}$呎)上行,車速由15增加至30哩/時,問共經若干距離?共歷若干時間?

解 作用於貨車的力,示如分離體圖,圖456。因軌道與水平面所成的$\theta$為極小角,故$\sin\theta$可視為與$\tan\theta$相等,得$\sin\theta = \frac{1}{200}$.

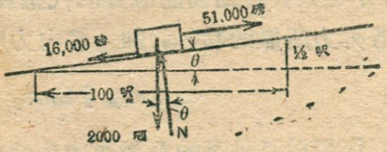



圖 456.

$$w_e = \Delta E_K = \tfrac{1}{2}M(v_2^2 - v_1^2),$$

$$\left(51{,}000 - 16{,}000 - \frac{2000\times2000}{200}\right)s = \frac{1}{2}\ \frac{2000\times2000}{32.2}(44^2 - 22^2)$$

$$15{,}000\,s = 62{,}200\times1452, \qquad \therefore\ s = 6020\ \text{呎}.$$

但 $$s = \frac{v_1+v_2}{2}\times t, \qquad \therefore\ 6020 = \frac{22+44}{2}t.$$

得 $$t = 182.5\ \text{秒} = 3.04\ \text{分}.$$

574. 圖 457 示一剪床或衝床，可自 $\frac{1}{2}$ 吋(厚)鋼鈑衝出 $2\frac{1}{2}$ 吋(直徑)的圓孔。飛輪轉軸，由皮帶拖動，正常轉速為 220 轉/分。轉速波動係數為 0.8，即每衝孔一次，飛輪轉速均由 220 轉/分減低 20%。(a)如衝孔所需的功，全部由飛輪供給，問飛輪的轉動慣量應為若干?(b)如輪幅與輪轂的材料可略去不計，照圖示尺寸，飛輪實有的轉動慣量為若干?(c)如皮帶輪直徑為 22 吋，在每次衝孔時間中，帶輪迴轉 230°。皮帶內拉力，緊邊與鬆邊相差 $T_1 - T_2 = 286$ 磅。試求在每次衝孔時，皮帶對於帶輪軸所做的功。

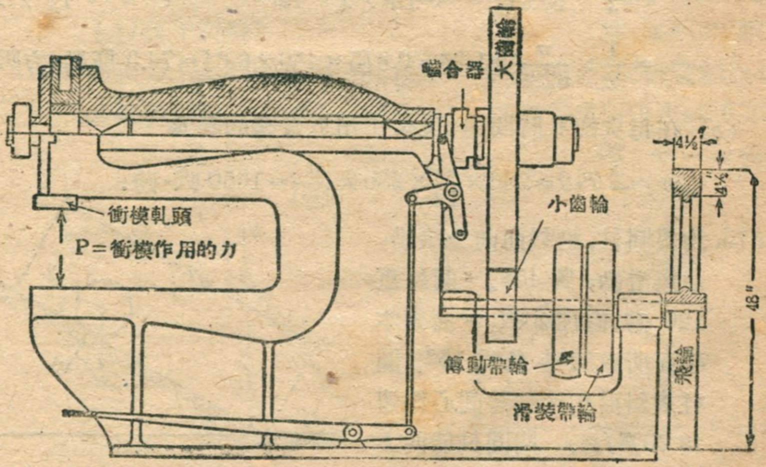



圖 457.

解 (a)假定鋼鈑的抗剪強度爲 60,000 磅/方吋，衝刀所作用的力，最大值爲

$$P=\pi d\times t\times 60,000$$

$$=\pi\times\tfrac{5}{2}\times\tfrac{1}{2}\times 60,000\doteq 235,500\text{ 磅。}$$

每衝一孔所需的功(假定示功圖成三角形，題 546)爲

$$w=\frac{P}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{235,500}{4}=58,875\text{ 吋•磅}$$

$$=4900\text{ 呎•磅。}$$

設此功全部由飛輪供給，則

$$w_s=\Delta E_K=\tfrac{1}{2}\bar{I}(\omega_2{}^2-\omega_1{}^2).$$

$$4900=\frac{1}{2}\bar{I}\left[\left(\frac{220\times 2\pi}{60}\right)^2-\left(0.8\times\frac{220\times 2\pi}{60}\right)^2\right]=95.5\,\bar{I}.$$

得 $$\bar{I}=51.3\text{ 斯勒•方呎。}$$

故飛輪的轉動慣量應爲 51.3 斯勒•方呎。

(b) 假定飛輪係生鐵製成，原料重 450 磅/立呎。由圖示尺寸知

$\bar{I}=\tfrac{1}{2}M(r_2{}^2+r_1{}^2)$。(參閱題 783)

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{32.2}\left[2^2-\left(\frac{19.5}{12}\right)^2\right]\times\frac{4.5}{12}\times 450\times\left[2^2+\left(\frac{19.5}{12}\right)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{32.2}\times 1.36\times 0.375\times 450\times 6.64=74.3\text{ 斯勒•方呎。}$$

(c) 在每次衝孔時間內，皮帶作用於飛輪的功爲

$$w=\Sigma T\cdot\theta=286\times\frac{11}{12}\times 230\times\frac{\pi}{180}=1050\text{ 呎•磅。}$$

575. 均質圓柱，沿斜面向上滾動，並無滑動，圖 458。圓柱重 120 磅，直徑 3 呎，斜面與水平面所成的 $\phi$ 角爲 15°，圓柱與斜面初接觸時圓心線速爲 20 呎/秒。問圓柱能向上滾動若干距離？

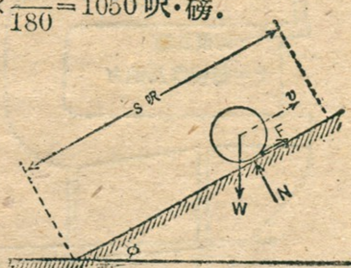



圖 458.

解 圓柱向上滾動時，作用於圓柱的力示如圖 458。各力所做的功，由題 547 知，共為 $W\sin\phi\cdot s$。應用方程式 $w_e=\Delta E_K$，得

$$-W\sin\phi\cdot s=\tfrac{1}{2}(M\bar{v}_2^2+\bar{I}\omega_2^2)-\tfrac{1}{2}(M\bar{v}_1^2+\bar{I}\omega_1^2).$$

或

$$W\sin\phi\cdot s=\tfrac{1}{2}(M\bar{v}_1^2+\bar{I}\,\omega_1^2),\text{ 因 }\bar{v}_2\text{ 與 }\omega_2\text{ 均等於零。}$$

由運動學知 $\bar{v}=r\omega=1.5\,\omega$。

故 $$120\times0.2588\times s=\frac{1}{2}\,\frac{120}{32.2}(20)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,\frac{120}{32.2}\times1.5^2\right)\left(\frac{20}{1.5}\right)^2.$$

得 $$s=\frac{746+372}{31.1}=36\text{ 呎。}$$

## 習 題

576. 彈丸速度 1000 呎/秒，鑽入木塊，深達 12 吋。設有同樣木料的 2 吋厚木板，問彈丸垂直貫穿木板後速度若干？木料對於彈丸的阻力假定為一常數。 答 $v=913$ 呎/秒。

577. 汽車重 $W$ 磅，到達山麓時，車速為 30 哩/時。設將發動機關熄，汽車沿 2% 斜坡上行，摩擦阻力共為 0.08 $W$ 磅，問汽車能沿坡上行若干距離？ 答 $s=301$ 呎。

578. 物體 $B$（圖 459）重 $W$ 磅，自 $h=2$ 呎處降落，使彈簧縮短 6 吋。設彈簧係數為 40 磅/吋，試求 $W$。彈簧重量假定可略去不計。

答 $W=24$ 磅。

圖 459.

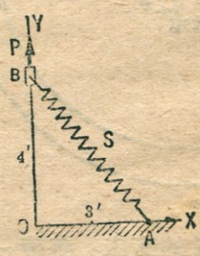


圖 460.

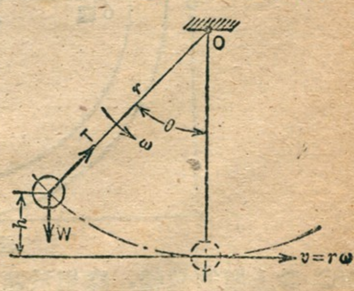


圖 461.

579. 物體 $B$ 重 16.1 磅，受力 $P=50$ 磅所作用，沿光滑垂直桿 $OY$ 向上滑動，圖 460。彈簧 $S$，未受力時原長 3 呎，一端連於 $B$，另端連於固定平面上的 $A$ 點。設 $B$ 在 $O$ 點自靜止開始運動，試求在距 $O$ 點 4 呎時 $B$ 的速度。彈簧係數爲 20 磅/呎，彈簧質量可略去不計。

580. 單擺(圖 461) 線長 $r=4$ 呎，小球(假定爲一質點)重 $W=6$ 磅。設在圖示位置 $\theta=60°$，自靜止開始運動，問小球到達最低位置時的速度 $v$ 應爲若干？假定空氣阻力可略去不計。提示：線的拉力 $T$ 並不做功。　　　　答　$v=11.36$ 呎/秒。

581. 圖 462 示一生鐵飛輪。自靜止開始，由轉軸傳達 5 馬力至飛輪，歷時 1 分鐘。試求在 1 分鐘末飛輪的轉速：($a$)假定輪轂與輪輻的質量均可略去不計，($b$) 不計輪轂的質量，但輪輻則假定爲等斷面，等於其平均斷面，其長度則爲由輪緣至軸心的距離。生鐵重450 磅/立呎。　　答　($a$) $\omega=892$ 轉/分；($b$) $\omega=862$ 轉/分。

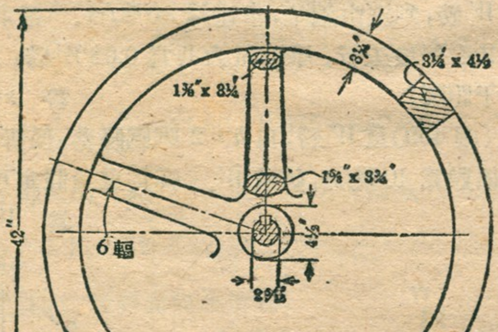



圖 462.

582. 設上題的飛輪，應用於題 574 的衝床，每衝一孔所需的功仍爲 4900 呎·磅。如飛輪的正常速度爲 220 轉/分，試求每次衝完一

孔後的轉速。輪轂與輪輻的質量，假定均可略去不計。生鐵重 450 磅/立呎。 答 157 轉/分。

583. 列車重 500 噸，沿水平軌道行駛。機車拖力隨車速而改變，功率固定為 200 馬力。設列車自靜止開始，問到達距起點 1000 呎處，歷時若干？拖力共做功若干？假定阻力可略去不計。

答 $t=68$ 秒；$w=7,480,000$ 呎•磅。

584. 螺旋手壓機，圖 463，槓杆兩端鐵球各重 100 磅，直徑 9 吋。用以在 $\frac{1}{4}$ 吋(厚)鋼鈑上衝出圓孔。螺旋直徑 $2\frac{1}{2}$ 吋，用三線螺紋，螺距 $2\frac{1}{2}$ 吋。如鋼鈑的抗剪強度為 60,000 磅/方吋，螺旋的效率為 15%，在螺旋剛與鋼鈑接觸時，兩球速度為 60 轉/分，試求此機所能衝出的最大孔徑。示功圖假定為三角形(參閱題 546)。

答 $d=0.60$ 吋。

585. 由水輪機拖動的發電機，轉速 600 轉/分，功率 1000 馬力。設發電機所供給的載荷，突然增加 200 馬力，而水輪機的調速器則須在載荷改變後第 2 秒鐘末，方能開始發生作用，欲使轉速降低不超過 1%，問兩機迴轉部份的轉動慣量至少應為若干？

答 $I=5600$ 斯勒•方呎。

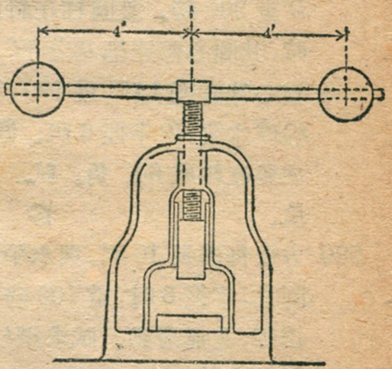



圖 463.

586. 車身重 966 磅，下裝四輪，每輪重 161 磅(全車共重 1610 磅)，為直徑 4 呎的均質圓片。設此車沿水平直軌以等速 20 呎/秒行駛，問須有與軌道平行的阻力若干磅，方能使此車在距離 100 呎內停止。假定各輪均無滑動。 答 $P=120$ 磅。

587. 圓盤直徑 18 吋，重 120 磅；裝於直徑 4 吋的圓軸上，軸重可略去不計。有槽斜面長 8 呎，與水平面所成角度為 $\phi=15°$，圖 464.

設圓軸沿斜面向下滾動，並無滑動；在斜面頂邊時速度爲零；問到達斜面底邊時圓心速度應爲若干？

答 $v=3.46$ 呎/秒

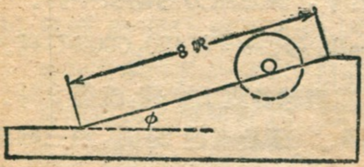



圖 464.

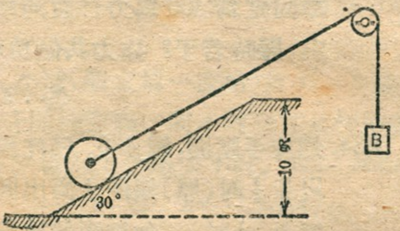



圖 465.

588. 圓柱重 500 磅，直徑 4 呎，用軟繩使其沿斜面向上滾動（圖465），軟繩跨過無摩擦無重量的滑輪後，另端懸有向下降落的物體 $B$，$B$ 重 300 磅。設圓柱在斜面底邊時，速度爲零，問到達斜面頂邊時，其圓心線速應爲若干？

589. 實心球直徑 1 呎，重 100 磅，在圓筒內沿圓周方向滾動。圓筒軸線成水平，內半徑 6 呎。圓球在開始滾動時，經過接觸點的半徑與垂直線成 60° 角。試求到達最低位置時球的動能及球心的速度。 答 $E_K=275$ 呎·磅，$\bar{v}=11.24$ 呎/秒。

590. 方板每邊長 10 呎，與水平面成 30° 角，兩邊成水平。一實心鋼圓柱，半徑 6 吋，重 100 磅，在左上角下靜止開始，沿對角線向下滾動，並無滑動。試求鋼柱到達右下角時的動能及其圓心速度。

**132. 能不滅原理** 能不滅原理的發現，及其明確的陳述，爲十九世紀科學史上最大成就之一。與牛頓定律相似，此原理亦爲人類對於物理現象的經驗與觀察的綜結。設有一組與外界隔離的物體，則各物體可以經過任何變化，其總能量仍爲一常數。所謂"隔離"，即不受外界的影響，故各物體既不對外界放出能量，亦不自外界吸收能量。隔離系中能量的分佈，可以任意改變，並可以由某種能轉變爲其他種能，但全系

的總能量決不變更. 換言之,能可以傳遞或轉變,但無法創造或毀滅.

宇宙中雖並無所謂隔離系,但有許多物體,例如地球與落體,設作用於落體的空氣阻力,與其他物體的吸力,遠比重力為小,則確與隔離系極為近似. 又如,單擺中線端的小球,線的拉力恆與運動方向相垂直,並不做功;故單擺與地球,雖有外力作用,但僅須空氣阻力極為微小,仍與隔離系極為接近.

## §4. 效率.能的散逸

**133. 效率的定義** 機器如蒸汽機,內燃機,電動機,鏈起重機,螺旋起重器等,其效率可定義為:某一時間內自機器輸出的能量,與同時間內輸入機器的能量之比;假定機器內並不保存一部份有用的能量,留待後來輸出. 輸入機器的能量,即機器自外界吸收的能量,一部份轉變為或傳遞為有用的功或能,達到設計此機器時的目的. 機器所做的功或所傳遞的有用的能,即名為機器的輸出能量. 如以 $e$ 代表效率,則

$$e=\frac{\text{輸出能量}}{\text{輸入能量}}.$$

在能的轉變或傳遞(即大多機器的主要用途)的過程中,一定有一部份能量變為低級能(熱能),對機器的目的言,這部份能變成無用,或機器已無法利用,只有讓其自行散逸,或須設法除去. 如此散逸或損失的能量,在任何物理過程中,均無法完全避免,故自機器輸出的能量,必定小於輸入機器的能量,即機器的效率必小於1.

上述效率的定義,是指機器的總效率. 機器的各部份,或能量轉變或傳遞過程中的各階段,均可單獨求出效率. 機器的總效率,等於各部份的效率的乘積,或過程中各階段的效率的乘積.

**134. 能的散逸** 機器中因對抗摩擦力所做的功,是能量損失最普通的原因. 因摩擦力而損失的功,轉變為熱能. 電機或傳電線路中導體的電阻,亦使一部份有用的能轉變為無法利用的熱能. 此種損失的能

量，往往能自行散逸；但在有許多機器中，則須設法使其迅速除去，否則將危害機器本身的安全。故在原動機、軸承等機件中，摩擦力必須減低至最小限度，不特爲減低機械能的損失與各接觸面的磨損，抑且爲防止各機器的過份發熱。但有許多機件，例如摩擦閘、吸收功率計等，則全賴摩擦的作用，使輸入的機械能全部轉變爲熱能。

**135. 簡單的功率計．普隆尼功率計** 一種最簡單的功率計，示如圖466，常名爲**普隆尼功率計**（Prony brake），可用以吸收並測定小型的原動機或電動機的功率或馬力。固連於機器轉軸的 $A$ 輪，與功率計的 $B,B$ 塊（往往用木塊）相接觸，接觸面的法線壓力 $N$，因而摩擦力 $F$ 可

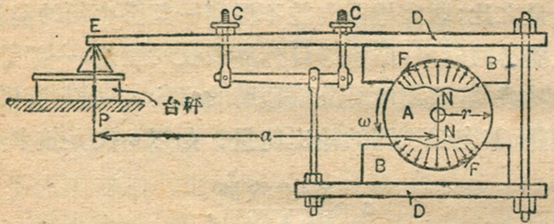



圖 466.

轉動螺帽 $C,C$，使其增減。$B,B$ 塊固連於 $D,D$。而 $D$ 梁的一端 $E$，則支於台秤的平台上。當 $A$ 輪靜止不動時，將螺帽 $C,C$ 轉鬆，使 $B,B$ 與 $A$ 輪間的摩擦力減至最小值；此時台秤上讀出的 $E$ 點反力，令爲 $P'$。

將機器開動後，$E$ 點的反力，即台秤上的讀數（Reading），應有增加。在轉軸的某一速度 $\omega$，設將螺帽旋緊，$E$ 點的反力由 $P'$ 增加至 $P'+P$，則 $P$ 的大小卽可用以計算摩擦所消耗的功：因功率計受到 $P$，$N$，與 $F$（$F$ 代表 $B,B$ 兩塊的總摩擦力）等力的力矩所作用而成平衡，功率計重量的力矩原已與反力 $P'$ 的互相抵消，故兩者均可不必計及；故 $P$ 與 $F$ 對於轉軸的力矩和應等於零，即

$$Fr = Pa.$$

在 1 秒鐘內摩擦力矩 $Fr$ 所做的功爲

$$w_f = Fr\,\omega = Pa\omega,$$

式中$\omega$爲機軸與$A$輪的轉速，單位爲弧度/秒。因$\omega=\frac{2\pi n}{60}$，$n$代表機軸每分鐘內的轉數(r.p.m.)，故

$$w_f = \frac{2\pi Pan}{60} = \frac{\pi Pan}{30}.$$

如$P$的單位爲磅，$a$的爲呎，則摩擦力矩的功率(亦卽機軸的功率)，可用下式表示：

$$\text{馬力} = \frac{\pi Pan}{30\times 550} = \frac{\pi Pan}{16,500} = CPn,$$

$C$名爲功率計的常數，爲便於計算，往往選取$a$的長度，使常數$C$成爲一極簡單的數值，例如

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 取 | $a=5.25'$ | $10.5'$ | $15.75'$ | $31.5'$ |
| 則 | $C=0.001$ | $0.002$ | $0.003$ | $0.006$ |

讀者須注意：上式中的$P$應爲台秤上讀數減去$P'$後之差。但有時亦可在機器靜止不動時，調整台秤，使$P'$適等於零。

## 習　題

591. 設用圖467所示差動滑輪，舉重$Q=200$磅，機械效率$e=30\%$，$r_1=4$吋，$r_2=8$吋，問$P$力應爲若干？　答　$P=167$磅。

592. 圖468所示的設備，亦功率計的一種，可用以測定機器的馬力。如木塊所接觸的爲蒸汽機的飛輪，$r=4$呎，轉速爲150轉/分；$W=400$磅；彈簧秤讀數爲85磅，試求摩擦所吸收的馬力。

答　3.馬力。

593. 某螺旋起重器，螺距$\frac{1}{3}$吋，螺旋直徑1.5吋，圖208，用以舉重2400磅。在未加滑油時，須在15″長的桿端施力72磅；而在加滑油之後，則僅須用力63磅。試求加油前與加油後此起重器的效率。　答　$e=11.8\%$；$e=13.5\%$。

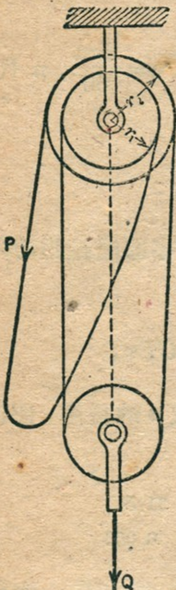



圖 467.

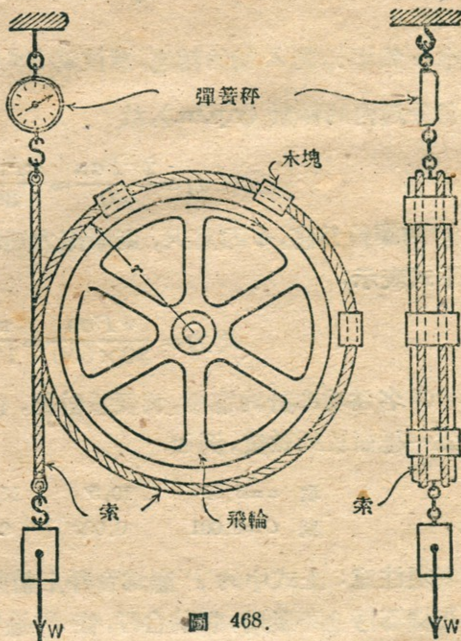



圖 468.

594. 水注直徑 2 吋，速度 150 呎/秒，噴射於水輪機的輪葉。如輪機的效率為 90%，試求輪機所能發出的馬力。水重 62.4 磅/立呎。

595. 圖 469 所示帶閘，裝於以 150 轉/分等速迴轉的 $D$ 輪上；在 $P=20$ 磅時，彈簧秤讀數為 120 磅。試求 $D$ 輪所傳出的馬力。

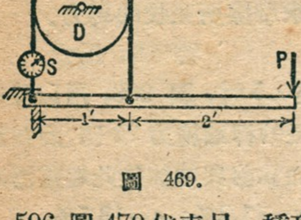



圖 469.

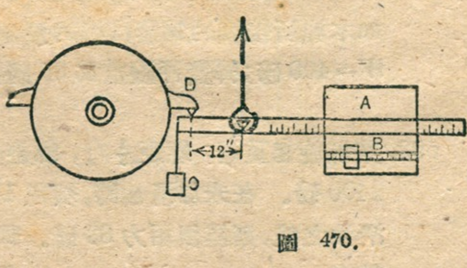



圖 470.

596. 圖 470 代表另一種功率計。左端為一空心鼓輪，用圓銅片兩塊，

分隔爲不漏水的三部份。兩銅片間的薄層，用油裝滿，固裝於發動機軸端的生鐵圓盤，即在此薄層內迴轉。而兩銅片與圓鼓兩端所成的兩空間，則用自來水裝滿，使銅片經過油層對生鐵圓盤發生壓力。機軸迴轉時，鼓輪因內部銅片所受的摩擦力亦有隨同迴轉的趨勢，因而在 $D$ 點對天平的槓桿發生壓力。砝碼 $A$ 與 $B$ 共重 150 磅，$B$ 重 3.5 磅。長桿上刻度，每格 1 吋，短桿每格 0.4 吋，$A$ 與 $B$ 同在零刻度時，與重量 $C$ 適成平衡。設在生鐵盤（即機軸）迴轉時，須將砝碼 $A$ 移至第 10 格，$B$ 移至第 15 格，方能使槓桿維持平衡，試求 $D$ 點的壓力，及功率計所吸收的馬力。機軸轉速 240 轉/分，由 $D$ 至軸心線的距離爲 18 吋。

答　8.69 馬力。

## 總習題

597. 試用 ($a$) 文字，($b$) 算式，陳述一個力所做的功的定義。並寫出計算一力偶所做的功的算式。

598. 迴轉剛體的動能等於 $\frac{1}{2}I_o\omega^2$，證明如下：因一質點的動能必爲 $\frac{1}{2}mv^2$，故整個剛體的動能等於 $\frac{1}{2}Mv^2$。但 $v=r\omega$，故 $\frac{1}{2}Mv^2=\frac{1}{2}Mr^2\omega^2$。又因 $Mr^2=I_o$，故得 $E_K=\frac{1}{2}I_o\omega^2$。試指出上述證明方法的錯誤，並改正之。

599. 設平面運動中的剛體，其動能等於 $(\frac{1}{2}Mv_o^2+\frac{1}{2}I_o\omega^2)$，問 $O$ 點應如何選取？

600. 試說明在何種條件下，可以應用方程式 $w_o=\frac{1}{2}M(v_2^2-v_1^2)$。

601. 昇降梯重 1000 磅，設用可發生功率 10 瓩的電動機拖動，問昇降梯的最大速度可至若干？假定摩擦力可略去不計。

答　$v=7.37$ 呎/秒。

602. 一物體重 16.1 磅，以初速 20 呎/秒，沿光滑斜面上拋，斜面與水平面成 30° 角。斜面上有一彈簧，上端固着；物體上行 4 呎後，與彈簧下端相接觸，使其沿軸向壓縮，減短 3 吋。試求彈簧係

數。 答 176 磅/吋.

603. 帶輪 $B$, 圖 471, 直徑 20 吋, 固連於電動機轉軸, $\omega=90$ 轉/分. 物體 $A$ 重 10 磅, 彈簧 $S$ 伸長 3 吋, 其係數為 20 磅/吋。試計算由電動機傳達至 $B$ 輪的馬力。 答 0.72 馬力.


圖 471.

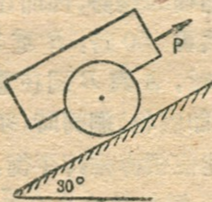



圖 472.

604. 兩輪車(圖 472) 總重 360 磅。 每輪重 60 磅, 成均質圓盤, 直徑 4 呎。 欲使此車沿 30° 斜面上行, 自靜止開始, 於距離 100 呎內, 達到車速 15 哩/時, 問 $P$ 力應為若干?

答 $P=212$ 磅.

605. 均質稜柱形細桿 $AC$ 與 $BC$, 各重 $W$, 長 $l$。 用光滑鉸鏈連於 $C$; $A, B$ 兩端支於光滑的水平面上, $C$ 點高出水平面 $h$, 示如圖 473。設因 $A$ 與 $B$ 自靜止開始向外滑動, 兩桿沿垂直平面下落, 試求 $C$ 點到達水平面時的速度。 答 $v=\sqrt{3gh}$.


圖 473.

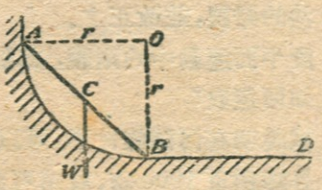



圖 474.

606. 均質稜柱形桿 $AB$, 圖 474, 重 $W$, 長 $l=\sqrt{2}r$。 在圖示位置, 因受重力的作用, 自靜止開始, 在垂直平面內沿曲線 $ABD$ 滑動。 $AB$ 弧為圓周的一象限, 半徑為 $r$; $BD$ 為此圓弧的水平切線。 試求此桿到達水平位置後的速度。 假定摩擦力可略去不

計。 答 $v=\sqrt{gr}$。

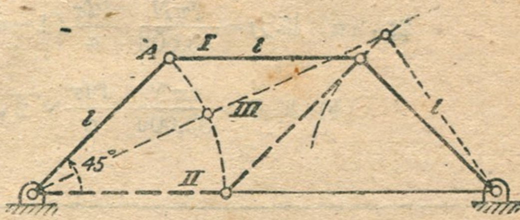



圖 475.

607. 位於垂直平面內的三均質桿，各重 $W$，長 $l$。水平面上兩固定點相距 $l(1+\sqrt{2})$。圖 475 示三種位置：I，兩邊桿成對稱；II，一邊桿成水平；III，兩鄰桿成一直線。設在兩鄰桿的銷接點各有集中載荷 $W_1$，因受重力作用，在位置 I，自靜止開始，$A$ 點沿圓弧下落，經 III 至 II。試求 $A$ 點到達位置 III 與 II 時的速度。

答 II. $v_A{}^2=6lg\sqrt{2}\dfrac{W+W_1}{7W+9W_1}$;

III. $v_A{}^2=1.28\,lg\dfrac{W+W_1}{2W+3W_1}$.

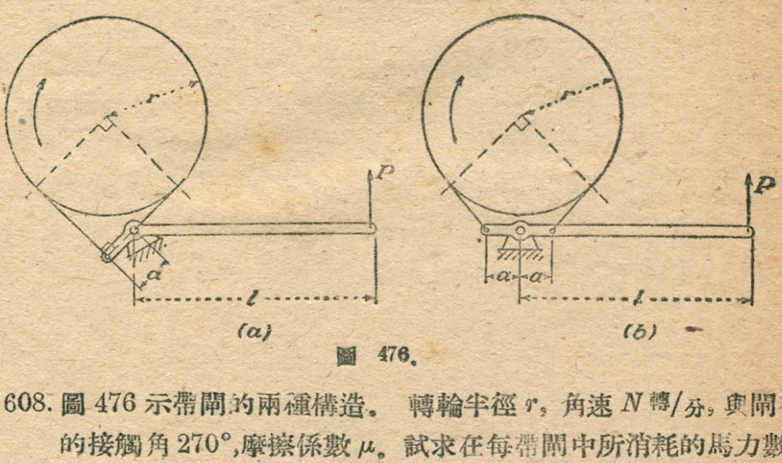



圖 476.

608. 圖 476 示帶閘的兩種構造。轉輪半徑 $r$，角速 $N$ 轉/分，與閘帶的接觸角 270°，摩擦係數 $\mu$。試求在每帶閘中所消耗的馬力數。

答. (a) $馬力=\frac{2\pi N}{33,000}\frac{Plr}{a}\left(1-e^{\frac{-3\pi\mu}{2}}\right)$;

(b) $馬力=\frac{2\pi N}{33,000}\frac{Plr}{a}\sqrt{2}$.

---

註: 作用於一質點的力,可以分類如下:

(a)重力,

(b)彈簧力(不超過彈性極限),

(c 光滑導壁(或導板、導路)所作用的法線反力,

(d 摩擦力,

(e)其他各種力,例如繩的拉力,桿的推力,汽缸內蒸汽作用於活塞的壓力等.

對抗重力或彈簧力而做的功,名爲位能. 重力和彈簧力卽名爲位力 Potential forces). 光滑壁的反力,必與位移的方向成垂直,並不做功. 對抗摩擦力而做的功,消耗爲熱能. 故功能原理可分述如下:

1.作用於一質點的所有各外力的合力,所做的功,等於質點動能的增加.

2.除位力之外,其餘各外力所做的功,等於位能與動能的增加之和.

3.除位力與摩擦力之外,其餘各外力所做的功,等於位能、動能,與熱能的增加之和.

4.設作用於一質點的外力均爲位力,則位能與動能之和爲一常數.

# 第十一章　衝量與動量

**136. 緒論**　第 115 節中，我們曾提到：動力學中許多問題的分析，如應用功與能的原理，往往遠比直接應用力、質量、與加速度的方法，較爲簡捷。讀者在學習第十章後，對於功能原理在解答習題中應用時的方便，應已相當認識。普通在求質量系經過某一距離後的速度的問題中，我們援用功能原理；但在求質量系經過某一時間後的速度的問題中，則最好應用另外兩種物理量，即衝量與動量：衝量是力與時間的乘積，而動量則爲質量與速度的乘積。功與能均爲純量，而衝量與動量，則均爲矢量。

在動力學問題的分析中，不論直接應用牛頓定律，或引用功能原理，我們一直假定：力作用於剛體經過某一確定（比較長）的時間；如果力的大小與方向並不固定，則在此時間內，力隨時間而變更的方式必爲已知。滿足此種假定的動力學問題，亦可應用衝量與動量加以分析，有時且可比其他方法較爲簡捷。但有許多問題中，力的作用時間，非常短暫（接近至零），而在此時間內，任一瞬時力的大小，根本無法測定；但被作用的物體的運動，則可有相當大的改變。此種力名爲**衝力**(Impulsive force)。研究有衝力作用的物體的運動改變時，應用衝量與動量的分析方法，優點特爲顯著。

彈藥爆炸時作用於彈丸的推力，列車加掛車輛時作用於挽鈎(Coupler)的撞力，打樁時樁頭所受到的敲力，蒸汽注噴射於輪機葉板時的推力，水瓣突然關閉時水流作用於水瓣的壓力等，都是衝力的實例。

兩物體互相有衝力作用時，局部的單位壓力可能極大，因而物體的局部變形，不一定可以略去不計，即物體不一定能作爲剛體看待，而不致引起相當可觀的差誤。

本章目的，在說明衝量與動量的意義，求出表示此種物理量間相互

關係的原理,並進而應用此種原理於動力學問題的解答。

## §1. 衝量

**137. 衝量與碰撞的定義** 一個不變(方向與大小均為固定的)力的衝量,定義為力與作用時間的乘積。例如 $F$ 力作用時間 $\Delta t$ 的衝量為

$$衝量 = F\cdot\Delta t,$$

假定在時間 $\Delta t$ 內 $F$ 的大小與方向均不改變。設 $F$ 力的方向不變,而大小並不固定,則在作用時間 $\Delta t = t_2 - t_1$ 的衝量應為

$$衝量 = \int_{t_1}^{t_2} F dt.$$

欲用上列積分式計算衝量,則 $F$ 必須為 $t$ 的已知函數。衝力的衝量,或驟然衝量,亦可用積分式代表,但衝力與時間的關係則根本無法求得,因而不能用積分法直接計算其衝量,須由衝力所作用的物體的動量改變,方能求出驟然衝量。

兩物體互相有衝力作用的現象,名為碰撞。但衝力的衝量,有時亦名為碰撞;照此種意義,碰撞即驟然衝量。衝力與時間的關係雖無法求出,但在許多問題中,為方便起見,最好估計衝力作用的時間 $\Delta t = t_2 - t_1$,因而將衝量表示為力的平均值與時間的乘積,即

$$衝量 = \int_{t_1}^{t_2} F dt = F_{av}\cdot\Delta t,$$

式中 $F_{av}$ 代表衝力在作用時間 $\Delta t$ 內的(對於時間的)平均值。力的衝量常名為線衝量,以 $L$ 代表之;線衝量對於某軸的衝量矩(相當於一力對於某軸的力矩),則名為角衝量,以 $A$ 代表之。

單位——線衝量的單位為力與時間的單位所組成,並無專門名稱。在工程中所用的重力制單位普通為磅·秒,或瓩·秒。同理,角衝量的單位,普通用磅·秒·呎,或瓩·秒·粎。

**138. 線衝量的分量**　力的衝量，與力相似，亦爲有向量或矢量；其方位與指向均與力的相同。故衝量亦可以用平行四邊形定律分解爲若干分量，亦可以有對某點或某軸的衝量矩。一個不變力沿某方向的衝量，即等於沿該方向的分力與作用時間 $\Delta t$ 的乘積。用算式表示之，即

$$L_x=F_x\cdot\Delta t;\quad L_y=F_y\cdot\Delta t;\ 等。$$

如力的方向與大小，並非固定不變，則線衝量的分量爲

$$L_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x dt;\ L_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y dt;\ 等。$$

**一個力系的線衝量**——力系的線衝量沿任一方向的分量，即等於力系中各力沿該方向的分衝量的代數和。如力系中各力的大小與方向均爲固定，則沿任一 $x$ 軸向力系的線衝量爲

$$L_x=\Sigma F_x\cdot\Delta t.$$

如在作用時間 $\Delta t$ 內，各力並非固定不變，則沿任一 $x$ 軸向力系的線衝量爲

$$L_x=\Sigma\int_{t_1}^{t_2}F_x dt.$$

**139. 衝量矩或角衝量**　一個不變力對於某點或某軸的衝量矩或角衝量，等於力對於該點或該軸的力矩 $T$ 與力的作用時間 $\Delta t$ 的乘積。例如一個不變力對於 $O$ 軸的角衝量爲

$$A_o=T_o\cdot\Delta t,$$

式中 $T_o$ 代表此力對於 $O$ 軸的力矩。如作用的力在時間 $\Delta t$ 內並非不變，則其角衝量爲

$$A_o=\int_{t_1}^{t_2}T_o' dt.$$

**力系的角衝量**——如力系中各力在作用時間 $\Delta t$ 內均固定不變，則全力系對於某軸 $O$ 的角衝量，即等於各力對於該軸的角衝量的代數和。

卽 $$A_o=\Sigma T_o\Delta t.$$

如力系中各力在作用時間 $\Delta t=t_2-t_1$ 內並不固定，則力系的角衝量應爲

$$A_o=\Sigma\int_{t_1}^{t_2}T_o\,dt.$$

力的線衝量與角衝量，主要用途在解答包含驟然衝量的動力學問題．但卽在不變力(或爲 $t$ 的已知函數的變力)的問題中，應用衝量與動量的分析方法，有時亦極爲方便．

## 例 題

609. 某質點 $A$，照規律 $\theta_x=t^{3/2}$，沿圓周運動，圖 477．$P$ 力沿半徑向外作用，其大小爲 $P=\sqrt{t}$．設 $\theta_x$, $t$, 與 $P$ 的單位各爲弧度，秒，與磅，試求自 $t=0$ 至 $t=36$ 秒時間內 $P$ 力的線衝量．

解 $P$ 力的大小與方向均隨時間而改變，故須用積分式

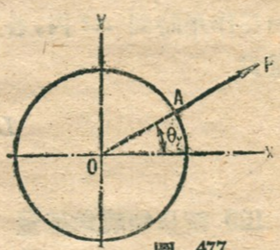


圖 477.

$$L_x=\int_0^t P\cos\theta_x\,dt,$$

$$L_y=\int_0^t P\sin\theta_x\,dt.$$

或 $$L_x=\int_0^{36}t^{\frac{1}{2}}\cos(t^{3/2})\,dt=\left[\frac{2}{3}\sin(t^{3/2})\right]_0^{36}=\frac{2}{3}\sin(216\text{ 弧度})$$

$$=\frac{2}{3}\sin 134^\circ 15'=\frac{2}{3}\times 0.716=+0.477\text{ 磅·秒}.$$

$$L_y=\int_0^{36}t^{\frac{1}{2}}\sin(t^{3/2})\,dt=\left[-\frac{2}{3}\cos(t^{3/2})\right]_0^{36}$$

$$=-\frac{2}{3}\cos(216\text{ 弧度})+\frac{2}{3}\cos(0)$$

$$=+0.465+0.667=+1.13\text{ 磅·秒}.$$

$$L=\sqrt{L_x{}^2+L_y{}^2}=\sqrt{0.477^2+1.13^2}=1.23\text{ 磅·秒.}$$

$$\theta_x=\tan^{-1}\frac{L_y}{L_x}=\tan^{-1}\frac{1.13}{0.477}=\tan^{-1}2.37=67°05'.$$

610. 直徑 6 呎的圓輪，照規律 $\omega=0.3t$ 弧度/秒，繞固定軸沿逆鐘向迴轉。$A$ 爲輪緣上的一點，圖 478，作用於 $A$ 的 $P$ 力，其方向必與輪周相切，其大小爲 $P=10\omega$ 磅。試求在 $t=10$ 秒與 $t=20$ 秒時間內 $P$ 力對於轉軸的角衝量。

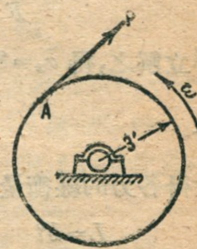


圖 478.

解　在任一瞬時，$P$ 力對於轉軸的力矩爲

$$T_o=-3\times10\omega=-9t\text{ 磅·呎.}$$

故得角衝量

$$A_o=\int_{10}^{20}T_o\,dt=\int_{10}^{20}-9t\,dt=-9\left[\frac{t^2}{2}\right]_{10}^{20}$$

$$=-1350\text{ 磅·呎·秒.}$$

611. 圖 479(a)，物體重 161 磅，被一不變力 $P$ 所推動，使其在水平線上滑動。摩擦係數爲 0.2。試求在物體速度由 10 增至 20 呎/秒的時間中，作用於物體各外力的線衝量，及全力系的線衝量。

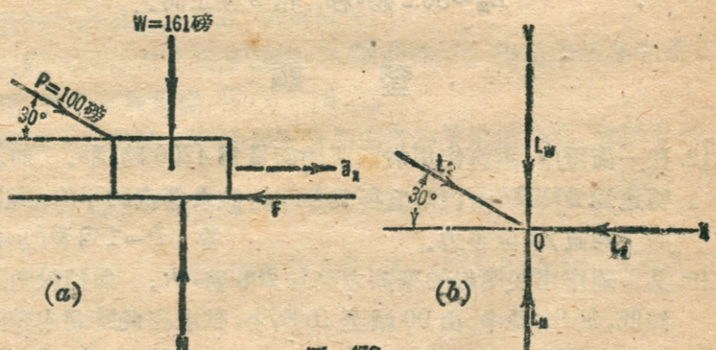


圖 479.

解　先求出 $N$ 與 $F$ 的大小，及速度由 10 增至 20 呎/秒所需的時間 $t$.

$$\Sigma F_x = \frac{W}{g}\bar{a}_x, \qquad 100\cos 30^\circ - F = \frac{161}{32.2}\bar{a}_x;$$

$$\Sigma F_y = \frac{W}{g}\bar{a}_y, \qquad -100\sin 30^\circ - 161 + N = 0;$$

$$F = \mu N, \qquad F = 0.2\,N.$$

聯立解之，得 $\bar{a}_x = 8.88$ 呎/秒$^2$，$F = 42.2$ 磅，$N = 211$ 磅。

又

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{20-10}{8.88} = 1.13\text{ 秒}.$$

故得各力的線衝量：

$$L = Ft \qquad L_W = 161 \times 1.13 = 182\text{ 磅·秒},$$
$$L_P = 100 \times 1.13 = 113\text{ 磅·秒},$$
$$L_F = 42.2 \times 1.13 = 47.7\text{ 磅·秒},$$
$$L_N = 211 \times 1.13 = 238\text{ 磅·秒}.$$

示如同圖($b$)。全力系的線衝量，$L_R$，沿 $x$ 與 $y$ 軸的分量爲

$$L_{Rx} = \Sigma L_x \qquad L_{Rx} = 113\cos 30^\circ - 47.7 = 50.2\text{ 磅·秒};$$
$$L_{Ry} = \Sigma L_y \qquad L_{Ry} = -113\sin 30^\circ - 182 + 238 = 0.$$
$$\therefore \qquad L_R = 50.2\text{ 磅·秒，沿 } x \text{ 軸正向。}$$

## 習　題

612. 在一衝程中，蒸汽作用於活塞的衝量爲 4200 磅·秒。如蒸汽機轉速爲 200 轉/分，汽缸直徑爲 14 吋，試求蒸汽的平均（對於時間的平均值）單位壓力。　答　$P = 182$ 磅/方吋。

613. 某平閘作用於轉軸的摩擦力矩爲 200 磅·呎。如轉軸角速等率減低，於 30 轉中，由 90 減至 10 轉/分，試求在此時間內帶閘所作用的角衝量。　答　7200 磅·呎·秒。

614. 一力沿一固定直線作用，其大小與指向示如圖 480。試求此力作用 4 秒鐘時間的衝量，及在最初 3 秒鐘的衝量。

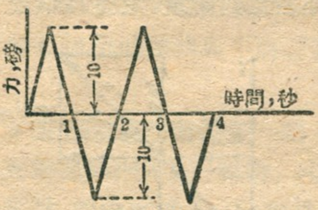



圖 480.

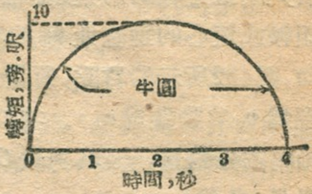



圖 481.

615. 設轉矩－時間曲線成半圓形,示如圖 481, 試求此力矩在 4 秒鐘內的角衝量。 答 $A=31.4$ 磅·呎·秒。

616. 轉軸作用於軸端圓盤的力矩爲 $T=2t^2+4t$ 磅·呎, $t$ 的單位爲秒。試求自 $t=0$ 至 $t=4$ 秒的時間內,此力矩的角衝量。

答 $A=74.7$ 磅·呎·秒。

## §2. 動量

**140. 一質點的動量** 一質點在任一瞬時的動量,定義爲質點的質量與瞬時速度的乘積。如質點的質量爲 $m$, 速度爲 $v$, 則

$$動量 = mv.$$

與速度相似,動量爲一有向量或矢量,其方向與速度的相同。代表質點的動量的矢必須經過質點,爲定位矢。

質點的動量常名爲線動量,以 $\boldsymbol{M}$ 代表之。動量對於某點或某軸的動量矩,則名爲角動量,以 $\boldsymbol{H}$ 代表之。

**單位**——動量的單位爲質量與速度的單位所組成,並無專名。在工程中重力制的單位動量爲 1 單位質量 ×1 單位速度 $=\dfrac{1磅\times1秒^2}{1呎}\times\dfrac{1呎}{1秒}=1$ 磅·秒. 同理,亦可用 1 瓩·秒。可見動量的單位與衝量的相同。

**141. 分動量。 角動量** 一質點的動量可分解爲若干分動量,亦可有

對於某點或某軸的動量矩．動量矩，亦名爲角動量，定義爲動量矢與其至矩軸或矩心的垂直距離的乘積．

例如，圖482所示的質點，質量爲 $m$，速度爲 $v$，故動量爲 $mv$。其沿 $x$ 與 $y$ 軸向的分動量，及其對於 $O$ 點的角動量，各爲：

$$M_x=(mv)_x=mv_x,$$

$$M_y=(mv)_y=mv_y,$$

$$H_o=mv\cdot r,$$

或 $$H_o=mv_x\cdot y-mv_y\cdot x.$$

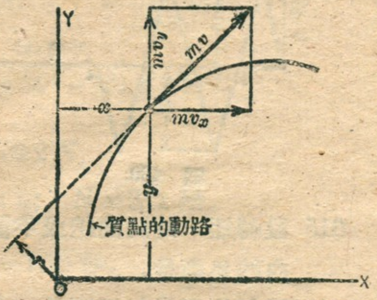



圖 482.

最後一式，即說明一質點的角動量，等於分動量的動量矩的代數和．

角動量的單位應爲：斯勒 $\cdot\frac{\text{呎}}{\text{秒}}\cdot$ 呎＝斯勒・方呎/秒，或磅・呎・秒．與角衝量的單位相同．

**142. 物體的線動量** 任一物體（或質點系）沿任一方向的線動量分量，等於物體中各質點的線動量，沿該方向的分量的代數和．但在第 109 節中，已知一物體的線動量，即等於物體的質量與質心速度的乘積．故一物體沿任一 $x$ 軸向的分動量，即等於物體的質量與質心沿 $x$ 軸向的分速度的乘積：

$$M_x=m'v_x'+m''v_x''+m'''v_x'''+\cdots\cdots=M\bar{v}_x.$$

同法，可寫出沿任何軸向的分動量的方程式．故對於任何質量系均可寫出：

$$M_x=M\bar{v}_x;\quad M_y=M\bar{v}_y;\quad \text{與}\quad M=M\bar{v}.$$

即：任何質量系的線動量，等於全系質量與質心速度的乘積，其方向與質心速度的方向相同．

讀者必須注意：代表線動量的矢，普通並不經過質點系的質心．但讀者可自行證明：如運動的質點系爲一平移運動的剛體，則代表動量的矢，經過質點系的質心（參閱第 110 節）．

作任何運動的任何質點系，其角動量的算式，亦均可求出，但本章中僅討論應用於迴轉與平面運動中剛體的算式。

**143. 迴轉剛體的角動量**　圖 483 示一剛體，繞經過 $O$ 且與紙面垂直的固定軸迴轉，在某一瞬時，其角速度爲 $\omega$。物體內與轉軸相距 $r$ 的任一質點，線速度爲 $r\omega$；線動量爲 $mv$ 或 $mr\omega$，其方向與 $r$ 垂直。故此質點對於轉軸的動量矩爲

$$mv\cdot r = mr\omega\cdot r = mr^2\omega,$$

全數質點對於轉軸的動量矩的代數和爲

$$\boldsymbol{H}_o = \Sigma\, mr^2\omega = \omega\Sigma mr^2,$$

故得

$$\boldsymbol{H}_o = I_o\omega,$$

式中 $I_o$ 代表物體對於 $O$ 軸的轉動慣量。

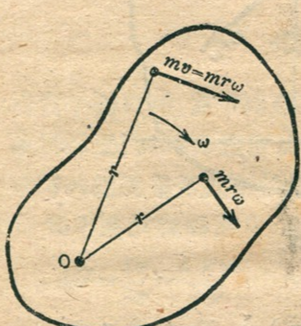



圖 483.

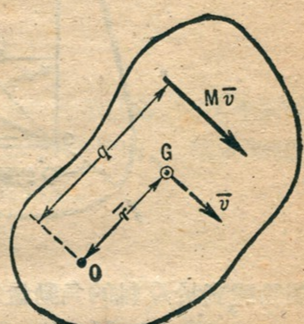



圖 484.

**線動量矢的位置**——在第 142 節中，已知作任何運動的任何質量系，其動量的大小爲 $M\bar{v}$，其方向與 $\bar{v}$ 的相同，但代表動量的矢則不一定經過質心 $G$。命線動量矢與迴轉中心 $O$ 相距 $q$，圖 484。則由力矩原理可知

$$M\bar{v}q = I_o\omega = Mk_o^2\frac{\bar{v}}{r},\quad 故\quad q = \frac{k_o^2}{r},$$

式中 $k_o$ 代表物體對於 $O$ 軸的迴轉半徑。

**144. 平面運動中剛體的角動量**　由第 96 節知，剛體的平面運動，可視為平移與迴轉兩部份運動所組成。故剛體內任一質點 $P$ 的速度，等於 $r\omega$ 與 $v_o$ 的矢量和：$O$ 為基點，即迴轉平面與基軸的交點，$v_o$ 即基點的線速度；$\omega$ 為物體繞基軸迴轉的角速度。$P$ 點的動量，即等於 $mr\omega$ 與 $mv_o$ 的矢量和(圖 485)。如將 $mv_o$ 分解為 $x$ 與 $y$ 軸向分量，$m(v_o)_x$ 與 $m(v_o)_y$，則 $P$ 點對於 $O$ 軸的角動量為

$$mr\omega\cdot r+m(v_o)_x\cdot y-m(v_o)_y\cdot x,$$

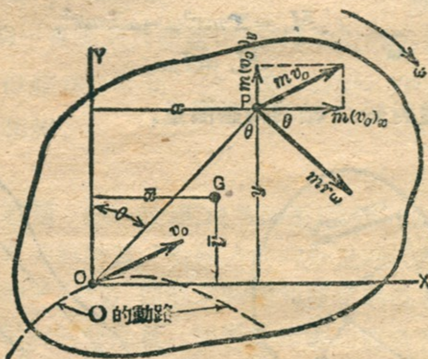



圖 485.

整個物體對於 $O$ 軸的角動量為

$$\begin{aligned}H_o&=\Sigma mr^2\omega+\Sigma m(v_o)_x y-\Sigma m(v_o)_y x\\&=\omega\Sigma mr^2+(v_o)_x\Sigma my-(v_o)_y\Sigma mx\\&=I_o\omega+(v_o)_x M\bar{y}-(v_o)_y M\bar{x},\end{aligned}\tag{1}$$

式中所指 $x$ 軸，$y$ 軸，與 $\omega$ 的方向，示如圖 485。設取質心 $G$ 作為基點 $O$，則 $\bar{y}$ 與 $\bar{x}$ 均等於零，而 $I_o$ 成為 $\bar{I}$，故(1)式可簡化為

$$H_G=\bar{I}\omega。\tag{2}$$

可見平面運動的剛體，雖可選取任一點 $O$ 作為基點，將運動視為由與基點 $O$ 相同的平移，及對於經過 $O$ 點的基軸的迴轉所組成，但剛體對於

基軸的角動量，則基點 $O$ 僅在下述三種位置之一時，方等於 $I_o\omega$：

(1) 在物體的質心 $G$，此時 $\bar{x}$ 與 $\bar{y}$ 均等於零，故 (1) 式簡化爲 $I_o\omega$ 即 $\bar{I}\omega$。

(2) 在物體的(零速度)瞬時中心，此時 $v_o$ 等於零。

(3) 在某一點，代表該點瞬時速度 $v_o$ 的矢，經過質心 $G$：此時如選取 $OG$ 線爲 $x$ 軸，則 $(v_o)_y$ 等於零，$\bar{y}$ 亦等於零，故(1)式亦可簡化爲 $I_o\omega$。

**線動量矢的位置**——如上述三種位置之一選擇爲基點 $O$，則線動量矢的位置極易決定：令此矢與基點 $O$ 的距離爲 $q$，則

$$M\bar{v}q = I_o\omega = Mk_o^2\omega, \qquad 故 \quad q = \frac{k_o^2\omega}{\bar{v}},$$

式中 $k_o$ 代表物體對於 $O$ 軸的迴轉半徑，但 $\bar{v}$ 並不一定等於 $\bar{r}\omega$。

## 例　題

617. 均質半圓柱體，重 322 磅。在圖 486 所示位置，沿水平面滾動，並無滑動，瞬時角速度爲 1.6 弧度/秒，沿順鐘向。試求物體在此瞬時的線動量及其對於質心軸的角動量。

**解**　令 $G$ 爲半圓柱體的質心，由題 255 知

$$AG = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\times 2}{3\pi} = 0.849 \text{ 呎}。$$

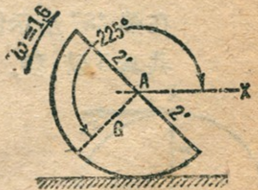


圖 486.

$A$ 點的速度水平朝右，其大小爲

$$v_A = r\omega = 2\times 1.6 = 3.2 \text{ 呎/秒}。$$

質心 $G$ 對於 $A$ 的相對速度，與 $AG$ 線垂直，向左朝上，其大小爲 $\overline{AG}\,\omega = 0.849\times 1.6 = 1.358$ 呎/秒。用作圖法即可求出 $\bar{v}$。如用代數法計算，則先求出沿 $x$ 與 $y$ 軸向的分速度：

$$\bar{v}_x = (v_A)_x + (v_{\frac{G}{A}})_x = 3.2 + 1.358 \cos 135° = 3.2 - 0.96 = 2.24 \text{ 呎/秒}。$$

$$\bar{v}_y=(\bar{v}_A)_y+(v_{\frac{G}{A}})_y=0+1.358\sin 135°=0.96\text{ 呎/秒.}$$

由此得物體的線動量

$$M=M\sqrt{(\bar{v}_x)^2+(\bar{v}_y)^2}=\frac{322}{32.2}\times\sqrt{2.24^2+0.96^2}=24.4\text{ 磅/秒.}$$

$$\theta_x=\tan^{-1}\frac{M\bar{v}_y}{M\bar{v}_x}=\tan^{-1}\frac{0.96}{2.24}=\tan^{-1}0.429=23°15'.$$

角動量的計算，留供讀者練習。

## 習 題

618. 一小物體(質點)，重 8 磅，懸於細線的一端，使其成錐動擺，而在水平面上迴轉（參閱圖 352）。設此物體與通過懸點的垂直軸線相距 15 吋，角速 90 轉/分，試求 (a) 此物體的線動量，及 (b) 此物體對於迴轉軸的角動量。

答 (a) $\boldsymbol{M}=2.93$ 磅·秒；(b) $\boldsymbol{H}=3.66$ 磅·呎·秒。

619. 均質細桿，長 3 呎，每呎重 4 磅，圍繞通過一端的垂直軸，在水平面上迴轉，角速為 120 轉/分。試求 (a) 線動量的大小，(b) 線動量矢的位置，及 (c) 對於轉軸的角動量。

答 (a) $\boldsymbol{M}=7.02$ 磅·秒；(b) $q=2$ 呎。

620. 小物體 $A$ 與 $B$，各重 5 磅與 8 磅，同沿半徑 2 呎的圓周運動。在圖 487 所示位置，$v_A=40$ 呎/秒，而 $A$ 與 $B$ 沿 $x$ 軸向的分動量共為 5 磅·秒。試求 $B$ 的速度。 答 $v_B=6.89$ 呎/秒。

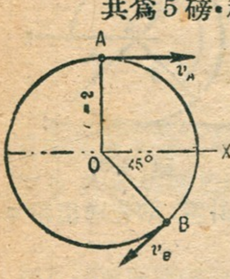



圖 487.

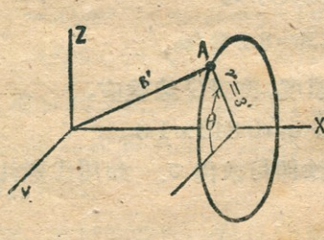



圖 488.

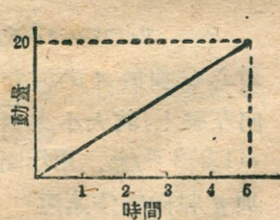



圖 489.

621. 質點 $A$,重 4 磅,在平行於 $yz$ 面的平面內,以等角速 60 轉/分 沿順鐘向繞 $x$ 軸迴轉,圖 488. 試求 $A$ 對於 $y$ 軸的角動量,以 $\theta$ 表示之,$\theta$ 角自 $y$ 軸的平行線量起. 並隨手(不用比例尺)作圖表示角動量如何隨 $\theta$ 值而改變.

622. 一質點沿水平直線運動,其線動量的變化示如圖 489, 動量與時間的單位,各爲磅·秒與秒. 試說明此質點的運動方式及在第 3 秒鐘內線動量的改變. 答 $\Delta \boldsymbol{M}=4$ 磅·秒.

623. 均質矩形門, 闊 3 呎, 重 96.6 磅, 繞垂直的長邊迴轉, 角速度 2 弧度/秒, 試求此門對於轉軸的角動量,線動量的大小, 及線動量矢的位置.

答 $\boldsymbol{H}=18$ 磅·呎·秒; $\boldsymbol{M}=9$ 磅·秒; $q=2$ 呎.

## §3. 衝量動量原理

**145. 線衝量線動量原理** 在第 109 節中已經指出: 作用於任一物體(無論剛體或非剛體)的各外力,沿任一方向的分力的代數和,等於物體的質量,與質心沿該方向的分加速度的乘積. 如沿 $x$ 軸向,則

$$\Sigma F_x=M\bar{a}_x=M\frac{d\bar{v}_x}{dt}=\frac{d}{dt}(M\bar{v}_x). \qquad (1)$$

上式可用文字陳述如下:作用於任一物體的各外力,其沿任一方向的分力的代數和,等於物體沿該方向的分線動量對於時間的變率.

可見自飛機投下的炸彈,設在空中爆炸,則其碎片與化學氣體的質心,必仍繼續其拋物線的動路. 因爆炸前後,均僅有地球作用的力;對炸彈本身說,爆炸力全爲內力,故其衝量沿任一方向的分量均等於零. 同理,演技者在空中連翻觔斗,無論軀體與手足如何蜷曲或伸直,其質心的動路亦必爲一拋物線.

積分(1)式,得

$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F_x dt=\int_{\bar{v}_x'}^{\bar{v}_x''} d(M\bar{v}_x).$$

或

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2}F_x dt = M\bar{v}_x'' - M\bar{v}_x', \tag{2}$$

式中 $\bar{v}_x'$ 與 $\bar{v}_x''$ 各代表物體質心沿 $x$ 軸向的初分速度與末分速度，所歷時間由 $t_1$ 至 $t_2$。(2)式即線衝量線動量原理。如用文字陳述，則：作用於任一物體的各外力，在任一時間內，沿任一方向的分衝量的代數和，等於在外力作用時間內，物體沿該方向的分線動量的改變。或

$$L_x = \Delta M_x, \tag{3}$$

式中 $x$ 可代表任何軸向。

**146. 角衝量角動量原理**　關於角衝量與角動量，應用於剛體的純迴轉與平面運動的原理，說明如下：

剛體的迴轉運動——在第 111 節中已經證明：如剛體繞固定軸迴轉，則作用於剛體的外力，對於轉軸的力矩的代數和，等於剛體對於轉軸的轉動慣量與其角加速度的乘積，即

$$\Sigma T_o = I_o\alpha = I_o\frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(I_o\omega)。 \tag{1}$$

上式可用文字陳述如下：作用於迴轉剛體的外力，其對於轉軸的力矩，與物體對於轉軸的角動量對於時間的變率相等。

積分(1)式，即得應用於迴轉剛體的角衝量角動量原理：

$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma T_o dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(I_o\omega)。$$

或

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2}T_o dt = I_o\omega_2 - I_o\omega_1, \tag{2}$$

式中 $\omega_1$ 與 $\omega_2$ 各代表物體在時間 $t_2-t_1$ 的初角速度與末角速度。如用文字陳述，即：在任一時間內，作用於迴轉剛體的各外力，其對於轉軸的角衝量，等於在同時間內物體對於轉軸的角動量的改變。　或

$$A_o = \Delta H_o。 \tag{3}$$

**剛體的平面運動**——由第 114 節知：如選取剛體的質心 $G$ 作爲基點 $O$，則簡式 $\Sigma T_o = I_o\alpha$ 亦可應用於平面運動的剛體。故上列(2)式與(3)式，亦可應用於平面運動的剛體，僅須選取質心爲基點。惟(5)式原爲 $A_o = \Delta H_o$，$O$ 點可任意選取；而應用於平面運動，則須改爲 $A_G = \Delta H_G$，$G$ 代表物體的質心。如作用於物體的外力，對於通過質心的基軸的力矩固定不變，則(3)式可改寫爲

$$\Sigma \bar{T}\cdot \Delta t = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1)。$$

但方程式 $A_o = \Delta H_o$，並非僅在取質心爲基點 $O$ 的特殊條件下，方能應用；無論 $O$ 點如何選取，此式均可應用，僅須用第 114 節的 (3)式，代替簡式 $\Sigma T_o = I_o\alpha$，讀者極易自行證明。但在第 144 節中已經指出，除下述三種特殊情形外，角動量並不等於 $I_o\omega$：基點 $O$，或與物體質心 $G$ 相重叠，或與物體的瞬時中心相重叠，或其速度矢通過物體的質心。

**147. 應用衝量與動量分析物體運動的方法** 在第 108 節已經指出：分析受不平衡力系所作用的物體運動的問題時，必須找出下述三者間的關係：(1)作用於物體的力系，(2)物體的動力學性質，與(3)物體的運動情形(速度與加速度等)。

此三因素均包括於衝量與動量的原理中。而由第 104 節知，平面運動的物體，須有三個運動方程式。如應用衝量與動量，則其中二式可表示沿任意二垂直軸向線衝量與線動量的關係，第三式表示對於與運動平面垂直的任一軸的角衝量與角動量的關係。故應用衝量與動量的原理，可得平面運動的物體的三個方程式如下：

$$L_x = \Delta M_x,$$

$$L_y = \Delta M_y,$$

$$A_o = \Delta H_o。$$

上列三式，可以應用於任何物體(剛體或非剛體)，承受任何外力(變的或固定的)時的任何運動(平移，迴轉，或平面運動)。本節例題，可分爲下列五類：

(1) 物體沿斜面滑動.

(2) 球或圓柱沿斜面滾動.

(3) 滾動與滑動的合成.

(4) 水注或蒸汽注.

(5) 貝爾東水輪.

## 例 題

624. 一物體重 $W$, 沿與水平成 $\alpha$ 角的斜面向下滑動. 設自靜止開始, 試求在 $t$ 秒鐘後物體的速度, ($a$) 假定無摩擦力, ($b$) 假定物體與斜面的摩擦係數爲 $\mu$.

**解** ($a$) 沿運動方向的力爲 $W\sin\alpha$, 並不隨時間而改變. 應用衝量動量原理, 得

$$(W\sin\alpha)\,t = Mv,$$

或

$$v = (g\sin\alpha)\,t.$$

($b$) 摩擦力的大小爲 $\mu N = \mu W\cos\alpha$, 與運動方向相反. 故沿斜面向下的力僅爲 $W(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. 應用衝量動量原理, 得

$$v = gt\,(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

625. 均質圓柱, 重 $W$ 磅, 半徑 $r$, 沿與水平成 $30°$ 的斜面向上滾動, 並無滑動. 圓柱兩端半徑 $\frac{1}{2}r$ 呎的部份(重量可略去不計), 均繞有細繩, 繩端共有力 $\frac{4}{5}W$ 磅沿斜面向上作用, 與圓柱軸線成垂直, 示如圖 490. 設自靜止開始, 試求在第 4 秒鐘末圓心的速度 $\bar{v}$.

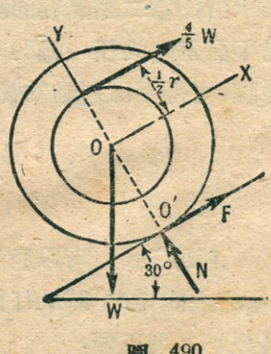



圖 490

**解** 圖 490 示圓柱的分離體圖. 由衝量動量原理得

$$\Sigma F_x \cdot \Delta t = M(\bar{v}_x'' - \bar{v}_x') \text{ 或}$$

$$\left(\tfrac{4}{5}W - \tfrac{1}{2}W + F\right)4 = \frac{W}{g}\bar{v}. \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y \cdot \Delta t = M(\bar{v}_y'' - \bar{v}_y') \text{ 或 } (N - 0.866W)4 = 0. \tag{2}$$

$$\Sigma \bar{T} \cdot \Delta t = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1) \text{ 或 } (\tfrac{4}{5}W \cdot \tfrac{1}{2}r - Fr)4 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}r^2\omega_2. \tag{3}$$

由(3)式知 $$F = \frac{2}{5}W - \frac{1}{8}\frac{W}{g}\bar{v}, \quad 因 \quad r\omega_2 = \bar{v}.$$

代入(1)式，可得

$$\bar{v} = \frac{28}{15}g = 60.1 \text{ 呎/秒}.$$

626. 設彈子(木球)受彈子棒撞擊後，開始沿水平枱面作平移運動，並無迴轉，圖 491. 因與檯面有相對滑動，檯面的摩擦力使彈子開始迴轉，在相當時間 $t_1$ 後，彈子與檯面將並無滑動. 試求 $t_1$，及此時球心速度 $v_1$.

**解**　作用於彈子的力為重量 $W$，檯面的反力 $N$(與 $W$ 相等)，及摩擦力 $F$(在時間 $0<t<t_1$ 內，等於 $\mu N$). 應用衝量動量原理得

$$\mu N t_1 = M(v_0 - v_1),$$
$$\mu N r t_1 = \bar{I}\omega_1.$$

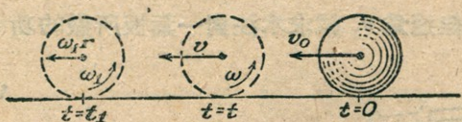



圖 491.

又由運動學知，在滾動而無滑動時，

$$v_1 = \omega_1 r.$$

上列三式中，僅有 $v_1$, $\omega_1$, 與 $t_1$ 為未知量. 聯立解之得

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + \bar{I}/Mr^2}, \quad \omega_1 = \frac{v_1}{r}, \quad t_1 = \frac{v_0}{\mu g(1 + Mr^2/\bar{I})}.$$

627. 水注直徑 $1\frac{1}{2}$ 吋，以速度 25 呎/秒 噴射於與水注方向成 30° 角的固定不動的葉板上，圖492. 試求水注作用於葉板的分壓力，或葉板作用於水注的分力，$P_x$ 與 $P_y$. 假定水注的速度僅改換方

向，大小不變，而水注與葉板相接觸時，僅受到葉板的壓力.

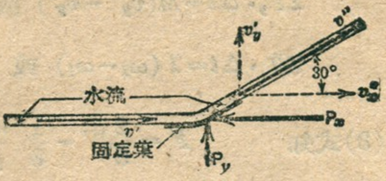


圖 492.

解 令 $P_x$ 與 $P_y$ 代表葉板作用於水注的分壓力，使水注的動量發生改變。由衝量動量原理知

$$\Sigma F_x \cdot \Delta t = M(v_x'' - v_x'), \tag{1}$$

$$\Sigma F_y \cdot \Delta t = M(v_y'' - v_y'). \tag{2}$$

爲方便計，取 $\Delta t = 1$ 秒；在同時間內受葉板壓力所作用的水，其質量爲

$$M = \frac{\pi \times 1.5^2 \times 25 \times 62.5}{4 \times 144 \times 32.2} = 0.594 \text{ 斯勒.}$$

於是由(1),(2)兩式得

$$P_x = P_x \cdot 1 = 0.594(25 - 25 \times 0.866) = 1.99 \text{ 磅},$$

$$P_y = P_y \cdot 1 = 0.594(25 \times 0.50 - 0) = 7.43 \text{ 磅.}$$

628. 圖 493($a$) 示貝爾東(Pelton)水輪機。周緣有無數葉板。葉板斷面示如同圖($b$)。如水注速度爲 $V$，橫斷面面積爲 $A$，密度爲 $\rho$。輪緣線速爲 $v$，試求水注對一葉板所做的功率。

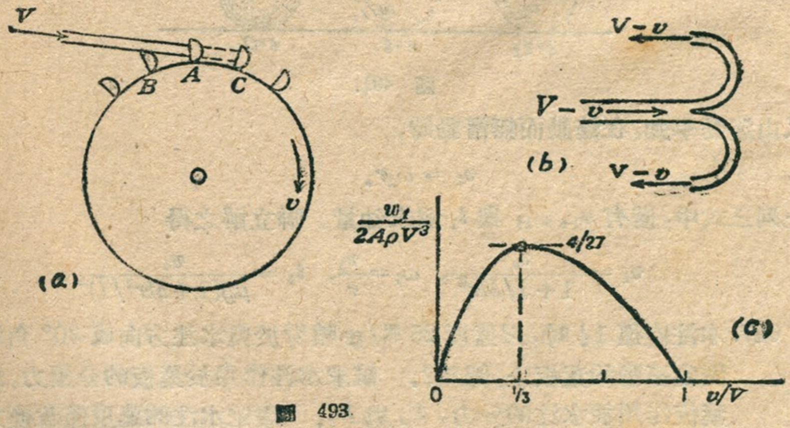


圖 493

**解** 水注對於葉板的相對速度爲 $V-v$，每秒鐘有體積等於 $A(V-v)$ 的水噴射於一葉板。故水作用於葉板的 $F$ 力，可用下式求出

$$F\cdot 1=2A\rho(V-v)^2,$$

因水與葉板的相對速度由 $(V-v)$ 變爲 $-(V-v)$。但葉板的絕對速度爲 $v$，故水注作用一葉板的功率，或每秒鐘所做的功爲

$$w_1=Fv=2A\rho v(V-v)^2=2A\rho V^3\frac{v}{V}\left(1-\frac{v}{V}\right)^2.$$

$w_1$ 與 $v/V$ 的關係，示如圖 493 (c)。在 $v=\frac{1}{3}V$ 時，功率最大，此結論亦極易用微分法加以證明。

讀者或將疑問：以爲如 $V=2v$，則水注離開葉板時的相對速度爲 $-v$，絕對速度等於零；如此則水的動能全部消耗於葉板的推動，功率應爲最大。此言誠然，但如 $V=2v$，則每秒鐘內噴射於一葉板的水量將較 $V=3v$ 時爲少，故效率雖可增高，而功率則將減低。

**629.** 變斷面的彎曲水管，圖 494 (a)，在有穩定 (steady) 水流（或其他不能壓縮的流體）經過時，試應用衝量動量原理，求水流作用於彎管，或彎管作用於水流的合力 $R$。

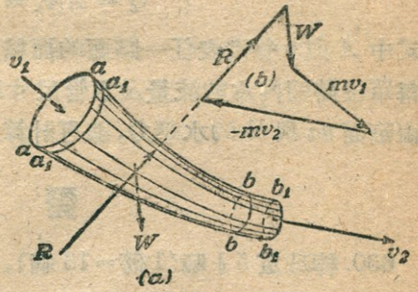



圖 494.

**解** 取圖 (a) 所示在橫斷面 $aa$ 與 $bb$ 間的一段水流，作爲分離體。在時間 $dt$ 後，此段液體將移動至斷面 $a_1a_1$ 與 $b_1b_1$ 之間。換言之，在時間 $dt$ 內，$aa_1$ 段的流體已被 $bb_1$ 段的所代替；但兩端的速度並不相同，故有動量的改變。令 $Q$ 代表每秒鐘內流過任一斷面水的體積，$\rho$ 代表水的密度，則每秒鐘內流過任一斷面的質量爲

$$m=Q\rho.$$

如以 $v_1$ 與 $v_2$ 代表水流在斷面 $aa$ 與 $bb$ 的速度,(註)則在時間 $dt$ 內水流的線動量的改變爲

$$m\cdot dt\, v_2 \rightarrow m\, dt\, v_1,$$

線動量對於時間的改變率爲

$$m(v_2 \rightarrow v_1) = Q\rho(v_2 \rightarrow v_1).$$

作用於此段水流的外力共有:(1)水的重力,平均分佈於全體積 $ab$,合力爲 $W$; (2)表面力,卽水管管壁所作用的壓力及隣段流體在 $aa$ 與 $bb$ 面所作用的壓力,兩者的合力令爲 $R$。由衝量動量原理,得

$$Q\rho(v_2 \rightarrow v_1)\, dt = (W \leftrightarrow R)dt.$$

或

$$Q\rho(v_2 \rightarrow v_1) = W \leftrightarrow R,$$

此式名爲歐拉(Euler)方程式。由此式知圖 494($b$)的四個矢量必成閉合多邊形。其次,因液體連續流動,又假定爲完全不能壓縮,故

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2,$$

式中 $A$ 與 $v$ 各代表任一斷面的面積及流體經過該斷面的速度。故如每單位時間內水的流量及水管尺寸均爲已知,則合力 $R$ 極易求出。又由斷面 $aa$ 與 $bb$ 的水壓力,卽可計算水管作用於水的合力。

## 習　題

630. 棒球重 $5\frac{1}{2}$ 兩(1 磅=16 兩),以線速度 150 呎/秒 沿水平直線向右運動。被球棒敲擊後,其速度自原來方向改變 135°(向左朝上),並減低至 130 呎/秒,示如圖 495。試計算球棒作用於球的水平與垂直方向的分衝量。假定球與棒的接觸時間爲 $\frac{1}{50}$ 秒,求碰撞中衝力的平均值。

答 $L_x$=2.58 磅·秒; $L_y$=0.98 磅·秒; $F_{av}$=138 磅。

註 假定在任一斷面,全斷面上各點的流速完全相同。又因假定爲穩定流,故任一斷面上的流速均不隨時間而改變。

631. 直徑 $\frac{3}{4}$ 吋速度 40 呎/秒 的水注,沿水平朝右,噴射於以速度 $u=10$ 呎/秒 向右運動的葉板,圖 496。試求水注作用於葉板的推力

答 $P=5.36$ 磅。

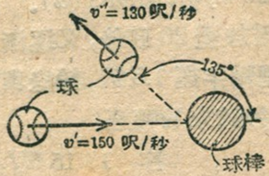



圖 495.

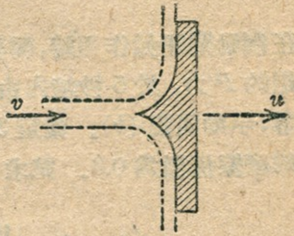



圖 496.

632. 某機槍每分鐘放射子彈 350 顆,每彈丸重 1 兩(1 磅=16 兩),離槍口時初速爲 2200 呎/秒。 試求機槍支點所受到的平均反力。氣體逸出槍膛時所生的反力,假定可略去不計。

答 $R_{av.}=24.9$ 磅。

633. 保安放溢瓣,圖 497,放水面積等於瓣程與 $\pi d\cos 45°$ 的乘積,水管直徑 $d=6$ 吋, 瓣程 $=0.25$ 吋,放水率 2 立呎/秒 水管內的表壓力 ( Gauge pressure) $p=30$ 磅/方吋。試求彈簧作用於水瓣的力.

提示: 沿水平方向水的分動量由 $Mv_1$ 變爲 $Mv_2\cos 45°$, 應等於水管橫斷面的總壓力與彈簧壓力兩者之差的衝量.

答 $P=650$ 磅。

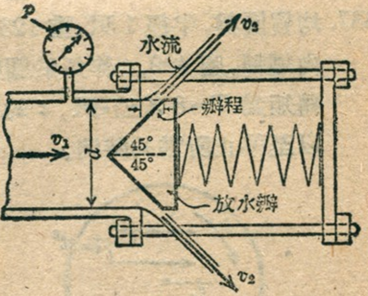



圖 497.

634. 重 800 磅的彈丸, 以初速 1400 呎/秒 離開砲口。 砲重 160,000 磅。 試求砲身的最大反坐速度。如砲彈爆炸後,立卽有不變力 18,000 磅阻礙回坐,問砲身回坐的距離應爲若干?

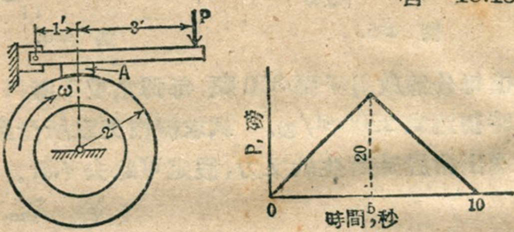
答 $v=7$ 呎/秒; $s=6.76$ 呎。

635. 某輪機的迴轉部份重 20 噸，迴轉半徑 2 呎，軸線成水平。 設由轉速 55 轉/分，全賴軸承的摩阻力使其靜止，須歷時 10 分鐘，軸頸直徑 12 吋，試求摩擦係數的平均值。

答 $\mu=0.00238$.

636. 在制動閘開始作用時，轉輪角速 120 轉/分，圖 498 (*a*)。 閘桿桿端的 $P$ 力，於 5 秒鐘內由零逐漸增加至 20 磅後，又逐漸減低至零，示如同圖 (*b*)。 輪重 322 磅，迴轉半徑 1.5 呎，輪緣與閘鞋間的摩擦係數為 0.3。 試求在第 10 秒鐘末的轉速。

答 18.15 轉/分.




(*a*) (*b*)

圖 498.

637. 均質圓盤，半徑 1 呎，重 128.8 磅，繞通過 $O$ 點的垂直軸在水平面內迴轉，圖 499。 作用於圓盤的力偶(包括軸承的摩擦力矩)，其轉矩為 $T=8t^3$ 磅•呎，$t$ 的單位為秒；問使圓盤由 $\omega=54$ 弧度/秒以至停止所需的時間。 答 $t=3$ 秒.

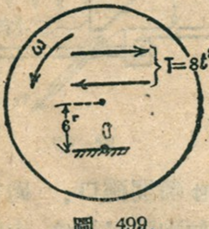



圖 499.

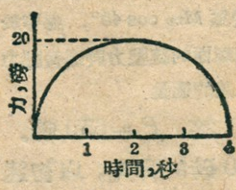



圖 500.

638. 一物體重 64.4 磅，靜止於光滑水平面上。有一方向固定的水平力，其作用線通過物體的質心，其大小隨時間改變，示如圖 500.

試求在此力開始作用後第3秒鐘末物體的速度。

答　$v=25.3$ 呎/秒。

639. 軟繩跨過無摩擦力的滑輪，兩端下垂，圖 501，一端懸有重 $W$ 的物體；另端有重 $W$ 的一人，最初與物體互成平衡，在同一高度，靜止不動。於是此人開始緣繩上爬。(a)試詳細討論此人與物體所受的力，所有的加速度與位移。此物體是否將向上或向下移動？(b)如滑輪輪軸稍有摩擦力，試研究其影響。

答　(a)物體將隨人上昇，始終與人維持在同一高度；(b)設此人徐緩上爬，使其慣性力對於輪軸的力矩，恆小於摩擦力矩，則物體將維持原來位置靜止不動。

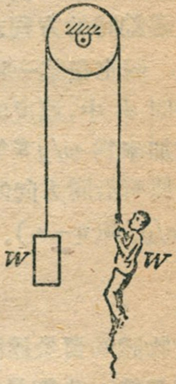



圖 501.

640. 經過12吋(直徑)水管的水流量為10立呎/秒，水壓40磅/方吋，圖502。試求水流作用於彎頭(Elbow)的合力 $R$。

答　$R=349$ 磅。

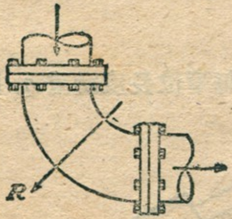



圖 502.


圖 503.

641. 水由斷面 $A_1$ 的細管，流入斷面 $A_2$ 的粗管，圖 503。如在斷面1與2的流速各為 $v_1$ 與 $v_2$，水重 $\rho$ 磅/立呎，試求由斷面1至斷面2水壓力的增高。

答　$p_2-p_1=\dfrac{\rho}{g}v_2(v_1-v_2)$。

**143. 變質量的直線運動。火箭** 在工程中,有時遇到的運動物體,其質量在運動中繼續改變:行駛中煤水逐漸減少的機車,上昇時陸續拋出鎮重(Ballast,或名壓艙物)的氣球,以及賴噴射推進的火箭,均爲變質量運動物體的實例。 本節中將應用衝量動量原理,求出此種物體在直線運動時的方程式,並舉例說明其應用。

假定在某一瞬時 $t$,物體的總質量爲 $W/g$,外力爲 $X$,速度爲 $v$;在時間 $dt$ 中,速度的變化爲 $dv$,動量的變化爲$(W/g)dv$。設此時質量的增加率爲 $w/g$ 單位/秒,則在時間 $dt$ 內將增加質量 $(w/g)\,dt$;如新加質量原有沿同方向的速度 $v_1$,則在加入運動物體後,其動量的改變將爲$(w/g)\,dt(v-v_1)$。故在時間 $dt$ 內,運動物體共增加動量

$$\frac{W}{g}dv+\frac{w}{g}(v-v_1)\,dt,$$

設物體的質量逐漸減小,式中的 $w$ 應爲負值;而 $v_1$ 如與 $v$ 同向,則應視爲正值。由衝量動量原理知

$$\frac{W}{g}dv+\frac{w}{g}(v-v_1)dt=X\,dt.$$

或

$$\frac{W}{g}\,\frac{dv}{dt}+\frac{w}{g}(v-v_1)=X. \qquad (1)$$

上式即變質量的物體,直線運動的微分方程式。

**沿斜面下滑的物體** 物體重 $W_0$,繫以軟鏈,每單位長度鏈重 $q$,同沿斜面下滑。 在圖 504 所示位置,運動的質量共爲

$$\frac{W}{g}=\frac{1}{g}(W_0+qx). \qquad (a)$$

又由定義知

$$w=\frac{dW}{dt}=qv. \qquad (b)$$

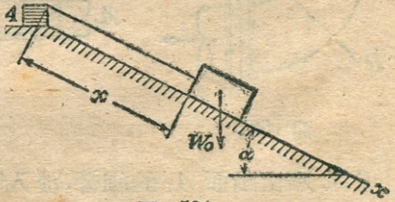


圖 504.

軟鏈原繞於捲軸,故初速 $v_1=0$。外力的合力 $X$ 則等於$(W_0+qx)\sin\alpha$。於是由(1)式可寫出

$$\frac{1}{g}\left(W\frac{dv}{dt}+v\frac{dW}{dt}\right)=W\sin\alpha.$$

或

$$d(Wv)=Wg\sin\alpha\,dt. \qquad (c)$$

爲求 $(c)$ 式的積分,左右兩邊各乘以 $Wv$; 並將右邊的 $W$ 代以 $(W_0+qx)$, $v$ 代以 $dx/dt$。 如此則

$$Wvd(Wv)=(W_0+qx)^2 g\sin\alpha\,dx. \qquad (d)$$

積分之,得

$$\frac{1}{2}(Wv)^2=\frac{g}{3q}(W_0+qx)^3\sin\alpha+C. \qquad (2)$$

假定在開始時,物體靜止於斜面的頂邊,即當 $t=0$ 的時候, $x=0$, $v=0$. 則積分常數 $C$ 爲

$$C=-\frac{g}{3q}W_0^3\sin\alpha,$$

代入(2)式,得

$$v^2=\frac{2g}{3q}\frac{(W_0+qx)^3-W_0^3}{(W_0+qx)^2}\sin\alpha. \qquad (3)$$

設 $W_0$ 與 $q$ 爲已知,則應用上式可計算任一瞬時的速度 $v$。 如 $qx$ 遠比 $W_0$ 爲小,則(3)式可簡化爲

$$v^2\approx 2gx\sin\alpha.$$

**垂直上拋的物體**　設有重 $W_0$ 的物體,下繫軟鏈,以初速 $v_0$ 自地面垂直上拋,則運動質量的增加,將與物體的高度或垂鏈的長度成正比. 上述(2)式,可用以計算物體所能達到的最大高度. 圖 504, 可知本例中 $\alpha=-\pi/2$;而在 $x=0$ 的時候, $v=v_0$; 代入(2)式,可得積分常數

$$C=\frac{1}{2}(W_0v_0)^2+\frac{g}{3q}W_0^3.$$

故(2)式可寫爲

$$\frac{1}{2}(Wv)^2=\frac{g}{3q}\left[W_0^3-(W_0+qx)^3\right]+\frac{1}{2}(W_0v_0)^2. \qquad (4)$$

如以 $v=0$ 代入上式，則所得的 $x$ 值，即為物體的最大高度：

$$(W_0+qh)^3=\frac{3q}{2g}(W_0v_0)^2+W_0^3 \tag{e}$$

令

$$\frac{W_0}{q}=c,\qquad \frac{v_0^2}{2g}=h_0,$$

(e) 式可寫成

$$(c+h)^3=3c^2h_0+c^3,$$

故

$$h=c\sqrt[3]{1+\frac{3h_0}{c}}-c. \tag{f}$$

如每單位長度的鏈重與 $W_0$ 比較極為微小，$c$ 遠比 $h_0$ 為大，則 $h$ 與 $h_0$ 極為接近，即垂鏈的影響可略去不計。

但 (e) 式僅在鏈長大於 $h$ 時，方能應用。 否則須將問題分為兩部份：以鏈長 $l$ 代入 (4) 式中的 $x$，可求出在此高度（適與鏈長相等）時物體的向上速度 $v_l$。自此以後，質量並不再增，故運動系的加速度即等於負 $g$。

**垂直上昇的火箭**——上述(1)式，亦可用以討論火箭的運動。於是 $w$ 代表每單位時間內自火箭噴出的氣體的重量，故為負值。 此種氣體離開火箭時，其絕對速度 $v_1$ 亦為負值。$v-v_1$ 代表噴射氣體對於火箭的相對速度，其最高值令為常數 $\mu$.(註) 於是(1)式可寫成

$$\frac{W}{g}\frac{dv}{dt}=X+\frac{w}{g}\mu. \tag{5}$$

假定火箭垂直上昇，略去空氣阻力，則

$$X=-\frac{Wr^2}{(r+x)^2}, \tag{g}$$

式中 $r$ 代表地球的半徑，$x$ 代表火箭至地面的距離。代入(5)式得

註　因自火箭向後噴射的總質量，有一定限度，故噴速愈高，則火箭向前的動量愈大；但用普通的燃燒或爆炸方法，$v-v_1$ 的最高值約為 5000 呎/秒（相當於音速的 $4\frac{1}{2}$ 倍），截至目前止，無論如何尚不能到 2000 碼/秒.

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{gr^2}{(r+x)^2}+\frac{w\mu}{W}. \tag{h}$$

假定用某種設備，控制燃氣每單位時間內噴射的質量 $w/g$，適使火箭的加速度爲一常數，等於在地面上重力加速度 $g$ 的 $\alpha$ 倍。(註)

$$\frac{dv}{dt}=\alpha g.$$

則火箭沿垂直線等加速運動，故

$$x=\alpha gt^2/2.$$

代入($h$)式，整理後可得

$$-\frac{dW}{dt}\frac{\mu}{W}=\alpha g+\frac{gr^2}{[r+(\alpha gt^2/2)]^2}. \tag{i}$$

將($i$)式積分，並用起飛時情形 $t=0$ 與 $W=W_0$ 代入，求出積分常數，可是得

$$-\mu\log_e\left(\frac{W}{W_0}\right)=\alpha gt+gr^2\left[\frac{t}{2r\left(r+\frac{\alpha gt^2}{2}\right)}+\frac{1}{2r^2}\sqrt{\frac{2r}{\alpha g}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{\alpha g}{2r}}\,t\right)\right]. \tag{6}$$

由上式可以計算在任何時間 $t$，$W/W_0$ 的比值。且在任一時間 $t$，$x=\alpha gt^2/2$，$v=\alpha gt$。相當於不同的 $\alpha$ 值，可得一組表示速度 $v$ 與高度 $x$ 間相互關係的曲線，示如圖 505。

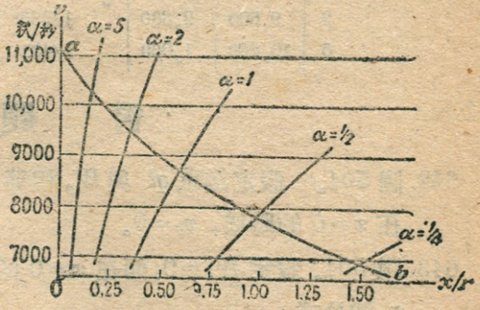


圖 505.

註　噴速與噴射的總質量均有一定限值，因而作用於火箭的衝量亦爲一定。設能在火箭起飛時即全部噴完，則火箭的速度與動能應爲最大值。但噴射率愈高，則火箭的加速度愈大，火箭結構將愈重。故須調節噴射率，使火箭的加速度，適爲結構所能承受的最高值。

**火箭由地面飛達月球的可能性**——由上述理論,我們可以討論火箭飛達月球的可能性.火箭的運動可分爲三個階段:第一階段中,火箭將燃氣全部噴完,到達相當高度,並得到某一速度;第二階段,火箭的質量不再改變,速度則陸續減低,但因第一階段中所得的速度,使火箭卒能到達中性點,卽此時地球對於火箭的吸力,適被月球對於火箭的吸力所抵消;自此以後,卽第三階段,火箭以加速度飛向月球.是知僅須火箭能在第一階段中得到相當速度,使其有足夠的動量繼續前進,以至到達中性點,則火箭必可到達月球.離地愈遠,則距中性點愈近;且地心吸力愈減,而月球的吸力愈增.故火箭離地愈遠,則使其到達中性點所需的速度愈低.此種分析的結果,示如圖 505 中的曲線 $ab$.此曲線與各 $\alpha$ 曲線相交點的縱坐標,卽代表在各 $\alpha$ 值時,火箭在第一階段末所應有的速度,令爲 $v_c$.此速度除以 $\alpha g$,卽得第一階段所歷的時間 $t_c$.以 $t_c$ 代入 (6) 式中的 $t$,並假定燃氣的噴射速度 $\mu$ 爲某一已知值,卽可計算 $W/W_0$,卽火箭到達月球時的剩餘重量對於起飛時火箭總重的比值.用目前噴射速度可能達到的極限值 $\mu=2000$ 粎/秒,由下表可知,卽在最大加速等於 $5g$ 的情形下,亦僅有起飛時總重的 1/431 可能到達月球;換言之,卽火箭結構(包括機器、油箱、儀表、操縱系統等)每重 1 磅,至少須攜帶燃料 430 磅.如用 $\mu=5000$ 粎/秒,則 $W_0/W=1640$.由此可知,月球與地球,目前仍嫌太遠.

| $\alpha$ | $v_c$<br>粎/秒 | $x_c$<br>公里 | $W/W_0$<br>$u=2{,}000$ 粎/秒 | $W/W_0$<br>$u=4010$粎/秒 |
|---|---|---|---|---|
| 1/4 | 6,800 | 9,440 | 1/66,800 | 1/258 |
| 1/2 | 7,600 | 6,050 | 1/7,685 | 1/87.5 |
| 1 | 8,650 | 3,800 | 1/1,839 | 1/42.7 |
| 2 | 9,500 | 2,300 | 1/785 | 1/28 |
| 5 | 10,200 | 1,060 | 1/431 | 1/20.8 |

## 習　題

642. 圖 504. 假定鏈重 $ql$ 與 $W_0$ 相等,試求在 $x=l$ 時物體的速度.在 $x=0$ 的時候,$v_0=0$. 答 $v=\sqrt{7gl\sin\alpha/6}$.

643. 圖 504. 假定 $W_0=0$,而在 $x=0$ 的時候,$v_0=0$.試求由 $x$ 計算 $v$ 的公式. 答 $v=\sqrt{2gx\sin\alpha/3}$.

644. 圖 506. 兩物體各重 $W_0$ 與 $W_1$,繫以無重軟繩.設將 $W_0$ 自平面 $AB$ 以初速 $v_0$ 垂直上拋.繩長 $l$,受力時毫無伸長,亦不致拉斷.試求 $W_0$ 所能到達的最大高度.

答 $h=l\left[1-\left(\frac{W_0}{W_0+W_1}\right)^2\right]+\left(\frac{W_0}{W_0+W_1}\right)^2\frac{v_0^2}{2g}$.

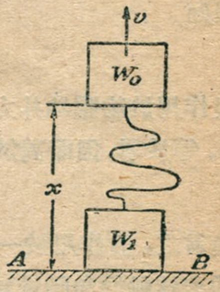


圖 506.

645. 令 $M$ 與 $r$ 各代表地球的質量與半徑。月球的質量約為 $M/75$，與地球的中心距離約為 $60r$。試求中和點（對於在此點的物體，地球與月球的吸力，適互相抵消）至地心的距離 $x$。 答 $x=53.79r$。

646. 飛越海洋的炮彈或火箭，其初速幾可使其環繞地球，永遠飛行，一如地面附近的行星。如欲使子彈在距地面 100 哩的高度，環繞地球，飛行不息，試求其速度。地球半徑等於 4000 哩；地心加速度 $g$，與物體至地心的距離的平方成反比。

答 $V^2=g_0r\frac{r}{r+h}$; $V=25,800$ 呎/秒。

約為大氣中音速的 23 倍。

647. 假定地面附近的空氣阻力可略去不計，欲使射出的彈丸 $(a)$ 可到達無窮遠，$(b)$ 到達 $80\,r$（地球半徑）的距離，試求所需的初速 $v_0$。

答 $(a)\ v_0^2=2gr$; $(b)\ v_0^2=\frac{79}{80}2gr$; 約為 37,000 呎/秒。

**149. 動量不滅原理** I. 線動量——由線衝量線動量原理知，任何質量系受任何不平衡的力系所作用時，衝量與動量的關係可用下式表示：

$$L_x=\Delta(M\bar{v}_x),$$

式中 $x$ 代表任一方向。設力系的合力並無沿 $x$ 軸向的分力，則 $x$ 軸向的衝量 $L_x$ 等於零，因而動量的改變 $\Delta(M\bar{v}_x)$ 亦必等於零，即

$$M\bar{v}_x=\text{常數}.$$

換言之，設作用於一質量系各外力的合力，並無沿某方向的分力，則此

質量系沿該方向的線動量爲一常數。此陳述卽線動量不滅原理。

II. 角動量——受不平衡力系作用的任何物體，由角衝量角動量原理知

$$A_o = \Delta H_o.$$

設作用於物體的外力，並無對於 $O$ 軸的合力矩，則對於 $O$ 軸的角衝量 $A_o$ 等於零，因而對於同軸的角動量的改變 $\Delta H_o$ 亦必等於零，卽

$$H_o = \text{常數}.$$

換言之，設作用於一物體的各外力，並無對於某一軸的合力矩，則此物體對該軸的角動量爲一常數。此陳述卽角動量不滅原理。

如滿足下述三種條件之一，則物體的角動量卽等於 $I_o\omega$：(1)剛體繞一固定軸迴轉，$O$ 軸卽迴轉軸。(2)剛體作平面運動，而 $O$ 軸則或爲($a$)剛體的零速度的瞬時軸，或($b$)經過剛體的質心 $G$，或($c$)迴轉中心 $O$ 的速度矢，通過質心 $G$（參閱第 143，144 節）。(3) 運動物體並非剛體，惟體內各部份則均繞一固定軸以相同的角速度迴轉；例如一桿繞固定軸迴轉，另有物體沿桿滑動；桿與物體有沿徑向的相對運動，決不能視爲一剛體；但兩者對於迴轉軸 $O$ 的角動量，則在任一瞬時均等於 $I_o\omega$。

運動物體如滿足上述各條件之一，則角動量不滅原理可用算式表示如下：

$$I_o\omega = \text{常數}.$$

故如 $I_o$ 增加，$\omega$ 必將減低；反之如 $I_o$ 減小，則 $\omega$ 必將增加。表演旋舞者，當連續旋轉時，必趾尖着地（圖 507 $a$），繞迴轉慣量最小的垂直軸；而在停止旋轉前，則將手足橫向外伸，示如圖 507($b$)，使迴轉慣量 $I_o$ 增加（至 7 倍左右），因而減低轉速 $\omega$。作花式跳水者，普通先將雙手高舉，脚跟蹻起，使身體對於橫軸的轉動慣量爲最大值，圖 508($a$)；而在縱身一躍後，卽將手足收攏，全身蜷曲，圖 508($b$)，使轉動慣量減低（約至 $1/8$），轉速增加，因而可於落水前在空中連翻觔斗。足見角動量不滅原理，在日常遊戲中，亦頗多應用。

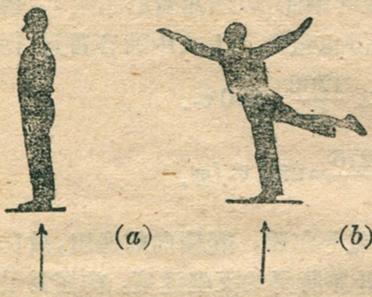



圖 507.


圖 508.

## 例 題

648. 口徑 3 吋的野戰砲，圖 509，反坐體共重 950 磅。彈丸重 15 磅，彈藥重 1.5 磅，離開砲口時初速 1700 呎/秒。設彈丸沿水平方向射出，試求在離開砲口時，砲身反坐的速度 $v_r$。

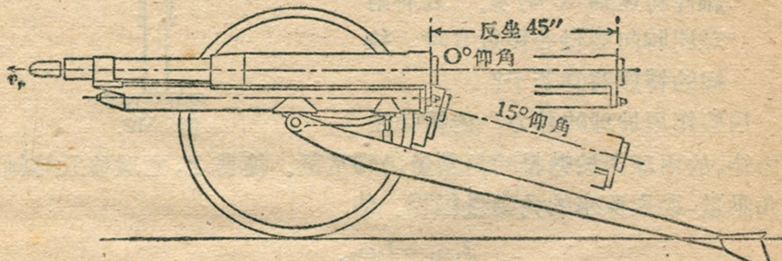



圖 509.

解 運動物體可分爲三部份：彈丸、彈藥、及反坐體。因彈丸在砲管中前進時，各部份均無沿水平方向的外力。故彈丸的動量 $M_pv_p$ 加上化學氣體的動量 $M_g\bar{v}_g$，必應與反坐體的動量 $M_rv_r$ 大小相等，方向相反。即

$$M_pv_p+M_g\bar{v}_g=M_rv_r.$$

化學氣體(連同未經燃燒的彈藥)並非剛體，故須用質心速度 $\overline{v}_g$，普通假定爲等於彈速的一半。 逕用各部份重量代入上式中的各質量，得

$$15\times1700+1.5\times\frac{1700}{2}=950\,v_r.$$

故
$$v_r=\frac{25,500+1275}{950}=28.1\text{ 呎/秒}.$$

在彈丸離開砲口後，砲管內仍充滿化學氣體，繼續向前逸出，故仍有壓力使反坐速度繼續增加。照上法計算所得的反坐速度，約僅爲最大反坐速度的 70%。

注意：如略去彈藥的重量，則彈丸前進的動量與砲身後退的動量相等，即 $M_pv_p=M_rv_r$ 但兩者的動能，各爲 $\frac{1}{2}v_p(M_pv_p)$ 與 $\frac{1}{2}v_r(M_rv_r)$，則並不相等，而與速度成正比，或與質量成反比．故阻止砲身的反坐易，而敵人阻止彈丸的前進則極難

649 光滑的水平細桿，繞垂直中心軸迴轉，圖 510. 桿上套有兩球，各重 8 磅，直徑 $2\frac{1}{2}$ 吋，繫有跨過滑輪的細繩，可使兩球沿徑向滑動。 當球心距轉軸 2 呎時，細桿轉速爲 60 轉/分。 如將兩球同時向轉軸各移近 6 吋，細桿的轉速將爲若干？

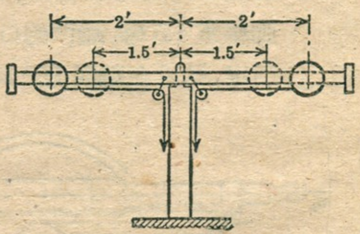


圖 510.

解　用線作用於球的外力，對轉軸並無力矩，故兩球對於轉軸的角動量仍爲常數。換言之，兩球移近轉軸後的角動量，應與原來的角動量相等。即

$$I_1\omega_1=I_2\omega_2.$$

將兩球視爲兩質點(讀者可自行證明，如此假定差誤極小)，同時將細桿的質量略去不計，則

$$2M\times2^2\times\frac{60\times2\pi}{60}=2M\times1.5^2\,\omega_2.$$

故
$$\omega_2=\frac{4\times2\pi}{2.25}=11.15\text{ 弧度/秒}=106.6\text{ 轉/分}.$$

可見球對於軸的轉動慣量如有減少，則其角速度必將增加。且因轉動慣量與距離的平方成正比，故距離如減至一半，角速度將增至 4 倍。

設在球心與轉軸相距 $x$ 的時候，兩繩並不用力拉住，則在任一球上均無水平力作用，將各沿直線方向，等速度前進(圖 511)，直至遇到桿端的橫檔爲止。在到達桿端前，球的線動量，大小與方向均不改變；遇到橫檔後則由 $mv$ 改爲 $mv_t$ 但 $mv$ 與 $mv_t$ 對於轉軸的角動量，則彼此相同，因橫檔作用於球的徑向衝力，並無對於轉軸的角衝量，故角動量仍爲常數。

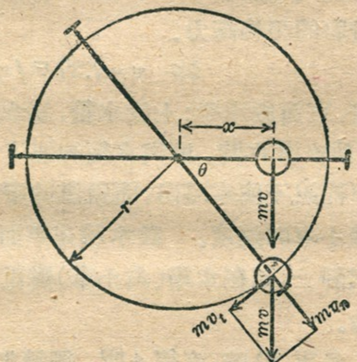



圖 511.

## 習 題

650. 彈丸重 2 啢，以線速 2000 呎/秒，向木塊質心穿入。木塊原沿光滑水平面以與彈丸速度同方向的線速 20 呎/秒前進。如木塊原重 16.8 磅，試求木塊嵌上彈丸後的速度。

答 $v=34.6$ 呎/秒。

651. 水平轉盤 $D$，頂面光滑，上置小物體 $A$ (圖 512)，重 8 磅，共同以等角速 90 轉/分繞 $YY$ 軸迴轉，用穿過空心軸的細繩，維持 $A$ 與轉軸的距離爲 $r=24$吋。設將 $r$ 減至 8 吋，試求 $A$


圖 512.

的角速度。　　答　$\omega=84.8$ 弧度/秒 $=810$ 轉/分。

652. 口徑 4.7 吋的榴彈砲，置於木質平台上。用繩將砲身繫於砲前的木樁，以制止反坐。但繩極鬆弛，反坐仍可自由發生。設砲身重 7000 磅，彈丸重 63 磅，彈藥重 6 磅，初速 1500 呎/秒，試求反坐的速度。　　答　$v=14.1$ 呎/秒。

653. 木船重 180 磅，漂速 5 呎/秒；一人重 150 磅，跳入船心，其水平分速度爲 10 呎/秒，與木船速度同方向。如水的阻力可略去不計，試求船與人的共同速度。又如使船加速所需的時間爲 $\frac{1}{2}$ 秒，試求此人作用於船的平均衝力。

答　$v=7.27$ 呎/秒；$P=25.4$ 磅。

654. 小車重 400 磅，車面成水平；上置水箱，連水共重 300 磅；當有重 200 磅的石塊垂直落水時，車與水箱的速度原爲 10 哩/時，沿水平方向。如石塊並不使水溢出，而軌道的摩擦力可略去不計，試求石塊入水後小車的速度。設水箱在車面上滑動 $^1/_2$ 秒鐘後，始與車面相對靜止，問在水箱（與小車）變更速度時，車面作用於水箱的平均力。

655. 鍊輪 $A$ 與 $B$，各重 20 磅，直徑 4 呎，迴轉半徑 1.75 呎，裝於互相平行的兩水平軸上，圖 513。物體 $C$，重 10 磅，懸於跨過兩輪的軟鍊的一端。$C$ 由靜止向下降落，在第 2 秒鐘末，鬆垂於兩端間的軟鍊適被拉直。假定軸承的摩擦力與鍊的重量，均可略去不計，而適在鬆鍊拉緊時將物體 $C$ 除去，試求兩輪在第 2 秒鐘後的角速。

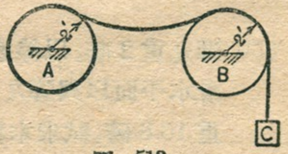



圖 513.

答　$\omega=6.37$ 弧度/秒。

656. 木塊重 20 磅，懸於一細長繩的下端，經過最低位置時，木塊擺動的速度爲 40 呎/秒。此時適有重 2 兩速度 2000 呎/秒的彈丸，穿入木塊。試求嵌入彈丸後木塊的速度，如彈丸與木塊的原來速

度：(*a*)方位相同，指向相反；(*b*)方向相同；(*c*)方向互成垂直。

答 (*a*) 27.4 呎/秒；(*b*) 52.2 呎/秒；(*c*) 41.6 呎/秒。

**150. 碰撞** 兩運動物體互相碰撞時，作用於接觸面上的衝力(作用力與反作用力)的大小，及其作用時間的久暫，隨兩物體的形狀、彈性、與速度而決定。為使讀者對衝力先有一具體的概念，可取圖 514 所示兩小球的碰撞為例。球面上可能在碰撞時接觸的部份，塗以薄層煤煙，使碰撞時兩球互相接觸的圓面積，較易準確量出。另由靜力試驗，求出使此種球發生類似的局部變形時所需的壓力；壓力愈大，變形亦愈大；可以畫出壓力與變形的對照曲線。由烟層上小圓的面積及此種曲線，即可估計在碰撞中兩球互相作用的衝力的大小。兩球互相接觸的時間，亦不難應用衝量電流計 (Ballistic galvanometer) 量出。由實驗知，直徑 1 吋的兩黃銅球，相對速度約為 1 呎/秒，則碰撞所歷時間約為 $15\times10^{-5}$ 秒(註)。而如此短暫的時間內，互相碰撞兩物體的速度，則有一定的改變。故加速度(或減速度)因而衝力之大，不難想像。

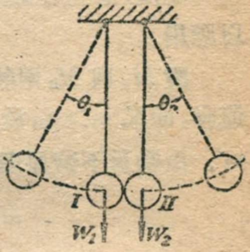



圖 514.

以上所論，猶指在接觸點有微小變形的物體而言。設物體絕對剛硬，毫無變形，則衝力將成為無窮大，而作用的時間則成為無窮小。好在研究包括衝力的動力學問題時，我們往往只用到衝力對於時間的積分，$\int_0^t F\,dt$，即所謂衝量，而非將衝力的大小與其作用的時間，分別處理。但由衝力之大，時間之短，故在碰撞中普通的固定力可略去不計，而在碰撞中各物體的位移，亦可假定為零。如此則僅須找出衝力的衝量，與碰撞物體速度改變間的關係。

註 我們在無意中動一次眼瞼，即所謂一瞬，約需時 $\frac{1}{40}$ 秒鐘(存心去動一次，需時較長)，比 $15\times10^{-5}$ 秒，約大170倍。

在碰撞中，兩物體互相作用的衝力，其作用線如通過各物體的質心，名爲**對心撞**(Central impact)；如每一物體的速度，均與碰撞中的接觸面成垂直，則名爲**正撞**(Direct impact)。圖 515 所示沿水平面滑動的兩物體，如 $v_1$ 與 $v_2$ 方向相同，而兩物體的質心又在同一水平線(與速度平行，與碰撞時的接觸面垂直)上，則在 $M_1$ 趕上(當然假定 $v_1>v_2$) $M_2$ 時所發生的碰撞，名爲**對心正撞**(Direct central impact)(註)。本節中僅擬討論最簡單的碰撞，即對心正撞。但所得的結論，則對於非對心斜撞，亦大多可以應用。


圖 515

設 $M_1$ 與 $M_2$ 兩物體，在互撞前的速度各爲 $v_1$ 與 $v_2$；因沿同一直線運動，而又 $v_1>v_2$，故將發生碰撞；在碰撞後兩物體的速度令各爲 $v_1'$ 與 $v_2'$。由動量不滅原理，可知

$$M_1v_1+M_2v_2=M_1v_1'+M_2v_2'. \qquad (a)$$

僅賴上式，不能計算 $v_1'$ 與 $v_2'$，故必須明瞭物體的若干性質。

例如，設物體的材料絕無彈性，如油灰，如麵糰，則自碰撞開始，即將發生塑性變形 (Plastic deformation)。因 $M_1$ 的作用力，$M_2$ 的速度逐漸增加；而因 $M_2$ 對 $M_1$ 的反作用力，$M_1$ 的速度則逐漸減低。迨兩物體的速度相等，變形即不再增加；因物體絕無彈性，物體絕無恢復原狀的趨勢；故此後兩物體即以同一線速沿同一方向繼續運動，$v_1'=v_2'$。如以 $v$ 代表兩物體碰撞後的共同速度，則由($a$)式可得

$$M_1v_1+M_2v_2=(M_1+M_2)v$$

於是

$$v=\frac{M_1v_1+M_2v_2}{M_1+M_2}. \qquad (1a)$$

---

註 以球擊門，速度與門成垂直，則球與門的碰撞必爲正撞；但除球的速度指向門的質心外，均非對心撞．兩圓球的速度互成某一角度(不等於 0° 或 180°)，如表面極爲光滑，則所發生的碰撞，必爲對心斜撞．Central 與 Direct 二字，各力學書籍中的解釋，頗不一致、但僅須在某一問題中，用同一解釋，即不致發生錯誤．

又如另一極端情形，假定兩物體的材料爲完全彈性的（球軸承中的鋼珠，與此情形頗相接近），則運動系的動能，在碰撞中並無損失。故除表示動量不減的$(a)$式外，又可得一能量方程式如下：

$$\frac{1}{2}M_1v_1^2+\frac{1}{2}M_2v_2^2=\frac{1}{2}M_1(v_1')^2+\frac{1}{2}M_2(v_2')^2. \qquad (b)$$

$(a)$式與$(b)$式又可寫爲

$$M_1(v_1-v_1')=M_2(v_2'-v_2), \qquad (c)$$

$$M_1[v_1^2-(v_1')^2]=M_2[(v_2')^2-v_2^2]. \qquad (d)$$

$(d)$式除以$(c)$式得

$$v_1+v_1'=v_2'+v_2,$$

或

$$v_1'-v_2'=-(v_1-v_2). \qquad (2)$$

即在碰撞前後，兩物體的相對速度，大小不變，而指向則相反。由$(c)$式與(2)式，可得兩物體在回彈後的絕對速度如下：

$$\left.\begin{aligned} v_1' &= \frac{2M_2v_2+(M_1-M_2)v_1}{M_1+M_2} \\ v_2' &= \frac{2M_1v_1-(M_1-M_2)v_2}{M_1+M_2} \end{aligned}\right\}, \qquad (1b)$$

試將上式應用於較簡單的特例。假定$M_1=M_2$，而$v_2=0$。代入上式可得$v_1'=0$，$v_2'=v_1$。理由如下。物體1以速度$v_1$向靜止的物體2接近時，碰撞的時間雖極短暫，仍可分爲兩個時期：自碰撞開始後，物體1的速度逐漸減低，物體2的速度逐漸增高，兩物體的變形繼續增加，直至相對速度等於零爲止；此一階段名爲變形時期，在此時期中彈性物體的碰撞，與非彈性的完全相同，兩物體的共同速度爲$v=v_1/2$。但因物體的彈性，在接觸點附近的局部變形並不能繼續保持，兩物體均將恢復原狀，故接觸面上繼續有力作用，使物體1的速度繼續減低，物體2的速度繼續增高，直至兩物體的變形完全消除爲止；此一階段名爲恢復時期（Period of restitution）。完全彈性的物體，變形時與恢復時力與變形的曲線完全相同，故物體2的速度在變形時期由零增加至$\frac{1}{2}v_1$，在恢復時期繼續由$\frac{1}{2}v_1$增加至$v_1$，而物體1的速度則最後等於零。讀者至

此，應可明瞭(2)式中負號的意義。

再取另一簡單的情形爲例。假定物體2的質量 $M_2$ 爲無窮大，而速度 $v_2$ 則等於零。例如鋼珠垂直下落至靜止於地面的水平鋼鈑上。鋼鈑的速度在撞擊後仍等於零，即 $v_2'=v_2=0$，而鋼珠到達鋼鈑時的速度如爲 $v_1$，則回彈的速度由(1b)式知爲

$$v_1'=-v_1.$$

實際情形則物體並非完全彈性的，在變形中必有一部份動能損失，變爲熱能。碰撞後的相對速度將比碰撞前的較小。故(2)式應改爲

$$v_1'-v_2'=-e(v_1-v_2), \qquad (2')$$

式中的 $e$ 是小於1的比值，名爲材料的恢復係數（Coefficient of restitution）。已知此係數，則由(2′)與(c)式，可寫出求兩物體碰撞後的速度的方程式如下：

$$\left.\begin{aligned} v_1'&=\frac{M_2v_2(1+e)+(M_1-eM_2)v_1}{M_1+M_2}\\ v_2'&=\frac{M_1v_1(1+e)-(eM_1-M_2)v_2}{M_1+M_2}\end{aligned}\right\} \qquad (1c)$$

**151. 碰撞中動能的損失**　質量 $M_1$ 與 $M_2$ 的兩物體，因速度在碰撞中由 $v_1$ 與 $v_2$ 改變爲 $v_1'$ 與 $v_2'$，故動能的損失爲

$$\Delta E_K=\left[\tfrac{1}{2}M_1v_1^2+\tfrac{1}{2}M_2v_2^2\right]-\left[\tfrac{1}{2}M_1(v_1')^2+\tfrac{1}{2}M_2(v_2')^2\right]. \qquad (e)$$

如爲對心正撞，則可用(1c)式代入上式，得

$$\Delta E_K=\frac{1-e^2}{2}\,\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(v_1-v_2)^2. \qquad (3)$$

但用代數的代替與整理，求得(3)式，手續頗爲麻煩。同樣結果，可用較簡單的方法，求出如下：在碰撞中，動能的損失，並非隨 $v_1$ 或 $v_2$ 單獨決定，而隨 $v_1$ 與 $v_2$ 之差所決定。如將碰撞前的速度由 $v_1$ 與 $v_2$ 改爲 $V_1$ 與 $V_2$，而滿足下列情形：

$$V_1-V_2=v_1-v_2, \qquad (f)$$

則碰撞的強度與動能的損失將完全不變。 為簡單起見，假定運動系的質心靜止不動，卽

$$M_1V_1+M_2V_2=0. \qquad (g)$$

在碰撞前兩物體相向運動，而在碰撞後，則將各沿與原來相反的方向，向外運動，速度的大小各乘以 $e$。由$(f)$與$(g)$二條件，可得

$$V_1=\frac{M_2}{M_1+M_2}(v_1-v_2),\ 與\ -V_2=\frac{M_1}{M_1+M_2}(v_1-v_2).$$

物體 $M_1$ 的動能，原為 $\frac{1}{2}M_1V_1^2$，碰撞後減至 $\frac{1}{2}M_1(eV_1)^2$。 物體 $M_2$ 的情形，亦與 $M_1$ 類似。故

$$\Delta E_K=\frac{1-e^2}{2}(M_1V_1^2+M_2V_2^2)$$

$$=\frac{1-e^2}{2}\left[M_1\left(\frac{M_2}{M_1+M_2}\right)^2+M_2\left(\frac{M_1}{M_1+M_2}\right)^2\right](v_1-v_2)^2$$

$$=\frac{1-e^2}{2}\ \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}(v_1-v_2)^2.$$

上式卽與(3)式完全相同。

打鐵時，可假定錘的質量為 $M_1$，鍛件與砧的質量為 $M_2$，目的在使錘的動能儘量消耗於鍛件的變形。如鍛件溫度頗高，則恢復係數甚小，可視為等於零、於是由(3)式知，在錘擊時動能的消耗為

$$\frac{1}{2}\ \frac{M_1M_2}{M_1+M_2}v_1^2=\frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{1}{2}M_1v_1^2,$$

卽為錘原有動能的 $M_2/(M_1+M_2)$ 倍。故鍛件與砧的質量愈大，動能的利用愈近於全部。

打樁時，目的在使樁錘的動能，傳遞至木樁，使抵抗泥土的摩阻力而鑽深若干吋。故樁錘的質量 $M_2$ 最好大於木樁的質量 $M_1$，同時恢復係數 $e$ 則愈大愈好。 讀者不難用(1c)式自行證明：設 $e=1$，則木樁所得的動能，將為 $e=0$ 的情形下所得者的 4 倍。

可見我們的祖先，由經驗與試湊所得的工具尺寸，用現在的理論或

公式去判斷,知其極爲合理適當.

## 例　題

657. 木椿重 $W_2$. 重 $W_1$ 的椿鎚,自高出椿頭 $h$ 的位置,垂直下落,圖 516. 每次使木椿鑽深 $\delta$. 如鎚與椿的材料絕無彈性,即椿鎚打到椿頭後並不回跳,試求泥土對於木椿的摩阻力的平均值.

解　因椿錘自高度 $h$ 自由降落,故在碰撞開始時,其速度爲 $v_1=\sqrt{2gh}$,而木椿的初速則爲 $v_2=0$. 碰撞開始後,鎚速逐漸減低,而椿速逐漸增加,直至兩者速度相等爲止. 此共同速度由(1a)式知爲

$$v=\frac{W_1\sqrt{2gh}}{W_1+W_2}.$$

因碰撞所歷時間非常短暫,故可假定在兩者達到共同速度前,並未向下運動. 兩物體此後由速度 $v$ 漸趨停止,原有動能完全消耗於對抗摩阻力所做的功. 同時物體下降 $\delta$ 中,重力亦做有正功 $(W_1+W_2)\delta$. 故

$$\frac{W_1+W_2}{2g}\frac{W_1^2\cdot 2gh}{(W_1+W_2)^2}+(W_1+W_2)\delta=R\delta.$$

重力$(W_1+W_2)$與摩阻力 $R$ 比較, 普通極爲微小,故上式左邊第二項可略去不計,得

$$R=\frac{W_1^2h}{(W_1+W_2)\delta}.$$

上式亦可寫爲

$$R\delta=W_1h\left(\frac{W_1}{W_1+W_2}\right),$$

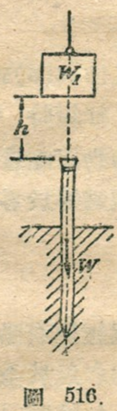


圖　516.

可見有用的功與所費的能量,兩者間的比例爲 $W_1/(W_1+W_2)$, 損失的部份爲

$$1-\frac{W_1}{W_1+W_2}=\frac{W_2}{W_1+W_2}.$$

椿鎚的重量 $W_1$ 愈大,則能量的損失愈小.