LEONHARDI EULERI
OPERA OMNIA

SUB AUSPICIIS
SOCIETATIS SCIENTIARUM NATURALIUM
HELVETICAE

EDENDA CURAVERUNT

FERDINAND RUDIO
ADOLF KRAZER PAUL STÄCKEL

SERIES PRIMA
OPERA MATHEMATICA
VOLUMEN PRIMUM

LIPSIAE ET BEROLINI
TYPIS ET IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI
MCMXI

LEONHARD EULER

VOLLSTÄNDIGE ANLEITUNG ZUR ALGEBRA

MIT DEN ZUSÄTZEN VON JOSEPH LOUIS LAGRANGE

HERAUSGEGEBEN VON

HEINRICH WEBER

MIT EINEM BILDE VON EULER NACH DEM STICHE VON MECHEL
EINEM VORWORT ZUR EULERAUSGABE
UND DER LOBREDE VON NICOLAUS FUSS

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1911

INHALTSVERZEICHNIS

Léonhard Euler.

VORWORT

ZUR GESAMTAUSGABE DER WERKE VON

LEONHARD EULER

NICOLAUS FUSS erzählt in seiner *Lobrede auf Herrn LEONHARD EULER*, dieser habe sich mehr als einmal anheischig gemacht, der Petersburger Akademie „so viel Abhandlungen zu liefern, daß sie für zwanzig Jahre nach seinem Tode hinreichen sollten“. Es ist bekannt, daß EULER sich selbst weit überboten hat: Seine hinterlassenen Schriften haben nicht nur ausgereicht, um kurz nach seinem Tode drei stattliche Quartbände zu füllen, sie haben auch, nicht zwanzig, sondern sogar mehr als vierzig Jahre lang die Denkschriften der Petersburger Akademie geziert, ohne damit erschöpft gewesen zu sein. Ja, selbst heute, fast 130 Jahre nach EULERS Tode, kann der wissenschaftliche Nachlaß des großen Mathematikers, auch wenn man von den unveröffentlichten Briefen absieht, noch nicht als völlig aufgearbeitet betrachtet werden.

Aber auch in einem anderen Sinne, als in dem der Drucklegung, muß sein Lebenswerk als noch bei weitem nicht erschöpft bezeichnet werden. Die beispiellose Produktivität EULERS und der Umstand, daß seine Schriften so zerstreut und vielfach auch so unzugänglich sind, daß es dem Einzelnen bisher unmöglich war, einen vollständigen Einblick in diese gewaltige, ungeordnete Masse zu gewinnen, mußten es mit sich bringen, daß viele seiner Arbeiten gar nicht in dem Maße in die Entwickelung der Wissenschaft eingegriffen haben, wie sie es verdient hätten. Ist es doch selbst in unseren Tagen keine so seltene Erscheinung, daß Entdeckungen als neu veröffentlicht werden, die vor mehr als einem Jahrhundert schon von EULER gemacht worden sind. Und man braucht nicht gerade an die Geschichte des Reziprozitätsgesetzes der quadratischen Reste oder an die Geschichte der RIEMANNSCHEN Zetafunktion zu denken, um zu erkennen, wieviele Jahrzehnte es oft gedauert hat, bis grundlegende Gedanken EULERS ihre wahre Wirkung geäußert und bis sie den ihnen zukommenden Platz in der Wissenschaft gefunden haben. Und dies gilt nicht nur für das Gebiet der reinen Mathematik, sondern auch für das ihrer Anwendungen, dem EULER einen so großen Teil seiner Kraft gewidmet hat.

Wer es nicht aus eigener Anschauung wüßte, dem könnten es die zahllosen Kundgebungen und freudigen Zustimmungen, die der Plan einer Eulerausgabe in den letzten drei Jahren hervorgerufen hat, sagen, daß von diesem Werke auch heute noch ein wahrer Gewinn für die Wissenschaft zu erwarten ist und daß man es keineswegs etwa nur als ein wohlverdientes Denkmal für den großen Forscher zu betrachten hat. Wenn daher die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft die Herausgabe der gesamten Werke LEONHARD EULERS beschlossen hat, „überzeugt, damit der ganzen wissenschaftlichen Welt einen Dienst zu erweisen“, so wird sie sich in dieser Überzeugung nicht getäuscht sehen.

*   *

*

Das von G. ENESTRÖM bearbeitete *Verzeichnis der Schriften LEONHARD EULERS* umfaßt 865 Nummern. Von diesen waren zu Anfang des Jahres 1783 erst 530 gedruckt; am Ende des Jahres waren es 562, mit Einschluß der 13 Abhandlungen, die unter dem Titel *Opuscula analytica*, Tomus primus, als selbständiger Band erschienen waren. Die Vorbereitungen hierzu hatte EULER noch selber getroffen. Der zweite, 15 Abhandlungen umfassende Band der *Opuscula analytica* wurde 1785 herausgegeben. Sodann erschien 1794, auf Kosten der Petersburger Akademie, ein Sammelband unter dem Titel *Institutionum calculi integralis volumen quartum*, der neben 14 schon früher veröffentlichten Abhandlungen 14 noch ungedruckte enthielt. Dieses sind die drei Quartbände, von denen ich schon gesprochen habe. Außerdem erschienen nun von 1783 an in ununterbrochener Folge, wie früher schon in den Commentarii (von ihrem 2. Bande an), den Novi Commentarii und den Acta der Petersburger Akademie, die hinterlassenen Abhandlungen EULERS in den Acta, den Nova Acta und den Mémoires bis zum Jahre 1826. Am Ende dieses Jahres war die Zahl der veröffentlichten Schriften auf 771 gestiegen, aber noch befanden sich 14 Abhandlungen in den Archiven der Akademie. Da diese in dem genannten Jahre beschlossen hatte, mit dem neuen Jahrhundert ihres Bestehens eine neue Serie ihrer Denkschriften zu beginnen, so wurde zugleich bestimmt, daß alle noch in den Archiven befindlichen postumen Abhandlungen, deren Publikation zu Lebzeiten der Verfasser beschlossen worden war, in einem besonderen Bande vereinigt und als Supplement zu der abgeschlossenen Serie herausgegeben werden sollten. Dieser Band, der elfte der *Mémoires*, erschien 1830. Neben den 14 Abhandlungen von EULER enthielt er noch 4 von FR. TH. SCHUBERT (1758—1825) und 13 von N. FUSS (1755—1825), EULERS treuem Mitarbeiter.

Das Riesenvermächtnis schien nun endlich, nach 47 Jahren, bewältigt zu sein. Aber man hatte sich getäuscht. Im Jahre 1844 fand PAUL HEINRICH v. FUSS (1798—1855), Sohn von NICOLAUS FUSS und Urenkel von EULER, teils in den Archiven der Petersburger Akademie, teils unter den im Familienbesitz befindlichen Papieren, eine ganze Reihe von Manuskripten, die man für bereits abgedruckt gehalten und daher nicht weiter beachtet hatte, die sich aber bei näherer Prüfung als noch unveröffentlichte, von EULERS eigner Hand herrührende und sorgfältig ausgearbeitete Abhandlungen erwiesen!*)

Man kann sich denken, in welch freudige Erregung FUSS durch diese Entdeckung geriet. „Vir ille ex longo 60 annorum somno resurrexisse videbatur", schrieb er in der genannten Vorrede. Nun schien der geeignete Moment gekommen zu sein, um den lange gehegten Plan zu verwirklichen: Dem großen Mathematiker das Denkmal zu errichten, das die wissenschaftliche Welt ihm schuldete, und dieses Denkmal sollte sein:

„Editio completa omnium operum Viri illius, quem Academia Petropolitana inde a prima origine quinquaginta amplius annos suum fuisse gloriatur."

Nach dem Plane von FUSS, den auch die Akademie beifällig aufnahm und den sie am 6. April 1844 dem Minister unterbreitete, war das große Werk auf 25 Bände zu je 80 Bogen veranschlagt. FUSS, der sich schon das Jahr zuvor durch die Herausgabe der *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^{ième} siècle* ein so großes Verdienst um die Geschichte der mathematischen Wissenschaften und nicht zum wenigsten um die Geschichte von EULERS Wirken erworben hatte, war die Seele des Unternehmens; er und sein Bruder NICOLAUS (1810—1867) stellten sich ganz in den Dienst der großen Sache.

Die Aussichten schienen um so günstiger zu sein, als P. H. v. FUSS schon einige Jahre zuvor einen mächtigen Bundesgenossen gefunden hatte. Kein geringerer als C. G. J. JACOBI war es, der mit größter Begeisterung und mit der ganzen Autorität, die ihm zustand, für den Plan einer Eulerausgabe eintrat, die Gestaltung des Werkes bis in alle Einzelheiten verfolgte und die wertvollsten Vorschläge ausarbeitete.

---

*) Genaueres über diesen Fund und über die Bestrebungen, die sich damals daran anknüpften, eine Gesamtausgabe von EULERS Werken zu veranstalten, findet man in der Vorrede, die P. H. v. FUSS zu *LEONHARDI EULERI Commentationes arithmeticae collectae*, Petropoli 1849, geschrieben hat, und sodann in dem Buche: *Der Briefwechsel zwischen C. G. J. JACOBI und P. H. von FUSS über die Herausgabe der Werke LEONHARD EULERS, herausgegeben von PAUL STÄCKEL und WILHELM AHRENS*, Leipzig 1908.

Es würde zu weit führen, die Arbeit, die JACOBI der geplanten Euler-ausgabe gewidmet hat, genauer zu schildern. Ich muß mich darauf beschränken, auf den schon erwähnten Briefwechsel mit FUSS hinzuweisen, in dem sie niedergelegt ist. Das aber muß schon an dieser Stelle gesagt und dankbar hervorgehoben werden: Wenn auch damals in den vierziger Jahren die Bemühungen von FUSS und JACOBI nicht zu dem gewünschten Ziele geführt haben, vergebens ist ihre Arbeit nicht gewesen und verloren gegangen ist keiner von den Vorschlägen, die JACOBI seinem Mitarbeiter zur Verfügung gestellt hatte. Nicht nur haben die, die jetzt unter günstigeren Verhältnissen die Eulerausgabe gesichert haben, immer wieder auf das leuchtende Vorbild JACOBIS hinweisen können, seine Anordnungen haben auch bei den jetzt getroffenen Dispositionen über die Einteilung des Werkes die wertvollsten Dienste geleistet, und manche Bände, z. B. der über die elliptischen Integrale, haben nach den Vorschlägen JACOBIS zusammengestellt werden können.

Welche Wendung die Dinge damals in Petersburg nahmen, kann man in der Vorrede von FUSS zu den *Commentationes arithmeticae* oder auch in dem *Briefwechsel* nachlesen. Die Zeiten waren für ein so gewaltiges Unternehmen nicht günstig, und so entschloß sich die Akademie auf den Antrag ihres Ständigen Sekretärs — dieses Amt bekleidete FUSS als Nachfolger seines Vaters seit 1825 —, auf den Wiederabdruck der selbständig erschienenen Werke zu verzichten und sich auf die Herausgabe der Abhandlungen zu beschränken. Nach einem Vorschlage JACOBIS sollten diese *Opera minora collecta* durch die arithmetischen Abhandlungen eröffnet werden, und so erschienen denn 1849, als *LEONHARDI EULERI Opera minora collecta I*, die zwei großen Quartbände *Commentationes arithmeticae collectae,* herausgegeben von den beiden Urenkeln EULERS, PAUL HEINRICH und NICOLAUS FUSS. In diese Bände waren auch die zahlentheoretischen Abhandlungen der Inedita von 1844 aufgenommen worden.

Zwei Jahre später starb JACOBI — für die Eulerausgabe der schwerste Schlag, der sie treffen konnte. Denn nun hatten die Petersburger Mathematiker ihren einflußreichsten, um nicht zu sagen einzigen, Bundesgenossen verloren, und es fand sich niemand mehr, der sie mit der Begeisterung und der Tatkraft eines JACOBI unterstützt hätte. Auf sich selbst angewiesen, sah sich die Petersburger Akademie nicht in der Lage, das Unternehmen, das mit so guten Aussichten begonnen hatte, durchzuführen. So fiel der stolze Plan von 1844 dahin, und die Akademie mußte sich schließlich damit begnügen, die Herausgabe der *Opera postuma mathematica et physica anno 1844 detecta* zu beschließen.

Aber es dauerte noch bis 1862, bis die beiden Bände dieser *Opera postuma* erschienen. Der Hauptgrund für die Verzögerung war, daß von den beiden Herausgebern, PAUL HEINRICH und NICOLAUS FUSS, der ältere, der sich so große Verdienste um die Veröffentlichung EULERSCHER Schriften erworben hatte, im Jahre 1855, als der erste Band gerade hätte erscheinen können, allzu früh seinem Wirkungskreise durch den Tod entrissen wurde.

Es war daher nur ein Akt der Pietät und der Gerechtigkeit, daß NICOLAUS den zweiten Band mit dem Bildnis des Bruders schmückte. Den ersten Band ziert ein Bild EULERS, auf das FUSS in der Vorrede mit Dank und mit freudiger Genugtuung hinweist: Für die bevorstehende Publikation hatte die Stadt Basel schon 1851 das in ihrem Besitze befindliche, 1756 von dem Basler Maler EMANUEL HANDMANN (1718—1781) gemalte Ölbild EULERS durch FRIEDRICH WEBER (1813—1882) in Stahl stechen lassen und die Abdrücke mitsamt der Platte der Petersburger Akademie zum Geschenk gemacht.*) „Ita hoc opus quasi monumentum exstat communi duarum splendidarum urbium opera EULERI memoriae dedicatum, qui utriusque urbis decus fuit et gloria", schreibt NICOLAUS FUSS.

*) Die Petersburger Akademie hat die gut erhaltene Platte mit großer Liberalität der Eulerredaktion zur Verfügung gestellt. Leider ist das Format zu groß, als daß Originalabdrücke in die Eulerausgabe aufgenommen werden könnten, und so werden wir uns mit einer Reproduktion des WEBERSCHEN Stiches begnügen müssen. Sie soll der *Mechanica* beigegeben werden.

Außer dieser WEBERSCHEN Platte hat die Akademie noch eine zweite Stahlplatte, die sich auch durch große Schönheit auszeichnet und deren Format glücklicherweise die Aufnahme von Originalabdrücken zuläßt, nach Zürich geschickt. Es ist die Platte, von der das Titelbild zum ersten Bande der *Correspondance mathématique et physique* abgedruckt worden ist. Sie ist mir von der Akademie als „gravé par un inconnu d'après l'original de Mr. KÜTTNER" übergeben worden. FUSS schreibt darüber in der Vorrede zur *Correspondance*: „Le portrait d'EULER est une copie parfaitement fidèle de celui qui fut peint par KÜTTNER et gravé à Mitau par DARBES, en 1780. J'ai donné la préférence à ce portrait parce que, selon le témoignage de mon père, il est le plus ressemblant de tous ceux qui existent. C'est un portrait de vieillard, il est vrai; mais, comme on le verra par la suite, il le représente à l'époque de sa plus grande fécondité." FUSS hat hier die Namen KÜTTNER und DARBES verwechselt: dieser war der Maler, jener der Stecher. Das Originalgemälde von DARBES befindet sich jetzt, nach einer freundlichen Mitteilung von Herrn H. FEHR, im Musée des Beaux-Arts zu Genf. Nach diesem hat KÜTTNER 1780 den bekannten Stich hergestellt. Unsere Platte, „gravé par un inconnu", scheint nicht nach dem Original von DARBES, sondern nach dem KÜTTNERSCHEN Stiche gestochen zu sein.

Die Schilderung der Verdienste, die sich der ältere NICOLAUS FUSS und seine Söhne PAUL HEINRICH und NICOLAUS um die Veröffentlichung und um die Benutzbarkeit der EULERSCHEN Schriften erworben haben, wäre sehr unvollständig, wollte ich nicht auch noch die Verzeichnisse dieser Schriften erwähnen, die wir ihnen verdanken. Das erste stammt aus dem Jahre 1783*) und ist mit dem *Éloge* abgedruckt, den NICOLAUS FUSS am 23. Oktober 1783 in der Petersburger Akademie auf EULER gehalten hat. Diese Liste (A) enthält zunächst die selbständig erschienenen Werke in chronologischer Folge, sodann die Abhandlungen, geordnet nach Zeitschriften und innerhalb dieser wieder chronologisch, und endlich die Titel von 208 noch ungedruckten Abhandlungen, die der Akademie bereits vorgelegt worden waren, geordnet in der entsprechenden Reihenfolge.

Umfaßte diese Liste (A) noch keine 700 Nummern, so enthielt die Liste (B), die wir dem Sohne PAUL HEINRICH verdanken, bereits deren 756. Sie ist nach Materien geordnet und findet sich abgedruckt im ersten Bande der *Correspondance* (1843) und sodann auch am Schlusse des wiederholt genannten *Briefwechsels*, dessen Herausgeber P. STÄCKEL und W. AHRENS in der glücklichen Lage gewesen waren, das Handexemplar von PAUL HEINRICH benutzen und diesem eine Reihe von Zusätzen und Verbesserungen, die namentlich auf JACOBI zurückgehen, entnehmen zu können. Dieser revidierte und von den Herausgebern durch wertvolle Ergänzungen und Anmerkungen vervollständigte Wiederabdruck enthält überdies die Berichtigungen und Zusätze, die sich aus den Veröffentlichungen von FR. ENGEL, J. G. HAGEN, FELIX MÜLLER und G. VALENTIN ergaben. Unter den in der Liste (B) verzeichneten Manuskripten befindet sich auch bereits die von FUSS gerade damals wieder aufgefundene *Astronomia mechanica* — „Manuscrit in 4[to] avec quatre planches, d'une écriture très serrée de la propre main d'EULER, 91 feuillets de texte", heißt es in der Liste. Die Entdeckung dieser Schrift war es gewesen, die FUSS veranlaßt

*) Schon 1780, also noch zu Lebzeiten EULERS, hatte J. W. HERZOG in seiner *Adumbratio eruditorum Basiliensium* eine Liste der damals gedruckten Schriften EULERS veröffentlicht. Nach dem Verzeichnis von N. FUSS erschien 1786 das von H. J. HOLZHALB in dem Supplement zu dem bekannten schweizerischen Lexikon von H. J. LEU. Ein weiteres Verzeichnis findet sich in der von F. SPERONI 1787 herausgegebenen zweiten Auflage der *Institutiones calculi differentialis*, p. 815—844, unter dem Titel, „Index absolutissimus omnium EULERI lucubrationum, tum editarum, tum ineditarum". Wieder ein anderes hat J. G. MEUSEL 1804 in seinem *Lexikon der vom Jahre 1750 bis 1800 verstorbenen teutschen Schriftsteller* mitgeteilt. (Siehe übrigens die Anmerkung p. XL.)

hatte, die in den Archiven der Akademie und im Familienbesitze befindlichen Manuskripte einer gründlichen Durchsicht zu unterziehen, und die ihn dann zu dem wichtigen Funde von 1844 geführt hatte. Außer der *Astronomia mechanica* weist diese Liste (B) von 1843 nur noch wenige Inedita auf; die 208 der Liste (A) waren ja inzwischen fast alle gedruckt worden. Nur 5 waren davon noch unediert geblieben und von 9 weiteren aus der Liste (A) heißt es, daß sie sich weder in den Archiven der Akademie noch in irgend einer nach dem Tode EULERS publizierten Sammlung von Abhandlungen gefunden hätten.*)

Noch bevor JACOBI und FUSS wegen der Herausgabe von EULERS Werken in Verbindung getreten waren, hatte sich ein Unternehmen abgewickelt, das gewiß in der besten Absicht unternommen worden war, das aber heute nur noch als Kuriosum erwähnt zu werden verdient. Ich meine die „belgische Eulerausgabe", von der 1839 unter dem Titel *Œuvres complètes en français de L. EULER* fünf Bände in Brüssel erschienen waren, die dann aber nicht fortgesetzt wurde. Die Gründe, warum dieses Unternehmen, das einen übersetzten und verbesserten EULER anstrebte, scheitern mußte — „on ne touche pas à l'œuvre d'un savant tel qu'EULER!" — liegen auf der Hand, und so kann ich mich darauf beschränken, auf das zu verweisen. was H. BOSMANS über diese verunglückte Eulerausgabe mitgeteilt hat.**) Freilich möchte ich nicht unterlassen zu sagen, daß die Erfahrungen, die man damals gesammelt hat, doch nicht ganz verloren gegangen sind und daß sie bei unseren Bemühungen, die Eulerausgabe zu sichern, gute Dienste geleistet haben.

Mit dem Erscheinen der *Opera postuma*, 1862, schien das Schicksal der Eulerausgabe besiegelt zu sein. In der Tat dauerte es nun fast ein halbes Jahrhundert, bis wieder ein ernsthafter Versuch gemacht wurde, endlich „die Schuld zu tilgen, die schon längst hätte getilgt sein sollen!"

---

*) Siehe hierüber die verbesserte und vervollständigte Liste (B) am Schlusse des *Briefwechsels*. Die dort hinzugefügten Nachträge enthalten insbesondere das Verzeichnis der 61 von P. H. v. FUSS 1844 aufgefundenen Manuskripte, das zuerst in der Vorrede zu den *Commentationes arithmeticae* abgedruckt worden war.

**) H. BOSMANS, *Sur une tentative d'édition des œuvres complètes de L. EULER faite à Bruxelles en 1839*, Louvain 1909. Siehe auch die Note desselben Verfassers in Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, p. 177—178.

Immerhin hat in dieser Zeit die Idee doch nicht gänzlich geruht, und es hat nicht an Erscheinungen gefehlt, die das Bewußtsein für das zu Erstrebende wachgehalten haben.

Dazu sind zunächst zu rechnen Publikationen EULERSCHER Schriften, wobei es sich im wesentlichen um neue Auflagen, Übersetzungen, Wiederabdrucke*), Résumés u. a., dann aber namentlich um Briefe EULERS handelt. Man findet darüber alles Erforderliche in ENESTRÖMS *Verzeichnis*.

Sodann darf erinnert werden an die zwar einfache aber würdige Gedächtnisfeier, die die Basler Naturforschende Gesellschaft hundert Jahre nach EULERS Tode zu Ehren ihres großen Mitbürgers veranstaltet hat. Nachdem sie schon das Jahr zuvor in gleicher Weise das Andenken DANIEL BERNOULLIS geehrt hatte, „veranstaltete sie am 17. November 1883, der Ferien wegen etwas verspätet, im großen Saale des Bernoullianums eine öffentliche Feier zur Erinnerung an die am 18. September 1783 zum Abschluß gelangte Wirksamkeit LEONHARD EULERS. Nachdem der Präsident, Herr Prof. VÖCHTING, die zahlreich anwesenden Gäste, unter ihnen besonders die Herren Professor RUD. WOLF aus Zürich, Direktor CHERBULIEZ aus Mühlhausen, Prof. STICKELBERGER aus Freiburg i. Br. und Dr. RUDIO aus Zürich willkommen geheißen, hielten die Herren Proff. FR. BURCKHARDT, H. KINKELIN und HAGENBACH-BISCHOFF die nachfolgenden Vorträge über EULERS Leben, über seine mathematischen Arbeiten und über seine Verdienste um Physik und Astronomie.“ Die Vorträge sind in einer besonderen Schrift *Die Basler Mathematiker DANIEL BERNOULLI und LEONHARD EULER Hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Naturforschenden Gesellschaft*, Basel 1884, erschienen.**) Ich erwähne diese Vorträge und auch den, den ich selbst, im Anschluß an die Basler Feier, am 6. Dezember 1883, im Zürcher Rathaus gehalten habe, weil durch sie der Boden für die spätere Propaganda vorbereitet wurde und weil sie uns bei dieser Propaganda selbst gute Dienste geleistet haben. Von den Fachgelehrten abgesehen, war ja naturgemäß EULER in seinem Vaterlande mehr oder weniger unbekannt geblieben. Das war er aber nicht mehr, als wir uns darum bemühten, die weitesten Kreise für eine Herausgabe seiner Werke zu interessieren.

---

*) Siehe namentlich P. STÄCKEL, *Eine vergessene Abhandlung LEONHARD EULERS über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, p. 37—60.

**) Als Anhang zu Teil VII der Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft zu Basel.

Mit besonderer Anerkennung darf sodann der *Index operum Leonhardi Euleri* genannt werden, den J. G. Hagen 1896 in Berlin veröffentlicht hat. Wie die Liste (B) von P. H. v. Fuss ist auch der Hagensche *Index* nach Materien geordnet und zwar sind die sämtlichen Schriften Eulers auf vier Serien verteilt: Opera Mathematica, Opera Physica, Opera Astronomica und Opera Varii Argumenti. Das Verzeichnis umfaßt 796 Nummern, gegenüber 756 der Liste (B) von Fuss, und gibt zum Schluß eine Tabelle, die zu jeder Nummer dieser Liste (B) die entsprechende des neuen *Index* liefert. Daß der *Index* von Hagen keineswegs allen Anforderungen genügt, die man an eine Bibliographie der Arbeiten Eulers stellen kann, ist von Fr. Engel*) und G. Valentin**) in ausführlichen Besprechungen auseinandergesetzt worden. Trotzdem aber muß die Arbeit von Hagen als eine sehr verdienstvolle Leistung bezeichnet werden. Die bisher vorhandenen Verzeichnisse waren Bestandteile größerer Werke und schon allein darum nicht jedem zugänglich. Dagegen bot nun der neue *Index* in handlicher Form eine allgemein zugängliche Zusammenstellung, die immerhin für viele Zwecke ausreichte, vor allem aber eine wichtige Mission erfüllte: Denn jetzt erst offenbarte sich in weitesten Kreisen, was für einen unermeßlichen Schatz Euler in seinen Schriften hinterlassen hatte, und der Wunsch, diese Schriften in einer Gesamtausgabe vereinigt zu sehen, wurde immer stärker und allgemeiner. Hagen sagt denn auch ausdrücklich in der Vorrede, daß er den *Index* nicht nur in der Absicht herausgebe, das Studium von Eulers Werken zu erleichtern, sondern auch in der Hoffnung, dadurch einer Gesamtausgabe dieser Werke den Weg zu bahnen. Und darin hat sich der Verfasser des *Index* nicht getäuscht.

Unter Hinweis auf den *Index* von Hagen und den darin von neuem ausgesprochenen Wunsch nach einer Gesamtausgabe von Eulers Schriften durfte ich auf dem ersten Internationalen Mathematikerkongreß, Zürich 1897, in dem Vortrag *Über die Aufgaben und die Organisation internationaler mathematischer Kongresse* ausdrücklich proklamieren: „Viribus unitis! sei unsere Losung. Mit vereinten Kräften wird es möglich sein, Aufgaben zu lösen, die wegen mangelnder Vereinigung bisher nicht einmal in Angriff genommen werden konnten. Soll ich ein Beispiel geben, so wollen Sie es mir auf Schweizerboden zugute halten, wenn ich etwa an eine Herausgabe der Werke Leonhard Eulers denke, eine Ehrenpflicht, die von der mathematischen Welt bis jetzt nicht hat erfüllt werden können."

---

*) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 42, 1897; Hist.-litt. Abt., p. 200—203.

**) Biblioth. Mathem. 12_2, 1898, p. 41—49.

Um mich nicht mit weiteren Kundgebungen, die in den letzten Jahrzehnten zugunsten einer Gesamtausgabe von EULERS Schriften veranstaltet worden sind, aufzuhalten, wende ich mich sogleich zum Jahre 1907, dem Geburtsjahre unserer Eulerausgabe.

Das Jahr begann freilich nicht unter günstigen Auspizien. Im Hinblick auf den bevorstehenden 200jährigen Geburtstag EULERS hatte die Petersburger Akademie schon einige Jahre zuvor neuerdings den Plan gefaßt, eine Gesamtausgabe von EULERS Werken ins Leben zu rufen, und sie hatte sich zu diesem Zwecke mit der Berliner Akademie in Verbindung gesetzt. Man hoffte in Petersburg, bis zur Geburtstagsfeier die ersten mathematischen Bände herausgeben zu können. Die Berliner Akademie war bereit, sich an dem Unternehmen zu beteiligen und auf 15—20 Jahre hinaus einen erheblichen Teil ihrer laufenden Mittel darauf zu verwenden. Darüber hinaus hätte es freilich noch eines außerordentlichen Zuschusses aus Staatsmitteln bedurft — dieser aber wurde von dem vorgeordneten Ministerium abgelehnt. Andererseits erlaubte es in Petersburg die Ungunst der Zeitverhältnisse nicht, den Beginn der Herausgabe an die Zweihundertjahrfeier anzuknüpfen. So geriet das Unternehmen ins Stocken, und schließlich sah sich die Berliner Akademie veranlaßt, mit Schreiben vom 7. Februar 1907 die Beteiligung an dem Unternehmen abzulehnen.*) Damit war auch dieser Plan wieder gescheitert.

Aber trotz dieses Mißerfolges sollte noch in demselben Jahre der Grund zur Eulerausgabe gelegt werden. Das Jahr, in dem der zweihundertste Geburtstag EULERS von der ganzen wissenschaftlichen Welt festlich begangen wurde, durfte nicht anders zu Ende gehen!

Es ist natürlich nicht möglich, alle die Huldigungen aufzuzählen, die dem Andenken EULERS im Jubiläumsjahre 1907 dargebracht wurden — hat doch dieses eine Jahr eine ganze Eulerlitteratur gezeitigt —, aber eine Erwähnung des akademischen Festaktes, den die Vaterstadt EULERS zu Ehren ihres großen Sohnes veranstaltet hat, darf in einem Überblick über die Geschichte der Eulerausgabe nicht fehlen.**) Der Festakt fand am 29. April in der Martinskirche statt und nahm einen weihevollen Verlauf. Was der Feier einen be-

*) Das Schreiben ist abgedruckt im Bulletin de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg, 1908, p. 4—5.

**) Siehe darüber die Schrift *Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundertsten Geburtstages* LEONHARD EULERS, Basel 1907.

sonderen Glanz verlieh, war der Umstand, daß neben den sämtlichen schweizerischen Hochschulen die Petersburger und die Berliner Akademie durch persönliche Abordnungen vertreten waren. Die Festrede hielt K. VONDERMÜHLL. Nach ihm sprachen die Vertreter der beiden Akademien O. BACKLUND und G. FROBENIUS, der Rektor der Basler Universität JOHN MEIER und zuletzt, als Vertreter der übrigen schweizerischen Hochschulen, F. RUDIO. Da sich diese letzte Ansprache zu einem erneuten Aufruf zugunsten einer Eulerausgabe gestaltete und dieser Aufruf für die weitere Entwickelung der Dinge bestimmend gewesen ist, so lasse ich den Schluß der Rede hier folgen. Er lautet:

Die Schweiz wird der Petersburger und der Berliner Akademie stets das Gefühl der Dankbarkeit bewahren, daß sie unserm EULER, für den das eigene Vaterland zu klein war, ein größeres geboten und ihm die Möglichkeit bereitet haben, in ungetrübter Schaffensfreudigkeit sein großes Lebenswerk zu vollenden. So bedeutet schon der Name EULER allein ein unlösbares, edles Band, das die Schweiz mit diesen hochangesehenen wissenschaftlichen Instituten verbindet. Und doch ist *ein* Wunsch noch unerfüllt geblieben, noch bleibt *eine* große und dankbare Aufgabe zu lösen übrig, die die Schweiz allein wohl nicht zu bewältigen imstande sein wird, so sehnlichst und so laut auch seit Jahren die Lösung verlangt wird: *Eine Gesamtausgabe der Werke* EULERS! Die Erfüllung dieses Wunsches wäre nicht nur ein Akt der Pietät, sondern auch — darin sind alle einig — eine eminent wissenschaftliche Tat. Möge die heutige Feier, möge die Teilnahme der beiden Akademien an dem schweizerischen Feste den Grund legen zu diesem Werke! Wenn dann dereinst durch vereinte Anstrengung dieses Werk vollendet sein wird, dann ist ein Denkmal errichtet, das gewaltiger zur Menschheit reden wird als Erz und Stein, ein Denkmal mit der unsichtbaren und doch weit hinaus leuchtenden Inschrift:

LEONHARDO EULERO
ACADEMIA PETROPOLITANA ACADEMIA BEROLINENSIS
CONFOEDERATIO HELVETICA

Sollte jetzt von der Schweiz aus die Initiative zu einer Eulerausgabe ergriffen werden, so konnte das nur geschehen, wenn sich eine große wissenschaftliche Körperschaft des Unternehmens annahm. Und dazu war allein die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft berufen. Es war daher nur eine Konsequenz der Worte bei der Jubiläumsfeier in Basel, daß ich in der

Jahresversammlung zu Freiburg, am 29. Juli 1907, gemeinschaftlich mit C. F. GEISER, A. KLEINER und CHR. MOSER, den ausführlich begründeten Antrag stellte, es solle eine Kommission gewählt werden mit dem Auftrag, die Mittel und Wege zu studieren, die zu einer Gesamtausgabe der Werke EULERS erforderlich seien. Da die Bestellung einer solchen Kommission in die Kompetenz der Denkschriftenkommission fiel und ihr Präsident, Herr H. SCHINZ, sich sofort zur Entgegennahme des Antrages bereit erklärte, so war der erste Schritt zur Erreichung des Zieles getan.

Am 2. Oktober 1907 wurde die schweizerische Eulerkommission bestellt aus: F. RUDIO-Zürich, als Präsident, H. AMSTEIN-Lausanne, CH. CAILLER-Genf, R. GAUTIER-Genf, C. F. GEISER-Zürich, J. H. GRAF-Bern, E. HAGENBACH-Basel, CHR. MOSER-Bern, A. RIGGENBACH-Basel, K. VONDERMÜHLL-Basel und dem Präsidenten der Denkschriftenkommission, H. SCHINZ-Zürich.

Unter dem Einfluß dieser Vorgänge in der Schweiz hatte inzwischen auch die Deutsche Mathematiker-Vereinigung eine Eulerkommission aus P. STÄCKEL, A. KRAZER und A. PRINGSHEIM bestellt mit dem Auftrage, sich mit der schweizerischen in Verbindung zu setzen. Ich benutze gerne die Gelegenheit, auch an dieser Stelle der deutschen Eulerkommission für ihre so erfolgreiche treue Mitarbeit aufs herzlichste zu danken.

Als die schweizerische Eulerkommission am 24. November 1907 im Bundesrathaus zu Bern zu ihrer ersten Sitzung zusammentrat, konnte ihr Vorsitzender bereits über einen erfreulichen Anfang berichten, denn kurz zuvor war ihm von einem hochherzigen Freunde der Wissenschaft in Zürich, der ungenannt bleiben wollte, die Summe von 12000 Fr. für die Eulerausgabe zugesichert worden.

Im übrigen lag es in der Natur der Sache, daß die Arbeiten der Eulerkommission nur langsam vorwärts rückten und daß es ihr bis zur folgenden Jahresversammlung der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft, die Ende August 1908 in Glarus stattfand, noch nicht gelungen war, alle Bedenken, die sich im Schoße der Gesellschaft angesichts eines so gewaltigen Unternehmens geltend machten, zu zerstreuen. Da die Glarner Beschlüsse in den beiden Aufrufen enthalten sind, die die Naturforschende Gesellschaft im Dezember 1908 und im April 1909 in der Schweiz und im Auslande verbreitet hat, und da überdies der zweite alles wesentliche enthält, was bis zum Frühjahr 1909 zu berichten ist, so möge dieser Aufruf hier folgen:

AUFRUF

zur Unterstützung der von der Schweiz. Naturforschenden Gesellschaft in Aussicht genommenen Herausgabe der

WERKE LEONHARD EULERS

durch Subskriptionen und durch Zeichnung von freiwilligen Beiträgen.

Mehr als 60 Jahre sind verflossen, seit der große Mathematiker JACOBI jenen denkwürdigen Briefwechsel mit P. H. VON FUSS über die Herausgabe der Werke LEONHARD EULERS unterhalten hat, dessen Veröffentlichung wir jetzt den Herren PAUL STÄCKEL und WILHELM AHRENS verdanken. JACOBI hat in diesen Briefen nicht nur mit größter Eindringlichkeit und Begeisterung auf die Wichtigkeit eines solchen Unternehmens hingewiesen — heißt es doch gleich im ersten Briefe: „Es wäre wohl eine große Wohltat, welche die Petersburger Akademie der mathematischen Welt erwiese, und ein Rußland ehrendes und seiner Größe angemessenes Unternehmen, wenn sie die Abhandlungen EULERS nach ihren Gegenständen geordnet herausgäbe" —, er hat auch die Mühe nicht gescheut, in wochenlanger Arbeit selber eine Orientierung über die zweckmäßigste Anordnung des ungeheuren Stoffes auszuarbeiten. „Wenn ein JACOBI, an dessen Zeit, wie FUSS einmal schreibt, die Wissenschaft höhere Ansprüche hatte, sich der EULERSCHEN Werke mit soviel Hingabe, mit soviel Opfern an Zeit und Kraft angenommen hat, so sollten jetzt alle, die es angeht, darin eine Aufforderung sehen, mitzuwirken, daß endlich eine Schuld getilgt werde, die schon längst hätte getilgt sein sollen!"

Der von den Mathematikern seit Jahrzehnten gehegte Traum soll in Erfüllung gehen! Unter dem Eindruck der Bewegung, die sich bei der Feier des 200jährigen Geburtstages EULERS der ganzen mathematischen Welt bemächtigte, unter dem Eindruck namentlich der erhebenden Geburtstagsfeier in *Basel*, hat die *Schweizerische Naturforschende Gesellschaft* in ihrer Freiburger Jahresversammlung vom 29. Juli 1907 eine Eulerkommission niedergesetzt mit dem Auftrage, *die Mittel und Wege zu studieren, die zu einer Gesamtausgabe der Werke EULERS erforderlich sind.*

Dieser Beschluß hat überall freudigen Widerhall gefunden. Auf Anregung des Vorsitzenden der schweizerischen Eulerkommission beschloß die Deutsche Mathematiker-Vereinigung, auch ihrerseits eine Eulerkommission einzusetzen zur tatkräftigen Unterstützung des großen Unternehmens. Und auf Veranlassung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung faßte dann der Internationale Mathematiker-Kongreß in Rom, April 1908, einstimmig folgende Resolution:

„Der vierte Internationale Mathematiker-Kongreß in Rom betrachtet eine Gesamtausgabe der Werke Eulers als ein Unternehmen, das für die reine und angewandte Mathematik von der größten Bedeutung ist. Der Kongreß begrüßt mit Dank die Initiative, welche die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft in dieser Angelegenheit ergriffen hat, und spricht den Wunsch aus, daß das große Unternehmen von dieser Gesellschaft in Gemeinschaft mit den Mathematikern der andern Nationen ausgeführt werde. Der Kongreß bittet die Internationale Assoziation der Akademien und insbesondere die Akademien zu Berlin und Petersburg, deren glorreiches Mitglied Euler gewesen ist, das genannte Unternehmen zu unterstützen."

Unmittelbar nach Annahme dieser Resolution gab der Vertreter der Pariser Akademie, Herr G. Darboux, die Erklärung ab, daß die Internationale Assoziation der Akademien sich vergangenes Jahr in Wien mit der Eulerfrage beschäftigt habe und daß sie ihr überaus sympathisch gegenüberstehe. Aus der Korrespondenz, die inzwischen der Vorsitzende der schweizerischen Eulerkommission mit Herrn Darboux und mit Herrn Lindemann, der in Wien die Eulerfrage angeregt hatte, geführt hat, darf die Hoffnung abgeleitet werden, daß die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft von der Assoziation die vom römischen Kongresse gewünschte Unterstützung finden werde.

In ihrer Jahresversammlung vom 30. August 1908 hat nun die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft den folgenden Antrag ihres Zentral-Komitees zum Beschluß erhoben:

§ 1. *Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft erklärt sich bereit, eine Gesamtausgabe der Werke Leonhard Eulers ins Leben zu rufen, unter der Voraussetzung, daß dieses Unternehmen durch die hohen eidgenössischen und kantonalen Behörden, sowie durch in- und ausländische gelehrte Körperschaften und Freunde der Wissenschaft ausreichend unterstützt werde und daß die zur Durchführung erforderlichen wissenschaftlichen Kräfte ihre Mitwirkung zur Verfügung stellen.*

§ 2. *Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft beauftragt die Eulerkommission in Verbindung mit dem Zentralkomitee mit der Durchführung der Vorarbeiten.*

§ 3. *Nach Beendigung der Vorarbeiten ist ein abermaliger Beschluß der Gesellschaft notwendig, um die Herausgabe in Angriff nehmen zu können.*

Zu § 2 waren, als Wegleitung, noch einige Postulate aufgestellt worden, deren letztes die *„Sammlung eines Fonds aus privaten Beiträgen und von Subskriptionen für den Fall der Herausgabe der Eulerschen Werke"* fordert.

Das Zentralkomitee und die Eulerkommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft haben es für selbstverständlich erachtet, daß die Sammlung freiwilliger Beiträge in dem Vaterlande Eulers zu beginnen habe. Wir freuen uns, mitteilen zu können, daß dieser Gedanke in der ganzen Schweiz eine sympathische Aufnahme gefunden hat. Die Sammlung ist noch nicht abgeschlossen, aber es ist jetzt schon sehr wahrscheinlich daß sie den Betrag von 100,000 Fr. erreichen wird. Wir glauben daher berechtigt zu sein, uns nunmehr auch an das Ausland wenden zu dürfen mit der Bitte um Unterstützung.

Zwei hochangesehene wissenschaftliche Korporationen sind hier schon mit gutem Beispiel vorangegangen.

Im September 1908 hat zunächst die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* in ihrer Jahresversammlung zu Köln beschlossen, der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft 5000 Fr. für die Eulerausgabe zu überweisen. *Dieser Beitrag gewinnt eine besondere Bedeutung durch die Tatsache, daß die Deutsche Mathematiker-Vereinigung damit den dritten Teil ihres ganzen disponiblen Vermögens dem genannten Zwecke opfert.* Der vom Vorstand einmütig gestellte und vom Vorsitzenden, Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. FELIX KLEIN, mit warmen Worten empfohlene Antrag wurde von der Kölner Versammlung ohne Diskussion und einstimmig angenommen. Besondere Beachtung verdient auch die Motivierung des Beschlusses: *„In Anbetracht der großen Bedeutung, die EULERS nie veraltende Werke für den gesamten Umfang der mathematischen Wissenschaft besitzen, erklärt sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung bereit, die von der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft inaugurierte Herausgabe der Werke EULERS wirksam zu unterstützen, und stellt aus ihrem Vermögen der genannten Gesellschaft als Beitrag zu den Kosten die Summe von 5000 Fr. zur Verfügung."*

Sodann hat im Januar dieses Jahres die *Pariser Akademie* den Beschluß gefaßt, *auf 40 Exemplare der Eulerausgabe zu subskribieren* (zahlbar nach Lieferung eines jeden Bandes), unter der *Bedingung,* daß die Werke in der *Originalsprache* herausgegeben würden. Diese Bedingung ist inzwischen von der schweizerischen Eulerkommission zum *Beschluß* erhoben worden.

Die Gesamtkosten der geplanten Eulerausgabe sind auf Grund sorgfältiger Berechnungen und Verhandlungen mit kompetenten Firmen auf rund 400,000 Fr. veranschlagt worden, denen, bei freilich sehr bescheidenen Ansätzen, etwa 150,000 Fr. Einnahmen durch den Verkauf gegenüber stehen würden. Sollten sich, wie wir zuversichtlich hoffen, nach dem Vorgange der Pariser Akademie die Subskriptionen in ausreichender Zahl einstellen, so würden sich die Verhältnisse natürlich sofort wesentlich günstiger gestalten.

Wir wenden uns nun an alle Mathematiker der Welt, der alten wie der neuen, und an alle Freunde der mathematischen Wissenschaften mit der Bitte um Unterstützung. Wir bitten sie ganz besonders, uns so rasch als möglich die zur Durchführung des Unternehmens nötigen *Subskriptionen* zu verschaffen, indem sie die ihnen nahestehenden und in Betracht kommenden *Bibliotheken* zu solchen veranlassen. Die Eulerausgabe wird etwa 40 Bände umfassen und der Preis des Bandes 25 Fr. nicht übersteigen. Die jährliche Ausgabe wird also, auch wenn mehrere Bände jährlich erscheinen, verhältnismäßig unbedeutend sein. Es werden aber gewiß alle Mathematiker mit um so stärkerem Nachdruck verlangen, daß künftighin in den Bibliotheken, auf die sie angewiesen sind, EULERS Werke zu finden seien, je unvollständiger diese Forderung zur Zeit noch erfüllt ist. Es gilt dies namentlich von der Mehrzahl der neueren Bibliotheken, also besonders wohl der amerikanischen.

Wir wenden uns sodann speziell an die großen mathematischen Gesellschaften, indem wir sie bitten, dem Beispiele der Deutschen Mathematiker-Vereinigung folgen zu wollen. Zugleich aber bitten wir sie dringend, auch noch *von sich aus* weitere freiwillige Beiträge zu sammeln. Wie in der Schweiz, so werden gewiß auch in den andern Ländern die *Versicherungsgesellschaften*, die großen *technischen Vereine*, insbesondere die *Ingenieurvereine*, und die großen *industriellen Unternehmungen*, die sich auf den mathematisch-technischen Wissenschaften aufbauen, gerne bereit sein, zu dem Gelingen des Werkes das ihrige beizutragen. Handelt es sich doch um die Werke eines Mannes, der nicht nur auf dem Gebiete der *reinen* Mathematik, sondern auch ihrer vielgestaltigen technischen *Anwendungen* zu den größten aller Zeiten zu zählen ist!

Wir sind überzeugt, daß unser Aufruf bei allen Mathematikern dem Interesse begegne, das eine *Gesamtausgabe der Werke Eulers* beanspruchen darf. Nach all den Vorbereitungen, die jetzt getroffen sind, bedarf es für den Einzelnen, ja sogar für die einzelnen Korporationen, nur noch einer verhältnismäßig geringen Anstrengung — und die Eulerausgabe ist gesichert!

Basel und Zürich, April 1909.

Im Namen des Zentralkomitees
der Schweizerischen
Naturforschenden Gesellschaft:

Der Präsident:
Dr. Fritz Sarasin.

Im Namen der Eulerkommission
der Schweizerischen
Naturforschenden Gesellschaft:

Der Präsident:
Prof. Dr. Ferdinand Rudio.

Es mag vielleicht auffallen, daß in dem Aufrufe ausdrücklich hervorgehoben wurde, die Werke EULERS sollten in der Originalsprache herausgegeben werden. Damit hatte es folgende Bewandtnis. Im Oktober 1908 hatte die Vereinigung der Mathematiklehrer an schweizerischen Mittelschulen an die Eulerkommission ein Schreiben gerichtet und darin die Herausgabe in deutscher oder französischer Sprache als notwendig bezeichnet. Zum Studium dieser Sprachenfrage bestellte darauf die Eulerkommission am 6. Dezember eine besondere Subkommission aus H. AMSTEIN, H. FEHR (als dem Präsidenten der „Vereinigung"), R. FUETER, J. H. GRAF und F. RUDIO. Diese Subkommission arbeitete einen besonderen Bericht*) aus, der sich auf die übereinstimmenden Gutachten von H. BOSMANS, G. DARBOUX, G. ENESTRÖM, J. FRANEL, D. HILBERT, A. HIRSCH, A. HURWITZ, F. KLEIN, A. KRAZER, F. LINDEMANN, E. SCHMIDT, H. A. SCHWARZ, P. STÄCKEL, A. WANGERIN, H. WEBER sowie der Firmen B. G. TEUBNER und ZÜRCHER u. FURRER stützte und mit der Erklärung schloß: „Die Subkommission erklärt einstimmig, daß eine Gesamtausgabe der Werke EULERS in Übersetzung aus wissenschaftlichen und finanziellen Gründen unmöglich ist." Zu diesem Beschlusse hatte die Erinnerung an das verunglückte belgische Unternehmen nicht wenig beigetragen. Von ganz besonderer Wirkung aber war die Mitteilung von G. DARBOUX (vom 13. Januar 1909) gewesen, daß die Pariser Akademie beschlossen habe, auf 40 Exemplare der Eulerausgabe zu subskribieren, unter der Bedingung, daß die Werke in der Originalsprache publiziert würden. Auf Grund des Berichtes ihrer Subkommission beschloß nun die Eulerkommission, am 28. Februar 1909, einstimmig, die Eulerausgabe habe in der Originalsprache zu erfolgen.

Doch kehren wir von dieser Sprachenfrage zu unsern Aufrufen zurück. Ihr Erfolg war überwältigend. Zunächst in der Schweiz, wo man begonnen

*) Als Manuskript gedruckt.

hatte. Von Behörden und Privaten, von Vertretern der Wissenschaft und der Praxis, aus allen Kantonen, selbst aus den entlegensten Alpentälern, flossen die Beiträge. Das Eulerwerk war nationale Ehrensache geworden. Aber auch außerhalb der Schweiz wurde das Projekt, das endlich den lang gehegten Traum der Mathematiker verwirklichen sollte, überall mit Begeisterung aufgenommen und tatkräftig unterstützt. Schon am 8. Mai, nur wenige Wochen nachdem unser Aufruf in drei Sprachen in die Welt gesandt worden war, konnte ein Artikel in der Neuen Zürcher Zeitung berichten: „Obwohl wir erst in den Anfängen stehen, so hat es doch etwas geradezu Erhebendes zu sehen, wie sich die Wirkung dieser Aktion von Tag zu Tag steigert. Durch die ganze mathematische Welt geht eine Bewegung, als rüste man sich zu einem großen Fest- und Ehrentage."

Am 6. September 1909 konnte in Lausanne der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft die Mitteilung gemacht werden, daß die Zahl der Subskriptionen auf 274 gestiegen sei,*) was einer Einnahme von rund 300000 Fr. entsprach. Nach der Pariser Akademie hatten nun auch die Akademien von Petersburg und Berlin auf je 40 Exemplare subskribiert. Und mindestens ebenso stark wie die materielle Unterstützung fiel der moralische Beistand ins Gewicht, den diese drei großen wissenschaftlichen Institute dem Unternehmen hatten zuteil werden lassen.

Am selben Tage hatten die freiwilligen Beiträge die Höhe von rund 125000 Fr. erreicht, wovon etwa 95000 Fr. in der Schweiz gesammelt worden waren.**) Mit Berücksichtigung der im Laufe der Jahre zu erwartenden Zinsen durfte daher die Jahresversammlung zu Lausanne die budgetierte Ausgabensumme, die vorsichtshalber von 400000 auf 450000 Fr. erhöht worden war, als vollständig gedeckt und das Unternehmen als finanziell gesichert erklären!***)

*) Die Zahl der Subskribenten beträgt gegenwärtig 350.

**) Die Summe beträgt gegenwärtig 135000 Fr., wovon 100000 Fr. aus der Schweiz.

***) Es würde viel zu weit führen, im einzelnen hier auseinanderzusetzen, wie sich das alles gefügt hat und wie das alles in so kurzer Zeit zustande gekommen ist. Aber einen beachtenswerten Beitrag zur Geschichte des Idealismus würde es geben — um so beachtenswerter, als es sich ja hier nicht, wie z. B. bei der Zeppelinspende, um etwas allgemein greifbares gehandelt hat.

Nur ganz summarisch kann denen, die das Eulerwerk durch Subskriptionen, durch Geldbeiträge oder anderweitig gefördert haben, hier gedankt werden. Es sind die verschiedenen auswärtigen Ministerien; und in der Schweiz — ein Bundesbeitrag wurde vorläufig nicht nachgesucht —

Noch aber waren nicht alle Forderungen erfüllt, die die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft das Jahr zuvor in Glarus gestellt hatte: Der Eulerkommission war aufgegeben worden, nicht nur die finanzielle, sondern auch die wissenschaftliche Durchführbarkeit des Unternehmens nachzuweisen. Dazu gehörte ein bis ins Einzelne ausgearbeiteter Plan, nach dem die Eulerausgabe anzulegen sei, und sodann der Nachweis, daß die zur Bearbeitung der einzelnen Bände erforderlichen wissenschaftlichen Kräfte zur Verfügung stünden.

Diese letzte Forderung bot keine großen Schwierigkeiten. Bei dem Interesse, das die Eulerausgabe überall gefunden hatte, konnte dem Zentralkomitee schon lange vor der Versammlung in Lausanne eine vorläufige Liste von über 20 Gelehrten vorgelegt werden, die sich grundsätzlich zur Übernahme einzelner Bände bereit erklärt hatten. Schwerere Sorgen bereitete dagegen der Eulerkommission der geforderte Entwurf einer Einteilung von EULERS sämtlichen Werken. Vollständig in Anspruch genommen durch die Aufgabe, die nötigen Subventionen und Subskriptionen zu sammeln,*) wäre es der Eulerkommission wohl nicht gelungen, die Forderung bis zu dem

---

zahlreiche kantonale und städtische Behörden, insbesondere die Regierung von EULERS Vaterstadt. Den schon genannten Akademien haben sich noch andere durch Subskriptionen angeschlossen und auch die Internationale Assoziation der Akademien hat dem Unternehmen ihre Sympathie bekundet. Zu danken ist ferner internationalen und nationalen wissenschaftlichen und technischen Kongressen, Instituten, Vereinen und Gesellschaften, namentlich auch Versicherungsgesellschaften, ferner technischen, industriellen und kommerziellen Unternehmungen der verschiedensten Art, und endlich den vielen, vielen Privaten, die sich die Förderung der Eulerausgabe haben angelegen sein lassen. Und dabei handelte es sich keineswegs etwa nur um einige wenige große Beiträge — an denen es freilich auch nicht gefehlt hat. Das Erhebende bestand gerade darin, daß die Idee in die weitesten Kreise gedrungen war und daß auch weniger Bemittelte sich freudig mit einem bescheidenen Beitrag beteiligten, um dem Unternehmen ihre Sympathie zu bezeugen. Haben doch z. B. in Rumänien sogar Sammlungen unter Schülern stattgefunden! Wahrlich mit Recht durfte auf der Jahresversammlung in Lausanne ein Redner ausrufen: „Wenn jemand den Glauben an die weltbewegende Kraft idealer Motive verloren haben sollte, angesichts dieser gewaltigen Manifestation müßte er ihn wiedergewinnen!"

*) Ich darf hier wohl sagen, daß ich dieser Aufgabe ein ganzes Jahr meines Lebens gewidmet habe. Und doch hätte das bei weitem nicht ausgereicht, wenn es nicht gelungen wäre, der Eulerausgabe überall im In- und Auslande begeisterte und energische Freunde zu gewinnen, die es sich angelegen sein ließen, jeder in seinem Kreise, für das Unternehmen zu wirken und es nach Kräften zu fördern. Es ist mir ein Bedürfnis, allen diesen Mitarbeitern hier nochmals aufs herzlichste für ihre so erfolgreiche Tätigkeit zu danken.

vorgesetzten Termine zu erfüllen. Um so wichtiger und dankenswerter war es daher, daß sich der Vorsitzende der deutschen Eulerkommission, Herr P. STÄCKEL, bereit erklärte, die Ausarbeitung des Entwurfes zu übernehmen. Schon im Juli lag der Entwurf gedruckt vor.*) Er gab auf 28 Seiten ein vollständiges Bild der nach Materien zu ordnenden Ausgabe, Band für Band, bis in alle Einzelheiten, und beantwortete die Fragen, die der Eulerkommission übertragen worden waren, in weitgehender Weise.

So waren denn jetzt alle Voraussetzungen erfüllt, unter denen sich die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft 1908 in Glarus bereit erklärt hatte, eine Gesamtausgabe der Werke LEONHARD EULERS ins Leben zu rufen. Mit freudiger Genugtuung konnte daher auf der Jahresversammlung zu Lausanne, am 6. September 1909, der Präsident der Gesellschaft, Herr Dr. FRITZ SARASIN, über die Vorarbeiten berichten und der Gesellschaft den Antrag des Zentralkomitees vorlegen:

„Angesichts dieser in der Geschichte der Wissenschaft einzig dastehenden Beteiligung der ganzen Welt an der Herausgabe der Werke eines längst verstorbenen Gelehrten, stellt Ihnen das Zentralkomitee den folgenden Antrag“:

„„*Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft beschließt die Herausgabe der gesamten Werke LEONHARD EULERS in der Originalsprache, überzeugt, damit der ganzen wissenschaftlichen Welt einen Dienst zu erweisen, und mit dem Ausdruck tiefgefühlten Dankes an alle Förderer des Unternehmens im In- und Auslande, an die Eulerkommission und insbesondere an ihren Vorsitzenden, Herrn FERDINAND RUDIO, für seine aufopfernde Hingabe zur Verwirklichung des großen Werkes.*““

Einstimmig und mit Begeisterung wurde der Antrag zum Beschluß erhoben. Es war ein weihevoller Moment, der allen Anwesenden unvergeßlich bleiben wird.**)

---

*) P. STÄCKEL, *Entwurf einer Einteilung der Sämtlichen Werke LEONHARD EULERS*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich 54, 1909, p. 261—288.

**) Daß der entscheidende Beschluß gerade in Lausanne gefaßt wurde, wo einst die *Introductio* und die *Methodus inveniendi lineas curvas* erschienen waren, wurde noch als eine besonders freundliche Fügung begrüßt.

Zur Ausführung der weiteren Beschlüsse der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft trat die Eulerkommission am 19. Dezember 1909 zu ihrer 6. Sitzung zusammen. Es handelte sich darum, alle Organisationen derart zu wählen, daß die Eulerausgabe nunmehr in Angriff genommen werden könne.

Zunächst wurden die Reglemente festgelegt für die Eulerkommission (die bisher eine Subkommission der Denkschriftenkommission gewesen, in Lausanne aber als eine selbständige Kommission der Gesellschaft bezeichnet worden war), für ein Redaktionskomitee und für einen Finanzausschuß. Daran schlossen sich die Wahlen. Nachdem schon früher einige Mitglieder zurückgetreten waren und die Reglemente eine Trennung der Präsidentschaften von Eulerkommission und Redaktionskomitee vorgesehen hatten, besteht die Eulerkommission jetzt aus den Herren K. VONDERMÜHLL-Basel als Präsident, H. AMSTEIN-Lausanne, CH. CAILLER-Genf, R. FUETER-Basel, H. GANTER-Aarau, R. GAUTIER-Genf, J. H. GRAF-Bern, CHR. MOSER-Bern, F. RUDIO-Zürich.

Das Redaktionskomitee wurde bestellt aus den Herren F. RUDIO-Zürich, A. KRAZER-Karlsruhe und P. STÄCKEL-Karlsruhe. Der erstgenannte wurde zugleich als Vorsitzender und verantwortlicher Generalredaktor bezeichnet.

In den Finanzausschuß wurden gewählt der Präsident der Eulerkommission als Vorsitzender, Herr ED. HIS-SCHLUMBERGER-Basel als Schatzmeister und Herr P. CHAPPUIS-Basel.

Druck und Verlag wurden der Firma B. G. TEUBNER in Leipzig übertragen.

Mit Anfang des Jahres 1910 konnte nun das Redaktionskomitee seine Arbeit beginnen. Zunächst machte es sich daran, einen ausführlichen Redaktionsplan für die Eulerausgabe auszuarbeiten. Nach mehreren Umarbeitungen, bei denen das Komitee durch eine Reihe von Kollegen, insbesondere die Herren G. ENESTRÖM und FR. ENGEL unterstützt worden war, konnte der Plan im Frühjahr, deutsch und französisch, den Fachgenossen vorgelegt werden. Ich komme darauf noch zurück und bemerke hier nur, daß die deutsche Fassung im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **19**, 1910, p. 94—103, abgedruckt ist.

Besondere Aufmerksamkeit widmete das Komitee sodann einer genauen Revision des STÄCKELSCHEN *Entwurfes*. Dieser Entwurf hatte das

Jahr zuvor in äußerst knapp bemessener Zeit ausgearbeitet werden müssen. Als Grundlagen hatten die Verzeichnisse von P. H. v. Fuss und G. Hagen, sowie die Vorschläge Jacobis gedient, es war aber in der kurzen Zeit nicht möglich gewesen, alle Arbeiten Eulers eingehend auf ihre Zugehörigkeit zu den einzelnen Bänden zu prüfen. Eine Nachprüfung war daher unerläßlich. Diese konnte jetzt um so leichter und gründlicher durchgeführt werden, als das Redaktionskomitee inzwischen alle erforderlichen Serien der Berliner, Pariser und Petersburger Akademieschriften antiquarisch aufgekauft hatte und ihm überdies von einem Kollegen, der nicht genannt sein will, fast alle selbständig erschienenen Werke Eulers und dazu noch viele seiner Abhandlungen in hochherziger Weise geschenkt worden waren. Endlich hatte auch noch die Petersburger Akademie die Freundlichkeit gehabt, der Redaktion das aus 17 umfangreichen Quartbänden bestehende Fusssche Handexemplar der Eulerschen Schriften zur Verfügung zu stellen.

Die von dem Komitee durchgeführte Revision ergab, daß der ursprüngliche Plan im großen und ganzen vollständig beibehalten werden könne.*) Die erste Serie, die die reine Mathematik umfaßt, wird nach wie vor aus 18 Bänden bestehen, und es sind hier nur einige wenige Verschiebungen vorgenommen worden. Am erheblichsten ist die Versetzung der Tautochronen, Synchronen und Tractrices aus der Differentialgeometrie in die Punktmechanik (zweite Serie, Bd. 3); dagegen sind die Brachistochronen bei der Variationsrechnung (erste Serie, Bd. 16) belassen worden, da sie mit der Entwicklung dieses Kalküls untrennbar verbunden erscheinen.

Größere Änderungen ergaben sich innerhalb der zweiten und dritten Serie, von denen die eine die Mechanik und die Astronomie, die andere die Physik, Werke verschiedenen Inhalts und den Briefwechsel enthält. Dafür waren zwei Gründe maßgebend.

Nach Art. 2 des Redaktionsplanes sollten in die Ausgabe der Werke Leonhard Eulers aufgenommen werden „alle die Arbeiten des Sohnes Johann Albrecht Euler, von denen angenommen werden muß, daß sie durch den Vater beeinflußt oder gar von ihm verfaßt worden sind". Herr Stäckel übernahm es, ein Verzeichnis dieser Arbeiten anzulegen. Daraus entstand eine kurze Lebensbeschreibung von Johann Albrecht und eine historisch-

*) Der revidierte Stäckelsche Entwurf ist abgedruckt im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, **19**, 1910, zweite Abteilung, p. 104—116 und 129—142; hier findet man auch eine eingehende Darlegung und Begründung der vorgenommenen Änderungen.

kritische Würdigung seiner Leistungen, aus der sich schließlich ergab, daß es zweckmäßig sei, alle Arbeiten des Sohnes in der Ausgabe der Werke des Vaters abzudrucken.*) Da diese Arbeiten aber mit mehr als 700 Seiten unserer Ausgabe fast alle in die zweite und dritte Serie einzuordnen waren, so mußte die dritte Serie von 9 auf 10 Bände erweitert werden.

Sodann erschien es wünschenswert, die beiden Serien stärker zu gliedern. Daraus ergaben sich die folgenden Änderungen. Die Abhandlungen über Präzession und Nutation wurden aus der Mechanik starrer Körper ausgeschieden und als besonderer Abschnitt der Astronomie zugewiesen. Ferner wurden auch die Abhandlungen über den Stoß, die bisher teils unter den Prinzipien der Mechanik, teils unter der Mechanik starrer Körper, teils unter der angewandten Mechanik untergebracht waren, zu einem besonderen Abschnitt vereinigt, der zugleich ein Bindeglied sein wird zwischen der Mechanik der starren Körper und der Mechanik der biegsamen und elastischen Körper. Der sehr umfangreiche und vielgestaltige Abschnitt: Angewandte Mechanik, der früher nur in Selbständige Werke und Abhandlungen zerfiel, ist jetzt in vier Teile, Artilleriewesen, Ingenieurwesen, Maschinenwesen, Schiffswesen zerlegt worden. Ebenso sind an die Stelle des früheren Abschnittes III der Astronomie, in dem alles zusammengefaßt war, was sich nicht auf allgemeine und spezielle Bahnbestimmungen bezog, die Abschnitte Präzession und Nutation, Sphärische Astronomie (mit Einschluß der Parallaxe) und Kosmische Physik getreten.

Dem Wunsch nach stärkerer Gliederung ist auch in der dritten Serie entsprochen worden. Die frühere Zweiteilung der Physik, bei der die optischen Instrumente den einen Abschnitt gebildet hatten, während alle andern physikalischen Abhandlungen in einen einzigen Sammelband vereinigt worden waren, wurde aufgegeben. Die physikalischen Abhandlungen, die nicht der Dioptrik angehören, füllen jetzt zwei Bände und sind in fünf Abschnitte gegliedert: Allgemeine Physik, Wärme, Akustik und Musik, Magnetismus und Elektrizität, Optik. Dabei ist noch zu bemerken, daß die Musik früher unter die Werke verschiedenen Inhalts gestellt worden war. Zu diesen war in dem ersten Entwurf auch die umfangreiche aus den *Opera postuma* stammende Schrift *Anleitung zur Naturlehre* gerechnet worden, während sie jetzt in der Allgemeinen Physik ihren Platz gefunden hat.

---

*) Paul Stäckel, *Johann Albrecht Euler*, Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, **55**, 1910, p. 63—90.

In dem revidierten STÄCKELSCHEN Entwurf folgten nun auf diese zwei Bände drei, die den optischen Instrumenten gewidmet waren, nämlich der Band III_3, der die zwei ersten Bände der dreibändigen *Dioptrica* enthalten sollte, der Band III_4, dem der dritte Band der *Dioptrica* und zugleich der erste Teil der dioptrischen Abhandlungen zugewiesen war, und der Band III_5 mit den übrigen dioptrischen Abhandlungen. Bei erneuter Prüfung erschien es jedoch nicht zulässig, ein Werk von dem Range der *Dioptrica* in dieser Weise zu zerlegen und zum Teil mit einem Abhandlungsbande zu verbinden. Es wurde daher nachträglich beschlossen, die *Dioptrica* in zwei selbständigen Bänden (III_3 und III_4) für sich herauszugeben und die sämtlichen dioptrischen Abhandlungen ebenfalls in zwei Bänden (III_5 und III_6) zu vereinigen. Freilich steigt damit die Zahl der Bände der Eulerausgabe auf 45, aber den Gründen für diese Anordnungen wird sich wohl niemand verschließen können.

Im übrigen versteht es sich von selbst, daß die Redaktion sich vorbehalten muß, auch noch weitere Änderungen in der Einteilung vorzunehmen, falls sich solche als zweckmäßig erweisen sollten. Es ist allerdings nicht wahrscheinlich, daß es sich dabei noch um andere als geringfügige Verschiebungen handeln werde.

Nach diesen Erklärungen ergibt sich nun für die Einteilung der Eulerausgabe das folgende Schema:

ERSTE SERIE: REINE MATHEMATIK (18 BÄNDE).

A. *Arithmetik und Algebra (5 Bände).*

I. Anleitung zur Algebra, 1 Band.
II. Arithmetische Abhandlungen, 3 Bände.
III. Algebraische Abhandlungen
IV. Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungswesen
} zusammen 1 Band.

B. *Analysis (11 Bände).*

I. Lehrbücher der Analysis, 4 Bände.
II. Reihen, Produkte und Kettenbrüche, 2 Bände.

III. Integrale:
Erste Abteilung, 2 Bände.
Zweite Abteilung: Elliptische Integrale, 1 Band.
IV. Differentialgleichungen, 1 Band.
V. Variationsrechnung, 1 Band.

C. *Geometrie (2 Bände).*

I. Elementare Geometrie, Trigonometrie, Algebraische Kurven
II. Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie
} zusammen 2 Bände.

ZWEITE SERIE: MECHANIK UND ASTRONOMIE (16 BÄNDE).

A. *Mechanik (11 Bände).*

I. Lehrbücher, 2 Bände
II. Prinzipien der Mechanik
III. Mechanik materieller Punkte
} zusammen 1 Band.
IV. Mechanik starrer Körper, 1 Band.
V. Lehre vom Stoß
VI. Mechanik biegsamer und elastischer Körper
} zusammen 2 Bände.
VII. Mechanik flüssiger und luftförmiger Körper, 1 Band.
VIII. Artilleriewesen
IX. Ingenieurwesen
} zusammen 1 Band.
X. Maschinenwesen, 1 Band.
XI. Schiffswesen, 2 Bände.

B. *Astronomie (5 Bände).*

I. Selbständige Werke, 1 Band.
II. Abhandlungen zum Dreikörperproblem, 2 Bände.
III. Spezielle Bahnbestimmungen
IV. Präzession und Nutation
} zusammen 1 Band.
V. Sphärische Astronomie
VI. Kosmische Physik
} zusammen 1 Band.

DRITTE SERIE: PHYSIK, WERKE VERSCHIEDENEN INHALTES, BRIEFWECHSEL (11 BÄNDE).

A. *Physik (6 Bände).*

I. Allgemeine Physik
II. Wärme
III. Akustik und Musik
} zusammen 1 Band.

IV. Magnetismus und Elektrizität
V. Theoretische Optik
} zusammen 1 Band.

VI. Optische Instrumente:
Erste Abteilung: Dioptrica, 2 Bände.
Zweite Abteilung: Abhandlungen, 2 Bände.

B. *Werke verschiedenen Inhaltes (2 Bände).*

C. *Briefwechsel (3 Bände).*

Gleichzeitig mit der Bearbeitung des Einteilungsplanes war das Redaktionskomitee bemüht, für die einzelnen Bände geeignete Herausgeber zu gewinnen. Es gelang ihm, von folgenden Herren Zusagen zu erhalten: O. BACKLUND-Pulkowa, J. BAUSCHINGER-Straßburg, E. BERNOULLI-Zürich, R. BERNOULLI-Köln-Lindenthal, K. BÖHM-Heidelberg, H. BURKHARDT-München, C. V. L. CHARLIER-Lund, E. CHERBULIEZ-Zürich, F. COHN-Berlin, L. G. DU PASQUIER-Neuenburg, W. v. DYCK-München, G. ENESTRÖM-Stockholm, Fr. ENGEL-Greifswald, G. FABER-Stuttgart, R. GANS-Tübingen, A. GUTZMER-Halle a. S., J. HADAMARD-Paris, K. HEUN-Karlsruhe, E. HOPPE-Hamburg, G. KOWALEWSKI-Prag, A. KRAZER-Karlsruhe, A. LALIVE-La Chaux-de-Fonds, H. LAMB-Manchester, T. LEVI-CIVITA-Padua, A. LIAPOUNOFF-St. Petersburg, R. v. LILIENTHAL-Münster i. W., H. LINSENBARTH-Berlin, A. MARKOFF-St. Petersburg, K. MATTER-Frauenfeld, F. RUDIO-Zürich, F. R. SCHERRER-Küsnacht-Zürich, L. SCHLESINGER-Gießen, P. STÄCKEL-Karlsruhe, H. TIMERDING-Braunschweig, E. VESSIOT-Paris, A. VOSS-München, H. WEBER-Straßburg.

Inzwischen war auch die erste Lieferung von ENESTRÖMS *Verzeichnis der Schriften LEONHARD EULERS* erschienen, einem Werke, das man ohne

Übertreibung als den eigentlichen Rückgrat der ganzen Eulerausgabe wird bezeichnen dürfen. Die vorliegende Lieferung enthält auf 208 Seiten als erste Abteilung: „Die Schriften EULERS chronologisch nach den Druckjahren geordnet". Die zweite Lieferung soll auf etwa 10 Druckbogen enthalten: Als Anhang zur ersten Abteilung ein Verzeichnis der Schriften J. A. EULERS, sodann als zweite Abteilung die Schriften L. EULERS nach der Abfassungszeit geordnet, als dritte Abteilung die Schriften L. EULERS nach dem Inhalt geordnet, endlich ein ausführliches Register und die Einleitung.

Eine weitere unentbehrliche Grundlage für die Eulerausgabe ist dem Redaktionskomitee von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg geliefert worden. Zur Ausführung der Beschlüsse, die die Akademie in ihren Sitzungen vom 24. April und 13. Mai 1909 auf Veranlassung der Herren BACKLUND und SONIN gefaßt hatte, war eine besondere Eulerkommission gewählt worden, mit der Aufgabe, das in den Archiven befindliche handschriftliche Material zu ordnen und der Eulerredaktion zur Verfügung zu stellen. Die Kommission hat diese Arbeit im Laufe des Jahres 1910 beendet und ein Verzeichnis der in der Petersburger Akademie befindlichen Eulermanuskripte angefertigt. Das im Druck erschienene Verzeichnis umfaßt auf 13 Quartseiten 209 Nummern. Nachdem diese Arbeit beendet war, hat die Akademie das ganze kostbare Manuskriptenmaterial dem Redaktionskomitee zugestellt. Die Sendung traf im Dezember 1910 in Zürich ein.

Es versteht sich von selbst, daß die Redaktion nicht nur die Petersburger Manuskripte, sondern überhaupt alle, die ihr zur Verfügung stehen werden, auf das gewissenhafteste bearbeiten und für die Eulerausgabe verwerten wird. Und sie darf wohl auch an dieser Stelle die Hoffnung aussprechen, daß sie dabei von allen, die im Besitze von Eulermanuskripten sind, ausreichend unterstützt werde. Indessen glaubten wir, nicht warten zu dürfen, bis erst diese zeitraubenden Arbeiten beendet seien. Die Manuskripte betreffen im wesentlichen die Abhandlungen und die Briefe*), für die Mehrzahl der selbständig erschienenen Werke sind sie ohne Einfluß. Es schien daher gerechtfertigt, sofort mit einigen dieser Bände zu beginnen, und da bis Mitte 1910 die *Algebra*, der erste Band der *Mechanica* und die zwei

*) In bezug hierauf hat uns auch die Royal Society zu Dank verpflichtet, indem sie, auf Veranlassung von Herrn LARMOR, die in ihrem Besitze befindlichen Briefe EULERS kopieren ließ und uns die Kopien zugestellt hat.

ersten Teile der *Dioptrica* für den Druck fertig bearbeitet vorlagen,*) so war der Anfang gegeben.

Freilich dauerte es noch geraume Zeit, bis mit dem Satz definitiv begonnen werden konnte. Bei dem monumentalen Charakter, den die Eulerausgabe haben soll, mußte erst eine Reihe von Vorarbeiten erledigt werden. In dem Verlagsvertrage waren ja natürlich die wichtigsten Bestimmungen, wie z. B. über das Format, über die Qualität des Papieres und dergleichen festgelegt, es blieb aber trotzdem noch viel zu ordnen übrig. Zunächst zeigte es sich, daß die ursprünglich in Aussicht genommene Korpusschrift nicht den Ansprüchen genügte, die man an ein Werk von solchem Range zu stellen hat. Allerdings mußten wir uns sagen, daß mit der Wahl der größeren Ciceroschrift auch die früheren Schätzungen des Umfangs der Bände und die damit zusammenhängenden Berechnungen eine Modifikation erfahren würden.

Nun kam die Erledigung der vielen Einzelheiten, über die nur auf Grund vorgelegter Schriftproben entschieden werden konnte: Die Behandlung der so mannigfachen Überschriften, insbesondere der Seitenüberschriften (die so nützlich sein können und auf die doch oft so wenig Sorgfalt verwendet wird), die verschiedenen Abstufungen in der Schrift, die Anordnungen des Satzes und was alles damit zusammenhängt, die Behandlung der Formeln usw. usw. Wir hatten uns bei dieser Arbeit der entgegenkommendsten Unterstützung von seiten der Verlagsfirma zu erfreuen, die nicht müde wurde, immer wieder neue Proben vorzulegen, bis endlich eine definitive Wahl getroffen werden konnte. Auch von anderer Seite her sind wir dabei in dankenswerter Weise unterstützt worden. Da es sich um grundsätzliche Fragen handelte, die für den ganzen Charakter der Ausgabe entscheidend waren, so durfte nichts überstürzt werden. Und so dauerte es noch bis zum 26. August, bis das erste „Imprimatur“ erteilt werden konnte.

*) Nach unserem Redaktionsplan wird die Verteilung des gesamten Materiales in die einzelnen Bände der Eulerausgabe von der Redaktion ausgeführt. Was nicht durch Kauf oder Schenkung in ihren Besitz gelangt ist, wird durch Abschreiben oder Photographieren gewonnen. Jedem Herausgeber wird also der von ihm zu bearbeitende Band, fertig zusammengestellt, von der Redaktion geliefert, und dieser Band wandert dann, versehen mit den eingetragenen Korrekturen und Zusätzen des Herausgebers, als Druckvorlage in die Druckerei. Diese nicht ganz einfache Verteilungsarbeit wird noch etliche Zeit in Anspruch nehmen, doch sind jetzt schon 15 Herausgeber im Besitze ihrer Bände. Unter diesen befinden sich auch bereits einige Abhandlungsbände, und der Band über die elliptischen Integrale liegt sogar schon fertig bearbeitet vor; er wird also im nächsten Jahre erscheinen können.

Ich müßte fürchten, den Leser zu ermüden, wollte ich nun, nach allem, was schon über die Gestaltung der Eulerausgabe gesagt ist, noch auf die Einzelheiten des Redaktionsplanes eintreten. Er liegt gedruckt vor und kann von jedem, der sich dafür interessiert, im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*) eingesehen werden. Aus der Forderung: „Die Eulerausgabe soll die Originaltexte vollständig ersetzen" ergibt sich, was sich auch sonst von selbst versteht: „Die Eulerausgabe wird mit derselben Pietät durchgeführt werden, mit der sie ins Leben gerufen worden ist."

Diese Pietät hindert natürlich nicht daran, tatsächlich Unrichtiges zu verbessern, sei es stillschweigend, sei es mit einer Anmerkung.**) Hierüber enthält der Redaktionsplan eingehende Bestimmungen, indessen ist es selbstverständlich, daß dabei dem Takt der Herausgeber und der Redaktoren ein gewisser Spielraum bleiben muß, um so mehr, als sich die Anmerkungen auf das notwendigste beschränken sollen. So kann z. B. — um etwas ganz äußerliches herauszugreifen — die Interpunktion des Originales nur soweit maßgebend sein, als es vernünftigerweise angeht. In der *Dioptrica* aber ist sie meist so sinnlos, daß man EULER, der dafür ja gar nicht verantwortlich ist, mit falsch verstandener Pietät einen schlechten Dienst erweisen würde.

Hingegen sind wiederum gewisse Eigentümlichkeiten unberührt beizubehalten, die wir heute als unzulässig bezeichnen würden. EULER gebraucht z. B. sehr häufig in derselben Rechnung, die im übrigen korrekt durchgeführt ist, für verschiedene Dinge, etwa für einen Punkt und eine Zahl, oder für einen Punkt und eine Linie, denselben Buchstaben. Hier ist weder eine Korrektur am Platz (auch nicht in Form von zweierlei Schrift), noch eine Anmerkung (es würde deren viel zu viele geben). Der Leser wird sich von selbst darein finden und nicht Dinge verwechseln, die man doch nicht gut verwechseln kann. Und er wird sich bei solchen und ähnlichen Erscheinungen sagen müssen, daß sich die Kunst der Bezeichnung, in der wir gerade EULER so viel verdanken, eben nur allmählich entwickelt hat und daß auch die einzelnen Phasen dieser Entwicklung nicht ohne Interesse sind.

---

*) Siehe p. XXX.

**) Alle Anmerkungen, die von den Herausgebern herrühren, sind mit ihren Initialen signiert. Anmerkungen der Redaktion tragen die Unterschrift F. R. Auch in der Art der Numerierung werden sich diese Anmerkungen deutlich von denen des Originals unterscheiden.

Ich wende mich nun noch mit einigen Worten zu dem vorliegenden Bande, dem Bande, der *LEONHARDI EULERI Opera omnia* eröffnet. Es ist dem Redaktionskomitee ein Bedürfnis, Herrn HEINRICH WEBER zum Abschluß dieses ersten Bandes zu beglückwünschen und ihm für seine Mitarbeit an der Eulerausgabe aufs herzlichste zu danken. Möge der Anfang ein gutes Omen sein für die Zukunft!

Der Band enthält als Hauptbestandteil *EULERS Algebra* und die *Additions* von *LAGRANGE*, die schon im Redaktionsplan ausdrücklich als dazu gehörig angekündigt waren. Nach diesem Plane behält sich die Redaktion vor, „auch noch in anderen Bänden Arbeiten fremder Autoren, ganz oder teilweise, zum Abdruck zu bringen, falls das Verständnis der betreffenden EULERSCHEN Schriften dadurch wesentlich gewinnen sollte.“

Der *Algebra* geht die *Lobrede auf Herrn LEONHARD EULER* von NICOLAUS FUSS voraus. An Lebensbeschreibungen EULERS ist ja kein Mangel, obwohl immerhin zu sagen ist, daß die richtige Eulerbiographie erst noch geschrieben werden muß. FUSS selbst war weit davon entfernt, seine *Lobrede* dafür zu halten, und er sagt bescheiden genug: „Ich gebe also hier, was die Umstände mir zu geben erlauben: einen Versuch über das Leben des großen Mannes; und bin zufrieden, daß ich dadurch einige Blumen auf das Grab meines teuren Lehrers zu streuen und jemanden, der sich stark genug fühlt, eine seiner würdige Lobrede zu verfertigen, die nötigen Materialien zu liefern Gelegenheit gehabt habe.“ Aber so, wie nach EULERS Tode niemand berufener war, in der Petersburger Akademie die Gedächtnisrede auf den großen Mathematiker zu halten, als NICOLAUS FUSS, so ist auch unter allen Lebensbeschreibungen EULERS keine, die mit größerem Rechte an die Spitze einer Eulerausgabe gestellt werden könnte, als eben die Rede, die FUSS damals, am 23. Oktober 1783, gehalten hat. Niemand wird sie ohne tiefe innere Bewegung lesen können, auch wenn ihm nichts über die näheren Beziehungen ihres Verfassers zu dem Gefeierten bekannt wäre.

Geboren am 30. Januar 1755 in Basel war NICOLAUS FUSS schon 1773 nach Petersburg zu EULER gekommen. Dieser hatte sich das Jahr zuvor an DANIEL BERNOULLI mit der Bitte gewandt, ihm unter seinen Schülern einen besonders tüchtigen jungen Landsmann auszuwählen, der befähigt wäre, ihm auch bei schwierigeren Berechnungen zu helfen. BERNOULLIS Wahl fiel auf den kaum 18jährigen NICOLAUS FUSS und diese Wahl erwies sich als eine äußerst glückliche. Es wird stets einen Ruhmestitel für FUSS bilden, sich seinem Lehrer ganz und gar hingegeben und durch seine unermüdliche selbstlose

Tätigkeit die erstaunliche Produktivität ermöglicht zu haben, die EULER im letzten Jahrzehnt seines Lebens entfaltet hat. Nicht weniger als 355 Abhandlungen sind in den Jahren 1773—1782 unter der Mithilfe von FUSS entstanden. FUSS hat auch, wie wir gesehen haben, ein Verzeichnis der Schriften EULERS angelegt.*) Nach EULERS Tode gestalteten sich seine Beziehungen zu der Familie des verehrten Lehrers dadurch noch enger, daß er, im Jahre 1784, ALBERTINE EULER, die Tochter von JOHANN ALBRECHT, heiratete. Als dieser 1800 starb, wurde NICOLAUS FUSS sein Nachfolger im Secretariat der Petersburger Akademie. Auf ihn folgte dann, wie schon früher bemerkt wurde, sein ältester Sohn PAUL HEINRICH, der sich so große Verdienste um die Vorarbeiten zu einer Eulerausgabe erworben hat.

Indem wir die *Lobrede* von FUSS an die Spitze unserer Eulerausgabe setzen, folgen wir zugleich dem Beispiel seiner Söhne PAUL HEINRICH und NICOLAUS. Als 1849 die *Commentationes arithmeticae* die *Opera minora collecta* eröffnen sollten und damals noch Aussicht bestand, daß damit nur „der Anfang einer bändereichen Sammlung" gemacht werde, glaubten sie, als passende Zugabe die von ihrem Vater verfaßte Lobrede beifügen zu sollen. Und sie taten es mit den Worten: „Hoc patris nostri opusculum, si dictione et ornatu inferius videri potest libro saepius typis repetito, quem CONDORCETIUS in memoriam EULERI legit et edidit, ita tamen praestat, sine dubio, et calore verborum et summa rerum narratarum veritate et iudicio solidiori de EULERI doctrina et scriptis lato. Hanc esse sententiam etiam aliorum virorum doctorum, nos filii narratoris confidimus."

FUSS hat seinen *Éloge de Monsieur Léonard Euler* selbst „aus dem Französischen übersetzt und mit verschiedenen Zusätzen vermehrt", auf die er in der Vorrede besonders aufmerksam macht. Die Schrift, mit der Widmung „An mein Vaterland", wurde 1786 in Basel auf Kosten des Staates gedruckt. Sie war geziert mit einem Bilde, das der Basler Kupferstecher CHRISTIAN VON MECHEL (1737—1817) nach dem schon früher erwähnten Ölgemälde von HANDMANN gestochen hatte.**)

*) Die Liste (A), die p. XV ausführlich besprochen worden ist, findet sich als Anhang sowohl der französischen (Petersburg 1783) als auch der deutschen (Basel 1786) Ausgabe der *Lobrede*. Da aber seit dem Erscheinen von ENESTRÖMS *Verzeichnis* alle früheren Verzeichnisse (siehe die Anmerkung p. XV) nur noch historisches Interesse haben, so konnte von einem Abdruck der Liste in unserer Eulerausgabe abgesehen werden.

**) Aus diesem Grunde haben wir eine Reproduktion des Stiches als Titelblatt des vorliegenden Bandes gewählt. Zu dem Bilde selbst ist noch zu sagen, daß MECHEL es ohne Spiegel gestochen hat, so daß in den Abdrücken die Seiten rechts und links vertauscht sind.

Als Paul Heinrich und Nicolaus Fuss in der Vorrede zu den *Commentationes arithmeticae* auf den Abdruck der *Lobrede* hinwiesen, hatten sie die Worte hinzugefügt: „in qua nil mutare nobis religio fuit, nisi lapsus aliquos calami". Ich habe geglaubt, mir eine ähnliche Zurückhaltung auferlegen zu sollen, und nichts zu ändern und nichts hinzuzufügen, was mit den Worten der Verehrung, von der die ganze Schrift getragen ist, nicht im Einklang stünde. Die wenigen Anmerkungen beschränken sich daher auf sachliche Berichtigungen einiger Angaben, bei denen sich Fuss wohl nur auf sein Gedächtnis verlassen hatte.

„An mein Vaterland! ... Nimm dieses Opfer, das einer Deiner Söhne Dir, von den Ufern der Newa her, aus Dankbarkeit und Vaterlandsliebe darbringt, als ein Zeichen seiner unveränderlichen Zuneigung und Treue gütig an. . . ."

Ist es Täuschung, daß die Worte jetzt in stimmungsvollerem Klang ertönen, seitdem auf Schweizerboden das lang erstrebte große Werk erstanden ist?

Zürich, im Juni 1911.

Ferdinand Rudio.

Lobrede

auf Herrn

Leonhard Euler,

in der Versammlung der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg den 23 Octob. 1783 vorgelesen

von

Nicolaus Fuß

Professor der höhern Mathematik, und ordentlichem Mitgliede der Kayserlichen Akademie der Wissenschaften.

Von dem Verfasser selbst aus dem französischen übersetzt und mit verschiedenen Zusätzen vermehrt, nebst einem vollständigen Verzeichnis der Eulerschen Schriften.

Basel,
bey Johann Schweighauser. 1786.

AN MEIN VATERLAND

Wenn der Glanz, den ein großer Mann über sein Zeitalter verbreitet, sich auch seinem Geburtsorte mittheilt; wenn eine Stadt stolz auf das Verdienst außerordentlicher Genies seyn darf, die aus ihren Mauren hervorgegangen sind, der Welt durch vorzügliche Talente zu nützen: wem könnte ich mit größerm Recht gegenwärtige Lobrede wiedmen, als *Dir*, theures, unvergeßliches *Basel*, *Dir*, der Wiege der Bernoulli, Hermanns und Eulers, die Europa mit Ehrfurcht nennt und derer Andenken jedem Verehrer der Wissenschaften heilig ist!

Nimm dieses Opfer, das einer *Deiner* Söhne *Dir*, von den Ufern der Newa her, aus Dankbarkeit und Vaterlandsliebe darbringt, als ein Zeichen seiner unveränderlichen Zuneigung und Treue gütig an.

Bey *Euch*, *Erlauchte Väter des Staats*, Mitbürger, Freunde! lege ich diese dem Vaterlande geheiligte Schrift nieder, die bestimmt ist, das Andenken eines der grösten Männer, die Basel hervorgebracht hat, auch unter *Euch* zu erhalten, so wie es allerorten, wo er mittelbar und unmittelbar gewürkt hat, unvergeßlich seyn wird.

St. Petersburg, den 28. April 1785.

Nikolaus Fuss.

VORREDE

Der unverdiente Beyfall, womit man meinen Abriß von EULERS Leben allerorten aufgenommen hat, ist mir sehr schmeichelhaft, aber nicht unerwartet gewesen. Ein zehnjähriger täglicher Umgang mit dem großen Manne hatte mich in den Stand gesetzt, Manches von seinen Lebensumständen zu erfahren, das, ungeacht der berufenen Anekdotenjägerey unsrer Zeit, nicht allgemein bekannt ist. Ein eben so langes, unter seiner Leitung getriebnes, Studium seiner Schriften hatte mich nicht nur mit ihrem Innhalt, sondern auch mit der Veranlassung der meisten bekannt gemacht. Die Geschichte seyner Werke ist aber beynahe ganz Geschichte seines arbeitvollen Lebens: ich konnte also, auch bey den sehr mittelmäßigen Gaben, die mir die Natur zum Lobredner verliehen hat, gewiß seyn, daß kein Verehrer EULERS meine Biographie desselben ohne Theilnehmung lesen würde.

Ich schreibe es, nächst der Langsamkeit, womit sich unsre akademische Schriften in den Buchhandel verbreiten, auf Rechnung des nemlichen Umstandes, daß mehrere meiner auswärtigen Freunde mich aufgemuntert haben, eine deutsche Uebersetzung dieser Lobrede herauszugeben; und ich habe freudig die Muße, welche mir die verflossenen Osterferien zu dieser Arbeit darboten, und die Anerbietungen meines edlen Freundes VON MECHEL genützt, um, mit Beyhülfe seiner Kunst, EULERS Leben im vaterländischen Gewande erscheinen zu lassen.

Ob ich nun die Erwartungen meiner Freunde nicht getäuscht habe; ob der schmucklose Ausdruck meiner Empfindungen auch im Deutschen nicht mißfallen wird; ob nicht hier und dort einiger Zwang in dem Periodenbau u. s. f. verrathen wird, daß die erste Anlage dieser Schrift französisch ist: dies muß ich dem Urtheil des Publikums zu entscheiden überlassen. Die Kürze der Zeit, die ich auf diese Arbeit verwenden konnte, mag ihre Fehler entschuldigen, so wie sie auch schon ehmals die Unvollkommenheiten der Urschrift entschuldiget hat.

Ich habe mich der Rechte bedient, die einem Verfasser bey Uebersetzung seiner eigenen Schriften zukommen. Ich habe zusammengezogen, ausgedehnt, weggelassen, hinzugesetzt, nach dem Deutlichkeit, Zusammenhang und andre Umstände mir solches zu erfordern schienen. Die Zusätze betreffen Umstände, die dem Leser, besonders dem mathematischen, nicht ganz gleichgültig seyn werden. Ich hätte ihre Anzahl leicht vermehren können, wenn ich alles hätte sagen wollen, was ein so fruchtbarer Gegenstand mir merkwürdiges darbot. Die Bestimmung der Urschrift setzte mir bey ihrer Abfassung Gränzen, die ich auch bey der Uebersetzung nicht allzuviel habe überschreiten wollen.

Chr. a' Mechel inv.

Wer das Leben eines großen Mannes beschreibt, der sein Jahrhundert durch einen beträchtlichen Grad von Aufklärung ausgezeichnet hat, macht immer eine Lobrede auf den menschlichen Geist. Es sollte sich aber niemand der Darstellung eines so interessanten Gemähldes unterziehen, der nicht mit der vollkommensten Kenntniß der Wissenschaften, derer Fortschritte darinn bemerkt werden müssen, alle Annehmlichkeiten der Schreibart verbindet, welche zum Lobredner erforderlich sind, und von denen man behauptet, daß sie sich selten mit dem Studium abstrakter Wissenschaften vertragen. Wenn schon der Biograph einerseits der Nothwendigkeit überhoben ist, seinen an sich schon großen Gegenstand durch zufälligen Schmuck zu verschönern, so macht ihn doch, wenn er sich auch nur an Thatsachen hält, nichts von der Verbindlichkeit los, diese mit Geschmack zu ordnen, mit Deutlichkeit darzustellen und mit Würde zu erzählen. Er soll die Mittel anzeigen, derer die Natur sich bedient, große Männer hervorzubringen; er soll den Umständen nachspühren, die ihr bey Entwicklung vorzüglicher Talente behülflich gewesen sind; und, indem er durch umständliche Anführung der gelehrten Arbeiten des Mannes, den er lobt, zeigt, was er für die Wissenschaften gethan hat: muß er nicht vergessen, den Zustand anzuzeigen, in welchem diese sich vor seiner Erscheinung befanden, und auf diese Art den Punkt bestimmen, von wo er ausgegangen ist.

Ich habe schon damals, als ich mich anheischig machte, dieser Versammlung das Leben des unsterblichen EULERS zu schildern, alle diese Verbindlichkeiten gekannt, und gefühlt, wie schwer es mir seyn würde, sie alle zu erfüllen — um so mehr gefühlt, als außer dem durch den Schmerz über den Verlust meines unvergeßlichen Lehrers vermehrten Bewußtseyn meines Unvermögens, die engen Gränzen einer akademischen Rede, mir, wie ich voraussah, nicht erlaubten allen Pflichten eines Biographen ein Genügen zu leisten. Ich gebe also hier, was die Umstände mir zu geben erlauben: einen Versuch über das Leben des großen Mannes; und bin zufrieden, daß ich dadurch einige Blumen auf das Grab meines theuren Lehrers zu streuen und jemanden, der sich stark genug fühlt, eine seiner würdige Lobschrift zu verfertigen, die nöthigen Materialien zu liefern Gelegenheit gehabt habe.

*   *
*

Leonhard Euler, Professor der Mathematik, Mitglied der kayserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, gewesener Director der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, der Pariser und der Londner Gesellschaften der Wissenschaften, so wie vieler andrer Mitglied, ward gebohren zu Basel, den $\frac{4}{15}$ten April 1707. Sein Vater war: Paul Euler, damals designirter Prediger zu Riehen, seine Mutter: Margaretha Brucker, aus einem Geschlechte, das der Welt durch verschiedne Gelehrte dieses Namens rühmlich bekannt ist.

Die ersten Jahre seiner Kindheit brachte er in Riehen zu; und wahrscheinlich hatte er diesem ländlichen Aufenthalte, in einem Lande, wo überhaupt die Sitten sich langsamer als anderswo verschlimmert haben, und dem Beyspiel seiner Eltern jene Einfachheit des Characters und jene Unbefangenheit der Sitten zu danken, die ihn sein ganzes Leben durch ausgezeichnet und vermuthlich allein in den Stand gesetzt haben, die lange und glänzende Laufbahn zu vollenden, die seinen Namen unsterblich gemacht hat.

Seinen ersten Unterricht erhielt er von seinem Vater, der als ein Liebhaber der mathematischen Wissenschaften und als ein Schüler des berühmten Jacob Bernoulli, nicht ermangelte, auch seinen Sohn, sobald es seine Jahre zuließen, in der Mathematik zu unterrichten. Er dachte nicht, daß dieses Studium, das für seinen zur Theologie bestimmten Sohn nur unterrichtender Zeitvertreib seyn sollte, bald ein Gegenstand der ernstlichsten und hartnäckigsten Anstrengung werden würde. Aber der Saame war einmal in die Seele des jungen Geometers gelegt, und schlug in kurzem unvertilgbare Wurzeln. Euler war zwar zu gut organisiert, um ein ausschließendes Talent für die Mathematik zu zeigen: aber er fühlte doch, daß dies sein eigentlicher Beruf war, und blieb ihm getreu.

Glücklicherweise dachte sein Vater lange nicht daran, ihn von einem Studium abzuziehn, das er selbst zu sehr liebte, und dessen Einfluß auf die Ausbildung der Geisteskräfte, so wie seinen Nutzen in allen Zweigen menschlicher Kenntnisse er zu gut kannte, um es ihm ernstlich zu untersagen. Also hatte das Genie des jungen EULERS alle Musse sich zu entwickeln, und diese Entwickelung geschah mit jener Schnelligkeit, die immer außerordentliche Gaben verkündigt und die der Vorbote seiner künftigen Größe war.

Nachdem er durch den väterlichen Unterricht in den Stand gesetzt worden war, die akademischen Hörsäle zu besuchen, ward er nach Basel geschickt, wo er den Vorlesungen der Professoren regelmäßig beywohnte. Sein ungeheures Gedächtnis setzte ihn in den Stand, schnell alles zu fassen, was nicht Geometrie war, um dieser Lieblingswissenschaft den ganzen Rest seiner Zeit widmen zu können. Mit einer so ausgezeichneten Neigung zur Mathematik und einem durch große Fortschritte immer mehr angeflammten Geiste mußte er nothwendig des grösten damals lebenden Mathematikers, JOH. BERNOULLIS, Aufmerksamkeit auf sich ziehn. Auch unterschied ihn dieser bald von seinen übrigen Zuhörern, und ob ihm gleich seine Geschäfte nicht zuließen, dem jungen Mathematiker, seinen Bitten gemäß, Privat-Unterricht zu geben: so erbot er sich doch ihm alle Sonnabend die Zweifel zu heben, die ihm die Woche durch beym Durchlesen der schwersten Schriften und sonst vorgekommen seyn mochten. Eine herrliche Methode! die aber nur mit einem so feurigen Genie, verbunden mit einem so unermüdeten Fleiße, als EULER besaß, gelingen konnte, der schon damals bestimmt zu seyn schien, einen Lehrer zu übertreffen, welcher selbst Epoche in der Geschichte der Mathematik gemacht hatte.*)

Im Jahr 1723[1]) erhielt er die Magisterwürde, bey welcher Gelegenheit er in einer lateinischen Rede eine Vergleichung zwischen der NEWTONISCHEN und CARTESISCHEN Philosophie anstellte. Nach Erhaltung dieser Akademischen Würde

---

*) Er bot, wie er mir oft erzählt hat, alle seine Kräfte auf, der Zweifel so wenige als möglich zu machen, indem er sich, theils aus Ungeduld, theils aus Ehrgeiz, die vorkommenden Schwierigkeiten selbst zu lösen suchte; und der glückliche Erfolg seiner Anstrengung war eine unversiegbare Quelle des reinsten Vergnügens für den nach Wahrheit dürstenden Geist des jungen Geometers.

1) Die Angabe ist nicht ganz genau. Nach FRITZ BURCKHARDT (*Die Basler Mathematiker DANIEL BERNOULLI und LEONHARD EULER Hundert Jahre nach ihrem Tode gefeiert von der Natur-*

fing er an sich nach dem Willen seines Vaters auf das Studium der Theologie und der morgenländischen Sprachen unter Anleitung des berühmten FREY zu legen, und zwar, so wenig dieses Studium auch seinen Neigungen entsprach, mit nicht geringem Erfolge. Bald aber erhielt er von seinem Vater die erwünschte Erlaubniß sich der Mathematik ganz zu widmen, von der ihn nichts hätte losmachen können; Er nüzte diese Erlaubniß mit verdoppeltem Fleiße, fuhr fort, den ehrwürdigen JOH. BERNOULLI zu Rathe zu ziehn und kam in jene genaue Bekanntschaft mit dessen beyden Söhnen, NICOLAUS und DANIEL, denen die Akademie den Vortheil zu verdanken hat, EULERN besessen zu haben.

CATHARINA I. hatte eben einen Entwurf PETERS DES GROSSEN zur Würcklichkeit gebracht: die Errichtung einer Akademie der Wissenschaften in der Residenz. Die beyden jungen BERNOUILLI's wurden unter sehr vortheilhaften Bedingungen im Jahr 1725 nach Petersburg beruffen, und versprachen bey ihrer Abreise dem jungen EULER, der ihnen gerne dahin folgen wollte, alles anzuwenden, um ihm eine schickliche Stelle zu verschaffen. Sie schrieben ihm das folgende Jahr, daß sie ihren Zweck erreicht hätten, und riethen ihm seine mathematischen Kenntnisse auf die Physiologie anzuwenden.

Ein vorzügliches Talent unternimmt nichts ohne Erfolg. Um Physiologe zu werden, durfte EULER nur wollen. Er ließ sich sogleich bey der medicinischen Fakultät immatrikuliren und besuchte die Hörsäle der vorzüglichsten Aerzte Basels, mit allem dem Eifer, den die Aussicht auf eine glänzende Laufbahn einem muthigen Genie einflößen kann.

Indessen war dieses Studium nicht hinreichend, seinen eben so thätigen als vielumfassenden Geist ganz zu beschäftigen. Er verfertigte in der nemlichen Zwischenzeit eine Abhandlung über die Natur und Fortpflanzung des Schalls und eine Antwort auf die Preisfrage der Pariser Akademie über die Bemastung der Schiffe, welche im Jahr 1727 der Ehre des Accessit würdig erkannt wurde. Diese Schrift, und eine der Thesen, die er bey Gelegenheit des ofnen physikalischen Lehrstuhls zu Basel vertheidigte, sind ein Beweis,

---

forschenden Gesellschaft, Basel 1884) wurde EULER „nach dem Wunsche des Vaters am 29. Oktober 1723 unter dem Dekanate von SAMUEL WERENFELS in die theologische Fakultät eingeschrieben und erlangte, siebzehn Jahre alt, die Magisterwürde am 8. Juni 1724 zugleich mit dem drei Jahre jüngeren JOHANNES II BERNOULLI.“ F. R.

daß Herr EULER sehr früh angefangen hat, an Verbesserung der Schiffahrtskunde zu denken, die er in der Folge mit so vielen neuen Entdeckungen und Verbesserungen bereichert hat.

Zum Glücke für unsre Akademie war das Loos, das in Basel bey Besetzung so wol obrigkeitlicher als akademischer Stellen entscheidet, EULERN zuwider[1]), der, wenige Tage nachher[2]), sein Vaterland verlies, um sich nach St. Petersburg zu begeben, wo er einen der Rolle, die er einst in der gelehrten Welt spielen sollte, angemessenern Schauplatz fand, und wo er sich bald auf eine Art zeigte, die der Erwartung vollkommen entsprach, welche seine Freunde und Landsleute HERMANN und DANIEL BERNOULLI *) bey der Akademie erregt hatten.

Nachdem er zum Adjunkt für die mathematische Classe ernannt worden war, ohne daß der Physiologie weiter gedacht wurde, wiedmete er sich ganz, und aus Beruf, einem Studium, dem zu entsagen weder der Wille seines Vaters noch die Betrachtung des wenigen Glücks, das man sich gewöhnlich davon versprechen darf, ihn hatten bewegen können. Er bereicherte die ersten Bände der akademischen Gedenkschriften mit mehrern Abhandlungen, die vorzüglich genug waren, um einen edeln Wetteifer zwischen ihm und D. BERNOULLI zu erregen, der ihr ganzes Leben durch gedauert hat, ohne je-

*) NICOLAUS BERNOULLI war indessen, zu früh für seinen aufkeimenden Ruhm, für seine würdige Familie und für die Akademie gestorben.

1) Die Angabe ist unrichtig: EULER kam gar nicht „ins Los". Nach ALBRECHT BURCKHARDT, *Über den Zustand der Universität Basel im 17. und 18. Jahrhundert,* Basel 1910, war 1718 das System des Loses eingeführt worden mit der Bestimmung: „es wird gelost nach vorhergehender vernünftiger Wahl". Speziell bei der Ernennung von Professoren ging es so zu, daß „zwischen den zwei oder drei Kandidaten, welche durch Prüfung und Abstimmung als die besten von allen Bewerbern waren erfunden worden, das Los entschied. Die definitive Ernennung war Sache des Rates." Daß 1727 neben Bewerbern wie JACOB HERMANN der noch nicht 20jährige stud. theol. LEONHARD EULER gar nicht in den Dreiervorschlag, also auch nicht ins Los kam, ist begreiflich. Die Universität Basel und ihre Einrichtungen können also in keiner Weise dafür verantwortlich gemacht werden, daß EULER sein Vaterland verließ. Die Universität bot ihm auch später Gelegenheit, wieder nach Basel zurückzukehren, als es sich um die Nachfolge von JOHANN BERNOULLI handelte. Siehe das Regenzprotokoll vom 26. Januar 1748, das FRITZ BURCKHARDT in der p. LII genannten Gedächtnisschrift mitgeteilt hat. F. R.

2) Am 5. April 1727. Die Reise ging über Frankfurt, Cassel, Hannover, Hamburg, Lübeck und von da zu Schiff über Reval nach Kronstadt. F. R.

mals in scheele Eifersucht auszuarten, welches, freilich edeln Gemüthern angemessene, aber zwischen manchen Gelehrten leider seltene Betragen hier zum Muster angeführt zu werden verdient.

Die mathematische Laufbahn war, als Herr EULER sie betrat, nichts weniger als aufmunternd. Ein mittelmäßiger Kopf konnte nicht hoffen sich darinn auszuzeichnen. Das Andenken an die großen Männer, die das Ende des vorigen und den Anfang des jetzigen Jahrhunderts so glänzend gemacht hatten, war noch zu neu. Kaum waren die Schöpfer einer neuen Geometrie, LEIBNITZ und NEWTON todt, und noch hatte man die wichtigen Entdeckungen HUYGHENS, der BERNOULLI, MOIVRE'S, TSCHIRNHAUSENS, TAYLORS, FERMATS und so vieler andrer Mathematiker in frischem Gedächtniß. Was blieb nach einer so glänzenden Periode EULERN übrig? Konnte er hoffen, daß die mit ihren vorzüglichen Gaben so sparsame Natur ein Wunder für ihn thun würde, nachdem sie schon so viele mathematische Köpfe auf einmal organisirt hatte? Er fühlte sich und betrat die Laufbahn mit dem edeln Selbstvertrauen, das das Gefühl eignen entschiednen Werths, ohne welches kein großer Mann entstehen kann, einflößt, und wieß in kurzem, daß seine Vorgänger nicht alle Schätze der Geometrie und Analyse erschöpft hatten, und daß für einen Geist, wie der seinige, noch genug Arbeit übrig war.

In der That konnte es ihm hieran nicht fehlen. Die Infinitesimalrechnung war noch zu nah an ihrer Entdeckungsepoche, als daß sie schon einen beträchtlichen Grad von Vollkommenheit hätte erreicht haben können. Die Mechanik, die Dynamik, besonders die Hydrodynamik und die physische Astronomie fühlten noch die Unvollkommenheit dieser neuen Rechnungsart. Die Anwendung der Differentialrechnung hatte zwar keine Schwierigkeit; destomehr aber die Kunst zu integriren, das ist von den Elementen zu den Größen selbst zurück zu kehren. Eine Menge Beweise über die Eigenschaft und die Natur der Zahlen, die FERMAT entdeckt hatte, waren mit ihm gestorben. Die Artillerie und die Navigation gründeten sich mehr auf einen Haufen zweckwidriger und oft sich selbst widersprechender Erfahrungen als auf ein festes Lehrgebäude. Die Unregelmäßigkeiten in der Bewegung der himmlischen Körper, und vorzüglich die Verwickelung der Kräfte, die auf die Bewegung des Mondes würken, waren oft der Gegenstand fruchtloser Bemühung, selbst der grösten Mathematiker gewesen. Die praktische oder beobachtende Astronomie rang noch mit den Unvollkommenheiten der Werkzeuge, besonders der Sehröhren, zu derer Verfertigung noch keine sichere Regeln vorhanden waren. Euler wandte nach und nach seine Blicke nach allen diesen verschiednen Gegenständen: er erweiterte die Gränzen der so unvollkommenen Integral-Rechnung, ward der Erfinder des Calculs mit Kreis- oder Winkelgrößen; stellte viele Beweise Fermats wieder her; vereinfachte eine unbeschreibliche Menge analytischer Operationen; und diese mächtigen Hülfsmittel, verbunden mit der erstaunenden Leichtigkeit, mit der er die verwickeltsten Ausdrücke zu behandeln wußte, setzten ihn in den Stand, neues Licht über alle Theile der Mathematik zu verbreiten.

Indessen war Herr Euler noch nicht lange bey der Akademie gewesen, als ein Zusammenfluß von verschiedenen Umständen ihn auf immer von der Laufbahn abzuziehn drohten, die ihn seine eigne Neigung hatte betreten lassen. Der Hintritt der Kayserinn Catharina I. drohte der Akademie den Untergang, als einem Institute, das ohne handgreiflichen Nutzen zu stiften, dem Staate beträchtliche Summen kostete. Man verfehlte, wie oft geschieht, den rechten Gesichtspunct, aus dem dergleichen gelehrte Gesellschaften in Rücksicht auf ihren Nutzen und Einfluß betrachtet werden müssen, oder man kannte ihn vielmehr gar nicht. Die Akademisten mußten indessen ihre Maasregeln nehmen, um nicht durch die Aufhebung ihres Corps überrascht zu werden, und Euler entschloß sich, Dienste bey der Flotte zu nehmen. Der Admiral Sievers, der Eulers Werth kannte, und ihn als einen Fund für die aufkeimende Russische Marine ansah, bot ihm eine Lieutenantsstelle mit dem Versprechen schleuniger Beförderung an. Glücklicherweise änderten sich die Umstände zum Vortheil der Akademie, die unter der Kayserinn Anna neue Festigkeit bekam; und als Hermann und Bülffinger im Jahr 1730 in ihr Vaterland zurück kehrten, erhielt Herr Euler die Stelle eines Professors der Naturlehre, welcher er bis 1733 vorstund, da sein Freund, Daniel Bernoulli, die Akademie verlies, und Eulern zum Nachfolger bekam.

Die außerordentliche Menge Abhandlungen, welche Herr Euler bis auf diesen Zeitpunkt der Akademie vorgelesen, geben schon in dieser ersten Zeit seiner akademischen Laufbahn einen Beweis seiner großen Fruchtbarkeit, seiner Arbeitsamkeit, und der Leichtigkeit, mit der er die schwersten und verwickeltsten Fragen aufzulösen wußte. Von seinem eisernen Fleiße gab er noch ein auffallenderes Beyspiel, als im Jahr 1735 eine Berechnung*) gemacht werden sollte, die Eile hatte, zu der verschiedene Akademiker einige Monate Zeit haben wollten, und die er in drey Tagen vollendete. Aber wie theuer mußte er diese Anstrengung bezahlen! sie zog ihm ein hitziges Fieber zu, das ihn bis an den Rand des Grabes brachte. Seine Natur siegte zwar und er genas, aber mit dem Verlust des rechten Auges, welches ihm ein Absceß raubte, der sich während der Krankheit formirt hatte.

Der Verlust eines so kostbahren Organs würde für jeden andern ein mächtiger Beweggrund gewesen seyn, sich zu schonen, und das ihm übrige Auge zu erhalten; aber die Arbeit war ihm durch eine beständige Gewohnheit so zum Bedürfniß geworden, daß er selbst die ersten Bedürfnisse des Menschen, Nahrung und Schlaf oft darüber vergaß.

Das erste seiner größern Werke, seine Mechanik, in zween Quartbänden, erschien nur ein Jahr nach jenem unglücklichen Vorfall. Die durch die Erfindung der Differenzial- und Integral-Rechnung in allen Zweigen der mathematischen Wissenschaften hervorgebrachte Revolution hatte auch in der Lehre von der Bewegung beträchtliche Veränderungen verursacht. NEWTON, BERNOULLI, HERMANN u. a. m. auch EULER selbst, hatten diesen wichtigen Theil der angewandten höhern Mathematik mit einer großen Anzahl neuer Entdeckungen bereichert. Indessen war außer zwey oder drey Werken über die Mechanik, derer Unvollkommenheiten EULERN nicht unbekannt seyn konnten, nichts da, das den Namen eines Lehrbuchs verdient hätte. Er bemerkte mit Unzufriedenheit, daß NEWTONS Grundsätze der natürlichen Philosophie, und HERMANNS Phoronomie, so vortreflich übrigens diese Werke sind, unter dem geheimnißvollen synthetischen Gewande nicht so brauchbar waren, als sie es zu seyn verdienten, weil sie beynahe absichtlich die Wege verstecken, auf welchen ihre Verfasser zu so wichtigen Entdeckungen gelangt sind. Um diese Wege aufzufinden, bot er alle die analytischen Kunstgriffe auf, die er so sehr in seiner Gewalt hatte, und mit derer Hülfe es ihm gelungen war, so viele Probleme aufzulösen, an die vor ihm sich niemand gewagt hatte. Er verband

*) Es waren Tafeln, die Mittagsgleichung aus zwo beobachteten gleichen Sonnenhöhen, für jeden Grad Abweichung der Sonne, von einer bis achtzehn Stunden Unterschied der Beobachtungszeiten, bis auf Terzien, für die St Petersburgische Polhöhe zu finden.

seine eignen Entdeckungen mit denen seiner Vorgänger, brachte sie in eine systematische Ordnung, und lies sie im Jahr 1736 bey der Akademie drucken.

Wenn Deutlichkeit der Begriffe, Bestimmtheit des Ausdrucks und planmäßige Anordnung nöthige Eigenschaften eines klassischen Werkes sind, so verdient das EULERSCHE über die Mechanik diesen Namen in hohem Grade. Wie könnte man auch die Dunkelheit und Verworrenheit in dem Werke eines Mannes vermuthen, der über die abstraktesten und tiefsinnigsten Untersuchungen Licht zu verbreiten gewußt hat? Jene Eigenschaften sind so gar lange nicht die wichtigsten dieses Werks. Es setzte den Ruf EULERS fest, und erwarb ihm eine Stelle unter den ersten lebenden Meßkünstlern; und dies ist viel gesagt, wenn man bedenkt, daß JOHANN BERNOULLI noch lebte. Nur ein außerordentlicher Geist konnte mit so schnellem Schritte vorwärts eilen, um den mit dem Beyfall seiner Zeitgenossen und dem Ruhm so vieler Siege geschmückten rüstigen Greis einzuhohlen, der so viele mathematische Ausforderungen ausgetheilt und angenommen, und nie den Kampfplatz ohne Ehre verlassen hatte.

Ich habe schon oben bemerkt, daß Herr EULER von seiner Aufnahme an, die akademischen Commentarien mit einer großen Anzahl Abhandlungen bereichert hatte, derer jede das Gepräge seines außerordentlichen Genies an sich trägt. Die Theorie der krummen Linien, an denen damals alle Meßkünstler ihre Kräfte und die Vortheile der neuen Infinitesimal-Rechnung versuchten, erhielt durch ihn die beträchtlichsten Verbesserungen, so wie die Integral-Rechnung, die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen, der unendlichen Reihen, der Bewegung der himmlischen Körper und der Anziehung der sphäroidisch-elliptischen Körper, und viele andere Untersuchungen, davon der hundertste Theil zugereicht haben würde, jeden andern berühmt zu machen. Was aber EULERS Ruhm vollendete, und seine große Ueberlegenheit in der Analytik außer allen Zweifel setzte, war die Auflösung des durch den Streit zwischen den beyden Brüdern JAKOB und JOHANN BERNOULLI so berühmten Isoperimetrischen Problems, welches jeder der ebengenannten großen Mathematiker aufgelößt haben wollte, obschon es keiner in seinem ganzen Umfang kannte. Die Anzahl und der Werth aller in diesem Zeitraum erschienenen Abhandlungen muß jeden in Verwunderung setzen, der nur einen flüchtigen Blick auf das Verzeichnis derselben wirft; und man begreift kaum, wie ein einziger Gelehrter so vielen Arbeiten gewachsen seyn konnte.

Freilich nahm aber auch der so außerordentlich arbeitsame Mann an keiner der Zerstreuungen Theil, in derer Wirbel die einem großen Ruf folgenden Verbindungen einen allgemein bewunderten Gelehrten so leicht hineinziehn können, und die man seiner Jugend und seinem muntern und für den gesellschaftlichen Genuß geschaffenen Character gern verziehen haben würde. Seine Erholungsstunden widmete er der Tonkunst; aber auch an das Clavier brachte er seinen geometrischen Geist mit. Indem er sich den angenehmen Empfindungen der Harmonie überlies, vertiefte er sich in Untersuchungen über die Ursachen ihrer Würkung, und mitten unter seinen Accorden berechnete er musikalische Verhältnisse. Man kann ganz eigentlich sagen, daß sein Versuch einer neuen Theorie der Tonkunst, der im Jahr 1739 erschien, eine Frucht seiner Erholungsstunden ist.

Dieses tief gedachte und mit neuen, oder doch aus einem neuen Gesichtspunkte dargestellten, Ideen erfüllte Werk hat indessen kein sonderlich Aufsehn gemacht: vielleicht nur deswegen, weil es zuviel Mathematik für den Tonkünstler, und zuviel Musik für den Mathematiker enthält. Unterdessen findet man darinn, ohne Rücksicht auf die zum Theil auf PYTHAGORISCHE Grundsätze gebaute Theorie, eine Menge für den Instrumentenmacher und den Tonsetzer wichtige Fingerzeige. Ueberdies ist die Lehre von den Tonarten etc., mit einer Deutlichkeit und Bestimmtheit vorgetragen, die alle Werke EULERS bezeichnen.

Was die Theorie selbst betrift, deren physikalischer Theil keinem Zweifel unterworfen ist, so geht Herr EULER von dem Grundsatz aus: daß die Vorstellung jeder Vollkommenheit Vergnügen erweckt; daß Ordnung eine der Vollkommenheiten ist, die in unsrer Seele angenehme Empfindungen erregen, und daß folglich das Vergnügen, so uns eine schöne Musik gewährt, in der Vorstellung der Verhältnisse liegt, die die Töne unter sich haben, sowol in Rücksicht ihrer Dauer als der Anzahl der Luftschwingungen, aus denen sie entspringen. Dieser psychologische Grundsatz, auf alle Theile der Tonkunst angewandt, dient der EULERSCHEN Theorie zur Grundlage.

Man hat diese Erklärung unbefriedigend gefunden; und da es nicht in der Macht des Meßkünstlers ist, Gefühle zu berechnen, so ist es schwer, die Richtigkeit jenes Grundsatzes zu beweisen. Zugegeben aber, daß er wahr ist, so muß man gestehn, daß die Anwendung desselben auf die ganze musikalische Theorie nicht glücklicher seyn konnte.

Schon vor der Bekanntmachung dieses Werks hatte Herr EULER eine Anleitung zur gemeinen Rechenkunst herausgegeben. Verschiedene Akademiker hatten sich nemlich auf Verlangen des Präsidenten anheischig gemacht, Handbücher zum Unterrichte der Jugend zu verfertigen, und der gröste Analyste glaubte sich nicht durch eine Arbeit zu erniedrigen, die zwar weit unter seinen Kräften war, die aber der Zweck adelte zu dem man sie bestimmte. Die Bereitwilligkeit und der Eifer, womit er außerordentliche Aufträge zu übernehmen und auszuführen gewohnt war, zogen ihm dergleichen mehrere zu, und unter andern die Aufsicht über das geographische Departement, welche ihm im Jahr 1740 von dem hohen dirigierenden Senat aufgetragen wurde.

Als die Königliche Akademie der Wissenschaften zu Paris, welche schon im Jahr 1738 EULERS Abhandlung über die Natur und die Eigenschaften des Feuers gekrönt hatte, 1740 die wichtige Frage über die Ebbe und Fluth aufwarf, hatte Herr EULER eine neue Gelegenheit, alle Kräfte seines Genies aufzubiethen. Seine Abhandlung über diese schwere die verwickeltesten Rechnungen fodernde Aufgabe ist ein Meisterstück der Geometrie und Analyse. Er bekam zwar nicht den ganzen Preis, theilte ihn aber mit zween seiner würdigen Nebenbuhler: D. BERNOULLI und MACLAURIN. Die Akademie hat wol schwerlich jemals bey Austheilung ihrer Preise eine so glänzende Concurrenz gesehn, und ich möchte wol behaupten, daß sie noch auf keine ihrer Fragen drey Abhandlungen von so entschiedenem Werthe erhalten hatte.

EULERS Schrift empfahl sich besonders durch die Deutlichkeit, mit der sie die Würkungen erklärt, welche die Kräfte der Sonne und des Mondes ausschließlich auf das Meer äußern; durch die vortreffliche Bestimmung der Gestalt der Erde, insofern sie durch die Würkungen dieser beyden Kräfte verändert wird; durch die Geschicklichkeit, mit der EULER dasjenige ergänzt, was seinen Bestimmungen durch die Würkungen der Trägheit des Wassers abging, die er im Anfang zu vernachläßigen gezwungen gewesen war; durch eine Menge glücklicher Integrationen, die die Betrachtung der Schwingungen des Meeres erforderte, und endlich durch den außerordentlichen Scharfsinn, womit er die vorzüglichsten Erscheinungen der Ebbe und Fluth aus seiner Theorie zu erklären im Stande ist.

Nichts ist fähiger das Zutrauen zu vermehren, welches die erhabenen und mit den Beobachtungen so übereinstimmenden Untersuchungen EULERS über diesen großen Gegenstand verdienen, als das Zusammentreffen mit BERNOULLI. So verschieden die Grundsätze sind, von denen diese großen Meßkünstler ausgegangen waren, so sehr kamen sie an vielen Stellen miteinander überein, wie zum Beyspiel in der Bestimmung der Ebbe und Fluth unter den kalten Erdgürteln. So scheint die Wahrheit zuweilen sich zu vervielfältigen, um sich ihren wahren Vertrauten auch dann mitzutheilen, wenn sie ihr auf verschiedenen Wegen nachspühren.

Ueberhaupt haben EULER und BERNOULLI, unter denen, wie ich schon oben angemerkt habe, beständig ein edler Wettstreit herrschte, sich oft in physisch-mathematischen Untersuchungen begegnet. Dieser hatte zuweilen über jenen einige Vortheile, die er einer größern Bestimmtheit physikalischer Grundsätze zu danken hatte. Er lies sich die Mühe nie verdrießen, Vordersätze, die seine Rechnungen erforderten, durch viele mit großer Geschicklichkeit und Ueberlegung angestellte Versuche zu berichtigen: EULER, den sein feuriger Geist zur Vollendung spornte, hat nur selten Versuche gemacht. Voll Zuversicht auf sein natürliches Gefühl in Unterscheidung des Wahren und Falschen, und auf seine Fertigkeit nach Combinationen und Aehnlichkeiten zu schätzen, machte er Hypothesen, die oft zu kühn waren, aber seine Ueberlegenheit in der Analyse machte mehrentheils alles wieder gut; und in der Vereinfachung analytischer Formeln, in der Kunst sie auf die Erfahrung anzuwenden und sichere Resultate daraus herzuleiten, hat er BERNOULLI und jeden andern Mathematiker seiner Zeit weit hinter sich gelassen.

Da ein ausgebreiteter Briefwechsel nicht immer der sicherste Maasstab des gelehrten Rufes ist, indem mancher seinen Ruf nur seinem Briefwechsel zu verdanken hat; so ist es nicht wesentlich hier zu bemerken, daß EULERS Verdienste ihn schon früh in schriftliche Verbindung mit den größten Mathematikern gesetzt haben. Merkwürdiger ist es, daß sein Briefwechsel mit dem großen JOHANN BERNOULLI schon 1727 angefangen, und bis an den Tod desselben, der 1748 erfolgte, ununterbrochen fortgedauert hat. Der Nestor der Geometer hielt es nicht unter seiner Würde, seinen ehemaligen Schüler um Rath zu fragen, und oft seine Arbeiten dessen Urtheil zu unterwerfen.*)

*) Um einen deutlichen Beweis von dem großen Vertrauen zu geben, welches BERNOULLI

Wir kommen nun auf einen in dem Leben EULERS merkwürdigen Zeitraum. Die Mannigfaltigkeit und der glänzende Erfolg seiner Schriften hatte seinen Namen durch ganz Europa getragen, und ihm schon verschiedene vortheilhafte Anträge zugezogen, die er aber immer von sich abgelehnt hatte, als ihm im Jahr 1741 von dem Preußischen Gesandten, Grafen VON MARDEFELD, der Vorschlag gethan wurde, in seines Königs Dienste zu treten. Die alte Königliche, von LEIBNITZ gestiftete Gesellschaft, hatte um diese Zeit neue Kräfte durch die Aufmerksamkeit erhalten, die ihr FRIEDRICH II. seit seiner Thronbesteigung geschenkt hatte. Er hatte den Seiner würdigen Entschluß gefaßt, das alte Institut umzuschmelzen und eine Akademie der Wissenschaften zu errichten, und zu diesem Zweck berief er Herrn EULER in seine Dienste. Der wankende Zustand der hiesigen Akademie unter der Regentschaft gab den an sich schon vortheilhaften Bedingungen noch mehr Gewicht. Herr EULER nahm also des Königs Einladung an, und verlies mit seiner Familie St. Petersburg, im Junius 1741, um in einer unter dem Schutze eines gekrönten Weisen entstehenden Akademie Glanz zu geben und zu empfangen.

Er kam in Berlin an und erhielt sogleich ein schmeichelhaftes Zeichen der Aufmerksamkeit des Königs, der ihm aus dem Lager bey Reichenbach mitten unter seinen kriegerischen Beschäftigungen schrieb; dagegen aber fand er die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften beynahe in den letzten Zügen. Der den Wissenschaften immer nachtheilige Krieg hatte die gnädigen Absichten des Monarchen vereitelt oder doch aufgeschoben. Indessen bildete sich eine neue gelehrte Gesellschaft, die zum Theil aus den Gliedern der

---

schon früh in EULERS Kenntnisse setzte, darf ich nur folgende Stelle aus einem seiner Briefe[1]) anführen:

„De caetero gratissimum mihi fuit intelligere, quod ad admirationem usque Tibi placuerint, „quae scripsi de oscillationibus verticalibus, propter simplicitatem expressionis et insignem usum, „quem praestare possunt in explicandis navium ponderibus; Maluissem autem, ut ipse quoque cal- „culum fecisses ex tuo ingenio, quo mihi patuisset, annon in ratiocinando erraverim. Nam ingenue „fateor, me tuis luminibus plus fidere quam meis. Quae uberius affers, Vir excell. de Isoperimetri- „cis, credo equidem, Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam expendisse, ita ut vix „quicquam restet, quod acerimam tuam sagacitatem subterfugere potuerit etc."

So schrieb der gröste Mathematiker dieser Zeit an den damals kaum dreyßigjährigen EULER.

1) Der Brief stammt vom 7. März 1739 und ist von G. ENESTRÖM abgedruckt in Biblioth. Mathem. 6, 1905, 19—24. Die Wiedergabe bei FUSS enthält einige Abweichungen, von denen aber nur „in explicandis navium ponderibus" statt „in explorandis n. p." hervorgehoben zu werden braucht. F. R.

alten Societät, zum Theil aber aus andern Gelehrten zusammengesetzt war, unter denen sich auch Herr EULER befand, der dann den letzten Theil der Berlinischen Miscellaneen mit fünf Abhandlungen bereicherte, die unstreitig unter die besten dieser Sammlung gehören. Ihnen folgte mit einer unbegreiflichen Schnelligkeit jene große Menge der wichtigsten Untersuchungen nach, die in den Bänden der Memoiren zerstreut sind, welche die Akademie seit ihrer Stiftung jahrweise regelmäßig herausgegeben hat.

Diese außerordentliche Menge von Abhandlungen über alles, was die mathematischen Wissenschaften wichtiges, schweres, großes enthalten, in denen man immer neue Ideen, oft erhabene Wahrheiten und zuweilen die wichtigsten Entdeckungen findet, muß uns um so viel mehr in Erstaunen setzen, da Herr EULER nicht aufhörte, auch der hiesigen Akademie, welche ihm von 1742 an, eine Pension ausgesetzt hatte, regelmäßig Abhandlungen einzuschicken. Die Commentarien sind zur Hälfte mit den Früchten seiner bewunderungswürdigen Fruchtbarkeit angefüllt. Wer diese schnelle Vermehrung seiner Arbeiten betrachtet, kann sich kaum erwehren zu denken, daß die erhabensten Meditationen, die verwickeltsten Rechnungen, ihm blos die Mühe des Abschreibens gekostet haben; und die Nachwelt wird Mühe haben zu glauben, daß das Leben eines Mannes zugereicht habe, die Schriften hervorzubringen, derer Verzeichniß dieser Lobrede angehängt ist.[1])

Unter die außerordentlichen Arbeiten oder besondern Werke dieses Zeitraums gehört die allgemeine Methode, krumme mit irgend einer Eigenschaft des *Maximums* oder *Minimums* begabte Linien zu finden. Schon als Herr EULER sich mit der Auflösung des Isoperimetrischen Problems beschäftigte, hatte er den großen Nutzen dieser Untersuchung, so wol in der reinen Analysis, als in der Behandlung physikalischer Aufgaben, erkannt. Er hatte bemerkt, daß alle krumme Linien, die diese Art Aufgaben darbieten, irgend ein Maximum oder Minimum enthalten, und daß man viele derselben durch die Isoperimetrie finden kann. Er behauptete sogar, daß alle natürliche Erscheinungen eben so gut aus den End-Ursachen mittelst der Lehre des Größten und Kleinsten, als aus den würkenden Ursachen erklärt werden könnten, wenn man nur immer die Art des Maximums oder Minimums zu bestimmen wüßte, welches die Natur beobachtet hat. DANIEL BERNOULLI hatte

1) Siehe die Anmerkung p. XL. F. R.

sich dieser Methode bedient, um die Gestalt einer gekrümmten elastischen Feder zu bestimmen, war aber auf eine Differenzial-Gleichung vom vierten Grade gekommen, die er nicht im Stande gewesen war, auf die allgemeine Gleichung für die elastische krumme Linie zurück zu bringen. Er meldete dies Herrn EULER mit der Muthmaßung: daß die um eine oder mehrere Mittelpunkte der Kräfte beschriebenen Trajectorien durch die nemliche Methode bestimmt werden könnten. Dieser nahm also den wichtigen Gegenstand nochmals vor und im Jahr 1744 erschien zu Lausanne eine vollständige Abhandlung über das Isopermetrische Problem, von welcher man behaupten kann, daß ihr Verfasser darinn den ganzen Schatz der erhabensten Analyse verschwendet hat. Sie enthält auch die ersten Ideen zu dem Variationencalcul, den EULER in der Folge mit dem berühmten LAGRANGE weiter ausgearbeitet hat.

In dem nemlichen Jahr 1744, in welches zugleich die Wiederherstellung der Akademie und die Ernennung EULERS zum Director der mathematischen Classe fällt, erschien auch seine allgemeine Theorie der Bewegung der Cometen und Planeten, und seine Abhandlung über die Magneten ward von der Pariser Akademie gekrönt.[1])

Die Lehre, welche er über die Ursachen der magnetischen Erscheinungen in der Preis-Abhandlung vorträgt, ist zu bekannt, als daß ich nöthig hätte viel davon anzuführen; da aber doch der Gegenstand mehr als kein anderer der hier vorkommenden Materien in dem Fassungskreise eines jeden Lesers liegt; so kann ich sie nicht ganz mit Stillschweigen übergehen. Herr EULER geht von dem CARTESISCHEN Grundsatze aus, daß der Umlauf einer unendlich feinen und elastischen Materie durch die unmerklichen Canäle der magnetischen Körper die Ursache der sonderbaren Erscheinungen ist, welche jene uns darbieten. Er stellt sich die Poren des Magnets als so viele Oefnungen zusammenhängender paralleler und enger Röhrchen vor, die innwendig, so wie die Adern und Lymphatischen Gefäße des thierischen Körpers mit Klappen versehen sind. Diese engen Röhrchen, nimmt er an, lassen nur die in dem Aether befindliche und von seiner Schnellkraft fortgestoßene feine Materie durch, deren Rückkehr die Klappen hindern und die bey ihrem Aus-

1) Die Abhandlung *De magnete* wurde erst 1746 gekrönt. Allerdings war die Preisaufgabe schon 1742 gestellt worden; wegen unzureichender Beantwortung wurde sie aber 1744 und dann wieder 1746 wiederholt. F. R.

fluß durch den Widerstand des Aethers gezwungen wird, sich zu beyden Seiten des magnetischen Körpers zu wenden, und außer demselben zu den ersten Oefnungen zurück zu kehren, wo sie von neuem durch den Aether hineingezwängt wird und auf diese Art den magnetischen Wirbel zeugt, dessen Daseyn durch die Bildung der Strahlen der auf ein über den Magnet gelegtes Papier gestreuten Eisenfeile sichtbar wird. Durch diese mit vielem Scharfsinn entwickelte Idee erklärt Herr EULER alle Eigenschaften des Magnets; und die Übereinstimmung der Erscheinungen mit der den allgemeinen Naturgesetzen so gemäßen Hypothese hat ihr viele Anhänger geschaft.

In dieses nemliche arbeitvolle Jahr 1744 fällt die Übersetzung der ROBINSSCHEN Artillerie. Der König hatte Herrn EULERS Meinung über das beste in dieses Fach schlagende Werk verlangt. Von ROBINS, der EULERS Mechanik, die er nicht verstund, einige Jahre vorher auf eine grobe Art angefallen hatte, waren neue Grundsätze der Artillerie im englischen erschienen, die Herr EULER dem Könige lobte, indem er sich zugleich anheischig machte, das Werk zu übersetzen und mit Zusätzen und Erläuterungen zu begleiten. Diese Erläuterungen enthalten eine vollständige Theorie der Bewegung geworffener Körper und es ist seit 38 Jahren nichts erschienen, das dem, was Herr EULER damals in diesem schweren Theile der Mechanik gethan hat, an die Seite gesetzt werden könnte. Auch ward der Werth dieses herrlichen Werks allgemein anerkannt. Ein aufgeklärter Staatsmann, der französische See- und Finanzminister TURGOT lies es ins französische übersetzen und in den Artillerie-Schulen einführen;*) und beynahe zu eben der Zeit erschien eine englische Uebersetzung in der grösten typographischen Pracht, die englische Druckereyen einem Werke nur geben können. Indem Herr EULER in dieser Uebersetzung, wo es immer nur thunlich war, Herrn ROBINS Gerechtigkeit widerfahren läßt, verbessert er, mit einer seltenen Bescheidenheit, dessen Fehler gegen die Theorie, und alle Rache, die er wegen des alten Unbills an seinem Gegner nimmt, besteht darinn, daß er dessen Werk so berühmt macht, als es ohne ihn nie geworden wäre. Ich enthalte mich aller Anmerkungen über dies eines großen Mannes so würdige Betragen! Wer versagt ihm wohl Beyfall und Bewunderung?

---

*) S. die folgende Anmerkung (p. LXX).

Dieser Arbeit folgten verschiedne physikalische Untersuchungen nach, darunter die neue Theorie des Lichts und der Farben eine der merkwürdigsten ist. Herr EULER hatte in dem Aether die Ursache der Flamme, der Schwere, der Elektrizität, und des Magnetismus gefunden; er hatte so gar den kleinen Widerstand berechnet, den die himmlischen Körper in ihrer Bewegung durch diese feine Materie leiden. Man begreift also leicht, daß ihm das NEWTONISCHE Emanations-System in Erklärung der Erscheinungen des Lichts kein Genüge leisten konnte. In einer Prüfung dieses Systems, die seiner Theorie des Lichts und der Farben zur Einleitung dient, zeigt er, wie sehr die Voraussetzung des leeren Raums mit den körperlichen Ausflüssen der Sonne und der Fixsterne im Widerspruche ist, deren sich von allen Seiten durchkreuzende Strahlen nothwendig den ganzen Raum anfüllen und den himmlischen Körpern einen ungleich größern Widerstand entgegen setzen müßten als der Aether, dessen Daseyn NEWTON blos aus diesem Grunde geläugnet hatte. Er zeigt, wie unmöglich es ist, daß körperliche Theilchen sich mit einer so unbegreiflichen Geschwindigkeit bewegen können, ohne einander in ihrem Lauffe zu stöhren; Er berechnet den Verlust des Stoffs, den die Sonne bey solchen Ausflüssen leiden müste, und zeigt, daß die ganze ungeheure Masse derselben in wenig Sekunden erschöpft seyn würde. Er leitet endlich aus dem Bau durchsichtiger Körper einen andern eben so starken Einwurf her, indem er anmerkt, daß diese Körper um materiellen Lichtstrahlen von allen Seiten freyen Durchgang zu verstatten, selbst von aller Materie entblößt, oder welches eben so viel ist, daß sie aufhören müssen Körper zu seyn. —

DES CARTES hatte schon die Vermuthung gehabt, daß das Licht sich auf die nemliche Weise als der Schall fortpflanzt. Man kann in der That die auffallende Aehnlichkeit nicht verkennen, die zwischen den Eindrücken des Gesichts und des Gehörs statt findet. Schall und Licht theilen sich uns aus ungleich größern Fernen mit, als die Eindrücke der übrigen Sinne, beyde pflanzen sich in gerader Linie fort, beyde können reflektirt werden. Herr EULER hält sich an diese Aehnlichkeit, und, indem er die Vergleichung weiter führt, zeigt er, daß das Licht aus einer zitternden Bewegung des Aethers entsteht, so wie die Ursache des Schalls in einer ähnlichen Bebung der Luft liegt; daß der Unterschied der Farben, so wie die Verschiedenheit der Töne von der Schnelligkeit der Schwingungen abhängt; und daß der Schall, indem er durch der Fortpflanzung fähige Körper geht, so wie der Lichtstrahl, eine

Veränderung seiner Richtung leiden und auf gewisse Art gebrochen werden kann. Dieser mit aller Schärfe, die ein physikalisches Raisonnement haben kann, bewiesene Grundsatz setzt Herrn EULER in den Stand, auf eine leichte und der Natur angemessene Art alle Erscheinungen des Lichts zu erklären; selbst die verschiedene Brechbarkeit der Lichtstrahlen, die NEWTON nie erklärt hat, folgt so natürlich aus der EULERschen Theorie, daß man das Phänomen mittelst derselben auch *a priori* würde gefunden haben, wenn es nicht schon längst durch die Erfahrung bekannt gewesen wäre.

Um eben diese Zeit, als EULER sich mit Widerlegung des NEWTONISchen Lichtsystems beschäftigte, hatte die WOLFFISCHE Philosophie in Berlin ihren grösten Glanz erlangt; man sprach von nichts als Monaden und dem zureichenden Grunde. Die Ausdehnung, welche WOLFF und seine Anhänger dem letzten Grundsatz gaben, war für EULERN nur ein Gegenstand gesellschaftlicher Scherze; aber die Monadenlehre war in seinen Augen ein zu wichtiger Irrthum, als daß er seine Meinung darüber nicht öffentlich hätte sagen sollen. Dies that er in seinen Gedanken über die Elemente der Körper, wo er zeigt, daß die einfachen Dinge nicht über alle Vorstellung klein seyn können, ohne unendlich klein oder nichts zu seyn; daß die Kraft der Trägheit eine den Körpern eben so wesentliche Eigenschaft ist, als die Ausdehnung und die Undurchdringlichkeit; daß diese Kraft mit dem den einfachen Dingen zugeschriebenen Vermögen ihren Zustand beständig zu verändern im Widerspruche steht; daß also die einfachen Dinge eben so wenig als EPIKURS Atomen statt finden können, und daß alle aus dem Grundsatz des nicht zu Unterscheidenden dafür hergeleitete Gründe wegfallen. Nach Widerlegung eines Lehrgebäudes, welches seitdem das Schicksahl so vieler anderer zwar großer aber falscher Systeme gehabt hat, setzt Herr EULER an die Stelle der von LEIBNITZ und WOLFF den Monaden zugeschriebnen Eigenschaften, die Kraft der Trägheit oder des Widerstandes als eine schon von LEIBNITZ anerkannte Eigenschaft des Stoffs, die er als den Grund aller sich in der Natur äußernden Veränderungen ansieht. Er bediente sich in der Folge des nemlichen Princips, um die Würkungen des Druckes und des Stosses zu erklären, und um zu beweisen, daß der Stoff nicht denken kann. Dieser Ausfall gegen die damals so beliebte Monadenlehre zog Herrn EULER verschiedne Gegner zu, derer Schriften izt mit dem Lehrgebäude vergessen sind, das sie zu vertheidigen suchten. Man erinnert sich ihrer nur noch als auffallender Beyspiele der Verirrungen, welchen der menschliche Geist zuweilen ausgesetzt ist.

Was den Grundsatz der Kraft der Trägheit betrift, in welcher nach Herrn EULER die Ursache aller Kräfte und aller Gesetze der Bewegung liegt, so ist der Begriff dieser Kraft groß und der Einfachheit gemäs, welche die Natur in allen ihren Gesetzen äußert. Ihre Erkenntniß ist zwar blos metaphysisch, aber ihre Würkungen lassen sich berechnen; und alles, was man von einer Hypothese fordern kann, ist, daß sie zur Erklärung der Erscheinungen zureiche.

Hier wäre wol der Ort, einer Menge anderer philosophischer Untersuchungen zu gedenken, die EULER um diese Zeit in den Schriften der Akademie angestellt hatte, und in denen man mit eben so viel Vergnügen als Bewunderung die gesundeste Physik mit der erhabensten Geometrie verbunden bemerken würde. Dahin gehören die Untersuchungen über die Cometenschweife; über die Nord- und Zodiakal-Scheine; über die Fortpflanzung des Schalls und des Lichts; über Raum und Zeit; über den Ursprung der Kräfte u. a. m. Die Grenzen dieser Akademischen Rede erlauben aber nicht alles merkwürdige anzuzeigen, was in der großen Menge Abhandlungen enthalten ist, die Herr EULER in die Sammlungen so wol unserer als der Berliner Akademie hat einrücken lassen. So glücklich und fruchtbar er in Entdeckung wichtiger mathematischer Wahrheiten gewesen ist, eben so scharfsinnig war er auch in Erklärung physikalischer Erscheinungen. Er war zwar kühn in Voraussetzungen, die die Rechnung rechtfertigen konnte, aber behutsam in Hypothesen, die jener nicht unterworfen sind. Indessen ist er der Urheber glänzender und erhabener Systeme geworden. Die Welt hat den Werth einiger derselben erkannt und die Nachwelt wird über den Werth der übrigen entscheiden: Der Biograph bestrebt sich dieses Urtheil zu erleichtern, ohne ihm vorzugreiffen.

Wir kehren vom Philosophen zum Meßkünstler zurück. Unter allen nützlichen Kenntnissen, die durch die vereinigten Kräfte der Geometrie und Analysis irgend eine beträchtliche Stuffe von Vollkommenheit erreichen können, hatte die Schifffahrtskunde allein noch keinen Vortheil aus dem allgemeinen Fortschritt der physisch-mathematischen Wissenschaften gezogen. Den hydrographischen Theil und die Steuermanns-Kunst abgerechnet, war noch nichts von eigentlichen Mathematikern abgehandelt worden, denn die unvollkommenen Versuche HUYGHENS und des Chev. DE RENAU über die Leitung der Schiffe und ihre Geschwindigkeit können kaum gerechnet werden.[1]) Herr EULER war der erste, der es wagte, die Schifffahrtskunde zu einer vollständigen Wissenschaft zu erheben. Eine im Jahr 1735 erschienene Schrift über die Bewegung schwimmender Körper, die von ihrem Verfasser DE LA CROIX der Petersburgischen Akademie übersandt worden war, gab ihm den ersten Gedanken dazu an die Hand. Es gelang ihm nach einigen glücklichen Untersuchungen über das Gleichgewicht der Schiffe, ihre Stabilität auf ein bestimmtes Maas zu bringen. Der Erfolg dieses ersten Versuchs munterte ihn auf, die Navigation in ihrem ganzen Umfang abzuhandeln, und so entstund das große Werk, welches im Jahr 1749 bey unsrer Akademie herauskam, dessen erster Theil in einer systematischen Ordnung alles begreift, was die Theorie des Gleichgewichts und der Bewegung schwimmender Körper und die Lehre vom Widerstande flüssiger Materien schweres und erhabenes enthält.

Diese allgemeinen Grundsätze sind indessen noch nicht hinreichend. Die Navigation hat es mit schwimmenden Körpern von einer bestimmten Gestalt zu thun. Hier kommt es nicht blos darauf an, Widerstand und Kraft zu berechnen. Das Schiff soll so beschaffen seyn, daß der eine vermindert und die andere vermehrt werde, so viel möglich ist. Es soll dem Bestreben des Wassers, es zu beugen und zu schaukeln, den behörigen Widerstand leisten, und alle Eigenschaften in sich vereinigen, die seine Bestimmung erfordert und möglich macht. Die Theorie muß uns also ausser dem allgemeinen Unterricht über den Bau und die Behandlung der Schiffe, die Mittel lehren, alle Eigenschaften eines guten Fahrzeuges unter sich zu vereinigen, derer einige nur durch Aufopferung anderer erhalten werden können. So kann, zum Beyspiel, die gröste Stabilität und der schnellste Lauf nicht zusammen bestehn. Es ist also von der grösten Wichtigkeit zu wissen, wie viel von jedem Vortheil man den übrigen aufopfern muß. Dies lehrt der zweyte Theil des EULERSCHEN Werkes, wo alles zusammengefaßt ist, was die Kunst des Schiffbauers und

1) FUSS hat hier übersehen, daß seit der *Théorie de la manœuvre des vaisseaux* von RENAU, 1689, und dem Streite ihres Verfassers mit HUYGENS die berühmte Abhandlung von JOHANN BERNOULLI, *Essai d'une nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux*, Basle 1714, erschienen war. Siehe *JOHANNIS BERNOULLI Opera omnia*, Tom. II, p. 1—96. F. R.

des Steuermanns von der neuen Theorie erwarten kann. Er hat in der Folge diesen wichtigen Zweig der angewandten Mathematik mit vielen neuen und nützlichen Aussichten bereichert, die in den Petersburgischen und Berlinischen Sammlungen zerstreut sind; wohin noch zwo Abhandlungen über die besten Mittel den Mangel des Windes bey Fortbringung großer Schiffe zu ersetzen, und über die Würkungen des zweyfachen Schwankens der Schiffe gehören, davon die letztere im Jahr 1759 den Preis bey der Pariser Akademie davon getragen hat.

Durch diese mannichfaltigen Arbeiten ward denn auch die Schiffbaukunst, die aus Mangel sicherer Grundsätze sich so lange blos an hergebrachte Gewohnheitsregeln gehalten hatte, auf einmal mit einer Theorie versehn, die andere Künste nur stuffenweise und nach vielfältigen blinden Versuchen erhalten haben.

Diese Theorie war aber in einer den Leuten vom Handwerke nicht geläufigen Sprache geschrieben; sie setzte überdies mathematische Kenntnisse voraus, die man vom Schiffsbaumeister und vom Steuermann nicht erwarten darf. Also konnte die Ausübung nur dann Vortheil aus EULERS wichtigen Entdeckungen ziehn, wenn man sie von den zu schweren Berechnungen, von den zu verwickelten und zu tiefsinnigen Untersuchungen absonderte. Dies fühlte EULER selbst; und diese Betrachtung, nebst den öftern Unterredungen, die er nach seiner Zurückkunft nach St. Petersburg mit dem Admiral KNOWLES hatte, bestimmte ihn, von der Theorie alles zu entfernen, was nicht genau mit den dem Seemanne nöthigen Kenntnissen verbunden oder ihm weniger faßlich ist, und so entstund die im Jahr 1773 zuerst im Druck erschienene vollständige Theorie des Baues und der Behandlung der Schiffe für alle Seeleute begreiflich gemacht.

Nie hat ein Werk eines Geometers einen glänzendern Erfolg gehabt. Man veranstaltete sogleich eine neue Ausgabe in Paris; man führte es in den Königlichen Seeschulen ein,*) und der König belohnte den Verfasser mit einem

*) Der Brief, den Herr EULER bey dieser Gelegenheit von TURGOT erhielt, ist zu schön, und macht beyden in ihrem Fach grossen Männern zu viel Ehre, als daß ich der Versuchung widerstehn könnte, denselben hier ganz mitzutheilen. Hier ist er:

Geschenk von 6000 L. für die Vortheile die seine zahlreichen Entdeckungen der französischen Nation, so wie allen aufgeklärten Nationen gebracht haben (dies sind die ehrenvollen Ausdrücke der Pariser-Herausgeber der EULERSCHEN Theorie). Es erschien auch, beynahe zu gleicher Zeit, eine italiänische, eine englische und eine russische Übersetzung dieses vortrefflichen Werks, welche letztere Veranlassung ward, daß Herr EULER auch von unserer großen Monarchin ein Geschenk von 2000 Rubel erhielt.

Ich habe hier absichtlich die vornehmsten Arbeiten EULERS über den nemlichen Gegenstand zusammengefaßt, obschon sie in sehr verschiedene Zeitpuncte fallen, weil es angenehm und unterhaltend ist, auf einen Blick zu übersehen, wie viel zwo der nützlichsten menschlichen Kenntnisse, die Schiffbaukunst und die Schifffahrtskunde, den Bemühungen des großen EULERS zu danken haben.

Nun müssen wir wieder um zwanzig Jahre zurück gehn, um EULERS ältere Arbeiten nachzuhohlen. Hier finde ich zuerst mehrere unmittelbare Aufträge des Königs, das Nivelliren des Finow-Kanals, zwischen der Havel und Oder, die Schönebeckischen Saltzwerke, die Wasserwerke zu Sans-Souci, die Lotterie-Plane des CALZAPIGHI und andere Finanzprojekte betreffend, welche Aufträge Herrn EULER Gelegenheit gaben, seine Einsichten unmittelbar zum Nutzen des Staats anzuwenden, indem er denselben vor der Ausführung

---

à Fontainebleau, le 15 Octob. 1775.

„Pendant le tems, Monsieur, que j'ai été chargé du département de la Marine, j'ai pensé „que je ne pouvois rien faire de mieux pour l'instruction des jeunes gens élevés dans les écoles de „la Marine et de l'Artillerie, que de les mettre à portée d'étudier les ouvrages que vous avez „donnés sur ces deux parties des Mathématiques: j'ai en conséquence proposé au Roi, de faire im„primer par Ses ordres votre traité de la construction et de la manœuvre des vaisseaux et une tra„duction françoise de votre Commentaire sur les principes d'Artillerie de Robins.

„Si j'avois été à portée de vous, j'aurois demandé votre consentement, avant de disposer „d'ouvrages qui vous appartiennent; mais j'ai cru que vous seriez bien dédommagé de cette espèce „de propriétè par une marque de la bienveuillance du Roi. Sa Majesté m'a authorisé à vous „faire toucher une gratification de mille Roubles qu'Elle vous prie de recevoir comme un té„moignage de l'estime, qu'Elle fait de vos travaux et que vous méritez à tant de titres.

„Je m'applaudis, Monsieur, d'en être dans ce moment l'interprête, et je saisis avec un véri„table plaisir cette occasion de vous exprimer ce que je pense depuis longtemps pour un grand „homme, qui honore l'humanité par son génie et les sciences par ses mœurs. Je suis etc.

manches schädlichen Projekts, vor mancher unnützen oder lästigen Ausgabe bewahrte. Eine Sammlung von vier und fünfzig handschriftlichen, zum Theil eigenhändigen, Briefen des Königs an Herrn EULER beweiset das grosse Zutrauen, mit dem der Monarch die Einsichten und die Rechtschaffenheit des würdigen Mannes beehrte, den er auch oft in Angelegenheiten der Akademie und der Universität Halle zu Rathe zog.*)

Um die in einem Zeitraum von bald dreissig Jahren gemachten und in den akademischen Sammlungen zerstreuten wichtigen Erfindungen und Erweiterungen der Differenzial- und Integral-Rechnung in ein vollständiges Ganzes zu ordnen, wie schon früh Herrn EULERS Absicht war, mußte ein vorbereitendes Werk vorausgeschickt werden, welches die nöthigen Vorkenntnisse enthielte. Zu diesem Zwecke sollte die Einleitung in die Analysis des Unendlichen dienen, die im Jahr 1748 in Lausanne erschien. In diesem Werke ist die ganze Lehre von den algebraischen und transcendenten Funktionen, ihre Umformung, Auflösung und Entwicklung auseinandergesetzt. Es enthält alles Nützliche und Wissenswürdige über die Eigenschaften und Summationen unendlicher Reihen, und weist einen neuen und merkwürdigen Weg die Exponentialgrösse zu behandeln. Es gibt einen deutlichern und fruchtbarern Begriff von den Logarithmen und deren Gebrauche, und setzt den neuen von EULERN entdeckten Algorithmus der Kreis- oder Winkelgrößen ins Licht. Im zweyten Theile giebt er die allgemeine Lehre von den krummen Linien, mit ihren Abtheilungen und Unterabtheilungen, und in einem Zusatz die Theorie der Körper und ihrer Oberflächen, nebst der daraus entstehenden Gleichungen mit drey veränderlichen Grössen. Den Beschluß dieses wichtigen Werks macht die Entwicklung des Begriffs der doppelt gekrümmten Linien, die aus der Durchschneidung zwoer krummer Flächen entstehn.

Dieser Einleitung folgten dann die Anweisungen zur Differenzial- und Integral-Rechnung, welche unsre Akademie auf ihre Kosten in den Jahren

*) Als WOLFFS Stelle bey der Universität Halle besetzt werden sollte, wandte sich der König an Herrn EULER, der ihm zuerst DANIEL BERNOULLI, und, nachdem dieser den Ruf abgelehnt, SEGNERN vorschlug, welcher die Stelle unter sehr vorteilhaften Bedingungen erhielt. Herr EULER war es auch, der den König bewog, den von WOLFF hinterlassenen physischen Apparat für die Universität zu kauffen. Auch war er es, der auf Befehl des Königs mit HALLERN in Unterhandlung treten mußte, um ihn in Preußische Dienste zu ziehn. HALLERS Forderungen mißfielen und die Sache zerschlug sich.

1755, 1768, 1769 und 1770 hat drucken lassen. Das vornehmste Verdienst des ersten dieser Werke, das den schon von den Erfindern ziemlich zur Vollkommenheit gebrachten Theil der Infinitesimalrechnung enthält, besteht in dem Gesichtspunkte, aus dem Herr EULER die Grundsätze der Differenzialrechnung betrachtet; in dem systematischen Zusammenhange, mit dem sie geordnet sind; in dem darinn herrschenden methodischen Vortrage; in der Deutlichkeit, mit der er den Nutzen dieser Rechnung, in Absicht auf die Theorie der unendlichen Reihen und der Lehre der *Maxima* und *Minima* zeigt. Seine eignen Erfindungen sind mit denen der ersten Urheber untermischt; aber die Spuren des Genies sind unvertilgbar. Auch da, wo der große Geist nicht selbst erfinden kann, bringt er doch die Erfindungen andrer zur Reife, giebt ihren Grundsätzen einen höhern Grad von Simplicität und Evidenz, und leitet neue Schlußfolgen daraus her. Wer verkennt wol diese Zeichen des Genies in EULERS Werken? Jedes Blatt enthält etwas, das nur ihm gehört; aber die Anzeige alles Neuen und Eignen würde zu weitläuftig für diese Schrift werden.

Die Integralrechnung, deren erste Spuren sich in dem Ursprung der Analysis des Unendlichen verlieren, ist noch weit von der Vollkommenheit entfernt, die die letztere erreicht hat. Um von den Elementen zu den Grössen zu gelangen, hat man noch nicht, wie bey der Auflösung der Grössen in ihre Elemente, allgemeine Regeln erfunden. Sollten je dergleichen entdeckt werden, so wird die gerechte Nachwelt gestehn, daß EULER durch die zahllose Menge glücklicher Integrationen, die nur ihm allein gelungen sind, dazu vorbereitet hat. Sein ist der Triumph, die Gränzen dieser erhabnen Wissenschaft weit über die Erwartung der ersten Erfinder hinausgerückt zu haben; und selbst NEWTON, wenn er wieder kommen könnte, würde über die unendlichen Schwierigkeiten erstaunen, die dieser außerordentliche Mann zu übersteigen gewußt hat.

Der dritte Theil der Integralrechnung enthält den neuen Zweig, mit dem er die Analysis bereichert hat: den Variationencalcul. Ich habe schon oben gesagt, daß das Isoperimetrische Problem ihm den ersten Gedanken dazu gegeben hatte, indem er krumme Linien betrachtete, die unendlich wenig von einer gegebenen krummen Linie verschieden sind. Diese Idee ward von dem nachherigen würdigen Nachfolger EULERS in Berlin, Herrn DE LA GRANGE, aufgefaßt, der eine analytische, von allen geometrischen Betrachtungen abgesonderte Aufgabe daraus machte, und dieselbe mittelst der neuen Rechnungsart auflößte, welche in der Folge durch Herrn EULER unter dem Namen des Variationencalculs so fruchtbar an neuen Wahrheiten geworden ist.

Wir haben schon vorhin zu bemerken Gelegenheit gehabt, daß EULERS vielumfassender und thätiger Geist nicht immer in dem obschon sehr weitläuftigen Gebiete der Mathematik blieb. Er machte alles, was nur den mindesten Bezug darauf hatte, zum Gegenstande seines Nachdenkens; er berechnete alles, was sich berechnen ließ. Wir werden sehn, wie viel die Optik, die Naturlehre und die Sternkunde seiner einzigen Theorie des Lichts und der Farben zu danken haben. Die Prüfung der NEWTONSCHEN Theorie hatte ihm schon Gelegenheit gegeben, Untersuchungen über die verschiedene Brechbarkeit der Lichtstrahlen, und über die nachtheilige Würkung der Farbenzerstreuung in den dioptrischen Fernröhren anzustellen, deren Gebrauch man auch aus diesem Grunde schon gänzlich verworfen hatte, indem man sich mit besserm Erfolge der Spiegelteleskope bediente. Die Betrachtung des wundervollen Baues der Augen machte ihn auf eine Zusammensetzung verschiedner durchsichtiger Körper denken, und er schlug im Jahr 1747 aus zween Gläsern zusammengesetzte Objective vor, derer Zwischenhölung mit Wasser angefüllt werden konnte, und von denen er glaubte, daß sie die Mängel der dioptrischen Fernröhre heben würden. Seine Meinung ward von dem berühmten englischen Künstler, DOLLOND, angegriffen, der ihr NEWTONS Autorität engegensetzte. Herr EULER säumte nicht, ihm die Nichtigkeit seiner Behauptungen zu zeigen. Mehrere mit Menisken, derer Hölung mit verschiednen Feuchtigkeiten angefüllt werden konnte, angestellte Versuche bestärkten ihn in seinen Vermuthungen, und DOLLOND, der indessen zweyerley mit verschiedner Brechungskraft begabte Glasarten entdeckt hatte, die zur Prüfung der EULERSCHEN Meinung dienen konnten, krönte dieselbe im Jahr 1757 durch Erfindung der sogenannten achromatischen Fernröhre, die in der Astronomie und Dioptrik Epoche gemacht hat.

DOLLONDS glücklicher Erfolg in Nutzung einer Entdeckung, die er anfänglich als der Erfahrung und NEWTONS Grundsätzen widersprechend angesehn hatte, bestimmte Herrn EULER in seinen Untersuchungen über die Verbesserung dioptrischer Werkzeuge weiter zu gehn. Er suchte vorzüglich den Mängeln abzuhelfen, die aus der Abirrung der Lichtstrahlen und der Kugelgestalt der Gläser entstehn, und gab endlich allgemeine Regeln zur Verfertigung der Teleskope und Mikroskope, von derer Gründlichkeit er sich durch Versuche überzeugt hatte, indem er dergleichen Werkzeuge nach seinen Angaben hatte verfertigen lassen.*)

Diesem Streite mit DOLLOND hat man also eine der wichtigsten Erfindungen dieses Jahrhunderts zu danken, eine Erfindung, die den Astronomen die grösten Dienste geleistet, indem sie ihnen das Beobachtungsgeschäfte erleichtert, und sie in den Stand gesetzt hat, neue Erscheinungen am Himmel zu entdecken.

Die Controvers zwischen EULERN, D'ALEMBERT und DANIEL BERNOULLI über die Bebung der Saiten, ist zwar nur für Meßkünstler wichtig: doch verdient sie hier einige Erwehnung, weil sie die Veranlassung zu vielen vortreflichen Abhandlungen gewesen ist. DANIEL BERNOULLI, der erste, welcher den physikalischen Theil dieser Untersuchungen entwickelt, und die aus den Schwingungen musikalischer Saiten entstehende Bildung der Töne erklärt hat, hielt die TAYLORSCHE Auflösung für zureichend. EULER und D'ALEMBERT, die auf diesen schweren Gegenstand der physischen Mathematik alle Kräfte der Geometrie und Analysis verwendet hatten, zeigten, daß die aus den TAYLORSCHEN Trochoïden hergeleitete Auflösung BERNOULLI's nicht allgemein seyn kann. Diese Controvers ist lange Zeit mit aller wechselseitigen Achtung, die sich Männer von so entschiednem Verdienste schuldig sind, fortgesetzt worden, und

*) Der König selbst, dem er nach seiner Theorie verfertigte Fernröhre zugeschickt hatte, beehrte diese Arbeit mit seinem Beyfall. Ich habe hierüber einen eigenhändigen Brief des Monarchen gefunden, dessen Mittheilung dem Leser ohne Zweifel angenehm seyn wird.

„Je vous remercie des petites Lunettes d'approche qui me sont arrivées à la suite de votre „lettre du 14 de ce mois; et je loue le soin que vous prenez de rendre utile aux hommes la „Théorie que vous fournit votre étude et votre application aux Sciences. Comme mes occupations „présentes ne me permettent pas de les examiner avec l'attention, que mérite tout ce qui me „vient de votre part, je me réserve à le faire, quand j'en aurai plus de loisir. Sur ce je prie „Dieu, qu'il vous ait en Sa sainte et digne garde.

Waldou ce 15 Septembre 1759.

FÉDERIC.

hat eigentlich nur mit ihrem Tode aufgehört.*) Solche Streitigkeiten über Gegenstände aus der vermischten Mathematik sind vielleicht den zu sehr durch die Gewißheit und Evidenz geometrischer Wahrheiten verwöhnten Meßkünstlern zuweilen nöthig, um ein heilsames Mißtrauen bey andern Untersuchungen in ihnen zu erregen, die keiner so großen Augenscheinlichkeit fähig sind.

In einen andern Streit, der nicht so lange gedauert hat, aber mit mehr Bitterkeit von beyden Seiten geführt worden ist, ward Herr EULER im Jahr 1751 verwickelt, als der Professor KÖNIG das allgemeine mechanische Gesetz der kleinsten Würkung angriff, und dem Presidenten VON MAUPERTUIS die Ehre der ersten Entdeckung absprach. Herr EULER hatte übrigens keinen andern Antheil an diesem Streite, als den ihm seine Freundschaft für MAUPERTUIS und die Ehre der Akademie nehmen hieß, und ich führe ihn blos an, weil er Herrn EULER zu verschiednen vortreflichen Abhandlungen Anlaß gegeben hat, und weil mir die Gelegenheit erwünscht ist, bemerken zu können, daß er mit einer seltenen Bescheidenheit MAUPERTUIS Ansprüche auf eine Entdeckung in Schutz nahm, die er sich zum Theil selbst hätte zueignen können, wenn er mehr Eigenliebe oder weniger Rechtschaffenheit besessen hätte.**)

---

*) Ich hatte Herrn BERNOULLI 1776 eine neue Methode EULERS, die Schwingungen der Saiten zu bestimmen, mitgetheilt, die noch allgemeiner war als alle vorigen, indem sie sich auch auf anfängliche Beugungen ausdehnen ließ, derer Natur nicht einmal durch Gleichungen vorgestellt werden kann. Folgender Auszug aus des verewigten Mannes Antwort an mich verdient hier, aus mehr als einer Rücksicht, eine Stelle.

„L'esquisse que vous me faites de la méthode de Mr. EULER m'a fait plaisir; mais elle n'a „changé en rien mes idées sur cette matière; je suis toujours persuadé, que ma méthode donne „*in abstracto* tous les cas possibles; j'avoue cependant que dans certains points de vue, celle de „Mr. EULER est fort préférable; mais il y a aussi d'autres points de vue pour le contraire, puisque „ma méthode peut être appliquée à tel nombre de corps fini qu'on propose, lors-même que dans „le Système il n'y a point de retour parfait ou période à attendre. Quoiqu'il en soit de mes „prétentions, je suis toujours prêt de baisser pavillon devant mon Amiral etc.

**) Er hatte selbst, lange vor der Bekanntmachung des MAUPERTUISSCHEN Gesetzes der kleinsten Wirkung, mehrere Minima in der Natur entdeckt: als zum Beyspiel in der Bewegung der himmlischen Körper; in der Bewegung aller von mehrern Mittelpunkten der Kräfte angezogener Körper; in mehrern krummen Linien, u. s. f. Ich habe auch schon oben, bey Gelegenheit des Isoperimetrischen Problems gezeigt, wie nahe er jenem allgemeinen Gesetze gekommen war. Ausserdem hat er durch die Anwendung desselben auf eine grosse Menge mechanischer Aufgaben, wie der Erfinder selbst öffentlich in einer seiner Schriften gestanden hat, eine Art von Eigenthumsrecht daran erworben, welches er aber immer mit der großmüthigsten Bescheidenheit von sich abzulehnen wußte.

Die Auflösung des wichtigen Problems über die Fortrückung der Nachtgleichen und über die Schwankung der Erdaxe, die D'ALEMBERT zuerst gegeben hat, bewog Herrn EULER auch seine Auflösung im fünften Bande der Berliner Memoiren bekannt zu machen, in dem nemlichen, welcher auch die glückliche Auflösung der Controvers zwischen LEIBNITZ und JOHANN BERNOULLI, über die Logarithmen der verneinenden und eingebildeten Größen enthält. Dieses Problem über die Fortrückung der Nachtgleiche setzte Herrn EULER in die Nothwendigkeit, Untersuchungen über die umdrehende Bewegung der Körper anzustellen, derer Axe veränderlich ist. Hiezu reichten die bis dahin bekannten Gesetze der Bewegung nicht zu. Er mußte also auf die ersten Grundsätze der Mechanik zurückgehn, und daraus allgemeine Regeln für die Bestimmung der umdrehenden Bewegung der Körper herleiten, derer Rotationsaxe beweglich ist. Dies brachte ihn auf ein neues mechanisches Gesetz, mittelst dessen er das Problem von der Bewegung fester Körper in seiner ganzen Allgemeinheit aufzulösen im Stande war.

Diese ein neues Licht über die Mechanik verbreitenden Untersuchungen verdienten in ihrem Zusammenhang vorgetragen zu werden. In dem grossen schon vorhin angeführten Werke über die Mechanik hatte Herr EULER nur die Bewegung unendlich-kleiner Körper abgehandelt, und sich vorbehalten, die Bewegung endlicher sowol biegsamer als unbiegsamer Körper in der Folge vorzunehmen. Demnach erschien im Jahr 1765 die Theorie endlicher unbiegsamer Körper, welche man, weil sie in der Einleitung alle Gesetze der Bewegung unendlich kleiner Körper in einem vorzüglichern und lichtvollern Vortrag enthält, als eine vollständige Mechanik ansehn kann. Hier sind alle die wichtigen vorhin zerstreuten Untersuchungen über die Bewegung fester Körper im Zusammenhang, welche Herrn EULER in den Stand gesetzt haben, der physischen Astronomie so wesentliche Dienste zu leisten.

Dies sind die vorzüglichsten Arbeiten, die EULERS Aufenthalt in Berlin so ausgezeichnet haben. Indessen hatte er, während seiner langen Abwesenheit nie aufgehört, auch der St. Petersburgischen Akademie sehr wichtige Dienste zu leisten, der er, wie wir schon gesehn haben, einen sehr beträchtlichen Theil seiner gelehrten Arbeiten wiedmete; über deren Vortheile er mit großem Eifer wachte und sich so gar mit dem Unterrichte mehrerer ihm von hieraus zugeschickter akademischer Zöglinge befaßte.*) Er hat folglich nie aufgehört der Akademie in jeder Hinsicht anzugehören; und man scheint dies an unserm Hofe und bey unsrer Armee eingesehn zu haben, als man ihm während dem Aufenthalte der Russischen Truppen in Berlin eine Schutzwache bewilligte und den Schaden vergütete, den er auf seinem Landgute erlitten hatte.

Mit einer so ausgezeichneten Vorliebe für das Land, wo er seine ersten Jünglings-Jahre zugebracht hatte und für das Korps, welches die Wiege seines Ruhmes gewesen war, mußte Herr EULER den Wunsch nähren, wieder dahin zurück zu kehren; und hiezu fand sich bald ein neuer Beweggrund ein. Die Thronbesteigung CATHARINEN DER GROSSEN, der Glanz *Ihrer* eben so gelinden als weisen, eben so gerechten als wohlthätigen Regierung hatte die Welt mit Bewunderung erfüllt. Der Schutz, den *Sie* den Wissenschaften und ihren Beförderern angedeihen ließ, hatte der Akademie neue Kräfte gegeben. Dies befestigte EULERN in dem Entschlusse, seine Tage in Rußland im Dienste einer Monarchin zu beschließen, die das Glück *Ihrer* Völker und der Stolz der Welt ist.

Der Monat May des Jahres 1766 brachte ihn der Erfüllung seines Wunsches näher. Der Russische Minister in Berlin, Fürst WLADIMIR SERGEJEWITSCH DOLGORUKY bewilligte ihm im Namen seiner Monarchin alle Bedingungen, die er für sich und seine Famille aufgesetzt hatte.**) Der König ertheilte ihm nach vielen Schwürigkeiten den Abschied für sich und seine beyden ältesten Söhne: Dem jüngsten aber, der Lieutenant bey der Artillerie war, ward die Erlaubniß gänzlich abgeschlagen, seinen Vater nach St. Petersburg zu begleiten.

---

*) Er nahm mehrere akademische Zöglinge in sein Haus und an seinen Tisch, und ertheilte ihnen Unterricht in der Mathematik. Die Herren Akademiker KOTELNIKOF und RUMOVSKY haben einige Jahre auf diesen Fuß bey ihm in Berlin zugebracht und seinen Unterricht genossen.

**) Es ist bekannt, daß sie sehr ansehnlich waren. Außer einem jährlichen Gehalt von 3000 Rubeln und einer Versicherung auf eine Pension von 1000 Rubeln für seine Wittwe, sollten seine drey Söhne vortheilhaft versorgt werden, und wurden es.

Herr EULER verließ Berlin, wo er 25 Jahre gelebt und einer seinen großen Verdiensten angemessenen Achtung genossen hatte, im Junius 1766. Die Prinzen des Königlichen Hauses, besonders der regierende Markgraf von Brandenburg-Schwedt*) sahen ihn ungern abreisen und bezeugten ihm ihr Bedauern über seinen Verlust auf die schmeichelhafteste Weise.

Er war eben im Begriff abzureisen als der König von Polen ihn durch den Fürsten ADAM CZARTORINSKY einladen ließ, seinen Weg über Warschau zu nehmen, wo er zehn Tage mit allen den Annehmlichkeiten zubrachte, die die Aufmerksamkeiten eines so gnädigen und liebenswürdigen Fürsten über das Leben eines Weisen verbreiten können, der ihren Genuß zu schätzen weiß, ohne ihm entgegen zu gehn.**) Er sah endlich St. Petersburg, wo er den

---

*) Zu dem freundschaftlichen und vertrauten Umgang, den der Prinz mit Herrn EULER pflog, kamen noch, um sein Bedauern über dessen Verlust zu vermehren, die Regungen der Dankbarkeit, für den Antheil, den der große Mann an der Ausbildung der Prinzessinen Töchter des Markgrafen gehabt hatte. Er hatte sie beyde unterrichtet und die älteste, izt Aebtissin zu Herforden, ist eben die deutsche Prinzessin, an welche er, zur Fortsetzung seines Unterrichts, während dem Aufenthalte des Hofes zu Magdeburg, die so beliebten Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie geschrieben hat.

**) Er hat sich immer mit dankbarem Vergnügen der Gnadenbezeugungen erinnert, die der König ihm und den Seinigen während ihrem Aufenthalt in Warschau und auf der ganzen Reise durch Polen erwiesen hatte; und die ehrfurchtsvolle Zuneigung, die die vortrefflichen Eigenschaften dieses liebenswürdigen Fürsten ihm eingeflößt hatten, ward durch einen Briefwechsel genährt, von dem ich meinen Lesern keinen bessern Begriff geben kann, als wenn ich diese Lobrede mit einem der königlichen Briefe ziere.

„Monsieur le Professeur EULER. En répondant à votre lettre du 4 Août dernier, J'aurois bien „souhaité de pouvoir confirmer l'opinion que vous avez des circonstances plus heureuses, sur lesquelles „votre amitié pour Moi vous a dicté l'expression d'un coeur vertueux et sensible. Mais — — — „— — — — — Je vous remercie cependant de votre bonne volonté à cet égard, et Je passe à la „reconnoissance que Je dois à vos soins, pour me communiquer les observations que les habiles „Astronomes de votre Académie ont faites à Bender et vers les embouchures du Dniestr et du Danube „avec les positions de quelques endroits également importans pour la Géographie. Je tâche de les „mettre à profit, pour perfectionner celles qui se font dans ce pays-ci avec assez d'application et de „succès, malgré les troubles qui mettent un grand obstacle au progrès des Sciences. Je vous en demande la continuation, autant pour l'utilité publique que pour Ma satisfaction particulière, et désirant d'avoir des occasions pour vous en donner des marques effectives. Je prie Dieu, qu'Il vous „ait, Monsieur le Professeur EULER, en Sa sainte et digne garde.

„Fait à Varsovie, le 7 Juin 1772.

STANISLAS AUGUSTE ROY.

17 July ankam, nach einer langen Abwesenheit wieder, ward gleich der Monarchin vorgestellt und zur Tafel gezogen. Auch erhielt sein jüngster Sohn, auf das mächtige Fürwort der Kaiserinn, die Freyheit, seinem Vater zu folgen und in Russische Dienste zu treten.

Kaum war er in seinem Hause, zu dessen Ankauff ihm die Monarchin 8000 Rubel geschenkt hatte, eingerichtet, als er von einer heftigen Krankheit befallen wurde, von der er sich nur mit dem gänzlichen Verlust seines Gesichts wieder erhohlte. Ein Staar, der sich auf seinem linken Auge gebildet hatte, beraubte ihn auch dieses letzten durch sein übertriebenes Arbeiten verdorbnen Gesichtsorgans.

Welch ein schrecklicher Zufall für einen Mann, dem die Gewohnheit die Arbeit zum Bedürfniß gemacht hatte, dessen stets geschäftiger Geist sich nun auf einmal außer Stand gesetzt sah, die wichtigen Arbeiten zu vollenden, zu denen der Entwurf schon in seiner Seele lag, und die seine neue innigere Verbindung mit der hiesigen Akademie durch einen noch außerordentlichern Grad von Fruchtbarkeit auszeichnen sollte. Eine gänzliche Unthätigkeit wäre nun das Loos jeden kleinern Geistes gewesen. EULERS erstaunliches Gedächtniß, und seine durch die gänzliche Abziehung von allen zerstreuenden äußern Eindrücken vermehrte Einbildungskraft ersetzten bald einen Verlust, der die gelehrte Laufbahn des großen Mannes zu beschließen drohte.

Das erste, was er unternahm, war die Verfertigung eines Lehrbuchs der Algebra. Ein junger Mensch, den er zur Aufwartung von Berlin mitgenommen und der außer einiger Fertigkeit im Rechnen nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte, war das Werkzeug, dessen er sich hiezu bediente. So entstund die so bekannte und so wol wegen der Umstände, die ihre Erscheinung begleiteten, als wegen der außerordentlichen Deutlichkeit des Vortrags bewunderte Anleitung zur Algebra. Auch in diesem blos Anfängern bestimmten Lehrbuche zeigt sich der erfinderische Geist seines Verfassers durch neue Methoden. Auch ist es meines Wissens das einige, wo die sogenannten DIOPHANTISCHEN Aufgaben im Zusammenhang vorgetragen sind. Eine Russische Uebersetzung dieser Algebra war schon zwey Jahre vor der Urschrift erschienen, der bald eine Französische nachfolgte.

Die Ankunft des Herrn KRAFFT setzte bald darauf den blinden Greis in Stand, eine größere Arbeit vorzunehmen, zu der er schon längst den Entwurf gemacht hatte, nemlich: Alles was er in dem Laufe von dreyßig Jahren zur Verbesserung der optischen Werkzeuge und ihrer Theorie gethan hatte, in ein besonderes Werk zusammenzufassen. Er schritt mit der ihm eignen Lebhaftigkeit zur Ausführung dieses Entwurfs und gab in den Jahren 1769, 1770 und 1771 seine Dioptrik in drey großen Quartbänden heraus.

Der erste Theil dieses wichtigen Werks enthält die allgemeine Theorie dieser *neuen* Wissenschaft. Man wird mir dieses Beywort erlauben, wenn man bedenkt, daß die Dioptrik ihre itzige Gestalt blos EULERN zu danken hat, und daß sie vor dem durch ihn vorbereiteten Zeitpunkt kaum den Namen einer Wissenschaft verdiente. Die ausschweifende Länge, welche man den Fernröhren vor der Erfindung zusammengesetzter Objektive zu geben genöthiget war, um einen beträchtlichen Grad von Vergrößerung zu erhalten und die durch die Regenbogenfarben entstehende Verwirrung in der Abbildung der Gegenstände, hatte die Astronomen gezwungen, dem Gebrauch dioptrischer Fernröhre gänzlich zu entsagen. Die Berechnung der vortheilhaftesten Zusammensetzung so wol dieser Werkzeuge als der in ihre Stelle getretenen Spiegelteleskope war ein wahres Chaos, und obgleich die Aufgabe blos in die elementare Geometrie gehört und nur eine geringe Kenntnis der Infinitesimalrechnung erfordert, so war man doch in seiner Auflösung so sehr zurückgeblieben, daß man die Fortschritte der Theorie nur von EULERN an zählen kann.

Der zweyte und dritte Theil seines dioptrischen Werkes enthält vollständige Regeln für die beste Zusammensetzung der Fernröhre, der Spiegelteleskope und der Mikroskope. Die Berechnung der von der Kugelgestalt der Gläser herrührenden Abirrung der Lichtstrahlen ist ein Meisterstück der feinsten Analyse, und man bewundert mit Recht die ungemeinen Kunstgriffe, die angewandt worden sind, um in diesen Werkzeugen jeder Art alle möglichen Vortheile, Deutlichkeit der Vorstellung, Größe des Gesichtsfeldes und Kürze des Instruments, für jede Vergrößerung und Anzahl der Okulare zu vereinigen, so wie die Vereinfachung der ehmals durch die Menge und Verwicklung der Elemente so langweiligen dioptrischen Berechnungen den Dank und Beyfall der Welt verdient.

Um die nemliche Zeit als die Akademische Druckerey an diesem Werke arbeitete, waren ihre Pressen mit dem Druck der Briefe an eine deutsche Prinzessin, der Integralrechnung, der Anleitung zur Algebra, der Untersuchungen über den Cometen von 1769, der Berechnungen der Sonnenfinsterniß und des Durchgangs der Venus, der neuen Mondstheorie, der Mondstafeln und des Werkes über den Bau und die Lenkung der Schiffe beschäftiget, ohne der großen Anzahl von Abhandlungen zu erwähnen, die sich in den in diesem Zeitraum erschienenen Bänden der Commentarien befinden.

Kaum war das erstere dieser angeführten Werke heraus, als eine russische und eine deutsche Uebersetzung davon, so wie eine neue in Paris veranstaltete Ausgabe[1]) es zu einem der ausgebreitetsten und beliebtesten physikalischen Lesebücher machten, welches nicht wenig beygetragen hat, den Namen seines berühmten Verfassers auch unter dem schönen Geschlechte, und allen denen bekannt zu machen, die seine Verdienste um die Aufklärung nicht aus seinen wichtigern Schriften zu beurtheilen im Stande sind.

Wir kommen nun auf das in der Geschichte der Wissenschaften, besonders der Sternkunde, so merkwürdige Jahr 1769 zurück, wo sich das allgemeine Bestreben der mächtigsten Fürsten Europens in Unterstützung der auf den Durchgang der Venus durch die Sonnenscheibe höchst aufmerksamen Astronomen so sehr ausgezeichnet hat. Die Kayserinn von Rußland, so wie die Könige von Frankreich, England und Spanien hatten in diesem, und zum Theil schon im vorhergehenden Jahre, eine große Anzahl mit allem, was ihr Vorhaben unterstützen konnte, ausgerüstete Astronomen in alle Welttheile geschickt, diese seltne und zur Bestimmung der im Sonnensystem vorkommenden Maase so wichtige Erscheinung zu beobachten. Zehn Beobachter, beseelt von der Ehre, Antheil an diesem Vorfall zu nehmen, und unterstützt durch den großmüthigen Beystand unsrer unvergleichbaren Monarchin, zerstreuten sich allein in den unter Rußlands mächtigem Scepter stehenden Ländern, während daß Herr EULER auf ein Mittel dachte, ihre Beobachtungen zur Bestimmung der Sonnenparallaxe zu nützen. Er fand eine neue Methode, nicht nur die Beobachtungen des Durchgangs, sondern auch die Sonnenfinsterniß zu berechnen, welche jenem Phänomen vorherging und die Mittel erleichterte,

1) FUSS hat dabei wohl an die neue französische Ausgabe gedacht, die 1770 „à Mietau et Leipzic" erschienen war; denn der erste Band der Pariser Ausgabe erschien erst 1787. F. R.

die geographische Lage der Beobachtungsörter zu bestimmen. Also ist die Astronomie EULERN auch zum Theil diejenigen Verbesserungen schuldig, welche sie aus dieser Bestimmung der Parallaxe gezogen hat.

Wir kommen endlich auf eine seiner wichtigsten Arbeiten: die Theorie des Mondes, mit der er sich so oft und so glücklich beschäftiget hat. Schon im Jahr 1746 hatte er Mondstafeln und 1753 eine Theorie der Mondsbewegungen herausgegeben, von der MAYER Gebrauch gemacht hat, um die Tafeln zu berechnen, die nachher von der englischen Längen-Commission den Preis erhalten haben, bey welcher Gelegenheit auch Herr EULER vom Brittischen Parlamente ein Geschenke von 300 ℔ Sterl. erhielt, zur Belohnung für die Untersuchungen, die MAYERN den Weg gebahnt hatten, einen so beträchtlichen Schritt in der Auflösung eines der wichtigsten Probleme zu thun.*)

Unterdessen hatte die Pariser Akademie, die, seitdem sie Herrn EULER zum auswärtigen Mitglied aufgenommen,**) drey seiner Abhandlungen über die Ungleichheiten der Bewegung himmlischer Körper gekrönt hatte, die Ver-

*) Ich habe oben (S. LXV) und in der Note (S. LXX) eines öffentlichen Zeichens der Achtung und Erkenntlichkeit Erwähnung gethan, welches Herr EULER von dem Könige von Frankreich, so zu sagen im Namen der Nation empfangen hatte. Die Nachricht von einer ähnlichen Gerechtigkeit, die eine andere nicht minder aufgeklärte und großmüthige Nation den Verdiensten des großen Mannes wiederfahren ließ, kann seinen Verehrern nicht anders als angenehm seyn; allso wird ihnen der folgende Auszug aus einem Briefe der englischen Admiralität nicht überflüssig dünken.

Admiralty Office London, 13 June 1765.

Sir

„The Parliament of Great Britain having, by an Act passed in their late sessions (a printed „Copy of which I herewith transmit to you) been pleased to direct, that a summ of money, not „exceeding Three hundred pounds in the whole, shall be paid to you, as a reward for having fur„nished Theorems, by the help of which the late Mr. Professor MAYER of Gottingen constructed his „Lunar Tables, by which Tables great progress has been made towards discovering the longitude „at Sea. I am directed by the Commissioners of the Longitude to acquaint you therewith and to „congratulate you, uppon this honorary and pecuniary Acknowledgement, directed to be made you „by the highest Assembly of this Nation, for your usefull and ingenious labours towards the said „discovery, etc.

**) Man weiß, daß die Anzahl der auswärtigen Mitglieder der Königl. Akademie zu Paris auf acht festgesetzt ist, und daß selten andre als Männer von den hervorstechendsten Verdiensten auf diese Ehre Anspruch machen dürfen. Herr EULER ward aufgenommen als keine Stelle offen vollkommnung der Mondstheorie zum Gegenstande ihrer Preisfragen für die Jahre 1770 und 1772 gemacht und Herr EULER trug, mit seinem ältesten Sohne, der schon 1761 den Preis über die beste Art ein Schiff zu belasten mit dem Abbé BOSSUT getheilt hatte, beyde Preise davon.[1])

In der letzten dieser Abhandlungen hatte er Mittel gefunden, auch von denen Ungleichheiten der Mondsbewegung Rechenschaft zu geben, welche er in seiner ersten Theorie, wegen der Verworrenheit der Rechnungen, nicht hatte bestimmen können. Dies machte ihm Muth, die ganze Mondenlehre nochmals vorzunehmen, und mit Hülfe seines ältesten Sohnes und der Herren LEXELL und KRAFFT biß zur Verfertigung neuer Tafeln zu verfolgen, die mit dem großen Werke zugleich im Jahre 1772 erschienen sind. Anstatt sich,

---

war. Die diese Aufname begleitenden Umstände sind sehr ehrenvoll für ihn, und ich trage deßhalb kein Bedenken, zur Erläuterung derselben folgenden Brief des damaligen Königl. Staatsministers, Marquis D'ARGENSON, hier einzurücken.

à Versailles, le 15 Juin 1755.

„Le Roi vient de Vous choisir, Monsieur, d'après les voeux de Son Académie, pour remplir „une place d'Associé externe dans cette Académie; et comme Elle a nommé en même tems Mylord „MACLESFIELD, Président de la Société Royale de Londres, pour remplir une pareille place, qui va- „que par la mort de M. MOIVRE, Sa Majesté a décidé que la première place de cette espèce qui va- „quera, ne sera pas remplie. L'extrème rareté de ces sortes d'arrangemens est une distinction trop „marquée pour ne pas Vous en faire l'observation et Vous assurer de toute la part que j'y prens. „L'Académie desiroit vivement de Vous voir associé à Ses travaux, et Sa Majesté n'a pu qu'adopter „un temoignage d'estime que Vous méritez à si juste titre. Soyez persuadé, Monsieur, qu'on ne peut „pas Vous être plus parfaitement devoué que je le suis.

M. D'ARGENSON.

Daß ich diesen und noch einige andre Briefe aus EULERS ungeheurem Briefwechsel mit merkwürdigen Personen hier aufgenommen habe, wird wol kaum einer Entschuldigung bedürfen. Es sind Documente, die zwar dem Ruhme eines großen Mannes nichts hinzusetzen, aber doch Beweise der Gerechtigkeit abgeben können, die ihm sein Zeitalter wiederfahren ließ. Uebrigens gehört zu obiger Anmerkung noch folgender für EULERS Ehre nicht gleichgültiger Zusatz: daß der König ihm seinen ältesten Sohn, eben sowol aus Achtung für das Andenken des Vaters, als in Rücksicht seiner persönlichen Verdienste zum Nachfolger in der Stelle eines auswärtigen Mitglieds der Pariser Akademie gegeben hat.

1) Die Angabe ist nicht ganz genau. In dem Avertissement zu dem 9. Bande des *Recueil des pièces, qui ont remporté les prix de l'académie royale des sciences*, der die beiden Preisschriften enthält, werden zwar als Verfasser der ersten Preisschrift *Théorie de la lune*, 1770, L. u. J. A. EULER genannt, als Verfasser aber der zweiten *Nouvelles recherches sur le vrai mouvement de la lune* wird nur L. EULER bezeichnet. F. R.

wie ehmals, bey der fruchtlosen Integration der drey aus den mechanischen Grundsätzen entspringenden Differenzial-Gleichungen aufzuhalten, brachte er diese auf die drey Coordinaten, die den Ort des Mondes bestimmen, und theilte alle Ungleichheiten, in so fern sie von der mittlern Elongation der Sonne und des Mondes, von der Excentricität, von der Parallaxe oder von der Neigung der Mondbahn abhängen, in gewisse Classen. Diese mit vielem Scharfsinn angewandte und mit den feinsten, nur dem ersten Analysten möglichen Kunstgriffen begleiteten Mittel hatten einen alle Erwartung übertreffenden Erfolg. Man erstaunt beym Anblick der erschrecklichen Rechnungen, die diese Untersuchungen erforderten, und über die angewandten Hülfsmittel sie abzukürzen und auf die Bestimmung der Mondsbewegung anwendbar zu machen.

Noch mehr aber erstaunt man über die Geduld und Geistesruhe, die diese unermeßliche Arbeit erforderte, wenn man bedenkt, zu welcher Zeit und unter welchen Umständen er sie unternommen hat. Des Gesichts beraubt; genöthiget bey der Anlage zu diesen fürchterlichen Rechnungen die ganze Stärke seines Gedächtnisses und seiner Einbildungskraft zu Hülfe zu rufen; zurückgesetzt in seiner häuslichen Verfassung durch eine Feuersbrunst, die ihn und die Seinigen um den grösten Theil ihrer Haabseeligkeiten gebracht hatte;*) verwiesen aus einem Hause, wo jeder Winkel ihm bekannt war, wo folglich die Gewohnheit den Mangel des Gesichts ersetzt haben konnte; gestört durch die Verwirrungen, die so schleunige und traurige Abwechslungen und die Wiederaufbauung seines Hauses verursachen mußten: war Herr Euler im Stande ein Werk zu vollenden, das allein seinen Namen unsterblich machen würde, wenn er es auch in der ruhigsten und lachendsten Verfassung geschrieben hätte. Wer kann sich enthalten, diese Stärke der Seele, diese an den Heroïsmus gränzende Gleichmüthigkeit zu bewundern, die den Weisen, auch unter den verdoppelten Schlägen des Schicksals, aufrecht hält, und ihm die zu solchen Geschäften erforderliche Geistesruhe giebt?

Wenige Monate nach diesem unglücklichen Vorfall, den die Großmuth der Monarchin durch ein Geschenk von 6000 Rubel erleichterte, ließ Herr Euler sich von dem bekannten Augenarzt, Baron von Wenzel, den Staar

*) Bey dieser Gelegenheit gieng, mit mehrern Büchern und handschriftlichen Aufsätzen auch das Concept der Preisschrift über die Mondstheorie verlohren. Der jüngere Herr Euler sah sich demnach genöthiget, den ganzen Gegenstand neuerdings durchzuarbeiten und alle Rechnungen zum zweytenmal zu machen.

stechen. Diese Operation gab ihm zu seiner und der Seinigen unaussprechlichen Freude sein Gesicht wieder. Aber wie kurz war dieses Glück! Es sey, daß er in der Folge der Kur vernachlässigt worden, oder daß er zu begierig, Gebrauch von dem wiedererlangten Sinne zu machen, das Auge zu wenig schonte: er verlohr das Gesicht zum zweytenmale unter den entsetzlichsten Schmerzen.

So war also der unglückliche Greis neuerdings in die Nothwendigkeit gesetzt, sich bey seinen Arbeiten fremder Hülfe zu bedienen. Seine Söhne, der Akademiker und der Obristlieutenant, sowie die Herren KRAFFT und LEXELL, fuhren fort ihm wechselsweise beyzustehn, sowol bey der Ausarbeitung seiner größern Werke, als auch der akademischen Abhandlungen, welche sich in den letzten Theilen der neuen Commentarien befinden, derer ich aber hier nicht Erwehnung thue, um nicht zu weitläuftig zu werden.

Bey einigen der wichtigsten muß ich mich indessen doch, der Vollständigkeit wegen, einen Augenblick aufhalten, weil sie entweder Verbesserungen oder Erweiterungen seiner größern schon angeführten Werke enthalten. Dahin gehören die Abhandlungen über das Gleichgewicht und die Bewegung flüssiger Körper und über die Vervollkommnung der achromatischen Fernröhre.

Die Verbesserungen, die alle Theile der Analyse unter EULERS Händen seit der Erscheinung der Hydrodynamik des berühmten DANIEL BERNOULLI erhalten hatten, führten natürlich auf den Gedanken, auch diesen Theil der Mechanik aufs neue auszuarbeiten, wozu er auch schon in der Vorrede seiner ältern Mechanik Hofnung gemacht und in den Berliner Memoiren vorgearbeitet hatte. Er erfüllte endlich diese erregte Erwartung in vier weitläuftigen Abhandlungen, die die ganze Theorie der Hydrostatik und Hydrodynamik erschöpfen.

Diese Theorie ist unendlich fruchtbar an glücklichen Anwendungen der allgemeinen Gesetze sowol, als an genugthuenden Erklärungen der vornehmsten Erscheinungen. Indem Herr EULER, zum Beyspiel, die aus der Verschiedenheit der Dichtigkeit und Wärme entstehenden Stöhrungen des Gleichgewichts der Luft betrachtet, findet er die allgemeine Ursache der Winde, und die besondere der Passatwinde oder Monsons des Indischen Oceans; indem er den Zustand des Gleichgewichts flüssiger von einem oder mehrern Mittelpunkte der Kräfte angezogener Körper untersucht, bestimmt er die Gestalt der Erde und den Zustand des Gleichgewichts der sie umgebenden Flüssigkeiten, welches ihn auf die Erklärung der Erscheinungen der Ebbe und Fluth führt. Nachdem er Mittel gefunden, die Theorie der Bewegung flüssiger Körper auf zwo Differenzialgleichungen vom zweyten Grade zu bringen, so wendet er die allgemeinen Grundsätze auf die Bewegung des Wassers in Gefässen, in Pumpen und Röhren an. Untersuchungen über die Bewegung der Luft führen ihn endlich auf die Theorie der Fortpflanzung des Schalls, der Bildung der Flötentöne und auf andre akustische Materien. Dies sind die mannigfaltigen und wichtigen Gegenstände, die Herr EULER in seiner neuen Theorie der Hydrodynamik erläutert. Man hat so wenig über diesen schweren Theil der allgemeinen Naturlehre, und das, was Herr EULER darüber geschrieben, ist so sehr über dieses wenige erhaben, daß ein besonderer Abdruck der gedachten vier Abhandlungen ein wichtiges Geschenke für jeden Mathematiker seyn müßte, der sich die kostbaren Akademischen Schriften nicht anschaffen kann.

Als Herr EULER seine Dioptrik schrieb, hatte er in der Theorie vollkommener Objective den Abstand der Linsen unter sich und ihre Dicke als unbedeutend aus der Acht gelassen, ungeacht es Fälle gibt, wo diese Maase nicht so unbeträchtlich sind, daß man sie vernachlässigen könnte, ohne die Würckungen der Strahlenverwirrung zu vermehren, die diese Objective haben sollten. Die Abhandlungen über zusammengesetzte Objective und ihre Anwendung auf mehrere Arten von Fernröhren, welche man im 18ten Theil der neuen Commentarien antrifft, sind bestimmt, dieser Unvollkommenheit der Theorie abzuhelfen. Man findet darinn eine deutliche Auseinandersetzung verschiedner Mittel, diesen Werkzeugen eine geringere Länge und ein grösseres Gesichtsfeld zu geben. Nach diesen Angaben habe ich in der Folge die Anweisung zur möglichstvollkommenen Verfertigung der Fernröhre berechnet, welche im Jahr 1774 bey der Akademie französisch gedruckt worden, und wovon der verdienstvolle Herr Prof. KLÜGEL in Helmstädt im Jahre 1778 eine deutsche Uebersetzung mit seiner analytischen Dioptrik herausgegeben hat.

Die allgemeinen Mängel beynahe aller in Deutschland seit mehrern Jahren errichteten Wittwen- und Todtenkassen, und die den mehrsten auf die Sterblichkeit gegründeten Finanzoperationen, als Leibrenten, Tontinen etc. gemachten Vorwürfe, daß sie den Unternehmern allzu vortheilhaft wären, brachten um diese Zeit Herrn EULER auf den Gedanken, dergleichen Unternehmungen auf sichere Grundsätze zu bauen, so viel nehmlich die anerkannte Unvollkommenheit der Sterbelisten dieses zulassen würde. Seine Untersuchungen gaben den Erläuterungen über die Wittwen- und Todtenkassen ihr Daseyn, die im Jahr 1776 erschienen und die erste Veranlassung zu meinem in eben diesem Jahre bekanntgemachten Entwurfe einer allgemeinen Leihebank wurden.

Herr EULER hatte sich mehr als einmal gegen den Grafen WLADIMIR GREGORJEWITSCH ORLOW anheischig gemacht, der Akademie so viel Abhandlungen zu liefern, daß sie für zwanzig Jahre nach seinem Tode hinreichen sollten: und er hielt Wort. Mit einer weder durch den Verlust des Gesichts, noch durch sein hohes Alter geschwächten Geisteskraft verband er noch seine ganze ehemalige Arbeitsliebe, und die zahllose Menge seiner Entdeckungen*) hatte seinen fruchtbaren Geist noch nicht erschöpft. Redende Beweise hievon sind siebenzig Abhandlungen, die er Herrn GOLOVIN in einem Zeitraum von sieben Jahren in die Feder dictirt und zwey hundert und fünfzig andere, die ich selbst berechnet und der Akademie vorgelesen habe.**)

Unter dieser großen Anzahl von Abhandlungen ist keine, die nicht eine neue Entdeckung enthielte, oder doch irgend eine scharfsinnige Idee, deren Entwicklung andre auf neue Entdeckungen leiten könnte. Man findet darinn die glücklichsten Integrationen; eine Menge Kunstgriffe und Verfeinerungen der erhabensten Analyse; die tiefsinnigsten Untersuchungen über die Natur und die Eigenschaften der Zahlen; die scharfsinnigsten Beweise vieler FERMATISCHEN Lehrsätze; die Auflösung mancher sehr schweren Aufgaben über das Gleichgewicht und die Bewegung fester, beweglicher und elastischer Körper; die Enträthslung häufiger scheinbarer Paradoxen. Alles was die Lehre von der Bewegung himmlischer Körper, ihre wechselseitigen Stöhrungen und Unregelmäßigkeiten abstraktes und schweres enthält, ist da zu dem Grade von Vollkommenheit gebracht, den nur die Verbesserungen des Calculs unter den

*) Man hätte denken sollen, daß seine zahlreichen Entdeckungen in ihm das Gefühl jenes Vergnügens abgestumpft hätten, welches die Seele bey dem Innewerden neuer Wahrheiten empfindet, und welches der Mathematiker reiner und vielleicht auch öfter als kein andrer Gelehrter zu schmecken Gelegenheit hat. Herr EULER blieb immer sehr empfänglich für dieses Vergnügen, und er foderte von jedermann die nemliche Wärme. Wie oft hat ihn die gleichgültige Mine beleidigt, mit der ich ihm, aus Bescheidenheit, meine kleinen Entdeckungen mitzutheilen pflegte?

**) Die ältesten dieser Abhandlungen sind seitdem, zum Besten der auf EULERS Arbeiten begierigen Mathematiker, besonders in einer Sammlung gedruckt worden, davon nun zween Theile unter dem Titel *Opuscula analytica* herausgekommen sind.

Händen des größten Meßkünstlers hervorbringen konnten. Jeder Zweig mathematischer Kenntnisse hat ihm etwas zu verdanken.

Dies sind EULERS Verdienste um die Aufklärung seines Zeitalters, dies seine der Unsterblichkeit würdigen Arbeiten. Sein Name, den die Nachwelt dem eines GALILEI, DESCARTES, LEIBNITZ, NEWTON und so vieler anderer großen Männer, die der Menschheit durch ihr Genie Ehre gemacht haben, an die Seite setzen wird, kann nur mit den Wissenschaften erlöschen. Noch dann wird sein Andenken leben, wann der Name so vieler, die der Frivolität unsers Jahrhunderts einen vorübergehenden Ruhm zu danken haben, längst in der ewigen Nacht der Vergessenheit schlummern wird.

Wenige Gelehrte haben so viel als EULER geschrieben, kein Geometer so viele Gegenstände auf einmal umfaßt, keiner über alle Theile der Mathematik so viel Licht verbreitet.

Wer den mächtigen Einfluß kennt, den Männer von außerordentlichen Gaben auf die Erweiterung menschlicher Kenntnisse haben, wer die äußerste Seltenheit vorzüglicher Talente erwägt, denen die Natur das Vorrecht aufzuklären vorbehalten zu haben scheint: kann sich, wenn er sie von ihrer glänzenden Laufbahn abtreten sieht, kaum des Wunsches erwehren, daß sie von dem allgemeinen Loos der Sterblichkeit ausgenommen, oder daß wenigstens ihr Ziel über die gewöhnliche Gränze des menschlichen Lebens hinausgesteckt seyn möchte. Indessen war EULERS Leben lang und Thatenvoll; er war, den Verlust seines Gesichts abgerechnet, frey von allen so gewöhnlichen nachtheiligen Folgen zu weit getriebner Anstrengung, und behielt, bis an den Tag seines Todes, jene Geistesstärke, die ihn sein ganzes Leben durch ausgezeichnet hat, und deren Spuren man auch in seinen letzten Arbeiten nicht vermißt.

Einige Anfälle von Schwindel, über die er sich in den ersten Tagen des Septembers 1783 beklagte, hinderten ihn nicht die Bewegung der Luftbälle zu berechnen, die damals anfiengen, die allgemeine Aufmerksamkeit an sich zu ziehn, und es war ihm eine schwere Integration gelungen, auf die ihn diese Untersuchung geführt hatte. Jene Schwindel waren indessen die Vorläuffer seines Todes, der den 7. September erfolgte. Er hatte sich noch bey der Mittagsmahlzeit mit dem nun auch verstorbenen LEXELL und mir über den neuen Planeten und andere Gegenstände mit ungeschwächtem Geiste und sehr zusammenhängend unterhalten, und darauf seine gewöhnliche Mittagsruhe gehalten. Beym Thee scherzte er noch mit einem seiner Enkel, als er plötzlich vom Schlage gerührt wurde. Er verlohr so gleich mit den Worten: *ich sterbe*, Sinne und Bewußtseyn und endigte einige Stunden nachher seine glorreiche Laufbahn in einem Alter von 76 Jahren, 5 Monaten und 3 Tagen.

So starb unser ältester Akademiker, nachdem er sechs und fünfzig Jahre der Stolz und die Zierde dieser Akademie, ein Zeuge und Mitwürker ihres Entstehns und Wachsens gewesen war. Sein Einfluß auf die Akademischen Arbeiten war so groß, daß ungeacht alles dessen, was er von Berlin aus gethan und gewürkt hatte, die Commentarien dennoch die deutlichsten Spuren seiner Abreise und seines Wiederkommens an sich tragen, gleichsam als wenn sein Daseyn allein hinreichend gewesen wäre, Leben und Thätigkeit über das Ganze zu verbreiten. Er hat den Trost gehabt, vor seinem Tode die Morgenröthe des hellen Tages zu sehn, den die weise Direction Ihro Erlaucht der Fürstin DASCHKOW[1]) über die Akademie verbreitet und seine Freude darüber war eben so groß als die Anhänglichkeit, die er immer für dieses Corps genährt hat.

Herr EULER war von einer gesunden und dauerhaften Leibesbeschaffenheit. Ohne diese würde er schwerlich so vielen Erschütterungen haben widerstehen können, mit denen die Heftigkeit und Menge seiner Krankheiten seinen Körper bestürmt hatten.

Seine letzten Tage waren ruhig und heiter. Einige von dem Alter unzertrennliche Schwachheiten abgerechnet, genoß er eine Gesundheit, die ihn in den Stand setzte, seine Zeit, die das Alter gewöhnlich zum Ausruhen anwenden muß, dem Studieren zu widmen. Indem er also fortfuhr, den Rest eines ganz den Wissenschaften aufgeopferten Lebens thätig anzuwenden, verband er mit dem Genusse seines Ruhms und der öffentlichen Achtung, den Früchten seines Geistes und seiner Tugenden — den viel reinern Genuß des innern Bewustseyns, seinen Pflichten bis auf die letzte Stunde getreu gewesen zu seyn. Seine Erholung fand er immer in dem Schooße seiner Familie und in den Süßigkeiten, welche die häusliche Glückseeligkeit über das Leben eines Hausvaters verbreiten kann.

1) Im Original DASCHKAW geschrieben. F. R.

Er besaß in einem hohen Grade, was man Erudition zu nennen pflegt; er hatte die besten Schriftsteller des alten Roms gelesen; die ältere mathematische Litteratur war ihm genau bekannt; er war vertraut mit der Geschichte aller Zeiten und aller Völker. Selbst von der Arzney- und Kräuterkunde und von der Chemie wußte er mehr, als man von einem Gelehrten erwartet, der diese Wissenschaften nicht zum besondern Gegenstande seines Studiums macht.

Sein großer Ruf, und noch mehr die auf Tugenden, welche nicht immer mit wissenschaftlichem Verdienste gepaart sind, gegründete öffentliche Achtung, zog ihm öftere Besuche von Reisenden zu. Ich sah ihrer viele ihn mit einer Mischung von Erstaunen und Bewunderung verlassen. Sie konnten nicht begreiffen, wie ein Mann, der seit einem halben Jahrhundert nur mit Entdeckungen in der Naturlehre und Mathematik beschäftiget geschienen, so viele ihm unnütze und dem Gegenstande seiner Untersuchungen fremde Kenntnisse hatte behalten können. Dies war die Würkung eines glücklichen Gedächtnisses, dem alles gegenwärtig blieb, was eine ehemals ausgebreitete Lectur ihm eingeprägt hatte. Wer, wie EULER, die Aeneis von Anfang bis zu Ende hersagen, und die ersten und letzten Verse jeder Seite in seinem Exemplar dieses Gedichts anzeigen konnte, mußte wol auch haben behalten können, was er in dem Alter gelesen hatte, wo die Eindrücke am lebhaftesten sind.*)

Vielleicht läßt sich aus der nemlichen Quelle der Mangel jener Geschmeidigkeit herleiten, die uns sonst gewöhnlich die Aussprache derer, mit welchen wir umgehen, unmerklich beybringt. Herr EULER hat beständig die Basler Aussprache mit allen Eigenheiten dieses Idioms behalten. Oft belustigte er sich, mir gewisse Provinzialismen und Inversionen ins Gedächtniß zu rufen, oder in seine Reden Baslerausdrücke zu mengen, derer Gebrauch und Bedeutung ich schon längst vergessen hatte.

Nichts kommt der unbegreiflichen Leichtigkeit gleich, mit der er sich ohne eine Spur von Mißvergnügen von seinen Rechnungen abrufen, zu der

---

*) Folgender Umstand verdient hier, als ein außerordentlicher Beweis der Stärke seines Gedächtnisses und seiner Einbildungskraft angeführt zu werden. Er gab in dem letzten Jahre vieren von seinen Großsöhnen zum Zeitvertreibe Unterricht in der Rechenkunst und Geometrie. Die Ausziehung der Wurzeln machte ihm eine Sammlung von Zahlen nothwendig, die Potestäten seyn mußten. Eine schlaflose Nacht veranlaßte ihn die sechs ersten Potenzen aller Zahlen unter *zwanzig* auszurechnen, und er sagte uns dieselben mehrere Tage nachher noch ohne Anstoß her.

Seichtigkeit gemeiner Unterhaltungen herablassen und wieder zu seiner Rechentafel zurückkehren konnte. Die Kunst das gelehrte Air in der Studirstube abzulegen, seine Ueberlegenheit zu verbergen und sich zu jedermanns Fähigkeiten herab zu stimmen, ist zu selten, als daß man den Besitz derselben EULERN nicht zum Verdienst anrechnen sollte. Eine sich immer gleiche Laune, eine sanfte und natürliche Munterkeit, eine gewisse gutmüthige Kausticität, eine sehr naive und drolligte Art zu erzählen, machten seine Unterhaltungen eben so angenehm als beliebt.

Seine große Lebhaftigkeit, ohne welche die bewunderte Thätigkeit seines Geistes nicht würde haben bestehn können, riß ihn zuweilen hin, er faßte leicht Feuer; aber die Güte, ein Grundzug seines Charakters, löschte seinen Zorn eben so geschwind, als seine Reitzbarkeit ihn angefacht hatte. Er war unfähig, gegen jemand einen anhaltenden Groll zu hegen.

Aufrichtigkeit und unbestechbare Redlichkeit, die anerkannten National-Tugenden eines Schweizers, besaß er in vorzüglichem Grade. Als ein geschworner Feind aller Ungerechtigkeiten wagte er oft freymüthigen Tadel, oder gar, nach Beschaffenheit der Umstände, öffentliche Angriffe derer, die dergleichen ausüben wolten — und wie glücklich es ihm zuweilen zum Trost Unterdrückter gelungen ist, Mißbräuche abzuschaffen, ist noch in jedermanns Andenken.

Er war, was nicht jeder große Mann ist, gerecht gegen fremdes Verdienst, so gar gegen das seiner Gegner. Wie oft habe ich ihn nicht gesehn, mit den unverdächtigsten Aeußerungen des Wohlgefallens, den Verdiensten eines DANIEL BERNOULLI, eines D'ALEMBERT, eines LAGRANGE u. a. m. das aufrichtigste Lob ertheilen. Jede neue Entdeckung machte ihm so viel Freude, als wenn er sie selbst gemacht hätte; zum Beweis, daß es ihm mehr um die Erweiterung des Reiches der Wahrheit als um den Beyfall der Welt zu thun war.

Die Religion war ihm heilig und ehrwürdig. Seine Frömmigkeit war aufrichtig und seine Andacht inbrünstig und herzlich. Er erfüllte mit großer Aufmerksamkeit alle Pflichten des Christenthums ohne Bigotterie und Gepränge, war menschenfreundlich und duldsam in hohem Grade, doch das letztere mit

Ausnahme der Religionsfeinde, und besonders der erklärten Apostel der Freygeisterey, gegen die er schon im Jahr 1747 die Offenbarung öffentlich in Schutz genommen hatte.

Als Gatte, als Vater, als Freund und als Bürger war er ein musterhaftes Beyspiel gewissenhafter Ausübung der aus diesen Verhältnissen der Gesellschaft entspringenden Pflichten; und alles vereinigt sich unsern gerechten Schmerz über seinen Verlust zu rechtfertigen, und der Welt zu zeigen, was sie in ihm verloren hat.*)

Herr EULER hatte sich zweymal verheurathet: das erstemal 1733 mit M^lle CATHARINA GSELL, der Tochter eines Mahlers aus St. Gallen, den PETER I. in Holland in seine Dienste gezogen hatte, und einer Schwester des berühmten Herrn VON LOEN. Seine häusliche Verfassung nöthigte ihn nach dem Verlust dieser Gattin 1776 zu einer zweyten Heurath mit M^lle SALOME ABIGAEL GSELL, einer Halbschwester der Verstorbenen, einer Tochter der MARIA GRAFF und Großtochter der SIBYLLE MERIAN, welche beyde durch ihre Zeichnungen der Surinamschen Insecten berühmt sind.

Von dreyzehn Kindern, die er in seiner ersten Ehe gezeugt hatte, sind achte früh wieder gestorben. Von drey Söhnen und zwo Töchtern, die ihn von Berlin nach Petersburg begleitet hatten, sind ihm die Töchter in die Ewigkeit vorhergegangen. Der älteste seiner Söhne, der schon seit langer Zeit den Fußstapfen seines großen Vaters folgt, ist so wol durch seine eigenen Schriften und viele bey den Akademien zu Petersburg, Paris, München und Göttingen erhaltenen Preise, als auch durch den Antheil berühmt, den er an den letzten Arbeiten des Verstorbenen genommen hat. Der zweyte Sohn, welcher Hofarzt und Collegienrath ist, geneußt einen durch seine Kenntnisse und seinen Eifer in Ausübung der Heilkunde wolverdienten Ruhm. Der Jüngste steht als Oberaufseher der SISTERBECKISCHEN Gewehrfabrik und Obrist-

*) Ich freue mich den Lesern dieses Abrisses von EULERS Leben sagen zu können, daß die Könige von Preußen, von Schweden und von Polen, der Kronprinz von Preußen und der Markgraf von Brandenburg-Schwedt lebhaften Antheil an dem Verlust genommen haben, den die Akademie durch den Tod des unsterblichen Mannes erlitten hat und daß Sie seinem ältesten Sohne ihr Bedauern schriftlich auf eine Art zu erkennen gegeben haben, die die gröste Lobrede auf seinen Geist und auf seine Tugenden ist.

lieutenant bey der Artillerie in Diensten, und ist der gelehrten Welt durch seine astronomischen Beobachtungen bekannt, indem er unter der Zahl der von der Akademie im Jahre 1769 ausgesandten Beobachter des Durchgangs der Venus war, und diese Erscheinung in Orsk observirt hat. Die älteste Tochter, welche im Jahr 1781 starb, war mit dem Herrn Ober-Quartiermeister und Premier-Major von Bell verheurathet; die Jüngste mit einem Herrn Baron von Dehlen, auf dessen Gütern im Jülichschen sie 1780 das Zeitliche mit dem Ewigen verwechselt hat. Diese fünf Kinder haben dem verstorbenen Herrn Euler acht und dreyzig Enkel gegeben, davon noch sechs und zwanzig am Leben sind.

Noch lange wird das Bild des ehrwürdigen Greises vor meinen Augen schweben, wie er, gleich einem Patriarchen, in dem muntern Zirkel seiner zahlreichen Enkel steht, und wie diese sich bestreben, ihm sein Alter angenehm zu machen und seine letzten Tage durch alle Arten Aufmerksamkeiten und zärtliche Besorgnisse zu versüßen. Nie werde ich wieder ein so rührendes Schauspiel sehn, als mir damals beynah täglich zu Theil ward.

Ich würde mich vergebens bestreben, Erlauchte Versammlung, Ihnen diese pathetischen herzerhebenden Auftritte häuslicher Glückseeligkeit zu schildern. Sie sind der Natur Triumph und der beste Lohn der getreuen Ausübung häuslicher Pflichten. Mancher unter Ihnen ist auch selbst Augenzeuge davon gewesen, Sie besonders meine Herren, die sich rühmen ihn zum Lehrer gehabt zu haben. Hier sind wir unsrer fünfe*). Welcher Gelehrte kann sich

*) Es waren eigentlich bey der Akademie acht Mathematiker, die den Vortheil gehabt haben, Schüler Eulers gewesen zu seyn, nemlich: die Herren J. A Euler, Kotelnikof, Rumovsky, Krafft, Lexell, Inochodsof, Golovin und ich. Drey waren abwesend, und Herr Lexell ist seitdem zum grösten Bedauren der Akademie und jedes Verehrers wahrer Verdienste gestorben.

O meine Freunde, die ich bey dieser Anrede, oder Herzensergießung Thränen der innigsten Rührung weinen gesehn habe! ich konnte Euch nur die Hände drücken, da der Schmerz meine Stimme erstickt hatte: aber nie werde ich das Andenken an diese ungeheuchelten Zeichen Eurer aufrichtigen Betrübniß verlieren, und hier lasse ich öffentlich sowol Euern gefühlvollen Herzen als der Zuneigung†) Gerechtigkeit wiederfahren, die Ihr bey diesem Anlaß für unsern unvergeßlichen gemeinschaftlichen Lehrer geäußert habt.

†) Ein Brustbild von weißem Carrarischem Marmor, das die Akademiker auf ihre Kosten haben verfertigen lassen, und zu welchem der Fürstin von Daschkow Erlaucht eine Halbsäule von Italienischem Marmor hergegeben, wird, in dem akademischen Conferenzsaal aufgestellt, der Nachwelt zum Beweis dieser Zuneigung dienen.

rühmen, so viele seiner Schüler in einem und demselben Korps vereinigt gesehn zu haben? O daß wir ihm vor den Augen der Welt unsre zärtliche und unauslöschliche Erkenntlichkeit bezeugen, daß wir eben so lebhaft als wirs selbst fühlen, darthun könnten, daß unser unsterblicher Lehrer eben so bewunderungswürdig durch seine seltenen Tugenden als durch die Stärke seines Genies war! Freunde, Akademiker! beweint ihn mit den Wissenschaften, die ihm so viel zu danken haben; mit der Akademie, die nie so viel verlohr; mit seiner Familie, deren Stolz und Stütze er gewesen ist. Meine Thränen vermischen sich mit den Eurigen und das Andenken an das, was ich ihm selbst schuldig bin, wird nur mit meinem letzten Athemzug verlöschen.

Vollständige

Anleitung

zur

Algebra

von

Hrn. Leonhard Euler.

Erster Theil.

Von den verschiedenen Rechnungs-Arten, Verhältnißen und Proportionen.

St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

VORBERICHT

Man überliefert hiermit denen Liebhabern der höhern Rechenkunst ein Werck, davon schon vor zwey Jahren eine russische Uebersetzung zum Vorschein gekommen ist.[1])

Die Absicht des weltberühmten Verfassers bey demselben war, ein Lehrbuch zu verfertigen, aus welchem ein jeder ohne einige Beyhülffe die Algebra leicht fassen und gründlich erlernen könne.

Der Verlust seines Gesichts erweckte in ihm diesen Gedancken, und durch seinen stets geschäfftigen Geist angetrieben, säumete er nicht seinen Vorsatz ins Werck zu setzen. Zu diesem Ende erwählte er sich einen jungen Menschen, den er mit sich aus Berlin zur Aufwartung genommen hatte, und der ziemlich fertig rechnen, sonsten aber nicht den geringsten Begriff von der Mathematik hatte: er war seines Handwercks ein Schneider, und gehörte

---

1) Von dieser Übersetzung war der erste Teil 1768, der zweite 1769 erschienen. Die Übersetzer waren Peter Inochodtzoff und Iwan Iudin.

Vom deutschen Original muß also der erste Teil spätestens 1767, der zweite 1768 fertig vorgelegen haben. Der Umstand aber, daß Euler darin die Zahlen 1765 und 1766 wiederholt und in auffälliger Weise als Beispiele benutzt (siehe etwa p. 87 u. 158), läßt mit Sicherheit darauf schließen, daß das Werk schon 1765, also noch in Berlin, begonnen worden war. Von dort hatte er sich ja auch seinen Gehülfen mitgenommen, den er wohl vorher auf seine Fähigkeiten erprobt haben wird.

Von den zahlreichen Bearbeitungen und Übersetzungen, die die Algebra erfahren hat (die Titelkopieen davon und die zugehörigen bibliographischen und historischen Notizen füllen in Eneströms *Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers* allein 10 Druckseiten), ist hier nur die von Johann III Bernoulli besorgte französische Übersetzung hervorzuheben, die 1774 in Lyon in 2 Bänden erschienen ist. Der zweite Band enthält die berühmten *Additions* von Lagrange, die auch in der vorliegenden Ausgabe abgedruckt sind. H. W.

was seine Fähigkeit anlangt, unter die mittelmäßigen Köpfe. Dem ohngeachtet hat er nicht nur alles wohl begriffen, was ihm sein großer Lehrer vorsagte, und zu schreiben befahl, sondern er wurde dadurch in kurtzer Zeit in den Stand gesetzt die in der Folge vorkommende schwere Buchstaben-Rechnungen gantz allein auszuführen und alle ihm vorgelegte Algebraische Aufgaben mit vieler Fertigkeit aufzulösen.

Dieses preiset um so viel mehr den Vortrag und die Lehr-Art des gegenwärtigen Wercks an; da der Lehrling der es geschrieben, begriffen und ausgeführet, sonsten nicht die geringste Hülffe von irgend einem andern als seinem zwar berühmten, aber des Gesichts beraubten Lehrers, genoßen.

Ausser diesem für sich schon großen Vorzug werden die Kenner besonders die Lehre von den Logarithmen und ihre Verbindung mit den übrigen Rechnungs-Arten, so wie auch die für die Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen gegebenen Methoden mit Vergnügen lesen und bewundern. Die Liebhaber der DIOPHANTEISCHEN Aufgaben aber werden sich über den letzten Abschnitt des zweyten Theils freuen, in welchem diese Aufgaben in einem angenehmen Zusammenhange vorgetragen, und alle zu ihrer Auflösung erforderliche Kunstgriffe erklärt worden sind.

INHALT DES GANTZEN WERCKS

ERSTER THEIL

ERSTER ABSCHNITT

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN MIT EINFACHEN GRÖSSEN

Seite

ZWEYTER ABSCHNITT

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

Seite

DRITTER ABSCHNITT

VON DEN VERHÄLTNISSEN UND PROPORTIONEN

ZWEYTER THEIL

ERSTER ABSCHNITT

VON DEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN UND DERSELBEN AUFLÖSUNG

ZWEYTER ABSCHNITT

VON DER UNBESTIMMTEN ANALYTIC

ENDE

DES ERSTEN THEILS ERSTER ABSCHNITT

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN MIT EINFACHEN GRÖSSEN

CAPITEL 1

VON DEN MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN ÜBERHAUPT

1.

Erstlich wird alles dasjenige eine Größe genennt, welches einer Vermehrung oder einer Verminderung fähig ist, oder wozu sich noch etwas hinzusetzen oder davon wegnehmen läßt.

Diesemnach ist eine Summa Gelds eine Größe, weil sich dazu setzen und hinweg nehmen läßt.

Ingleichen ist auch ein Gewicht eine Größe und dergleichen mehr.

2.

Es giebt also sehr viel verschiedene Arten von Größen, welche sich nicht wohl herzehlen laßen; und daher entstehen die verschiedene Theile der Mathematic, deren eine jegliche mit einer besondern Art von Größen beschäftiget ist, indem die Mathematic überhaupt nichts anders ist als eine Wißenschaft der Größen, und welche Mittel ausfündig macht, wie man dieselben ausmeßen soll.

3.

Es läßt sich aber eine Größe nicht anders bestimmen oder ausmeßen, als daß man eine Größe von eben derselben Art als bekannt annimt, und das Verhältniß anzeiget, worinnen eine jegliche Größe, von eben der Art, gegen derselben steht.

Also wann die Größe einer Summa Gelds bestimmt werden soll, so wird ein gewißes Stück Geld als z. E. ein Gulden, ein Rubel, ein Thaler, oder ein Ducaten und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt wie viel dergleichen Stücke in gemeldeter Summa Gelds enthalten sind.

Eben so wann die Größe eines Gewichts bestimt werden soll, so wird ein gewißes Gewicht als z. E. ein Pfund, ein Centner, oder ein Loth und dergleichen für bekannt angenommen, und angezeigt wie viel derselben in dem vorigen Gewicht enthalten sind.

Soll aber eine Länge oder eine Weite ausgemeßen werden, so pfleget man sich darzu einer gewißen bekannten Länge, welche ein Fuß genennet wird, zu bedienen.

4.

Bey Bestimmungen, oder Ausmeßungen der Größen von allen Arten, kommt es also darauf an, daß erstlich eine gewiße bekannte Größe von gleicher Art fest gesetzet werde (welche das Maaß, oder die Einheit, genennet wird) und also von unserer Willkühr lediglich abhängt; hernach daß man bestimme in was für einem Verhältniß die vorgegebene Größe gegen dieses Maaß stehe, welches jederzeit durch Zahlen angezeigt wird, so daß eine Zahl nichts anders ist als das Verhältniß, worinnen eine Größe gegen eine andere, welche für die Einheit angenommen wird, steht.

5.

Hieraus ist klar, daß sich alle Größen, durch Zahlen ausdrücken laßen, und also der Grund aller Mathematischen Wißenschaften darin gesetzt werden muß, daß man die Lehre von den Zahlen, und alle Rechnungs-Arten, so dabey vorkommen können, genau in Erwegung ziehe, und vollständig abhandele.

Dieser Grundtheil der Mathematic wird die Analytic oder Algebra genennet.

6.

In der Analytic werden also blos allein Zahlen betrachtet, wodurch die Größen angezeiget werden, ohne sich um die besondere Art der Größen zu bekümmern, als welches in den übrigen Theilen der Mathematic geschiehet.

7.

Von den Zahlen insbesondere handelt die Arithmetic oder Rechenkunst, allein dieselbe erstreckt sich nur auf gewiße Rechnungs-Arten, welche im gemeinen Leben öffters vorkommen; hingegen begreift die Analytic auf eine allgemeine Art alles dasjenige in sich, was bey den Zahlen und derselben Berechnung auch immer vorfallen mag.

CAPITEL 2

ERKLÄRUNG DERER ZEICHEN + PLUS UND − MINUS

8.

Wann zu einer Zahl eine andere hinzugesetzt oder addirt werden soll, so wird solches durch das Zeichen $+$ angedeutet, welches der Zahl vorgesetzt und *plus* ausgesprochen wird.

Also wird durch $5+3$ angedeutet, daß zu der Zahl 5 noch 3 addirt werden sollen, da man dann weis, daß 8 heraus komme; eben so z. E.

$$12+7 \text{ ist } 19; \quad 25+16 \text{ ist } 41 \quad \text{und} \quad 25+41 \text{ ist } 66 \text{ etc.}$$

9.

Durch dieses Zeichen $+$ *plus* pflegen auch mehrere Zahlen verbunden zu werden, als z. E.

$7+5+9$ wodurch angezeigt wird, daß zu der Zahl 7 noch 5, und über dieses noch 9 addirt werden sollen, welches 21 ausmacht. Hieraus versteht man was nachstehende Formel bedeutet, als:

$$8+5+13+11+1+3+10,$$

nemlich die Summa aller dieser Zahlen, welche beträgt 51.

10.

Wie dieses für sich klar ist, so ist noch zu mercken, daß auf eine allgemeine Art die Zahlen durch Buchstaben, als a, b, c, d, etc. angedeutet werden, wann man also schreibt $a+b$, so bedeutet dieses die Summe der beyden Zahlen, welche durch a und b ausgedruckt werden, dieselben mögen nun so groß oder klein seyn als sie wollen. Eben so bedeutet $f + m + b + x$ die Summe der Zahlen, welche durch diese Buchstaben ausgedruckt werden.

In einem jeglichen Fall also, wann man nur weis, was für Zahlen durch solche Buchstaben angedeutet werden, findet man durch die Rechenkunst die Summe oder den Werth dergleichen Formeln.

11.

Wann hingegen von einer Zahl eine andere weggenommen werden soll, oder subtrahirt wird, so wird solches durch das Zeichen — *minus* angedeutet, welches so viel als weniger ist, und derselben Zahl welche weggenommen wird, vorgesetzt wird:

Also bedeutet $8 - 5$

daß von der Zahl 8 die Zahl 5 soll weggenommen werden, da dann wie bekannt ist 3 übrig bleibt. Eben so ist

$12 - 7$ so viel als 5, und $20 - 14$ so viel als 6, etc.

12.

Es kann auch geschehen, daß von einer Zahl mehr Zahlen sollen zugleich subtrahiret werden, als z. E.:

$$50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9.$$

Welches also zu verstehen ist: nimmt man zuerst 1 von 50 weg, bleiben 49; davon 3 weggenommen, bleiben 46; davon 5, bleiben 41; davon 7 weg, bleiben 34; davon die letzten 9 weggenommen, bleiben 25; welches der Werth der vorgegebenen Formel ist. Aber da die Zahlen 1, 3, 5, 7, 9, insgesammt weggenommen werden sollen, so ist es eben so viel, als wann man ihre Summe nemlich 25 auf einmal von 50 abzieht, da dann, wie vorher, 25 übrig bleiben.

13.

Eben so läßt sich auch leicht der Werth solcher Formeln bestimmen, in welchen beyde Zeichen + *plus* und — *minus* vorkommen; als z. E.

$12 - 3 - 5 + 2 - 1$ ist so viel als 5.

Oder man darf nur die Summe derer Zahlen die + vor sich haben, besonders nehmen, als:

$12 + 2$ machen 14, und davon die Summe aller Zahlen die — vor sich haben, welche sind 3, 5, 1,

das ist 9 abziehen, da dann wie vorher gefunden wird 5.

14.

Hieraus ist klar, daß es hierbey gar nicht auf die Ordnung der hergesetzten Zahlen ankomme, sondern daß man dieselben nach Belieben versetzen könne, wann nur eine jede das ihr vorstehende Zeichen behält; also, anstatt der obigen Formel kan man setzen

$$12 + 2 - 5 - 3 - 1, \quad \text{oder} \quad 2 - 1 - 3 - 5 + 12, \quad \text{oder} \quad 2 + 12 - 3 - 1 - 5;$$

wobey aber zu mercken daß in obiger Formel vor der Zahl 12 das Zeichen + vorgesetzt verstanden werden muß.

15.

Wann nun die Sache allgemein zu machen, anstatt der würcklichen Zahlen, Buchstaben gebraucht werden, so begreift man auch leicht die Bedeutung davon, als z. E.

$a - b - c + d - e$ deutet an, daß die durch die Buchstaben a und d ausgedruckte Zahlen hergelegt werden, und davon die übrigen b, c, e, welche das Zeichen — haben insgesammt weggenommen werden müßen.

16.

Hier kommt also die Hauptsache darauf an, was für ein Zeichen eine jegliche Zahl vor sich stehen hat; daher pflegt man in der Algebra die Zahlen mit ihren vorstehenden Zeichen, als einzelne Größen zu betrachten, und diejenigen welche das Zeichen + vor sich haben, bejahende oder positive Größen zu nennen; diejenigen aber welche das Zeichen — vor sich haben, werden verneinende oder negative Größen genennet.

17.

Dieses läßt sich schön durch die Art erläutern, wie das Vermögen einer Person pflegt angezeigt zu werden; da dasjenige, was sie würcklich besitzt durch positive Zahlen mit dem Zeichen + *plus*, dasjenige aber was sie schuldig ist, durch negative Zahlen mit dem Zeichen — *minus* ausgedruckt wird. Also wann jemand 100 Rubel hat, dabey aber 50 schuldig ist, so wird sein Vermögen seyn

$$100 - 50, \quad \text{oder welches einerley,}$$

$$+100 - 50, \quad \text{das ist } 50.$$

18.

Da nun die negative Zahlen als Schulden betrachtet werden können, in so fern die positive Zahlen die würckliche Besitzungen anzeigen, so kann man sagen, daß die negative Zahlen weniger sind als nichts; also wenn einer nichts im Vermögen hat und noch darzu 50 Rub. schuldig ist, so hat er würcklich 50 Rub. weniger als nichts; dann wann ihm jemand 50 Rub. schencken sollte um seine Schulden zu bezahlen, so würde er alsdann erst nichts haben, da er doch jetzt mehr hatte als vorher.

19.

Wie nun die positive Zahlen ohnstreitig größer als nichts, so sind die negative Zahlen kleiner als nichts. Die positive Zahlen aber entstehen, wann man erstlich zu 0, oder nichts, immerfort eines zusetzt, da dann die Reihe der sogenannten natürlichen Zahlen entspringt, nehmlich

$$0,\ +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ +6,\ +7,\ +8,\ +9,\ +10,$$

und so fort ins unendliche.

Wird aber diese Reihe rückwärts fortgesetzt, und immer eins mehr weggenommen, so entspringt folgende Reihe der negativen Zahlen

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7,\ -8,\ -9,\ -10,$$

und so fort ohne Ende.

20.

Alle diese Zahlen, so wohl positive als negative, führen den bekannten Nahmen der gantzen Zahlen, welche also entweder größer oder kleiner sind als nichts. Man nennt dieselbe gantze Zahlen um sie von den gebrochenen, und noch vielerley andern Zahlen, wovon unten gehandelt werden wird, zu unterscheiden. Dann da zum Exempel 50 um ein gantzes größer ist als 49, so begreift man leicht, daß zwischen 49 und 50 noch unendlich viel Mittel-Zahlen statt finden können, welche alle größer als 49, und doch alle kleiner als 50 sind. Man darf sich zu diesem Ende nur 2 Linien vorstellen, deren eine

50 Fuß, die andre aber 49 Fuß lang ist, so wird man leicht begreiffen, daß man unendlich viel andre Linien ziehen kan, welche alle länger als 49 und doch kürtzer als 50 Fuß sind.

21.

Dieser Begriff von den verneinenden oder negativen Größen ist um so viel sorgfältiger zu bemercken, da derselbe in der gantzen Algebra von der größten Wichtigkeit ist. Hier wird genung seyn zum voraus zu bemercken, daß diese Formel, z. E.

$$+1-1, \quad +2-2, \quad +3-3, \quad +4-4, \text{ u. s. f.}$$

alle so viel sind als 0, oder nichts; ferner, daß z. Ex. $+2-5$ so viel ist als -3, weil wann einer 2 Rbl. hat, und 5 Rbl. schuldig ist, so hat er nicht nur nichts, sondern bleibt noch 3 Rbl. schuldig; eben so ist

$$7-12 \text{ so viel als } -5$$
$$25-40 \text{ so viel als } -15.$$

22.

Eben dieses ist auch zu beobachten, wann auf eine allgemeine Art anstatt der Zahlen Buchstaben gebraucht werden, da dann immer $+a-a$ so viel ist als 0 oder nichts. Hernach wann man wißen will, was z. E. $+a-b$ bedeute, so sind zwey Fälle zu erwegen.

Der 1te ist, wann a größer als b, da subtrahiret man b von a, und der Rest positiv genommen ist der gesuchte Werth.

Der 2te ist, wann a kleiner als b, da subtrahiret man a von b, und der Rest negativ genommen, oder das Zeichen *minus* — vorgesetzt, zeigt den gesuchten Werth an.

CAPITEL 3

VON DER MULTIPLICATION MIT EINFACHEN GRÖSSEN

23.

Wann zwey, oder mehr gleiche Zahlen zusammen addirt werden, so läßt sich die Summe auf eine kürtzere Art ausdrücken also ist:

$a+a$	so viel als $2\cdot a$, und
$a+a+a$	„ „ „ $3\cdot a$, ferner
$a+a+a+a$	„ „ „ $4\cdot a$, und so weiter.

Woraus der Begriff von der Multiplication entspringt, nehmlich da

$2 \cdot a$ so viel ist, als 2 mal a, und

$3 \cdot a$ so viel als 3 mal a, ferner

$4 \cdot a$ so viel als 4 mal a, u. s. fort.

24.

Wann also eine durch einen Buchstaben ausgedruckte Zahl mit einer beliebigen Zahl multipliciret werden soll, so wird die Zahl blos vor den Buchstaben geschrieben; also,

a mit 20 mult. giebt $20a$, und

b mit 30 mult. giebt $30b$, etc.

Solcher gestalt ist ein c, einmahl genommen, oder $1c$, so viel als c.

25.

Dergleichen Producte können auch noch weiter leicht mit andern Zahlen multipliciret werden, als z. E.

2 mal $3a$ macht $6a$

3 mal $4b$ macht $12b$

5 mal $7x$ macht $35x$,

welche noch ferner mit Zahlen nach Belieben können multipliciret werden.

26.

Wann die Zahl mit welcher multipliciret werden soll, auch durch einen Buchstaben vorgestelt wird, so wird derselbe dem andern Buchstaben unmittelbar vorgesetzt; also wann b mit a multipliciret werden soll, so heißt das Product ab, und pq ist das Product welches entsteht wann man die Zahl q mit p multiplicirt. Will man pq noch ferner mit a multipliciren so kömmt heraus apq.

27.

Hiebey ist wohl zu mercken, daß es auch hier nicht auf die Ordnung der an einander gesetzten Buchstaben ankomme, indem ab eben so viel ist als ba; oder b und a mit einander multiplicirt, macht eben so viel als a mit b

multiplicirt. Um dieses zu begreifen darf man nur für a und b bekannte Zahlen, als 3 und 4 nehmen, so giebt es sich von selbsten: nehmlich 3 mal 4 ist eben so viel, als 4 mal 3.

28.

Wann anstatt der Buchstaben welche unmittelbar an einander geschrieben sind, würckliche Zahlen sollen gesetzt werden, so sieht man leicht, daß dieselben alsdann nicht unmittelbar hinter einander geschrieben werden können. Dann wann man vor 3 mal 4 schreiben wollte 34, so würde solches nicht zwölff sondern vier und dreissig heißen. Wann derowegen eine Multiplication mit bloßen Zahlen angedeutet werden soll, so pflegt man einen Punct zwischen dieselben zu setzen: also $3 \cdot 4$ bedeutet 3 mal 4, das ist 12, eben so ist $1 \cdot 2$ so viel als 2 und $1 \cdot 2 \cdot 3$ ist 6; ferner $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 56$ ist 1344 und $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$ ist 3628800 u. s. f.

29.

Hieraus ergiebt sich nun auch was eine solche Formul $5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot abcd$ bedeute; nehmlich 5 wird erstlich mit 7 multipliciret, das Product ferner mit 8, dieses Product hernach mit a, und dieses wieder mit b, sodann mit c, und endlich mit d multipliciret; wobey zu mercken, daß anstatt $5 \cdot 7 \cdot 8$, der Werth davon, nemlich die Zahl 5 mal 7, ist 35, und 8 mal 35, ist 280, geschrieben werden kan.

30.

Ferner ist zu mercken, daß solche Formeln die aus der Multiplication mehrerer Zahlen entstehen, Producte genennt werden. Zahlen oder Buchstaben aber, welche einzeln sind, pflegt man Factores zu nennen.

31.

Bis hierher haben wir nur positive Zahlen betrachtet, und da ist gar kein Zweifel, daß die daher entstehenden Producte nicht auch positive seyn sollten: nehmlich $+a$ mit $+b$ multipliciret giebt ohnstreitig $+ab$; was aber herauskomme, wann $+a$ mit $-b$ oder $-a$ mit $-b$ multipliciret werde, erfordert eine besondere Erörterung.

32.

Wir wollen erstlich $-a$ mit 3, oder $+3$, multipliciren; weil nun $-a$ als eine Schuld angesehen werden kann, so ist offenbar, daß wann diese

Schuld 3mal genommen wird, dieselbe auch 3mal größer werden müße, folglich wird das gesuchte Product $-3a$ seyn. Eben so wann $-a$ mit b das ist $+b$ multiplicirt werden soll, so wird heraus kommen $-ba$, oder welches einerley $-ab$. Hieraus machen wir den Schluß, daß wann eine positive Größe mit einer negativen multiplicirt werden soll, das Product negativ werde; woher diese Regul gemacht wird, $+$ mit $+$ giebt $+$ oder *plus*. Hingegen $+$ mit $-$, oder $-$ mit $+$ multipliciret giebt $-$ oder *minus*.

33.

Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nehmlich wann $-$ mit $-$ multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, daß das Product in Ansehung der Buchstaben heißen werde, ab; ob aber das Zeichen $+$ oder $-$ dafür zu setzen sey, ist noch ungewiß, so viel aber ist gewiß, daß es entweder das eine, oder andere seyn muß. Nun aber, sage ich, kan es nicht das Zeichen $-$ seyn. Dann $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es muß das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heißt, $+ab$. Hieraus entsteht diese Regul, $-$ mit $-$ multiplicirt giebt $+$ eben so wohl als $+$ mit $+$.

34.

Diese Regeln pflegen zusammengezogen und kürtzlich mit diesen Worten ausgedruckt zu werden: Zwey gleiche Zeichen mit ein ander multipliciret geben $+$, zwey ungleiche Zeichen aber geben $-$. Wann also zum Ex. diese Zahlen

$$+a,\ -b,\ -c,\ +d$$

mit einander multiplicirt werden sollen, so giebt erstlich $+a$ mit $-b$ mult. $-ab$, dieses mit $-c$, giebt $+abc$, und dieses endlich mit $+d$, giebt $+abcd$.

35.

Da nun die Sache in Ansehung der Zeichen keine Schwierigkeit hat, so ist noch übrig zu zeigen wie zwey Zahlen, die schon selbsten Producte sind, mit ein ander multiplicirt werden sollen. Wann die Zahl ab mit der Zahl cd multiplicirt werden soll, so ist das Product $abcd$, und entsteht also wann man erstlich ab mit c, und das, was man durch die Multiplication gefunden, ferner mit d multiplicirt. Oder also, wann man z. E. die Zahl 36 mit 12 multipliciren soll: weil 12 ist 3 mal 4, so hat man nur nöthig 36 erstlich mit 3 zu multipliciren und das gefundene, nemlich 108 ferner mit 4 zu multipliciren. Da man dann erhält:

432, welches so viel ist als 12 mahl 36.

36.

Wollte man aber $5ab$ mit $3cd$ multipliciren, so könte man auch wohl setzen $3cd\ 5ab$: da es aber hier eben nicht auf die Ordnung derer mit einander multiplicirten Zahlen ankommt, so pflegt man die bloße Zahlen zuerst zu setzen und schreibt für das Product $5 \cdot 3\,abcd$, oder $15abcd$, weil 5 mahl 3 so viel ist als 15.

Eben so wann $12pqr$ mit $7xy$ multiplicirt werden sollte, so erhält man $12 \cdot 7pqrxy$, oder $84pqrxy$.

CAPITEL 4

VON DER NATUR DER GANTZEN ZAHLEN IN ABSICHT AUF IHRE FACTOREN

37.

Wir haben bemerckt, daß ein Product aus 2 oder mehr mit einander multiplicirten Zahlen entstehe. Diese Zahlen werden die *Factores* davon genennt.

Also sind die Factores des Products $abcd$ die Zahlen a, b, c, d.

38.

Zieht man nun alle gantze Zahlen in Betrachtung, in so fern dieselben durch die Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entstehen können, so wird man bald finden, daß einige gar nicht durch die Multiplication entspringen können und also keine Factoren haben, andere aber aus 2 und auch mehr Zahlen mit einander mult. entstehen können, folglich 2 oder mehr Factores haben; also ist:

4 so viel als $2 \cdot 2$, ferner 6 so viel als $2 \cdot 3$, und

8 so viel als $2 \cdot 2 \cdot 2$, ferner 27 so viel als $3 \cdot 3 \cdot 3$, und

10 so viel als $2 \cdot 5$, und so fort.

39.

Hingegen laßen sich die Zahlen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. nicht solchergestalt durch Factores vorstellen, es wäre dann daß man auch 1 zu Hülfe nehmen, und z. E. 2 durch $1 \cdot 2$ vorstellen wollte. Allein da mit 1 multiplicirt die Zahl nicht verändert wird, so wird 1 auch nicht unter die Factores gezehlt.

Alle diese Zahlen nun, welche nicht durch Factores vorgestellt werden können, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, etc. werden *einfache* Zahlen, oder *Prim-Zahlen* genennt; die übrigen Zahlen aber welche sich durch Factores vorstellen laßen als:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, etc. heißen *zusammengesetzte* Zahlen.

40.

Die einfache oder Prim-Zahlen verdienen also besonders wohl in Erwegung gezogen zu werden, weil dieselben aus keiner Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen mit einander entstehen können. Wobey insonderheit dieses merckwürdig ist, daß wann dieselben der Ordnung nach geschrieben werden, als:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, u. s. f. darinnen keine gewiße Ordnung wahrgenommen wird, sondern dieselben bald um mehr, bald um weniger fortspringen.

Und es hat auch bisher kein Gesetze, nach welchen dieselben fortgiengen, ausfindig gemacht werden können.

41.

Die zusammengesetzten Zahlen aber, welche sich durch Factores vorstellen laßen, entspringen alle aus den obigen Prim-Zahlen, so das alle Factores davon Prim-Zahlen sind. Dann wann je ein Factor keine Prim-Zahl, sondern schon zusammengesetzt wäre, so würde man denselben wieder durch 2 oder mehr Factores, die Prim-Zahlen wären, vorstellen können. Also wann die Zahl 30 durch $5 \cdot 6$ vorgestellt wird, so ist 6 keine Prim-Zahl sondern $2 \cdot 3$, und also kan 30 durch $5 \cdot 2 \cdot 3$, oder durch $2 \cdot 3 \cdot 5$, vorgestellt werden, wo alle Factores Prim-Zahlen sind.

42.

Erwegt man nun alle zusammengesetzte Zahlen, wie solche durch Prim-Zahlen vorgestellt werden können, so findet sich darinnen ein großer Unterschied, indem einige nur 2 dergleiche Factores haben, andere 3 oder mehr: also ist wie wir schon gesehen

4 so viel als $2 \cdot 2$,	6 so viel als $2 \cdot 3$,
8 „ „ „ $2 \cdot 2 \cdot 2$,	9 „ „ „ $3 \cdot 3$,
10 „ „ „ $2 \cdot 5$,	12 „ „ „ $2 \cdot 3 \cdot 2$,
14 „ „ „ $2 \cdot 7$,	15 „ „ „ $3 \cdot 5$,
16 „ „ „ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$,	und so fort.

43.

Hieraus läßt sich begreifen, wie man von einer jeglichen Zahl ihre einfache Factores finden soll.

Also wann die Zahl 360 vorgegeben wäre, so hat man für dieselbe erstlich $2 \cdot 180$.

Nun aber ist

180 so viel als $2 \cdot 90$ und

90 so viel als $2 \cdot 45$ und

45 so viel als $3 \cdot 15$ und endlich

15 so viel als $3 \cdot 5$.

Folglich wird die Zahl 360 durch folgende einfache Factores vorgestellt:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5,$$

als welche Zahlen alle mit einander multiplicirt, die Zahl 360 vorbringen.

44.

Wir sehen also hieraus, daß sich die Prim-Zahlen durch keine andre Zahlen theilen laßen, und hingegen die zusammengesetzten Zahlen am füglichsten in ihre einfache Factores aufgelößet werden, wann man alle einfache Zahlen sucht, durch welche sich dieselben theilen laßen. Allein hiebey wird die Division gebraucht, von welcher in dem folgenden Capitel die Regeln erklärt werden sollen.

CAPITEL 5

VON DER DIVISION MIT EINFACHEN GRÖSSEN

45.

Wann eine Zahl in 2, 3, oder mehr gleiche Theile zertheilt werden soll, so geschieht solches durch die Division, welche die Größe eines solchen Theils bestimmen lehret. Also wann die Zahl 12 in 3 gleiche Theile zertheilt werden soll, so findet man durch die Division, daß ein solcher Theil 4 sey.

Man bedienet sich aber dabey gewißer Nahmen. Die Zahl die zertheilt werden soll, heißt das *Dividend* oder die zu theilende Zahl; die Anzahl der Theile wird der *Divisor*, oder *Theiler* genennt. Die Größe eines solchen Theils aber, welcher durch die Division gefunden wird, pflegt der *Quotus* oder *Quotient* genennt zu werden: also ist dem angeführten Exempel nach

12 das Dividend, oder die zu theilende Zahl,
3 der Divisor, oder Theiler, und
4 der Quotus, oder Quotient.

46.

Wann man also eine Zahl durch 2 theilt oder in 2 gleiche Theile zerschneidet, so muß ein solcher Theil, das ist der Quotus zweymal genommen, just die vorgegebene Zahl ausmachen; eben so wann eine Zahl durch 3 getheilt werden soll, so muß der Quotus 3 mal genommen dieselbe Zahl ausmachen; ja es muß überhaupt immer das Dividend herauskommen, wann man den Quotus und den Divisor mit einander multiplicirt.

47.

Dahero wird auch die Division also beschrieben, daß man für den Quotient eine solche Zahl suche, welche mit dem Divisor multiplicirt just die zu theilende Zahl hervorbringe. Also wann zum Exempel 35 durch 5 getheilt werden soll, so sucht man eine Zahl, welche mit 5 multiplicirt 35 herausbringe. Diese Zahl ist demnach 7, weil 5 mal 7 35 ausmacht. Man pflegt sich dabey dieser Redens-Art zu bedienen: 5 in 35 habe ich 7 mal; dann 5 mal 7 ist 35.

48.

Man stellt sich demnach das Dividend als ein Product vor, von welchem der eine Factor dem Divisor gleich ist, da dann der andere Factor den Quotienten anzeigt.

Wann ich also 63 durch 7 dividiren soll, so suche ich ein Product, davon der eine Factor 7 und der andere also beschaffen ist, daß wann derselbe mit dieser 7 multipliciret wird, genau 63 herauskommen. Ein solches ist nun $7 \cdot 9$, und deswegen ist 9 der Quotus, welcher entspringt wenn man 63 durch 7 dividirt.

49.

Wann dahero auf eine allgemeine Art die Zahl ab durch a getheilt werden soll, so ist der Quotus offenbar b, weil a mit b multiplicirt das Dividend ab ausmacht. Hieraus ist klar, daß wann man ab durch b dividiren soll, der Quotus a seyn werde.

Also überhaupt in allen Divisions-Exempeln wann man das Dividend durch den Quotus dividirt, so muß der Divisor herauskommen: als da 24 durch 4 dividirt 6 giebt, so giebt auch umgekehrt 24 durch 6 dividirt 4.

50.

Wie nun alles darauf ankommt, daß man das Dividend durch 2 Factores vorstelle, deren einer dem Divisor gleich sey, weil alsdann der andere den Quotus anzeigt, so wird man die folgende Exempel leicht verstehen. Erstlich das Dividend abc durch a dividirt giebt bc, weil a mit bc multiplicirt abc ausmacht; eben so wann abc durch b dividirt wird, so kommt ac heraus; und abc durch ac dividirt giebt b. Hernach $12mn$ durch $3m$ dividirt giebt $4n$, weil $3m$ mit $4n$ multiplicirt $12mn$ ausmacht: wann aber eben diese Zahl $12mn$ durch 12 dividirt werden sollte, so würde mn herauskommen.

51.

Weil eine jede Zahl a durch $1a$, oder ein a, ausgedruckt werden kann, so ist hieraus offenbahr, daß wann man a oder $1a$ durch 1 theilen soll, alsdann eben dieselbe Zahl a für den Quotus heraus komme. Hingegen wann eben dieselbe Zahl a oder $1a$ durch a getheilet werden soll, so wird der Quotus 1 seyn.

52.

Es geschiehet aber nicht immer, daß man das Dividend als ein Product von 2 Factoren vorstellen könne, deren einer dem Divisor gleich sey, und in solchen Fällen läßt sich die Division nicht auf diese Art bewerckstelligen. Dann wann ich z. E. 24 durch 7 dividiren soll, so ist die Zahl 7 kein Factor von 24, weil $7 \cdot 3$ erst 21, und also zu wenig, hingegen $7 \cdot 4$ schon 28, und also zu viel ausmacht: doch sieht man hieraus daß der Quotus größer seyn müße als 3, und doch kleiner als 4. Dahero um denselben genau zu bestimmen eine andere Art von Zahlen, die Brüche genennt werden, zu Hülfe genommen werden muß, wovon in einem der folgenden Capitel gehandelt werden soll.

53.

Ehe man aber zu den Brüchen fortschreitet, so begnügt man sich für den Quotus die nächst kleinere gantze Zahl anzunehmen, dabey aber den Rest zu bestimmen, welcher übrig bleibt; also sagt man 7 in 24 hab ich 3 mal, der Rest aber sey 3, weil 3 mal 7 nur 21 macht, so um 3 zu klein ist. Eben so sind folgende Exempel zu verstehen, als:

6	34	5	nemlich der Divisor ist	6,
	30		das Dividend ist	34,
	4		der Quotient ist	5,
			der Rest ist	4,
9	41	4	und hier ist der Divisor	9,
	36		das Dividend	41,
	5		der Quotient	4,
			der Rest	5.

In solchen Exempeln wo ein Rest übrig bleibt ist folgende Regul zu mercken.

54.

Erstlich daß wann man den Theiler mit dem Quotus multipliciret und zum Product noch den Rest addirt, alsdann das Dividend heraus kommen müße; und auf diese Art pflegt man die Division zu probiren, ob man recht gerechnet habe oder nicht.

Also in dem ersten der zwey letztern Exempel, multiplicirt man $6 \cdot 5$, ist 30, dazu den Rest 4 addirt, kommt just das Dividend 34.

Ebenfalls in dem letzten Exempel, wann man den Theiler 9 mit dem Quotus 4 multiplicirt und zum Product 36 noch den Rest 5 addirt, so erhält man das Dividend 41.

55.

Letztlich ist hier auch noch nöthig in Ansehung der Zeichen *plus* $+$ und *minus* $-$ anzumercken, daß wann $+ab$ durch $+a$ dividirt wird, der Quotus $+b$ seyn werde, welches für sich klar ist.

Wann aber $+ab$ durch $-a$ dividirt werden soll, so wird der Quotus $-b$ seyn, weil $-a$ mit $-b$ mult. $+ab$ ausmacht.

Wann ferner das Dividend $-ab$ heißt, und durch den Theiler $+a$ dividirt werden soll, so wird der Quotus $-b$ seyn, weil $+a$ mit $-b$ mult. $-ab$ giebt, das ist das Dividend.

Soll endlich das Dividend $-ab$ durch den Divisor $-a$ getheilt werden, so wird der Quotus $+b$ seyn, weil $-a$ mit $+b$ multiplicirt $-ab$ ausmacht.

56.

Es finden also in der Division für die Zeichen $+$ und $-$ eben dieselben Regeln statt, welche wir oben bey der Multiplication angemercket haben, nehmlich:

$+$ durch $+$ giebt $+$; $+$ durch $-$ giebt $-$; $-$ durch $+$ giebt $-$; $-$ durch $-$ giebt $+$;

oder kürtzer, gleiche Zeichen geben *plus*, ungleiche aber *minus*.

57.

Wann also $18pq$ durch $-3p$ dividiret werden soll so wird der Quotient $-6q$ seyn;

ferner: $-30xy$ durch $+6y$ dividirt giebt $-5x$

ferner: $-54abc$ durch $-9b$ div. giebt $+6ac$, weil $-9b$ mit $+6ac$ mult. $-6\cdot 9abc$, oder $-54abc$ giebt; welches für die Division mit einfachen Größen genung seyn mag. Dahero wir zur Erklärung der Brüche fortschreiten wollen, nachdem wir vorher noch etwas von der Natur der Zahlen in Ansehung ihrer Theiler werden bemercket haben.

CAPITEL 6

VON DEN EIGENSCHAFTEN DER GANTZEN ZAHLEN IN ANSEHUNG IHRER THEILER

58.

Da wir gesehen haben, daß sich einige Zahlen durch gewiße Divisores theilen laßen, andere aber nicht, so ist zur Erkänntniß der Zahlen nöthig, diesen Unterschied wohl zu bemercken, und diejenigen Zahlen die sich durch irgend einen Divisor theilen laßen, von denjenigen die sich dadurch nicht theilen laßen, wohl zu unterscheiden, und zugleich auch den Rest, welcher bey der Division der letztern übrig bleibt, wohl anzumercken; zu welchem Ende wir die Divisores,

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,$$

und so fort, betrachten wollen.

59.

Es sey erstlich der Divisor 2; die Zahlen also, welche sich dadurch theilen laßen, sind folgende:

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 20,\ \text{u. s. f.}$$

welche denn so fort immer um 2 steigen. Diese Zahlen werden insgesamt *gerade Zahlen* genennt.

Hingegen die übrigen Zahlen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ \text{u. s. f.}$$

welche sich durch 2 nicht theilen laßen, ohne daß nicht 1 im Reste bliebe, werden *ungerade Zahlen* genennt, und sind also immer um eins größer oder kleiner als die gerade Zahlen. Die gerade Zahlen können nun alle in dieser allgemeinen Formel $2a$ begriffen werden, weil wann man für a nach und nach alle Zahlen annimt, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, u. s. f., daraus alle gerade Zahlen entspringen. Hingegen sind alle ungerade Zahlen in dieser Formel $2a+1$ enthalten, weil $2a+1$ um 1 größer ist als die gerade Zahl $2a$.

60.

Zweytens. Es sey der Divisor 3, so sind alle Zahlen welche sich dadurch theilen laßen folgende:

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 21,\ 24,\ \text{u. s. f.}$$

welche durch diese Formel $3a$ vorgestellt werden können. Dann $3a$, durch 3 dividirt giebt a zum Quotus, ohne Rest; die übrigen Zahlen aber, wann man sie durch 3 theilen will, laßen entweder 1, oder 2, zum Rest übrig, und sind also von zweyerley Art. Die welche 1 übrig laßen, sind folgende:

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, u. s. f.

und sind in dieser Formel $3a+1$, enthalten. Die von der andern Art welche 2 übrig laßen sind folgende:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, u. s. f.

welche alle in dieser Formel $3a+2$, enthalten sind: also daß alle Zahlen entweder in der Formel $3a$, oder in dieser $3a+1$, oder in dieser $3a+2$, enthalten sind.

61.

Wann ferner der Divisor 4 ist, so sind alle Zahlen, die sich dadurch theilen laßen, folgende:

4, 8, 12, 16, 20, 24, u. s. f.

welche immer um 4 steigen, und in der Formel $4a$ enthalten sind. Die übrigen Zahlen aber, welche sich durch 4 nicht theilen laßen, laßen entweder 1 zum Rest und sind um 1 größer als jene, nehmlich:

1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, u. s. f.

welche folglich in dieser Formel $4a+1$, enthalten sind. Oder sie laßen 2 zum Rest, als:

2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, u. s. f.

und sind in der Formel $4a+2$, enthalten.

Oder endlich bleibt 3 zum Rest übrig, solche Zahlen sind folgende:

3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, u. s. f.

und sind in dieser Formel $4a+3$, enthalten, so daß alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln

$$4a, \quad 4a+1, \quad 4a+2, \quad 4a+3,$$

enthalten sind.

62.

Eben so verhält sich die Sache mit dem Divisor 5, da alle Zahlen, welche sich dadurch theilen laßen, in der Formel $5a$ enthalten sind; diejenigen aber, welche sich dadurch nicht theilen laßen, sind entweder:

$$5a+1, \quad 5a+2, \quad 5a+3, \quad \text{oder } 5a+4,$$

und so kan man weiter zu allen größern Divisoren fortschreiten.

63.

Hierbey kommt nun zu statten, was oben von der Auflösung der Zahlen in ihre einfache Factores vorgebracht worden, weil eine jegliche Zahl, unter deren Factoren sich entweder:

$$2, \text{ oder } 3, \text{ oder } 4, \text{ oder } 5, \text{ oder } 7,$$

oder eine andere Zahl befindet, sich auch durch dieselbe theilen läßt: da zum Exempel

$$60 \text{ so viel ist als: } 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5,$$

so ist klar, daß sich 60 durch 2, durch 3 und auch durch 5 theilen laße.

64.

Da hernach überhaupt die Formel $abcd$ sich nicht nur durch a und b und c und d, sondern auch durch folgende

ab, ac, ad, bc, bd, cd, ferner auch durch
abc, abd, acd, bcd, und endlich auch durch
$abcd$, das ist durch sich selbst, theilen läßt,

so läßt sich gleichfals 60 das ist $2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$, außer den einfachen Zahlen, auch durch die theilen, die aus zwey einfachen zusammen gesetzt sind, nehmlich durch 4, 6, 10, 15, ferner auch durch die welche aus dreien bestehen, als 12, 20, 30, und endlich auch durch 60, das ist durch sich selbst.

65.

Wann man also eine jegliche beliebige Zahl durch ihre einfache Factores vorgestellt hat, so ist es sehr leicht alle diejenigen Zahlen anzuzeigen, wodurch sich dieselbe theilen läßt. Dann man darf nur erstlich einen jeden von den einfachen Factoren für sich selbst nehmen, hernach, je zwey, je drey, je vier, und so fort mit einander multipliciren bis man auf die vorgegebene Zahl selbst kommt.

66.

Vor allen Dingen ist hier zu mercken, daß sich eine jede Zahl durch 1 theilen laße, so wie sich auch eine jede Zahl durch sich selbst theilen läst; also daß eine jede Zahl zum wenigsten zwey Theiler oder Divisores hat, nemlich 1, und sich selbsten; welche Zahlen nun außer diesen beyden Theilern, keine andere haben, sind eben diejenigen, welche oben sind einfache oder Prim-Zahlen genennt worden.

Alle zusammen gesetzte Zahlen aber haben außer 1 und sich selbsten, noch andere Divisores, wie aus folgender Tafel zu sehen ist, wo unter jeder Zahl alle ihre Theiler sind gesetzt worden.

Tafel

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2	13	2	3	2	17	2	19	2
			4		3		4	9	5		3		7	5	4		3		4
					6		8		10		4		14	15	8		6		5
											6				16		9		10
											12						18		20
1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5	2	6	2	6
p.	p.	p.		p.		p.				p.		p.				p.		p.	

67.

Endlich ist noch zu mercken daß 0 als eine solche Zahl angesehen werden kann, welche sich durch alle möglichen Zahlen theilen läßt; weil wann man 0 durch eine jegliche Zahl als a theilen soll, der Quotus immer 0 ist, dann 0 mal a, oder $0\,a$ ist 0: weil es wohl zu mercken ist, daß eine jede Zahl mit 0 multiplicirt nichts heraus bringe.

CAPITEL 7

VON DEN BRÜCHEN ÜBERHAUPT

68.

Wenn sich eine Zahl als zum Ex. 7 durch eine andere als 3 nicht theilen läßt, so ist dieses nur so zu verstehen, daß sich der Quotus nicht durch eine gantze Zahl ausdrucken läßt, keines weges aber, daß es an sich unmöglich sey, sich einen Begriff von dem Quotus zu machen.

Man darf sich nur eine Linie, die 7 Fuß lang ist, vorstellen, so wird wohl niemand zweifeln, daß es nicht möglich sein sollte, diese Linie in 3 gleiche Theile zu zerschneiden und sich einen Begriff von der Größe eines solchen Theils zu machen.

69.

Da man sich nun einen deutlichen Begriff von dem Quotus, der in solchen Fällen herauskommt machen kan, obgleich derselbe keine gantze Zahl ist, so werden wir hierdurch auf eine besondere Art von Zahlen geleitet, welche *Brüche* oder *gebrochene Zahlen* genennt werden.

Also haben wir in obigem Exempel, wo 7 durch 3 dividirt werden soll, einen deutlichen Begriff von dem daher entspringenden Quotus und man pflegt denselben auf folgende Art anzuzeigen $\frac{7}{3}$; wo die obengesetzte Zahl 7 das Dividend und die untengesetzte Zahl 3 der Divisor ist.

70.

Wann also auf eine allgemeine Art die Zahl a, durch die Zahl b, getheilt werden soll, so wird der Quotus durch $\frac{a}{b}$ angedeutet, welche Schreib-Art ein Bruch genennt wird; dahero man sich keinen beßern Begriff von einem solchen Bruch $\frac{a}{b}$ machen kann, als daß man sagt, es werde dadurch der Quotus angezeigt, welcher entspringe, wann man die obere Zahl durch die untere Zahl dividire. Hierbey ist noch zu mercken, daß bey allen dergleichen Brüchen, die untere Zahl der *Nenner*, die obere aber der *Zehler* genennt zu werden pflegt.

71.

In dem oben angeführten Bruch $\frac{7}{3}$, welcher mit dem Worte Sieben Drittel ausgesprochen wird, ist 7 der Zehler und 3 der Nenner. Eben so heißt dieser Bruch

$\frac{2}{3}$ zwey Drittel $\quad$ $\frac{3}{4}$ drey Viertheil

$\frac{3}{8}$ drey Achtel $\quad$ $\frac{12}{100}$ zwölff Hunderttheil.

Dieser Bruch aber $\frac{1}{2}$ wird genennet ein halbes, anstatt ein zweytel; dann eigentlich ist $\frac{1}{2}$ der Quotus, welcher heraus kommt, wann man 1 in zwey gleiche Theile zerschneidet, da dann wie bekandt ein solcher Theil ein halbes genennt wird.

72.

Um die Natur der Brüche recht kennen zu lernen, wollen wir erstlich diesen Fall betrachten, wo die obere Zahl der untern, oder der Zehler dem Nenner gleich ist, als $\frac{a}{a}$. Weil nun dadurch der Quotus angedeutet wird, der heraus kommt, wann man a durch a dividiret: so ist klar, daß dieser Quotus just 1 ist, folglich ist dieser Bruch $\frac{a}{a}$ so viel als 1, oder ein Gantzes, daher sind folgende Brüche

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \text{u. s. f.}$$

alle einander gleich, und ein jeder derselben ist so viel als Eins, oder ein Gantzes.

73.

Da nun ein jeder Bruch, deßen Zehler dem Nenner gleich ist, Eins beträgt, so sind alle Brüche, deren Zehler kleiner sind als ihre Nenner, weniger als Eins. Dann wann ich eine kleinere Zahl durch eine größere dividiren soll, so kommt weniger als 1 heraus; wann z. E. eine Linie von 2 Fuß in 3 gleiche Theile zerschnitten werden soll, so wird ein Theil ohnstreitig kleiner seyn als ein Fuß, dahero offenbar daß $\frac{2}{3}$ weniger als 1, und dieses eben deswegen, weil der Zehler 2 kleiner ist als der Nenner 3.

74.

Wann hingegen der Zehler größer ist als der Nenner, so ist der Werth des Bruchs größer als Eins. Also ist $\frac{3}{2}$ mehr als 1, weil $\frac{3}{2}$ so viel ist als $\frac{2}{2}$ und noch $\frac{1}{2}$. Nun aber ist $\frac{2}{2}$ so viel als 1, folglich ist $\frac{3}{2}$ so viel als $1\frac{1}{2}$ nehmlich ein Gantzes und noch ein halbes. Eben so ist:

$$\frac{4}{3} \text{ so viel als } 1\tfrac{1}{3}; \text{ ferner } \frac{5}{3} \text{ so viel als } 1\tfrac{2}{3}; \text{ weiter } \frac{7}{3} \text{ so viel als } 2\tfrac{1}{3}.$$

Und überhaupt darf man in diesen Fällen nur die obere Zahl durch die untere dividiren, und zum Quotus noch einen Bruch hinzusetzen, deßen Zehler der Rest, der Nenner aber der Divisor ist. Also für den Bruch $\frac{43}{12}$, dividirt man 43 durch 12 und bekommt 3 zum Quotus und 7 zum Rest, daher ist $\frac{43}{12}$ so viel als $3\frac{7}{12}$.

75.

Hieraus sieht man, wie Brüche deren Zehler größer sind als ihre Nenner, in zwey Glieder aufgelößt werden können, wovon das erste eine gantze Zahl ausmacht das andre aber ein Bruch, deßen Zehler kleiner ist als sein Nenner. Aus diesem Grunde werden solche Brüche, wo der Zehler größer ist als der Nenner, *unächte Brüche* genennt, weil sie eins, oder mehr Gantze in sich begreifen. Hingegen sind die *ächten Brüche* solche, deren Zehler kleiner sind als die Nenner, und deren Werth folglich weniger ist als Eins, oder weniger als ein Gantzes.

76.

Man pflegt sich die Natur der Brüche noch auf eine andere Art vorzustellen, wodurch die Sache nicht wenig erleutert wird: Wann man z. E. den Bruch $\frac{3}{4}$ betrachtet, so ist klar daß derselbe 3 mal größer ist als $\frac{1}{4}$. Nun aber bestehet die Bedeutung des Bruchs $\frac{1}{4}$ darinnen, daß wann man 1 in 4 gleiche Theile zertheilt, ein solcher Theil den Werth desselben anzeiget; wann man daher solcher drey Theile zusammennimt, so erhält man den Werth des Bruchs $\frac{3}{4}$.

Eben so kan man einen jeglichen andern Bruch betrachten, als $\frac{7}{12}$: wann man 1 in 12 gleiche Theile zerschneidet, so machen 7 dergleichen Theile den Werth des vorgelegten Bruchs aus.

77.

Aus dieser Vorstellung sind auch die oben erwehnten Nahmen des Zehlers und Nenners entsprungen. Dann weil in dem vorigen Bruch $\frac{7}{12}$ die untere Zahl 12 anzeiget, daß 1 in 12 gleiche Theile zertheilt werden müße, und also diese Theile benennet, so wird dieselbe füglich der Nenner genennt.

Da aber die obere Zahl, nemlich 7, anzeigt, daß für den Werth des Bruchs 7 dergleichen Theile zusammen genommen werden müßen, und also dieselbe gleichsam darzehlet, so wird die obere Zahl der Zehler genennt.

78.

Betrachten wir nun die Brüche, deren Zehler 1 ist, als solche, die den Grund der übrigen enthalten, weil man leicht begreift was $\frac{3}{4}$ sind, wann man weis was $\frac{1}{4}$ ist, so sind dergleichen Brüche folgende

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \text{ u. s. f.}$$

Hierbey ist zu mercken, daß diese Brüche immer kleiner werden; dann in je mehr Theile ein Gantzes zerschnitten wird, desto kleiner werden auch die Theile, also ist $\frac{1}{100}$ kleiner als $\frac{1}{10}$; und $\frac{1}{1000}$ kleiner als $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{10000}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ und $\frac{1}{100000}$ kleiner als $\frac{1}{10000}$.

79.

Hieraus sieht man nun, daß je mehr bey solchen Brüchen der Nenner vergrößert werde, die Bedeutung derselben um so viel kleiner werden müße. Hiebey entsteht nun die Frage, ob der Nenner nicht so groß angenommen werden könne, daß der Bruch gäntzlich verschwinde und zu nichts werde? Dieses aber wird mit Recht verneint, dann in so viel gleiche Theile man auch immer Eins, z. E. die Länge eines Fußes, zertheilen mag, so behalten die Theile doch noch immer eine gewiße Größe und sind folglich nicht nichts.

80.

Es ist zwar wahr, daß wann man die Länge eines Fußes in mehr als 1000 gleiche Theile zertheilt, die Theile fast nicht mehr in die Augen fallen. So bald man sie aber durch ein gut Mikroscopium betrachtet, so erscheinen dieselben so groß, daß sie leicht von neuem in 100 und noch mehrere Theilichen könnten zertheilt werden.

Hier ist aber die Rede keinesweges was wir verrichten können, oder von dem was würcklich kan verrichtet werden, und was noch in die Augen fällt, sondern vielmehr von demjenigen was an sich möglich ist. Und da ist allerdings gewis, daß so groß auch immer der Nenner angenommen werden mag, der Bruch gleichwohl nicht gänzlich verschwinde, oder in nichts, oder 0, verwandelt werde.

81.

Weil man nun, so sehr auch der Nenner vermehret würde, niemals gäntzlich zu nichts kommt, sondern diese Brüche noch immer einige Größe behalten, und also die obengesetzte Reihe der Brüche immer weiter ohne End fortgesetzt werden kann, so pflegt man zu sagen, daß der Nenner unendlich groß seyn müßte, wann endlich der Bruch zu 0 oder nichts werden sollte. Dann das Wort *unendlich* will hier eben so viel sagen als daß man mit dem gemeldeten Bruche niemals zu Ende komme.

82.

Um nun diesen Begriff, welcher allerdings festgegründet ist, vorzustellen, so bedienet man sich dazu dieses Zeichens ∞, welches eine unendlich große Zahl andeutet: und daher kann man sagen, daß dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ ein würckliches Nichts sey, eben deswegen, weil ein solcher Bruch niemahlen Nichts werden kan, so lange der Nenner noch nicht ins unendliche vermehret worden.

83.

Dieser Begriff von dem unendlichen ist desto sorgfältiger zu bemercken, weil derselbe aus den ersten Gründen unserer Erkäntniß ist hergeleitet worden, und in dem folgenden von der größten Wichtigkeit seyn wird. Es laßen sich schon hier daraus schöne Folgen ziehen, welche unsere Aufmercksamkeit verdienen, da dieser Bruch $\frac{1}{\infty}$ den Quotus anzeigt, wann man das Dividend 1 durch den Divisor ∞ dividiret. Nun wißen wir schon, daß wann man das Dividend 1 durch den Quotus, welcher ist $\frac{1}{\infty}$ oder 0 wie wir gesehen haben, dividiret, alsdann der Divisor nemlich ∞ heraus komme; daher erhalten wir einen neuen Begriff von dem Unendlichen, nemlich daß dasselbe herauskomme wann man 1 durch 0 dividiret; folglich kan man mit Grund sagen, daß 1 durch 0 dividiret eine unendlich große Zahl oder ∞ anzeige.

84.

Hier ist nöthig noch einen ziemlich gemeinen Irrthum aus dem Weg zu räumen, indem viele behaupten, ein unendlich großes könne weiter nicht vermehret werden. Dieses aber kan mit obigen richtigen Gründen nicht bestehen.

Dann da $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl andeutet, und $\frac{2}{0}$ ohnstreitig zweymal so groß ist; so ist klar, daß auch so gar eine unendlich große Zahl noch 2mal größer werden könne.

CAPITEL 8

VON DEN EIGENSCHAFFTEN DER BRÜCHE

85.

Wie wir oben gesehen haben, daß jeder dieser Brüche,

$$\frac{2}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{5}{5},\ \frac{6}{6},\ \frac{7}{7},\ \frac{8}{8},\ \text{und so fort,}$$

ein Gantzes ausmache und folglich alle unter einander gleich sind; so sind auch folgende Brüche,

$$\frac{2}{1},\ \frac{4}{2},\ \frac{6}{3},\ \frac{8}{4},\ \frac{10}{5},\ \frac{12}{6},\ \text{u. s. f.}$$

einander gleich, weil ein jeder derselben zwey gantze ausmacht: dann es giebt der Zehler eines jeglichen, durch seinen Nenner dividirt 2. Eben so sind alle diese Brüche,

$$\frac{3}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{9}{3},\ \frac{12}{4},\ \frac{15}{5},\ \frac{18}{6},\ \text{u. s. f.}$$

einander gleich, weil der Werth eines jeglichen 3 beträgt.

86.

Gleicher Gestalt läßt sich auch der Werth eines jeglichen Bruchs auf unendlich vielerley Arten vorstellen. Denn wann man so wohl den Zehler als den Nenner eines Bruchs mit eben derselben Zahl, so nach Belieben genommen werden kan, multipliciret, so behält der Bruch immer eben denselben Werth. Also sind alle diese Brüche,

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{8},\ \frac{5}{10},\ \frac{6}{12},\ \frac{7}{14},\ \frac{8}{16},\ \frac{9}{18},\ \frac{10}{20},\ \text{u. s. f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{2}$. Eben so sind auch alle diese Brüche,

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{9},\ \frac{4}{12},\ \frac{5}{15},\ \frac{6}{18},\ \frac{7}{21},\ \frac{8}{24},\ \frac{9}{27},\ \frac{10}{30},\ \text{u. s. f.}$$

einander gleich, und ein jeder so viel als $\frac{1}{3}$. Ferner auch diese,

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{6},\ \frac{6}{9},\ \frac{8}{12},\ \frac{10}{15},\ \frac{12}{18},\ \frac{14}{21},\ \frac{16}{24},\ \text{u. s. f.}$$

einander gleich; weswegen auf eine allgemeine Art dieser Bruch $\frac{a}{b}$ auf folgende Arten kann vorgestellt werden,

$$\frac{a}{b},\ \frac{2a}{2b},\ \frac{3a}{3b},\ \frac{4a}{4b},\ \frac{5a}{5b},\ \frac{6a}{6b},\ \text{und so ferner,}$$

davon ein jeder so groß ist, als der erste $\frac{a}{b}$.

87.

Um dieses zu beweisen, darf man nur für den Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ einen besondern Buchstaben, als c, schreiben, dergestalt, daß c der Quotus sey, wann man a durch b dividirt. Nun aber ist gezeigt worden, daß wann man den Quotus c mit dem Divisor b multiplicirt das Dividend heraus kommen müße.

Da nun c mit b multiplicirt a giebt, so wird c mit $2b$ multiplicirt $2a$ geben, und c mit $3b$ multiplicirt wird $3a$ geben; und also überhaupt c mit mb multiplicirt muß ma geben.

Macht man hieraus wieder ein Divisions-Exempel und dividirt das Product ma durch den einen Factor mb, so muß der Quotus dem andern Factor c gleich seyn: nun aber giebt ma durch mb dividirt den Bruch $\frac{ma}{mb}$, deßen Werth folglich c ist. Weil aber c dem Werth des Bruchs $\frac{a}{b}$ gleich ist, so ist offenbar, daß der Bruch $\frac{ma}{mb}$ dem Bruch $\frac{a}{b}$ gleich sey, man mag statt m eine Zahl annehmen, was man für eine will.

88.

Da nun ein jeglicher Bruch durch unendlich viele Formen kan vorgestellt werden, von welchen eine jede eben denselben Werth enthält, so ist ohnstreitig, daß derjenige am leichtesten zu begreiffen sey, welcher aus den kleinsten Zahlen besteht; als da anstatt $\frac{2}{3}$ ein jeder von folgenden Brüchen, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{18}$, und so fort nach Willkühr gesetzt werden könnte, so wird wohl niemand zweiffeln, daß nicht die Form $\frac{2}{3}$ dennoch am leichtesten unter allen zu begreiffen sey. Hierbey kommt nun diese Frage vor, wie man einen Bruch, der nicht in seine kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, als z. E. $\frac{8}{12}$, in seine kleinste Form, nemlich in $\frac{2}{3}$, bringen könne.

89.

Diese Frage wird leicht aufzulösen seyn, wann man bedencket, daß ein jeder Bruch seinen Werth behalte, wenn so wohl sein Zehler als Nenner mit einerlei Zahl multiplicirt wird. Denn daher erfolgt, daß wann man auch den Zehler und Nenner eines Bruchs durch eben dieselbe Zahl dividiret, der Bruch immer eben denselben Werth behalte. Dieses wird noch leichter aus der allgemeinen Form $\frac{na}{nb}$ ersehen. Dann wann man so wohl den Zehler na als den Nenner nb durch die Zahl n dividiret, so kommt der Bruch $\frac{a}{b}$ heraus, welcher jenem gleich ist, wie schon oben gezeigt worden.

90.

Um nun einen vorgegebenen Bruch in seine kleinste Form zu bringen, so muß man solche Zahlen finden können, wodurch sich so wohl der Zehler, als der Nenner theilen läßt. Eine solche Zahl nun wird ein *gemeiner Theiler* genennt, und so lang man zwischen dem Zehler und Nenner einen gemeinen Theiler anzeigen kan, so lang läßt sich der Bruch in eine kleinere Form bringen; wann aber kein gemeiner Theiler außer 1 weiter statt findet, so ist der Bruch schon in seine kleinste Form gebracht.

91.

Um dieses zu erläutern wollen wir den Bruch $\frac{48}{120}$ betrachten. Hier sieht man so gleich, daß sich Zehler und Nenner durch 2 theilen laßen, als woraus der Bruch $\frac{24}{60}$ entsteht. Diese beyde laßen sich nun noch einmahl durch 2 theilen und giebt die Theilung folgenden Bruch $\frac{12}{30}$, wo 2 abermahlen ein gemeiner Theiler ist und $\frac{6}{15}$ herauskommen. Hier ist aber klar, daß sich der Zehler und Nenner noch durch 3 theilen laße, woraus der Bruch $\frac{2}{5}$ entspringt, welcher dem vorgegebenen gleich ist, und sich in der kleinsten Form befindet, weil die Zahlen 2 und 5 weiter keinen gemeinen Theiler haben außer 1, wodurch aber die Zahlen nicht kleiner werden.

92.

Diese Eigenschaft der Brüche, daß wann man so wohl den Zehler als Nenner mit eben der Zahl entweder multiplicirt oder dividiret, der Werth des Bruchs ohnverändert bleibe, ist von der größten Wichtigkeit und wird gemeiniglich darauf die gantze Lehre von den Brüchen gegründet. Es laßen sich z. E. zwey Brüche nicht wohl zusammen addiren, oder von einander subtrahiren, ehe man nicht dieselben in andere Formen gebracht, deren Nenner einander gleich sind; wovon im folgenden Capitel gehandelt werden soll.

93.

Hier wollen wir nur noch bemercken, daß auch alle gantze Zahlen in Form eines Bruchs vorgestellt werden können. Also ist zum Exempel 6 so viel als $\frac{6}{1}$, weil 6 durch 1 dividirt auch 6 giebt. Und daher entstehen noch diese Formen,

$$\frac{12}{2},\ \frac{18}{3},\ \frac{24}{4},\ \frac{36}{6},\ \text{u. s. f.}$$

welche alle eben denselben Werth, nemlich 6, in sich haben.

CAPITEL 9

VON DER ADDITION UND SUBTRACTION DER BRÜCHE

94.

Wann die Brüche gleiche Nenner haben, so hat es keine Schwierigkeit dieselben zu addiren und zu subtrahiren, indem $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{5}{7}$ und $\frac{4}{7}-\frac{2}{7}$ so viel als $\frac{2}{7}$ ist. In diesem Fall verrichtet man die Addition und

Subtraction bloß allein an den Zehlern, und schreibt den gemeinen Nenner darunter. Also macht

$$\frac{7}{100}+\frac{9}{100}-\frac{12}{100}-\frac{15}{100}+\frac{20}{100} \text{ so viel als } \frac{9}{100};$$

$$\frac{24}{50}-\frac{7}{50}-\frac{12}{50}+\frac{31}{50} \text{ ist so viel als } \frac{36}{50} \text{ oder } \frac{18}{25};$$

$$\frac{16}{20}-\frac{3}{20}-\frac{11}{20}+\frac{14}{20} \text{ ist so viel als } \frac{16}{20} \text{ oder } \frac{4}{5};$$

eben so auch $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$ macht $\frac{3}{3}$ oder 1, das ist ein gantzes, und $\frac{2}{4}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$ macht $\frac{0}{4}$ das ist nichts, oder 0.

95.

Wann aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so ist es allezeit möglich dieselben in andere von gleichem Werth zu verwandeln, deren Nenner gleich sind. Also wenn diese Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ gegeben sind und zusammen addirt werden sollen, so ist zu erwegen daß $\frac{1}{2}$ so viel ist als $\frac{3}{6}$ und $\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{2}{6}$: wir haben also anstatt der vorigen diese Brüche $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$ welche geben $\frac{5}{6}$. Ferner $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ ist wie das obige, nur daß das Zeichen *minus* darzwischen steht, also $\frac{3}{6}-\frac{2}{6}$ giebt $\frac{1}{6}$. Es seyen ferner gegeben diese Brüche $\frac{3}{4}+\frac{5}{8}$. Weil hier $\frac{3}{4}$ so viel ist als $\frac{6}{8}$, so setzen wir an derselben Stelle $\frac{6}{8}$, und $\frac{5}{8}+\frac{6}{8}$ giebt $\frac{11}{8}$ oder $1\frac{3}{8}$. Wann man fragt wie viel $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ zusammen ausmachen, so schreibe man statt derselben nur $\frac{4}{12}$ und $\frac{3}{12}$ so kommt $\frac{7}{12}$.

96.

Wann mehr als zwey Brüche gegeben sind, als: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$, welche zu gleichen Nennern gebracht werden sollen, so kommt alles darauf an, daß man eine Zahl finde, welche sich durch alle diese Nenner theilen laße. Eine solche ist nun 60, welche den gemeinen Nenner abgiebt. Also werden wir haben anstatt $\frac{1}{2}$ diesen $\frac{30}{60}$, anstatt $\frac{2}{3}$ diesen $\frac{40}{60}$, anstatt $\frac{3}{4}$ diesen $\frac{45}{60}$, anstatt $\frac{4}{5}$ diesen $\frac{48}{60}$, anstatt $\frac{5}{6}$ diesen $\frac{50}{60}$. Sollen nun diese Brüche $\frac{30}{60}, \frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{48}{60}, \frac{50}{60}$, zusammen addirt werden so machen die Zehler derselben zusammen $\frac{213}{60}$, oder 3 gantze und $\frac{33}{60}$, oder $3\frac{11}{20}$.

97.

Es kommt hier alles darauf an, daß man zwey Brüche von ungleichen Nennern in andere verwandele, deren Nenner einander gleich sind. Um dieses auf eine allgemeine Art zu verrichten, so seyen die vorgegebene Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$. Nun multiplicire man den ersten Bruch oben und unten mit d, so bekommt man $\frac{ad}{bd}$, welcher Bruch so groß ist als $\frac{a}{b}$. Den andern Bruch multiplicire man wie den ersten oben und unten mit b, so bekommt man anstatt desselben $\frac{bc}{bd}$, und sind also die Nenner jetzt gleich; die Summa aber derselben ist $\frac{ad+bc}{bd}$ und ihre Differenz ist $\frac{ad-bc}{bd}$. Wann also diese Brüche vorgelegt sind, $\frac{5}{8}$ und $\frac{7}{9}$, so bekommt man anstatt derselben $\frac{45}{72}$ und $\frac{56}{72}$, deren Summa $\frac{101}{72}$, die Differenz aber $\frac{11}{72}$ macht.

98.

Hier pflegt auch die Frage vorzukommen, welcher von zwey gegebenen Brüchen größer, oder kleiner sey als der andere? Z. E. welcher von diesen zwey Brüchen $\frac{2}{3}$ und $\frac{5}{7}$ ist der größere? Zu diesem Ende darf man nur die beyden Brüche zu gleichen Nennern bringen, und da bekommt man für den erstern $\frac{14}{21}$ und für den andern $\frac{15}{21}$, woraus offenbar ist, daß $\frac{5}{7}$ größer ist als $\frac{2}{3}$, und zwar um $\frac{1}{21}$. Wann ferner diese zwey Brüche gegeben sind $\frac{3}{5}$ und $\frac{5}{8}$, so bekommt man statt deren die Brüche $\frac{24}{40}$ und $\frac{25}{40}$, woraus erhellet daß $\frac{5}{8}$ mehr sey als $\frac{3}{5}$, aber nur um $\frac{1}{40}$.

99.

Wann ein Bruch von einer gantzen Zahl abgezogen werden soll, als $\frac{2}{3}$ von 1, so darf man nur $\frac{3}{3}$ anstatt 1 schreiben, da man dann so gleich sieht, daß $\frac{1}{3}$ übrig bleibt. Eben so $\frac{5}{12}$ von 1 abgezogen, bleibt $\frac{7}{12}$. Soll man aber $\frac{3}{4}$ von 2 abziehen, so schreibe man für 2 nur 1 und $\frac{4}{4}$, da dann 1 und $\frac{1}{4}$ übrig bleibt. Übrigens ist bekannt, daß wann ein Bruch zu einer ganzen Zahl addirt werden soll, man denselben nur schlechthin dahinter schreibe; als $\frac{2}{3}$ zu 6 addirt, giebt $6\frac{2}{3}$.

100.

Bisweilen geschieht es auch, daß 2 oder mehr Brüche zusammen addirt, mehr als ein Gantzes ausmachen, welches sodann bemerckt werden muß: als $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$, oder $\frac{8}{12}+\frac{9}{12}$ giebt $\frac{17}{12}$, welches so viel ist als $1\frac{5}{12}$. Eben so wann mehrere gantze Zahlen und Brüche addirt werden sollen, so addirt man erst die Brüche und wann ihre Summa 1 oder mehr gantze enthält, so werden dieselben hernach mit den gantzen Zahlen addirt z. E. es wäre $3\frac{1}{2}$ und $2\frac{2}{3}$ zu addiren; so machen erstlich die Brüche $\frac{3}{6}$ und $\frac{4}{6}$ zusammen $\frac{7}{6}$, oder $1\frac{1}{6}$, welches mit den Gantzen 6 und $\frac{1}{6}$ ausmacht.

CAPITEL 10

VON DER MULTIPLICATION UND DIVISION

101.

Wann ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt werden soll, so multiplicirt man damit nur den Zehler, und läßt den Nenner ohnverändert; also

2 mal $\frac{1}{2}$ macht $\frac{2}{2}$, oder ein Gantzes;

2 mal $\frac{1}{3}$ macht $\frac{2}{3}$; ferner 3 mal $\frac{1}{6}$ macht $\frac{3}{6}$ oder $\frac{1}{2}$;

4 mal $\frac{5}{12}$ macht $\frac{20}{12}$, oder 1 und $\frac{8}{12}$, oder $1\frac{2}{3}$.

Man schließt hieraus die Regel, daß ein Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicirt wird, wann man entweder den Zehler damit multiplicirt oder auch den Nenner durch die ganze Zahl dividirt, welches letztere, wann es angeht, die Rechnung abkürtzt. Z. E. es soll $\frac{8}{9}$ mit 3 multiplicirt werden, so kommt wenn der Zehler mit der ganzen Zahl multiplicirt wird $\frac{24}{9}$ heraus, welches so viel ist als $\frac{8}{3}$; laße ich aber den Zehler unverändert und dividire den Nenner 9 durch 3, so bekomme ich auch $\frac{8}{3}$; das ist 2 und $\frac{2}{3}$. Eben so $\frac{13}{24}$ mit 6 multiplicirt giebt $\frac{13}{4}$ oder $3\frac{1}{4}$.

102.

Überhaupt also, wann ein Bruch $\frac{a}{b}$ durch c multiplicirt werden soll, so bekommt man $\frac{ac}{b}$. Hierbey ist zu mercken, daß wann die gantze Zahl just dem Nenner gleich ist, alsdann das Product dem Zehler gleich werde, also:

$\frac{1}{2}$ zweymal genommen giebt 1;

$\frac{2}{3}$ mit 3 mult. giebt 2;

$\frac{3}{4}$ mit 4 mult. giebt 3;

und allgemein, wann der Bruch $\frac{a}{b}$ mit der Zahl b multiplicirt wird, so ist das Product a, wovon der Grund schon oben gezeigt worden; dann da $\frac{a}{b}$ den Quotus ausdruckt, wann das Dividend a durch den Divisor b dividirt wird, und zugleich bewiesen worden, daß der Quotus mit dem Divisor multiplicirt das Dividend geben müße, so ist klar daß $\frac{a}{b}$ mit b multiplicirt die Zahl a geben müße.

103.

Da wir nun gezeigt haben, wie man einen Bruch mit einer gantzen Zahl multiplicire; so müßen wir auch sehen, wie ein Bruch durch eine gantze Zahl zu dividiren sey, ehe wir die Multiplication eines Bruchs mit einem Bruch lehren können. Es ist aber klar, daß wann ich den Bruch $\frac{2}{3}$ durch 2 dividiren soll $\frac{1}{3}$ heraus komme, eben so wie in dem Fall, da $\frac{6}{7}$ durch 3 getheilt werden sollen, $\frac{2}{7}$ herauskommen. Hieraus erhellet, daß man nur den Zehler durch die ganze Zahl theilen müße, da dann der Nenner ohnverändert bleibt. Also:

$\frac{12}{25}$ durch 2 div. giebt $\frac{6}{25}$ und

$\frac{12}{25}$ durch 3 div. giebt $\frac{4}{25}$ und

$\frac{12}{25}$ durch 4 div. giebt $\frac{3}{25}$ und so fort.

104.

Die Sache hat also keine Schwierigkeit, wann sich nur der Zehler durch die vorgegebene Zahl theilen läßt: wann aber dieses nicht angeht, so ist zu bemercken, daß man den Bruch in unendlich viele andere Formen verändern könne, unter welchen sich gewiß solche finden müßen, deren Zehler sich durch die gegebene Zahl theilen laße. Also wann $\frac{3}{4}$ durch 2 getheilt werden soll, so verwandele man diesen Bruch in $\frac{6}{8}$, so giebt es, wann es durch 2 dividirt wird $\frac{3}{8}$.

Auf eine allgemeine Art, wenn der Bruch $\frac{a}{b}$ durch c dividirt werden soll, so verwandele man denselben in diesen $\frac{ac}{bc}$, deßen Zehler ac durch c dividirt a giebt, also ist der gesuchte Quotient $\frac{a}{bc}$.

105.

Hieraus ersehen wir, daß wann ein Bruch, als $\frac{a}{b}$, durch eine gantze Zahl c dividiret werden soll, man nur nöthig habe den Nenner b mit dieser gantzen Zahl zu multipliciren und den Zehler ohnverändert zu laßen. Also, $\frac{5}{8}$ durch 3 dividiret giebt $\frac{5}{24}$, und $\frac{9}{16}$ durch 5 dividirt giebt $\frac{9}{80}$. Wann sich aber der Zehler selbst durch eine ganze Zahl theilen läßt, so wird die Rechnung leichter. Als, $\frac{9}{16}$ durch 3 getheilet, giebt $\frac{3}{16}$. Nach jener Art aber $\frac{9}{48}$. Doch ist dieser Bruch so viel als jener $\frac{3}{16}$. Denn 3 mahl 3 ist 9, und 3 mahl 16 ist 48.

106.

Nun sind wir im Stande zu zeigen, wie ein Bruch $\frac{a}{b}$ mit einem andern Bruch $\frac{c}{d}$ multiplicirt werden soll. Man darf nur bedencken, daß $\frac{c}{d}$ so viel ist als c getheilt durch d: und also hat man nur nöthig den Bruch $\frac{a}{b}$ erstlich mit c zu multipliciren, da denn $\frac{ac}{b}$ herauskommt; hernach durch d zu dividiren, da es denn $\frac{ac}{bd}$ giebt: und hieraus entspringt diese Regul, daß um zwey Brüche mit einander zu multipliciren man nur nöthig habe erstlich die Zehler, und hernach auch die Nenner besonders mit einander zu multipliciren.

Also: $\frac{1}{2}$ mit $\frac{2}{3}$ mult. giebt $\frac{2}{6}$ oder $\frac{1}{3}$; ferner

$\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ mult. giebt $\frac{8}{15}$; und

$\frac{3}{4}$ mit $\frac{5}{12}$ mult. giebt $\frac{15}{48}$ oder $\frac{5}{16}$ u. s. f.

107.

Nun ist noch übrig zu zeigen, wie ein Bruch durch einen andern Bruch dividirt werden soll; wobei erstlich zu mercken, daß wann die Brüche gleiche Nenner haben, die Division nur in den Zehlern verrichtet werde: weil z. E. $\frac{3}{12}$ in $\frac{9}{12}$ eben so viel mal enthalten ist, als 3 in 9, das ist 3 mal. Dahero wann $\frac{8}{12}$ durch $\frac{9}{12}$ dividirt werden soll, so darf man nur 8 durch 9 dividiren, das giebt $\frac{8}{9}$. Ferner $\frac{6}{20}$ in $\frac{18}{20}$ ist 3 mal; $\frac{7}{100}$ in $\frac{49}{100}$ ist 7 mal; $\frac{6}{25}$ durch $\frac{7}{25}$ giebt $\frac{6}{7}$; eben so $\frac{3}{7}$ durch $\frac{4}{7}$ giebt $\frac{3}{4}$.

108.

Wann aber die Brüche nicht gleiche Nenner haben, so weis man wie dieselben auf gleiche Nenner zu bringen sind. Z. E. man soll den Bruch $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ dividiren, so bringe man erstlich diese Brüche auf gleiche Nenner, und da bekommt man den Bruch $\frac{ad}{bd}$ durch $\frac{bc}{bd}$ zu dividiren, wo dann eben so viel heraus kommen muß, als wann man den ersten Zehler ad durch den letztern bc dividiret: Folglich wird der gesuchte Quotus seyn $\frac{ad}{bc}$.

Hieraus entspringt diese Regul: man muß den Zehler des Dividends mit dem Nenner des Divisors, und den Nenner des Dividends mit dem Zehler des Divisors multipliciren, so wird jenes Product den Zehler, und dieses den Nenner zum Quotient geben.

109.

Wann also $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividiret werden soll, so bekommt man nach dieser Regul $\frac{15}{16}$ zum Quotient. Wann ferner $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{6}{4}$ oder $\frac{3}{2}$, das ist 1 und $\frac{1}{2}$. Ferner wann durch $\frac{5}{6}$ der Bruch $\frac{25}{48}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$.

110.

Man pflegt diese Regul für die Division auf eine bequemere Art folgender Gestalt vorzutragen. Man kehrt den Bruch, durch welchen dividirt werden soll um, indem man seinen Nenner oben, und seinen Zehler unten schreibt, und multiplicirt den Bruch, welcher getheilt werden soll, mit diesem umgekehrten Bruch, so erhält man den gesuchten Quotient. Also $\frac{3}{4}$ durch $\frac{1}{2}$ dividirt, ist eben so viel als $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{1}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{6}{4}$ oder $1\frac{1}{2}$. Eben so $\frac{5}{8}$ durch $\frac{2}{3}$ dividirt ist eben so viel als $\frac{5}{8}$ mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt, woraus kommt $\frac{15}{16}$; ferner $\frac{25}{48}$ durch $\frac{5}{6}$ dividirt, giebt eben so viel als $\frac{25}{48}$ mit $\frac{6}{5}$ multiplicirt, da denn $\frac{150}{240}$ oder $\frac{5}{8}$ entsteht.

Man sieht also überhaupt, daß durch den Bruch $\frac{1}{2}$ dividirt eben so viel ist, als mit $\frac{2}{1}$ das ist mit 2 multiplicirt; und durch $\frac{1}{3}$ dividirt ist eben so viel als mit $\frac{3}{1}$, das ist mit 3 multiplicirt.

111.

Wann dahero die Zahl 100 durch $\frac{1}{2}$ dividirt werden soll, so giebt es 200; und 1000 durch $\frac{1}{3}$ dividirt giebt 3000. Wann ferner 1 durch $\frac{1}{1000}$ dividirt werden soll, so kommt 1000; und 1 durch $\frac{1}{100\,000}$ dividirt, giebt 100000; woraus man begreiffen kann, daß eine Division, die durch 0 geschiehet, unendlich viel geben müße, weil wann man 1 durch diesen kleinen Bruch $\frac{1}{1\,000\,000\,000}$ dividiret, die große Zahl 1000000000 herauskommt.

112.

Wann ein Bruch durch sich selbsten dividiret werden soll, so versteht sich von selbsten, daß der Quotus 1 seyn werde, weil eine jede Zahl durch sich selbst dividirt 1 giebt: eben dieses weißt auch unsere Regul: als wann z. E. $\frac{3}{4}$ durch $\frac{3}{4}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{3}{4}$ mit $\frac{4}{3}$ da dann kommt $\frac{12}{12}$, das ist 1. Und wann $\frac{a}{b}$ durch $\frac{a}{b}$ dividirt werden soll, so multiplicirt man $\frac{a}{b}$ mit $\frac{b}{a}$ da dann $\frac{ab}{ab}$ das ist 1 herauskommt.

113.

Es ist noch übrig eine Redens-Art zu erklären, welche öfters gebraucht wird. Z. E. man frägt was die Hälfte von $\frac{3}{4}$ sey, so will das so viel sagen, als man soll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{1}{2}$ multipliciren. Eben so wann man frägt, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{5}{8}$

sey, so muß man $\frac{5}{8}$ mit $\frac{2}{3}$ multipliciren, da dann kommt $\frac{10}{24}$; und $\frac{3}{4}$ von $\frac{9}{16}$ ist eben so viel als $\frac{9}{16}$ mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt und beträgt $\frac{27}{64}$. Welches wohl zu mercken, so oft diese Redens-Art vorkommt.

114.

Endlich ist hier wegen der Zeichen $+$ und $-$ eben das zu bemercken, was oben bey den gantzen Zahlen gesagt worden. Also: $+\frac{1}{2}$ mit $-\frac{1}{3}$ multiplicirt, giebt $-\frac{1}{6}$; und $-\frac{2}{3}$ mit $-\frac{4}{5}$ multiplicirt, giebt $+\frac{8}{15}$. Ferner $-\frac{5}{8}$ durch $+\frac{2}{3}$ dividirt, giebt $-\frac{15}{16}$; und $-\frac{3}{4}$ durch $-\frac{3}{4}$, giebt $+\frac{12}{12}$ oder $+1$.

CAPITEL 11

VON DEN QUADRAT-ZAHLEN

115.

Wann eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product ein *Quadrat* genennet, so wie in Ansehung deßen die Zahl, daraus es entstanden, seine *Quadrat-Wurtzel* genennt wird.

Also wann man z. E. 12 mit 12 multiplicirt, so ist das Product 144 eine Quadrat-Zahl, deren Wurzel die Zahl 12 ist.

Der Grund dieser Benennung ist aus der Geometrie genommen, wo der Inhalt eines Quadrats gefunden wird, wann man die Seite deßelben mit sich selbsten multipliciret.

116.

Daher werden alle Quadrat-Zahlen durch die Multiplication gefunden, wann man nehmlich die Wurtzel mit sich selbsten multipliciret.

Also weil 1 mit 1 multiplicirt 1 giebt, so ist 1 das Quadrat von 1.

Ferner ist 4 das Quadrat von der Zahl 2; und 2 ist hingegen die Quadrat-Wurtzel von 4.

Eben so ist 9 das Quadrat von 3, und 3 die Quadrat-Wurtzel von 9. Wir wollen demnach die Quadraten der natürlichen Zahlen betrachten, und folgende Tafel hersetzen, in welcher die Zahlen oder Wurtzeln in der ersten, die Quadraten aber in der andern Reihe vorgestelt werden.

Zahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Quad.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289

117.

Bey diesen der Ordnung nach fortschreitenden Quadrat-Zahlen bemercken wir sogleich eine schöne Eigenschaft, welche darinnen besteht, daß wann man eine jede von der folgenden subtrahiret, die Reste in folgender Ordnung fortgehen:

$$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21, \text{ etc.}$$

welche immer um zwey steigen, und alle ungerade Zahlen der Ordnung nach vorstellen.

118.

Auf gleiche Weise werden die Quadraten von Brüchen gefunden, wann man nemlich einen Bruch mit sich selbsten multiplicirt. Also ist von $\frac{1}{2}$ das Quadrat $\frac{1}{4}$,

von $\frac{1}{3}$ ist das Quadrat $\frac{1}{9}$, von $\frac{2}{3}$ ist das Quadrat $\frac{4}{9}$,

von $\frac{1}{4}$ ist das Quadrat $\frac{1}{16}$, von $\frac{3}{4}$ ist das Quadrat $\frac{9}{16}$ und so ferner.

Man darf nemlich nur das Quadrat des Zehlers durch das Quadrat des Nenners dividiren, so bekommt man das Quadrat des Bruchs. Also ist $\frac{25}{64}$ das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{8}$ und umgekehrt ist $\frac{5}{8}$ die Wurtzel von $\frac{25}{64}$.

119.

Wann man das Quadrat von einer vermischten Zahl, welche aus einer gantzen Zahl und einem Bruch besteht, finden will, so darf man nur dieselbe in einem einzelnen Bruch bringen, und das Quadrat davon nehmen. Also um das Quadrat von $2\frac{1}{2}$ zu finden, so ist erstlich $2\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{5}{2}$, und folglich das Quadrat $\frac{25}{4}$ welches beträgt $6\frac{1}{4}$. Also ist $6\frac{1}{4}$ das Quadrat von $2\frac{1}{2}$. Eben so um das Quadrat von $3\frac{1}{4}$ zu finden, so bemerke man daß $3\frac{1}{4}$ so viel ist als $\frac{13}{4}$, wovon das Quadrat $\frac{169}{16}$ ist, welches 10 und $\frac{9}{16}$ ausmacht. Wir wollen z. E. die Quadraten welche von 3 bis 4 um ein Viertel steigen betrachten, als:

Zahlen	3	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	4
Quad.	9	$10\frac{9}{16}$	$12\frac{1}{4}$	$14\frac{1}{16}$	16

Woraus man leicht abnehmen kann, daß wann die Wurzel einen Bruch enthält, das Quadrat derselben auch immer einen Bruch enthalte. Also wann die Wurzel ist $1\frac{5}{12}$, so wird das Quadrat derselben gefunden $\frac{289}{144}$, welches ist $2\frac{1}{144}$, und also nur um sehr wenig größer als 2.

120.

Auf eine allgemeine Art, wann die Wurzel a ist, so ist das Quadrat aa: ferner von der Wurzel $2a$ ist das Quadrat $4aa$. Hieraus sieht man, daß wann die Wurzel 2 mal so groß genommen wird, das Quadrat 4 mal größer werde. Ferner ist von der Wurzel $3a$ das Quadrat $9aa$, und von der Wurzel $4a$ ist das Quadrat $16aa$ und so weiter. Heißt aber die Wurzel ab, so ist ihr Quadrat $aabb$, und wann abc die Wurzel ist, so ist ihr Quadrat $aabbcc$.

121.

Wann daher die Wurzel aus 2 oder mehrern Factoren besteht, so muß man die Quadrate derselben mit einander multipliciren, und umgekehrt, wann das Quadrat aus 2 oder mehrern Factoren besteht, deren jeder ein Quadrat ist, so braucht man nur die Wurzel derselben mit einander zu multipliciren. Also da 2304 so viel ist, als $4 \cdot 16 \cdot 36$; so ist die Quadrat-Wurzel davon $2 \cdot 4 \cdot 6$, das ist 48, und in der That ist 48 die Quadrat-Wurzel von 2304, weil $48 \cdot 48$ eben so viel ausmacht, als 2304.

122.

Nun wollen wir auch die Zeichen *plus* und *minus* erwegen, was es mit denselben bey den Quadraten für eine Bewantniß habe. Es erhellet sogleich daß wann die Wurzel das Zeichen $+$ hat, oder eine Positiv-Zahl ist, dergleichen wir bisher angenommen haben, das Quadrat derselben auch eine Positiv-Zahl seyn müße, weil $+$ mit $+$ multiplicirt $+$ giebt. Also wird das Quadrat von $+a$ seyn $+aa$. Wann aber die Wurzel eine Negativ-Zahl ist, als $-a$, so wird ihr Quadrat seyn $+aa$, eben so als wann die Wurzel $+a$ wäre; folglich ist $+aa$ eben so wohl das Quadrat von $+a$ als von $-a$; und können dahero von einem jeden Quadrat zwey Quadrat-Wurzeln angegeben werden, deren eine Positiv, die andere Negativ ist. Also ist die Quadrat-Wurzel von 25 so wohl $+5$, als -5, weil $+5$ mit $+5$ multiplicirt, und auch -5 mit -5 multiplicirt $+25$ giebt.

CAPITEL 12

VON DEN QUADRAT-WURZELN UND DEN DAHER ENTSPRINGENDEN IRRATIONAL-ZAHLEN

123.

Aus dem vorhergehenden erhellet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl nichts anders ist, als eine solche Zahl, deren Quadrat der vorgegebenen Zahl gleich ist. Also die Quadrat-Wurzel von 4 ist 2, von 9 ist sie 3, von 16 ist sie 4 u. s. w. wobey zu mercken ist, daß diese Wurzeln so wohl mit dem Zeichen plus als minus gesetzt werden können. Also von der Zahl 25, ist die Quadrat-Wurzel so wohl $+5$, als -5, weil -5 mit -5 multiplicirt eben so wohl $+25$ ausmacht, als $+5$ mit $+5$ multiplicirt.

124.

Wann dahero die vorgegebene Zahl ein Quadrat ist und man die Quadrat-Zahlen so weit im Gedächtniß hat, so ist es leicht die Quadrat-Wurzel zu finden: als, wann die vorgegebene Zahl 196 wäre so weiß man, daß die Quadrat-Wurzel davon 14 ist. Mit den Brüchen ist es ebenfalls nicht schwerer, und ist aus dem obigen klar, daß von dem Bruch $\frac{25}{49}$ die Quadrat-Wurzel sey $\frac{5}{7}$, weil man nur so wohl von dem Zehler, als von dem Nenner die Quadrat-Wurzel nehmen darf. Ist die vorgegebene Zahl eine vermischte Zahl als $12\frac{1}{4}$ so bringe man dieselbe auf einen einzeln Bruch, nemlich $\frac{49}{4}$ wovon die Quadrat-Wurzel offenbar $\frac{7}{2}$ ist, oder $3\frac{1}{2}$, welches also die Quadrat-Wurzel von $12\frac{1}{4}$ ist.

125.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein Quadrat ist, als z. E. 12, so ist auch nicht möglich die Quadrat-Wurzel davon, das ist eine solche Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 ausmache, zu finden oder anzugeben. Inzwischen aber wißen wir doch, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als 3, weil $3 \cdot 3$ nur 9 macht, doch aber kleiner als 4, weil $4 \cdot 4$ schon 16 macht; wir wißen so gar auch, daß dieselbe kleiner seyn müße als $3\frac{1}{2}$, weil das Quadrat von $3\frac{1}{2}$ mehr ist als 12, dann $3\frac{1}{2}$ ist $\frac{7}{2}$ und dessen Quadrat $\frac{49}{4}$ oder $12\frac{1}{4}$. Wir können so gar diese Wurzel noch näher bestimmen durch $3\frac{7}{15}$ dann das Quadrat von $3\frac{7}{15}$ oder $\frac{52}{15}$ macht $\frac{2704}{225}$; folglich ist $3\frac{7}{15}$ noch um etwas zu groß, dann $\frac{2704}{225}$ ist um $\frac{4}{225}$ größer als 12.

126.

Weil nun $3\frac{1}{2}$ und auch $3\frac{7}{15}$ um etwas größer ist als die Quadrat-Wurzel von 12, so möchte man dencken, daß wann man anstatt des Bruchs $\frac{7}{15}$ einen etwas kleinern zu 3 addirte, das Quadrat davon genau 12 werden könnte.

Laßt uns also $3\frac{3}{7}$ nehmen, weil $\frac{3}{7}$ um etwas wenigs kleiner ist als $\frac{7}{15}$. Nun ist $3\frac{3}{7}$ so viel als $\frac{24}{7}$, wovon das Quadrat $\frac{576}{49}$, und also kleiner ist als 12. Dann 12 betragen $\frac{588}{49}$, ist also noch um $\frac{12}{49}$ zu klein. Hieraus sehen wir also, daß $3\frac{3}{7}$ zu klein, $3\frac{7}{15}$ aber zu groß ist. Man könnte also $3\frac{5}{11}$ annehmen, weil $\frac{5}{11}$ größer ist als $\frac{3}{7}$ und doch kleiner als $\frac{7}{15}$. Da nun $3\frac{5}{11}$ in einem Bruch gebracht $\frac{38}{11}$ sind, so ist das Quadrat davon $\frac{1444}{121}$. Aber 12 auf diesen Nenner gebracht giebt $\frac{1452}{121}$, woraus erhellet, daß $3\frac{5}{11}$ noch zu klein ist und das nur um $\frac{8}{121}$. Wollte man nun setzen die Wurzel wäre $3\frac{6}{13}$, weil $\frac{6}{13}$ etwas größer ist als $\frac{5}{11}$, so wäre das Quadrat davon $\frac{2025}{169}$; aber 12 zu diesen Nenner gebracht bringt $\frac{2028}{169}$. Also ist $3\frac{6}{13}$ noch zu klein, doch nur um $\frac{3}{169}$, da doch $3\frac{7}{15}$ zu groß ist.

127.

Es läßt sich aber leicht begreiffen, daß was wir auch immer für einen Bruch zu 3 hinzusetzen möchten, das Quadrat davon immer einen Bruch in sich faßen müße, und also niemahls genau 12 betragen könne. Also, ohngeacht wir wißen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 größer ist als $3\frac{6}{13}$ doch aber kleiner als $3\frac{7}{15}$, so müßen wir doch bekennen, daß es nicht möglich sey zwischen diesen zwey Brüchen, einen solchen ausfündig zu machen, welcher zu 3 addirt, die Quadrat-Wurzel von 12 genau ausdrückte. Inzwischen kann man doch nicht sagen, daß die Quadrat-Wurzel von 12 an und für sich selbsten unbestimmt wäre, sondern es folgt aus dem angeführten nur so viel, daß dieselbe durch Brüche nicht könne ausgedrückt werden, ohngeachtet sie nothwendig eine bestimmte Größe hat.

128.

Hiedurch werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche sich keineswegs durch Brüche ausdrücken laßen und gleichwohl eine bestimmte Größe haben, wie wir von der Quadrat-Wurzel aus der Zahl 12 gesehen haben. Diese neue Art von Zahlen werden nun *Irrational-Zahlen* genennt, und solche entspringen, so oft man die Quadrat-Wurzel aus einer Zahl suchen soll, welche kein Quadrat ist. Also weil 2 kein Quadrat ist, so ist auch die Quadrat-Wurzel aus 2, oder diejenige Zahl, welche mit sich selbsten multiplicirt genau 2 hervorbringt, eine Irrational-Zahl. Bisweilen pflegen auch solche Zahlen *Surdische* genennt zu werden.

129.

Ohngeacht sich nun solche Irrational-Zahlen durch keinen Bruch vorstellen laßen, so haben wir doch einen deutlichen Begriff von der Größe derselben. Dann z. E. die Quadrat-Wurzel aus 12 mag auch immer noch so verborgen scheinen, so wißen wir doch daß dieselbe eine solche Zahl ist, welche mit sich selbst multiplicirt just 12 hervorbringt. Und diese Eigenschaft ist hinlänglich, uns einen deutlichen Begriff von dieser Zahl zu geben, insonderheit da wir immer näher zu dem Werth derselben gelangen könen.

130.

Weil wir nun einen hinlänglichen Begriff von dergleichen Irrational-Zahlen haben, so bedienet man sich eines gewißen Zeichens, um die Quadrat-Wurzel von solchen Zahlen, welche keine Quadrate sind, anzudeuten. Dieses Zeichen hat nun diese Figur, $\surd$ und wird mit dem Wort Quadrat-Wurzel ausgesprochen. Also $\sqrt{12}$ deutet diejenige Zahl an, welche mit sich selbsten multiplicirt 12 giebt, oder die Quadrat-Wurzel aus 12. Eben so bedeutet $\sqrt{2}$ die Quadrat-Wurzel aus 2; $\sqrt{3}$ die Quadrat-Wurzel aus 3; ferner $\sqrt{\frac{2}{3}}$ die Quadrat-Wurzel aus $\frac{2}{3}$, und überhaupt $\sqrt{a}$, deutet die Quadrat-Wurzel aus der Zahl a an. So offt man also aus einer Zahl, welche kein Quadrat ist, die Quadrat-Wurzel anzeigen soll, so bedient man sich dieses Zeichens $\sqrt{}$, welches vor dieselbe Zahl geschrieben wird.

131.

Der obgemeldete Begriff von diesen Irrational-Zahlen führt uns sogleich auf einen Weg die gewöhnlichen Rechnungen mit denselben anzustellen. Weil nemlich die Quadrat-Wurzel aus 2 mit sich selbsten multiplicirt 2 geben muß, so wißen wir, daß wann $\sqrt{2}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt wird, nothwendig 2 herauskomme; eben so $\sqrt{3}$ mit $\sqrt{3}$ multiplicirt giebt 3; und $\sqrt{5}$ mit $\sqrt{5}$ giebt 5; imgleichen $\sqrt{\frac{2}{3}}$ mit $\sqrt{\frac{2}{3}}$ giebt $\frac{2}{3}$; und überhaupt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt giebt a.

132.

Wann aber $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt werden soll, so ist das Product $\sqrt{ab}$, weil wir oben gezeigt haben, daß wann ein Quadrat Factores hat, die Wurzel davon auch aus den Wurzeln der Factores entstehen. Daher findet man die Quadrat-Wurzel aus dem Product ab, das ist $\sqrt{ab}$, wann man die Quadrat-Wurzel von a, das ist $\sqrt{a}$, mit der Quadrat-Wurzel von b, das ist $\sqrt{b}$, multiplicirt. Hieraus erhellet sogleich daß wann b dem a gleich wäre, alsdenn $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{aa}$ gäbe. Nun aber ist $\sqrt{aa}$ offenbar a weil aa das Quadrat ist von a.

133.

Eben so, wann $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividiret werden soll, so bekömmt man $\sqrt{\frac{a}{b}}$, wobey es sich zutragen kann, daß im Quotus die Irrationalität verschwinde. Also wenn $\sqrt{18}$ durch $\sqrt{8}$ dividirt werden soll, so bekommt man $\sqrt{\frac{18}{8}}$. Es ist aber $\frac{18}{8}$ so viel als $\frac{9}{4}$ und die Quadrat-Wurzel von $\frac{9}{4}$ ist $\frac{3}{2}$.

134.

Wann die Zahl, vor welche das Wurzel-Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt wird, selbst ein Quadrat ist, so läßt sich die Wurzel davon auf die gewöhnliche Art ausdrucken. Also ist $\sqrt{4}$ so viel als 2; $\sqrt{9}$ ist 3; $\sqrt{36}$ ist 6; und $\sqrt{12\frac{1}{4}}$ ist $\sqrt{\frac{49}{4}}$ das ist $\frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$. In diesen Fällen ist demnach die Irrationalität nur scheinbar, und fällt von selbsten weg.

135.

Es ist auch leicht solche Irrational-Zahlen mit gewöhnlichen Zahlen zu multipliciren. Also ist 2 mal $\sqrt{5}$, so viel als $2\sqrt{5}$; und $\sqrt{2}$ mit 3 multiplicirt giebt $3\sqrt{2}$; weil aber 3 so viel ist als $\sqrt{9}$, so giebt auch $\sqrt{9}$ mit $\sqrt{2}$ multiplicirt folgende Form, nemlich $\sqrt{18}$. Also daß $\sqrt{18}$ eben so viel ist als $3\sqrt{2}$. Eben so ist $2\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{4a}$, und $3\sqrt{a}$ so viel als $\sqrt{9a}$. Und auf eine allgemeine Art ist $b\sqrt{a}$ so viel als die Quadrat-Wurzel aus bba oder $\sqrt{abb}$; woraus man sieht, daß wann die Zahl, die hinter dem Zeichen steht, ein Quadrat in sich enthält, die Wurzel davon vor das Zeichen gesezt werden kann; als $b\sqrt{a}$ anstatt $\sqrt{bba}$. Diesem nach werden folgende Reductionen klar seyn:

$\sqrt{8}$, oder $\sqrt{2\cdot 4}$, ist so viel als $2\sqrt{2}$.
$\sqrt{12}$, „ $\sqrt{3\cdot 4}$, „ „ „ „ $2\sqrt{3}$.
$\sqrt{18}$, „ $\sqrt{2\cdot 9}$, „ „ „ „ $3\sqrt{2}$.
$\sqrt{24}$, „ $\sqrt{6\cdot 4}$, „ „ „ „ $2\sqrt{6}$.
$\sqrt{32}$, „ $\sqrt{2\cdot 16}$, „ „ „ „ $4\sqrt{2}$.
$\sqrt{75}$, „ $\sqrt{3\cdot 25}$, „ „ „ „ $5\sqrt{3}$ und so fort.

136.

Mit der Division hat es eben die Bewantniß: $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt, giebt $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, das ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Auf eben diese Weise ist $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ so viel als $\sqrt{\frac{8}{2}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ ist $\sqrt{\frac{18}{2}}$, oder $\sqrt{9}$, oder 3. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ist $\sqrt{\frac{12}{3}}$, oder $\sqrt{4}$, oder 2.

$\frac{2}{\sqrt{2}}$ ist $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2}}$, oder $\sqrt{\frac{4}{2}}$, oder $\sqrt{2}$. $\frac{3}{\sqrt{3}}$ ist $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{3}}$, oder $\sqrt{\frac{9}{3}}$, oder $\sqrt{3}$.

$\frac{12}{\sqrt{6}}$ ist $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{6}}$, oder $\sqrt{\frac{144}{6}}$, oder $\sqrt{24}$, oder $\sqrt{6\cdot 4}$, das ist $2\sqrt{6}$.

137.

Bey der Addition und Subtraction fällt nichts besonders zu bemercken vor, weil die Zahlen nur mit *plus* und *minus* verbunden werden. Als: $\sqrt{2}$ zu $\sqrt{3}$ addirt, giebt $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; und $\sqrt{3}$ von $\sqrt{5}$ abgezogen, giebt $\sqrt{5} - \sqrt{3}$.

138.

Endlich ist noch zu mercken, daß, zum Unterschied dieser sogenannten Irrational-Zahlen, die gewöhnlichen Zahlen, so wohl gantze als Brüche, *Rational-Zahlen* genennt zu werden pflegen.

Wann also von Rational-Zahlen die Rede ist, so werden darunter allezeit nur ganze Zahlen, oder auch Brüche verstanden.

CAPITEL 13

VON DEN AUS EBEN DIESER QUELLE ENTSPRINGENDEN OHNMÖGLICHEN ODER IMAGINÄREN ZAHLEN

139.

Wir haben schon oben gesehen, daß die Quadraten so wohl von den positiven als negativen Zahlen immer positiv sind, oder mit dem Zeichen plus heraus kommen; indem $-a$ mit $-a$ multiplicirt eben so wohl $+aa$ giebt, als wann man $+a$ mit $+a$ multiplicirt. Und dahero haben wir in dem vorigen Capitel alle Zahlen, woraus die Quadrat-Wurzeln gezogen werden sollen, als positiv angenommen.

140.

Wann es sich dahero zuträgt, daß aus einer Negativ-Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so muß man sich allerdings in einer großen Verlegenheit befinden, weil sich keine Zahl angeben läßt, deren Quadrat eine Negativ-Zahl wäre. Denn wann man z. E. die Quadrat-Wurzel von der Zahl -4 verlangt, so will man eine solche Zahl haben, welche mit sich selbst multiplicirt -4 gebe. Diese gesuchte Zahl ist also weder $+2$ noch -2, indem so wohl $+2$ als -2, mit sich selbsten multiplicirt allemal $+4$ giebt, und nicht -4.

141.

Hieraus erkennt man also, daß die Quadrat-Wurzel von einer Negativ-Zahl weder eine Positiv- noch Negativ-Zahl seyn könne, weil auch von allen Negativ-Zahlen die Quadrate positiv werden, oder das Zeichen $+$ bekommen; folglich muß die verlangte Wurzel von einer gantz besondern Art Zahlen seyn, indem dieselbe weder zu den Positiv- noch Negativ-Zahlen gerechnet werden kann.

142.

Da nun oben schon angemerckt worden, daß die Positiv-Zahlen alle größer sind, als nichts oder 0; die Negativ-Zahlen hingegen alle kleiner sind, als nichts oder 0; also, daß alles was größer ist als nichts, durch Positiv-Zahlen; alles aber was kleiner ist als nichts, durch Negativ-Zahlen ausgedrückt wird: so sehen wir, daß die Quadrat-Wurzeln aus Negativ-Zahlen weder größer sind als nichts, noch kleiner als nichts. Nichts sind sie aber doch auch nicht, weil 0 mit 0 multiplicirt 0 und also keine Negativ-Zahl giebt.

143.

Weil nun alle mögliche Zahlen, die man sich nur immer vorstellen mag, entweder größer oder kleiner sind als 0, oder etwa 0 selbst; so ist klar, daß die Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen nicht einmahl unter die möglichen Zahlen können gerechnet werden: folglich müßen wir sagen, daß dieselben ohnmögliche Zahlen sind. Und dieser Umstand leitet uns auf den Begriff von solchen Zahlen, welche ihrer Natur nach ohnmöglich sind, und gemeiniglich *Imaginäre Zahlen*, oder *eingebildete Zahlen* genennt werden, weil sie blos allein in der Einbildung statt finden.

144.

Dahero bedeuten alle diese Ausdrücke $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$, etc. solche ohnmögliche oder Imaginäre Zahlen, weil dadurch Quadrat-Wurzeln von Negativ-Zahlen angezeigt werden.

Von diesen behauptet man also mit allem Recht daß sie weder größer noch kleiner sind als nichts; und auch nicht einmahl nichts selbsten, als aus welchem Grund sie folglich für ohnmöglich gehalten werden müßen.

145.

Gleichwohl aber werden sie unserm Verstand dargestellt, und finden in unserer Einbildung statt; daher sie auch blos eingebildete Zahlen genennt werden. Ungeacht aber diese Zahlen als z. E. $\sqrt{-4}$, ihrer Natur nach ganz und gar ohnmöglich sind, so haben wir davon doch einen hinlänglichen Begriff, indem wir wißen, daß dadurch eine solche Zahl angedeutet werde, welche mit sich selbsten multiplicirt zum Produkt -4 hervorbringe; und dieser Begriff ist zureichend um diese Zahlen in der Rechnung gehörig zu behandeln.

146.

Dasjenige nun, was wir zu allererst von dergleichen ohnmöglichen Zahlen, als z. E. von $\sqrt{-3}$, wißen, besteht darin, daß das Quadrat davon, oder das Product welches herauskommet, wann $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt wird, -3 giebt, eben so ist $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-1}$ mult. -1. Und überhaupt wann man $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt oder das Quadrat von $\sqrt{-a}$ nimmt, so giebt es $-a$.

147.

Da $-a$ so viel ist, als $+a$ mit -1 multiplicirt, und die Quadrat-Wurzel aus einem Product gefunden wird, wann man die Quadrat-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt, so ist Radix aus a mit -1 multiplicirt oder $\sqrt{-a}$ so viel, als $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt. Nun aber ist $\sqrt{a}$ eine mögliche Zahl, folglich läßt sich dieses ohnmögliche, welches darin vorkommt, allezeit auf $\sqrt{-1}$ bringen. Aus diesem Grunde ist also $\sqrt{-4}$ so viel als $\sqrt{4}$ mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt: $\sqrt{4}$ aber ist 2, also ist $\sqrt{-4}$ so viel als $2\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-9}$ so viel als $\sqrt{9}$. $\sqrt{-1}$, das ist $3\sqrt{-1}$, und $\sqrt{-16}$ so viel als $4\sqrt{-1}$.

148.

Da ferner $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt, $\sqrt{ab}$ giebt, so wird $\sqrt{-2}$ mit $\sqrt{-3}$ multiplicirt $\sqrt{6}$ geben. Eben so wird $\sqrt{-1}$ mit $\sqrt{-4}$ multiplicirt $\sqrt{4}$, das ist 2 geben. Hieraus sieht man daß zwey ohnmögliche Zahlen mit einander multiplicirt eine mögliche, oder würckliche Zahl hervorbringen.

Wann aber $\sqrt{-3}$ mit $\sqrt{+5}$ multiplicirt wird, so bekommt man $\sqrt{-15}$. Oder eine mögliche Zahl mit einer unmöglichen multiplicirt, giebt allezeit etwas unmögliches.

149.

Eben so verhält sich die Sache auch mit der Division. Dann da $\sqrt{a}$ durch $\sqrt{b}$ dividirt $\sqrt{\frac{a}{b}}$ giebt, so wird $\sqrt{-4}$ durch $\sqrt{-1}$ dividirt $\sqrt{+4}$ geben, und $\sqrt{+3}$ durch $\sqrt{-3}$ dividirt wird geben $\sqrt{-1}$. Ferner 1 durch $\sqrt{-1}$ dividirt, giebt $\sqrt{\frac{+1}{-1}}$ das ist $\sqrt{-1}$ weil 1 so viel ist, als $\sqrt{+1}$.

150.

Wie aber die obige Anmerckung allezeit statt findet, daß die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl immer einen doppelten Werth hat, oder so wohl negativ als positiv genommen werden kann, indem z. E. $\sqrt{4}$, so wohl $+2$ als -2 ist, und überhaupt für die Quadrat-Wurzel aus a so wohl $+\sqrt{a}$ als $-\sqrt{a}$ geschrieben werden kann, so gilt dieses auch bey den unmöglichen Zahlen; und die Quadrat-Wurzel aus $-a$, ist so wohl $+\sqrt{-a}$ als $-\sqrt{-a}$, wobey man die Zeichen $+$ und $-$ welche vor dem $\sqrt{}$ Zeichen gesetzt werden, von dem Zeichen so hinter dem $\sqrt{}$ Zeichen steht, wohl unterscheiden muß.

151.

Endlich muß noch ein Zweifel gehoben werden, welcher darinn besteht, daß da dergleichen Zahlen ohnmöglich sind, dieselben auch gantz und gar keinen Nutzen zu haben scheinen und diese Lehre als eine bloße Grille angesehen werden könnte. Allein dieselbe ist in der That von der größten Wichtigkeit, indem öfters Fragen vorkommen, von welchen man so gleich nicht wißen kann, ob sie möglich sind oder nicht. Wann nun die Auflösung derselben auf solche ohnmögliche Zahlen führt, so ist es ein sicheres Zeichen, daß die Frage selbst ohnmöglich sey. Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so laßt uns diese Frage betrachten: Man soll die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 40 ausmache. Wann man nun diese Frage nach den Regeln auflößt, so findet man für die zwey gesuchten Theile $6+\sqrt{-4}$, und $6-\sqrt{-4}$ welche folglich unmöglich sind, und hieraus eben erkennt man, daß diese Frage ohnmöglich könne aufgelößt werden. Wolte man aber die Zahl 12 in zwey solche Theile zerschneiden, deren Product 35 wäre, so ist offenbar, daß diese Theile 7 und 5 seyn würden.

CAPITEL 14

VON DEN CUBIC-ZAHLEN

152.

Wann eine Zahl dreymal mit sich selbst, oder ihr Quadrat nochmahls mit derselben Zahl multiplicirt wird, so wird das Product ein *Cubus* oder eine *Cubic-Zahl* genennet. Also ist von der Zahl a der Cubus aaa, welcher entsteht, wann die Zahl a mit sich selbsten nemlich mit a, und das Quadrat derselben aa nochmals mit der Zahl a multiplicirt wird.

Also sind die Cubi von den natürlichen Zahlen folgende,

Zahlen	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Cubus	1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,	729,	1000

153.

Wann wir bey diesen Cubic-Zahlen ihre Differenzen, wie bey den Quadrat-Zahlen geschehen, in Betrachtung ziehen, indem wir eine jede von der folgenden subtrahiren, so bekommen wir folgende Reihe von Zahlen wobey wir noch keine Ordnung bemercken,

7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217, 271;

wann wir aber von denselben noch ferner die Differenzen nehmen, so erhalten wir folgende Reihe Zahlen welche offenbar immer um 6 steigen; als:

12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54.

154.

Solcher gestalt wird man auch leicht die Cubos von Brüchen finden können: also ist von $\frac{1}{2}$ der Cubus $\frac{1}{8}$; von $\frac{1}{3}$ ist er $\frac{1}{27}$, von $\frac{2}{3}$ ist er $\frac{8}{27}$. Man darf nemlich nur besonders vom Zähler und Nenner die Cubos nehmen. Also vom Bruch $\frac{3}{4}$ wird der Cubus seyn $\frac{27}{64}$.

155.

Wann von einer vermischten Zahl der Cubus gefunden werden soll, so muß dieselbe erstlich in einen einzeln Bruch verwandelt werden, da dann die Rechnung leicht angestellet wird. Also von der Zahl $1\frac{1}{2}$ wird es leicht seyn den Cubum zu finden: dann da $1\frac{1}{2}$ zu einen einzeln Bruch gebracht $\frac{3}{2}$ ist, so wird der Cubus von $\frac{3}{2}$ seyn $\frac{27}{8}$ das ist 3 und $\frac{3}{8}$. Eben so von der Zahl $1\frac{1}{4}$ oder $\frac{5}{4}$ ist der Cubus $\frac{125}{64}$, das ist 1 und $\frac{61}{64}$. Ferner von der Zahl $3\frac{1}{4}$ oder $\frac{13}{4}$ ist der Cubus $\frac{2197}{64}$, welches giebt $34\frac{21}{64}$.

156.

Da von der Zahl a der Cubus aaa ist, so wird von der Zahl ab der Cubus seyn $aaabbb$; woraus man sieht, daß wann die Zahl zwey oder mehr Factores hat, der Cubus davon gefunden werde, wann man die Cubos von jeglichen Factoren mit einander multiplicirt. Also z. E.: weil 12 so viel ist als $3 \cdot 4$, so multiplicirt man den Cubus von 3 welcher ist 27, mit dem Cubus von 4, welcher ist 64, so bekommt man 1728, und dieses ist der Cubus von 12. Hieraus ist ferner klar, daß der Cubus von $2a$ ist $8aaa$ und also 8mal größer, als der Cubus von a; eben so ist von $3a$ der Cubus $27aaa$ und also 27mal größer als der Cubus von a.

157.

Ziehen wir nun auch die Zeichen $+$ und $-$ in Betrachtung, so ist für sich klar, daß von einer Positiv-Zahl $+a$ der Cubus $+aaa$ und folglich auch Positiv seyn müße. Wann aber von einer Negativ-Zahl, als $-a$, der Cubus genommen werden soll, so nehme man erstlich das Quadrat, welches ist $+aa$, und da solches nochmals mit $-a$ multiplicirt werden soll, so wird der gesuchte Cubus seyn $-aaa$ und wird folglich auch Negativ seyn. Dahero es mit den Cubis eine gantz andere Bewantniß hat als mit den Quadraten, welche allezeit Positiv herauskommen. Also ist von -1, der Cubus -1, von -2, der Cubus -8; von -3 ist er -27, und so fort.

CAPITEL 15

VON DEN CUBIC-WURZELN UND DEN DAHER ENTSPRINGENDEN IRRATIONAL-ZAHLEN

158.

Da gezeigt worden, wie von einer gegebenen Zahl der Cubus gefunden werden soll, so kann auch umgekehrt aus einer gegebenen Zahl diejenige Zahl gefunden werden, welche drey mal mit sich selbsten multiplicirt dieselbe Zahl hervorbringe: und diese wird in Ansehung jener ihre *Cubic-Wurzel* genennet. Also ist die Cubic-Wurzel aus einer vorgegebenen Zahl, eine solche Zahl, deren Cubus der vorgegebenen Zahl gleich ist.

159.

Wann also die vorgegebene Zahl eine würckliche Cubic-Zahl ist, dergleichen wir im obigen Capitel gefunden, so ist leicht die Cubic-Wurzel davon zu finden. Also ist von 1, die Cubic-Wurzel 1; von 8 ist sie 2; von 27 ist sie 3; von 64 ist sie 4, und so fort.

Eben so ist auch von -27, die Cubic-Wurzel -3; von -125 ist sie -5. Wann auch die Zahl gebrochen ist, so ist von $\frac{8}{27}$ die Cubic-Wurzel $\frac{2}{3}$, und von $\frac{64}{343}$ ist sie $\frac{4}{7}$. Ferner wann es eine vermischte Zahl ist als $2\frac{10}{27}$ welche in einen einzeln Bruch $\frac{64}{27}$ beträgt, so ist die Cubic-Wurzel davon $\frac{4}{3}$ das ist $1\frac{1}{3}$.

160.

Wann aber die vorgegebene Zahl kein würcklicher Cubus ist, so läßt sich auch die Cubic-Wurzel davon, weder durch gantze, noch gebrochene Zahlen ausdrücken; also da 43 keine Cubic-Zahl ist, so kann unmöglich weder in gantzen noch gebrochenen Zahlen, eine Zahl angezeigt werden, deren Cubus genau 43 ausmache. Inzwischen aber wißen wir doch so viel, daß die Cubic-Wurzel davon größer sey, als 3, weil der Cubus davon nur 27 ausmacht, und doch kleiner als 4, weil der Cubus davon schon 64 ist. Folglich wißen wir, daß die verlangte Cubic-Wurzel zwischen den Zahlen 3 und 4 enthalten seyn müße.

161.

Wollte man nun zu 3, weil die Cubic-Wurzel aus 43 größer ist als 3, noch einen Bruch hinzusetzen so könnte man der Wahrheit näher kommen, da aber doch der Cubus davon immer einen Bruch enthalten würde, so könnte derselbe niemahls genau 43 werden. Man setze z. E. die gesuchte Cubic-Wurzel wäre $3\frac{1}{2}$ oder $\frac{7}{2}$ so würde der Cubus davon seyn $\frac{343}{8}$ oder $42\frac{7}{8}$, folglich nur um $\frac{1}{8}$ kleiner als 43.

162.

Hieraus ist also klar, daß sich die Cubic-Wurzel aus 43 auf keinerley weise durch gantze Zahlen und Brüche ausdrücken laße; da wir aber gleichwohl einen deutlichen Begriff von der Größe derselben haben, so bedient man sich dieselben anzuzeigen dieses Zeichens $\sqrt[3]{}$ so vor die gegebene Zahl gesetzet, und mit dem Worte Cubic-Wurzel ausgesprochen wird, um daßelbe von der Quadrat-Wurzel zu unterscheiden. Also bedeutet $\sqrt[3]{43}$, die Cubic-Wurzel von 43, das ist, eine solche Zahl, deren Cubus 43 ist, oder welche drey mal mit sich selbsten multiplicirt 43 hervorbringt.

163.

Hieraus ist klar, daß dergleichen Ausdrücke keinesweges zu den Rationalen gehören, sondern eine besondere Art von Irrational-Grössen darstellen. Sie haben auch mit den Quadrat-Wurzeln keine Gemeinschaft, und es ist nicht möglich eine solche Cubic-Wurzel durch eine Quadrat-Wurzel, als etwan $\sqrt{12}$ auszudrücken: dann da von $\sqrt{12}$ das Quadrat 12 ist, so ist der Cubus davon $12\sqrt{12}$ und also noch Irrational, folglich kann derselbe nicht 43 seyn.

164.

Ist aber die vorgegebene Zahl ein würcklicher Cubus, so werden diese Ausdrücke Rational, also ist $\sqrt[3]{1}$ so viel als 1, $\sqrt[3]{8}$ so viel als 2, und $\sqrt[3]{27}$ so viel als 3, und überhaupt $\sqrt[3]{aaa}$ so viel als a.

165.

Sollte man eine Cubic-Wurzel als $\sqrt[3]{a}$ mit einer andern multipliciren, als mit $\sqrt[3]{b}$, so ist das Product $\sqrt[3]{ab}$; dann wir wißen, daß die Cubic-Wurzel aus einem Product ab gefunden wird, wann man die Cubic-Wurzel aus den Factoren mit einander multiplicirt. Und eben so, wann $\sqrt[3]{a}$ durch $\sqrt[3]{b}$ dividirt werden soll, so ist der Quotus $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.

166.

Dahero begreift man, daß $2\sqrt[3]{a}$ so viel ist als $\sqrt[3]{8a}$, weil 2 so viel ist als $\sqrt[3]{8}$. Eben so ist $3\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{27a}$, und $b\sqrt[3]{a}$ so viel als $\sqrt[3]{abbb}$. Dahero auch umgekehrt, wann die Zahl hinter dem Zeichen einen Factorem hat der ein Cubus ist, die Cubic-Wurzel daraus vor das Zeichen gesetzt werden kann: Also ist $\sqrt[3]{64a}$ so viel als $4\sqrt[3]{a}$, und $\sqrt[3]{125a}$ so viel als $5\sqrt[3]{a}$. Hieraus folgt, daß $\sqrt[3]{16}$ so viel ist als $2\sqrt[3]{2}$, weil 16 dem $8 \cdot 2$ gleich ist.

167.

Wann die vorgegebene Zahl negativ ist, so hat die Cubic-Wurzel davon keine solche Schwierigkeit, wie oben bey den Quadrat-Wurzeln geschehen; weil nehmlich die Cubi von Negativ-Zahlen auch negativ werden, so sind auch hinwiederum die Cubic-Wurzeln aus Negativ-Zahlen negativ. Also ist $\sqrt[3]{-8}$ so viel als -2, und $\sqrt[3]{-27}$ ist -3. Ferner $\sqrt[3]{-12}$ ist so viel als $-\sqrt[3]{12}$ und $\sqrt[3]{-a}$ so viel als $-\sqrt[3]{a}$. Woraus man sieht, daß das Zeichen (—) so hinter dem Cubic-Wurzel Zeichen ist, auch vor dasselbe geschrieben werden kann. Also werden wir hier auf keine unmögliche, oder eingebildete Zahlen geleitet, wie bey den Quadrat-Wurzeln der Negativ-Zahlen geschehen.

CAPITEL 16

VON DEN POTESTÄTEN ODER POTENZEN ÜBERHAUPT

168.

Wann eine Zahl mehrmalen mit sich selbsten multiplicirt wird, so wird das Product eine *Potestät*, oder auch *Potenz*, bisweilen auch eine *Dignität* genennet. Auf Teutsch könnte dieser Nahme durch eine Macht ausgedrückt werden. Da nun ein Quadrat entsteht, wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, und ein Cubus wann die Zahl drey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so sind so wohl die Quadraten, als die Cubi, unter dem Nahmen der Potenzen oder Potestäten begriffen.

169.

Diese Potestäten werden nach der Anzahl, wie viel mal eine Zahl mit sich selbsten multiplicirt worden, von einander unterschieden. Also wann eine Zahl zwey mal mit sich selbsten multiplicirt wird, so heißt das Product ihre zweyte Potestät, welche also eben so viel ist als das Quadrat davon; wird eine Zahl dreymal mit sich selbsten multiplicirt, so heißt das Product ihre dritte Potestät, welche also einerley Bedeutung mit dem Cubus hat; wird ferner eine Zahl vier mal mit sich selbsten multiplicirt, so wird das Product ihre vierte Potestät genennt, welche gemeiniglich mit dem Nahmen des Biquadrats belegt wird: woraus man ferner versteht, was die fünfte, sechste, siebente Potestät einer Zahl bedeute; welche höhere Potestäten übrigens keine besondere Nahmen zu führen pflegen.

170.

Um dieses beßer zu erläutern, so bemercken wir, erstlich daß von der Zahl 1 alle Potestäten immer 1 bleiben; weil so viele mal man auch 1 mit sich selbsten multiplicirt, das Product immer 1 bleibt. Laßt uns dahero die Potestäten der Zahl 2, so wie auch die Potestäten der Zahl 3 nach der Ordnung herschreiben. Diese gehen folgendermaßen fort:

Potestäten.	der Zahl 2.	der Zahl 3.
I.	2	3
II.	4	9
III.	8	27
IV.	16	81
V.	32	243
VI.	64	729
VII.	128	2187
VIII.	256	6561
IX.	512	19683
X.	1024	59049
XI.	2048	177147
XII.	4096	531441
XIII.	8192	1594323
XIV.	16384	4782969
XV.	32768	14348907
XVI.	65536	43046721
XVII.	131072	129140163
XVIII.	262144	387420489

Aber insbesondere sind die Potestäten von der Zahl 10 merckwürdig, nehmlich

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000,

weil sich darauf unsere gantze Rechenkunst gründet. Uebrigens ist zu mercken, daß die kleinen darüber gesetzten Zahlen andeuten, die wie vielste Potestät eine jegliche sey.

171.

Wollen wir die Sache auf eine allgemeine Art betrachten, so würden sich die Potestäten der Zahl a folgender gestalt verhalten.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	
a,	aa,	aaa,	$aaaa$,	$aaaaa$,	$aaaaaa$,	etc.

Bey dieser Art zu schreiben ereignet sich aber diese Unbequemlichkeit, daß wann sehr hohe Potestäten geschrieben werden sollten, man eben denselben Buchstaben gar viele mal hinschreiben müßte, und es dem Leser noch viel beschwerlicher fallen würde, die Menge dieser Buchstaben zu zählen, um zu wißen die wie vielste Potestät dadurch angezeigt werde. Also z. E. würde sich die hundertste Potestät auf diese Art schwerlich schreiben laßen, und noch viel weniger zu erkennen seyn.

172.

Dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, hat man eine weit bequemere Art solche Potestäten auszudrücken eingeführt, welche wegen ihres herrlichen Nutzens auf das sorgfältigste erklärt zu werden verdienet. Man pflegt nemlich über der Zahl wovon z. E. die hundertste Potestät soll angezeigt werden, etwas seitwärts zur rechten die Zahl 100 zu schreiben: Also a^{100} welches ausgesprochen wird, a elivirt oder erhaben zu Hundert, drückt die Hundertste Potestät von a aus. Die dabey oben geschriebene Zahl, als in unserm Fall 100, pflegt der *Exponent* genennt zu werden, welche Nahmen wohl zu bemercken sind.

173.

Nach dieser Art deutet also a^2, oder a elivirt zu 2, die zweyte Potestät von a an, und pflegt auch bisweilen anstatt aa geschrieben zu werden; weil beyde Arten gleich leicht zu schreiben, und zu verstehen sind. Hingegen wird gemeiniglich anstatt des Cubi oder der dritten Potestät aaa, nach dieser neuen Art a^3 geschrieben, weil dadurch mehr Platz erspart wird. Eben so drückt a^4 die vierte Potestät, a^5 die fünfte, und a^6 die sechste Potestät von a aus.

174.

Nach dieser Art werden alle Potestäten von der Zahl a folgendergestallt vorgestellt,

$$a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ a^7,\ a^8,\ a^9,\ a^{10},\ a^{11},\ a^{12},\ \text{etc.}$$

woraus man sieht, daß nach dieser Art für das erste Glied a, gar füglich a^1 geschrieben werden könnte, um die Ordnung desto deutlicher in die Augen fallen zu machen. Dahero ist a^1 nichts anders als a weil die Unität anzeigt, daß der Buchstabe a nur einmal geschrieben werden soll. Eine solche Reihe von Potestäten pflegt auch eine Geometrische Progression genennt zu werden, weil immer ein jedes Glied um eben so viel mal größer ist, als das vorhergehende.

175.

Wie in dieser Reihe der Potestäten ein jedes Glied gefunden wird, wann man das vorhergehende mit a multiplicirt, wodurch der Exponent um eins größer wird; so wird auch aus einem jeglichen Gliede das vorhergehende gefunden, wann man jenes durch a dividirt, als wodurch der Exponent um eines vermindert wird. Hieraus sehen wir, daß das dem ersten Glied a^1 vorhergehende Glied $\frac{a}{a}$ seyn müße das ist 1: nach dem Exponenten wird aber eben dasselbe seyn a^0, als woraus diese merckwürdige Eigenschaft folgt, daß a^0 allezeit 1 seyn müße, die Zahl a mag auch so groß oder so klein seyn als sie immer will, ja so gar auch wenn a nichts ist, also daß 0^0 gewis 1 ausmacht. [1])

176.

Wir können diese Reihe von Potestäten noch weiter rückwärts fortsetzen, und dieses so gar auf eine doppelte Weise. Einmal, indem wir immer das Glied durch a theilen; hernach aber auch, indem wir den Exponent um eins vermindern oder eins davon subtrahiren. Und wir sind gewiß, daß nach beyderley Arten die Glieder einander vollkommen gleich sind. Wir wollen also die obige Reihe auf diese gedoppelte Art rückwerts vorstellen, welche auch rückwerts von der rechten zur lincken gelesen werden muß:

1) Nach heutiger Auffassung ist 0^0 ein Zeichen ohne bestimmte Bedeutung. H. W.

1te	$\frac{1}{aaaaaa}$	$\frac{1}{aaaaa}$	$\frac{1}{aaaa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{a}$	1	a
	$\frac{1}{a^6}$	$\frac{1}{a^5}$	$\frac{1}{a^4}$	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a^1}$		
2te	a^{-6}	a^{-5}	a^{-4}	a^{-3}	a^{-2}	a^{-1}	a^0	a^1

177.

Hierdurch gelangen wir also zur Erkenntniß solcher Potestäten deren Exponenten negative Zahlen sind; und wir sind im Stande den Werth derselben genau anzuzeigen. Wir wollen daher dasjenige, was wir gefunden, folgender Gestalt vor Augen legen:

Erstlich a^0, ist so viel als 1.

a^{-1} „ „ „ „ $\frac{1}{a}$

a^{-2} „ „ „ „ $\frac{1}{aa}$ oder $\frac{1}{a^2}$

a^{-3} „ „ „ „ $\frac{1}{a^3}$

a^{-4} „ „ „ „ $\frac{1}{a^4}$ und so fort.

178.

Hieraus ist auch klar, wie die Potestäten von einem Product als ab gefunden werden müßen. Dieselben sind nemlich

$$ab \text{ oder } a^1b^1,\ a^2b^2,\ a^3b^3,\ a^4b^4,\ a^5b^5,\ a^6b^6, \text{ etc.}$$

Eben so werden auch die Potestäten von Brüchen gefunden, als von dem Bruch $\frac{a}{b}$ sind die Potestäten folgende:

$$\frac{a^1}{b^1},\ \frac{a^2}{b^2},\ \frac{a^3}{b^3},\ \frac{a^4}{b^4},\ \frac{a^5}{b^5},\ \frac{a^6}{b^6},\ \frac{a^7}{b^7}, \text{ etc.}$$

179.

Endlich kommen auch noch hier die Potestäten von Negativ-Zahlen zu betrachten vor. Es sey demnach gegeben die Negativ-Zahl $-a$, so werden ihre Potestäten der Ordnung nach also auf einander folgen,

$$-a,\ +aa,\ -a^3,\ +a^4,\ -a^5,\ +a^6,\ -a^7, \text{ etc.}$$

Woraus erhellet, daß nur diejenige Potestäten, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, negativ werden; hingegen sind diejenige Potestäten, deren Exponenten grade sind, alle Positiv. Also haben die dritte, fünfte, siebente, neunte, Potestäten der negativen Zahlen alle das Zeichen —.

Die zweyte, vierte, sechste, achte, Potestäten hingegen alle das Zeichen +.

CAPITEL 17

VON DEN RECHNUNGS-ARTEN MIT DEN POTESTÄTEN

180.

In Ansehung der Addition und Subtraction ist hier nichts zu bemercken, indem verschiedene Potestäten nur mit dem Zeichen + und — verbunden werden.

Also ist $a^3 + a^2$ die Summa von der dritten und zweyten Potestät des a; und $a^5 - a^4$ ist der Rest, wann von der fünften Potestät die vierte abgezogen wird, und beydes kann nicht kürtzer ausgedrückt werden. Wann aber gleiche Potestäten vorkommen, so ist klar, daß für $a^3 + a^3$ geschrieben werden kann $2a^3$ etc.

181.

Bey der Multiplication solcher Potestäten aber kommt verschiedenes zu bemercken vor. Erstlich wann eine jede Potestät von a mit der Zahl a selbsten multiplicirt werden soll, so kommt die folgende Potestät heraus, deren Exponens um 1 größer ist. Also a^2 mit a multiplicirt giebt a^3, und a^3 mit a multiplicirt giebt a^4 etc. Eben so mit denjenigen deren Exponenten negativ sind, wann dieselben mit a multiplicirt werden sollen, darf man nur zu dem Exponens 1 addiren: Also a^{-1} mit a multiplicirt giebt a^0 das ist 1, welches daraus klar ist, weil a^{-1} so viel als $\frac{1}{a}$ ist welches mit a multiplicirt $\frac{a}{a}$ giebt, das ist 1. Eben so mit a^{-2}, wann solches mit a multiplicirt werden soll giebt a^{-1}, das ist $\frac{1}{a}$, und a^{-10} mit a multiplicirt, giebt a^{-9}, und so fort.

182.

Wann aber eine Potestät mit aa, oder mit der zweiten Potestät multiplicirt werden soll, so wird der Exponens um 2 größer; also a^2 mit a^2 multiplicirt giebt a^4, und a^3 mit a^2 multiplicirt giebt a^5; ferner a^4 mit a^2 multiplicirt giebt a^6, und überhaupt a^n mit a^2 multiplicirt giebt a^{n+2}. Eben so mit den Negativ-Exponenten, als a^{-1} mit a^2 multiplicirt, giebt a^1 das ist a, welches daraus klar ist, weil a^{-1} ist $\frac{1}{a}$, dieses mit aa multiplicirt giebt $\frac{aa}{a}$, das ist a. Eben so giebt a^{-2} mit a^2 multiplicirt a^0, das ist 1, ferner a^{-3} mit a^2 multiplicirt giebt a^{-1}.

183.

Eben so ist klar, daß wann eine jegliche Potestät mit der dritten Potestät von a, oder mit a^3 multiplicirt werden soll, der Exponens derselben um 3 vermehrt werden müße; oder a^n mit a^3 multiplicirt giebt a^{n+3}. Und überhaupt wann zwey Potestäten von a mit einander multiplicirt werden sollen, so ist das Product wieder eine Potestät von a, deren Exponens die Summa ist von jenen Exponenten. Also a^4 mit a^5 multiplicirt giebt a^9, und a^{12} mit a^7 multiplicirt giebt a^{19} etc.

184.

Aus diesem Grund können die hohen Potestäten von bestimmten Zahlen ziemlich leicht gefunden werden; als wann man zum Exempel die XXIVte Potestät von 2 haben wolte, so würde man dieselbe finden, wann man die XIIte Potestät mit der XIIte Potestät multiplicirt, weil 2^{24} so viel ist, als 2^{12} mit 2^{12} multiplicirt. Nun aber ist 2^{12}, so wie wir oben gesehen haben, 4096: daher multiplicirt man 4096 mit 4096 so wird das Product 16777216 die verlangte Potestät, nemlich 2^{24} anzeigen.

185.

Bey der Division ist folgendes zu mercken. Erstlich wann eine Potestät von a durch a dividirt werden soll, so wird ihr Exponent um 1 kleiner, oder man muß 1 davon subtrahiren. Also a^5 durch a dividirt giebt a^4, und a^0, das ist 1, durch a dividirt giebt a^{-1} oder $\frac{1}{a}$. Ferner a^{-3} durch a dividirt giebt a^{-4}.

186.

Wann hernach eine Potestät von a durch a^2 dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten derselben 2 abziehen, und wollte man dieselbe durch a^3 dividiren, so müßte man von ihrem Exponenten 3 abziehen. Und also überhaupt was für eine Potestät auch immer von a durch eine andere dividirt werden soll, so muß man von dem Exponenten der erstern den Exponenten der andern subtrahiren. Also a^{15} durch a^7 dividirt giebt a^8, und a^6 durch a^7 dividirt giebt a^{-1}. Ferner auch a^{-3} durch a^4 dividirt giebt a^{-7}.

187.

Hieraus ist leicht zu begreiffen wie Potestäten von Potestäten gefunden werden müßen, weil solches durch die Multiplication geschieht. Also wann man die zweyte Potestät, oder das Quadrat von a^3 verlangt, so ist dasselbe a^6, und die dritte Potestät, oder der Cubus von a^4 wird seyn a^{12}; woraus erhellet, daß um das Quadrat einer Potestät zu finden, der Exponent derselben nur verdoppelt werden müße. Also von a^n ist das Quadrat a^{2n}, und der Cubus, oder die dritte Potestät von a^n wird seyn a^{3n}. Eben so wird auch die siebente Potestät von a^n gefunden a^{7n}, und so fort.

188.

Das Quadrat von a^2 ist a^4, das ist die vierte Potestät von a, welche dahero das Quadrat des Quadrats ist. Hieraus erhellet, warum man die vierte Potestät ein Biquadrat oder auch ein Quadratoquadrat nennet.

Weil ferner von a^3 das Quadrat a^6 ist, so pflegt auch die sechste Potestät ein Quadrato-Cubus genennt zu werden.

Endlich auch weil der Cubus von a^3 ist a^9, das ist die neunte Potestät von a, so pflegt dieselbe deswegen auch ein Cubocubus genennt zu werden. Mehrere Nahmen sind heut zu Tage nicht üblich.

CAPITEL 18

VON DEN WURZELN IN ABSICHT AUF ALLE POTESTÄTEN

189.

Weil die Quadrat-Wurzel einer gegebenen Zahl eine solche Zahl ist, deren Quadrat derselben gleich ist, und die Cubic-Wurzel eine solche, deren Cubus ihr gleich ist, so können auch von einer jeden gegebenen Zahl solche Wurzeln angezeigt werden, deren vierte oder fünfte, oder eine beliebige andre Potestät derselben gegebenen Zahl gleich ist. Um diese verschiedene Arten von Wurzeln von einander zu unterscheiden, wollen wir die Quadrat-Wurzel die zweyte Wurzel, und die Cubic-Wurzel die dritte Wurzel nennen, da dann diejenige Wurzel deren vierte Potestät einer gegebenen Zahl gleich ist, ihre vierte Wurzel heißen wird, und diejenige deren fünfte Potestät derselben Zahl gleich ist, ihre fünfte Wurzel und so fort heißen wird.

190.

Wie die zweyte oder Quadrat-Wurzel durch das Zeichen $\sqrt{\ }$, und die dritte oder Cubic-Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[3]{\ }$ angedeutet wird; so pflegt man gleicher weise die vierte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[4]{\ }$, die fünfte Wurzel durch dieses Zeichen $\sqrt[5]{\ }$, und so weiter anzuzeigen; woraus dann klar ist, daß nach dieser Schreib-Art das Zeichen der Quadrat-Wurzel als $\sqrt[2]{\ }$ ausgedruckt werden sollte. Weil aber die Quadrat-Wurzeln am öftesten vorkommen, so wird der Kürze halber die Zahl 2 aus dem Wurzel-Zeichen weggelaßen. Daher wann in dem Wurzel-Zeichen keine Ziffer befindlich ist, so muß allezeit dadurch die Quadrat-Wurzel verstanden werden.

191.

Um dieses vor Augen zu legen, so wollen wir die verschiedenen Wurzeln der Zahl a hierher setzen, und ihre Bedeutung anzeigen.

$\sqrt{a}$	ist	die	IIte	Wurzel	von	a	
$\sqrt[3]{a}$	„	„	IIIte	„	„	a	
$\sqrt[4]{a}$	„	„	IVte	„	„	a	
$\sqrt[5]{a}$	„	„	Vte	„	„	a	
$\sqrt[6]{a}$	„	„	VIte	„	„	a	u. s. w.

Also, daß hinwiederum die

IIte	Potestät	von	$\sqrt{a}$	dem	a	gleich	ist	
IIIte	„	„	$\sqrt[3]{a}$	„	a	„	„	
IVte	„	„	$\sqrt[4]{a}$	„	a	„	„	
Vte	„	„	$\sqrt[5]{a}$	„	a	„	„	
VIte	„	„	$\sqrt[6]{a}$	„	a	„	„	u. s. f.

192.

Die Zahl a mag nun groß oder klein seyn so begreift man daher, wie alle Wurzeln von diesen verschiedenen Graden verstanden werden müßen.

Wobey zu mercken, daß wann für a die Zahl 1 genommen wird, alle diese Wurzeln immer 1 bleiben, weil alle Potestäten von 1 immer 1 sind.

Wann aber die Zahl a größer ist als 1, so sind auch alle Wurzeln größer als 1.

Ist aber die Zahl kleiner als 1, so sind auch alle ihre Wurzeln kleiner als 1.

193.

Wann die Zahl a positiv ist, so begreift man aus demjenigen, was oben von den Quadrat- und Cubic-Wurzeln angeführt worden, daß auch alle übrige Wurzeln würcklich angezeigt werden können, und folglich würckliche und mögliche Zahlen sind.

Ist aber die Zahl a negativ, so werden ihre zweyten, vierten, sechsten und überhaupt alle gerade Wurzeln unmögliche Zahlen, weil alle gerade Potestäten so wohl von Positiv- als Negativ-Zahlen immer das Zeichen *plus* bekommen.

Hingegen aber werden die dritten, fünften, siebenten, und überhaupt alle ungerade Wurzeln negativ, weil die ungeraden Potestäten von Negativ-Zahlen auch negativ sind.

194.

Wir erhalten also daher eine unendliche Menge neuer Arten von Irrational- oder Surdischen Zahlen, weil so oft die Zahl a keine solche würckliche Potestät ist als die Wurzel anzeiget, so offt ist es auch nicht möglich diese Wurzel durch gantze Zahlen oder Brüche auszudrücken, folglich gehöret dieselbe in dasjenige Geschlecht von Zahlen, welche Irrational-Zahlen genennt werden.

CAPITEL 19

VON DER AUSDRÜCKUNG DER IRRATIONAL-ZAHLEN DURCH GEBROCHENE EXPONENTEN

195.

Wir haben eben in dem letzten Capitel von den Potestäten gezeiget, daß das Quadrat von einer jeglichen Potestät gefunden wird, wann man ihren Exponenten verdoppelt, und daß überhaupt das Quadrat oder die zweyte Potestät von a^n sey a^{2n}. Dahero ist hinwiederum von der Potestät a^{2n} die Quadrat-Wurzel a^n, und wird folglich gefunden, wann man den Exponenten derselben halbirt oder durch 2 dividirt.

196.

Also ist von a^2 die Quadrat-Wurzel a^1, von a^4 ist die Quadrat-Wurzel a^2, und von a^6 ist die Quadrat-Wurzel a^3 und so fort. Weil nun dieses eine allgemeine Wahrheit ist, so sieht man, wann die Quadrat-Wurzel von a^3 gefunden werden soll, daß dieselbe $a^{\frac{3}{2}}$ seyn werde. Eben so wird von a^5 die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{5}{2}}$. Folglich von der Zahl a selbsten oder von a^1 wird die Quadrat-Wurzel seyn $a^{\frac{1}{2}}$. Woraus erhellet, daß $a^{\frac{1}{2}}$ eben so viel sey als $\sqrt{a}$, welche neue Manier die Quadrat-Wurzel anzudeuten wohl zu bemercken ist.

197.

Wir haben ferner gezeigt, daß um den Cubum von einer Potestät, als a^n, zu finden, man ihren Exponenten mit 3 multipliciren müße, und also der Cubus davon seyn werde a^{3n}.

Wann also rückwärts, von der Potestät a^{3n} die dritte oder die Cubic-Wurzel gefunden werden soll, so ist dieselbe a^n, und man hat nur nöthig den Exponenten jener durch 3 zu dividiren. Also von a^3 ist die Cubic-Wurzel a^1 oder a, von a^6 ist dieselbe a^2, von a^9 ist dieselbe a^3 und so fort.

198.

Dieses muß nun auch wahr seyn, wann sich der Exponent nicht durch 3 theilen läßt, und daher wird von a^2 die Cubic-Wurzel seyn $a^{\frac{2}{3}}$. Und von a^4

ist dieselbe $a^{\frac{4}{3}}$ oder $a^{1\frac{1}{3}}$. Folglich wird auch von der Zahl a selbsten, das ist von a^1, die Cubic- oder dritte Wurzel seyn $a^{\frac{1}{3}}$. Woraus erhellet daß $a^{\frac{1}{3}}$ eben so viel sey als $\sqrt[3]{a}$.

199.

Eben so verhält es sich auch mit den höhern Wurzeln: und die vierte Wurzel von a wird seyn $a^{\frac{1}{4}}$, welches folglich eben so viel ist als $\sqrt[4]{a}$. Gleicher weise wird die fünfte Wurzel von a seyn $a^{\frac{1}{5}}$, welches eben so viel ist als $\sqrt[5]{a}$, und dieses ist auch von allen höhern Wurzeln zu verstehen.

200.

Man könnte nun also die schon längst eingeführte Wurzel-Zeichen gäntzlich entbehren, und anstatt derselben die hier erklärten gebrochenen Exponenten gebrauchen, allein da man einmal an jene Zeichen gewöhnet ist, und dieselben in allen Schriften vorkommen, so ist es nicht rathsam dieselben gäntzlich abzuschafen. Doch wird heut zu Tag diese neue Art auch häuffig gebraucht, als welche die Natur der Sache deutlich in sich faßt. Dann daß $a^{\frac{1}{2}}$ würcklich die Quadrat-Wurzel von a sey, sieht man gleich, wann man nur das Quadrat davon nimt, welches geschieht wann man $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt, da dann offenbahr herauskommt a^1 das ist a.

201.

Hieraus ersieht man auch wie alle übrige gebrochene Exponenten verstanden werden müßen; als wann man hat $a^{\frac{4}{3}}$, so muß von der Zahl a erstlich ihre vierte Potestät a^4 genommen, und hernach die Cubic- oder dritte Wurzel gezogen werden, also daß $a^{\frac{4}{3}}$ eben so viel ist, als nach der gemeinen Art $\sqrt[3]{a^4}$. Eben so wird der Werth von $a^{\frac{3}{4}}$ gefunden, wann man erstlich den Cubum oder die dritte Potestät von a sucht, welche a^3 ist und hernach aus derselben die vierte Wurzel ziehet: Also daß $a^{\frac{3}{4}}$ eben so viel ist als $\sqrt[4]{a^3}$. Eben so ist $a^{\frac{4}{5}}$ eben so viel als $\sqrt[5]{a^4}$ und so weiter.

202.

Wann der Bruch, der den Exponenten vorstellt, größer ist als 1 so läßt sich der Werth auch folgender Gestalt bestimmen. Es sey gegeben $a^{\frac{5}{2}}$, so ist dieses so viel als $a^{2\frac{1}{2}}$, welches heraus kommt, wann man a^2 mit $a^{\frac{1}{2}}$ multiplicirt. Da nun $a^{\frac{1}{2}}$ so viel ist als $\sqrt{a}$, so ist $a^{\frac{5}{2}}$ so viel als $a^2\sqrt{a}$. Eben so ist $a^{\frac{10}{3}}$, das ist $a^{3\frac{1}{3}}$ eben so viel als $a^3\sqrt[3]{a}$; und $a^{\frac{15}{4}}$ das ist $a^{3\frac{3}{4}}$ ist eben so viel als $a^3\sqrt[4]{a^3}$. Aus welchen allen der herrliche Gebrauch der gebrochenen Exponenten genugsam erhellet.

203.

Auch in Brüchen hat derselbe seinen Nutzen. Als wann vorgegeben ist $\frac{1}{\sqrt{a}}$, so ist dieses so viel als $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$. Wir haben aber oben gesehen daß ein solcher Bruch $\frac{1}{a^n}$ durch a^{-n} ausgedrückt werden kann, folglich kann $\frac{1}{\sqrt{a}}$ durch $a^{-\frac{1}{2}}$ ausgedrückt werden. Eben so wird $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ seyn $a^{-\frac{1}{3}}$, und $\frac{a^2}{\sqrt[4]{a^3}}$ wird verwandelt in $\frac{a^2}{a^{\frac{3}{4}}}$ woraus entspringet a^2 multiplicirt mit $a^{-\frac{3}{4}}$, welches ferner verwandelt wird in $a^{\frac{5}{4}}$, das ist $a^{1\frac{1}{4}}$ und das ist ferner $a\sqrt[4]{a}$. Dergleichen Reductionen werden durch die Uebung gar mercklich erleichtert.

204.

Endlich ist noch zu mercken, daß eine jede solche Wurzel auf vielerley Arten kann vorgestellt werden. Dann da $\sqrt{a}$ so viel ist als $a^{\frac{1}{2}}$ und $\frac{1}{2}$ in alle diese Brüche $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}$, etc. verwandelt werden kann; so ist klar das $\sqrt{a}$ so viel ist als $\sqrt[4]{a^2}$, im gleichen auch $\sqrt[6]{a^3}$ im gleichen auch $\sqrt[8]{a^4}$ und so fort. Eben so ist $\sqrt[3]{a}$ so viel als $a^{\frac{1}{3}}$; $a^{\frac{1}{3}}$ aber so viel als $\sqrt[6]{a^2}$ oder $\sqrt[9]{a^3}$ oder $\sqrt[12]{a^4}$. Hieraus sieht man leicht, daß die Zahl a selbst, oder a^1, durch folgende Wurzel-Zeichen könne ausgedruckt werden,

$$\sqrt[2]{a^2}, \text{ oder } \sqrt[3]{a^3}, \text{ oder } \sqrt[4]{a^4}, \text{ oder } \sqrt[5]{a^5} \text{ etc.}$$

205.

Dieses kommt bey der Multiplication und Division wohl zu statten: als z. E. wann $\sqrt[2]{a}$ mit $\sqrt[3]{a}$ multiplicirt werden soll, so schreibe man anstatt $\sqrt[2]{a}$ die $\sqrt[6]{a^3}$, und anstatt $\sqrt[3]{a}$ die $\sqrt[6]{a^2}$. Solcher gestalt hat man gleiche Wurzel-Zeichen, und erhält daher das Product $\sqrt[6]{a^5}$. Welches auch daher erhellet weil $a^{\frac{1}{2}}$ mit $a^{\frac{1}{3}}$ multiplicirt giebt $a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$. Nun aber ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ so viel als $\frac{5}{6}$ und also das Product $a^{\frac{5}{6}}$ oder $\sqrt[6]{a^5}$. Solte $\sqrt[2]{a}$ oder $a^{\frac{1}{2}}$ durch $\sqrt[3]{a}$ oder $a^{\frac{1}{3}}$ dividirt werden, so bekömmt man $a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ das ist $a^{\frac{3}{6}-\frac{2}{6}}$ also $a^{\frac{1}{6}}$, folglich $\sqrt[6]{a}$.

CAPITEL 20

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN UND IHRER VERBINDUNG ÜBERHAUPT

206.

Wir haben bisher verschiedene Rechnungs-Arten als die Addition, Subtraction, Multiplication und Division, die Erhebung zu Potestäten, und endlich die Ausziehung der Wurzeln, vorgetragen.

Daher wird es nicht wenig zu beßerer Erleuterung dienen, wann wir den Ursprung dieser Rechnungs-Arten und ihre Verbindung unter sich deutlich erklären, damit man erkennen möge, ob noch andere dergleichen Arten möglich seyn oder nicht.

Zu diesem Ende brauchen wir ein neues Zeichen, welches anstatt der bisher so häufig vorgekommenen Redens-Art, *ist so viel als*, gesetzt werden kann. Dieses Zeichen ist nun $=$ und wird ausgesprochen *ist gleich.* Also wann geschrieben wird $a = b$, so ist die Bedeutung, daß a eben so viel sey als b, oder das a dem b gleich sey; also ist z. E. $3 \cdot 5 = 15$.

207.

Die erste Rechnungs-Art, welche sich unserm Verstand darstelt, ist ohnstreitig die Addition, durch welche zwey Zahlen zusammen addirt, oder die Summa derselben gefunden werden soll. Es seyen demnach a und b die zwey gegebenen Zahlen und ihre Summa werde durch den Buchstaben c angedeutet, so hat man $a + b = c$. Also wann die beyden Zahlen a und b bekant sind, so lehrt die Addition wie man daraus die Zahl c finden soll.

208.

Man behalte diese Vergleichung $a + b = c$, kehre aber jetzt die Frage um, und frage wann die Zahlen a und c bekannt sind, wie man die Zahl b finden soll.

Man fragt also was man für eine Zahl zu der Zahl a addiren müße, damit die Zahl c herauskomme: Es sey z. E. $a = 3$ und $c = 8$, also daß $3 + b = 8$ seyn müßte, so ist klar, daß b gefunden wird, wann man 3 von 8 subtrahirt. Überhaupt also um b zu finden, so muß man a von c subtrahiren und da wird $b = c - a$. Dann wann a darzu addirt wird, so bekommt man $c - a + a$ das ist c.

Hierinnen besteht also der Ursprung der Subtraction.

209.

Die Subtraction entsteht also wann die Frage, welche bey der Addition vorkommt, umgekehrt wird. Und da es sich zutragen kann, daß die Zahl welche abgezogen werden soll, größer ist als diejenige von der sie abgezogen werden soll: als wann z. E. 9 von 5 abgezogen werden sollte: so erhalten wir daher den Begrif von einer neuen Art Zahlen, welche negativ genennt werden, weil $5 - 9 = -4$.

210.

Wann viele Zahlen, welche zusammen addirt werden sollen, einander gleich sind, so wird ihre Summa durch die Multiplication gefunden, und heißt alsdann das Product. Also bedeutet ab das Product, welches entsteht wann die Zahl a mit der Zahl b multiplicirt wird. Wenn wir nun dieses Product mit dem Buchstaben c andeuten, so haben wir $ab = c$, und die Multiplication lehrt, wann die Zahlen a und b bekant sind, wie man daraus die Zahl c finden solle.

211.

Laßt uns nun folgende Frage aufwerfen: Wann die Zahlen c und a bekannt sind, wie soll man daraus die Zahl b finden. Es sey z. E. $a = 3$

und $c = 15$, so daß $3b = 15$ und es wird gefragt, mit was für einer Zahl man 3 multipliciren müße, damit 15 herauskomme. Dieses geschieht nun durch die Division und wird dahero überhaupt die Zahl b gefunden, wann man c durch a dividirt; woraus folglich diese Gleichung entsteht $b = \frac{c}{a}$.

212.

Weil es sich nun oft zutragen kann, daß sich die Zahl c nicht würcklich durch die Zahl a theilen laße, und gleich wohl der Buchstaben b einen bestimmten Werth haben muß, so werden wir auf eine neue Art von Zahlen geleitet, welche Brüche genennt werden. Also wann wir annehmen $a = 4$, und $c = 3$, also daß $4b = 3$, so sieht man wohl, daß b keine gantze Zahl seyn kann, sondern ein Bruch ist, nehmlich $b = \frac{3}{4}$.

213.

Wie nun die Multiplication aus der Addition entstanden, wann viele Zahlen die addirt werden sollen, einander gleich sind, so wollen wir jetzt auch bey der Multiplication annehmen, daß viele gleiche Zahlen mit einander multiplicirt werden sollen, und dadurch gelangen wir zu den Potestäten, welche auf eine allgemeine Art durch diese Form a^b vorgestellt werden, wodurch angezeigt wird, daß die Zahl a so viele mal mit sich selber multiplicirt werden müße, als die Zahl b anweiset. Hier wird wie oben gemeldet a die Wurzel, b der Exponent und a^b die Potestät genennet.

214.

Laßet uns nun diese Potestät selbst durch den Buchstaben c andeuten, so haben wir $a^b = c$ worinn also drey Buchstaben $a, b, c,$ vorkommen. Dieses vorausgesetzt, so wird in der Lehre von den Potestäten gezeiget, wie man, wann die Wurzel a nebst dem Exponenten b bekannt ist, daraus die Potestät selbst, das ist den Buchstaben c bestimmen soll. Es sey z. E. $a = 5$, und $b = 3$, also das $c = 5^3$: woraus man sieht daß von 5 die dritte Potestät genommen werden müße, welche ist 125; also wird $c = 125$.

Hier wird also gelehrt, wie man aus der Wurzel a und dem Exponenten b die Potestät c finden soll.

215.

Laßet uns nun auch hier sehen wie die Frage umgekehrt, oder verändert werden kann, also daß aus zweyen von diesen dreyen Zahlen a, b, c, die dritte gefunden werden soll, welches auf zweyerley Art geschehen kann, indem nebst dem c, entweder a oder b, für bekant angenommen wird. Wobey zu mercken, daß in den obigen Fällen bey der Addition und Multiplication nur eine Veränderung stattfindet, weil im ersten Fall, wo $a + b = c$, es gleich viel ist ob man nebst dem c, noch a, oder b, für bekant annimt, indem es gleich viel ist, ob ich schreibe $a + b$ oder $b + a$; und eben so verhält es sich auch mit der Gleichung $ab = c$ oder $ba = c$, wo die Buchstaben a und b ebenfals verwechselt werden können. Allein dieses findet nicht statt bey den Potestäten, indem vor a^b keinesweges gesetzt werden kann b^a, welches aus einem einigen Exempel leicht zu ersehen; wann z. E. $a = 5$ und $b = 3$ gesetzt wird, so wird $a^b = 5^3 = 125$. Hingegen wird $b^a = 3^5 = 243$, welches sehr weit von 125 verschieden ist.

216.

Hieraus ist klar, daß hier würcklich noch zwey Fragen angestelt werden können, wovon die erste ist: Wann nebst der Potestät c, noch der Exponent b gegeben wird, wie man daraus die Wurzel a finden soll. Die zweyte Frage aber ist, wann nebst der Potestät c, noch die Wurzel a für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten b finden soll.

217.

Im obigen ist nur die erste von diesen zwey Fragen erörtert worden, und dieses ist geschehen in der Lehre von der Ausziehung der Wurzel. Dann wann man z. E. $b = 2$ und $a^2 = c$ hat so muß a eine solche Zahl seyn, deren Quadrat dem c gleich sey, und da wird $a = \sqrt[2]{c}$. Eben so wann $b = 3$ so hat man $a^3 = c$, da muß also der Cubus von a der gegebenen Zahl c gleich seyn, und da erhält man $a = \sqrt[3]{c}$. Hieraus läßt sich auf eine allgemeine Art verstehen, wie man aus den beyden Buchstaben c und b den Buchstaben a finden müße. Es wird nemlich seyn $a = \sqrt[b]{c}$.

218.

So oft es sich nun ereignet, daß die gegebene Zahl c nicht würcklich eine solche Potestät ist, deren Wurzel verlangt wird, so ist schon oben bemercket worden, daß die verlangte Wurzel a weder in gantzen noch in Brüchen könne ausgedrückt werden. Da nun dieselbe gleichwohl ihren bestimmten Werth haben muß, so sind wir dadurch zu einer neuen Art von Zahlen gelanget, welche Irrational oder Surdische Zahlen genennt werden; von welchen es nach der Mannigfaltigkeit der Wurzeln, so gar unendlich vielerley Arten giebt. Auch hat uns diese Betrachtung noch auf eine gantz besondere Art von Zahlen geleitet, welche unmöglich sind und imaginäre, oder eingebildete Zahlen genennt werden.

219.

Man sieht also, daß uns noch eine Frage zu betrachten übrigen sey, nemlich wann außer der Potestät c noch die Wurzel a für bekant angenommen wird, wie man daraus den Exponenten finden soll? Diese Frage wird uns auf die wichtige Lehre von den Logarithmen leiten, deren Nutzen in der gantzen Mathematic so groß ist, daß fast keine weitlaufige Rechnung ohne Hülfe der Logarithmen zu Stande gebracht werden kann. Wir werden also diese Lehre in dem folgenden Capitel erklären, wo wir wieder auf gantz neue Arten von Zahlen, welche nicht einmahl zu den obigen Irrationalen gerechnet werden können, werden geleitet werden.

CAPITEL 21

VON DEN LOGARITHMEN ÜBERHAUPT

220.

Wir betrachten also diese Gleichung $a^b = c$, und bemercken zuförderst, daß in der Lehre von den Logarithmen für die Wurzel a eine gewiße Zahl nach Belieben festgestellet werde, also daß dieselbe immer einerley Werth behalte. Wann nun der Exponent b also angenommen wird, daß die Potestät a^b einer gegebenen Zahl c gleich werde, so wird der Exponent b der Logarithmus dieser Zahl c genennt, und um dieselben anzuzeigen werde ich mich in zukumfft des Zeichens eines teutschen $\mathfrak{l}$ bedienen, welches der Zahl c vorgesetzt wird; und also schreibt man $b = \mathfrak{l}c$ wodurch angedeutet wird, daß b gleich sey dem Logarithmus der Zahl c, oder der Logarithmus von c sey b.

221.

Nachdem also die Wurzel a einmahl festgestellet worden, so ist der Logarithmus einer jeglichen Zahl c, nichts anders als der Exponent derjenigen Potestät von a, welche der Zahl c gleich ist. Da nun $c = a^b$ so ist b der Logarithmus der Potestät a^b. Setzt man nun $b = 1$, so ist 1 der Logarithmus von a^1, das ist $\mathfrak{l}a = 1$; setzt man $b = 2$, so ist 2 der Logarithmus von a^2, das ist $\mathfrak{l}a^2 = 2$. Eben so wird man haben: $\mathfrak{l}a^3 = 3$, $\mathfrak{l}a^4 = 4$, $\mathfrak{l}a^5 = 5$ und so ferner.

222.

Setzt man $b = 0$, so wird 0 der Logarithmus seyn von a^0: nun aber ist $a^0 = 1$, und also ist $\mathfrak{l}1 = 0$, die Wurzel a mag angenommen werden, wie man will.

Setzt man ferner $b = -1$, so wird -1 der Logarithmus von a^{-1}. Es ist aber $a^{-1} = \frac{1}{a}$; also hat man $\mathfrak{l}\frac{1}{a} = -1$. Eben so bekommt man $\mathfrak{l}\frac{1}{a^2} = -2$, $\mathfrak{l}\frac{1}{a^3} = -3$, $\mathfrak{l}\frac{1}{a^4} = -4$ etc.

223.

Hieraus erhellet wie die Logarithmen von allen Potestäten der Wurzel a und auch so gar von Brüchen, deren Zehler $= 1$, der Nenner aber eine Potestät von a ist, können angezeigt werden; in welchen Fällen die Logarithmen gantze Zahlen sind. Nimmt man aber für b Brüche an, so werden dieselben Logarithmen von Irrational-Zahlen; wann nemlich $b = \frac{1}{2}$ so ist $\frac{1}{2}$ der Logarithmus von $a^{\frac{1}{2}}$ oder von $\sqrt{a}$. Dahero bekommt man $\mathfrak{l}\sqrt{a} = \frac{1}{2}$. Eben so $\mathfrak{l}\sqrt[3]{a} = \frac{1}{3}$ und $\mathfrak{l}\sqrt[4]{a} = \frac{1}{4}$, und so fort.

224.

Wann aber der Logarithmus von einer andern Zahl c gefunden werden soll, so sieht man leicht, daß derselbe weder eine gantze Zahl noch ein Bruch seyn kann. Inzwischen muß es doch immer einen solchen Exponent geben, nemlich b, so daß die Potestät a^b der gegebenen Zahl c gleich werde, und alsdann hat man $b = \mathfrak{l}c$. Folglich hat man auf eine allgemeine Art $a^{\mathfrak{l}c} = c$.

225.

Laßt uns nun eine andere Zahl d betrachten, deren Logarithmus ebenfals durch $\mathfrak{l}d$ angedeutet wird also daß $a^{\mathfrak{l}d} = d$. Man multiplicire nun diese

Formel mit der vorhergehenden $a^{lc} = c$, so bekommt man $a^{lc+ld} = cd$: nun aber ist der Exponent allezeit der Logarithmus der Potestät; folglich ist $lc + ld = lcd$. Dividirt man aber die erste Formel durch die letztere so bekommt man $a^{lc-ld} = \frac{c}{d}$. Folglich wird $lc - ld = l\frac{c}{d}$.

226.

Hierdurch werden wir zu den zwey Haupt-Eigenschaften der Logarithmen geführet, wovon die erste in der Gleichung $lc + ld = lcd$ besteht, und woraus wir lernen, daß der Logarithmus von einem Product als cd gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt. Die zweyte Eigenschaft ist in der Gleichung $lc - ld = l\frac{c}{d}$ enthalten und zeiget an, daß der Logarithmus von einem Bruch gefunden werde, wann man von dem Logarithmus des Zehlers den Logarithmus des Nenners subtrahirt.

227.

Und eben hierin bestehet der herrliche Nutzen, den die Logarithmen in der Rechenkunst leisten. Weil wann zwey Zahlen mit einander multiplicirt oder dividirt werden sollen, man nur nöthig habe die Logarithmen derselben zu addiren oder zu subtrahiren. Es ist aber offenbar, daß es ungleich viel leichter sey Zahlen zu addiren oder subtrahiren, als zu multipliciren oder dividiren, insonderheit wann die Zahlen sehr groß sind.

228.

Noch wichtiger aber ist der Nutzen bey den Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln. Dann wann $d = c$, so hat man aus der erstern Eigenschaft $lc + lc = lcc$, also ist $lcc = 2lc$. Eben so bekommt man $lc^3 = 3lc$ und $lc^4 = 4lc$, und allgemein $lc^n = nlc$.

Nimmt man nun für n gebrochene Zahlen an, so bekommt man $lc^{\frac{1}{2}}$, das ist $l\sqrt{c} = \frac{1}{2}lc$; ferner auch für Negativ-Zahlen lc^{-1} das ist $l\frac{1}{c} = -lc$, und lc^{-2} das ist $l\frac{1}{cc} = -2lc$ und so fort.

229.

Wann man also solche Tabellen hat, worinnen für alle Zahlen die Logarithmen berechnet sind, so kann man durch Hülfe derselben die schwerste

Rechnungen, wo große Multiplicationen und Divisionen imgleichen auch Erhebungen zu Potestäten und Ausziehungen der Wurzeln vorkommen, mit leichter Mühe ausführen, weil man in diesen Tafeln so wohl für jede Zahl ihre Logarithmen, als auch für einen jeden Logarithmus die Zahl selbsten, finden kann. Also wann man aus einer Zahl c die Quadrat-Wurzel finden soll, so sucht man erstlich den Logarithmus der Zahl c welcher ist $\mathfrak{l}c$, hernach nimmt man davon die Hälfte welche ist $\frac{1}{2}\mathfrak{l}c$, und diese ist der Logarithmus von der gesuchten Quadrat-Wurzel: allso die Zahl die diesem Logarithmus zukommt, und in der Tafel gefunden wird, ist die Quadrat-Wurzel selbst.

230.

Wir haben oben gesehen daß die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc. und folglich alle Positiv-Zahlen Logarithmen sind von der Wurzel a und ihren positiven Potestäten; das ist von Zahlen die größer sind als Eins.

Hingegen die Negativ-Zahlen als -1, -2 etc. sind Logarithmen von den Brüchen $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$ etc. welche kleiner sind als Eins, gleichwohl aber noch größer als nichts.

Hieraus folgt, daß wann der Logarithmus positiv ist, die Zahl immer größer sey als Eins; wenn aber der Logarithmus negativ ist, so ist die Zahl immer kleiner als Eins, doch aber größer als 0. Folglich können für Negativ-Zahlen keine Logarithmen angezeigt werden, oder die Logarithmen von Negativ-Zahlen sind unmöglich und gehören zu dem Geschlecht der imaginären oder eingebildeten Zahlen.

231.

Um dieses beßer zu erläutern, wird dienlich seyn für die Wurzel a eine bestimmte Zahl anzunehmen und zwar diejenige, nach welcher die üblichen Logarithmischen Tabellen berechnet sind. Es wird aber darinn die Zahl 10 für die Wurzel a angenommen, weil nach derselben schon die gantze Rechenkunst eingerichtet ist. Man sieht aber leicht, daß dafür eine jegliche andre Zahl, die nur größer ist als Eins, angenommen werden könnte; dann wann man $a = 1$ setzen wollte, so würden alle Potestäten davon als $a^b = 1$, und immer Eins bleiben, und niemals einer andern gegebenen Zahl als c gleich werden können.

CAPITEL 22

VON DEN ÜBLICHEN LOGARITHMISCHEN TABELLEN

232.

In diesen Tabellen wird wie gemeldet zum Grund gelegt, daß die Wurzel $a = 10$ sey; also ist der Logarithmus von einer jeglichen Zahl c derjenige Exponent, zu welchen wann die Zahl 10 erhoben wird, die Potestät der Zahl gleich werde. Oder wann der Logarithmus der Zahl c durch $\mathfrak{l}c$ angedeutet wird, so hat man immer $10^{\mathfrak{l}c} = c$.

233.

Wir haben schon bemercket, daß von der Zahl 1 der Logarithmus immer 0 sey, weil $10^0 = 1$, also ist

$$\mathfrak{l}1 = 0,\ \mathfrak{l}10 = 1,\ \mathfrak{l}100 = 2,\ \mathfrak{l}1000 = 3,\ \mathfrak{l}10000 = 4,\ \mathfrak{l}100000 = 5,\ \mathfrak{l}1000000 = 6;$$

ferner

$$\mathfrak{l}\frac{1}{10} = -1,\ \mathfrak{l}\frac{1}{100} = -2,\ \mathfrak{l}\frac{1}{1000} = -3,\ \mathfrak{l}\frac{1}{10000} = -4,\ \mathfrak{l}\frac{1}{100000} = -5,\ \mathfrak{l}\frac{1}{1000000} = -6.$$

234.

Wie sich nun die Logarithmen von diesen Haupt-Zahlen von sich selbst ergeben, so ist um so viel schwerer die Logarithmen aller übrigen Zahlen zu finden, welche gleich wohl in den Tabellen müßen angezeigt werden. Hier ist auch noch nicht der Ort, eine hinlängliche Anweisung zu geben, wie dieselben gefunden werden sollen, dahero wollen wir nur überhaupt bemercken, was dabey zu beobachten vorkommt.

235.

Da nun $\mathfrak{l}1 = 0$, und $\mathfrak{l}10 = 1$, so ist leicht zu erachten daß von allen Zahlen zwischen 1 und 10, ihre Logarithmen zwischen 0 und 1 enthalten seyn müßen, oder sie sind größer als 0, und doch kleiner als 1.

Laßt uns nur die Zahl 2 betrachten, so ist gewiß daß ihr Logarithmus, den wir durch den Buchstaben x andeuten wollen, allso daß $\mathfrak{l}2 = x$, größer sey als 0, und doch kleiner als 1. Es muß aber eine solche Zahl seyn, daß 10^x just dem 2 gleich werde.

Man kann auch leicht sehen daß x viel kleiner seyn müße als $\frac{1}{2}$, oder daß $10^{\frac{1}{2}}$ größer sey als 2, dann wann man beyderseits die Quadraten nimmt, so wird das Quadrat von $10^{\frac{1}{2}} = 10^1$; das Quadrat von 2 aber wird 4, also viel kleiner. Eben so ist auch $\frac{1}{3}$ für x noch zu groß, oder $10^{\frac{1}{3}}$ ist größer als 2. Denn der Cubus von $10^{\frac{1}{3}} = 10$, der Cubus von 2 aber ist nur 8. Hingegen ist $\frac{1}{4}$ für x angenommen zu klein: dann $10^{\frac{1}{4}}$ ist kleiner als 2, weil die vierte Potestät von jenem 10 ist von diesem aber 16. Hieraus sieht man also daß x oder der $l2$ kleiner ist als $\frac{1}{3}$ und doch größer als $\frac{1}{4}$; man kann auch für einen jeden andern Bruch der zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ ist, finden, ob derselbe zu groß oder zu klein sey. Als $\frac{2}{7}$ ist kleiner als $\frac{1}{3}$ und größer als $\frac{1}{4}$, wollte man nun $\frac{2}{7}$ für x nehmen so müßte $10^{\frac{2}{7}} = 2$ seyn, wann aber dieses wäre, so müßen auch die siebente Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{2}{7}}$ die siebente Potestät $= 10^2 = 100$, welche der siebenten Potestät von 2 gleich seyn müßte; da nun die siebente Potestät von 2 $= 128$ und also größer als jene, so ist auch $10^{\frac{2}{7}}$ kleiner als 2 und also $\frac{2}{7}$ kleiner als $l2$: oder $l2$ ist größer als $\frac{2}{7}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

Ein solcher Bruch ist $\frac{3}{10}$; sollte nun $10^{\frac{3}{10}} = 2$ seyn, so müßten auch die zehnte Potestäten einander gleich seyn: Es ist aber von $10^{\frac{3}{10}}$ die zehnte Potestät $= 10^3 = 1000$, von 2 aber ist die zehnte Potestät $= 1024$; woraus wir schließen daß $\frac{3}{10}$ noch zu klein ist, oder daß $l2$ größer sey als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$.

236.

Diese Betrachtung dienet um zu zeigen, daß $l2$ seine bestimmte Größe habe, weil wir wißen, daß derselben gewis größer ist als $\frac{3}{10}$ und doch kleiner als $\frac{1}{3}$. Weiter können wir hier noch nicht gehen, und weil wir den wahren Werth noch nicht wißen so wollen wir für denselben den Buchstaben x gebrauchen, also daß $l2 = x$, und zeigen wann derselbe gefunden wäre, wie man daraus von unzählig viel andern Zahlen die Logarithmen finden könne;

worzu die oben gegebene Gleichung dienet $\mathfrak{l}cd = \mathfrak{l}c + \mathfrak{l}d$, oder daß der Logarithmus von einem Product gefunden werde, wann man die Logarithmen der Factoren zusammen addirt.

237.

Da nun $\mathfrak{l}2 = x$, und $\mathfrak{l}10 = 1$, so bekommen wir $\mathfrak{l}20 = x + 1$, und $\mathfrak{l}200 = x + 2$, ferner $\mathfrak{l}2000 = x + 3$ weiter $\mathfrak{l}20000 = x + 4$ und $\mathfrak{l}200000 = x + 5$ u. s. f.

238.

Da ferner $\mathfrak{l}c^2 = 2\mathfrak{l}c$ und $\mathfrak{l}c^3 = 3\mathfrak{l}c$, $\mathfrak{l}c^4 = 4\mathfrak{l}c$ etc. so erhalten wir daher $\mathfrak{l}4 = 2x$, $\mathfrak{l}8 = 3x$, $\mathfrak{l}16 = 4x$, $\mathfrak{l}32 = 5x$, $\mathfrak{l}64 = 6x$ etc. Hieraus finden wir ferner

$$\mathfrak{l}40 = 2x + 1,\ \mathfrak{l}400 = 2x + 2,\ \mathfrak{l}4000 = 2x + 3,\ \mathfrak{l}40000 = 2x + 4 \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{l}80 = 3x + 1,\ \mathfrak{l}800 = 3x + 2,\ \mathfrak{l}8000 = 3x + 3,\ \mathfrak{l}80000 = 3x + 4 \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{l}160 = 4x + 1,\ \mathfrak{l}1600 = 4x + 2,\ \mathfrak{l}16000 = 4x + 3,\ \mathfrak{l}160000 = 4x + 4 \text{ etc.}$$

239.

Da ferner gefunden worden $\mathfrak{l}\frac{c}{d} = \mathfrak{l}c - \mathfrak{l}d$, so setze man $c = 10$, und $d = 2$, und weil $\mathfrak{l}10 = 1$ und $\mathfrak{l}2 = x$, so bekommen wir $\mathfrak{l}\frac{10}{2}$ das ist $\mathfrak{l}5 = 1 - x$ daher erhalten wir

$$\mathfrak{l}50 = 2 - x,\ \mathfrak{l}500 = 3 - x,\ \mathfrak{l}5000 = 4 - x \text{ etc.}$$

ferner $$\mathfrak{l}25 = 2 - 2x,\ \mathfrak{l}125 = 3 - 3x,\ \mathfrak{l}625 = 4 - 4x \text{ etc.}$$

Daher gelangen wir weiter zu folgenden:

$$\mathfrak{l}250 = 3 - 2x,\ \mathfrak{l}2500 = 4 - 2x,\ \mathfrak{l}25000 = 5 - 2x \text{ etc.}$$

ferner $$\mathfrak{l}1250 = 4 - 3x,\ \mathfrak{l}12500 = 5 - 3x,\ \mathfrak{l}125000 = 6 - 3x \text{ etc.}$$

ferner $$\mathfrak{l}6250 = 5 - 4x,\ \mathfrak{l}62500 = 6 - 4x,\ \mathfrak{l}625000 = 7 - 4x \text{ und so fort.}$$

240.

Hätte man auch den Logarithmus von 3 gefunden so könnte man daher noch von unendlich viel mehrern Zahlen die Logarithmen bestimmen. Wir wollen den Buchstaben y für $\mathfrak{l}3$ setzen, und daher würden wir haben:

$$\mathfrak{l}30 = y + 1,\ \mathfrak{l}300 = y + 2,\ \mathfrak{l}3000 = y + 3, \text{ etc.}$$
$$\mathfrak{l}9 = 2y,\ \mathfrak{l}27 = 3y,\ \mathfrak{l}81 = 4y,\ \mathfrak{l}243 = 5y, \text{ etc.}$$

daher kan man noch weiter finden:

$$l6 = x + y,\ l12 = 2x + y,\ l18 = x + 2y,$$

imgleichen auch $$l15 = l3 + l5 = y + 1 - x.$$

241.

Wir haben oben gesehen, daß alle Zahlen aus den so genannten Prim-Zahlen durch die Multiplication hervor gebracht werden. Also wann nun die Logarithmen der Prim-Zahlen bekannt wären, so könnte man daraus die Logarithmen aller andern Zahlen blos durch die Addition finden; als z. E. von der Zahl 210 welche aus folgenden Factoren besteht, $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, wird seyn der Logarithmus $= l2 + l3 + l5 + l7$; gleicher gestalt da $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, so wird $l360 = 3l2 + 2l3 + l5$, woraus erhellet, wie man aus den Logarithmen der Prim-Zahlen die Logarithmen von allen andern Zahlen bestimmen kann. Also bey Verfertigung der Logarithmischen Tabellen hat man nur dafür zu sorgen, daß die Logarithmen von allen Prim-Zahlen gefunden werden.

CAPITEL 23

VON DER ART DIE LOGARITHMEN VORZUSTELLEN

242.

Wir haben gesehen, daß der Logarithmus von 2 größer ist als $\frac{3}{10}$ und kleiner als $\frac{1}{3}$; oder daß der Exponent von 10 zwischen diesen zwey Brüchen fallen müße, wann die Potestät dem 2 gleich werden soll: man mag aber einen Bruch annehmen, was man immer für einen will, so wird die Potestät immer eine Irrational-Zahl und entweder größer oder kleiner als 2 seyn, dahero sich der Logarithmus von 2 durch keinen solchen Bruch ausdrücken läßt. Man muß sich deswegen begnügen den Werth desselben durch Annäherungen so genau zu bestimmen, daß der Fehler unmercklich werde. Hierzu bedienet man sich der so genannten Decimal-Brüche, deren Natur und Beschaffenheit deutlich erklärt zu werden verdient.

243.

Man weiß, daß in der gewöhnlichen Art alle Zahlen mit den zehn Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

zu schreiben, dieselben nur auf der ersten Stelle zur rechten Hand ihre natürliche Bedeutung haben, und daß auf der zweyten Stelle ihre Bedeutung 10 mal größer werde, auf der dritten aber 100 mal, auf der vierten 1000 mal, und so fort auf einer jeden folgenden Stelle 10 mal größer als auf der vorhergehenden.

Also in dieser Zahl 1765 steht auf der ersten Stelle zur rechten die Ziffer 5 die auch würcklich 5 bedeutet, auf der zweyten Stelle steht 6, welche aber nicht 6, sondern $10 \cdot 6$ oder 60 anzeigt; die Ziffer 7 auf der dritten Stelle bedeutet $100 \cdot 7$ oder 700, und endlich das 1 auf der vierten Stelle bedeutet 1000, und so wird auch diese Zahl ausgesprochen, indem man sagt:

Ein Tausend, Sieben Hundert, Sechzig, und Fünf.[1])

244.

Wie nun von der rechten zur lincken die Bedeutung der Ziffern immer 10 mal größer und folglich von der lincken zur rechten immer 10 mal kleiner wird, so kann man nach diesem Gesetz noch weiter gehen und gegen die rechte Hand fortrücken, da dann die Bedeutung der Ziffern immer fort 10 mahl kleiner wird. Hier muß man aber die Stelle wohl bemercken, wo die Ziffern ihren natürlichen Wert haben, dieses geschieht durch ein Comma, so hinter diese Stelle gesetzt wird. Wann man dahero diese Zahl geschrieben findet als 36, 54892, so ist dieselbe also zu verstehen: erstlich hat die Ziffer 6 ihre natürliche Bedeutung, und die Ziffer 3 auf der zweyten Stelle von der lincken 30. Aber nach dem Comma bedeutet die Ziffer 5 nur $\frac{5}{10}$, die folgenden 4 sind $\frac{4}{100}$, die Ziffer 8 bedeutet $\frac{8}{1000}$, die Ziffer 9 $\frac{9}{10000}$ und die Ziffer 2 $\frac{2}{100000}$; woraus man sieht, daß je weiter diese Ziffern nach der rechten Hand fortgesetzt werden, ihre Bedeutungen immer kleiner und endlich so klein werden, daß sie vor nichts zu achten sind.

245.

Diese Art die Zahlen auszudrücken heißt nun ein Decimal-Bruch, und auf diese Art werden auch die Logarithmen in den Tabellen dargestellt. Da-

1) Siehe die Anmerkung p. 3. H. W.

selbst wird z. E. der Logarithmus von 2 also ausgedruckt 0,3010300. Wobey folglich zu mercken, daß weil vor dem Comma 0 steht, dieser Logarithmus auch kein Gantzes betrage, und daß sein Werth sey

$$\frac{3}{10}+\frac{0}{100}+\frac{1}{1000}+\frac{0}{10000}+\frac{3}{100000}+\frac{0}{1000000}+\frac{0}{10000000}.$$

Man hätte also wohl die zwey hintersten 0 weglaßen können, allein dieselben dienen um zu zeigen daß von diesen Theilgen würcklich keine vorhanden sind. Man läugnet aber nicht, daß nicht weiter noch kleinere Theilgen folgen sollten, welche man aber wegen ihrer Kleinigkeit für nichts achtet.

246.

Den Logarithmus von 3 findet man also ausgedrückt 0,4771213; woraus man sieht, daß derselbe kein Gantzes betrage, sondern daß er aus diesen Brüchen bestehe

$$\frac{4}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\frac{1}{10000}+\frac{2}{100000}+\frac{1}{1000000}+\frac{3}{10000000}.$$

Man muß aber nicht glauben, daß dieser Logarithmus solchergestallt gantz genau ausgedrückt sey. Doch aber weiß man so viel, daß der Fehler gewiß kleiner ist als $\frac{1}{10000000}$, welcher auch würcklich so klein ist, daß man ihn in den meisten Rechnungen aus der Acht laßen kann.

247.

Nach dieser Art heißt der Logarithmus von 1 also 0,0000000, weil derselbe würcklich 0 ist; von 10 aber heißt der Logarithmus 1,0000000, woraus man erkennt, daß derselbe just 1 sey. Von 100 aber ist der Logarithmus 2,0000000, oder just 2, woraus zu sehen daß von den Zahlen zwischen 10 und 100, oder welche mit zwey Ziffern geschrieben werden, die Logarithmen zwischen 1 und 2 enthalten seyn müßen, und folglich durch 1 und einen Decimal-Bruch ausgedrückt werden. Also ist $l\,50 = 1{,}6989700$, derselbe ist also 1 und noch über das $\frac{6}{10}+\frac{9}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{9}{10000}+\frac{7}{100000}$. Von den Zahlen aber über hundert bis 1000 enthalten die Logarithmen 2 nebst einem gesetzten Decimal-Bruch; als $l\,800 = 2{,}9030900$. Von 1000 bis 10000 sind die Logarithmen größer als 3. Von 10000 bis 100000 größer als 4 und so fort.

248.

Von den Zahlen unter 10 aber, welche nur mit einer Ziffer geschrieben werden, ist der Logarithmus noch kein Gantzes, und deswegen steht vor dem Comma eine 0. Bey einem jeden Logarithmus sind also zwey Theile zu bemercken. Der erste steht vor dem Comma und zeigt die Gantzen an, wann dergleichen vorhanden; der andre Theil aber zeigt die Decimal-Brüche an, die zu dem Gantzen noch gesetzt werden müßen. Also ist es leicht den ersten oder gantzen Theil des Logarithmus einer jeglichen Zahl anzugeben, weil derselbe 0 ist für alle Zahlen, die nur aus einer Ziffer bestehen. Für die Zahlen die aus 2 Ziffern bestehen, ist derselbe 1. Derselbe ist ferner 2 für diejenige, so aus 3 Ziffern bestehen, und so fort ist derselbe immer um eins kleiner als die Anzahl der Ziffern. Wann man also den Logarithmus von 1766 verlangt, so weiß man schon, daß der erstere oder gantze Theil davon 3 seyn muß.

249.

Umgekehrt also, so bald man den ersten Theil eines Logarithmus ansieht, so weis man aus wie viel Figuren die Zahl selbst bestehen werde, weil die Anzahl der Figuren immer um eins größer ist als der gantze Theil des Logarithmus. Wann man also für eine unbekante Zahl diesen Logarithmus gefunden hätte 6,4771213, so wüßte man so gleich daß dieselbe Zahl aus 7 Figuren bestehe und also größer seyn müße als 1000000. Diese Zahl ist auch würcklich 3000000: dann $l\,3000000 = l\,3 + l\,1000000$. Nun aber ist $l\,3 = 0{,}4771213$ und $l\,1000000 = 6$, welche zwey Logarithmus zusammen addirt geben 6,4771213.

250.

Bei einem jeglichen Logarithmus kommt also die Hauptsach auf den nach dem Comma folgenden Decimal-Bruch an, welcher wann er einmahl bekant ist, für viele Zahlen dienen kann. Um dieses zu zeigen, wollen wir den Logarithmus der Zahl 365 betrachten deßen erster Theil ohnstreitig 2 ist, für den andern Theil aber, nemlich den Decimal-Bruch, wollen wir der Kürze halber den Buchstaben x schreiben, also daß $l\,365 = 2 + x$; hieraus erhalten wir, wann wir immerfort mit 10 multipliciren,

$$l\,3650 = 3 + x;\ l\,36500 = 4 + x;\ l\,365000 = 5 + x.$$

Wir können auch zurück gehen und immer durch 10 dividiren so bekommen wir

$$l\,36{,}5 = 1 + x;\ l\,3{,}65 = 0 + x;\ l\,0{,}365 = -1 + x;\ l\,0{,}0365 = -2 + x;$$
$$l\,0{,}00365 = -3 + x \text{ und so ferner.}$$

251.

Vor alle diese Zahlen nun, welche aus den Ziffern 365 entstehen, sie mögen 0 hinter oder vor sich haben, bleibt einerley Decimal-Bruch in ihren Logarithmus und der Unterscheid befindet sich nur in der gantzen Zahl vor dem Comma, welche wie wir gesehen auch negativ werden kann, wann nemlich die Zahl kleiner als 1 wird. Weil nun die gemeinen Rechner nicht wohl mit den Negativ-Zahlen umgehen können, so wird in diesen Fällen die gantze Zahl der Logarithmen um 10 vermehret, und anstatt 0 vor dem Comma, pflegt man schon 10 zu schreiben, da man dann anstatt -1 bekommt 9; anstatt -2 bekommt man 8; anstatt -3 bekommt man 7, und so fort. Hier muß aber gar nicht aus der Acht gelaßen werden, daß die gantze Zahlen vor dem Comma um 10 zu groß angenommen worden, damit man nicht schließe die Zahl bestehe aus 10 oder 9 oder 8 Figuren, sondern daß die Zahl erst nach dem Comma entweder auf der ersten Stelle, wann 9 vorhanden, oder auf der zweyten Stelle, wann 8 vorhanden, oder gar erst auf der dritten, wann 7 am Anfang des Logarithmus steht, zu schreiben angefangen werden muß. Auf solche Art findet man die Logarithmen der Sinus in den Tabellen vorgestellt.

252.

In den gewöhnlichen Tabellen bestehen die Decimal-Brüche für die Logarithmen in sieben Figuren, wovon also die letzte $\frac{1}{10000000}$ Theile andeutet, und man kann sicher seyn, daß dieselben um kein einziges solches Theilgen von der Wahrheit abweichen, welcher Fehler gemeiniglich nichts zu bedeuten hat. Wollte man aber noch genauer rechnen, so müßten die Logarithmen noch auf mehr als sieben Figuren vorgestellet werden, welches in den großen VLACQischen Tabellen geschieht, allwo die Logarithmen auf zehn Figuren berechnet sind.

253.

Weil der erste Theil eines Logarithmus keine Schwierigkeit hat, so wird derselbe in den Tabellen nicht gesetzt oder angezeigt, sondern man findet daselbst nur die sieben Figuren des Decimal-Bruchs, welche den zweyten Theil ausmachen. In den Englischen Tabellen findet man dieselben für alle Zahlen bis auf 100000 ausgedrückt und wann größere Zahlen noch vorkommen, so sind kleine Täfelgen beygefügt woraus man ersehen kann, wie viel wegen der folgenden Figuren noch zu den Logarithmen addirt werden müße.

254.

Hieraus ist also leicht zu verstehen, wie man aus einem gefundenen Logarithmus hinwiederum die ihm zukommende Zahl aus den Tabellen nehmen soll. Um die Sache beßer zu erläutern, so wollen wir z. E. diese Zahlen 343 und 2401 mit einander multipliciren. Da nun die Logarithmen davon addirt werden müßen, so kommt die Rechnung also zu stehen.

$$\begin{array}{rr} & \left.\begin{array}{r} l343 = 2{,}5352941 \\ l2401 = 3{,}3803922 \end{array}\right\} \text{addirt} \\ \hline & \left.\begin{array}{r} 5{,}9156863 \\ 6847 \end{array}\right\} \text{subtrahirt} \\ \hline \text{Giebt allso } 823543. & 16 \end{array}$$

Diese Summa ist nun der Logarithmus des gesuchten Products, und aus desselben ersten Theil 5 erkennen wir, daß das Product aus 6 Figuren bestehe, welche aus dem Decimal-Bruch vermittelst der Tabelle gefunden worden 823543, und dieses ist würcklich das gesuchte Product.

255.

Da bey Ausziehung der Wurzeln die Logarithmen besonders einen wichtigen Vortheil leisten, so wollen wir auch dieses mit einem Exempel erläutern. Es soll aus der Zahl 10 die Quadrat-Wurzel gefunden werden. Da hat man also nur nöthig den Logarithmus von 10 welcher ist 1,0000000 durch 2 zu dividiren, so wird der Quotus 0,5000000 der Logarithmus der gesuchten Wurzel seyn. Dahero die Wurzel selbst aus den Tabellen gefunden wird 3,16228 wovon auch würcklich das Quadrat nur um $\frac{1}{100000}$ Theilichen größer ist als 10.

ENDE DES ERSTEN ABSCHNITTS

DES ERSTEN THEILS ZWEYTER ABSCHNITT

VON DEN VERSCHIEDENEN RECHNUNGS-ARTEN MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

CAPITEL 1

VON DER ADDITION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

256.

Wann zwey oder mehr Formeln, welche aus viel Gliedern bestehen zusammen addirt werden sollen, so pflegt die Addition zuweilen nur durch gewiße Zeichen angedeutet zu werden, indem man eine jede Formel in Klammern einschließt und dieselben mit dem Zeichen $+$ verbindet. Also wann diese Formel $a+b+c$ und $d+e+f$ zusammen addirt werden sollen, so wird die Summa also angezeigt:

$$(a+b+c)+(d+e+f).$$

257.

Solcher gestalt wird die Addition nur angedeutet nicht aber vollzogen. Es ist aber leicht einzusehen, daß um dieselbe zu vollziehen man nur nöthig habe die Klammern wegzulaßen: dann da die Zahl $d+e+f$ zur ersten addirt werden soll, so geschieht solches wann man erstlich $+d$ hernach $+e$ und endlich $+f$ hinzuschreibt, da dann die Summa seyn wird:

$$a+b+c+d+e+f.$$

Eben dieses würde auch zu beobachten seyn, wann einige Glieder das Zeichen $-$ hätten, als welche so dann gleichfals mit ihrem Zeichen hinzu geschrieben werden müßten.

258.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir ein Exempel in puren Zahlen betrachten, und zu der Formel $12 - 8$ noch diese $15 - 6$ addiren.

Man addire also erstlich 15, so hat man $12 - 8 + 15$; man hat aber zu viel addirt, weil man nur $15 - 6$ addiren sollte, und es ist klar daß man 6 zu viel addiret habe; man nehme also diese 6 wieder weg oder schreibe sie mit ihrem Zeichen dazu, so hat man die wahre Summa

$$12 - 8 + 15 - 6.$$

Woraus erhellet, daß die Summa gefunden wird, wann man alle Glieder, ein jedes mit seinem Zeichen, zusammen schreibt.

259.

Wann demnach zu dieser Formel $a - b + c$ noch diese $d - e - f$ addirt werden soll, so wird die Summa folgender Gestalt ausgedrückt

$$a - b + c + d - e - f.$$

Wobey wohl zu bemercken, daß es hier gar nicht auf die Ordnung der Glieder ankomme, sondern dieselben nach Belieben unter einander versetzt werden können, wann nur ein jedes sein ihm vorgesetztes Zeichen behält. Also könnte die obige Summa auch also geschrieben werden:

$$c - e + a - f + d - b.$$

260.

Folglich hat die Addition nicht die geringste Schwierigkeit, wie auch immer die Glieder aussehen mögen. Also wann zu dieser Formel $2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc$ noch diese $5\sqrt[5]{a} - 7c$ addirt werden sollte, so würde die Summa seyn:

$$2a^3 + 6\sqrt{b} - 4lc + 5\sqrt[5]{a} - 7c,$$

woraus erhellet daß dieses die Summa sey, und es auch erlaubt ist diese Glieder nach Belieben unter einander zu versetzen, wann nur ein jedes sein Zeichen behält.

261.

Ofters trägt es sich aber zu, daß die solchergestalt gefundene Summa weit kürtzer zusammen gezogen werden kann, indem zuweilen zwey oder mehr Glieder sich gäntzlich aufheben. Als wann in der Summa diese Glieder $+a-a$, oder solche $3a-4a+a$ vorkämen. Auch können bisweilen zwey oder mehrere Glieder in einem gebracht werden, wie z. E.

$$3a+2a=5a,\ 7b-3b=+4b,\ -6c+10c=+4c$$
$$5a-8a=-3a,\ -7b+b=-6b,\ -3c-4c=-7c$$
$$2a-5a+a=-2a,\ -3b-5b+2b=-6b.$$

Diese Abkürzung findet also statt, so oft zwey oder mehr Glieder in Ansehung der Buchstaben völlig einerley sind. Hingegen $2aa+3a$ läßt sich nicht zusammen ziehen und $2b^3-b^4$ läßt sich auch nicht abkürtzen.

262.

Wir wollen also einige Exempel von dieser Art betrachten. Erstlich sollen diese zwey Formeln addirt werden $a+b$ und $a-b$, da dann nach obiger Regel herauskommt $a+b+a-b$, nun aber ist $a+a=2a$ und $b-b=0$, folglich ist die Summa $=2a$; welches Exempel folgende sehr nützliche Wahrheit anzeiget:

Wann zu der Summa zweyer Zahlen $(a+b)$ ihre Differenz $(a-b)$ addirt wird, so kommt die größere Zahl doppelt heraus.

Man betrachte noch folgende Exempel:

$$\begin{array}{r|r} 3a-2b-c & a^3-2aab+2abb \\ 5b-6c+a & -\ aab+2abb-b^3 \\ \hline 4a+3b-7c & a^3-3aab+4abb-b^3. \end{array}$$

CAPITEL 2

VON DER SUBTRACTION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

263.

Wann man die Subtraction nur andeuten will, so schließt man eine jede Formel in Klammern ein, und diejenige welche abgezogen werden soll wird mit Vorsetzung des Zeichen $-$ an diejenige angehänget von welcher sie abgezogen werden soll. Also wann von dieser Formel $a-b+c$ diese $d-e+f$

abgezogen werden soll, so wird der gesuchte Rest also angedeutet

$$(a - b + c) - (d - e + f)$$

als woraus deutlich zu ersehen, daß die letztere Formel von der ersten abgezogen werden soll.

264.

Um aber die Subtraction würcklich zu vollziehen, so ist vor das erste zu mercken, daß wenn von einer Größe als a eine andre positive Größe als $+b$ abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a - b$.

Wann aber eine negative Zahl als $-b$ von a abgezogen werden soll, so wird man bekommen $a + b$, weil eine Schuld wegnehmen, eben so viel ist als etwas schencken.

265.

Laßt uns nun setzen, man soll von dieser Formel $a - c$, diese $b - d$ subtrahiren; so nehme man erstlich b weg, da bekommt man $a - c - b$; wir haben aber zu viel weggenommen, dann wir sollten nur $b - d$ wegnehmen, und das um d zu viel: wir müßen also dieses d wieder hinzusetzen, da wir dann erhalten

$$a - c - b + d;$$

woraus sich diese Regel offenbahr ergiebt, daß die Glieder derjenigen Formel, welche subtrahirt werden sollen mit verkehrten Zeichen hinzugeschrieben werden müßen.

266.

Durch Hülfe dieser Regel ist es also gantz leicht die Subtraction zu verrichten, indem die Formel von welcher subtrahirt werden soll, ordentlich hingeschrieben, diejenige Formel aber, welche subtrahirt werden soll, mit verkehrten oder verwechselten Zeichen angehänget wird. Also im ersten Exempel da von $a - b + c$ diese Formel $d - e + f$ abgezogen werden soll, so bekommt man:

$$a - b + c - d + e - f.$$

Um dieses mit puren Zahlen zu erläutern, so subtrahire man von $9 - 3 + 2$, diese Formel $6 - 2 + 4$, da bekömmt man

$$9 - 3 + 2 - 6 + 2 - 4 = 0,$$

welches auch so gleich in die Augen fällt; dann

$$9 - 3 + 2 = 8,\ 6 - 2 + 4 = 8,\ \text{und}\ 8 - 8 = 0.$$

267.

Da nun die Subtraction selbst weiter keine Schwierigkeit hat, so ist nur noch übrig zu bemercken, daß wann in dem gefundenen Rest zwey oder mehr Glieder vorkommen, welche in Ansehung der Buchstaben einerley sind, die Abkürtzung nach eben denselben Regeln vorgenommen werden könne, welche oben bey der Addition gegeben worden.

268.

Es soll von $a+b$, wodurch die Summa zweyer Zahlen angedeutet wird, ihre Differenz $a-b$ subtrahirt werden, so bekommt man erstlich $a+b-a+b$; nun aber ist $a-a=0$ und $b+b=2b$, folglich ist der gesuchte Rest $2b$, das ist die kleinere Zahl b doppelt genommen.

269.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch einige Exempel beyfügen:

$aa+ab+bb$	$3a-4b+5c$	$a^3+3aab+3abb+b^3$	$\sqrt{a}+2\sqrt{b}$
$bb-ab+aa$	$2b+4c-6a$	$a^3-3aab+3abb-b^3$	$\sqrt{a}-3\sqrt{b}$
$2ab$	$9a-6b+c$	$6aab+2b^3$	$+5\sqrt{b}$

CAPITEL 3

VON DER MULTIPLICATION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

270.

Wann eine solche Multiplication nur soll angezeigt werden, so wird eine jede von den Formeln, welche mit einander multipliciret werden sollen in Klammern eingeschloßen, und entweder ohne Zeichen oder mit einem dazwischen gesetzten Punckt an einander gehängt.

Also wann diese beyde Formeln $a-b+c$ und $d-e+f$ mit einander multiplicirt werden sollen, so wird das Product solcher Gestalt angezeiget:

$$(a-b+c)\cdot(d-e+f) \quad \text{oder} \quad (a-b+c)(d-e+f).$$

Diese Art wird sehr häuffig gebraucht, weil man daraus so gleich sieht, aus was für Factoren ein solches Product zusammen gesetzt ist.

271.

Um aber zu zeigen wie eine solche Multiplication würcklich angestellt werden müße, so ist erstlich zu mercken, daß wann eine solche Formel $a - b + c$ z. E. mit 2 multiplicirt werden soll, ein jedes Glied derselben besonders mit 2 multiplicirt werden müße, und also herauskomme

$$2a - 2b + 2c.$$

Eben dieses gilt auch von allen andern Zahlen. Wann also dieselbe Formel mit d multiplicirt werden soll so bekommt man:

$$ad - bd + cd.$$

272.

Hier haben wir vorausgesetzt, daß die Zahl d positiv sey; wann aber mit einer Negativ-Zahl als $-e$ multiplicirt werden soll, so ist die oben gegebene Regel zu beobachten, daß nemlich zwey ungleiche Zeichen multiplicirt $-$, zwey gleiche aber $+$ geben. Dahero bekommt man:

$$-ae + be - ce.$$

273.

Um nun zu zeigen wie eine Formel, sie mag einfach oder zusammengesetzt seyn, als A, durch eine zusammengesetzte als $d - e$ multiplicirt werden soll, so wollen wir erstlich pure Zahlen betrachten, und annehmen, daß A mit $7 - 3$ multiplicirt werden soll. Hier ist nun klar, daß man das vierfache von A verlange: nimmt man nun erstlich das siebenfache, so muß man hernach das dreyfache davon subtrahiren. Also auch überhaupt wann man mit $d - e$ multiplicirt, so multiplicirt man die Formel A erstlich mit d und hernach mit e und subtrahirt das letztere Product von dem ersteren, also daß herauskommt $dA - eA$. Laßt uns nun setzen $A = a - b$ welches mit $d - e$ multiplicirt werden soll, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} dA = ad - bd \\ \underline{eA = ae \; - be \qquad\qquad} \\ \qquad\quad ad - bd - ae + be \end{array}$$

welches das verlangte Product ist.

274.

Da wir nun das Product $(a-b)\cdot(d-e)$ gefunden haben, und von der Richtigkeit desselben überzeugt sind, so wollen wir dieses Multiplications-Exempel folgender Gestalt deutlicher vor Augen stellen:

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{d-e} \\ \hline ad-bd-ae+be \end{array}$$

woraus wir sehen, daß ein jedes Glied der obern Formel mit einem jeglichen der untern multiplicirt werden müße, und daß wegen der Zeichen die obengegebene Regul gäntzlich Statt habe, und hierdurch von neuem bestätiget werde, wann etwann jemand noch irgend einen Zweifel darüber gehabt hätte.

275.

Nach dieser Regul wird es also leicht seyn folgendes Exempel auszurechnen: $a+b$ soll multiplicirt werden mit $a-b$:

$$\begin{array}{ll} a+b & \\ a-b & \\ \hline aa+ab & \\ \quad\; -ab & -bb \\ \hline aa & -bb. \end{array}$$

das Product wird seyn $aa-bb$.

276.

Wann also für a und b nach Belieben bestimmte Zahlen gesetzt werden, so leitet uns dieses Exempel auf folgende Wahrheit: Wann die Summa zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt wird, so ist das Product die Differenz ihrer Quadraten, welches also kann vorgestellt werden:

$$(a+b)(a-b)=aa-bb;$$

folglich ist hinwiederum die Differenz zwischen zwey Quadrat-Zahlen immer ein Product, oder sie läßt sich theilen, so wohl durch die Summe als durch die Differenz der Wurzeln, und ist also keine Prim-Zahl.[1])

1) Vorausgesetzt natürlich, daß $a-b$ nicht gleich 1 sei. H. W.

277.

Laßt uns noch ferner folgende Exempel ausrechnen:

I.)
$$\begin{array}{r} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2aa - 3a \\ + 4a - 6 \\ \hline 2aa + a - 6 \end{array}$$

II.)
$$\begin{array}{l} 4aa - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8a^3 - 12aa + 18a \\ \quad + 12aa - 18a + 27 \\ \hline 8a^3 + 27 \end{array}$$

III.)
$$\begin{array}{l} 3aa - 2ab - bb \\ 2a - 4b \\ \hline 6a^3 - 4aab - 2abb \\ \quad - 12aab + 8abb + 4b^3 \\ \hline 6a^3 - 16aab + 6abb + 4b^3 \end{array}$$

IV.)
$$\begin{array}{l} aa + 2ab + 2bb \\ aa - 2ab + 2bb \\ \hline a^4 + 2a^3b + 2aabb \\ \quad - 2a^3b - 4aabb - 4ab^3 \\ \qquad + 2aabb + 4ab^3 + 4b^4 \\ \hline a^4 + 4b^4 \end{array}$$

V.)
$$\begin{array}{l} 2aa - 3ab - 4bb \\ 3aa - 2ab + bb \\ \hline 6a^4 - 9a^3b - 12aabb \\ \quad - 4a^3b + 6aabb + 8ab^3 \\ \qquad + 2aabb - 3ab^3 - 4b^4 \\ \hline 6a^4 - 13a^3b - 4aabb + 5ab^3 - 4b^4 \end{array}$$

VI.)
$$\begin{array}{l} aa + bb + cc - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline a^3 + abb + acc - aab - aac - abc \\ \quad - abb + aab - abc + b^3 + bcc - bbc \\ \qquad - acc + aac - abc - bcc + bbc + c^3 \\ \hline a^3 - 3abc + b^3 + c^3 \end{array}$$

278.

Wann mehr als zwey Formeln mit einander multiplicirt werden sollen, so begreift man leicht daß nachdem man zwey davon mit einander multiplicirt, das Product nach und nach auch durch die übrigen multiplicirt werden müße, und daß es gleich viel sey, was man für eine Ordnung darin beobachtet. Es soll z. E. folgendes Product, so aus vier Factores besteht, gefunden werden:

$$\begin{array}{cccc} \text{I.} & \text{II.} & \text{III.} & \text{IV.} \\ (a + b) & (aa + ab + bb) & (a - b) & (aa - ab + bb) \end{array}$$

so multiplicirt man erstlich den I. und II. Factor:

$$\begin{array}{rl}
\text{II.} & aa + ab + bb \\
\text{I.} & a + b \\
\hline
& a^3 + aab \;\; + abb \\
& \quad\;\; + aab \;\; + abb \;\; + b^3 \\
\hline
\text{I. II.} & a^3 + 2aab + 2abb + b^3
\end{array}$$

Hernach multiplicirt man den III. und IV. Factor:

$$\begin{array}{rl}
\text{IV.} & aa - ab + bb \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
& a^3 - aab \;\; + abb \\
& \quad\;\; - aab \;\; + abb \;\; - b^3 \\
\hline
\text{III. IV.} & a^3 - 2aab + 2abb - b^3
\end{array}$$

Nun ist also noch übrig jenes Product I. II. mit diesem III. IV. zu multipliciren,

$$\begin{array}{rl}
\text{I. II.} & = a^3 + 2aab + 2abb \;\; + b^3 \\
\text{III. IV.} & = a^3 - 2aab + 2abb \;\; - b^3 \\
\hline
& a^6 + 2a^5b + 2a^4bb + a^3b^3 \\
& \quad - 2a^5b - 4a^4bb - 4a^3b^3 - 2aab^4 \\
& \quad\quad + 2a^4bb + 4a^3b^3 + 4aab^4 + 2ab^5 \\
& \quad\quad\quad - a^3b^3 - 2aab^4 - 2ab^5 - b^6 \\
\hline
& a^6 - b^6
\end{array}$$

dieses ist nun das gesuchte Product.

279.

Laßt uns nun bey eben diesem Exempel die Ordnung verändern und erstlich die I. Formel mit der III. und so dann die II. mit der IV. multipliciren

$$\begin{array}{rl}
\text{I.} & a + b \\
\text{III.} & a - b \\
\hline
& aa + ab \\
& \quad\;\; - ab - bb \\
\hline
\text{I. III.} & = aa - bb
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\text{II.} & aa + ab \;\; + bb \\
\text{IV.} & aa - ab \;\; + bb \\
\hline
& a^4 + a^3b + aabb \\
& \quad - a^3b - aabb - ab^3 \\
& \quad\quad + aabb + ab^3 + b^4 \\
\hline
\text{II. IV.} & = a^4 + aabb + b^4
\end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product II. IV. mit dem I. III. zu multipliciren:

$$\begin{array}{rl} \text{II. IV.} & = a^4 + aabb + b^4 \\ \text{I. III.} & = aa - bb \\ \hline & a^6 + a^4bb + aab^4 \\ & \quad - a^4bb - aab^4 - b^6 \\ \hline & a^6 - b^6 \end{array}$$

welches das gesuchte Product ist.

280.

Wir wollen die Rechnung noch nach einer andern Ordnung anstellen und erstlich die I. Formel mit der IV. und hernach die II. mit der III. multipliciren:

$$\begin{array}{rl} \text{IV.} & aa - ab + bb \\ \text{I.} & a + b \\ \hline & a^3 - aab + abb \\ & \quad + aab - abb + b^3 \\ \hline \text{I. IV.} & = a^3 + b^3 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \text{II.} & aa + ab + bb \\ \text{III.} & a - b \\ \hline & a^3 + aab + abb \\ & \quad - aab - abb - b^3 \\ \hline \text{II. III.} & = a^3 - b^3 \end{array}$$

Nun ist noch übrig das Product I. IV. mit II. III. zu multipliciren

$$\begin{array}{rl} \text{I. IV.} & = a^3 + b^3 \\ \text{II. III.} & = a^3 - b^3 \\ \hline & a^6 + a^3b^3 \\ & \quad - a^3b^3 - b^6 \\ \hline & a^6 - b^6 \end{array}$$

281.

Es ist der Mühe werth dieses Exempel mit Zahlen zu erläutern. Es sey daher $a = 3$ und $b = 2$; so hat man $a + b = 5$ und $a - b = 1$; ferner $aa = 9$, $ab = 6$, $bb = 4$. Also ist $aa + ab + bb = 19$ und $aa - ab + bb = 7$. Folglich wird dieses Product verlangt:

$$5 \cdot 19 \cdot 1 \cdot 7, \text{ welches ist } 665.$$

Es ist aber $a^6 = 729$ und $b^6 = 64$, folglich $a^6 - b^6 = 665$, wie wir schon gesehen haben.

CAPITEL 4

VON DER DIVISION MIT ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

282.

Wann man die Division nur anzeigen will, so bedient man sich entweder des gewöhnlichen Zeichens eines Bruchs, indem man das Dividend über die Linie und den Divisor unter die Linie schreibt; oder man schließt beyde in Klammern ein, und schreibt den Divisor nach dem Dividend mit darzwischen gesetzten zwey Punckten. Also wann $a+b$ durch $c+d$ getheilt werden soll, so wird der Quotient nach der ersten Art also angezeigt $\frac{a+b}{c+d}$.

Nach der andern Art aber also $(a+b):(c+d)$; Beydes wird ausgesprochen $a+b$ getheilt durch $c+d$.

283.

Wann eine zusammengesetzte Formel durch eine einfache getheilt werden soll, so wird ein jedes Glied besonders getheilt, z. E.

$$6a - 8b + 4c \text{ durch } 2 \text{ getheilt, giebt } 3a - 4b + 2c$$

und $$(aa - 2ab):(a) = a - 2b.$$

Eben so $$(a^3 - 2aab + 3abb):(a) = aa - 2ab + 3bb,$$

ferner $$(4aab - 6aac + 8abc):(2a) = 2ab - 3ac + 4bc,$$

und $$(9aabc - 12abbc + 15abcc):(3abc) = 3a - 4b + 5c \text{ etc.}$$

284.

Wann sich etwan ein Glied des Dividends nicht theilen laßt, so wird der daher entstehende Quotient durch einen Bruch angezeigt. Also wann $a+b$ durch a getheilt werden soll, so bekommt man zum Quotient $1+\frac{b}{a}$.

Ferner $$(aa - ab + bb):(aa) = 1 - \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}.$$

Wann weiter $(2a+b)$ durch 2 getheilt werden soll, so bekommt man $a+\frac{b}{2}$; wobey zu mercken, daß anstatt $\frac{b}{2}$ auch geschrieben werden kann $\frac{1}{2}b$, weil $\frac{1}{2}$ mal b so viel ist als $\frac{b}{2}$. Eben so ist $\frac{b}{3}$ so viel als $\frac{1}{3}b$ und $\frac{2b}{3}$ so viel als $\frac{2}{3}b$ etc.

285.

Wann aber der Divisor selbst eine zusammen gesetzte Größe ist, so hat die Division mehr Schwierigkeit, weil dieselbe öfters würcklich geschehen kann wo es nicht zu vermuthen scheint; dann wann die Division nicht angeht so muß man sich begnügen den Quotienten wie oben gemeldet durch einen Bruch anzudeuten; wir wollen daher hier nur solche Fälle betrachten wo die Division würcklich angeht.

286.

Es soll demnach das Dividend $ac - bc$ durch den Divisor $a - b$ getheilt werden: der Quotient muß demnach also beschaffen seyn, daß wann der Divisor $a - b$ damit multiplicirt wird, das Dividend $ac - bc$ herauskomme. Man sieht nun leicht, daß in dem Quotus c stehen muß, weil sonsten nicht ac herauskommen könnte. Um nun zu sehen ob c der völlige Quotus ist, so darf man nur den Divisor damit multipliciren und sehen ob das gantze Dividend herauskomme oder nur ein Theil deßelben? In unserm Fall aber wann $a - b$ mit c multiplicirt wird, so bekommen wir $ac - bc$, welches das Dividend selbsten ist: folglich ist c der völlige Quotus. Eben so ist klar daß

$$(aa + ab) : (a + b) = a,$$

und

$$(3aa - 2ab) : (3a - 2b) = a,$$

ferner

$$(6aa - 9ab) : (2a - 3b) = 3a.$$

287.

Auf solche Art findet man gewis einen Theil des Quotienten. Dann wann derselbe mit dem Divisor multiplicirt noch nicht das Dividend erschöpft so muß man das übrige gleichfals noch durch den Divisor theilen, da man dann wiederum einen Theil des Quotienten herausbringt. Solchergestallt verfährt man bis man den gantzen Quotient erhalte.

Wir wollen z. E. $aa + 3ab + 2bb$ durch $a + b$ theilen; da ist nun so gleich klar daß der Quotient das Glied a enthalten müße, weil sonsten nicht aa herauskommen könnte. Wann aber der Divisor $a + b$ mit a multiplicirt wird, so kommt $aa + ab$, welches vom Dividend abgezogen $2ab + 2bb$ nachläßt, welches also noch durch $a + b$ getheilt werden muß, wo sogleich in die Augen fällt, daß im Quotient $2b$ stehen müsse. Nun aber $2b$ mit $a + b$ multiplicirt, giebt just $2ab + 2bb$; folglich ist der gesuchte Quotient $a + 2b$, welcher mit dem Divisor $a + b$ multiplicirt das Dividend giebt. Diese gantze Operation wird folgender Gestalt vorgestellt

$$\begin{array}{lll} a+b) & aa+3ab+2bb & (a+2b \\ & \underline{aa+\ \ ab\qquad\quad} & \\ & \quad +2ab+2bb & \\ & \quad \underline{+2ab+2bb} & \\ & \qquad\quad 0 & \end{array}$$

288.

Um diese Operation zu erleichtern, so erwählt man einen Theil des Divisors, als wie hier geschehen, a, welchen man zuerst schreibt und nach diesem Buchstaben schreibt man auch das Dividend in solcher Ordnung, daß die höchsten Potestäten von eben demselben Buchstaben a zuerst gesetzt werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{lll} a-b) & a^3-3aab+3abb-b^3 & (aa-2ab+bb \\ & \underline{a^3-\ \ aab\qquad\qquad\quad} & \\ & -2aab+3abb & \\ & \underline{-2aab+2abb\qquad} & \\ & \qquad\quad +\ abb-b^3 & \\ & \qquad\quad \underline{+\ abb-b^3} & \\ & \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a+b) & aa-bb & (a-b \\ & \underline{aa+ab} & \\ & -ab-bb & \\ & \underline{-ab-bb} & \\ & \quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 3a-2b) & 18aa-\ \ 8bb & (6a+4b \\ & \underline{18aa-12ab\qquad} & \\ & \quad +12ab-8bb & \\ & \quad \underline{+12ab-8bb} & \\ & \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} a+b) & a^3+b^3 & (aa-ab+bb \\ & \underline{a^3+aab\qquad} & \\ & -aab+b^3 & \\ & \underline{-aab-abb\qquad} & \\ & \qquad +abb+b^3 & \\ & \qquad \underline{+abb+b^3} & \\ & \qquad\qquad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} 2a-b) & 8a^3-b^3 & (4aa+2ab+bb \\ & \underline{8a^3-4aab\qquad} & \\ & \quad +4aab-b^3 & \\ & \quad \underline{+4aab-2abb\qquad} & \\ & \qquad\qquad +2abb-b^3 & \\ & \qquad\qquad \underline{+2abb-b^3} & \\ & \qquad\qquad\qquad 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa-2ab+bb)\ a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4\ (aa-2ab+bb \\
\qquad\qquad\qquad\ \underline{a^4-2a^3b+\ aabb} \\
\qquad\qquad\qquad\quad -2a^3b+5aabb-4ab^3 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-2a^3b+4aabb-2ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\ aabb-2ab^3+b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+\ aabb-2ab^3+b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa-2ab+4bb)\ a^4+4aabb+16b^4\ (aa+2ab+4bb \\
\qquad\qquad\qquad\ \underline{a^4-2a^3b\ \ +4aabb} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +2a^3b\ \ +16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+2a^3b\ \ -4aabb+8ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +4aabb-8ab^3+16b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+4aabb-8ab^3+16b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
aa-2ab+2bb)\ a^4+4b^4\ (aa+2ab+2bb \\
\qquad\qquad\qquad\ \underline{a^4-2a^3b+2aabb} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +2a^3b-2aabb+4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+2a^3b-4aabb+4ab^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +2aabb-4ab^3+4b^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{+2aabb-4ab^3+4b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
1-2x+xx)\ 1-5x+10xx-10x^3+5x^4-x^5\ (1-3x+3xx-x^3 \\
\qquad\qquad\quad\ \underline{1-2x+xx} \\
\qquad\qquad\quad\ -3x+9xx\ \ -10x^3 \\
\qquad\qquad\quad\ \underline{-3x+6xx\ \ -3x^3} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +3xx\ \ -7x^3+5x^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+3xx\ \ -6x^3+3x^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad -x^3\ \ +2x^4-x^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-x^3\ \ +2x^4-x^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

CAPITEL 5

VON DER AUFLÖSSUNG DER BRÜCHE IN UNENDLICHEN REIHEN

289.

Wann sich das Dividend durch den Divisor nicht theilen läßt, so wird der Quotient, wie schon oben gezeigt, durch einen Bruch ausgedrückt.

Also wann 1 durch $1-a$ getheilt werden soll, so bekommt man diesen Bruch $\frac{1}{1-a}$. Inzwischen kann doch die Division nach den vorhergehenden Reguln angestellt und so weit man will fortgesetzt werden, da dann immer der wahre Quotus, ob gleich in verschiedenen Formen, herauskommen muß

290.

Um dieses zu zeigen so laßt uns das Dividend 1 würcklich durch den Divisor $1-a$ theilen wie folget:

$$\begin{array}{lll} 1-a) & 1 & (1+\frac{a}{1-a} \\ & \underline{+1-a} & \\ & \text{Rest } +a & \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & 1 & (1+a+\frac{aa}{1-a} \\ & \underline{+1-a} & \\ & +a & \\ & \underline{+a-aa} & \\ & \text{Rest } +aa & \end{array}$$

Um noch mehr Formen zu finden, so theile man aa durch $1-a$ als

$$\begin{array}{lll} 1-a) & aa & (aa+\frac{a^3}{1-a} \\ & \underline{aa-a^3} & \\ & +a^3 & \end{array} \qquad \text{ferner} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & a^3 & (a^3+\frac{a^4}{1-a} \\ & \underline{a^3-a^4} & \\ & +a^4 & \end{array}$$

$$\text{ferner} \qquad \begin{array}{lll} 1-a) & a^4 & (a^4+\frac{a^5}{1-a} \\ & \underline{a^4-a^5} & \\ & +a^5 \text{ etc.} & \end{array}$$

291.

Hieraus ersehen wir, daß der Bruch $\frac{1}{1-a}$ durch alle folgende Formen ausgedruckt werden kann

$$\text{I.)}\ 1+\frac{a}{1-a},\quad \text{II.)}\ 1+a+\frac{aa}{1-a},\quad \text{III.)}\ 1+a+aa+\frac{a^3}{1-a},$$

$$\text{IV.)}\ 1+a+aa+a^3+\frac{a^4}{1-a},\quad \text{V.)}\ 1+a+aa+a^3+a^4+\frac{a^5}{1-a}\ \text{etc.}$$

Man betrachte die erste Form $1+\frac{a}{1-a}$. Nun ist 1, so viel als $\frac{1-a}{1-a}$: folglich $1+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a}{1-a}+\frac{a}{1-a}=\frac{1-a+a}{1-a}=\frac{1}{1-a}$.

Für die zweyte Form $1+a+\frac{aa}{1-a}$ bringe man den gantzen Theil $1+a$ auch zum Nenner $1-a$, so bekommt man $\frac{1-aa}{1-a}$, darzu $\frac{+aa}{1-a}$ giebt $\frac{1-aa+aa}{1-a}$, das ist $\frac{1}{1-a}$. Für die dritte Form $1+a+aa+\frac{a^3}{1-a}$, giebt der gantze Theil zum Nenner $1-a$ gebracht $\frac{1-a^3}{1-a}$, darzu der Bruch $\frac{a^3}{1-a}$ macht $\frac{1}{1-a}$; woraus erhellet, daß alle diese Formen in der That so viel sind als der vorgegebene Bruch $\frac{1}{1-a}$.

292.

Man kann daher solcher Gestalt so weit fortgehen als man will, ohne daß man weiter nöthig habe zu rechnen. Also wird seyn

$$\frac{1}{1-a}=1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+\frac{a^8}{1-a}.$$

Man kann auch so gar immer weiter fortgehen, ohne jemals aufzuhören, und dadurch wird der vorgelegte Bruch $\frac{1}{1-a}$ in eine unendliche Reihe aufgelößt, welche ist:

$$1+a+aa+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+a^8+a^9+a^{10}+a^{11}+a^{12}\ \text{etc.}$$

ins unendliche. Und von dieser unendlichen Reihe kann man mit recht behaupten, daß ihr Werth eben so viel sey, als der Bruch $\frac{1}{1-a}$.

293.

Dieses scheinet anfänglich sehr wunderbar; jedoch wird es durch die Betrachtung einiger Fälle begreiflich werden: Es sey erstlich $a=1$, so wird unsere Reihe $1+1+1+1+1+1+1+1+1$ etc. bis ins unendliche, welche dem Bruch $\frac{1}{1-1}$, das ist $\frac{1}{0}$, gleich seyn soll. Wir haben aber schon oben bemercket, daß $\frac{1}{0}$ eine unendlich große Zahl sey, und dieses wird hier von neuem auf das schönste bestätiget.

Wann man aber setzt $a = 2$ so wird unsere Reihe

$$= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 \text{ etc.}$$

bis ins unendliche, deren Werth seyn soll $\frac{1}{1-2}$, das ist $\frac{1}{-1} = -1$; welches dem ersten Anblick nach ungereimt scheint.

Es ist aber zu mercken, daß wann man irgendwo in obiger Reihe will stehen bleiben, darzu allezeit noch ein Bruch gesetzt werden muß.

Also wann wir z. E. bey 64 still stehen, so müßen wir zu

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$$

noch diesen Bruch $\frac{128}{1-2}$, das ist $\frac{128}{-1} = -128$ hinzusetzen, woraus entsteht $127 - 128$, das ist -1.

Geht man aber ohne Ende fort, so fällt der Bruch zwar weg, man stehet aber hingegen auch niemals still.[1])

294.

Dieses ist demnach zu beobachten, wann für a größere Zahlen als 1 angenommen werden. Nimmt man aber für a kleinere Zahlen, so läßt sich alles leichter begreifen.

Es sey z. E. $a = \frac{1}{2}$ so bekommt man $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, welches folgender Reihe gleich seyn wird:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Dann nimmt man nur zwey Glieder so hat man $1 + \frac{1}{2}$, und so fehlt noch $\frac{1}{2}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{3}{4}$, fehlt noch $\frac{1}{4}$; nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{7}{8}$, fehlt noch $\frac{1}{8}$: woraus man sieht, daß immer weniger fehlt, folglich wann man unendlich weit fortgeht, so muß gar nichts fehlen.

295.

Man setze $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$, welchem dahero folgende Reihe gleich ist $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$ etc. bis ins unendliche. Nimmt man zwey Glieder so hat man $1\frac{1}{3}$, fehlt noch $\frac{1}{6}$. Nimmt

1) Auf die Frage der Konvergenz nimmt EULER hier und im folgenden keinerlei Rücksicht, wodurch er denn zu solch paradoxen Resultaten kommt. H. W.

man drey Glieder so hat man $1\frac{4}{9}$ fehlt noch $\frac{1}{18}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $1\frac{13}{27}$, fehlt noch $\frac{1}{54}$. Da nun der Fehler immer dreymal kleiner wird, so muß derselbe endlich verschwinden.

296.

Laßt uns setzen $a = \frac{2}{3}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$, die Reihe aber wird: $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \frac{32}{243}$ etc. bis ins unendliche. Nimmt man erstlich $1\frac{2}{3}$ so fehlt noch $1\frac{1}{3}$, nimmt man drey Glieder $2\frac{1}{9}$ so fehlt noch $\frac{8}{9}$, nimmt man vier Glieder $2\frac{11}{27}$ so fehlt noch $\frac{16}{27}$.

297.

Es sey $a = \frac{1}{4}$ so wird der Bruch $\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = 1\frac{1}{3}$, die Reihe aber wird $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256}$ etc. Nimmt man zwey Glieder $1\frac{1}{4}$ so fehlt noch $\frac{1}{12}$; nimmt man drey Glieder so hat man $1\frac{5}{16}$ fehlt noch $\frac{1}{48}$ etc.

298.

Auf gleiche Weise kann auch dieser Bruch $\frac{1}{1+a}$ in eine unendliche Reihe aufgelöset werden, wann man den Zehler 1 durch den Nenner $1+a$ würcklich dividirt, wie folget:

$$\begin{array}{rl}
1+a) & 1 \quad (1 - a + aa - a^3 + a^4 \\
 & \underline{1+a} \\
 & -a \\
 & \underline{-a - aa} \\
 & \quad +aa \\
 & \quad \underline{+aa + a^3} \\
 & \qquad -a^3 \\
 & \qquad \underline{-a^3 - a^4} \\
 & \qquad\quad +a^4 \\
 & \qquad\quad \underline{+a^4 + a^5} \\
 & \qquad\qquad -a^5 \text{ etc.}
\end{array}$$

Dahero ist unser Bruch $\frac{1}{1+a}$ gleich dieser unendlichen Reihe:

$$1 - a + aa - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 \text{ etc.}$$

299.

Setzt man $a = 1$ so erhält man diese merckwürdige Vergleichung:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \text{ etc.}$$

bis ins unendliche; welches wiedersinnig scheint: dann wann man irgendwo mit -1 aufhört, so giebt diese Reihe 0; hört man irgend aber mit $+1$ auf, so giebt dieselbe 1. Allein eben hieraus läßt sich die Sache begreiffen, weil wann man ohne End fort gehen und weder bey -1 noch $+1$ irgendwo aufhören muß, so kann weder 1 noch 0 herauskommen sondern etwas darzwischen welches $\frac{1}{2}$ ist.[1])

300.

Es sey ferner $a = \frac{1}{2}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$, welchem folglich gleich seyn wird diese Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{1}{2}$, ist zu wenig um $\frac{1}{6}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{3}{4}$, ist zu viel um $\frac{1}{12}$; nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{5}{8}$, ist zu wenig um $\frac{1}{24}$ etc.

301.

Setzt man $a = \frac{1}{3}$ so wird unser Bruch $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$, welchem folglich diese Reihe wird gleich seyn $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \frac{1}{729}$ etc. ohne Ende. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{2}{3}$, ist zu wenig um $\frac{1}{12}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{7}{9}$, ist zu viel um $\frac{1}{36}$. Nimmt man vier Glieder so hat man $\frac{20}{27}$, ist zu wenig um $\frac{1}{108}$, und so fort.

302.

Man kann den Bruch $\frac{1}{1+a}$ auf noch eine andre Art auflösen, indem man 1 durch $a+1$ theilt, nemlich:

1) Siehe die Anmerkung p. 108. H. W.

$$
\begin{array}{llllll}
a+1) & 1 & \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} \text{ etc.}\right. & & & \\
 & \underline{1 + \frac{1}{a}} & & & & \\
 & - \frac{1}{a} & & & & \\
 & \underline{- \frac{1}{a} - \frac{1}{aa}} & & & & \\
 & & + \frac{1}{aa} & & & \\
 & & \underline{+ \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3}} & & & \\
 & & & - \frac{1}{a^3} & & \\
 & & & \underline{- \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4}} & & \\
 & & & & + \frac{1}{a^4} & \\
 & & & & \underline{+ \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5}} & \\
 & & & & & - \frac{1}{a^5} \text{ etc.}
\end{array}
$$

Folglich ist unser Bruch $\frac{1}{a+1}$ dieser Reihe gleich

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{aa} + \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^5} - \frac{1}{a^6} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Setzt man $a = 1$ so bekommt man diese Reihe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \text{ etc.} = \frac{1}{2} \text{ wie oben.}$$

Setzt man $a = 2$ so bekommt man diese Reihe

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} \text{ etc.}$$

303.

Auf gleiche Weise kann man auf eine allgemeine Art diesen Bruch $\frac{c}{a+b}$ in einer Reihe auflösen,

$$\begin{array}{lll}
a+b) & c & \left(\frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \text{ etc.}\right. \\
 & c + \frac{bc}{a} & \\
\hline
 & -\frac{bc}{a} & \\
 & -\frac{bc}{a} - \frac{bbc}{aa} & \\
\hline
 & \quad + \frac{bbc}{aa} & \\
 & \quad + \frac{bbc}{aa} + \frac{b^3c}{a^3} & \\
\hline
 & \qquad - \frac{b^3c}{a^3} &
\end{array}$$

Woraus wir diese Vergleichung erhalten

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} - \frac{bc}{aa} + \frac{bbc}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} \text{ bis ins unendliche.}$$

Es sey $a = 2$, $b = 4$, und $c = 3$ so haben wir

$$\frac{c}{a+b} = \frac{3}{2+4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 3 + 6 - 12 \text{ etc.}$$

Es sey $a = 10$, $b = 1$ und $c = 11$ so haben wir

$$\frac{c}{a+b} = \frac{11}{10+1} = 1 = \frac{11}{10} - \frac{11}{100} + \frac{11}{1000} - \frac{11}{10000} \text{ etc.}$$

Nimmt man nur ein Glied, so hat man $\frac{11}{10}$ welches zu viel um $\frac{1}{10}$. Nimmt man zwey Glieder so hat man $\frac{99}{100}$, welches zu wenig um $\frac{1}{100}$. Nimmt man drey Glieder so hat man $\frac{1001}{1000}$, ist zu viel um $\frac{1}{1000}$ etc.

304.

Wann der Divisor aus mehr Theilen besteht, so kann die Division gleicher Gestalt ins unendliche fortgesetzt werden.

Als wann dieser Bruch $\frac{1}{1-a+aa}$ vorgegeben wäre, so wird die unendliche Reihe, so demselben gleich ist also gefunden:

$$\begin{array}{lllllllllll}
1-a+aa) & 1 & (1+a-a^3-a^4+a^6+a^7 \text{ etc.} \\
 & \underline{1-a+aa} \\
 & \quad +a-aa \\
 & \quad \underline{+a-aa+a^3} \\
 & \qquad\qquad -a^3 \\
 & \qquad\qquad \underline{-a^3+a^4-a^5} \\
 & \qquad\qquad\qquad -a^4+a^5 \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{-a^4+a^5-a^6} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a^6 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^6-a^7+a^8} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +a^7-a^8 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+a^7-a^8+a^9} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a^9 \text{ etc.}
\end{array}$$

Dahero haben wir diese Vergleichung

$$\frac{1}{1-a+aa} = 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-a^9-a^{10} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Nimmt man hier $a=1$ so bekommt man diese Reihe

$$1 = 1+1-1-1+1+1-1-1+1+1 \text{ etc.}$$

welche Reihe die schon oben gefundene $1-1+1-1+1$ etc. gedoppelt in sich enthält, da nun die obige Reihe dem $\frac{1}{2}$ gleich war, so ist kein Wunder daß diese $\frac{2}{2}$ das ist 1 ausmacht.

Setzt man $a=\frac{1}{2}$ so bekommt man diese Gleichung

$$\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\frac{1}{512} \text{ etc.}$$

Setzt man $a=\frac{1}{3}$ so bekommt man diese Gleichung, als

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} \text{ oder } \frac{9}{7} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}+\frac{1}{729} \text{ etc.}$$

Nimmt man hier vier Glieder so bekommt man $\frac{104}{81}$ welches kleiner ist als $\frac{9}{7}$ um $\frac{1}{567}$.

Man setze ferner $a=\frac{2}{3}$ so bekommt man diese Gleichung

$$\frac{1}{\frac{7}{9}} = \frac{9}{7} = 1+\frac{2}{3}-\frac{8}{27}-\frac{16}{81}+\frac{64}{729} \text{ etc.}$$

welche Reihe der vorigen gleich seyn muß; man subtrahire also die obere von dieser so bekommt man: $0 = \frac{1}{3} - \frac{7}{27} - \frac{15}{81} + \frac{63}{729}$ etc. welche vier Glieder machen $-\frac{2}{81}$.

305.

Solcher gestalt kann man alle Brüche in unendliche Reihen auflößen, welches nicht nur öfters sehr großen Nutzen schaft, sondern auch an sich selbst höchst merckwürdig ist, daß eine unendliche Reihe, ohngeacht dieselbe niemals aufhört, dennoch einen bestimmten Werth haben könne. Es sind auch die wichtigsten Erfindungen aus diesem Grunde hergeleitet worden, dahero diese Materie allerdings verdient mit der größten Aufmercksamkeit in Erwegung gezogen zu werden.[1])

CAPITEL 6

VON DEN QUADRATEN DER ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

306.

Wann das Quadrat von einer zusammengesetzten Größe gefunden werden soll, so darf man dieselbe nur mit sich selbsten multipliciren, und das Product wird das Quadrat davon seyn.

Also wird das Quadrat von $a + b$ gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{l} a + b \\ \underline{a + b} \\ aa + ab \\ \underline{ + ab + bb} \\ aa + 2ab + bb \end{array}$$

307.

Wann dahero die Wurzel aus zwey Theilen besteht, die zusammen addirt sind, als $a + b$, so besteht das Quadrat I. aus den Quadraten eines jeden Theils nemlich aa und bb, II. kommt aber noch hinzu das doppelte Product der beyden Theile nemlich $2ab$, und die gantze Summa $aa + 2ab + bb$ ist das Quadrat von $a + b$.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 3$, also daß das Quadrat von 13 gefunden werden soll; solches wird demnach seyn $= 100 + 60 + 9 = 169$.

---

1) Siehe zu den Entwickelungen dieses ganzen Kapitels die Anmerkung p. 108. H. W.

308.

Durch Hülfe dieser Formel laßen sich nun leicht die Quadraten von ziemlich großen Zahlen finden, wann dieselben in zwey Theile zergliedert werden.

Also um das Quadrat von 57 zu finden so zertheile man diese Zahl in $50 + 7$; daher das Quadrat seyn wird:

$$2500 + 700 + 49 = 3249.$$

309.

Hieraus sieht man, daß das Quadrat von $a + 1$ seyn werde $aa + 2a + 1$; da nun das Quadrat von a ist aa, so wird das Quadrat von $a + 1$ gefunden wann man zu jenem addirt $2a + 1$, wobey zu mercken daß $2a + 1$ die Summa der beyden Wurzeln a und $a + 1$ ist; da also das Quadrat von 10 ist 100 so wird das Quadrat von 11 seyn $= 100 + 21$, und da das Quadrat von 57 ist 3249, so wird das Quadrat von 58 seyn $= 3249 + 115 = 3364$. Und ferner das Quadrat von $59 = 3364 + 117 = 3481$. Noch ferner das Quadrat von $60 = 3481 + 119 = 3600$ etc.

310.

Das Quadrat einer zusammengesetzten Größe, als $a + b$, wird also angedeutet $(a + b)^2$; dahero haben wir $(a + b)^2 = aa + 2ab + bb$, woraus folgende Gleichungen hergeleitet werden:

$$(a + 1)^2 = aa + 2a + 1, \quad (a + 2)^2 = aa + 4a + 4,$$
$$(a + 3)^2 = aa + 6a + 9, \quad (a + 4)^2 = aa + 8a + 16,$$

und so ferner.

311.

Wann die Wurzel ist $a - b$ so wird ihr Quadrat seyn $= aa - 2ab + bb$, welches dahero aus den Quadraten beyder Theile besteht, wovon aber das doppelte Product muß weggenommen werden.

Es sey z. E. $a = 10$ und $b = 1$ so wird das Quadrat von 9 seyn $= 100 - 20 + 1 = 81$.

312.

Da wir nun diese Gleichung haben $(a - b)^2 = aa - 2ab + bb$, so wird seyn $(a - 1)^2 = aa - 2a + 1$; das Quadrat von $a - 1$ wird also gefunden, wann man von aa subtrahirt $2a - 1$, welches die Summa der beyden Wurzeln a und $a - 1$ ist.

Es sey z. E. $a = 50$ so ist $aa = 2500$ und $a - 1 = 49$, dahero

$$49^2 = 2500 - 99 = 2401.$$

313.

Dieses läßt sich auch durch Brüche erläutern, dann wann man vor die Wurzel nimmt $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ (welches 1 ausmacht) so wird das Quadrat seyn:

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{25} + \frac{12}{25} = \frac{25}{25} \text{ das ist } 1.$$

Ferner das Quadrat von $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ (welches $\frac{1}{6}$ ist) wird seyn $\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{36}$.

314.

Wann die Wurzel aus mehr Gliedern besteht, so läßt sich das Quadrat auf gleiche Art bestimmen: Also von $a + b + c$ wird das Quadrat gefunden, wie folget:

$$\begin{array}{llllll}
a + b + c & & & & & \\
a + b + c & & & & & \\
\hline
aa + ab + ac & & & + bc & & \\
\quad\; + ab + ac & & + bb & + bc & + cc & \\
\hline
aa + 2ab + 2ac & & + bb & + 2bc & + cc &
\end{array}$$

woraus man sieht, daß dasselbe erstlich aus dem Quadrat eines jeden Theils der Wurzel und hernach aus dem doppelten Product von je zwey Theilen mit einander besteht.

315.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern so wollen wir die Zahl 256 in diese drey Theile zertheilen $200 + 50 + 6$; dahero das Quadrat davon aus folgenden Theilen zusammengesetzt seyn wird:

$$\begin{array}{rcr}
40000 & & 256 \\
2500 & & 256 \\
\cline{3-3}
36 & & 1536 \\
20000 & & 1280 \\
2400 & & 512 \\
\cline{3-3}
600 & & 65536 \\
\cline{1-1}
65536 & &
\end{array}$$

65536 und dieses ist dem $256 \cdot 256$ offenbahr gleich.

316.

Wann einige Glieder in der Wurzel negativ sind, so wird das Quadrat nach eben dieser Regul gefunden, wann man nur bey den doppelten Producten Achtung giebt was für ein Zeichen einem jeden zukommt. Also von $a - b - c$ wird das Quadrat seyn: $aa + bb + cc - 2ab - 2ac + 2bc$. Wann also die Zahl 256 also vorgestellet wird $300 - 40 - 4$, so bekömmt man:

Positive Theile	Negative Theile
$+ 90000$	$- 24000$
1600	2400
320	$- 26400$
16	
$+ 91936$	
$- 26400$	
65536. Quadrat von 256, wie oben.	

CAPITEL 7

VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZEL IN ZUSAMMENGESETZTEN GRÖSSEN

317.

Um hiervon eine sichere Regul zu geben, so müßen wir das Quadrat von der Wurzel $a + b$, welches ist $aa + 2ab + bb$ genau in Erwegung ziehen, und suchen wie man hinwiederum aus dem gegebenen Quadrat die Wurzel herausbringen könne. Worüber folgende Betrachtungen anzustellen sind.

318.

Erstlich da das Quadrat $aa + 2ab + bb$ aus mehrern Gliedern besteht, so ist gewiß, daß auch die Wurzel aus mehr als einem Gliede bestehen müße; und wann das Quadrat so geschrieben wird, daß die Potestäten von einem Buchstaben, als a, immer abnehmen, so ist klar daß das erste Glied das Quadrat seyn werde von dem ersten Glied der Wurzel. Da nun in unserm Fall das erste Glied des Quadrats aa ist, so ist offenbahr, daß das erste Glied der Wurzel seyn müße a.

319.

Hat man nun das erste Glied der Wurzel, nemlich a gefunden, so betrachte man das übrige im Quadrat, welches ist $2ab + bb$, um zu sehen wie man daraus den andern Theil der Wurzel, welcher ist b, finden könne. Hiebey bemercken wir, daß jenes übrige oder jener Rest $2ab + bb$ also durch ein Product vorgestellet werden könne $(2a + b)b$. Da nun dieser Rest zwey Factores hat $2a + b$ und b so wird der letztere b, das ist der zweyte Theil der Wurzel gefunden, wann man den Rest $2ab + bb$ durch $2a + b$ dividirt.

320.

m also den zweyten Teil der Wurzel zu finden, so muß man den Rest durch $2a + b$ dividiren, da dann der Quotient der zweyte Theil der Wurzel seyn wird. Bey dieser Division aber ist zu mercken, daß $2a$ das Doppelte ist von dem schon gefundenen ersten Theil der Wurzel a: das andre Glied b aber ist zwar noch unbekannt, und muß seine Stelle noch ledig gelaßen werden; doch kann man gleichwohl die Division vornehmen, indem dabey nur auf das erste Glied $2a$ gesehen wird. So bald man aber den Quotient gefunden, welcher hier b ist, so muß man denselben auch an die ledige Stelle setzen und die Division vollenden.

321.

Die Rechnung also wodurch aus obigem Quadrat $aa + 2ab + bb$ die Wurzel gefunden wird, kann also vorgestellt werden:

$$\begin{array}{r|l} & aa + 2ab + bb \quad (a + b \\ & \underline{aa \qquad\qquad\quad\;} \\ 2a + b & \quad + 2ab + bb \\ & \underline{\quad + 2ab + bb} \\ & \qquad\quad 0 \end{array}$$

322.

Auf solche Art kann auch die Quadrat-Wurzel aus andern zusammengesetzten Formeln, wann dieselben nur Quadrate sind, gefunden werden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen, als:

$$\begin{array}{r|l}
 & aa+6ab+9bb \quad (a+3b \\
 & aa \\ \hline
2a+3b & +6ab+9bb \\
 & +6ab+9bb \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 4aa-4ab+bb \quad (2a-b \\
 & 4aa \\ \hline
4a-b & -4ab+bb \\
 & -4ab+bb \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9pp+24pq+16qq \quad (3p+4q \\
 & 9pp \\ \hline
6p+4q & +24pq+16qq \\
 & +24pq+16qq \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 25xx-60x+36 \quad (5x-6 \\
 & 25xx \\ \hline
10x-6 & -60x+36 \\
 & -60x+36 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

323.

Wann bey der Division noch ein Rest übrig bleibt, so ist es ein Zeichen, daß die Wurzel aus mehr als 2 Gliedern besteht. Alsdann werden die zwey schon gefundenen Glieder zusammen als der erste Theil betrachtet, und aus dem Rest auf gleiche Weise wie vorher das folgende Glied der Wurzel gefunden, wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$\begin{array}{r|l}
 & aa+2ab-2ac-2bc+bb+cc \quad (a+b-c \\
 & aa \\ \hline
2a+b & +2ab-2ac-2bc+bb+cc \\
 & +2ab \qquad\qquad\quad +bb \\ \hline
2a+2b-c & -2ac-2bc+cc \\
 & -2ac-2bc+cc \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4+2a^3+3aa+2a+1 \quad (aa+a+1 \\
 & a^4 \\ \hline
2aa+a & +2a^3+3aa \\
 & +2a^3+\ \ aa \\ \hline
2aa+2a+1 & +2aa+2a+1 \\
 & +2aa+2a+1 \\ \hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^4 - 4a^3b + 8ab^3 + 4b^4 \quad (aa - 2ab - 2bb \\
 & a^4 \\
\hline
2aa - 2ab & -4a^3b + 8ab^3 \\
 & -4a^3b + 4aabb \\
\hline
2aa - 4ab - 2bb & -4aabb + 8ab^3 + 4b^4 \\
 & -4aabb + 8ab^3 + 4b^4 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5b + 15a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 - 6ab^5 + b^6 \quad (a^3 - 3aab + 3abb - b^3 \\
 & a^6 \\
\hline
2a^3 - 3aab & -6a^5b + 15a^4bb \\
 & -6a^5b + 9a^4bb \\
\hline
2a^3 - 6aab + 3abb & +6a^4bb - 20a^3b^3 + 15aab^4 \\
 & +6a^4bb - 18a^3b^3 + 9aab^4 \\
\hline
2a^3 - 6aab + 6abb - b^3 & -2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6 \\
 & -2a^3b^3 + 6aab^4 - 6ab^5 + b^6 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

324.

Aus dieser Regul folgt nun leicht diejenige, welche in den Rechen-Büchern für die Ausziehung der Quadrat-Wurzel gegeben wird; als:

$$\begin{array}{r|l}
5 & 29 \quad (23 \\
4 & \\
\hline
43 & 129 \\
 & 129 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
17 & 64 \quad (42 \\
16 & \\
\hline
82 & 164 \\
 & 164 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
23 & 04 \quad (48 \\
16 & \\
\hline
88 & 704 \\
 & 704 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
40 & 96 \quad (64 \\
36 & \\
\hline
124 & 496 \\
 & 496 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
96 & 04 \quad (98 \\
81 & \\
\hline
188 & 1504 \\
 & 1504 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
1 & 56|25 \quad (125 \\
1 & \\
\hline
22 & 56 \\
 & 44 \\
\hline
245 & 1225 \\
 & 1225 \\
\hline
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
99 & 80|01 \quad (999 \\
81 & \\
\hline
189 & 1880 \\
 & 1701 \\
\hline
1989 & 17901 \\
 & 17901 \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

325.

Wann aber bey der Operation zuletzt etwas übrig bleibt, so ist solches ein Zeichen daß die vorgelegte Zahl kein Quadrat ist und also die Wurzel davon nicht angegeben werden kann. In solchen Fällen bedient man sich des oben gebrauchten Wurzel-Zeichens welches vor die Formel geschrieben, die Formel selbst aber in Klammern eingeschloßen wird. Also wird die Quadrat-Wurzel von $aa+bb$ auf diese Weise angedeutet, $\sqrt{(aa+bb)}$; und $\sqrt{(1-xx)}$ deutet an die Quadrat-Wurzel aus $1-xx$. Statt dieses Wurzel-Zeichens kann man auch den gebrochenen Exponenten $\frac{1}{2}$ gebrauchen. Also wird auch durch $(aa+bb)^{\frac{1}{2}}$ die Quadrat-Wurzel aus $aa+bb$ angedeutet.

CAPITEL 8

VON DER RECHNUNG MIT IRRATIONAL-ZAHLEN

326.

Wann zwey oder mehr Irrational-Formeln zusammen addirt werden sollen, so geschieht solches wie oben gelehret worden, indem man alle Glieder mit ihren Zeichen zusammenschreibt. Nur ist bey dem Abkürtzen zu bemercken, daß anstatt $\sqrt{a}+\sqrt{a}$ geschrieben werde $2\sqrt{a}$, und daß $\sqrt{a}-\sqrt{a}$ einander aufhebe oder nichts gebe. Also diese Formeln $3+\sqrt{2}$ und $1+\sqrt{2}$ zusammen addirt giebt $4+2\sqrt{2}$ oder $4+\sqrt{8}$; ferner $5+\sqrt{3}$ und $4-\sqrt{3}$ zusammen addirt, giebt 9; ferner $2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ zusammen addirt, macht $3\sqrt{3}+2\sqrt{2}$.

327.

Eben so wenig Schwierigkeit hat die Subtraction indem nur die Zeichen der untern Zahl, welche subtrahirt werden soll, verkehrt gelesen werden müßen, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

$$\begin{array}{l} 4-\sqrt{2}+2\sqrt{3}-3\sqrt{5}+4\sqrt{6} \\ \underline{1+2\sqrt{2}-2\sqrt{3}-5\sqrt{5}+6\sqrt{6}} \\ 3-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{5}-2\sqrt{6} \end{array}$$

328.

Bey der Multiplication ist nur zu mercken, daß $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{a}$ multiplicirt a giebt. Wann aber ungleiche Zahlen hinter dem $\sqrt{\ }$ Zeichen stehen, so giebt $\sqrt{a}$ mit $\sqrt{b}$ multiplicirt $\sqrt{ab}$, woraus folgende Exempel berechnet werden können:

$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1+\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \underline{\quad+\sqrt{2}+2} \\ 1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4+2\sqrt{2} \\ \underline{2-\sqrt{2}} \\ 8+4\sqrt{2} \\ \underline{\quad-4\sqrt{2}-4} \\ 8-4=4 \end{array}$$

329.

Eben dieses gilt auch von den unmöglichen Größen; wobey nur zu mercken daß $\sqrt{-a}$ mit $\sqrt{-a}$ multiplicirt $-a$ giebt.

Wann man den Cubus von $-1+\sqrt{-3}$ suchen sollte so geschähe solches wann man erstlich das Quadrat nimmt und dasselbe nochmahls mit der Zahl $-1+\sqrt{-3}$ multipliciret wie folgt

$$\begin{array}{l} -1+\sqrt{-3} \\ \underline{-1+\sqrt{-3}} \\ +1-\sqrt{-3} \\ \underline{\quad-\sqrt{-3}-3} \\ +1-2\sqrt{-3}-3=-2-2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{-1+\sqrt{-3}} \\ \qquad\qquad\qquad\quad +2+2\sqrt{-3} \\ \qquad\qquad\qquad\quad \underline{\quad-2\sqrt{-3}+6} \\ \qquad\qquad\qquad\quad\quad 2+6=8 \end{array}$$

330.

Bey der Division hat man nur nöthig schlechtweg einen Bruch zu setzen und alsdann kann man denselben in eine andere Form verwandeln, so daß der Nenner rational wird. Dann wann der Nenner ist $a+\sqrt{b}$ und man oben und unten mit $a-\sqrt{b}$ multiplicirt, so wird der neue Nenner seyn $aa-b$ und hat also kein Wurzel-Zeichen mehr. Man dividire z. E. $3+2\sqrt{2}$ durch $1+\sqrt{2}$

so hat man $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. Jetzt multiplicire man oben und unten mit $1-\sqrt{2}$ so bekommt man

für den Zehler
$$\begin{array}{l} 3+2\sqrt{2} \\ \underline{1-\ \ \sqrt{2}} \\ 3+2\sqrt{2} \\ \quad -3\sqrt{2}-4 \\ \hline 3-\sqrt{2}-4=-\sqrt{2}-1 \end{array}$$

für den Nenner
$$\begin{array}{l} 1+\sqrt{2} \\ \underline{1-\sqrt{2}} \\ 1+\sqrt{2} \\ \quad -\sqrt{2}-2 \\ \hline 1-2=-1 \end{array}$$

Also ist unser neuer Bruch $\frac{-\sqrt{2}-1}{-1}$. Man multiplicire ferner oben und unten mit -1 so bekommt man vor den Zehler $+\sqrt{2}+1$ und vor den Nenner $+1$.

Es ist $+\sqrt{2}+1$ aber eben so viel als $\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$; dann $\sqrt{2}+1$ mit dem Divisor $1+\sqrt{2}$ multiplicirt

$$\begin{array}{l} 1+\ \ \sqrt{2} \\ \underline{1+\ \ \sqrt{2}} \\ 1+\ \ \sqrt{2} \\ \quad +\ \ \sqrt{2}+2 \\ \hline \end{array}$$
giebt $1+2\sqrt{2}+2=3+2\sqrt{2}$.

Ferner $8-5\sqrt{2}$ durch $3-2\sqrt{2}$ dividirt giebt $\frac{8-5\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$. Man multiplicire oben und unten mit $3+2\sqrt{2}$ so bekommt man

für den Zehler
$$\begin{array}{l} 8-\ \ 5\sqrt{2} \\ \underline{3+\ \ 2\sqrt{2}} \\ 24-15\sqrt{2} \\ \quad +16\sqrt{2}-20 \\ \hline 24+\sqrt{2}-20=4+\sqrt{2} \end{array}$$

und für den Nenner
$$\begin{array}{l} 3-2\sqrt{2} \\ \underline{3+2\sqrt{2}} \\ 9-6\sqrt{2} \\ \quad +6\sqrt{2}-4\cdot 2 \\ \hline 9-8=+1 \end{array}$$

Folglich ist der Quotient $4+\sqrt{2}$. Die Probe stehet also:

$$\begin{array}{l} 4+\ \ \sqrt{2} \\ \underline{3-2\sqrt{2}} \\ 12+3\sqrt{2} \\ \quad -8\sqrt{2}-4 \\ \hline 12-5\sqrt{2}-4=8-5\sqrt{2} \end{array}$$

331.

Auf solche weise können dergleichen Brüche immer in andre verwandelt werden, wo der Nenner rational ist. Also dieser Bruch $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$, wann man oben und unten mit $5-2\sqrt{6}$ multiplicirt, so wird solcher in diesen verwandelt $\frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6}$.

Ferner dieser Bruch $\frac{2}{-1+\sqrt{-3}}$ wird verwandelt in diesen $\frac{2+2\sqrt{-3}}{-4} = \frac{1+\sqrt{-3}}{-2}$, ferner $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \frac{11+2\sqrt{30}}{1} = 11+2\sqrt{30}$.

332.

Wann in dem Nenner auch mehr Glieder vorkommen, so wird auf eben diese Art nach und nach die Irrationalität aus dem Nenner weggebracht.

Also bey diesem Bruch $\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ multiplicirt man erstlich oben und unten mit $\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$, so hat man $\frac{+\sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{5-2\sqrt{6}}$; man multipliciret ferner oben und unten mit $5+2\sqrt{6}$, so hat man $5\sqrt{10}+11\sqrt{2}+9\sqrt{3}+2\sqrt{60}$.

CAPITEL 9

VON DEN CUBIS UND VON DER AUSZIEHUNG DER CUBIC-WURZEL

333.

Um den Cubus von der Wurzel $a+b$ zu finden, muß man das Quadrat davon, welches ist $aa+2ab+bb$, nochmahls mit $a+b$ multipliciren, da dann der Cubus seyn wird

$$\begin{array}{l} aa+2ab+bb \\ \underline{a+b\qquad\qquad\qquad} \\ a^3+2aab+\ abb \\ \underline{\quad\ +\ aab+2abb+b^3} \\ a^3+3aab+3abb+b^3 \end{array}$$

Derselbe besteht also aus den Cubis beyder Theile der Wurzel, hernach noch aus $3aab+3abb$, welches so viel ist als $(3ab)\cdot(a+b)$; und dieses ist das dreyfache Product der beyden Theile mit der Summa derselben multiplicirt.

334.

Wann also die Wurzel aus zwey Theilen besteht, so läßt sich der Cubus nach dieser Regul leicht finden: als z. E. da die Zahl $5 = 3 + 2$, so ist der Cubus davon $= 27 + 8 + 18 \cdot 5$ ist also $= 125$.

Es sey ferner die Wurzel $7 + 3 = 10$, so wird der Cubus seyn

$$343 + 27 + 63 \cdot 10 = 1000.$$

Um den Cubus von 36 zu finden, so setze man die Wurzel $36 = 30 + 6$ und der Cubus wird seyn:

$$27000 + 216 + 540 \cdot 36 = 46656.$$

335.

Wann aber umgekehrt der Cubus gegeben ist, nemlich $a^3 + 3aab + 3abb + b^3$, und man soll davon die Wurzel finden, so ist folgendes zu bemercken.

Erstlich wann der Cubus nach der Potestät eines Buchstaben ordentlich geschrieben wird, so erkennt man aus dem ersten Glied a^3 so gleich das erste Glied der Wurzel a, deßen Cubus jenem gleich ist, und wann man denselben wegnimmt so behält man diesen Rest: $3aab + 3abb + b^3$, aus welchen das zweyte Glied der Wurzel gefunden werden muß.

336.

Da wir nun schon wißen, daß das zweyte Glied $+ b$ ist, so kommt es hier nur darauf an, wie daßelbe aus dem obigen Rest gefunden werden könne. Es läßt sich aber derselbe Rest also durch zwey Factores ausdrucken $(3aa + 3ab + bb) \cdot (b)$; wann man also den Rest durch $3aa + 3ab + bb$ dividirt, so erhält man das verlangte zweyte Glied der Wurzel nemlich $+ b$.

337.

Weil aber das zweyte Glied noch nicht bekannt ist, so ist auch der Theiler noch unbekannt: Allein es ist genung, daß wir den ersten Theil dieses Theilers haben, welcher ist $3aa$ oder das dreyfache Quadrat des ersten schon gefundenen Theils der Wurzel, und daraus läßt sich schon der andre Theil b finden, woraus hernach der Divisor vollständig gemacht werden muß, ehe man die Division vollendet. Man muß dahero alsdann zu $3aa$ noch hinzufügen $3ab$, das ist das dreyfache Product des ersten Theils mit dem andern, und hernach bb, das ist das Quadrat des andern Theils der Wurzel.

338.

Es sey z. E. gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^3 + 12aa + 48a + 64 \quad (a + 4 \\
 & a^3 \\
\hline
3aa + 12a + 16 & + 12aa + 48a + 64 \\
 & + 12aa + 48a + 64 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

Es sey ferner gegeben dieser Cubus

$$\begin{array}{r|l}
 & a^6 - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \quad (aa - 2a + 1 \\
 & a^6 \\
\hline
3a^4 - 6a^3 + 4aa & - 6a^5 + 15a^4 - 20a^3 \\
 & - 6a^5 + 12a^4 - 8a^3 \\
\hline
3a^4 - 12a^3 + 12aa + 3aa - 6a + 1 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
 & 3a^4 - 12a^3 + 15a^2 - 6a + 1 \\
\hline
 & \qquad 0
\end{array}$$

339.

Hierauf gründet sich auch die gemeine Regul die Cubic-Wurzeln aus Zahlen zu finden. Als mit der Zahl 2197 wird die Rechnung allso angestellet

$$\begin{array}{r|l}
 & 2197 \quad (10 + 3 = 13 \\
 & 1000 \\
\hline
300 & 1197 \\
90 & \\
9 & \\
\hline
399 & 1197 \\
\hline
 & \;\; 0
\end{array}$$

Es sey ferner gegeben der Cubus 34965783 woraus die Cubic-Wurzel gefunden werden soll.

	34 965 783	(300 + 20 + 7 = 327
	27 000 000	
270000	7 965 783	
18000		
400		
288400	5 768 000	
307200	2 197 783	
6720		
49		
313969	2 197 783	
	0	

CAPITEL 10

VON DEN HÖHERN POTESTÄTEN ZUSAMMENGESETZTER GRÖSSEN

340.

Nach den Quadraten und Cubis folgen die höhern Potestäten, welche durch Exponente wie schon oben gemeldet worden, pflegen angezeigt zu werden: nur muß man die Wurzel wann sie zusammengesetzt ist in Klammern einschließen. Also $(a+b)^5$ deutet die fümfte Potestät von $a+b$ an, und $(a-b)^6$ deutet die sechste Potestät an von $a-b$. Wie aber diese Potestäten entwickelt werden können, soll in diesem Capitel gezeigt werden.

341.

Es sey demnach $a+b$ die Wurzel, oder die erste Potestät, so werden die höhern Potestäten durch die Multiplication folgender Gestalt gefunden.

$$
\begin{array}{rl}
(a+b)^1 = & a + b \\
& a + b \\
\hline
& aa + ab \\
& \quad + ab + bb \\
\hline
(a+b)^2 = & aa + 2ab + bb \\
& a + b \\
\hline
& a^3 + 2aab + abb \\
& \quad + aab + 2abb + b^3 \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3 + 3aab + 3abb + b^3 \\
& a + b \\
\hline
& a^4 + 3a^3b + 3aabb + ab^3 \\
& \quad + a^3b + 3aabb + 3ab^3 + b^4 \\
\hline
(a+b)^4 = & a^4 + 4a^3b + 6aabb + 4ab^3 + b^4 \\
& a + b \\
\hline
& a^5 + 4a^4b + 6a^3bb + 4aab^3 + ab^4 \\
& \quad + a^4b + 4a^3bb + 6aab^3 + 4ab^4 + b^5 \\
\hline
(a+b)^5 = & a^5 + 5a^4b + 10a^3bb + 10aab^3 + 5ab^4 + b^5 \\
& a + b \\
\hline
& a^6 + 5a^5b + 10a^4bb + 10a^3b^3 + 5aab^4 + ab^5 \\
& \quad + a^5b + 5a^4bb + 10a^3b^3 + 10aab^4 + 5ab^5 + b^6 \\
\hline
(a+b)^6 = & a^6 + 6a^5b + 15a^4bb + 20a^3b^3 + 15aab^4 + 6ab^5 + b^6 \text{ etc.}
\end{array}
$$

342.

Eben so werden auch die Potestäten von der Wurzel $a - b$ gefunden, welche von den vorigen nur darin unterschieden sind, daß das 2te 4te 6te etc. Glied das Zeichen *minus* bekommt wie aus folgendem zu ersehen.

$$
\begin{array}{ll}
(a-b)^1 = & a-b \\
& a-b \\
\hline
& aa-ab \\
& \quad -ab+bb \\
\hline
(a-b)^2 = & aa-2ab+bb \\
& a-b \\
\hline
& a^3-2aab+abb \\
& \quad -aab+2abb-b^3 \\
\hline
(a-b)^3 = & a^3-3aab+3abb-b^3 \\
& a-b \\
\hline
& a^4-3a^3b+3aabb-ab^3 \\
& \quad -a^3b+3aabb-3ab^3+b^4 \\
\hline
(a-b)^4 = & a^4-4a^3b+6aabb-4ab^3+b^4 \\
& a-b \\
\hline
& a^5-4a^4b+6a^3bb-4aab^3+ab^4 \\
& \quad -a^4b+4a^3bb-6aab^3+4ab^4-b^5 \\
\hline
(a-b)^5 = & a^5-5a^4b+10a^3bb-10aab^3+5ab^4-b^5 \\
& a-b \\
\hline
& a^6-5a^5b+10a^4bb-10a^3b^3+5aab^4-ab^5 \\
& \quad -a^5b+5a^4bb-10a^3b^3+10aab^4-5ab^5+b^6 \\
\hline
(a-b)^6 = & a^6-6a^5b+15a^4bb-20a^3b^3+15aab^4-6ab^5+b^6 \text{ etc.}
\end{array}
$$

Hier bekommen nemlich alle ungerade Potestäten von b das Zeichen — die geraden aber behalten das Zeichen $+$, wovon der Grund offenbahr ist: dann da in der Wurzel $-b$ steht so gehen die Potestäten davon folgender Gestallt fort: $-b$, $+bb$, $-b^3$, $+b^4$, $-b^5$, $+b^6$, etc. wo die geraden Potestäten alle das Zeichen $+$ die ungeraden aber alle das Zeichen $-$ haben.

343.

Hier kommt aber diese wichtige Frage vor, wie ohne diese Rechnung würcklich fortzusetzen, alle Potestäten so wohl von $a+b$ als von $a-b$ gefunden werden können? wobey vor allen Dingen zu mercken, daß wann man die Potestäten von $a+b$ anzugeben im Stande ist, daraus von selbsten die Potestäten von $a-b$ entstehen, dann man darf nur die Zeichen der geraden Glieder nemlich des 2ten 4ten 6ten 8ten etc. verändern. Es kommt demnach hier darauf an, eine Regul festzusetzen nach welcher eine jegliche Potestät von $a+b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, gefunden werden könne, ohne daß man nöthig habe die Rechnung durch alle vorhergehenden anzustellen.

344.

Wann man bey den oben gefundenen Potestäten die Zahlen so einem jedem Gliede vorgesetzt sind wegläßt, welche Zahlen die Coefficienten genennt werden, so bemerckt man in den Gliedern eine sehr schöne Ordnung, indem erstlich eben die Potestät von a vorkommt welche verlangt wird; in den folgenden Gliedern aber werden die Potestäten von a immer um eins niedriger, die Potestäten von b hingegen steigen immer um eins, so daß die Summa der Exponenten von a und b in allen Gliedern gleich viel beträgt. Wann man also die zehnte Potestät von $a+b$ verlangt, so werden die Glieder ohne Coefficienten also fort gehen:

$$a^{10},\ a^9b,\ a^8bb,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ a^1b^9,\ b^{10}.$$

345.

Es muß also nur noch gezeigt werden, wie man die darzu gehörigen Coefficienten finde, oder mit was für Zahlen ein jegliches Glied multiplicirt werden soll. Was zwar das erste Glied anbetrift, so ist sein Coefficient immer 1 und bey dem zweyten Glied ist der Coefficient allemahl der Exponent der Potestät selber. Allein für die folgenden läßt sich nicht so leicht eine Ordnung bemercken, inzwischen wann diese Coefficienten nach und nach weiter fortgesetzt werden, so kann man leicht so weit gehen als man will, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Potestät:	Coefficienten:
I.	1, 1,
II.	1, 2, 1.
III.	1, 3, 3, 1.
IV.	1, 4, 6, 4, 1.
V.	1, 5, 10, 10, 5, 1.
VI.	1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.
VII.	1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.
VIII.	1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.
IX.	1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.
X.	1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1 etc.

Also wird von $a+b$ die zehnte Potestät seyn:

$$a^{10}+10a^9b+45a^8bb+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5$$
$$+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}.$$

346.

Bey diesen Coefficienten ist zu mercken daß die Summe derselben für jede Potestät die gleiche Potestät von 2 geben müße. Dann man setze $a=1$, und $b=1$, so wird ein jedes Glied außer dem Coefficienten $=1$, so daß nur die Coefficienten zusammen genommen werden müßen. Dahero dann die zehnte Potestät seyn wird $(1+1)^{10}=2^{10}=1024$.

Eben so verhält es sich auch mit allen übrigen. Also ist für die

Iste	$1+1=2=2^1$
IIte	$1+2+1=4=2^2$
IIIte	$1+3+3+1=8=2^3$
IVte	$1+4+6+4+1=16=2^4$
Vte	$1+5+10+10+5+1=32=2^5$
VIte	$1+6+15+20+15+6+1=64=2^6$
VIIte	$1+7+21+35+35+21+7+1=128=2^7$ etc.

347.

Bey diesen Coefficienten ist noch zu mercken, daß dieselben von Anfang bis in die Mitte steigen, hernach aber nach eben der Ordnung wieder abnehmen. Bey den geraden steht der größte in der Mitte, bey den ungeraden aber sind zwey mittlere, welche die größten und einander gleich sind.

Die Ordnung selbst aber verdient noch genauer in Erwegung gezogen zu werden, damit man dieselben für eine jegliche Potestät finden könne, ohne die vorhergehenden erst zu suchen, wozu hier die Regul gegeben werden soll; der Beweiß aber davon wird in das folgende Capitel ersparet werden.

348.

Um nun die Coefficienten für eine gegebene Potestät als z. E. die siebente zu finden, so schreibe man folgende Brüche der Ordnung nach hinter einander:

$$\frac{7}{1},\ \frac{6}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{4}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{2}{6},\ \frac{1}{7},$$

wo nemlich die Zehler von dem Exponenten der verlangten Potestät anfangen und immer um eines vermindert werden, die Nenner aber nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, etc. fortschreiten. Da nun der erste Coefficient immer eins ist, so giebt der erste Bruch den zweyten Coefficienten; die zwey ersten Brüche mit einander multiplicirt den dritten, die drey ersten mit einander multiplicirt den vierten, und so fort.

Also ist der erste Coefficient $=1$, der 2te $=\frac{7}{1}=7$, der 3te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}=21$, der 4te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}=35$, der 5te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}=35$, der 6te $=\frac{7}{1}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{4}{4}\cdot\frac{3}{5}$ $=21$, der 7te $=21\cdot\frac{2}{6}=7$, der 8te $=7\cdot\frac{1}{7}=1$.

349.

Also für die zweyte Potestät hat man diese Brüche $\frac{2}{1}$; $\frac{1}{2}$; daher der erste Coefficient $=1$, der 2te $\frac{2}{1}=2$, der 3te $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

Vor die dritte Potestät hat man diese Brüche $\frac{3}{1}$; $\frac{2}{2}$; $\frac{1}{3}$; dahero der erste Coefficient $=1$, der 2te $\frac{3}{1}=3$, der 3te $3\cdot\frac{2}{2}=3$, der 4te $\frac{3}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{3}=1$.

Vor die vierte Potestät hat man diese Brüche $\frac{4}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; dahero der erste Coefficient $=1$, der 2te $\frac{4}{1}=4$, der 3te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}=6$, der 4te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=4$, der 5te $\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=1$.

350.

Diese Regul schafft uns also diesen Vortheil, daß man nicht nöthig hat die vorhergehenden Coefficienten zu wißen, sondern sogleich für eine jegliche Potestät die dahin gehörigen Coefficienten finden kann.

Also für die zehnte Potestät schreibt man diese Brüche

$$\frac{10}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{4},\ \frac{6}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{4}{7},\ \frac{3}{8},\ \frac{2}{9},\ \frac{1}{10}.$$

Dahero bekommt man den ersten Coefficient $= 1$, den zweyten Coefficient $= \frac{10}{1} = 10$,

$$\begin{array}{ll} \text{den 3ten} = 10 \cdot \frac{9}{2} = 45, & \text{den 4ten} = 45 \cdot \frac{8}{3} = 120, \\ \text{den 5ten} = 120 \cdot \frac{7}{4} = 210, & \text{den 6ten} = 210 \cdot \frac{6}{5} = 252, \\ \text{den 7ten} = 252 \cdot \frac{5}{6} = 210, & \text{den 8ten} = 210 \cdot \frac{4}{7} = 120, \\ \text{den 9ten} = 120 \cdot \frac{3}{8} = 45, & \text{den 10ten} = 45 \cdot \frac{2}{9} = 10, \end{array}$$

$$\text{den 11ten} = 10 \cdot \frac{1}{10} = 1.$$

351.

Man kann auch diese Brüche so schlecht weg hinschreiben ohne den Werth derselben zu berechnen, und solcher Gestalt wird es leicht seyn, eine jegliche Potestät von $a + b$, so hoch dieselbe auch seyn mag, hinzuschreiben.

Also wird die 100te Potestät seyn

$$(a+b)^{100} = a^{100} + \frac{100}{1} a^{99} b + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2} a^{98} bb + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{97} b^3 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{96} b^4 \text{ etc.}$$

woraus die Ordnung der folgenden Glieder offenbahr zu ersehen.

CAPITEL 11

VON DER VERSETZUNG DER BUCHSTABEN ALS WORAUF DER BEWEIS DER VORIGEN REGUL BERUHET

352.

Wann man auf den Ursprung der obigen Coefficienten zurück gehet, so wird man finden, daß ein jegliches Glied so viel mal vorkommt, als sich die Buchstaben, daraus dasselbe besteht, versetzen laßen: als bey der zweyten

Potestät kommt das Glied ab zweymal vor, weil man schreiben kann ab und ba; hingegen kommt daselbst aa nur einmal vor, weil die Ordnung der Buchstaben keine Veränderung leidet. Bey der dritten Potestät kann das Glied aab auf dreyerley Weise geschrieben werden als aab, aba, baa, und deswegen ist der Coefficient auch 3. Eben so bey der vierten Potestät kann das Glied a^3b, oder $aaab$, auf viererley Weise versetzt werden, als $aaab$, $aaba$, $abaa$, $baaa$, deswegen ist auch sein Coefficient 4, und das Glied $aabb$ hat 6 zum Coefficienten, weil 6 Versetzungen statt finden, $aabb$, $abba$, $baba$, $abab$, $bbaa$, $baab$. Und so verhält es sich auch mit allen übrigen.

353.

In der That wann man erweget, daß z. E. die vierte Potestät von einer jeglichen Wurzel, wann dieselbe auch aus mehr als zwey Gliedern besteht, als $(a+b+c+d)^4$ gefunden wird, wann diese vier Factores mit einander multiplicirt werden

I. $a+b+c+d$, II. $a+b+c+d$, III. $a+b+c+d$, und IV. $a+b+c+d$,

so muß ein jeder Buchstabe des ersten mit einem jeglichen des andern, und ferner mit einem jeglichen des dritten, und endlich noch mit einem jeglichen des vierten multiplicirt werden, dahero ein jegliches Glied aus 4 Buchstaben bestehen und so viel mal vorkommen wird, als sich desselben Buchstaben unter einander versetzen laßen, woraus so dann sein Coefficient bestimmt wird.

354.

Hier kommt es also darauf an zu wissen, wie viel mal eine gewiße Anzahl Buchstaben unter sich versetzt werden kann, wobey insonderheit darauf zu sehen, ob dieselben Buchstaben unter sich gleich oder ungleich sind. Dann wann alle gleich sind, so findet keine Veränderung statt, weswegen auch die einfache Potestäten als a^2, a^3, a^4 etc. alle 1 zum Coefficienten haben.

355.

Wir wollen erstlich alle Buchstaben ungleich annehmen, und bey zweyen, nemlich ab anfangen, wo offenbahr zwey Versetzungen statt finden, als ab, ba.

Hat man drey Buchstaben abc, so ist zu mercken, daß ein jeder die erste Stelle haben könne, da dann die zwey übrigen zwey mal versetzt werden können. Wann also *a* zuerst steht, so hat man zwey Versetzungen *abc*, *acb*; steht *b* zuerst so hat man wieder zwey, *bac*, *bca*; und eben so viel wann *c* zuerst steht, *cab*, *cba*. Dahero in allem die Zahl der Versetzungen seyn wird $3 \cdot 2 = 6$.

Hat man vier Buchstaben *abcd*, so kann ein jeder die erste Stelle einnehmen, und in jedem Fall geben die drey übrigen sechs Versetzungen. Daher in allem die Anzahl der Versetzungen seyn wird $4 \cdot 6 = 24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Hat man fünf Buchstaben *abcde*, so kann ein jeder die erste Stelle haben und für jede laßen sich die vier übrigen 24mal versetzen. Dahero die Anzahl aller Versetzungen seyn wird $5 \cdot 24 = 120 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

356.

So groß demnach auch immer die Anzahl der Buchstaben seyn mag, wann dieselben nur alle ungleich unter sich sind, so läßt sich die Anzahl aller Versetzungen gantz leicht bestimmen, wie aus folgender Tabelle zu sehen.

Anzahl der Buchstaben:	Anzahl der Versetzungen:
I.	$1 = 1$
II.	$2 \cdot 1 = 2$
III.	$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
IV.	$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
V.	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
VI.	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
VII.	$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$
VIII.	$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$
IX.	$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$
X.	$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3628800$

357.

Es ist aber wohl zu mercken, daß diese Zahlen nur alsdann statt finden, wann alle Buchstaben unter sich ungleich sind, dann wann zwey oder mehr einander gleich sind, so wird die Anzahl der Versetzungen weit geringer; und wann gar alle einander gleich sind, so hat man nur eine einzige. Wir wollen also sehen wie nach der Anzahl der gleichen Buchstaben die obigen Zahlen vermindert werden müßen.

358.

Sind zwey Buchstaben einander gleich so werden die zwey Versetzungen nur auf eine gerechnet. Dahero die obige Zahl auf die Hälfte gebracht oder durch 2 dividirt werden muß. Sind drey Buchstaben einander gleich so werden 6 Versetzungen nur für eine gerechnet: dahero die obigen Zahlen durch $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ getheilt werden müssen. Eben so wann vier Buchstaben einander gleich sind, so müßen die obigen Zahlen durch 24 das ist durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ getheilt werden u. s. f.

Hieraus kann man nun bestimmen, wie viel mal diese Buchstaben $aaabbc$ versetzt werden können. Die Anzahl derselben ist sechs, welche wann sie ungleich wären $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ Versetzungen zulaßen würden. Weil aber hier a drey mal vorkommt, so muß diese Zahl durch $3 \cdot 2 \cdot 1$, und weil b zwey mal vorkommt noch ferner durch $2 \cdot 1$ getheilt werden, dahero die Anzahl der Versetzungen seyn wird $= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

359.

Hieraus können wir nun die Coefficienten eines jeden Glieds für eine jede Potestät bestimmen, welches wir z. E. für die siebente Potestät $(a+b)^7$ zeigen wollen. Das erste Glied ist a^7 welches nur einmahl vorkommt, und da in allen übrigen sieben Buchstaben vorkommen, so wäre die Anzahl aller Versetzungen $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ wann sie alle ungleich wären. Da aber im zweyten Glied a^6b, sechs gleiche Buchstaben vorhanden sind, so muß jene Zahl durch $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ getheilt werden, woraus der Coefficient seyn wird

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7}{1}.$$

Im dritten Glied a^5bb kommt a fünfmal und b zweymal vor, dahero die obige Zahl erstlich durch $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und noch durch $2 \cdot 1$ getheilt werden muß, woraus der Coefficient seyn wird $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$.

Im vierten Glied a^4b^3 steht a viermal und b dreymal; dahero die obige Zahl erstlich durch $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ und hernach noch durch $3 \cdot 2 \cdot 1$ oder $1 \cdot 2 \cdot 3$ getheilt werden muß, da dann der Coefficient wird

$$= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Eben so wird für das fünfte Glied a^3b^4 der Coefficient $= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ und so weiter, wodurch die oben gegebene Regul erwiesen wird.

360.

Diese Betrachtung führt uns aber noch weiter und lehret wie man auch von solchen Wurzeln die aus mehr als zwey Theilen bestehen, alle Potestäten finden soll. Wir wollen dieses nur mit der dritten Potestät von $a+b+c$ erläutern, worinnen alle mögliche Zusammensetzungen von dreyen Buchstaben als Glieder vorkommen müßen, und ein jedes die Anzahl aller seiner Versetzungen zum Coefficient haben wird: also wird diese dritte Potestät oder $(a+b+c)^3$ seyn:

$$a^3+3aab+3aac+3abb+6abc+3acc+b^3+3bbc+3bcc+c^3.$$

Laßt uns setzen es sey $a=1$, $b=1$, $c=1$ so wird der Cubus von $1+1+1$ das ist von 3, seyn:

$$1+3+3+3+6+3+1+3+3+1=27.$$

Setzt man $a=1$, $b=1$ und $c=-1$, so wird der Cubus von $1+1-1$ das ist von 1 seyn:

$$1+3-3+3-6+3+1-3+3-1=1.$$

CAPITEL 12

VON DER ENTWICKELUNG DER IRRATIONAL-POTESTÄTEN DURCH UNENDLICHE REIHEN

361.

Da wir gezeigt haben, wie von der Wurzel $a+b$ eine jegliche Potestät gefunden werden soll, der Exponent mag so groß seyn als er nur immer will, so sind wir im Stande auf eine allgemeine Art die Potestät von $a+b$ auszudrucken, wann der Exponent auch unbestimmt, und durch einen Buchstaben n ausgedrückt ist.

Also werden wir nach der obigen gegebenen Regul finden

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

362.

Wollte man die gleiche Potestät von der Wurzel $a-b$ nehmen, so darf man nur die Zeichen des 2ten, 4ten, 6ten, etc. Gliedes verändern, woher man haben wird

$$(a-b)^n = a^n - \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}a^{n-2}b^2 - \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\cdot\frac{n-3}{4}a^{n-4}b^4 \text{ etc.}$$

363.

Diese Formeln dienen uns um alle Arten von Wurzeln auszudrücken. Dann da wir gezeigt haben wie die Wurzeln auf gebrochene Exponenten gebracht werden können, und daß

$$\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \text{ und } \sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

so wird auch seyn:

$$\sqrt[2]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}} \text{ und } \sqrt[4]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. f.}$$

dahero um die Quadratwurzel von $a+b$ zu finden haben wir nur nöthig in der obigen allgemeinen Formel für den Exponenten n den Bruch $\frac{1}{2}$ zu setzen, daher wir erstlich für die Coefficienten bekommen werden

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{2},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{4},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{3}{6},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{5}{8},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{7}{10},\ \frac{n-5}{6} = -\frac{9}{12}.$$

Hernach ist

$$a^n = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \text{ und } a^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{a}},\ a^{n-2} = \frac{1}{a\sqrt{a}},\ a^{n-3} = \frac{1}{aa\sqrt{a}} \text{ etc.}$$

Oder man kann diese Potestäten von a auch also ausdrücken

$$a^n = \sqrt{a},\ a^{n-1} = \frac{\sqrt{a}}{a},\ a^{n-2} = \frac{a^n}{a^2} = \frac{\sqrt{a}}{a^2},\ a^{n-3} = \frac{a^n}{a^3} = \frac{\sqrt{a}}{a^3},\ a^{n-4} = \frac{a^n}{a^4} = \frac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

364.

Dieses voraus gesetzt wird die Quadrat-Wurzel aus $a+b$ folgender gestalt ausgedrückt werden

$$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{a} + \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}bb\frac{\sqrt{a}}{aa} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}b^3\frac{\sqrt{a}}{a^3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}b^4\frac{\sqrt{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

365.

Wann nun a eine Quadrat-Zahl ist, so kann $\sqrt{a}$ angegeben, und also die Quadrat-Wurzel aus $a+b$, ohne Wurzel-Zeichen durch eine unendliche Reihe ausgedrückt werden.

Also wann $a = cc$ so ist $\sqrt{a} = c$, und man wird haben

$$\sqrt{(cc+b)} = c + \frac{1}{2}\cdot\frac{b}{c} - \frac{1}{8}\cdot\frac{bb}{c^3} + \frac{1}{16}\cdot\frac{b^3}{c^5} - \frac{5}{128}\cdot\frac{b^4}{c^7} \text{ etc.}$$

Hierdurch kann man aus einer jeglichen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, davon einer ein Quadrat ist welcher durch cc angedeutet wird. Will man z. E. die Quadrat-Wurzel von 6 haben, so setzt man $6 = 4 + 2$, und da wird $cc = 4$, $c = 2$ und $b = 2$, dahero bekommt man $\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}$ etc. Nimmt man hiervon nur die zwey ersten Glieder, so bekommt man $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$, wovon das Quadrat $\frac{25}{4}$ nur um $\frac{1}{4}$ größer ist als 6. Nimmt man drey Glieder so hat man $2\frac{7}{16} = \frac{39}{16}$, wovon das Quadrat $\frac{1521}{256}$ nur um $\frac{15}{256}$ zu klein ist.

366.

Bey eben diesem Exempel, weil $\frac{5}{2}$ der Wahrheit schon sehr nahe kommt, so kann man setzen $6 = \frac{25}{4} - \frac{1}{4}$.

Also wird $cc = \frac{25}{4}$, $c = \frac{5}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$. Woraus wir nur die zwey ersten Glieder berechnen wollen, da dann kommt

$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} - \frac{1}{20} = \frac{49}{20},$$

wovon das Quadrat $\frac{2401}{400}$ nur um $\frac{1}{400}$ größer ist als 6.

Setzen wir nun $6 = \frac{2401}{400} - \frac{1}{400}$ so wird $c = \frac{49}{20}$ und $b = -\frac{1}{400}$. Woraus wiederum nur die zwey ersten Glieder genommen geben

$$\sqrt{6} = \frac{49}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{400}}{\frac{49}{20}} = \frac{49}{20} - \frac{1}{1960} = \frac{4801}{1960}$$

wovon das Quadrat $= \frac{23049601}{3841600}$. Nun aber ist $6 = \frac{23049600}{3841600}$, also ist der Fehler nur $\frac{1}{3841600}$.

367.

Eben so kann man auch die Cubic-Wurzel aus $a+b$ durch eine unendliche Reihe ausdrücken. Dann da $\sqrt[3]{(a+b)} = (a+b)^{\frac{1}{3}}$ so wird in unserer allgemeinen Formel $n = \frac{1}{3}$, und daher für die Coefficienten

$$\frac{n}{1} = \frac{1}{3},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{1}{3},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{9},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{2}{3},\ \frac{n-4}{5} = -\frac{11}{15} \text{ etc.}$$

Für die Potestäten von a aber ist

$$a^n = \sqrt[3]{a},\ a^{n-1} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a},\ a^{n-2} = \frac{\sqrt[3]{a}}{aa},\ a^{n-3} = \frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} \text{ etc.}$$

dahero erhalten wir

$$\sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}\cdot b\frac{\sqrt[3]{a}}{a} - \frac{1}{9}\cdot bb\frac{\sqrt[3]{a}}{aa} + \frac{5}{81}\cdot b^3\frac{\sqrt[3]{a}}{a^3} - \frac{10}{243}\cdot b^4\frac{\sqrt[3]{a}}{a^4} \text{ etc.}$$

368.

Wann also a ein Cubus nemlich $a = c^3$ so wird $\sqrt[3]{a} = c$, und also fallen die Wurzel-Zeichen weg. Dahero man haben wird

$$\sqrt[3]{(c^3+b)} = c + \frac{1}{3}\cdot\frac{b}{cc} - \frac{1}{9}\cdot\frac{bb}{c^5} + \frac{5}{81}\cdot\frac{b^3}{c^8} - \frac{10}{243}\cdot\frac{b^4}{c^{11}} \text{ etc.}$$

369.

Durch Hülfe dieser Formel kann man nun die Cubic-Wurzel von einer jeglichen Zahl durch die Näherung finden, weil sich eine jede Zahl in zwey Theile zertheilen läßt, wie c^3+b, davon der erste ein Cubus ist.

Also wann man die Cubic-Wurzel von 2 verlangt, so setze man $2 = 1+1$, da wird $c = 1$ und $b = 1$, folglich $\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{5}{81}$ etc. wovon die zwey ersten Glieder geben $1\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ dessen Cubus $\frac{64}{27}$ um $\frac{10}{27}$ zu groß ist. Man setze demnach $2 = \frac{64}{27} - \frac{10}{27}$, so wird $c = \frac{4}{3}$ und $b = -\frac{10}{27}$ und dahero

$$\sqrt[3]{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{-\frac{10}{27}}{\frac{16}{9}}.$$

Diese zwey Glieder geben $\frac{4}{3} - \frac{5}{72} = \frac{91}{72}$, wovon der Cubus ist $\frac{753571}{373248}$. Nun aber ist $2 = \frac{746496}{373248}$ also ist der Fehler $\frac{7075}{373248}$. Und solcher Gestalt kann man wann man will, immer näher kommen, insonderheit wann man mehr Glieder nehmen will.

CAPITEL 13

VON DER ENTWICKELUNG DER NEGATIVEN POTESTÄTEN

370.

Es ist oben gezeigt worden, daß $\frac{1}{a}$ durch a^{-1} könne ausgedrückt werden, dahero wird auch $\frac{1}{a+b}$ durch $(a+b)^{-1}$ ausgedrückt, also daß der Bruch $\frac{1}{a+b}$ als eine Potestät von $a+b$, deren Exponent -1 ist, kann angesehen werden: woher sich die oben gefundene Reihe für $(a+b)^n$ auch auf diesen Fall erstrecket.

371.

Da nun $\frac{1}{a+b}$ so viel ist als $(a+b)^{-1}$, so setze man in der oben gefundenen Formel $n=-1$, so wird man erstlich für die Coefficienten haben:

$$\frac{n}{1}=-1,\ \frac{n-1}{2}=-1,\ \frac{n-2}{3}=-1,\ \frac{n-3}{4}=-1,\ \frac{n-4}{5}=-1 \text{ etc.}$$

hernach für die Potestäten von a:

$$a^n=a^{-1}=\frac{1}{a},\quad a^{n-1}=\frac{1}{a^2},\quad a^{n-2}=\frac{1}{a^3},\quad a^{n-3}=\frac{1}{a^4} \text{ etc.}$$

Dahero erhalten wir

$$(a+b)^{-1}=\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6} \text{ etc.}$$

welche eben diejenige Reihe ist, die schon oben [§ 300] durch die Division gefunden worden.

372.

Da ferner $\frac{1}{(a+b)^2}$ so viel ist als $(a+b)^{-2}$ so kann auch diese Formel in eine unendliche Reihe aufgelößt werden.

Man setze nemlich $n=-2$ so hat man erstlich für die Coefficienten:

$$\frac{n}{1}=-\frac{2}{1},\ \frac{n-1}{2}=-\frac{3}{2},\ \frac{n-2}{3}=-\frac{4}{3},\ \frac{n-3}{4}=-\frac{5}{4} \text{ etc.}$$

und für die Potestäten von a hat man

$$a^n=\frac{1}{a^2},\quad a^{n-1}=\frac{1}{a^3},\quad a^{n-2}=\frac{1}{a^4},\quad a^{n-3}=\frac{1}{a^5} \text{ etc.}$$

daher erhalten wir

$$(a+b)^{-2}=\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{b}{a^3}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{b^2}{a^4}-\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{b^3}{a^5}+\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{b^4}{a^6} \text{ etc.}$$

Nun aber ist

$$\frac{2}{1} = 2,\ \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2} = 3,\ \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 4,\ \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4} = 5 \text{ etc.}$$

Also werden wir haben

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{a^2} - 2\frac{b}{a^3} + 3\frac{b^2}{a^4} - 4\frac{b^3}{a^5} + 5\frac{b^4}{a^6} - 6\frac{b^5}{a^7} + 7\frac{b^6}{a^8} \text{ etc.}$$

373.

Setzen wir weiter $n = -3$ so bekommen wir eine Reihe für $(a+b)^{-3}$ das ist für $\frac{1}{(a+b)^3}$. Für die Coefficienten wird also seyn:

$$\frac{n}{1} = -\frac{3}{1},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{4}{2},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{5}{3},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{6}{4} \text{ etc.}$$

für die Potestäten von a aber

$$a^n = \frac{1}{a^3},\quad a^{n-1} = \frac{1}{a^4},\quad a^{n-2} = \frac{1}{a^5} \text{ etc.}$$

Woraus wir erhalten

$$\frac{1}{(a+b)^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{3}{1}\frac{b}{a^4} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\frac{b^2}{a^5} - \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\frac{b^3}{a^6} + \frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{4}\frac{b^4}{a^7} \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{a^3} - 3\frac{b}{a^4} + 6\frac{b^2}{a^5} - 10\frac{b^3}{a^6} + 15\frac{b^4}{a^7} - 21\frac{b^5}{a^8} + 28\frac{b^6}{a^9} - 36\frac{b^7}{a^{10}} + 45\frac{b^8}{a^{11}} \text{ etc.}$$

Last uns ferner setzen $n = -4$ so haben wir für die Coefficienten:

$$\frac{n}{1} = -\frac{4}{1},\ \frac{n-1}{2} = -\frac{5}{2},\ \frac{n-2}{3} = -\frac{6}{3},\ \frac{n-3}{4} = -\frac{7}{4} \text{ etc.}$$

für die Potestäten von a aber

$$a^n = \frac{1}{a^4},\quad a^{n-1} = \frac{1}{a^5},\quad a^{n-2} = \frac{1}{a^6},\quad a^{n-3} = \frac{1}{a^7},\quad a^{n-4} = \frac{1}{a^8} \text{ etc.}$$

Woraus gefunden wird:

$$\frac{1}{(a+b)^4} = \frac{1}{a^4} - \frac{4}{1}\frac{b}{a^5} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\frac{b^2}{a^6} - \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\frac{b^3}{a^7} + \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{3}\cdot\frac{7}{4}\frac{b^4}{a^8} \text{ etc.}$$

$$= \frac{1}{a^4} - 4\frac{b}{a^5} + 10\frac{b^2}{a^6} - 20\frac{b^3}{a^7} + 35\frac{b^4}{a^8} - 56\frac{b^5}{a^9} \text{ etc.}$$

374.

Hieraus können wir nun sicher schließen, daß man für eine jegliche dergleichen negative Potestät auf eine allgemeine Art haben werde:

$$\frac{1}{(a+b)^m} = \frac{1}{a^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{b}{a^{m+1}} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\frac{b^2}{a^{m+2}} - \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\frac{b^3}{a^{m+3}} \text{ etc.}$$

Aus welcher Formel nun alle dergleichen Brüche in unendliche Reihen verwandelt werden, wo man auch so gar für m Brüche annehmen kann um irrationale Formeln auszudrücken.

375.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch folgendes anführen: Da wir gefunden haben, daß

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ etc.}$$

so wollen wir diese Reihe mit $a+b$ multipliciren, weil alsdann die Zahl herauskommen muß 1. Die Multiplication wird aber also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \frac{b^4}{a^5} - \frac{b^5}{a^6} \text{ etc.} \\
a + b \\
\hline
1 - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{aa} - \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} - \frac{b^5}{a^5} \text{ etc.} \\
\quad + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{aa} + \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5} \text{ etc.} \\
\hline
\end{array}$$

Product 1 wie nothwendig folgen muß.

376.

Da wir ferner gefunden haben

$$\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ etc.}$$

wann man diese Reihe mit $(a+b)^2$ multiplicirt, so muß ebenfals 1 herauskommen. Es ist aber $(a+b)^2 = aa + 2ab + bb$ und die Multiplication wird also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{aa} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3bb}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5} + \frac{5b^4}{a^6} - \frac{6b^5}{a^7} \text{ etc.} \\
aa + 2ab + bb \\
\hline
1 - \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{a^2} - \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} - \frac{6b^5}{a^5} \text{ etc.} \\
\quad + \frac{2b}{a} - \frac{4bb}{a^2} + \frac{6b^3}{a^3} - \frac{8b^4}{a^4} + \frac{10b^5}{a^5} \text{ etc.} \\
\qquad + \frac{bb}{a^2} - \frac{2b^3}{a^3} + \frac{3b^4}{a^4} - \frac{4b^5}{a^5} \text{ etc.} \\
\hline
\end{array}$$

Product 1 wie die Natur der Sache erfordert.

377.

Solte man aber diese für $\frac{1}{(a+b)^2}$ gefundene Reihe nur mit $a+b$ multipliciren, so müste $\frac{1}{a+b}$ herauskommen, oder die für diesen Bruch oben gefundene Reihe $\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}-\frac{b^5}{a^6}$ etc. welches auch die folgende Multiplication bestätigen wird.

$$
\begin{array}{l}
\frac{1}{aa}-\frac{2b}{a^3}+\frac{3bb}{a^4}-\frac{4b^3}{a^5}+\frac{5b^4}{a^6}\text{ etc.}\\
a+b\\
\hline
\frac{1}{a}-\frac{2b}{a^2}+\frac{3bb}{a^3}-\frac{4b^3}{a^4}+\frac{5b^4}{a^5}\text{ etc.}\\
\quad+\frac{b}{a^2}-\frac{2bb}{a^3}+\frac{3b^3}{a^4}-\frac{4b^4}{a^5}\text{ etc.}\\
\hline
\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}+\frac{b^2}{a^3}-\frac{b^3}{a^4}+\frac{b^4}{a^5}\text{ etc.}
\end{array}
$$

ENDE DES ZWEYTEN ABSCHNITTS

DES ERSTEN THEILS DRITTER ABSCHNITT

VON DEN VERHÄLTNISSEN UND PROPORTIONEN

CAPITEL 1

VON DER ARITHMETISCHEN VERHÄLTNISS ODER DEM UNTERSCHEID ZWISCHEN ZWEYEN ZAHLEN

378.

Entweder sind zwey Größen einander gleich, oder einander ungleich. Im letztern Fall ist eine größer als die andere, und wann man nach ihrer Ungleichheit fragt, so kann dies auf zweyerley weise geschehen; dann entweder fragt man um wie viel die eine größer sey als die andere? oder man fragt wie viel mal die eine größer sey als die andere? Beyderley Bestimmung wird ein Verhältniß genennt, und die erstere pflegt eine Arithmetische Verhältniß, die letztere aber eine Geometrische genennt zu werden. Welche Benennungen aber mit der Sache selbst keine Gemeinschaft haben, sondern willkührlich eingeführt worden sind.

379.

Es versteht sich hier von selbsten, daß die Größen einerley Art seyn müßen, weil sonsten nichts von ihrer Gleichheit, oder Ungleichheit bestimmt werden kann. Dann es würde ungereimt seyn wann einer z. E. fragen wolte, ob 2 ℔ und 3 Ellen einander gleich oder ungleich wären? Dahero ist hier allenthalben von Größen einerley Art die Rede, und da sich dieselbe immer durch Zahlen anzeigen laßen, so wird wie schon anfänglich gemeldet worden, hier nur von bloßen Zahlen gehandelt.

380.

Wann also von zwey Zahlen gefragt wird um wie viel die eine größer sey als die andere, so wird durch die Antwort ihr Arithmetisches Verhältniß bestimmt. Da nun solches geschiehet, wann man den Unterscheid zwischen den beyden Zahlen anzeigt, so ist ein Arithmetisches Verhältniß nichts anders als der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen. Welches letztere Wort (Unterscheid) füglicher gebraucht wird, so daß das Wort Verhältniß nur allein bey den so genanten Geometrischen Verhältnißen beybehalten wird.

381.

Der Unterscheid zwischen zweyen Zahlen wird aber gefunden, wann man die kleinere von der größern subtrahirt und dadurch erhält man die Antwort auf die Frage um wie viel die eine größer sey als die andere. Wann also die beyden Zahlen einander gleich sind, so ist der Unterscheid nichts oder Null und wann man fragt um viel die eine größer sey als die andere? so muß man antworten, um nichts. Da z. E. $6 = 2 \cdot 3$ so ist der Unterscheid zwischen 6 und $2 \cdot 3$ nichts.

382.

Sind aber die beyden Zahlen ungleich als 5 und 3 und man fragt um wie viel 5 größer sey als 3, so ist die Antwort um 2; welche gefunden wird wann man 3 von 5 subtrahiret. Eben so ist 15 um 5 größer als 10, und 20 ist um 8 größer als 12.

383.

Hier kommen also drey Sachen zu betrachten vor; erstlich die größere Zahl, zweytens die kleinere, und drittens der Unterscheid, welche unter sich eine solche Verbindung haben, daß man immer aus zwey derselben die dritte finden kann. Es sey die größere $= a$ die kleinere $= b$ und der Unterscheid, welcher auch die Differenz genennt wird, $= d$: so wird der Unterscheid d gefunden, wann man b von a subtrahirt, also daß $d = a - b$; woraus erhellet, wie man, wann a und b gegeben sind, d finden soll.

384.

Wann aber die kleinere Zahl b nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die größere daraus gefunden, wann man den Unterscheid zu der kleinern Zahl addirt, daher bekommt man die größere $a = b + d$. Dann wann man von $b+d$ die kleinere b abzieht, so bleibt übrig d, welches der vorgegebene Unterscheid ist. Gesetzt die kleinere Zahl sey 12 und der Unterscheid 8 so wird die größere seyn $=20$.

385.

Wann aber die größere Zahl a nebst dem Unterscheid d gegeben ist, so wird die kleinere b gefunden, wann man den Unterscheid von der größeren Zahl subtrahirt. Dahero bekommt man $b=a-d$. Dann wann ich diese Zahl $a-d$ von der größeren a subtrahire, so bleibt übrig d, welches der gegebene Unterscheid ist.

386.

Diese drey Zahlen a, b, d sind also dergestalt mit einander verbunden, daß man daraus die drey folgenden Bestimmungen erhält. 1stens hat man $d=a-b$, 2tens $a=b+d$ und 3tens $b=a-d$, und wann von diesen drey Vergleichungen eine wahr ist, so sind auch die beyden andern nothwendig wahr. Wann dahero überhaupt $z=x+y$, so ist auch nothwendig $y=z-x$ und $x=z-y$.

387.

Bey einem solchem Arithmetischen Verhältniß ist zu mercken, daß wann zu den beyden Zahlen a und b eine beliebige Zahl c entweder addirt, oder davon subtrahirt wird, der Unterscheid eben derselbe bleibet. Also wann d der Unterscheid ist zwischen a und b so ist auch d der Unterscheid zwischen den beyden Zahlen $a+c$ und $b+c$, und auch zwischen $a-c$ und $b-c$. Da zum Exempel zwischen diesen Zahlen 20 und 12 der Unterscheid 8 ist, so bleibt auch dieser Unterscheid, wann man zu denselben Zahlen 20 und 12 eine Zahl nach Belieben entweder addirt oder subtrahirt.

388.

Der Beweis hievon ist offenbahr. Dann wann $a-b=d$ so ist auch $(a+c)-(b+c)=d$. Eben so wird auch seyn $(a-c)-(b-c)=d$.

389.

Wann die beyden Zahlen a und b verdoppelt werden, so wird auch der Unterscheid zweymal so groß. Wann also $a-b=d$ so wird seyn $2a-2b=2d$; und allgemein wird man haben $na-nb=nd$, was man auch immer vor eine Zahl für n annimmt.

CAPITEL 2

VON DEN ARITHMETISCHEN PROPORTIONEN

390.

Wann zwey Arithmetische Verhältniße einander gleich sind, so wird die Gleichheit derselben eine Arithmetische Proportion genennt.

Also wann $a - b = d$ und auch $p - q = d$, so daß der Unterscheid zwischen den Zahlen p und q eben so groß ist, als zwischen den Zahlen a und b; so machen diese vier Zahlen eine Arithmetische Proportion aus, welche also geschrieben wird $a - b = p - q$, als wodurch deutlich angezeigt wird, daß der Unterscheid zwischen a und b eben so groß sey als zwischen p und q.

391.

Eine Arithmetische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern, welche so beschaffen seyn müßen, daß wann man das zweyte von dem ersten subtrahirt, eben so viel übrig bleibt, als wann man das vierte von dem dritten subtrahirt. Also machen diese Zahlen 12, 7, 9, 4, eine Arithmetische Proportion aus, weil $12 - 7 = 9 - 4$.

392.

Wann man eine Arithmetische Proportion hat, als $a - b = p - q$, so laßen sich darinn das zweyte und dritte Glied verwechseln und es wird auch seyn $a - p = b - q$. Dann da $a - b = p - q$ so addire man erstlich beyderseits b und da hat man $a = b + p - q$. Hernach subtrahire man beyderseits p, so bekommt man $a - p = b - q$. Da also $12 - 7 = 9 - 4$ so ist auch $12 - 9 = 7 - 4$.

393.

In einer jeglichen Arithmetischen Proportion kann man auch das erste Glied mit dem zweyten und zugleich das dritte mit dem vierten verwechseln. Dann wann $a - b = p - q$ so ist auch $b - a = q - p$. Dann $b - a$ ist das Negative von $a - b$ und eben so ist auch $q - p$ das Negative von $p - q$. Da nun $12 - 7 = 9 - 4$ so ist auch $7 - 12 = 4 - 9$.

394.

Insonderheit aber ist bey einer jeglichen Arithmetischen Proportion diese Haupt-Eigenschaft wohl zu bemercken, daß die Summ des zweyten und dritten Glieds immer eben so groß sey, als die Summ des ersten und vierten Glieds. Welches auch also ausgesprochen wird daß die Summ der mittlern Glieder so groß sey als die Summ der äußern. Also da $12 - 7 = 9 - 4$ so ist $7 + 9 = 12 + 4$, dann jedes macht 16.

395.

Um diese Haupt-Eigenschaft zu beweisen, so sey $a - b = p - q$; man addire beyderseits $b + q$ so bekommt man $a + q = b + p$, das ist die Summ des ersten und vierten ist gleich der Summ des zweyten und dritten. Hinwiederum auch wann vier Zahlen als a, b, p, q, so beschaffen sind, daß die Summ der zweyten und dritten so groß ist als die Summ der ersten und vierten, nemlich daß $b + p = a + q$, so sind dieselben Zahlen gewis in einer Arithmetischen Proportion und es wird seyn $a - b = p - q$. Dann da $a + q = b + p$ so subtrahire man beyderseits $b + q$, und da bekommt man $a - b = p - q$.

Da nun die Zahlen 18, 13, 15, 10, so beschaffen sind, daß die Summ der mittlern $13 + 15 = 28$ der Summe der äußern $18 + 10 = 28$ gleich ist, so sind dieselben auch gewis in einer Arithmetischen Proportion und folglich $18 - 13 = 15 - 10$.

396.

Aus dieser Eigenschaft kann man leicht folgende Frage auflösen: Wann von einer Arithmetischen Proportion die drey ersten Glieder gegeben sind, wie man daraus das vierte finden soll. Es seyn die drey ersten Glieder a, b, p und für das vierte, so gefunden werden soll, schreibe man q, so wird man haben $a + q = b + p$. Nun subtrahire man beyderseits a so bekommt man $q = b + p - a$. Also wird das vierte Glied gefunden, wann man das zweyte und dritte zusammen addirt und von der Summ das erste subtrahirt. Es seyn z. E. 19, 28, 13 die drey ersten Glieder, so ist die Summa des zweyten und dritten $= 41$ davon das erste 19 subtrahirt, bleibt 22 für das vierte Glied, und die Arithmetische Proportion wird seyn $19 - 28 = 13 - 22$, oder $28 - 19 = 22 - 13$, oder $28 - 22 = 19 - 13$.

397.

Wann in einer Arithmetischen Proportion das zweyte Glied dem dritten gleich ist, so hat man nur drey Zahlen, welche also beschaffen sind, daß die erste weniger der andern so groß ist als die andre weniger der dritten, oder daß der Unterscheid zwischen der ersten und andern so groß ist, als der Unterscheid zwischen der andern und dritten. Solche 3 Zahlen sind 19, 15, 11, weil $19 - 15 = 15 - 11$.

398.

Solche drey Zahlen schreiten in einer Arithmetischen Progression fort, welche entweder steigt, wann die zweyte um so viel die erste übersteigt, als die dritte die andere, wie in diesem Exempel 4, 7, 10, oder fält, wann die Zahlen um gleich viel kleiner werden, als 9, 5, 1.

399.

Es seyn die Zahlen a, b, c in einer Arithmetischen Progression, so muß seyn $a - b = b - c$ woraus folget, nach der Gleichheit der mittlern und der äußern Summ $2b = a + c$. Nimmt man beyderseits a weg so bekommt man $c = 2b - a$.

400.

Wann also von einer Arithmetischen Progression die zwey ersten Glieder gegeben sind als a, b so wird daraus das dritte gefunden, wann man das zweyte verdoppelt und davon das erste subtrahirt. Es seyn 1 und 3 die zwey ersten Glieder einer Arithmetischen Progression, so wird das dritte seyn $= 2 \cdot 3 - 1 = 5$, und aus den Zahlen 1, 3, 5 hat man diese Proportion $1 - 3 = 3 - 5$.

401.

Man kann nach dieser Regul weiter fortschreiten und wie man aus dem ersten und zweyten das dritte gefunden hat, so kann man aus dem zweyten und dritten das vierte u. s. f. finden, und solcher gestalt die Arithmetische Progression fortsetzen so weit man will. Es sey a das erste Glied und b das zweyte, so wird das dritte $= 2b - a$; das vierte $= 4b - 2a - b = 3b - 2a$; das fünfte $6b - 4a - 2b + a = 4b - 3a$; das sechste $= 8b - 6a - 3b + 2a = 5b - 4a$; das siebente $= 10b - 8a - 4b + 3a = 6b - 5a$ etc.

CAPITEL 3

VON DEN ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN

402.

Eine Reihe Zahlen, welche immer um gleich viel wachsen oder abnehmen, aus so viel Gliedern dieselbe auch immer bestehen mag, wird eine Arithmetische Progression genennt.

Also machen die natürlichen Zahlen der Ordnung nach geschrieben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 etc., eine Arithmetische Progression weil dieselben immer um eins steigen und diese Reihe, als 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4, 1 etc., ist auch eine Arithmetische Progression, weil diese Zahlen immer um 3 abnehmen.

403.

Die Zahl um welche die Glieder einer Arithmetischen Progression größer oder kleiner werden, wird die Differenz oder der Unterscheid genennt. Wann also das erste Glied nebst der Differenz gegeben ist, so kann man die Arithmetische Progression so weit man will fortsetzen. Es sey z. E. das erste Glied $= 2$ und die Differenz $= 3$ so wird die steigende Progression seyn:

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29 \text{ etc.}$$

wo ein jedes Glied gefunden wird, wann man zu dem vorhergehenden die Differenz addirt.

404.

Man pflegt über die Glieder einer solchen Arithmetischen Progression die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. zu schreiben, damit man so gleich sehen könne das wie vielte Glied ein jegliches sey, und die also darüber geschriebene Zahlen werden die Zeiger genennt, das obige Exempel kommt daher also zu stehen:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	
Arith. Prog.	2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26,	29	etc.

woraus man sieht daß 29 das zehnte Glied sey.

405.

Es sey a das erste Glied und d die Differenz so wird die Arithmetische Progression also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, \\ a, & a+d, & a+2d, & a+3d, & a+4d, & a+5d, & a+6d, & a+7d \text{ etc.} \end{array}$$

woraus so gleich ein jegliches Glied gefunden werden kann, ohne daß man nöthig habe alle vorhergehende zu wißen und dieses blos allein aus dem ersten Glied a und der Differenz d. Also wird z. E. das 10te Glied seyn $= a + 9d$, das 100te $= a + 99d$, und auf eine allgemeine Art wird das $n$te Glied seyn $a + (n-1)d$.

406.

Wann die Arithmetische Progression irgendwo abgebrochen wird, so hat man insonderheit das erste Glied und das letzte zu bemercken, und der Zeiger des letzten wird die Anzahl der Glieder anzeigen. Wenn also das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so ist das letzte Glied $= a + (n-1)d$. Dasselbe wird also gefunden wann man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt, und dazu das erste Glied addirt. Man habe z. E. eine Arithmetische Progression von 100 Gliedern, wovon das erste $= 4$ und die Differenz $= 3$ so wird das letzte Glied seyn $99 \cdot 3 + 4 = 301$.

407.

Hat man das erste Glied $= a$ und das letzte $= z$ nebst der Anzahl der Glieder $= n$ so kann man daraus die Differenz $= d$ finden. Dann da das letzte Glied ist $z = a + (n-1)d$, so subtrahire man beyderseits a so hat man $z - a = (n-1)d$. Wann man also von dem letzten Glied das erste subtrahirt, so hat man die Differenz mit 1 weniger als die Anzahl der Glieder multiplicirt; oder $z - a$ ist das Product von $(n-1)$ in d. Man darf also nur $z - a$ durch $n - 1$ dividiren, so bekommt man die Differenz $d = \frac{z-a}{n-1}$, woraus diese Regul entspringt: Man subtrahirt vom letzten Glied das erste, den Rest theilt man durch die Anzahl der Glieder weniger eins, so bekommt man die Differenz; woraus man hernach die ganze Progression hinsetzen kann.

408.

Es hat z. E. einer eine Arithmetische Progression von 9 Gliedern, wovon das erste Glied 2 und das letzte 26, von welcher die Differenz gesucht werden soll. Man muß also das erste Glied 2 von dem letzten 26 subtrahiren und den Rest 24 durch $9-1$, das ist durch 8 dividiren, so bekommt man die Differenz $=3$, und die Progression selbst wird seyn:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
2,	5,	8,	11,	14,	17,	20,	23,	26.

Um ein ander Exempel zu geben; so sey das erste Glied 1, das letzte 2, und die Anzahl der Glieder 10, wovon die Arithmetische Progression verlangt wird. Hier bekommt man also zur Differenz $\frac{2-1}{10-1}=\frac{1}{9}$; woraus die verlangte Progression seyn wird:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10.
1,	$1\frac{1}{9}$,	$1\frac{2}{9}$,	$1\frac{3}{9}$,	$1\frac{4}{9}$,	$1\frac{5}{9}$,	$1\frac{6}{9}$,	$1\frac{7}{9}$,	$1\frac{8}{9}$,	2.

Noch ein Exempel. Es sey das erste Glied $2\frac{1}{3}$, das letzte $12\frac{1}{2}$ und die Anzahl der Glieder 7. Hieraus erhält man die Differenz

$$\frac{12\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}}{7-1}=\frac{10\frac{1}{6}}{6}=\frac{61}{36}=1\frac{25}{36};$$

folglich wird die Progression seyn:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.
$2\frac{1}{3}$,	$4\frac{1}{36}$,	$5\frac{13}{18}$,	$7\frac{5}{12}$,	$9\frac{1}{9}$,	$10\frac{29}{36}$,	$12\frac{1}{2}$.

409.

Wann ferner das erste Glied a und das letzte z, sammt der Differenz d gegeben ist, so kann man daraus die Anzahl der Glieder n finden. Dann da $z-a=(n-1)d$, so dividire man beyderseits mit d und da bekommt man $\frac{z-a}{d}=n-1$. Da nun n um eins größer ist als $n-1$, so wird $n=\frac{z-a}{d}+1$; folglich findet man die Anzahl der Glieder, wann man den Unterscheid zwischen dem ersten und letzten Glied $z-a$ durch die Differenz dividiret und zum Quotient $\frac{z-a}{d}$ noch eins addirt.

Es sey z. E. das erste Glied $=4$, das letzte $=100$, und die Differenz $=12$, so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{100-4}{12}+1=9$, und diese neun Glieder sind folgende:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
4,	16,	28,	40,	52,	64,	76,	88,	100.

Es sey das erste Glied $= 2$, das letzte $= 6$, und die Differenz $= 1\frac{1}{3}$ so wird die Anzahl der Glieder seyn $\frac{4}{1\frac{1}{3}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 2, & 3\frac{1}{3}, & 4\frac{2}{3}, & 6. \end{array}$$

Es sey ferner das erste Glied $= 3\frac{1}{3}$, das letzte $= 7\frac{2}{3}$, und die Differenz $= 1\frac{4}{9}$, so wird die Anzahl der Glieder $= \frac{7\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}}{1\frac{4}{9}} + 1 = 4$, und diese vier Glieder sind

$$\begin{array}{cccc} 1, & 2, & 3, & 4. \\ 3\frac{1}{3}, & 4\frac{7}{9}, & 6\frac{2}{9}, & 7\frac{2}{3}. \end{array}$$

410.

Es ist aber hier wohl zu mercken, daß die Anzahl der Glieder nothwendig eine gantze Zahl seyn muß. Wann man also bey obigem Exempel für n einen Bruch gefunden hätte, so wäre die Frage ungereimt gewesen.

Wann folglich für $\frac{z-a}{d}$ keine gantze Zahl gefunden würde so lies sich diese Frage nicht auflösen, und man müßte antworten, daß die Frage unmöglich wäre. Dahero muß sich bey dergleichen Fragen die Zahl $z - a$ durch d theilen laßen.

411.

Bey einer jeden Arithmetischen Progression kommen also folgende vier Stücke zu betrachten vor:

I. das erste Glied a,	III. das letzte Glied z,
II. die Differenz d,	IV. die Anzahl der Glieder n,

welche so beschaffen sind, daß wann drey derselben bekant, das vierte daraus bestimmt werden kann, als:

I. Wann a, d u. n bekandt sind, so hat man $z = a + (n-1)d$.

II. Wann z, d u. n bekandt sind, so hat man $a = z - (n-1)d$.

III. Wann a, z u. n bekandt sind, so hat man $d = \frac{z-a}{n-1}$.

IV. Wann a, z u. d bekandt sind, so hat man $n = \frac{z-a}{d} + 1$.

CAPITEL 4

VON DER SUMMATION DER ARITHMETISCHEN PROGRESSIONEN

412.

Wann eine Arithmetische Progression vorgelegt ist, so pflegt man auch die Summ derselben zu suchen, welche gefunden wird, wann man alle Glieder zusammen addirt. Da nun diese Addition sehr weitläuftig seyn würde wann die Progression aus sehr viel Gliedern besteht, so kann eine Regul gegeben werden, durch deren Hülfe diese Summ gantz leicht gefunden wird.

413.

Wir wollen erstlich eine solche bestimmte Progression betrachten, wo das erste Glied $= 2$, die Differenz $= 3$, das letzte Glied $= 29$, und die Anzahl der Glieder $=$ 10 ist.

$$\begin{array}{cccccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10. \\ 2, & 5, & 8, & 11, & 14, & 17, & 20, & 23, & 26, & 29. \end{array}$$

Hier ist nun die Summ des ersten und letzten Gliedes $= 31$, die Summa des zweyten und letzten ohne eins $= 31$, die Summa des dritten und letzten ohne zwey $= 31$, die Summa des vierten und letzten ohne drey $= 31$, und so ferner, woraus man sieht daß immer zwey Glieder die von dem ersten und letzten gleichweit entfernt sind, zusammen genommen, eben so viel ausmachen, als das erste und letzte zusammen.

414.

Der Grund davon fält auch so gleich in die Augen. Dann wann das erste Glied gesetzt wird $= a$ und das letzte $= z$, die Differenz aber $= d$, so ist die Summa des ersten und letzten $= a + z$. Hernach ist das zweyte Glied $a + d$ und das letzte ohne eins $= z - d$, welche zusammen genommen machen $a + z$. Ferner ist das dritte Glied $a + 2d$ und das letzte ohne zwey $= z - 2d$, welche zusammen betragen $a + z$. Woraus die Wahrheit des obigen Satzes erhellet.

415.

Um nun die Summa der obigen Progression zu finden, nemlich von

$$2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29,$$

so schreibe man darunter eben diese Progression rückwerts und addire Glied vor Glied wie folget

$$\begin{array}{r}
2+\ \ 5+\ \ 8+11+14+17+20+23+26+29\\
29+26+23+20+17+14+11+\ \ 8+\ \ 5+\ \ 2\\
\hline
31+31+31+31+31+31+31+31+31+31
\end{array}$$

welche gefundene und aus lauter gleichen Gliedern bestehende Reihe offenbahr zweymal so groß ist als die Summa unserer Progression. Die Anzahl dieser gleichen Glieder ist 10, eben wie in der Progression, und also ist derselben Summa $= 10 \cdot 31 = 310$. Da nun diese Summa zwey mal so groß ist, als die Summa der Arithmetischen Progression, so wird die rechte Summa seyn $= 155$.

416.

Wann man auf diese Art mit einer jeglichen Arithmetischen Progression verfährt, wovon das erste Glied $= a$, das letzte $= z$, und die Anzahl der Glieder $= n$, indem man eben dieselbe Progression rückwerts darunter schreibt und Glied vor Glied addirt, so bekommt man für jedes Glied $a + z$, deren Anzahl $= n$, folglich ist die Summa derselben $= n(a + z)$ welche zweymal so groß ist, als die Summa der Progression, dahero ist die Summa der Arithmetischen Progression selbst $= \frac{n(a+z)}{2}$.

417.

Hieraus erlangen wir nun diese leichte Regul um die Summa einer jeglichen Arithmetischen Progression zu finden:

Man multiplicire die Summa des ersten und letzten Gliedes mit der Anzahl der Glieder, so wird die Hälfte dieses Products die Summa der gantzen Progression anzeigen.

Oder welches auf eins läuft: man multiplicire die Summa des ersten und letzten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder.

Oder auch, man multiplicire die halbe Summa des ersten und letzten Glieds mit der gantzen Anzahl der Glieder, so bekommt man die Summa der gantzen Progression.

418.

Es ist nöthig diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern. Es sey demnach gegeben die Progression der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, bis 100, von welchen die Summa gesucht werden soll. Diese wird nach der ersten Regul seyn $\frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$.

Es wird ferner gefragt, wie viel Schläge eine Schlag-Uhr in 12 Stunden thue? zu diesem Ende müßen die Zahlen 1, 2, 3, bis 12, zusammen addirt werden, die Summa wird also seyn $\frac{12 \cdot 13}{2} = 6 \cdot 13 = 78$.

Wollte man die Summa von eben dieser Reihe bis 1000 fortgesetzt wißen, so würde dieselbe herauskommen 500500; bis 10000 fortgesetzt, wird dieselbe seyn $= 50005000$.

419.

Frage: Einer kauft ein Pferd mit dieser Bedingung: für den ersten Huffnagel zahlt er 5 Copeken, für den zweyten 8, für den dritten 11, und immer 3 Copeken mehr für einen jeden folgenden. Es sind aber in allem 32 Nägel, wie theuer kommt ihm das Pferd zu stehen?

Hier wird also die Summa von einer Arithmetischen Progression, deren erstes Glied $= 5$, die Differenz $= 3$, und die Anzahl der Glieder $= 32$ ist, gesuchet.

Hier muß nun zuförderst das letzte Glied gesucht werden, welches nach obiger Regul gefunden wird $= 5 + 31 \cdot 3 = 98$, und hieraus ergiebt sich die gesuchte Summa $\frac{103 \cdot 32}{2} = 103 \cdot 16$; also kommt das Pferd 1648 Copeken, oder 16 Rbl. 48 Cop. zu stehen.

420.

Es sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa der gantzen Progression gefunden werden soll: da nun das letzte Glied seyn muß $= a + (n-1)d$, so ist die Summa des ersten und letzten Gliedes $= 2a + (n-1)d$, welche mit der Anzahl der Glieder n multiplicirt, giebt $2na + n(n-1)d$, daher die gesuchte Summa seyn wird $= na + \frac{n(n-1)}{2} d$.

Nach dieser Formel, weil in dem obigen Exempel $a = 5$, $d = 3$, und $n = 32$ war, so erhält man die Summa

$$5 \cdot 32 + \frac{31 \cdot 32 \cdot 3}{2} = 160 + 1488 = 1648$$

wie vorher.

421.

Wann die Reihe der natürlichen Zahlen 1, 2, 3 und so fort bis n zusammen addirt werden soll, so hat man um diese Summa zu finden, das erste Glied $= 1$, das letzte $= n$ und die Anzahl der Glieder $= n$, woraus die Summa gefunden wird $\frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Setzt man $n = 1766$[1]), so wird die Summa aller Zahlen von 1 bis 1766 seyn $= 883 \cdot 1767 = 1560261$.

422.

Es sey gegeben die Progression der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 etc. welche bis auf n Glieder fortgesetzt sind, wovon die Summa verlangt wird:

Hier ist nun das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 2$, die Anzahl der Glieder $= n$; daraus wird das letzte Glied seyn $1 + (n - 1)2 = 2n - 1$, daraus erhält man die gesuchte Summa $= nn$.

Folglich darf man nur die Anzahl der Glieder mit sich selbst multipliciren. Man mag also von dieser Progression so viel Glieder zusammen addiren als man will, so ist die Summa immer ein Quadrat, uemlich das Quadrat der Anzahl der Glieder, wie aus folgendem zu ersehen.

Glied.	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10 etc.
Prog.	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19 etc.
Sum.	1,	4,	9,	16,	25,	36,	49,	64,	81,	100 etc.

423.

Es sey ferner das erste Glied $= 1$, die Differenz $= 3$ und die Anzahl der Glieder $= n$, so hat man diese Progression 1, 4, 7, 10 etc. wovon das letzte Glied seyn wird: $1 + (n - 1)3 = 3n - 2$; daher die Summa des ersten und letzten Glieds $= 3n - 1$; folglich die Summa der Progression $\frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$. Nimmt man $n = 20$, so ist die Summa $= 10 \cdot 59 = 590$.

424.

Es sey das erste Glied $= 1$, die Differenz $= d$, und die Anzahl der Glieder $= n$, so wird das letzte Glied seyn $1 + (n - 1)d$. Hierzu das erste addirt, giebt $2 + (n - 1)d$, mit der Anzahl der Glieder multiplicirt $2n + n(n - 1)d$, woher die Summa der Progression seyn wird $n + \frac{n(n-1)d}{2}$.

1) Siehe die Anmerkung p. 3. H. W.

Hier wollen wir folgendes Täfelgen anhängen:

wann $d = 1$,	so ist die Summa	$n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{nn+n}{2}$	
„ $d = 2$	„ „ „ „	$n + \frac{2n(n-1)}{2} = nn$	
„ $d = 3$	„ „ „ „	$n + \frac{3n(n-1)}{2} = \frac{3nn-n}{2}$	
„ $d = 4$	„ „ „ „	$n + \frac{4n(n-1)}{2} = 2nn-n$	
„ $d = 5$	„ „ „ „	$n + \frac{5n(n-1)}{2} = \frac{5nn-3n}{2}$	
„ $d = 6$	„ „ „ „	$n + \frac{6n(n-1)}{2} = 3nn-2n$	
„ $d = 7$	„ „ „ „	$n + \frac{7n(n-1)}{2} = \frac{7nn-5n}{2}$	
„ $d = 8$	„ „ „ „	$n + \frac{8n(n-1)}{2} = 4nn-3n$	
„ $d = 9$	„ „ „ „	$n + \frac{9n(n-1)}{2} = \frac{9nn-7n}{2}$	
„ $d = 10$	„ „ „ „	$n + \frac{10n(n-1)}{2} = 5nn-4n$	etc.

CAPITEL 5

VON DEN FIGURIRTEN ODER VIELECKIGTEN ZAHLEN

425.

Die Summation der Arithmetischen Progressionen, welche von 1 anfangen und deren Differenz entweder 1 oder 2 oder 3 oder eine andere beliebige gantze Zahl ist, leitet uns auf die Lehre von den vieleckigten Zahlen, welche entstehen, wann man einige Glieder von solchen Progressionen zusammen addirt.

426.

Setzt man die Differenz $= 1$, indem das erste Glied beständig 1 ist, so entsteht daher diese Arithmetische Progression

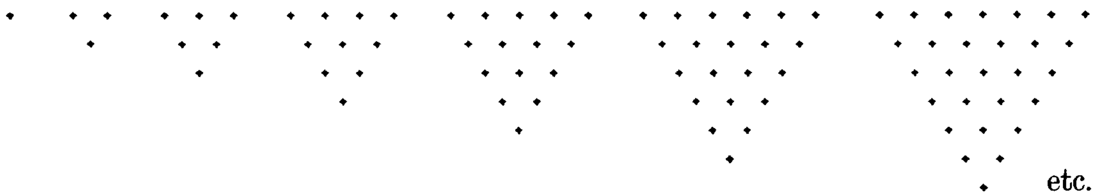
$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12 \text{ etc.}$$

Nimmt man nun in derselben die Summa von einem, zweyen, dreyen, vieren etc. Gliedern, so entsteht daraus diese Reihe von Zahlen

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ 36,\ 45,\ 55,\ 66,\ 78 \text{ etc.}$$

Also daß $1 = 1$, $3 = 1 + 2$, $6 = 1 + 2 + 3$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$ etc. Und es werden diese Zahlen dreyeckigte Zahlen genennet, weil sich, so viel Punckte als eine solche Zahl anzeigt durch ein Dreyeck vorstellen laßen, wie aus folgendem zu ersehen:

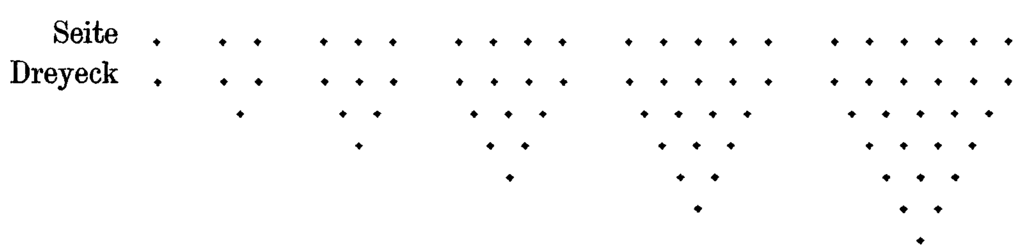
1 3 6 10 15 21 28



etc.

427.

Bey einem jeden dieser Dreyecke sieht man wie viel Punckte in einer jeden Seite sind: bey dem ersten ist nur eines, bey dem zweyten 2, bey dem dritten 3, bey dem vierten 4, u. s. f. Also nach der Anzahl der Punckte in einer Seite, welche schlechtweg die Seite genennt wird, verhalten sich die dreyeckigten Zahlen, oder die Anzahl aller Punckte, welche schlechtweg ein Dreyeck genennt wird, folgender Gestalt



428.

Hier kommt also die Frage vor, wie aus der gegebenen Seite das Dreyeck gefunden werden soll? welches aus dem obigen leicht geschehen kann:

Dann es sey die Seite $= n$, so wird das Dreyeck seyn

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots n,$$

deren Summe $= \frac{nn + n}{2}$, folglich wird das Dreyeck $\frac{nn + n}{2}$. Ist also $n = 1$ so wird das Dreyeck $= 1$.

Ist $n = 2$ so ist das Dreyeck $= 3$.
" $n = 3$ " " " " $= 6$.
" $n = 4$ " " " " $= 10$ und so fort.

Nimmt man $n = 100$, so wird das Dreyeck $= 5050$ etc.

429.

Diese Formel $\frac{nn+n}{2}$ wird nun die General-Formel für alle dreyeckigte Zahlen genennet: weil sich aus derselben für eine jede Seite, die durch n angedeutet wird, die dreyeckigte Zahl finden läßt.

Dieselbe Formel kann auch also vorgestellet werden $\frac{n(n+1)}{2}$, welche zu Erleichterung der Rechnung dienet, weil allezeit entweder n oder $n+1$ eine gerade Zahl ist und sich durch 2 theilen läßt.

Also wann $n=12$, so ist das Dreyeck $=\frac{12\cdot 13}{2}=6\cdot 13=78$. Ist $n=15$, so ist das Dreyeck $=\frac{15\cdot 16}{2}=15\cdot 8=120$ etc.

430.

Setzt man die Differenz $=2$ so hat man diese Arithmetische Progression

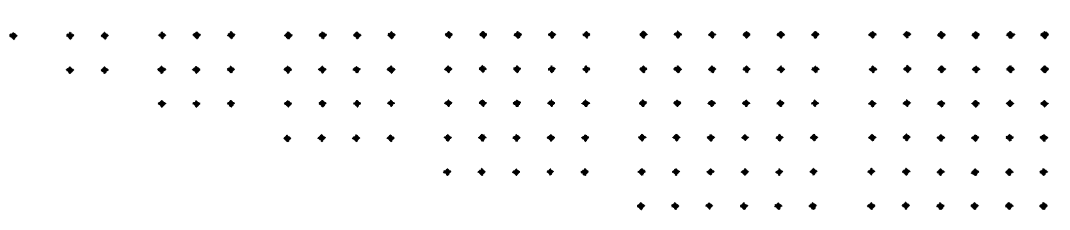
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 etc.

wovon die Summen diese Reihe ausmachen

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, etc.

welche Zahlen viereckigte Zahlen genennt werden, und eben diejenige sind, welche oben Quadrate genennet worden. Es lassen sich nehmlich so viel Punckte, als eine solche Zahl anzeigt, in ein Viereck setzen:

1 4 9 16 25 36 49



431.

Hier sieht man, daß die Seite eines solchen Vierecks eben so viel Punckte enthält, als die Quadrat-Wurzel davon anzeigt, also ist von der Seite 5 das Viereck 25, und von der Seite 6 das Viereck 36; überhaupt aber wann die Seite n ist, wodurch die Anzahl der Glieder dieser Progression 1, 3, 5, 7 etc. bis n angedeutet wird, so ist das Viereck die Summe derselben Glieder, welche oben gefunden worden $=nn$. Von diesem Viereck oder Quadrat aber ist schon oben ausführlich gehandelt worden.

432.

Setzt man die Differenz $= 3$ und nimmt gleicher Gestalt die Summen, so werden dieselben fünfeckigte Zahlen genennt, ob sich dieselben gleich nicht mehr so net durch Punckte vorstellen laßen. Dieselben schreiten demnach folgender Maßen fort.

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11	
Arith. Prog.	1,	4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28.	31	
Fünfeck	1,	5,	12,	22,	35,	51,	70,	92,	117,	145,	176	etc.

und der Zeiger weißt die Seite einer jeglichen.

433.

Wann also die Seite n gesetzt wird, so ist die fünfeckigte Zahl

$$= \frac{3nn - n}{2} = \frac{n(3n - 1)}{2}.$$

Wann z. E. $n = 7$ so ist das Fünfeck 70. Will man die fünfeckigte Zahl von der Seite 100 wißen, so setzt man $n = 100$ und bekommt 14950.

434.

Setzt man die Differenz $= 4$, so erhält man auf diese Art die sechseckigte Zahlen, welche also fortschreiten:

Zeiger	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10	
Arith. Prog.	1,	5,	9,	13,	17,	21,	25,	29,	33,	37	
Sechseck	1,	6,	15,	28,	45,	66,	91,	120,	153,	190	etc.

Wo der Zeiger wiederum die Seite eines jeden giebt.

435.

Wann also die Seite n ist, so wird die sechseckigte Zahl

$$= 2nn - n = n(2n - 1),$$

wobey zu mercken, daß alle diese sechseckigte Zahlen zugleich dreyeckigte Zahlen sind. Dann wann man in diese immer eine überspringt so erhält man die sechseckigte.

436.

Auf gleiche weise findet man die siebeneckigte, achteckigte, neuneckigte Zahlen, und so fort. Von welchen wir die General-Formeln hier insgesammt hersetzen wollen. Wann also die Seite n ist so wird seyn

$$\text{das Dreyeck} = \frac{nn+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{Viereck} = \frac{2nn+0n}{2} = nn,$$

$$\text{V eck} = \frac{3nn-n}{2} = \frac{n(3n-1)}{2},$$

$$\text{VI eck} = \frac{4nn-2n}{2} = 2nn-n = n(2n-1),$$

$$\text{VII eck} = \frac{5nn-3n}{2} = \frac{n(5n-3)}{2},$$

$$\text{VIII eck} = \frac{6nn-4n}{2} = 3nn-2n = n(3n-2),$$

$$\text{IX eck} = \frac{7nn-5n}{2} = \frac{n(7n-5)}{2},$$

$$\text{X eck} = \frac{8nn-6n}{2} = 4nn-3n = n(4n-3),$$

$$\text{XI eck} = \frac{9nn-7n}{2} = \frac{n(9n-7)}{2},$$

$$\text{XII eck} = \frac{10nn-8n}{2} = 5nn-4n = n(5n-4),$$

$$\text{XX eck} = \frac{18nn-16n}{2} = 9nn-8n = n(9n-8),$$

$$\text{XXV eck} = \frac{23nn-21n}{2} = \frac{n(23n-21)}{2},$$

$$m\,\text{eck} = \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}.$$

437.

Wann also die Seite n ist, so hat man auf eine allgemeine Art die $m$eckigte Zahl $= \frac{(m-2)nn-(m-4)n}{2}$ woraus man alle nur mögliche vieleckigte

Zahlen finden kann, deren Seite $= n$. Wollte man daraus die zweyeckigte Zahlen finden, so würde $m = 2$ und dieselbe $= n$ seyn.

Setzt man $m = 3$ so wird die IIIeckigte Zahl $= \frac{nn+n}{2}$.

Setzt man $m = 4$ so wird die IV eckigte Zahl $= nn$ etc.

438.

Um diese Regul mit einigen Exempeln zu erläutern, so suche man die XXV eckigte Zahl, deren Seite 36 ist? Man suche erstlich vor die Seite n die XXV eckigte Zahl, so wird dieselbe $= \frac{23nn - 21n}{2}$. Nun setze man $n = 36$, so bekommt man die gesuchte Zahl $= 14526$.

439.

Frage: Einer hat ein Haus gekauft und wird gefragt wie theuer? darauf antwortet er, die Zahl der Rubel, die er dafür bezahlet, sey die 365 eckigte Zahl von 12.

Um nun diese Zahl zu finden so wird $m = 365$ und also das 365 eck von n $= \frac{363nn - 361n}{2}$. Nun ist $n = 12$, woraus der gesuchte Preis des Haußes seyn wird 23970 Rubel.

CAPITEL 6

VON DEM GEOMETRISCHEN VERHÄLTNISS

440.

Das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen enthält die Antwort auf die Frage, wie viel mal die eine Zahl größer sey als die andere? und wird gefunden, wann man die eine durch die andere dividirt, da dann der Quotient die Benennung des Verhältnißes anzeigt.

441.

Es kommen demnach bey einem Geometrischen Verhältniß drey Sachen zu betrachten vor. Erstlich, die erste der beyden vorgegebenen Zahlen, welche der Vorsatz genennet wird. Zweytens, die andere derselben, welche der Nachsatz genennt wird. Drittens, die Benennung des Verhältnißes, welche gefunden wird, wann man den Vorsatz durch den Nachsatz dividirt: als wann zwischen den Zahlen 18 und 12 das Verhältniß angezeigt werden soll, so ist 18 der Vorsatz, 12 der Nachsatz und die Benennung wird seyn $\frac{18}{12} = 1\frac{1}{2}$; woraus man erkennt, daß der Vorsatz 18 den Nachsatz 12 einmal und noch $\frac{1}{2}$ mal in sich begreiffe.

442.

Um das Geometrische Verhältniß zwischen zweyen Zahlen anzuzeigen, bedient man sich zweyer über einander gesetzten Punckte, welche zwischen dem Vorsatz und Nachsatz gesetzt werden.

Also $a:b$ zeigt das Verhältniß zwischen a und b an, welches Zeichen, wie schon oben bemerckt worden, auch die Division anzuzeigen pflegt, und eben deswegen hier gebraucht wird, weil um dieses Verhältniß zu erkennen, die Zahl a durch b getheilt werden muß; dieses Zeichen wird also mit Worten ausgesprochen: a verhält sich zu b, oder schlecht weg a zu b.

443.

Die Benennung eines solchen Verhältnißes wird demnach durch einen Bruch vorgestellt, dessen Zehler der Vorsatz, der Nenner aber der Nachsatz ist. Um der Deutlichkeit willen aber muß man diesen Bruch immer in seine kleinste Form bringen, welches geschieht, wann man den Zehler und Nenner durch ihren größten gemeinen Theiler theilet, wie oben geschehen, da der Bruch $\frac{18}{12}$ auf $\frac{3}{2}$ ist gebracht worden indem man den Zehler und Nenner durch 6 getheilt hat.

444.

Die Verhältniße sind also nur in so fern unterschieden, als ihre Benennung verschieden ist, und es giebt daher so viel verschiedene Arten von Verhältnißen, als verschiedene Benennungen gefunden werden können.

Die erste Art ist nun ohnstreitig, wann die Benennung 1 wird; und dieses geschieht, wann die beyden Zahlen gleich sind, als $3:3$, $4:4$, $a:a$ wovon die Benennung 1 wird, und deswegen das Verhältniß der Gleichheit genennt wird.

Hierauf folgen diejenigen deren Benennung eine ganze Zahl wird, als $4:2$ wo die Benennung 2 ist. Ferner $12:4$ wo die Benennung 3 ist, und $24:6$ wo die Benennung 4 ist etc.

Hernach kommen solche vor, deren Benennung durch Brüche ausgedrückt werden. Als $12:9$ dessen Benennung $\frac{4}{3}$ oder $1\frac{1}{3}$ ist; $18:27$ dessen Benennung $\frac{2}{3}$ ist etc.

445.

Es sey nun a der Vorsatz, b der Nachsatz und die Benennung d, so haben wir schon gesehen, daß wann a und b gegeben, daraus gefunden werde $d = \frac{a}{b}$.

Ist aber der Nachsatz b nebst der Benennung d gegeben, so findet man daraus den Vorsatz $a = bd$ weil bd durch b dividirt d giebt, endlich wann der Vorsatz a nebst der Benennung d gegeben ist, so findet man daraus den Nachsatz $b = \frac{a}{d}$. Dann wann man den Vorsatz a durch diesen Nachsatz $\frac{a}{d}$ dividiret, so ist der Quotus d, das ist die Benennung.

446.

Ein jedes Verhältniß $a:b$ bleibt ohnverändert, wann man den Vorsatz und Nachsatz mit einerley Zahl entweder multiplicirt oder dividirt, weil die Benennung einerley bleibt. Dann wann d die Benennung von $a:b$ ist, also daß $d = \frac{a}{b}$, so ist auch von diesem Verhältniß $na:nb$ die Benennung $\frac{a}{b} = d$; und von diesem Verhältniß $\frac{a}{n}:\frac{b}{n}$ ist die Benennung gleichfals $\frac{a}{b} = d$.

447.

Wann die Benennung in die kleinste Form gebracht worden, so läßt sich daraus das Verhältniß deutlich erkennen und mit Worten ausdrücken. Nemlich wann die Benennung auf diesen Bruch $\frac{p}{q}$ gebracht worden so sagt man: $a:b = p:q$ das ist mit Worten a zu b wie p zu q. Also da von diesem Verhältniß $6:3$ die Benennung $\frac{2}{1}$ ist oder 2 so hat man $6:3 = 2:1$. Eben so sagt man $18:12 = 3:2$ und $24:18 = 4:3$ und ferner $30:45 = 2:3$. Läßt sich aber die Benennung nicht abkürzen, so wird auch das Verhältniß nicht deutlicher: dann wann man sagt $9:7 = 9:7$ so wird es nicht begreiflicher.

448.

Wann sich aber die Benennung auf sehr kleine Zahlen bringen läßt, so erhält man eine deutliche Erkenntniß von einem Verhältniß zwischen zwey sehr großen Zahlen. Also wann man sagt $288:144 = 2:1$, so ist die Sache gantz deutlich; und wann man fragt wie sich $105:70$ verhalte, so antwortet man wie $3:2$. Fragt man weiter wie sich $576:252$ verhalte, so antwortet man wie $16:7$.

449.

Um also ein jedes Verhältniß auf das deutlichste vorzustellen, so muß man die Benennung deßelben auf die geringste Zahlen zu bringen suchen, welches auf einmal geschehen kann, wann die beyden Glieder des Verhältnißes durch ihren größten gemeinen Theiler dividiret werden. Also das Verhältniß $576:252$ wird auf einmal zu diesem $16:7$ gebracht, wann man die beyden Zahlen 576 und 252 durch 36, welches ihr größter gemeiner Theiler ist, dividiret.

450.

Weil nun die Sache darauf ankommt, daß man von zwey gegebenen Zahlen ihren größten gemeinen Theiler zu finden wiße, so soll dazu in dem folgenden Capitel die nöthige Anleitung gegeben werden.

CAPITEL 7

VON DEM GRÖSSTEN GEMEINEN THEILER ZWEYER GEGEBENEN ZAHLEN

451.

Es giebt Zahlen, welche außer 1 keinen andern gemeinschaftlichen Theiler haben, und wann Zehler und Nenner eines Bruchs so beschaffen sind, so läßt sich derselbe auch in keine leichtere Form bringen.

Also sieht man, daß diese beyden Zahlen 48 und 35 keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, ohngeachtet eine jede vor sich ihre besondere Theiler hat. Deswegen kann auch das Verhältniß $48:35$ nicht leichter ausgedrückt werden, dann ob gleich sich beyde durch 1 theilen laßen, so werden doch dadurch die Zahlen nicht kleiner.

452.

Wann aber die Zahlen einen gemeinen Theiler haben, so wird derselbe, und so gar der größte gemeine Theiler durch folgende Regul gefunden.

Man dividire die größere Zahl durch die kleinere; durch den überbleibenden Rest dividire man ferner den vorhergehenden Divisor, durch den hier überbleibenden Rest dividire man wieder den letzt vorhergehenden Divisor, und auf solche Art verfahre man so lang bis die Division aufgeht; da dann der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden gegebenen Zahlen seyn wird

Diese Untersuchung wird für die vorgesetzte Zahlen 576 und 252 also zu stehen kommen.

252 | 576 | 2
    | 504 |
      72 | 252 | 3
         | 216 |
           36 | 72 | 2
              | 72 |
                 0

Hier ist also der größte gemeine Theiler 36.

453.

Es wird dienlich seyn diese Regul durch einige Exempel zu erläutern. Man suche demnach den größten gemeinen Theiler zwischen den Zahlen 504 und 312.

312 | 504 | 1
    | 312 |
     192 | 312 | 1
         | 192 |
          120 | 192 | 1
              | 120 |
                72 | 120 | 1
                   | 72 |
                    48 | 72 | 1
                       | 48 |
                        24 | 48 | 2
                           | 48 |
                              0

Also ist 24 der größte gemeine Theiler, und deswegen läßt sich das Verhältniß 504 : 312 auf diese Form 21 : 13 bringen.

454.

Es seyen ferner diese zwey Zahlen gegeben 625 : 529, für welche der größte gemeine Theiler gesucht werden soll:

$$\begin{array}{rrrrrrrr}
529 & 625 & 1 & & & & & \\
 & 529 & & & & & & \\
 & 96 & 529 & 5 & & & & \\
 & & 480 & & & & & \\
 & & 49 & 96 & 1 & & & \\
 & & & 49 & & & & \\
 & & & 47 & 49 & 1 & & \\
 & & & & 47 & & & \\
 & & & & 2 & 47 & 23 & \\
 & & & & & 46 & & \\
 & & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & & & 2 & \\
 & & & & & & 0 &
\end{array}$$

Hier ist also der größte gemeine Theiler 1, und deswegen läßt sich das Verhältniß 625 : 529 auf keine leichtere Form bringen: oder daßelbe läßt sich durch keine kleinere Zahlen ausdrücken.

455.

Es ist nun noch nöthig den Beweis von dieser Regul zu geben. Es sey a die größere und b die kleinere von den gegebenen Zahlen, d aber ein gemeiner Theiler derselben. Da sich nun so wohl a als b durch d theilen laßen, so wird sich auch $a-b$ dadurch theilen laßen, auch $a-2b$ und $a-3b$, und überhaupt $a-nb$.

456.

Dieses ist auch rückwärts wahr, und wann die Zahlen b und $a-nb$ sich durch d theilen laßen, so muß sich auch die Zahl a dadurch theilen laßen. Dann da sich nb theilen läßt, so würde sich $a - nb$ nicht theilen laßen, wann sich nicht auch a theilen ließe.

457.

Ferner ist zu mercken, daß wann d der größte gemeine Theiler von den beyden Zahlen b und $a - nb$ ist, derselbe auch der größte gemeine Theiler von den Zahlen a und b seyn werde. Dann wann für diese Zahlen a und b noch ein größerer gemeiner Theiler als d statt fände, so würde derselbe auch ein gemeiner Theiler von b und $a - nb$, folglich d nicht der größte seyn. Nun aber ist d der größte gemeine Theiler von b und $a - nb$ also muß auch d der größte gemeine Theiler von a und b seyn.

458.

Diese drey Sätze voraus gesetzt, so laßt uns die größere Zahl a durch die kleinere b, wie die Regul befiehlt, theilen, und für den Quotus n annehmen, so erhält man den Rest $a - nb$, welcher immer kleiner ist als b. Da nun dieser Rest $a - nb$ mit dem Divisor b eben denselben größten gemeinen Theiler hat als die gegebene Zahlen a und b, so theile man den vorigen Divisor b durch diesen Rest $a - nb$, und da wird wiederum der herauskommende Rest mit dem nächst vorhergehenden Divisor eben denselben größten gemeinen Theiler haben, und so immer weiter.

459.

Man fährt aber solcher Gestalt fort, bis man auf eine solche Division kommt, welche aufgeht oder wo kein Rest übrig bleibt. Es sey demnach p der letzte Divisor, welcher just etliche mahl in seinem Dividend enthalten ist, dahero das Dividend durch p theilbar, und folglich diese Form mp haben wird; diese Zahlen nun p und mp laßen sich beyde durch p theilen, und haben gantz gewis keinen größern gemeinen Theiler, weil sich keine Zahl durch eine größere, als sie selbst ist, theilen läßt. Dahero ist auch der letzte Divisor der größte gemeine Theiler der beyden im Anfang gegebenen Zahlen a und b, welches der Beweis der vorgeschriebenen Regul ist.

460.

Laßt uns noch ein Exempel hersetzen und von diesen Zahlen 1728 und 2304 den größten gemeinen Theiler suchen, da dann die Rechnung wie folget zu stehen kommen wird:

$$
\begin{array}{r|r|r|l}
1728 & 2304 & 1 & \\
 & 1728 & & \\
\hline
 & 576 & 1728 & 3 \\
 & & 1728 & \\
\hline
 & & 0 &
\end{array}
$$

Also ist 576 der größte gemeine Theiler, und das Verhältniß $1728:2304$ wird auf dieses gebracht $3:4$; folglich verhält sich $1728:2304$ eben so wie $3:4$.

CAPITEL 8

VON DEN GEOMETRISCHEN PROPORTIONEN

461.

Zwey Geometrische Verhältniße sind einander gleich, wann ihre Benennungen einander gleich sind; und die Gleichheit zweyer solchen Verhältniße wird eine Geometrische Proportion genennt, welche also geschrieben wird $a:b=c:d$, mit Worten aber wird dieselbe also ausgesprochen: a verhält sich zu b wie sich c verhält zu d, oder a zu b wie c zu d. Ein Exempel einer solchen Proportion ist nun $8:4=12:6$. Dann von dem Verhältniß $8:4$ ist die Benennung $\frac{2}{1}$, und ebenfals ist sie es auch von dem Verhältniß $12:6$.

462.

Wann also $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion ist, so muß beyderseits eine gleiche Benennung statt finden und folglich $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ seyn; und hinwiederum wann die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ einander gleich sind, so ist $a:b=c:d$.

463.

Eine Geometrische Proportion besteht demnach aus vier Gliedern welche also beschaffen sind, daß das erste durch das zweyte dividirt eben so viel ist, als das dritte durch das vierte dividirt. Hieraus folget eine sehr wichtige Haupt-Eigenschaft aller Geometrischen Proportionen, welche darin besteht, daß das Product aus dem ersten und vierten Glied immer eben so groß ist, als das Product aus dem zweyten und dritten. Oder kürtzer, daß das Product der äußern gleich ist dem Product der mittlern Gliedern.

464.

Um diese Eigenschaft zu beweisen, so sey $a:b=c:d$ eine Geometrische Proportion, und also $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Man multiplicire einen jeden dieser Brüche mit b, so bekommt man $a=\frac{bc}{d}$, diese multiplicirt man ferner beyderseits mit d, so bekommt man $ad=bc$. Nun aber ist ad das Product der äußern Glieder und bc das Product der mittlern, welche beyde Producte folglich einander gleich sind.

465.

Wann hinwiederum vier Zahlen a, b, c, d, so beschaffen sind, daß das Product der äußern ad gleich ist dem Product der mittlern bc, so stehen dieselben in einer Geometrischen Proportion. Dann da $ad=bc$ so dividire man beyderseits durch bd, da bekommt man $\frac{ad}{bd}=\frac{bc}{bd}$ oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; dahero wird $a:b=c:d$.

466.

Die vier Glieder einer Geometrischen Proportion als $a:b=c:d$ können auf verschiedene Arten versetzt werden, so daß die Proportion bleibt. Es kommt nehmlich nur darauf an, daß das Product der äußern Gliedern dem Product der mittlern gleich bleibe, oder daß $ad=bc$. Also wird man haben, erstlich $a:b=c:d$, zweytens $a:c=b:d$, drittens $d:b=c:a$, viertens $d:c=b:a$.

467.

Außer diesen laßen sich auch noch viele andere Geometrische Proportionen herleiten. Dann wann $a:b=c:d$, so ist erstlich $a+b:a$ oder das erste + dem andern zum ersten, wie $c+d:c$ oder das dritte + dem vierten zum dritten; nemlich $a+b:a=c+d:c$.

Hernach ist auch das erste — dem andern zum ersten, wie das dritte — dem vierten zum dritten; oder $a-b:a=c-d:c$.

Dann nimmt man die Producte der äußern und mittlern Gliedern, so ist offenbahr $ac - bc = ac - ad$, weil $ad = bc$. Ferner wird auch $a - b : b = c - d : d$, weil $ad - bd = bc - bd$ und $ad = bc$ ist.

468.

Alle hergeleitete Proportionen die aus $a : b = c : d$ entstehen, können auf eine allgemeine Art also vorgestellt werden

$$ma + nb : pa + qb = mc + nd : pc + qd.$$

Dann das Product der äußern Gliedern ist $mpac + npbc + mqad + nqbd$, oder weil $ad = bc$, so wird dasselbe $mpac + npbc + mqbc + nqbd$; das Product der mittlern Gliedern aber ist $mpac + mqbc + npad + nqbd$, oder weil $ad = bc$ so wird dasselbe $mpac + mqbc + npbc + nqbd$, welches mit jenem einerley ist.

469.

Also kann man aus einer gegebenen Proportion als z. E. $6 : 3 = 10 : 5$, unendlich viel andere herleiten, wovon wir einige hersetzen wollen.

$$3 : 6 = 5 : 10, \quad 6 : 10 = 3 : 5, \quad 9 : 6 = 15 : 10,$$
$$3 : 3 = 5 : \ 5, \quad 9 : 15 = 3 : 5, \quad 9 : 3 = 15 : \ 5.$$

470.

Da in einer Geometrischen Proportion das Product der äußern dem Product der mittlern Gliedern gleich ist, so kann man, wann die drey ersten Glieder bekannt sind, aus derselben das vierte finden. Es seyen die drey ersten Glieder $24 : 15 = 40$ zu .... Dann da hier das Product der mittlern 600 ist, so muß das vierte Glied mit dem ersten das ist mit 24 multiplicirt auch 600 machen, folglich muß man 600 durch 24 dividiren, und da wird der Quotus das gesuchte vierte Glied 25 geben. Dahero ist die Proportion $24 : 15 = 40 : 25$. Und wann allgemein die drey ersten Glieder $a : b = c : \ldots$ sind, so setze man für das unbekante vierte Glied den Buchstaben d, und da $ad = bc$ seyn muß, so dividire man beyderseits durch a und man wird bekommen $d = \frac{bc}{a}$; folglich ist das vierte Glied $= \frac{bc}{a}$, und wird gefunden wann man das zweyte Glied mit dem dritten multiplicirt und das Product durch das erste Glied dividirt.

471.

Hierauf beruhet nun der Grund der in allen Rechen-Büchern so berühmten Regeldetri, weil darin aus drey gegebenen Zahlen allezeit eine solche vierte gesucht wird, welche mit jenen in einer Geometrischen Proportion stehet, also daß sich die erste verhalte zur zweyten, wie die dritte zur vierten.

472.

Hierbey kommen noch einige besondere Umstände zu bemercken vor: als wann zwey Proportionen einerley erstes und drittes Glied haben, wie in diesen $a:b=c:d$ und $a:f=c:g$ so werden auch die zweyten den vierten proportional seyn, es wird sich nemlich verhalten $b:d=f:g$; dann da aus der ersten folgt $a:c=b:d$, und aus der andern $a:c=f:g$, so sind die Verhältniße $b:d$ und $f:g$ einander gleich, weil ein jedes dem Verhältniße $a:c$ gleich ist. Also da $5:100=2:40$ und $5:15=2:6$, so folgt daraus daß $100:40=15:6$.

473.

Wann aber zwey Proportionen so beschaffen sind daß sich einerley mittlere Glieder darin befinden, so werden sich die ersten Glieder umgekehrt verhalten wie die vierten. Wann nemlich $a:b=c:d$ und $f:b=c:g$, so wird daraus folgen $a:f=g:d$. Es sey z. E. diese Proportion gegeben $24:8=9:3$ und $6:8=9:12$, so wird daraus folgen $24:6=12:3$. Der Grund davon ist offenbahr: weil die erste giebt $ad=bc$ und die zweyte $fg=bc$, folglich wird $ad=fg$, und $a:f=g:d$, oder $a:g=f:d$.

474.

Aus zwey gegebenen Proportionen aber kann immer eine neue gemacht werden, wann man besonders die ersten und die zweyten, die dritten und die vierten Glieder mit einander multiplicirt. Also aus diesen Proportionen $a:b=c:d$ und $e:f=g:h$ entstehet durch die Zusammensetzung diese $ae:bf=cg:dh$. Dann da erstlich $ad=bc$ und aus der zweyten $eh=fg$, so wird auch seyn $adeh=bcfg$. Nun aber ist $adeh$ das Product der äußern und $bcfg$ das Product der mittlern Gliedern in der neuen Proportion, welche folglich einander gleich sind.

475.

Es seyn z. E. diese zwey Proportionen gegeben $6:4=15:10$ und $9:12=15:20$ so giebt uns derselben Zusammensetzung folgende Proportion

$$6\cdot 9:4\cdot 12=15\cdot 15:10\cdot 20$$

das ist

$$54:48=225:200$$

oder

$$9:8=9:8.$$

476.

Zuletzt ist hier noch zu mercken, daß wann zwey Producte einander gleich sind, als $ad=bc$, daraus hinwiederum eine Geometrische Proportion formiret werden kann. Es ist nemlich immer der eine Factor des ersten Products zu einem des zweyten, wie der andere Factor des zweyten zum andern des ersten. Es wird nemlich seyn $a:c=b:d$. Da z. E. $3\cdot 8=4\cdot 6$ so folgt daraus diese Proportion $8:4=6:3$ oder $3:4=6:8$; und da $3\cdot 5=1\cdot 15$, so bekommt man $3:15=1:5$ oder $5:1=15:3$ oder $3:1=15:5$.

CAPITEL 9

ANMERKUNGEN ÜBER DIE PROPORTIONEN UND IHREN NUTZEN

477.

Diese Lehre ist in dem allgemeinen Handel und Wandel von solcher Nothwendigkeit, daß fast niemand dieselbe entbehren kann. Die Preiße und Waaren sind einander immer proportional und bey den verschiedenen Geld-Sorten kommt alles darauf an, die Verhältniße darzwischen zu bestimmen. Dieses wird sehr dienlich seyn um die vorgetragene Lehre beßer zu erläutern und zum Nutzen anzuwenden.

478.

Will man das Verhältniß zwischen zweyen Münz-Sorten z. E. einem Louisdor und einem Ducaten erforschen, so muß man sehen wie viel diese Stücke nach einerley Müntz-Sorte gelten. Also da in Berlin ein Louisdor 5 Rthl. 8 Gr. ein Ducaten aber 3 Rthl. gilt so darf man diese beyden Werthe nur auf einerley Müntze bringen, entweder auf Thaler und da bekommt man diese Proportion 1 L. : 1 D. $= 5\frac{1}{3}$ Rthl. : 3 Rthl. d. i. wie 16 : 9. Oder in Groschen hat man diese Proportion 1 L. : 1 D. = 128 : 72 = 16 : 9, und aus einer solchen Proportion erhält man die Vergleichung zwischen Louisdors und Ducaten, indem die Gleichheit der Producte der äußern und mittlern Glieder giebt 9 Louisdor = 16 Ducaten; und durch Hülffe dieser Vergleichung kann man eine jede Summe Louisdor in Ducaten verwandeln. Also wann man gefragt wird, wie viel 1000 Louisdor in Ducaten betragen, so macht man diese Regeldetri: 9 L'd'or thun 16 Ducat. was 1000 L'd'or? Antwort: $1777\frac{7}{9}$ Duc.

Fragt man aber wie viel 1000 Duc. in L'd'or betragen so setzt man diese Regeldetri: 16 Duc. thun 9 L'd'or was 1000? Antwort: $562\frac{1}{2}$ L'd'or.

479.

Hier in St. Petersburg ist der Werth eines Ducaten veränderlich und beruhet auf dem Wechsel-Cours, wodurch der Werth eines Rubels in Holländische Stüber bestimmt wird, deren 105 einen Ducaten ausmachen.

Wann also der Cours 45 Stüber ist, so hat man diese Proportion 1 Rbl. : 1 D. = 45 : 105 = 3 : 7, und daher diese Vergleichung: 7 Rbl. = 3 Duc. Hieraus kann man finden wie viel ein Ducaten in Rubel betrage: dann 3 D. : 7 Rbl. = 1 D. : ... Antwort $2\frac{1}{3}$ Rubel. Ist aber der Cours 50 Stüber so hat man diese Proportion 1 Rbl. : 1 D. = 50 : 105 = 10 : 21, und daher diese Vergleichung 21 Rbl. = 10 Duc. Hieraus wird 1 Duc. $= 2\frac{1}{10}$ Rbl. Ist aber der Cours nur 44 Stüber, so hat man 1 Rbl. : 1 Duc. = 44 : 105, und also 1 Duc. $= 2\frac{17}{44}$ Rbl. = 2 Rbl. $38\frac{7}{11}$ Cop.

480.

Hieraus kann man auch mehr als zwey verschiedene Müntz-Sorten unter sich vergleichen, welches insonderheit bey Wechseln häufig geschieht. Um davon ein Exempel zu geben, so soll jemand von hier 1000 Rubel nach Berlin übermachen, und will wißen, wie viel solches in Berlin in Ducaten betragen werde. Es ist aber der hiesige Cours $47\frac{1}{2}$ Stüber (nemlich ein Rbl. macht $47\frac{1}{2}$ Stüber Holländisch). Hernach in Holland machen 20 Stüber einen Fl. Holl. Ferner $2\frac{1}{2}$ Fl. Holl. machen einen Species Rthl. Holl. Ferner ist der Cours von Holland nach Berlin 142, das ist für 100 Spec. Rthl. zahlt man in Berlin 142 Rthl. Endlich gilt 1 Duc. in Berlin 3 Rthl.

481.

Um diese Frage aufzulößen, so wollen wir erstlich schritt vor schritt gehen. Wir fangen also bey den Stübern an, und da 1 Rbl. $= 47\frac{1}{2}$ Stüber, oder 2 Rbl. = 95 Stb. so setzt man 2 Rbl. : 95 Stb. = 1000: ... Antwort 47500 Stüb. Ferner gehen wir weiter und setzen 20 Stüb. : 1 Fl. = 47500 Stüber : .... Antwort 2375 Fl.

Ferner da $2\frac{1}{2}$ Fl. = 1 Sp. Rthl, das ist, da 5 Fl. = 2 Sp. Rthl. so setzt man 5 Fl. : 2 Sp. Rthl. = 2375 Fl. zu .... Antwort 950 Sp. Rthl.

Ferner gehen wir auf Berliner Rthl. nach dem Cours zu 142: Also 100 Sp. Rthl. : 142 Rthl. = 950: .... Antwort 1349 Rthl.

Nun gehen wir endlich zu den Ducaten und setzen also: 3 Rthl. : 1 Ducaten = 1349 Rthl. zu ... Antwort $449\frac{2}{3}$ Ducaten.

482.

Um solche Rechnungen noch mehr zu erläutern, so wollen wir setzen der Banquier zu Berlin mache Schwierigkeit diese Summe zu bezahlen, unter einem oder andern Vorwand was es auch für einer seyn mag, und wolle diesen Wechsel nicht anders als mit 5 Procent Abzug bezahlen. Dieses ist aber also zu verstehen, daß er anstatt 105 nur 100 bezahlt, daher muß noch diese Regeldetri hinzugefügt werden, $105 : 100 = 449\frac{2}{3}$ zu .... Giebt allso $428\frac{16}{63}$ Ducaten.

483.

Hierzu wurden nun sechs Rechnungen nach der Regeldetri erfordert; man hat aber Mittel gefunden diese Rechnungen ungemein abzukürtzen durch Hülfe der sogenanten Ketten-Regel. Um dieselbe zu erklären, so laßt uns von den sechs obigen Rechnungen die zwey Vorder-Sätze in Betrachtung ziehen und hier vor Augen legen:

I.) 2 Rbl. : 95 Stüb.	II.) 20 Stüb : 1 Fl. Holl.	III.) 5 Fl. Holl. : 2 Sp. Rthl.
IV.) 100 Sp. Rthl. : 142 Rthl.	V.) 3 Rthl. : 1 Ducaten	VI.) 105 Duc. : 100 Duc.

Wann wir nun die obige Rechnungen betrachten so finden wir, daß wir die vorgegebene Summe immer durch die zweyten Sätze multiplicirt und durch die ersten dividirt haben; daraus ist klar, daß man eben dieses finden werde, wann man die vorgegebene Summe auf einmahl mit dem Product aller zweyten multiplicirt und durch das Product aller ersten Sätze dividirt; oder wann man diese einzige Regeldetri macht: wie sich das Product aller ersten Sätze verhält zu dem Product aller zweyten Sätze, also verhält sich die gegebene Anzahl Rubel zu der Anzahl Ducaten die in Berlin bezahlt wird.

484.

Diese Rechnung wird noch mehr abgekürtzt, wann sich irgend ein erster Satz gegen irgend einen zweyten Satz aufheben läßt, da man dann dieselben Sätze ausstreicht und an ihrer Stelle die Quotus setzt, welche man durch die Aufhebung erhält. Auf diese Art wird obiges Exempel also zu stehen kommen:

$$\begin{array}{rrcrll}
\text{Rbl.} & \cancel{2} & : & 19.\cancel{95} & \text{St. Holl. Cur.} & \qquad 1000 \text{ Rbl.} \\
 & \cancel{20} & : & 1 & \text{Holl. Fl.} & \\
 & \cancel{5} & : & \cancel{2} & \text{Sp. Rthl.} & \\
 & 100 & : & 142 & \text{Rthl.} & \\
 & 3 & : & 1 & \text{Duc.} & \\
 & \cancel{1}\cancel{0}5.21 & : & \cancel{5}.\cancel{100} & \text{Duc.} & \\
\hline
 & 63\cancel{00} & : & 2698 & = 10\cancel{00} \text{ zu} \ldots & \\
 & & 7) & 26980 & & \\
 & & 9) & 3854 & (2 & \\
 & & & 428 & (2 & \text{Antwort } 428\tfrac{16}{63} \text{ Ducaten.}
\end{array}$$

485.

Um die Ketten-Regel zu gebrauchen, so muß man diese Ordnung beobachten: man fängt mit eben der Münz-Sorte an von welcher die Frage ist und vergleicht dieselbe mit einer andern, mit welcher das folgende Verhältniß wieder angefangen, und dieselbe mit einer dritten verglichen wird, so daß ein jedes Verhältniß mit eben der Müntz-Sorte anfängt, mit welcher das vorige aufgehört, und so fährt man fort bis man auf diejenige Sorte kommt, in welcher die Antwort stehen soll, und zuletzt werden noch die Spesen oder Unkosten berechnet.

486.

Zu mehrerer Erläuterung wollen wir noch etliche Fragen beysetzen.

Wann die Ducaten in Hamburg 1 p. C. beßer sind als 2 Rthl. B° (das ist, wenn 50 Duc. nicht 100, sondern 101 Rthl. B° machen) und der Cours zwischen

Hamburg und Königsberg 119 Gr. Poln. ist (das ist, 1 Rthl. B° macht 119 Gr. Poln.) wie viel betragen 1000 Duc. in Fl. Pol. (30 Gr. Pol. machen 1 Fl. Pol.)

Duc. 1	:	$\cancel{2}$ Rthl. B°	1000 Duc.
$\cancel{100}$.50	:	101 Rthl. B°	
1	:	119 Gr. Pol.	
30	:	1 Fl. Pol.	
15$\cancel{00}$	:	12019 = 10$\cancel{00}$ Duc. zu . . .	
	3)	120190	
	5)	40063 (1	
		8012 (3	Antwort $8012\frac{2}{3}$ Fl. Pol.

487.

Noch zu mehrerer Abkürzung kann die Frag-Zahl über die zweyte Reihe gesetzt werden, da dann das Product der zweyten Reihe, durch das Product der ersten dividirt die verlangte Antwort giebt.

Frage: Leipzig läßt aus Amsterdam Ducaten kommen, welche daselbst 5 Fl. 4 St. Courant gelten (das ist, ein Duc. gilt 104 St. oder 5 Duc. machen 26 Fl. Hol.) Wann nun Agio di B° in Amsterdam 5 p. C. (das ist 105 Cour. macht 100 B°) und der Wechsel-Cours von Leipzig nach Amsterdam in B° $133\frac{1}{4}$ p. C. (das ist für 100 Rthl. zahlt man in Leipzig $133\frac{1}{4}$ Thl.) Endlich 2 Rthl. Hol. 5 Fl. Hol. thun, wie viel sind nach diesen Coursen vor solche 1000 Ducaten in Leipzig an Thl. zu bezahlen.

		$\cancel{5}$.$\cancel{1000}$ Duc.
Duc. $\cancel{5}$	:	26 Fl. Hol. Cour.
$\cancel{105}$.21	:	4.$\cancel{20}$.$\cancel{100}$ Fl. Hol. B°
$\cancel{5}$	:	$\cancel{2}$ Rth. Hol. B°
$\cancel{400}$.$\cancel{2}$	:	533 Thl. in Leipzig
21		3) 55432
		7) 18477 (1
		2639 (4

Antwort $2639\frac{13}{21}$ Thl. oder 2639 Thl. 15 gut. Grsch.

CAPITEL 10

VON DEN ZUSAMMENGESETZTEN VERHÄLTNISSEN

488.

Zwey oder mehr Verhältniße werden zusammengesetzt, wann man so wohl die Vorder-Sätze als die Hinter-Sätze besonders mit einander multiplicirt; und alsdann sagt man, daß das Verhältniß zwischen diesen beyden Producten zusammengesetzt sey aus den zwey oder mehr gegebenen Verhältnißen.

Also aus diesen Verhältnißen $a:b$, $c:d$, $e:f$ entsteht durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß $ace:bdf$.

489.

Da ein Verhältniß einerley bleibt, wann man seine beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt oder abkürtzt, so kann man die obige Zusammensetzung ungemein erleichtern, wann man die Vorder-Sätze gegen die Hinter-Sätze aufhebt oder abkürtzt, wie schon im vorigen Capitel geschehen.

Also aus folgenden gegebenen Verhältnißen wird das daraus zusammengesetzte solcher Gestalt gefunden. Die gegebenen Verhältniße sind:

$$12:25,\quad 28:33,\quad \text{und}\quad 55:56$$

$$\begin{array}{l@{\,:\,}l}
\cancel{1}\cancel{2}.\cancel{4}.2 & 5.\cancel{2}\cancel{5} \\
\cancel{2}\cancel{8} & \cancel{3}.\cancel{3}\cancel{3} \\
\cancel{5}\cancel{5}.\cancel{5} & \cancel{2}.\cancel{5}\cancel{6} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{2:5}
\end{array}$$

Also erhält man durch die Zusammensetzung dieses Verhältniß $2:5$.

490.

Eben dieses geht auch auf eine allgemeine Art bey den Buchstaben an; und ist insonderheit dieser Fall merckwürdig, wo immer ein Vorder-Satz dem vorigen Hinter-Satz gleich ist. Also wann die gegebenen Verhältnißen sind:

$$\begin{array}{c}
a:b \\
b:c \\
c:d \\
d:e \\
e:a \\
\hline
\end{array}$$

so ist das zusammengesetzte Verhältniß wie $1:1$.

491.

Um den Nutzen dieser Lehre zu zeigen, so bemercke man, daß zwey viereckigte Felder unter sich ein solches Verhältniß haben, welches zusammengesetzt ist aus den Verhältnißen ihrer Längen und ihrer Breiten.

Es seyen z. E. zwey solche Felder A und B. Von jenem sey die Länge 500 Fuß, die Breite aber 60 Fuß. Von diesem sey die Länge 360 Fuß und die Breite 100 Fuß; so ist das Verhältniß der Länge wie 500 : 360 und der Breite wie 60 : 100. Also stehet es

$$\begin{array}{c}
\cancel{500}.5 : 6.\cancel{360} \\
\underline{\cancel{60} \;:\; \cancel{100}} \\
5 : 6
\end{array}$$

Allso verhält sich das Feld A zu dem Feld B wie 5 zu 6.

492.

Ein anderes Exempel. Das Feld A sey 720 Fuß lang und 88 Fuß breit; das Feld B aber sey 660 Fuß lang und 90 Fuß breit, so muß man folgende zwey Verhältniße zusammensetzen

$$\begin{array}{lc}
\text{Verhältniß der Längen} & \cancel{720}.8 \;:\; 15.\cancel{60}.\cancel{660} \\
\text{Verhältniß der Breiten} & \underline{\cancel{88}.\cancel{8}.2 : \qquad \cancel{90}} \\
 & 16 : 15
\end{array}$$

Und dieses ist das Verhältniß der Felder A und B.

493.

Um ferner den Raum oder Inhalt zweyer Zimmer gegen einander zu vergleichen, so ist zu wißen daß ihr Verhältniß aus dreyen zusammengesetzt ist. Nemlich aus dem Verhältniß der Länge, der Breite und der Höhe. Es sey z. E. ein Zimmer A, deßen Länge = 36 Fuß, die Breite = 16 Fuß und die Höhe = 14 Fuß. Von einem andern Zimmer B aber sey die Länge = 42 Fuß, die Breite = 24 Fuß und die Höhe = 10 Fuß, so sind die drey Verhältniße:

$$\begin{array}{lc}
\text{der Länge} & \cancel{36}.\cancel{6}.\cancel{3} : \cancel{42}.\cancel{6} \\
\text{der Breite} & \cancel{16}.2 \;:\; \cancel{24}.\cancel{3} \\
\text{der Höhe} & \underline{\cancel{14}.2 \;:\; \cancel{10}.5} \\
 & 4 : 5
\end{array}$$

Allso ist der Inhalt des Zimmers A zu dem Inhalt des Zimmers B wie 4 zu 5.

494.

Wann die Verhältniße, welche man solcher Gestalt zusammensetzt, einander gleich sind, so entstehen daher vervielfältigte Verhältniße. Nemlich aus zwey gleichen entsteht ein verdoppeltes oder quadratisches Verhältniß; aus drey gleichen ein dreyfältiges oder cubisches, und so fort. Also aus den Verhältnißen $a:b$ und $a:b$ ist das zusammengesetzte Verhältniß $aa:bb$ dahero sagt man die Quadraten stehen in einer gedoppelten Verhältniß ihrer Wurzel. Und aus dem Verhältniß $a:b$ dreymal gesetzt, entsteht das Verhältniß $a^3:b^3$, dahero sagt man daß die Cubi ein dreyfältiges Verhältniß ihrer Wurzel haben.

495.

In der Geometrie wird gezeigt, daß sich zwey Circkelrunde Plätze in den gedoppelten Verhältnißen ihrer Durchmeßer verhalten, das will so viel sagen, daß sie sich verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmeßer.

Es sey ein solcher Platz A deßen Durchmeßer $=45$ Fuß, eines andern Circkelrunden Platzes B aber Durchmeßer sey $=30$ Fuß, so wird sich jener Platz zu diesem verhalten wie $45\cdot 45$ zu $30\cdot 30$, oder ihr Verhältniß ist aus diesen zwey gleichen Verhältnißen zusammengesetzt

$$\begin{array}{c}\cancel{45}.\cancel{9}.3 : \cancel{30}.\cancel{6}.2\\ \underline{\cancel{45}.\cancel{9}.3 : \cancel{30}.\cancel{6}.2}\\ 9:4\end{array}$$

Folglich verhalten sich diese Plätze wie 9 zu 4.

496.

Ferner wird auch bewiesen, daß sich die Inhalte runder Kugeln, wie die Cubi ihrer Durchmeßer verhalten. Wann also der Durchmeßer einer Kugel A ein Fuß ist, und einer andern Kugel B zwey Fuß ist, so wird der Inhalt der Kugel A sich zum Inhalt der Kugel B verhalten wie $1^3:2^3$ oder wie $1:8$.

Wann also diese Kugeln aus einerley Materie bestehen, so wird die Kugel B achtmahl schwerer seyn als die Kugel A.

497.

Hieraus kann man das Gewicht der Kanonen-Kugeln aus ihren Durchmeßern finden, wann man nur von einer das Gewicht hat. Es sey zum Exempel eine

Kugel A, deren Durchmeßer $= 2$ Zoll, und die fünf ℔ schwer ist, man fragt nach dem Gewicht einer andern Kugel B, deren Durchmeßer $= 8$ Zoll ist. Hier hat man nun diese Proportion $2^3 : 8^3 = 5 : \ldots$ Giebt 320 ℔, und dieses ist das Gewicht der Kugel B. Von einer andern Kugel C aber, deren Durchmeßer $= 15$ Zoll wird das Gewicht gefunden

$$2^3 : 15^3 = 5 : \cdots \quad \text{Antwort } 2109\tfrac{3}{8} \text{ ℔}.$$

498.

Sucht man das Verhältniß zweyer Brüche, als $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ so kann dasselbe immer durch gantze Zahlen ausgedrückt werden: dann man darf nur beyde Brüche mit bd multipliciren, so kommt dieses Verhältniß $ad : bc$ heraus welches jenem gleich ist, dahero diese Proportion entsteht $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$. Läßt sich nun ad gegen bc noch abkürtzen, so wird das Verhältniß noch leichter. Also $\frac{15}{24} : \frac{25}{36} = 15 \cdot 36 : 24 \cdot 25 = 9 : 10$.

499.

Es wird ferner gefragt wie sich diese Brüche $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$ gegen einander verhalten, da ist dann so gleich klar daß seyn werde $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$, welches also mit Worten ausgesprochen wird: Daß sich zwey Brüche deren Zehler 1 sind unter sich verhalten umgekehrt wie ihre Nenner. Dieses gilt auch von zweyen Brüchen, welche gleiche Zehler haben. Dann da $\frac{c}{a} : \frac{c}{b} = b : a$, so sind sie gleichfalls umgekehrt wie ihre Nenner. Haben aber zwey Brüche gleiche Nenner, als $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$, so verhalten sie sich wie die Zehler nemlich wie $a : b$. Also ist $\frac{3}{8} : \frac{3}{16} = \frac{6}{16} : \frac{3}{16} = 6 : 3 = 2 : 1$ und $\frac{10}{7} : \frac{15}{7} = 10 : 15$ oder $2 : 3$.

500.

Bey dem freyen Fall der Cörper hat man bemercket, daß in einer Secunde ein Cörper 15 Fuß tief herab falle, in zwey Secunden aber falle er durch eine Höhe von 60 Fuß, und in drey Secunden 135 Fuß, daraus hat man nun geschlossen, daß sich die Höhen verhalten wie die Quadraten der Zeiten; und also auch rückwerts die Zeiten wie die Quadrat-Wurzeln aus den Höhen.

Fragt man nun wie viel Zeit ein Stein brauche um aus einer Höhe von 2160 Fuß herunter zu fallen, so ist $15 : 2160 = 1 :$ Quadrat der gesuchten Zeit.

Also ist das Quadrat der gesuchten Zeit 144, die Zeit aber selbst 12 Secunden.

501.

Man fragt, wie tief ein Stein in einer Stunde herunter fallen könne, das ist in 3600 Secunden?

Man sagt also: wie die Quadraten der Zeiten, das ist wie $1^2 : 3600^2$ also verhält sich die gegebene Höhe $= 15$ Fuß zu der gesuchten Höhe.

$$1 : 12960000 = 15 \text{ zu} \cdots$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 64800000 \\ 1296 \\ \hline 194400000 \end{array} \qquad \text{Antwort } 194400000 \text{ Fuß.}$$

Rechnen wir nun 24000 Fuß auf eine teutsche Meile, so wird diese Höhe seyn 8100 Meilen, welche Höhe größer ist als die gantze Erde dicke ist.

502.

Eine gleiche Bewandtniß hat es mit dem Preis der Edelgesteine, welche sich nicht nach ihrem Gewicht selbst, sondern nach einem größern Verhältniß richten. Bey den Diamanten gilt diese Regul, daß sich der Preiß wie das Quadrat des Gewichts verhalte, oder das Verhältniß der Preiße ist gleich dem gedoppelten Verhältniße des Gewichts. Dieselben werden nun nach einem Gewicht, welches ein Karath genennt wird, und vier Gran hält, gewogen. Wann nun ein Diamant von einem Karath zwey Rubel gilt, so wird ein Diamant von 100 Karath so viel mal mehr gelten, als das Quadrat von 100 größer ist wie das Quadrat von 1. Also muß die Regeldetri so gesetzt werden

$$1^2 : 100^2 = 2 \text{ Rubel} : \ldots$$

$$\text{oder } 1 : 10000 = 2 \text{ Rbl. zu} \cdots \qquad \text{Antwort } 20000 \text{ Rbl.}$$

In Portugal befindet sich ein Diamant von 1680 Karath deßen Preiß demnach also gefunden wird:

$$1^2 : 1680^2 = 2 \text{ Rubel} : \ldots \text{ oder}$$

$$1 : 2822400 = 2 : \cdots\cdot \qquad \text{Antwort } 5644800 \text{ Rubel.}$$

503.

Von zusammengesetzten Verhältnißen geben die Posten ein merckwürdiges Exempel, weil das Post-Geld nach einem zusammengesetzten Verhältniße der

Zahl der Pferde und der Zahl der Meilen bezahlt werden muß. Wann also für ein Pferd auf eine Meile 8 Gr. oder $\frac{1}{3}$ Rthl. bezahlt wird, und man wißen will wie viel vor 28 Pferde auf $4\frac{1}{2}$ Meile bezahlt werden soll? so setzt man erstlich das Verhältniß der Pferde, das ist

$$\begin{array}{ll}
1:28 & \text{darunter schreibt man das Verhältniß der Meilen} \\
\underline{2:9} & \text{und setzt die zwey Verhältniße zusammen} \\
2:252 & \text{oder kürtzer } 1:126 = \frac{1}{3} \text{ zu} \cdots \qquad \text{Antwort 42 Rthl.}
\end{array}$$

Wann man für 8 Pferde auf 3 Meilen einen Ducaten bezahlt, wie hoch kommen 30 Pferde auf 4 Meilen zu stehen? hier kommt die Rechnung also zu stehen:

$$\begin{array}{l}
\cancel{8}.\cancel{2} : \cancel{30}.\cancel{15}.5 \\
\underline{\cancel{3} \;\; : \; \cancel{4}\qquad} \\
1:5 = 1 \text{ Ducaten}:\ldots
\end{array}$$

Dahero ist die Bezahlung 5 Ducaten.

504.

Bey den Arbeitern kommt diese Zusammensetzung der Verhältniße auch vor, da die Bezahlung nach der zusammengesetzten Verhältniß der Zahl der Arbeiter und der Zahl der Tage geschehen muß.

Wann also zum Exempel einem Mäurer täglich 10 Gr. gegeben wird und man will wißen, wie viel an 24 Mäurer, welche 50 Tage lang gearbeitet haben, bezahlt werden soll? so steht die Rechnung also

$$\begin{array}{rl}
& 1:24 \\
& \underline{1:50\qquad} \\
& 1:1200 = 10 \text{ Gr.} : 500 \text{ Rthl.} \\
& \quad\underline{10\qquad} \\
3) & \underline{12000 \text{ Gr.}} \\
8) & \underline{\;4000\qquad} \\
& \quad 500 \text{ Rthl.}
\end{array}$$

Weil in dergleichen Exempeln fünf Sätze gegeben sind so wird in den Rechen-Büchern die Art dieselben zu berechnen die Regula Quinque genennt.

CAPITEL 11

VON DEN GEOMETRISCHEN PROGRESSIONEN

505.

Eine Reihe Zahlen, welche immer gleich vielmal größer oder kleiner werden, wird eine Geometrische Progression genennt, weil immer ein jedes Glied zu dem folgenden in eben demselben Geometrischen Verhältniße stehet, und die Zahl welche anzeigt wie viel mal ein jedes Glied größer ist, als das vorhergehende, wird der Nenner genennt; wann also das erste Glied 1 ist und der Nenner $=2$, so ist die Geometrische Progression folgende:

Glieder	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10
Prog.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128,	256,	512 etc.

wo wir die Zeichen darüber gesetzt haben um anzuzeigen das wie vielte Glied ein jedes sey.

506.

Wann man überhaupt das erste Glied $= a$ und den Nenner $= b$ setzt, so kommt die Geometrische Progression also zu stehen:

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8 ... n
Prog.	a,	ab,	ab^2,	ab^3,	ab^4,	ab^5,	ab^6,	ab^7 ... ab^{n-1}

Wann also diese Progression aus n Gliedern besteht, so ist das letzte $= ab^{n-1}$. Hier ist zu mercken, wann der Nenner b größer ist als 1, daß die Glieder immer größer werden, ist aber der Nenner $b = 1$ so bleiben die Glieder immer einander gleich, und ist der Nenner b kleiner als 1, oder ein Bruch, so werden die Glieder auch immer kleiner. Also wann $a = 1$ und $b = \frac{1}{2}$, so bekommt man diese Geometrische Progression:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{128} \text{ etc.}$$

507.

Hierbey kommen nachfolgende Stücke zu betrachten vor

I.) das erste Glied, welches hier a genennt wird,
II.) der Nenner, welcher hier b genennt wird,
III.) die Anzahl der Glieder, welche $= n$ gesetzt worden,
IV.) das letzte Glied, welches gefunden worden $= ab^{n-1}$.

Dahero wann die drey ersten Stücke gegeben sind, so wird das letzte Glied gefunden wann man die $n-1^{te}$ Potestät des Nenners b, das ist b^{n-1}, mit dem ersten Glied a multiplicirt.

Wollte man nun von dieser Geometrischen Progression: 1, 2, 4, 8, etc. das 50^{te} Glied wißen, so ist hier $a=1$, $b=2$ und $n=50$. Dahero das 50^{te} Glied seyn wird $=2^{49}$. Da nun $2^9=512$, so ist $2^{10}=1024$. Hiervon das Quadrat genommen giebt $2^{20}=1048576$. Hiervon wieder das Quadrat genommen giebt $2^{40}=1099511627776$. Wann man nun 2^{40} mit $2^9=512$ multiplicirt, so bekommt man $2^{49}=512\cdot 1099511627776=562949953421312$.

508.

Hiebey pflegt nun insonderheit gefragt zu werden, wie man die Summe von allen Gliedern einer solchen Progression finden soll, welches wir hier folgender Gestalt zeigen wollen. Es sey erstlich diese Progression von zehn Gliedern gegeben 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 wovon wir die Summe durch den Buchstaben s andeuten wollen, also daß

$$s=1+2+4+8+16+32+64+128+256+512$$

so wird dieses doppelt genommen geben:

$$2s=2+4+8+16+32+64+128+256+512+1024.$$

Hiervon nehme man nun die obige Progression weg, so bleibt übrig:

$$s=1024-1=1023;\ \text{also ist die gesuchte Summe}\ =1023.$$

509.

Laßt uns nun bey eben dieser Progression die Anzahl der Glieder unbestimmt annehmen und $=n$ setzen, also daß die Summe seyn wird

$$s=1+2+2^2+2^3+\cdots\cdot 2^{n-1}.$$

Dieses mit 2 multiplicirt giebt

$$2s=2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots 2^n;$$

von diesem subtrahirt man jenes so bekommt man $s=2^n-1$. Dahero wird die gesuchte Summe gefunden, wann man das letzte Glied 2^{n-1} mit dem Nenner 2 multiplicirt um zu bekommen 2^n, und von diesem Product 1 subtrahirt.

510.

Dieses wollen wir durch folgende Exempel, indem wir vor n nach und nach 1, 2, 3, 4 etc. schreiben werden, erläutern als

$$1 = 1,\quad 1 + 2 = 3,\quad 1 + 2 + 4 = 7,\quad 1 + 2 + 4 + 8 = 15,$$
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31,\quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63. \text{ etc.}$$

511.

Hier pflegt diese Frage vorzukommen: Einer verkauft sein Pferd nach den Huffnägeln, deren 32 sind: für den ersten Nagel fordert er 1 Pfennig, für den zweyten 2 Pfennig, für den dritten 4 Pfennig, für den vierten 8 Pfennig und immer für den folgenden zwey mal so viel als für den vorigen. Nun ist die Frage, wie hoch dieses Pferd verkauft worden?

Hier muß also diese Geometrische Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. bis auf das 32te Glied fortgesetzt und die Summe von allen gesucht werden. Da nun das letzte Glied seyn wird $= 2^{31}$, so ist oben schon gefunden worden $2^{20} = 1048576$, dieses multiplicirt man mit $2^{10} = 1024$, um zu haben $2^{30} = 1073741824$. Dieses mit 2 multiplicirt giebt das letzte Glied $2^{31} = 2147483648$; folglich wird die Summe gleich seyn dieser Zahl doppelt genommen weniger 1: das ist 4294967295 Pfenige;

2)	4294967295	Pf.
6)	2147483647	(1
oder	357913941	Gr. 3 Pf.
3)	357913941	
8)	119304647	
oder	14913080	Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

Allso wird der Preiß des Pferdes seyn 14913080 Rthl. 21 Gr. 3 Pf.

512.

Es sey nun der Nenner $= 3$ und die Geometrische Progression sey 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, und von diesen 7 Gliedern soll die Summe gefunden werden. Man setze dieselbe so lange $= s$, also daß:

$$s = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729.$$

Man multiplicire mit 3 um zu haben

$$3s = 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187.$$

Hiervon subtrahire man die obige Reihe, so bekommt man $2s = 2187 - 1 = 2186$. Dahero ist die gedoppelte Summe $= 2186$ und folglich die Summe 1093.

513.

In eben dieser Progression sey die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe $= s$, also daß $s = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^{n-1}$ dieses mit 3 multiplicirt giebt $3s = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \cdots 3^n$. Hievon subtrahire man das obige, und weil sich alle Glieder der untern Reihe, außer dem letzten, gegen alle Glieder der obern, außer dem ersten, aufheben, so bekommt man $2s = 3^n - 1$ und also $s = \frac{3^n - 1}{2}$.

Also wird die Summe gefunden, wann man das letzte Glied mit 3 multiplicirt, vom Product 1 subtrahirt und den Rest durch 2 theilt wie aus folgenden Exempeln zu ersehen:

$$1 = 1, \quad 1 + 3 = \frac{3 \cdot 3 - 1}{2} = 4, \quad 1 + 3 + 9 = \frac{3 \cdot 9 - 1}{2} = 13,$$

$$1 + 3 + 9 + 27 = \frac{3 \cdot 27 - 1}{2} = 40, \quad 1 + 3 + 9 + 27 + 81 = \frac{3 \cdot 81 - 1}{2} = 121.$$

514.

Nun sey auf eine allgemeine Art das erste Glied $= a$, der Nenner $= b$, die Anzahl der Glieder $= n$ und die Summe derselben $= s$, also daß

$$s = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^{n-1}.$$

Dieses werde multiplicirt mit b so bekommt man

$$bs = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + \cdots ab^n.$$

Hiervon subtrahire man das obige so erhält man $(b - 1) \cdot s = ab^n - a$. Daher bekommt man die gesuchte Summe $s = \frac{ab^n - a}{b - 1}$. Dahero wird die Summe einer jeglichen Geometrischen Progression gefunden wann man das letzte Glied mit dem Nenner der Progression multiplicirt, von dem Product das erste Glied subtrahirt und den Rest durch den Nenner weniger 1 dividirt.

515.

Man habe eine Geometrische Progression von 7 Gliedern; das erste $=3$ und der Nenner $=2$, so ist $a=3$, $b=2$ und $n=7$ folglich das letzte Glied $3\cdot 2^6$ das ist $3\cdot 64=192$, und die Progression selbst

$$3,\quad 6,\quad 12,\quad 24,\quad 48,\quad 96,\quad 192$$

und also das letzte Glied 192 mit dem Nenner 2 multiplicirt giebt 384, davon das erste Glied 3 subtrahirt bleibt 381, dieser Rest durch $b-1$, das ist durch 1 dividirt, giebt 381, welches die Summe der Progression ist.

516.

Es sey ferner gegeben eine Geometrische Progression von sechs Gliedern, davon das erste 4 und der Nenner $\frac{3}{2}$. Also daß die Progression ist

$$4,\quad 6,\quad 9,\quad \frac{27}{2},\quad \frac{81}{4},\quad \frac{243}{8}$$

dieses letzte Glied $\frac{243}{8}$ mit dem Nenner $\frac{3}{2}$ multiplicirt giebt $\frac{729}{16}$, davon das erste Glied 4 subtrahirt giebt $\frac{665}{16}$, endlich dieser Rest dividirt durch $b-1=\frac{1}{2}$ giebt $\frac{665}{8}=83\frac{1}{8}$.

517.

Wann der Nenner kleiner ist als 1 und also die Glieder der Progression immer abnehmen, so kann die Summe einer solchen Progression die ohne Ende fortläuft angegeben werden.

Es sey z. E. das erste Glied $=1$ der Nenner $=\frac{1}{2}$ und die Summ $=s$ also daß

$$s=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Man multiplicire mit 2 so bekommt man:

$$2s=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32} \text{ etc.}$$

ohne Ende, hiervon ziehe man das obige ab, so bleibt $s=2$ welches die Summe der unendlichen Progression ist.

518.

Es sey ferner das erste Glied $=1$, der Nenner $\frac{1}{3}$ und die Summ $=s$ also daß

$$s=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Man multiplicire alles mit 3 so hat man

$$3s=3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81} \text{ etc. ohne Ende.}$$

Hievon nehme man die obige Reihe weg so bleibt $2s=3$ folglich ist die Summe $=1\frac{1}{2}$.

519.

Es sey ferner das erste Glied $=2$, der Nenner $=\frac{3}{4}$, die Summe $=s$ also daß $s=2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Dieses multiplicire man mit $\frac{4}{3}$ so hat man $\frac{4}{3}s=\frac{8}{3}+2+\frac{3}{2}+\frac{9}{8}+\frac{27}{32}+\frac{81}{128}$ etc. ohne Ende. Hiervon das obige subtrahirt bleibt $\frac{1}{3}s=\frac{8}{3}$, also die Summe selbsten wird seyn just 8.

520.

Wann überhaupt das erste Glied gesetzt wird $=a$ und der Nenner der Progression $=\frac{b}{c}$, so daß dieser Bruch kleiner ist als 1 und folglich b kleiner ist als c, so kann die Summe dieser unendlichen Progression folgender Gestalt gefunden werden. Man setzt

$$s=a+\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

ohne Ende. Hier multiplicirt man mit $\frac{b}{c}$, so bekommt man

$$\frac{b}{c}s=\frac{ab}{c}+\frac{ab^2}{c^2}+\frac{ab^3}{c^3}+\frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

ohne End. Dieses subtrahirt man von dem obigen so bleibt $\left(1-\frac{b}{c}\right)s=a$ folglich ist

$$s=\frac{a}{1-\frac{b}{c}}.$$

Multiplicirt man nun oben und unten mit c, so bekommt man $s=\frac{ac}{c-b}$ dahero ist die Summe dieser unendlichen Geometrischen Progression

$$=\frac{a}{1-\frac{b}{c}} \quad \text{oder} \quad =\frac{ac}{c-b}.$$

Diese Summe wird folglich gefunden wann man das erste Glied a dividirt durch 1 weniger dem Nenner; oder man subtrahirt den Nenner von 1, und durch den Rest dividirt man das erste Glied so bekommt man die Summe.

521.

Wann in solchen Progressionen die Zeichen + und — mit einander abwechseln so kann die Summe auf eben dieselbe Art gefunden werden. Dann es sey

$$s = a - \frac{ab}{c} + \frac{ab^2}{c^2} - \frac{ab^3}{c^3} + \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses multiplicire man mit $\frac{b}{c}$ so bekommt man:

$$\frac{b}{c}s = \frac{ab}{c} - \frac{ab^2}{c^2} + \frac{ab^3}{c^3} - \frac{ab^4}{c^4} \text{ etc.}$$

dieses addire man zu dem obigen, da erhält man $\left(1 + \frac{b}{c}\right)s = a$. Hieraus findet man die gesuchte Summe

$$s = \frac{a}{1 + \frac{b}{c}} \quad \text{oder} \quad s = \frac{ac}{c + b}.$$

522.

Es sey z. E. das erste Glied $a = \frac{3}{5}$ und der Nenner der Progression $= \frac{2}{5}$ das ist $b = 2$ und $c = 5$ so wird von dieser Reihe $\frac{3}{5} + \frac{6}{25} + \frac{12}{125} + \frac{24}{625}$ etc. die Summe also gefunden: der Nenner von 1 subtrahirt bleibt $\frac{3}{5}$, dadurch muß man das erste Glied $\frac{3}{5}$ dividiren, so bekommt man die Summe $= 1$.

Wann aber die Zeichen + und — abwechseln und diese Reihe vorgelegt ist:

$$\frac{3}{5} - \frac{6}{25} + \frac{12}{125} - \frac{24}{625} \text{ etc.}$$

so wird die Summe seyn

$$\frac{a}{1 + \frac{b}{c}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{3}{7}.$$

523.

Zur Uebung soll diese unendliche Progression vorgelegt seyn

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + \frac{3}{100000} \text{ etc.}$$

Hier ist das erste Glied $\frac{3}{10}$ und der Nenner $\frac{1}{10}$. Dieser von 1 subtrahirt bleibt $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied dividirt giebt die Summe $= \frac{1}{3}$.

Nimmt man nur ein Glied $\frac{3}{10}$, so fehlt noch $\frac{1}{30}$. Nimmt man zwey Glieder $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} = \frac{33}{100}$ so fehlt noch $\frac{1}{300}$ zu $\frac{1}{3}$ etc.

524.

Wann diese unendliche Reihe gegeben ist:

$$9 + \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \frac{9}{10000} \text{ etc.}$$

so ist das erste Glied 9, der Nenner $\frac{1}{10}$. Also 1 weniger den Nenner ist $\frac{9}{10}$. Hierdurch das erste Glied 9 dividirt, so wird die Summe $= 10$. Hier ist zu mercken, daß diese Reihe durch einen Decimal-Bruch also vorgestellet wird 9,9999999 etc.

CAPITEL 12

VON DEN UNENDLICHEN DECIMAL-BRÜCHEN

525.

Wir haben oben gesehen, daß bey den Logarithmischen Rechnungen anstatt der gemeinen Brüche Decimal-Brüche gebraucht werden; welches auch bey den andern Rechnungen mit großem Vortheil geschehen kann. Es kommt also darauf an zu zeigen, wie ein gemeiner Bruch in einen Decimal-Bruch verwandelt werde, und wie man den Wert eines Decimal-Bruchs hinwiederum durch einen gemeinen Bruch ausdrücken soll.

526.

Es sey auf eine allgemeine Art der gegebene Bruch $\frac{a}{b}$, welcher in einen Decimal-Bruch verwandelt werden soll. Da nun dieser Bruch den Quotus ausdrückt, welcher entspringt wann man den Zehler a durch den Nenner b dividirt, so schreibe man anstatt a diese Form $a{,}0000000$, welche offenbahr nichts anders anzeigt als die Zahl a, weil keine 10tel, keine 100tel und so fort dabey sind. Diese Form theile man nun durch die Zahl b, nach den gewöhnlichen Regeln der Division, wobey man nur in Acht zu nehmen hat, daß das

Comma welches die Decimal-Brüche von den gantzen Zahlen absondert, an seinen gehörigen Ort gesetzt werde. Dieses wollen wir nun durch nachfolgende Exempel erläutern.

Es sey erstlich der gegebene Bruch $\frac{1}{2}$ so kommt die Decimal-Division wie folget zu stehen

$$\begin{array}{l} 2)\ \underline{1{,}0000000} \\ \quad 0{,}5000000 = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Hieraus sehen wir daß $\frac{1}{2}$ so viel sey als 0,5000000, oder als 0,5 welches auch offenbahr ist, indem dieser Decimal-Bruch $\frac{5}{10}$ anzeigt, welches eben so viel ist als $\frac{1}{2}$.

527.

Es sey ferner der gegebene Bruch $\frac{1}{3}$ so hat man diesen Decimal-Bruch

$$\begin{array}{l} 3)\ \underline{1{,}0000000} \\ \quad 0{,}3333333 \text{ etc.} = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Hieraus sieht man daß dieser Decimal-Bruch, deßen Werth $= \frac{1}{3}$ ist, nirgend abgebrochen werden kann, sondern ins unendliche durch lauter 3 fortläuft. Also machen alle diese Brüche $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000}$ etc. ohne Ende zusammen genommen just so viel als $\frac{1}{3}$, wie wir schon oben gezeigt haben.

Für $\frac{2}{3}$ findet man folgenden Decimal-Bruch der auch ins unendliche fortläuft

$$\begin{array}{l} 3)\ \underline{2{,}0000000} \\ \quad 0{,}6666666 \text{ etc.} = \frac{2}{3} \end{array}$$

welches auch aus dem vorigen klar ist, weil dieser Bruch zwey mal so groß ist, als der vorige.

528.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{1}{4}$ so hat man diese Decimal-Division

$$\begin{array}{l} 4)\ \underline{1{,}0000000} \\ \quad 0{,}2500000 = \frac{1}{4} \end{array}$$

also ist $\frac{1}{4}$ so viel als 0,2500000, oder als 0,25, welches daher klar ist, daß

$$\frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}.$$

Eben so bekommt man für $\frac{3}{4}$ diesen Decimal-Bruch

$$\begin{array}{l} 4)\ \underline{3,0000000} \\ \quad\ 0,7500000 = \frac{3}{4} \end{array}$$

also ist $\frac{3}{4} = 0,75$ das ist $\frac{7}{10} + \frac{5}{100} = \frac{75}{100}$ welcher Bruch durch 25 abgekürtzt, giebt $\frac{3}{4}$.

Wollte man $\frac{5}{4}$ in einen Decimal-Bruch verwandeln, so hätte man

$$\begin{array}{l} 4)\ \underline{5,0000000} \\ \quad\ 1,2500000 = \frac{5}{4} \end{array}$$

dieses ist aber $1 + \frac{25}{100}$ daß ist $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

529.

Auf solche Art wird $\frac{1}{5} = 0,2$; und $\frac{2}{5} = 0,4$; ferner $\frac{3}{5} = 0,6$; $\frac{4}{5} = 0,8$ und $\frac{5}{5} = 1$; weiter $\frac{6}{5} = 1,2$ etc.

Wann der Nenner 6 ist, so finden wir $\frac{1}{6} = 0,1666666$ etc. welches so viel ist als $0,666666 - 0,5$. Nun aber ist $0,666666 = \frac{2}{3}$ und $0,5 = \frac{1}{2}$, folglich ist $0,1666666 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ferner findet man $\frac{2}{6} = 0,3333333$ etc. $= \frac{1}{3}$; hingegen $\frac{3}{6}$ wird $0,5000000 = \frac{1}{2}$. Weiter wird $\frac{5}{6} = 0,8333333 = 0,3333333 + 0,5$ das ist $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

530.

Wann der Nenner 7 ist, so werden die Decimal-Brüche mehr verwirrt: Also für $\frac{1}{7}$ findet man 0,142857 etc. wobey zu mercken, daß immer diese sechs Zahlen 142857 wieder kommen. Um nun zu zeigen, daß dieser Decimal-Bruch just $\frac{1}{7}$ ausmache, so verwandele man denselben in eine Geometrische Progression, wovon das erste Glied

$= \frac{142857}{1000000}$ der Nenner aber $= \frac{1}{1000000}$; also wird die Summe $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$.

Man multiplicire oben und unten mit 1000000 so wird diese Summ

$$= \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

531.

Daß der gefundene Decimal-Bruch just $\frac{1}{7}$ betrage kann noch leichter folgender Gestalt gezeigt werden. Man setze für den Werth desselben den Buchstaben s also daß

$$s = 0{,}142857142857142857 \text{ etc.}$$

$$\begin{aligned}
\text{so wird}\quad 10s &= 1{,}42857142857142857 \text{ etc.}\\
100s &= 14{,}2857142857142857 \text{ etc.}\\
1000s &= 142{,}857142857142857 \text{ etc.}\\
10000s &= 1428{,}57142857142857 \text{ etc.}\\
100000s &= 14285{,}7142857142857 \text{ etc.}\\
1000000s &= 142857{,}142857142857 \text{ etc.}\\
\text{Subtrahire}\quad s &= 0{,}142857142857 \text{ etc.}\\
\hline
999999s &= 142857
\end{aligned}$$

Nun theile man durch 999999, so bekommt man $s = \frac{142857}{999999}$ und dieses ist der Werth des obigen Decimal-Bruchs $\frac{1}{7}$.

532.

Eben so verwandelt man $\frac{2}{7}$ in einen Decimal-Bruch 0,28571428 etc. Dieses leitet uns darauf wie man den Werth des vorigen Decimal-Bruchs den wir s gesetzt haben leichter finden kann, weil dieser Bruch just zwey mal so groß ist als der vorige und also $= 2s$; da wir nun gehabt haben

$$\begin{aligned}
100s &= 14{,}28571428571 \text{ etc.}\\
\text{hiervon } 2s \text{ weggenommen}\quad 2s &= 0{,}28571428571 \text{ etc.}\\
\hline
\text{bleiben}\quad 98s &= 14,\\
\text{dahero wird}\quad s &= \tfrac{14}{98} = \tfrac{1}{7}.
\end{aligned}$$

Ferner wird $\frac{3}{7} = 0{,}42857142857$ etc. dieses ist also nach dem obigen Satz $= 3s$; wir haben aber gefunden

$$\begin{aligned}
10s &= 1{,}42857142857 \text{ etc.}\\
\text{Subtrahire}\quad 3s &= 0{,}42857142857 \text{ etc.}\\
\hline
\text{so wird}\quad 7s &= 1, \text{ folglich } s = \tfrac{1}{7}.
\end{aligned}$$

533.

Wann also der Nenner des gegebenen Bruchs 7 ist, so lauft der Decimal-Bruch ins unendliche, und werden darinnen 6 Zahlen immer wiederholt, wovon der Grund leicht einzusehen ist, weil bey fortgesetzter Division endlich ein mal so viel übrig bleiben muß, als man anfänglich gehabt. Es können aber nicht mehr verschiedene Zahlen übrig bleiben, als 1, 2, 3, 4, 5, 6, also müßen von der sechsten Division an wieder eben die Zahlen herauskommen als vom Anfang. Wann aber der Nenner so beschaffen ist, daß die Division endlich aufgeht, so fält dieses weg.

534.

Es sey der Nenner des Bruchs 8, so werden folgende Decimal-Brüche gefunden:

$$\tfrac{1}{8} = 0{,}125;\ \tfrac{2}{8} = 0{,}250;\ \tfrac{3}{8} = 0{,}375;\ \tfrac{4}{8} = 0{,}500;$$

$$\tfrac{5}{8} = 0{,}625;\ \tfrac{6}{8} = 0{,}750;\ \tfrac{7}{8} = 0{,}875 \text{ etc.}$$

535.

Ist der Nenner 9 so findet man folgende Decimal-Brüche $\frac{1}{9} = 0{,}111$ etc. $\frac{2}{9} = 0{,}222$ etc. $\frac{3}{9} = 0{,}333$ etc. Ist aber der Nenner 10 so bekommt man folgende Brüche $\frac{1}{10} = 0{,}100$; $\frac{2}{10} = 0{,}2$; $\frac{3}{10} = 0{,}3$ wie aus der Natur der Sache erhellet. Eben so wird $\frac{1}{100} = 0{,}01$; $\frac{37}{100} = 0{,}37$; ferner $\frac{256}{1000} = 0{,}256$; weiter $\frac{24}{10000} = 0{,}0024$; welches für sich offenbahr.

536.

Es sey der Nenner des Bruchs 11, so findet man diesen Decimal-Bruch $\frac{1}{11} = 0{,}0909090$ etc. Wäre nun dieser Bruch gegeben und man wollte seinen Werth finden so setze man denselben $= s$. Es wird also $s = 0{,}0909090$ und $10s = 0{,}909090$. Weiter $100s = 9{,}09090$. Hievon s subtrahirt, so wird $99s = 9$ und dahero $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$. Ferner wird

$$\tfrac{2}{11} = 0{,}181818;\ \tfrac{3}{11} = 0{,}272727;\ \tfrac{6}{11} = 0{,}545454.$$

537.

Hier sind nun diejenigen Decimal-Brüche sehr merckwürdig, da einige Zahlen immer wiederholt werden und solcher Gestalt ins unendliche fortgehen. Wie nun von solchen Brüchen der Werth leicht zu finden sey, soll so gleich gezeigt werden.

Es werde erstlich nur eine Zahl wiederholt, welche sey $= a$ so haben wir $s = 0{,}aaaaaaa$. Diesemnach wird

$$10s = a{,}aaaaaaa.$$

$$\text{Subtrahire } s = 0{,}aaaaaaa$$

$$\text{so wird } 9s = a, \text{ folglich } s = \frac{a}{9}.$$

Werden immer zwey Zahlen wiederholt, als ab, so hat man $s = 0{,}abababa$. Daher wird $100s = ab{,}ababab$; hievon s subtrahirt, bleibt $99s = ab$; also $s = \frac{ab}{99}$.

Werden drey Zahlen als abc immer wiederholt, so hat man $s = 0{,}abcabcabc$; folglich $1000s = abc{,}abcabc$. Hievon das obige subtrahirt, bleibt $999s = abc$; also $s = \frac{abc}{999}$ und so weiter.

538.

So oft also ein solcher Decimal-Bruch vorkommt, so ist es leicht seinen Werth anzuzeigen: also wann dieser gegeben wäre 0,296296; so wird sein Werth seyn $= \frac{296}{999}$. Dieser Bruch durch 37 abgekürtzt wird $= \frac{8}{27}$.

Hieraus muß nun hinwiederum der obige Decimal-Bruch entspringen; um dieses leichter zu zeigen, weil $27 = 3 \cdot 9$, so theile man 8 erstlich durch 9, und den Quotus ferner durch 3, wie folget:

$$\begin{array}{r} 9)\ 8{,}0000000 \\ 3)\ 0{,}8888888 \\ \hline 0{,}2962962 \text{ etc.} \end{array}$$

Welches der gegebene Decimal-Bruch ist.

539.

Um noch ein Exempel zu geben, so verwandele man diesen Bruch

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}$$

in einen Decimal-Bruch welches folgender Gestalt geschieht.

2)	1,000 000 000 000 00
3)	0,500 000 000 000 00
4)	0,166 666 666 666 66
5)	0,041 666 666 666 66
6)	0,008 333 333 333 33
7)	0,001 388 888 888 88
8)	0,000 198 412 698 41
9)	0,000 024 801 587 30
10)	0,000 002 755 731 92
	0,000 000 275 573 19

CAPITEL 13

VON DEN INTERESSEN-RECHNUNGEN

540.

Die Interessen oder Zinsen von einem Capital pflegen in Procento ausgedrückt zu werden, indem man sagt wie viel von 100 jährlich bezahlt werden. Gemeiniglich wird das Geld zu 5 p. C. ausgelegt, also daß von 100 Rthl. jährlich 5 Rthl. Interessen gezahlt werden. Hieraus ist nun klar und leicht, den Zins von einem jeglichen Capital zu berechnen, indem man nach der Regeldetri sagt:

100 geben 5 was giebt das gegebene Capital. Es sey z. E. das Capital 860 Rthl. so findet man den jährlichen Zins

$$
\begin{array}{r}
100:5 = 860 \text{ zu} \ldots \\
5 \\
\hline
100)\ 4300 \\
\hline
43
\end{array}
\qquad \text{Antwort 43 Rthl.}
$$

541.

Bey Berechnung dieses einfachen Interesse wollen wir uns nicht aufhalten, sondern die Interessen auf Interessen betrachten, da jährlich die Zinsen wieder zum Capital geschlagen und dadurch das Capital vermehret wird, wobey dann gefragt wird: Wie hoch ein gegebenes Capital nach Verfließung einiger Jahre anwachse? Da nun das Capital jährlich größer wird, indem zu 5 Proc. 100 Rthl. nach einem Jahr zu 105 anwachsen so kann man daraus finden, wie groß ein jegliches Capital nach Verfließung eines Jahres werden müße?

Es sey das Capital $=a$ so wird solches nach einem Jahre gefunden, wann man sagt 100 geben 105 was giebt a; Antwort $\frac{105a}{100}=\frac{21a}{20}$, welches auch also geschrieben werden kann $\frac{21}{20}\cdot a$ oder $a+\frac{1}{20}\cdot a$.

542.

Wann allso zu dem gegenwärtigen Capital sein 20ster Theil addirt wird, so bekommt man das Capital für das folgende Jahr. Wann man nun zu diesem wieder seinen 20sten Theil addirt, so findet man das Capital für das zweyte Jahr; und zu diesem wieder sein 20ster Theil addirt, giebt das Capital für das dritte Jahr, und so fort. Hieraus ist leicht zu sehen, wie das Capital jährlich anwächst, und kann diese Rechnung so weit fortgesetzt werden, als man will.

543.

Es sey das Capital anjetzo 1000 Rthl. welches zu 5 p. C. angelegt ist und die Zinsen davon jährlich wieder zum Capital geschlagen werden; weil nun die besagte Rechnung bald auf Brüche führen wird, so wollen wir solche in Decimal-Brüchen ausdrücken, nicht weiter aber als bis auf 1000ste Theile eines Rthl. gehen, weil kleinere Theilchen hier in keine Betrachtung kommen.

Gegenwärtiges Capital 1000 Rthl. wird

nach 1 Jahr	1050 Rthl.
	52,5
nach 2 Jahren	1102,5
	55,125
nach 3 Jahren	1157,625
	57,881
nach 4 Jahren	1215,506
	60,775
nach 5 Jahren	1276,281 etc.

544.

Solcher Gestalt kann man auf so viele Jahre fortgehen als man will; wann aber die Anzahl der Jahre sehr groß ist, so wird diese Rechnung sehr weitläuftig und mühsam; dieselbe läßt sich aber folgender gestalt abkürtzen.

Es sey das gegenwärtige Capital $= a$ und da ein Capital von 20 Rthl. nach einem Jahr 21 Rthl. beträgt, so wird das Capital a nach einem Jahr auf $\frac{21}{20}\cdot a$ anwachsen. Ferner im folgenden Jahr auf $\frac{21^2}{20^2}\cdot a = \left(\frac{21}{20}\right)^2\cdot a$. Dieses ist nun das Capital nach zweyen Jahren, welches in einem Jahr wieder anwächst auf $\left(\frac{21}{20}\right)^3\cdot a$, welches das Capital nach drey Jahren seyn wird; nach vier Jahren wird nun dasselbe seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^4\cdot a$; nach fünf Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^5\cdot a$; nach 100 Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}\cdot a$, und allgemein nach n Jahren wird dasselbe seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^n\cdot a$; woraus man nach einer jeglichen beliebigen Zahl von Jahren die Größe des Capitals finden kann.

545.

Der hier vorkommende Bruch $\frac{21}{20}$ gründet sich darauf, daß das Interesse zu 5 Pr. gerechnet wird, und $\frac{21}{20}$ so viel ist als $\frac{105}{100}$. Sollte nun das Interesse zu 6 Pr. gerechnet werden, so würde das Capital a nach einem Jahr anwachsen auf $\frac{106}{100}\cdot a$; nach zwey Jahren auf $\left(\frac{106}{100}\right)^2\cdot a$; und nach n Jahren auf $\left(\frac{106}{100}\right)^n\cdot a$.

Sollte aber das Interesse nur 4 Pr. betragen, so würde das Capital a nach n Jahren anwachsen auf $\left(\frac{104}{100}\right)^n\cdot a$.

546.

Wann nun, so wohl das Capital a als die Anzahl der Jahre gegeben ist, so kann man diese Formel leicht auflößen nemlich durch die Logarithmen. Dann man darf nur den Logarithmus von dieser Formel suchen, welche zu 5 Proc. ist $\left(\frac{21}{20}\right)^n\cdot a$. Da nun dieselbe ein Product ist von $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ und a, so ist ihr Logarithmus $= \mathfrak{l}\left(\frac{21}{20}\right)^n + \mathfrak{l}a$. Da weiter $\left(\frac{21}{20}\right)^n$ eine Potestät ist, so ist $\mathfrak{l}\left(\frac{21}{20}\right)^n = n\,\mathfrak{l}\frac{21}{20}$. Dahero ist der Logarithmus von dem gesuchten Capital $= n\cdot\mathfrak{l}\frac{21}{20} + \mathfrak{l}a$. Es ist aber der Logarithmus des Bruchs $\frac{21}{20} = \mathfrak{l}21 - \mathfrak{l}20$.

547.

Es sey nun das Capital $= 1000$ Rthl. und man fragt wie groß daßelbe nach 100 Jahren zu 5 p. C. seyn werde?

Hier ist also $n = 100$. Der Logarithmus von diesem gesuchten Capital wird nun seyn $= 100\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} + \mathfrak{l}1000$, welcher folgender Gestalt berechnet wird

$$\begin{array}{rr} & \mathfrak{l}21 = 1{,}3222193 \\ \text{subtr.} & \mathfrak{l}20 = 1{,}3010300 \\ \hline & \mathfrak{l}\frac{21}{20} = 0{,}0211893 \\ \text{multipl.} & \text{mit } 100 \\ \hline & 100\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} = 2{,}1189300 \\ \text{addirt} & \mathfrak{l}1000 = 3{,}0000000 \\ \hline & 5{,}1189300 \end{array}$$

dieses ist der Logarithmus des gesuchten Capitals und die Zahl desselben wird also aus 6 Figuren bestehen und also heißen 131501 Rthl.

548.

Ein Capital von 3452 Rthl. zu 6 Procento, wie groß wird dasselbe nach 64 Jahren?

Hier ist also $a = 3452$ und $n = 64$. Also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 64\,\mathfrak{l}\frac{53}{50} + \mathfrak{l}3452$, welches also berechnet wird:

$$\begin{array}{rr} & \mathfrak{l}53 = 1{,}7242759 \\ \text{subtr.} & \mathfrak{l}50 = 1{,}6989700 \\ \hline & \mathfrak{l}\frac{53}{50} = 0{,}0253059 \\ \hline \text{mult. mit } 64; & 64\,\mathfrak{l}\frac{53}{50} = 1{,}6195776 \\ & \mathfrak{l}3452 = 3{,}5380708 \\ \hline & 5{,}1576484 \end{array}$$

Also das gesuchte Capital $= 143763$ Rthl.

549.

Wann die Anzahl der Jahre sehr groß ist, und weil damit der Logarithmus eines Bruchs multiplicirt werden muß, die Logarithmus in den Tabellen aber nur auf 7 Figuren berechnet worden, so könnte daraus ein mercklicher Fehler entstehen. Dahero muß der Logarithmus des Bruchs auf mehrere Figuren genommen werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen: Ein Capital von einem Rthl. zu 5 p. C. bleibt 500 Jahr lang stehen, da inzwischen die jährliche Zinse immer dazu geschlagen worden. Nun fragt sich, wie groß dieses Capital nach 500 Jahren seyn werde?

Hier ist also $a = 1$ und $n = 500$: also der Logarithmus des gesuchten Capitals $= 500\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} + \mathfrak{l}1$, woraus diese Rechnung entspringt

$$\begin{array}{rr} & \mathfrak{l}21 = 1{,}322\,219\,294\,733\,919 \\ \text{subtrahirt} & \mathfrak{l}20 = 1{,}301\,029\,995\,663\,981 \\ \hline & \mathfrak{l}\frac{21}{20} = 0{,}021\,189\,299\,069\,938 \\ \hline \text{mult. mit 500 gibt} & 10{,}594\,649\,534\,969\,000 \end{array}$$

dieses ist nun der Logarithmus des gesuchten Capitals, welches dahero selbsten seyn wird $= 39\,323\,200\,000$ Rthl.

550.

Wann man aber jährlich zu dem Capital nicht nur die Interesse schlagen, sondern noch jährlich eine neue Summa $= b$ darzu legen wollte, so wird das gegenwärtige Capital alle Jahr anwachsen wie folget. Gegenwärtig hat man a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a + b$

nach 2 Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a + \frac{21}{20}b + b$

nach 3 Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach 4 Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^4 a + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \frac{21}{20}b + b$

nach n Jahr $\left(\frac{21}{20}\right)^n a + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b + \cdots + \frac{21}{20}b + b.$

Dieses Capital besteht aus zwey Theilen, davon der erste $= \left(\frac{21}{20}\right)^n a$, der andere aber aus dieser Reihe rückwerts geschrieben

$$b + \left(\frac{21}{20}\right) b + \left(\frac{21}{20}\right)^2 b + \left(\frac{21}{20}\right)^3 b + \cdots + \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$$

besteht, welches eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= \frac{21}{20}$. Die Summe davon wird nun also gefunden:

26*

Man multiplicirt das letzte Glied $\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b$ mit dem Nenner $\frac{21}{20}$, so bekommt man $\left(\frac{21}{20}\right)^{n} b$, davon subtrahirt man das erste Glied b, so bleibt $\left(\frac{21}{20}\right)^{n} b - b$. Dieses muß durch 1 weniger als der Nenner ist dividirt werden, das ist durch $\frac{1}{20}$; dahero wird die Summe der obigen Progression $= 20\left(\frac{21}{20}\right)^{n} b - 20b$; folglich wird das gesuchte Capital seyn:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{n} a + 20 \cdot \left(\frac{21}{20}\right)^{n} b - 20b = \left(\frac{21}{20}\right)^{n} \cdot (a + 20b) - 20b.$$

551.

Um nun dieses auszurechnen, so muß man das erste Glied $\left(\frac{21}{20}\right)^{n} (a + 20b)$ besonders betrachten und berechnen, welches geschieht, wann man den Logarithmus desselben sucht welcher ist $n\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} + \mathfrak{l}(a + 20b)$. Zu diesem sucht man in den Tabellen die gehörige Zahl, so hat man das erste Glied; davon subtrahirt man $20b$, so bekommt man das gesuchte Capital.

552.

Frage: Einer hat ein Capital von 1000 Rthl. zu 5 p. C. ausstehen, wozu er jährlich außer den Zinsen noch 100 Rthl. hinzulegt, wie groß wird dieses Capital nach 25 Jahren seyn?

Hier ist also $a = 1000$; $b = 100$; $n = 25$; dahero wird die Rechnung stehen wie folget:

$$\begin{array}{r} \mathfrak{l}\frac{21}{20} = 0{,}021189299 \\ \hline \text{multiplic. mit 25 giebt} \\ \hline 25\,\mathfrak{l}\frac{21}{20} = 0{,}5297324750 \\ \mathfrak{l}(a + 20b) = 3{,}4771212547 \\ \hline 4{,}0068537297 \end{array}$$

Also ist der erste Theil 10159,1 Rthl. davon subtrahirt $20b = 2000$, so ist das Capital nach 25 Jahren werth 8159,1 Rthl.

553.

Da nun das Capital immer größer wird und nach 25 Jahren auf $8159\frac{1}{10}$ Rthl. angewachsen, so kann man weiter fragen nach wie viel Jahren dasselbe bis auf 1000000 Rthl. anwachsen werde?

Es sey n diese Anzahl von Jahren, und weil $a = 1000$, $b = 100$ so wird nach n Jahren das Capital seyn:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^n (3000) - 2000$$

dieses muß nun 1000000 Rthl. seyn, woraus diese Gleichung entspringt:

$$3000 \left(\frac{21}{20}\right)^n - 2000 = 1000000.$$

Man addire beyderseits 2000, so bekommt man

$$3000 \left(\frac{21}{20}\right)^n = 1002000$$

Man dividire beyderseits durch 3000 so hat man $\left(\frac{21}{20}\right)^n = 334$. Hiervon nehme man die Logarithmus, so hat man $n \cdot \mathfrak{l}\frac{21}{20} = \mathfrak{l}334$. Hier dividirt man durch $\mathfrak{l}\frac{21}{20}$, so kommt $n = \frac{\mathfrak{l}334}{\mathfrak{l}\frac{21}{20}}$. Nun aber ist $\mathfrak{l}334 = 2{,}5237465$ und $\mathfrak{l}\frac{21}{20} = 0{,}0211893$; dahero wird $n = \frac{2{,}5237465}{0{,}0211893}$. Man multiplicire oben und unten mit 10000000, so kommt $n = \frac{25237465}{211893}$, das ist 119 Jahr 1 Monath 7 Tage, und nach so langer Zeit wird das Capital anwachsen auf 1000000 Rthl.

554.

Wann aber anstatt daß alle Jahr etwas zum Capital gelegt wird, etwas davon weggenommen wird, so man auf seinen Unterhalt verwendet, und diese Summe $= b$ gesetzt wird, so wird das zu 5 p. C. angelegte Capital a folgender Gestalt fortgehen: Gegenwärtig ist es a;

nach 1 Jahr $\frac{21}{20}a - b$

nach 2 Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^2 a - \frac{21}{20}b - b$

nach 3 Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^3 a - \left(\frac{21}{20}\right)^2 b - \frac{21}{20}b - b$

nach n Jahren $\left(\frac{21}{20}\right)^n a - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-1} b - \left(\frac{21}{20}\right)^{n-2} b - \cdots - \left(\frac{21}{20}\right) b - b.$

555.

Dasselbe wird uns also in zwey Stücken vorgelegt, das erste ist $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$; davon wird subtrahirt diese Geometrische Progression rückwärts geschrieben

$b+\frac{21}{20}b+\left(\frac{21}{20}\right)^2 b+\cdots\left(\frac{21}{20}\right)^{n-1}b$. Hiervon ist oben die Summe gefunden worden $=20\left(\frac{21}{20}\right)^n b-20b$, welche von dem ersten $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ subtrahirt, das nach n Jahren gesuchte Capital giebt $\left(\frac{21}{20}\right)^n(a-20b)+20b$.

556.

Diese Formel hätte so gleich aus der vorigen geschloßen werden können. Dann da vorher jährlich b addirt wurde, so wird nun jährlich b subtrahirt. Also darf man in der vorhergehenden Formel anstatt $+b$ nur $-b$ schreiben. Hier ist nun insonderheit zu mercken, daß wann $20b$ größer ist, als a so wird das erste Glied negativ und also das Capital immer kleiner; welches vor sich offenbahr ist, dann wann vom Capital jährlich mehr weggenommen wird, als der Zins beträgt, so muß dasselbe alle Jahr kleiner werden und endlich gar verschwinden; welches wir mit einem Exempel erläutern wollen.

557.

Einer hat ein Capital von 100000 Rthl. zu 5 p. C. ausstehen; braucht alle Jahr zu seinem Unterhalt 6000 Rthl. welches mehr ist als das Interesse von 100000 Rthl. so nur 5000 Rthl. beträgt, dahero das Capital immer kleiner wird. Nun ist die Frage nach wie viel Jahren dasselbe gäntzlich verschwinden werde?

Vor diese Anzahl Jahre setze man n, und da $a=100000$ Rthl. und $b=6000$, so wird nach n Jahren das Capital seyn $=-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n+120000$ oder $120000-20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$. Also verschwindet das Capital wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n$ auf 120000 anwächst oder wann $20000\left(\frac{21}{20}\right)^n=120000$. Man dividire durch 20000, so kommt $\left(\frac{21}{20}\right)^n=6$. Man nehme die Logarithmus, so kommt $n\,\mathrm{l}\frac{21}{20}=\mathrm{l}\,6$. Man dividire durch $\mathrm{l}\frac{21}{20}$, so findet man

$$n=\frac{\mathrm{l}\,6}{\mathrm{l}\frac{21}{20}}=\frac{0{,}7781513}{0{,}0211893},\ \text{oder}\ n=\frac{7781513}{211893}$$

folglich wird $n=36$ Jahr 8 Monath 22 Tage: und nach so vieler Zeit wird es verschwinden.

558.

Hier ist noch nöthig zu zeigen, wie nach diesem Grund die Interessen auch vor eine kleinere Zeit als gantze Jahre berechnet werden können. Hierzu dient nun auch die oben gefundene Formel, daß ein Capital zu 5 p. C. nach n Jahren auf $\left(\frac{21}{20}\right)^n a$ anwächst; ist nun die Zeit kleiner als ein Jahr, so wird der Exponent n ein Bruch und die Rechnung kann wie vorher durch Logarithmus gemacht werden. Sollte das Capital nach einem Tage gesucht werden, so muß man setzen $n = \frac{1}{365}$; will man es nach zwey Tagen wißen, so wird $n = \frac{2}{365}$ etc.

559.

Es sey das Capital $a = 100000$ Rthl. zu 5 p. C. wie groß wird solches nach 8 Tagen seyn?

Hier ist

$a = 100000$ und $n = \frac{8}{365}$; folglich wird das Capital seyn $\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} 100000$.

Hiervon ist der Logarithmus

$$= l\left(\frac{21}{20}\right)^{\frac{8}{365}} + l\,100000 = \frac{8}{365}\, l\,\frac{21}{20} + l\,100000.$$

Nun aber ist	$l\,\frac{21}{20} = 0{,}0211893$
dieser mit $\frac{8}{365}$ multiplicirt giebt	0,0004644
hierzu ad. $l\,100000$ welcher ist	5,0000000
	5,0004644

so erhält man den Logarithmus von dem Capital $= 5{,}0004644$. Folglich ist das Capital selbst 100107 Rthl. so daß in den ersten 8 Tagen das Interesse schon 107 Rthl. austrägt.

560.

Hierher gehören noch andere Fragen, welche darauf gehen, wann eine Summa Geld erst nach einigen Jahren verfällt, wie viel dieselbe anjetzo werth sey. Hier ist zu betrachten, daß da 20 Rthl. über ein Jahr 21 Rthl. austragen, so sind hinwiederum 21 Rthl. die nach einem Jahr zahlbar sind, anjetzo nur 20 Rthl. werth. Wann also das nach einem Jahr verfallene Capital a gesetzt wird, so ist desselben Werth $\frac{20}{21}a$. Um also zu finden wie viel das Capital a, so zu einer gewißen Zeit verfällt ein Jahr früher werth ist, so muß man daßelbe multipliciren mit $\frac{20}{21}$; zwey Jahr früher wird desselben Werth seyn $\left(\frac{20}{21}\right)^2 a$; drey Jahr früher ist dasselbe $\left(\frac{20}{21}\right)^3 a$ und überhaupt n Jahr früher ist der Werth desselben $\left(\frac{20}{21}\right)^n a$.

561.

Einer genießt auf 5 Jahr lang eine jährliche Rente von 100 Rthl. dieselbe wollte er nun jetzt für baares Geld zu 5 p. C. verkaufen, wie viel wird er dafür bekommen?

Für die 100 Rthl. welche verfallen

nach 1 Jahr	bekommt	er	95,239
nach 2 Jahren	„	„	90,704
nach 3 Jahren	„	„	86,385
nach 4 Jahren	„	„	82,272
nach 5 Jahren	„	„	78,355
Summa aller 5 Jahren	bekommt	er	432,955

Also kan er vor diese Rente nicht mehr fordern als 432,955 Rthl. oder 432 Rthl. 22 Gr. 11 Pf.

562.

Sollte aber eine Rente viel mehr Jahre lang dauren, so würde die Rechnung auf diese Art sehr mühsam werden, welche aber folgender Gestalt erleichtert werden kann:

Es sey die jährliche Rente $= a$, welche jetzo schon anfängt und n Jahre lang dauret, so wird dieselbe anjetzo werth seyn:

$$a + \tfrac{20}{21} a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^2 a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^3 a + \left(\tfrac{20}{21}\right)^4 a + \cdots + \left(\tfrac{20}{21}\right)^n a.$$

Dieses ist nun eine Geometrische Progression deren Summe gefunden werden muß. Man multiplicirt also das letzte Glied mit dem Nenner, so hat man $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$; davon das erste Glied subtrahirt, bleibt $\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a - a$; dieses muß mit dem Nenner weniger eins, das ist, mit $-\frac{1}{21}$ dividirt, oder welches gleich viel, mit -21 multiplicirt werden: dahero wird die gesuchte Summe seyn $= -21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a + 21a$, das ist $21a - 21\left(\frac{20}{21}\right)^{n+1} a$, wovon das letztere Glied, so subtrahirt werden soll, leicht durch Logarithmus berechnet werden kann.

ENDE DES ERSTEN THEILS
UND DES DRITTEN ABSCHNITTS VON DEN VERHÄLTNISSEN
UND PROPORTIONEN

Vollständige Anleitung zur Algebra

von

Hrn. Leonhard Euler.

Zweyter Theil.

Von Auflösung algebraischer Gleichungen und der unbestimmten Analytic.

St. Petersburg.
gedruckt bey der Kays. Acad. der Wissenschaften 1770.

DES ZWEYTEN THEILS ERSTER ABSCHNITT

VON DEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN UND DERSELBEN AUFLÖSUNG

CAPITEL 1

VON DER AUFLÖSUNG DER AUFGABEN ÜBERHAUPT

1.

Die Haupt-Absicht der Algebra so wie aller Theile der Mathematic ist dahin gerichtet, daß man den Werth solcher Größen, die bisher unbekant gewesen bestimmen möge, welches aus genauer Erwegung der Bedingungen, welche dabey vorgeschrieben und durch bekante Größen ausgedrückt werden, geschehen muß. Dahero die Algebra auch also beschrieben wird, daß darinnen gezeigt werde wie man aus bekanten Größen unbekante ausfindig machen könne.

2.

Dieses stimmt auch mit allem demjenigen überein, was bisher vorgetragen worden, indem allenthalben aus bekanten Größen andere herausgebracht worden sind, so vorher als unbekant angesehen werden konnten.

Das erste Beyspiel findet man so gleich in der Addition, da von zwey oder mehr gegebenen Zahlen die Summa gefunden worden. Daselbst wurde nemlich eine Zahl gesucht welche den gegebenen zusammen genommen gleich ist.

Bey der Subtraction wurde eine Zahl gesucht, welche dem Unterscheid zweyer gegebenen Zahlen gleich war.

Und eben so verhält es sich auch mit der Multiplication und Division, wie auch mit der Erhebung der Potestäten und der Ausziehung der Wurzeln, wo immer eine vorher unbekante Zahl aus bekanten gefunden wird.

3.

In dem letzten Abschnitt haben wir schon verschiedene Fragen aufgelößt, wobey es immer auf die Erfindung einer Zahl angekommen, welche aus andern gegebenen Zahlen unter gewißen Bedingungen geschloßen werden mußte.

Alle Fragen lauffen also da hinaus, daß aus einigen gegebenen Zahlen eine neue gefunden werden soll, welche mit jenen in einer gewißen Verbindung stehe, und diese Verbindung wird durch gewisse Bedingungen oder Eigenschaften, welche der gesuchten Zahl zukommen müßen, bestimmt.

4.

Bey einer jeden vorkommenden Frage wird nun diejenige Zahl die gesucht werden soll, durch einen der letztern Buchstaben des Alphabets angedeutet, und dabey alle vorgeschriebene Bedingungen in Erwegung gezogen, wodurch man auf eine Vergleichung zwischen zweyen Zahlen geführet wird. Aus einer solchen Gleichung muß hernach der Werth der gesuchten Zahl bestimmt werden, wodurch die Frage aufgelößet wird. Bisweilen müßen auch mehrere Zahlen gesucht werden, welches auf gleiche weise durch Gleichungen geschehen muß.

5.

Dieses wird durch ein Exempel deutlicher werden; man stelle sich diese Frage vor:

20 Personen, Männer und Weiber, zehren in einem Wirths-Haus: ein Man verzehrt 8 Gr. ein Weib aber 7 Gr. und die gantze Zeche beläuft sich auf 6 Rthl. Nun ist die Frage wie viel Männer und Weiber daselbst gewesen?

Um diese Frage aufzulösen, so setze man die Zahl der Männer $= x$, und sehe dieselbe als bekant an, oder man verfahre damit als wann man die Probe machen wollte, ob dadurch der Frage ein Genüge geschähe. Da nun die Anzahl der Männer $= x$ ist und Männer und Weiber zusammen 20 Person ausmachen so kann man daraus die Anzahl der Weiber bestimmen, welche gefunden wird wann man die Zahl der Männer von 20 subtrahirt. Also war die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun ein Mann 8 Gr. verzehrt, so werden diese x Männer verzehren $8x$ Gr. Und weil ein Weib 7 Gr. verzehrt, so werden diese $20 - x$ Weiber verzehren $140 - 7x$ Gr.

Also verzehren Männer und Weiber zusammen $140 + x$ Gr. Wir wißen aber wie viel sie verzehrt haben, nemlich 6 Rthl. welche zu Gr. gemacht 144 Gr. sind, daher erhalten wir diese Gleichung $140 + x = 144$ woraus man leicht sieht daß $x = 4$.

Dahero waren bey der Zeche 4 Männer und 16 Weiber.

6.

Eine andere Frage von gleicher Art:

20 Personen, Männer und Weiber, sind in einem Wirths-Haus. Die Männer verzehren 24 Fl. die Weiber verzehren auch 24 Fl. und es findet sich, daß ein Mann einen Gulden mehr als ein Weib hat zahlen müßen, wie viel waren es Männer und Weiber?

Es sey die Zahl der Männer $= x$ so ist die Zahl der Weiber $= 20 - x$.

Da nun diese x Männer 24 Fl. verzehrt haben, so hat ein Mann verzehrt $\frac{24}{x}$ Fl.

Und weil die $20 - x$ Weiber auch 24 Fl. verzehret haben, so hat ein Weib verzehrt $\frac{24}{20-x}$. Diese Zeche eines Weibes ist nun um 1 weniger, als die Zeche eines Mannes. Wann man also von der Zeche eines Mannes 1 Fl. subtrahirt, so muß die Zeche eines Weibes heraus kommen; woraus man diese Gleichung erhält $\frac{24}{x} - 1 = \frac{24}{20-x}$. Dieses ist also die Gleichung woraus der Werth von x gesucht werden muß, welcher nicht so leicht heraus gebracht werden kann wie bey der vorigen Frage. Aus dem folgenden aber wird man sehen daß $x = 8$ sey, welches auch der gefundenen Gleichung ein Genüge leistet $\frac{24}{8} - 1 = \frac{24}{12}$ das ist $2 = 2$.

7.

Bey allen Fragen kommt es nun darauf an, daß nachdem man die unbekanten oder gesuchten Zahlen durch Buchstaben angedeutet, die Umstände der Frage genau in Erwegung gezogen, und daraus Gleichungen hergeleitet werden. Hernach besteht die gantze Kunst darinn wie solche Gleichungen aufgelößet, und daraus der Werth der unbekandten Zahlen gefunden werden soll, und hievon soll in diesem Abschnitt gehandelt werden.

8.

Bey den Fragen selbst ereignet sich auch ein Unterscheid, in dem bey einigen nur eine unbekannte Zahl, bey andern aber zwey oder noch mehr gesucht werden sollen, in welchem letztern Fall zu mercken, daß dazu auch eben so viel besondere Gleichungen erfodert werden, welche aus den Umständen der Frage selbst hergeleitet werden müßen.

9.

Eine Gleichung bestehet demnach aus zwey Sätzen, deren einer dem andern gleich gesetzt wird. Um nun daraus den Werth der unbekanten Zahl herauszubringen, müßen öfters sehr viele Verwandelungen angestellet werden, welche sich aber alle darauf gründen, daß wann zwey Größen einander gleich sind, dieselben auch einander gleich bleiben, wann man zu beyden einerley Größen addirt oder davon subtrahirt; imgleichen auch wann dieselben durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden; ferner auch wann beyde zugleich zu Potestäten erhoben oder aus beyden gleichnahmigte Wurzeln ausgezogen, und endlich auch wann von beyden die Logarithmen genommen werden, wie schon allbereit im vorigen Abschnitt geschehen.

10.

Diejenigen Gleichungen, wo von der unbekanten Zahl nur die erste Potestät vorkommt, nach dem die Gleichung in Ordnung gebracht worden, sind am leichtesten aufzulösen, und werden Gleichungen vom ersten Grad genennet. Hernach folgen solche Gleichungen, worinnen die zweyte Potestät oder das Quadrat der unbekanten Zahl vorkommt, diese werden Quadratische Gleichungen, oder vom zweyten Grad genennt. Darauf folgen die Gleichungen vom dritten Grad oder die Cubischen worinnen der Cubus der unbekanten Zahl vorkommt, und so fort, von welchen allen in diesem Abschnitt gehandelt werden soll.

CAPITEL 2

VON DEN GLEICHUNGEN DES ERSTEN GRADS UND IHRER AUFLÖSUNG

11.

Wann die unbekante oder gesuchte Zahl durch den Buchstaben x angedeutet wird, und die heraus gebrachte Gleichung schon so beschaffen ist, daß der eine Satz blos allein das x und der andere Satz eine bekante Zahl enthält, als z. E. $x = 25$, so hat man schon würcklich den Werth von x der verlangt wird, und auf diese Form muß man immer zu kommen trachten, so verwirt auch die erst gefundene Gleichung seyn mag, worzu die Regeln im folgenden gegeben werden sollen.

12.

Wir wollen bey den leichtesten Fällen anfangen und erstlich setzen, man sey auf diese Gleichung gekommen:

$$x + 9 = 16, \quad \text{so sieht man daß} \quad x = 7.$$

Es sey aber auf eine allgemeine Art $x + a = b$, wo a und b bekante Zahlen andeuten, dieselben mögen heißen wie sie wollen. Hier muß man also beyderseits a subtrahiren und da bekommt man diese Gleichung $x = b - a$ welche uns den Werth von x anzeigt.

13.

Wann die gefundene Gleichung ist $x - a = b$, so addire man beyderseits a, so kommt $x = a + b$, welches der gesuchte Werth von x ist.

Eben so verfährt man, wann die erste Gleichung also beschaffen ist $x - a = aa + 1$, dann da wird $x = aa + a + 1$.

Und aus dieser Gleichung $x - 8a = 20 - 6a$ bekommt man $x = 20 - 6a + 8a$ oder $x = 20 + 2a$.

Und aus dieser $x + 6a = 20 + 3a$ findet man $x = 20 + 3a - 6a$ oder $x = 20 - 3a$.

14.

Ist nun die Gleichung also beschaffen $x - a + b = c$, so kann man beyderseits a addiren, so kommt $x + b = c + a$, jetzt subtrahire man beyderseits b, so hat man $x = c + a - b$; man kann aber zugleich beyderseits $+ a - b$ addiren, so bekommt man mit einmahl $x = c + a - b$. Also in den folgenden Exempeln:

wann $x - 2a + 3b = 0$, so wird $x = 2a - 3b$,

wann $x - 3a + 2b = 25 + a + 2b$, so wird $x = 25 + 4a$,

wann $x - 9 + 6a = 25 + 2a$, so wird $x = 34 - 4a$.

15.

Hat die gefundene Gleichung diese Gestalt $ax = b$, so dividire man beyderseits durch a so hat man $x = \frac{b}{a}$.

Ist aber die Gleichung $ax + b - c = d$, so muß man erstlich dasjenige was bey ax steht wegbringen, man addire beyderseits $-b + c$ so kommt $ax = d - b + c$, folglich $x = \frac{d - b + c}{a}$; oder man subtrahire beyderseits $+ b - c$ so kommt $ax = d - b + c$ und $x = \frac{d - b + c}{a}$.

Es sey $2x + 5 = 17$, so kommt $2x = 12$ und $x = 6$.

Es sey $3x - 8 = 7$, so kommt $3x = 15$ und $x = 5$.

Es sey $4x - 5 - 3a = 15 + 9a$, so wird $4x = 20 + 12a$, folglich $x = 5 + 3a$.

16.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{x}{a} = b$, so multiplicire man beyderseits mit a, so kommt $x = ab$.

Ist nun $\frac{x}{a} + b - c = d$, so wird erstlich $\frac{x}{a} = d - b + c$ und

$$x = (d - b + c)\,a = ad - ab + ac.$$

Es sey $\frac{1}{2}x - 3 = 4$, so wird $\frac{1}{2}x = 7$ und $x = 14$.

Es sey $\frac{1}{3}x - 1 + 2a = 3 + a$, so wird $\frac{1}{3}x = 4 - a$ und $x = 12 - 3a$.

Es sey $\frac{x}{a-1} - 1 = a$ so wird $\frac{x}{a-1} = a + 1$ und $x = aa - 1$.

17.

Ist die Gleichung also beschaffen $\frac{ax}{b} = c$, so multiplicire man beyderseits mit b, so wird $ax = bc$, und ferner $x = \frac{bc}{a}$.

Ist aber $\frac{ax}{b} - c = d$, so wird $\frac{ax}{b} = d + c$ und $ax = bd + bc$ und folglich $x = \frac{bd + bc}{a}$.

Es sey $\frac{2}{3}x - 4 = 1$, so wird $\frac{2}{3}x = 5$ und $2x = 15$ folglich $x = \frac{15}{2}$, das ist $7\frac{1}{2}$.

Es sey $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 5$, also $\frac{3}{4}x = 5 - \frac{1}{2}$, welches $= \frac{9}{2}$, und $3x = 18$ und $x = 6$.

18.

Es kann auch geschehen, daß zwey oder mehr Glieder den Buchstaben x enthalten, und entweder in einem Satz oder in beyden vorkommen. Sind sie auf einer Seite als $x + \frac{1}{2}x + 5 = 11$, so wird $x + \frac{1}{2}x = 6$ und $3x = 12$ und $x = 4$.

Es sey $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 44$, was ist x? man multiplicire mit 3 so wird $4x + \frac{3}{2}x = 132$, ferner mit 2 multiplicirt wird $11x = 264$ und $x = 24$; diese drey Glieder können aber so gleich in eins gezogen werden, als $\frac{11}{6}x = 44$, man theile beyderseits durch 11 so hat man $\frac{1}{6}x = 4$ und $x = 24$.

Es sey $\frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x = 1$ welches zusammen gezogen giebt $\frac{5}{12}x = 1$ und $x = 2\frac{2}{5}$.

Es sey $ax - bx + cx = d$, so ist dieses eben so viel als $(a - b + c)x = d$, hieraus kommt $x = \frac{d}{a - b + c}$.

19.

Steht aber x in beyden Sätzen als z. E. $3x + 2 = x + 10$ so müßen die x von der Seite wo man am wenigsten hat weggebracht werden, also subtrahire man hier beyderseits x, so kommt $2x + 2 = 10$ und $2x = 8$ und $x = 4$.

Es sey ferner $x + 4 = 20 - x$, also $2x + 4 = 20$ und $2x = 16$ und $x = 8$.

Es sey $x + 8 = 32 - 3x$, also $4x + 8 = 32$ und $4x = 24$ und $x = 6$.

Es sey ferner $15 - x = 20 - 2x$, also $15 + x = 20$ und $x = 5$.

Es sey $1 + x = 5 - \frac{1}{2}x$, also $1 + \frac{3}{2}x = 5$ und $\frac{3}{2}x = 4$ und $3x = 8$ und $x = 2\frac{2}{3}$.

Es sey $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$, man addire $\frac{1}{3}x$, so kommt $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}x$, subtrahire $\frac{1}{3}$, so hat man $\frac{1}{12}x = \frac{1}{6}$, multiplicire mit 12, so kommt $x = 2$.

Es sey $1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x$, addire $\frac{2}{3}x$, so kommt $1\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{7}{6}x$, subtrahire $\frac{1}{4}$, so hat man $\frac{7}{6}x = 1\frac{1}{4}$, multiplicire mit 6, so bekommt man $7x = 7\frac{1}{2}$, durch 7 dividirt, giebt $x = 1\frac{1}{14}$ oder $x = \frac{15}{14}$.

20.

Kommt man auf eine solche Gleichung wo die unbekante Zahl x sich im Nenner befindet, so muß der Bruch gehoben und die gantze Gleichung mit demselben Nenner multiplicirt werden.

Also wann man findet $\frac{100}{x} - 8 = 12$, addire 8, so kommt $\frac{100}{x} = 20$, multiplicire mit x, so hat man $100 = 20x$, dividire durch 20, so kommt $x = 5$.

Es sey ferner $\frac{5x+3}{x-1} = 7$, multiplicire mit $x-1$, so hat man $5x+3 = 7x-7$, subtrahire $5x$, so kommt $3 = 2x - 7$, addire 7, so bekommt man $2x = 10$, folglich $x = 5$.

21.

Bisweilen kommen auch Wurzel-Zeichen vor, und die Gleichung gehört doch zu dem ersten Grad; als wann eine solche Zahl x gesucht wird unter 100, so daß die Quadrat-Wurzel aus $100 - x$ gleich werde 8, oder daß $\sqrt{(100 - x)} = 8$, so nehme man beyderseits die Quadraten $100 - x = 64$, so hat man wann x addirt wird $100 = 64 + x$, subtrahire 64, so hat man $x = 36$; oder man könnte auch also verfahren: da $100 - x = 64$, so subtrahire man 100, und man bekommt $-x = -36$, mit -1 multiplicirt, giebt $x = 36$.

22.

Bisweilen kommt auch die unbekante Zahl x in den Exponenten, dergleichen Exempel schon oben vorgekommen, und da muß man seine Zuflucht zu den Logarithmen nehmen.

Als wann man findet $2^x = 512$, so nimmt man beyderseits ihre Logarithmen, da hat man $x\,\mathfrak{l}2 = \mathfrak{l}512$; man dividire durch $\mathfrak{l}2$ so wird $x = \frac{\mathfrak{l}512}{\mathfrak{l}2}$; nach den Tabellen ist also:

$$x = \frac{2{,}7092700}{0{,}3010300} = \frac{27092700}{3010300}; \text{ also } x = 9.$$

Es sey $5 \cdot 3^{2x} - 100 = 305$; man addire 100, kommt also $5 \cdot 3^{2x} = 405$; man dividire durch 5, so wird $3^{2x} = 81$; man nehme die Logarithmen $2x\,\mathfrak{l}3 = \mathfrak{l}81$ und dividire durch $2\,\mathfrak{l}3$ so wird $x = \frac{\mathfrak{l}81}{2\,\mathfrak{l}3}$ oder $x = \frac{\mathfrak{l}81}{\mathfrak{l}9}$, folglich $x = \frac{1{,}9084850}{0{,}9542425} = \frac{19084850}{9542425}$; also wird $x = 2$.

CAPITEL 3

VON DER AUFLÖSUNG EINIGER HIEHER GEHÖRIGEN FRAGEN

23.

I. Frage: Zertheile 7 in zwey Theile, so daß der größere um 3 größer sey als der kleinere?

Es sey der größere Theil $= x$ so wird der kleinere seyn $7 - x$, dahero muß seyn $x = 7 - x + 3$ oder $x = 10 - x$; man addire x, so kommt $2x = 10$ und dividire durch 2, so wird $x = 5$.

Antwort: der größere Theil ist 5 und der kleinere 2.

II. Frage: Man zertheile a in zwey Theile, so daß der größere um b größer sey als der kleinere?

Es sey der größere Theil x, so ist der kleinere $a - x$; dahero wird $x = a - x + b$, man addire x, so wird $2x = a + b$ und dividire durch 2, so erhält man $x = \frac{a+b}{2}$.

Eine andere Auflösung: Es sey der größere Theil $= x$, weil nun derselbe um b größer ist als der kleinere, so ist hinwiederum der kleinere um b kleiner als der größere; dahero wird der kleinere Theil $x - b$: diese beyde Theile zusammen müßen a ausmachen, dahero bekommt man: $2x - b = a$; man addire b, so kommt $2x = a + b$, folglich $x = \frac{a+b}{2}$ welches der größere Theil ist, und der kleinere wird seyn $\frac{a+b}{2} - b$ oder $\frac{a+b}{2} - \frac{2b}{2}$ oder $\frac{a-b}{2}$.

24.

III. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne und 1600 Rthl. Nach seinem Testament soll der älteste Sohn 200 Rthl. mehr haben als der zweyte, der zweyte aber 100 Rthl. mehr als der dritte; wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des dritten sey $= x$, so ist das Erbtheil des zweyten $= x + 100$, und das Erbtheil des ersten $= x + 300$; diese 3 zusammen müßen 1600 Rthl. machen. Dahero wird $3x + 400 = 1600$; man subtrahire 400, so wird $3x = 1200$ und durch 3 dividirt giebt $x = 400$.

Antwort: der dritte bekommt 400 Rthl. der zweyte 500 Rthl. der erste 700 Rthl.

25.

IV. Frage: Ein Vater hinterläßt 4 Söhne und 8600 Rthl. Nach seinem Testament soll der erste zweymal so viel bekommen als der zweyte weniger 100 Rthl. Der zweyte soll bekommen dreymal so viel als der dritte weniger 200 Rthl. und der dritte soll haben viermal so viel als der vierte weniger 300 Rthl. Wie viel bekommt ein jeder?

Das Erbtheil des vierten sey $= x$, so ist das Erbtheil des dritten $4x - 300$, des zweyten $12x - 1100$ und des ersten $24x - 2300$. Hiervon muß die Summe ausmachen 8600 Rthl. woraus diese Gleichung entsteht: $41x - 3700 = 8600$; man addire 3700, so kommt $41x = 12300$; und durch 41 dividirt giebt $x = 300$.

Antwort: der vierte Sohn bekommt 300 Rthl. der dritte 900 Rthl. der zweyte 2500 Rthl. und der erste 4900 Rthl.

26.

V. Frage: Ein Mann hinterläßt 11000 Rthl. und darzu eine Wittwe, zwey Söhne und drey Töchter. Nach seinem Testament soll die Frau zweymal mehr bekommen als ein Sohn, und ein Sohn zweymal mehr als eine Tochter. Wie viel bekommt ein jedes?

Das Erbtheil einer Tochter sey $= x$ so ist das Erbtheil eines Sohnes $= 2x$ und das Erbtheil der Wittwe $= 4x$; folglich ist die gantze Erbschaft $3x + 4x + 4x$, oder $11x = 11000$; durch 11 getheilt giebt $x = 1000$.

Antwort:	eine Tochter bekommt 1000 Rthl. allso alle drey bekommen	3000 Rthl.
	ein Sohn bekommt 2000 Rthl. allso beyde	4000
	und die Mutter bekommt	4000
	Summa	11000 Rthl.

27.

VI. Frage: Ein Vater hinterläßt drey Söhne, welche das hinterlaßene Vermögen folgender Gestalt unter sich theilen. Der erste bekommt 1000 Rthl. weniger als die Hälfte von der gantzen Verlaßenschaft; der zweyte 800 Rthl. weniger als der dritte Theil der Verlaßenschaft, und der dritte 600 Rthl. weniger als der vierte Theil der Verlaßenschaft. Nun ist die Frage wie groß die Verlaßenschaft gewesen und wie viel ein jeder bekommen?

Es sey die gantze Verlaßenschaft $= x$

so hat der erste Sohn bekommen $\frac{1}{2}x - 1000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 800$

der dritte $\frac{1}{4}x - 600$

Alle drey Söhne zusammen haben also bekommen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x - 2400$ welches der gantzen Verlaßenschaft x gleich gesetzt werden muß, woraus diese Gleichung entsteht, $\frac{13}{12}x - 2400 = x$. Man subtrahire x, so hat man $\frac{1}{12}x - 2400 = 0$, man addire 2400, so ist $\frac{1}{12}x = 2400$, und mit 12 multiplicirt giebt $x = 28800$.

Antwort: die gantze Verlaßenschaft war 28800 Rthl. davon hat nun der

erste Sohn bekommen	13400	Rthl.
der zweyte	8800	
der dritte	6600	
alle drey allso	28800	Rthl.

28.

VII. Frage: Ein Vater hinterläßt vier Söhne, welche die Erbschaft also unter sich theilen: der erste nimmt 3000 Rthl. weniger als die Hälfte der Erbschaft, der zweyte nimmt 1000 Rthl. weniger als $\frac{1}{3}$ der Erbschaft, der dritte nimmt just den $\frac{1}{4}$ der gantzen Erbschaft, der vierte nimmt 600 Rthl. und den $\frac{1}{5}$ der Erbschaft: wie groß war die Erbschaft und wie viel hat ein jeder Sohn bekommen?

Man setze die gantze Erbschaft $= x$

so hat bekommen der erste $\frac{1}{2}x - 3000$

der zweyte $\frac{1}{3}x - 1000$

der dritte $\frac{1}{4}x$

der vierte $\frac{1}{5}x + 600$

und alle vier zusammen nahmen $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x - 3400$, welches seyn muß $= x$: also hat man diese Gleichung: $\frac{77}{60}x - 3400 = x$, subtrahire x, so wird $\frac{17}{60}x - 3400 = 0$, addire 3400, so kommt $\frac{17}{60}x = 3400$, durch 17 dividirt giebt $\frac{1}{60}x = 200$ und mit 60 multiplicirt $x = 12000$.

Antwort: die gantze Verlaßenschaft war 12000 Rthl. Davon bekam der erste 3000 Rthl., der zweyte 3000, der dritte 3000, der vierte 3000.

29.

VIII. Frage: Suche eine Zahl wann ich darzu ihre Hälfte addire, daß so viel über 60 kommen, als die Zahl selbst ist unter 65?

Die Zahl sey x, so muß $x + \frac{1}{2}x - 60$ so viel seyn als $65 - x$, das ist $\frac{3}{2}x - 60 = 65 - x$, man addire x so hat man $\frac{5}{2}x - 60 = 65$, man addire 60 so kommt $\frac{5}{2}x = 125$, durch 5 dividirt wird $\frac{1}{2}x = 25$ und mit 2 multiplicirt giebt $x = 50$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 50.

30.

IX. Frage: Man zertheile 32 in zwey Theile, wann ich den kleinern dividire durch 6, den größern aber durch 5, daß die Quotienten zusammen 6 ausmachen.

Es sey der kleinere Theil $= x$ so ist der größere $= 32 - x$; der kleinere durch 6 dividirt giebt $\frac{x}{6}$; der größere durch 5 dividirt giebt $\frac{32-x}{5}$: also muß seyn $\frac{x}{6} + \frac{32-x}{5} = 6$, mit 5 multiplicirt giebt $\frac{5}{6}x + 32 - x = 30$, oder $-\frac{1}{6}x + 32 = 30$, man addire $\frac{1}{6}x$, so kommt $32 = 30 + \frac{1}{6}x$, 30 subtrahirt giebt $2 = \frac{1}{6}x$, mit 6 multiplicirt wird $x = 12$.

Antwort: der kleinere Theil ist 12, und der größere 20.

31.

X. Frage: Suche eine Zahl, wann ich sie mit 5 multiplicire so ist das Product so viel unter 40, als die Zahl selbst ist unter 12.

Es sey diese Zahl $= x$, welche unter 12 ist um $12 - x$, die Zahl fünfmal genommen ist $5x$ und ist unter 40 um $40 - 5x$, welches eben so viel seyn soll als $12 - x$, also $40 - 5x = 12 - x$, addire $5x$, so wird $40 = 12 + 4x$, 12 subtrahirt giebt $28 = 4x$, durch 4 dividirt wird $x = 7$.

Antwort: die Zahl ist 7.

32.

XI. Frage: Zertheile 25 in zwey Theile, so daß der größere 49 mal größer ist, als der kleinere?

Es sey der kleinere Theil $= x$ so ist der größere $= 25 - x$; dieser durch jenen dividirt soll 49 geben, also wird $\frac{25-x}{x} = 49$, mit x multiplicirt giebt $25 - x = 49x$, und x addirt kommt $50x = 25$, durch 50 dividirt bleibt $x = \frac{1}{2}$.

Antwort: der kleinere Theil ist $\frac{1}{2}$ und der größere $24\frac{1}{2}$, welcher durch $\frac{1}{2}$ dividirt, das ist mit 2 multiplicirt giebt 49.

33.

XII. Frage: Zertheile 48 in neun Theile, so daß immer einer um $\frac{1}{2}$ größer sey, als der vorhergehende?

Es sey der erste und kleinste Theil $= x$ so ist der zweyte $= x + \frac{1}{2}$ und der dritte $= x + 1$ etc. Weil nun diese Theile eine Arithmetische Progression ausmachen, davon das erste Glied $= x$ so ist das neunte und letzte Glied $x + 4$, wozu das erste x addirt $2x + 4$ giebt. Diese Summe mit der Anzahl der Glieder 9, multiplicirt giebt $18x + 36$; dieses durch 2 getheilt giebt die Summe aller neun Theile $9x + 18$, so da seyn muß 48. Also hat man $9x + 18 = 48$, 18 subtrahirt giebt $9x = 30$, durch 9 dividirt giebt $x = 3\frac{1}{3}$.

Antwort: der erste Theil ist $3\frac{1}{3}$ und die neun Theile sind folgende

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 \\ 3\frac{1}{3} & + & 3\frac{5}{6} & + & 4\frac{1}{3} & + & 4\frac{5}{6} & + & 5\frac{1}{3} & + & 5\frac{5}{6} & + & 6\frac{1}{3} & + & 6\frac{5}{6} & + & 7\frac{1}{3}, \end{array}$$

davon die Summe $= 48$.

34.

XIII. Frage: Suche eine Arithmetische Progression davon das erste Glied $= 5$ und das letzte $= 10$ die Summe aber $= 60$ sey?

Da hier weder der Unterschied noch die Anzahl der Glieder bekant ist, aus dem ersten und letzten aber die Summe aller gefunden werden könnte, wann man nur die Anzahl der Glieder wüßte, so sey dieselbe $= x$, so wird die Summe der Progression seyn $\frac{15}{2}x = 60$; durch 15 dividirt $\frac{1}{2}x = 4$, mit 2 multiplicirt $x = 8$. Da nun die Anzahl der Glieder 8 ist, so setze man den Unterschied $= z$, so ist das zweyte Glied $5 + z$, das dritte $5 + 2z$ und das achte $5 + 7z$, welches gleich seyn muß 10.

Also hat man $5 + 7z = 10$, und 5 subtrahirt, giebt $7z = 5$, durch 7 dividirt $z = \frac{5}{7}$.

Antwort: Der Unterschied der Progression ist $\frac{5}{7}$ und die Anzahl der Glieder 8, dahero die Progression selbst seyn wird,

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 \\ 5 & + & 5\frac{5}{7} & + & 6\frac{3}{7} & + & 7\frac{1}{7} & + & 7\frac{6}{7} & + & 8\frac{4}{7} & + & 9\frac{2}{7} & + & 10 \end{array}$$

davon die Summe $= 60$.

35.

XIV. Frage: Suche eine Zahl wann ich von ihrem Duplo subtrahire 1 und das übrige duplire, davon 2 subtrahire, den Rest durch 4 dividire, daß 1 weniger heraus komme als die gesuchte Zahl?

Die gesuchte Zahl sey x, so ist ihr Duplum $2x$, davon 1 subtrahirt bleibt $2x - 1$, dieses duplirt wird $4x - 2$, davon subtrahirt 2 bleibt $4x - 4$, dieses durch 4 dividirt giebt $x - 1$, welches 1 weniger seyn muß als x:

Also $x - 1 = x - 1$, dieses ist eine Identische Gleichung, und zeiget an, daß x gar nicht bestimmt werde, sondern daß man davor eine jegliche Zahl nach Belieben annehmen könne.

36.

XV. Frage: Ich habe gekauft etliche Ellen Tuch und für jede 5 Ellen gegeben 7 Rthl. Ich habe wieder verkauft je 7 Ellen für 11 Rthl. und gewonnen 100 Rthl. über das Hauptguth: wie viel ist des Tuchs gewesen?

Es seyen gewesen x Ellen; man muß also erst sehen wie viel diese im Einkauf gekostet, welches durch folgende Regeldetri gefunden wird: 5 Ellen kosten 7 Rthl., was kosten x Ellen? Antwort: $\frac{7}{5}x$ Rthl. so viel Geld hat er ausgegeben. Nun laßt uns sehen, wie viel er wieder eingenommen, dieses geschieht durch diese Regeldetri: 7 Ellen kosten im Verkauf 11 Rthl. was kosten x Ellen? Antwort: $\frac{11}{7}x$ Rthl.

Dieses ist die Einnahme, welche um 100 Rthl. größer ist als die Ausgabe, woraus diese Gleichung entspringt: $\frac{11}{7}x = \frac{7}{5}x + 100$, $\frac{7}{5}x$ subtrahirt, bleibt $\frac{6}{35}x = 100$, mit 35 multiplicirt kommt $6x = 3500$, durch 6 dividirt wird $x = 583\frac{1}{3}$.

Antwort: Es waren $583\frac{1}{3}$ Ellen, welche erstlich eingekauft worden für $816\frac{2}{3}$ Rthl. hernach sind dieselben wieder verkauft worden für $916\frac{2}{3}$ Rthl. also ist darauf gewonnen worden 100 Rthl.

37.

XVI. Frage: Einer kauft 12 Stück Tuch für 140 Rthl. davon sind 2 weiße, 3 schwartze, und 7 blaue. Kostet ein Stück schwartzes Tuch 2 Rthl. mehr als ein weißes, und ein blaues 3 Rthl. mehr als ein schwartzes: ist die Frage wie viel jedes gekostet?

Man setze, ein weißes Stück kostet x Rthl. dahero kosten die zwey weiße Stücke $2x$ Rthl. Weiter kostet ein schwartzes Stück $x+2$ also die drey schwartzen $3x+6$ und ein blaues Stück $x+5$ folglich die 7 blauen $7x+35$ und alle zwölff Stück $12x+41$; dieselben kosten aber würcklich 140 Rthl., dahero hat man $12x+41=140$, 41 subtrahirt bleibt $12x=99$, durch 12 dividirt wird $x=8\frac{1}{4}$.

Antwort:	ein weißes Stück kostet demnach		$8\frac{1}{4}$ Rthl.
	ein schwartzes	„	$10\frac{1}{4}$ Rthl.
	ein blaues	„	$13\frac{1}{4}$ Rthl.

38.

XVII. Frage: Einer hat Muscaten-Nüß gekauft, und sagt daß 3 Stück eben so viel über 4 Pf. kosten, als 4 Stück mehr kosten als 10 Pf. wie theuer waren dieselben?

Man sage 3 Stücke kosten $x+4$ Pf. so werden 4 Stücke kosten $x+10$ Pf. Nun aber nach dem ersten Satz findet man durch die Regeldetri was 4 Stück kosten, 3 Stück: $x+4$Pf.$=4$ Stück:.... Antwort $\frac{4x+16}{3}$, also wird $\frac{4x+16}{3}=x+10$ oder $4x+16=3x+30$, $3x$ subtrahirt giebt $x+16=30$, 16 subtrahirt giebt $x=14$.

Antwort: Es kosten 3 Stück 18 Pf. und 4 Stück 24 Pf. folglich 1 Stück hat gekost 6 Pf.

39.

XVIII. Frage: Einer hat zwey silberne Becher nebst einem Deckel darzu; der erste Becher wiegt 12 Loth, legt man den Deckel darauf so wiegt er zweymal so viel als der andere Becher; legt man aber den Deckel auf den andern Becher, so wiegt er dreymal so viel als der erste: hier ist nun die Frage wie viel der Deckel und auch der andere Becher gewogen?

Man setze der Deckel habe gewogen x Loth, so wiegt der erste Becher sammt dem Deckel $x+12$ Loth. Da dieses Gewicht zweymal so groß ist, als des andern Bechers, so hat der andere gewogen $\frac{1}{2}x+6$; legt man darauf den Deckel so wiegt er $\frac{3}{2}x+6$ welches 3 mahl 12, das ist 36, gleich seyn muß. Also hat man $\frac{3}{2}x+6=36$ oder $\frac{3}{2}x=30$ und $\frac{1}{2}x=10$ und $x=20$.

Antwort: der Deckel hat gewogen 20 Loth, der andere Becher aber 16 Loth.

40.

XIX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Müntze; von der ersten Sorte gehen a Stück auf einen Rthl. von der zweyten Sorte b Stück. Nun kommt einer und will c Stück vor einen Rthl. haben; wie viel muß ihm der Wechsler von jeder Sorte geben?

Man setze er gebe ihm von der ersten Sorte x Stück und also von der andern $c-x$ Stück. Nun sind aber jene x Stück werth $a:1=x:\frac{x}{a}$ Rthl. diese $c-x$ Stück aber sind werth $b:1=c-x:\frac{c-x}{b}$ Rthl.

Also muß seyn $\frac{x}{a}+\frac{c-x}{b}=1$, oder $\frac{bx}{a}+c-x=b$, oder $bx+ac-ax=ab$, und weiter $bx-ax=ab-ac$, folglich wird

$$x=\frac{ab-ac}{b-a} \quad \text{oder} \quad x=\frac{a(b-c)}{b-a},$$

dahero wird

$$c-x=\frac{bc-ab}{b-a}=\frac{b(c-a)}{b-a}.$$

Antwort: von der ersten Sorte giebt also der Wechsler $\frac{a(b-c)}{b-a}$ Stück, von der andern Sorte aber $\frac{b(c-a)}{b-a}$ Stück.

Anmerckung: Diese beyden Zahlen laßen sich leicht durch die Regeldetri finden; nemlich die erste durch diese: wie $b-a:b-c=a:\frac{ab-ac}{b-a}$, für die zweyte Zahl gilt diese: wie $b-a:c-a=b:\frac{bc-ab}{b-a}$.

Hierbey ist zu mercken, daß b größer ist als a, und c kleiner als b aber größer als a, wie die Natur der Sache erfordert.

41.

XX. Frage: Ein Wechsler hat zweyerley Müntze; von der ersten gelten 10 Stück einen Rthl. von der andern 20 Stück einen Rthl. Nun verlangt jemand 17 Stück für einen Rthl. wie viel bekommt er von jeder Sorte?

Hier ist also $a=10$, $b=20$ und $c=17$; woraus diese Regeldetrien fließen:

I.) $10:3=10:3$, also von der ersten Sorte 3 Stück;

II.) $10:7=20:14$, und von der andern Sorte 14 Stück.

42.

XXI. Frage: Ein Vater verläßt nach seinem Tode einige Kinder nebst einem Vermögen, welches die Kinder dergestalt unter sich theilen:

Das erste nimmt 100 Rthl. und dazu noch den 10ten Theil des übrigen.

Das zweyte nimmt 200 Rthl. und noch darzu den 10ten Theil des übrigen.

Das dritte nimmt 300 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen.

Das vierte nimmt 400 Rthl. und noch dazu den 10ten Theil des übrigen und so fort: solcher gestalt findet es sich, daß das ganze Vermögen unter die Kinder gleich vertheilet worden. Nun ist die Frage, wie groß das Vermögen gewesen, wie viel Kinder hinterlaßen worden, und wie viel ein jedes bekommen?

Diese Frage ist von einer gantz besondern Art und verdienet deswegen bemercket zu werden. Um dieselbe desto leichter aufzulösen, so setze man das gantze hinterlaßene Vermögen $= z$ Rthl. und weil alle Kinder gleich viel bekommen, so sey das Antheil eines jeden $= x$; woraus man sieht, daß die Anzahl der Kinder gewesen $\frac{z}{x}$. Hieraus wollen wir die Auflößung folgender Gestalt anstellen.

Die Maße oder das zu theilende Geld	Ordnung der Kinder	Der Antheil eines jeden	Die Differenzen
z	das erste	$x = 100 + \frac{z - 100}{10}$	
$z - x$	zweyte	$x = 200 + \frac{z - x - 200}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 2x$	dritte	$x = 300 + \frac{z - 2x - 300}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 3x$	vierte	$x = 400 + \frac{z - 3x - 400}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 4x$	fünfte	$x = 500 + \frac{z - 4x - 500}{10}$	$100 - \frac{x + 100}{10} = 0$
$z - 5x$	sechste	$x = 600 + \frac{z - 5x - 600}{10}$	u. s. w.

In der letzten Columne sind hier die Differenzen gesetzt worden, welche entstehen, wann man ein jedes Erbtheil von dem folgenden subtrahirt. Weil nun alle Erbtheile ein ander gleich sind, so muß eine jede von diesen Differenzen seyn $= 0$. Da es sich nun so glücklich füget, daß alle Differenzen ein ander gleich sind, so ist es genung, daß man eine davon gleich 0 setze, dahero erhalten wir diese Gleichung $100 - \frac{x + 100}{10} = 0$. Man multiplicire mit 10 so erhält man $1000 - x - 100 = 0$, oder $900 - x = 0$, folglich $x = 900$.

Woraus wir schon wißen, daß das Erbtheil eines jeden Kindes 900 Rthl. gewesen. Man nehme nun eine von den Gleichungen in der dritten Columne, welche man will, z. E. die erste $900 = 100 + \frac{z - 100}{10}$, woraus man z so gleich finden kann; dann $9000 = 1000 + z - 100$ oder $9000 = 900 + z$ also $z = 8100$, dahero wird $\frac{z}{x} = 9$.

Antwort: Also war die Anzahl der Kinder $= 9$ das hinterlaßene Vermögen $= 8100$ Rthl. wovon ein jedes Kind bekommt 900 Rthl.

CAPITEL 4

VON AUFLÖSUNG ZWEYER ODER MEHR GLEICHUNGEN VOM ERSTEN GRAD

43.

Ofters geschieht es, daß zwey oder auch mehr unbekante Zahlen, so durch die Buchstaben x, y, z etc. vorgestellt werden, in die Rechnung gebracht werden müßen, da man dann, wann anders die Frage bestimmt ist, auf eben so viel Gleichungen kommt, aus welchen hernach die unbekanten Zahlen gefunden werden müßen. Hier betrachten wir aber nur solche Gleichungen wo nur die erste Potestät der unbekanten Zahl sich findet, und auch keine mit der andern multiplicirt ist. Also daß eine jede Gleichung von dieser Form seyn wird $az + by + cx = d$.

44.

Wir wollen also den Anfang von zwey Gleichungen machen, und daraus zwey unbekante Zahlen x und y bestimmen, und um die Sache auf eine allgemeine Art zu tractiren, so seyen diese beyde Gleichungen gegeben

$$\text{I.)}\ ax + by = c \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ fx + gy = h$$

wo die Buchstaben a, b, c und f, g, h die Stelle bekanter Zahlen vertreten. Hier ist nun die Frage wie man aus diesen beyden Gleichungen die beyden unbekanten Zahlen x und y herausbringen soll.

45.

Der natürlichste Weg bestehet nun darinn, daß man aus einer jeden Gleichung, den Werth von einer unbekanten Zahl als z. E. von x bestimmt und hernach diese beyde Werthe einander gleich setzt; woraus man eine Gleichung erhält, da nur die unbekante Zahl y vorkommt, welche man nach den obigen Reguln bestimmen kann. Hat man nun y gefunden, so darf man nur anstatt desselben seinen gefundenen Werth setzen, um daraus den Werth von x zu erhalten.

46.

Dieser Regel zu Folge findet man aus der ersten Gleichung $x = \frac{c - by}{a}$, aus der andern aber findet man $x = \frac{h - gy}{f}$; diese beyden Werthe setze man einander gleich, so erhält man diese neue Gleichung $\frac{c - by}{a} = \frac{h - gy}{f}$. Mit a multiplicirt, wird $c - by = \frac{ah - agy}{f}$, mit f multiplicirt wird $fc - fby = ah - agy$. Man addire agy so wird $fc - fby + agy = ah$. Man subtrahire fc so wird $-fby + agy = ah - fc$, oder $(ag - bf)y = ah - fc$, man dividire durch $ag - bf$ so wird

$$y = \frac{ah - fc}{ag - bf}.$$

Schreibt man nun diesen Werth für y in einem der beyden, so vor x gefunden worden, so erhält man auch den Werth von x. Man nehme den ersten so hat man erstlich $-by = \frac{-abh + bcf}{ag - bf}$, hieraus wird $c - by = c - \frac{abh - bcf}{ag - bf}$, oder $c - by = \frac{acg - bcf - abh + bcf}{ag - bf} = \frac{acg - abh}{ag - bf}$; durch a dividirt giebt

$$x = \frac{c - by}{a} = \frac{cg - bh}{ag - bf}.$$

47.

I. Frage: Um dieses durch Exempel zu erläutern, so sey diese Frage vorgelegt: Man suche zwey Zahlen deren Summe sey 15 und die Differenz 7?

Es sey die größere Zahl $= x$ und die kleinere $= y$, so hat man

$$\text{I.)}\ x + y = 15, \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ x - y = 7.$$

Aus der ersten bekommt man $x = 15 - y$ und aus der zweyten $x = 7 + y$, woraus diese neue Gleichung entspringt $15 - y = 7 + y$, hier addire man y, so hat man $15 = 7 + 2y$, man subtrahire 7, so wird $2y = 8$, durch 2 dividirt wird $y = 4$ und daraus $x = 11$.

Antwort: die kleinere Zahl ist 4 die größere aber 11.

48.

II. Frage: Man kann diese Frage auch allgemein machen und zwey Zahlen suchen, deren Summe $= a$ und deren Differenz $= b$ sey.

Es sey die größere $= x$ und die kleinere $= y$, so hat man

$$\text{I.)}\ x + y = a \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ x - y = b.$$

Aus der ersten erhält man $x = a - y$ und aus der zweyten $x = b + y$, woraus diese Gleichung entspringt $a - y = b + y$, man addire y, so hat man $a = b + 2y$, man subtrahire b, so kommt $2y = a - b$, durch 2 dividirt wird $y = \frac{a-b}{2}$ und hieraus wird $x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Antwort: die größere Zahl ist also $x = \frac{a+b}{2}$ und die kleinere $y = \frac{a-b}{2}$; oder da $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ und $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$, so erhält man diesen Lehrsatz:

Die größere Zahl ist gleich der halben Summe *plus* der halben Differenz, und die kleinere Zahl ist gleich der halben Summe *minus* der halben Differenz.

49.

Man kann auch diese Frage auf folgende Weise auflösen: da die beyden Gleichungen sind $x + y = a$ und $x - y = b$, so addire man dieselben so wird $2x = a + b$ und $x = \frac{a+b}{2}$.

Hernach von der ersten subtrahire man die zweyte, so bekommt man $2y = a - b$ und $y = \frac{a-b}{2}$, wie vorher.

50.

III. Frage: Ein Maul-Esel und ein Esel tragen ein jeder etliche Pud. Der Esel beschwert sich über seine Last und sagt zum Maul-Esel: wann du mir ein Pud von deiner Last gäbest, so hätte ich zwey mal so viel als du; darauf antwortet der Maul-Esel: wann du mir ein Pud von deiner Last gäbest so hätte ich dreymal so viel als du, wie viel Pud hat ein jeder gehabt?

Der Maul-Esel habe gehabt x Pud, der Esel aber y Pud. Giebt nun der Maul-Esel dem Esel ein Pud, so hat der Esel $y + 1$ der Maul-Esel aber behält noch $x - 1$, da nun der Esel zweymal so viel hat als der Maul-Esel so wird $y + 1 = 2x - 2$.

Wann aber der Esel dem Maul-Esel ein Pud giebt, so bekommt der Maul-Esel $x + 1$ und der Esel behält noch $y - 1$. Da nun jene Last dreymal so groß ist als diese, so wird $x + 1 = 3y - 3$.

Also sind unsere zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ y + 1 = 2x - 2, \qquad \text{II.)}\ x + 1 = 3y - 3.$$

Aus der ersten findet man $x = \frac{y+3}{2}$ und aus der andern $x = 3y - 4$, woraus diese neue Gleichung entspringt $\frac{y+3}{2} = 3y - 4$, welche mit 2 multiplicirt giebt $y + 3 = 6y - 8$ und y subtrahirt kommt $5y - 8 = 3$, addire 8 so hat man $5y = 11$ und $y = \frac{11}{5}$ oder $2\frac{1}{5}$; hieraus $x = 2\frac{3}{5}$.

Antwort: Also hat der Maul-Esel gehabt $2\frac{3}{5}$ Pud der Esel aber $2\frac{1}{5}$ Pud.

51.

Hat man drey unbekante Zahlen, und eben so viel Gleichungen, als z. E.

I.) $x + y - z = 8$, II.) $x + z - y = 9$, III.) $y + z - x = 10$,

so suche man ebenfals aus einer jeden den Werth von x, aus der

I.) $x = 8 + z - y$, II.) $x = 9 + y - z$, III.) $x = y + z - 10$.

Nun setze man erstlich den ersten gleich dem andern, und hernach auch gleich dem dritten so erhält man diese zwey neue Gleichungen:

I.) $8 + z - y = 9 + y - z$, II.) $8 + z - y = y + z - 10$.

Es folgt aber aus der ersten $2z - 2y = 1$, und aus der zweyten $2y = 18$, und da erhält man so gleich $y = 9$, welcher Werth in der vorhergehenden vor y geschrieben, giebt $2z - 18 = 1$ und $2z = 19$, dahero $z = 9\frac{1}{2}$, woraus gefunden wird $x = 8\frac{1}{2}$.

Hier hat es sich gefüget, daß in der letzten Gleichung der Buchstaben z verschwunden, und also y so gleich daraus bestimmt werden konnte. Wäre aber z auch noch darinnen vorgekommen, so hätte man zwey Gleichungen gehabt zwischen z und y, welche nach der ersten Regel aufgelöst werden müßten.

52.

Es seyen die drey folgenden Gleichungen gefunden worden,

I.) $3x + 5y - 4z = 25$, II.) $5x - 2y + 3z = 46$, III.) $3y + 5z - x = 62$.

Man suche aus einer jeden den Werth von x, so hat man

I.) $x = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$, II.) $x = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$, III.) $x = 3y + 5z - 62$.

Nun vergleiche man diese drey Werthe unter sich, so giebt der IIIte und Ite $3y + 5z - 62 = \frac{25 - 5y + 4z}{3}$, oder mit 3 multiplicirt

$$25 - 5y + 4z = 9y + 15z - 186,$$

addire 186, so kommt $211 - 5y + 4z = 9y + 15z$, $5y$ addirt giebt $211 + 4z = 14y + 15z$, also aus I und III erhält man $211 = 14y + 11z$.

Die IIte und IIIte giebt $3y + 5z - 62 = \frac{46 + 2y - 3z}{5}$ oder

$$46 + 2y - 3z = 15y + 25z - 310$$

und man findet aus dieser Gleichung $356 = 13y + 28z$.

Aus einer jeden dieser beyden Gleichungen suche man den Werth für y.

I.) $211 = 14y + 11z$, wo $11z$ subtrahirt, bleibt

$$14y = 211 - 11z \quad \text{oder} \quad y = \frac{211 - 11z}{14}$$

II.) $356 = 13y + 28z$, wo $28z$ subtrahirt, bleibt

$$13y = 356 - 28z \quad \text{oder} \quad y = \frac{356 - 28z}{13}$$

diese zwey Werthe einander gleich gesetzt, geben:

$$\frac{211 - 11z}{14} = \frac{356 - 28z}{13},$$

mit $13 \cdot 14$ multiplicirt wird $2743 - 143z = 4984 - 392z$ und $392z$ addirt, giebt

$$249z + 2743 = 4984 \quad \text{oder} \quad 249z = 2241 \quad \text{und also} \quad z = 9.$$

Hieraus erhält man $y = 8$ und endlich $x = 7$.

53.

Solten mehr als drey unbekante Zahlen, und eben so viel Gleichungen vorkommen, so könnte man die Auflösung auf eine ähnliche Art anstellen, welches gemeiniglich auf verdrießliche Rechnungen leiten würde.

Es pflegen sich aber bey einem jeglichen Fall solche Mittel zu äußern, wodurch die Auflößung ungemein erleichtert wird, und solches geschieht, indem man außer den Haupt unbekanten Zahlen noch eine neue willkührliche, als z. E. die Summe aller in die Rechnung mit einführet, welches von einem der sich in dergleichen Rechnungen schon ziemlich geübet hat, in einem jeglichen Fall leicht beurtheilet wird. Zu diesem Ende wollen wir einige dergleichen Exempeln anführen.

54.

IV. Frage: Drey spielen mit einander, im ersten Spiel verliert der erste an jeden der beyden andern so viel, als ein jeder von den zwey andern an Gelde bey sich hatte. Im andern Spiel verliert der zweyte an den ersten und dritten so viel als ein jeder hat. Im dritten Spiel verliert der dritte an den ersten und zweyten so viel ein jeder hatte, und da findet es sich, daß alle nach geendigtem Spiel gleich viel haben, ein jeder nemlich 24 Fl. Nun ist die Frage, wie viel ein jeder anfänglich gehabt habe?

Man setze der erste habe gehabt x Fl. der zweyte y und der dritte z. Ueber dieses setze man die Summe aller Fl. zusammen $x+y+z=s$. Da nun im ersten Spiel der erste so viel verliert als die beyden andern haben, und der erste x hat, so haben die beyden andern $s-x$, und so viel verliert der erste, daher ihm noch übrig bleiben $2x-s$; der zweyte aber wird haben $2y$ und der dritte $2z$.

Also nach dem ersten Spiel wird ein jeder haben wie folget;

$$\text{der I.) } 2x-s, \quad \text{der II.) } 2y, \quad \text{der III.) } 2z.$$

Im zweyten Spiel verliert der andere, der nun $2y$ hat, an die beyden andern, so viel als sie haben, oder $s-2y$. Dahero der zweyte noch behält $4y-s$; die beyden andern aber werden zweymal so viel haben als vorher.

Also nach dem zweyten Spiel wird haben:

$$\text{der I.) } 4x-2s, \quad \text{der II.) } 4y-s, \quad \text{der III.) } 4z.$$

Im dritten Spiel verliert der dritte, der jetzt $4z$ hat, an die andern beyde so viel sie haben, sie haben aber $s-4z$; also behält der dritte noch $8z-s$ und die beyden übrigen bekommen doppelt so viel als sie hatten.

Also wird nach dem dritten Spiel ein jeder haben:

$$\text{der I.) } 8x-4s, \quad \text{der II.) } 8y-2s, \quad \text{und der III.) } 8z-s;$$

da nun jetzt ein jeder 24 Fl. hat, so erhalten wir drey Gleichungen welche so beschaffen sind, daß man aus der ersten so gleich x, aus der andern y und aus der dritten z finden kann, insonderheit da jetzt s eine bekante Zahl ist, indem alle zusammen am Ende des Spiels 72 Fl. haben. Allein dieses wird sich von selbsten geben, ohne daß man nöthig habe darauf zu sehen.

Diese Rechnung wird demnach also stehen:

$$\text{I.)}\ 8x - 4s = 24, \quad \text{oder} \quad 8x = 24 + 4s, \quad \text{oder} \quad x = 3 + \tfrac{1}{2}s$$

$$\text{II.)}\ 8y - 2s = 24, \quad \text{oder} \quad 8y = 24 + 2s, \quad \text{oder} \quad y = 3 + \tfrac{1}{4}s$$

$$\text{III.)}\ 8z - s = 24, \quad \text{oder} \quad 8z = 24 + s, \quad \text{oder} \quad z = 3 + \tfrac{1}{8}s$$

Man addire diese 3 Werthe, so bekommt man

$$x + y + z = 9 + \tfrac{7}{8}s,$$

da nun $x + y + z = s$, so hat man $s = 9 + \frac{7}{8}s$; $\frac{7}{8}s$ subtrahirt bleibt $\frac{1}{8}s = 9$, und $s = 72$.

Antwort: Also vom Anfang des Spiels hatte der erste 39 Fl. der zweyte 21 Fl. und der dritte 12.

Aus dieser Auflösung sieht man, wie durch Hülfe der Summe der drey unbekanten Zahlen alle oben angeführte Schwierigkeiten glücklich aus dem Weg geräumet worden.

55.

So schwer diese Frage scheinet, so ist doch zu mercken daß dieselbe so gar ohne Algebra aufgelößt werden kann.

Man darf nur in Betrachtung derselben rückwerts gehen: dann da die drey Personen nach dem dritten Spiel gleich viel bekommen haben, nemlich der erste 24, der zweyte 24, der dritte 24; im dritten Spiel aber der erste und zweyte ihr Geld verdoppelt haben, so müßen sie vor dem dritten Spiel gehabt haben, wie folget:

I.) 12, II.) 12, III.) 48.

Im zweyten Spiel hat der erste und dritte sein Geld verdoppelt, also müßen sie vor dem zweyten Spiel gehabt haben:

I.) 6, II.) 42, III.) 24.

Im ersten Spiel hatte der zweyte und dritte sein Geld verdoppelt, also vor dem ersten Spiel haben sie gehabt:

I.) 39, II.) 21, III.) 12

und eben so viel haben wir auch vorher für den Anfang des Spiels gefunden.

56.

V. Frage: Zwey Personen sind schuldig 29 Rub. und es hat zwar ein jeder Geld, doch nicht so viel, daß er diese gemeinschaftliche Schuld allein bezahlen könnte; darum spricht der erste zu dem andern: giebst du mir $\frac{2}{3}$ deines Geldes so könnte ich die Schuld so gleich allein bezahlen; der andere antwortet dagegen: gieb du mir $\frac{3}{4}$ deines Gelds so könnt ich die Schuld allein bezahlen; wie viel Geld hat jeder gehabt?

Der erste habe gehabt x Rub. der andere y Rub. Also bekommt man erstlich $x + \frac{2}{3}y = 29$, hernach auch $y + \frac{3}{4}x = 29$. Aus dem ersten findet man $x = 29 - \frac{2}{3}y$, aus dem zweyten $x = \frac{116 - 4y}{3}$.

Aus diesen beyden Werthen entsteht diese Gleichung:

$$29 - \frac{2}{3}y = \frac{116 - 4y}{3}, \text{ also } y = 14\frac{1}{2}; \text{ dahero wird } x = 19\frac{1}{3}.$$

Antwort: der erste hat gehabt $19\frac{1}{3}$ der zweyte $14\frac{1}{2}$ Rub.

57.

VI. Frage: Drey haben ein Haus gekauft für 100 Rthl. der erste begehrt vom andern $\frac{1}{2}$ seines Gelds so könnte er das Haus allein bezahlen; der andere begehrt vom dritten $\frac{1}{3}$ seines Geldes, so könnte er das Haus allein bezahlen. Der dritte begehrt vom ersten $\frac{1}{4}$ seines Gelds so möchte er das Haus allein bezahlen. Wie viel hat jeder Geld gehabt?

Der erste habe gehabt x, der zweyte y, der dritte z Rthl. so bekommt man folgende drey Gleichungen

$$\text{I.) } x + \frac{1}{2}y = 100. \qquad \text{II.) } y + \frac{1}{3}z = 100. \qquad \text{III.) } z + \frac{1}{4}x = 100$$

aus welchen der Werth von x gefunden wird:

$$\text{I.) } x = 100 - \frac{1}{2}y, \qquad \text{III.) } x = 400 - 4z$$

hier konnte nemlich aus der zweyten Gleichung x nicht bestimmt werden.

Die beyden Werthe aber geben diese Gleichung:

$$100 - \frac{1}{2}y = 400 - 4z \qquad \text{oder} \qquad 4z - \frac{1}{2}y = 300$$

welche mit der zweyten verbunden werden muß, um daraus y und z zu finden. Nun aber war die zweyte Gleichung $y + \frac{1}{3}z = 100$; woraus gefunden wird $y = 100 - \frac{1}{3}z$; aus der oben gefundenen Gleichung $4z - \frac{1}{2}y = 300$ aber ist bekannt $y = 8z - 600$ woraus diese letzte Gleichung entspringt: $100 - \frac{1}{3}z = 8z - 600$, also $8\frac{1}{3}z = 700$, oder $\frac{25}{3}z = 700$, und $z = 84$; hieraus findet man $y = 100 - 28$, oder $y = 72$, und endlich $x = 64$.

Antwort: der erste hat gehabt 64 Rthl. der zweyte 72 Rthl. der dritte 84 Rthl.

58.

Da bey diesem Exempel in einer jeden Gleichung nur zwey unbekante Zahlen vorkommen, so kann die Auflößung auf eine bequemere Art angestellet werden.

Dann man suche aus der ersten $y = 200 - 2x$, welches also durch x bestimmt wird, diesen Werth schreibe man vor y in der zweyten Gleichung, so hat man $200 - 2x + \frac{1}{3}z = 100$, 100 subtrahirt so bleibt $100 - 2x + \frac{1}{3}z = 0$, oder $\frac{1}{3}z = 2x - 100$ und $z = 6x - 300$.

Also ist auch z durch x bestimmt: diesen Werth bringe man nun in die dritte Gleichung, so kommt $6x - 300 + \frac{1}{4}x = 100$, in welcher nur x allein vorkommt und allso

$$25x - 1600 = 0$$

dahero $x = 64$, folglich $y = 200 - 128 = 72$ und $z = 384 - 300 = 84$.

59.

Eben so kann man verfahren wann auch mehr solche Gleichungen vorkommen, also wann man auf eine allgemeine Art hat:

$$\text{I.)}\ u + \frac{x}{a} = n, \quad \text{II.)}\ x + \frac{y}{b} = n, \quad \text{III.)}\ y + \frac{z}{c} = n, \quad \text{IV.)}\ z + \frac{u}{d} = n$$

oder nach dem man die Brüche weggebracht diese:

$$\text{I.)}\ au + x = an, \quad \text{II.)}\ bx + y = bn, \quad \text{III.)}\ cy + z = cn, \quad \text{IV.)}\ dz + u = dn.$$

Hier bekommen wir aus der ersten $x = an - au$, welcher Werth in der zweyten giebt $abn - abu + y = bn$ allso $y = bn - abn + abu$; dieser Werth in der dritten giebt

$$bcn - abcn + abcu + z = cn \quad \text{also} \quad z = cn - bcn + abcn - abcu;$$

dieser endlich in der vierten Gleichung giebt

$$cdn - bcdn + abcdn - abcdu + u = dn.$$

Also wird

$$dn - cdn + bcdn - abcdn = - abcdu + u \quad \text{oder}$$

$$(abcd - 1)\ u = abcdn - bcdn + cdn - dn$$

woraus man erhält

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n\,\frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

Hieraus findet man ferner wie folget

$$x = \frac{abcdn - acdn + adn - an}{abcd - 1} = n.\,\frac{(abcd - acd + ad - a)}{abcd - 1}$$

$$y = \frac{abcdn - abdn + abn - bn}{abcd - 1} = n.\,\frac{(abcd - abd + ab - b)}{abcd - 1}$$

$$z = \frac{abcdn - abcn + bcn - cn}{abcd - 1} = n.\,\frac{(abcd - abc + bc - c)}{abcd - 1}$$

$$u = \frac{abcdn - bcdn + cdn - dn}{abcd - 1} = n.\,\frac{(abcd - bcd + cd - d)}{abcd - 1}$$

60.

VII. Frage: Ein Hauptmann hat drey Compagnien Soldaten. In einer sind Schweitzer, in der andern Schwaben, in der dritten Sachsen; mit diesen will er eine Stadt bestürmen und verspricht zur Belohnung 901 Rthl. also auszutheilen:

Daß von der Compagnie, die den Sturm thut, ein jeder 1 Rthl. bekommen, das übrige Geld aber unter die beyden andern Compagnien gleich vertheilet werden soll.

Nun findet es sich, daß wann die Schweitzer den Sturm thäten, ein jeder von den beyden andern $\frac{1}{2}$ Rthl. bekäme; wann aber die Schwaben den Sturm thäten, ein jeder der beyden andern $\frac{1}{3}$ Rthl. bekommen würde. Thäten aber die Sachsen den Sturm so würde ein jeder der beiden andern $\frac{1}{4}$ Rthl. bekommen. Nun ist die Frage, aus wie viel Köpfen eine jede Compagnie bestanden?

Man setze nun, die Zahl der Schweitzer sey gewesen x Köpfe, der Schwaben y und der Sachsen z. Ferner setze man die Anzahl aller $x+y+z=s$ weil leicht vorher zu sehen, daß dadurch die Rechnung gar sehr erleichtert wird. Dann wann die Schweitzer den Sturm thun, deren Anzahl $=x$, so ist die Zahl der beyden übrigen $=s-x$, da nun jene 1 Rthl. diese aber einen halben Rthl. bekommen, so wird $x+\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}x=901$. Eben so wann die Schwaben Sturm lauffen, so wird $y+\frac{1}{3}s-\frac{1}{3}y=901$, und endlich wann die Sachsen Sturm lauffen, so wird $z+\frac{1}{4}s-\frac{1}{4}z=901$ seyn. Aus welchen drey Gleichungen ein jeder der drey Buchstaben x, y und z bestimmt werden kann.

Dann aus der ersten erhält man $x=1802-s$, aus der andern $2y=2703-s$, aus der dritten $3z=3604-s$.

Nun schreibe man dieselben unter einander; suche aber erstlich die Werthe von $6x$, $6y$, und $6z$.

$$\begin{aligned}6x &= 10812-6s\\ 6y &= 8109-3s\\ 6z &= 7208-2s\\ \hline \text{addirt: } 6s &= 26129-11s \quad\text{oder}\quad 17s=26129\end{aligned}$$

woraus gefunden wird $s=1537$ welches die Anzahl aller Köpfe ist und daraus findet man ferner:

$$\begin{aligned}x &= 1802-1537 = 265\\ 2y &= 2703-1537 = 1166 \text{ und } y=583\\ 3z &= 3604-1537 = 2067 \text{ und } z=689\end{aligned}$$

Antwort: die Compagnie der Schweitzer bestand also aus 265 Mann, die Schwaben aus 583, und die Sachsen aus 689 Mann.

CAPITEL 5

VON DER AUFLÖSUNG DER REINEN QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

61.

Eine Gleichung wird Quadratisch genennt, wann darin das Quadrat oder die zweyte Potestät der unbekanten Zahl vorkommt, wann sich nur keine höhere Potestäten davon darinn befinden. Dann sollte darin auch die dritte

Potestät vorkommen so wird eine solche Gleichung schon zu den Cubischen gerechnet, wovon die Auflösung besondere Regeln erfordert.

62.

In einer Quadratischen Gleichung kommen also nur dreyerley Glieder vor:

Zum ersten solche Glieder worinnen die unbekante Zahl gar nicht enthalten ist, oder welche blos allein aus bekanten Zahlen zusammen gesetzt sind.

Zweytens solche Glieder, in welchen nur die erste Potestät der unbekanten Zahl vorkommt.

Und drittens solche, in welchen das Quadrat der unbekanten Zahl enthalten ist.

Also wann x die unbekante Zahl andeutet, die Buchstaben a, b, c, d etc. aber bekante Zahlen vorstellen, so haben die Glieder der ersten Art diese Form a, von der zweyten Art haben die Glieder die Form bx, und die Glieder der dritten Art haben die Form cxx.

63.

Man hat schon zur Gnüge gesehen, daß zwey oder mehr Glieder von einer Art, in ein einiges zusammen gezogen, oder als ein einiges Glied betrachtet werden können.

Also kann diese Form $axx - bxx + cxx$ als ein einziges Glied angesehen, und also vorgestellet werden $(a - b + c)xx$ weil in der That $a - b + c$ eine bekante Zahl ausdrückt.

Wann sich auch solche Glieder zu beyden Seiten des Zeichens $=$ befinden sollten, so hat man schon gesehen, wie dieselben auf eine Seite gebracht, und in eines zusammen gezogen werden können:

Also wann diese Gleichung vorkommt

$$2xx - 3x + 4 = 5xx - 8x + 11;$$

so subtrahirt man erstlich $2xx$, so kommt $-3x + 4 = 3xx - 8x + 11$; hernach addire man $8x$, so hat man $5x + 4 = 3xx + 11$, und 11 subtrahirt giebt $3xx = 5x - 7$.

64.

Man kann auch alle Glieder auf einer Seite des Zeichens $=$ bringen, so daß auf der anderen Seite 0 zu stehen kommt; wobey zu bemercken daß wann

Glieder von der einen Seite auf die andere gebracht werden, ihre Zeichen verändert werden müßen.

Also wird die obige Gleichung diese Form bekommen $3xx - 5x + 7 = 0$ und so wird auch insgemein eine jegliche Quadratische Gleichung durch diese Form vorgestellt werden können

$$axx \pm bx \pm c = 0$$

wo das Zeichen $\pm$ durch *plus oder minus* ausgesprochen wird, um anzuzeigen, daß solche Glieder bald Positiv bald Negativ seyn können.

65.

Es mag eine Quadratische Gleichung anfänglich aussehen wie sie will, so kann dieselbe doch immer auf diese Form, welche nur aus drey Gliedern bestehet, gebracht werden; wann man z. E. auf diese Gleichung gekommen wäre: $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{ex+f}{gx+h}$ so müsten vor allen Dingen die Brüche gehoben werden. Also multiplicire man mit $cx + d$ so bekommt man $ax + b = \frac{cexx + cfx + edx + fd}{gx + h}$ hier mit $gx + h$ multiplicirt, giebt

$$agxx + bgx + ahx + bh = cexx + cfx + edx + fd$$

welches eine Quadratische Gleichung ist, und auf folgende drey Glieder gebracht werden kann, wann alle auf eine Seite gesetzt werden, und welche man also unter einander zu schreiben pfleget:

$$\begin{array}{rrr} 0 = agxx & + bgx & + bh \\ - cexx & + ahx & - fd \\ & - cfx & \\ & - edx & \end{array}$$

oder um dieselbe noch deutlicher vorzustellen

$$0 = (ag - ce)\,xx + (bg + ah - cf - ed)\,x + bh - fd.$$

66.

Dergleichen Quadratische Gleichungen worin von allen dreyen Arten Glieder enthalten sind, werden vollständige genennt, und die Auflösung derselben ist auch mehr Schwierigkeiten unterworffen, daher wir erstlich solche Gleichungen betrachten wollen, in welchen eines von diesen dreyen Gliedern mangelt.

Sollte nun das Glied xx gar nicht vorhanden seyn, so wäre die Gleichung nicht einmahl Quadratisch und gehörte zu der vorigen Art; sollte aber das Glied, so blos bekante Zahlen enthält, mangeln, so würde die Gleichung also aussehen $axx \pm bx = 0$, wo man durch x theilen kann und daher zu dieser Gleichung kommt $ax \pm b = 0$, welche wieder eine einfache Gleichung ist und nicht hieher gehört.

67.

Wann aber das mittlere Glied, so nur die erste Potestät des x enthält, mangelt, so bekommt die Gleichung diese Form: $axx \pm c = 0$, oder $axx = c$, es mag nun c das Zeichen $+$ oder $-$ haben.

Eine solche Gleichung wird eine reine Quadratische genennt, weil ihre Auflösung keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Dann man darf nur durch a theilen, so bekommt man $xx = \frac{c}{a}$; und beyderseits die Quadrat-Wurzel genommen, so hat man $x = \sqrt{\frac{c}{a}}$; wodurch die Gleichung aufgelößt worden.

68.

Hier sind nun drey Fälle zu erwegen. Der erste, wann $\frac{c}{a}$ eine Quadrat-Zahl ist, davon sich die Wurzel würcklich anzeigen läßt; da erhält man den Werth von x durch eine Rational-Zahl ausgedrückt, dieselbe mag gantz oder gebrochen seyn.

Also aus dieser Gleichung $xx = 144$ bekommt man $x = 12$, und aus dieser $xx = \frac{9}{16}$ erhält man $x = \frac{3}{4}$.

Der zweyte Fall ist, wann $\frac{c}{a}$ keine Quadrat-Zahl ist, da man sich dann mit dem Wurzelzeichen $\sqrt{}$ begnügen muß.

Also wann $xx = 12$ so wird $x = \sqrt{12}$, wovon der Werth durch Näherung bestimmt werden kann, wie wir schon oben gezeigt haben.

Ist aber drittens $\frac{c}{a}$ gar eine Negativ-Zahl, so wird der Werth von x gantz und gar unmöglich oder Imaginär und zeiget an, daß die Frage welche auf eine solche Gleichung geführet, an sich unmöglich sey.

69.

Ehe wir weiter gehen ist noch zu bemercken, daß so oft aus einer Zahl die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß, dieselbe allezeit einen doppelten Werth erhalte und so wohl Positiv als Negativ genommen werden könne, wie schon oben gezeigt worden.

Also wann man auf diese Gleichung kommt $xx = 49$ so ist der Werth von x nicht nur $+7$ sondern auch -7 und pflegt dahero also angedeutet zu werden: $x = \pm 7$, woraus erhellet, daß alle diese Fragen eine doppelte Auflösung zulaßen, in vielen Fällen aber wo etwann von einer Anzahl Menschen die Frage ist fält der Negativ-Werth von selbsten weg.

70.

Auch bey dem vorhergehenden Fall, wo die bloße Zahl mangelt, laßen die Gleichungen $axx = bx$ immer zweyerley Werthe vor x zu, ob gleich nur einer gefunden wird, wann man durch x dividirt. Dann wann z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 3x$ wo ein solcher Wert für x gegeben werden soll, daß xx dem $3x$ gleich werde, so geschieht dieses, wann man setzt $x = 3$ welcher Werth heraus kommt, wann man durch x dividirt, allein außer diesem leistet auch der Werth $x = 0$ ein genügen; dann da wird $xx = 0$ und $3x = 0$. Dieses ist bey allen Quadratischen Gleichungen zu mercken daß immer zwey Auflösungen statt finden, dahingegen bey den einfachen Gleichungen nie mehr als eine Platz hat.

Wir wollen nun diese reine Quadratische Gleichungen durch einige Exempel erläutern.

71.

I. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, deren Hälfte mit ihren $\frac{1}{3}$ multiplicirt 24 gebe?

Es sey diese Zahl $= x$ so muß $\frac{1}{2}x$ mit $\frac{1}{3}x$ multiplicirt 24 werden, woraus diese Gleichung entspringt $\frac{1}{6}xx = 24$.

Mit 6 multiplicirt wird $xx = 144$ und Quadrat-Wurzel ausgezogen $x = \pm 12$. Dann wann $x = +12$, so ist $\frac{1}{2}x = 6$ und $\frac{1}{3}x = 4$, wovon das Product 24 ist. Ebenfals wann $x = -12$ so ist $\frac{1}{2}x = -6$ und $\frac{1}{3}x = -4$ und das Product davon auch 24.

72.

II. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, wann zu derselben erstlich 5 addirt und hernach auch 5 subtrahirt und die Summe mit dem Rest multiplicirt wird, 96 herauskomme?

Es sey diese Zahl x so muß $x + 5$ mit $x - 5$ multiplicirt 96 geben, woraus diese Gleichung entspringt $xx - 25 = 96$.

Man addire 25 so wird $xx = 121$ und die Quadrat-Wurzel ausgezogen $x = 11$, dann da wird $x + 5 = 16$ und $x - 5 = 6$. Nun aber ist $6 \cdot 16 = 96$.

73.

III. Frage: Es wird eine Zahl gesucht, daß wann dieselbe erstlich zu 10 addirt, hernach auch von 10 subtrahirt, jene Summe mit diesem Rest multiplicirt 51 gebe?

Es sey die Zahl x so muß $10 + x$ mit $10 - x$ multiplicirt 51 geben, woraus diese Gleichung entsteht $100 - xx = 51$.

Man addire xx und subtrahire 51, so kommt $xx = 49$, wovon die Quadrat-Wurzel anzeigt $x = 7$.

74.

IV. Frage: Es haben drey Personen Geld, so oft der erste hat 7 Rthl. hat der andere 3 Rthl. und so oft der andere hat 17 Rthl. hat der dritte 5 Rthl., so ich aber das Geld des ersten mit dem Geld des andern, und das Geld des andern mit dem Geld des dritten und auch endlich das Geld des dritten mit dem Geld des ersten multiplicire, hernach diese drey Producte zusammen addire, so wird die Summe $3830\frac{2}{3}$ seyn. Wie viel Geld hat ein jeder gehabt?

Man setze, der erste habe gehabt x Rthl. und da gesagt wird, daß so oft der erste 7 Rthl. habe, so habe der andere 3 Rthl. so will dieses so viel sagen, daß das Geld des ersten sich zum Geld des andern verhalte wie $7:3$. Man setze also wie $7:3 = x$ zum Geld des andern, welches seyn wird $\frac{3}{7}x$. Da ferner das Geld des andern sich verhält zum Geld des dritten, wie $17:5$, so setze man wie $17:5 = \frac{3}{7}x$ zum Geld des dritten, welches seyn wird $\frac{15}{119}x$. Nun multiplicire man das Geld des ersten x mit dem Geld des andern $\frac{3}{7}x$ so wird das Product $= \frac{3}{7}xx$.

Ferner das Geld des andern $\frac{3}{7}x$ mit dem Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ multiplicirt, giebt $\frac{45}{833}xx$.

Und endlich das Geld des dritten $\frac{15}{119}x$ mit dem Geld des ersten x multiplicirt, giebt $\frac{15}{119}xx$. Diese drey Producte zusammen machen

$$\frac{3}{7}xx + \frac{45}{833}xx + \frac{15}{119}xx,$$

welche unter einen Nenner gebracht, geben $\frac{507}{833}xx$, so der Zahl $3830\frac{2}{3}$ gleich gesetzt werden muß.

Also hat man $\frac{507}{833}xx = 3830\frac{2}{3}$, mit 3 multiplicirt, so bekommt man $\frac{1521}{833}xx = 11492$, ferner mit 833 multiplicirt, giebt $1521\,xx = 9572836$ und durch 1521 dividirt, wird $xx = \frac{9572836}{1521}$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen, giebt $x = \frac{3094}{39}$, welcher Bruch sich durch 13 verkleinern läßt und da kommt $x = \frac{238}{3}$, oder $x = 79\frac{1}{3}$; dahero erhält man ferner $\frac{3}{7}x = 34$ und $\frac{15}{119}x = 10$.

Antwort: Also hat der erste $79\frac{1}{3}$ Rthl. der zweyte 34 Rthl. und der dritte 10 Rthl. gehabt.

Anmerckung: diese Rechnung läßt sich noch leichter anstellen, wann man die darinn vorkommenden Zahlen in ihre Factores auflößt, und dabey insonderheit ihre Quadrate bemerckt:

Also ist $507 = 3 \cdot 169$, wo 169 das Quadrat von 13 ist; hernach ist $833 = 7 \cdot 119$ und $119 = 7 \cdot 17$ da man nun hat $\frac{3 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 3830\frac{2}{3}$ so multiplicire man mit 3, da kommt $\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 11492$. Diese Zahl löse man auch in ihre Factores auf, wovon der erste 4 so gleich in die Augen fällt, also daß $11492 = 4 \cdot 2873$; ferner läßt sich 2873 durch 17 theilen und wird $2873 = 17 \cdot 169$, dahero unsere Gleichung also aussieht:

$$\frac{9 \cdot 169}{17 \cdot 49}xx = 4 \cdot 17 \cdot 169,$$

welche durch 169 dividirt, wird: $\frac{9}{17 \cdot 49}xx = 4 \cdot 17$; ferner mit $17 \cdot 49$ multiplicirt und durch 9 dividirt giebt $xx = \frac{4 \cdot 289 \cdot 49}{9}$, wo alle Factores Quadrate sind und also die Wurzel seyn wird $x = \frac{2 \cdot 17 \cdot 7}{3} = \frac{238}{3}$ wie oben.

75.

V. Frage: Etliche Kaufleute bestellen einen Factor, schicken ihn nach Archangel zu halten einen Handel, haben eingelegt jeder zehnmal so viel Rthl. als der Personen sind. Gewinnt der Factor je mit 100 Rthl. zweymal so viel als der Personen sind. Wann man dann $\frac{1}{100}$ Theil des gantzen Gewinst multiplicirt mit $2\frac{2}{9}$ so kommt die Zahl der Gesellen heraus. Wie viel sind ihrer gewesen?

Die Anzahl derselben sey $= x$ und da ein jeder $10x$ Rthl. eingelegt hat, so war das gantze Capital $= 10xx$ Rthl. Nun gewinnt der Factor mit 100 Rthl.

$2x$ Rthl. folglich gewinnt er $\frac{1}{5}x^3$ mit dem gantzen Capital $10xx$. Der $\frac{1}{100}$ Theil dieses Gewinnsts ist demnach $\frac{1}{500}x^3$, welcher mit $2\frac{2}{9}$, das ist mit $\frac{20}{9}$ multiplicirt, giebt $\frac{20}{4500}x^3$, oder $\frac{1}{225}x^3$ welches der Zahl der Gesellen x gleich seyn muß.

Also hat man diese Gleichung $\frac{1}{225}x^3 = x$, oder $x^3 = 225x$, welche Cubisch zu seyn scheinet, weil man aber durch x dividiren kann, so kommt diese Quadratische heraus $xx = 225$ und $x = 15$.

Antwort: es sind dahero in allen 15 Gesellen gewesen und ein jeder hat 150 Rthl. eingelegt.

CAPITEL 6

VON DER AUFLÖSUNG DER VERMISCHTEN QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

76.

Eine vermischte Quadratische Gleichung wird genennt, wann in derselben dreyerley Glieder vorkommen, nemlich solche, welche das Quadrat der unbekanten Zahl enthalten, wie axx; hernach auch solche, worinn die unbekante Zahl selbst vorkommt, als bx, und endlich solche Glieder, welche blos aus bekanten Zahlen zusammengesetzt sind. Da nun zwey oder mehr Glieder von einer Art in eins zusammen gezogen werden, und alle auf eine Seite des Zeichens $=$ gebracht werden können, so wird die Form dieser Gleichung also beschaffen seyn:

$$axx \mp bx \mp c = 0.$$

Wie nun aus solchen Gleichungen der Werth von x gefunden werden soll, wird in diesem Capitel gezeigt werden, zu welchem Ende zweyerley Wege führen.

77.

Eine solche Gleichung kann durch die Theilung also eingerichtet werden, daß das erste Glied blos allein das reine Quadrat der unbekanten Zahl xx enthalte; hernach laße man das zweyte Glied auf eben der Seite wo xx steht, das bekante Glied aber bringe man auf die andere Seite. Solcher Gestalt wird unsere Gleichung diese Form bekommen $xx \pm px = \pm q$, wo p und q bekante Zahlen, sowohl positive als negative andeuten; und jetzo kommt alles darauf an, wie der wahre Werth von x gefunden werden soll. Hierbey ist zuerst zu bemercken, daß wann $xx+px$ ein würckliches Quadrat wäre, die Auflösung keine Schwierigkeit haben würde, weil man nur nöthig hätte beyderseits die Quadrat-Wurzel zu nehmen.

78.

Es ist aber klar, daß $xx+px$ kein Quadrat seyn kann, weil wir oben gesehen, daß wann die Wurzel aus zwey Gliedern besteht, z. E. $x+n$, das Quadrat davon drey Glieder enthalte, nemlich außer dem Quadrat eines jeden Theils, noch das doppelte Product beyder Theile, also daß das Quadrat von $x+n$ seyn wird $xx+2nx+nn$. Da wir nun auf einer Seite schon haben $xx+px$ so können wir xx als das Quadrat des ersten Theils der Wurzel ansehen, und da muß px das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel x mit dem andern Theil seyn; dahero der andere Theil $\frac{1}{2}p$ seyn muß, wie dann auch in der That das Quadrat von $x+\frac{1}{2}p$ gefunden wird $xx+px+\frac{1}{4}pp$.

79.

Da nun $xx+px+\frac{1}{4}pp$ ein würckliches Quadrat ist, wovon die Wurzel $x+\frac{1}{2}p$, so dürfen wir nur bey unserer Gleichung zu $xx+px=q$ beyderseits $\frac{1}{4}pp$ addiren und da bekommen wir $xx+px+\frac{1}{4}pp=q+\frac{1}{4}pp$, wo auf der ersten Seite ein würckliches Quadrat, auf der andern aber blos bekante Zahlen befindlich sind. Wann wir dahero beyderseits die Quadrat-Wurzel nehmen, so erhalten wir $x+\frac{1}{2}p=\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp+q\right)}$; subtrahirt man nun $\frac{1}{2}p$, so erhält man $x=-\frac{1}{2}p+\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp+q\right)}$; und da eine jede Quadrat-Wurzel so wohl Positiv als Negativ genommen werden kann, so findet man für x zwey Werthe, welche also durch diese Form ausgedrückt zu werden pflegen:

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp+q\right)}.$$

80.

In dieser Formel ist nun die Regel enthalten, nach welcher alle Quadrat-Gleichungen aufgelößt werden können, und damit man nicht immer nöthig habe, die obige Operation von neuem anzustellen, so ist genung, daß man den Inhalt dieser Formel dem Gedächtniß wohl einpräge. Man kann demnach die Gleichung so anordnen, daß das bloße Quadrat xx auf einer Seite zu stehen komme, daher die obige Gleichung diese Form erhalten wird:

$$xx = -px + q$$

wovon der Werth von x so gleich also hingeschrieben werden kann:

$$x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}pp + q\right)}.$$

81.

Hieraus wird nun diese allgemeine Regel gezogen um die Gleichung

$$xx = -px + q$$

aufzulösen.

Man sieht nemlich, daß die unbekante Zahl x gleich seyn werde der Hälfte der Zahl, womit x auf der andern Seite multiplicirt ist, und über das noch $+$ oder $-$ der Quadrat-Wurzel aus dem Quadrat der Zahl, so eben geschrieben worden, nebst der bloßen Zahl so das dritte Glied der Gleichung ausmacht.

Wann dahero diese Gleichung vorkäme $xx = 6x + 7$, so würde man so gleich haben $x = 3 \pm \sqrt{(9 + 7)} = 3 \pm 4$: folglich sind die beyden Werthe von x

$$\text{I.)}\ x = 7, \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ x = -1.$$

Hätte man diese Gleichung $xx = 10x - 9$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{(25 - 9)}$, welches $= 5 \pm 4$; dahero die beyden Werthe seyn werden $x = 9$ und $x = 1$.

82.

Zu mehrerer Erläuterung dieser Regel können folgende Fälle unterschieden werden, I.) wann p eine gerade Zahl ist, II.) wann p eine ungerade Zahl ist, und III.) wann p eine gebrochene Zahl ist.

Es sey I.) p eine gerade Zahl und die Gleichung also beschaffen:

$$xx = 2px + q, \text{ so bekommt man } x = p \pm \sqrt{(pp + q)}.$$

Es sey II.) p eine ungerade Zahl und die Gleichung $xx = px + q$, da dann seyn wird

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}pp + q\right)}$$

da nun $\frac{1}{4}pp + q = \frac{pp+4q}{4}$, aus dem Nenner 4 aber die Quadrat-Wurzel gezogen werden kann, so bekommt man

$$x = \frac{1}{2}p \pm \frac{\sqrt{(pp+4q)}}{2}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{p + \sqrt{(pp \pm 4q)}}{2}.$$

Wird aber III.) p ein Bruch, so kann die Auflösung folgender Gestalt geschehen. Es sey die Quadratische Gleichung

$$axx = bx + c, \quad \text{oder} \quad xx = \frac{bx}{a} + \frac{c}{a},$$

so wird nach der Regel

$$x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a}\right)}. \quad \text{Da nun aber} \quad \frac{bb}{4aa} + \frac{c}{a} = \frac{bb+4ac}{4aa}$$

und hier der Nenner ein Quadrat ist, so wird

$$x = \frac{b \pm \sqrt{(bb+4ac)}}{2a}.$$

83.

Der andere Weg welcher auch zu dieser Auflösung führet, bestehet darinn, daß man eine solche vermischte Quadratische Gleichung nemlich:

$$xx = px + q$$

in eine reine verwandele, welches geschiehet, wann man anstatt der unbekanten Zahl x eine andere y in die Rechnung einführet, also daß

$$x = y + \frac{1}{2}p;$$

da man dann, wann y gefunden worden, auch so gleich den Werth vor x erhält.

Schreibt man nun $y + \frac{1}{2}p$ anstatt x, so wird $xx = yy + py + \frac{1}{4}pp$ und $px = py + \frac{1}{2}pp$: hieraus wird unsere Gleichung also zu stehen kommen:

$$yy + py + \frac{1}{4}pp = py + \frac{1}{2}pp + q;$$

subtrahirt man hier erstlich py, so hat man $yy + \frac{1}{4}pp = \frac{1}{2}pp + q$, ferner $\frac{1}{4}pp$ subtrahirt, giebt $yy = \frac{1}{4}pp + q$, welches eine reine Quadratische Gleichung ist, woraus man so gleich erhält $y = \pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$.

Da nun $x = y + \frac{1}{2}p$, so wird $x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}pp + q\right)}$, wie wir schon oben gefunden haben. Es ist also nichts mehr übrig als diese Regel mit Exempeln zu erläutern.

84.

I. Frage: Ich habe zwey Zahlen; die eine ist um 6 größer als die andere und ihr Produkt macht 91, welches sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x + 6$ und ihr Product

$$xx + 6x = 91.$$

Man subtrahire $6x$, so hat man $xx = -6x + 91$, und nach der Regel

$$x = -3 \pm \sqrt{(9 + 91)} = -3 \pm 10,$$

dahero hat man entweder $x = 7$ oder $x = -13$.

Antwort: die Frage hat also zwey Auflösungen: nach der ersten ist die kleinere Zahl $x = 7$ die größere $x + 6 = 13$. Nach der andern aber ist die kleinere $x = -13$ und die größere $x + 6 = -7$.

85.

II. Frage: Suche eine Zahl wann ich von ihrem Quadrat subtrahire 9, daß gleich so viel über 100 bleiben als meine Zahl weniger ist als 23; welche Zahl ist es?

Es sey die Zahl x, so ist $xx - 9$ über 100 um $xx - 109$. Die gesuchte Zahl x aber ist unter 23 um $23 - x$; woraus diese Gleichung entsteht

$$xx - 109 = 23 - x.$$

Man addire 109 so wird $xx = -x + 132$ folglich nach der Regel

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4} + 132\right)} = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{529}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{23}{2}.$$

Also ist entweder $x = 11$, oder $x = -12$.

Antwort: Wann nur eine positive Antwort verlangt wird, so ist die gesuchte Zahl 11 deren Quadrat weniger 9 macht 112, so um 12 größer ist als 100, und die gefundene Zahl ist um eben so viel kleiner als 23.

86.

III. Frage: Suche eine Zahl wann ich ihre Hälffte mit ihrem Drittel multiplicire und zum Product $\frac{1}{2}$ der gefundenen Zahl addire, daß 30 kommen?

Es sey diese Zahl x, deren Hälfte mit ihrem Drittel multiplicirt $\frac{1}{6}xx$ giebt; allso soll $\frac{1}{6}xx + \frac{1}{2}x = 30$ seyn; mit 6 multiplicirt, wird $xx + 3x = 180$, oder $xx = -3x + 180$, woraus man findet

$$x = -\tfrac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{9}{4} + 180\right)} = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{27}{2}.$$

Dahero ist entweder $x = 12$ oder $x = -15$.

87.

IV. Frage: Suche zwey Zahlen in Proportione Dupla, wann ich ihre Summe zu ihrem Product addire, daß 90 komme?

Es sey die Zahl x, so ist die größere $2x$, ihr Product $2xx$, dazu ihre Summe $3x$ addirt soll geben 90. Also $2xx + 3x = 90$, und $3x$ subtrahirt,

$$2xx = -3x + 90$$

durch 2 dividirt, giebt $xx = -\frac{3}{2}x + 45$; woraus nach der Regel gefunden wird

$$x = -\tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\tfrac{9}{16} + 45\right)} = -\tfrac{3}{4} \pm \tfrac{27}{4}.$$

Dahero ist entweder $x = 6$ oder $x = -7\frac{1}{2}$.

88.

V. Frage: Einer kauft ein Pferd für etliche Rthl. verkauft dasselbe wieder für 119 Rthl. und gewinnt daran von 100 so viel Rthl. als das Pferd gekostet, ist die Frage wie theuer daßelbe eingekauft worden?

Das Pferd habe gekostet x Rthl. weil er nun darauf x Proc. gewonnen, so setze man: mit 100 gewinnt man x, wie viel mit x? Antwort $\frac{xx}{100}$. Da er nun $\frac{xx}{100}$ gewonnen, der Einkauf aber x gewesen, so muß er dasselbe für $x + \frac{xx}{100}$ verkauft haben. Dahero wird $x + \frac{xx}{100} = 119$.

Man subtrahire x, so kommt $\frac{xx}{100} = -x + 119$ und mit 100 multiplicirt, wird $xx = -100x + 11900$, woraus nach der Regel gefunden wird

$$x = -50 \pm \sqrt{(2500 + 11900)} = -50 \pm \sqrt{14400} = -50 \pm 120.$$

Antwort: das Pferd hat also gekostet 70 Rthl. weil er nun darauf 70 Procent gewonnen, so war der Gewinst 49 Rthl. er muß also dasselbe verkauft haben vor $70 + 49$, das ist für 119 Rthl. wie würcklich geschehen.

89.

VI. Frage: Einer kauft eine gewiße Anzahl Tücher: das erste für 2 Rthl. das zweyte für 4 Rthl. das dritte für 6 Rthl. und immer 2 Rthl. mehr für das folgende, bezahlt für alle Tücher 110 Rthl. Wie viel sind der Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, und wie viel er für jedes bezahlt hat, zeiget die folgende Vorstellung an:

$$\begin{array}{ll} \text{für das} & 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\dots\ x. \\ \text{zahlt er} & 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\dots 2x\ \text{Rthl.} \end{array}$$

Man muß also diese Arithmetische Progression $2+4+6+8+10+\cdots 2x$ welche aus x Gliedern besteht summiren, um den Preis aller Tücher zusammen zu finden.

Nach der oben gegebenen Regel also addire man das erste und letzte Glied zusammen, so bekommt man $2x+2$. Dieses multiplicire man mit der Anzahl der Glieder x, so bekommt man die doppelte Summe $2xx+2x$. Dahero die Summe selbst seyn wird $xx+x$, welche dem 110 gleich seyn muß, oder $xx+x=110$.

Man subtrahire x, so wird $xx=-x+110$ folglich

$$x=-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+110\right)} \quad \text{oder} \quad =-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\tfrac{441}{4}}$$

oder

$$x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{21}{2}=10.$$

Antwort: Es sind 10 Stück Tücher gekauft worden.

90.

VII. Frage: Einer kauft etliche Tücher für 180 Rthl. wären der Tücher 3 mehr gewesen vor eben das Geld, so wäre ihm das Stück um 3 Rthl. wohlfeiler gekommen. Wie viel sind es Tücher gewesen?

Es seyen x Tücher gewesen, so hat das Stück würcklich gekostet $\frac{180}{x}$ Rthl. Hätte er aber $x+3$ Stück für 180 Rthl. bekommen, so würde das Stück gekostet haben $\frac{180}{x+3}$ Rthl. welcher Preis um 3 Rthl. weniger ist, als der würckliche, woraus diese Gleichung entsteht: $\frac{180}{x+3}=\frac{180}{x}-3$.

Man multiplicire mit x, so kommt $\frac{180x}{x+3} = 180 - 3x$, durch 3 dividirt, giebt $\frac{60x}{x+3} = 60 - x$, mit $x + 3$ multiplicirt, wird $60x = 180 + 57x - xx$, man addire xx, so kommt $xx + 60x = 180 + 57x$. Man subtrahire $60x$, so kommt $xx = -3x + 180$. Hieraus nach der Regel

$$x = -\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{9}{4} + 180\right)}, \quad \text{oder} \quad x = -\frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 12.$$

Antwort: Also sind 12 Tücher für 180 Rthl. gekauft worden, dahero eines gekostet 15 Rthl. Hätte man aber 3 Stück mehr nemlich 15 Stück für 180 Rthl. bekommen, so wird 1 Stück gekostet haben 12 Rthl., folglich 3 Rthl. weniger als in der That.

91.

VIII. Frage: Zwey haben eine Gesellschaft, legen zusammen 100 Rthl. ein, der erste läßt sein Geld 3 Monath lang, der andere aber 2 Monath lang stehen, und zieht ein jeder mit Capital und Gewinst 99 Rthl. wie viel hat jeder eingelegt?

Der erste habe eingelegt x Rthl. und also der andere $100 - x$; da nun der erste 99 Rthl. zurück zieht, so ist sein Gewinn $99 - x$, welcher in 3 Monathen mit dem Capital x ist erworben worden, da der andere auch 99 Rthl. zurück zieht, so war sein Gewinn $x - 1$, welcher in zwey Monathen mit dem Capital $100 - x$ erworben worden; mit eben diesem Capital $100 - x$ würden also in drey Monathen gewonnen werden $\frac{3x-3}{2}$. Nun sind diese Gewinste denen Capitalen proportional, nemlich jenes Capital verhält sich zu jenem Gewinst, wie dieses Capital zu diesem Gewinst; also

$$x : 99 - x = 100 - x : \frac{3x-3}{2}.$$

Man setze das Product der äußern gleich dem Product der mittlern, so hat man $\frac{3xx - 3x}{2} = 9900 - 199x + xx$ und mit 2 multiplicirt

$$3xx - 3x = 19800 - 398x + 2xx;$$

man subtrahire $2xx$ so kommt $xx - 3x = 19800 - 398x$ und $3x$ addirt

$$xx = -395x + 19800.$$

Dahero nach der Regel

$$x = -\frac{395}{2} + \sqrt{\left(\frac{156025}{4} + \frac{79200}{4}\right)} \quad \text{das ist} \quad x = -\frac{395}{2} + \frac{485}{2} = \frac{90}{2} = 45.$$

Antwort: der erste hat also eingelegt 45 Rthl. und der andere 55 Rthl. mit den 45 Rthl. hat der erste in 3 Monath gewonnen 54 Rthl. würde demnach in einem Monath gewonnen haben 18 Rthl. Der andere aber gewinnt mit 55 Rthl. in 2 Monath 44 Rthl. würde also in einem Monath gewonnen haben 22 Rthl. welches auch mit jenem übereinstimmt; dann wann mit 45 Rthl. gewonnen werden 18 in einem Monath, so werden mit 55 in gleicher Zeit gewonnen 22 Rthl.

92.

IX. Frage: Zwey Bäurinnen tragen zusammen 100 Eyer auf den Marckt, eine mehr als die andere, und lösen doch beyde gleich viel Geld. Spricht die erste zu der andern: hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich 15 Kreuzer gelößt; darauf antwortet die andere: hätte ich deine Eyer gehabt, so hätte ich daraus $6\frac{2}{3}$ Kreutzer gelößt; wie viel hat jede gehabt?

Die erste habe gehabt x Eyer und also die andere $100 - x$.

Also da nun die erste $100 - x$ Eyer für 15 Kreuzer verkauft haben würde, so setze man diese Regeldetri

$$100 - x : 15 = x \text{ zu} \ldots \quad \text{Antwort } \frac{15x}{100 - x} \text{ Kreuzer.}$$

Eben so bey der andern welche x Eyer für $6\frac{2}{3}$ Kreuzer verkauft haben würde, findet man wie viel sie aus ihren $100 - x$ Eyer gelöset,

$$x : \frac{20}{3} = 100 - x \text{ zu} \ldots \quad \text{Antwort } \frac{2000 - 20x}{3x}.$$

Da nun die beyden Bäurinnen gleich viel gelöset haben, so finden wir diese Gleichung:

$$\frac{15x}{100 - x} = \frac{2000 - 20x}{3x},$$

mit $3x$ multiplicirt, kommt $2000 - 20x = \frac{45xx}{100 - x}$, mit $100 - x$ multiplicirt, $45xx = 200000 - 4000x + 20xx$, $20xx$ subtrahirt, $25xx = 200000 - 4000x$, durch 25 dividirt $xx = -160x + 8000$, dahero nach der Regel

$$x = -80 + \sqrt{(6400 + 8000)} = -80 + 120 = 40.$$

Antwort: die erste Bäurin hat also gehabt 40 Eyer, die andere 60 Eyer und hat eine jede 10 Kreuzer gelöset.

93.

X. Frage: Zwey verkauffen etliche Ellen Zeug, der andere 3 Ellen mehr als der erste, und lösen zusammen 35 Rthl. Spricht der erste zum andern: aus deinem Zeug wollt ich gelöset haben 24 Rthl. antwortet der andere: so hätte ich aus deinem gelößet $12\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel hat jeder Ellen gehabt?

Der erste habe gehabt x Ellen, folglich der andere $x+3$ Ellen. Da nun der erste aus $x+3$ El. 24 Rthl. gelöst hätte, so muß er seine x Ellen verkauft haben vor $\frac{24x}{x+3}$ Rthl. und da der andere x Ellen verkauft hätte für $12\frac{1}{2}$ Rthl. so hatte er seine $x+3$ Ellen verkauft vor $\frac{25x+75}{2x}$ und so haben beyde zusammen gelöst $\frac{24x}{x+3}+\frac{25x+75}{2x}=35$ Rthl. Allso

$$\frac{48xx}{x+3}+25x+75=70x \quad \text{oder} \quad \frac{48xx}{x+3}=45x-75,$$

mit $x+3$ multiplicirt wird $48xx=45xx+60x-225$, subtrahirt $45xx$, so hat man $3xx=60x-225$ oder $xx=20x-75$.

Hieraus wird

$$x=10\pm\sqrt{(100-75)}=10\pm\sqrt{25}, \quad \text{also} \quad x=10\pm 5.$$

Antwort: Es giebt daher zwey Auflößungen. Nach der ersten hat der erste 15 Ellen, und der andere 18 Ellen; weil nun der erste 18 Ellen verkauft hätte vor 24 Rthl. so hat er aus seinen 15 Ellen gelöst 20 Rthl. Der andere aber hätte aus 15 Ellen gelöset $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 18 Ellen gelöst 15 Rthl. also beyde zusammen 35 Rthl.

Nach der andern Auflösung hat der erste gehabt 5 Ellen, folglich allso der andere 8 Ellen, allso der erste hätte verkauft 8 Ellen für 24 Rthl. und hat also aus seinen 5 Ellen gelöst 15 Rthl. Der andere hätte 5 Ellen verkauft für $12\frac{1}{2}$ Rthl. hat also aus seinen 8 Ellen gelöst 20 Rthl. folglich beyde zusammen eben wieder 35 Rthl.

CAPITEL 7

VON DER AUSZIEHUNG DER WURZELN AUS DEN VIELECKIGTEN ZAHLEN

94.

Wir haben oben [I, § 425—439] gezeigt, wie die vieleckigten Zahlen gefunden werden sollen; was wir aber daselbst eine Seite genennt haben wird auch eine Wurzel genannt. Wann nun die Wurzel durch x angedeutet wird, so werden daraus die vieleckigten Zahlen folgender Gestalt gefunden.

Das	3 eck	ist	$\frac{xx+x}{2}$
„	4 eck	„	xx
„	5 eck	„	$\frac{3xx-x}{2}$
„	6 eck	„	$2xx-x$
„	7 eck	„	$\frac{5xx-3x}{2}$
„	8 eck	„	$3xx-2x$
„	9 eck	„	$\frac{7xx-5x}{2}$
„	10 eck	„	$4xx-3x$
„	n eck	„	$\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2}$

95.

Durch Hülfe dieser Formeln ist es nun leicht für eine jede gegebene Seite, oder Wurzel, eine verlangte vieleckigte Zahl so groß auch die Zahl der Ecke seyn mag zu finden, wie schon oben genungsam gezeigt worden. Wann aber umgekehrt eine vieleckigte Zahl von einer gewißen Anzahl Seite gegeben ist, so ist es weit schwerer die Wurzel oder Seite davon zu finden, und wird dazu die Auflösung Quadratischer Gleichungen erfordert, dahero diese Sache allhier besonders verdienet abgehandelt zu werden. Wir wollen hiebey der Ordnung nach von den dreyeckigten Zahlen anfangen, und zu den mehreckigten fortschreiten.

96.

Es sey demnach 91 die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man nun diese Wurzel $= x$ so muß $\frac{xx+x}{2}$ der Zahl 91 gleich seyn: man multiplicire mit 2 so hat man $xx + x = 182$, woraus gefunden wird $xx = -x + 182$ und also

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 182\right)} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}} \text{ folglich } x = -\frac{1}{2} + \frac{27}{2} = 13;$$

dahero ist die verlangte Dreyecks-Wurzel $= 13$, dann das Dreyeck von 13 ist 91.

97.

Es sey aber auf eine allgemeine Art a die gegebene dreyeckigte Zahl, wovon die Wurzel gefunden werden soll.

Setzt man dieselbe $= x$ so wird $\frac{xx+x}{2} = a$, oder $xx + x = 2a$, oder ferner $xx = -x + 2a$, woraus gefunden wird $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 2a\right)}$, oder

$$x = \frac{-1 + \sqrt{(8a+1)}}{2}.$$

Hieraus entspringt diese Regel. Man multiplicire die gegebene dreyeckigte Zahl mit 8 und zum Product addire 1, aus der Summ ziehe man die Quadrat-Wurzel, von derselben subtrahire 1; den Rest dividire durch 2, so kommt die gesuchte Dreyecks-Wurzel heraus.

98.

Hieraus sieht man daß alle dreyeckigte Zahlen diese Eigenschaft haben, daß wann man dieselben mit 8 multiplicirt und 1 dazu addirt immer eine Quadrat-Zahl herauskommen müße, wie aus folgendem Täfelgen zu ersehen,

III. Eck.	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,	36,	45,	55,	66,	etc.
8 mahl + 1:	9,	25,	49,	81,	121,	169,	225,	289,	361,	441,	529,	etc.

Ist nun die gegebene Zahl a nicht so beschaffen, so ist es ein Zeichen, daß dieselbe keine würckliche dreyeckigte Zahl sey, oder die Wurzel davon nicht rational angegeben werden könne.

99.

Man suche nach dieser Regel die Dreyecks-Wurzel aus der Zahl 210, so ist $a = 210$ und $8a + 1 = 1681$ wovon die Quadrat-Wurzel 41, woraus man sieht, daß die Zahl 210 würcklich eine dreyeckigte Zahl ist, wovon die Wurzel $= \frac{41-1}{2} = 20$.

Wäre aber die Zahl 4 als ein Dreyeck gegeben, wovon die Wurzel gesucht werden sollte, so wäre dieselbe $= \frac{\sqrt{33}-1}{2}$ und also irrational. Es wird aber auch würcklich von dieser Wurzel, nemlich $\frac{\sqrt{33}-1}{2}$, das Dreyeck gefunden wie folget:

Da $x = \frac{\sqrt{33}-1}{2}$, so ist $xx = \frac{17-\sqrt{33}}{2}$; darzu x addirt, wird $xx + x = \frac{16}{2} = 8$, und folglich die dreyeckigte Zahl $\frac{xx+x}{2} = 4$.

100.

Da die viereckigten Zahlen mit den Quadraten einerley sind, so hat die Sache keine Schwierigkeit. Dann setzt man die gegebene viereckigte Zahl $= a$ und ihre Virecks-Wurzel $= x$, so wird $xx = a$ und also $x = \sqrt{a}$. Also daß die Quadrat-Wurzel und Vierecks-Wurzel einerley sind.

101.

Wir wollen demnach zu den fünfeckigten Zahlen fortschreiten.

Es sey nun 22 eine fünfeckigte Zahl und die Wurzel derselben $= x$, so muß seyn $\frac{3xx-x}{2} = 22$, oder $3xx - x = 44$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{44}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{44}{3}\right)}$, das ist $x = \frac{1+\sqrt{529}}{6} = \frac{1}{6} + \frac{23}{6} = 4$. Also ist 4 die gesuchte Fünfecks-Wurzel aus der Zahl 22.

102.

Es sey nun vorgelegt diese Frage: wann das gegebene Fünfeck $= a$ ist, wie soll davon die Wurzel gefunden werden?

Setzt man diese gesuchte Wurzel $= x$, so kommt man auf diese Gleichung $\frac{3xx-x}{2} = a$, oder $3xx - x = 2a$, oder $xx = \frac{1}{3}x + \frac{2a}{3}$; woraus gefunden wird $x = \frac{1}{6} + \sqrt{\left(\frac{1}{36} + \frac{2a}{3}\right)}$, das ist

$$x = \frac{1+\sqrt{(24a+1)}}{6}.$$

Wann dahero a ein würckliches Fünfeck ist, so muß $24a + 1$ immer eine Quadrat-Zahl seyn.

Es sey z. E. 330 das gegebene Fünfeck, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{7921}}{6} = \frac{1+89}{6} = 15$.

103.

Es sey nun a eine gegebene sechseckigte Zahl, wovon die Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$ so wird $2xx - x = a$, oder $xx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a$, dahero gefunden wird

$$x = \frac{1}{4} + \sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2}a\right)} = \frac{1+\sqrt{(8a+1)}}{4}.$$

Wann also a ein würckliches Sechseck ist, so muß $8a+1$ ein Quadrat werden, woraus man sieht daß alle sechseckigte Zahlen unter den dreyeckigten begriffen sind; die Wurzeln aber sind anders beschaffen.

Es sey z. E. die sechseckigte Zahl 1225 so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{9801}}{4} = \frac{1+99}{4} = 25$.

104.

Es sey ferner a eine gegebene siebeneckigte Zahl, wovon die Seite oder Wurzel gesucht werden soll.

Setzt man diese Wurzel $= x$ so hat man $\frac{5xx-3x}{2} = a$, oder $5xx - 3x = 2a$, allso $xx = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}a$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{3}{10} + \sqrt{\left(\frac{9}{100} + \frac{2}{5}a\right)} = \frac{3+\sqrt{(40a+9)}}{10}.$$

Alle siebeneckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wann man dieselben mit 40 multiplicirt und zum Product 9 addirt, die Summe immer Quadrat-Zahlen werden.

Es sey z. E. das gegebene Siebeneck 2059, so findet man die Wurzel davon $x = \frac{3+\sqrt{82369}}{10} = \frac{3+287}{10} = 29$.

105.

Es sey nun a eine gegebene achteckigte Zahl wovon die Wurzel x gefunden werden soll.

Man hat dahero $3xx - 2x = a$, oder $xx = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}a$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{1}{3} + \sqrt{\left(\frac{1}{9} + \frac{a}{3}\right)} = \frac{1+\sqrt{(3a+1)}}{3}.$$

Alle achteckigte Zahlen sind demnach also beschaffen, daß wann man sie mit 3 multiplicirt und dazu 1 addirt die Summe immer eine Quadrat-Zahl werde.

Es sey z. E. 3816 eine achteckigte Zahl, so wird die Wurzel davon seyn $x = \frac{1+\sqrt{11449}}{3} = \frac{1+107}{3} = 36$.

106.

Es sey endlich a eine gegebene n eckigte Zahl, wovon die Wurzel x gesucht werden soll, so hat man diese Gleichung $\frac{(n-2)xx-(n-4)x}{2} = a$, oder $(n-2)xx-(n-4)x = 2a$, allso $xx = \frac{(n-4)x}{n-2} + \frac{2a}{n-2}$, woraus gefunden wird $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{2a}{n-2}\right)}$ oder $x = \frac{n-4}{2(n-2)} + \sqrt{\left(\frac{(n-4)^2}{4(n-2)^2} + \frac{8(n-2)a}{4(n-2)^2}\right)}$ und folglich

$$x = \frac{n-4+\sqrt{(8(n-2)a+(n-4)^2)}}{2(n-2)}.$$

Welche Formel eine allgemeine Regel enthält um aus gegebenen Zahlen alle mögliche vieleckigte Wurzeln zu finden.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey gegeben diese 24 eckigte Zahl 3009; weil nun hier $a = 3009$ und $n = 24$, folglich $n-2 = 22$ und $n-4 = 20$ so bekommen wir die Wurzel

$$x = \frac{20+\sqrt{(529584+400)}}{44} = \frac{20+728}{44} = 17.$$

CAPITEL 8

VON DER AUSZIEHUNG DER QUADRAT-WURZELN AUS BINOMIEN

107.

Ein Binomium wird in der Algebra genennt eine aus zwey Theilen bestehende Zahl, wovon eine oder auch beyde das Quadratische Wurzel-Zeichen enthalten.

Also ist $3+\sqrt{5}$ ein Binomium, imgleichen $\sqrt{8}+\sqrt{3}$, und es ist gleich viel ob diese beyden Theile mit dem Zeichen $+$ oder $-$ verbunden sind. Dahero wird $3-\sqrt{5}$ eben so wohl ein Binomium genennt als $3+\sqrt{5}$.

108.

Diese Binomien sind deswegen hauptsächlich merckwürdig, weil man bey Auflösung der Quadratischen Gleichungen jedesmahl auf solche Formeln kommt, so offt die Auflösung nicht geschehen kann.

Also wann z. E. diese Gleichung vorkommt $xx = 6x - 4$, so wird dann $x = 3 + \sqrt{5}$. Um dieser Ursache willen kommen nun solche Formeln in den Algebraischen Rechnungen sehr häuffig vor, und wir haben auch schon oben gezeiget, wie damit die gewöhnliche Operationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division angestellt werden sollen. Nun aber sind wir erst im Stande zu zeigen, wie aus solchen Formeln auch die Quadrat-Wurzeln ausgezogen werden können, wofern nemlich eine solche Ausziehung statt findet, indem wiedrigenfals nur noch ein Wurzelzeichen vorgesetzt wird, nemlich von $3 + \sqrt{2}$ ist die Quadrat-Wurzel $\sqrt{(3 + \sqrt{2})}$.

109.

Man hat demnach zuförderst zu bemercken, daß die Quadrate von solchen Binomien wiederum dergleichen Binomien werden, in welchen so gar der eine Theil rational ist.

Dann sucht man das Quadrat von $a + \sqrt{b}$, so wird dasselbe $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$. Wann also von dieser Formel $(aa + b) + 2a\sqrt{b}$ hinwiederum die Quadrat-Wurzel verlangt würde, so wäre dieselbe $a + \sqrt{b}$, welche ohnstreitig deutlicher zu begreiffen ist, als wann man vor jene Formel noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte. Eben so, wann man von dieser Formel $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ das Quadrat nimmt, so wird dasselbe $(a + b) + 2\sqrt{ab}$, dahero auch umgekehrt von dieser Formel $(a + b) + 2\sqrt{ab}$ die Quadrat-Wurzel seyn wird $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ welche wiederum verständlicher ist, als wann man vor jene noch das $\sqrt{}$ Zeichen setzen wollte.

110.

Es kommt dahero darauf an, wie ein Kennzeichen zu erfinden sey, woraus in einem jeglichen Fall beurtheilet werden kann, ob eine solche Quadrat-Wurzel statt finde oder nicht. Wir wollen zu diesem Ende mit einer leichten Formel den Anfang machen und sehen, ob man aus diesem Binomio $5 + 2\sqrt{6}$ solcher Gestalt die Quadrat-Wurzel finden könne.

Man setze also diese Wurzel sey $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, wovon das Quadrat $(x + y) + 2\sqrt{xy}$ ist, allso muß dieses Quadrat jener Formel $5 + 2\sqrt{6}$ gleich seyn; folglich der rationale Theil $x+y$ muß gleich seyn 5 und der irrationale $2\sqrt{xy}$ muß gleich seyn $2\sqrt{6}$; dahero bekommt man $\sqrt{xy}=\sqrt{6}$ und die Quadrate genommen $xy=6$. Da nun $x+y=5$, so wird hieraus $y=5-x$ welcher Werth in der Gleichung $xy=6$ gesetzt giebt $5x-xx=6$ oder $xx=5x-6$, dahero $x=\frac{5}{2}+\sqrt{\left(\frac{25}{4}-\frac{24}{4}\right)}=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=3$; also $x=3$ und $y=2$, folglich wird aus $5+2\sqrt{6}$ die Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

111.

Da wir hier diese beyde Gleichungen erhalten haben

$$\text{I.) } x+y=5 \quad \text{und} \quad \text{II.) } xy=6,$$

so wollen wir hier einen besondern Weg anzeigen, um daraus x und y zu finden, welcher darinn besteht:

Da $x+y=5$ so nehme man die Quadraten $xx+2xy+yy=25$. Nun bemercke man, daß $xx-2xy+yy$ das Quadrat von $x-y$ ist; man subtrahire dahero von jener Gleichung nemlich von $xx+2xy+yy=25$, diese $xy=6$ vier mal genommen oder $4xy=24$, so erhält man $xx-2xy+yy=1$ und hieraus die Quadrat-Wurzel $x-y=1$, so wird, weil $x+y=5$ ist, gefunden $x=3$ und $y=2$. Dahero die gesuchte Quadrat-Wurzel von $5+2\sqrt{6}$ seyn wird $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

112.

Laßt uns dieses allgemeine Binomium $a+\sqrt{b}$ betrachten und die Quadrat-Wurzel davon $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ setzen, so erhalten wir diese Gleichung

$$(x+y)+2\sqrt{xy}=a+\sqrt{b}, \quad \text{also} \quad x+y=a \quad \text{und} \quad 2\sqrt{xy}=\sqrt{b} \quad \text{oder} \quad 4xy=b$$

von jener ist das Quadrat $xx+2xy+yy=aa$ wovon diese $4xy=b$ subtrahirt, giebt $xx-2xy+yy=aa-b$, und wovon die Quadrat-Wurzel ist $x-y=\sqrt{(aa-b)}$. Da nun $x+y=a$, so finden wir

$$x=\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2} \quad \text{und} \quad y=\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}$$

dahero die verlangte Quadrat-Wurzel aus $a+\sqrt{b}$ seyn wird:

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{(aa-b)}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{(aa-b)}}{2}}.$$

113.

Diese Formel ist allerdings verwirrter, als wann man vor das gegebene Binomium $a+\sqrt{b}$ schlecht weg das Wurzel-Zeichen $\sqrt{}$ gesetzt hätte, nemlich $\sqrt{(a+\sqrt{b})}$. Allein jene Formel kann weit leichter werden, wann die Zahlen a und b so beschaffen sind, daß $aa-b$ ein Quadrat wird, weil alsdann das $\sqrt{}$ hinter dem $\sqrt{}$ wegfällt. Hieraus erkennt man, daß man nur in solchen Fällen aus dem Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel bequem ausziehen könne, wann $aa-b=cc$, dann alsdenn wird die gesuchte Quadrat-Wurzel seyn

$$\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}};$$

wann aber $aa-b$ keine Quadrat-Zahl ist, so läßt sich die Quadrat-Wurzel nicht füglicher anzeigen, als durch Vorsetzung des $\sqrt{}$ Zeichens.

114.

Dahero erhalten wir diese Regel um aus einem Binomio $a+\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel auf eine bequemere Art auszudrücken. Hierzu wird nemlich erfodert daß $aa-b$ eine Quadrat-Zahl sey; ist nun dieselbe $=cc$, so wird die verlangte Quadrat-Wurzel seyn $\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$; wobey noch anzumercken, daß von $a-\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel seyn werde $\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}$. Dann nimmt man von dieser Formel das Quadrat, so wird solches $a-2\sqrt{\frac{aa-cc}{4}}$; da nun $cc=aa-b$, so ist $aa-cc=b$; dahero dieses Quadrat

$$=a-2\sqrt{\frac{b}{4}}=a-\frac{2\sqrt{b}}{2}=a-\sqrt{b}.$$

115.

Wann also aus einem solchen Binomio $a\pm\sqrt{b}$ die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, so subtrahirt man von dem Quadrat des rationalen Theils aa das Quadrat des irrationalen Theils b; aus dem Rest ziehe man die Quadrat-Wurzel, welche $=c$ sey, so ist die verlangte Quadrat-Wurzel

$$\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}.$$

116.

Man suche die Quadrat-Wurzel aus $2+\sqrt{3}$ so ist $a=2$ und $b=3$; dahero $aa-b=cc=1$ und allso $c=1$: dahero die verlangte Quadrat-Wurzel ist

$$\sqrt{\tfrac{3}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Es sey ferner dieses Binomium gegeben $11+6\sqrt{2}$, woraus die Quadrat-Wurzel gefunden werden soll. Hier ist nun $a=11$ und $\sqrt{b}=6\sqrt{2}$; dahero $b=36\cdot 2=72$ und $aa-b=49$ folglich $c=7$. Dahero die Quadrat-Wurzel aus $11+6\sqrt{2}$ seyn wird $\sqrt{9}+\sqrt{2}=3+\sqrt{2}$.

Man suche die Quadrat-Wurzel aus $11-2\sqrt{30}$. Hier ist $a=11$ und $\sqrt{b}=2\sqrt{30}$, dahero $b=4\cdot 30=120$ und $aa-b=1$ und $c=1$: folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

117.

Diese Regel findet auch statt, wann so gar imaginäre, oder unmögliche Zahlen, vorkommen.

Wann also gegeben ist dieses Binomium $1+4\sqrt{-3}$, so ist $a=1$ und $\sqrt{b}=4\sqrt{-3}$; dahero $b=-48$ und $aa-b=49$. Dahero $c=7$ folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel $\sqrt{4}+\sqrt{-3}=2+\sqrt{-3}$.

Es sey ferner gegeben $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$. Hier ist $a=-\frac{1}{2}$, $\sqrt{b}=\frac{1}{2}\sqrt{-3}$ und $b=\frac{1}{4}\cdot -3=-\frac{3}{4}$ dahero $aa-b=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$ und $c=1$: folglich die gesuchte Quadrat-Wurzel

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}}+\sqrt{-\tfrac{3}{4}}=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{-3}}{2} \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-3}.$$

Noch ist merckwürdig dieses Exempel, wo aus $2\sqrt{-1}$ die Quadrat-Wurzel gesucht werden soll.

Weil hier kein rationaler Theil ist, so ist $a=0$ und $\sqrt{b}=2\sqrt{-1}$ dahero $b=-4$ und $aa-b=4$, also $c=2$, woraus die gesuchte Quadrat-Wurzel ist $\sqrt{1}+\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}$ wovon das Quadrat ist $1+2\sqrt{-1}-1=2\sqrt{-1}$.

118.

Sollte auch eine solche Gleichung aufzulösen vorfallen wie $xx=a\pm\sqrt{b}$ und es wäre $aa-b=cc$, so würde man daraus diesen Werth für x erhalten $x=\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}$ welches in vielen Fällen Nutzen haben kann.

Es sey z. E. $xx=17+12\sqrt{2}$, so wird $x=3+\sqrt{8}=3+2\sqrt{2}$.

119.

Dieses findet insonderheit statt bey Auflösung einiger Gleichungen vom vierten Grad, als $x^4 = 2axx + d$. Dann setzt man hier $xx = y$ so wird $x^4 = yy$, dahero unsere Gleichung $yy = 2ay + d$, woraus gefunden wird $y = a \pm \sqrt{(aa + d)}$: dahero für die erste Gleichung seyn wird $xx = a \pm \sqrt{(aa + d)}$, woraus folglich noch die Quadrat-Wurzel gezogen werden muß. Da nun hier

$$\sqrt{b} = \sqrt{(aa + d)} \quad \text{also} \quad b = aa + d, \quad \text{so wird} \quad aa - b = -d.$$

Wäre nun $-d$ ein Quadrat nemlich cc oder $d = -cc$, so kann die Wurzel angezeigt werden; es sey demnach $d = -cc$, oder es sey diese Gleichung vom vierten Grad vorgegeben $x^4 = 2axx - cc$, so wird daraus der Werth von x also ausgedrückt

$$x = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}}.$$

120.

Wir wollen dieses durch einige Exempel erläutern;

I. Erstlich suche man zwey Zahlen deren Product sey 105, und wann man ihre Quadraten zusammen addirt, so sey die Summe $= 274$?

Man setze diese Zahlen seyen x und y, so hat man sogleich diese zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ xy = 105 \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ xx + yy = 274.$$

Aus der ersten findet man $y = \frac{105}{x}$ welcher Werth in der andern vor y gesetzt, giebt $xx + \frac{105^2}{xx} = 274$.

Mit xx multiplicirt wird $x^4 + 105^2 = 274xx$, oder $x^4 = 274xx - 105^2$.

Vergleicht man nun diese Gleichung mit der obigen, so wird $2a = 274$ und $-cc = -105^2$; dahero $c = 105$ und $a = 137$. Also finden wir:

$$x = \sqrt{\frac{137 + 105}{2}} \pm \sqrt{\frac{137 - 105}{2}} = 11 \pm 4:$$

folglich entweder $x = 15$, oder $x = 7$. Im erstern Fall wird $y = 7$, im letzteren aber $y = 15$. Dahero die beyden gesuchten Zahlen sind 15 und 7.

121.

Es ist hier aber gut zu bemercken, daß die Rechnung weit leichter gemacht werden kann. Dann da $xx + 2xy + yy$, und auch $xx - 2xy + yy$ ein

Quadrat ist, wir aber wißen was so wohl $xx + yy$ als xy ist, so dürfen wir nur das letztere doppelt genommen, so wohl zu dem ersten addiren, als auch davon subtrahiren, wie hier zu sehen: $xx + yy = 274$. Erstlich $2xy = 210$ addirt giebt $xx + 2xy + yy = 484$ und $x + y = 22$; darnach $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = 64$ und $x - y = 8$.

Allso $2x = 30$ und $2y = 14$, woraus erhellet daß $x = 15$ und $y = 7$.

Auf diese Art kann auch diese allgemeine Frage aufgelößt werden:

II. Man suche zwey Zahlen, davon das Product $= m$, und die Summ ihrer Quadraten $= n$?

Die gesuchten Zahlen seyen x und y, so hat man die beyden folgenden Gleichungen

$$\text{I.)}\ xy = m, \qquad \text{II.)}\ xx + yy = n.$$

Nun aber ist $2xy = 2m$, woraus erstlich $2xy$ addirt wird $xx + 2xy + yy = n + 2m$ und $x + y = \sqrt{(n + 2m)}$ hierauf $2xy$ subtrahirt giebt $xx - 2xy + yy = n - 2m$ und $x - y = \sqrt{(n - 2m)}$ also

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)} \quad \text{und} \quad y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(n + 2m)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(n - 2m)}.$$

122.

III. Es sey ferner diese Frage vorgelegt: man suche zwey Zahlen, deren Product $= 35$ und die Differenz ihrer Quadraten $= 24$?

Es sey x die größere, und y die kleinere, so hat man diese beyde Gleichungen $xy = 35$ und $xx - yy = 24$; da nun hier die vorigen Vortheile nicht statt finden, so verfahre man nach der gewöhnlichen Weise, und da giebt die erste $y = \frac{35}{x}$, welcher Werth in der andern für y gesetzt, giebt $xx - \frac{1225}{xx} = 24$, mit xx multiplicirt, so hat man $x^4 - 1225 = 24xx$ und $x^4 = 24xx + 1225$. Weil hier das letzte Glied das Zeichen *plus* hat, so kann die obige Gleichung nicht angewandt werden, weil nehmlich $cc = -1225$, und also c imaginär würde.

Man setze dahero $xx = z$, so hat man $zz = 24z + 1225$ woraus gefunden wird $z = 12 \pm \sqrt{(144 + 1225)}$ oder $z = 12 \pm 37$ dahero $xx = 12 \pm 37$, das ist entweder $xx = 49$ oder $xx = -25$.

Nach dem ersten Werth wird $x = 7$ und $y = 5$.

Nach dem andern aber wird

$$x = \sqrt{-25} \quad \text{und} \quad y = \frac{35}{\sqrt{-25}}, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{\frac{1225}{-25}}, \quad \text{oder} \quad y = \sqrt{-49}.$$

123.

Zum Beschluß dieses Capitels wollen wir noch diese Frage beyfügen:

IV. Man suche zwey Zahlen, deren Summe, Product, und die Differenz ihrer Quadraten einander gleich seyen?

Die größere Zahl sey x, die kleinere y, so müßen diese drey Formeln einander gleich seyn: I.) Summe $x+y$, II.) Product xy, III.) Differenz der Quadraten $xx-yy$. Vergleicht man die erste mit der zweyten, so hat man $x+y=xy$ und daraus suche man x. Man wird allso haben $y=xy-x$ oder $y=x(y-1)$ und daraus wird $x=\frac{y}{y-1}$; dahero wird $x+y=\frac{yy}{y-1}$ und $xy=\frac{yy}{y-1}$ und also ist die Summe dem Product schon gleich. Diesem muß aber noch die Differenz der Quadraten gleich seyn: es wird aber

$$xx-yy=\frac{yy}{yy-2y+1}-yy=\frac{-y^4+2y^3}{yy-2y+1}$$

welches dem obigen Werth $\frac{yy}{y-1}$ gleich seyn muß; dahero bekommt man $\frac{yy}{y-1}=\frac{-y^4+2y^3}{(y-1)^2}$; durch yy dividirt wird $\frac{1}{y-1}=\frac{-yy+2y}{(y-1)^2}$; ferner mit $y-1$ multiplicirt wird $1=\frac{-yy+2y}{y-1}$ nochmahls mit $y-1$ multiplicirt giebt

$$y-1=-yy+2y, \quad \text{folglich} \quad yy=y+1.$$

Hieraus findet man

$$y=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+1\right)}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{5}{4}} \quad \text{oder} \quad y=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

und dahero erhalten wir $x=\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$. Um hier die Irrationalität aus dem Nenner wegzubringen, so multiplicirt man oben und unten mit $\sqrt{5}+1$, so bekommt man $x=\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Antwort: Also ist die größere der gesuchten Zahlen $x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, und die kleinere $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ihre Summe ist also $x+y=2+\sqrt{5}$, ferner das Product $xy=2+\sqrt{5}$, und da $xx=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ und $yy=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ so wird die Differenz der Quadraten $xx-yy=2+\sqrt{5}$.

124.

Weil diese Auflösung ziemlich mühsam war, so kann dieselbe leichter gefunden werden; man setze erstlich die Summe $x+y$ der Differenz der

Quadraten $xx - yy$ gleich, so hat man $x + y = xx - yy$. Hier kann man durch $x + y$ dividiren weil $xx - yy = (x + y)(x - y)$, und da erhält man $1 = x - y$ woraus $x = y + 1$; dahero $x + y = 2y + 1$ und $xx - yy = 2y + 1$; und diesem muß noch gleich seyn das Product $xy = yy + y$. Man hat also $yy + y = 2y + 1$, oder $yy = y + 1$, woraus wie oben gefunden wird $y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

125.

V. Dieses leitet uns noch auf folgende Frage: Zwey Zahlen zu finden, deren Summe, Product und die Summe ihrer Quadraten einander gleich seyn?

Die gesuchten Zahlen seyen x und y, so müßen diese drey Formeln einander gleich seyn I.) $x + y$, II.) xy, und III.) $xx + yy$.

Setzt man die erste der zweyten gleich $x + y = xy$, so findet man daraus $x = \frac{y}{y - 1}$ und $x + y = \frac{yy}{y - 1}$, welchem auch xy gleich ist. Hieraus aber wird $xx + yy = \frac{yy}{yy - 2y + 1} + yy$, welches dem $\frac{yy}{y - 1}$ gleich zu setzen: Man multiplicire mit $yy - 2y + 1$ so bekommt man $y^4 - 2y^3 + 2yy = y^3 - yy$ oder $y^4 = 3y^3 - 3yy$, und durch yy dividirt $yy = 3y - 3$; dahero $y = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - 3\right)}$, also $y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2}$ dahero $y - 1 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}$, folglich $x = \frac{3 + \sqrt{-3}}{1 + \sqrt{-3}}$. Man multiplicire oben und unten mit $1 - \sqrt{-3}$, so wird $x = \frac{6 - 2\sqrt{-3}}{4}$ oder $x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2}$.

Antwort: also sind die beyden gesuchten Zahlen

$$x = \frac{3 - \sqrt{-3}}{2} \quad \text{und} \quad y = \frac{3 + \sqrt{-3}}{2},$$

ihre Summe ist $x + y = 3$, das Product $xy = 3$, und da endlich $xx = \frac{3 - 3\sqrt{-3}}{2}$ und $yy = \frac{3 + 3\sqrt{-3}}{2}$, so wird $xx + yy = 3$.

126.

Diese Rechnung kann durch einen besondern Vortheil nicht wenig erleichtert werden, welches noch in andern Fällen statt findet. Derselbe bestehet darin, daß man die gesuchte Zahlen nicht durch einzelne Buchstaben, sondern durch die Summe und Differenz zweyer andern ausdrückt.

Also bey der vorigen Aufgabe setze man die eine der gesuchten Zahlen gleich $p + q$ und die andere $p - q$, so wird die Summe derselben seyn $2p$, ihr Product $pp - qq$ und die Summe ihrer Quadraten $2pp + 2qq$ welche drey Stück einander gleich seyn müßen. Man setze das erste gleich dem zweyten so wird $2p = pp - qq$ und daraus $qq = pp - 2p$. Diesen Werth setze man im dritten für qq, so wird dasselbe $4pp - 4p$. Welches dem ersten gleich gesetzt giebt $2p = 4pp - 4p$. Man addire $4p$ so wird $6p = 4pp$, durch p dividirt $6 = 4p$ und also $p = \frac{3}{2}$.

Hieraus $qq = -\frac{3}{4}$ und $q = \frac{\sqrt{-3}}{2}$; folglich sind unsere gesuchten Zahlen $p + q = \frac{3+\sqrt{-3}}{2}$ und die andere $p - q = \frac{3-\sqrt{-3}}{2}$ welche wir auch vorher gefunden.

CAPITEL 9

VON DER NATUR DER QUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

127.

Aus dem vorhergehenden hat man zur Genüge ersehen, daß die Quadratische Gleichungen auf eine doppelte Art aufgelöst werden können, welche Eigenschaft allerdings verdienet in Erwegung gezogen zu werden, weil dadurch die Natur der höhern Gleichungen nicht wenig erläutert wird. Wir wollen dahero genauer untersuchen, woher es komme, daß eine jede Quadratische Gleichung zweyerley Auflösungen zulaße, weil darinn ohnstreitig eine sehr wesentliche Eigenschaft dieser Gleichungen enthalten ist.

128.

Man hat zwar schon gesehen, daß diese doppelte Auflösung daher rühret, weil die Quadrat-Wurzel aus einer jeglichen Zahl so wohl negativ als positiv gesetzt werden könne: allein dieser Grund würde sich nicht wohl auf höhere Gleichungen anwenden laßen, dahero wird es gut seyn den Grund davon noch auf eine andere Art deutlich vor Augen zu legen. Es ist demnach nöthig zu erklären woher es komme daß eine Quadratische Gleichung als z. E. $xx = 12x - 35$ auf eine doppelte Art aufgelöset werden, oder daß vor x zweyerley Werthe angezeiget werden können, welche beyde der Gleichung ein Genüge leisten, wie in diesem Exempel vor x so wohl 5 als 7 gesetzt werden kann, indem in beyden Fällen xx und $12x - 35$ einander gleich werden.

129.

Um den Grund hievon deutlicher darzulegen, so ist es dienlich alle Glieder der Gleichung auf eine Seite zu bringen, so daß auf der andern 0 zu stehen kommt. Dahero die obige Gleichung seyn wird $xx - 12x + 35 = 0$, wobey es darauf ankommt, daß eine solche Zahl gefunden werde, welche wann sie vor x gesetzt wird, die Formel $xx - 12x + 35$ würcklich in nichts verwandelt werde; und hernach muß auch die Ursach gezeigt werden warum solches auf zweyerley Art geschehen könne.

130.

Hier kommt nun alles darauf an, daß man deutlich zeige, daß eine solche Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden könne, wie dann diese Formel würcklich aus diesen zwey Factoren besteht $(x - 5) \cdot (x - 7)$. Wann dahero jene Formel soll 0 werden, so muß auch dieses Product $(x - 5) \cdot (x - 7) = 0$ seyn. Ein Product aber, aus so viel Factoren dasselbe auch immer bestehen mag, wird allezeit 0, wann nur einer von seinen Factoren 0 wird. Dann so groß auch das Product aus den übrigen Factoren seyn mag, wann dasselbe noch mit 0 multiplicirt wird, so kommt immer 0 heraus, welcher Grund-Satz für die höhern Gleichungen wohl zu bemercken ist.

131.

Hieraus begreift man nun gantz deutlich, daß dieses Product $(x - 5) \cdot (x - 7)$ auf eine doppelte Art 0 werden könne: einmahl nemlich wann der erste Factor $x - 5 = 0$ wird, und hernach auch, wann der andere Factor $x - 7 = 0$ wird. Das erstere geschiehet wann $x = 5$, das andere aber wann $x = 7$. Hieraus versteht man also den wahren Grund, warum eine solche Gleichung $xx - 12x + 35 = 0$ zweyerley Auflösungen zuläßt, oder für x zwey Werthe gefunden werden können, welche beyde der Gleichung ein Genügen leisten.

Der Grund besteht nemlich darinn, daß sich die Formel $xx - 12x + 35$ als ein Product aus zwey Factoren vorstellen läßt.

132.

Eben dieser Umstand findet bey allen Quadratischen Gleichungen statt. Dann wann alle Glieder auf eine Seite gebracht werden, so erhält man immer eine solche Formel $xx - ax + b = 0$; und diese Formel kann ebenfals als ein Product aus zwey Factoren angesehen werden, welche wir also vorstellen wollen $(x - p)(x - q)$ ohne uns darum zu bekümmern, was p und q vor Zahlen seyn mögen. Da nun unsere Gleichung erfordert, daß dieses Product gleich 0 werde, so ist offenbar, daß solches auf zweyerley Art geschehen könne: erstlich wann $x = p$, und zweytens wann $x = q$, welches die beyden Werthe für x sind, die der Gleichung ein Genüge leisten.

133.

Laßt uns nun sehen, wie diese zwey Factoren beschaffen seyn müßen, daß derselben Product just unsere Formel $xx - ax + b$ hervorbringe: man multiplicire demnach dieselben würcklich, so erhält man $xx - (p + q)\,x + pq$ welches, da es einerley seyn soll mit $xx - ax + b$, so ist klar daß seyn muß $p + q = a$ und $pq = b$, woraus wir diese herrliche Eigenschaft erkennen, daß von einer solchen Gleichung $xx - ax + b = 0$ die beyden Werthe für x also beschaffen sind, daß erstlich ihre Summe gleich sey der Zahl a und ihr Product der Zahl b. Dahero so bald man einen Werth erkennt, so ist auch leicht der andere zu finden.

134.

Dieses war der Fall, wann beyde Werthe für x Positiv sind, da dann in der Gleichung das zweyte Glied das Zeichen —, das dritte aber das Zeichen + hat. Wir wollen dahero auch die Fälle erwegen, worinnen einer von den beyden Werthen für x, oder auch alle beyde negativ werden. Jenes geschiehet wann die beyden Factoren der Gleichung also beschaffen sind: $(x - p)\,(x + q)$; woher diese zwey Werthe für x entspringen, erstlich $x = p$ und zweytens $x = -q$. Die Gleichung selbst aber ist alsdann $xx + (q - p)\,x - pq = 0$, wo das zweyte Glied das Zeichen + hat wann nemlich q größer ist als p; wäre aber q kleiner als p so hätte es das Zeichen —, das dritte Glied aber ist hier immer negativ.

Wären aber die beyden Factoren $(x + p)(x + q)$ so wären beyde Werthe für x negativ, nemlich $x = -p$ und $x = -q$ und die Gleichung selbst würde seyn $xx + (p + q)\,x + pq = 0$, wo sowohl das zweyte als das dritte Glied das Zeichen + haben.

135.

Hieraus erkennen wir nun die Beschaffenheit der Wurzeln einer jeglichen Quadratischen Gleichung aus dem Zeichen des zweyten und dritten Gliedes. Es sey die Gleichung $xx \cdots ax \cdots b = 0$; wann nun das zweyte und dritte Glied das Zeichen + haben, so sind beyde Werthe negativ; ist das zweyte Glied —, das dritte aber $+$, so sind beyde Werthe positiv; ist aber das dritte Glied negativ, so ist ein Werth positiv. Allezeit aber enthält das zweyte Glied die Summe der beyden Werthe, und das dritte ihr Product.

136.

Anjetzo ist es gantz leicht solche Quadratische Gleichungen zu machen, welche nach Belieben zwey gegebene Werthe in sich enthalten: man verlangt z. E. eine solche Gleichung, wo der eine Werth für x seyn soll 7, der andere aber -3. Man mache daraus diese einfache Gleichungen $x = 7$ und $x = -3$; hieraus ferner diese $x - 7 = 0$ und $x + 3 = 0$, welches die Factoren der verlangten Gleichung seyn werden; also daß die Gleichung seyn wird: $xx - 4x - 21 = 0$, woraus auch nach der obigen Regel eben diese beyde Werthe für x gefunden werden. Dann da $xx = 4x + 21$, so wird $x = 2 \pm \sqrt{25}$, also $x = 2 \pm 5$, also entweder $x = 7$ oder $x = -3$.

137.

Es kann auch geschehen, daß beyde Werthe für x einander gleich werden; man suche nemlich eine Gleichung wo beyde Werthe für x sind $x = 5$; die beyde Factoren werden also seyn $(x - 5)(x - 5)$ und die Gleichung ist also beschaffen $xx - 10x + 25 = 0$, welche scheinet nur einen Werth zu haben, weil auf eine doppelte Art wird $x = 5$, wie auch die gewöhnliche Auflösung zeigt. Dann da $xx = 10x - 25$, so wird $x = 5 \pm \sqrt{0}$, oder $x = 5 \pm 0$ und daher wird $x = 5$ und $x = 5$.

138.

Insonderheit ist hier noch zu mercken, daß bisweilen beyde Werthe für x imaginär oder unmöglich werden, in welchen Fällen es gantz und gar unmöglich ist, einen solchen Werth für x anzuzeigen welcher der Gleichung ein Genüge leistet, wie z. E. geschiehet, wann die Zahl 10 in zwey solchen Theile zertheilt werden soll, deren Product 30 sey: dann es sey ein Theil $= x$ so wird der andere seyn $10 - x$ und also ihr Product $10x - xx = 30$, folglich $xx = 10x - 30$ und $x = 5 \pm \sqrt{-5}$, welches eine imaginäre oder unmögliche Zahl ist und zu erkennen giebt, daß die Frage unmöglich sey.

139.

Es ist demnach sehr wichtig ein Kennzeichen auszufinden, woraus man sogleich erkennen kann, ob eine Quadratische Gleichung möglich sey oder nicht.

Es sey dahero diese allgemeine Gleichung gegeben:

$$xx - ax + b = 0, \quad \text{so wird} \quad xx = ax - b \quad \text{und} \quad x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}aa - b\right)};$$

woraus erhellet, daß wann die Zahl b größer ist als $\frac{1}{4}aa$, oder $4b$ größer als aa, die beyden Werthe unmöglich werden, weil man aus einer negativen Zahl die Quadrat-Wurzel ausziehen müßte. So lange aber hingegen b kleiner ist als $\frac{1}{4}aa$, oder auch gar kleiner als 0, das ist negativ, so sind die beyde Werthe immer möglich. Dieselben mögen inzwischen möglich seyn oder unmöglich, so können sie doch nach dieser Art allezeit ausgedrückt werden, und haben auch immer diese Eigenschaft, daß ihre Summe ist $= a$ und ihr Product $= b$, wie in diesem Exempel zu ersehen $xx - 6x + 10 = 0$, wo die Summe der beyden Werthe für x seyn muß $= 6$ und das Product $= 10$. Man findet aber diese beyden Werthe: I.) $x = 3 + \sqrt{-1}$ und II.) $x = 3 - \sqrt{-1}$, deren Summe $= 6$ und ihr Product $= 10$ ist.

140.

Man kann dieses Kennzeichen auf eine allgemeinere Art ausdrücken, daß es auch auf solche Gleichungen angewant werden kann $fxx \pm gx + h = 0$: dann hieraus hat man $xx = \mp \frac{gx}{f} - \frac{h}{f}$ dahero

$$x = \mp \frac{g}{2f} \pm \sqrt{\left(\frac{gg}{4ff} - \frac{h}{f}\right)}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{\mp g \pm \sqrt{(gg - 4fh)}}{2f},$$

woraus erhellet, daß beyde Werthe imaginär oder die Gleichung unmöglich werde, wann $4fh$ größer ist als gg, oder wann in dieser Gleichung $fxx \pm gx + h = 0$ das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied größer ist, als das Quadrat des zweyten Glieds. Dann das vierfache Product aus dem ersten und letzten Glied ist $4fhxx$, das Quadrat aber des mittlern Glieds ist $ggxx$: wann nun $4fhxx$ größer als $ggxx$, so ist auch $4fh$ größer als gg und also die Gleichung unmöglich; in allen übrigen Fällen aber ist die Gleichung möglich und die beyden Werthe für x können würcklich angegeben werden, wann dieselben gleich auch öfters irrational werden, in welchen Fällen man immer näher zu ihrem wahren Werth gelangen kann, wie oben bemercket worden; dahingegen bey imaginären Ausdrücken als $\sqrt{-5}$ auch keine Näherung statt findet, indem 100 davon eben so weit entfernt ist als 1 oder irgend eine andere Zahl.

141.

Hierbey ist noch zu erinnern, daß eine jegliche solche Formel vom zweyten Grad $xx \pm ax \pm b$ nothwendig allezeit in zwey solche Factores

$$(x \pm p)(x \pm q)$$

aufgelöst werden kann. Dann wann man drey solche Factoren nehmen wollte, so würde man zum dritten Grad kommen, und nur einer allein würde nicht zum zweyten Grad ansteigen. Dahero es eine ausgemachte Sache ist, daß eine jede Gleichung vom zweyten Grad nothwendig zwey Werthe für x in sich enthalte, und daß derselben weder mehr, noch weniger, seyn können.

142.

Man hat schon gesehen, daß wann diese beyden Factores gefunden worden, man daraus auch die beyden Werthe für x anzeigen kann; indem ein jeder Factor, wann er gleich 0 gesetzt wird, einen Werth für x angiebt. Dieses findet auch umgekehrt statt, daß so bald man einen Werth für x gefunden, daraus auch ein Factor der Quadratischen Gleichung erkannt werde. Dann wann $x = p$ ein Werth für x in einer Quadratischen Gleichung ist, so ist auch $x - p$ ein Factor derselben: oder die Gleichung, wann alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, läßt sich durch $x - p$ theilen, und der Quotient giebt den andern Factor.

143.

Um dieses zu erläutern so sey diese Gleichung gegeben:

$$xx + 4x - 21 = 0,$$

von welcher wir wißen, daß $x = 3$ ein Werth für x sey, indem

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 - 21 = 0$$

ist, und daher können wir sicher schließen, daß $x - 3$ ein Factor dieser Gleichung sey, oder daß sich $xx + 4x - 21$ durch $x - 3$ theilen laße, wie aus dieser Division zu ersehen

$$\begin{array}{rll} x - 3) & xx + 4x - 21 & (x + 7 \\ & \underline{xx - 3x} & \\ & \quad 7x - 21 & \\ & \quad \underline{7x - 21} & \\ & \qquad 0 & \end{array}$$

Also ist der andere Factor $x+7$ und unsere Gleichung wird durch dieses Product vorgestellt $(x-3)(x+7)=0$ woraus die beyden Werthe für x sogleich erhellen, da nemlich aus dem ersten Factor $x=3$ aus dem andern aber $x=-7$ wird.

CAPITEL 10

VON DER AUFLÖSUNG DER REINEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

144.

Eine reine Cubische Gleichung wird genennt wann der Cubus der unbekanten Zahl einer bekanten Zahl gleich gesetzt wird, also daß darinn weder das Quadrat der unbekanten Zahl, noch dieselbe selbst vorkommt.

Eine solche Gleichung ist $x^3=125$, oder auf eine allgemeine Art $x^3=a$, oder $x^3=\frac{a}{b}$.

145.

Wie nun aus einer solchen Gleichung der Werth von x gefunden werden soll, ist für sich offenbahr, indem man nur nöthig hat beyderseits die Cubic-Wurzel auszuziehen.

Also aus der Gleichung $x^3=125$ findet man $x=5$, und aus der Gleichung $x^3=a$ bekommt man $x=\sqrt[3]{a}$; aus $x^3=\frac{a}{b}$ aber hat man

$$x=\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad \text{oder} \quad x=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Wann man dahero nur gelernet hat die Cubic-Wurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen, so kann man auch solche Gleichungen auflösen.

146.

Solcher Gestalt erhält man aber nur einen Werth für x, da nun eine jegliche Quadratische Gleichung zwey Werthe hat, so hat man Grund zu vermuthen, daß eine Cubische Gleichung auch mehr als einen Werth haben müße, dahero wird es der Mühe werth seyn, diese Sache genauer zu untersuchen, und im Fall eine solche Gleichung mehr Werthe für x haben sollte, dieselben auch ausfündig zu machen.

147.

Wir wollen z. E. diese Gleichung betrachten $x^3 = 8$, woraus alle Zahlen gefunden werden sollen, deren Cubus gleich 8 sey, da nun eine solche Zahl ohnstreitig $x = 2$ ist, so muß nach dem vorigen Capitul die Formel $x^3 - 8 = 0$ sich nothwendig durch $x - 2$ theilen laßen; wir wollen also diese Theilung verrichten wie folget:

$$\begin{array}{rlll}
x-2) & x^3 - 8 & (xx + 2x + 4 \\
 & \underline{x^3 - 2xx} & \\
 & \quad 2xx - 8 & \\
 & \quad \underline{2xx - 4x} & \\
 & \qquad\quad 4x - 8 & \\
 & \qquad\quad \underline{4x - 8} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Also läßt sich unsere Gleichung $x^3 - 8 = 0$ durch diese Factores vorstellen

$$(x - 2)(xx + 2x + 4) = 0.$$

148.

Da nun die Frage ist was für eine Zahl für x angenommen werden müße, daß $x^3 = 8$ werde, oder daß $x^3 - 8 = 0$ werde, so ist klar, daß dieses geschehe, wann das gefundene Product gleich 0 werde; dasselbe wird aber 0, nicht nur wann der erste Factor $x - 2 = 0$ wird, woraus entspringt $x = 2$, sondern auch, wann der andere Factor $xx + 2x + 4 = 0$ werde. Man setze also $xx + 2x + 4 = 0$, so hat man $xx = -2x - 4$ und dahero wird

$$x = -1 \pm \sqrt{-3}.$$

149.

Außer dem Fall also $x = 2$ in welchem die Gleichung $x^3 = 8$ erfüllet wird, haben wir noch zwey andere Werthe für x, deren Cubi ebenfals 8 sind, und welche also beschaffen sind:

$$\text{I.)}\ x = -1 + \sqrt{-3} \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ x = -1 - \sqrt{-3}$$

welches außer Zweifel gesetzt wird, wann man die Cubi davon nimmt, wie folget:

$$\begin{array}{rcr}
-1+\sqrt{-3} & & -1-\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
1-\sqrt{-3} & & 1+\sqrt{-3} \\
\underline{-\sqrt{-3}-3} & & \underline{+\sqrt{-3}-3} \\
-2-2\sqrt{-3} & \text{Quadrat} & -2+2\sqrt{-3} \\
\underline{-1+\sqrt{-3}} & & \underline{-1-\sqrt{-3}} \\
2+2\sqrt{-3} & & 2-2\sqrt{-3} \\
\underline{-2\sqrt{-3}+6} & & \underline{+2\sqrt{-3}+6} \\
8 & \text{Cubus} & 8
\end{array}$$

Diese beyden Werthe sind zwar imaginär oder unmöglich, verdienen aber nichts desto weniger bemercket zu werden.

150.

Dieses findet auch insgemein statt für eine jegliche dergleiche Cubische Gleichung $x^3 = a$, wo außer dem Werth $x = \sqrt[3]{a}$ noch zwey andere ebenfals statt finden. Man setze um der Kürtze willen $\sqrt[3]{a} = c$ also daß $a = c^3$ und unsere Gleichung diese Form bekomme, $x^3 - c^3 = 0$, welche letztere sich durch $x - c$ theilen läßt, wie aus dieser Division zu sehen:

$$\begin{array}{lll}
x - c) & x^3 - c^3 & (xx + cx + cc \\
& \underline{x^3 - cxx} & \\
& \quad cxx - c^3 & \\
& \quad \underline{cxx - ccx} & \\
& \qquad ccx - c^3 & \\
& \qquad \underline{ccx - c^3} & \\
& \qquad\quad 0 &
\end{array}$$

dahero wird unsere Gleichung durch dieses Product vorgestellt

$$(x - c)(xx + cx + cc) = 0,$$

welches würcklich gleich 0 wird, nicht nur wann $x - c = 0$ oder $x = c$, sondern auch wann $xx + cx + cc = 0$, daraus aber wird $xx = -cx - cc$ und dahero

$$x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{cc}{4} - cc\right)} \quad \text{oder} \quad x = \frac{-c \pm \sqrt{-3cc}}{2}$$

das ist

$$x = \frac{-c \pm c\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \cdot c,$$

in welcher Formel noch zwey Werthe für x enthalten sind.

151.

Da nun c anstatt $\sqrt[3]{a}$ geschrieben worden, so ziehen wir daher diesen Schluß, daß von einer jeden Cubischen Gleichung von dieser Form $x^3 = a$ dreyerley Werthe für x gefunden werden können, welche also ausgedrückt werden:

$$\text{I.)}\ x = \sqrt[3]{a}, \quad \text{II.)}\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}, \quad \text{III.)}\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \cdot \sqrt[3]{a}$$

woraus erhellet, daß eine jegliche Cubic-Wurzel dreyerley Werthe habe, wovon zwar nur der erste möglich, die beyden andern aber unmöglich sind, welches deswegen hier wohl zu bemercken, weil wir schon oben gesehen, daß eine jede Quadratische zweyerley Werthe hat, und unten noch gezeigt werden wird, daß eine jede Wurzel vom vierten Grad vier verschiedene Werthe, vom fünften Grad fünf dergleichen und so weiter habe.

Bey gemeinen Rechnungen, wird zwar nur der erste von diesen 3 Werthen gebraucht, weil die beyden andern unmöglich sind, und darüber wollen wir noch einige Exempel beyfügen.

152.

I. Frage: Suche eine Zahl, daß derselben Quadrat mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt 432 hervorbringe?

Diese Zahl sey x, so muß xx mit $\frac{1}{4}x$ multiplicirt der Zahl 432 gleich werden: dahero wird $\frac{1}{4}x^3 = 432$ mit 4 multiplicirt wird $x^3 = 1728$ und die Cubic-Wurzel ausgezogen, giebt $x = 12$.

Antwort: die gesuchte Zahl ist 12 dann ihr Quadrat ist 144 mit ihrem $\frac{1}{4}$ multiplicirt, das ist 3, giebt 432.

153.

II. Frage: Suche eine Zahl, deren vierte Potestät durch ihre Hälfte dividirt und dazu $14\frac{1}{4}$ addirt, 100 werde?

Die Zahl sey x, so ist ihre vierte Potestät x^4, welche durch ihre Hälfte $\frac{1}{2}x$ dividirt, giebt $2x^3$, dazu $14\frac{1}{4}$ addirt soll 100 machen; also hat man

$2x^3 + 14\frac{1}{4} = 100$, wo $14\frac{1}{4}$ subtrahirt giebt $2x^3 = \frac{343}{4}$, durch 2 dividirt, wird $x^3 = \frac{343}{8}$ und die Cubic-Wurzel ausgezogen erhält man $x = \frac{7}{2}$.

154.

III. Frage: Einige Hauptleute liegen zu Felde, jeder hat unter sich dreymal so viel Reuter, und 20 mal so viel Fußgänger als der Hauptleute sind; und ein Reuter bekommt Monaths-Sold gleich so viel Gulden, ein Fußgänger aber halb so viel Gulden als der Hauptleute sind, und beträgt der monathliche Sold in allem 13000 Gulden. Wie viel sind es Hauptleute gewesen?

Es seyen x Hauptleute gewesen, so hat einer unter sich gehabt $3x$ Reuter und $20x$ Fußgänger. Also die Zahl aller Reuter war $3xx$ und der Fußgänger $20xx$. Da nun ein Reuter x Fl. bekommt, ein Fußknecht aber $\frac{1}{2}x$ Fl. so ist der monathliche Sold der Reuter $3x^3$ Fl. der Fußknechte aber $10x^3$ Fl. insgesammt also bekommen sie $13x^3$ Fl. so der Zahl 13000 gleich seyn muß: da also $13x^3 = 13000$ so wird $x^3 = 1000$ und $x = 10$.

So viel sind der Hauptleute gewesen.

155.

IV. Frage: Etliche Kaufleute machen eine Gesellschaft, und legt jeder 100 mal so viel ein als ihrer sind, schicken damit einen Factoren nach Venedig, der gewinnt je mit 100 Fl. zweymal so viel Fl. als ihrer sind, kommt wieder zurück, und der Gewinst beträgt 2662 Fl. Ist die Frage wie viel der Kaufleute sind?

Es seyen x Kaufleute gewesen, so hat jeder eingelegt $100x$ Fl. und das gantze Capital war $100xx$ Fl. Da nun mit 100 Fl. $2x$ Fl. gewonnen worden, so war der Gewinst $2x^3$ so der Zahl 2662 gleich seyn soll: also $2x^3 = 2662$, dahero $x^3 = 1331$ und folglich $x = 11$, so viel sind es Kaufleute gewesen.

156.

V. Frage: Eine Bäuerin vertauscht Käse gegen Hüner, giebt je 2 Käse für 3 Hüner: die Hüner legen Eyer, jede $\frac{1}{3}$ so viel als der Hüner sind, mit denselben geht sie auf den Marckt, giebt je 9 Eyer für so viel Pfennig als ein Huhn hat Eyer gelegt, löset 72 Pfennig: wie viel hat die Bäurin Käse vertauscht?

Die Zahl der Käse sey gewesen x, so sind dieselben gegen $\frac{3}{2}x$ Hüner vertauscht worden; da nun ein Huhn $\frac{1}{2}x$ Eyer legt, so ist die Zahl aller Eyer $\frac{3}{4}xx$. Nun werden 9 Eyer verkauft für $\frac{1}{2}x$ Pf. also wird in allem gelöst $\frac{1}{24}x^3$, so 72 gleich seyn muß: also daß $\frac{1}{24}x^3 = 72$ folglich $x^3 = 24\cdot 72 = 8\cdot 3\cdot 8\cdot 9$ oder $x^3 = 8\cdot 8\cdot 27$ folglich $x = 12$, und so viel Käse hat die Bäuerin gehabt, welche gegen 18 Hüner vertauscht worden.

CAPITEL 11

VON DER AUFLÖSUNG DER VOLLSTÄNDIGEN CUBISCHEN GLEICHUNGEN

157.

Eine vollständige Cubische Gleichung wird genennt, wann darinn außer dem Cubo der unbekanten Zahl, noch diese unbekante Zahl selbst und ihr Quadrat vorkommen, dahero die allgemeine Form solcher Gleichungen ist:

$$ax^3 \pm bx^2 \pm cx \pm d = 0$$

wann nemlich alle Glieder auf eine Seite sind gebracht worden. Wie nun aus einer solchen Gleichung die Werthe für x, welche auch die Wurzeln der Gleichung genennt werden, zu finden seyn, soll in diesem Capitel gezeigt werden; dann man kann hier schon zum voraus setzen, daß eine solche Gleichung, immer drey Wurzeln habe, weil dieses schon im vorigen Capitel von den reinen Gleichungen dieses Grads ist gezeiget worden.

158.

Wir wollen für den Anfang diese Gleichung betrachten:

$$x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0,$$

und da eine Quadratische Gleichung als ein Product aus zweyen Factoren angesehen werden kann, so kann man diese Cubische Gleichung als ein Product aus drey Factoren ansehen, welche in diesem Fall sind:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

als welche mit einander multiplicirt die obige Gleichung hervorbringen.

Dann $(x-1)\cdot(x-2)$ giebt $xx-3x+2$, und dieses noch mit $x-3$ multiplicirt giebt $x^3-6xx+11x-6$ welches die obige Form ist, so $=0$ seyn soll. Dieses geschiehet demnach, wann dieses Product $(x-1)(x-2)(x-3)$ nichts wird, welches eintrifft wann nur einer von den drey Factoren $=0$ wird, und also in drey Fällen erstlich wann $x-1=0$ oder $x=1$, zweytens wann $x-2=0$ oder $x=2$, und drittens wann $x-3=0$ oder $x=3$.

Man sieht auch so gleich, daß wann für x eine jegliche andere Zahl gesetzt wird, keiner von diesen drey Factoren 0 werde, und also auch nicht das Product. Dahero unsere Gleichung keine andern Wurzeln hat als diese 3.

159.

Könnte man in einem jeglichen andern Fall die drey Factores einer solchen Gleichung anzeigen, so hätte man so gleich die drey Wurzeln derselben. Wir wollen zu diesem Ende drey solche Factores auf eine allgemeine Art betrachten, welche seyn sollen $x-p$, $x-q$, $x-r$; man suche demnach ihr Product, und da der erste mit dem zweyten multiplicirt giebt

$$xx-(p+q)x+pq,$$

so giebt dieses Product noch mit $x-r$ multiplicirt folgende Formel

$$x^3-(p+q+r)xx+(pq+pr+qr)x-pqr.$$

Soll nun diese Formel gleich 0 seyn, so geschieht dieses in drey Fällen; erstlich wann $x-p=0$ oder $x=p$, zweytens wann $x-q=0$ oder $x=q$ und drittens wann $x-r=0$ oder $x=r$.

160.

Es sey nun diese Gleichung folgender Gestalt ausgedrückt

$$x^3-axx+bx-c=0,$$

und wann die Wurzeln derselben sind

$$\text{I.)}\ x=p,\qquad \text{II.)}\ x=q,\qquad \text{III.)}\ x=r,$$

so muß seyn erstlich $a=p+q+r$, und hernach zweytens $b=pq+pr+qr$ und drittens $c=pqr$, woraus wir sehen, daß das zweyte Glied die Summe der drey Wurzeln enthält, das dritte Glied die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln und endlich das letzte Glied das Product aus allen drey Wurzeln mit einander multiplicirt.

Diese letzte Eigenschaft verschaft uns so gleich diesen wichtigen Vortheil, daß eine Cubische Gleichung gewiß keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, wodurch sich das letzte Glied theilen läßt: dann da dasselbe das Product aller drey Wurzeln ist, so muß es sich auch durch eine jede derselben theilen laßen. Man weis dahero so gleich, wann man eine Wurzel nur errathen will, mit was für Zahlen man die Probe anstellen soll.

Dieses zu erläutern wollen wir diese Gleichung betrachten $x^3 = x + 6$, oder $x^3 - x - 6 = 0$. Da nun dieselbe keine andere Rational-Wurzeln haben kann, als solche, dadurch sich das letzte Glied 6 theilen läßt, so hat man nur nöthig mit diesen Zahlen die Probe anzustellen 1, 2, 3, 6, welche Proben also zu stehen kommen:

I.) wann $x = 1$ so kommt $1 - 1 - 6 = -6$.
II.) wann $x = 2$ so kommt $8 - 2 - 6 = 0$.
III.) wann $x = 3$ so kommt $27 - 3 - 6 = 18$.
IV.) wann $x = 6$ so kommt $216 - 6 - 6 = 204$.[1])

Hieraus sehen wir, daß $x = 2$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung ist, aus welcher es nun leicht ist, die beyden übrigen zu finden. Dann da $x = 2$ eine Wurzel ist, so ist $x - 2$ ein Factor der Gleichung, man darf also nur den andern suchen, welches durch folgende Division geschiehet

$$\begin{array}{r|l} x-2) & x^3 - x - 6 \ (xx + 2x + 3 \\ & \underline{x^3 - 2xx \quad\quad\quad} \\ & 2xx - x - 6 \\ & \underline{2xx - 4x \quad\ \ } \\ & 3x - 6 \\ & \underline{3x - 6} \\ & 0 \end{array}$$

Da nun unsere Formel durch dieses Product vorgestellet wird

$$(x-2)(xx + 2x + 3)$$

1) Euler erwähnt hier nicht, daß die Probe auch noch mit den entgegengesetzten Werten angestellt werden müßte (vergleiche § 197). H. W.

so wird dieselbe 0, nicht nur wann $x - 2 = 0$, sondern auch wann

$$xx + 2x + 3 = 0.$$

Hieraus aber bekommen wir $xx = -2x - 3$ und daher $x = -1 \pm \sqrt{-2}$, welches die beyden andern Wurzeln unserer Gleichung sind, die wie man sieht unmöglich oder imaginär sind.

161.

Dieses findet aber nur statt, wann das erste Glied der Gleichung x^3 mit 1, die übrigen aber mit ganzen Zahlen multiplicirt sind. Wann aber darinn Brüche vorkommen, so hat man ein Mittel die Gleichung in eine andere zu verwandeln, welche von Brüchen befreyet ist, da dann die vorige Probe kann angestellet werden.

Dann es sey diese Gleichung gegeben $x^3 - 3xx + \frac{11}{4}x - \frac{3}{4} = 0$; weil hier nun Viertel vorkommen, so setze man $x = \frac{y}{2}$, da bekommt man

$$\frac{y^3}{8} - \frac{3yy}{4} + \frac{11y}{8} - \frac{3}{4} = 0,$$

welche mit 8 multiplicirt giebt $y^3 - 6yy + 11y - 6 = 0$, wovon die Wurzeln sind wie wir oben gesehen $y = 1$, $y = 2$, $y = 3$, dahero ist für unsere Gleichung

$$\text{I.)}\ x = \frac{1}{2}, \quad \text{II.)}\ x = 1, \quad \text{III.)}\ x = \frac{3}{2}.$$

162.

Wann nun das erste Glied mit einer Zahl multiplicirt, das letzte aber 1 ist, als wie in dieser Gleichung $6x^3 - 11xx + 6x - 1 = 0$, woraus durch 6 dividirt diese entspringt $x^3 - \frac{11}{6}xx + x - \frac{1}{6} = 0$, welche nach obiger Regel von den Brüchen befreyet werden könnte, indem man setzt $x = \frac{y}{6}$; dann da erhält man $\frac{y^3}{216} - \frac{11yy}{216} + \frac{y}{6} - \frac{1}{6} = 0$, und diese mit 216 multiplicirt wird $y^3 - 11yy + 36y - 36 = 0$. Hier würde es mühsam seyn die Probe mit allen Theilern der Zahl 36 anzustellen; weil aber in unserer erstern Gleichung das letzte Glied 1 ist, so setze man $x = \frac{1}{z}$ so wird $\frac{6}{z^3} - \frac{11}{z^2} + \frac{6}{z} - 1 = 0$ welche mit z^3 multiplicirt giebt $6 - 11z + 6z^2 - z^3 = 0$ und alle Glieder auf die andere Seite gebracht $z^3 - 6zz + 11z - 6 = 0$, deren Wurzeln sind $z = 1$, $z = 2$, $z = 3$; dahero wir für unsere Gleichung erhalten $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$.

163.

Aus dem obigen erkennt man, daß wann alle Wurzeln positive Zahlen sind, in der Gleichung die Zeichen *plus* und *minus* mit einander abwechseln müssen, allso daß die Gleichung eine solche Gestalt bekommt: $x^3 - axx + bx - c = 0$, wo drey Abwechselungen vorkommen, nemlich eben so viel als positive Wurzeln vorhanden. Wären aber alle drey Wurzeln negativ gewesen und man hätte diese drey Factores mit einander multiplicirt $x + p$, $x + q$, $x + r$ so würden alle Glieder das Zeichen *plus*, und die Gleichung diese Form bekommen haben $x^3 + axx + bx + c = 0$, wo dreymal zwey gleiche Zeichen auf einander folgen, das ist, eben so viel als negative Wurzeln sind.

Hieraus hat man nun den Schluß gezogen, daß so oft die Zeichen abwechseln, die Gleichung auch so viel positive Wurzeln, so oft aber gleiche Zeichen auf einander folgen, dieselbe eben so viel negative Wurzeln habe, welche Anmerckung allhier von großer Wichtigkeit ist, damit man wiße ob man die Theiler des letzten Glieds, damit man die Probe anstellen will, negativ oder positiv nehmen soll.[1])

164.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so wollen wir diese Gleichung betrachten:

$$x^3 + xx - 34x + 56 = 0,$$

in welcher zwey Abwechselungen der Zeichen und nur eine Folge eben desselben Zeichens vorkommt, woraus wir schliessen daß diese Gleichung zwey positive und eine negative Wurzel habe, welche Theiler seyn müßen des letzten Glieds 56 und also unter diesen Zahlen $\pm 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56$ begriffen sind.

Setzt man nun $x = 2$ so wird $8 + 4 - 68 + 56 = 0$, woraus wir sehen daß $x = 2$ eine Positive Wurzel, und also $x - 2$ ein Theiler unserer Gleichung sey, woraus die beyden übrigen Wurzeln leicht gefunden werden können, wann man nur die Gleichung durch $x - 2$ theilet wie folget

1) Diese Behauptung ist hiermit nicht vollständig bewiesen und nur richtig unter der Voraussetzung, daß keine imaginären Wurzeln vorhanden sind. H. W.

$$\begin{array}{l|l|l}
x-2) & x^3 + xx - 34x + 56 & (xx + 3x - 28 \\
 & \underline{x^3 - 2xx} & \\
 & \quad 3xx - 34x + 56 & \\
 & \quad \underline{3xx - \;\; 6x} & \\
 & \qquad - 28x + 56 & \\
 & \qquad \underline{- 28x + 56} & \\
 & \qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Man setze also diesen Quotienten $xx + 3x - 28 = 0$ so wird man daraus die beyden übrigen Wurzeln finden, welche seyn werden $x = -\frac{3}{2} \pm \frac{11}{2}$, dahero die beyden übrigen Wurzeln sind $x = 4$ und $x = -7$ wozu die obige $x = 2$ zu nehmen.

Woraus erhellet daß würcklich zwey positive und nur eine negative Wurzel vorhanden; dieses wollen wir noch durch folgende Exempel erläutern.

165.

I. Frage: Es sind zwey Zahlen, ihre Differenz ist 12, wann man ihr Product mit ihrer Summe multiplicirt, so kommen 14560, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere sey x so ist die größere $x + 12$, ihr Product ist $xx + 12x$ so mit ihrer Summe $2x + 12$ multiplicirt giebt $2x^3 + 36xx + 144x = 14560$ durch 2 dividirt wird $x^3 + 18xx + 72x = 7280$.

Weil nun das letzte Glied 7280 allzu groß ist als daß die Probe mit allen seinen Theilern könnte angestellet werden, dasselbe aber durch 8 theilbar ist, so setze man $x = 2y$ da dann kommt: $8y^3 + 72yy + 144y = 7280$ welche Gleichung durch 8 dividirt wird $y^3 + 9yy + 18y = 910$, und jetzo darf man nur mit den Theilern der Zahl 910 probiren welche sind 1, 2, 5, 7, 10, 13 etc. nun aber sind die ersten 1, 2, 5 offenbahr zu klein, nimmt man aber $y = 7$ so bekommt man $343 + 441 + 126$ just $= 910$; also ist eine Wurzel $y = 7$, folglich $x = 14$; will man noch die beyden übrigen Wurzeln von y wißen so dividire man $y^3 + 9yy + 18y - 910$ durch $y - 7$ wie folget:

$$\begin{array}{rl}
y-7) & y^3+9yy+18y-910 \quad (yy+16y+130 \\
& \underline{y^3-7yy} \\
& \quad 16yy+18y-910 \\
& \quad \underline{16yy-112y} \\
& \qquad 130y-910 \\
& \qquad \underline{130y-910} \\
& \qquad\qquad 0
\end{array}$$

Setzt man nun diesen Quotient $yy+16y+130=0$, so bekommt man $yy=-16y-130$ und daher $y=-8\pm\sqrt{-66}$, also sind die beyden andern Wurzeln unmöglich.

Antwort: die beyden gesuchten Zahlen sind demnach 14 und 26, deren Product 364 mit ihrer Summe 40 multiplicirt giebt 14560.

166.

II. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 18, wann man die Differenz ihrer Cuborum mit der Summe der Zahlen multiplicirt, daß 275184 heraus komme, welche sind diese Zahlen?

Die kleinere Zahl sey x, so ist die größere $x+18$, der Cubus der kleinern aber x^3 und der Cubus der größern $=x^3+54xx+972x+5832$, also die Differenz derselben $54xx+972x+5832=54(xx+18x+108)$ welche mit der Summe der Zahlen $2x+18=2(x+9)$ multiplicirt werden soll; das Product ist aber $108(x^3+27xx+270x+972)=275184$; man dividire durch 108 so kommt $x^3+27xx+270x+972=2548$ oder $x^3+27xx+270x=1576$. Die Theiler der Zahl 1576 sind 1, 2, 4, 8 etc. wo 1 und 2 zu klein, 4 aber für x gesetzt dieser Gleichung ein Genüge leistet; wollte man die beyden übrigen Wurzeln finden, so müßte man die Gleichung durch $x-4$ theilen wie folget:

$$\begin{array}{rl}
x-4) & x^3+27xx+270x-1576 \quad (xx+31x+394 \\
& \underline{x^3-4xx} \\
& \quad 31xx+270x \\
& \quad \underline{31xx-124x} \\
& \qquad 394x-1576 \\
& \qquad \underline{394x-1576} \\
& \qquad\qquad 0
\end{array}$$

Aus dem Quotienten erhält man dahero $xx = -31x - 394$ und daraus wird $x = -\frac{31}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{961}{4} - \frac{1576}{4}\right)}$ welche beyde Wurzeln imaginär oder unmöglich sind.

Antwort: also sind die gesuchten Zahlen 4 und 22.

167.

III. Frage: Suche zwey Zahlen deren Differenz 720; so ich die Quadrat-Wurzel der größern Zahl multiplicire mit der kleinern Zahl so kommt 20736. Welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere $= x$ so ist die größere $x + 720$ und soll seyn

$$x\sqrt{(x + 720)} = 20736 = 8 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 81.$$

Nun nehme man beyderseits die Quadrate so wird

$$xx(x + 720) = x^3 + 720xx = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$$

man setze $x = 8y$, so wird $8^3y^3 + 720 \cdot 8^2y^2 = 8^2 \cdot 8^2 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, durch 8^3 dividirt wird $y^3 + 90y^2 = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$; es sey nun $y = 2z$, so wird $8z^3 + 4 \cdot 90zz = 8 \cdot 4^2 \cdot 81^2$, durch 8 dividirt wird $z^3 + 45zz = 4^2 \cdot 81^2$. Man setze ferner $z = 9u$, so wird $9^3u^3 + 45 \cdot 9^2uu = 4^2 \cdot 9^4$, durch 9^3 dividirt wird $u^3 + 5uu = 4^2 \cdot 9$ oder $uu(u + 5) = 16 \cdot 9 = 144$. Hier sieht man offenbahr, daß $u = 4$: dann da wird $uu = 16$ und $u + 5 = 9$; da nun $u = 4$ so ist $z = 36$, $y = 72$ und $x = 576$, welches die kleinere Zahl war, die größere aber 1296, wovon die Quadrat-Wurzel 36 welche mit der kleineren Zahl 576 multiplicirt giebt 20736.

168.

Anmerckung: Diese Frage kann bequemer folgender Gestalt aufgelöset werden: weil die größere Zahl ein Quadrat seyn muß indem sonst ihre Wurzel mit der kleinern multiplicirt nicht die vorgegebene Zahl hervorbringen könnte, so sey die größere Zahl xx, die kleinere also $xx - 720$ welche mit der Quadrat-Wurzel jener, das ist mit x multiplicirt, giebt $x^3 - 720x = 20736 = 64 \cdot 27 \cdot 12$; man setze $x = 4y$ so wird $64y^3 - 720 \cdot 4y = 64 \cdot 27 \cdot 12$, durch 64 dividirt wird $y^3 - 45y = 27 \cdot 12$; man setze ferner $y = 3z$, so wird $27z^3 - 135z = 27 \cdot 12$, durch 27 dividirt wird $z^3 - 5z = 12$ oder $z^3 - 5z - 12 = 0$.

Die Theiler von 12 sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, davon sind 1 und 2 zu klein, setzt man aber $z = 3$ so kommt $27 - 15 - 12 = 0$; dahero ist $z = 3$, $y = 9$ und $x = 36$; dahero ist die größere Zahl $xx = 1296$ und die kleinere $xx - 720 = 576$ wie oben.

169.

IV. Frage: Es sind 2 Zahlen, deren Differenz 12 ist. So man nun diese Differenz multiplicirt mit der Summe ihrer Cuborum, so kommen 102144: welche Zahlen sind es?

Es sey die kleinere x so ist die größere $x+12$, der Cubus der ersteren ist x^3, der andern aber $x^3+36xx+432x+1728$, die Summe derselben mit 12 multiplicirt giebt

$$12\,(2x^3+36xx+432x+1728)=102144;$$

durch 12 dividirt wird $2x^3+36xx+432x+1728=8512$, durch 2 dividirt giebt $x^3+18xx+216x+864=4256$ oder $x^3+18xx+216x=3392=8\cdot 8\cdot 53$. Man setze $x=2y$ und dividire sogleich durch 8 so wird $y^3+9yy+54y=8\cdot 53=424$.

Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, 8, 53, etc. wovon 1 und 2 zu klein sind; setzt man aber $y=4$ so kommt $64+144+216=424$. Also ist $y=4$ und $x=8$; dahero sind die beyden Zahlen 8 und 20.

170.

V. Frage: Etliche machen eine Gesellschaft, davon jeder zehnmal so viel Fl. einlegt, als der Personen sind, gewinnen je mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind. Nun findet sich daß der Gewinst zusammen betrage 392 Fl. wie viel sind der Gesellen gewesen?

Man setze es seyen x Gesellen gewesen, so legt einer $10x$ Fl. ein, alle aber legen $10xx$ Fl. ein und gewinnen mit 100 Fl. 6 Fl. mehr als ihrer sind; also mit 100 Fl. gewinnen sie $x+6$ Fl. und mit dem gantzen Capital gewinnen sie $\frac{x^3+6xx}{10}=392$. Mit 10 multiplicirt kommt $x^3+6xx=3920$. Setzt man nun $x=2y$, so erhält man $8y^3+24yy=3920$, welches durch 8 dividirt giebt $y^3+3yy=490$. Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 5, 7, 10, etc. wovon 1, 2 und 5 zu klein sind. Setzt man aber $y=7$ so kommt $343+147=490$ also ist $y=7$ und $x=14$.

Antwort: Es sind 14 Gesellen gewesen, und hat ein jeder 140 Fl. eingelegt.

171.

VI. Frage: Einige Kaufleute haben zusammen ein Capital von 8240 Rthl. dazu legt ein jeder noch 40mal so viel Rthl. als der Gesellen sind. Mit dieser gantzen Summe gewinnen sie so viel Pr. C. als der Gesellen sind; hierauf theilen sie den Gewinnst und da findet es sich, daß nachdem ein jeder zehn mal so viel Rthl. genommen hat als der Gesellen sind, so bleiben noch 224 Rthl. übrig. Wie viel sind es Gesellen gewesen?

Die Zahl der Gesellen sey $= x$ so legt ein jeder noch $40x$ Rthl. zu dem Capital von 8240 Rthl. alle zusammen legen also dazu noch $40xx$ Rthl. also war die gantze Summe $40xx + 8240$, mit dieser gewinnen sie von 100 x Rthl. dahero wird der gantze Gewinnst seyn: $\frac{40x^3}{100} + \frac{8240x}{100} = \frac{4}{10}x^3 + \frac{824}{10}x = \frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x$. Hiervon nimmt nun ein jeder $10x$ Rthl. und also alle zusammen $10xx$ Rthl. und da bleiben noch 224 Rthl. übrig, woraus erhellet daß der Gewinnst gewesen sey: $10xx + 224$ woraus diese Gleichung entsteht $\frac{2}{5}x^3 + \frac{412}{5}x = 10xx + 224$ welche mit 5 multiplicirt und durch 2 dividirt wird

$$x^3 + 206x = 25xx + 560 \quad \text{oder} \quad x^3 - 25xx + 206x - 560 = 0.$$

Doch um zu probiren wird die erste Form bequemer seyn; da nun die Theiler des letzten Glieds sind: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 14, 16, etc. welche Positiv genommen werden müßen, weil in der letztern Gleichung drey Abwechselungen von Zeichen vorkommen, woraus man sicher schließen kann, daß alle drey Wurzeln positiv sind. Probirt man nun mit $x = 1$ oder $x = 2$ so ist offenbahr, daß der erste Theil viel kleiner werde als der zweyte. Wir wollen also mit den folgenden probiren: wann $x = 4$, so wird $64 + 824 = 400 + 560$ trift nicht zu; wann $x = 5$, so wird $125 + 1030 = 625 + 560$ trift nicht zu; wann $x = 7$, so wird $343 + 1442 = 1225 + 560$ trift zu: dahero ist $x = 7$ eine Wurzel unserer Gleichung. Um die beyden andern zu finden, so theile man die letzte Form durch $x - 7$ wie folget:

$$\begin{array}{rl}
x - 7) & x^3 - 25xx + 206x - 560 \quad (xx - 18x + 80 \\
& \underline{x^3 - 7xx} \\
& - 18xx + 206x \\
& \underline{- 18xx + 126x} \\
& 80x - 560 \\
& \underline{80x - 560} \\
& 0
\end{array}$$

Man setze also den Quotienten gleich 0, so hat man

$$xx - 18x + 80 = 0 \quad \text{oder} \quad xx = 18x - 80$$

dahero $x = 9 \pm 1$, also sind die beyden andern Wurzeln $x = 8$ und $x = 10$.

Antwort: auf diese Frage finden also drey Antworten statt: nach der ersten war die Zahl der Kaufleute 7, nach der zweyten war dieselbe 8, nach der dritten 10, wie von allen die hier beigefügte Probe anzeigt

	I.	II.	III.
Die Zahl der Kaufleute	7	8	10
Ein jeder legt ein $40x$	280	320	400
also alle zusammen legen ein $40xx$	1960	2560	4000
das alte Capital war	8240	8240	8240
das gantze Capital ist $40xx + 8240$	10200	10800	12240
mit demselben wird gewonnen so viel Pr. C. als der Gesellen sind	714	864	1224
davon nimmt ein jeder weg $10x$	70	80	100
also alle zusammen $10xx$	490	640	1000
bleibt also noch übrig	224	224	224

CAPITEL 12

VON DER REGEL DES CARDANI ODER DES SCIPIONIS FERREI

172.

Wann eine Cubische Gleichung auf gantze Zahlen gebracht wird, wie oben gewiesen worden, und kein Theiler des letzten Glieds eine Wurzel der Gleichung ist, so ist dieses ein sicheres Zeichen, daß die Gleichung keine Wurzel in gantzen Zahlen habe, in Brüchen aber auch keine statt finde, welches also gezeiget wird:

Es sey die Gleichung $x^3 - axx + bx - c = 0$ wo a, b und c gantze Zahlen sind, dann wollte man z. E. setzen $x = \frac{3}{2}$ so kommt $\frac{27}{8} - \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b - c$, hier hat nun das erste Glied allein 8 zum Nenner. Die übrigen sind nur durch 4 und 2 getheilt oder gantze Zahlen, welche also mit dem ersten nicht können 0 werden, und dieses gilt auch von allen andern Brüchen.

173.

Da nun in diesen Fällen die Wurzeln der Gleichung weder gantze Zahlen noch Brüche sind, so sind dieselben Irrational und auch so gar öfters imaginär. Wie nun dieselben ausgedrückt werden sollen, und was darihn für Wurzel-

Zeichen vorkommen, ist eine Sache von großer Wichtigkeit, wovon die Erfindung schon vor einigen 100 Jahren dem CARDANO oder viel mehr dem SCIPIONI FERREO zugeschrieben worden, welche deswegen verdient, hier mit allem Fleiß erklärt zu werden.

174.

Man muß zu diesem Ende die Natur eines Cubi, deßen Wurzel ein Binomium ist, genauer in Erwegung ziehen:

Es sey demnach die Wurzel $a+b$, so ist der Cubus davon $a^3+3aab+3abb+b^3$ welche erstlich aus dem Cubo eines jeden Theils besteht und außer denselben noch die zwey Mittel-Glieder enthält, nemlich $3aab+3abb$, welche beyde $3ab$ zum Factor haben, der andere Factor aber ist $a+b$. Dann $3ab$ mit $a+b$ multiplicirt giebt $3aab+3abb$. Diese zwey Glieder enthalten also das dreyfache Product der beyden Theile a und b mit ihrer Summe multiplicirt.

175.

Man setze nun es sey $x=a+b$ und nehme beyderseits die Cubi, so wird $x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$. Da nun $a+b=x$ ist, so hat man diese Cubische Gleichung $x^3=a^3+b^3+3abx$ oder $x^3=3abx+a^3+b^3$ von welcher wir wißen, daß eine Wurzel sey $x=a+b$. So oft demnach eine solche Gleichung vorkommt so können wir eine Wurzel davon anzeigen.

Es sey z. E. $a=2$ und $b=3$ so bekommt man diese Gleichung $x^3=18x+35$ von welcher wir gewis wißen, daß $x=5$ eine Wurzel ist.

176.

Man setze nun ferner $a^3=p$ und $b^3=q$, so wird $a=\sqrt[3]{p}$ und $b=\sqrt[3]{q}$, folglich $ab=\sqrt[3]{pq}$; wann dahero diese Cubische Gleichung vorkommt

$$x^3=3x\sqrt[3]{pq}+p+q$$

so ist eine Wurzel davon $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$.

Man kann aber p und q immer dergestalt bestimmen, daß so wohl $3\sqrt[3]{pq}$ als $p+q$ einer jeden gegebenen Zahl gleich werde, wodurch man im Stand gesetzt wird, eine jede Cubische Gleichung von dieser Art aufzulösen.

177.

Es sey dahero diese allgemeine Cubische Gleichung vorgegeben $x^3 = fx + g$. Hier muß also f verglichen werden mit $3\sqrt[3]{pq}$, und g mit $p + q$; oder man muß p und q so bestimmen, daß $3\sqrt[3]{pq}$ der Zahl f, und $p + q$ der Zahl g gleich werde, und alsdann wißen wir, daß eine Wurzel unserer Gleichung seyn werde $x = \sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q}$.

178.

Man hat also diese zwey Gleichungen aufzulösen

$$\text{I.)}\ 3\sqrt[3]{pq} = f \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ p + q = g.$$

Aus der ersten hat man $\sqrt[3]{pq} = \frac{f}{3}$ und $pq = \frac{f^3}{27} = \frac{1}{27}f^3$ und $4pq = \frac{4}{27}f^3$; die andere Gleichung quadrire man, so kommt $pp + 2pq + qq = gg$; davon subtrahire man $4pq = \frac{4}{27}f^3$, so wird $pp - 2pq + qq = gg - \frac{4}{27}f^3$ woraus die Quadrat-Wurzel gezogen giebt $p - q = \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$. Da nun $p + q = g$, so wird $2p = g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$ und $2q = g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}$ dahero erhalten wir

$$p = \frac{g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2} \quad \text{und} \quad q = \frac{g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}.$$

179.

Wann also eine solche Cubische Gleichung vorkommt $x^3 = fx + g$, die Zahlen f und g mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so ist eine Wurzel derselben allezeit

$$x = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}};$$

woraus erhellet daß diese Irrationalität nicht nur das Quadrat-Wurzel-Zeichen sondern auch das Cubische in sich faße, und diese Formel ist dasjenige was die Regel des Cardani genennt zu werden pflegt.

180.

Wir wollen dieselbe mit einigen Exempeln erläutern.

Es sey $x^3 = 6x + 9$ so ist hier $f = 6$ und $g = 9$, allso $gg = 81$, $f^3 = 216$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$. Dahero $gg - \frac{4}{27}f^3 = 49$ und $\sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)} = 7$; dahero wird von der vorgegebenen Gleichung eine Wurzel seyn $x = \sqrt[3]{\frac{9+7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9-7}{2}}$, das ist $x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$ oder $x = 2 + 1 = 3$. Allso ist $x = 3$ eine Wurzel der vorgegebenen Gleichung.

181.

Es sey ferner gegeben diese Gleichung $x^3 = 3x + 2$, so wird $f = 3$ und $g = 2$, allso $gg = 4$, $f^3 = 27$ und $\frac{4}{27}f^3 = 4$; folglich die Quadrat-Wurzel aus $gg - \frac{4}{27}f^3 = 0$; dahero eine Wurzel seyn wird

$$x = \sqrt[3]{\frac{2+0}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2-0}{2}} = 1 + 1 = 2.$$

182.

Wann aber gleich eine solche Gleichung eine rationale Wurzel hat, so geschieht es doch öfters, daß dieselbe durch diese Regel nicht gefunden wird ob sie gleich darinnen steckt.

Es sey gegeben diese Gleichung $x^3 = 6x + 40$, wo $x = 4$ eine Wurzel ist. Hier ist nun $f = 6$ und $g = 40$ ferner $gg = 1600$ und $\frac{4}{27}f^3 = 32$, also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 1568$ und $\sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)} = \sqrt{1568} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 49 \cdot 2} = 28\sqrt{2}$; folglich ist eine Wurzel

$$x = \sqrt[3]{\frac{40 + 28\sqrt{2}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{40 - 28\sqrt{2}}{2}} \quad \text{oder} \quad x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})}$$

welche Formel würcklich 4 ist, ohngeacht solches nicht sogleich daraus erhellet.

Dann da der Cubus von $2 + \sqrt{2}$ ist $20 + 14\sqrt{2}$, so ist umgekehrt die Cubic-Wurzel aus $20 + 14\sqrt{2}$ gleich $2 + \sqrt{2}$, und eben so auch

$$\sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 - \sqrt{2},$$

hieraus wird unsere Wurzel $x = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

183.

Man kann gegen diese Regel einwenden, daß dieselbe sich nicht auf alle Cubische Gleichungen erstrecke, weil darinnen nicht das Quadrat von x vorkommt, oder weil darin das zweyte Glied fehlt. Es ist aber zu mercken, daß eine jede vollständige Gleichung allezeit in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das zweyte Glied fehlt, und worauf folglich diese Regel angewandt werden kann. Um dieses zu zeigen, so sey diese vollständige Cubische Gleichung vorgegeben $x^3 - 6xx + 11x - 6 = 0$. Da nehme man nun den dritten Theil der Zahl 6 im andern Glied und setze $x - 2 = y$; so wird $x = y + 2$, und die übrige Rechnung wie folget:

da $x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$ und $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, so ist

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & \quad\;\; - 6yy - 24y - 24 \\ +11x = & \qquad\qquad\;\; + 11y + 22 \\ -6 = & \qquad\qquad\qquad\quad - 6 \\ \hline x^3 - 6xx + 11x - 6 = & y^3 \qquad\quad - y. \end{array}$$

Dahero erhalten wir diese Gleichung $y^3 - y = 0$ deren Auflösung so gleich in die Augen fällt: dann nach den Factoren hat man

$$y(yy - 1) = y(y + 1)(y - 1) = 0;$$

setzt man nun einen jeden Factor gleich 0 so bekommt man:

$$\text{I. } \begin{cases} y = 0, \\ x = 2, \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} y = -1, \\ x = \;\;\, 1, \end{cases} \quad \text{III. } \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

welches die drey schon oben [§ 158] gefundenen Wurzeln sind.

184.

Es sey nun diese allgemeine Cubische Gleichung gegeben:

$$x^3 + axx + bx + c = 0$$

aus welcher das zweyte Glied weggebracht werden soll.

Zu diesem Ende setze man zu x den dritten Theil der Zahl des zweyten Glieds mit ihrem Zeichen und schreibe dafür einen neuen Buchstaben z. E. y, dieser Regel zufolge werden wir haben $x + \frac{1}{3}a = y$ und also $x = y - \frac{1}{3}a$ woraus die folgende Rechnung entsteht:

$x = y - \frac{1}{3}a$, $xx = yy - \frac{2}{3}ay + \frac{1}{9}aa$ ferner $x^3 = y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3$; also

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 - ayy + \frac{1}{3}aay - \frac{1}{27}a^3 \\ axx = & \quad + ayy - \frac{2}{3}aay + \frac{1}{9}a^3 \\ bx = & \qquad\qquad + by \quad - \frac{1}{3}ab \\ c = & \qquad\qquad\qquad\quad + c \\ \hline & y^3 - \left(\frac{1}{3}aa - b\right)y + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c = 0 \end{array}$$

in welcher Gleichung das zweyte Glied fehlt.

185.

Nun kann man auch des CARDANI Regel leicht auf diesen Fall anwenden. Dann da wir oben die Gleichung hatten $x^3 = fx + g$ oder $x^3 - fx - g = 0$, so wird für unsern Fall $f = \frac{1}{3}aa - b$, und $g = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab - c$. Aus diesen für die Buchstaben f und g gefundenen Werthen erhalten wir wie oben:

$$y = \sqrt[3]{\frac{g + \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{g - \sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)}}{2}}$$

und da solcher Gestalt y gefunden worden, so werden wir für die vorgegebene Gleichung haben $x = y - \frac{1}{3}a$.

186.

Mit Hülfe dieser Veränderung sind wir nun im Stande die Wurzeln von allen Cubischen Gleichungen zu finden, welches wir durch folgendes Exempel zeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Gleichung folgende

$$x^3 - 6xx + 13x - 12 = 0.$$

Um hier das zweyte Glied wegzubringen, so setze man $x - 2 = y$, so wird:

$x = y + 2$, $xx = yy + 4y + 4$, ferner $x^3 = y^3 + 6yy + 12y + 8$, also

$$\begin{array}{rl} x^3 = & y^3 + 6yy + 12y + 8 \\ -6xx = & \quad\; - 6yy - 24y - 24 \\ +13x = & \qquad\qquad + 13y + 26 \\ -12 = & \qquad\qquad\qquad\; - 12 \\ \hline & y^3 + y - 2 = 0 \end{array}$$

oder $y^3 = -y + 2$, welche mit der Formel $x^3 = fx + g$ verglichen giebt $f = -1$, $g = 2$; also $gg = 4$, und $\frac{4}{27}f^3 = -\frac{4}{27}$. Also $gg - \frac{4}{27}f^3 = 4 + \frac{4}{27} = \frac{112}{27}$; dahero erhalten wir $\sqrt{\left(gg - \frac{4}{27}f^3\right)} = \sqrt{\frac{112}{27}} = \frac{4\sqrt{21}}{9}$ woraus folget

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{2 + \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2 - \frac{4\sqrt{21}}{9}}{2}\right)} \text{ oder}$$

$y = \sqrt[3]{\left(1 + \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{2\sqrt{21}}{9}\right)}$, oder $y = \sqrt[3]{\left(\frac{9 + 2\sqrt{21}}{9}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{9 - 2\sqrt{21}}{9}\right)}$, oder $y = \sqrt[3]{\left(\frac{27 + 6\sqrt{21}}{27}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{27 - 6\sqrt{21}}{27}\right)}$, oder $y = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 + 6\sqrt{21})} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{(27 - 6\sqrt{21})}$; •und hernach bekommt man $x = y + 2$.

187.

Bey Auflösung dieses Exempels sind wir auf eine doppelte Irrationalität gerathen, gleich wohl muß man daraus nicht schließen, daß die Wurzel schlechter Dinges Irrational sey, indem es sich glücklicher Weise fügen könnte, daß die Binomie $27 \pm 6\sqrt{21}$ würckliche Cubi wären. Dieses trift auch hier zu, dann da der Cubus von $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ dem $\frac{216+48\sqrt{21}}{8} = 27 + 6\sqrt{21}$ gleich ist, so ist die Cubic-Wurzel aus $27 + 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ und die Cubic-Wurzel aus $27 - 6\sqrt{21}$ gleich $\frac{3-\sqrt{21}}{2}$. Hieraus also wird der obige Werth für y seyn $y = \frac{1}{3}\left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Da nun $y = 1$ so bekommen wir $x = 3$, welches eine Wurzel ist der vorgegebenen Gleichung. Wollte man die beyden andern auch finden so müßte man die Gleichung durch $x - 3$ dividiren, wie folget

$$\begin{array}{lll}
x - 3) & x^3 - 6xx + 13x - 12 & (xx - 3x + 4 \\
& \underline{x^3 - 3xx} & \\
& \quad - 3xx + 13x & \\
& \quad \underline{- 3xx + 9x} & \\
& \qquad\qquad + 4x - 12 & \\
& \qquad\qquad \underline{+ 4x - 12} & \\
& \qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

und diesen Quotienten $xx - 3x + 4 = 0$ setzen, also daß $xx = 3x - 4$ und $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{16}{4}\right)} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$, das ist $x = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2}$. Dieses sind nun die beyden andern Wurzeln welche beyde imaginär sind.

188.

Es war aber hier ein bloßes Glück, daß man aus den gefundenen Binomien würcklich die Cubic-Wurzel ausziehen konnte, welches sich auch nur in denen Fällen ereignet, wo die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, die dahero weit leichter nach den Regeln des vorigen Capitels hätte gefunden werden können; wann aber keine Rational-Wurzel statt findet, so kann dieselbe auch nicht anders als auf diese Art nach des CARDANI Regel ausgedruckt werden so daß alsdann keine weitere Abkürtzung Platz findet, wie z. E. in dieser Gleichung geschiehet $x^3 = 6x + 4$, wo $f = 6$ und $g = 4$. Dahero gefunden wird $x = \sqrt[3]{(2 + 2\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(2 - 2\sqrt{-1})}$ welche sich nicht anders ausdrücken läßt.

CAPITEL 13

VON DER AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN DES VIERTEN GRADES WELCHE AUCH BIQUADRATISCHE GLEICHUNGEN GENENNT WERDEN

189.

Wann die höchste Potestät der Zahl x zum vierten Grad hinauf steiget, so werden solche Gleichungen vom vierten Grad auch Biquadratische genennt, wovon also die allgemeine Form seyn wird:

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

von diesen kommen nun zu allererst zu betrachten vor die so genanten reinen Biquadratischen Gleichungen, deren Form ist $x^4 = f$ woraus man so gleich die Wurzel findet wann man beyderseits die Wurzel vom vierten Grad auszieht, da man dann erhält $x = \sqrt[4]{f}$.

190.

Da x^4 das Quadrat ist von xx so wird die Rechnung nicht wenig erläutert, wann man erstlich nur die Quadrat-Wurzel ausziehet, da man dann bekommt $xx = \sqrt{f}$; hernach zieht man nochmahls die Quadrat-Wurzel aus, so bekommt man $x = \sqrt{\sqrt{f}}$, also daß $\sqrt[4]{f}$ nichts anders ist, als die Quadrat-Wurzel aus der Quadrat-Wurzel von f.

Hätte man z. E. diese Gleichung $x^4 = 2401$ so findet man daraus erstlich $xx = 49$ und ferner $x = 7$.

191.

Solcher gestalt aber findet man nur eine Wurzel, und da immer drey Cubische Wurzeln statt finden, so ist kein Zweifel, daß hier nicht vier Wurzel solten Platz haben, welche inzwischen auch auf diese Art herausgebracht werden können. Dann da aus dem letzten Exempel nicht nur folget $xx = 49$ sondern auch $xx = -49$, so erhalten wir aus jenem diese zwey Wurzeln $x = 7$, $x = -7$ aus diesem aber bekommen wir ebenfalls: $x = \sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}$ und $x = -\sqrt{-49} = -7\sqrt{-1}$ welches die vier Biquadratische Wurzeln sind aus 2401. Und so verhält es sich auch mit allen andern Zahlen.

192.

Nach diesen reinen Gleichungen folgen der Ordnung nach diejenigen, in welchen das zweyte und vierte Glied fehlt, oder die diese Form haben:

$$x^4 + fxx + g = 0,$$

als welche nach der Regel der Quadratischen Gleichungen aufgelößt werden können. Dann setzt man $xx = y$ so hat man

$$yy + fy + g = 0, \quad \text{oder} \quad yy = -fy - g$$

woraus gefunden wird: $y = -\frac{1}{2}f \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}ff - g\right)} = \frac{-f \pm \sqrt{(ff - 4g)}}{2}$. Da nun $xx = y$, so wird daraus $x = \pm\sqrt{\frac{-f \pm \sqrt{(ff-4g)}}{2}}$ wo die zweydeutigen Zeichen $\pm$ alle vier Wurzeln angeben.

193.

Kommen aber alle Glieder in der Gleichung vor, so kann man dieselbe immer als ein Product aus vier Factoren ansehen. Dann multiplizirt man diese vier Factores mit einander $(x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$ so findet man folgendes Product

$$x^4 - (p+q+r+s)x^3 + (pq+pr+ps+qr+qs+rs)xx - (pqr+pqs+prs+qrs)x + pqrs,$$

welche Formel nicht anders gleich 0 werden kann, als wann einer von obigen vier Factoren $= 0$ ist. Dieses kann demnach auf viererley Art geschehen, I.) wann $x = p$, II.) $x = q$, III.) $x = r$, IV.) $x = s$, welches demnach die vier Wurzeln dieser Gleichung sind.

194.

Betrachten wir diese Form etwas genauer, so finden wir, daß in dem zweyten Glied die Summe aller vier Wurzeln vorkommt, welche mit $-x^3$ multiplicirt ist, im dritten Glied findet sich die Summe der Producte aus je zwey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit xx multiplicirt ist, im vierten Glied sieht man die Summe der Producte aus je drey Wurzeln mit einander multiplicirt, welches mit $-x$ multiplicirt ist, und endlich das fünfte und letzte Glied enthält das Product aus allen vier Wurzeln mit einander multiplicirt.

195.

Da das letzte Glied das Product aus allen Wurzeln enthält, so kann eine solche Biquadratische Gleichung keine andere Rational-Wurzeln haben, als welche zugleich Theiler des letzten Glieds sind, dahero man aus diesem Grund alle Rational-Wurzeln, wann dergleichen vorhanden, leicht finden kann, wann man für x nach und nach einen jeden Theiler des letzten Glieds setzt und zusieht, mit welchem der Gleichung ein Genüge geschehe; hat man aber auch nur eine solche Wurzel gefunden, z. E. $x = p$, so darf man nur die Gleichung, nachdem alle Glieder auf eine Seite gebracht worden, durch $x - p$ dividiren und den Quotienten gleich 0 setzen, welche eine Cubische Gleichung geben wird, die nach den obigen Regeln weiter aufgelößt werden kann.

196.

Hierzu aber wird nun unumgänglich erfordert, daß alle Glieder aus gantzen Zahlen bestehen, und daß das erste blos da stehe, oder nur mit 1 multiplicirt sey; kommen demnach in einigen Gliedern Brüche vor, so müßen dieselben vorher weggeschaft werden, welches jederzeit geschehen kann, wann man für x schreibt y getheilt durch eine Zahl, welche die Nenner der Brüche in sich schließt:

Als wann diese Gleichung vorkäme

$$x^4 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{3}xx - \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{18} = 0,$$

so setze man weil in den Nennern 2 und 3 nebst ihren Potestäten vorkommen

$$x = \frac{y}{6}, \quad \text{so wird} \quad \frac{y^4}{6^4} - \frac{\frac{1}{2}y^3}{6^3} + \frac{\frac{1}{3}yy}{6^2} - \frac{\frac{3}{4}y}{6} + \frac{1}{18} = 0,$$

welche mit 6^4 multiplicirt giebt $y^4 - 3y^3 + 12yy - 162y + 72 = 0$. Wollte man nun suchen ob diese Gleichung Rational-Wurzeln habe, so müßte man für y nach und nach die Theiler der Zahl 72 schreiben um zu sehen, in welchen Fällen die Formel würcklich 0 werde.

197.

Da aber die Wurzeln so wohl negativ als positiv seyn können, so müßte man mit einem jeden Theiler zwey Proben anstellen, die erste indem derselbe positiv, die andere indem derselbe negativ genommen würde; man hat aber auch hier wiederum zu bemercken, daß so oft die zwey Zeichen + und — mit einander abwechseln, die Gleichung eben so viel positive Wurzeln habe; so oft aber einerley Zeichen auf einander folgen, eben so viel negative Wurzeln vorhanden seyn müßen. Da nun in unserm Exempel 4 Abwechselungen vorkommen, und keine Folge, so sind alle Wurzeln positiv, und also hat man nicht nöthig einen Theiler des letzten Gliedes negativ zu nehmen.[1])

198.

Es sey z. E. diese Gleichung vorgegeben $x^4 + 2x^3 - 7xx - 8x + 12 = 0$. Hier kommen nun zwey Abwechselungen der Zeichen, und auch zwey Folgen vor, woraus man sicher schließen kann, daß diese Gleichung zwey positive und auch zwey negative Wurzeln haben müße, welche alle Theiler der Zahl 12 seyn müßen. Da nun diese Theiler sind 1, 2, 3, 4, 6, 12, so probire man erstlich mit $x = +1$ so kommt würcklich 0 heraus, also ist eine Wurzel $x = 1$. Setzt man ferner $x = -1$ so kommt folgendes $+1 - 2 - 7 + 8 + 12 = 21 - 9 = 12$ und dahero giebt $x = -1$ keine Wurzel. Man setze ferner $x = 2$ so wird unsere Formel wieder $= 0$, und also $x = 2$ eine Wurzel; aber $x = -2$ geht auch[2]) an. Setzt man weiter $x = 3$ so kommt $81 + 54 - 63 - 24 + 12 = 60$ geht also nicht an; man setze aber $x = -3$

1) Siehe die Anmerkungen zu § 160 und 163. H. W.

2) Im Original steht irrtümlich: „*hingegen* $x = -2$ geht *nicht* an.“ Nach $x = -3$ wird dann außerdem noch $x = -4$ als Wurzel angegeben, was wiederum unrichtig ist. Die Korrektur dieser Rechenfehler erforderte eine leichte Modifikation des Textes. H. W.

so kommt $81 - 54 - 63 + 24 + 12 = 0$, folglich ist $x = -3$ eine Wurzel; also daß alle vier Wurzeln Rational sind und sich also verhalten

$$\text{I.)}\ x = 1,\quad \text{II.)}\ x = 2,\quad \text{III.)}\ x = -2,\quad \text{IV.)}\ x = -3,$$

von welchen zwey positiv und zwey negativ sind, wie die obige Regel anzeigt.

199.

Wann aber keine Wurzel Rational ist, so läßt sich auch durch diesen Weg keine finden; dahero man auf solche Mittel bedacht gewesen, um in diesen Fällen die Irrational-Wurzeln ausdrücken zu können. Hierin ist man auch so glücklich gewesen, daß man zweyerley verschiedene Wege entdeckt habe, um zur Erkentniß solcher Wurzeln zu gelangen, die Biquadratische Gleichung mag auch beschaffen seyn wie sie wolle.

Ehe wir aber diese allgemeine Wege erörtern, so wird es dienlich seyn einige besondere Fälle aufzulösen, welche öfters mit Nutzen angebracht werden können.

200.

Wann die Gleichung so beschaffen ist, daß die Zahlen in den Gliedern rückwärts eben so fortgehen als vorwärts, wie in dieser Gleichung geschiehet:

$$x^4 + mx^3 + nxx + mx + 1 = 0,$$

welche noch etwas allgemeiner also vorgestellt werden kann:

$$x^4 + max^3 + naaxx + ma^3x + a^4 = 0,$$

so kann eine solche Form allezeit als ein Product zweyer Factoren, welche quadratische Formeln sind, angesehen werden und die sich leicht bestimmen laßen: dann man setze für diese Gleichung folgendes Product

$$(xx + pax + aa)(xx + qax + aa) = 0,$$

wo p und q gesucht werden müssen, daß die obige Gleichung herauskomme. Es wird aber durch die würckliche Multiplication gefunden

$$x^4 + (p + q)ax^3 + (pq + 2)aaxx + (p + q)a^3x + a^4 = 0;$$

damit also diese Gleichung mit der vorgegebenen einerley sey, so werden folgende zwey Stücke erfordert I.) daß $p+q=m$, und II.) daß $pq+2=n$, folglich $pq=n-2$.

Die erstere quadrirt giebt $pp+2pq+qq=mm$, davon die andere viermal genommen, nemlich $4pq=4n-8$, subtrahirt bleibt über

$$pp-2pq+qq=mm-4n+8,$$

davon die Quadrat-Wurzel ist: $p-q=\sqrt{(mm-4n+8)}$. Da nun $p+q=m$ so erhalten wir durch die Addition

$$2p=m+\sqrt{(mm-4n+8)} \quad \text{oder} \quad p=\frac{m+\sqrt{(mm-4n+8)}}{2};$$

durch die Subtraction aber bekommen wir

$$2q=m-\sqrt{(mm-4n+8)} \quad \text{oder} \quad q=\frac{m-\sqrt{(mm-4n+8)}}{2}.$$

Hat man nun p und q gefunden, so darf man nur einen jeden der Factoren $=0$ setzen, um daraus die Werthe von x zu finden: der erste giebt $xx+pax+aa=0$ oder $xx=-pax-aa$, woraus man findet

$$x=-\frac{pa}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{ppaa}{4}-aa\right)} \quad \text{oder} \quad x=-\frac{pa}{2}\pm a\sqrt{\left(\frac{pp}{4}-1\right)}$$

$$\text{oder} \quad x=-\frac{1}{2}pa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(pp-4)};$$

der andere Factor giebt aber

$$x=-\frac{1}{2}qa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(qq-4)}$$

und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

201.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben

$$x^4-4x^3-3xx-4x+1=0.$$

Hier ist nun $a=1$, $m=-4$, $n=-3$, dahero $mm-4n+8=36$ und die Quadrat-Wurzel daraus $=6$; dahero bekommen wir $p=\frac{-4+6}{2}=1$ und $q=\frac{-4-6}{2}=-5$, woraus die vier Wurzeln seyn werden:

$$\text{I.) und II.)}\quad x = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} = \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

und ferner $$\text{III.) und IV.)}\quad x = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{21} = \frac{5\pm\sqrt{21}}{2}:$$

also sind die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung folgende

$$\text{I.)}\ x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\qquad \text{II.)}\ x = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2},$$
$$\text{III.)}\ x = \frac{5+\sqrt{21}}{2},\qquad \text{IV.)}\ x = \frac{5-\sqrt{21}}{2},$$

wovon die zwey ersten imaginär oder unmöglich sind, die beyden andern aber möglich, weil man $\sqrt{21}$ so genau anzeigen kann als man will, indem man die Wurzel durch Decimal-Brüche ausdrückt. Dann da 21 so viel ist als 21,00000000 so ziehe man daraus die Quadrat-Wurzel wie folget:

```
        21|00|00|00|00   (4,5825
        16|
        ------
          |5 00
     85   |
          |4 25
          -------
          |75 00
    908   |
          |72 64
          --------
          |2 36 00
   9162   |
          |1 83 24
          ---------
          |52 76 00
  91645   |
          |45 82 25
          ---------
             6 93 75
```

Da nun $\sqrt{21} = 4{,}5825$ so ist die dritte Wurzel ziemlich genau $x = 4{,}7912$, und die vierte $x = 0{,}2087$ welche man leicht noch genauer hätte berechnen können.

Weil die vierte Wurzel dem $\frac{2}{10}$ oder $\frac{1}{5}$ ziemlich nahe kommt, so wird dieser Werth der Gleichung auch ziemlich genau ein Genüge leisten; man setze also $x = \frac{1}{5}$ so bekommt man $\frac{1}{625} - \frac{4}{125} - \frac{3}{25} - \frac{4}{5} + 1 = \frac{31}{625}$ und dieses sollte $= 0$ seyn, welches ziemlich genau eintrift.

202.

Der zweyte Fall, wo eine ähnliche Auflösung statt findet, ist den Zahlen nach dem vorigen gleich, nur daß das zweyte und vierte Glied verschiedene Zeichen haben; eine solche Gleichung ist demnach:

$$x^4 + max^3 + naaxx - ma^3x + a^4 = 0$$

welche durch folgendes Product kann vorgestellet werden

$$(xx + pax - aa)(xx + qax - aa) = 0.$$

Dann durch die Multiplication bekommt man

$$x^4 + (p + q)\,ax^3 + (pq - 2)\,aaxx - (p + q)\,a^3x + a^4$$

welche mit der vorgegebenen einerley wird, wann erstlich $p + q = m$ und hernach $pq - 2 = n$ oder $pq = n + 2$; dann solchergestalt wird das vierte Glied von selbsten einerley; man quadrire wie vor die erste Gleichung, so hat man $pp + 2pq + qq = mm$, davon subtrahire man die andere viermal genommen $4pq = 4n + 8$, so bekommt man $pp - 2pq + qq = mm - 4n - 8$ woraus die Quadrat-Wurzel giebt $p - q = \sqrt{(mm - 4n - 8)}$, und daher erhalten wir

$$p = \frac{m + \sqrt{(mm - 4n - 8)}}{2} \quad \text{und} \quad q = \frac{m - \sqrt{(mm - 4n - 8)}}{2}.$$

Hat man nun p und q gefunden so giebt der erste Factor diese zwey Wurzeln

$$x = -\frac{1}{2}pa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(pp + 4)}$$

und der zweyte Factor giebt diese

$$x = -\frac{1}{2}qa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{(qq + 4)}$$

und also hat man die vier Wurzeln der vorgegebenen Gleichung.

203.

Es sey z. E. diese Gleichung gegeben $x^4 - 3\cdot 2x^3 + 3\cdot 8x + 16 = 0$, hier ist nun $a = 2$ und $m = -3$ und $n = 0$, dahero $\sqrt{(mm - 4n - 8)} = 1$, folglich $p = \frac{-3+1}{2} = -1$, und $q = \frac{-3-1}{2} = -2$ woraus die zwey erstern Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{5}$ und die zwey letztern $x = 2 \pm \sqrt{8}$ also daß die vier gesuchten Wurzeln seyn werden:

$$\text{I.)}\ x = 1 + \sqrt{5},\quad \text{II.)}\ x = 1 - \sqrt{5},\quad \text{III.)}\ x = 2 + \sqrt{8},\quad \text{IV.)}\ x = 2 - \sqrt{8}.$$

Woraus die vier Factoren unserer Gleichung seyn werden

$$(x - 1 - \sqrt{5})(x - 1 + \sqrt{5})(x - 2 - \sqrt{8})(x - 2 + \sqrt{8}),$$

welche würcklich mit einander multiplicirt unsere Gleichung hervorbringen müßen. Dann der erste und zweyte mit einander multiplicirt geben $xx - 2x - 4$ und die beiden andern geben $xx - 4x - 4$, welche zwey Producte wiederum mit einander multiplicirt geben $x^4 - 6x^3 + 24x + 16$, welches just die vorgegebene Gleichung ist.

CAPITEL 14

VON DES BOMBELLI REGEL DIE AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN AUF CUBISCHE ZU BRINGEN

204.

Da schon oben gezeigt worden, wie die Cubische Gleichungen durch Hülfe des CARDANI Regel aufgelößt werden können, so kommt die Haupt-Sache bey den Biquadratischen Gleichungen darauf an, daß man die Auflösung derselben auf Cubische Gleichungen zu bringen wiße. Dann ohne Hülfe der Cubischen Gleichungen ist nicht möglich die Biquadratische auf eine allgemeine Art aufzulösen: dann wann man auch eine Wurzel gefunden, so erfordern die übrigen Wurzeln eine Cubische Gleichung. Woraus man sogleich erkennet, daß auch die Gleichungen von einem höheren Grade die Auflösung aller niedrigen voraus setzen.

205.

Hierzu hat nun schon vor etlichen 100 Jahren ein Italiener, Nahmens BOMBELLI,[1]) eine Regel gegeben, welche wir in diesem Capitel vortragen wollen: Es sey demnach die allgemeine Biquadratische Gleichung gegeben

$$x^4 + ax^3 + bxx + cx + d = 0,$$

1) Im Original ist dieser Name stets POMBELLI geschrieben. H. W.

wo die Buchstaben a, b, c, d alle nur ersinliche Zahlen bedeuten können; nun stelle man sich vor, daß diese Gleichung mit der folgenden einerley sey

$$\left(xx + \frac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

wo es nur darauf ankommt die Buchstaben p und q und r so zu bestimmen, daß die gegebene Gleichung herauskommt. Bringt man nun diese letztere in Ordnung, so kommt heraus

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + \tfrac{1}{4}\,& aaxx + apx + pp \\ + \;& 2pxx - 2qrx - rr \\ - \;& qqxx \end{aligned}$$

Hier sind nun die zwey ersten Glieder mit unserer Gleichung schon einerley; für das dritte Glied muß man setzen $\frac{1}{4}aa + 2p - qq = b$ woraus man hat $qq = \frac{1}{4}aa + 2p - b$, für das vierte Glied muß man setzen $ap - 2qr = c$, woraus man hat $2qr = ap - c$, für das letzte Glied aber $pp - rr = d$, woraus wird $rr = pp - d$. Aus diesen drey Gleichungen müßen nun die drey Buchstaben p, q und r bestimmt werden.

206.

Um dieses auf die leichteste Art zu verrichten, so nehme man die erste viermal, welche seyn wird $4qq = aa + 8p - 4b$, diese multiplicire man mit der letzten $rr = pp - d$, so bekommt man

$$4qqrr = 8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b)$$

nun quadrire man die mittlere Gleichung

$$4qqrr = aapp - 2acp + cc;$$

wir haben also zweyerley Werthe für $4qqrr$, welche einander gleich gesetzt diese Gleichung geben

$$8p^3 + (aa - 4b)pp - 8dp - d(aa - 4b) = aapp - 2acp + cc;$$

und alle Glieder auf eine Seite gebracht, geben

$$8p^3 - 4bpp + (2ac - 8d)p - aad + 4bd - cc = 0$$

welches eine Cubische Gleichung ist, daraus in einem jeden Fall der Werth von p nach den oben gegebenen Regeln bestimmt werden muß.

207.

Hat man nun aus den gegebenen Zahlen a, b, c, d die drey Werthe des Buchstaben p gefunden, worzu es genung ist nur einen davon entdeckt zu haben, so erhält man daraus so gleich die beyden andern Buchstaben q und r. Denn aus der ersten Gleichung wird seyn $q = \sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + 2p - b\right)}$ und aus der zweyten erhält man $r = \frac{ap-c}{2q}$. Wann aber diese drey Buchstaben für einen jeglichen Fall gefunden worden, so können daraus alle vier Wurzeln der gegebenen Gleichung folgender Gestalt bestimmt werden.

Da wir die gegebene Gleichung auf diese Form gebracht haben

$$\left(xx + \tfrac{1}{2}ax + p\right)^2 - (qx + r)^2 = 0,$$

so ist $\left(xx + \frac{1}{2}ax + p\right)^2 = (qx + r)^2$; daraus die Quadrat-Wurzel gezogen wird $xx + \frac{1}{2}ax + p = qx + r$, oder auch $xx + \frac{1}{2}ax + p = -qx - r$.

Die erstere giebt

$$xx = \left(q - \tfrac{1}{2}a\right)x - p + r$$

woraus zwey Wurzeln gefunden werden; die übrigen zwey werden aber aus der andern gefunden, welche also aussieht

$$xx = -\left(q + \tfrac{1}{2}a\right)x - p - r.$$

208.

Um diese Regel mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Gleichung vorgegeben

$$x^4 - 10x^3 + 35xx - 50x + 24 = 0,$$

welche mit unserer allgemeinen Formel verglichen giebt $a = -10$, $b = 35$, $c = -50$, $d = 24$ aus welchen für den Buchstaben p zu bestimmen folgende Gleichung erwächst $8p^3 - 140pp + 808p - 1540 = 0$; welche durch vier dividirt giebt

$$2p^3 - 35pp + 202p - 385 = 0.$$

Die Theiler der letzten Zahl sind 1, 5, 7, 11, etc. von welchen 1 nicht angeht; setzt man aber $p = 5$ so kommt $250 - 875 + 1010 - 385 = 0$, folglich ist $p = 5$; will man auch setzen $p = 7$, so kommt $686 - 1715 + 1414 - 385 = 0$; also ist $p = 7$ die zweyte Wurzel. Um die dritte zu finden so dividire man die

Gleichung durch 2 so kommt $p^3 - \frac{35}{2}pp + 101p - \frac{385}{2} = 0$, und da die Zahl im zweyten Glied $\frac{35}{2}$ die Summe aller drey Wurzeln ist, die beyden erstern aber zusammen 12 machen so muß die dritte seyn $\frac{11}{2}$. Also haben wir alle drey Wurzeln. Es wäre aber genung nur eine zu wißen, weil aus einer jeden die vier Wurzeln unserer Biquadratischen Gleichung herauskommen müßen.

209.

Um dieses zu zeigen, so sey erstlich $p = 5$, daraus wird alsdann

$$q = \sqrt{(25 + 10 - 35)} = 0 \quad \text{und} \quad r = \frac{-50 + 50}{0} = \frac{0}{0}.$$

Da nun hierdurch nichts bestimmt wird, so nehme man die dritte Gleichung $rr = pp - d = 25 - 24 = 1$, und also $r = 1$: dahero unsere beyde Quadrat-Gleichungen seyn werden:

$$\text{I.)}\ xx = 5x - 4, \qquad \text{II.)}\ xx = 5x - 6;$$

die erstere giebt nun diese zwey Wurzeln $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 3}{2}$, folglich entweder $x = 4$, oder $x = 1$. Die andere aber giebt $x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{5 \pm 1}{2}$; daraus wird entweder $x = 3$, oder $x = 2$.

Will man aber setzen $p = 7$ so wird

$$q = \sqrt{(25 + 14 - 35)} = 2 \quad \text{und} \quad r = \frac{-70 + 50}{4} = -5$$

woraus diese zwey Quadrat-Gleichungen entstehen

$$\text{I.)}\ xx = 7x - 12, \qquad \text{II.)}\ xx = 3x - 2;$$

deren erstere giebt $x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{7 \pm 1}{2}$ dahero $x = 4$ und $x = 3$; die andere giebt diese Wurzel $x = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$, also $x = \frac{3 \pm 1}{2}$, dahero $x = 2$ und $x = 1$, welches eben die vier Wurzeln sind, die schon vorher gefunden worden.

Und eben dieselben folgen auch aus dem dritten Werth $p = \frac{11}{2}$. Dann da wird $q = \sqrt{(25 + 11 - 35)} = 1$ und $r = \frac{-55 + 50}{2} = -\frac{5}{2}$, woraus die beyden Quadratischen Gleichungen seyn werden

$$\text{I.)}\ xx = 6x - 8, \qquad \text{II.)}\ xx = 4x - 3;$$

aus der ersteren bekommt man $x = 3 \pm \sqrt{1}$, also $x = 4$ und $x = 2$; aus der andern aber $x = 2 \pm \sqrt{1}$, also $x = 3$ und $x = 1$, welche die schon gefundene vier Wurzeln sind.

210.

Es sey ferner diese Gleichung vorgegeben $x^4 - 16x - 12 = 0$, in welcher ist $a = 0$, $b = 0$, $c = -16$, $d = -12$; dahero unsere Cubische Gleichung seyn wird $8p^3 + 96p - 256 = 0$, das ist $p^3 + 12p - 32 = 0$, welche Gleichung noch einfacher wird, wann man setzt $p = 2t$; da wird nemlich

$$8t^3 + 24t - 32 = 0 \quad \text{oder} \quad t^3 + 3t - 4 = 0.$$

Die Theiler des letzten Glieds sind 1, 2, 4, aus welchen $t = 1$ eine Wurzel ist, daraus wird $p = 2$ und ferner $q = \sqrt{4} = 2$ und $r = \frac{16}{4} = 4$. Dahero sind die beyden Quadrat-Gleichungen $xx = 2x + 2$ und $xx = -2x - 6$, daher die Wurzeln seyn werden $x = 1 \pm \sqrt{3}$, und $x = -1 \pm \sqrt{-5}$.

211.

Um die bisherige Auflösung noch deutlicher zu machen, so wollen wir dieselbe bey dem folgenden Exempel gantz wiederhohlen:

Es sey demnach diese Gleichung gegeben $x^4 - 6x^3 + 12xx - 12x + 4 = 0$, welche in dieser Formel enthalten seyn soll $(xx - 3x + p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, wo im ersten Theil $-3x$ gesetzt worden, weil -3 die Hälfte ist der Zahl -6 im zweyten Glied der Gleichung. Diese Form aber entwickelt giebt

$$x^4 - 6x^3 + (2p + 9 - qq)xx - (6p + 2qr)x + pp - rr = 0,$$

mit dieser Form vergleicht man nun unsere Gleichung so bekommt man:

$$\text{I.)}\ 2p + 9 - qq = 12, \qquad \text{II.)}\ 6p + 2qr = 12, \qquad \text{III.)}\ pp - rr = 4;$$

aus der ersten erhalten wir $qq = 2p - 3$, aus der zweyten $2qr = 12 - 6p$ oder $qr = 6 - 3p$, aus der dritten $rr = pp - 4$; nun multiplicire man rr und qq mit einander so bekommt man $qqrr = 2p^3 - 3pp - 8p + 12$. Quadrirt man aber den Werth von qr, so kommt $qqrr = 36 - 36p + 9pp$; dahero erhalten wir diese Gleichung: $2p^3 - 3pp - 8p + 12 = 9pp - 36p + 36$, oder $2p^3 - 12pp + 28p - 24 = 0$, oder durch 2 dividirt diese $p^3 - 6pp + 14p - 12 = 0$, wovon die Wurzel ist $p = 2$; daraus wird $qq = 1$, $q = 1$ und $qr = r = 0$.

Unsere Gleichung wird also seyn: $(xx - 3x + 2)^2 = xx$, daraus die Quadrat-Wurzel $xx - 3x + 2 = \pm x$; gilt das obere Zeichen, so hat man $xx = 4x - 2$, für das untere Zeichen aber $xx = 2x - 2$, woraus diese vier Wurzeln gefunden werden $x = 2 \pm \sqrt{2}$ und $x = 1 \pm \sqrt{-1}$.

CAPITEL 15

VON EINER NEUEN AUFLÖSUNG DER BIQUADRATISCHEN GLEICHUNGEN

212.

Wie durch die obige Regel des BOMBELLI die Biquadratischen Gleichungen durch Hülfe einer Cubischen aufgelöst werden, so ist seit dem noch ein anderer Weg gefunden worden eben dieses zu leisten, welcher von dem vorigen gänzlich unterschieden ist und eine besondere Erklärung verdienet.

213.

Man setze nemlich, die Wurzel einer Biquadratischen Gleichung habe diese Form

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},$$

wo die Buchstaben p, q und r die drey Wurzeln einer solchen Cubischen Gleichung andeuten

$$z^3 - fzz + gz - h = 0,$$

also daß seyn wird

$$p + q + r = f, \quad pq + pr + qr = g \quad \text{und} \quad pqr = h;$$

dieses voraus gesetzt so quadrire man die angenommene Form der Wurzel $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$, da kommt heraus $xx = p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$. Da nun $p + q + r = f$ so wird $xx - f = 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; nun nehme man nochmals die Quadrate, so wird

$$x^4 - 2fxx + ff = 4pq + 4pr + 4qr + 8\sqrt{ppqr} + 8\sqrt{pqqr} + 8\sqrt{pqrr}.$$

Da nun $4pq + 4pr + 4qr = 4g$ so wird

$$x^4 - 2fxx + ff - 4g = 8\sqrt{pqr}\cdot(\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r});$$

da aber $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$ und $pqr=h$, also $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$, so gelangen wir zu dieser Biquadratischen Gleichung

$$x^4-2fxx-8x\sqrt{h}+ff-4g=0$$

wovon die Wurzel gewis ist

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r},$$

und wo p, q und r die drey Wurzeln sind der obigen Cubischen Gleichung

$$z^3-fzz+gz-h=0.$$

214.

Die herausgebrachte Biquadratische Gleichung kann als allgemein angesehen werden, obgleich das zweyte Glied x^3 darin mangelt. Dann man kann immer eine jede vollständige Gleichung in eine andere verwandeln, wo das zweyte Glied fehlt, wie wir hernach zeigen wollen.

Es sey demnach diese Biquadratische Gleichung gegeben:

$$x^4-axx-bx-c=0,$$

wovon eine Wurzel gefunden werden soll. Man vergleiche dieselbe dahero mit der gefundenen Form um dadurch die Buchstaben f, g und h zu bestimmen. Darzu wird erfordert, daß I.) $2f=a$ also $f=\frac{a}{2}$, II.) $8\sqrt{h}=b$ allso $h=\frac{bb}{64}$, III.) $ff-4g=-c$, oder $\frac{aa}{4}-4g+c=0$, oder $\frac{1}{4}aa+c=4g$, folglich $g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c$.

215.

Aus der vorgegebenen Gleichung $x^4-axx-bx-c=0$ findet man demnach die Buchstaben f, g und h also bestimmt

$$f=\frac{1}{2}a,\quad g=\frac{1}{16}aa+\frac{1}{4}c,\quad \text{und}\quad h=\frac{1}{64}bb\quad \text{oder}\quad \sqrt{h}=\frac{1}{8}b;$$

daraus formire man diese Cubische Gleichung: $z^3-fzz+gz-h=0$, wovon man nach der obigen Regel die drey Wurzeln suchen muß. Dieselben seyen nun I.) $z=p$, II.) $z=q$, III.) $z=r$: aus welchen, wann sie gefunden worden, eine Wurzel unserer Biquadratischen Gleichung seyn wird

$$x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}.$$

216.

Solcher Gestalt scheint es zwar, daß nur eine Wurzel unserer Gleichung gefunden werde, allein da ein jedes Quadrat-Wurzel-Zeichen so wohl negativ als positiv genommen werden kann, so enthält diese Form so gar alle vier Wurzeln.

Wollte man zwar alle Veränderungen der Zeichen gelten laßen, so kämen 8 verschiedene Werthe für x heraus, wovon doch nur 4 gelten können. Es ist aber zu bemercken, daß das Product dieser drey Glieder, nemlich $\sqrt{pqr}$ gleich seyn müße dem $\sqrt{h} = \frac{1}{8}b$; dahero wann $\frac{1}{8}b$ positiv ist so muß das Product der Theile auch positiv seyn, in welchem Fall nur diese vier Aenderungen gelten.

$$\begin{aligned}
\text{I.)}\ x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},\\
\text{II.)}\ x &= \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r},\\
\text{III.)}\ x &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r},\\
\text{IV.)}\ x &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r},
\end{aligned}$$

ist aber $\frac{1}{8}b$ negativ, so sind die 4 Werthe von x folgende:

$$\begin{aligned}
\text{I.)}\ x &= \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r},\\
\text{II.)}\ x &= \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r},\\
\text{III.)}\ x &= -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r},\\
\text{IV.)}\ x &= -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}.
\end{aligned}$$

Durch Hülfe dieser Anmerckung können in jeglichem Fall alle vier Wurzeln bestimmt werden, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

217.

Es sey diese Biquadratische Gleichung vorgegeben in welcher das zweyte Glied fehlt

$$x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0,$$

welche mit der obigen Formel verglichen giebt $a = 25$, $b = -60$ und $c = 36$, woraus man ferner erhält

$$f = \frac{25}{2},\quad g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16} \quad \text{und} \quad h = \frac{225}{4};$$

also ist unsere Cubische Gleichung

$$z^3 - \frac{25}{2}zz + \frac{769}{16}z - \frac{225}{4} = 0.$$

Um hier die Brüche weg zu bringen, so setze man $z = \frac{u}{4}$, so wird

$$\frac{u^3}{64} - \frac{25}{2} \cdot \frac{uu}{16} + \frac{769}{16} \cdot \frac{u}{4} - \frac{225}{4} = 0,$$

welche mit 64 multiplicirt giebt

$$u^3 - 50uu + 769u - 3600 = 0,$$

wovon die drey Wurzeln gefunden werden sollen, welche alle drey positiv sind, und wovon eine Wurzel ist $u = 9$, um die andere zu finden so theile man $u^3 - 50uu + 769u - 3600$ durch $u - 9$, und da kommt diese neue Gleichung $uu - 41u + 400 = 0$ oder $uu = 41u - 400$, woraus gefunden wird $u = \frac{41}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1681}{4} - \frac{1600}{4}\right)} = \frac{41 \pm 9}{2}$; also sind die drey Wurzeln $u = 9$, $u = 16$, $u = 25$, dahero wir erhalten:

$$\text{I.) } z = \frac{9}{4}, \quad \text{II.) } z = 4, \quad \text{III.) } z = \frac{25}{4}.$$

Dieses sind nun die Werthe der Buchstaben p, q und r, also daß

$$p = \frac{9}{4}, \quad q = 4, \quad r = \frac{25}{4};$$

weil nun $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = -\frac{15}{2}$ und dieser Werth $= \frac{1}{8}b$ negativ ist, so muß man sich mit den Zeichen der Wurzeln $\sqrt{p}, \sqrt{q}, \sqrt{r}$ darnach richten: es muß nemlich entweder nur ein *minus* oder drey *minus* vorhanden seyn; da nun

$$\sqrt{p} = \frac{3}{2}, \quad \sqrt{q} = 2 \quad \text{und} \quad \sqrt{r} = \frac{5}{2},$$

so werden die vier Wurzeln unserer vorgegebenen Gleichung seyn:

$$\begin{aligned}
\text{I.) } x &= \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1,\\
\text{II.) } x &= \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2,\\
\text{III.) } x &= -\frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3,\\
\text{IV.) } x &= -\frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = -6,
\end{aligned}$$

aus welchen diese vier Factoren der Gleichung entstehen

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x+6)=0,$$

wovon die beyden ersten geben $xx-3x+2$, die beyden letztern aber $xx+3x-18$, und diese zwey Producte mit einander multiplicirt bringen just unsere Gleichung hervor.

218.

Nun ist noch übrig zu zeigen wie eine Biquadratische Gleichung, in der das zweyte Glied vorhanden ist, in eine andere verwandelt werden könne, darin das zweyte Glied fehlt, worzu folgende Regel dienet.

Es sey diese allgemeine Gleichung gegeben $y^4+ay^3+byy+cy+d=0$. Hier setze man zu y den vierten Theil der Zahl des andern Glieds, nemlich $\frac{1}{4}a$ und schreibe dafür einen neuen Buchstaben x, also daß $y+\frac{1}{4}a=x$ folglich $y=x-\frac{1}{4}a$; daraus wird

$$yy=xx-\frac{1}{2}ax+\frac{1}{16}aa, \quad \text{ferner} \quad y^3=x^3-\frac{3}{4}axx+\frac{3}{16}aax-\frac{1}{64}a^3,$$

und daraus endlich:

$$\begin{array}{rcccccccccc}
y^4 = & x^4 & - ax^3 & + & \frac{3}{8}aaxx & - & \frac{1}{16}a^3x & + & \frac{1}{256}a^4 \\
+ay^3 = & & + ax^3 & - & \frac{3}{4}aaxx & + & \frac{3}{16}a^3x & - & \frac{1}{64}a^4 \\
+byy = & & & + & bxx & - & \frac{1}{2}abx & + & \frac{1}{16}aab \\
+cy = & & & & & + & cx & - & \frac{1}{4}ac \\
+d = & & & & & & & + & d \\
\hline
& x^4 & +0 & - & \frac{3}{8}aaxx & + & \frac{1}{8}a^3x & - & \frac{3}{256}a^4 \\
& & & + & bxx & - & \frac{1}{2}abx & + & \frac{1}{16}aab \\
& & & & & + & cx & - & \frac{1}{4}ac \\
& & & & & & & + & d
\end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}} \right\} = 0$$

in welcher Gleichung, wie man sieht, das zweyte Glied weggefallen ist, also daß man jetzt die gegebene Regel darauf anwenden und daraus die vier Wurzeln von x bestimmen kann, aus welchen hernach die vier Werthe von y von selbsten sich ergeben, weil $y=x-\frac{1}{4}a$.

219.

So weit ist man bisher in Auflösung der Algebraischen Gleichungen gekommen, nemlich bis auf den vierten Grad, und alle Bemühungen die Gleichungen von fünften und den höhern Graden auf gleiche Art aufzulösen, oder zum wenigsten auf die niedrigsten Grade zu bringen sind fruchtloß gewesen, also daß man nicht im Stand ist allgemeine Regeln zu geben, wodurch die Wurzeln von höhern Gleichungen ausfindig gemacht werden könnten.

Alles was darinnen geleistet worden, geht nur auf gantz besondere Fälle, worunter derjenige der vornehmste ist, wann irgend eine Rational-Wurzel statt findet, als welche durch Probiren leicht heraus gebracht werden kann, weil man weiß, daß dieselbe immer ein Theiler des letzten Glieds seyn muß; und hier mit ist es eben so beschaffen wie wir schon bey den Gleichungen vom dritten und vierten Grad gelehret haben.

220.

Es wird doch noch nöthig seyn diese Regel auch auf eine solche Gleichung anzuwenden, deren Wurzeln nicht rational sind.

Eine solche Gleichung sey nun diese

$$y^4 - 8y^3 + 14yy + 4y - 8 = 0.$$

Hier muß man vor allen Dingen das zweyte Glied wegschaffen, dahero setze man zu der Wurzel y noch den vierten Theil der Zahl des zweyten Glieds nemlich $y - 2 = x$, so wird

$$y = x + 2 \quad \text{und} \quad yy = xx + 4x + 4, \quad \text{ferner} \quad y^3 = x^3 + 6xx + 12x + 8$$

und

$$\begin{array}{rcrrrrr} y^4 & = & x^4 + 8x^3 & + 24xx & + 32x & + 16 \\ -\ 8y^3 & = & -8x^3 & - 48xx & - 96x & - 64 \\ +\ 14yy & = & & + 14xx & + 56x & + 56 \\ +\ 4y & = & & & + 4x & + 8 \\ -\ 8 & = & & & & - 8 \\ \hline & & x^4 + 0 & - 10xx & - 4x & + 8 & = 0, \end{array}$$

welche mit unserer allgemeinen Form verglichen, gibt $a = 10$, $b = 4$, $c = -8$; woraus wir demnach schließen $f = 5$, $g = \frac{17}{4}$, $h = \frac{1}{4}$ und $\sqrt{h} = \frac{1}{2}$. Daraus wir sehen, daß das Product $\sqrt{pqr}$ positiv seyn wird. Die Cubische Gleichung wird demnach seyn $z^3 - 5zz + \frac{17}{4}z - \frac{1}{4} = 0$, von welcher Cubischen Gleichung die drey Wurzeln p, q und r gesucht werden müßen.

221.

Hier müßen nun erstlich die Brüche weggeschaft werden, deswegen setze man $z = \frac{u}{2}$ so wird $\frac{u^3}{8} - \frac{5uu}{4} + \frac{17}{4} \cdot \frac{u}{2} - \frac{1}{4} = 0$, mit 8 multiplicirt giebt $u^3 - 10uu + 17u - 2 = 0$, wo alle Wurzeln positiv sind. Da nun die Theiler des letzten Glieds sind 1 und 2, so sey erstlich $u = 1$ da wird $1 - 10 + 17 - 2 = 6$ und also nicht 0, setzt man aber $u = 2$ so wird $8 - 40 + 34 - 2 = 0$ welches ein Genüge leistet. Dahero ist eine Wurzel $u = 2$; um die andere zu finden so theile man durch $u - 2$ wie folget:

$$\begin{array}{rl}
u - 2) & u^3 - 10uu + 17u - 2 \quad (uu - 8u + 1 \\
& \underline{u^3 - 2uu} \\
& - 8uu + 17u \\
& \underline{- 8uu + 16u} \\
& u - 2 \\
& \underline{u - 2} \\
& 0
\end{array}$$

und da bekommt man $uu - 8u + 1 = 0$, oder $uu = 8u - 1$, woraus die beyden übrigen Wurzeln sind $u = 4 \pm \sqrt{15}$. Da nun $z = \frac{1}{2}u$, so sind die drey Wurzeln der Cubischen Gleichung:

$$\text{I.)}\ z = p = 1, \quad \text{II.)}\ z = q = \frac{4 + \sqrt{15}}{2}, \quad \text{III.)}\ z = r = \frac{4 - \sqrt{15}}{2}.$$

222.

Da wir nun p, q und r gefunden, so werden ihre Quadrat-Wurzeln seyn

$$\sqrt{p} = 1, \quad \sqrt{q} = \frac{\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})}}{2}, \quad \sqrt{r} = \frac{\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})}}{2}.$$

Aus demjenigen aber was oben [§ 115] ist gezeigt worden, da die Quadrat-Wurzel aus $(a \pm \sqrt{b})$, wann $\sqrt{(aa - b)} = c$, also ausgedrückt worden

$$\sqrt{(a \pm \sqrt{b})} = \sqrt{\frac{a + c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - c}{2}},$$

so ist für unsern Fall $a = 8$ und $\sqrt{b} = 2\sqrt{15}$ folglich $b = 60$ dahero $c = 2$, hieraus bekommen wir $\sqrt{(8 + 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, und $\sqrt{(8 - 2\sqrt{15})} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$. Da wir nun gefunden haben $\sqrt{p} = 1$, $\sqrt{q} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ und $\sqrt{r} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$, so werden die vier Werthe für x, da wir wißen daß derselben Product positiv seyn muß, folgender Gestalt beschaffen seyn:

$$\text{I.)}\quad x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r} = 1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$\text{II.)}\quad x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r} = 1 - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{5}$$

$$\text{III.)}\quad x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r} = -1 + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{IV.)}\quad x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r} = -1 - \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3}.$$

Da nun für die gegebene Gleichung $y = x + 2$ war, so sind die vier Wurzeln derselben

$$\text{I.)}\quad y = 3 + \sqrt{5},$$

$$\text{II.)}\quad y = 3 - \sqrt{5},$$

$$\text{III.)}\quad y = 1 + \sqrt{3},$$

$$\text{IV.)}\quad y = 1 - \sqrt{3}.$$

CAPITEL 16

VON DER AUFLÖSUNG DER GLEICHUNGEN DURCH DIE NÄHERUNG

223.

Wann die Wurzeln einer Gleichung nicht rational sind, dieselben mögen nun durch Wurzel-Zeichen ausgedrückt werden können oder nicht, wie bey den höhern Gleichungen geschiehet, so muß man sich begnügen den Werth derselben durch Näherungen zu bestimmen, dergestalt, daß man dem wahren Werth derselben immer näher komme, bis der Fehler endlich vor nichts zu achten. Es sind zu diesem Ende verschiedene Mittel erfunden worden, wovon wir die vornehmsten hier erklären wollen.

224.

Das erste Mittel besteht darinn, daß man den Werth einer Wurzel schon ziemlich genau erforscht habe, also daß man wiße daß derselbe z. E. größer sey als 4, und doch kleiner als 5. Alsdann setze man den Werth der Wurzel $= 4 + p$, da dann p gewis einen Bruch bedeuten wird; ist aber p ein Bruch und also kleiner als 1, so ist das Quadrat von p, der Cubus und eine jegliche höhere Potestät noch weit kleiner, dahero man dieselbe aus der Rechnung weglaßen kann, weil es doch nur auf eine Näherung ankommt. Hat man nun weiter diesen Bruch p nur beynahe bestimmt, so erkennt man die Wurzel $4 + p$ schon genauer; hieraus erforscht man gleicher gestalt einen noch genauern Werth, und geht solchergestalt so weit fort, bis man der Wahrheit so nahe gekommen als man wünschet.

225.

Wir wollen dieses zuerst durch ein leichtes Exempel erläutern, und die Wurzel dieser Gleichung $xx = 20$ durch Näherungen bestimmen.

Hier sieht man nun daß x größer ist als 4 und doch kleiner als 5, dahero setze man $x = 4 + p$, so wird $xx = 16 + 8p + pp = 20$; weil aber pp sehr klein ist, so laße man dieses Glied weg, um diese Gleichung zu haben $16 + 8p = 20$, oder $8p = 4$, daraus wird $p = \frac{1}{2}$ und $x = 4\frac{1}{2}$ welches der Wahrheit schon weit näher kommt; man setze dahero ferner $x = 4\frac{1}{2} + p$ so ist man gewis, daß p ein noch weit kleinerer Bruch seyn werde, als vorher; dahero pp jetzt mit größerm Recht weggelaßen werden könne. Man wird also haben $xx = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, oder $9p = -\frac{1}{4}$, und also $p = -\frac{1}{36}$, folglich $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$. Wollte man der Wahrheit noch näher kommen, so setze man $x = 4\frac{17}{36} + p$, so bekommt man $xx = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$; dahero $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$ mit 36 multiplicirt kommt $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$ und daraus wird $p = -\frac{1}{36 \cdot 322} = -\frac{1}{11592}$, folglich $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{5473}{11592}$, welcher Werth der Wahrheit so nahe kommt, daß der Fehler sicher als nichts angesehen werden kann.

226.

Um dieses allgemeiner zu machen, so sey gegeben diese Gleichung $xx = a$ und man wiße schon daß x größer ist als n, doch aber kleiner als $n + 1$;

man setze allso $x = n + p$, also daß p ein Bruch seyn muß, und dahero pp als sehr klein verworfen werden kann, daraus bekommt man

$$xx = nn + 2np = a,$$

also $2np = a - nn$ und $p = \frac{a - nn}{2n}$, folglich $x = n + \frac{a - nn}{2n} = \frac{nn + a}{2n}$. Kam nun n der Wahrheit schon nahe, so kommt dieser neue Werth $\frac{nn + a}{2n}$ der Wahrheit noch weit näher. Diesen setze man von neuem für n, so wird man der Wahrheit noch näher kommen, und wann man diesen neuern Werth nochmahl für n setzet, so wird man noch näher zutreffen; und solchergestalt kann man fortgehen so weit man will.

Es sey z. E. $a = 2$, oder man verlangt die Quadrat-Wurzel aus 2 zu wißen: hat man nun dafür schon einen ziemlich nahen Werth gefunden welcher n gesetzt werde, so wird $\frac{nn + 2}{2n}$ einen noch näheren Werth geben. Es sey dahero

I.) $n = 1$ so wird $x = \frac{3}{2}$,

II.) $n = \frac{3}{2}$ so wird $x = \frac{17}{12}$,

III.) $n = \frac{17}{12}$ so wird $x = \frac{577}{408}$,

welcher letztere Werth dem $\sqrt{2}$ schon so nahe kommt, daß das Quadrat davon $= \frac{332929}{166464}$ nur um $\frac{1}{166464}$ größer ist als 2.

227.

Eben so kan man verfahren, wann die Cubic-Wurzel oder eine noch höhere Wurzel durch die Näherung gefunden werden soll.

Es sey gegeben diese Cubische Gleichung $x^3 = a$ oder man verlange $\sqrt[3]{a}$ zu finden; dieselbe sey nun bey nahem $= n$ und man setze $x = n + p$; so wird, wann man pp und die höhern Potestäten davon wegläßt,

$$x^3 = n^3 + 3nnp = a,$$

dahero $3nnp = a - n^3$ und $p = \frac{a - n^3}{3nn}$: folglich $x = \frac{2n^3 + a}{3nn}$. Kommt also n dem $\sqrt[3]{a}$ schon nahe, so kommt diese Form noch weit näher. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n so wird diese Formel der Wahrheit noch weit näher kommen, und so kann man fortgehen so weit als man will. Es sei z. E. $x^3 = 2$ oder man verlange $\sqrt[3]{2}$ zu finden, welchem die Zahl n schon ziemlich nahe komme, so wird diese Formel $x = \frac{2n^3+2}{3nn}$ noch näher kommen; also setze man:

$$\text{I.)}\quad n = 1 \quad \text{so wird} \quad x = \tfrac{4}{3}$$

$$\text{II.)}\quad n = \tfrac{4}{3} \quad \text{so wird} \quad x = \tfrac{91}{72}$$

$$\text{III.)}\quad n = \tfrac{91}{72} \quad \text{so wird} \quad x = \tfrac{1126819}{894348}$$ [1])

228.

Diese Methode kann mit gleichem Fortgang gebraucht werden um die Wurzel aus allen Gleichungen durch Näherungen zu finden. Es sey zu diesem Ende die folgende allgemeine Cubische Gleichung gegeben

$$x^3 + axx + bx + c = 0,$$

wo n einer Wurzel derselben schon ziemlich nahe kommt; man setze daher $x = n - p$ und da p ein Bruch seyn wird, so laße man pp und die höhern Potestäten davon weg; solcher gestalt bekommt man $xx = nn - 2np$ und $x^3 = n^3 - 3nnp$, woraus diese Gleichung entsteht:

$$n^3 - 3nnp + ann - 2anp + bn - bp + c = 0, \quad \text{oder}$$
$$n^3 + ann + bn + c = 3nnp + 2anp + bp = (3nn + 2an + b)p:$$

dahero $p = \frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}$ und folglich bekommen wir für x folgenden genaueren Werth $x = n - \left(\frac{n^3 + ann + bn + c}{3nn + 2an + b}\right) = \frac{2n^3 + ann - c}{3nn + 2an + b}$. Setzt man nun diesen neuen Werth wiederum für n, so erhält man dadurch einen, der der Wahrheit noch näher kommt.

229.

Es sey z. E. $x^3 + 2xx + 3x - 50 = 0$, wo $a = 2$, $b = 3$ und $c = -50$, dahero wann n einer Wurzel schon nahe kommt, so wird ein noch näherer Werth seyn $x = \frac{2n^3 + 2nn + 50}{3nn + 4n + 3}$. Nun aber kommt der Werth $x = 3$ der Wahrheit schon ziemlich nahe; dahero setze man $n = 3$ so bekommt man $x = \frac{61}{21}$. Wollte man nun diesen Werth wiederum für n schreiben, so würde man einen neuen Werth bekommen, der der Wahrheit noch weit näher käme.

1) Im Original steht der unrichtige Bruch $x = \frac{162130896}{128634294}$. H. W.

230.

Von höheren Gleichungen wollen wir nur dieses Exempel beyfügen $x^5 = 6x + 10$ oder $x^5 - 6x - 10 = 0$, wo leicht zu ersehen, daß 1 zu klein und 2 zu groß sey. Es sey aber $x = n$ ein schon naher Werth und man setze $x = n + p$, so wird $x^5 = n^5 + 5n^4p$ und also $n^5 + 5n^4p = 6n + 6p + 10$, oder $5n^4p - 6p = 6n + 10 - n^5$ und folglich $p = \frac{6n + 10 - n^5}{5n^4 - 6}$ und dahero $x = \frac{4n^5 + 10}{5n^4 - 6}$. Man setze nun $n = 1$ so wird $x = \frac{14}{-1} = -14$, welcher Werth gantz ungeschickt ist, so daher rührt daß der nahe Werth n gar zu klein war, man setze dahero $n = 2$ so wird $x = \frac{138}{74} = \frac{69}{37}$, welcher der Wahrheit schon weit näher kommt. Wollte man sich nun die Mühe geben, und für n diesen Bruch $\frac{69}{37}$ schreiben, so würde man zu einem noch weit genauern Werth der Wurzel x gelangen.

231.

Dieses ist nun die bekanteste Art die Wurzeln der Gleichung durch Näherungen zu finden, welche auch in allen Fällen mit Nutzen kann angebracht werden.

Jedoch wollen wir noch eine andere Art anzeigen welche wegen der Leichtigkeit der Rechnung unsere Aufmercksamkeit verdienet. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man für eine jede Gleichung eine Reihe von Zahlen suche, als a, b, c, etc. die so beschaffen sind, daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt den Werth der Wurzel um so viel genauer anzeige, je weiter man diese Reihe Zahlen fortsetzet.

Laßt uns setzen, wir seyen damit schon gekommen bis zu den Gliedern p, q, r, s, t, etc. so muß $\frac{q}{p}$ die Wurzel x schon ziemlich genau anzeigen, oder es wird seyn $\frac{q}{p} = x$ beyläufig.

Eben so wird man auch haben $\frac{r}{q} = x$, woraus wir durch die Multiplication erhalten $\frac{r}{p} = xx$. Da ferner auch $\frac{s}{r} = x$ so wird ebenfals $\frac{s}{p} = x^3$, und da weiter $\frac{t}{s} = x$ so wird $\frac{t}{p} = x^4$, und so weiter.

232.

Um dieses zu erläutern, wollen wir mit dieser Quadratischen Gleichung anfangen $xx = x + 1$, und in der obgedachten Reihe von Zahlen kämen nun diese Glieder vor p, q, r, s, t, etc. Da nun $\frac{q}{p} = x$ und $\frac{r}{p} = xx$, so erhalten wir daraus diese Gleichung: $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$ oder $q + p = r$. Eben so wird auch seyn $s = r + q$ und $t = s + r$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied unserer Reihe Zahlen die Summe ist der beyden vorhergehenden, wodurch die Reihe so weit man will leicht kann fortgesetzt werden, wann man nur einmahl die zwey ersten Glieder hat; dieselben aber kann man nach Belieben annehmen. Dahero setze man dafür 0, 1, so wird unsere Reihe also herauskommen: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc. wo von den entfernteren Gliedern ein jedes durch das vorhergehende dividirt den Werth für x so viel genauer anzeigen wird, als man die Reihe weiter fortgesetzt. Von Anfang ist zwar der Fehler sehr groß, wird aber je weiter man geht geringer. Diese der Wahrheit immer näher kommende Werthe für x gehen demnach fort wie folget:

$$x = \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \frac{21}{13},\ \frac{34}{21},\ \frac{55}{34},\ \frac{89}{55},\ \frac{144}{89}\ \text{etc.}$$

wovon z. E. $x = \frac{21}{13}$ giebt $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, wo der Fehler nur $\frac{1}{169}$ beträgt, die folgende Brüche aber kommen der Wahrheit immer näher.

233.

Laßt uns nun auch diese Gleichung betrachten $xx = 2x + 1$, und weil allezeit $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$, so erhalten wir $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, oder $r = 2q + p$; woraus wir erkennen, daß ein jedes Glied doppelt genommen nebst dem vorhergehenden das folgende giebt. Wann wir also wiederum mit 0, 1 anfangen so bekommen wir die folgende Reihe:

0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408 etc.

daher der gesuchte Werth von x immer genauer durch folgende Brüche ausgedrückt wird,

$$x = \frac{1}{0},\ \frac{2}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{12}{5},\ \frac{29}{12},\ \frac{70}{29},\ \frac{169}{70},\ \frac{408}{169}\ \text{etc.}$$

welche folglich dem wahren Werth $x = 1 + \sqrt{2}$ immer näher kommen. Nimmt man nun 1 weg so geben folgende Brüche den Werth von $\sqrt{2}$ immer genauer

$$\frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \frac{239}{169}\ \text{etc.}$$

von welchen $\frac{99}{70}$ zum Quadrat hat $\frac{9801}{4900}$, so nur um $\frac{1}{4900}$ größer ist als 2.

234.

Bey höhern Gleichungen findet diese Methode ebenfalls statt, als wann diese Cubische Gleichung gegeben wäre: $x^3 = xx + 2x + 1$ so setze man $x = \frac{q}{p}$, $xx = \frac{r}{p}$ und $x^3 = \frac{s}{p}$, und da bekommt man $s = r + 2q + p$, woraus man sieht wie man aus drey Gliedern p, q und r das folgende s finden soll, wo man wiederum den Anfang nach Belieben machen kann, eine solche Reihe wird demnach seyn

$$0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 6,\ 13,\ 28,\ 60,\ 129 \text{ etc.}$$

woraus folgende Brüche den Werth für x immer genauer geben werden

$$x = \frac{0}{0},\ \frac{1}{0},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{6}{3},\ \frac{13}{6},\ \frac{28}{13},\ \frac{60}{28},\ \frac{129}{60} \text{ etc.}$$

wovon die ersten gräulich fehlen, dieser aber $x = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}$ in der Gleichung giebt $\frac{3375}{343} = \frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$ wo der Fehler $\frac{13}{343}$ ist.

235.

Es ist aber hier wohl zu bemercken, daß nicht alle Gleichungen so beschaffen sind, daß man darauf diese Methode anwenden könne; insonderheit wo das zweyte Glied fehlt, kann dieselbe nicht gebraucht werden. Dann es sey z. E. $xx = 2$ und man wollte setzen $x = \frac{q}{p}$ und $xx = \frac{r}{p}$ so würde man bekommen $\frac{r}{p} = 2$ oder $r = 2p$ das ist $r = 0q + 2p$, woraus diese Reihe Zahlen entstünde:

$$1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 8,\ 8,\ 16,\ 16,\ 32,\ 32 \text{ etc.}$$

daraus nichts geschloßen werden kann, indem ein jedes Glied durch das vorhergehende dividirt, entweder $x = 1$ oder $x = 2$ giebt. Es kann aber diesem geholfen werden, wann man setzt $x = y - 1$: dann bekommt man $yy - 2y + 1 = 2$, und wann man hier setzt $y = \frac{q}{p}$ und $yy = \frac{r}{p}$ so erhält man die schon oben gegebene Näherung.

236.

Eben so verhält es sich auch mit dieser Gleichung $x^3 = 2$, aus welcher eine solche Reihe Zahlen nicht gefunden wird, die uns den Werth von $\sqrt[3]{2}$ anzeigte. Man darf aber nur setzen $x = y - 1$ um diese Gleichung zu bekommen $y^3 - 3yy + 3y - 1 = 2$, oder $y^3 = 3yy - 3y + 3$. Setzt man nun für die Reihe Zahlen $y = \frac{q}{p}$, $yy = \frac{r}{p}$ und $y^3 = \frac{s}{p}$; so wird seyn $s = 3r - 3q + 3p$; woraus man sieht, wie aus drey Gliedern das folgende zu bestimmen. Man nimmt also die drey ersten Glieder nach Belieben an, als z. E. 0, 0, 1, so bekommt man diese Reihe:

$$0,\ 0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 12,\ 27,\ 63,\ 144,\ 324,\ \text{etc.}$$

wovon die zwey letzten Glieder geben $y = \frac{324}{144}$ und $x = \frac{5}{4}$, welcher Bruch auch der Cubic-Wurzel aus 2 ziemlich nahe kommt, denn der Cubus von $\frac{5}{4}$ ist $\frac{125}{64}$ dagegen ist $2 = \frac{128}{64}$.

237.

Bey dieser Methode ist noch ferner zu bemercken, daß wann die Gleichung eine Rational-Wurzel hat, und der Anfang der Reihe also angenommen wird, daß daraus diese Wurzel herauskomme, so wird auch ein jegliches Glied derselben, durch das vorhergehende dividirt, eben dieselbe Wurzel genau geben.

Um dieses zu zeigen, so sey diese Gleichung gegeben $xx = x + 2$, worinn eine Wurzel ist $x = 2$; da man nun für die Reihe diese Formel hat $r = q + 2p$, wann man den Anfang setzt 1, 2, so erhält man diese Reihe

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \text{etc.}$$

welches eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= 2$.

Eben dieses erhellet auch aus dieser Cubischen Gleichung $x^3 = xx + 3x + 9$, wovon eine Wurzel ist $x = 3$. Setzt man nun für den Anfang der Reihe 1, 3, 9, so findet man aus der Formel $s = r + 3q + 9p$ diese Reihe

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ \text{etc.}$$

welches wieder eine Geometrische Progression ist, deren Nenner $= 3$.

238.

Weicht aber der Anfang der Reihe von dieser Wurzel ab, so folgt daraus nicht, daß man dadurch immer genauer zu derselben Wurzel kommen werde: dann wann die Gleichung mehr Wurzeln hat, so nähert sich diese Reihe immer nur der größten Wurzel, und die kleinere erhält man nicht anders, als wann just der Anfang nach derselben eingerichtet wird. Dieses wird durch ein

Exempel deutlich werden. Es sey die Gleichung $xx = 4x - 3$, deren zwey Wurzeln sind $x = 1$ und $x = 3$. Nun ist die Formel für die Reihe Zahlen $r = 4q - 3p$ und setzt man für den Anfang derselben 1, 1, nemlich für die kleinere Wurzel, so wird die gantze Reihe 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, etc. Setzt man aber den Anfang 1, 3, worinn die größere Wurzel enthalten, so wird die Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 etc. wo alle Glieder die Wurzel 3 genau angeben. Setzt man aber den Anfang anders, wie man will, nur daß darin die kleinere Wurzel nicht genau enthalten ist, so nähert sich die Reihe immer der größern Wurzel 3, wie aus folgenden Reihen zu sehen:

der Anfang sey	0,	1,	4,	13,	40,	121,	364,	etc.		
ferner	1,	2,	5,	14,	41,	122,	365,	etc.		
ferner	2,	3,	6,	15,	42,	123,	366,	1095,	etc.	
ferner	2,	1,	-2,	-11,	-38,	-119,	-362,	-1091,	-3278,	etc.

wo die letzten Glieder durch die vorhergehenden dividirt immer der größern Wurzel 3 näher kommen, niemals aber der kleinern.

239.

Diese Methode kann auch so gar auf Gleichungen, die in das unendliche fortlaufen, angewendet werden, zum Exempel diene diese Gleichung

$$x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} + x^{\infty-4} + \text{ etc.}$$

für welche die Reihe Zahlen so beschaffen seyn muß, daß eine jede gleich sey der Summe aller vorhergehenden, woraus diese Reihe entsteht

1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, etc.

woraus man sieht, daß die größte Wurzel dieser Gleichung sey $x = 2$, gantz genau; welches auch auf diese Art gezeigt werden kann. Man theile die Gleichung durch x^{∞}, so bekommt man $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ etc. welches eine Geometrische Progression ist, davon die Summe gefunden wird $= \frac{1}{x-1}$ also daß $1 = \frac{1}{x-1}$; multiplicire mit $x - 1$, so wird $x - 1 = 1$ und $x = 2$.[1])

1) Siehe die Anmerkung p. 108. H. W.

240.

Außer diesen zwey Methoden die Wurzel der Gleichung durch Näherung zu finden, trift man hin und wieder noch andere an, welche aber entweder zu mühsam, oder nicht allgemein sind. Vor allen aber verdienet die hier zuerst erklärte Methode den Vorzug, als welche auf alle Arten von Gleichungen mit erwünschtem Erfolg kann angewendet werden, dahingegen die andere öfters eine gewisse Vorbereitung in der Gleichung erfordert, ohne welche dieselbe nicht einmahl gebraucht werden kann, wie wir hier bey verschiedenen Exempeln dargethan haben.

ENDE DES ERSTEN ABSCHNITTS
VON DEN ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN
UND DERSELBEN AUFLÖSUNG

DES ZWEYTEN THEILS ZWEYTER ABSCHNITT

VON DER UNBESTIMMTEN ANALYTIC

CAPITEL 1

VON DER AUFLÖSUNG DER EINFACHEN GLEICHUNGEN WORINNEN MEHR ALS EINE UNBEKANNTE ZAHL VORKOMMT

1.

Aus dem obigen ist zu ersehen, wie eine unbekante Zahl durch eine Gleichung; zwey unbekante Zahlen aber durch zwey Gleichungen; 3 durch 3; 4 durch 4 und so fort bestimmt werden können; also daß allezeit eben so viel Gleichungen erfordert werden, als unbekante Zahlen bestimmt werden sollen, wann anders die Frage selbst bestimmt ist.

Wann aber weniger Gleichungen aus der Frage gezogen werden können, als unbekante Zahlen angenommen worden, so bleiben einige unbestimmt und werden unserer Willkühr überlaßen; dahero solche Fragen unbestimmt genennt werden, und welche einen eigenen Teil der Analytic ausmachen, so die unbestimmte Analytic genennt zu werden pflegt.

2.

Da in diesen Fällen eine oder mehr unbekante Zahlen nach unserm Belieben angenommen werden können, so finden in der That viele Auflösungen statt.

Allein es wird gemeiniglich diese Bedingung hinzu gefügt, daß die gesuchten Zahlen, gantze und so gar positiv, oder zum wenigsten Rational-Zahlen seyn sollen; wodurch die Anzahl aller möglichen Auflösungen ungemein eingeschränkt wird, also daß öfters nur etliche wenige öfters zwar auch unendlich viele, welche aber nicht so leicht in die Augen fallen, Platz finden, bisweilen auch so gar keine einzige möglich ist. Daher dieser Theil der Analytic öfters gantz besondere Kunst-Griffe erfordert, und nicht wenig dienet den Verstand der Anfänger aufzuklären, und denselben eine größere Fertigkeit im Rechnen beyzubringen.

3.

Wir wollen mit einer der leichtesten Fragen den Anfang machen, und zwey Zahlen suchen, deren Summe 10 seyn soll, wobey es sich versteht, daß diese Zahlen gantz und Positiv seyn sollen.

Dieselben Zahlen seyen nun x und y, also daß seyn soll $x+y=10$, woraus gefunden wird $x=10-y$, also daß y nicht anders bestimmt wird, als daß es eine gantze und positive Zahl seyn soll; man könnte dahero für y alle gantze Zahlen, von 1 bis ins unendliche annehmen, da aber x auch positiv seyn muß, so kann y nicht größer als 10 angenommen werden, weil sonsten x negativ seyn würde; und wann auch 0 nicht gelten soll, so kann y höchstens 9 gesetzt werden, weil sonsten $x=0$ würde; woher nur die folgenden Auflösungen Platz haben:

wann	$y=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,$
so wird	$x=9,\ 8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1.$

Von diesen neun Auflösungen aber sind die vier letztern mit den vier erstern einerley, dahero in allen nur fünf verschiedene Auflösungen statt finden.

Sollten drey Zahlen verlangt werden, deren Summe 10 wäre, so dürfte man nur die eine von den hier gefundenen beyden Zahlen noch in zwey Theile zertheilen, woraus man eine größere Menge Auflösungen erhalten würde.

4.

Da dieses gar keine Schwierigkeit hat, so wollen wir zu etwas schwereren Fragen fortschreiten.

I. Frage: Man soll 25 in zwey Theile zertheilen, wovon der eine sich durch 2 der andere aber durch 3 theilen laße?

Es sey der eine Theil $2x$, der andere $3y$, so muß seyn $2x+3y=25$. Also $2x=25-3y$. Man theile durch 2 so kommt $x=\frac{25-3y}{2}$, woraus wir zuerst sehen, daß $3y$ kleiner seyn muß als 25 und dahero y nicht größer als 8. Man ziehe so viel gantze daraus als möglich, das ist man theile den Zehler $25-3y$ durch den Nenner 2, so wird $x=12-y+\frac{1-y}{2}$; also muß sich $1-y$

oder auch $y-1$ durch 2 theilen laßen. Man setze dahero $y-1=2z$ und also $y=2z+1$, so wird $x=12-2z-1-z=11-3z$; weil nun y nicht größer sein kann als 8, so können auch für z keine andern Zahlen angenommen werden als solche, die $2z+1$ nicht größer geben als 8. Folglich muß z kleiner seyn als 4, dahero z nicht größer als 3 genommen werden kann, woraus diese Auflösungen folgen:

Setzt man	$z=0$,	$z=1$,	$z=2$,	$z=3$,
so wird	$y=1$,	$y=3$,	$y=5$,	$y=7$,
und	$x=11$,	$x=8$,	$x=5$,	$x=2$,

dahero die gesuchten zwey Theile von 25 seyn werden:

I.) $22+3$, II.) $16+9$, III.) $10+15$, IV.) $4+21$.

5.

II. Frage: Man theile 100 in zwey Theile, so daß der erste sich durch 7, der andere aber durch 11 theilen laße?

Der erste Theil sey demnach $7x$ der andere aber $11y$, so muß seyn

$$7x+11y=100;\ \text{dahero}\ x=\frac{100-11y}{7}=\frac{98+2-7y-4y}{7},$$

also wird $x=14-y+\frac{2-4y}{7}$; also muß $2-4y$ oder $4y-2$ sich durch 7 theilen laßen. Läßt sich aber $4y-2$ durch 7 theilen, so muß sich auch die Hälfte davon $2y-1$ durch 7 theilen laßen, man setze dahero $2y-1=7z$, oder $2y=7z+1$, so wird $x=14-y-2z$; da aber seyn muß $2y=7z+1=6z+z+1$, so hat man $y=3z+\frac{z+1}{2}$. Nun setze man $z+1=2u$ oder $z=2u-1$, so wird $y=3z+u$. Folglich kann man für u eine jede gantze Zahl nehmen, daraus weder x noch y negativ wird, und alsdann bekommt man: $y=7u-3$ und $x=19-11u$.

Nach der ersten Formel muß $7u$ größer seyn als 3, nach der andern aber muß $11u$ kleiner seyn als 19, oder u kleiner als $\frac{19}{11}$, also daß u nicht einmahl 2 seyn kann, da nun u unmöglich nicht 0 seyn kann, so bleibt nur ein einiger Werth übrig nemlich $u=1$, daraus bekommen wir $x=8$ und $y=4$; dahero die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden I.) 56 und II.) 44.

6.

III. Frage: Man theile 100 in zwey solche Theile, wann man den ersten theilt durch 5, daß 2 übrig bleiben, und wann man den zweyten theilt durch 7 daß 4 übrig bleiben?

Da der erste Theil durch 5 dividirt 2 übrig läßt, so setze man denselben $5x + 2$, und weil der andere durch 7 dividirt 4 übrig läßt, so setze man denselben $7y + 4$; also wird

$$5x + 7y + 6 = 100 \quad \text{oder} \quad 5x = 94 - 7y = 90 + 4 - 5y - 2y,$$

hieraus $x = 18 - y - \frac{2y-4}{5}$; also muß $4 - 2y$, oder $2y - 4$, oder auch die Hälfte davon $y - 2$ durch 5 theilbahr seyn. Man setze dahero $y - 2 = 5z$ oder $y = 5z + 2$, so wird $x = 16 - 7z$; woraus erhellet daß $7z$ kleiner seyn muß als 16, folglich z kleiner als $\frac{16}{7}$ und also nicht größer als 2. Wir haben also hier drey Auflösungen.

I.) $z = 0$, giebt $x = 16$, und $y = 2$; woraus die beyden gesuchten Theile von 100 seyn werden $82 + 18$.

II.) $z = 1$, giebt $x = 9$, und $y = 7$; woraus die beyden Theile seyn werden $47 + 53$.

III.) $z = 2$, giebt $x = 2$, und $y = 12$; woraus die beyden Theile sind $12 + 88$.

7.

IV. Frage: Zwey Bäuerinnen haben zusammen 100 Eyer, die erste spricht: wann ich die meinigen je zu 8 überzähle, so bleiben 7 übrig, die andere spricht: wann ich die meinigen zu 10 überzähle so bleiben mir auch 7 übrig; wie viel hat jede Eyer gehabt?

Weil die Zahl der ersten durch 8 dividirt 7 übrig läßt, die Zahl der andern aber durch 10 dividirt auch 7 übrig läßt, so setze man die Zahl der ersten $8x + 7$, der andern aber $10y + 7$, also daß $8x + 10y + 14 = 100$, oder $8x = 86 - 10y$, oder $4x = 43 - 5y = 40 + 3 - 4y - y$; dahero setze man $y - 3 = 4z$, so wird $y = 4z + 3$ und $x = 10 - 4z - 3 - z = 7 - 5z$, folglich muß $5z$ kleiner seyn als 7 und also z kleiner als 2, woraus diese zwey Auflösungen entspringen:

I.) $z = 0$, giebt $x = 7$, und $y = 3$; dahero die erste Bäuerin gehabt hat 63 Eyer, die andere aber 37.

II.) $z = 1$, giebt $x = 2$, und $y = 7$; dahero die erste Bäuerin gehabt hat 23 Eyer, die andere aber 77.

8.

V. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern haben zusammen verzehrt 1000 Copeken. Ein Mann hat bezahlt 19 Cop. eine Frau aber 13 Cop. wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Männer sey $= x$, der Weiber aber $= y$, so bekommt man diese Gleichung $19x + 13y = 1000$. Daraus wird $13y = 1000 - 19x$ oder $13y = 988 + 12 - 13x - 6x$, also wird $y = 76 - x + \frac{12-6x}{13}$; also muß sich $12 - 6x$ oder $6x - 12$, und auch der sechste Theil davon $x - 2$ durch 13 theilen lassen. Man setze also $x - 2 = 13z$, so wird $x = 13z + 2$ und $y = 76 - 13z - 2 - 6z$ oder $y = 74 - 19z$; also muß z kleiner seyn als $\frac{74}{19}$ und folglich kleiner als 4, dahero folgende vier Auflösungen Platz finden:

I.) $z = 0$, giebt $x = 2$ und $y = 74$. Also waren 2 Männer und 74 Weiber; jene haben bezahlt 38 Cop. diese aber 962 Cop.

II.) $z = 1$, giebt die Zahl der Männer $x = 15$ und die Zahl der Weiber $y = 55$; jene haben verzehrt 285 Cop. diese aber 715 Cop.

III.) $z = 2$, giebt die Zahl der Männer $x = 28$ und die Zahl der Weiber $y = 36$; jene haben verzehrt 532 Cop. diese aber 468 Cop.

IV.) $z = 3$, giebt die Zahl der Männer $x = 41$, und die Zahl der Weiber $y = 17$; jene haben verzehrt 779 Cop. diese aber 221 Cop.

9.

VI. Frage: Ein Amtman kauft Pferde und Ochsen zusammen für 1770 Rthl. Zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für einen Ochsen aber 21 Rthl. wie viel sind es Pferde und Ochsen gewesen?

Die Zahl der Pferde sey $= x$, der Ochsen aber $= y$, so muß seyn: $31x + 21y = 1770$ oder $21y = 1770 - 31x = 1764 + 6 - 21x - 10x$, und also $y = 84 - x + \frac{6-10x}{21}$; dahero muß $10x - 6$ und also auch die Hälfte $5x - 3$ durch 21 theilbahr seyn; man setze also $5x - 3 = 21z$, dahero $5x = 21z + 3$ also daß $y = 84 - x - 2z$. Da nun $x = \frac{21z+3}{5}$ oder $x = 4z + \frac{z+3}{5}$, so setze man $z + 3 = 5u$, so wird

$$z = 5u - 3, \quad x = 21u - 12 \quad \text{und} \quad y = 84 - 21u + 12 - 10u + 6 = 102 - 31u;$$

dahero u größer seyn muß als 0 und doch kleiner als 4, woraus wir diese drey Auflösungen erhalten:

I.) $u = 1$, giebt die Zahl der Pferde $x = 9$ und der Ochsen $y = 71$; jene haben gekost 279 Rthl. diese aber 1491, zusammen 1770 Rthl.

II.) $u = 2$, giebt die Zahl der Pferde $x = 30$ und der Ochsen $y = 40$; jene haben gekost 930 Rthl. diese aber 840, zusammen 1770 Rthl.

III.) $u = 3$, giebt die Zahl der Pferde $x = 51$ und der Ochsen $y = 9$; jene haben gekost 1581 Rthl. diese aber 189 Rthl. zusammen 1770 Rthl.

10.

Die bisherigen Fragen leiten auf eine solche Gleichung $ax + by = c$, wo a, b und c gantze und positive Zahlen bedeuten, und für x und y auch gantze und positive Zahlen gefordert werden.

Wann aber b negativ ist, und die Gleichung eine solche Form erhält $ax = by + c$, so sind die Fragen von einer gantz andern Art, und laßen eine unendliche Menge Auflösungen zu, wovon die Methode noch in diesem Capitel erkläret werden soll. Die leichtesten Fragen von dieser Art sind dergleichen: Wann man z. E. zwey Zahlen sucht, deren Differenz seyn soll 6, so setze man die kleinere $= x$, die größere $= y$, und da muß seyn $y - x = 6$, folglich $y = 6 + x$. Hier hindert nun nicht, daß nicht vor x alle mögliche gantze Zahlen sollten genommen werden können, und was man immer vor eine nimmt, so wird y allezeit um 6 größer. Nehme man z. E. $x = 100$ so wäre $y = 106$; woraus gantz klar ist, daß unendlich viel Auflösungen statt finden.

11.

Hernach folgen die Fragen, wo $c = 0$ und ax schlecht weg dem by gleich seyn soll. Man suche nemlich eine Zahl, die sich so wohl durch 5 als auch durch 7 theilen laße, und setze diese Zahl $= N$, so muß erstlich seyn $N = 5x$, weil die Zahl N durch 5 theilbahr seyn soll; hernach muß auch seyn $N = 7y$, weil sich diese Zahl auch durch 7 soll theilen laßen; dahero bekommt man $5x = 7y$ und also $x = \frac{7y}{5}$; da sich nun 7 nicht theilen läßt durch 5, so muß sich y dadurch theilen laßen. Man setze demnach $y = 5z$, so wird $x = 7z$, dahero die gesuchte Zahl $N = 35z$, wo man für z eine jede gantze Zahl annehmen kann, also daß für N unendlich viel Zahlen angegeben werden können, welche sind:

35, 70, 105, 140, 175, 210, etc.

Wollte man, daß sich die Zahl N noch über dieses durch 9 theilen ließe, so wäre erstlich $N = 35z$, hernach müßte auch seyn $N = 9u$ allso $35z = 9u$ und daraus $u = \frac{35z}{9}$; woraus klar ist, daß sich z durch 9 muß theilen laßen. Es sey demnach $z = 9s$, so wird $u = 35s$ und die gesuchte Zahl $N = 315s$.

12.

Mehr Schwierigkeit hat es, wann die Zahl c nicht 0 ist, als wann seyn soll $5x = 7y + 3$, welche Gleichung herauskommt, wann eine solche Zahl N

gefunden werden soll, welche sich erstlich durch 5 theilen laße; wann aber dieselbe durch 7 dividirt wird 3 übrig bleiben, dann alsdann muß seyn $N = 5x$, hernach aber $N = 7y + 3$ und deswegen wird $5x = 7y + 3$ folglich

$$x = \frac{7y+3}{5} = \frac{5y+2y+3}{5} = y + \frac{2y+3}{5}.$$

Man setze $2y + 3 = 5z$, so wird $x = y + z$; da aber $2y + 3 = 5z$, oder $2y = 5z - 3$, so wird $y = \frac{5z-3}{2}$, oder $y = 2z + \frac{z-3}{2}$. Man setze nun $z - 3 = 2u$ so wird $z = 2u + 3$ und $y = 5u + 6$, und $x = y + z = 7u + 9$; folglich die gesuchte Zahl $N = 35u + 45$, wo für u alle gantze Zahlen können angenommen werden auch so gar negative, wann nur N positiv wird, welches hier geschiehet wann $u = -1$, dann da wird $N = 10$; die folgenden erhält man, wann man dazu immer 35 addirt, dahero die gesuchte Zahlen sind

10, 45, 80, 115, 150, 185, 220, etc.

13.

Die Auflösung solcher Fragen beruhet auf die Verhältniß der beyden Zahlen, wodurch getheilt werden soll, und nach der Beschaffenheit derselben wird die Auflösung bald kürtzer bald weitläuffiger; folgende Frage leidet eine kurtze Auflösung.

VII. Frage: Man suche eine Zahl, welche durch 6 dividirt 2 übrig laße, durch 13 aber dividirt 3 übrig laße?

Diese Zahl sey N, so muß erstlich seyn $N = 6x + 2$ hernach aber $N = 13y + 3$; also wird $6x + 2 = 13y + 3$ und $6x = 13y + 1$, daher

$$x = \frac{13y+1}{6} = 2y + \frac{y+1}{6}.$$

Man setze also $y + 1 = 6z$, so wird $y = 6z - 1$ und $x = 2y + z = 13z - 2$; folglich wird die gesuchte Zahl $N = 78z - 10$. Solche Zahlen sind demnach folgende 68, 146, 224, 302, 380, etc. welche nach einer Arithmetischen Progression fortgehen, deren Differenz ist $78 = 6 \cdot 13$. Wann man also nur eine von diesen Zahlen weis, so laßen sich alle übrigen leicht finden, indem man nur nöthig hat 78 immer dazu zu addiren, oder auch davon zu subtrahiren, so lange es angeht.

14.

Ein Exempel, wo es schwerer wird, mag folgendes seyn.

VIII. Frage: Man suche eine Zahl N welche durch 39 dividirt 16 übrig laße und durch 56 dividirt 27 übrig laße?

Erstlich muß also seyn $N = 39p + 16$ hernach aber $N = 56q + 27$; dahero wird $39p + 16 = 56q + 27$, oder $39p = 56q + 11$ und $p = \frac{56q + 11}{39}$, oder $p = q + \frac{17q + 11}{39} = q + r$; also daß $r = \frac{17q + 11}{39}$; daher wird $39r = 17q + 11$ und $q = \frac{39r - 11}{17} = 2r + \frac{5r - 11}{17} = 2r + s$; also daß $s = \frac{5r - 11}{17}$ oder $17s = 5r - 11$, daher wird $r = \frac{17s + 11}{5} = 3s + \frac{2s + 11}{5} = 3s + t$; also daß $t = \frac{2s + 11}{5}$, oder $5t = 2s + 11$ und so wird $s = \frac{5t - 11}{2} = 2t + \frac{t - 11}{2} = 2t + u$; also daß $u = \frac{t - 11}{2}$ und $t = 2u + 11$. Da nun kein Bruch mehr vorhanden, so kann man u nach Belieben annehmen und daraus erhalten wir rückwärts folgende Bestimmungen

$$\begin{aligned}
t &= 2u + 11 \\
s &= 2t + u = 5u + 22 \\
r &= 3s + t = 17u + 77 \\
q &= 2r + s = 39u + 176 \\
p &= q + r = 56u + 253
\end{aligned}$$

und endlich $N = 39 \cdot 56u + 9883$. Um die kleinste Zahl für N zu finden, setze man $u = -4$, so wird $N = 1147$; setzt man $u = x - 4$, so wird $N = 2184x - 8736 + 9893$, oder $N = 2184x + 1147$. Diese Zahlen machen demnach eine Arithmetische Progression, deren erstes Glied ist 1147 und die Differenz $= 2184$. Diese Zahlen sind demnach

1147, 3331, 5515, 7699, 9883, etc.

15.

Zur Uebung wollen wir noch einige Fragen beyfügen:

IX. Frage: Eine Gesellschaft von Männern und Weibern sind in einem Wirthshaus; ein Mann verzehrt 25 Cop. ein Weib aber 16 Cop. und es findet sich, daß die Weiber insgesammt einen Cop. mehr verzehrt haben, als die Männer; wie viel sind es Männer und Weiber gewesen?

Die Zahl der Weiber sey gewesen $= p$, der Männer aber $= q$, so haben die Weiber verzehret $16p$, die Männer aber $25q$; dahero muß seyn $16p = 25q + 1$ und da wird $p = \frac{25q + 1}{16} = q + \frac{9q + 1}{16} = q + r$; also daß $r = \frac{9q + 1}{16}$ oder $9q = 16r - 1$; dahero wird $q = \frac{16r - 1}{9} = r + \frac{7r - 1}{9} = r + s$, also daß $s = \frac{7r - 1}{9}$, oder $9s = 7r - 1$; dahero wird $r = \frac{9s + 1}{7} = s + \frac{2s + 1}{7} = s + t$, also daß $t = \frac{2s + 1}{7}$

oder $7t = 2s + 1$; dahero wird $s = \frac{7t-1}{2} = 3t + \frac{t-1}{2} = 3t + u$, also daß $u = \frac{t-1}{2}$ oder $2u = t - 1$, dahero $t = 2u + 1$. Hieraus erhalten wir nun rückwärts:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 1 \\ s &= 3t + u = 7u + 3 \\ r &= s + t = 9u + 4 \\ q &= r + s = 16u + 7 \\ p &= q + r = 25u + 11 \end{aligned}$$

dahero war die Anzahl der Weiber $25u + 11$, der Männer aber $16u + 7$, wo man für u in gantzen Zahlen anehmen kann was man will. Die kleinere Zahlen sind demnach nebst den folgenden wie hier stehet:

Anzahl der Weiber: $= 11,\ 36,\ 61,\ 86,\ 111,$ etc.
der Männer: $= 7,\ 23,\ 39,\ 55,\ 71,$ etc.

Nach der ersten Auflösung in die kleinste Zahlen haben die Weiber verzehrt 176 Cop. die Männer aber 175; also die Weiber einen Cop. mehr als die Männer.

16.

X. Frage: Einer kauft Pferde und Ochsen, zahlt für ein Pferd 31 Rthl. für einen Ochsen aber 20 Rthl. und es findet sich daß die Ochsen insgesammt 7 Rthl. mehr gekostet haben als die Pferde; wie viel sind es Ochsen und Pferde gewesen?

Es sey die Anzahl der Ochsen $= p$, der Pferde aber $= q$, so muß

$$\begin{array}{llll} 20p = 31q + 7, & \text{dahero} & p = \frac{31q+7}{20} = q + \frac{11q+7}{20} = q + r, & \text{dahero} \\ 20r = 11q + 7, & \text{und} & q = \frac{20r-7}{11} = r + \frac{9r-7}{11} = r + s, & \text{dahero} \\ 11s = 9r - 7, & \text{und} & r = \frac{11s+7}{9} = s + \frac{2s+7}{9} = s + t, & \text{dahero} \\ 9t = 2s + 7, & \text{und} & s = \frac{9t-7}{2} = 4t + \frac{t-7}{2} = 4t + u, & \text{dahero} \\ 2u = t - 7, & \text{und} & t = 2u + 7 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} s &= 4t + u = 9u + 28 \\ r &= s + t = 11u + 35 \\ q &= r + s = 20u + 63 \text{ Zahl der Pferde} \\ p &= q + r = 31u + 98 \text{ Zahl der Ochsen.} \end{aligned}$$

Hieraus findet man die kleinsten positiven Zahlen für p und q, wann man setzt $u = -3$; die größeren steigen nach Arithmetischen Progressionen wie folgt:

Zahl der Ochsen $p = 5$, 36, 67, 98, 129, 160, 191, 222, 253, etc.

Zahl der Pferde $q = 3$, 23, 43, 63, 83, 103, 123, 143, 163, etc.

17.

Wann wir bey diesem Exempel erwegen, wie die Buchstaben p und q durch die folgende bestimmt werden, so ist leicht einzusehen, daß solches auf der Verhältniß der Zahlen 31 und 20 beruhet, und zwar auf derjenigen, nach welcher der größte gemeine Theiler dieser beyden Zahlen gefunden zu werden pflegt, wie aus folgendem erhellet:

$$\begin{array}{ccccccc}
20 & 31 & 1 & & & & \\
 & \underline{20} & & & & & \\
 & 11 & 20 & 1 & & & \\
 & & \underline{11} & & & & \\
 & & 9 & 11 & 1 & & \\
 & & & \underline{9} & & & \\
 & & & 2 & 9 & 4 & \\
 & & & & \underline{8} & & \\
 & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & & \underline{2} & \\
 & & & & & 0 &
\end{array}$$

Dann hier ist klar, daß die Quotienten in der auf einander folgenden Bestimmung der Buchstaben p, q, r, s, etc. vorkommen und mit dem ersten Buchstaben auf der rechten Hand verbunden sind, indem der letztere immer einfach bleibt; bey der letzten Gleichung aber kommt allererst die Zahl 7 zum Vorschein und zwar mit dem Zeichen *plus*, weil die letzte Bestimmung die fünfte ist, wäre aber die Zahl derselben gerad gewesen, so hätte -7 gesetzt werden müßen. Solches wird deutlicher erhellen aus der folgenden Tabelle, wo erstlich die Zergliederung der Zahlen 31 und 20, und hernach die Bestimmung der Buchstaben p, q, r, etc. vorkommt.

$31 = 1 \cdot 20 + 11$	$p = 1 \cdot q + r$
$20 = 1 \cdot 11 + 9$	$q = 1 \cdot r + s$
$11 = 1 \cdot \ 9 + 2$	$r = 1 \cdot s + t$
$9 = 4 \cdot \ 2 + 1$	$s = 4 \cdot t + u$
$2 = 2 \cdot \ 1 + 0$	$t = 2 \cdot u + 7$

18.

Auf diese Art kann auch das vorhergehende Exempel im 14ten §. vorgestellt werden, wie folget:

$56 = 1 \cdot 39 + 17$	$p = 1 . q + r$
$39 = 2 \cdot 17 + 5$	$q = 2 \cdot r + s$
$17 = 3 \cdot \ 5 + 2$	$r = 3 \cdot s + t$
$5 = 2 \cdot \ 2 + 1$	$s = 2 \cdot t + u$
$2 = 2 \cdot \ 1 + 0$	$t = 2 \cdot u + 11$

19.

Solcher Gestalt sind wir im Stande alle dergleichen Exempel auf eine allgemeine Art aufzulösen:

Es sey nemlich gegeben diese Gleichung $bp = aq + n$, wo a, b und n bekante Zahlen sind. Hier muß man nur eben die Operation anstellen, als wann man zwischen den Zahlen a und b den größten gemeinen Theiler suchen wollte, aus welchen so gleich p und q durch die folgende Buchstaben bestimmt werden, wie folget:

Es sey $a = Ab + c$	so wird $p = Aq + r$
$b = Bc + d$	$q = Br + s$
$c = Cd + e$	$r = Cs + t$
$d = De + f$	$s = Dt + u$
$e = Ef + g$	$t = Eu + v$
$f = Fg + 0$	$u = Fv \pm n$

Hier wird in der letzten Bestimmung $+ n$ genommen, wann die Anzahl der Bestimmungen ungerad ist, hingegen aber $- n$, wann dieselbe Zahl gerade ist. Solcher Gestalt können nun alle dergleichen Fragen ziemlich geschwind aufgelöset werden, wovon wir einige Exempel geben wollen.

20.

XI. Frage: Es werde eine Zahl gesucht, welche durch 11 dividirt 3 übrig laße, durch 19 aber 5?

Diese Zahl sey N, dahero muß erstlich seyn $N = 11p + 3$ hernach auch $N = 19q + 5$ dahero wird $11p + 3 = 19q + 5$ oder $11p = 19q + 2$, woraus die folgende Tabelle verfertiget wird:

$19 = 1 \cdot 11 + 8$	$p = q + r$
$11 = 1 \cdot 8 + 3$	$q = r + s$
$8 = 2 \cdot 3 + 2$	$r = 2s + t$
$3 = 1 \cdot 2 + 1$	$s = t + u$
$2 = 2 \cdot 1 + 0.$	$t = 2u + 2$

wo man u nach Belieben annehmen kann, und daraus die vorhergehenden Buchstaben der Ordnung nach rückwärts bestimmen, wie folget:

$$\begin{aligned} t &= 2u + 2 \\ s &= t + u = 3u + 2 \\ r &= 2s + t = 8u + 6 \\ q &= r + s = 11u + 8 \\ p &= q + r = 19u + 14 \end{aligned}$$

hieraus bekommt man die gesuchte Zahl $N = 209u + 157$, dahero ist die kleinste Zahl für N 157.

21.

XII. Frage: Man suche eine Zahl N welche wie vorher durch 11 dividirt 3, und durch 19 dividirt 5 übrig laße; wann dieselbe aber durch 29 dividirt wird, daß 10 übrig bleiben?

Nach der letzten Bedingung muß seyn $N = 29p + 10$, und da die zwey ersten Bedingungen schon berechnet worden, so muß zufolge derselben seyn wie oben gefunden worden $N = 209u + 157$, wofür wir schreiben wollen $N = 209q + 157$, dahero wird $29p + 10 = 209q + 157$ oder $29p = 209q + 147$; woraus die folgende Operation angestellet wird:

$$\begin{array}{rlrl} 209 &= 7\cdot 29 + 6; & \text{also} \quad p &= 7q + r \\ 29 &= 4\cdot\ \ 6 + 5; & q &= 4r + s \\ 6 &= 1\cdot\ \ 5 + 1; & r &= \ \ s + t \\ 5 &= 5\cdot\ \ 1 + 0; & s &= 5t - 147 \end{array}$$

von wannen wir folgender Gestalt zurück gehen

$$\begin{aligned} s &= 5t - 147 \\ r &= \ \ s + t = \ \ \ 6t - \ \ 147 \\ q &= 4r + s = \ \ 29t - \ \ 735 \\ p &= 7q + r = 209t - 5292 \end{aligned}$$

dahero $N = 6061t - 153458$. Die kleinste Zahl kommt heraus, wann man setzt $t = 26$, da wird $N = 4128$.

22.

Es ist aber hier wohl zu bemercken daß wann eine solche Gleichung $bp = aq + n$ aufgelößt werden soll, die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müßen, dann sonsten wäre die Frage unmöglich, wann nicht die Zahl n eben denselben gemeinen Theiler hätte.

Dann wann z. E. seyn sollte $9p = 15q + 2$, wo 9 und 15 den gemeinen Theiler 3 haben, wodurch sich 2 nicht theilen läßt, so ist es unmöglich diese Frage aufzulösen, weil $9p - 15q$ allezeit durch 3 theilbar ist und also niemahls 2 werden kann, wäre aber in diesem Fall $n = 3$ oder $n = 6$ etc. so wäre die Frage wohl möglich, man müßte aber die Gleichung durch 3 theilen, da dann herauskäme $3p = 5q + 1$ welche nach der obigen Regel leicht aufgelöset wird. Also sieht man deutlich, daß die beyden Zahlen a und b keinen gemeinen Theiler außer 1 haben müßen, und daß die vorgegebene Regel in keinen andern Fällen Platz haben kann.

23.

Um dieses deutlicher zu zeigen, wollen wir die Gleichung $9p = 15q + 2$ nach dem natürlichen Weg behandeln. Da wird nun

$$p = \frac{15q + 2}{9} = q + \frac{6q + 2}{9} = q + r,$$

also daß $9r = 6q + 2$ oder $6q = 9r - 2$; dahero

$$q = \frac{9r-2}{6} = r + \frac{3r-2}{6} = r + s,$$

also daß $3r - 2 = 6s$ oder $3r = 6s + 2$; dahero

$$r = \frac{6s+2}{3} = 2s + \frac{2}{3},$$

welches offenbar niemahls eine gantze Zahl werden kann, weil s nothwendig eine gantze Zahl seyn muß, woraus offenbar zu ersehen, daß dergleichen Fragen ihrer Natur nach unmöglich sind.

CAPITEL 2

VON DER SOGENANNTEN REGEL-COECI WO AUS ZWEY GLEICHUNGEN DREY ODER MEHR UNBEKANTE ZAHLEN BESTIMMT WERDEN SOLLEN

24.

In dem vorhergehenden Capitel haben wir gesehen, wie aus einer Gleichung zwey unbekante Zahlen bestimmt werden sollen, dergestalt daß dafür gantze und positive Zahlen gefunden werden. Sind aber zwey Gleichungen vorgegeben und die Frage soll unbestimmt seyn, so müßten mehr als zwey unbekante Zahlen vorkommen. Dergleichen Fragen kommen in den gemeinen Rechen-Büchern vor und pflegen nach der so genannten Regel-Coeci aufgelöst zu werden, von welcher wir hier den Grund anzeigen wollen.

25.

Wir wollen mit einem Exempel den Anfang machen:

I. Frage: 30 Personen, Männer, Weiber und Kinder verzehren in einem Wirths-Hauß 50 Rthl. daran zahlt ein Mann 3 Rthl. ein Weib 2 Rthl. und ein Kind 1 Rthl. wie viel Personen sind von jeder Gattung gewesen?

Es sey die Zahl der Männer $= p$, der Weiber $= q$, und der Kinder $= r$, so erhält man die zwey folgende Gleichungen

$$\text{I.)}\ p + q + r = 30, \qquad \text{II.)}\ 3p + 2q + r = 50;$$

aus welchen die drey Buchstaben p, q und r in gantzen und positiven Zahlen bestimmt werden sollen. Aus der ersten wird nun $r = 30 - p - q$, und deswegen muß $p + q$ kleiner seyn als 30; dieser Werth in der andern für r geschrieben giebt $2p + q + 30 = 50$, also $q = 20 - 2p$ und $p + q = 20 - p$, welches von selbsten kleiner ist als 30. Nun kann man für p alle Zahlen annehmen, die nicht größer sind als 10, woraus folgende Auflösungen entspringen:

Zahl der Männer	$p =$	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,
der Weiber	$q =$	20,	18,	16,	14,	12,	10,	8,	6,	4,	2,	0,
der Kinder	$r =$	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	17,	18,	19,	20,

läßt man die ersten und letzten weg, so bleiben noch 9 wahre Auflösungen übrig.

26.

II. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh, Schweine, Ziegen und Schaafe, für 100 Rthl. kostet ein Schwein $3\frac{1}{2}$ Rthl. eine Ziege $1\frac{1}{3}$ Rthl. ein Schaaf $\frac{1}{2}$ Rthl. wie viel waren es von jeder Gattung?

Die Zahl der Schweine sey $= p$, der Ziegen $= q$, der Schaafe $= r$, so hat man folgende zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ p + q + r = 100, \qquad \text{II.)}\ 3\tfrac{1}{2}p + 1\tfrac{1}{3}q + \tfrac{1}{2}r = 100;$$

diese letztere multiplicirt man mit 6 um die Brüche wegzubringen, so kommt $21p + 8q + 3r = 600$. Aus der ersten hat man $r = 100 - p - q$, welcher Werth in der andern gesetzt giebt $18p + 5q = 300$ oder $5q = 300 - 18p$ und $q = 60 - \frac{18p}{5}$; also muß $18p$ durch 5 theilbahr seyn, oder 5 als einen Factor in sich schließen. Man setze also

$$p = 5s, \quad \text{so wird} \quad q = 60 - 18s \quad \text{und} \quad r = 13s + 40,$$

wo für s eine beliebige gantze Zahl genommen werden kann, doch so daß q nicht negativ werde, dahero s nicht größer als 3 angenommen werden kann, und also wann 0 auch ausgeschloßen wird, nur folgende drey Auflösungen statt finden,

nemlich wann	$s =$	1,	2,	3.
so wird	$p =$	5,	10,	15.
	$q =$	42,	24,	6.
	$r =$	53,	66,	79.

27.

Wann man dergleichen Exempel selbsten vorgeben will, so ist vor allen Dingen darauf zu sehen, daß dieselben möglich sind; um nun davon zu urtheilen, so ist folgendes zu bemercken:

Es seyen die beyden Gleichungen, dergleichen wir bisher gehabt, also vorgestellet

$$\text{I.)}\ x+y+z=a, \qquad \text{II.)}\ fx+gy+hz=b,$$

wo f, g, h, nebst a und b gegebene Zahlen sind; nun sey unter den Zahlen f, g und h die erste f die größte und h die kleinste, da $x+y+z=a$ so wird $fx+fy+fz=fa$. Nun ist $fx+fy+fz$ größer als $fx+gy+hz$ dahero muß fa größer seyn als b, oder b muß kleiner seyn als fa; und da ferner $hx+hy+hz=ha$ und $hx+hy+hz$ gewis kleiner ist als $fx+gy+hz$ so muß auch ha kleiner seyn als b, oder b größer als ha. Wofern demnach die Zahl b nicht kleiner als fa und zugleich größer als ha, so ist die Frage immer unmöglich.

Diese Bedingung pflegt auch also vorgetragen zu werden, daß die Zahl b zwischen diesen Gräntzen fa und ha enthalten seyn muß, ferner muß dieselbe auch nicht einem der beyden Gräntzen gar zu nahe kommen, weil sonsten die übrigen Buchstaben nicht bestimmt werden könnten.

In den vorigen Exempel, wo $a=100$, $f=3\frac{1}{2}$ und $h=\frac{1}{2}$ waren die Gräntzen 350 und 50; wollte man nun setzen $b=51$ anstatt 100, so wären die Gleichungen $x+y+z=100$, und $3\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z=51$ und hier mit 6 multiplicirt $21x+8y+3z=306$; man nehme die erste dreymahl, so wird $3x+3y+3z=300$, so von jener abgezogen läßt $18x+5y=6$, welche gleich offenbar unmöglich ist, weil x und y gantze Zahlen seyn müßen.

28.

Diese Regel kommt auch den Müntz-Meistern und Gold-Schmiden wohl zu statten, wann sie aus drey oder mehrere Sorten von Silber eine Maße von einem gegebenen Gehalt zusammen schmeltzen wollen; wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

III. Frage: Ein Müntz-Meister hat dreyerley Silber, das erste ist 14löthig, das andere 11löthig, das dritte 9löthig. Nun soll er eine Maße 30 Marck schwer machen, welche 12löthig seyn soll, wie viel Marck muß er von jeder Sorte nehmen?

Er nehme von der ersten Sorte x Marck, von der zweyten y M. und von der dritten z M. so muß seyn $x + y + z = 30$ welches die erste Gleichung ist.

Da ferner ein Marck von der ersten Sorte 14 Loth fein Silber hält, so werden die x Marck enthalten $14x$ Loth Silber; eben so werden die y Marck von der zweyten Sorte enthalten $11y$ Loth; und die z Marck von der dritten Sorte werden enthalten $9z$ Loth Silber; dahero die gantze Maße an Silber enthalten wird $14x + 11y + 9z$ Loth. Weil nun dieselbe 30 Marck wiegt, wovon ein Marck 12 Loth Silber enthalten soll, so muß auch die Quantität Silber darinnen seyn, nemlich 360 Loth, woraus diese zweyte Gleichung entspringt $14x + 11y + 9z = 360$; hiervon subtrahire man die erste 9mahl genommen, nemlich $9x + 9y + 9z = 270$, so bleibt übrig $5x + 2y = 90$, woraus x und y bestimmt werden soll, und zwar in gantzen Zahlen, alsdann aber wird $z = 30 - x - y$; aus jener Gleichung bekommt man $2y = 90 - 5x$ und $y = 45 - \frac{5x}{2}$. Es sey demnach $x = 2u$ so wird $y = 45 - 5u$ und $z = 3u - 15$, also muß u größer als 4 und gleichwohl kleiner als 10 seyn, woraus folgende Auflösungen gezogen werden:

$u =$ 5	6	7	8	9
$x =$ 10	12	14	16	18
$y =$ 20	15	10	5	0
$z =$ 0	3	6	9	12

29.

Bisweilen kommen mehr als drey unbekante Zahlen vor, wo die Auflösung auf eben diese Art geschehen kann, wie aus folgendem Exempel zu ersehen.

IV. Frage: Einer kauft 100 Stück Vieh um 100 Rthl. 1 Ochsen für 10 Rthl. 1 Kuh für 5 Rthl. 1 Kalb für 2 Rthl. 1 Schaaf für $\frac{1}{2}$ Rthl. Wie viel Ochsen, Kühe, Kälber und Schaafe sind es gewesen?

Die Zahl der Ochsen sey $= p$, der Kühe $= q$, der Kälber $= r$ und der Schaafe $= s$, so ist die erste Gleichung: $p + q + r + s = 100$, die zweyte Gleichung aber wird $10p + 5q + 2r + \frac{1}{2}s = 100$, welche um die Brüche wegzubringen mit 2 multiplicirt gibt $20p + 10q + 4r + s = 200$, hievon subtrahire man die erste Gleichung so hat man $19p + 9q + 3r = 100$; hieraus bekommen wir $3r = 100 - 19p - 9q$ und $r = 33 + \frac{1}{3} - 6p - \frac{1}{3}p - 3q$, oder

$$r = 33 - 6p - 3q + \frac{1-p}{3},$$

dahero muß $1 - p$ oder $p - 1$ durch 3 theilbar seyn. Man setze demnach $p - 1 = 3t$ so wird:

$$\begin{aligned} p &= 3t + 1 \\ q &= q \\ r &= 27 - 19t - 3q \\ s &= 72 + 2q + 16t \end{aligned}$$

also muß $19t + 3q$ kleiner seyn als 27. Hier können nun q und t nach Belieben angenommen werden, wann nur diese Bedingung beobachtet wird, daß $19t + 3q$ nicht größer werde als 27; daher wir folgende Fälle zu erwegen haben.

I. wann $t = 0$	II. wann $t = 1$	t kann nicht 2 gesetzt werden weil sonsten r negativ würde.
so wird $p = 1$	so wird $p = 4$	
$q = q$	$q = q$	
$r = 27 - 3q$	$r = 8 - 3q$	
$s = 72 + 2q$	$s = 88 + 2q$	

Im ersten Fall muß q nicht größer seyn als 9 und im zweyten Fall muß q nicht größer seyn als 2. Aus beyden Fällen erhalten wir also folgende Auflösungen.

Aus dem ersten Fall erhalten wir diese 10 Auflösungen:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
p	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
r	27	24	21	18	15	12	9	6	3	0
s	72	74	76	78	80	82	84	86	88	90

Aus dem zweyten Fall aber diese 3 Auflösungen:

	I	II	III
p	4	4	4
q	0	1	2
r	8	5	2
s	88	90	92

Dieses sind nun in allem 13 Auflösungen; wann man aber 0 nicht wollte gelten laßen, so wären es nur 10 Auflösungen.

30.

Die Art der Auflösung bleibt einerley, wann auch in der ersten Gleichung die Buchstaben mit gegebenen Zahlen multiplicirt sind wie aus folgendem Exempel zu ersehen:

V. Frage: Man suche drey gantze Zahlen, wann die erste mit 3, die andere mit 5, und die dritte mit 7 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 560; wann aber die erste mit 9 die andere mit 25 und die dritte mit 49 multiplicirt wird, daß die Summe der Producte sey 2920?

Es sey die erste Zahl $= x$, die zweyte $= y$, die dritte $= z$, so hat man diese zwey Gleichungen

$$\text{I.)}\ \ 3x + 5y + 7z = 560, \qquad \text{II.)}\ \ 9x + 25y + 49z = 2920$$

von der zweyten subtrahirt man die erste dreymal genommen nemlich $9x + 15y + 21z = 1680$, so bleiben übrig $10y + 28z = 1240$, oder durch 2 dividirt $5y + 14z = 620$, daraus wird $y = 124 - \frac{14z}{5}$; also muß sich z durch 5 theilen laßen; dahero setze man $z = 5u$, so wird $y = 124 - 14u$; welche Werthe in der ersten Gleichung für z und y geschrieben, geben $3x - 35u + 620 = 560$, oder

$$3x = 35u - 60 \quad \text{und} \quad x = \frac{35u}{3} - 20;$$

deswegen setze man $u = 3t$, so bekommen wir endlich diese Auflösung:

$$x = 35t - 20,\ \ y = 124 - 42t, \quad \text{und} \quad z = 15t,$$

wo man für t eine beliebige gantze Zahl setzen kann, doch so daß t größer sey als 0 und doch kleiner als 3, woraus man 2 Auflösungen erhält:

$$\text{I.)}\ \text{wann}\ \ t = 1\ \ \text{so wird}\ \ x = 15,\ \ y = 82,\ \ z = 15,$$

$$\text{II.)}\ \text{wann}\ \ t = 2\ \ \text{wird}\ \ x = 50,\ \ y = 40,\ \ z = 30.$$

CAPITEL 3

VON DEN ZUSAMMENGESETZTEN UNBESTIMMTEN GLEICHUNGEN WO VON DER EINEN UNBEKANTEN ZAHL NUR DIE ERSTE POTESTÄT VORKOMMT

31.

Wir kommen nun zu solchen unbestimmten Gleichungen, wo zwey unbekante Zahlen gesucht werden, und die eine nicht wie bisher allein steht, sondern entweder mit der andere multiplicirt oder in einer höheren Potestät vorkommt, wann nur von der andern blos die erste Potestät vorhanden ist. Auf eine allgemeine Art haben solche Gleichungen folgende Form:

$$a + bx + cy + dxx + exy + fx^3 + gxxy + hx^4 + kx^3y + \text{etc.} = 0$$

in welcher nur y vorkommt, und also aus dieser Gleichung leicht bestimmt werden kann, die Bestimmung muß aber also geschehen, daß für x und y gantze Zahlen herauskommen. Dergleichen Fälle wollen wir nun betrachten und von den leichtern den Anfang machen.

32.

I. Frage: Man suche zwey Zahlen, wann ihre Summe zu ihrem Product addirt wird, daß 79 herauskommen?

Es seyen die zwey verlangten Zahlen x und y, so muß seyn $xy + x + y = 79$, woraus wir bekommen $xy + y = 79 - x$ und $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x + 1}$, woraus erhellet daß $x + 1$ ein Theiler seyn muß von 80; da nun 80 viele Theiler hat so findet man aus einem jeden einen Werth für x; wie aus folgenden zu sehen:

die Theiler sind	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
daher wird $x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
und $y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

weil nun hier die letztern Auflösungen mit den erstern übereinkommen, so hat man in allem folgende fünf Auflösungen:

I	II	III	IV	V
0	1	3	4	7
79	39	19	15	9

33.

Solcher Gestalt kann auch diese allgemeine Gleichung aufgelößt werden

$$xy + ax + by = c$$

woraus kommt $xy + by = c - ax$ und also $y = \frac{c - ax}{x + b}$ oder $y = -a + \frac{ab + c}{x + b}$; dahero muß $x + b$ ein Theiler seyn der bekanten Zahl $ab + c$ und also kann aus einem jeden Theiler derselben ein Werth für x gefunden werden. Man setze dahero es sey $ab + c = fg$ also daß

$$y = -a + \frac{fg}{x + b}.$$

Nun nehme man $x + b = f$ oder $x = f - b$, so wird $y = -a + g$ oder $y = g - a$; derohalben auf so viel verschiedene Arten sich die Zahl $ab + c$ durch zwey Factores, als fg, vorstellen läßt, so erhält man daher nicht nur eine, sondern zwey Auflösungen: die erste ist nemlich

$$x = f - b \quad \text{und} \quad y = g - a,$$

die andere aber kommt gleicher Gestalt heraus, wann man $x + b = g$ setzt, da wird

$$x = g - b \quad \text{und} \quad y = f - a.$$

Sollte dahero diese Gleichung vorgegeben seyn $xy + 2x + 3y = 42$ so wäre $a = 2$, $b = 3$ und $c = 42$ folglich $y = -2 + \frac{48}{x + 3}$. Nun kann die Zahl 48 auf vielerley Art durch 2 Factores als fg vorgestellt werden, da dann immer seyn wird $x = f - 3$ und $y = g - 2$, oder auch $x = g - 3$ und $y = f - 2$. Dergleichen Factores sind nun folgende:

	I.		II.		III.		IV.		V.	
Factores	$1 \cdot 48$		$2 \cdot 24$		$3 \cdot 16$		$4 \cdot 12$		$6 \cdot 8$	
	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
Zahlen	-2	46	-1	22	0	14	1	10	3	6
oder	45	-1	21	0	13	1	9	2	5	4

34.

Noch allgemeiner kann die Gleichung also vorgestellet werden:

$$mxy = ax + by + c,$$

wo a, b, c und m gegebene Zahlen sind, für x und y aber gantze Zahlen verlangt werden.

Man suche daher y so bekommt man $y = \frac{ax+c}{mx-b}$; damit hier x aus dem Zähler weg gebracht werden könne, so multiplicirt man beyderseits mit m, so hat man $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$. Der Zähler dieses Bruchs ist nun eine bekante Zahl, wovon der Nenner ein Theiler seyn muß, man stelle dahero den Zähler durch zwey Factores als fg vor, welches öfters auf vielerley Art geschehen kann, und sehe ob sich einer davon mit $mx-b$ vergleichen laße, also daß $mx-b=f$; hierzu wird aber erfordert, weil $x = \frac{f+b}{m}$, daß $f+b$ sich durch m theilen laße, daher hier nur solche Factores von $mc+ab$ gebraucht werden können, welche, wann dazu b addirt wird, sich durch m theilen laßen, welches durch ein Exempel erläutert werden soll:

Es sey demnach $5xy = 2x+3y+18$. Hieraus bekommt man $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ und $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$, hier müßen nun von 96 solche Theiler gesucht werden, daß wann zu denselben 3 addirt wird, die Summ durch 5 theilbar werde. Man nehme daher alle Theiler von 96 welche sind 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, woraus erhellet daß nur diese, nemlich 2, 12, 32 gebraucht werden können.

Es sey demnach

I.) $5x-3=2$, so wird $5y=50$ und daher $x=1$, und $y=10$

II.) $5x-3=12$, so wird $5y=10$ und dahero $x=3$, und $y=2$

III.) $5x-3=32$, so wird $5y=5$ und dahero $x=7$, und $y=1$.

35.

Da hier in der allgemeinen Auflösung wird $my-a = \frac{mc+ab}{mx-b}$, so ist dienlich diese Anmerckung zu machen, daß wann eine in dieser Form $mc+ab$ enthaltene Zahl einen Theiler hat, der in dieser Form $mx-b$ enthalten ist, alsdann der Quotient nothwendig diese Form $my-a$ haben müße, und daß alsdann die Zahl $mc+ab$ durch ein solches Product $(mx-b)(my-a)$ vorgestellt werden könne: Es sey z. E. $m=12$, $a=5$, $b=7$ und $c=15$; so bekommt man $12y-5 = \frac{215}{12x-7}$; nun sind von 215 die Theiler 1, 5, 43, 215, unter welchen die gesucht werden müßen, welche in der Form $12x-7$ enthalten sind, oder wann man 7 darzu addirt, daß sich die Summe durch 12 theilen laße, von welchen nur 5 dieses leistet, also $12x-7=5$ und $12y-5=43$. Wie nun aus der ersten wird $x=1$ so findet man auch aus der andern y in gantzen Zahlen, nemlich $y=4$. Diese Eigenschaft ist in Betrachtung der Natur der Zahlen von der größten Wichtigkeit, und verdienet deswegen wohl bemercket zu werden.

36.

Wir wollen nun auch eine Gleichung von dieser Art betrachten

$$xy + xx = 2x + 3y + 29.$$

Hieraus findet man nun

$$y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3} \quad \text{oder} \quad y = -x - 1 + \frac{26}{x-3};$$

also muß $x - 3$ ein Theiler seyn von der Zahl 26, und alsdann wird der Quotient $= y + x + 1$. Da nun die Theiler von 26 sind 1, 2, 13, 26 so erhalten wir diese Auflösungen:

I.) $x - 3 = 1$ oder $x = 4$, so wird $y + x + 1 = y + 5 = 26$; und $y = 21$

II.) $x - 3 = 2$ oder $x = 5$, allso $y + x + 1 = y + 6 = 13$; und $y = 7$

III.) $x - 3 = 13$ oder $x = 16$, so wird $y + x + 1 = y + 17 = 2$; und $y = -15$

welcher negative Werth wegzulaßen ist, und deswegen auch der letzte Fall $x - 3 = 26$ nicht gerechnet werden muß.

37.

Mehr Formeln von dieser Art wo nur die erste Potestät von y, noch höhere aber von x vorkommen, sind nicht nöthig allhier zu berechnen, weil dergleichen Fälle sich nur selten ereignen, und alsdann auch nach der hier erklärten Art aufgelöset werden können. Wann aber auch y zur zweyten oder einer noch höhern Potestät ansteiget, und man den Werth davon nach den gegebenen Regeln bestimmen will, so kommt man auf Wurzelzeichen, hinter welchen x in der zweyten oder einer noch höhern Potestät befindlich ist, und alsdann kommt es darauf an solche Werthe für x ausfindig zu machen, daß die Irrationalität, oder die Wurzelzeichen wegfallen.

Und eben hierin bestehet die größte Kunst der unbestimmten Analytic, wie dergleichen Irrational-Formeln zur Rationalität gebracht werden sollen, wozu wir die Anleitung in den folgenden Capiteln geben wollen.

CAPITEL 4

VON DER ART DIESE IRRATIONALE FORMELN $\sqrt{(a+bx+cxx)}$ RATIONAL ZU MACHEN

38.

Hier ist also die Frage was für Werthe für x angenommen werden sollen, daß diese Formel $a+bx+cxx$ ein wirckliches Quadrat werde, und also die Quadrat-Wurzel daraus rational angegeben werden könne. Es bedeuten aber die Buchstaben a, b und c gegebene Zahlen, und auf der Beschaffenheit derselben beruhet hauptsächlich die Bestimmung der unbekanten Zahl x, wobey zum voraus zu bemercken, daß in vielen Fällen die Auflösung davon unmöglich werde; wann aber dieselbe möglich ist, so muß man sich zum wenigsten anfänglich in Bestimmung des Buchstabens x blos mit rationalen Werthen begnügen, und nicht fordern, daß dieselben so gar gantze Zahlen seyn sollen, als welches eine gantz besondere Untersuchung erfordert.

39.

Wir nehmen hier an, daß diese Formel nur bis zur zweyten Potestät von x steige, indem höhere Potestäten besondere Methoden erfordern, wovon hernach gehandelt werden soll.

Sollte hier nicht einmahl die zweyte Potestät vorkommen, und $c=0$ seyn, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: dann wann diese Formel $\sqrt{(a+bx)}$ gegeben wäre, und man x so bestimmen sollte, daß $a+bx$ ein Quadrat würde, so dürfte man nur setzen $a+bx=yy$, woraus man so gleich erhielte $x=\frac{yy-a}{b}$; und nun möchte man für y alle beliebige Zahlen annehmen, und aus einer jeden würde man einen solchen Werth für x finden, daß $a+bx$ ein Quadrat und folglich $\sqrt{(a+bx)}$ rational herauskäme.

40.

Wir wollen demnach bey dieser Formel anfangen $\sqrt{(1+xx)}$, wo solche Werthe für x gefunden werden sollen, daß wann zu ihrem Quadrat xx noch 1 addirt wird, die Summe wiederum ein Quadrat werde, welches offenbar in gantzen Zahlen nicht geschehen kann, indem keine gantze Quadrat-Zahl nur um 1 größer ist als die vorhergehende, dahero man sich nothwendig mit gebrochenen Zahlen für x begnügen muß.

41.

Weil $1+xx$ ein Quadrat seyn soll, und man setzen wollte $1+xx=yy$, so würde $xx=yy-1$ und $x=\sqrt{(yy-1)}$. Um also x zu finden, müßte man solche Zahlen für y suchen, daß ihre Quadrate weniger 1 wiederum Quadrate würden, welche Frage eben so schwer ist als die vorige und würde also hierdurch nichts gewonnen.

Daß es aber würcklich solche Brüche gebe, welche für x gesetzt $1+xx$ zum Quadrat machen, kann man aus folgenden Fällen ersehen:

I.) wann $x=\frac{3}{4}$ so wird $1+xx=\frac{25}{16}$, folglich $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{4}$.

II.) Eben dieses geschieht wann $x=\frac{4}{3}$ wo $\sqrt{(1+xx)}=\frac{5}{3}$ herauskommt.

III.) Hernach wann man setzt $x=\frac{5}{12}$ so erhält man $1+xx=\frac{169}{144}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{13}{12}$.

Wie nunmehr dergleichen Zahlen und so gar alle mögliche gefunden werden sollen, muß hier gezeigt werden.

42.

Solches kann auf zweyerley Art geschehen. Nach der ersten Art setze man $\sqrt{(1+xx)}=x+p$ so wird $1+xx=xx+2px+pp$, wo sich das Quadrat xx aufhebt und folglich x ohne ein Wurzelzeichen bestimmt werden kann. Dann in der gefundenen Gleichung subtrahirt man beyderseits xx so wird $2px+pp=1$, woraus gefunden wird $x=\frac{1-pp}{2p}$ wo man für p eine jede Zahl annehmen kann, und auch so gar dafür Brüche gesetzt werden können.

Man setze dahero $p=\frac{m}{n}$ so wird $x=\frac{1-\frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}}$; diesen Bruch multiplicire man oben und unten mit nn, so bekommt man $x=\frac{nn-mm}{2mn}$.

43.

Damit also $1+xx$ ein Quadrat werde, so kann man für m und n nach Belieben alle mögliche gantze Zahlen annehmen, und also daraus unendlich viel Werthe für x finden.

Setzt man auch überhaupt $x=\frac{nn-mm}{2mn}$, so wird

$$1+xx=1+\frac{n^4-2nnmm+m^4}{4mmnn} \quad \text{oder} \quad 1+xx=\frac{n^4+2mmnn+m^4}{4mmnn}$$

welcher Bruch würcklich ein Quadrat ist und daraus gefunden wird

$$\sqrt{(1+xx)} = \frac{nn+mm}{2mn}.$$

Hieraus können nun folgende kleinere Werthe für x bemercket werden:

wann	$n=2$	3	3	4	4	5	5	5	5
und	$m=1$	1	2	1	3	1	2	3	4
so wird	$x=\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{15}{8}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{9}{40}$

44.

Hieraus folget auf eine allgemeine Art, daß $1+\frac{(nn-mm)^2}{(2mn)^2} = \frac{(nn+mm)^2}{(2mn)^2}$. Nun multiplicire man diese Gleichung mit $(2mn)^2$, so wird

$$(2mn)^2 + (nn-mm)^2 = (nn+mm)^2;$$

wir haben also auf eine allgemeine Art zwey Quadraten, deren Summe wieder ein Quadrat ist; hierdurch wird nun diese Frage aufgelößt:

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadrat-Zahl sey?

Also soll $pp+qq=rr$ seyn: zu diesem Ende darf man nur setzen $p=2mn$ und $q=nn-mm$ so wird $r=nn+mm$. Da hernach ferner

$$(nn+mm)^2 - (2mn)^2 = (nn-mm)^2,$$

so können wir auch diese Frage auflösen:

Zwey Quadrat-Zahlen zu finden, deren Differenz wieder eine Quadrat-Zahl sey? also daß $pp-qq=rr$; dann da darf man nur setzen $p=nn+mm$ und $q=2mn$, so wird $r=nn-mm$ oder man kann auch setzen $p=nn+mm$ und $q=nn-mm$, so wird alsdann $r=2mn$.

45.

Wir haben aber zweyerley Arten versprochen um die Formel $1+xx$ zu einem Quadrat zu machen; die andere Art verhält sich nun folgender Gestalt:

Man setze $\sqrt{(1+xx)} = 1+\frac{mx}{n}$; daher bekommt man

$$1+xx = 1+\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn};$$

subtrahirt man hier beyderseits 1, so wird $xx=\frac{2mx}{n}+\frac{mmxx}{nn}$, welche Gleichung sich durch x theilen läßt, und folglich giebt $x = \frac{2m}{n} + \frac{mmx}{nn}$, oder mit nn multiplicirt $nnx = 2mn + mmx$, woraus gefunden wird $x = \frac{2mn}{nn - mm}$: dann setzt man diesen Werth für x, so wird

$$1 + xx = 1 + \frac{4mmnn}{n^4 - 2mmnn + m^4} \quad \text{oder} \quad = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{n^4 - 2mmnn + m^4},$$

welcher Bruch das Quadrat ist von $\frac{nn + mm}{nn - mm}$. Da man nun daher diese Gleichung bekommt $1 + \frac{(2mn)^2}{(nn - mm)^2} = \frac{(nn + mm)^2}{(nn - mm)^2}$ so fließt daraus wie oben

$$(nn - mm)^2 + (2mn)^2 = (nn + mm)^2$$

welches die vorigen zwey Quadrate sind, deren Summe wieder ein Quadrat macht.

46.

Dieser Fall, welchen wir hier ausführlich abgehandelt haben, giebt uns nun zwey Methoden an die Hand um die allgemeine Formel $a + bx + cxx$ zu einem Quadrat zu machen. Die erstere gehet auf alle Fälle, wo c ein Quadrat ist; die andere aber, wo a ein Quadrat ist; welche beyde Fälle wir hier durchgehen wollen.

I.) Es sey demnach erstlich c eine Quadrat-Zahl oder die gegebene Formel sey $a + bx + ffxx$, welche ein Quadrat werden soll, zu diesem Ende setze man

$$\sqrt{(a + bx + ffxx)} = fx + \frac{m}{n} \quad \text{so wird} \quad a + bx + ffxx = ffxx + \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn},$$

wo sich die xx beyderseits aufheben, also daß $a + bx = \frac{2mfx}{n} + \frac{mm}{nn}$, welche mit nn multiplicirt, $nna + nnbx = 2mnfx + mm$ giebt; woraus gefunden wird $x = \frac{mm - nna}{nnb - 2mnf}$, wird nun dieser Werth für x geschrieben, so wird

$$\sqrt{(a + bx + ffxx)} = \frac{mmf - nnaf}{nnb - 2mnf} + \frac{m}{n} = \frac{mnb - mmf - nnaf}{nnb - 2mnf}.$$

47.

Da für x ein Bruch gefunden worden, so setze man sogleich $x = \frac{p}{q}$, also daß $p = mm - nna$, und $q = nnb - 2mnf$, und alsdann wird die Formel $a + \frac{bp}{q} + \frac{ffpp}{qq}$ ein Quadrat; folglich bleibt dieselbe ein Quadrat wann sie mit dem Quadrat qq multiplicirt wird, dahero auch diese Formel $aqq + bpq + ffpp$

ein Quadrat wird, wann man setzt $p = mm - nna$ und $q = nnb - 2mnf$, woraus unendlich viel Auflösungen in gantzen Zahlen gefunden werden können, weil man die Buchstaben m und n nach Belieben annehmen kann.

48.

II.) Der zweyte Fall findet statt, wann der Buchstabe a ein Quadrat ist. Es sey demnach diese Formel gegeben $ff + bx + cxx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Zu diesem Ende setze man

$$\sqrt{(ff + bx + cxx)} = f + \frac{mx}{n} \quad \text{so wird} \quad ff + bx + cxx = ff + \frac{2mfx}{n} + \frac{mmxx}{nn},$$

wo sich die ff aufheben und die übrigen Glieder sich alle durch x theilen laßen, also daß $b + cx = \frac{2mf}{n} + \frac{mmx}{nn}$, oder $nnb + nncx = 2mnf + mmx$, oder $nncx - mmx = 2mnf - nnb$, und folglich $x = \frac{2mnf - nnb}{nnc - mm}$; setzt man nun diesen Werth für x, so wird

$$\sqrt{(ff + bx + cxx)} = f + \frac{2mmf - mnb}{nnc - mm} = \frac{nncf + mmf - mnb}{nnc - mm};$$

setzt man hier $x = \frac{p}{q}$, so kann wie oben folgende Formel zu einem Quadrat gemacht werden, $ffqq + bpq + cpp$, als welches geschiehet wann man setzt $p = 2mnf - nnb$ und $q = nnc - mm$.

49.

Hier ist besonders der Fall merckwürdig, wann $a = 0$; oder wann diese Formel $bx + cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden soll; dann da darf man nur setzen $\sqrt{(bx + cxx)} = \frac{mx}{n}$ so wird $bx + cxx = \frac{mmxx}{nn}$, wo durch x dividirt und mit nn multiplicirt herauskommt, $bnn + cnnx = mmx$, folglich $x = \frac{nnb}{mm - cnn}$. Man suche zum Exempel alle dreyeckigte Zahlen welche zugleich Quadrat-Zahlen sind, so muß $\frac{xx + x}{2}$ und also auch $2xx + 2x$ ein Quadrat seyn. Dasselbe sey nun $\frac{mmxx}{nn}$, so wird $2nnx + 2nn = mmx$ und $x = \frac{2nn}{mm - 2nn}$, wo man für m und n alle mögliche Zahlen annehmen kann, alsdann aber wird mehrentheils für x ein Bruch gefunden; doch können auch gantze Zahlen herauskommen, als wann man setzt $m = 3$ und $n = 2$ so bekommt man $x = 8$, wovon das Dreyeck ist 36, welches auch ein Quadrat ist.

Man kann auch setzen $m = 7$, und $n = 5$, so wird $x = -50$ wovon das Dreyeck ist 1225, welches zugleich das Dreyeck ist von $+49$ und auch das

Quadrat von 35; dieses wäre auch heraus gekommen, wann man gesetzt hätte $n = 7$, und $m = 10$, dann da wird $x = 49$.

Eben so kann man setzen $m = 17$, und $n = 12$, da wird $x = 288$, wovon das Dreyeck ist $\frac{x(x+1)}{2} = \frac{288 \cdot 289}{2} = 144 \cdot 289$, welches eine Quadrat-Zahl ist, deren Wurzel $= 12 \cdot 17 = 204$.

50.

Bey diesem letzten Fall ist zu erwegen, daß die Formel $bx + cxx$ aus diesem Grund zum Quadrat gemacht worden, weil dieselbe einen Factor hatte, nemlich x, welches uns auf neue Fälle führet, in welchen auch die Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat werden kann, wann weder a noch c ein Quadrat ist.

Diese Fälle finden statt wann sich $a + bx + cxx$ in zwey Factores vertheilen läßt, welches geschiehet wann $bb - 4ac$ ein Quadrat ist. Um dieses zu zeigen so ist zu mercken, daß die Factoren immer von den Wurzeln einer Gleichung abhängen. Man setze also $a + bx + cxx = 0$, so wird $cxx = -bx - a$ und $xx = -\frac{bx}{c} - \frac{a}{c}$, woraus gefunden wird

$$x = -\frac{b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{bb}{4cc} - \frac{a}{c}\right)}, \quad \text{oder} \quad x = -\frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{(bb - 4ac)}}{2c},$$

woraus erhellet daß wann $bb - 4ac$ ein Quadrat ist, diese Wurzeln rational angegeben werden können.

Es sey demnach $bb - 4ac = dd$, so sind die Wurzeln $\frac{-b \pm d}{2c}$, oder es ist $x = \frac{-b \pm d}{2c}$, also werden von der Formel $a + bx + cxx$ die Divisores seyn $x + \frac{b-d}{2c}$ und $x + \frac{b+d}{2c}$, welche mit einander multiplicirt dieselbe Formel nur durch c dividirt hervorbringen, man findet nemlich $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{dd}{4cc}$ da nun $dd = bb - 4ac$ so hat man $xx + \frac{bx}{c} + \frac{bb}{4cc} - \frac{bb}{4cc} + \frac{4ac}{4cc} = xx + \frac{bx}{c} + \frac{a}{c}$, welche mit c multiplicirt giebt $cxx + bx + a$. Man darf also nur den einen Factor mit c multipliciren, so wird unsere Formel diesem Product gleich sein:

$$\left(cx + \frac{b}{2} - \frac{d}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2c} + \frac{d}{2c}\right)$$

und man sieht, daß diese Auflösung immer statt findet, so oft $bb - 4ac$ ein Quadrat ist.

51.

Hieraus fließt der dritte Fall, in welchem unsere Formel $a+bx+cxx$ zu einem Quadrat gemacht werden kann; welchen wir also zu den obigen beyden hinzufügen wollen.

III.) Dieser Fall ereignet sich nun, wann unsere Formel durch ein solches Product vorgestellet werden kann $(f+gx)\cdot(h+kx)$. Um dieses zu einem Quadrat zu machen, so setze man die Wurzel davon:

$$\sqrt{(f+gx)\cdot(h+kx)}=\frac{m\cdot(f+gx)}{n}, \text{ so bekommt man}$$

$$(f+gx)\,(h+kx)=\frac{mm\cdot(f+gx)^2}{nn}$$

welche Gleichung durch $f+gx$ dividirt, giebt $h+kx=\frac{mm\cdot(f+gx)}{nn}$, das ist $hnn+knnx=fmm+gmmx$, woraus gefunden wird $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$.

52.

Um dieses zu erläutern, so sey diese Frage vorgegeben:

I. Frage: Man suche die Zahlen x, daß wann man von ihrem doppelten Quadrat 2 subtrahirt, der Rest wieder ein Quadrat sey?

Da nun seyn muß $2xx-2$ ein Quadrat, so ist zu erwegen, daß sich diese Formel durch folgende Factores vorstellen läßt $2\cdot(x+1)(x-1)$; man setze also die Wurzel davon $\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, so wird $2\cdot(x+1)(x-1)=\frac{mm\cdot(x+1)^2}{nn}$; man dividire durch $x+1$, und multiplicire mit nn, so bekommt man $2nnx-2nn=mmx+mm$ und dahero $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mm}$.

Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so wird $x=3$, und $2xx-2=16=4^2$. Nimmt man $m=3$ und $n=2$, so wird $x=-17$: da aber nur das Quadrat von x vorkommt, so ist es gleich viel ob man nimmt $x=-17$ oder $x=+17$ aus beyden wird $2xx-2=576=24^2$.

53.

II. Frage: Es sey diese Formel gegeben $6+13x+6xx$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Hier ist nun $a=6$, $b=13$ und $c=6$, wo also weder a noch c ein Quadrat ist. Man sehe also ob $bb-4ac$ ein Quadrat werde; da nun kommt 25, so weis man daß diese Formel durch zwey Factores vorgestellt werden kann, welche sind $(2+3x)\cdot(3+2x)$; davon sey nun die

Wurzel $\frac{m(2+3x)}{n}$, so bekommt man $(2+3x)\cdot(3+2x)=\frac{mm(2+3x)^2}{nn}$, daraus wird $3nn+2nnx=2mm+3mmx$ und daher wird $x=\frac{2mm-3nn}{2nn-3mm}=\frac{3nn-2mm}{3mm-2nn}$. Damit nun der Zähler positiv werde, so muß $3nn$ größer seyn als $2mm$, und also $2mm$ kleiner als $3nn$; folglich muß $\frac{mm}{nn}$ kleiner seyn als $\frac{3}{2}$, damit der Zähler positiv werde. Damit aber der Nenner positiv werde, so muß $3mm$ größer seyn als $2nn$ und also $\frac{mm}{nn}$ größer seyn als $\frac{2}{3}$. Um dahero für x positive Zahlen zu finden, so müßen für m und n solche Zahlen angenommen werden, daß $\frac{mm}{nn}$ kleiner sey als $\frac{3}{2}$ und doch größer als $\frac{2}{3}$.

Setzt man nun $m=6$ und $n=5$, so wird $\frac{mm}{nn}=\frac{36}{25}$, welches kleiner ist als $\frac{3}{2}$ und offenbahr größer als $\frac{2}{3}$; daher bekommt man $x=\frac{3}{58}$.

54.

IV.) Dieser dritte Fall leitet uns noch auf einen vierten, welcher Platz findet, wann die Formel $a+bx+cxx$ dergestalt in zwey Theile zertheilt werden kann, daß der erste ein Quadrat sey, der andere aber sich in zwey Factores auflösen laße, also daß eine solche Form herauskomme $pp+qr$, wo die Buchstaben p, q und r Formeln von dieser Art $f+gx$ bedeuten. Dann da darf man nur setzen $\sqrt{(pp+qr)}=p+\frac{mq}{n}$, so wird

$$pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn},$$

wo sich die pp aufheben und die übrigen Glieder durch q theilen laßen, also daß $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$ oder $nnr=2mnp+mmq$, woraus sich x leicht bestimmen läßt, und dieses ist der vierte Fall, in welchem unsere Formel zu einem Quadrat gemacht werden kann, welchen wir nun durch einige Exempel erläutern wollen.

55.

III. Frage: Man suche solche Zahlen x, daß ihr Quadrat doppelt genommen um 1 größer werde als ein anderes Quadrat? oder wann man davon 1 subtrahirt ein Quadrat übrig bleibe? wie bey der Zahl 5 geschieht, deren Quadrat 25 doppelt genommen ist 50, wovon 1 subtrahirt das Quadrat 49 übrig bleibt.

Also muß $2xx-1$ ein Quadrat seyn, wo nach unserer Formel $a=-1$, $b=0$, und $c=2$, und allso weder a noch c ein Quadrat ist, auch läßt sich dieselbe nicht in zwey Factores auflösen, weil $bb-4ac=8$ kein Quadrat ist, und dahero keiner von den drey ersten Fällen statt findet.

Nach dem vierten Fall aber kann diese Formel also vorgestellt werden $xx+(xx-1)=xx+(x-1)(x+1)$. Hievon werde nun die Wurzel gesetzt $x+\frac{m(x+1)}{n}$, dahero wird $xx+(x+1)\cdot(x-1)=xx+\frac{2mx(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$, wo sich die xx aufheben und die übrigen Glieder durch $x+1$ theilen laßen, da dann kommt $nnx-nn=2mnx+mmx+mm$ und $x=\frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; und weil in unserer Formel $2xx-1$ nur das Quadrat xx vorkommt, so ist es gleich viel ob die Werthe von x positiv oder negativ herauskommen. Man kann auch so gleich $-m$ anstatt $+m$ schreiben damit man bekomme $x=\frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$.

Nimmt man hier $m=1$ und $n=1$, so hat man $x=1$ und $2xx-1=1$. Es sey ferner $m=1$ und $n=2$, so wird $x=\frac{5}{7}$ und $2xx-1=\frac{1}{49}$. Setzt man aber $m=1$ und $n=-2$, so wird $x=-5$, oder $x=+5$ und $2xx-1=49$.

56.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen, deren Quadrat doppelt genommen, wann dazu 2 addirt wird, wieder ein Quadrat mache? dergleichen ist 7, wovon das Quadrat doppelt genommen ist 98, und 2 addirt, kommt das Quadrat 100.

Es muß also diese Formel $2xx+2$ ein Quadrat seyn, wo $a=2$, $b=0$ und $c=2$, also wieder weder a noch c ein Quadrat ist, auch ist $bb-4ac$ oder -16 kein Quadrat, und kann die dritte Regel hier nicht statt finden.

Nach der vierten Regel aber läßt sich unsere Formel also vorstellen.

Man setze den ersten Theil $=4$, so wird der andere seyn

$2xx-2=2(x+1)\cdot(x-1)$, und daher unsere Formel $4+2(x+1)\cdot(x-1)$.

Davon sey die Wurzel $2+\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, woher diese Gleichung entspringt

$$4+2(x+1)\cdot(x-1)=4+\frac{4m(x+1)}{n}+\frac{mm(x+1)^2}{nn}$$

wo sich die 4 aufheben, die übrigen Glieder sich aber durch $x+1$ theilen laßen, also daß $2nnx-2nn=4mn+mmx+mm$ und daher $x=\frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$.

Setzt man $m=1$ und $n=1$ so wird $x=7$, und $2xx+2=100$. Nimmt man $m=0$ und $n=1$ so wird $x=1$ und $2xx+2=4$.

57.

Oefters geschiehet es auch daß wann weder die erste, noch zweyte, noch dritte Regel Platz findet, man nicht finden kan, wie zufolge der vierten Regel die Formel in zwey solche Theile zergliedert werden könne, dergleichen erfordert werden. Als wann diese Formel vorkäme $7 + 15x + 13xx$, so ist zwar eine solche Zergliederung möglich, fält aber nicht so leicht in die Augen. Dann der erste Theil ist $(1 - x)^2$ oder $1 - 2x + xx$, und daher wird der andere seyn $6 + 17x + 12xx$, welcher deswegen Factoren hat weil $17^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1$ und also ein Quadrat ist. Die zwey Factores davon sind auch würcklich $(2 + 3x) \cdot (3 + 4x)$; also daß diese Formel seyn wird $(1 - x)^2 + (2 + 3x)(3 + 4x)$, welche jetzo nach der vierten Regel aufgelöst werden kann.

Es ist aber nicht wohl zu fordern, daß jemand diese Zergliederung errathen soll; dahero wir noch einen allgemeinen Weg anzeigen wollen, um erstlich zu erkennen, ob es möglich sey eine solche Formel aufzulösen? weil es unendlich viel dergleichen giebt, deren Auflösungen schlechterdings unmöglich sind, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx + 2$, welche nimmermehr zu einem Quadrat gemacht werden kann.

Findet sich aber eine Formel in einem einigen Fall möglich, so ist es leicht alle Auflösungen derselben zu finden, welches wir noch allhier erörtern wollen.

58.

Der gantze Vortheil, welcher in solchen Fällen zu statten kommen kann, bestehet darin, daß man suche, ob man keinen Fall finden, oder gleichsam errathen kann, in welchem eine solche Formel $a + bx + cxx$ ein Quadrat wird? indem man für x einige kleinere Zahlen nach und nach setzt, um zu sehen ob in keinem Fall ein Quadrat herauskomme?

Um diese Arbeit zu erläutern, wann etwann eine gebrochene Zahl für x gesetzt dieses leisten sollte, kann man sogleich für x einen Bruch als $\frac{t}{u}$ schreiben, woraus diese Formel erwächst $a + \frac{bt}{u} + \frac{ctt}{uu}$, welche wann sie ein Quadrat ist, auch mit dem Quadrat uu multiplicirt ein Quadrat bleibt. Man hat also nur nöthig, zu probiren, ob man für t und u solche Werthe in gantzen Zahlen errathen kann, daß diese Formel $auu + btu + ctt$ ein Quadrat werde? dann alsdann wann man setzt $x = \frac{t}{u}$ so wird auch diese Formel $a + bx + cxx$ gewiß ein Quadrat seyn.

Kann man aber aller Mühe ungeachtet keinen solchen Fall finden, so hat man großen Grund zu vermuthen, daß es gantz und gar unmöglich sey, die Formel zu einem Quadrat zu machen, als dergleichen es unendlich viele giebt.

59.

Hat man aber einen Fall errathen, in welchem eine solche Formel ein Quadrat wird, so ist es gantz leicht alle mögliche Fälle zu finden, darinn dieselbe ebenfalls ein Quadrat wird; und die Anzahl derselben ist immer unendlich groß.

Um dieses zu zeigen, so wollen wir erstlich diese Formel betrachten $2+7xx$, wo $a=2$, $b=0$, und $c=7$: dieselbe wird nun offenbar ein Quadrat, wann $x=1$; dahero setze man $x=1+y$, so wird $xx=1+2y+yy$, und unsere Formel wird seyn $9+14y+7yy$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist: also setzen wir nach der zweyten Regel die Quadrat-Wurzel davon $=3+\frac{my}{n}$, da bekommen wir diese Gleichung

$$9+14y+7yy=9+\frac{6my}{n}+\frac{mmyy}{nn},$$

wo sich die 9 aufheben, die übrigen Glieder aber alle durch y theilen laßen; da bekommen wir $14nn+7nny=6mn+mmy$ und daher $y=\frac{6mn-14nn}{7nn-mm}$; daraus finden wir $x=\frac{6mn-7nn-mm}{7nn-mm}$, wo man für m und n alle beliebige Zahlen annehmen kann.

Setzt man nun $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{1}{3}$, oder auch weil nur xx vorkommt, $x=+\frac{1}{3}$, dahero wird $2+7xx=\frac{25}{9}$. Man setze ferner $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-1$ oder $x=+1$. Setzt man aber $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=17$; daraus wird $2+7xx=2025$, welches das Quadrat ist von 45. Laßt uns auch setzen $m=8$ und $n=3$, so wird $x=-17$ wie zuvor. Setzen wir aber $m=8$ und $n=-3$, so wird $x=271$, daraus wird $2+7xx=514089=717^2$.

60.

Wir wollen ferner diese Formel betrachten $5xx+3x+7$, welche ein Quadrat wird, wann $x=-1$. Deswegen setze man $x=y-1$ so wird unsere Formel in diese verwandelt

$$\begin{array}{r} 5yy - 10y + 5 \\ + \ 3y - 3 \\ + 7 \\ \hline 5yy - \ 7y + 9 \end{array}$$

davon setze man die Quadrat-Wurzel $= 3 - \frac{my}{n}$, so wird

$$5yy - 7y + 9 = 9 - \frac{6my}{n} + \frac{mmyy}{nn};$$

daher wir bekommen $5nny - 7nn = -6mn + mmy$, und

$$y = \frac{7nn - 6mn}{5nn - mm}, \quad \text{folglich} \quad x = \frac{2nn - 6mn + mm}{5nn - mm}.$$

Es sey $m = 2$ und $n = 1$, so wird $x = -6$ und also

$$5xx + 3x + 7 = 169 = 13^2.$$

Setzt man aber $m = -2$ und $n = 1$, so wird $x = 18$ und

$$5xx + 3x + 7 = 1681 = 41^2.$$

61.

Laßt uns nun auch diese Formel betrachten $7xx + 15x + 13$, und so gleich setzen $x = \frac{t}{u}$, also daß diese Formel $7tt + 15tu + 13uu$ ein Quadrat seyn soll. Nun probire man für t und u einige kleinere Zahlen wie folget:

Es	sey	$t = 1$	und	$u = 1$,	so	wird	unsere	Formel	$=$	35
„	„	$t = 2$	„	$u = 1$,	„	„	„	„	$=$	71
„	„	$t = 2$	„	$u = -1$,	„	„	„	„	$=$	11
„	„	$t = 3$	„	$u = 1$,	„	„	„	„	$=$	121

Da nun 121 ein Quadrat ist, und also der Werth $x = 3$ ein Genüge leistet, so setze man $x = y + 3$ und so wird unsere Formel

$$7yy + 42y + 63 + 15y + 45 + 13$$

oder $7yy + 57y + 121$; davon setze man die Wurzel $= 11 + \frac{my}{n}$, so bekommt man $7yy + 57y + 121 = 121 + \frac{22my}{n} + \frac{mmyy}{nn}$, oder $7nny + 57nn = 22mn + mmy$, und daher $y = \frac{57nn - 22mn}{mm - 7nn}$ und $x = \frac{36nn - 22mn + 3mm}{mm - 7nn}$.

Man setze z. E. $m=3$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{3}{2}$ und unsere Formel $7xx+15x+13=\frac{25}{4}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Es sey ferner $m=1$ und $n=1$, so wird $x=-\frac{17}{6}$. Nimmt man $m=3$ und $n=-1$, so wird $x=\frac{129}{2}$ und unsere Formel

$$7xx+15x+13=\frac{120409}{4}=\left(\frac{347}{2}\right)^2.$$

62.

Bisweilen aber ist alle Mühe umsonst einen Fall zu errathen, in welchem die vorgegebene Formel ein Quadrat wird, wie z. E. bey dieser geschiehet $3xx+2$, oder wann man für x schreibt $\frac{t}{u}$, dieser $3tt+2uu$, welche man mag auch für t und u Zahlen annehmen die man will, niemahls ein Quadrat wird. Dergleichen Formeln, welche auf keinerley Weise zu einem Quadrat gemacht werden können, giebt es unendlich viel, und deswegen wird es der Mühe werth seyn einige Kennzeichen anzugeben, woraus die Unmöglichkeit erkennt werden kann, damit man öfters der Mühe überhoben seyn möge, durch Rathen solche Fälle zu finden wo ein Quadrat herauskommt, wozu das folgende Capitel bestimmt ist.

CAPITEL 5

VON DEN FÄLLEN DA DIE FORMEL $a+bx+cxx$ NIEMAHLS EIN QUADRAT WERDEN KANN

63.

Da unsere allgemeine Formel aus drey Gliedern besteht, so ist zu bemercken, daß dieselbe immer in eine andere verwandelt werden kann, in welcher das mittlere Glied mangelt. Dieses geschiehet wann man setzt $x=\frac{y-b}{2c}$, dadurch bekommt unsere Formel diese Gestalt

$$a+\frac{by-bb}{2c}+\frac{yy-2by+bb}{4c}, \quad \text{oder} \quad \frac{4ac-bb+yy}{4c}.$$

Soll diese ein Quadrat werden, so setze man dasselbe $=\frac{zz}{4}$, so wird

$$4ac-bb+yy=czz \quad \text{folglich} \quad yy=czz+bb-4ac.$$

Wann also unsere Formel ein Quadrat seyn soll, so wird auch diese

$$czz+bb-4ac$$

ein Quadrat und umgekehrt, wann diese ein Quadrat wird, so wird auch die obige ein Quadrat; folglich wann man für $bb - 4ac$ schreibt t, so kommt es darauf an ob eine solche Formel $czz + t$ ein Quadrat werden könne oder nicht? und da diese Formel nur aus zwey Gliedern besteht, so ist es ohnstreitig weit leichter die Möglichkeit oder Unmöglichkeit derselben zu beurtheilen, welches aus der Beschaffenheit der beyden gegebenen Zahlen c und t geschehen muß.

64.

Wann $t = 0$ ist, so ist offenbar, daß die Formel czz nur alsdann ein Quadrat werde, wann die Zahl c ein Quadrat ist. Dann da ein Quadrat durch ein ander Quadrat dividirt, wieder ein Quadrat wird, so kann czz kein Quadrat seyn, wofern nicht $\frac{czz}{zz}$, das ist c, ein Quadrat ist. Also wann die Zahl c kein Quadrat ist, so kann auch die Formel czz auf keinerlei Weise ein Quadrat werden. Ist aber c vor sich eine Quadrat-Zahl, so ist auch czz ein Quadrat, man mag für z annehmen was man will.

65.

Um andere Fälle beurtheilen zu können, so müßen wir dasjenige zu Hülfe nehmen, was oben von den verschiedenen Arten der Zahlen in Ansehung eines jeglichen Theilers angeführt worden.

Also in Ansehung des Theilers 3 sind die Zahlen von dreyerley Art: die erste begreift diejenigen Zahlen, welche sich durch 3 theilen laßen und durch diese Formel $3n$ vorgestellt werden.

Zu der andern Art gehören diejenigen, welche durch 3 dividirt 1 übrig laßen, und in dieser Formel $3n + 1$ enthalten sind.

Die dritte Art aber begreift die Zahlen in sich, welche durch 3 dividirt 2 übrig laßen, und durch diese Formel $3n + 2$ vorgestellt werden.

Da nun alle Zahlen in einer von diesen 3 Formeln enthalten sind, so wollen wir die Quadraten davon betrachten.

Ist die Zahl in der Formel $3n$ enthalten, so ist ihr Quadrat $9nn$, welches sich also nicht nur durch 3 sondern so gar durch 9 theilen läßt.

Ist die Zahl in der Formel $3n + 1$ enthalten, so ist ihr Quadrat

$$9nn + 6n + 1,$$

welches durch 3 dividirt giebt $3nn + 2n$ und 1 zum Rest läßt, und also auch zur zweyten Art $3n + 1$ gehöret.

Ist endlich die Zahl in dieser Formel $3n+2$ enthalten, so ist ihr Quadrat

$$9nn+12n+4,$$

welches durch 3 dividirt, gibt $3nn+4n+1$, und 1 im Rest läßt, und also auch zu der zweyten Art $3n+1$ gehöret: daher ist klar, daß alle Quadrat-Zahlen in Ansehung des Theilers 3 nur von zweyerley Arten sind. Dann entweder laßen sich dieselben durch 3 theilen, und alsdann müßen sie sich auch nothwendig durch 9 theilen laßen; oder wann sie sich nicht durch 3 theilen laßen, so bleibt allezeit nur 1 im Rest, niemals aber 2. Dahero keine Zahl, die in der Form $3n+2$ enthalten ist, ein Quadrat seyn kann.

66.

Hieraus können wir nun leicht zeigen, daß die Formel $3xx+2$ niemals ein Quadrat werden kann, man mag für x eine gantze Zahl oder einen Bruch setzen. Dann wann x eine ganze Zahl ist und man theilt diese Formel $3xx+2$ durch 3 so bleiben 2 übrig, daher diese Formel kein Quadrat seyn kann. Wann aber x ein Bruch ist, so setze man $x=\frac{t}{u}$, von welchem Bruch wir annehmen können, daß derselbe schon in seine kleinste Form gebracht worden, und also t und u keinen gemeinen Theiler haben außer 1. Sollte nun $\frac{3tt}{uu}+2$ ein Quadrat seyn, so müßte dieselbe auch mit uu multiplicirt, das ist diese $3tt+2uu$ ein Quadrat seyn, dieses aber kann ebenfalls nicht geschehen. Dann entweder läßt sich die Zahl u durch 3 theilen oder nicht: läßt sie sich theilen, so läßt sich t nicht theilen weil sonsten t und u einen gemeinen Theiler hätten.

Man setze dahero $u=3f$, so wird unsere Formel $3tt+18ff$, welche durch 3 getheilt giebt $tt+6ff$, so sich nicht weiter durch 3 theilen läßt, wie zu einem Quadrat erfordert wird, weil sich zwar $6ff$ theilen läßt, tt aber durch 3 dividirt 1 übrig läßt.

Läßt sich aber u nicht durch 3 theilen, so sehe man was übrig bleibt. Weil sich das erste Glied durch 3 theilen läßt, so kommt es mit dem Rest blos auf das zweyte Glied $2uu$ an. Nun aber uu durch 3 dividirt 1 im Rest hat, oder eine Zahl ist von dieser Art $3n+1$, so wird $2uu$ eine Zahl von dieser Art $6n+2$ seyn, und also durch 3 dividirt 2 übrig lassen: dahero unsere Formel $3tt+2uu$ durch 3 dividirt, 2 übrig läßt, und also gewiß keine Quadrat-Zahl seyn kann.

67.

Eben so kann man beweisen, daß auch diese Formel $3tt + 5uu$ niemals ein Quadrat seyn kann, und so gar auch keine von diesen: $3tt + 8uu$, $3tt + 11uu$, $3tt + 14uu$ etc. wo die Zahlen 5, 8, 11, 14 etc. durch 3 dividirt 2 übrig lassen. Dann wäre u durch 3 theilbar, folglich t nicht, und man setzte $u = 3s$, so würde die Formel durch 3 nicht aber durch 9 theilbar seyn. Wäre u nicht durch 3 theilbar und also uu eine Zahl von dieser Art $3n + 1$, so wäre zwar das erste Glied $3tt$ durch 3 theilbar, das andere aber $5uu$ von dieser Form $15n + 5$, oder $8uu$ von dieser Form $24n + 8$, oder $11uu$ von dieser $33n + 11$ etc. würde durch 3 dividirt 2 übrig laßen und also kein Quadrat seyn können.

68.

Dieses gilt also auch von dieser allgemeinen Formel $3tt + (3n + 2)uu$, welche nimmermehr ein Quadrat werden kann, und auch nicht wann für n negative Zahlen gesetzt würden. Also wann $n = -1$, so ist es unmöglich, diese Formel $3tt - uu$ zu einem Quadrat zu machen. Dann wann u durch 3 theilbar ist, so ist die Sache offenbar, wäre aber u nicht theilbar durch 3, so würde uu eine Zahl von dieser Art $3n + 1$, und also unsere Formel seyn $3tt - 3n - 1$, welche durch 3 dividirt übrig läßt -1, oder um 3 mehr, $+2$ übrig läßt. Man setze überhaupt $n = -m$ so wird unsere Formel $3tt - (3m - 2)uu$, welche auch nimmermehr ein Quadrat werden kann.

69.

Hierzu hat uns nun die Betrachtung des Theilers 3 geführet; wir wollen dahero auch 4 als einen Theiler betrachten, da dann alle Zahlen in einer von diesen vier Formeln:

$$\text{I. } 4n, \quad \text{II. } 4n + 1, \quad \text{III. } 4n + 2, \quad \text{IV. } 4n + 3,$$

enthalten sind. Von den Zahlen der ersten Art ist das Quadrat $16nn$ und läßt sich also durch 16 theilen. Ists eine Zahl von der zweyten Art $4n + 1$, so ist ihr Quadrat $16nn + 8n + 1$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt und gehört also zu dieser Formel $8n + 1$. Ists eine Zahl von der dritten Art $4n + 2$ so ist ihr Quadrat $16nn + 16n + 4$, welche durch 16 dividirt 4 übrig läßt, und also in dieser Form $16n + 4$ enthalten ist. Ists endlich eine Zahl von der vierten Art $4n + 3$, so ist ihr Quadrat $16nn + 24n + 9$, welches durch 8 dividirt 1 übrig läßt.

70.

Hieraus lernen wir folgendes, erstlich daß alle gerade Quadrat-Zahlen in dieser Form $16n$ oder in dieser $16n+4$ enthalten sind; folglich alle übrige gerade Formeln, nemlich $16n+2$; $16n+6$; $16n+8$; $16n+10$; $16n+12$; $16n+14$ können niemals Quadrat-Zahlen seyn.

Hernach von den ungeraden Quadraten ersehen wir, daß alle in dieser einzigen Formel $8n+1$ enthalten sind, oder durch 8 dividirt 1 im Rest laßen. Dahero alle übrige ungerade Zahlen welche in einer von dieser Formel $8n+3$; $8n+5$; $8n+7$ enthalten sind, können niemals Quadrate werden.

71.

Aus diesem Grund können wir auch wiederum zeigen, daß diese Formel $3tt+2uu$ kein Quadrat seyn kann. Dann entweder sind beyde Zahlen t und u ungerade, oder die eine ist gerad und die andere ist ungerad, weil beyde zugleich nicht gerad seyn können, indem sonst 2 ihr gemeiner Theiler seyn würde. Wären beyde ungerad, und folglich so wohl tt als uu in dieser Form $8n+1$ enthalten, so würde das erste Glied $3tt$ durch 8 dividirt 3 übrig laßen, das andere Glied aber 2 übrig laßen, beyde zusammen aber würden 5 übrig laßen, und also kein Quadrat seyn. Wäre aber t eine gerade Zahl und u ungerade, so würde sich das erste Glied $3tt$ durch 4 theilen laßen, das andere aber $2uu$ würde durch 4 dividirt 2 übrig laßen, also beyde zusammen würden 2 übrig laßen und also kein Quadrat seyn. Wäre aber endlich u gerad nemlich $u=2s$, aber t ungerad und folglich $tt=8n+1$, so würde unsere Formel seyn $24n+3+8ss$, welche durch 8 dividirt 3 übrig läßt, und also kein Quadrat seyn kann.

Eben dieser Beweis läßt sich auch auf diese Formel ausdehnen

$$3tt+(8n+2)\,uu; \quad \text{imgleichen auch auf diese} \quad (8m+3)tt+2uu,$$

und auch so gar auf diese $(8m+3)\,tt+(8n+2)\,uu$, wo für m und n alle gantze Zahlen so wohl positive als negative genommen werden können.

72.

Wir gehen solcher Gestalt weiter zum Theiler 5, in Ansehung dessen alle Zahlen in einer von diesen fünf Formeln:

$$\text{I. } 5n, \quad \text{II. } 5n+1, \quad \text{III. } 5n+2, \quad \text{IV. } 5n+3, \quad \text{V. } 5n+4$$

enthalten sind. Ist nun eine Zahl von der ersten Art, so ist ihr Quadrat $25nn$, welches nicht nur durch 5 sondern auch durch 25 theilbahr ist.

Ist eine Zahl von der zweyten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 10n + 1$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt und also in dieser Formel $5n + 1$ enthalten ist.

Ist eine Zahl von der dritten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 20n + 4$; welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist eine Zahl von der vierten Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 30n + 9$, welches durch 5 dividirt 4 übrig läßt.

Ist endlich eine Zahl von der fünften Art, so ist ihr Quadrat $25nn + 40n + 16$, welches durch 5 dividirt 1 übrig läßt. Wann dahero eine Quadrat-Zahl sich nicht durch 5 theilen läßt, so ist der Rest immer entweder 1 oder 4, niemals aber 2 oder 3; dahero in diesen Formeln $5n + 2$ und $5n + 3$ kein Quadrat enthalten seyn kann.

73.

Aus diesem Grund können wir auch beweisen, daß weder die Formel $5tt + 2uu$ noch diese $5tt + 3uu$ ein Quadrat werden könne. Dann entweder ist u durch 5 theilbar oder nicht: im erstern Fall würden sich diese Formeln durch 5, nicht aber durch 25 theilen laßen, und also auch keine Quadrate seyn können. Ist aber u nicht theilbar durch 5, so ist uu entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, im erstern Fall wird die erste Formel $5tt + 10n + 2$, welche durch 5 getheilt 2 übrig läßt; die andere aber wird $5tt + 15n + 3$, welche durch 5 getheilt 3 übrig läßt, und also keine ein Quadrat seyn kann. Ist aber $uu = 5n + 4$, so wird die erste Formel $5tt + 10n + 8$, welche durch 5 dividirt 3 übrig läßt; die andere aber wird $5tt + 15n + 12$, welche durch 5 dividirt 2 übrig läßt, und also auch in diesem Fall kein Quadrat werden kann.

Aus eben diesem Grund siehet man auch, daß weder diese Formel $5tt + (5n + 2)uu$ noch diese $5tt + (5n + 3)uu$ ein Quadrat sein kann, weil eben dieselben Reste als vorher überbleiben, man kann auch so gar im ersten Glied $5mtt$ anstatt $5tt$ schreiben, wann nur m nicht durch 5 theilbar ist.

74.

Wie alle gerade Quadraten in dieser Form $4n$, alle ungerade aber in dieser Form $4n + 1$ enthalten sind, und also weder $4n + 2$, noch $4n + 3$ ein Quadrat seyn kann, so folgt daraus, daß diese allgemeine Formel

$(4m+3)tt+(4n+3)uu$ niemals ein Quadrat seyn kann. Dann wäre t gerad so würde sich tt durch 4 theilen laßen, das andere Glied aber würde durch 4 dividirt 3 übrig lassen; wären aber beyde Zahlen t und u ungerad, so würden die Reste von tt und uu 1 seyn, also von der gantzen Formel würde der Rest seyn 2. Nun aber ist keine Zahl welche durch 4 dividirt 2 übrig läßt, ein Quadrat; hier ist auch zu mercken, daß so wohl m als n negativ, und auch $=0$ genommen werden kann, dahero weder diese Formel $3tt+3uu$ noch diese $3tt-uu$ ein Quadrat seyn kann.

75.

Wie wir von den bisherigen Theilern gefunden haben, daß einige Arten der Zahlen niemals Quadrate seyn können, so gilt dieses auch bey allen andern Theilern, daß sich immer einige Arten finden die keine Quadrate seyn können.

Es sey der Theiler 7, so sind alle Zahlen in einer der folgenden sieben Arten enthalten, von welchen wir auch die Quadraten untersuchen wollen.

Arten der Zahlen		ihre Quadraten	gehören zu der Art
I.	$7n$	$49nn$	$7n$
II.	$7n+1$	$49nn+14n+1$	$7n+1$
III.	$7n+2$	$49nn+28n+4$	$7n+4$
IV.	$7n+3$	$49nn+42n+9$	$7n+2$
V.	$7n+4$	$49nn+56n+16$	$7n+2$
VI.	$7n+5$	$49nn+70n+25$	$7n+4$
VII.	$7n+6$	$49nn+84n+36$	$7n+1$

Da nun die Quadraten, die sich nicht durch 7 theilen lassen, in einer von diesen drey Arten enthalten seyn müssen $7n+1$, $7n+2$, $7n+4$, so werden die drey andern Arten von der Natur der Quadrate gäntzlich ausgeschloßen. Diese Arten sind nun $7n+3$, $7n+5$, $7n+6$, und der Grund davon ist offenbahr, weil sich immer zwey Arten finden davon die Quadraten zu einer Gattung gehören.

76.

Um dieses deutlicher zu zeigen, so bemercke man daß die letzte Art $7n+6$ auch also $7n-1$ ausgedrückt werden kann; eben so ist auch die

Formel $7n+5$ mit dieser $7n-2$ einerley, und $7n+4$ ist ebenso viel als $7n-3$. Nun aber ist offenbar, daß von diesen zwey Arten der Zahlen $7n+1$ und $7n-1$ die Quadrate durch 7 dividirt einerley übrig lassen nemlich 1; eben so sind auch die Quadraten dieser beyden Arten $7n+2$ und $7n-2$ von einerley Gattung.

77.

Ueberhaupt also, wie auch immer der Theiler beschaffen seyn mag, welchen wir mit dem Buchstaben d andeuten wollen, sind die daher entstehenden verschiedene Arten der Zahlen folgende

$$dn,\ dn+1,\ dn+2,\ dn+3 \text{ etc}\quad dn-1,\ dn-2,\ dn-3 \text{ etc.}$$

wo die Quadrate von $dn+1$ und $dn-1$ dieses gemein haben, daß sie durch d dividirt 1 übrig laßen, und also beyde zu einer Art nemlich zu $dn+1$ gehören. Eben so verhält es sich auch mit den beyden Arten $dn+2$ und $dn-2$, deren Quadrate zu der Art $dn+4$ gehören.

Und also überhaupt gilt es auch von diesen zwey Arten $dn+a$ und $dn-a$, deren Quadrate durch d dividirt einerley übrig lassen nemlich aa; oder so viel als übrig bleibt, wann man aa durch d theilt.

78.

Auf diese Weise erhält man also eine unendliche Menge solcher Formeln $att+buu$ welche auf keinerley Weise Quadrate werden können. Also aus dem Theiler 7 erkennt man leicht, daß keine von diesen drey Formeln

$$7tt+3uu,\quad 7tt+5uu \quad\text{und}\quad 7tt+6uu$$

jemals ein Quadrat werden kann, weil uu durch 7 dividirt entweder 1 oder 2 oder 4 übrig läßt; ferner weil bey der ersten entweder 3 oder 6 oder 5, bey der zweyten entweder 5 oder 3 oder 6, bey der dritten entweder 6 oder 5 oder 3 übrig blieb, welches bey keinem Quadrat geschehen kann. Wann nun dergleichen Formeln vorkommen, so ist alle Mühe vergebens, die man sich geben wollte, um irgend einen Fall zu errathen, wo ein Quadrat herauskommen möchte, und deswegen ist diese Betrachtung von großer Wichtigkeit.

Ist aber eine vorgegebene Formel nicht von dieser Beschaffenheit, und man kann einen einigen Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird, so ist in dem vorigen Capitel schon gezeigt worden, wie daraus unendlich viel andere Fälle gefunden werden sollen.

Die vorgegebene Formel war eigentlich $axx+b$, und weil gemeiniglich für x Brüche gefunden werden, so haben wir gesetzt $x=\frac{t}{u}$, also daß diese Formel $att+buu$ zu einem Quadrat gemacht werden soll.

Es giebt aber auch öfters unendlich viel Fälle wo so gar x in gantzen Zahlen gegeben werden kann, wie nun dieselben ausfindig zu machen, soll in dem folgenden Capitel gezeigt werden.

CAPITEL 6

VON DEN FÄLLEN IN GANZEN ZAHLEN DA DIE FORMEL $axx+b$ EIN QUADRAT WIRD

79.

Wir haben schon oben gewiesen wie solche Formeln $a+bx+cxx$ verwandelt werden sollen, daß das mittlere Glied wegfalle, und dahero begnügen wir uns die gegenwärtige Abhandlung nur auf diese Form $axx+b$ einzuschräncken, wobey es darauf ankommt, daß für x nur gantze Zahlen gefunden werden sollen aus welchen die Formel ein Quadrat wird. Vor allen Dingen aber ist nöthig, daß eine solche Formel an sich möglich sey, dann wäre sie unmöglich so könnten nicht einmahl Brüche für x, geschweige denn gantze Zahlen, statt finden.

80.

Man setze also diese Formel $axx+b=yy$, da dann beyde Buchstaben x und y gantze Zahlen seyn sollen, weil a und b dergleichen sind.

Zu diesem Ende ist unumgänglich nöthig, daß man schon einen Fall in gantzen Zahlen wiße oder errathen habe, dann sonsten würde alle Mühe überflüßig seyn mehr dergleichen Fälle zu suchen, weil vielleicht die Formel selbst unmöglich seyn möchte.

Wir wollen demnach annehmen daß diese Formel ein Quadrat werde wann man setzt $x=f$, und wollen das Quadrat durch gg andeuten, also daß $aff+b=gg$ wo demnach f und g bekante Zahlen sind. Es kommt also nur darauf an, wie aus diesem Fall noch andere Fälle hergeleitet werden können; und diese Untersuchung ist um so viel wichtiger, je mehr Schwierigkeiten dieselbe unterworfen ist, welche wir aber durch folgende Kunstgriffe überwinden werden.

81.

Da nun schon gefunden worden $aff + b = gg$, und über dieses auch seyn soll $axx + b = yy$, so subtrahire man jene Gleichung von dieser, um zu bekommen $axx - aff = yy - gg$, welche sich also durch Factoren ausdrücken läßt $a(x+f)(x-f) = (y+g)(y-g)$; man multiplicire beyderseits mit pq, so hat man $apq(x+f)(x-f) = pq(y+g)(y-g)$; um nun diese Gleichheit heraus zu bringen mache man diese Vertheilung

$$ap(x+f) = q(y+g) \quad \text{und} \quad q(x-f) = p(y-g),$$

und aus diesen beyden Gleichungen suche man die beyden Buchstaben x und y; die erste durch q dividirt giebt $y + g = \frac{apx + apf}{q}$; die andere durch p dividirt giebt $y - g = \frac{qx - qf}{p}$; diese von jener subtrahirt giebt $2g = \frac{(app-qq)x + (app+qq)f}{pq}$, mit pq multiplicirt wird $2pqg = (app - qq)x + (app + qq)f$, und dahero

$$x = \frac{2gpq}{app - qq} - \frac{(app + qq)f}{app - qq},$$

und hieraus findet man ferner $y = g + \frac{2gqq}{app - qq} - \frac{(app + qq)fq}{(app - qq)p} - \frac{qf}{p}$. Hier enthalten die zwey erstere Glieder den Buchstaben g, welche zusammen gezogen geben $\frac{g(app + qq)}{app - qq}$; die beyden andern enthalten den Buchstaben f und geben unter einer Benennung $-\frac{2afpq}{app - qq}$; dahero wir erhalten

$$y = \frac{g(app + qq) - 2afpq}{app - qq}.$$

82.

Diese Arbeit scheinet unserm Endzweck gar nicht gemäß zu sein, indem wir hier auf Brüche gerathen sind, da wir doch für x und y gantze Zahlen finden sollten, und es würde auf eine neue Frage ankommen was man für p und q für Zahlen annehmen müßte damit die Brüche wegfallen? welche Frage noch schwerer scheint als unsere Haupt-Frage. Allein es kann hier ein besonderer Kunstgrif angewendet werden, wodurch wir leicht zu unserm Endzweck gelangen: dann da hier alles in gantzen Zahlen ausgedrückt werden soll, so setze man $\frac{app + qq}{app - qq} = m$ und $\frac{2pq}{app - qq} = n$, damit man habe $x = ng - mf$ und $y = mg - naf$. Allein hier können wir m und n nicht nach Belieben nehmen, sondern sie müßen so bestimmt werden, daß den obigen Bestimmungen ein Genüge geschehe; zu diesem Ende laßt uns ihre Quadrate betrachten, da wir dann haben werden

$$mm = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} \quad \text{und} \quad nn = \frac{4ppqq}{aap^4 - 2appqq + q^4}$$

dahero bekommen wir:

$$mm - ann = \frac{aap^4 + 2appqq + q^4 - 4appqq}{aap^4 - 2appqq + q^4} = \frac{aap^4 - 2appqq + q^4}{aap^4 - 2appqq + q^4} = 1.$$

83.

Hieraus sieht man, daß die beyden Zahlen m und n also beschaffen seyn müßen, daß $mm = ann + 1$. Da nun a eine bekante Zahl ist, so muß man vor allen Dingen darauf bedacht seyn eine solche gantze Zahl für n zu finden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, von welchem hernach m die Wurzel ist, und so bald man eine solche gefunden, und über dieses auch die Zahl f gefunden, daß $aff + b$ ein Quadrat werde nemlich gg, so bekommt man vor x und y folgende Werthe in gantzen Zahlen

$$x = ng - mf, \quad \text{und} \quad y = mg - naf,$$

und dadurch wird $axx + b = yy$.

84.

Es ist vor sich klar, daß wann einmahl m und n gefunden worden, man dafür auch $-m$ und $-n$ schreiben könne, weil das Quadrat nn doch einerley bleibt.

Um dahero x und y in gantzen Zahlen zu finden, auf daß $axx + b = yy$ werde, so muß man vor allen Dingen einen solchen Fall schon haben, daß nemlich sey $aff + b = gg$; so bald dieser Fall bekant ist, so muß man noch zu der Zahl a solche Zahlen m und n suchen, daß $ann + 1 = mm$ werde, wozu in folgendem die Anleitung soll gegeben werden. Ist nun dieses geschehen, so hat man sogleich einen neuen Fall, nemlich $x = ng + mf$ und $y = mg + naf$, da dann seyn wird $axx + b = yy$.

Setzt man diesen neuen Fall an die Stelle des vorigen der für bekant angenommen worden und schreibt $ng + mf$ anstatt f und $mg + naf$ anstatt g, so bekommen wir für x und y wiederum neue Werthe, aus welchen weiter, wann sie für f und g gesetzt werden, andere neue heraus gebracht werden, und so immerfort, also daß wann man anfänglich nur einen solchen Fall gehabt, man daraus unendlich viel andere ausfindig machen kann.

85.

Die Art wie wir zu dieser Auflösung gelanget sind, war ziemlich mühsam und schien anfänglich von unserm Endzweck sich zu entfernen, indem wir auf ziemlich verwirrte Brüche geriethen, die durch ein besonders Glück haben weggeschaft werden können, es wird dahero gut seyn noch einen andern kürtzern Weg anzuzeigen, welcher uns zu eben dieser Auflösung führet.

86.

Da seyn soll $axx + b = yy$ und man schon gefunden hat $aff + b = gg$, so giebt uns jene Gleichung $b = yy - axx$, diese aber $b = gg - aff$, folglich muß auch seyn $yy - axx = gg - aff$, und jetzt kommt alles darauf an, daß man aus den bekanten Zahlen f und g die unbekanten x und y finden soll: da dann so gleich in die Augen fällt, daß diese Gleichung erhalten werde, wann man setzt $x = f$ und $y = g$; allein hieraus erhält man keinen neuen Fall außer den der schon für bekant genommen wird.

Wir wollen demnach setzen, man habe für n schon eine solche Zahl gefunden, daß $ann + 1$ ein Quadrat werde, oder daß da sey $ann + 1 = mm$, dahero wird nun $mm - ann = 1$, damit multiplicire man in der obigen Gleichung den Theil $gg - aff$ so muß auch seyn

$$yy - axx = (gg - aff)(mm - ann) = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn.$$

Laßt uns zu diesem Ende setzen $y = gm + afn$, so bekommen wir:

$$ggmm + 2afgmn + aaffnn - axx = ggmm - affmm - aggnn + aaffnn,$$

wo sich die Glieder $ggmm$ und $aaffnn$ einander aufheben und wir also bekommen $axx = affmm + aggnn + 2afgmn$, welche Gleichung durch a getheilt giebt $xx = ffmm + ggnn + 2fgmn$, welche Formel offenbar ein Quadrat ist, daraus wir erhalten $x = fm + gn$, welches eben die Formeln sind die wir vorher gefunden haben.

87.

Es wird nun nöthig seyn diese Auflösung durch einige Exempel zu erläutern.

I. Frage: Man suche alle gantze Zahlen für x, also daß $2xx-1$ ein Quadrat werde, oder daß sey $2xx-1=yy$?

Hier ist $a=2$ und $b=-1$, der erste Fall so in die Augen fällt ist nun wann man nimmt $x=1$ und $y=1$. Aus diesem bekanten Falle haben wir nun $f=1$ und $g=1$; es wird aber ferner erfordert eine solche Zahl für n zu finden, daß $2nn+1$ ein Quadrat werde nemlich mm, solches geschiehet nun wann $n=2$ und $m=3$, dahero wir aus einem jeden bekanten Fall f und g diese neue finden $x=3f+2g$, und $y=3g+4f$; da nun der erste bekante Fall ist $f=1$ und $g=1$, so finden wir daraus folgende neue Fälle:

$x=f=1$	5	29	169	
$y=g=1$	7	41	239	etc.

88.

II. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich Quadrat-Zahlen sind?

Es sey z die Drey-Ecks-Wurzel, so ist das Drey-Eck $\frac{zz+z}{2}$, welches ein Quadrat seyn soll. Die Wurzel davon sey x, so muß seyn $\frac{zz+z}{2}=xx$. Man multiplicire mit 8 so wird $4zz+4z=8xx$ und beyderseits 1 addirt, giebt $4zz+4z+1=(2z+1)^2=8xx+1$. Es kommt also darauf an, daß $8xx+1$ ein Quadrat werde, und wann man setzt $8xx+1=yy$, so wird $y=2z+1$, und also die gesetzte Drey-Eck-Wurzel $z=\frac{y-1}{2}$.

Hier ist nun $a=8$, und $b=1$, und der bekannte Fall fält so gleich in die Augen, nemlich $f=0$ und $g=1$. Damit ferner werde $8nn+1=mm$, so ist $n=1$ und $m=3$; dahero bekommt man $x=3f+g$ und $y=3g+8f$, und $z=\frac{y-1}{2}$; hieraus bekommen wir also folgende Auflösungen:

$x=\ f\ =0$	1	6	35	204	1189	
$y=\ g\ =1$	3	17	99	577	3363	
$z=\frac{y-1}{2}=0$	1	8	49	288	1681	etc.

89.

III. Frage: Man suche alle Fünf-Ecks-Zahlen welche zu gleich Quadrat-Zahlen sind?

Die Fünf-Ecks-Wurzel sey $=z$, so ist das Fünf-Eck $=\frac{3zz-z}{2}$, so dem Quadrat xx gleich gesetzt werde; dahero wird $3zz-z=2xx$; man multiplicire mit 12 und addire 1, so wird $36zz-12z+1=24xx+1=(6z-1)^2$.

Setzt man nun $24xx+1=yy$, so ist $y=6z-1$ und $z=\frac{y+1}{6}$; da nun hier $a=24$, $b=1$, so ist der bekannte Fall $f=0$ und $g=1$. Da hernach seyn muß $24nn+1=mm$, so nehme man $n=1$ und da wird $m=5$, dahero erhalten wir $x=5f+g$ und $y=5g+24f$, und $z=\frac{y+1}{6}$; oder auch $y=1-6z$, so wird ebenfalls $z=\frac{1-y}{6}$, woraus folgende Auflösungen gefunden werden:

	$x=f=0$	1	10	99	980
	$y=g=1$	5	49	485	4801
	$z=\frac{y+1}{6}=\frac{1}{3}$	1	$\frac{25}{3}$	81	$\frac{2401}{3}$
oder	$z=\frac{1-y}{6}=0$	$-\frac{2}{3}$	-8	$-\frac{242}{3}$	-800

90.

IV. Frage: Man suche alle Quadrate in gantzen Zahlen, welche sieben mal genommen und dazu 2 addirt wiederum Quadrate werden?

Hier wird also gefordert, daß seyn soll $7xx+2=yy$, wo $a=7$ und $b=2$; der bekante Fall fällt so gleich in die Augen, wann $x=1$ und dann ist $x=f=1$ und $y=g=3$. Nun betrachte man die Gleichung $7nn+1=mm$, und da findet man leicht $n=3$ und $m=8$; dahero erhalten wir $x=8f+3g$ und $y=8g+21f$, woraus die folgenden Werthe für x und y gefunden werden:

$x=f=1$	17	271
$y=g=3$	45	717

91.

V. Frage: Man suche alle dreyeckigte Zahlen, welche zugleich fünfeckigte Zahlen sind?

Es sey die Drey-Ecks-Wurzel $=p$ und die Fünf-Ecks-Wurzel $=q$, so muß seyn $\frac{pp+p}{2}=\frac{3qq-q}{2}$, oder $3qq-q=pp+p$; hieraus suche man q, und da

$qq=\frac{1}{3}q+\frac{pp+p}{3}$, so wird $q=\frac{1}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{36}+\frac{pp+p}{3}\right)}$, das ist $q=\frac{1\pm\sqrt{(12pp+12p+1)}}{6}$. Es kommt also darauf an, daß $12pp+12p+1$ ein Quadrat werde, und das in gantzen Zahlen. Da nun hier das mittlere Glied $12p$ vorhanden ist, so setze man $p=\frac{x-1}{2}$; dadurch bekommen wir $12pp=3xx-6x+3$ und $12p=6x-6$, dahero $12pp+12p+1=3xx-2$, welches ein Quadrat seyn muß.

Setzen wir demnach $3xx-2=yy$, so haben wir daraus $p=\frac{x-1}{2}$ und $q=\frac{1+y}{6}$; da nun die gantze Sache auf die Formel $3xx-2=yy$ ankommt, so ist $a=3$ und $b=-2$, und der bekante Fall $x=f=1$ und $y=g=1$; hernach haben wir für diese Gleichung $mm=3nn+1$: $n=1$ und $m=2$, daraus wir folgende Werthe für x und y, und daher weiter für p und q, erhalten.

Da also ist $x=2f+g$ und $y=2g+3f$, so wird:

	$x=f=1$	3	11	41
	$y=g=1$	5	19	71
	$p=0$	1	5	20
	$q=\frac{1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$	12
oder	$q=0$	$-\frac{2}{3}$	-3	$-\frac{35}{3}$

weil nemlich auch $q=\frac{1-y}{6}$ ist.

92.

Bisher waren wir gezwungen, aus der gegebenen Formel das zweyte Glied wegzuschaffen, wann eines vorhanden war: man kann aber auch die erste gegebene Methode auf solche Formeln anwenden, wo das mittlere Glied vorhanden ist, welches wir hier noch anzeigen wollen. Es sey demnach die vorgegebene Formel, die ein Quadrat seyn soll, diese $axx+bx+c=yy$, und hievon sey schon dieser Fall bekant $aff+bf+c=gg$.

Nun subtrahire man diese Gleichung von der obigen, so wird

$$a(xx-ff)+b(x-f)=yy-gg,$$

welche also durch Factores ausgedrückt werden kann

$$(x-f)(ax+af+b)=(y-g)(y+g).$$

Man multiplicire beyderseits mit pq, so wird

$$pq(x-f)(ax+af+b)=pq(y-g)(y+g),$$

welche in diese zwey zergliedert werden

$$\text{I.)}\ p(x-f)=q(y-g),\quad \text{II.)}\ q(ax+af+b)=p(y+g).$$

Man multiplicire die erste mit p, die andere mit q, und subtrahire jenes von diesem, so kommt $(aqq-pp)x+(aqq+pp)f+bqq=2gpq$, daraus finden wir

$$x=\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{(aqq+pp)f}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}.$$

Aus der ersten Gleichung ist

$$q(y-g)=p(x-f)=p\left(\frac{2gpq}{aqq-pp}-\frac{2afqq}{aqq-pp}-\frac{bqq}{aqq-pp}\right);$$

also

$$y-g=\frac{2gpp}{aqq-pp}-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp},$$

und dahero

$$y=g\left(\frac{aqq+pp}{aqq-pp}\right)-\frac{2afpq}{aqq-pp}-\frac{bpq}{aqq-pp}.$$

Um diese Brüche wegzubringen, so setze man wie oben geschehen

$$\frac{aqq+pp}{aqq-pp}=m \quad\text{und}\quad \frac{2pq}{aqq-pp}=n,$$

so wird

$$m+1=\frac{2aqq}{aqq-pp} \quad\text{und also}\quad \frac{qq}{aqq-pp}=\frac{m+1}{2a};$$

also wird seyn

$$x=ng-mf-b\frac{(m+1)}{2a} \quad\text{und}\quad y=mg-naf-\frac{1}{2}bn,$$

wo die Buchstaben m und n eben so beschaffen seyn müssen, wie oben, nemlich daß $mm=ann+1$.

93.

Solcher Gestalt sind aber die für x und y gefundenen Formeln noch mit Brüchen vermengt, weil die den Buchstaben b enthaltende Glieder Brüche sind, und also unserm Endzweck kein Genüge leisten. Allein es ist zu mercken, daß wann man von diesen Werthen zu den folgenden fortschreitet, dieselben immer gantze Zahlen werden, welche man aber viel leichter aus den anfänglich eingeführten Zahlen p und q finden kann. Dann man nehme p und q dergestalt an, daß $pp=aqq+1$; da nun $aqq-pp=-1$, so fallen daselbst die Brüche von selbsten weg, und da wird

$$x=-2gpq+f(aqq+pp)+bqq \quad\text{und}\quad y=-g(aqq+pp)+2afpq+bpq,$$

weil aber in dem bekanten Fall $aff+bf+c=gg$ nur das Quadrat gg vorkommt, so ist es gleich viel ob man dem Buchstaben g das Zeichen $+$ oder $-$ giebt; man schreibe also $-g$ anstatt $+g$, so werden unsere Formeln seyn:

$$x=2gpq+f(aqq+pp)+bqq \quad \text{und} \quad y=g(aqq+pp)+2afpq+bpq,$$

da dann gewis seyn wird $axx+bx+c=yy$.

Man suche z. E. diejenigen Sechs-Eck-Zahlen, welche zu gleich Quadrate sind?

Da muß dann seyn $2xx-x=yy$, wo $a=2$, $b=-1$ und $c=0$; der bekante Fall ist hier offenbar $x=f=1$ und $y=g=1$.

Da hernach seyn muß $pp=2qq+1$, so wird $q=2$, und $p=3$; dahero wir erhalten $x=12g+17f-4$ und $y=17g+24f-6$; woraus folgende Werthe gefunden werden:

$x=f=1$	25	841	
$y=g=1$	35	1189	etc.

94.

Wir wollen aber bey der ersten Formel, wo das mittlere Glied fehlt, noch etwas stehen bleiben und die Fälle in Erwegung ziehen, wo die Formel $axx+b$ ein Quadrat wird in gantzen Zahlen.

Es sey demnach $axx+b=yy$ und hiezu werden zwey Stücke erfordert:

Erstlich daß man einen Fall wiße, wo dieses geschiehet: derselbe sey nun $aff+b=gg$.

Zweytens daß man solche Zahlen für m und n wiße, daß $mm=ann+1$, wozu in folgendem Capitel die Anleitung gegeben werden soll.

Hieraus erhält man nun einen neuen Fall, nemlich $x=ng+mf$ und $y=mg+anf$, aus welchem hernach gleicher Gestalt neue Fälle gefunden werden können, welche wir folgender Gestalt vorstellen wollen:

$x=f$	A	B	C	D	E	
$y=g$	P	Q	R	S	T	etc.

wo	$A=ng+mf$	$B=nP+mA$	$C=nQ+mB$	$D=nR+mC$	
und	$P=mg+anf$	$Q=mP+anA$	$R=mQ+anB$	$S=mR+anC$	etc.

welche beyde Reihen Zahlen man mit leichter Mühe so weit fortsetzen kann als man will.

95.

Nach dieser Art aber kann man weder die obere Reihe für x fortsetzen ohne zugleich die untere zu wißen, noch die untere ohne die obere zu wißen. Man kann aber leicht eine Regel angeben die obere Reihe allein fortzusetzen ohne die untere zu wißen, welche Regel auch für die untere Reihe gilt ohne daß man nöthig hätte die obere zu wißen.

Die Zahlen nemlich, welche für x gesetzt werden können, schreiten nach einer gewißen Progression fort wovon man ein jedes Glied z. E. E aus den zwey vorhergehenden C und D, bestimmen kann, ohne dazu die untern Glieder R und S nöthig zu haben. Dann da

$$E = nS + mD = n(mR + anC) + m(nR + mC), \text{ das ist}$$
$$E = 2mnR + annC + mmC, \text{ so wird, weil } nR = D - mC, \text{ gefunden}$$
$$E = 2mD - mmC + annC \text{ oder } E = 2mD - (mm - ann)C;$$

da aber $mm = ann + 1$ also $mm - ann = 1$, so haben wir

$$E = 2mD - C,$$

woraus erhellet wie eine jede dieser obern Zahlen aus den zwey vorhergehenden bestimmt wird.

Eben so verhält es sich auch mit der untern Reihe. Dann da

$$T = mS + anD, \text{ und } D = nR + mC, \text{ so wird } T = mS + annR + amnC.$$

Da nun ferner $S = mR + anC$, so ist $anC = S - mR$, welcher Werth für anC geschrieben giebt,

$$T = 2mS - R,$$

also daß die untere Reihe nach eben der Regel fortschreitet als die obere.

Man suche z. E. alle gantze Zahlen x, daß da werde $2xx - 1 = yy$. Da ist nun $f = 1$ und $g = 1$; ferner damit $mm = 2nn + 1$, so wird $n = 2$ und $m = 3$. Da nun $A = ng + mf = 5$, so sind die zwey ersten Glieder 1 und 5, aus welchen die folgenden nach dieser Regel gefunden werden $E = 6D - C$, nemlich ein jedes Glied sechsmal genommen weniger dem vorhergehenden giebt das folgende; dahero die für x verlangte Zahlen nach dieser Regel also fortgehen:

$$1, \quad 5, \quad 29, \quad 169, \quad 985, \quad 5741 \text{ etc.}$$

Woraus man sieht daß diese Zahlen unendlich weit fortgesetzt werden können. Wollte man aber auch Brüche gelten laßen, so würde nach der oben gegebenen Methode eine noch unendlich größere Menge angegeben werden können.

CAPITEL 7

VON EINER BESONDERN METHODE DIE FORMEL $ann+1$ ZU EINEM QUADRAT IN GANTZEN ZAHLEN ZU MACHEN

96.

Was in dem vorigen Capitel vorgetragen worden, kann nicht zur Ausführung gebracht werden, wann man nicht im Stande ist für eine jegliche Zahl a eine solche gantze Zahl n zu finden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde, oder daß man bekomme $mm = ann + 1$.

Wollte man sich mit gebrochenen Zahlen begnügen, so würde diese Gleichung leicht aufzulösen seyn, indem man nur setzen dürfte $m = 1 + \frac{np}{q}$. Dann da wird $mm = 1 + \frac{2np}{q} + \frac{nnpp}{qq} = ann + 1$, wo sich beyderseits das 1 aufhebt und die übrigen Glieder durch n theilen laßen, da dann mit qq multiplicirt kommt $2pq + npp = anqq$, daraus gefunden wird $n = \frac{2pq}{aqq - pp}$, woraus unendlich viel Werthe für n gefunden werden können. Da aber n eine gantze Zahl seyn soll, so hilft uns dieses nichts, dahero eine gantz andere Methode gebraucht werden muß, um dieses zu finden.

97.

Vor allen Dingen aber ist zu mercken, daß wann $ann+1$ ein Quadrat in gantzen Zahlen werden soll, a mag eine Zahl seyn was man vor eine will, solches nicht allezeit möglich sey.

Dann erstlich werden alle Fälle ausgeschloßen, wo a eine negative Zahl ist; hernach werden auch alle die Fälle ausgeschloßen, wo a selbst eine Quadrat-Zahl ist, weil alsdann ann ein Quadrat seyn würde, kein Quadrat aber $+1$ in gantzen Zahlen ein Quadrat seyn kann. Dahero muß unsere Formel also eingeschränckt werden, daß der Buchstabe a weder eine negative noch eine Quadrat-Zahl sey; so oft aber a eine positive Zahl und kein Quadrat ist, so kann allezeit für n eine solche gantze Zahl gefunden werden, daß $ann+1$ ein Quadrat werde.

Hat man aber eine solche Zahl gefunden, so ist es leicht aus dem vorigen Capitel, unendlich viel andere herzuleiten. Zu unserem Vorhaben aber ist es genung, eine einige und zwar die kleinste ausfündig zu machen.

98.

Hierzu hat vormals ein gelehrter Engeländer, Namens PELL[1]), eine gantz sinnreiche Methode erfunden, welche wir hier erklären wollen. Dieselbe aber ist nicht so beschaffen, daß sie auf eine allgemeine Art für eine jegliche Zahl a, sondern nur für einen jeglichen Fall besonders gebraucht werden kann.

Wir wollen demnach von den leichteren Fällen den Anfang machen, und für n eine Zahl suchen daß $2nn+1$ ein Quadrat werde, oder daß $\sqrt{(2nn+1)}$ rational werde.

Hier sieht man nun leicht, daß diese Quadrat-Wurzel größer seyn werde als n, doch aber kleiner als $2n$. Man setze dahero dieselbe $=n+p$ so wird p gewis kleiner seyn als n. Also haben wir $\sqrt{(2nn+1)}=n+p$ und dahero $2nn+1=nn+2np+pp$, woraus wir nun n suchen wollen. Da nun ist $nn=2np+pp-1$ so wird $n=p+\sqrt{(2pp-1)}$.

Es kommt also darauf an, daß $2pp-1$ ein Quadrat werde, welches geschiehet wann $p=1$ und hieraus findet man $n=2$ und $\sqrt{(2nn+1)}=3$. Wäre dieses letztere nicht so gleich in die Augen gefallen, so hätte man weiter fortgehen können, und da $\sqrt{(2pp-1)}$ größer als p und dahero n größer als $2p$, so setze man $n=2p+q$, da dann wird $2p+q=p+\sqrt{(2pp-1)}$ oder $p+q=\sqrt{(2pp-1)}$, hievon die Quadrate genommen, kommt

$$pp+2pq+qq=2pp-1 \quad \text{oder} \quad pp=2pq+qq+1$$

und daraus wird $p=q+\sqrt{(2qq+1)}$, also muß $2qq+1$ ein Quadrat seyn, welches geschiehet wann $q=0$ dahero $p=1$ und $n=2$. Aus diesem Exempel kann man sich schon einen Begriff von dieser Methode machen, welcher aber durch das folgende noch weiter aufgeklärt wird.

99.

Es sey nun $a=3$, so daß die Formel $3nn+1$ ein Quadrat werden soll. Man setze $\sqrt{(3nn+1)}=n+p$, da wird $3nn+1=nn+2np+pp$ und $2nn=2np+pp-1$ und daraus $n=\frac{p+\sqrt{(3pp-2)}}{2}$; da nun $\sqrt{(3pp-2)}$ größer

1) Die Verbindung des Namens PELL mit dieser von FERMAT gestellten Aufgabe ist nach G. WERTHEIM (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 9, 1899, 555—576 sowie Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 113—126) unzutreffend und beruht nach G. ENESTRÖM (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 204—207) auf einer Verwechselung der beiden Namen PELL und BROUNCKER. Siehe auch H. KONEN, *Geschichte der Gleichung* $t^2-Du^2=1$, Leipzig 1901. H. W.

als p und also n größer als $\frac{2p}{2}$ oder als p, so setze man $n = p + q$, da wird $2p + 2q = p + \sqrt{(3pp - 2)}$ oder $p + 2q = \sqrt{(3pp - 2)}$; hiervon die Quadrate genommen, wird $pp + 4pq + 4qq = 3pp - 2$ oder $2pp = 4pq + 4qq + 2$, das ist $pp = 2pq + 2qq + 1$, dahero $p = q + \sqrt{(3qq + 1)}$. Diese Formel ist der gegebenen gleich und also $q = 0$ leistet ein Genüge, daraus wird $p = 1$ und $n = 1$, also $\sqrt{(3nn + 1)} = 2$.

100.

Nun sey $a = 5$, um diese Formel $5nn + 1$ zu einem Quadrat zu machen, davon die Wurzel größer ist als $2n$: dahero setze man $\sqrt{(5nn + 1)} = 2n + p$ da wird $5nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ und daraus $nn = 4np + pp - 1$; dahero $n = 2p + \sqrt{(5pp - 1)}$. Weil nun $\sqrt{(5pp - 1)}$ größer ist als $2p$, so ist auch n größer als $4p$; deswegen setze man $n = 4p + q$, so wird $2p + q = \sqrt{(5pp - 1)}$ oder $4pp + 4pq + qq = 5pp - 1$; dahero $pp = 4pq + qq + 1$ und also $p = 2q + \sqrt{(5qq + 1)}$; dieser geschieht ein Genüge wann $q = 0$, folglich $p = 1$ und $n = 4$; dahero $\sqrt{(5nn + 1)} = 9$.

101.

Es sey ferner $a = 6$, um $6nn + 1$ zu einem Quadrat zu machen, wovon die Wurzel größer ist als $2n$. Man setze deswegen $\sqrt{(6nn + 1)} = 2n + p$, so wird $6nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ oder $2nn = 4np + pp - 1$ und dahero $n = p + \frac{\sqrt{(6pp - 2)}}{2}$, oder $n = \frac{2p + \sqrt{(6pp - 2)}}{2}$ also n größer als $2p$, man setze deswegen $n = 2p + q$, so wird $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp - 2)}$ oder $2p + 2q = \sqrt{(6pp - 2)}$. Die Quadrate genommen, wird $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$ oder $2pp = 8pq + 4qq + 2$, das ist $pp = 4pq + 2qq + 1$, woraus gefunden wird $p = 2q + \sqrt{(6qq + 1)}$; welche Formel der ersten gleich ist, und also $q = 0$ gesetzt werden kann, daraus dann wird $p = 1$ und $n = 2$, also $\sqrt{(6nn + 1)} = 5$.

102.

Es sey weiter $a = 7$ und $7nn + 1 = mm$; es ist also m größer als $2n$, dahero setze man $m = 2n + p$, so wird $7nn + 1 = 4nn + 4np + pp$ oder $3nn = 4np + pp - 1$, daraus gefunden wird $n = \frac{2p + \sqrt{(7pp - 3)}}{3}$. Da nun n größer ist als $\frac{4}{3}p$ und also größer als p, so setze man $n = p + q$, so wird $p + 3q = \sqrt{(7pp - 3)}$, die Quadrate genommen $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$;

$6pp = 6pq + 9qq + 3$, oder $2pp = 2pq + 3qq + 1$, daraus kommt $p = \frac{q + \sqrt{(7qq + 2)}}{2}$. Da nun hier p größer ist als $\frac{3q}{2}$, also größer als q, so setze man $p = q + r$, so wird $q + 2r = \sqrt{(7qq + 2)}$, die Quadrate genommen $qq + 4qr + 4rr = 7qq + 2$ oder $6qq = 4qr + 4rr - 2$ oder $3qq = 2qr + 2rr - 1$ daraus gefunden wird $q = \frac{r + \sqrt{(7rr - 3)}}{3}$. Da nun q größer ist als r, so setze man $q = r + s$, da wird $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$. Die Quadrate genommen: $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, oder $3rr = 12rs + 9ss + 3$ und $rr = 4rs + 3ss + 1$; also $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$. Da nun diese Formel der erstern gleich, so setze man $s = 0$, und da bekommt man $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$ und $n = 3$, daraus $m = 8$.

Diese Rechnung kann folgender Gestalt sehr abgekürtzt werden, welches auch in andern Fällen statt findet.

Da $7nn + 1 = mm$, so ist m kleiner als $3n$. Man setze deswegen $m = 3n - p$, so wird $7nn + 1 = 9nn - 6np + pp$ oder $2nn = 6np - pp + 1$, und daraus $n = \frac{3p + \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$, also ist n kleiner als $3p$, deswegen setze man $n = 3p - q$, so wird $3p - 2q = \sqrt{(7pp + 2)}$ und die Quadrate genommen $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, oder $2pp = 12pq - 4qq + 2$ und $pp = 6pq - 2qq + 1$, daraus wird $p = 3q + \sqrt{(7qq + 1)}$. Hier kann man nun so gleich setzen $q = 0$, da wird $p = 1$, $n = 3$, und $m = 8$ wie vorher.

103.

Nehmen wir ferner $a = 8$, also daß $8nn + 1 = mm$ und dahero m kleiner als $3n$, so setze man $m = 3n - p$, so wird $8nn + 1 = 9nn - 6np + pp$, oder $nn = 6np - pp + 1$, daraus $n = 3p + \sqrt{(8pp + 1)}$, welche Formel der ersten schon gleich ist, dahero man setzen kann $p = 0$, da kommt $n = 1$ und $m = 3$.

104.

Gleicher Gestalt verfährt man für eine jegliche andere Zahl a, wann dieselbe nur positiv und kein Quadrat ist, und man kommt immer endlich zu einem solchen Wurzel-Zeichen, welches der gegebenen Formel ähnlich ist, als z. E. zu dieser $\sqrt{(att + 1)}$, da man dann nur setzen darf $t = 0$, als in welchem Fall die Irrationalität immer wegfällt, und hierauf wann man zurück geht, erhält man einen Werth für n, daß $ann + 1$ ein Quadrat wird.

Bisweilen gelangt man bald zu seinem Endzweck, bisweilen aber werden dazu viele Operationen erfordert, je nach Beschaffenheit der Zahl a, wovon man doch keine gewiße Kennzeichen angeben kann. Bis zu der Zahl 13 geht es noch ziemlich geschwind, kommt man aber zu $a = 13$, so wird die Rechnung viel weitläuftiger und dahero wird es gut seyn diesen Fall allhier auszuführen.

105.

Es sey demnach $a = 13$ also daß seyn soll $13nn + 1 = mm$. Weil nun mm größer ist als $9nn$, und also m größer als $3n$, so setze man $m = 3n + p$, da wird $13nn + 1 = 9nn + 6np + pp$, oder $4nn = 6np + pp - 1$, daraus $n = \frac{3p + \sqrt{(13pp - 4)}}{4}$, dahero n größer als $\frac{6}{4}p$ und also größer als p.

Man setze allso $n = p + q$, so wird $p + 4q = \sqrt{(13pp - 4)}$; die Quadrate genommen $13pp - 4 = pp + 8pq + 16qq$, dahero $12pp = 8pq + 16qq + 4$, oder durch 4 getheilt $3pp = 2pq + 4qq + 1$ und daraus $p = \frac{q + \sqrt{(13qq + 3)}}{3}$. Hier ist p größer als $\frac{q + 3q}{3}$, also größer als q; man setze demnach $p = q + r$, so wird $2q + 3r = \sqrt{(13qq + 3)}$, das Quadrat genommen $13qq + 3 = 4qq + 12qr + 9rr$, das ist $9qq = 12qr + 9rr - 3$, durch 3 dividirt $3qq = 4qr + 3rr - 1$, daraus wird $q = \frac{2r + \sqrt{(13rr - 3)}}{3}$. Hier ist q größer als $\frac{2r + 3r}{3}$ und also q größer als r; dahero setze man $q = r + s$, so wird $r + 3s = \sqrt{(13rr - 3)}$, das Quadrat genommen $13rr - 3 = rr + 6rs + 9ss$, oder $12rr = 6rs + 9ss + 3$, durch 3 dividirt wird $4rr = 2rs + 3ss + 1$ und daraus $r = \frac{s + \sqrt{(13ss + 4)}}{4}$. Hier ist r größer als $\frac{s + 3s}{4}$ oder s, dahero setze man $r = s + t$, so wird $3s + 4t = \sqrt{(13ss + 4)}$, das Quadrat genommen $13ss + 4 = 9ss + 24st + 16tt$ und also $4ss = 24st + 16tt - 4$, durch 4 dividirt $ss = 6st + 4tt - 1$, daraus wird $s = 3t + \sqrt{(13tt - 1)}$. Also ist s größer als $3t + 3t$ oder $6t$; deswegen setze man $s = 6t + u$, so wird $3t + u = \sqrt{(13tt - 1)}$, das Quadrat genommen $13tt - 1 = 9tt + 6tu + uu$ und daraus $4tt = 6tu + uu + 1$ und $t = \frac{3u + \sqrt{(13uu + 4)}}{4}$, wo t größer als $\frac{6u}{4}$ und also größer als u. Man setze deswegen $t = u + v$, so wird $u + 4v = \sqrt{(13uu + 4)}$; das Quadrat genommen $13uu + 4 = uu + 8uv + 16vv$ und $12uu = 8uv + 16vv - 4$, durch 4 dividirt $3uu = 2uv + 4vv - 1$, daraus $u = \frac{v + \sqrt{(13vv - 3)}}{3}$, wo u größer als $\frac{4v}{3}$ und also größer als v, deswegen setze man $u = v + x$, so wird

$2v + 3x = \sqrt{(13vv - 3)}$; das Quadrat genommen $13vv - 3 = 4vv + 12vx + 9xx$ oder $9vv = 12vx + 9xx + 3$, durch 3 dividirt $3vv = 4vx + 3xx + 1$, daraus man findet $v = \frac{2x + \sqrt{(13xx + 3)}}{3}$, wo v größer ist als $\frac{5}{3}x$ und allso größer als x, deswegen setze man $v = x + y$, so wird $x + 3y = \sqrt{(13xx + 3)}$, die Quadrate genommen $13xx + 3 = xx + 6xy + 9yy$ oder $12xx = 6xy + 9yy - 3$, durch 3 dividirt $4xx = 2xy + 3yy - 1$ und $x = \frac{y + \sqrt{(13yy - 4)}}{4}$, wo x größer ist als y; deswegen setze man $x = y + z$, so wird $3y + 4z = \sqrt{(13yy - 4)}$, die Quadrate genommen $13yy - 4 = 9yy + 24yz + 16zz$ oder $4yy = 24yz + 16zz + 4$, durch 4 dividirt $yy = 6yz + 4zz + 1$, daraus $y = 3z + \sqrt{(13zz + 1)}$. Da diese Formel endlich der ersten gleich ist so setze man $z = 0$, und da bekommt man rückwerts gehend, wie folget:

$z = 0$	$u = v + x = 3$	$q = r + s = 71$
$y = 1$	$t = u + v = 5$	$p = q + r = 109$
$x = y + z = 1$	$s = 6t + u = 33$	$n = p + q = 180$
$v = x + y = 2$	$r = s + t = 38$	$m = 3n + p = 649$

Also ist 180 nach 0 die kleinste gantze Zahl für n, daß $13nn + 1$ ein Quadrat werde.

106.

Aus diesem Exempel sieht man zur Genüge, wie langwierig bisweilen eine solche Rechnung werden könne. Dann unter den größern Zahlen hat man oft nöthig wohl zehnmal mehr Operationen zu machen, als hier bei der Zahl 13 vorgekommen sind: man kann auch nicht wohl voraus sehen bey welchen Zahlen so große Mühe erfordert wird, dahero es dienlich ist, sich die Arbeit anderer zu Nutze zu machen und eine Tabelle beyzufügen, wo zu allen Zahlen a bis auf 100 die Werthe der Buchstaben m und n vorgestellt werden, damit man bey vorkommenden Fällen daraus für eine jede Zahl a die gehörige Buchstaben m und n hernehmen könne.

107.

Inzwischen ist zu mercken, daß bey einigen Arten von Zahlen die Werthe für m und n allgemein gefunden werden können; dieses geschiehet aber nur bey denen Zahlen, welche um 1 oder 2 kleiner oder größer sind als eine Quadrat-Zahl, welches zu zeigen der Mühe werth seyn wird.

108.

Es sey demnach $a = ee - 2$, oder um 2 kleiner als eine Quadrat-Zahl, und da seyn soll $(ee-2)nn+1 = mm$, so ist offenbar m kleiner als en, deswegen setze man $m = en - p$, so wird $(ee-2)nn+1 = eenn - 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp - 2pp + 2)}}{2}$, wo so gleich in die Augen fällt, daß wann man nimmt $p = 1$, das Wurzelzeichen wegfalle und da seyn werde $n = e$ und $m = ee - 1$. Wäre z. E. $a = 23$, wo $e = 5$, so wird $23nn + 1 = mm$, wann $n = 5$ und $m = 24$. Dieses ist auch an sich offenbar; denn setzt man $n = e$, wann nemlich $a = ee - 2$, so wird $ann + 1 = e^4 - 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee - 1$.

109.

Es sey nun auch $a = ee - 1$ nemlich um 1 weniger als eine Quadrat-Zahl, also daß seyn soll $(ee-1)nn + 1 = mm$. Da nun hier wieder m kleiner ist als en, so setze man $m = en - p$, so wird $(ee-1)nn + 1 = eenn - 2enp + pp$, oder $nn = 2enp - pp + 1$ und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp - pp + 1)}$; wo das Wurzelzeichen wegfält, wann $p = 1$, und daraus bekommt man $n = 2e$, und $m = 2ee - 1$. Dieses ist auch leicht zu sehen. Dann da $a = ee - 1$ und $n = 2e$, so wird $ann + 1 = 4e^4 - 4ee + 1$, welches das Quadrat ist von $2ee - 1$. Es sey z. E. $a = 24$ also daß $e = 5$, so wird $n = 10$ und $24nn + 1 = 2401 = (49)^2$.*)

110.

Es sey nun auch $a = ee + 1$, oder um 1 größer als eine Quadrat-Zahl, also daß seyn soll $(ee+1)nn + 1 = mm$, wo m augenscheinlich größer ist als en, deswegen setze man $m = en + p$, so wird $(ee+1)nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $nn = 2enp + pp - 1$, und daraus $n = ep + \sqrt{(eepp + pp - 1)}$ wo $p = 1$ genommen werden kann, und da wird $n = 2e$ und $m = 2ee + 1$; dieses ist auch

*) Das Wurzel-Zeichen in diesem Fall verschwindet auch, wann $p = 0$ gesetzt wird; daher wir denn unstreitig die kleinste Zahlen für n und m erhalten, welche sind $n = 1$ und $m = e$. Allso wird wann $e = 5$, die Formel $24nn + 1$ ein Quadrat wann $n = 1$, und die Wurzel dieses Quadrats $m = e = 5$.

leicht einzusehen, dann da $a = ee + 1$ und $n = 2e$, so ist $ann + 1 = 4e^4 + 4ee + 1$ welches das Quadrat ist von $2ee + 1$. Es sey z. E. $a = 17$ also daß $e = 4$, und da wird $17nn + 1 = mm$, wann $n = 8$ und $m = 33$.

111.

Es sey endlich $a = ee + 2$, oder um 2 größer als eine Quadrat-Zahl, also soll seyn $(ee + 2)nn + 1 = mm$, wo m offenbar größer ist als en, dahero setze man $m = en + p$, so wird $eenn + 2nn + 1 = eenn + 2enp + pp$ oder $2nn = 2enp + pp - 1$ und daraus $n = \frac{ep + \sqrt{(eepp + 2pp - 2)}}{2}$. Hier nehme man nun $p = 1$, so wird $n = e$ und $m = ee + 1$. Dieses fällt auch so gleich in die Augen, dann da $a = ee + 2$ und $n = e$, so ist $ann + 1 = e^4 + 2ee + 1$, welches das Quadrat ist von $ee + 1$. Es sey z. E. $a = 11$ also daß $e = 3$, so wird seyn $11nn + 1 = mm$, wann $n = 3$ und $m = 10$. Wollte man setzen $a = 83$ so ist $e = 9$, und es wird $83nn + 1 = mm$, wann man nimmt $n = 9$ und $m = 82$.

BEMERKUNGEN DES HERAUSGEBERS ZU NEBENSTEHENDER TABELLE

Diese Tabelle für die kleinste Lösung der PELLSCHEN Gleichung $mm = ann + 1$ ist im Originaltext nicht ganz korrekt und in unserer Ausgabe verbessert. Die EULERSCHE Tabelle enthält folgende Fehler:

für	$a = 53$	$m = 66251$	statt	$m = 66249$
„	$a = 58$	$n = 2564$	„	$n = 2574$
„	$a = 85$	$m = 285771$	„	$m = 285769$

Die Tabelle ist schon berichtigt in der ersten, von JOHANN III BERNOULLI besorgten französischen Ausgabe (siehe die Anmerkung p. 3), aber in keiner der deutschen Ausgaben.

Der dänische Mathematiker C. F. DEGEN (1766—1825) hat unter dem Titel *Canon Pellianus*, Hafniae 1817, eine Tafel veröffentlicht, in der die kleinsten Lösungen x, y der Gleichung $y^2 = ax^2 + 1$ bis $a = 1000$ angegeben sind. Wie es scheint, ist diese Tafel korrekt. In A. M. LEGENDRES *Théorie des nombres*, 3ème éd. 1830, findet sich ebenfalls eine solche Tafel für $a = 2$ bis $a = 1003$ (Tome I, Table X), die gegenüber den beiden ersten Auflagen nach DEGENS *Canon* korrigiert und zugleich dadurch vereinfacht ist, daß, wo es Lösungen von $y^2 = ax^2 - 1$ gibt, diese angegeben sind; die weit größeren Lösungen von $y^2 = ax^2 + 1$ können dann daraus nach bekannten Sätzen der Zahlentheorie leicht hergeleitet werden. H. W.

Tabelle

welche für einen jeglichen Werth von a die kleinste Zahlen m und n angiebt, allso daß $mm = ann + 1$

a	n	m	a	n	m	a	n	m
2	2	3	37	12	73	69	936	7775
3	1	2	38	6	37	70	30	251
5	4	9	39	4	25	71	413	3480
6	2	5	40	3	19	72	2	17
7	3	8	41	320	2049	73	267000	2281249
8	1	3	42	2	13	74	430	3699
10	6	19	43	531	3482	75	3	26
11	3	10	44	30	199	76	6630	57799
12	2	7	45	24	161	77	40	351
13	180	649	46	3588	24335	78	6	53
14	4	15	47	7	48	79	9	80
15	1	4	48	1	7	80	1	9
17	8	33	50	14	99	82	18	163
18	4	17	51	7	50	83	9	82
19	39	170	52	90	649	84	6	55
20	2	9	53	9100	66249	85	30996	285769
21	12	55	54	66	485	86	1122	10405
22	42	197	55	12	89	87	3	28
23	5	24	56	2	15	88	21	197
24	1	5	57	20	151	89	53000	500001
26	10	51	58	2574	19603	90	2	19
27	5	26	59	69	530	91	165	1574
28	24	127	60	4	31	92	120	1151
29	1820	9801	61	226153980	1766319049	93	1260	12151
30	2	11	62	8	63	94	221064	2143295
31	273	1520	63	1	8	95	4	39
32	3	17	65	16	129	96	5	49
33	4	23	66	8	65	97	6377352	62809633
34	6	35	67	5967	48842	98	10	99
35	1	6	68	4	33	99	1	10

CAPITEL 8

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3)}$ RATIONAL ZU MACHEN

112.

Wir schreiten hier fort zu einer Formel da x zu der dritten Potestät ansteiget, um hernach bis zur vierten weiter zu gehen, ohngeacht diese beyde Fälle auf eine ähnliche Art behandelt werden müßen.

Es soll also diese Formel $a + bx + cxx + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht, und zu diesem Ende geschickte Werthe für x in Rational-Zahlen gesucht werden; dann da dieses schon weit größern Schwierigkeiten unterworfen ist, so erfordert es auch weit mehr Kunst nur gebrochene Zahlen für x zu finden, und man ist genöthiget sich damit zu begnügen, und keine Auflösung in gantzen Zahlen zu verlangen. Zum voraus ist auch hier dieses zu mercken, daß man keine allgemeine Auflösung geben kann, wie eben geschehen, sondern eine jede Operation giebt uns nur einen einzigen Werth für x zu erkennen, da hingegen die oben gebrauchte Methode auf einmahl zu unendlich viel Auflösungen leitet.

113.

Da es unter der vorher abgehandelten Formel $a + bx + cxx$ unendlich viel Fälle giebt, da die Auflösung schlechterdings unmöglich ist, so findet solches vielmehr bey der gegenwärtigen Formel statt, wo nicht einmahl an eine Auflösung zu gedencken ist, wofern man nicht schon eine weiß oder errathen hat; dahero man blos allein für diese Fälle Regeln zu geben im Stande ist, durch welche man aus einer schon bekannten Auflösung eine neue ausfündig machen kann, aus welcher nachgehends auf gleiche Weise noch eine andere neue gefunden wird, also daß man solcher Gestalt immer weiter fortgehen kann.

Inzwischen geschieht es aber doch öfters, daß wann gleich schon eine Auflösung bekannt ist, aus derselben doch keine andere geschlossen werden kann. Also daß in solchen Fällen nur eine einzige statt findet, welcher Umstand besonders zu bemercken ist, weil in dem vorhergehenden Fall aus einer einzigen Auflösung unendlich viel neue gefunden werden können.

114.

Wann also eine solche Formel $a + bx + cxx + dx^3$ zu einem Quadrat gemacht werden soll, so muß nothwendig schon ein Fall voraus gesetzt werden wo dieses geschieht; ein solcher aber fällt am deutlichsten in die Augen, wann das erste Glied schon ein Quadrat ist und die Formel also heißt $ff + bx + cxx + dx^3$, welche offenbahr ein Quadrat wird, wann man setzt $x = 0$.

Wir wollen also diese Formel zuerst vornehmen, und sehn wie aus dem bekannten Fall $x = 0$ noch ein anderer Werth für x gefunden werden könne; zu diesem Ende kann man zweyerley Wege gebrauchen, von welchen wir einen jeden besonders hier erklären wollen, und wobey es gut seyn wird mit besondern Fällen den Anfang zu machen.

115.

Es sey demnach diese Formel $1 + 2x - xx + x^3$ gegeben, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier das erste Glied 1 ein Quadrat ist, so nehme man die Wurzel von diesem Quadrat also an, daß die beyden ersten Glieder wegfallen. Es sey demnach die Quadrat-Wurzel $1 + x$, davon das Quadrat unserer Formel gleich seyn soll, und da bekommen wir

$$1 + 2x - xx + x^3 = 1 + 2x + xx,$$

wo die beyden ersten Glieder einander aufheben, und diese Gleichung herauskommt $xx = -xx + x^3$ oder $x^3 = 2xx$, welche durch xx dividirt so gleich giebt $x = 2$, woraus unsere Formel wird $1 + 4 - 4 + 8 = 9$.

Gleichergestalt wann diese Formel $4 + 6x - 5xx + 3x^3$ ein Quadrat werden soll, so setze man erstlich die Wurzel $= 2 + nx$ und suche n also daß die beyden ersten Glieder wegfallen, weil nun wird

$$4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4nx + nnxx,$$

so muß seyn $4n = 6$ und also $n = \frac{3}{2}$, woher diese Gleichung entspringt

$-5xx + 3x^3 = \frac{9}{4}xx$ oder $3x^3 = \frac{29}{4}xx$, dahero $x = \frac{29}{12}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, deßen Wurzel seyn wird $2 + \frac{3}{2}x = \frac{45}{8}$.

116.

Der zweyte Weg bestehet darinn, daß man der Wurzel drey Glieder giebt, als $f + gx + hxx$, welche also beschaffen sind, daß in der Gleichung die drey ersten Glieder wegfallen.

Es sey z. E. diese Formel gegeben $1 - 4x + 6xx - 5x^3$, hievon setze man die Wurzel $1 - 2x + hxx$ da dann seyn soll

$$1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhx^4;$$

hier fallen die zwey erste Glieder schon weg, damit aber auch das dritte wegfalle, so muß seyn $6 = 2h + 4$ und also $h = 1$, daraus bekommen wir $-5x^3 = -4x^3 + x^4$, wo durch x^3 dividirt wird: $-5 = -4 + x$ und $x = -1$.

117.

Diese zwey Methoden können also gebraucht werden, wann das erste Glied a ein Quadrat ist. Der Grund derselben beruhet darauf, daß man bey der ersten Methode der Wurzel zwey Glieder giebt, als $f + px$, wo f die Quadrat-Wurzel des ersten Glieds ist, und p also angenommen wird, daß auch das zweyte Glied wegfallen, und also nur das dritte und vierte Glied unserer Formel, nemlich $cxx + dx^3$ mit $ppxx$ verglichen werden muß, da dann die Gleichung durch xx dividirt einen neuen Werth vor x angiebt, welcher seyn wird

$$x = \frac{pp - c}{d}.$$

Bey der zweyten Methode giebt man der Wurzel drey Glieder und setzt dieselbe $f + px + qxx$, wann nemlich $a = ff$, und bestimmt p und q dergestallt, daß die drey ersten Glieder beyderseits verschwinden, welches also geschiehet: Da

$$ff + bx + cxx + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4,$$

so muß seyn $b = 2fp$ also $p = \frac{b}{2f}$, und $c = 2fq + pp$ also $q = \frac{c - pp}{2f}$; und die übrige Gleichung $dx^3 = 2pqx^3 + qqx^4$ läßt sich theilen, und wird daraus

$$x = \frac{d - 2pq}{qq}.$$

118.

Inzwischen kann es öfters geschehen, daß obgleich $a = ff$ dennoch diese Methode keinen neuen Werth für x angebe, wie aus dieser Formel $ff + dx^3$ zu ersehen, wo das zweyte und dritte Glied mangelt.

Dann setzt man nach der ersten die Wurzel $= f + px$, also daß seyn soll $ff + dx^3 = ff + 2fpx + ppxx$, so muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, dahero bekommt man $dx^3 = 0$, und daraus $x = 0$, welches kein neuer Werth ist.

Setzt man aber nach der andern Methode die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll

$$ff + dx^3 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4$$

so muß seyn $0 = 2fp$ und $p = 0$, ferner $0 = 2fq + pp$, und also $q = 0$, dahero man bekommt $dx^3 = 0$ und wiederum $x = 0$.

119.

In solchen Fällen ist nun nichts anders zu thun, als daß man sehe ob man nicht einen solchen Werth für x errathen könne, wo die Formel ein Quadrat wird, da man dann aus derselben nach der vorigen Methode neue Werthe für x finden kann; welches auch angeht wann gleich das erste Glied kein Quadrat ist.

Um dieses zu zeigen so soll diese Formel $3 + x^3$ ein Quadrat seyn, da nun solches geschiehet wann $x = 1$, so setze man $x = 1 + y$ und da bekommt man diese $4 + 3y + 3yy + y^3$, in welcher das erste Glied ein Quadrat ist. Man setze also nach der ersten Methode die Wurzel davon $2 + py$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + ppyy$; wo um das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, und also $p = \frac{3}{4}$, alsdann wird $3 + y = pp$ und $y = pp - 3 = \frac{9}{16} - \frac{48}{16} = -\frac{39}{16}$, folglich $x = -\frac{23}{16}$, welches ein neuer Werth für x ist.

Setzt man weiter nach der zweyten Methode die Wurzel $= 2 + py + qyy$, so wird $4 + 3y + 3yy + y^3 = 4 + 4py + 4qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$, wo um das zweyte Glied wegzuschaffen seyn muß $3 = 4p$, oder $p = \frac{3}{4}$, und um das dritte wegzuschaffen $3 = 4q + pp$, also $q = \frac{3 - pp}{4} = \frac{39}{64}$; so haben wir $1 = 2pq + qqy$, und daraus $y = \frac{1 - 2pq}{qq}$ oder $y = \frac{352}{1521}$, folglich $x = \frac{1873}{1521}$.

120.

Nun wollen wir auch zeigen, wann man schon einen solchen Werth gefunden hat, wie man daraus weiter einen andern neuen finden soll? Dieses wollen wir auf eine allgemeine Art vorstellen, und auf diese Formel anwenden $a + bx + cxx + dx^3$, von welcher schon bekannt sey, daß sie ein Quadrat werde wann $x = f$, und daß alsdann sey $a + bf + cff + df^3 = gg$. Hierauf setze man $x = f + y$, so erhält man diese neue Formel:

$$\begin{array}{l} a \\ + bf \ + by \\ + cff + 2cfy \ + cyy \\ + df^3 + 3dffy + 3dfyy + dy^3 \\ \hline gg + (b + 2cf + 3dff)y + (c + 3df)yy + dy^3 \end{array}$$

in welcher Formel das erste Glied ein Quadrat ist, also daß die beyden obigen Methoden angewandt werden können; wodurch neue Werthe für y und also auch für x erhalten werden; nemlich $x = f + y$.

121.

Bisweilen hilfft es aber auch nichts, wann man gleich einen Werth für x errathen hat; wie in dieser Formel geschieht $1 + x^3$, welche ein Quadrat wird, wann man setzt $x = 2$. Dann setzt man diesem zu folge $x = 2 + y$, so kommt diese Formel heraus $9 + 12y + 6yy + y^3$, welche nun ein Quadrat seyn soll. Es sey davon nach der ersten Regel die Wurzel $= 3 + py$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + ppyy$; wo seyn muß $12 = 6p$ und $p = 2$; alsdann wird $6 + y = pp = 4$, und also $y = -2$; folglich $x = 0$, aus welchem Werth nichts weiter gefunden werden kann.

Nehmen wir aber nach der zweyten Methode die Wurzel $= 3 + py + qyy$, so wird $9 + 12y + 6yy + y^3 = 9 + 6py + 6qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$ wo seyn muß erstlich $12 = 6p$ und $p = 2$; ferner $6 = 6q + pp = 6q + 4$ und also $q = \frac{1}{3}$; hieraus erhält man $1 = 2pq + qqy = \frac{4}{3} + \frac{1}{9}y$; dahero $y = -3$, folglich $x = -1$, und $1 + x^3 = 0$; aus welchem nichts weiter geschloßen werden kann; dann wollte man setzen $x = -1 + z$, so käme diese Formel $3z - 3zz + z^3$, wo das erste Glied gar wegfällt und also weder die eine noch die andere Methode gebraucht werden kann.

Hieraus wird schon sehr wahrscheinlich, daß diese Formel $1+x^3$ kein Quadrat werden könne außer diesen drey Fällen:

$$\text{I.)}\ x=2, \qquad \text{II.)}\ x=0, \qquad \text{III.)}\ x=-1,$$

welches aber auch aus andern Gründen bewiesen werden kann.

122.

Zur Uebung wollen wir noch diese Formel betrachten $1+3x^3$, welche in diesen Fällen ein Quadrat wird

$$\text{I.)}\ x=0, \qquad \text{II.)}\ x=1, \qquad \text{III.)}\ x=2,$$

und wir wollen sehen, ob wir noch andere solche Werthe finden können?

Da nun bekandt daß $x=1$ ein Werth ist, so setze man $x=1+y$; und da bekommt man $1+3x^3=4+9y+9yy+3y^3$, davon sey die Wurzel $2+py$ also daß seyn soll $4+9y+9yy+3y^3=4+4py+ppyy$, wo seyn muß $9=4p$ und also $p=\frac{9}{4}$; die übrigen Glieder geben aber $9+3y=pp=\frac{81}{16}$ und $y=-\frac{21}{16}$; folglich $x=-\frac{5}{16}$, da dann $1+3x^3$ ein Quadrat wird, davon die Wurzel ist $-\frac{61}{64}$ oder auch $+\frac{61}{64}$; wollte man nun weiter setzen $x=-\frac{5}{16}+z$, so würde man daraus wieder andere neue Werthe finden können.

Wollte man aber für die obige Formel nach der zweyten Methode die Wurzel setzen $2+py+qyy$ also daß seyn soll

$$4+9y+9yy+3y^3=4+4py+4qyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

so müßte erstlich seyn $9=4p$, also $p=\frac{9}{4}$; hernach $9=4q+pp=4q+\frac{81}{16}$, und also $q=\frac{63}{64}$; aus den noch übrigen Glieder wird $3=2pq+qqy=\frac{567}{128}+qqy$, oder $567+128qqy=384$, oder $128qqy=-183$, das ist $126\cdot\frac{63}{64}y=-183$, oder $42\cdot\frac{63}{64}y=-61$, dahero $y=-\frac{1952}{1323}$, folglich $x=-\frac{629}{1323}$, aus welchem nach der obigen Anweisung wiederum andere neue gefunden werden können.

123.

Hier haben wir aus dem bekandten Fall $x=1$ zwey neue Werthe heraus gebracht, aus welchen wann man sich die Mühe geben wollte, wiederum andere neue gefunden werden könnten, wodurch man aber auf sehr weitlauffige Brüche gerathen würde.

Dahero hat man Ursache sich zu verwundern, daß aus diesem Fall $x = 1$ nicht auch der andere $x = 2$, der ebenfalls leicht in die Augen fällt, heraus gebracht worden; welches ohnezweifel ein Zeichen ist von der Unvollkommenheit der bisher erfundenen Methode.

Man kann gleichergestalt aus dem Fall $x = 2$ andere neue Werthe heraus bringen, man setze zu diesem Ende $x = 2 + y$, also daß diese Formel ein Quadrat seyn soll $25 + 36y + 18yy + 3y^3$; hievon sey die Wurzel nach der ersten Methode $5 + py$, so wird $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + ppyy$, und also $36 = 10p$ oder $p = \frac{18}{5}$; daraus wird aus den übrigen Gliedern, durch yy dividirt, $18 + 3y = pp = \frac{324}{25}$, und daher $y = -\frac{42}{25}$, und $x = \frac{8}{25}$, daraus wird $1 + 3x^3$ ein Quadrat davon die Wurzel ist $5 + py = -\frac{131}{125}$, oder $+\frac{131}{125}$.

Will man ferner nach der andern Methode die Wurzel setzen $5 + py + qyy$, so wird $25 + 36y + 18yy + 3y^3 = 25 + 10py + 10qyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4$; wo um die zweyten und dritten Glieder wegzuschaffen seyn muß $36 = 10p$, oder $p = \frac{18}{5}$; hernach $18 = 10q + pp$, und $10q = 18 - \frac{324}{25} = \frac{126}{25}$, und $q = \frac{63}{125}$, die übrigen Glieder, durch y^3 getheilt, geben $3 = 2pq + qqy$, oder $qqy = 3 - 2pq = -\frac{393}{625}$; also $y = -\frac{3275}{1323}$ und $x = -\frac{629}{1323}$.

124.

Eben so schwer und mühsam wird diese Rechnung auch in solchen Fällen, wo aus einem andern Grund es gantz leicht ist so gar eine allgemeine Auflösung zu geben, wie bey dieser Formel geschieht $1 - x - xx + x^3$, wo auf eine allgemeine Art genommen werden kann $x = nn - 1$, und da n eine jegliche beliebige Zahl bedeutet.

Dann wann $n = 2$, so wird $x = 3$, und unsere Formel $= 1 - 3 - 9 + 27 = 16$. Nimmt man $n = 3$, so wird $x = 8$ und unsere Formel $= 1 - 8 - 64 + 512 = 441$.

Es ereignet sich aber hier ein gantz besonderer Umstand, welchem wir diese leichte Auflösung zu dancken haben, und welcher so gleich in die Augen fallen wird, wann wir unsere Formel in Factores auflösen. Es ist aber leicht zu sehen, daß sich dieselbe durch $1 - x$ theilen laße und der Quotient seyn werde $1 - xx$, welcher weiter aus diesen Factoren besteht $(1 + x)(1 - x)$; also daß unsere Formel diese Gestalt erhält:

$$1 - x - xx + x^3 = (1 - x)(1 + x)(1 - x) = (1 - x)^2 \cdot (1 + x).$$

Da nun dieselbe ein Quadrat seyn soll, und ein Quadrat durch ein Quadrat dividirt wieder ein Quadrat wird, so muß auch $1+x$ ein Quadrat seyn; und umgekehrt wann $1+x$ ein Quadrat ist so wird auch $(1-x)^2(1+x)$ ein Quadrat, man darf also nur setzen $1+x=nn$, so bekommt man so gleich $x=nn-1$.

Hätte man diesen Umstand nicht bemerckt, so würde es schwer gefallen seyn, nach den obigen Methoden nur ein halb Dutzend Werthe für x ausfindig zu machen.

125.

Bey einer jeden gegebenen Formel ist es demnach sehr gut dieselbe in Factores aufzulösen, wann es nemlich möglich ist.

Wie dieses anzustellen sey, ist schon oben angezeigt worden; man setzt nemlich die gegebene Formel $=0$, und sucht von dieser Gleichung die Wurzel, da dann eine jede Wurzel z. E. $x=f$, einen Factor $f-x$ dargiebt, welche Untersuchung um so viel leichter anzustellen ist, da hier nur rationale Wurzeln gesucht werden, welche alle Theiler sind der bloßen Zahl.

126.

Dieser Umstand trifft auch ein bey unserer allgemeinen Formel

$$a+bx+cxx+dx^3,$$

wann die zwey ersten Glieder wegfallen, also daß $cxx+dx^3$ ein Quadrat seyn soll; dann alsdann muß auch nothwendig diese Formel durch das Quadrat xx dividirt, nemlich $c+dx$ ein Quadrat seyn, da man dann nur setzen darf $c+dx=nn$, um zu bekommen $x=\frac{nn-c}{d}$, welche auf einmahl unendlich viele, und so gar alle mögliche Auflösungen in sich enthält.

127.

Wann man bey dem Gebrauch der obigen ersten Methode den Buchstaben p nicht bestimmen wolte um das zweyte Glied wegzuschaffen, so würde man auf eine andere irrationale Formel fallen, welche rational gemacht werden soll.

Es sey demnach die vorgegebene Formel $ff+bx+cxx+dx^3$, und man setze die Wurzel davon $=f+px$, so wird

$$ff+bx+cxx+dx^3=ff+2fpx+ppxx,$$

wo sich das erste Glied aufhebt, die übrigen aber durch x dividirt geben $b + cx + dxx = 2fp + ppx$, welches eine quadratische Gleichung ist, daraus x gefunden wird wie folget

$$x = \frac{pp - c + \sqrt{(p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd)}}{2d}.$$

Anjetzo kommt es also darauf an, daß man solche Werthe für p ausfindig mache, wodurch diese Formel $p^4 - 2cpp + 8dfp + cc - 4bd$ ein Quadrat werde. Da nun hier die vierte Potestät der gesuchten Zahl p vorkommt, so gehört dieser Fall in das folgende Capitel.

CAPITEL 9

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}$ RATIONAL ZU MACHEN

128.

Wir kommen nun zu solchen Formeln wo die unbestimmte Zahl x zur vierten Potestät ansteigt, womit wir zu gleich unsere Untersuchung über die Quadrat-Wurzel-Zeichen endigen müßen, indem man es bisher noch nicht so weit gebracht, daß man Formeln wo höhere Potestäten von x vorkommen zu Quadrate machen könnte.

Bey dieser Formel kommen aber drey Fälle in Betrachtung; davon der erste ist, wann das erste Glied a ein Quadrat; der andere, wann das letzte ex^4 ein Quadrat ist; der dritte Fall wann das erste und letzte Glied zugleich Quadrate sind, welche drey Fälle wir hier besonders abhandeln wollen.

129.

I.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4)}.$$

Da hier das erste Glied ein Quadrat ist so könnte man auch nach der ersten Methode die Wurzel $= f + px$ setzen, und p so bestimmen, daß die beyden erste Glieder wegfielen, und die übrigen sich durch xx theilen ließen; allein alsdann würde in der Gleichung doch noch xx vorkommen, und also die Bestimmung des x ein neues Wurzel-Zeichen erfordern. Man muß also sogleich die zweyte Methode zur Hand nehmen und die Wurzel $= f + px + qxx$ setzen, hierauf die Buchstaben p und q so bestimmen, daß die drey ersten Glieder wegfallen, und also die übrigen durch x^3 theilbar werden, da dann nur eine einfache Gleichung heraus kommt, aus welcher x ohne Wurzel-Zeichen bestimmt werden kann.

130.

Man setze dahero die Wurzel $= f + px + qxx$, also daß seyn soll

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = ff + 2fpx + 2fqxx + ppxx + 2pqx^3 + qqx^4,$$

wo die ersten Glieder von selbsten wegfallen; für die zweyten setze man $b = 2fp$, oder $p = \frac{b}{2f}$, so muß für die dritten Glieder seyn $c = 2fq + pp$, oder $q = \frac{c-pp}{2f}$; ist dieses geschehen, so laßen sich die übrigen Glieder durch x^3 theilen und geben diese Gleichung $d + ex = 2pq + qqx$: woraus gefunden wird

$$x = \frac{d-2pq}{qq-e}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{2pq-d}{e-qq}.$$

131.

Es ist aber leicht zu sehen daß durch diese Methode nichts gefunden wird, wann das zweyte und dritte Glied in der Formel mangelt, oder wann so wohl $b = 0$ als $c = 0$, weil alsdann $p = 0$ und $q = 0$; folglich $x = \frac{d}{-e}$, woraus aber gemeiniglich nichts neues gefunden werden kann, dann in diesem Fall wird offenbahr $dx^3 + ex^4 = 0$, und allso unsere Formel dem Quadrat ff gleich. Insonderheit aber, wann auch $d = 0$, so kommt $x = 0$, welcher Werth nichts weiter hilft, dahero diese Methode für solche Formel $ff + ex^4$ keine Dienste leistet. Eben dieser Umstand ereignet sich auch, wann $b = 0$ und $d = 0$, oder wann das zweyte und vierte Glied mangelt, und die Formel diese Gestalt hat $ff + cxx + ex^4$; dann da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2f}$, woraus gefunden wird $x = 0$, welcher Werth so gleich in die Augen fällt und zu nichts weiter führet.

132.

II.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}.$$

Diese Formel könnte so gleich auf den ersten Fall gebracht werden, indem man setzet $x = \frac{1}{y}$, dann weil alsdann diese Formel $a + \frac{b}{y} + \frac{c}{yy} + \frac{d}{y^3} + \frac{gg}{y^4}$

ein Quadrat sein müßte, so muß auch dieselbe mit dem Quadrat y^4 multiplicirt ein Quadrat bleiben; alsdann aber bekommt man diese Formel

$$ay^4 + by^3 + cyy + dy + gg,$$

welche rückwerts geschrieben der obigen vollkommen ähnlich ist.

Man hat aber dieses nicht nöthig, sondern man kann die Wurzel davon also ansetzen $gxx + px + q$, oder umgekehrt $q + px + gxx$, da dann

$$a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + 2gqxx + ppxx + 2gpx^3 + ggx^4,$$

weil sich nun hier die fünfte Glieder von selbsten aufheben, so bestimme man erstlich p, also daß sich auch die vierte Glieder aufheben, welches geschieht wann $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, hernach bestimme man weiter q, also daß sich auch die dritten Glieder aufheben welches geschieht wann $c = 2gq + pp$, oder $q = \frac{c-pp}{2g}$; ist dieses geschehen, so geben die zwey ersten Glieder diese Gleichung $a + bx = qq + 2pqx$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{a-qq}{2pq-b}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{qq-a}{b-2pq}.$$

133.

Hier ereignet sich wiederum der oben angeführte Mangel, wann das zweyte und vierte Glied fehlt, oder wann $b = 0$ und $d = 0$; dann da wird $p = 0$ und $q = \frac{c}{2g}$, hieraus also $x = \frac{a-qq}{0}$, welcher Werth unendlich groß ist, und eben so wenig zu etwas führet als der Werth $x = 0$ im erstern Fall; dahero diese Methode bey solchen Gleichungen $a + cxx + ggx^4$ gar nicht gebraucht werden kann.

134.

III.) Auflösung der Formel

$$\sqrt{(ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}.$$

Es ist klar daß bey dieser Formel beyde obige Methoden angebracht werden können, dann da das erste Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel setzen $f + px + qxx$ und die drey ersten Glieder verschwinden machen; hernach weil das letzte Glied ein Quadrat ist, so kann man die Wurzel auch setzen $q + px + gxx$, und die drey letzten Glieder verschwinden machen, da man dann zwey Werthe für x heraus bringt.

Allein man kann auch diese Formel noch auf zwey andere Arten behandeln, die derselben eigen sind.

Nach der ersten Art setzt man die Wurzel $= f + px + gxx$, und bestimmt p also daß die zweyten Glieder wegfallen, weil nemlich sein soll:

$$ff + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = ff + 2fpx + 2fgxx + ppxx + 2gpx^3 + ggx^4,$$

so mache man $b = 2fp$ oder $p = \frac{b}{2f}$, und weil alsdann nicht nur die ersten und letzten Glieder sondern auch die zweyten sich einander aufheben, so geben die übrigen durch xx dividirt diese Gleichung $c + dx = 2fg + pp + 2gpx$, woraus gefunden wird

$$x = \frac{c - 2fg - pp}{2gp - d}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{pp + 2fg - c}{d - 2gp}.$$

Hier ist insonderheit zu mercken daß da in der Formel nur das Quadrat gg vorkommt, die Wurzel davon g so wohl negativ als positiv genommen werden kann; woraus man noch einen andern Werth für x erhält, nemlich

$$x = \frac{c + 2fg - pp}{-2gp - d}, \quad \text{oder} \quad x = \frac{pp - 2fg - c}{2gp + d}.$$

135.

Es giebt auch noch ein anderer Weg diese Formel aufzulösen: man setzt nemlich wie vorhero die Wurzel $= f + px + gxx$, bestimmt aber p dergestalt, daß die vierten Glieder sich einander aufheben nemlich man setzt in der obigen Gleichung $d = 2gp$ oder $p = \frac{d}{2g}$, und weil auch das erste Glied mit dem letzten wegfällt, so geben die übrigen durch x dividirt diese einfache Gleichung $b + cx = 2fp + 2fgx + ppx$, woraus man findet

$$x = \frac{b - 2fp}{2fg + pp - c};$$

wobey zu mercken daß weil in der Formel nur das Quadrat ff vorkommt, die Wurzel davon auch $-f$ gesetzt werden könne, also daß auch seyn wird

$$x = \frac{b + 2fp}{pp - 2fg - c};$$

also daß auch hieraus zwey neue Werthe für x gefunden werden und folglich durch die bisher erklärte Methode in allem sechs neue Werthe heraus gebracht worden.

136.

Hier ereignet sich aber auch wiederum der verdrießliche Umstand, daß wann das zweyte und vierte Glied mangelt, oder $b = 0$ und $d = 0$, kein tüchtiger Werth für x herausgebracht werden kann, und also die Auflösung dieser Formel $ff + cxx + ggx^4$ dadurch nicht erhalten werden kann. Dann weil $b = 0$ und $d = 0$, so hat man für die beyde Arten $p = 0$, und dahero giebt die erste $x = \frac{c - 2fg}{0}$, die andere Art aber $x = 0$, aus welchen beyden nichts weiter gefunden werden kann.

137.

Dieses sind nun die drey Formeln auf welche die bisher erklärten Methoden angewandt werden können; wann aber in der gegebenen Formel weder das erste noch das letzte Glied ein Quadrat ist, so ist nichts auszurichten, bis man einen solchen Werth für x errathen hat durch welchen die Formel ein Quadrat wird. Laßt uns demnach setzen, man hätte schon gefunden daß unsere Formel ein Quadrat werde wann man setzt $x = h$, also daß $a + bh + chh + dh^3 + eh^4 = kk$, so darf man nur setzen $x = h + y$, so bekommt man eine neue Formel in welcher das erste Glied seyn wird kk und also ein Quadrat, dahero der erste Fall gebraucht werden kann. Diese Verwandelung kann auch gebraucht werden, wann man in den vorhergehenden Fällen schon einen Werth für x als z. E. $x = h$ gefunden hat; dann da darf man nur setzen $x = h + y$, so erhält man eine neue Gleichung auf welche die obige Methode angewandt werden könne: da man dann aus dem schon gefundenen Werthe für x andere neue herausbringen kann, und mit diesen neuen kann man wieder auf gleiche Weise verfahren und also immer mehr neue Werthe für x ausfindig machen.

138.

Insonderheit aber ist von den schon öfters gemeldeten Formeln wo das zweyte und vierte Glied mangelt zu mercken, daß keine Auflösung von denselben zu haben ist, wofern man nicht schon eine gleichsam errathen hat; wie aber alsdann zu verfahren sey, wollen wir bey dieser Formel $a + ex^4$ zeigen, als welche sehr oft vorzukommen pflegt.

Wir wollen also setzen man habe schon einen Werth $x = h$ errathen, also daß da sey $a + eh^4 = kk$, um nun daraus noch andere zu finden setze man $x=h+y$, so wird diese Formel ein Quadrat seyn müßen

$$a+eh^4+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4,$$

das ist $kk+4eh^3y+6ehhyy+4ehy^3+ey^4$, welche zu der ersten Art gehöret; man setze dahero die Quadrat-Wurzel davon $k+py+qyy$ und folglich unsere Formel gleich diesem Quadrat

$$kk+2kpy+2kqyy+ppyy+2pqy^3+qqy^4,$$

wo erstlich p und q so bestimmt werden müßen daß auch die zweyten Glieder wegfallen, weswegen seyn muß $4eh^3=2kp$ und also $p=\frac{2eh^3}{k}$; ferner $6ehh=2kq+pp$, dahero $q=\frac{6ehh-pp}{2k}$, oder $q=\frac{3ehhkk-2eeh^6}{k^3}$, oder $q=\frac{ehh(3kk-2eh^4)}{k^3}$; folglich da $eh^4=kk-a$, so wird $q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}$; hernach geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt $4eh+ey=2pq+qqy$, woraus gefunden wird

$$y=\frac{4eh-2pq}{qq-e},$$

wovon der Zehler in diese Form $\frac{4ehk^4-4eeh^5(kk+2a)}{k^4}$ gebracht wird, welche ferner da $eh^4=kk-a$, in dieser verwandelt wird $\frac{4ehk^4-4eh(kk-a)(kk+2a)}{k^4}$, oder $\frac{4eh(-akk+2a^2)}{k^4}$, oder $\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}$. Der Nenner aber $qq-e$ wird $=\frac{e(kk-a)(kk+2a)^2-ek^6}{k^6}$, und dieses wird $=\frac{e(3ak^4-4a^3)}{k^6}=\frac{ea(3k^4-4aa)}{k^6}$, woraus der gesuchte Wert seyn wird

$$y=\frac{4aeh(2a-kk)}{k^4}\cdot\frac{k^6}{ae(3k^4-4aa)}, \quad \text{das ist} \quad y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa},$$

und dahero

$$x=\frac{h(8akk-k^4-4aa)}{3k^4-4aa}, \quad \text{oder} \quad x=\frac{h(k^4-8akk+4aa)}{4aa-3k^4}.$$

Setzt man nun diesen Werth für x, so wird unsere Formel, nemlich $a+ex^4$, ein Quadrat davon die Wurzel seyn wird $k+py+qyy$, so zu dieser Form gebracht wird:

$$k+\frac{8k(kk-a)(2a-kk)}{3k^4-4aa}+\frac{16k(kk-a)(kk+2a)(2a-kk)^2}{(3k^4-4aa)^2},$$

weil aus den obigen ist

$$p=\frac{2eh^3}{k}, \quad \text{und} \quad q=\frac{ehh(kk+2a)}{k^3}, \quad \text{und} \quad y=\frac{4hkk(2a-kk)}{3k^4-4aa}.$$

139.

Wir wollen bey dieser Formel $a + ex^4$ noch stehen bleiben und weil der Fall $a + eh^4 = kk$ bekandt ist, so können wir denselben als zwey Fälle ansehen weil so wohl $x = -h$ als $x = +h$, und deswegen können wir diese Formel in eine andere von der dritten Art verwandeln wo das erste und letzte Glied Quadrate werden. Solches geschieht wann wir setzen $x = \frac{h(1+y)}{1-y}$, welcher Kunstgrif öfters gute Dienste thut, also wird unsere Formel:

$$\frac{a(1-y)^4 + eh^4(1+y)^4}{(1-y)^4} \text{ oder } \frac{kk + 4(kk-2a)y + 6kkyy + 4(kk-2a)y^3 + kky^4}{(1-y)^4};$$

hiervon setze man die Quadrat-Wurzel nach dem dritten Fall $\frac{k+py-kyy}{(1-y)^2}$, also daß der Zähler unserer Formel gleich seyn muß diesem Quadrat

$$kk + 2kpy - 2kkyy + ppyy - 2kpy^3 + kky^4.$$

Man mache daß die zweyten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $4kk - 8a = 2kp$, oder $p = \frac{2kk-4a}{k}$; die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $6kk + 4(kk-2a)y = -2kk + pp - 2kpy$, oder $y(4kk - 8a + 2kp) = pp - 8kk$, da nun $p = \frac{2kk-4a}{k}$, und $pk = 2kk - 4a$, so wird

$$y(8kk - 16a) = \frac{-4k^4 - 16akk + 16aa}{kk}, \text{ folglich } y = \frac{-k^4 - 4akk + 4aa}{kk(2kk-4a)};$$

um nun daraus x zu finden, so ist erstlich $1 + y = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{kk(2kk-4a)}$, und denn zweytens $1 - y = \frac{3k^4 - 4aa}{kk(2kk-4a)}$; also $\frac{1+y}{1-y} = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa}$; folglich bekommen wir

$$x = \frac{k^4 - 8akk + 4aa}{3k^4 - 4aa} \cdot h,$$

welches aber der nemliche Ausdruck ist, den wir schon vorher gefunden haben.

140.

Um dieses mit einem Exempel zu erläutern, so sey diese Formel gegeben $2x^4 - 1$, welche ein Quadrat seyn soll. Hier ist nun $a = -1$ und $e = 2$, der bekante Fall aber, wo diese Formel ein Quadrat wird, ist wann $x = 1$: also ist $h = 1$ und $kk = 1$, das ist $k = 1$; hieraus erhalten wir also sogleich diesen neuen Werth $x = \frac{1+8+4}{3-4} = -13$, weil aber von x nur die vierte Potestät vorkommt, so kann man auch setzen $x = +13$, und daraus wird $2x^4 - 1 = 57121 = (239)^2$.

Nehmen wir nun diesen Fall als bekant an, so wird $h = 13$ und $k = 239$, woraus wieder ein neuer Werth für x gefunden wird, nemlich

$$x = \frac{3262808641 + 456968 + 4}{9788425923 - 4} \cdot 13 = \frac{3263265613}{9788425919} \cdot 13, \text{ also wird } x = \frac{42422452969}{9788425919}\,{}^{1)}.$$

141.

Auf gleiche Weise wollen wir die etwas allgemeinere Formel $a + cxx + ex^4$ betrachten, und für den bekanten Fall, da dieselbe ein Quadrat wird, annehmen $x = h$, also daß $a + chh + eh^4 = kk$. Um nun daraus andere zu finden, so setze man $x = h + y$, da dann unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l} a \\ chh + 2chy + cyy \\ \underline{eh^4 \ + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4} \\ kk + (2ch + 4eh^3)y + (c + 6ehh)yy + 4ehy^3 + ey^4 \end{array}$$

wo das erste Glied ein Quadrat ist: man setze demnach die Quadrat-Wurzel davon $k + py + qyy$, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll

$$kk + 2kpy + 2kqyy + ppyy + 2pqy^3 + qqy^4;$$

nun bestimme man p und q also daß die zweyten und dritten Glieder wegfallen, worzu erfordert wird, erstlich daß $2ch + 4eh^3 = 2kp$ oder $p = \frac{ch + 2eh^3}{k}$, hernach aber daß $c + 6ehh = 2kq + pp$, oder $q = \frac{c + 6ehh - pp}{2k}$; alsdann geben die folgende Glieder durch y^3 dividirt diese Gleichung $4eh + ey = 2pq + qqy$, daraus gefunden wird $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$, und daraus ferner $x = h + y$; in welchem Fall die Quadrat-Wurzel aus unsere Formel seyn wird $k + py + qyy$. Sieht man nun dieses wieder als den anfänglich bekanten Fall an, so findet man daraus wieder einen neuen Fall, und kann demnach solcher Gestalt so weit fortgehen als man will.

142.

Um dieses zu erläutern, so sey die gegebene Formel $1 - xx + x^4$, wo folglich $a = 1$, $c = -1$ und $e = 1$. Der bekante Fall fällt so gleich in die

1) Im Original ist irrtümlich der Wert $k = 169$ statt $k = 239$ zugrunde gelegt worden, woraus sich dann für x der Wert $\frac{10607469769}{2447192159}$ ergab. H. W.

Augen nemlich $x = 1$, also daß $h = 1$ und $k = 1$. Setzt man nun $x = 1 + y$, und die Quadrat-Wurzel unserer Formel $= 1 + py + qyy$, so muß erstlich seyn $p = 1$ und hernach $q = 2$; hieraus wird gefunden $y = 0$ und $x = 1$, welches eben der schon bekante Fall ist, und also kein neuer gefunden worden. Man kann aber aus andern Gründen beweisen daß diese Formel kein Quadrat seyn kann, außer in den Fällen $x = 0$ und $x = \pm 1$.

143.

Es sey ferner diese Formel zum Exempel gegeben $2 - 3xx + 2x^4$, wo $a = 2$, $c = -3$ und $e = 2$. Der bekante Fall giebt sich auch sogleich, nemlich $x = 1$: es sey demnach $h = 1$, so wird $k = 1$; setzt man nun $x = 1 + y$ und die Quadrat-Wurzel $1 + py + qyy$, so wird $p = 1$ und $q = 4$, daraus erhalten wir $y = 0$ und $x = 1$, woraus wieder nichts neues gefunden wird.

144.

Ein anderes Exempel sey diese Formel $1 + 8xx + x^4$, wo $a = 1$, $c = 8$ und $e = 1$. Nach einer geringen Betrachtung ergiebt sich der Fall $x = 2$; dann nimmt man $h = 2$ so wird $k = 7$, setzt man nun $x = 2 + y$, und die Wurzel $7 + py + qyy$, so muß seyn $p = \frac{32}{7}$, und $q = \frac{272}{343}$; hieraus erhalten wir $y = -\frac{5880}{2911}$ und $x = -\frac{58}{2911}$, wo das Zeichen *minus* weggelaßen werden kann. Bey diesem Exempel aber ist zu mercken, daß weil das letzte Glied schon vor sich ein Quadrat ist, und also auch in der neuen Formel ein Quadrat bleiben muß, die Wurzel auch noch anders nach dem obigen dritten Fall angenommen werden kann.

Es sey demnach wie vorher $x = 2 + y$ so bekommen wir

$$\begin{array}{l} 1 \\ 32 + 32y + 8yy \\ \underline{16 + 32y + 24yy + 8y^3 + y^4} \\ 49 + 64y + 32yy + 8y^3 + y^4 \end{array}$$

welche jetzt auf mehrerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann; dann erstlich kann man die Wurzel $7 + py + yy$ setzen, also daß unsere Formel diesem Quadrat gleich seyn soll $49 + 14py + 14yy + ppyy + 2py^3 + y^4$; nun kann man die letzt ohn eine Glieder verschwinden machen, wann man setzt $2p = 8$, oder $p = 4$; da dann die übrigen durch y dividirt geben

$$64 + 32y = 14p + 14y + ppy = 56 + 30y,$$

und daher $y = -4$ und $x = -2$, oder $x = +2$, welches der bekante Fall selbst ist.

Nimmt man aber p so an, daß die zweyten Glieder wegfallen, so wird $14p = 64$ und $p = \frac{32}{7}$; da dann die übrigen Glieder durch yy dividirt geben $14 + pp + 2py = 32 + 8y$, oder $\frac{1710}{49} + \frac{64}{7}y = 32 + 8y$, und daher $y = -\frac{71}{28}$, folglich $x = -\frac{15}{28}$, oder $x = +\frac{15}{28}$, welcher Werth unsere Formel zu einem Quadrat macht, davon die Wurzel ist $\frac{1441}{784}$.

Da auch $-yy$ die Wurzel ist des letzten Glieds, so kann man die Quadrat-Wurzel davon also setzen $7 + py - yy$, oder die Formel selbst diesem Quadrat gleich $49 + 14py - 14yy + ppyy - 2py^3 + y^4$. Um nun die letzt ohn eine Glieder wegzubringen setze man $8 = -2p$, oder $p = -4$, so geben die übrigen durch y dividirt $64 + 32y = 14p - 14y + ppy = -56 + 2y$, daraus wird $y = -4$ wie oben.

Läßt man aber die zweyten Glieder verschwinden, so wird $64 = 14p$ und $p = \frac{32}{7}$; die übrigen aber durch yy dividirt geben $32 + 8y = -14 + pp - 2py$, oder $32 + 8y = \frac{338}{49} - \frac{64}{7}y$, daraus wird $y = -\frac{71}{28}$ und $x = \mp\frac{15}{28}$, welches mit dem obigen einerley ist.

145.

Eben so kann man verfahren mit der allgemeinen Formel

$$a + bx + cxx + dx^3 + ex^4,$$

wann ein Fall, nemlich $x = h$, bekant ist, da dieselbe ein Quadrat, nemlich kk, wird: dann alsdann setze man $x = h + y$, so erhält man eine Formel von eben so viel Gliedern davon das erste seyn wird kk; wird nun die Wurzel davon gesetzt $k + py + qyy$, und man bestimmt p und q dergestalt daß auch die zweyten und dritten Glieder wegfallen, so geben die beyden letzten durch y^3 dividirt eine einfache Gleichung, woraus y und folglich auch x bestimmt werden kann.

Nur fallen hier solche Fälle weg, wo der neu gefundene Werth von x mit dem bekanten $x = h$ einerley ist, weil alsdann nichts neues gefunden wird. In solchen Fällen ist entweder die Formel an sich selbst unmöglich, oder man müßte noch einen andern Fall errathen, wo dieselbe ein Quadrat wird.

146.

Nur so weit ist man bisher gekommen in Auflösung der Quadrat-Wurzel-Zeichen, da nemlich die höchste Potestät hinter denselben die vierte nicht übersteiget. Sollte demnach in einer solchen Formel die fünfte oder eine noch höhere Potestät von x vorkommen, so sind die bisherigen Kunstgriffe nicht hinlänglich eine Auflösung davon zu geben, wenn auch gleich schon ein Fall bekannt wäre. Um dieses deutlicher zu zeigen so betrachte man diese Formel $kk+bx+cxx+dx^3+ex^4+fx^5$, wo das erste Glied schon ein Quadrat ist, wollte man nun die Wurzel davon wie vorher setzen $k+px+qxx$ und p und q so bestimmen, daß die zweyten und dritten Glieder wegfielen, so blieben doch noch drey übrig, welche durch x^3 dividirt eine quadratische Gleichung geben würden, woraus x durch ein neues Wurzel-Zeichen bestimmt würde. Wollte man aber die Wurzel setzen $k+px+qxx+rx^3$ so würde das Quadrat bis zur sechsten Potestät aufsteigen, allso daß wann gleich p, q, und r so bestimmt würden, daß die zweyten, dritten und vierten Glieder wegfielen, dennoch die vierte, fünfte und sechste Potestät übrig bliebe, welche durch x^4 dividirt wieder auf eine quadratische Gleichung führte, und also nicht ohne Wurzel-Zeichen aufgelößt werden könnte. Dahero wir genöthiget sind hiemit die Formeln die ein Quadrat seyn sollen zu verlaßen. Wir wollen demnach zu den cubischen Wurzel-Zeichen fortschreiten.

CAPITEL 10

VON DER ART DIESE IRRATIONAL-FORMEL $\sqrt[3]{(a+bx+cxx+dx^3)}$ RATIONAL ZU MACHEN

147.

Hier werden also solche Werthe für x erfordert daß diese Formel $a+bx+cxx+dx^3$ eine Cubic-Zahl werde, und daraus also die Cubic-Wurzel gezogen werden könne. Hiebey ist zu erinnern daß diese Formel die dritte Potestät nicht überschreiten müße, weil sonsten die Auflösung davon nicht zu hoffen wäre. Sollte die Formel nur bis auf die zweyte Potestät gehen und das Glied dx^3 wegfallen, so würde die Auflösung nicht leichter werden: fielen aber die zwey letzten Glieder weg, also daß diese Formel $a+bx$ zu einem Cubo gemacht werden müßte, so hätte die Sache gar keine Schwierigkeit, indem man nur setzen dürfte $a+bx=p^3$, und daraus so gleich gefunden würde $x=\frac{p^3-a}{b}$.

148.

Hier ist wiederum vor allen Dingen zu mercken daß wann weder das erste noch das letzte Glied ein Cubus ist, an keine Auflösung zu gedencken sey, wofern nicht schon ein Fall, darin die Formel ein Cubus wird, bekannt ist, derselbe mag nun so gleich in die Augen fallen, oder erst durch probiren gefunden werden müßen.

Das erstere geschieht nun, erstlich wann das erste Glied ein Cubus ist und die Formel $f^3+bx+cxx+dx^3$, wo der bekannte Fall ist $x=0$; hernach auch wann das letzte Glied ein Cubus und die Formel also beschaffen ist $a+bx+cxx+g^3x^3$; aus diesen beyden Fällen entspringt der dritte wo so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist, welche drey Fälle wir hier erwegen wollen.

149.

I. Fall. Es sey die vorgegebene Formel $f^3+bx+cxx+dx^3$, welche ein Cubus werden soll.

Man setze demnach die Wurzel davon $f+px$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich seyn soll $f^3+3ffpx+3fppxx+p^3x^3$; da nun die ersten Glieder von selbsten wegfallen, so bestimme man p dergestalt daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wann $b=3ffp$, oder $p=\frac{b}{3ff}$; alsdann geben die übrigen Glieder durch xx dividirt diese Gleichung $c+dx=3fpp+p^3x$, woraus gefunden wird $x=\frac{c-3fpp}{p^3-d}$. Wäre das letzte Glied dx^3 nicht vorhanden, so könnte man die Cubic-Wurzel schlecht weg setzen $=f$, da man dann bekommen würde $f^3=f^3+bx+cxx$: oder $b+cx=0$ und daraus $x=-\frac{b}{c}$, woraus aber nichts weiter geschloßen werden könnte.

150.

II. Fall. Die vorgegebene Formel habe nun zweytens diese Gestallt $a+bx+cxx+g^3x^3$, man setze die Cubic-Wurzel $p+gx$, davon der Cubus ist $p^3+3gppx+3ggpxx+g^3x^3$, da sich dann die letzten Glieder aufheben; nun bestimme man p also daß auch die letzten ohne eins wegfallen, welches geschieht wann $c=3ggp$ oder $p=\frac{c}{3gg}$: alsdann geben die zwey ersten diese

Gleichung $a+bx=p^3+3gppx$, woraus gefunden wird $x=\frac{a-p^3}{3gpp-b}$. Wäre das erste Glied a nicht vorhanden gewesen, so hätte man die Cubic-Wurzel auch schlechtweg setzen können $=gx$, da denn $g^3x^3=bx+cxx+g^3x^3$ oder $0=b+cx$, folglich $x=-\frac{b}{c}$; welches aber gemeiniglich zu nichts dienet.

151.

III. Fall. Es sey endlich drittens die vorgegebene Formel

$$f^3+bx+cxx+g^3x^3,$$

worinn so wohl das erste als letzte Glied ein Cubus ist; dahero dieselbe auf beyde vorhergehende Arten tractiert und also zwey Werthe für x heraus gebracht werden können.

Außer diesen aber kann man auch noch die Wurzel setzen $f+gx$, also daß unsere Formel diesem Cubo gleich werden soll $f^3+3ffgx+3fggxx+g^3x^3$, da dann die erste und letzten Glieder einander aufheben, die übrigen aber durch x dividirt diese Gleichung geben $b+cx=3ffg+3fggx$, und daraus $x=\frac{b-3ffg}{3fgg-c}$.

152.

Fällt aber die gegebene Formel in keine von diesen drey Arten, so ist dabey nichts anders zu thun, als daß man suche einen Werth zu errathen, da dieselbe ein Cubus wird: hat man einen solchen gefunden welcher sey $x=h$, also daß $a+bh+chh+dh^3=k^3$, so setze man $x=h+y$, da dann unsere Formel diese Gestalt bekommen wird:

$$\begin{array}{l}
a \\
bh \;+ by \\
chh + 2chy + cyy \\
dh^3 + 3dhhy + 3dhyy + dy^3 \\
\hline
k^3+(b+2ch+3dhh)y+(c+3dh)yy+dy^3
\end{array}$$

welche zu der ersten Art gehört, und also für y ein Werth gefunden werden kann, woraus man dann einen neuen Werth für x erhält, aus welchem nachgehens auf gleiche Weise noch mehr gefunden werden können.

153.

Wir wollen nun diese Methode durch einige Exempel erläutern und erstlich diese Formel $1+x+xx$ vornehmen, welche ein Cubus seyn soll, und zur ersten Art gehöret. Man könnte also sogleich die Cubic-Wurzel $=1$ setzen, daraus gefunden würde $x+xx=0$, das ist $x(1+x)=0$; folglich entweder $x=0$ oder $x=-1$, woraus aber nichts weiter folgt. Man setze dahero die Cubic-Wurzel $1+px$, wovon der Cubus ist $1+3px+3ppxx+p^3x^3$, und mache $1=3p$ oder $p=\frac{1}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch xx dividirt $1=3pp+p^3x$, oder $x=\frac{1-3pp}{p^3}$; da nun $p=\frac{1}{3}$, so wird $x=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{27}}=18$, und dahero unsere Formel $1+18+324=343$, wovon die Cubic-Wurzel ist $1+px=7$. Wollte man nun weiter setzen $x=18+y$, so würde unsere Formel diese Gestalt bekommen $343+37y+yy$, wovon nach der ersten Regel die Cubic-Wurzel zu setzen wäre $7+py$, wovon der Cubus ist

$$343+147py+21ppyy+p^3y^3;$$

nun setze man $37=147p$, oder $p=\frac{37}{147}$, so geben die übrigen Glieder diese Gleichung $1=21pp+p^3y$, also

$$y=\frac{1-21pp}{p^3}, \text{ das ist } y=-\frac{340\cdot 21\cdot 147}{37^3}=-\frac{1049580}{50653},$$

woraus noch weiter neue Werthe gefunden werden können.

154.

Es sey ferner diese Formel gegeben $2+xx$, welche ein Cubus werden soll. Hier muß nun vor allen Dingen ein Fall errathen werden da dieses geschieht, welcher ist $x=5$; man setze demnach so gleich $x=5+y$, so bekommt man $27+10y+yy$; davon sey die Cubic-Wurzel $3+py$, und also die Formel selbst diesem Cubo $27+27py+9ppyy+p^3y^3$ gleich; man mache $10=27p$, oder $p=\frac{10}{27}$, so bekommt man $1=9pp+p^3y$, und daraus $y=\frac{1-9pp}{p^3}$, das ist $y=-\frac{19\cdot 9\cdot 27}{1000}$ oder $y=-\frac{4617}{1000}$, und $x=\frac{383}{1000}$: hieraus wird unsere Formel $2+xx=\frac{2146689}{1000000}$, wovon die Cubic-Wurzel seyn muß $3+py=\frac{129}{100}$.

155.

Man betrachte ferner diese Formel $1+x^3$, ob dieselbe ein Cubus werden könne, außer den zwey offenbahren Fällen $x=0$ und $x=-1$? Ob nun gleich diese Formel zum dritten Fall gehöret, so hilft uns doch die Wurzel $1+x$ nichts, weil der Cubus davon $1+3x+3xx+x^3$ unserer Formel gleich gesetzt $3x+3xx=0$ oder $x(1+x)=0$ giebt, das ist entweder $x=0$ oder $x=-1$.

Will man ferner setzen $x=-1+y$, so bekommen wir diese Formel $3y-3yy+y^3$, welche ein Cubus seyn soll und zum zweyten Fall gehöret: setzt man daher die Cubic-Wurzel $p+y$ wovon der Cubus ist

$$p^3+3ppy+3pyy+y^3,$$

und macht $-3=3p$ oder $p=-1$, so geben die übrigen

$$3y=p^3+3ppy=-1+3y,$$

folglich $y=\frac{1}{0}$ das ist unendlich; woraus also nichts gefunden wird. Es ist auch alle Mühe vergebens um noch andere Werthe für x zu finden, weil man aus andern Gründen beweisen kann daß diese Formel $1+x^3$ außer den gemeldten Fällen, nimmer ein Cubus werden kann; dann man hat gezeiget daß die Summ von zweyen Cubis als t^3+x^3 niemals ein Cubus werden kann,[1]) dahero ist es auch nicht möglich in dem Fall $t=1$.

156.

Man behauptet auch daß $2+x^3$ kein Cubus werden könne außer dem Fall $x=-1$; diese Formel gehört zwar zu dem zweyten Fall, es wird aber durch die daselbst gebrauchte Regel nichts heraus gebracht weil die mittlern Glieder fehlen. Setzt man aber $x=-1+y$, so bekommt man diese Formel $1+3y-3yy+y^3$, welche nach allen drey Fällen tractirt werden kann. Setzt man nach dem ersten die Wurzel $1+y$, davon der Cubus $1+3y+3yy+y^3$ ist, so wird $-3yy=3yy$, welches nur geschieht wann $y=0$. Setzt man

1) Dies ist der erste Fall des von KRONECKER so genannten „Großen FERMATSCHEN Satzes", der besagt, daß die Gleichung $x^n+y^n=z^n$ für $n>2$ in ganzen Zahlen x, y, z nicht lösbar sei, dessen allgemeiner Beweis aber bis jetzt noch nicht gefunden ist.

EULER hat übrigens den Beweis für $n=3$, auf den er hier anspielt, in der *Algebra* selbst entwickelt (siehe Kapitel 15, § 243). Ebenso hat er den Beweis des Satzes für $n=4$, der also besagt, daß die Summe von zwei Biquadraten niemals wieder ein Biquadrat sein kann, im Kapitel 13, § 205, erbracht. H. W.

nach dem zweyten Fall die Wurzel $-1+y$, wovon der Cubus $-1+3y-3yy+y^3$, so wird $1+3y=-1+3y$ und $y=\frac{2}{0}$, welches unendlich ist. Nach der dritten Art müßte man die Wurzel setzen $1+y$ welches schon geschehen.

157.

Es sey diese Formel gegeben $3+3x^3$ welche ein Cubus werden soll; dieses geschieht nun erstlich in dem Fall $x=-1$, woraus aber nichts geschloßen werden kann, hernach aber auch in dem Fall $x=2$: man setze deswegen $x=2+y$, so kommt diese Formel heraus $27+36y+18yy+3y^3$, welche zum ersten Fall gehöret, dahero sey die Wurzel $3+py$, wovon der Cubus $27+27py+9ppyy+p^3y^3$; man mache allso $36=27p$ oder $p=\frac{4}{3}$, so geben die übrigen Glieder durch yy dividirt, $18+3y=9pp+p^3y=16+\frac{64}{27}y$, oder $\frac{17}{27}y=-2$, dahero $y=-\frac{54}{17}$, folglich $x=-\frac{20}{17}$; hieraus wird unsere Formel $3+3x^3=-\frac{9261}{4913}$, wovon die Cubic-Wurzel ist $3+py=-\frac{21}{17}$; und aus diesem Werth könnte man noch mehrere finden wann man wollte.

158.

Wir wollen zuletzt noch diese Formel betrachten $4+xx$, welche in zwey bekannten Fällen ein Cubus wird, nemlich wann $x=2$ und $x=11$. Setzt man nun erstlich $x=2+y$, so muß diese Formel ein Cubus seyn $8+4y+yy$, dessen Wurzel sey $2+\frac{1}{3}y$, und also die Formel $=8+4y+\frac{2}{3}yy+\frac{1}{27}y^3$, woraus man erhält $1=\frac{2}{3}+\frac{1}{27}y$, dahero $y=9$ und $x=11$, welches der andere bekannte Fall ist.

Setzt man nun ferner $x=11+y$, so bekommt man $125+22y+yy$, so dem Cubo von $5+py$, das ist $125+75py+15ppyy+p^3y^3$ gleich gesetzt, und $p=\frac{22}{75}$ genommen, giebt $1=15pp+p^3y$ oder $p^3y=1-15pp=-\frac{109}{375}$; dahero $y=-\frac{122625}{10648}$, und also $x=-\frac{5497}{10648}$.

Weil x so wohl negativ als positiv seyn kann so setze man $x=\frac{2+2y}{1-y}$, so wird unsere Formel $\frac{8+8yy}{(1-y)^2}$, welche ein Cubus seyn soll; man multiplicire also oben und unten mit $1-y$, damit der Nenner ein Cubus werde und da bekommt man $\frac{8-8y+8yy-8y^3}{(1-y)^3}$, wo also nur noch der Zehler $8-8y+8yy-8y^3$, oder eben derselbe durch 8 dividirt nemlich $1-y+yy-y^3$ zu einem Cubo gemacht werden muß, welche Formel zu allen drey Arten gehört.

Setzt man nun nach der ersten Art die Wurzel $= 1 - \frac{1}{3}y$, wovon der Cubus ist $1 - y + \frac{1}{3}yy - \frac{1}{27}y^3$, so wird $1 - y = \frac{1}{3} - \frac{1}{27}y$, oder $27 - 27y = 9 - y$, dahero $y = \frac{9}{13}$, folglich $1 + y = \frac{22}{13}$ und $1 - y = \frac{4}{13}$, folglich $x = 11$ wie vorher.

Nach der andern Art, wann man die Wurzel setzen wollte $\frac{1}{3} - y$, findet man eben dasselbe.

Nach der dritten Art, wann man die Wurzel setzt $1 - y$, wovon der Cubus ist $1 - 3y + 3yy - y^3$, bekommt man $-1 + y = -3 + 3y$, und also $y = 1$, folglich $x = \frac{4}{0}$, das ist unendlich; dahero wird auf diese Art nichts neues gefunden.

159.

Weil wir aber diese zwey Fälle schon wißen $x = 2$ und $x = 11$, so kann man setzen $x = \frac{2 + 11y}{1 \pm y}$; dann ist $y = 0$ so wird $x = 2$, ist aber y unendlich groß so wird $x = \pm 11$.

Es sey demnach erstlich $x = \frac{2 + 11y}{1 + y}$, so wird unsere Formel

$$4 + \frac{4 + 44y + 121yy}{1 + 2y + yy} \text{ oder } \frac{8 + 52y + 125yy}{(1 + y)^2};$$

man multiplicire oben und unten mit $1 + y$, damit der Nenner ein Cubus werde, und nur noch der Zehler welcher seyn wird $8 + 60y + 177yy + 125y^3$, zu einem Cubo gemacht werden soll.

Man setze demnach erstlich die Wurzel $= 2 + 5y$, hierdurch würden nicht nur die zwey ersten Glieder sondern auch die letzten wegfallen, und also nichts gefunden werden.

Man setze demnach nach der zweyten Art die Wurzel $p + 5y$, davon der Cubus $p^3 + 15ppy + 75pyy + 125y^3$ und mache $177 = 75p$, oder $p = \frac{59}{25}$, so wird $8 + 60y = p^3 + 15ppy$, dahero $-\frac{2943}{125}y = \frac{80379}{15625}$ und $y = -\frac{80379}{367875}$, woraus x gefunden werden könnte.

Man kann aber auch setzen $x = \frac{2 + 11y}{1 - y}$, und da wird unsere Formel

$$4 + \frac{4 + 44y + 121yy}{1 - 2y + yy} = \frac{8 + 36y + 125yy}{(1 - y)^2},$$

wovon der Nenner mit $1 - y$ multiplicirt ein Cubus wird. Allso muß auch $8 + 28y + 89yy - 125y^3$ ein Cubus werden.

Setzen wir hier nach der ersten Art die Wurzel $= 2 + \frac{7}{3}y$, davon der Cubus ist $8 + 28y + \frac{98}{3}yy + \frac{343}{27}y^3$, so wird $89 - 125y = \frac{98}{3} + \frac{343}{27}y$, oder

$\frac{3718}{27}y=\frac{169}{3}$, und also $y=\frac{1521}{3718}=\frac{9}{22}$; folglich $x=11$, welches der schon bekante Fall ist.

Setzt man ferner nach der dritten Art die Wurzel $2-5y$, wovon der Cubus ist $8-60y+150yy-125y^3$, so erhalten wir $28+89y=-60+150y$, folglich $y=\frac{88}{61}$, woraus gefunden wird $x=-\frac{1090}{27}$, und unsere Formel wird $\frac{1191016}{729}$, welches der Cubus ist von $\frac{106}{9}$.

160.

Dieses sind nun die bisher bekannten Methoden wodurch eine solche Formel, entweder zu einem Quadrat oder zu einem Cubo gemacht werden kann, wann nur in jenem Fall die höchste Potestät der unbestimmten Zahl den vierten Grad, in letzterm aber den dritten nicht übersteiget.

Man könnte noch den Fall hinzufügen da eine gegebene Formel zu einem Biquadrat gemacht werden soll, in welchem die höchste Potestät die zweyte nicht übersteigen muß. Wann aber eine solche Formel $a+bx+cxx$ ein Biquadrat seyn soll so muß dieselbe vor allen Dingen zu einem Quadrat gemacht werden, da dann nur noch übrig ist daß die Wurzel von diesem Quadrat noch ferner zu einem Quadrat gemacht werde, wozu die Regel schon oben gegeben worden. Also wann zum Exempel $xx+7$ ein Biquadrat seyn soll, so mache man dieselbe zuerst zu einem Quadrat welches geschieht wann $x=\frac{7pp-qq}{2pq}$ oder auch $x=\frac{qq-7pp}{2pq}$; alsdann wird unsere Formel gleich diesem Quadrat

$$\frac{q^4-14qqpp+49p^4}{4ppqq}+7=\frac{q^4+14qqpp+49p^4}{4ppqq},$$

wovon die Wurzel ist $\frac{7pp+qq}{2pq}$, welche noch zu einem Quadrat gemacht werden muß: man multiplicire demnach oben und unten mit $2pq$, damit der Nenner ein Quadrat werde, und alsdann wird der Zehler $2pq(7pp+qq)$ ein Quadrat seyn müßen, welches nicht anders geschehen kann als nachdem man schon einen Fall errathen hat. Man kann zu diesem Ende setzen $q=pz$, damit diese Formel $2ppz(7pp+ppzz)=2p^4z(7+zz)$ und also auch durch p^4 dividirt, nemlich diese $2z(7+zz)$ ein Quadrat werden soll. Hier ist nun der bekannte Fall $z=1$, dahero setze man $z=1+y$, so bekommen wir

$$(2+2y)(8+2y+yy)=16+20y+6yy+2y^3,$$

wovon die Wurzel sey $4+\frac{5}{2}y$, davon das Quadrat $16+20y+\frac{25}{4}yy$, und unserer Formel gleich gesetzt giebt $6+2y=\frac{25}{4}$, $y=\frac{1}{8}$ und $z=\frac{9}{8}$; da nun $z=\frac{q}{p}$, so wird $q=9$ und $p=8$, dahero $x=\frac{367}{144}$, daraus wird unsere Formel $7+xx=\frac{279841}{20736}$, davon erstlich die Quadrat-Wurzel ist $\frac{529}{144}$, und hievon nochmals die Quadrat-Wurzel $\frac{23}{12}$, wovon also unsere Formel das Biquadrat ist.

161.

Endlich ist bey diesem Capitel noch zu erinnern, daß es einige Formeln gebe welche auf eine allgemeine Art zu einem Cubo gemacht werden können: dann wann z. E. cxx ein Cubus seyn soll, so setze man die Wurzel davon $=px$, und da wird $cxx=p^3x^3$ oder $c=p^3x$, dahero $x=\frac{c}{p^3}$; man schreibe $\frac{1}{q}$ an statt p, so wird $x=cq^3$.

Der Grund hiervon ist offenbahr weil die Formel ein Quadrat enthält, dahero auch alle dergleichen Formeln $a(b+cx)^2$ oder $abb+2abcx+accxx$ gantz leicht zu einem Cubo gemacht werden können; dann man setze die Cubic-Wurzel davon $=\frac{b+cx}{q}$, so wird $a(b+cx)^2=\frac{(b+cx)^3}{q^3}$, welche durch $(b+cx)^2$ dividirt giebt $a=\frac{b+cx}{q^3}$, daraus $x=\frac{aq^3-b}{c}$, wo man q nach Belieben bestimmen kann.

Hieraus erhellet wie höchst nützlich es sey die vorgegebene Formel in ihre Factores aufzulösen so oft solches geschehen kann, und von dieser Materie soll weitläuffig in dem folgenden Capitel gehandelt werden.

CAPITEL 11

VON DER AUFLÖSUNG DIESER FORMEL $axx+bxy+cyy$ IN FACTOREN

162.

Hier bedeuten die Buchstaben x und y nur allein gantze Zahlen, und wir haben auch aus dem bisherigen, wo man sich mit Brüchen begnügen mußte gesehen, wie die Frage immer auf gantze Zahlen gebracht werden kann. Dann ist z. E. die gesuchte Zahl x ein Bruch so darf man nur setzen $x=\frac{t}{u}$, da dann für t und u immer gantze Zahlen angegeben werden können, und weil dieser Bruch in der kleinsten Form ausgedrückt werden kann, so können die beyden Buchstaben t und u als solche angesehen werden, die unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

In der gegenwärtigen Formel sind also x und y nur gantze Zahlen, und ehe wir zeigen können wie dieselbe zu einem Quadrat, oder Cubo, oder einer noch höheren Potestät gemacht werden soll, so ist nöthig zu untersuchen, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben soll, daß diese Formel zwey oder mehr Factores erhalte.

163.

Hier kommen nun drey Fälle zu betrachten vor: der erste ist, wann sich diese Formel würcklich in zwey rationale Factores auflösen läßt, welches geschieht, wie wir schon oben gesehen haben, wann $bb-4ac$ eine Quadrat-Zahl wird.

Der andere Fall ist, wann diese beyde Factores einander gleich werden, in welchem die Formel selbst ein würckliches Quadrat enthält.

Der dritte Fall ist, wann sich dieselbe nicht anders als in irrationale Factores auflösen läßt, dieselben mögen schlechtweg irrational oder gar imaginär seyn; jenes geschieht wann $bb-4ac$ eine positive Zahl aber kein Quadrat ist, dieses aber wann $bb-4ac$ negativ wird. Dieses sind nun die drey Fälle welche wir hier zu erwegen haben.

164.

Läßt sich unsere Formel in zwey rationale Factores auflösen, so kann dieselbe also vorgestellt werden $(fx+gy)(hx+ky)$, welche also schon ihrer Natur nach zwey Factores in sich schließt. Will man aber daß dieselbe auf eine allgemeine Art mehr Factores in sich schließe, so darf man nur setzen $fx+gy=pq$ und $hx+ky=rs$, da dann unsere Formel diesem Product $pqrs$ gleich wird, und also vier Factores in sich enthält, deren Anzahl nach Belieben vermehret werden könnte: hieraus aber erhalten wir für x einen doppelten Werth nemlich $x=\frac{pq-gy}{f}$ und $x=\frac{rs-ky}{h}$, woraus gefunden wird $hpq-hgy=frs-fky$, und also

$$y=\frac{frs-hpq}{fk-hg} \quad \text{und} \quad x=\frac{kpq-grs}{fk-hg};$$

damit nun x und y in gantzen Zahlen ausgedrückt werde, so müßen die Buchstaben p, q, r, s also angenommen werden, daß sich der Zehler durch den Nenner würcklich theilen laße, welches geschieht, wann sich entweder p und r oder q und s dadurch theilen laßen.

165.

Um dieses zu erläutern so sey diese Formel vorgegeben $xx - yy$, welche aus diesen Factoren besteht $(x+y)(x-y)$: soll dieselbe nun noch mehr Factoren haben, so setze man $x+y=pq$ und $x-y=rs$, so bekommt man $x=\frac{pq+rs}{2}$ und $y=\frac{pq-rs}{2}$; damit nun diese Zahlen gantz werden, so müßen die beiden Zahlen pq und rs zugleich entweder gerad seyn oder beyde ungerad.

Es sey z. E. $p=7$, $q=5$, $r=3$ und $s=1$, so wird $pq=35$ und $rs=3$, folglich $x=19$ und $y=16$: dahero entspringt $xx-yy=105$, welche Zahl würcklich aus den Factoren $7\cdot5\cdot3\cdot1$ besteht; also hat dieser Fall nicht die geringste Schwierigkeit.

166.

Noch weniger Schwierigkeit hat der zweyte Fall, wo die Formel zwey gleiche Factores in sich schließt und demnach also vorgestellet werden kann $(fx+gy)^2$, welches Quadrat keine andere Factoren haben kann als welche aus der Wurzel $fx+gy$ entspringen, setzt man also $fx+gy=pqr$, so wird unsere Formel $ppqqrr$ und kann also so viel Factoren haben als man will. Hier wird von den zwey Zahlen x und y nur eine bestimmt, und die andere unserem Belieben frey gestellt, dann man bekommt $x=\frac{pqr-gy}{f}$, wo y leicht so angenommen werden kann daß der Bruch wegfält. Die leichteste Formel von dieser Art ist xx, nimmt man $x=pqr$, so schließt das Quadrat xx drey quadratische Factoren in sich, nemlich pp, qq und rr.

167.

Weit mehr Schwierigkeiten aber hat der dritte Fall, wo sich unsere Formel nicht in zwey rationale Factoren auflösen läßt, und da erfordert es besondere Kunstgriffe für x und y solche Werthe zu finden, aus welchen die Formel zwey oder mehr Factoren in sich enthält. Um diese Untersuchung zu erleichtern so ist zu mercken, daß unsere Formel leicht in eine andere verwandelt werden kann, wo das mittlere Glied fehlet, man darf nemlich nur setzen $x=\frac{z-by}{2a}$, da dann diese Formel heraus gebracht wird:

$$\frac{zz-2byz+bbyy}{4a}+\frac{byz-bbyy}{2a}+cyy=\frac{zz+(4ac-bb)yy}{4a}.$$

Wir wollen demnach so gleich das mittlere Glied weglaßen und diese Formel betrachten $axx+cyy$, wobey es darauf ankommt, was man den Buchstaben x und y für Werthe beylegen soll, damit diese Formel Factores erhalte. Es ist leicht zu erachten daß solches von der Natur der Zahlen a und c abhänge, und deswegen wollen wir mit einigen bestimmten Formeln dieser Art den Anfang machen.

168.

Es sey also erstlich diese Formel gegeben $xx+yy$, welche alle Zahlen in sich begreifet, so eine Summ von zwey Quadraten ist, und wovon wir die kleinsten bis 50 hier vorstellen wollen.

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

unter welchen sich einige Prim-Zahlen befinden die keine Theiler haben, als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41; die übrigen aber haben Theiler, woraus die Frage deutlicher wird, was man den Buchstaben x und y für Werthe geben müße, daß die Formel $xx+yy$ Theiler oder Factores hat und zwar so viel man ihrer will, wobey wir vor allen Dingen die Fälle ausschließen wo x und y einen gemeinen Theiler unter sich haben, weil alsdann $xx+yy$ sich auch durch denselben Theiler, und zwar durch das Quadrat desselben würde theilen laßen; dann wäre z. E. $x=7p$ und $y=7q$ so würde die Summ ihrer Quadrate $49pp+49qq=49(pp+qq)$ sich gar durch 49 theilen laßen. Dahero geht die Frage nur auf solche Formel wo x und y keinen gemeinen Theiler haben oder unter sich untheilbahr seyn. Die Schwierigkeit fält hier bald in die Augen, dann ob man gleich sieht, daß wann die beyden Zahlen x und y ungerad sind alsdann die Formel $xx+yy$ eine gerade Zahl und also durch 2 theilbahr werde; ist aber eine gerad und die andere ungerad, so wird die Formel ungerad, ob sie aber Theiler habe oder nicht? ist nicht so leicht zu sehen. Beyde Zahlen aber x und y können nicht gerad seyn, weil sie keinen gemeinen Theiler unter sich haben müßen.

169.

Es seyen demnach die beyden Zahlen x und y untheilbahr unter sich, und gleichwohl soll die Formel $xx+yy$ zwey oder mehr Factores in sich enthalten. Hier kann nun die obige Methode nicht statt finden, weil sich diese Formel nicht in zwey rationale Factores auflösen läßt; allein die irrationale Factores, in welche diese Formel aufgelößt wird und durch dieses Product vorgestellet werden kann $(x+y\sqrt{-1})\cdot(x-y\sqrt{-1})$ können uns eben denselben Dienst leisten; dann wann die Formel $xx+yy$ würckliche Factores hat, so müßen die irrationale Factoren wiederum Factores haben, indem wann diese Factoren keine weitere Theiler hätten, auch ihr Product keine haben könnte. Da aber diese Factores irrational ja so gar imaginär sind, und auch die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben sollen, so können dieselben keine rationale Factores haben, sondern sie müßen irrational und so gar imaginär von gleicher Art seyn.

170.

Will man also daß diese Formel $xx+yy$ zwey rationale Factores bekomme, so gebe man beyden irrationalen Factoren auch zwey Factores, und setze erstlich $x+y\sqrt{-1}=(p+q\sqrt{-1})(r+s\sqrt{-1})$, da dann weil $\sqrt{-1}$ so wohl negativ als positiv genommen werden kann von selbsten seyn wird $x-y\sqrt{-1}=(p-q\sqrt{-1})(r-s\sqrt{-1})$, also daß das Product davon, das ist unsere Formel seyn wird $xx+yy=(pp+qq)(rr+ss)$ und dieselbe folglich zwey rationale Factores enthält, nemlich $pp+qq$ und $rr+ss$. Hier ist aber noch übrig die Werthe von x und y zu bestimmen, als welche auch rational seyn müßen.

Wann man nun jene irrationale Factores mit einander multiplicirt, so bekommt man

$$x+y\sqrt{-1}=pr-qs+ps\sqrt{-1}+qr\sqrt{-1}$$

und

$$x-y\sqrt{-1}=pr-qs-ps\sqrt{-1}-qr\sqrt{-1},$$

addirt man diese Formeln, so wird $x=pr-qs$; subtrahirt man dieselben aber von einander, so wird $2y\sqrt{-1}=2ps\sqrt{-1}+2qr\sqrt{-1}$, oder $y=ps+qr$.

Nimmt man also $x=pr-qs$ und $y=ps+qr$, so erhält unsere Formel $xx+yy$ gewiß zwey Factores, indem herauskommt

$$xx+yy=(pp+qq)(rr+ss).$$

Verlangte man mehr Factores so dürfte man nur auf eben diese Art p und q so annehmen, daß $pp + qq$ zwey Factores hätte, und alsdann hätte man in allem drey Factores, deren Zahl auf gleiche Art nach Belieben vermehret werden kann.

171.

Da hier nur die Quadrate von p, q, r und s vorkommen, so können diese Buchstaben auch negativ genommen werden: nimmt man z. E. q negativ, so wird $x = pr + qs$ und $y = ps - qr$, von welchen die Summ der Quadraten eben diejenige ist als vorher; daraus ersehen wir, daß wann eine Zahl einem solchen Product $(pp + qq)(rr + ss)$ gleich ist, dieselbe auf eine doppelte Art in zwei Quadrate zerlegt werden könne, indem man gefunden erstlich

$$x = pr - qs \quad \text{und} \quad y = ps + qr,$$

und hernach auch

$$x = pr + qs \quad \text{und} \quad y = ps - qr.$$

Es sey z. E. $p = 3$, $q = 2$, $r = 2$ und $s = 1$, also daß dieses Product heraus käme $13 \cdot 5 = 65 = xx + yy$, da dann seyn wird entweder $x = 4$ und $y = 7$, oder $x = 8$ und $y = 1$; in beyden Fällen aber ist $xx + yy = 65$. Multiplicirt man mehrere dergleichen Zahlen mit einander, so wird auch das Product noch auf mehrere Arten eine Summ von zwey Quadrat-Zahlen seyn. Man multiplicire z. E. $2^2 + 1^2 = 5$, $3^2 + 2^2 = 13$, und $4^2 + 1^2 = 17$ mit ein ander, so kommt 1105 welche Zahl auf folgende Arten in zwey Quadraten zerlegt werden kann:

$$\text{I.)}\ 33^2 + 4^2, \quad \text{II.)}\ 32^2 + 9^2, \quad \text{III.)}\ 31^2 + 12^2, \quad \text{IV.)}\ 24^2 + 23^2.$$

172.

Unter den Zahlen die in der Form $xx + yy$ enthalten sind, befinden sich also erstlich solche, die aus zwey oder mehrere dergleichen Zahlen durch die Multiplication zusammen gesetzt sind; hernach aber auch solche welche nicht solchergestalt zusammen gesetzt sind: diese wollen wir einfache Zahlen von der Form $xx + yy$ nennen, jene aber zusammengesetzte; dahero werden die einfache Zahlen dieser Art seyn

$$1,\ 2,\ 5,\ 9,\ 13,\ 17,\ 29,\ 37,\ 41,\ 49 \text{ etc.}$$

in welcher Reihe zweyerley Zahlen vorkommen, nemlich Prim-Zahlen oder solche welche gar keine Theiler haben als 2, 5, 13, 17, 29, 37, 41 und welche alle außer 2 so beschaffen sind, daß wann man 1 davon weg nimmt das übrige durch 4 theilbahr werde, oder welche alle in dieser Form $4n+1$ enthalten sind: hernach sind auch Quadrat-Zahlen vorhanden 9, 49 etc. deren Wurzeln aber 3, 7 etc. nicht vorkommen; wobey zu mercken, daß diese Wurzeln 3, 7 etc. in dieser Form $4n-1$ enthalten sind. Es ist aber auch offenbahr daß keine Zahl von dieser Form $4n-1$ eine Summ von zwey Quadraten seyn könne, dann da diese Zahlen ungerad sind, so müßte eines von den beyden Quadraten gerad das andere aber ungerad seyn; wir haben aber gesehen, daß alle gerade Quadraten durch 4 theilbahr sind, die ungeraden aber in dieser Form $4n+1$ enthalten sind; wann man dahero ein grades und ein ungrades Quadrat zusammen addirt, so bekommt die Summ immer diese Form $4n+1$, niemals aber diese Form $4n-1$. Daß aber alle Prim-Zahlen von der Form $4n+1$ eine Summ von zwey Quadraten seyn, ist zwar gewiß, aber nicht so leicht zu beweisen.[1])

173.

Wir wollen weiter gehen, und die Formel $xx+2yy$ betrachten, um zu sehen was x und y für Werthe haben müßen damit dieselbe Factores erhalte. Da nun diese Formel durch diese imaginäre Factores vorgestellet wird

$$(x+y\sqrt{-2})(x-y\sqrt{-2}),$$

so ersieht man wie vorher, daß wann unsere Formel Factores hat, auch ihre imaginäre Factores welche haben müßen; man setze dahero erstlich

$$x+y\sqrt{-2}=(p+q\sqrt{-2})(r+s\sqrt{-2}),$$

so folget von selbsten daß auch seyn müße $x-y\sqrt{-2}=(p-q\sqrt{-2})(r-s\sqrt{-2})$, und hieraus wird unsere Formel $xx+2yy=(pp+2qq)(rr+2ss)$, und hat also zwey Factores, deren so gar ein jeder von eben derselben Art ist; damit aber

1) Dieser berühmte von FERMAT aufgestellte Satz ist zuerst von EULER bewiesen worden und zwar in der Abhandlung 241 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses): *Demonstratio theorematis* FERMATIANI *omnem numerum primum formae* $4n+1$ *esse summam duorum quadratorum*, Novi comment. acad. sc. Petrop. **5** (1754/5), 1760, p. 3—13; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

dieses geschehe so müßen gehörige Werthe für x und y gefunden werden, welches folgender Gestalt geschehen kann. Da

$$x+y\sqrt{-2}=pr-2qs+qr\sqrt{-2}+ps\sqrt{-2}$$

und

$$x-y\sqrt{-2}=pr-2qs-qr\sqrt{-2}-ps\sqrt{-2}$$

so ist die Summ $2x=2pr-4qs$, folglich $x=pr-2qs$; hernach giebt die Differenz $2y\sqrt{-2}=2qr\sqrt{-2}+2ps\sqrt{-2}$, dahero $y=qr+ps$. Wann also unsere Formel $xx+2yy$ Factores haben soll, so sind dieselben immer also beschaffen, daß der eine seyn wird $pp+2qq$ und der andere $rr+2ss$, oder sie sind beyde Zahlen von eben der Art als $xx+2yy$; und damit dieses geschehe so können x und y wieder auf zweyerley Art bestimmt werden, weil q so wohl negativ als positiv genommen werden kann. Man wird nemlich haben, erstlich

$$x=pr-2qs \quad \text{und} \quad y=ps+qr,$$

und hernach auch

$$x=pr+2qs \quad \text{und} \quad y=ps-qr.$$

174.

Diese Formel $xx+2yy$ enthält also alle diejenigen Zahlen in sich, welche aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen, und welche wir hier bis auf 50 setzen wollen: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 25, 27, 32, 33, 34, 36, 38, 41, 43, 44, 48, 49, 50; die wir wieder wie vorher in einfache und zusammengesetzte abtheilen können; da werden dann die einfachen, welche nicht aus den vorhergehenden zusammengesetzt sind, folgende seyn 1, 2, 3, 11, 17, 19, 25, 41, 43, 49 welche alle außer den Quadraten 25 und 49 Prim-Zahlen sind; von denen aber die hier nicht stehen kommen die Quadrate vor. Man kann hier auch bemercken daß alle Prim-Zahlen die in unserer Formel enthalten sind, entweder in dieser Form $8n+1$ oder in dieser $8n+3$ gehören, da hingegen die übrigen welche entweder in dieser Form $8n+5$ oder in dieser $8n+7$ enthalten sind, nimmermehr aus einem Quadrat und einem doppelten Quadrat bestehen können: es ist aber auch gewis daß alle Primzahlen, die in einer von den ersten beyden Formen $8n+1$ und $8n+3$ enthalten sind, sich allezeit in ein Quadrat und ein doppeltes Quadrat auflösen laßen.

175.

Laßt uns auf eine gleiche Weise zu dieser allgemeinen Formel $xx + cyy$ fortschreiten, und sehen was man x und y für Werthe geben muß, damit diese Formel Factores erhalte.

Da nun dieselbe durch dieses Produkt vorgestellet wird

$$(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c}),$$

so gebe man einem jeden dieser Factoren wiederum zwey Factores von gleicher Art: man setze nemlich

$$x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c}),$$

und

$$x - y\sqrt{-c} = (p - q\sqrt{-c})(r - s\sqrt{-c});$$

und da wird unsere Formel werden

$$xx + cyy = (pp + cqq)(rr + css),$$

woraus erhellet daß die Factores wiederum von eben der Art als die Formel selbst seyn werden, die Werthe aber von x und y werden sich folgender Gestalt verhalten: $x = pr - cqs$ und $y = qr + ps$, oder $x = pr + cqs$ und $y = ps - qr$, und hieraus ist leicht abzusehen wie unsere Formel noch mehr Factores erhalten könne.[1])

176.

Nun ist es auch leicht dieser Formel $xx - cyy$ Factores zu verschaffen, weil man nur $-c$ anstatt $+c$ schreiben darf; inzwischen laßen sich dieselben auch unmittelbar also finden; da unsere Formel diesem Product gleich ist $(x + y\sqrt{c})(x - y\sqrt{c})$, so setze man

$$x + y\sqrt{c} = (p + q\sqrt{c})(r + s\sqrt{c}) \quad \text{und} \quad x - y\sqrt{c} = (p - q\sqrt{c})(r - s\sqrt{c}),$$

1) Aus der Zerlegung:

$$x + y\sqrt{-c} = (p + q\sqrt{-c})(r + s\sqrt{-c})$$

erhält man

$$x = pr - cqs, \qquad y = ps + qr.$$

Da man aber, wie schon in § 171 und § 173 gesagt ist, q auch negativ nehmen kann, so folgt auch:

$$x = pr + cqs, \qquad y = ps - qr.$$

Danach sind die Formeln des Originaltextes korrigiert und ergänzt worden: der erste Wert von x war dort gleich $pr + cqs$ gesetzt, während ein zweiter Wert von x überhaupt nicht angegeben war. H. W.

woraus sogleich diese Factores erfolgen $xx-cyy=(pp-cqq)(rr-css)$, welche wieder von eben der Art als unsere Formel selbst sind; die Werthe aber von x und y laßen sich auch wiederum auf eine doppelte Art bestimmen nemlich erstlich $x=pr+cqs$, $y=qr+ps$, und hernach auch $x=pr-cqs$ und $y=ps-qr$. Will man die Probe machen ob solchergestalt das gefundene Product herauskomme, so probire man die erstern Werthe, da dann seyn wird $xx=pprr+2cpqrs+ccqqss$ und $yy=ppss+2pqrs+qqrr$, also $cyy=cppss+2cpqrs+cqqrr$, woraus man erhält:

$$xx-cyy=pprr-cppss+ccqqss-cqqrr$$

welches mit dem gefundenen Product $(pp-cqq)\,(rr-css)$ über einkommt.

177.

Bis hieher haben wir das erste Glied blos betrachtet, nun wollen wir setzen daß dasselbe auch mit einem Buchstaben multiplicirt sey, und suchen was die Formel $axx+cyy$ für Factores erhalten könne.

Hier ist nun klar daß unsere Formel diesem Product gleich sey

$$(x\sqrt{a}+y\sqrt{-c})(x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}),$$

welchen beyden Factoren demnach wiederum Factores gegeben werden müßen. Hierbey aber ereignet sich eine Schwierigkeit, dann wann man zu folge der obigen Art setzen wollte

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}+s\sqrt{-c})=apr-cqs+ps\sqrt{-ac}+qr\sqrt{-ac},$$

und

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r\sqrt{a}-s\sqrt{-c})=apr-cqs-ps\sqrt{-ac}-qr\sqrt{-ac},$$

woraus man erhielte

$$2x\sqrt{a}=2apr-2cqs, \quad \text{und} \quad 2y\sqrt{-c}=2ps\sqrt{-ac}+2qr\sqrt{-ac},$$

so würde man so wohl für x als y irrationale Werthe finden, welche hier keineswegs stattfinden.

178.

Dieser Schwierigkeit aber kann abgeholffen werden, wann man setzet:

$$x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})(r+s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}+qr\sqrt{-c}+aps\sqrt{-c}$$

und

$$x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})(r-s\sqrt{-ac})=pr\sqrt{a}-cqs\sqrt{a}-qr\sqrt{-c}-aps\sqrt{-c};$$

woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden:

$$x = pr - cqs \quad \text{und} \quad y = qr + aps,$$

alsdann aber wird unsere Formel folgende Factores bekommen

$$axx + cyy = (app + cqq)(rr + acss),$$

von welchen nur einer eben die Form hat als unsere Formel, der andere aber von einer gantz anderen Gattung ist.

179.

Unterdessen stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen so in der ersteren Form enthalten sind, wann sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx + acyy$, als welche mit der obigen $xx + cyy$ übereinkommt, mit einander multipliciret wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wann zwey Zahlen von der ersten Form $axx + cyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehöre.

Laßt uns demnach diese zwey Formeln von der ersten Art

$$(app + cqq)(arr + css)$$

mit ein ander multipliciren, und da ist leicht zu sehen daß ihr Product also vorgestellt werden könne $(apr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr + cqs = x$ und $ps - qr = y$, so bekommen wir diese Formel $xx + acyy$ welche von der letzteren Art ist; dahero dann zwey Zahlen von der erstern Art $axx + cyy$ mit einander multiplicirt eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürtzlich also vorstellen kann: die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II andeuten, und also I · I giebt II; I · II giebt I; II · II giebt II, woraus auch ferner erhellet, was heraus kommen müsse, wann man mehrere solche Zahlen mit ein ander multiplicirt: als I · I · I giebt I; I · I · II giebt II; I · II · II giebt I; II · II · II giebt II.

180.

Um dieses zu erläutern so sey $a = 2$ und $c = 3$ woraus diese zwey Arten von Zahlen entspringen, die erste ist enthalten in der Form $2xx + 3yy$, die andere aber in der Form $xx + 6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx + 3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden daß $1085 - 3yy$ ein doppeltes Quadrat nemlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich wann $y = 3$, dann da wird $x = 23$; hernach auch wann $y = 11$, dann da wird $x = 19$; drittens auch noch wann $y = 13$, dann da wird $x = 17$, und endlich viertens wann $y = 19$, dann da wird $x = 1$.

Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt nemlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CAPITEL 12

VON DER VERWANDELUNG DIESER FORMEL $axx + cyy$ IN QUADRATEN ODER AUCH HÖHEREN POTESTÄTEN

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Form $axx + cyy$ öfters unmöglich zu Quadrate gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden in welcher $a = 1$ ist. Z. E. diese Form $2pp - qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solcher Gestalt vorstellen $(2p + q)^2 - 2(p + q)^2$. Setzt man nun $2p + q = x$ und $p + q = y$, so kommt diese Formel $xx - 2yy$ heraus, wo $a = 1$ und $c = -2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch woraus nun für x und y folgende rationale Werthe gefunden werden:

$$x = pr - cqs \quad \text{und} \quad y = qr + aps,$$

alsdann aber wird unsere Formel folgende Factores bekommen

$$axx + cyy = (app + cqq)(rr + acss),$$

von welchen nur einer eben die Form hat als unsere Formel, der andere aber von einer gantz anderen Gattung ist.

179.

Unterdessen stehen doch diese zwey Formeln in einer sehr genauen Verwandtschaft mit einander, indem alle Zahlen so in der ersteren Form enthalten sind, wann sie mit einer Zahl von der zweyten Form multiplicirt werden, wiederum in die erste Form fallen. Wir haben auch schon gesehen, daß zwey Zahlen von der zweyten Form $xx + acyy$, als welche mit der obigen $xx + cyy$ übereinkommt, mit einander multipliciret wieder eine Zahl von der zweyten Form geben.

Also ist nur noch zu untersuchen, wann zwey Zahlen von der ersten Form $axx + cyy$ mit einander multiplicirt werden, zu welcher Form das Product alsdann gehöre.

Laßt uns demnach diese zwey Formeln von der ersten Art

$$(app + cqq)(arr + css)$$

mit ein ander multipliciren, und da ist leicht zu sehen daß ihr Product also vorgestellt werden könne $(apr + cqs)^2 + ac(ps - qr)^2$. Setzen wir nun hier $apr + cqs = x$ und $ps - qr = y$, so bekommen wir diese Formel $xx + acyy$ welche von der letzteren Art ist; dahero dann zwey Zahlen von der erstern Art $axx + cyy$ mit einander multiplicirt eine Zahl von der zweyten Art geben, welches man kürtzlich also vorstellen kann: die Zahlen von der ersten Art wollen wir durch I, die von der andern Art aber durch II andeuten, und also I · I giebt II; I · II giebt I; II · II giebt II, woraus auch ferner erhellet, was heraus kommen müsse, wann man mehrere solche Zahlen mit ein ander multiplicirt: als I · I · I giebt I; I · I · II giebt II; I · II · II giebt I; II · II · II giebt II.

180.

Um dieses zu erläutern so sey, $a = 2$ und $c = 3$ woraus diese zwey Arten von Zahlen entspringen, die erste ist enthalten in der Form $2xx + 3yy$, die andere aber in der Form $xx+6yy$. Nun aber sind die Zahlen der erstern bis auf 50 folgende:

I.) 2, 3, 5, 8, 11, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 29, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50.

In der zweyten Art sind folgende Zahlen bis 50 enthalten:

II.) 1, 4, 6, 7, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 31, 33, 36, 40, 42, 49.

Laßt uns nun eine Zahl von der ersten Art z. E. 35 mit einer von der zweyten Art 31 multipliciren, so ist das Product 1085, welche Zahl gewiß in der Form $2xx+3yy$ enthalten ist, oder man kann vor y eine solche Zahl finden daß $1085-3yy$ ein doppeltes Quadrat nemlich $2xx$ werde; dieses geschieht nun erstlich wann $y=3$, dann da wird $x=23$; hernach auch wann $y=11$, dann da wird $x=19$; drittens auch noch wann $y=13$, dann da wird $x=17$, und endlich viertens wann $y=19$, dann da wird $x=1$.

Man kann diese beyde Arten von Zahlen wiederum in einfache und zusammengesetzte abtheilen, indem diejenigen zusammengesetzte sind welche aus zwey oder mehr kleinern Zahlen von der einen oder der andern Art bestehen: also werden von der ersten Art die folgende einfach seyn: 2, 3, 5, 11, 29, diese aber zusammengesetzt 8, 12, 14, 18, 20, 21, 27, 30, 32, 35, 44, 45, 48, 50. Von der zweyten Art aber sind folgende einfach 1, 7, 31, die übrigen sind alle zusammengesetzt nemlich 4, 6, 9, 10, 15, 16, 22, 24, 25, 28, 33, 36, 40, 42, 49.

CAPITEL 12

VON DER VERWANDELUNG DIESER FORMEL $axx+cyy$ IN QUADRATEN ODER AUCH HÖHEREN POTESTÄTEN

181.

Wir haben schon oben gesehen, daß Zahlen von dieser Form $axx+cyy$ öfters unmöglich zu Quadrate gemacht werden können: so oft es aber möglich ist, so kann diese Form in eine andere verwandelt werden in welcher $a=1$ ist. Z. E. diese Form $2pp-qq$ kann ein Quadrat werden, sie läßt sich aber auch solcher Gestalt vorstellen $(2p+q)^2-2(p+q)^2$. Setzt man nun $2p+q=x$ und $p+q=y$, so kommt diese Formel $xx-2yy$ heraus, wo $a=1$ und $c=-2$ ist. Eben eine solche Verwandelung findet auch immer statt, so oft es möglich ist dergleichen Formeln zu einem Quadrat zu machen.

Wann demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Quadrat oder einer andern höhern geraden Potestät gemacht werden soll, so können wir sicher setzen $a = 1$, und die übrigen Fällen als unmöglich ansehen.

182.

Es sey daher diese Formel vorgelegt $xx + cyy$, welche zu einem Quadrat gemacht werden soll. Da nun dieselbe aus diesen Factoren besteht

$$(x + y\sqrt{-c})(x - y\sqrt{-c}),$$

so müßen dieselben entweder Quadraten, oder mit einerley Zahlen multiplicirte Quadrate seyn. Dann wann das Product von zweyen Zahlen ein Quadrat seyn soll, als z. E. pq, so wird erfordert, entweder daß $p = rr$ und $q = ss$, das ist daß ein jeder Factor vor sich ein Quadrat sey, oder daß $p = mrr$ und $q = mss$, das ist daß die Factores Quadrate mit einerley Zahl multiplicirt seyen, deswegen setze man $x + y\sqrt{-c} = m(p + q\sqrt{-c})^2$, so wird von selbsten $x - y\sqrt{-c} = m(p - q\sqrt{-c})^2$, dahero bekommen wir $xx + cyy = mm(pp + cqq)^2$, und wird also ein Quadrat. Um aber x und y zu bestimmen, so haben wir diese Gleichungen

$$x + y\sqrt{-c} = mpp + 2mpq\sqrt{-c} - mcqq$$

und

$$x - y\sqrt{-c} = mpp - 2mpq\sqrt{-c} - mcqq,$$

wo offenbahr das x gleich seyn muß dem rationalen Teil, $y\sqrt{-c}$ aber dem irrationalen Theil; dahero wird $x = mpp - mcqq$ und $y\sqrt{-c} = 2mpq\sqrt{-c}$ oder $y = 2mpq$.

Setzt man also $x = mpp - mcqq$ und $y = 2mpq$, so wird unsere Formel $xx + cyy$ ein Quadrat, nemlich $mm(pp + cqq)^2$, davon die Wurzel ist $mpp + mcqq$.

183.

Sollen die zwey Zahlen x und y unter sich untheilbahr seyn, oder keinen gemeinen Theiler haben, so muß $m = 1$ gesetzt werden. Wann daher $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so nimmt man nur $x = pp - cqq$ und $y = 2pq$, da dann diese Formel dem Quadrat von $pp + cqq$ gleich wird. Anstatt daß man setzt $x = pp - cqq$, so kann man auch setzen $x = cqq - pp$, weil beyderseits das Quadrat xx einerley wird. Dieses sind nun eben diejenige Formeln, die wir schon oben aus gantz anderen Gründen gefunden haben, wodurch die Richtigkeit der hier gebrauchten Methode bestätiget wird.

Dann nach der vorigen Methode, wann $xx + cyy$ ein Quadrat seyn soll, so setzt man die Wurzel $= x + \frac{py}{q}$, und da bekommt man

$$xx + cyy = xx + \frac{2pxy}{q} + \frac{ppyy}{qq},$$

wo sich die xx aufheben, die übrigen Glieder aber durch y dividirt und mit qq multiplicirt geben $cqqy = 2pqx + ppy$, oder $cqqy - ppy = 2pqx$; man theile nun durch $2pq$ und durch y, so wird $\frac{x}{y} = \frac{cqq - pp}{2pq}$. Da aber x und y untheilbahr seyn sollen, wie auch p und q dergleichen sind, so muß x dem Zehler und y dem Nenner gleich seyn, folglich $x = cqq - pp$ und $y = 2pq$, wie vorher.

184.

Diese Auflösung gilt, die Zahl c mag positiv oder negativ seyn; hat dieselbe aber selbsten Factores, als wann die vorgegebene Formel wäre $xx + acyy$ welche ein Quadrat seyn soll, so findet nicht nur die vorige Auflösung statt, welche gibt $x = acqq - pp$ und $y = 2pq$, sondern auch noch diese $x = cqq - app$ und $y = 2pq$; dann da wird ebenfals

$$xx + acyy = ccq^4 + 2acppqq + aap^4 = (cqq + app)^2,$$

welches auch geschieht, wann man nimmt $x = app - cqq$, weil das Quadrat xx in beyden Fällen einerley herauskommt.

Diese neue Auflösung wird auch durch die hier gebrauchte Methode also gefunden. Man setze

$$x + y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^2, \quad \text{und} \quad x - y\sqrt{-ac} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^2,$$

damit herauskomme $xx + acyy = (app + cqq)^2$, und also gleich einem Quadrat; alsdann aber wird

$$x + y\sqrt{-ac} = app + 2pq\sqrt{-ac} - cqq$$

und

$$x - y\sqrt{-ac} = app - 2pq\sqrt{-ac} - cqq,$$

woraus folgt

$$x = app - cqq \quad \text{und} \quad y = 2pq.$$

Läßt sich also die Zahl ac auf mehrerley Arten in zwey Factoren zertheilen so kann man auch mehrere Auflösungen angeben.

185.

Wir wollen dieses durch einige bestimmte Formeln erläutern, und erstlich diese Formel $xx+yy$ betrachten, welche ein Quadrat werden soll. Da nun hier $ac=1$, so nehme man $x=pp-qq$ und $y=2pq$, so wird

$$xx+yy=(pp+qq)^2.$$

Soll zweytens diese Formel $xx-yy$ ein Quadrat werden, so ist $ac=-1$; man nehme also $x=pp+qq$ und $y=2pq$, da dann $xx-yy=(pp-qq)^2$ wird.

Soll drittens diese Formel $xx+2yy$ ein Quadrat werden, wo $ac=2$, so nehme man $x=pp-2qq$, oder $x=2pp-qq$ und $y=2pq$, und dann wird

$$xx+2yy=(pp+2qq)^2, \quad \text{oder} \quad xx+2yy=(2pp+qq)^2.$$

Soll viertens diese Formel $xx-2yy$ ein Quadrat werden wo $ac=-2$, so nehme man $x=pp+2qq$ und $y=2pq$, da dann kommt

$$xx-2yy=(pp-2qq)^2.$$

Soll fünftens diese Formel $xx+6yy$ ein Quadrat werden wo $ac=6$, und also entweder $a=1$ und $c=6$, oder $a=2$ und $c=3$; so kann man erstlich setzen $x=pp-6qq$ und $y=2pq$, da dann

$$xx+6yy=(pp+6qq)^2.$$

Hernach kann man auch setzen $x=2pp-3qq$ und $y=2pq$, da dann

$$xx+6yy=(2pp+3qq)^2.$$

186.

Sollte aber diese Formel $axx+cyy$ zu einem Quadrat gemacht werden, so ist schon erinnert worden, daß dieses nicht geschehen könne wofern nicht schon ein Fall bekant ist, in welchem diese Formel würcklich ein Quadrat werde. Dieser bekante Fall sey demnach, wann $x=f$ und $y=g$, also daß $aff+cgg=hh$; und alsdann kann unsere Formel in einer andern von dieser Art $tt+acuu$ verwandelt werden, wann man setzt

$$t=\frac{afx+cgy}{h} \quad \text{und} \quad u=\frac{gx-fy}{h};$$

dann da wird $tt=\frac{aaffxx+2acfgxy+ccggyy}{hh}$ und $uu=\frac{ggxx-2fgxy+ffyy}{hh}$, woraus folgt

$$tt + acuu = \frac{aaffxx + ccggyy + acggxx + acffyy}{hh} = \frac{axx(aff + cgg) + cyy(aff + cgg)}{hh};$$

da nun $aff + cgg = hh$, so wird $tt + acuu = axx + cyy$; und solchergestalt bekommt die vorgelegte Formel $axx + cyy$ diese Form $tt + acuu$, welche nach den hier gegebenen Regeln leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann.

187.

Nun wollen wir weiter fortgehen und zusehen wie diese Formel $axx + cyy$, wo x und y unter sich untheilbahr seyn sollen, zu einem Cubo gemacht werden könne; wozu die vorigen Regeln keinesweges hinlänglich sind, die hier angebrachte Methode aber mit dem besten Fortgang angewandt werden kann: wobey noch dieses insonderheit zu mercken, daß diese Formel allezeit zu einem Cubo gemacht werden könne, die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, welches bey den Quadraten nicht angieng, wofern nicht schon ein Fall bekannt war; welches auch von allen andern geraden Potestäten gilt; bey den ungeraden aber, als der dritten, fünften, siebenten etc. Potestät, ist die Auflösung immer möglich.

188.

Wann demnach diese Formel $axx + cyy$ zu einem Cubo gemacht werden soll, so setze man auf eine ähnliche Weise als vorher

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} + q\sqrt{-c})^3 \quad \text{und} \quad x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = (p\sqrt{a} - q\sqrt{-c})^3,$$

dann daraus wird das Product $axx + cyy = (app + cqq)^3$, und also unsere Formel ein Cubus: es kommt aber nur darauf an, ob auch hier x und y auf eine rationale Art bestimmt werden könne? welches glücklicher weise gelingt; dann wann die angesetzte Cubi würcklich genommen werden, so erhalten wir diese zwei Gleichungen

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} + 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} - cq^3\sqrt{-c},$$

und

$$x\sqrt{a} - y\sqrt{-c} = ap^3\sqrt{a} - 3appq\sqrt{-c} - 3cpqq\sqrt{a} + cq^3\sqrt{-c},$$

woraus offenbahr folgt, daß

$$x = ap^3 - 3cpqq \quad \text{und} \quad y = 3appq - cq^3.$$

Man suche z. E. zwey Quadrate xx und yy, deren Summ $xx+yy$ einen Cubus ausmache: weil nun hier $a=1$ und $c=1$, so bekommen wir

$$x=p^3-3pqq \quad \text{und} \quad y=3ppq-q^3,$$

und alsdann wird $xx+yy=(pp+qq)^3$. Es sey nun $p=2$ und $q=1$, so wird $x=2$ und $y=11$; hieraus $xx+yy=125=5^3$.

189.

Wir wollen noch diese Formel betrachten $xx+3yy$, welche zu einem Cubo gemacht werden soll: weil nun hier $a=1$ und $c=3$, so wird

$$x=p^3-9pqq \quad \text{und} \quad y=3ppq-3q^3,$$

und alsdann $xx+3yy=(pp+3qq)^3$. Weil diese Formel öfters vorkommt wollen wir davon die leichtere Fälle hieher setzen.[1])

p	q	x	y	$xx+3yy$
1	1	8	0	$64=4^3$
2	1	10	9	$343=7^3$
1	2	35	18	$2197=13^3$
3	1	0	24	$1728=12^3$
1	3	80	72	$21952=28^3$
3	2	81	30	$9261=21^3$
2	3	154	45	$29791=31^3$

190.

Wäre die Bedingung nicht vorgeschrieben, daß die beyden Zahlen x und y unter sich untheilbahr seyn sollen, so hätte die Frage gar keine Schwierigkeit: dann wann $axx+cyy$ ein Cubus seyn soll, so setze man $x=tz$ und $y=uz$, so wird unsere Formel $attzz+cuuzz$ welche dem Cubo $\frac{z^3}{v^3}$ gleich gesetzt werde, woraus so gleich gefunden wird $z=v^3(att+cuu)$; folglich sind die gesuchte Werthe für x und y, $x=tv^3(att+cuu)$ und $y=uv^3(att+cuu)$,

1) In der Tabelle ist davon Gebrauch gemacht, daß x, y auch durch $-x$, $-y$ ersetzt werden können. H. W.

welche außer dem Cubo v^3 noch $att + cuu$ zum gemeinen Theiler haben: diese Auflösung giebt so gleich

$$axx + cyy = v^6(att + cuu)^2(att + cuu) = v^6(att + cuu)^3,$$

welches offenbahr der Cubus ist von $v^2(att + cuu)$.

191.

Die hier gebrauchte Methode ist um so viel merckwürdiger, da wir durch Hülfe irrationaler und so gar imaginärer Formeln solche Auflösungen gefunden haben, wozu einig und allein rationale und so gar gantze Zahlen erfordert wurden. Noch merckwürdiger aber ist es, daß in denjenigen Fällen wo die Irrationalität verschwindet, unsere Methode nicht mehr statt findet: dann wann z. E. $xx + cyy$ ein Cubus seyn soll, so kann man sicher schließen daß auch die beyden irrationalen Factoren davon, nemlich $x + y\sqrt{-c}$ und $x - y\sqrt{-c}$, Cubos seyn müßen; weil dieselben unter sich untheilbahr sind indem die Zahlen x und y keinen gemeinen Theiler haben. Fiele aber die Irrationalität $\sqrt{-c}$ weg, als wann z. E. $c = -1$ wäre, so würde dieser Grund nicht mehr stattfinden, weil alsdann die beyden Factoren nemlich $x + y$ und $x - y$ allerdings gemeine Theiler haben könnten, ohngeacht x und y dergleichen nicht haben, z. E. wann beyde ungerade Zahlen wären.

Wann demnach $xx - yy$ ein Cubus seyn soll, so ist nicht nöthig daß so wohl $x + y$ als $x - y$ für sich ein Cubus sey, sondern man könnte wohl setzen $x + y = 2p^3$ und $x - y = 4q^3$, da dann $xx - yy$ ohnstreitig ein Cubus würde nemlich $8p^3q^3$, davon die Cubic-Wurzel ist $2pq$; alsdann aber wird $x = p^3 + 2q^3$, und $y = p^3 - 2q^3$. Wann aber die Formel $axx + cyy$ sich nicht in zwey rationale Factores zertheilen läßt, so finden auch keine andere Auflösungen statt, als die hier gegeben worden.

192.

Wir wollen diese Abhandlung durch einige merckwürdige Fragen erläutern:

I. Frage: Man verlangt in gantzen Zahlen ein Quadrat xx daß wann darzu 4 addirt wird, ein Cubus herauskomme; dergleichen sind 4 und 121, ob aber mehr dergleichen gegeben werden können, ist hier die Frage?

Da 4 ein Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle da $xx + yy$ ein Cubus wird, welches wie aus dem obigen erhellet geschieht, wann $x = p^3 - 3pqq$

und $y = 3ppq - q^3$; da nun hier $yy = 4$, so ist $y = \pm 2$, folglich muß seyn $3ppq - q^3 = +2$ oder $3ppq - q^3 = -2$: im erstern Fall wird also $q(3pp - qq) = 2$, folglich q ein Theiler von 2. Es sey demnach erstlich $q = 1$, so wird $3pp - 1 = 2$, folglich $p = 1$ und also $x = 2$ und $xx = 4$.

Setzt man $q = 2$, so wird $6pp - 8 = \pm 2$; gilt das Zeichen $+$, so wird $6pp = 10$ und $pp = \frac{5}{3}$, woraus der Werth von p irrational würde und hier also nicht statt fände; gilt aber das Zeichen $-$, so wird $6pp = 6$ und $p = 1$, folglich $x = 11$. Mehr Fälle giebt es nicht, und also können nur zwey Quadraten gegeben werden, nemlich 4 und 121, welche wann dazu 4 addirt wird Cubi werden.

193.

II. Frage: Man verlangt solche Quadrate in gantzen Zahlen, welche wann dazu 2 addirt wird Cubi werden, wie bey dem Quadrat 25 geschieht: ob es nun noch mehr dergleichen giebt wird hier gefragt?

Da also $xx + 2$ ein Cubus seyn soll, und 2 ein doppeltes Quadrat ist, so suche man erstlich die Fälle, wo die Formel $xx + 2yy$ ein Cubus wird, welches aus dem obigen Articul 188, wo $a = 1$ und $c = 2$, geschieht, wann $x = p^3 - 6pqq$ und $y = 3ppq - 2q^3$; da nun hier $y = \pm 1$ so muß seyn $3ppq - 2q^3 = q(3pp - 2qq) = \pm 1$, und also q ein Theiler von 1; es sey demnach $q = 1$, so wird $3pp - 2 = \pm 1$; gilt das obere Zeichen, so wird $3pp = 3$ und $p = 1$, folglich $x = 5$; das untere Zeichen aber giebt vor p einen irrationalen Werth, welcher hier nicht statt findet; woraus folgt daß nur das einzige Quadrat 25 in gantzen Zahlen die verlangte Eigenschaft habe.

194.

III. Frage: Man verlangt solche fünffache Quadrate, wann dazu 7 addirt wird daß ein Cubus herauskomme: oder daß $5xx + 7$ ein Cubus sey?

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $5xx + 7yy$ ein Cubus wird, welches nach dem Articul 188, wo $a = 5$ und $c = 7$, geschieht, wann $x = 5p^3 - 21pqq$ und $y = 15ppq - 7q^3$; weil nun hier seyn soll $y = \pm 1$, so wird

$$15ppq - 7q^3 = q(15pp - 7qq) = \pm 1,$$

da dann q ein Theiler seyn muß von 1, folglich $q = 1$; daher wird $15pp - 7 = \pm 1$, wo beyde Fälle für p etwas irrationales geben, woraus aber doch nicht geschlossen werden kann, daß diese Frage gar nicht möglich sey, weil p und q

solche Brüche seyn könnten, da $y=1$ und x doch eine gantze Zahl würde; solches geschieht würcklich wann $p=\frac{1}{2}$ und $q=\frac{1}{2}$, dann da wird $y=1$ und $x=2$; mit andern Brüchen aber ist die Sache nicht möglich.

195.

IV. Frage: Man suche solche Quadrate in gantzen Zahlen, welche doppelt genommen wann davon 5 subtrahirt wird, daß ein Cubus heraus komme; oder $2xx-5$ soll ein Cubus seyn.

Man suche erstlich diejenigen Fälle da $2xx-5yy$ ein Cubus wird, welches nach dem 188ten Articul, wo $a=2$ und $c=-5$, geschieht, wann $x=2p^3+15pqq$ und $y=6ppq+5q^3$. Hier aber muß seyn $y=\pm 1$, und folglich

$$6ppq+5q^3=q(6pp+5qq)=\pm 1,$$

welches in gantzen Zahlen nicht geschehen kann, und auch nicht einmahl in Brüchen; dahero dieser Fall sehr merckwürdig ist, da gleichwohl eine Auflösung statt findet, wann nemlich $x=4$, dann da wird $2xx-5=27$, welches der Cubus ist von 3; und hievon ist es von der größten Wichtigkeit den Grund zu untersuchen.

196.

Es ist also möglich, daß $2xx-5yy$ ein Cubus seyn könne deßen Wurzel so gar diese Form hat $2pp-5qq$, wann nemlich $x=4$, $y=1$ und $p=2$, $q=1$, und demnach haben wir einen Fall wo $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, ungeacht die beyden Factoren von $2xx-5yy$ nemlich $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ und $x\sqrt{2}-y\sqrt{5}$, keine Cubi sind, da dieselben doch nach dieser Methode die Cubi von $p\sqrt{2}+q\sqrt{5}$ und $p\sqrt{2}-q\sqrt{5}$ seyn sollten, indem in unserm Fall $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}=4\sqrt{2}+\sqrt{5}$, hingegen $(p\sqrt{2}+q\sqrt{5})^3=(2\sqrt{2}+\sqrt{5})^3=46\sqrt{2}+29\sqrt{5}$, welches keineswegs mit $4\sqrt{2}+\sqrt{5}$ überein kommt.

Es ist aber zu mercken, daß diese Formel $rr-10ss$ in unendlich viel Fällen 1 oder -1 werden kann; wann nemlich $r=3$ und $s=1$, ferner wann $r=19$ und $s=6$, welche mit dieser Formel $2pp-5qq$ multiplicirt wieder eine Zahl von der letztern Form giebt.

Es sey demnach $ff-10gg=1$, und anstatt daß wir oben gesetzt haben $2xx-5yy=(2pp-5qq)^3$, so können wir jetzt auch auf eine allgemeinere Art setzen $2xx-5yy=(ff-10gg)(2pp-5qq)^3$, und die Factores davon genommen geben $x\sqrt{2}\pm y\sqrt{5}=(f\pm g\sqrt{10})(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3$. Es ist aber

$$(p\sqrt{2}\pm q\sqrt{5})^3=(2p^3+15pqq)\sqrt{2}\pm(6ppq+5q^3)\sqrt{5},$$

wofür wir der Kürtze halber schreiben wollen $A\sqrt{2}+B\sqrt{5}$, welches mit $f+g\sqrt{10}$ multiplicirt giebt $Af\sqrt{2}+Bf\sqrt{5}+2Ag\sqrt{5}+5Bg\sqrt{2}$, welches dem $x\sqrt{2}+y\sqrt{5}$ gleich seyn muß, woraus entspringet

$$x=Af+5Bg \quad \text{und} \quad y=Bf+2Ag;$$

da nun $y=\pm 1$ seyn muß, so ist nicht unumgänglich nöthig daß $6ppq+5q^3=1$ werde, sondern es ist genung wann nur die Formel $Bf+2Ag$, das ist

$$f(6ppq+5q^3)+2g(2p^3+15pqq)$$

dem ± 1 gleich werde, wo f und g vielerley Werthe haben können. Es sey z. E. $f=3$ und $g=1$, so muß diese Formel $18ppq+15q^3+4p^3+30pqq$ dem ± 1 gleich werden, oder es muß seyn $4p^3+18ppq+30pqq+15q^3=\pm 1$.

197.

Diese Schwierigkeit alle dergleichen mögliche Fälle heraus zu bringen findet sich aber nur alsdann, wann in der Formel $axx+cyy$ die Zahl c negativ ist, weil alsdann diese Formel $axx+cyy$ oder diese $xx+acyy$, so mit ihr in einer genauen Verwandtschaft stehet, 1 werden kann, welches aber niemals geschehen kann wann c eine positive Zahl ist, weil $axx+cyy$ oder $xx+acyy$ immer größere Zahlen giebt, je größer x und y genommen werden. Dahero die hier vorgetragene Methode nur in solchen Fällen mit Vortheil gebraucht werden kann, wann die beyden Zahlen a und c positiv genommen werden.

198.

Wir kommen also zur vierten Potestät und bemercken zuförderst, daß wann die Formel $axx+cyy$ ein Biquadrat werden soll, die Zahl $a=1$ seyn müße; dann wann dieselbe kein Quadrat wäre, so wäre es entweder nicht möglich diese Formel nur zu einem Quadrat zu machen, oder wann es möglich wäre so könnte dieselbe auch in dieser Form $tt+acuu$ verwandelt werden, dahero wir die Frage nur auf diese letztere Form, mit welcher die obige $xx+cyy$ wann $a=1$ übereinstimmt, einschräncken. Nun kommt es also darauf an, wie die Werthe von x und y beschaffen seyn müßen, daß diese Formel $xx+cyy$ ein Biquadrat werde. Da nun dieselbe aus diesen zwey Factoren besteht $(x+y\sqrt{-c})(x-y\sqrt{-c})$, so muß ein jeder auch ein Biquadrat von gleicher Art seyn, dahero gesetzt werden muß

$$x+y\sqrt{-c}=(p+q\sqrt{-c})^4 \quad \text{und} \quad x-y\sqrt{-c}=(p-q\sqrt{-c})^4,$$

woraus unsere Formel diesem Biquadrat $(pp+cqq)^4$ gleich wird, die Buchstaben x und y selbst aber werden aus der Entwickelung dieser Formel leicht bestimmt, wie folget:

$$x+y\sqrt{-c}=p^4+4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq-4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$$

$$x-y\sqrt{-c}=p^4-4p^3q\sqrt{-c}-6cppqq+4cpq^3\sqrt{-c}+ccq^4$$

folglich

$$x=p^4-6cppqq+ccq^4 \quad \text{und} \quad y=4p^3q-4cpq^3.$$

199.

Wann also $xx+yy$ ein Biquadrat werden soll, weil hier $c=1$, so haben wir diese Werthe $x=p^4-6ppqq+q^4$ und $y=4p^3q-4pq^3$ und alsdann wird seyn $xx+yy=(pp+qq)^4$.

Laßt uns z. E. setzen $p=2$ und $q=1$, so bekommen wir $x=7$ und $y=24$; hieraus wird $xx+yy=625=5^4$.

Nimmt man ferner $p=3$ und $q=2$, so bekommt man $x=119$ und $y=120$, daraus wird $xx+yy=13^4$.

200.

Bey allen geraden Potestäten wozu die Formel $axx+cyy$ gemacht werden soll, ist ebenfalls unumgänglich nöthig, daß diese Formel zu einem Quadrat gemacht werden könne, zu welchem Ende genug ist daß man nur einen einzigen Fall wiße, wo dieses geschieht; und alsdann kann diese Formel wie wir oben gesehen haben, in dieser Gestalt verwandelt werden $tt+acuu$, wo das erste Glied nur mit 1 multiplicirt ist, und also als in dieser Form $xx+cyy$ enthalten angesehen werden kann, welche hierauf auf eine ähnliche Weise, so wohl zur sechsten Potestät als einer jeglichen andern noch höhern geraden Potestät gemacht werden kann.

201.

Bey den ungeraden Potestäten aber ist diese Bedingung nicht nothwendig, sondern die Zahlen a und c mögen beschaffen seyn wie sie wollen, so kann die Formel $axx+cyy$ allezeit zu einer jeglichen ungeraden Potestät gemacht werden. Dann verlangt man z. E. die fünfte Potestät, so darf man nur setzen $x\sqrt{a}+y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}+q\sqrt{-c})^5$, und $x\sqrt{a}-y\sqrt{-c}=(p\sqrt{a}-q\sqrt{-c})^5$, da dann offenbahr wird $axx + cyy = (app + cqq)^5$. Weil nun die fünfte Potestät von $p\sqrt{a} + q\sqrt{-c}$ ist

$$aap^5\sqrt{a} + 5aap^4q\sqrt{-c} - 10acp^3qq\sqrt{a} - 10acppq^3\sqrt{-c} + 5ccpq^4\sqrt{a} + ccq^5\sqrt{-c},$$

woraus sogleich geschlossen wird

$$x = aap^5 - 10acp^3qq + 5ccpq^4 \quad \text{und} \quad y = 5aap^4q - 10acppq^3 + ccq^5.$$

Verlangt man allso eine Summ von zwey Quadraten $xx + yy$, die zugleich eine fünfte Potestät sey, so ist $a = 1$ und $c = 1$; folglich

$$x = p^5 - 10p^3qq + 5pq^4 \quad \text{und} \quad y = 5p^4q - 10ppq^3 + q^5.$$

Nimmt man nun $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = 38$ und $y = 41$, und

$$xx + yy = 3125 = 5^5.$$

CAPITEL 13

VON EINIGEN FORMELN DIESER ART $ax^4 + by^4$ WELCHE SICH NICHT ZU EINEM QUADRAT MACHEN LASSEN

202.

Man hat sich alle Mühe gegeben zwey Biquadrate zu finden, deren Summ oder Differenz eine Quadrat-Zahl würde; allein alle Mühe war vergebens, und endlich fand man so gar einen Beweis, daß weder diese Formel $x^4 + y^4$ noch diese $x^4 - y^4$ jemals ein Quadrat werden könne, nur zwey Fälle ausgenommen, wo nemlich bey der erstern entweder $x = 0$ oder $y = 0$, bey der andern aber wo entweder $y = 0$ oder $y = x$, und in welchen Fällen die Sache offenbahr vor Augen liegt. Daß aber in allen übrigen die Sache unmöglich seyn soll, ist um so viel mehr merckwürdig, weil wann nur von schlechten Quadraten die Rede ist, unendlich viel Auflösungen statt finden.

203.

Um diesen Beweis gehörig vorzutragen, ist vor allen Dingen zu bemercken, daß die beyden Zahlen x und y als untheilbahr unter sich angesehen werden können; dann sollten dieselben einen gemeinen Theiler z. E. d haben, also daß man setzen könnte $x=dp$ und $y=dq$, so würden unsere Formeln $d^4p^4+d^4q^4$ und $d^4p^4-d^4q^4$, welche wann sie Quadrate wären, auch durch das Quadrat d^4 dividirt, Quadrate bleiben müßten, also daß auch diese Formeln p^4+q^4 und p^4-q^4 Quadrate wären, wo nun die Zahlen p und q keinen weitern gemeinen Theiler haben; es ist demnach genung zu beweisen, daß diese Formeln in dem Fall da x und y unter sich untheilbahr sind, keine Quadrate werden können, und alsdann erstreckt sich der Beweis von selbsten auf alle Fälle, da auch x und y gemeinschaftliche Theiler haben.

204.

Wir wollen demnach von der Summ zweyer Biquadraten nemlich dieser Formel x^4+y^4 den Anfang machen, und wo wir x und y als unter sich untheilbahre Zahlen ansehen können. Um nun zu zeigen daß x^4+y^4 außer den obgemeldten Fällen kein Quadrat seyn könne, so wird der Beweis folgendergestalt geführet.

Wann jemand den Satz läugnen wollte, so müßte er behaupten daß solche Werthe für x und y möglich wären, wodurch x^4+y^4 ein Quadrat würde, dieselben möchten auch so groß seyn als sie wollten, weil in kleinen gewis keine vorhanden sind.

Man kann aber deutlich zeigen, daß wann auch in den größten Zahlen solche Werthe für x und y vorhanden wären, aus denselben auch in kleinern Zahlen eben dergleichen Werthe geschlossen werden könnten, und aus diesen ferner in noch kleinern u. s. f. Da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Werthe vorhanden sind, außer den zwey gemeldten welche aber zu keinen andern führen, so kann man sicher schließen, daß auch in größern, ja so gar den allergrößten Zahlen, keine solche Werthe für x und y vorhanden seyn können. Und auf eben solche Art wird auch der Satz von der Differenz zweyer Biquadraten x^4-y^4 bewiesen, wie wir so gleich zeigen wollen.

205.

Um erstlich zu zeigen daß x^4+y^4 kein Quadrat seyn könne außer den beyden Fällen die für sich klar sind, so sind folgende Sätze wohl zu bemercken.

I. Nehmen wir an daß die Zahlen x und y untheilbahr unter sich sind oder keinen gemeinen Theiler haben; so sind sie entweder beyde ungerad, oder die eine ist gerad und die andere ungerad.

II. Beyde aber können nicht ungerad seyn, weil die Summ von zwey ungeraden Quadraten niemals ein Quadrat seyn kann: dann ein ungerades Quadrat ist allezeit in der Form $4n+1$ enthalten, und also würde die Summ zweyer ungeraden Quadraten diese Form $4n+2$ haben, welche sich durch 2 nicht aber durch 4 theilen läßt, und also kein Quadrat seyn kann. Dieses aber gilt auch von zwey ungeraden Biquadraten.

III. Wann demnach x^4+y^4 ein Quadrat wäre, so müßte das eine gerad, das andere aber ungerad seyn. Wir haben aber oben gesehen, daß wann die Summ zweyer Quadraten ein Quadrat seyn soll, die Wurzel des einen durch $pp-qq$, des andern aber durch $2pq$ ausgedrückt werde; woraus folget daß seyn müßte $xx=pp-qq$ und $yy=2pq$ und da würde $x^4+y^4=(pp+qq)^2$.

IV. Hier also würde y gerad, x aber ungerad seyn: da nun $xx=pp-qq$, so muß auch von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn; die erstere p aber kann nicht gerad seyn, weil sonsten $pp-qq$ als eine Zahl von dieser Form $4n-1$ oder $4n+3$, niemals ein Quadrat werden kann. Folglich müßte p ungerad q aber gerad seyn, wo sich von selbsten versteht daß dieselben untheilbahr unter sich seyn müßen.

V. Da nun $pp-qq$ ein Quadrat, nemlich dem xx gleich seyn soll, so geschieht dieses wie wir oben gesehen, wann $p=rr+ss$ und $q=2rs$: dann da wird $xx=(rr-ss)^2$, und also $x=rr-ss$.

VI. Allein yy muß auch ein Quadrat seyn; da wir nun haben $yy=2pq$, so wird jetzt $yy=4rs(rr+ss)$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß: folglich muß auch $rs(rr+ss)$ ein Quadrat seyn, wo r und s unter sich untheilbahre Zahlen sind, allso daß auch die hier befindlichen drey Factores, r, s und $rr+ss$, keinen gemeinen Theiler unter sich haben können.

VII. Wann aber ein Product aus mehr Factoren, die unter sich untheilbahr sind, ein Quadrat seyn soll, so muß ein jeder Factor für sich ein Quadrat seyn, also setze man $r=tt$ und $s=uu$: so muß auch t^4+u^4 ein Quadrat seyn. Wann demnach x^4+y^4 ein Quadrat wäre, so würde auch hier t^4+u^4, das ist ebenfals eine Summ von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn. Wobey zu mercken daß weil hier $xx=(t^4-u^4)^2$ und $yy=4ttuu(t^4+u^4)$, die Zahlen t und u offenbahr weit kleiner seyn würden als x und y, indem x und y so gar durch die vierte Potestäten von t und u bestimmt werden und also unstreitig weit größer seyn müßen.[1])

VIII. Wann dahero zwey Biquadrate als x^4 und y^4 auch in den größten Zahlen vorhanden seyn sollten, deren Summ ein Quadrat wäre, so könnte man daraus eine Summ von zwey weit kleineren Biquadraten herleiten, welche ebenfals ein Quadrat wäre; und aus diesen könnte nachmahlen noch eine kleinere dergleichen Summe geschlossen werden und so weiter, bis man endlich auf sehr kleine Zahlen käme: da nun aber in kleinen Zahlen keine solche Summ möglich ist, so folgt daraus offenbahr daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte hier zwar einwenden daß es in den kleinen Zahlen würcklich solche gebe wie schon anfänglich bemerckt worden, nemlich da das eine Biquadrat Nulle wird; allein auf diesen Fall kommt man gewis nicht wann man solchergestalt von den größten Zahlen immer zu kleinern zurückgeht. Dann wäre bey der kleineren Summ t^4+u^4 entweder $t=0$ oder $u=0$, so würde auch bey der größern Summ nothwendig $yy=0$ seyn; welcher Fall hier in keine Betrachtung kommt.[2])

206.

Nun kommen wir zu dem andern Hauptsatz, daß auch die Differenz zwischen zwey Biquadraten als x^4-y^4 niemals ein Quadrat werden könne, außer den Fällen $y=0$ und $y=x$; zu dessen Beweis folgende Puncte zu mercken.

I. Sind die Zahlen x und y als untheilbahr unter sich anzusehen, und also entweder beyde ungerad oder die eine gerad und die andere ungerad. Da nun in beyden Fällen die Differenz von zweyen Quadraten wieder ein Quadrat werden kann, so müssen diese zwey Fälle besonders erwogen werden.

---

1) Aus $xx=(t^4-u^4)^2=(t^2+u^2)^2(t^2-u^2)^2$ und $(t^2-u^2)^2>1$ folgt $x^2>(t^2+u^2)^2$, also $x>t$. H. W.

2) Damit ist der FERMATSCHE Satz (siehe die Anmerkung p. 410) für $n=4$ bewiesen. EULER besaß den Beweis bereits 1738. Siehe die Abhandlung 98 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) *Theorematum quorumdam arithmeticorum demonstrationes*, Comment. acad. sc. Petrop. **10** (1738), 1747, p. 125—146; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

II. Es seyen also erstlich die beyden Zahlen x und y ungerad, und man setze $x=p+q$ und $y=p-q$; so muß nothwendig eine dieser Zahlen p und q ungerad die andere aber gerad seyn. Nun wird $xx-yy=4pq$ und $xx+yy=2pp+2qq$, folglich unsere Formel $x^4-y^4=4pq(2pp+2qq)$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch der vierte Theil davon $pq(2pp+2qq)=2pq(pp+qq)$, deren Factoren unter sich untheilbahr sind: folglich muß ein jeder dieser Factoren $2p$, q und $pp+qq$ für sich ein Quadrat seyn, weil nemlich die eine Zahl p gerad, die andere q aber ungerad ist. Man setze dahero um die beyden ersten zu Quadraten zu machen $2p=4rr$ oder $p=2rr$, und $q=ss$, wo s ungerad seyn muß, so wird der dritte Factor $4r^4+s^4$ auch ein Quadrat seyn müssen.

III. Da nun s^4+4r^4 eine Summ von zwey Quadraten ist, davon s^4 ungerad, $4r^4$ aber gerad ist, so setze man die Wurzel des erstern $ss=tt-uu$, wo t ungerad und u gerad ist; des letztern aber $2rr=2tu$ oder $rr=tu$, wo t und u unter sich untheilbahr sind.

IV. Weil nun $tu=rr$ ein Quadrat seyn muß, so muß so wohl t als u ein Quadrat seyn; man setze demnach $t=mm$ und $u=nn$, wo m ungerad und n gerad ist, so wird $ss=m^4-n^4$ also daß wieder eine Differenz von zwey Biquadraten nemlich m^4-n^4 ein Quadrat seyn müßte. Es ist aber klar daß diese Zahlen weit kleiner seyn würden als x und y, weil r und s offenbahr kleiner sind als x und y, und hinwiederum m und n kleiner als r und s; wann also die Sache in den größten Zahlen möglich und x^4-y^4 ein Quadrat wäre, so würde dieselbe in weit kleinern Zahlen auch noch möglich seyn, und so immer fort bis man endlich auf die kleinsten Zahlen käme, wo die Sache möglich ist.

V. Die kleinsten Zahlen aber wo dieses möglich ist, sind wann das eine Biquadrat gleich 0 oder dem andern gleich ist: wäre das erstere so müßte seyn $n=0$, folglich $u=0$, ferner $r=0$ und $p=0$ und $x^4-y^4=0$, oder $x^4=y^4$; von einem solchen Fall ist aber hier nicht die Rede. Wäre aber $n=m$, so würde $t=u$, weiter $s=0$, $q=0$ und endlich auch $x=y$, welcher Fall hier nicht statt findet.

207.

Man könnte hier einwenden, daß da m ungerad und n gerad ist, die letztere Differenz der erstern nicht mehr ähnlich sey, und man also daraus nicht weiter auf kleinere Zahlen den Schluß machen könnte. Es ist aber genug daß man von der erstern Differenz auf die andere gekommen, und wir werden anjetzo zeigen daß auch x^4-y^4 kein Quadrat seyn könne, wann das eine Biquadrat gerad und das andere ungerad ist.

I. Wäre das erstere x^4 gerad und y^4 ungerad, so wäre die Sach an sich nicht möglich, weil eine Zahl von der Form $4n+3$ herauskäme die kein Quadrat seyn kann. Es sey demnach x ungerad und y gerad, so muß seyn $xx=pp+qq$ und $y=2pq$, dann so wird

$$x^4-y^4=p^4-2ppqq+q^4=(pp-qq)^2,$$

wo von p und q das eine gerad das andere aber ungerad seyn muß.

II. Da nun $pp+qq=xx$ ein Quadrat seyn muß, so wird $p=rr-ss$ und $q=2rs$; folglich $x=rr+ss$. Hieraus aber wird $yy=2(rr-ss)\cdot 2rs$ oder $yy=4rs(rr-ss)$, welches ein Quadrat sein muß, und also auch der vierte Theil davon nemlich $rs(rr-ss)$, wovon die Factoren unter sich untheilbahr sind.

III. Man setze demnach $r=tt$ und $s=uu$, so wird der dritte Factor $rr-ss=t^4-u^4$, welcher ebenfals ein Quadrat seyn muß; da nun derselbe auch eine Differenz von zwey Biquadraten ist welche viel kleiner sind als die ersten, so erhält hierdurch der vorige Beweis seine völlige Stärcke, also daß wann auch in den größten Zahlen die Differenz zweyer Biquadraten ein Quadrat wäre, daraus immer kleinere dergleichen Differenzen gefunden werden könnten, ohne gleichwohl auf die zwey offenbahre Fälle zu kommen: dahero gewis auch in den größten Zahlen solches nicht möglich ist.

208.

Der erste Theil dieses Beweises da die Zahlen x und y beyde ungerad genommen werden, kann folgender Gestalt abgekürtzet werden. Wann x^4-y^4 ein Quadrat wäre, so müßte seyn $xx=pp+qq$ und $yy=pp-qq$, wo von den Buchstaben p und q der eine gerad der andere aber ungerad wäre: alsdann aber würde $xxyy=p^4-q^4$, folglich müßte p^4-q^4 auch ein Quadrat seyn, welches eine Differenz von zwey solchen Biquadraten ist, davon das eine gerad das andere aber ungerad ist: daß dieses aber unmöglich sey, ist in dem zweyten Theil des Beweises gezeigt worden.

209.

Wir haben also diese zwey Hauptsätze bewiesen, daß weder die Summ noch die Differenz zweyer Biquadraten jemals eine Quadrat-Zahl werden könne, außer einigen wenigen offenbahren Fällen.

Wann demnach auch andere Formeln welche zu Quadraten gemacht werden sollen, so beschaffen sind, daß entweder eine Summ oder eine Differenz von zweyen Biquadraten ein Quadrat werden müßte, so sind dieselben Formeln ebenfalls nicht möglich. Dieses findet nun statt in den folgenden Formeln, welche wir hier anführen wollen.

I. Ist es nicht möglich daß diese Formel $x^4 + 4y^4$ ein Quadrat werde: dann weil diese Formel eine Summ von zwey Quadraten ist, so müßte seyn $xx = pp - qq$ und $2yy = 2pq$ oder $yy = pq$; da nun p und q untheilbahr unter sich sind, so müßte ein jedes ein Quadrat seyn. Setzt man dahero $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 - s^4$: also müßte eine Differenz von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

II. Ist es auch nicht möglich daß diese Formel $x^4 - 4y^4$ ein Quadrat werde: dann da müßte seyn $xx = pp + qq$ und $2yy = 2pq$, weil alsdann heraus käme $x^4 - 4y^4 = (pp - qq)^2$; da nun $yy = pq$, so müßte p und q jedes ein Quadrat seyn; setzt man nun $p = rr$ und $q = ss$, so wird $xx = r^4 + s^4$; folglich müßte eine Summ von zwey Biquadraten ein Quadrat seyn, welches nicht möglich ist.

III. Es ist auch nicht möglich, daß diese Form $4x^4 - y^4$ ein Quadrat werde, weil alsdann y nothwendig eine gerade Zahl seyn müßte. Setzt man nun $y = 2z$, so würde $4x^4 - 16z^4$ und folglich auch der vierte Theil davon $x^4 - 4z^4$ ein Quadrat seyn müßen, welches nach den vorigen Fall unmöglich ist.

IV. Es ist auch nicht möglich, daß diese Formel $2x^4 + 2y^4$ ein Quadrat werde; dann da dasselbe gerad seyn müßte, und folglich $2x^4 + 2y^4 = 4zz$ wäre, so würde seyn $x^4 + y^4 = 2zz$, und dahero

$$2zz + 2xxyy = x^4 + 2xxyy + y^4$$

und also ein Quadrat. Eben so würde seyn

$$2zz - 2xxyy = x^4 - 2xxyy + y^4$$

und also auch ein Quadrat. Da nun so wohl

$$2zz + 2xxyy \quad \text{als} \quad 2zz - 2xxyy$$

ein Quadrat seyn würde, so müßte auch ihr Product $4z^4-4x^4y^4$, und also auch der vierte Theil davon ein Quadrat seyn. Dieser vierte Theil aber ist $z^4-x^4y^4$ und also eine Differenz von zwey Biquadraten, welches nicht möglich ist.

V. Endlich kann auch diese Formel $2x^4-2y^4$ kein Quadrat seyn; dann da beyde Zahlen x und y nicht gerad sind, weil sie sonsten einen gemeinen Theiler hätten, und auch nicht die eine gerad und die andere ungerad, weil sonsten der eine Theil durch 4 der andere aber nur durch 2, und also auch die Formel selbst nur durch 2 theilbahr seyn würde, so müßen beyde ungerad seyn. Setzt man nun $x=p+q$ und $y=p-q$, so ist die eine von den Zahlen p und q gerad die andere aber ungerad, und da $2x^4-2y^4=2(xx+yy)(xx-yy)$, so bekommt man $xx+yy=2pp+2qq=2(pp+qq)$ und $xx-yy=4pq$; allso unsere Formel $16pq(pp+qq)$, deren sechzehnte Theil, nemlich $pq(pp+qq)$, folglich auch ein Quadrat seyn müßte. Da nun die Factores unter sich untheilbar sind, so müßte ein jeder für sich ein Quadrat seyn. Setzt man nun für die beyden erstern $p=rr$ und $q=ss$, so wird der dritte r^4+s^4, welcher auch ein Quadrat seyn müßte: dieses aber ist nicht möglich.

210.

Auf eine gleiche Weise läßt sich auch beweisen, daß diese Formel x^4+2y^4 kein Quadrat seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen besteht.

I. Kann x nicht gerad seyn, weil alsdann y ungerad seyn müßte, und die Formel sich nur durch 2 nicht aber durch 4 würde theilen laßen: dahero muß x ungerad seyn.

II. Man setze demnach die Quadrat-Wurzel unserer Formel $=xx+\frac{2pyy}{q}$, damit dieselbe ungerad werde; so wird

$$x^4+2y^4=x^4+\frac{4pxxyy}{q}+\frac{4ppy^4}{qq},$$

wo sich die x^4 aufheben, die übrigen Glieder aber durch yy dividirt und mit qq multiplicirt, geben

$$4pqxx+4ppyy=2qqyy, \quad \text{oder} \quad 4pqxx=2qqyy-4ppyy,$$

daraus wird $\frac{xx}{yy} = \frac{qq - 2pp}{2pq}$; woraus folget

$$xx = qq - 2pp \quad \text{und} \quad yy = 2pq,$$

welche eben die Formeln sind die wir schon oben gegeben haben.

III. Es müßte also $qq - 2pp$ wieder ein Quadrat seyn, welches nicht anders geschehen kann, als wann $q = rr + 2ss$ und $p = 2rs$; dann da würde $xx = (rr - 2ss)^2$; hernach aber würde $4rs(rr + 2ss) = yy$, und allso müßte auch der vierte Theil $rs(rr + 2ss)$ ein Quadrat seyn, und folglich r und s jedes besonders. Setzt man nun $r = tt$ und $s = uu$, so wird der dritte Factor $rr + 2ss = t^4 + 2u^4$, welches auch ein Quadrat seyn müßte.

IV. Wäre demnach $x^4 + 2y^4$ ein Quadrat, so würde auch $t^4 + 2u^4$ ein Quadrat seyn, wo die Zahlen t und u weit kleiner wären als x und y; und solchergestalt würde man immer auf kleinere Zahlen kommen können. Da nun in kleinen Zahlen diese Formel kein Quadrat seyn kann, wie leicht zu probiren ist, so kann dieselbe auch in den größten Zahlen kein Quadrat seyn.

211.

Was hingegen diese Formel betrift $x^4 - 2y^4$, so kann von derselben nicht bewiesen werden, daß sie kein Quadrat werden könnte, und wann man auf eine ähnliche Art die Rechnung anstellt, so können so gar unendlich viel Fälle gefunden werden, da dieselbe würcklich ein Quadrat wird.

Dann wann $x^4 - 2y^4$ ein Quadrat seyn soll, so ist oben gezeigt worden, daß seyn werde $xx = pp + 2qq$ und $yy = 2pq$, weil man alsdann bekommt $x^4 - 2y^4 = (pp - 2qq)^2$. Da nun auch $pp + 2qq$ ein Quadrat seyn muß, so geschieht dieses wann $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$; dann da wird $xx = (rr + 2ss)^2$. Allein hier ist wohl zu mercken, daß dieses auch geschehen würde, wann man annehme $p = 2ss - rr$ und $q = 2rs$, dahero zwey Fälle hier in Erwegung zu ziehen sind.

I. Es sey erstlich $p = rr - 2ss$ und $q = 2rs$, so wird $x = rr + 2ss$; und weil $yy = 2pq$, so wird nun seyn $yy = 4rs(rr - 2ss)$; und müßten also r und s Quadrate seyn. Man setze deswegen $r = tt$ und $s = uu$, so wird $yy = 4ttuu(t^4 - 2u^4)$; also

$$y = 2tu\sqrt{(t^4 - 2u^4)} \quad \text{und} \quad x = t^4 + 2u^4;$$

wann daher t^4-2u^4 ein Quadrat ist, so wird auch x^4-2y^4 ein Quadrat; ob aber gleich t und u kleinere Zahlen sind als x und y, so kann man doch wie vorher nicht schließen, daß x^4-2y^4 kein Quadrat seyn könne, deswegen weil man daher auf eine ähnliche Formel in kleinern Zahlen gelanget; dann x^4-2y^4 kann ein Quadrat seyn ohne auf diese Formel t^4-2u^4 zu kommen, weil dieses noch auf eine andere Art geschehen kann, nemlich in dem andern Fall, den wir noch zu betrachten haben.

II. Es sey also $p=2ss-rr$ und $q=2rs$, so wird zwar wie vorher $x=rr+2ss$, allein für y bekommt man $yy=2pq=4rs(2ss-rr)$. Setzt man nun $r=tt$ und $s=uu$, so bekommt man

$$yy=4ttuu(2u^4-t^4),\quad \text{folglich}\quad y=2tu\sqrt{(2u^4-t^4)}\quad \text{und}\quad x=t^4+2u^4;$$

woraus erhellet, daß unsere Formel x^4-2y^4 auch ein Quadrat werden könne, wann diese $2u^4-t^4$ ein Quadrat wird. Dieses aber geschieht offenbar, wann $t=1$ und $u=1$; und dahero bekommen wir $x=3$ und $y=2$, woraus unsere Formel x^4-2y^4 wird $81-2\cdot 16=49$.

III. Wir haben auch oben gesehen, daß $2u^4-t^4$ ein Quadrat werde, wann $u=13$ und $t=1$, weil alsdann $\sqrt{(2u^4-t^4)}=239$. Setzt man nun diese Werthe für t und u, so erhalten wir einen neuen Fall für unsere Formel, nemlich

$$x=1+2\cdot 13^4=57123\quad \text{und}\quad y=2\cdot 13\cdot 239=6214.$$

IV. So bald man aber Werthe für x und y gefunden, so kann man dieselben in den Formeln No. I. für t und u schreiben, da man dann wieder neue für x und y erhalten wird.

Weil wir nun gefunden $x=3$ und $y=2$, so laßt uns in den No. I. gegebenen Formeln setzen $t=3$ und $u=2$, da dann $\sqrt{(t^4-2u^4)}=7$, so bekommen wir folgende neue Werthe

$$x=81+2\cdot 16=113\quad \text{und}\quad y=2\cdot 3\cdot 2\cdot 7=84.$$

Hieraus erhalten wir $xx=12769$, und $x^4=163047361$; ferner $yy=7056$ und $y^4=49787136$, daher wird $x^4-2y^4=63473089$ wovon die Quadrat-Wurzel ist 7967, welche auch völlig übereintrifft mit der anfänglich angesetzten $pp-2qq$. Dann da $t=3$ und $u=2$, so wird $r=9$ und $s=4$, dahero $p=81-32=49$ und $q=72$, woraus $pp-2qq=2401-10368=-7967$.

CAPITEL 14

AUFLÖSUNG EINIGER FRAGEN DIE ZU DIESEM THEIL DER ANALYTIC GEHÖREN

212.

Wir haben bisher die Kunstgriffe erklärt, welche in diesem Theil der Analytic vorkommen und nöthig sind, um alle diejenigen Aufgaben, so hieher gehören aufzulösen, dahero wir um dieses in ein größeres Licht zu setzen einige dergleichen Fragen hier vorlegen und die Auflösung derselben beyfügen wollen.

213.

I. Frage: Man suche eine Zahl, daß wann man darzu 1 so wohl addirt oder auch davon subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Setzt man die gesuchte Zahl $= x$, so muß so wohl $x + 1$ als auch $x - 1$ ein Quadrat seyn. Für das erstere setze man $x + 1 = pp$, so wird $x = pp - 1$ und $x - 1 = pp - 2$, welches auch ein Quadrat seyn muß. Man setze, die Wurzel davon sey $p - q$, so wird $pp - 2 = pp - 2pq + qq$, wo sich die pp aufheben und daraus gefunden wird $p = \frac{qq+2}{2q}$; daraus man ferner erhält $x = \frac{q^4+4}{4qq}$; wo man q nach Belieben und auch in Brüchen annehmen kann.

Man setze dahero $q = \frac{r}{s}$, so erhalten wir $x = \frac{r^4+4s^4}{4rrss}$, wovon wir etliche kleinere Werthe anzeigen wollen:

wann $r = 1$	2	1	3
und $s = 1$	1	2	1
so wird $x = \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{65}{16}$	$\frac{85}{36}$

214.

II. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wann man dazu 2 beliebige Zahlen als z. E. 4 und 7 addirt, in beyden Fällen ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also diese zwey Formeln $x + 4$ und $x + 7$ Quadrate werden; man setze dahero für die erstere $x + 4 = pp$, so wird $x = pp - 4$, die andere Formel aber wird $x + 7 = pp + 3$, welche auch ein Quadrat seyn muß. Man setze daher die Wurzel davon $= p + q$, so wird $pp + 3 = pp + 2pq + qq$, woraus gefunden wird $p = \frac{3 - qq}{2q}$, folglich $x = \frac{9 - 22qq + q^4}{4qq}$. Setzen wir für q einen Bruch als $\frac{r}{s}$, so bekommen wir $x = \frac{9s^4 - 22rrss + r^4}{4rrss}$, wo man für r und s alle beliebige gantze Zahlen annehmen kann.

Nimmt man $r = 1$ und $s = 1$, so wird $x = -3$, und daraus wird $x + 4 = 1$ und $x + 7 = 4$. Will man aber eine positive Zahl für x haben, so setze man $s = 2$ und $r = 1$, da bekommt man $x = \frac{57}{16}$; woraus wird $x + 4 = \frac{121}{16}$ und $x + 7 = \frac{169}{16}$; will man ferner setzen $s = 3$ und $r = 1$, so bekommt man $x = \frac{133}{9}$, woraus $x + 4 = \frac{169}{9}$ und $x + 7 = \frac{196}{9}$. Soll das letzte Glied das mittlere überwiegen, so setze man $r = 5$ und $s = 1$, da wird $x = \frac{21}{25}$, und daraus $x + 4 = \frac{121}{25}$ und $x + 7 = \frac{196}{25}$.

215.

III. Frage: Man suche einen solchen Bruch x, daß wann man denselben entweder zu 1 addirt oder von 1 subtrahirt, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Da diese beyden Formeln $1 + x$ und $1 - x$ Quadrate seyn sollen, so setze man für die erstere $1 + x = pp$, da wird $x = pp - 1$ und die andere Formel $1 - x = 2 - pp$, welche ein Quadrat seyn soll. Da nun weder das erste noch letzte Glied ein Quadrat ist, so muß man sehen, ob man einen Fall errathen kann, da solches geschieht; ein solcher fällt aber gleich in die Augen, nemlich $p = 1$, deswegen setze man $p = 1 - q$, also daß $x = qq - 2q$, so wird unsere Formel $2 - pp = 1 + 2q - qq$, davon setze man die Wurzel $= 1 - qr$, so bekommt man $1 + 2q - qq = 1 - 2qr + qqrr$; hieraus $2 - q = -2r + qrr$ und $q = \frac{2r + 2}{rr + 1}$; hieraus wird $x = \frac{4r - 4r^3}{(rr + 1)^2}$, weil r ein Bruch ist, so setze man $r = \frac{t}{u}$, so wird $x = \frac{4tu^3 - 4t^3u}{(tt + uu)^2} = \frac{4tu(uu - tt)}{(tt + uu)^2}$; also muß u größer seyn als t.

Man setze demnach $u = 2$ und $t = 1$, so wird $x = \frac{24}{25}$; setzt man $u = 3$ und $t = 2$, so wird $x = \frac{120}{169}$, und daraus $1 + x = \frac{289}{169}$ und $1 - x = \frac{49}{169}$, welche beyde Quadrate sind.

216.

IV. Frage: Man suche solche Zahlen x, welche so wohl zu 10 addirt als von 10 subtrahirt Quadrate hervorbringen?

Es müßen also diese Formeln $10 + x$ und $10 - x$ Quadrate seyn, welches nach der vorigen Weise geschehen könnte. Um aber einen andern Weg zu zeigen, so bedencke man, daß auch das Product dieser Formeln ein Quadrat seyn müße, nemlich $100 - xx$. Da nun hier das erste Glied schon ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $= 10 - px$, so wird $100 - xx = 100 - 20px + ppxx$ und allso $x = \frac{20p}{pp+1}$; hieraus aber folgt, daß nur das Product ein Quadrat werde, nicht aber eine jede besonders. Wann aber nur die eine ein Quadrat wird, so muß die andere nothwendig auch eines seyn; nun aber wird die erste

$$10 + x = \frac{10pp + 20p + 10}{pp + 1} = \frac{10(pp + 2p + 1)}{pp + 1};$$

und weil $pp + 2p + 1$ schon ein Quadrat ist, so muß noch dieser Bruch $\frac{10}{pp+1}$ ein Quadrat seyn, folglich auch dieser $\frac{10pp+10}{(pp+1)^2}$. Es ist also nur nöthig, daß die Zahl $10pp + 10$ ein Quadrat werde, wo wiederum ein Fall, da es geschieht, errathen werden muß. Dieser ist wann $p = 3$ und deswegen setze man $p = 3 + q$, so bekommt man $100 + 60q + 10qq$; davon setze man die Wurzel $10 + qt$, so wird $100 + 60q + 10qq = 100 + 20qt + qqtt$, daraus $q = \frac{60 - 20t}{tt - 10}$, daraus $p = 3 + q$ und $x = \frac{20p}{pp+1}$.

Setzt man $t = 3$, so wird $q = 0$ und $p = 3$ folglich $x = 6$, dahero wird $10 + x = 16$ und $10 - x = 4$. Es sey aber $t = 1$, so wird $q = -\frac{40}{9}$ und $p = -\frac{13}{9}$ und $x = -\frac{234}{25}$; es ist aber gleich viel zu setzen $x = +\frac{234}{25}$, und dann wird $10 + x = \frac{484}{25}$ und $10 - x = \frac{16}{25}$, welche beyde Quadrate sind.

217.

Anmerckung: Wollte man diese Frage allgemein machen und für eine jegliche gegebene Zahl a solche Zahlen x verlangen, also daß so wohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werden sollte, so würde die Auflösung öfters unmöglich werden, nemlich in allen Fällen, wo die Zahl a keine Summe von zwey Quadraten ist. Aber wir haben schon oben [§ 168] gesehen, daß von 1 bis 50 nur die folgenden Zahlen Summen von zwey Quadraten, oder in dieser Form $xx + yy$ enthalten sind:

1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, 32, 34, 36, 37, 40, 41, 45, 49, 50,

die übrigen also, welche gleichfals bis 50 sind:

3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 44, 46, 47, 48,

nicht können in zwey Quadrate zerlegt werden; so oft also a eine von diesen letztern Zahlen wäre, so offt würde auch die Frage unmöglich seyn.

Um dieses zu zeigen, so laßt uns setzen $a + x = pp$ und $a - x = qq$, und da giebt die Addition $2a = pp + qq$; also daß $2a$ eine Summe von zwey Quadraten seyn muß, ist aber $2a$ eine solche Summe, so muß auch a eine solche seyn, wann dahero a keine Summe von zwey Quadraten ist, so ist es auch nicht möglich, daß $a + x$ und $a - x$ zugleich Quadrate seyn können.

218.

Wann demnach $a = 3$ wäre, so würde die Frage unmöglich seyn, und das deswegen, weil 3 keine Summe von zwey Quadraten ist; man könnte zwar einwenden, daß es vielleicht zwey Quadrate in Brüchen gebe, deren Summe 3 ausmacht; allein dieses ist auch nicht möglich, dann wäre $3 = \frac{pp}{qq} + \frac{rr}{ss}$ und man multiplicirte mit $qqss$, so würde $3qqss = ppss + qqrr$, wo $ppss + qqrr$ eine Summe von zwey Quadraten ist, welche sich durch 3 theilen ließe; wir haben aber oben gesehen, daß eine Summe von zwey Quadraten keine anderen Theiler haben könne, als welche selbst solche Summen sind.

Es laßen sich zwar die Zahlen 9 und 45 durch 3 theilen, allein dieselben sind auch durch 9 theilbar und so gar ein jedes der beyden Quadrate, woraus sie bestehen, weil nemlich $9 = 3^2 + 0^2$, und $45 = 6^2 + 3^2$, welches hier nicht statt findet: daher dieser Schluß seine Richtigkeit hat, daß wann eine Zahl a in ganzen Zahlen keine Summe von zwey Quadraten ist, solches auch nicht in Brüchen geschehen könne; ist aber die Zahl a in gantzen Zahlen eine Summe von zwey Quadraten, so kann dieselbe auch in Brüchen auf unendlich vielerley Art eine Summe von zwey Quadraten seyn, welches wir zeigen wollen.

219.

V. Frage: Eine Zahl, die eine Summe von zwey Quadraten ist, auf unendlich vielerley Art in eine Summe von zwey andern Quadraten zu zerlegen?

Die vorgegebene Zahl sey demnach $ff + gg$ und man soll zwey andere Quadraten, als xx und yy suchen, deren Summe $xx + yy$ gleich sey der Zahl $ff + gg$, also daß $xx + yy = ff + gg$. Hier ist nun so gleich klar, daß wann x größer oder kleiner ist als f, y umgekehrt kleiner oder größer seyn müße als g. Man setze dahero $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so wird

$$ff + 2fpz + ppzz + gg - 2gqz + qqzz = ff + gg,$$

wo sich die ff und gg aufheben, die übrigen Glieder aber durch z theilen laßen. Dahero wird $2fp + ppz - 2gq + qqz = 0$ oder $ppz + qqz = 2gq - 2fp$, und also $z = \frac{2gq - 2fp}{pp + qq}$, woraus für x und y folgende Werthe gefunden werden

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq} \quad \text{und} \quad y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq},$$

wo man für p und q alle mögliche Zahlen nach Belieben annehmen kann.

Es sey die gegebene Zahl 2, also daß $f = 1$ und $g = 1$ so wird

$$xx + yy = 2, \quad \text{wann} \quad x = \frac{2pq + qq - pp}{pp + qq} \quad \text{und} \quad y = \frac{2pq + pp - qq}{pp + qq};$$

setzt man $p = 2$ und $q = 1$, so wird $x = \frac{1}{5}$ und $y = \frac{7}{5}$.

220.

VI. Frage: Wann die Zahl a eine Summe von zwey Quadraten ist, solche Zahlen x zu finden, daß so wohl $a + x$ als $a - x$ ein Quadrat werde?

Es sey die Zahl $a = 13 = 9 + 4$, und man setze

$$13 + x = pp \quad \text{und} \quad 13 - x = qq,$$

so giebt erstlich die Addition $26 = pp + qq$, die Subtraction aber $2x = pp - qq$: also müßen p und q so beschaffen seyn, daß $pp + qq$ der Zahl 26 gleich werde, welche auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nemlich $25 + 1$, folglich muß diese Zahl 26 in zwey Quadrate zerlegt werden, wovon das größere für pp, das kleinere aber für qq genommen wird. Hieraus bekömmt man erstlich $p = 5$ und $q = 1$ und daraus wird $x = 12$; hernach aber kann aus dem obigen die Zahl 26 noch auf unendlich vielerley Art in zwey Quadrate aufgelößt werden. Dann weil $f = 5$ und $g = 1$, wann wir in den obigen Formeln anstatt der Buchstaben p und q schreiben t und u, vor x und y aber die Buchstaben p und q, so finden wir

$$p = \frac{2tu + 5(uu - tt)}{tt + uu} \quad \text{und} \quad q = \frac{10tu + tt - uu}{tt + uu}.$$

Nimmt man nun für t und u Zahlen nach Belieben an und bestimmt daraus die Buchstaben p und q, so erhält man die gesuchte Zahl $x = \frac{pp - qq}{2}$.

Es sey z. E. $t = 2$ und $u = 1$, so wird $p = -\frac{11}{5}$ und $q = \frac{23}{5}$; und daher $pp - qq = -\frac{408}{25}$ und $x = \frac{204}{25}$.

221.

Um aber diese Frage allgemein aufzulösen, so sey die gegebene Zahl $a = cc + dd$, die gesuchte aber $= z$, also daß diese Formeln $a + z$ und $a - z$ Quadrate werden sollten.

Nun setze man

$$a + z = xx \quad \text{und} \quad a - z = yy,$$

so wird erstlich $2a = 2(cc + dd) = xx + yy$, und hernach $2z = xx - yy$. Es müßen also die Quadrate xx und yy so beschaffen seyn, daß $xx + yy = 2(cc + dd)$, wo $2(cc + dd)$ auch eine Summe von zwey Quadraten ist, nemlich $(c + d)^2 + (c - d)^2$. Man setze Kürtze halber $c + d = f$ und $c - d = g$: also daß seyn muß $xx + yy = ff + gg$, dieses geschieht aber aus dem obigen, wann man nimmt

$$x = \frac{2gpq + f(qq - pp)}{pp + qq} \quad \text{und} \quad y = \frac{2fpq + g(pp - qq)}{pp + qq}.$$

Hieraus bekommt man die leichteste Auflösung, wann man nimmt $p = 1$ und $q = 1$, dann daraus wird $x = \frac{2g}{2} = g = c - d$ und $y = f = c + d$, und hieraus folglich $z = 2cd$. Hieraus wird nun offenbar

$$cc + dd + 2cd = (c + d)^2 \quad \text{und} \quad cc + dd - 2cd = (c - d)^2.$$

Um eine andere Auflösung zu finden, so sey $p = 2$ und $q = 1$, da wird $x = \frac{c - 7d}{5}$ und $y = \frac{7c + d}{5}$, wo so wohl c und d, als x und y negativ genommen werden können, weil nur ihre Quadrate vorkommen. Da nun x größer seyn soll als y, so nehme man d negativ und da wird $x = \frac{c + 7d}{5}$ und $y = \frac{7c - d}{5}$. Hieraus folgt $z = \frac{24dd + 14cd - 24cc}{25}$, welcher Werth zu $a = cc + dd$ addirt, giebt $\frac{cc + 14cd + 49dd}{25}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{c + 7d}{5}$. Subtrahirt man aber z von a so bleibt $\frac{49cc - 14cd + dd}{25}$, wovon die Quadrat-Wurzel ist $\frac{7c - d}{5}$; jene ist nemlich x, diese aber y.

222.

VII. Frage: Man suche eine Zahl x, daß wann so wohl zu derselben selbst als zu ihrem Quadrat xx, eins addirt wird, in beyden Fällen ein Quadrat heraus komme?

Es müßen also diese beyde Formeln $x + 1$ und $xx + 1$ zu Quadraten gemacht werden. Man setze dahero für die erste $x + 1 = pp$, so wird

$x = pp - 1$, und die zweyte Formel $xx + 1 = p^4 - 2pp + 2$, welche Formel ein Quadrat seyn soll: dieselbe aber ist von der Art, daß keine Auflösung zu finden, wofern nicht schon ein Fall bekant ist; ein solcher Fall aber fält so gleich in die Augen, nemlich wo $p = 1$. Man setze dahero $p = 1 + q$, so wird

$$xx + 1 = 1 + 4qq + 4q^3 + q^4,$$

welches auf vielerley Art zu einem Quadrat gemacht werden kann.

I. Man setze erstlich die Wurzel davon $1 + qq$, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 2qq + q^4,$$

daraus wird $4q + 4qq = 2q$ oder $4 + 4q = 2$ und $q = -\frac{1}{2}$, folglich $p = \frac{1}{2}$ und $x = -\frac{3}{4}$.

II. Setzt man die Wurzel $1 - qq$, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 2qq + q^4,$$

und daher $q = -\frac{3}{2}$ und $p = -\frac{1}{2}$, hieraus $x = -\frac{3}{4}$ wie vorher.

III. Setzt man die Wurzel $1 + 2q + qq$, damit sich die ersten und die zwey letzten Glieder aufheben, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4q + 6qq + 4q^3 + q^4,$$

daraus wird $q = -2$ und $p = -1$, daher $x = 0$.

IV. Man kann aber auch die Wurzel setzen $1 - 2q - qq$, so wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 - 4q + 2qq + 4q^3 + q^4,$$

daraus wird $q = -2$ wie vorher.

V. Damit die zwey ersten Glieder einander aufheben, so sey die Wurzel $1 + 2qq$, da wird

$$1 + 4qq + 4q^3 + q^4 = 1 + 4qq + 4q^4,$$

und daraus $q = \frac{4}{3}$ und $p = \frac{7}{3}$; folglich $x = \frac{40}{9}$; woraus folgt

$$x + 1 = \frac{49}{9} = \left(\frac{7}{3}\right)^2 \quad \text{und} \quad xx + 1 = \frac{1681}{81} = \left(\frac{41}{9}\right)^2.$$

Wollte man noch mehr Werthe für q finden, so müßte man einen von diesen hier gefundenen z. E. $-\frac{1}{2}$ nehmen, und ferner setzen $q = -\frac{1}{2} + r$;.

daraus aber würde

$$p = \frac{1}{2} + r;\ pp = \frac{1}{4} + r + rr \quad \text{und} \quad p^4 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}rr + 2r^3 + r^4,$$

folglich unsere Formel $\frac{25}{16} - \frac{3}{2}r - \frac{1}{2}rr + 2r^3 + r^4$, welche ein Quadrat seyn soll, und dahero auch mit 16 multiplicirt, nemlich

$$25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4.$$

Davon setze man nun:

I. Die Wurzel $= 5 + fr \pm 4rr$, also daß

$$25 - 24r - 8rr + 32r^3 + 16r^4 = 25 + 10fr \pm 40rr + ffrr \pm 8fr^3 + 16r^4.$$

Da nun die ersten und letzten Glieder wegfallen, so bestimme man f so, daß auch die zweyten wegfallen, welches geschieht wann $-24 = 10f$ und also $f = -\frac{12}{5}$, alsdann geben die übrigen Glieder durch rr dividirt

$$-8 + 32r = \pm 40 + ff \pm 8fr.$$

Für das obere Zeichen hat man $-8 + 32r = 40 + ff + 8fr$, und daraus $r = \frac{48 + ff}{32 - 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = \frac{21}{20}$, folglich $p = \frac{31}{20}$ und $x = \frac{561}{400}$, daraus wird $x + 1 = \left(\frac{31}{20}\right)^2$ und $xx + 1 = \left(\frac{689}{400}\right)^2$.

II. Gilt aber das untere Zeichen, so wird $-8 + 32r = -40 + ff - 8fr$, und daraus $r = \frac{ff - 32}{32 + 8f}$. Da nun $f = -\frac{12}{5}$, so wird $r = -\frac{41}{20}$, folglich $p = -\frac{31}{20}$, woraus die vorige Gleichung entspringt.

III. Es sey die Wurzel $4rr + 4r \pm 5$, also daß

$$16r^4 + 32r^3 - 8rr - 24r + 25 = 16r^4 + 32r^3 \pm 40rr + 16rr \pm 40r + 25,$$

wo die zwey ersten und die gantz letzten Glieder wegfallen, die übrigen aber durch r dividirt geben $-8r - 24 = \pm 40r + 16r \pm 40$, oder

$$-24r - 24 = \pm 40r \pm 40.$$

Wann das obere Zeichen gilt, so wird $-24r - 24 = 40r + 40$, oder $0 = 64r + 64$, oder $0 = r + 1$, das ist $r = -1$ und $p = -\frac{1}{2}$, welchen Fall wir schon gehabt haben; und eben derselbe folgt auch aus dem untern Zeichen.

IV. Man setze die Wurzel $5+fr+grr$ und bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen. Da nun

$$25-24r-8rr+32r^3+16r^4=25+10fr+10grr+ffrr+2fgr^3+ggr^4,$$

so wird erstlich $-24=10f$ und also $f=-\frac{12}{5}$, ferner $-8=10g+ff$, und also $g=\frac{-8-ff}{10}$, oder $g=-\frac{344}{250}=-\frac{172}{125}$; die beyden letzten Glieder aber durch r^3 dividirt geben $32+16r=2fg+ggr$ und daraus $r=\frac{2fg-32}{16-gg}$. Hier wird der Zehler

$2fg-32=\frac{+24\cdot172-32\cdot625}{5\cdot125}=\frac{-32\cdot496}{625}$, oder dieser Zehler $=\frac{-16\cdot32\cdot31}{625}$;

der Nenner aber giebt

$$16-gg=(4-g)(4+g)=\frac{328\cdot672}{125\cdot125}, \text{ oder } 16-gg=\frac{8\cdot32\cdot41\cdot21}{25\cdot625};$$

daraus wird $r=-\frac{1550}{861}$, hieraus $p=-\frac{2239}{1722}$, und hieraus wird ein neuer Werth für x, nemlich $x=pp-1$, gefunden.

223.

VIII. Frage: Zu drey gegebenen Zahlen a, b und c eine solche Zahl x zu finden, welche zu einer jeden derselben addirt ein Quadrat hervorbringe?

Es müßen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden, nemlich $x+a$, $x+b$ und $x+c$.

Man setze für die erstere $x+a=zz$, also daß $x=zz-a$, so werden die beyden andern Formeln $zz+b-a$ und $zz+c-a$, wovon eine jede ein Quadrat seyn soll. Hievon aber läßt sich keine allgemeine Auflösung geben, weil solches sehr öfters unmöglich ist, und die Möglichkeit beruhet einzig und allein auf der Beschaffenheit der beyden Zahlen $b-a$ und $c-a$. Dann wäre z. E. $b-a=1$ und $c-a=-1$, das ist $b=a+1$ und $c=a-1$, so müßten $zz+1$ und $zz-1$ Quadrate werden, und z ohne Zweifel ein Bruch seyn. Man setze dahero $z=\frac{p}{q}$, so würden diese zwey Formeln Quadrate seyn müßen, $pp+qq$ und $pp-qq$, folglich müßte auch ihr Product, nemlich p^4-q^4, ein Quadrat seyn, daß aber dieses nicht möglich sey ist oben gezeigt worden.

Wäre ferner $b-a=2$, und $c-a=-2$, das ist $b=a+2$ und $c=a-2$, so müßten, wann man wiederum setzte $z=\frac{p}{q}$, diese zwey Formeln $pp+2qq$ und $pp-2qq$ Quadrate werden, folglich auch ihr Product p^4-4q^4, welches ebenfals nicht möglich ist.

Man setze überhaupt $b-a=m$ und $c-a=n$, ferner auch $z=\frac{p}{q}$, so müßen diese Formeln Quadrate seyn $pp+mqq$ und $pp+nqq$; welches wie wir eben gesehen unmöglich ist, wann entweder $m=+1$ und $n=-1$, oder wann $m=+2$ und $n=-2$ ist.

Es ist auch ferner nicht möglich wann $m=ff$ und $n=-ff$. Dann alsdann würde das Product derselben $p^4-f^4q^4$ eine Differenz von zwey Biquadraten seyn, welche niemahls ein Quadrat werden kann.

Eben so wann $m=2ff$ und $n=-2ff$, so können auch diese Formeln $pp+2ffqq$ und $pp-2ffqq$ nicht beyde Quadrate werden, weil ihr Product $p^4-4f^4q^4$ auch ein Quadrat seyn müßte; folglich wann man setzt $fq=r$, diese Formel p^4-4r^4, wovon die Unmöglichkeit auch oben gezeigt worden.

Wäre ferner $m=1$ und $n=2$, also daß diese Formeln $pp+qq$ und $pp+2qq$ Quadrate seyn müßten, so setze man $pp+qq=rr$ und $pp+2qq=ss$; da wird aus der ersteren $pp=rr-qq$, und also die andere $rr+qq=ss$; daher müßte so wohl $rr-qq$ als $rr+qq$ ein Quadrat seyn; und auch ihr Product r^4-q^4 müßte ein Quadrat seyn, welches unmöglich ist.

Hieraus sieht man nun zur Gnüge, daß es nicht leicht ist solche Zahlen für m und n zu wählen, daß die Auflösung möglich werde. Das einige Mittel solche Werthe für m und n zu finden ist, daß man dergleichen Fälle errathe, oder solcher Gestalt ausfündig mache.

Man setzt $ff+mgg=hh$ und $ff+ngg=kk$, so bekommt man aus der erstern $m=\frac{hh-ff}{gg}$, und aus der andern $n=\frac{kk-ff}{gg}$. Nimmt man nun für f, g, h und k Zahlen nach Belieben an, so bekommt man für m und n solche Werthe, da die Auflösung möglich ist.

Es sey z. E. $h=3$, $k=5$, $f=1$ und $g=2$; so wird $m=2$ und $n=6$. Anjetzt sind wir versichert, daß es möglich sey die zwey Formeln $pp+2qq$ und $pp+6qq$ zu Quadrate zu machen, weil solches geschieht wann $p=1$ und $q=2$. Die erste aber wird auf eine allgemeine Art ein Quadrat wann $p=rr-2ss$ und $q=2rs$; dann da wird $pp+2qq=(rr+2ss)^2$. Die andere Formel aber wird alsdann $pp+6qq=r^4+20rrss+4s^4$, wovon ein Fall bekant ist, da dieselbe ein Quadrat wird, nemlich wann $p=1$ und $q=2$, und welches geschieht wann $r=1$ und $s=1$, oder wann überhaupt $r=s$; dann da wird unsere Formel $25s^4$. Da wir nun diesen Fall wißen, so setzen wir $r=s+t$, so wird $rr=ss+2st+tt$ und $r^4=s^4+4s^3t+6sstt+4st^3+t^4$, dahero unsere Formel seyn wird $25s^4+44s^3t+26sstt+4st^3+t^4$, davon sey die Wurzel $5ss+fst+tt$, wovon das Quadrat ist

$$25s^4+10fs^3t+10sstt+ffsstt+2fst^3+t^4,$$

wo sich die ersten und lezten Glieder von selbst aufheben. Man nehme nun f so an, daß sich auch die letzten ohne eines aufheben, welches geschieht wann $4 = 2f$ und $f = 2$; alsdann geben die übrigen durch sst dividirt diese Gleichung $44s + 26t = 10fs + 10t + fft = 20s + 14t$, oder $2s = -t$ und $\frac{s}{t} = -\frac{1}{2}$, dahero wird $s = -1$ und $t = 2$, oder $t = -2s$, folglich $r = -s$ und $rr = ss$, welches der bekante Fall selbst ist.

Man nehme f so an, daß sich die zweyten Glieder aufheben, welches geschieht wann $44 = 10f$, oder $f = \frac{22}{5}$; da dann die übrigen Glieder durch stt dividirt geben $26s + 4t = 10s + ffs + 2ft$, das ist $-\frac{84}{25}s = \frac{24}{5}t$, folglich $t = -\frac{7}{10}s$ und also $r = s + t = \frac{3}{10}s$, oder $\frac{r}{s} = \frac{3}{10}$: dahero $r = 3$, und $s = 10$; hieraus bekommen wir $p = 2ss - rr = 191$ und $q = 2rs = 60$, woraus unsere Formeln werden:

$$pp + 2qq = 43681 = 209^2, \quad \text{und} \quad pp + 6qq = 58081 = 241^2.$$

224.

Anmerckung: Dergleichen Zahlen für m und n, da sich unsere Formeln zu Quadrate machen laßen, können nach der obigen Art noch mehr gefunden werden. Es ist aber zu mercken, daß die Verhältniß dieser Zahlen m und n nach Belieben angenommen werden kann. Es sey diese Verhältniß wie a zu b, und man setze $m = az$ und $n = bz$, so kommt es nun darauf an wie man z bestimmen soll, daß diese beyde Formeln $pp + azqq$ und $pp + bzqq$ zu Quadraten gemacht werden können? welches wir in der folgenden Aufgabe zeigen wollen.

225.

IX. Frage: Wann a und b gegebene Zahlen sind; die Zahl z zu finden, daß sich diese beyde Formeln $pp + azqq$ und $pp + bzqq$ zu Quadraten machen laßen, und zugleich die kleinsten Werthe für p und q zu bestimmen?

Man setze $pp + azqq = rr$ und $pp + bzqq = ss$, und man multiplicire die erstere mit b die andere aber mit a, so giebt die Differenz derselben diese Gleichung $(b - a)pp = brr - ass$ und also $pp = \frac{brr - ass}{b - a}$, welche Formel also ein Quadrat seyn muß. Da nun solches geschieht wann $r = s$, so setze man um die Brüche weg zu bringen $r = s + (b-a)t$, so wird

$$pp = \frac{brr - ass}{b-a} = \frac{bss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2tt - ass}{b-a}$$
$$= \frac{(b-a)ss + 2b(b-a)st + b(b-a)^2tt}{b-a} = ss + 2bst + b(b-a)tt.$$

Nun setze man $p = s + \frac{x}{y}t$, so wird

$$pp = ss + \frac{2x}{y} \cdot st + \frac{xx}{yy}tt = ss + 2bst + b(b-a)tt;$$

wo sich die ss aufheben, die übrigen Glieder aber durch t dividirt und mit yy multiplicirt geben $2bsyy + b(b-a)tyy = 2sxy + txx$, daraus

$$t = \frac{2sxy - 2bsyy}{b(b-a)yy - xx}, \quad \text{dahero} \quad \frac{t}{s} = \frac{2xy - 2byy}{b(b-a)yy - xx}.$$

Hieraus bekommt man $t = 2xy - 2byy$ und $s = b(b-a)yy - xx$, ferner $r = 2(b-a)xy - b(b-a)yy - xx$, und daraus

$$p = s + \frac{x}{y} \cdot t = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x - by)^2 - abyy.$$

Da wir nun p nebst r und s gefunden haben, so ist noch übrig z zu suchen. Man subtrahire zu diesem Ende die erste Gleichung $pp + azqq = rr$ von der andern $pp + bzqq = ss$, so giebt der Rest $zqq(b-a) = ss - rr = (s+r) \cdot (s-r)$. Da nun $s + r = 2(b-a)xy - 2xx$ und $s - r = 2b(b-a)yy - 2(b-a)xy$, oder $s + r = 2x((b-a)y - x)$ und $s - r = 2(b-a)y(by - x)$, so wird

$$(b-a)zqq = 2x((b-a)y - x) \cdot 2(b-a)y(by - x)$$

oder

$$zqq = 2x((b-a)y - x) \cdot 2y(by - x) \quad \text{oder} \quad zqq = 4xy((b-a)y - x)(by - x);$$

folglich

$$z = \frac{4xy((b-a)y - x)(by - x)}{qq}.$$

Daher für qq das größte Quadrat genommen werden muß, dadurch sich der Zehler theilen läßt; für p aber haben wir schon gefunden

$$p = b(b-a)yy + xx - 2bxy = (x - by)^2 - abyy,$$

woraus man sieht, daß diese Formeln leichter und einfacher werden, wann man setzet: $x = v + by$ oder $x - by = v$; dann da wird $p = vv - abyy$, und

$$z = \frac{4(v + by) \cdot y \cdot v(v + ay)}{qq} \quad \text{oder} \quad z = \frac{4vy(v + ay)(v + by)}{qq},$$

wo die Zahlen v und y nach Belieben genommen werden können, und alsdann findet man erstlich qq, indem dafür das größte Quadrat genommen wird, so in dem Zehler enthalten ist, woraus sich so dann z ergiebt; da dann $m = az$ und $n = bz$, endlich aber $p = vv - abyy$ wird; und hieraus bekommt man die gesuchten Formeln:

I.) $$pp + azqq = (vv - abyy)^2 + 4avy(v + ay)(v + by),$$

welche ein Quadrat ist, davon die Wurzel $r = -vv - 2avy - abyy$ ist.

II.) Die zweyte Formel aber wird

$$pp + bzqq = (vv - abyy)^2 + 4bvy(v + ay)(v + by),$$

welches auch ein Quadrat ist, davon die Wurzel $s = -vv - 2bvy - abyy$; wo die Werthe von r und s auch positiv genommen werden können; dieses wird dienlich seyn mit einigen Exempeln zu erläutern.

226.

I. Exempel: Es sey $a = -1$ und $b = +1$, und man suche Zahlen für z allso daß diese zwey Formeln $pp - zqq$ und $pp + zqq$ Quadrate werden können? die erstere nemlich $= rr$, und die andere $= ss$.

Hier wird $p = vv + yy$ und man hat also um z zu finden diese Formel zu betrachten $z = \frac{4vy(v-y)(v+y)}{qq}$, da wir dann für v und y verschiedene Zahlen annehmen und daraus für z die Werthe suchen wollen, wie hier folget:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
v	2	3	4	5	16	8
y	1	2	1	4	9	1
$v - y$	1	1	3	1	7	7
$v + y$	3	5	5	9	25	9
zqq	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 30$	$16 \cdot 15$	$9 \cdot 16 \cdot 5$	$36 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 7$	$16 \cdot 9 \cdot 14$
qq	4	4	16	$9 \cdot 16$	$36 \cdot 25 \cdot 16$	$16 \cdot 9$
z	6	30	15	5	7	14
p	5	13	17	41	337	65

woraus folgende Formeln aufgelöset und zu Quadrate gemacht werden können:

I. Können diese zwey Formeln zu Quadrate gemacht werden $pp - 6qq$ und $pp + 6qq$, welches geschieht, wann $p = 5$ und $q = 2$. Dann da wird die erste $= 25 - 24 = 1$; und die andere $= 25 + 24 = 49$.

II. Können auch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden $pp - 30qq$ und $pp + 30qq$, welches geschieht wann $p = 13$ und $q = 2$; dann da wird die erste $= 169 - 120 = 49$, die andere aber $= 169 + 120 = 289$.

III. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 15qq$ und $pp + 15qq$, welches geschieht wann $p = 17$ und $q = 4$, dann da wird die erste $= 289 - 240 = 49$, und die andere $289 + 240 = 529$.

IV. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden $pp - 5qq$ und $pp + 5qq$, welches geschieht wann $p = 41$ und $q = 12$, dann da wird die erste $1681 - 720 = 961 = 31^2$, die andere aber $1681 + 720 = 2401 = 49^2$.

V. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 7qq$ und $pp + 7qq$, welches geschieht wann $p = 337$ und $q = 120$; dann da wird die erste $113\,569 - 100\,800 = 12\,769 = 113^2$, und die andere $113\,569 + 100\,800 = 214\,369 = 463^2$.

VI. Können auch diese zwey Formeln Quadrate werden, $pp - 14qq$ und $pp + 14qq$, welches geschieht wann $p = 65$ und $q = 12$; dann da wird die erste $4225 - 2016 = 2209 = 47^2$ und die andere $4225 + 2016 = 6241 = 79^2$.

227.

II. Exempel: Wann die beyden Zahlen m und n sich verhalten wie $1:2$, das ist wann $a = 1$ und $b = 2$, also $m = z$ und $n = 2z$, so sollen die Werthe für z gefunden werden, so daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 2zqq$ zu Quadraten gemacht werden können.

Man hat nicht nöthig hier die obigen zu allgemeinen Formeln zu gebrauchen, sondern dieses Exempel kann so gleich auf das vorige gebracht werden. Dann setzt man $pp + zqq = rr$ und $pp + 2zqq = ss$, so bekommt man aus der erstern $pp = rr - zqq$ welcher Werth für pp in der zweyten gesetzt giebt $rr + zqq = ss$; folglich müßen diese zwey Formeln $rr - zqq$ und $rr + zqq$ zu Quadrate gemacht werden können, welches der Fall des vorigen Exempels ist. Also hat man auch hier für z folgende Werthe 6, 30, 15, 5, 7, 14 etc.

Eine solche Verwandelung kann auch allgemein angestellt werden. Wann wir annehmen, daß diese zwey Formeln $pp + mqq$ und $pp + nqq$ zu Quadraten gemacht werden können, so laßt uns setzen $pp + mqq = rr$ und $pp + nqq = ss$, so giebt die erstere $pp = rr - mqq$, und also die zweyte $ss = rr - mqq + nqq$ oder $rr + (n - m)qq = ss$; wann dahero die ersteren Formeln möglich sind, so sind auch diese $rr - mqq$ und $rr + (n - m)qq$ möglich; und da wir m und n unter sich verwechseln können, so sind auch diese möglich $rr - nqq$ und $rr + (m - n)qq$; sind aber jene Formeln unmöglich so sind auch diese unmöglich.

228.

III. Exempel: Es seyen die Zahlen m und n wie $1:3$, oder $a = 1$ und $b = 3$, also $m = z$ und $n = 3z$, so daß diese Formeln $pp + zqq$ und $pp + 3zqq$ zu Quadrate gemacht werden sollen.

Weil hier $a = 1$ und $b = 3$, so wird die Sache möglich so oft

$$zqq = 4vy(v + y)(v + 3y), \quad \text{und} \quad p = vv - 3yy.$$

Man nehme dahero für v und y folgende Werthe:

	I.	II.	III.	IV.	V.
v	1	3	4	1	16
y	1	2	1	8	9
$v + y$	2	5	5	9	25
$v + 3y$	4	9	7	25	43
zqq	$16 \cdot 2$	$4 \cdot 9 \cdot 30$	$4 \cdot 4 \cdot 35$	$4 \cdot 9 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 2$	$4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 43$
qq	16	$4 \cdot 9$	$4 \cdot 4$	$4 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 25$	$4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25$
z	2	30	35	2	43
p	2	3	13	191	13

Hier haben wir nun zwey Fälle für $z = 2$, daraus wir auf zweyerley Art diese Formeln $pp + 2qq$ und $pp + 6qq$ zu Quadraten machen können, erstlich geschieht dieses wann $p = 2$ und $q = 4$, folglich auch wann $p = 1$ und $q = 2$; dann da wird $pp + 2qq = 9$ und $pp + 6qq = 25$. Hernach geschieht es auch wann $p = 191$ und $q = 60$, dann da wird $pp + 2qq = (209)^2$ und $pp + 6qq = (241)^2$. Ob aber nicht auch seyn könnte $z = 1$? welches geschehen würde wann für zqq ein Quadrat herauskäme, ist schwer zu entscheiden. Wollte man nun diese Frage erörtern, ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? so könnte man die Untersuchung auf folgende Art anstellen.

229.

Man soll allso untersuchen ob diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zu Quadraten gemacht werden können oder nicht? Man setze $pp + qq = rr$ und $pp + 3qq = ss$, so sind folgende Puncte zu bedencken:

I. Können die Zahlen p und q als untheilbar unter sich angesehen werden; dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden die Formeln noch Quadrate bleiben, wann p und q dadurch getheilt würde.

II. Kann p keine gerade Zahl seyn; dann da würde q ungerad, und also die zweyte Formel eine Zahl von dieser Art $4n + 3$ seyn, welche kein Quadrat werden kann; dahero ist p nothwendig ungerad, und pp eine Zahl von dieser Art $8n + 1$.

III. Da nun p ungerad ist, so muß aus der ersten Form q nicht nur gerad, sondern so gar durch 4 theilbar seyn, damit qq eine Zahl werde von dieser Art $16n$; und $pp + qq$ von dieser Art $8n + 1$.

IV. Ferner kann p nicht durch 3 theilbar seyn; dann da würde pp sich durch 9 theilen laßen qq aber nicht, folglich $3qq$ nur durch 3, nicht aber durch 9, und also auch $pp + 3qq$ durch 3 nicht aber durch 9, und demnach kein Quadrat seyn; folglich kann die Zahl p nicht durch 3 theilbar seyn, dahero pp von der Art $3n + 1$ seyn wird.

V. Da sich p nicht durch 3 theilen läßt, so muß sich q durch 3 theilen laßen; dann wäre q nicht durch 3 theilbar, so wäre qq eine Zahl von dieser Art $3n + 1$, und dahero $pp + qq$ von dieser Art $3n + 2$, welche kein Quadrat seyn kann: folglich muß q durch 3 theilbar seyn.

VI. Auch kann p nicht durch 5 theilbar seyn; dann wäre dieses, so wäre q nicht durch 5 theilbar und qq eine Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$, also $3qq$ eine Zahl von der Art $5n + 3$ oder $5n + 2$, und von welcher Art auch $pp + 3qq$ seyn würde, also könnte diese Formel kein Quadrat seyn; dahero dann p nothwendig nicht durch 5 theilbar seyn kann, und also pp ein Zahl von der Art $5n + 1$ oder $5n + 4$ seyn muß.

VII. Da nun p nicht durch 5 theilbar ist, so wollen wir sehen, ob sich q durch 5 theilen laße oder nicht? Wäre q nicht theilbar durch 5, so wäre $3qq$ von dieser Art $5n + 2$ oder $5n + 3$, wie wir gesehen haben, und da pp entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$, so würde $pp + 3qq$ seyn entweder $5n + 1$ oder $5n + 4$ eben wie pp; es sey

$pp = 5n + 1$, so müßte seyn $qq = 5n + 4$, weil sonst $pp + qq$ kein Quadrat seyn könnte: alsdann aber wäre $3qq = 5n + 2$, und $pp + 3qq = 5n + 3$, welches kein Quadrat sein kann; wäre aber $pp = 5n + 4$, so müßte seyn $qq = 5n + 1$ und $3qq = 5n + 3$ folglich $pp + 3qq = 5n + 2$, welches auch kein Quadrat seyn kann: woraus folget daß qq durch 5 theibar seyn müße.

VIII. Da nun q erstlich durch 4, hernach durch 3, und drittens auch durch 5 theilbar seyn muß, so muß q eine solche Zahl seyn $4 \cdot 3 \cdot 5m$ oder $q = 60m$; dahero unsere Formeln seyn würden $pp + 3600mm = rr$ und $pp + 10800mm = ss$; da dann die erste von der zweyten subtrahirt giebt $7200mm = ss - rr = (s + r)(s - r)$; also daß $s + r$ und $s - r$ Factores seyn müßen von $7200mm$: wobey zu mercken daß so wohl s als r ungerade Zahlen seyn müßen, und dabey unter sich untheilbar.

IX. Es sey demnach $7200mm = 4fg$ oder die Factores davon $2f$ und $2g$, und man setze $s + r = 2f$ und $s - r = 2g$, so wird $s = f + g$ und $r = f - g$, da dann f und g unter sich untheilbar seyn müßen, und die eine gerad und die andere ungerad. Da nun $fg = 1800mm$, so muß man $1800mm$ in zwey Factores zerlegen, deren einer gerad, der andere aber ungerad sey, beyde aber unter sich keinen gemeinen Theiler haben.

X. Ferner ist auch zu mercken, daß da $rr = pp + qq$ und also r ein Theiler von $pp + qq$, die Zahl $r = f - g$ auch eine Summe von zwey Quadraten seyn, und weil dieselbe ungerad, in der Form $4n + 1$ enthalten seyn müße.

XI. Nehmen wir erstlich an $m = 1$, so wird $fg = 1800 = 8 \cdot 9 \cdot 25$, woraus folgende Zerlegungen entspringen: $f = 1800$ und $g = 1$, oder $f = 200$ und $g = 9$, oder $f = 72$ und $g = 25$, oder $f = 225$ und $g = 8$; aus der ersten wird $r = f - g = 1799 = 4n + 3$; nach der andern würde $r = f - g = 191 = 4n + 3$; nach der dritten würde $r = f - g = 47 = 4n + 3$; nach der vierten aber $r = f - g = 217 = 4n + 1$; dahero die drey ersten wegfallen, und nur die vierte übrig bleibt; woraus man überhaupt schließen kann, daß der größere Factor ungerad, der kleinere aber gerad sein müße; aber hier kann auch der Werth $r = 217$ nicht statt finden, weil sich diese Zahl durch 7 theilen läßt, die keine Summe von zwey Quadraten ist.

XII. Nimmt man $m = 2$, so wird $fg = 7200 = 32 \cdot 225$, daher nimmt man $f = 225$ und $g = 32$, also daß $r = f - g = 193$, welche Zahl wohl eine

Summe von zwey Quadraten ist und also verdienet probirt zu werden: da nun $q = 120$ und $r = 193$, so wird weil $pp = rr - qq = (r+q)\cdot(r-q)$, allso $r + q = 313$ und $r - q = 73$, allso sieht man wohl daß für pp kein Quadrat heraus komme, weil diese Factoren nicht Quadrate sind. Wollte man sich die Mühe geben für m noch andere Zahlen zu nehmen, so würde doch alle Arbeit vergebens seyn, wie wir noch zeigen wollen.

230.

Lehr-Satz. Es ist nicht möglich, daß diese zwey Formeln $pp + qq$ und $pp + 3qq$ zugleich Quadrate werden; oder in den Fällen, da die eine ein Quadrat wird, ist die andere gewis keines.

Welches also bewiesen wird.

Da p ungerad und q gerad ist, wie wir gesehen haben, so kann $pp + qq$ nicht anders ein Quadrat seyn, als wann $q = 2rs$ und $p = rr - ss$; die andere aber $pp + 3qq$ kann nicht anders ein Quadrat seyn, als wann $q = 2tu$ und $p = tt - 3uu$ oder $p = 3uu - tt$. Weil nun in beyden Fällen q ein doppeltes Product seyn muß, so setze man für beyde $q = 2abcd$ und nehme für die erste $r = ab$ und $s = cd$; für die andere aber $t = ac$ und $u = bd$, so wird für die erstere $p = aabb - ccdd$, für die andere aber $p = aacc - 3bbdd$, oder $p = 3bbdd - aacc$, welche beyde Werthe einerley seyn müßen; dahero wir bekommen entweder $aabb - ccdd = aacc - 3bbdd$, oder $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$; wobey zu mercken daß die Zahlen a, b, c und d überhaupt kleiner sind als p und q. Wir müßen also einen jeden dieser beyden Fälle besonders erwegen; aus dem erstern erhalten wir $aabb + 3bbdd = aacc + ccdd$ oder $bb(aa + 3dd) = cc(aa + dd)$, daraus wird $\frac{bb}{cc} = \frac{aa+dd}{aa+3dd}$, welcher Bruch ein Quadrat sein muß. Hier kann aber der Zehler und Nenner keinen andern gemeinen Theiler haben als 2, weil die Differenz darzwischen $2dd$ ist. Sollte dahero 2 ein gemeiner Theiler seyn, so müßte so wohl $\frac{aa+dd}{2}$ als auch $\frac{aa+3dd}{2}$ ein Quadrat seyn, beyde Zahlen aber a und d sind in diesem Fall ungerad und also ihre Quadrate von der Form $8n + 1$, dahero die letztere Formel $\frac{aa+3dd}{2}$ diese Form $4n + 2$ haben wird und kein Quadrat seyn kann; folglich kann 2 kein gemeiner Theiler seyn, sondern der Zehler $aa + dd$ und der Nenner $aa + 3dd$ sind unter sich untheilbar; dahero ein jeder für sich ein Quadrat seyn muß. Weil nun diese Formeln den ersten ähnlich sind, so folgt, daß wann die ersten Quadrate wären, auch in kleinern Zahlen gleiche Formeln Quadrate seyn würden, und so könnte man immer auf kleinere Zahlen kommen. Da es nun in kleinern Zahlen dergleichen nicht giebt, so kann es auch nicht in den größten Zahlen dergleichen geben.

Dieser Schluß ist aber nur in so fern richtig, als auch der obige zweyte Fall $aabb - ccdd = 3bbdd - aacc$ auf dergleichen führt; hieraus aber wird $aabb + aacc = 3bbdd + ccdd$, oder $aa(bb + cc) = dd(3bb + cc)$, und dahero $\frac{aa}{dd} = \frac{bb + cc}{3bb + cc} = \frac{cc + bb}{cc + 3bb}$, welcher Bruch ein Quadrat sein muß, allso daß dadurch der vorige Schluß vollkommen bestätiget wird; indem wann es in den größten Zahlen solche Fälle gäbe, da $pp + qq$ und $pp + 3qq$ Quadrate wären, auch dergleichen in den kleinsten Zahlen vorhanden seyn müßten, welches doch nicht statt findet.

231.

XII. Frage: Man soll drey solche Zahlen finden x, y und z, so daß wann je zwey mit einander multiplicirt werden und zum Product 1 addirt wird, ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also diese drey Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\ xy + 1; \qquad \text{II.)}\ xz + 1; \qquad \text{III.)}\ yz + 1.$$

Man setze vor die beyden letztern $xz + 1 = pp$ und $yz + 1 = qq$, so findet man daraus $x = \frac{pp - 1}{z}$ und $y = \frac{qq - 1}{z}$, woraus die erste Formel wird $\frac{(pp-1)(qq-1)}{zz} + 1$, welche ein Quadrat seyn soll, und also auch mit zz multiplicirt, das ist $(pp - 1)(qq - 1) + zz$, welche leicht dazu gemacht werden kann. Dann setzt man die Wurzel davon $= z + r$, so bekommt man

$$(pp - 1)(qq - 1) = 2rz + rr, \quad \text{und dahero} \quad z = \frac{(pp-1)(qq-1) - rr}{2r}$$

wo für p, q und r beliebige Zahlen angenommen werden können.

Es sey z. E. $r = -pq - 1$, so wird $rr = ppqq + 2pq + 1$ und

$$z = \frac{-2pq - pp - qq}{-2pq - 2} = \frac{pp + 2pq + qq}{2pq + 2},$$

folglich

$$x = \frac{(pp-1)(2pq+2)}{pp + 2pq + qq} = \frac{2(pq+1)(pp-1)}{(p+q)^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{2(pq+1)(qq-1)}{(p+q)^2}.$$

Will man aber gantze Zahlen haben, so setze man für die erste Formel $xy + 1 = pp$ und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte Formel

$$xx + xy + xq + 1 = xx + qx + pp,$$

die dritte aber wird

$$xy + yy + qy + 1 = yy + qy + pp,$$

welche offenbar Quadrate werden, wann man nimmt $q = \pm 2p$; dann da wird die zweyte $xx \pm 2px + pp$ davon die Wurzel ist $x \pm p$, die dritte aber wird $yy \pm 2py + pp$ davon die Wurzel ist $y \pm p$; dahero haben wir diese sehr nette Auflösung: $xy + 1 = pp$ oder $xy = pp - 1$, welches für eine jede Zahl, so für p angenommen wird, leicht geschehen kann; und hernach ist die dritte Zahl auf eine doppelte Art entweder $z = x + y + 2p$ oder $z = x + y - 2p$, welches wir durch folgende Exempel erläutern wollen:

I. Man nehme $p = 3$, so wird $pp - 1 = 8$; nun setze man $x = 2$ und $y = 4$, so wird entweder $z = 12$ oder $z = 0$: und also sind die drey gesuchten Zahlen 2, 4 und 12.

II. Es sey $p = 4$, so wird $pp - 1 = 15$; nun nehme man $x = 5$ und $y = 3$, so wird $z = 16$ oder $z = 0$: und sind die drey gesuchten Zahlen 3, 5 und 16.

III. Es sey $p = 5$, so wird $pp - 1 = 24$; nun nehme man $x = 3$ und $y = 8$, so wird $z = 21$, oder auch $z = 1$: woraus folgende Zahlen entspringen, entweder 1, 3 und 8, oder 3, 8 und 21.

232.

XIII. Frage: Man suche drey gantze Zahlen x, y und z, so daß wann zu dem Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedes mahl ein Quadrat heraus komme?

Es müßen also diese drey Formeln Quadrate werden:

$$\text{I.)}\ xy + a; \qquad \text{II.)}\ xz + a; \qquad \text{III.)}\ yz + a.$$

Nun setze man für die erste $xy + a = pp$, und nehme $z = x + y + q$, so wird die zweyte $xx + xy + xq + a = xx + qx + pp$ und die dritte $xy + yy + yq + a = yy + qy + pp$, welche beyde Quadrate werden, wann $q = \pm 2p$; also daß $z = x + y \pm 2p$, und dahero für z zwey Werthe gefunden werden können.

233.

XIV. Frage: Man verlangt vier gantze Zahlen x, y, z und v, so daß wann zum Product aus je zweyen eine gegebene Zahl a addirt wird, jedesmahl ein Quadrat herauskomme?

Es müßen also folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\ xy + a; \quad \text{II.)}\ xz + a; \quad \text{III.)}\ yz + a;$$
$$\text{IV.)}\ xv + a; \quad \text{V.)}\ yv + a; \quad \text{VI.)}\ zv + a.$$

Nun setze man vor die erste $xy + a = pp$ und nehme $z = x + y + 2p$, so wird die zweyte und dritte Formel ein Quadrat. Ferner nehme man $v = x + y - 2p$, so wird auch die vierte und die fünfte ein Quadrat, und bleibt also nur noch die sechste übrig, welche seyn wird $xx + 2xy + yy - 4pp + a$, welche ein Quadrat seyn muß. Da nun $pp = xy + a$, so wird diese letzte Formel $xx - 2xy + yy - 3a$, folglich müßen noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\ xy + a = pp \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ (x - y)^2 - 3a.$$

Von der letztern sey die Wurzel $(x - y) - q$, so wird

$$(x - y)^2 - 3a = (x - y)^2 - 2q(x - y) + qq,$$

und da wird $-3a = -2q(x - y) + qq$ und folglich $x - y = \frac{qq + 3a}{2q}$ oder $x = y + \frac{qq + 3a}{2q}$; hieraus wird $pp = yy + \frac{qq + 3a}{2q}y + a$. Man nehme $p = y + r$, so wird $2ry + rr = \frac{qq + 3a}{2q}y + a$, oder $4qry + 2qrr = (qq + 3a)y + 2aq$, oder $2qrr - 2aq = (qq + 3a)y - 4qry$ und $y = \frac{2qrr - 2aq}{qq + 3a - 4qr}$, wo q und r nach Belieben angenommen werden können, und es also nur darauf ankommt, daß vor x und y gantze Zahlen herauskommen. Dann weil $p = y + r$ so werden auch z und v gantz seyn. Hier kommt es aber hauptsächlich auf die Beschaffenheit der gegebenen Zahl a an, wo die Sache mit den gantzen Zahlen noch einige Schwierigkeiten haben könnte; allein es ist zu bemercken, daß diese Auflösung schon dadurch sehr eingeschränckt worden, daß den Buchstaben z und v die Werthe $x + y \pm 2p$ gegeben worden, indem dieselben nothwendig noch viel andere haben könnten. Wir wollen zu diesem Ende über diese Frage folgende Betrachtungen anstellen, welche auch in andern Fällen ihren Nutzen haben können.

I. Wann $xy + a$ ein Quadrat seyn soll und also $xy = pp - a$, so müßen die Zahlen x und y immer in dieser ähnlichen Form $rr - ass$ enthalten seyn; wann wir demnach setzen $x = bb - acc$ und $y = dd - aee$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a(be - cd)^2$. Ist nun $be - cd = \pm 1$, so wird $xy = (bd - ace)^2 - a$, und also $xy + a = (bd - ace)^2$.

II. Setzen wir nun ferner $z = ff - agg$ und nehmen die Zahlen f und g allso an, daß $bg - cf = \pm 1$ und auch $dg - ef = \pm 1$, so werden auch diese Formeln $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Es kommt also nur darauf an, solche Zahlen für b, c und d, e und auch für f und g zu finden, daß die obige Eigenschaft erfüllt werde.

III. Wir wollen diese drey Paar Buchstaben durch diese Brüche vorstellen $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, welche demnach also beschaffen seyn müßen, daß die Differenz zwischen je zweyen durch einen Bruch ausgedrückt werde, dessen Zehler $= 1$. Dann da $\frac{b}{c} - \frac{d}{e} = \frac{be - dc}{ce}$ so muß dessen Zehler, wie wir gesehen haben, allerdings ± 1 seyn. Man kann hier einen von diesen Brüchen nach Belieben annehmen, und leicht einen andern dazu finden, so daß die gemeldte Bedingung statt finde.

Es sey z. E. der erste $\frac{b}{c} = \frac{3}{2}$, so muß der zweyte $\frac{d}{e}$ diesem beynahe gleich seyn. Es sey $\frac{d}{e} = \frac{4}{3}$, so wird die Differenz $z = \frac{1}{6}$. Man kann auch diesen zweyten Bruch aus dem ersten auf eine allgemeine Art bestimmen; dann da $\frac{3}{2} - \frac{d}{e} = \frac{3e - 2d}{2e}$, so muß seyn $3e - 2d = 1$, also $2d = 3e - 1$ und $d = e + \frac{e-1}{2}$. Man nehme dahero $\frac{e-1}{2} = m$ oder $e = 2m + 1$, so bekommen wir $d = 3m + 1$ und unser zweyter Bruch wird seyn $\frac{d}{e} = \frac{3m+1}{2m+1}$. Eben so kann auch zu einem jeglichen ersten Bruch der zweyte gefunden werden, wovon wir folgende Exempel beyfügen wollen.

$\frac{b}{c} =$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{11}{4}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{17}{7}$
$\frac{d}{e} =$	$\frac{3m+1}{2m+1}$	$\frac{5m+2}{3m+1}$	$\frac{7m+2}{3m+1}$	$\frac{8m+3}{5m+2}$	$\frac{11m+3}{4m+1}$	$\frac{13m+5}{8m+3}$	$\frac{17m+5}{7m+2}$

IV. Hat man zwey solche Brüche für $\frac{b}{c}$ und $\frac{d}{e}$ gefunden, so ist es gantz leicht dazu einen dritten $\frac{f}{g}$ zu finden, welcher mit den beyden erstern in gleicher Verhältniß steht. Man darf nur setzen $f = b + d$ und $g = c + e$, also daß $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, dann da aus den zwey ersten ist $be - cd = \pm 1$ so wird $\frac{f}{g} - \frac{b}{c} = \frac{\pm 1}{cc + ce}$. Eben so wird auch der zweyte weniger den dritten $\frac{f}{g} - \frac{d}{e} = \frac{be - cd}{ee + ce} = \frac{\pm 1}{ce + ee}$.

V. Hat man nun drey solche Brüche gefunden $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$ und $\frac{f}{g}$, so kann man daraus so gleich unsere Frage für drey Zahlen x, y und z auflösen, also daß diese drey Formeln $xy + a$, $xz + a$ und $yz + a$ Quadrate werden. Dann man darf nur setzen $x = bb - acc$, $y = dd - aee$ und $z = ff - agg$. Man nehme z. E. aus der obigen Tafel $\frac{b}{c} = \frac{5}{3}$ und $\frac{d}{e} = \frac{7}{4}$, so wird $\frac{f}{g} = \frac{12}{7}$; woraus man erhält $x = 25 - 9a$, $y = 49 - 16a$ und $z = 144 - 49a$; dann da wird

$$xy + a = 1225 - 840a + 144aa = (35 - 12a)^2,$$

ferner wird

$$xz + a = 3600 - 2520a + 441aa = (60 - 21a)^2,$$

und

$$yz + a = 7056 - 4704a + 784aa = (84 - 28a)^2.$$

234.

Sollen aber nach dem Inhalt der Frage vier dergleichen Zahlen x, y, z und v gefunden werden, so muß man zu den drey obigen Brüchen noch einen vierten hinzufügen. Es seyen demnach die drey erstere $\frac{b}{c}$, $\frac{d}{e}$, $\frac{f}{g} = \frac{b+d}{c+e}$, und man setze den vierten Bruch $\frac{h}{k} = \frac{d+f}{e+g} = \frac{2d+b}{2e+c}$, so daß er mit dem zweyten und dritten in dem gehörigen Verhältniß stehe; wann man nun nimmt

$$x = bb - acc; \quad y = dd - aee; \quad z = ff - agg \quad \text{und} \quad v = hh - akk,$$

so werden schon folgende Bedingungen erfüllt:

$$\text{I.)}\ xy + a = \Box\,{}^{*)}; \quad \text{II.)}\ xz + a = \Box; \quad \text{III.)}\ yz + a = \Box;$$
$$\text{IV.}\ yv + a = \Box; \quad \text{V.}\ zv + a = \Box;$$

es ist also nur noch übrig, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde, welches von selbsten nicht geschieht, weil der erste Bruch mit dem vierten nicht in dem gehörigen Verhältniß steht. Es ist demnach nöthig in den drey ersten Brüchen noch die unbestimmte Zahl m beyzubehalten, und dieselbe also zu bestimmen, daß auch $xv + a$ ein Quadrat werde.

*) $\Box$ deutet hier allenthalben eine Quadrat-Zahl an.

VI. Man nehme demnach aus obiger Tabelle den ersten Fall und setze $\frac{b}{c}=\frac{3}{2}$ und $\frac{d}{e}=\frac{3m+1}{2m+1}$, so wird $\frac{f}{g}=\frac{3m+4}{2m+3}$ und $\frac{h}{k}=\frac{6m+5}{4m+4}$. Hieraus wird $x=9-4a$ und $v=(6m+5)^2-a(4m+4)^2$ also

$$xv+a=9(6m+5)^2-4a(6m+5)^2-9a(4m+4)^2+4aa(4m+4)^2$$

oder

$$xv+a=9(6m+5)^2-a(288mm+528m+244)+4aa(4m+4)^2,$$

welche leicht zu einem Quadrat gemacht werden kann, weil mm mit einem Quadrat multiplicirt ist; wobei wir uns aber nicht aufhalten wollen.

VII. Man kann auch solche Brüche dergleichen nöthig sind auf eine allgemeinere Art anzeigen: dann es sey

$$\frac{b}{c}=\frac{I}{1},\ \frac{d}{e}=\frac{nI-1}{n};\ \text{so wird}\ \frac{f}{g}=\frac{nI+I-1}{n+1}\ \text{und}\ \frac{h}{k}=\frac{2nI+I-2}{2n+1};$$

man setze in dem letzten $2n+1=m$, so wird derselbe $\frac{Im-2}{m}$, folglich aus dem ersten $x=II-a$ und aus dem letzten $v=(Im-2)^2-amm$. Allso ist nur noch übrig, daß $xv+a$ ein Quadrat werde. Da nun $v=(II-a)mm-4Im+4$ und also

$$xv+a=(II-a)^2mm-4(II-a)Im+4II-3a,$$

welches ein Quadrat seyn muß; davon setze man nun die Wurzel

$$(II-a)m-p,\ \text{wovon das Quadrat}\ (II-a)^2mm-2(II-a)mp+pp,$$

woraus wir erhalten,

$$-4(II-a)Im+4II-3a=-2(II-a)mp+pp\ \text{und}\ m=\frac{pp-4II+3a}{(II-a)(2p-4I)}.$$

Man nehme $p=2I+q$, so wird $m=\frac{4Iq+qq+3a}{2q(II-a)}$, wo für I und q beliebige Zahlen genommen werden können.

Wäre z. E. $a=1$ so nehme man $I=2$, da wird $m=\frac{4q+qq+3}{6q}$: setzt man $q=1$ so wird $m=\frac{4}{3}$ und $m=2n+1$; wir wollen aber hierbey nicht weiter stehen bleiben, sondern zur folgenden Frage fortschreiten.[1])

1) Hier liegt ein Versehen EULERS vor. Für $I=2$ ergiebt sich $m=\frac{8q+qq+3}{6q}$, was für $q=1$ zu $m=2$ führt. Dann aber wird $v=0$. H. W.

235.

XV. Frage: Man verlangt drey solche Zahlen x, y und z, daß so wohl die Summe als die Differenz von je zweyen ein Quadrat werde?

Es müßen also die folgende sechs Formeln zu Quadraten gemacht werden:

$$\text{I.)}\ x+y;\qquad \text{II.)}\ x+z;\qquad \text{III.)}\ y+z;$$
$$\text{IV.)}\ x-y;\qquad \text{V.)}\ x-z;\qquad \text{VI.)}\ y-z.$$

Man fange bey den drey letzten an, und setze $x-y=pp$, $x-z=qq$ und $y-z=rr$, so bekommen wir aus den beyden letzten

$$x=qq+z \quad \text{und} \quad y=rr+z,$$

dahero die erstere giebt $x-y=qq-rr=pp$, oder $qq=pp+rr$, also daß die Summe der Quadraten $pp+rr$ ein Quadrat seyn muß, nemlich qq, welches geschieht wann $p=2ab$ und $r=aa-bb$, dann da wird $q=aa+bb$. Wir wollen aber inzwischen die Buchstaben p, q und r beybehalten und die drey erstern Formeln betrachten, da dann erstlich $x+y=qq+rr+2z$; zweytens $x+z=qq+2z$; drittens $y+z=rr+2z$. Man setze für die erstere

$$qq+rr+2z=tt, \quad \text{so ist} \quad 2z=tt-qq-rr;$$

dahero dann noch diese zwey Formeln zu Quadraten gemacht werden müßen $tt-rr=\square$ und $tt-qq=\square$, das ist

$$tt-(aa-bb)^2=\square \quad \text{und} \quad tt-(aa+bb)^2=\square,$$

welche diese Gestalten annehmen,

$$tt-a^4-b^4+2aabb \quad \text{und} \quad tt-a^4-b^4-2aabb;$$

weil nun so wohl $cc+dd+2cd$ als $cc+dd-2cd$ ein Quadrat ist, so sieht man daß wir unsern Endzweck erreichen, wann wir $tt-a^4-b^4$ mit $cc+dd$ und $2aabb$ mit $2cd$ vergleichen. Um dieses zu bewerckstelligen, so laßet uns setzen $cd=aabb=ffgghhkk$ und nehmen $c=ffgg$ und $d=hhkk$; $aa=ffhh$ und $bb=ggkk$ oder $a=fh$ und $b=gk$, woraus die erstere Gleichung

$$tt-a^4-b^4=cc+dd$$

diese Form erhält

$$tt-f^4h^4-g^4k^4=f^4g^4+h^4k^4 \quad \text{und also} \quad tt=f^4g^4+f^4h^4+h^4k^4+g^4k^4,$$

das ist $tt = (f^4 + k^4)(g^4 + h^4)$ welches Product also ein Quadrat seyn muß, davon aber die Auflösung schwer fallen dürfte.

Wir wollen dahero die Sache auf eine andere Art angreiffen, und aus den drey erstern Gleichungen $x - y = pp$; $x - z = qq$; $y - z = rr$ die Buchstaben y und z bestimmen, welche seyn werden $y = x - pp$ und $z = x - qq$, also daß $qq = pp + rr$. Nun werden die ersten Formeln

$$x + y = 2x - pp, \quad x + z = 2x - qq;$$

und

$$y + z = 2x - pp - qq;$$

vor diese letzte setze man $2x - pp - qq = tt$, also daß $2x = tt + pp + qq$ und nur noch diese Formeln $tt + qq$ und $tt + pp$ übrig bleiben, welche zu Quadraten gemacht werden müssen. Da nun aber seyn muß $qq = pp + rr$, so setze man $q = aa + bb$, und $p = aa - bb$, so wird $r = 2ab$; woraus unsere Formeln seyn werden:

$$\text{I.)}\quad tt + (aa + bb)^2 = tt + a^4 + b^4 + 2aabb = \square$$

$$\text{II.)}\quad tt + (aa - bb)^2 = tt + a^4 + b^4 - 2aabb = \square.$$

Vergleichen wir nun hier wiederum $tt + a^4 + b^4$ mit $cc + dd$, und $2aabb$ mit $2cd$, so erreichen wir unsern Endzweck: wir setzen demnach wie oben $c = ffgg$, $d = hhkk$ und $a = fh$, $b = gk$; so wird $cd = aabb$, und muß noch seyn $tt + f^4h^4 + g^4k^4 = cc + dd = f^4g^4 + h^4k^4$; woraus folget

$$tt = f^4g^4 - f^4h^4 + h^4k^4 - g^4k^4 = (f^4 - k^4)(g^4 - h^4).$$

Die Sache kommt also darauf an, daß zwey Differenzen zwischen zweyen Biquadraten gefunden werden, als $f^4 - k^4$ und $g^4 - h^4$, welche mit einander multiplicirt ein Quadrat machen.

Wir wollen zu diesem End die Formel $m^4 - n^4$ betrachten und zusehen was für Zahlen daraus entspringen, wann für m und n gegebene Zahlen genommen werden, und dabey die Quadraten, so darinnen enthalten sind, besonders bemercken. Weil nun $m^4 - n^4 = (mm - nn)(mm + nn)$, so wollen wir daraus folgendes Täfelgen machen.

Tabelle

für die Zahlen welche in der Form $m^4 - n^4$ enthalten sind

mm	nn	$mm - nn$	$mm + nn$	$m^4 - n^4$
4	1	3	5	$3 \cdot 5$
9	1	8	10	$16 \cdot 5$
9	4	5	13	$5 \cdot 13$
16	1	15	17	$3 \cdot 5 \cdot 17$
16	9	7	25	$25 \cdot 7$
25	1	24	26	$16 \cdot 3 \cdot 13$
25	9	16	34	$16 \cdot 2 \cdot 17$
49	1	48	50	$25 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 3$
49	16	33	65	$3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$
64	1	63	65	$9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
81	49	32	130	$64 \cdot 5 \cdot 13$
121	4	117	125	$25 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 13$
121	9	112	130	$16 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
121	49	72	170	$144 \cdot 5 \cdot 17$
144	25	119	169	$169 \cdot 7 \cdot 17$
169	1	168	170	$16 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$
169	81	88	250	$25 \cdot 16 \cdot 5 \cdot 11$
225	64	161	289	$289 \cdot 7 \cdot 23$

Hieraus können wir schon einige Auflösungen geben: man nehme nemlich $ff = 9$ und $kk = 4$, so wird $f^4 - k^4 = 13 \cdot 5$: ferner nehme man $gg = 81$, und $hh = 49$, so wird $g^4 - h^4 = 64 \cdot 5 \cdot 13$, woraus $tt = 64 \cdot 25 \cdot 169$; folglich $t = 520$. Da nun $tt = 270400$; $f = 3$; $g = 9$; $k = 2$; $h = 7$, so bekommen wir $a = 21$; $b = 18$; hieraus $p = 117$, $q = 765$ und $r = 756$; daraus findet man

$$2x = tt + pp + qq = 869314 \quad \text{und also} \quad x = 434657;$$

dahero ferner $y = x - pp = 420968$; und endlich $z = x - qq = -150568$, welche Zahl auch positiv genommen werden kann, weil alsdann die Summe in der Differenz und umgekehrt die Differenz in der Summe verwandelt werden; folglich sind unsere drey gesuchten Zahlen:

$$\begin{aligned}
x &= 434657\\
y &= 420968\\
z &= 150568
\end{aligned}$$

dahero wird

$$\begin{aligned}
x+y &= 855625 = (925)^2\\
x+z &= 585225 = (765)^2\\
y+z &= 571536 = (756)^2
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
x-y &= 13689 = (117)^2\\
x-z &= 284089 = (533)^2\\
y-z &= 270400 = (520)^2
\end{aligned}$$

Noch andere Zahlen können gefunden werden aus der obigen Tabelle, wann wir setzen $ff = 9$, $kk = 4$ und $gg = 121$, $hh = 4$; dann daraus wird $tt = 13 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 25 = 9 \cdot 25 \cdot 25 \cdot 169$, also daß $t = 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13 = 975$. Weil nun $f = 3$, $g = 11$, $k = 2$ und $h = 2$, so wird $a = fh = 6$ und $b = gk = 22$, hieraus wird $p = aa - bb = -448$, $q = aa + bb = 520$ und $r = 2ab = 264$, daher bekommen wir

$$2x = tt + pp + qq = 950625 + 200704 + 270400 = 1421729,$$

dahero $x = \frac{1421729}{2}$, daraus $y = x - pp = \frac{1020321}{2}$ und $z = x - qq = \frac{880929}{2}$. Nun ist zu mercken, daß wann diese Zahlen die gesuchte Eigenschaft haben, eben dieselben durch ein jegliches Quadrat multiplicirt, diese nemliche Eigenschaft behalten müßen. Man nehme also die gefundenen Zahlen viermal größer, so werden die drey folgenden gleichfalls ein genüge leisten:

$$x = 2843458, \quad y = 2040642 \quad \text{und} \quad z = 1761858,$$

welche größer sind als die vorhergehenden; also daß jene für die kleinsten möglichen gehalten werden können.

236.

XVI. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen, so daß die Differenz zwischen je zweyen ein Quadrat werde?

Die vorige Auflösung dienet uns auch um diese aufzulösen. Dann wann x, y und z solche Zahlen sind, daß diese Formeln Quadrate werden

I.) $x+y$; III.) $x+z$; V.) $y+z$;
II.) $x-y$; IV.) $x-z$; VI.) $y-z$;

so wird auch das Product aus der ersten und zweyten $xx - yy$ ein Quadrat, ingleichen auch das Product von der dritten und vierten $xx - zz$, und endlich auch das Product aus der fünften und sechsten $yy - zz$ ein Quadrat seyn, dahero die drey hier gesuchten Quadrate seyn werden xx, yy, zz. Allein diese Zahlen werden sehr groß, und es giebt ohne Zweiffel weit kleinere, weil es eben nicht nöthig ist, daß um $xx - yy$ zu einem Quadrat zu machen, auch $x + y$ und $x - y$ ein jedes besonders ein Quadrat seyn müße, indem z. E. $25 - 9$ ein Quadrat ist, da doch weder $5 + 3$ noch $5 - 3$ ein Quadrat ist. Wir wollen also diese Frage besonders auflösen und zuerst bemercken, daß für das eine Quadrat 1 gesetzt werden kann. Dann wann $xx - yy$, $xx - zz$ und $yy - zz$ Quadrate sind, so bleiben dieselben auch Quadrate, wann sie durch zz dividirt werden; dahero diese Formeln zu Quadraten gemacht werden müßen $\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \square$, $\frac{xx}{zz} - 1 = \square$, und $\frac{yy}{zz} - 1 = \square$. Allso kommt die Sache nur auf diese zwey Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ an; nimmt man nun

$$\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1},$$

so werden die zwey letzere Bedingungen erfüllt; dann da wird

$$\frac{xx}{zz} - 1 = \frac{4pp}{(pp-1)^2} \quad \text{und} \quad \frac{yy}{zz} - 1 = \frac{4qq}{(qq-1)^2}.$$

Es ist also nur noch übrig die erste Formel zu einem Quadrat zu machen, welche ist

$$\frac{xx}{zz} - \frac{yy}{zz} = \frac{(pp+1)^2}{(pp-1)^2} - \frac{(qq+1)^2}{(qq-1)^2} = \left(\frac{pp+1}{pp-1} + \frac{qq+1}{qq-1}\right)\left(\frac{pp+1}{pp-1} - \frac{qq+1}{qq-1}\right).$$

Hier wird nun der erste Factor $= \frac{2(ppqq-1)}{(pp-1)(qq-1)}$, der andere aber $= \frac{2(qq-pp)}{(pp-1)(qq-1)}$, wovon das Product ist $\frac{4(ppqq-1)(qq-pp)}{(pp-1)^2(qq-1)^2}$. Weil nun der Nenner schon ein Quadrat und der Zehler mit dem Quadrat 4 multiplicirt ist, so ist noch nöthig diese Formel zu einem Quadrat zu machen $(ppqq-1)(qq-pp)$, oder auch diese $(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp} - 1\right)$; welches geschieht wann genommen wird

$$pq = \frac{ff+gg}{2fg} \quad \text{und} \quad \frac{q}{p} = \frac{hh+kk}{2hk},$$

da dann ein jeder Factor besonders ein Quadrat wird. Hieraus ist nun

$$qq = \frac{ff+gg}{2fg} \cdot \frac{hh+kk}{2hk};$$

folglich müßen diese zwey Brüche mit einander multiplicirt ein Quadrat ausmachen, und allso auch wann dieselben mit $4ffgg \cdot hhkk$ multiplicirt werden, das ist $fg(ff+gg)hk(hh+kk)$; welche Formel derjenigen, so im vorigen gefunden worden, vollkommen ähnlich wird, wann man setzt

$$f = a+b, \qquad g = a-b, \qquad h = c+d \quad \text{und} \quad k = c-d;$$

dann da kommt $2(a^4-b^4)\cdot 2(c^4-d^4) = 4(a^4-b^4)(c^4-d^4)$, welches, wie wir gesehen haben geschieht, wann $aa = 9$, $bb = 4$, $cc = 81$ und $dd = 49$, oder $a = 3$, $b = 2$, $c = 9$ und $d = 7$. Hieraus wird $f = 5$, $g = 1$, $h = 16$ und $k = 2$, und dahero $pq = \frac{13}{5}$ und $\frac{q}{p} = \frac{260}{64} = \frac{65}{16}$; diese zwey Gleichungen mit einander multiplicirt geben $qq = \frac{65\cdot 13}{16\cdot 5} = \frac{13\cdot 13}{16}$, folglich $q = \frac{13}{4}$, dahero wird $p = \frac{4}{5}$; dadurch bekommen wir $\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} = -\frac{41}{9}$ und $\frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1} = \frac{185}{153}$. Da nun $x = -\frac{41z}{9}$ und $y = \frac{185z}{153}$, so nehme man um gantze Zahlen zu bekommen $z = 153$, da wird $x = -697$ und $y = 185$, folglich sind die drey gesuchten Quadrat-Zahlen folgende:

$$\begin{array}{lll} xx = 485809 & \text{dann da wird} & xx - yy = 451584 = (672)^2 \\ yy = 34225 & & yy - zz = 10816 = (104)^2 \\ zz = 23409 & & xx - zz = 462400 = (680)^2 \end{array}$$

welche Quadrate viel kleiner sind, als wann wir von den in der vorigen Frage gefundenen drey Zahlen x, y und z die Quadrate hätten nehmen wollen.

237.

Man wird hier einwenden, daß diese Auflösung durch ein bloßes Probiren gefunden worden, indem uns dazu die obige Tabelle behülflich gewesen. Wir haben uns aber dieses Mittels nur bedienet, um die kleinste Auflösung zu finden; wollte man aber darauf nicht sehen, so können durch Hülfe der oben gegebenen Regeln unendlich viele Auflösungen gegeben werden. Da es nemlich bey der letztern Frage darauf ankommt, daß dieses Product

$$(ppqq-1)\left(\frac{qq}{pp}-1\right)$$

zu einem Quadrat gemacht werde, weil alsdann sein wird

$$\frac{x}{z} = \frac{pp+1}{pp-1} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z} = \frac{qq+1}{qq-1},$$

so setze man $\frac{q}{p} = m$ oder $q = mp$, da dann unsere Formel seyn wird $(mmp^4 - 1)(mm - 1)$, welche offenbar ein Quadrat wird wann $p = 1$; und dieser Werth wird uns auf andere führen, wann wir setzen $p = 1 + s$, alsdann aber muß diese Formel ein Quadrat seyn

$$(mm - 1) \cdot (mm - 1 + 4mms + 6mmss + 4mms^3 + mms^4)$$

und also auch wann dieselbe durch das Quadrat $(mm - 1)^2$ dividirt wird, da dann herauskommt

$$1 + \frac{4mms}{mm-1} + \frac{6mmss}{mm-1} + \frac{4mms^3}{mm-1} + \frac{mms^4}{mm-1}.$$

Man setze hier der Kürtze halber $\frac{mm}{mm-1} = a$, also daß diese Formel $1 + 4as + 6ass + 4as^3 + as^4$ ein Quadrat werden soll. Es sey die Wurzel davon $1 + fs + gss$ deren Quadrat ist $1 + 2fs + 2gss + ffss + 2fgs^3 + ggs^4$, und man bestimme f und g also, daß die drey ersten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $4a = 2f$ oder $f = 2a$, und $6a = 2g + ff$, folglich $g = \frac{6a - ff}{2} = 3a - 2aa$, so geben die zwey letzten Glieder diese Gleichung $4a + as = 2fg + ggs$, woraus gefunden wird

$$s = \frac{4a - 2fg}{gg - a} = \frac{4a - 12aa + 8a^3}{4a^4 - 12a^3 + 9aa - a}, \quad \text{das ist} \quad s = \frac{4 - 12a + 8aa}{4a^3 - 12aa + 9a - 1},$$

welcher Bruch durch $a - 1$ abgekürtzt giebt $\frac{4(2a-1)}{4aa - 8a + 1}$. Dieser Werth giebt uns schon unendlich viel Auflösungen weil die Zahl m, daraus hernach $a = \frac{mm}{mm-1}$ entstanden, nach Belieben genommen werden kann, welches durch einige Exempel zu erläutern nöthig ist.

I. Es sey $m = 2$, so wird $a = \frac{4}{3}$ und dahero $s = 4 \cdot \frac{\frac{5}{3}}{-\frac{23}{9}} = -\frac{60}{23}$ und hieraus $p = -\frac{37}{23}$, folglich $q = -\frac{74}{23}$; endlich $\frac{x}{z} = \frac{949}{420}$ und $\frac{y}{z} = \frac{6005}{4947}$.

II. Es sey $m = \frac{3}{2}$, so wird $a = \frac{9}{5}$ und $s = 4 \cdot \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{11}{24}} = -\frac{260}{11}$, dahero $p = -\frac{249}{11}$ und $q = -\frac{747}{22}$, woraus die Brüche $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ gefunden werden können.

Ein besonderer Fall verdient noch bemerckt zu werden, wann a ein Quadrat ist, wie geschieht wann $m = \frac{5}{3}$, dann da wird $a = \frac{25}{16}$. Man setze wieder der Kürtze halben $a = bb$, also daß unsere Formel seyn wird $1 + 4bbs + 6bbss + 4bbs^3 + bbs^4$; davon sey die Wurzel $1 + 2bbs + bss$, deren

Quadrat ist $1+4bbs+2bss+4b^4ss+4b^3s^3+bbs^4$, wo sich die zwey ersten und die letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch ss dividirt geben $6bb+4bbs=2b+4b^4+4b^3s$, daraus

$$s=\frac{6bb-2b-4b^4}{4b^3-4bb}=\frac{3b-1-2b^3}{2bb-2b};$$

welcher Bruch noch durch $b-1$ abgekürtzt werden kann, da dann kommt

$$s=\frac{1-2b-2bb}{2b} \quad \text{und} \quad p=\frac{1-2bb}{2b}.$$

Man hätte die Wurzel dieser obigen Formel auch setzen können $1+2bs+bss$, davon das Quadrat ist $1+4bs+2bss+4bbss+4bbs^3+bbs^4$, wo sich die ersten und zwey letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch s dividirt geben $4bb+6bbs=4b+2bs+4bbs$. Da nun $bb=\frac{25}{16}$ und $b=\frac{5}{4}$, so bekäme man daraus $s=-2$ und $p=-1$, folglich $pp-1=0$: woraus nichts gefunden wird, weil $z=0$ würde.

Im vorigen Fall aber, da $p=\frac{1-2bb}{2b}$, wann $m=\frac{5}{3}$ und dahero $a=\frac{25}{16}=bb$, folglich $b=\frac{5}{4}$, so kommt $p=-\frac{17}{20}$ und $q=mp=-\frac{17}{12}$, folglich $\frac{x}{z}=\frac{689}{111}$ und $\frac{y}{z}=\frac{433}{145}$.

238.

XVII. Frage: Man verlangt drey Quadrat-Zahlen xx, yy und zz, so daß die Summe von je zweyen wieder ein Quadrat ausmache?

Da nun diese drey Formeln $xx+yy$, $xx+zz$ und $yy+zz$ zu Quadrate gemacht werden sollen, so theile man dieselben durch zz um die drey folgenden zu erhalten

$$\text{I.)}\ \frac{xx}{zz}+\frac{yy}{zz}=\square; \quad \text{II.)}\ \frac{xx}{zz}+1=\square; \quad \text{III.)}\ \frac{yy}{zz}+1=\square.$$

Da dann den zwey letzteren ein Genüge geschieht, wann

$$\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p} \quad \text{und} \quad \frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q},$$

hieraus wird die erste Formel $\frac{(pp-1)^2}{4pp}+\frac{(qq-1)^2}{4qq}$, welche also auch mit 4 multiplicirt ein Quadrat werden muß, das ist $\frac{(pp-1)^2}{pp}+\frac{(qq-1)^2}{qq}$; oder auch mit $ppqq$ multiplicirt $qq(pp-1)^2+pp(qq-1)^2=\square$, welches nicht wohl geschehen kann ohne einen Fall zu wißen, da dieselbe ein Quadrat wird; allein ein solcher Fall läßt sich nicht wohl errathen, dahero man zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen muß, wovon wir einige anführen wollen.

I. Da sich die Formel also ausdrücken läßt

$$qq(p+1)^2(p-1)^2+pp(q+1)^2(q-1)^2=\square$$

so mache man, daß sich dieselbe durch das Quadrat $(p+1)^2$ theilen laße; welches geschieht wann man nimmt $q-1=p+1$ oder $q=p+2$, da dann seyn wird $q+1=p+3$, woher unsere Formel wird

$$(p+2)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2(p+1)^2=\square,$$

welche durch $(p+1)^2$ dividirt ein Quadrat seyn **muß**, nemlich

$$(p+2)^2(p-1)^2+pp(p+3)^2,$$

so in diese Form aufgelößt wird $2p^4+8p^3+6pp-4p+4$. Weil nun hier das letzte Glied ein Quadrat ist, so setze man die Wurzel $2+fp+gpp$ oder $gpp+fp+2$, davon das Quadrat ist

$$ggp^4+2fgp^3+4gpp+ffpp+4fp+4$$

wo man f und g so bestimmen muß, daß die drey letzten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $-4=4f$, oder $f=-1$ und $6=4g+1$, oder $g=\frac{5}{4}$, da dann die ersten Glieder durch p^3 dividirt geben $2p+8=ggp+2fg=\frac{25}{16}p-\frac{5}{2}$, woraus gefunden wird $p=-24$ und $q=-22$; daher wir erhalten $\frac{x}{z}=\frac{pp-1}{2p}=-\frac{575}{48}$ oder $x=-\frac{575}{48}z$, und $\frac{y}{z}=\frac{qq-1}{2q}=-\frac{483}{44}$ oder $y=-\frac{483}{44}z$.

Man nehme nun $z=16\cdot3\cdot11$, so wird $x=575\cdot11$ und $y=483\cdot12$; dahero sind die Wurzeln von den drey gesuchten Quadraten folgende:

$$x=6325=11\cdot23\cdot25,\quad y=5796=12\cdot21\cdot23,\quad z=528=3\cdot11\cdot16,$$

dann hieraus wird

$$xx+yy=23^2(275^2+252^2)=23^2\cdot373^2$$
$$xx+zz=11^2(575^2+\ \ 48^2)=11^2\cdot577^2$$
$$yy+zz=12^2(483^2+\ \ 44^2)=12^2\cdot485^2.$$

II. Man kann noch auf unendlich viel Arten machen, daß unsere Formel durch ein Quadrat theilbar wird; man setze z. E. $(q+1)^2 = 4(p+1)^2$ oder $q+1=2(p+1)$, das ist $q=2p+1$ und $q-1=2p$, woraus unsere Formel wird $(2p+1)^2(p+1)^2(p-1)^2+pp\cdot 4\cdot(p+1)^2(4pp)=\square$, welche durch $(p+1)^2$ getheilt, giebt $(2p+1)^2(p-1)^2+16p^4=\square$ oder $20p^4-4p^3-3pp+2p+1=\square$, woraus aber nichts gefunden werden kann.

III. Man setze dahero $(q-1)^2=4(p+1)^2$, oder $q-1=2(p+1)$, so wird $q=2p+3$ und $q+1=2p+4$ oder $q+1=2(p+2)$; woher unsere Formel durch $(p+1)^2$ getheilt, seyn wird:

$$(2p+3)^2(p-1)^2+16pp(p+2)^2,$$

das ist $9-6p+53pp+68p^3+20p^4$; davon sey die Wurzel $3-p+gpp$, deren Quadrat ist $9-6p+6gpp+pp-2gp^3+ggp^4$. Da nehme man nun um auch die dritten Glieder verschwinden zu machen $53=6g+1$ oder $g=\frac{26}{3}$, so werden die übrigen Glieder durch p^3 dividirt geben $20p+68=ggp-2g$ oder $\frac{256}{3}=\frac{496}{9}p$, daher $p=\frac{48}{31}$ und $q=\frac{189}{31}$, woraus wiederum eine Auflösung folget.

IV. Man setze $q-1=\frac{4}{3}(p-1)$, so wird

$$q=\frac{4}{3}p-\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad q+1=\frac{4}{3}p+\frac{2}{3}=\frac{2}{3}(2p+1),$$

dahero wird unsere Formel durch $(p-1)^2$ dividirt, seyn

$$\frac{(4p-1)^2}{9}(p+1)^2+\frac{64}{81}pp(2p+1)^2,$$

welche mit 81 multiplicirt, wird

$$9(4p-1)^2(p+1)^2+64pp(2p+1)^2=400p^4+472p^3+73pp-54p+9,$$

wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $20pp-9p+3$, davon das Quadrat

$$400p^4-360p^3+201pp-54p+9$$

und daher erhält man $472p+73=-360p+201$, dahero

$$p=\frac{2}{13} \quad \text{und} \quad q=\frac{8}{39}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{39}.$$

Man kann auch für die obige Wurzel setzen $20pp + 9p - 3$, davon das Quadrat

$$400p^4 + 360p^3 - 120pp + 81pp - 54p + 9,$$

mit unserer Formel verglichen giebt $472p + 73 = 360p - 39$, und daraus $p = -1$, welcher Werth aber zu nichts nützet.

V. Man kann auch machen daß sich unsere Formel so gar durch beyde Quadrate $(p+1)^2$ und $(p-1)^2$ zugleich theilen läßt. Man setze zu diesem Ende $q = \frac{pt+1}{p+t}$, da wird

$$q + 1 = \frac{pt + p + t + 1}{p+t} = \frac{(p+1)(t+1)}{p+t}$$

und

$$q - 1 = \frac{pt - p - t + 1}{p+t} = \frac{(p-1)(t-1)}{p+t},$$

hieraus wird nun unsere Formel durch $(p+1)^2(p-1)^2$ dividirt

$$= \frac{(pt+1)^2}{(p+t)^2} + pp\frac{(t+1)^2(t-1)^2}{(p+t)^4},$$

welche mit dem Quadrat $(p+t)^4$ multiplicirt noch ein Quadrat seyn muß, nemlich

$$(pt+1)^2(p+t)^2 + pp(t+1)^2(t-1)^2 \text{ oder}$$

$$ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 + 2ttpp + (tt+1)^2pp + (tt-1)^2pp + 2t(tt+1)p + tt,$$

wo so wohl das erste als letzte Glied Quadrate sind. Man setze demnach die Wurzel $tpp + (tt+1)p - t$, davon das Quadrat

$$ttp^4 + 2t(tt+1)p^3 - 2ttpp + (tt+1)^2pp - 2t(tt+1)p + tt$$

mit unserer Formel verglichen giebt:

$$2ttp + (tt+1)^2p + (tt-1)^2p + 2t(tt+1)$$
$$= -2ttp + (tt+1)^2p - 2t(tt+1),$$

oder $4ttp + (tt-1)^2p + 4t(tt+1) = 0$, oder $(tt+1)^2p + 4t(tt+1) = 0$, das ist $tt + 1 = -\frac{4t}{p}$, woraus wir erhalten $p = \frac{-4t}{tt+1}$; hieraus wird

$$pt + 1 = \frac{-3tt+1}{tt+1} \quad \text{und} \quad p + t = \frac{t^3 - 3t}{tt+1}, \quad \text{folglich} \quad q = \frac{-3tt+1}{t^3 - 3t},$$

wo t nach Belieben angenommen werden kann.

Es sey z. E. $t = 2$ so wird $p = -\frac{8}{5}$ und $q = -\frac{11}{2}$, woraus wir finden

$$\frac{x}{z} = \frac{pp-1}{2p} = -\frac{39}{80} \text{ und } \frac{y}{z} = \frac{qq-1}{2q} = -\frac{117}{44}$$

oder $x = \frac{3\cdot 13}{4\cdot 4\cdot 5} z$ und $y = \frac{9\cdot 13}{4\cdot 11} z$. Man nehme nun $z = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11$, so wird $x = 3\cdot 13\cdot 11$ und $y = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13$: also sind die Wurzeln der drey gesuchten Quadraten

$$x = 3\cdot 11\cdot 13 = 429;\quad y = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13 = 2340 \quad\text{und}\quad z = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11 = 880.$$

Welche noch kleiner sind als die oben gefundenen.

Aus diesen aber wird

$$xx + yy = 3^2\cdot 13^2(121 + 3600) = 3^2\cdot 13^2\cdot 61^2;$$
$$xx + zz = 11^2\cdot(1521 + 6400) = 11^2\cdot 89^2;$$
$$yy + zz = 20^2\cdot(13689 + 1936) = 20^2\cdot 125^2;$$

VI. Zuletzt bemercken wir noch bey dieser Frage, daß aus einer jeglichen Auflösung ganz leicht noch eine andere gefunden werden kann: dann wann diese Werthe gefunden worden $x = a$, $y = b$ und $z = c$; also daß $aa + bb = \square$, $aa + cc = \square$ und $bb + cc = \square$, so werden auch die folgenden Werthe ein Genüge leisten, $x = ab$, $y = bc$ und $z = ac$, dann da wird

$$xx + yy = aabb + bbcc = bb(aa + cc) = \square$$
$$xx + zz = aabb + aacc = aa(bb + cc) = \square$$
$$yy + zz = aacc + bbcc = cc(aa + bb) = \square.$$

Da wir nun eben gefunden

$$x = a = 3\cdot 11\cdot 13;\quad y = b = 4\cdot 5\cdot 9\cdot 13 \quad\text{und}\quad z = c = 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11,$$

so erhalten wir daraus nach dieser Auflösung:

$$x = ab = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 9\,.\,11\cdot 13\cdot 13$$
$$y = bc = 4\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 9\cdot 11\cdot 13$$
$$z = ac = 3\cdot 4\cdot 4\cdot 5\cdot 11\cdot 11\cdot 13$$

welche sich alle drey durch $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$ theilen laßen, und also auf folgende Formel gebracht werden

$$x = 9 \cdot 13, \quad y = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \quad \text{und} \quad z = 4 \cdot 11,$$

das ist $$x = 117, \quad y = 240 \quad \text{und} \quad z = 44,$$

welche noch kleiner sind als die vorigen; dahero wird aber:

$$xx + yy = 71289 = 267^2$$
$$xx + zz = 15625 = 125^2$$
$$yy + zz = 59536 = 244^2.$$

239.

XVIII. Frage: Man verlangt zwey Zahlen x und y, so daß wann man die eine zum Quadrat der andern addirt ein Quadrat herauskomme, also daß diese zwey Formeln $xx + y$ und $yy + x$ Quadrate seyn sollen?

Wollte man so gleich für die erstere setzen $xx + y = pp$ und daraus herleiten $y = pp - xx$, so würde die andere Formel $p^4 - 2ppxx + x^4 + x = \square$ wovon die Auflösung nicht leicht in die Augen fällt.

Man setze aber zu gleich für beyde Formeln

$$xx + y = (p - x)^2 = pp - 2px + xx \quad \text{und} \quad yy + x = (q - y)^2 = qq - 2qy + yy,$$

woraus wir dann diese zwey Gleichungen erhalten

$$\text{I.)}\ y + 2px = pp \quad \text{und} \quad \text{II.)}\ x + 2qy = qq,$$

aus welchen x und y leicht gefunden werden können. Man findet nemlich

$$x = \frac{2qpp - qq}{4pq - 1} \quad \text{und} \quad y = \frac{2pqq - pp}{4pq - 1};$$

wo man p und q nach Belieben annehmen kann.

Man setze z. E. $p = 2$ und $q = 3$, so bekommt man diese zwey gesuchte Zahlen $x = \frac{15}{23}$ und $y = \frac{32}{23}$, dann daher wird

$$xx + y = \frac{225}{529} + \frac{32}{23} = \frac{961}{529} = \left(\frac{31}{23}\right)^2 \text{ und } yy + x = \frac{1024}{529} + \frac{15}{23} = \frac{1369}{529} = \left(\frac{37}{23}\right)^2.$$

Man nehme ferner $p = 1$ und $q = 3$, so wird $x = -\frac{3}{11}$ und $y = \frac{17}{11}$; weil aber eine Zahl negativ ist, so mögte man diese Auflösung nicht gelten laßen.

Man setze $p=1$ und $q=\frac{3}{2}$, so wird $x=\frac{3}{20}$ und $y=\frac{7}{10}$, dann da wird

$$xx+y=\frac{9}{400}+\frac{7}{10}=\frac{289}{400}=\left(\frac{17}{20}\right)^2 \quad \text{und} \quad yy+x=\frac{49}{100}+\frac{3}{20}=\frac{64}{100}=\left(\frac{8}{10}\right)^2.$$

240.

XIX. Frage: Zwey Zahlen zu finden deren Summe ein Quadrat und die Summe ihrer Quadraten ein Biquadrat sey.

Diese Zahlen seyen x und y und weil $xx+yy$ ein Biquadrat seyn muß, so mache man dasselbe erstlich zu einem Quadrat, welches geschieht wann $x=pp-qq$ und $y=2pq$, da dann wird $xx+yy=(pp+qq)^2$. Damit nun dieses ein Biquadrat werde, so muß $pp+qq$ ein Quadrat seyn, dahero setze man ferner $p=rr-ss$ und $q=2rs$, so wird $pp+qq=(rr+ss)^2$; folglich

$$xx+yy=(rr+ss)^4$$

und also ein Biquadrat; alsdann aber wird $x=r^4-6rrss+s^4$ und $y=4r^3s-4rs^3$. Allso ist noch übrig, daß diese Formel $x+y=r^4+4r^3s-6rrss-4rs^3+s^4$ ein Quadrat werde, man setze davon die Wurzel $rr+2rs+ss$, und also unsere Formel gleich diesem Quadrat $r^4+4r^3s+6rrss+4rs^3+s^4$, wo sich die zwey ersten und letzten Glieder aufheben, die übrigen aber durch rss dividirt geben $6r+4s=-6r-4s$ oder $12r+8s=0$: also $s=-\frac{12r}{8}=-\frac{3}{2}r$; oder man kann die Wurzel auch setzen $rr-2rs+ss$, damit die vierten Glieder wegfallen; da nun das Quadrat hievon ist $r^4-4r^3s+6rrss-4rs^3+s^4$, so geben die übrigen Glieder durch rrs dividirt $4r-6s=-4r+6s$, oder $8r=12s$, folglich $r=\frac{3}{2}s$; wann nun $r=3$ und $s=2$ so würde $x=-119$ negativ.

Laßt uns ferner setzen $r=\frac{3}{2}s+t$, so wird für unsere Formel

$$rr=\frac{9}{4}ss+3st+tt, \quad r^3=\frac{27}{8}s^3+\frac{27}{4}sst+\frac{9}{2}stt+t^3$$

folglich

$$\begin{array}{rl}
r^4= & \frac{81}{16}s^4+\frac{27}{2}s^3t+\frac{27}{2}sstt+6st^3+t^4\\
+4r^3s= & \frac{27}{2}s^4+27s^3t+18sstt+4st^3\\
-6rrss= & -\frac{27}{2}s^4-18s^3t-6sstt\\
-4rs^3= & -6s^4-4s^3t\\
+s^4= & +s^4\\
\hline
\end{array}$$

allso unsere Formel $\quad \frac{1}{16}s^4+\frac{37}{2}s^3t+\frac{51}{2}sstt+10st^3+t^4$

welche ein Quadrat seyn muß, und also auch wann sie mit 16 multiplicirt wird; da bekommt man diese $s^4 + 296s^3t + 408sstt + 160st^3 + 16t^4$; hievon setze man die Wurzel $ss + 148st - 4tt$, davon das Quadrat ist

$$s^4 + 296s^3t + 21896sstt - 1184st^3 + 16t^4.$$

Hier heben sich die zwey ersten und letzten Glieder auf, die übrigen aber durch stt dividirt geben $21896s - 1184t = 408s + 160t$ und also

$$\frac{s}{t} = \frac{1344}{21488} = \frac{336}{5372} = \frac{84}{1343}.$$

Also nehme man $s = 84$ und $t = 1343$ folglich $r = 1469$; und aus diesen Zahlen $r = 1469$ und $s = 84$ finden wir

$$x = r^4 - 6rrss + s^4 = 4565486027761 \quad \text{und} \quad y = 1061652293520.$$

CAPITEL 15

AUFLÖSUNG SOLCHER FRAGEN WORZU CUBI ERFORDERT WERDEN

241.

In dem vorigen Capitel sind solche Fragen vorgekommen, wo gewiße Formeln zu Quadraten gemacht werden mußten, da wir dann Gelegenheit gehabt haben, verschiedene Kunstgriffe zu erklären, wodurch die oben gegebenen Regeln zur Ausübung gebracht werden können. Nun ist noch übrig solche Fragen zu betrachten, wo gewiße Formeln zu Cubis gemacht werden sollen, dazu auch schon im vorigen Capitel die Regeln gegeben worden, welche aber jetzt durch die Auflösung der folgenden Fragen in ein größeres Licht gesetzt werden.

242.

I. Frage: Man verlangt zwey Cubos x^3 und y^3 deren Summe wiederum ein Cubus seyn soll?

Da also $x^3 + y^3$ ein Cubus werden soll, so muß auch diese Formel durch den Cubus y^3 dividirt noch ein Cubus seyn, also $\frac{x^3}{y^3} + 1 = \text{Cubo}$. Man setze $\frac{x}{y} = z - 1$ so bekommen wir $z^3 - 3zz + 3z$, welche ein Cubus seyn soll; wollte man nun nach den obigen Regeln die Cubic-Wurzel setzen $z-u$, wovon der Cubus ist $z^3-3uzz+3uuz-u^3$, und u so bestimmen, daß auch die zweyten Glieder wegfielen, so würde $u=1$, die übrigen Glieder aber würden geben

$$3z=3uuz-u^3=3z-1,$$

woraus gefunden wird z gleich unendlich, welcher Werth uns nichts hilft. Man laße aber u unbestimmt, so bekommen wir diese Gleichung:

$$-3zz+3z=-3uzz+3uuz-u^3;$$

aus welcher Quadratischen Gleichung der Werth von z bestimmt werde: wir bekommen aber $3uzz-3zz=3uuz-3z-u^3$, das ist $3(u-1)zz=3(uu-1)z-u^3$, oder $zz=(u+1)z-\frac{u^3}{3(u-1)}$, woraus gefunden wird

$$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{uu+2u+1}{4}-\frac{u^3}{3(u-1)}\right)}$$

oder

$$z=\frac{u+1}{2}\pm\sqrt{\frac{-u^3+3uu-3u-3}{12(u-1)}}.$$

Die Sache kommt also darauf an, daß dieser Bruch zu einem Quadrat gemacht werde, wir wollen daher den Bruch oben und unten mit $3(u-1)$ multipliciren, damit unten ein Quadrat komme, nemlich $\frac{-3u^4+12u^3-18uu+9}{36(u-1)^2}$, wovon also der Zähler noch ein Quadrat werden muß. In demselben ist zwar das letzte Glied schon ein Quadrat, setzt man aber nach der Regel die Wurzel davon $guu+fu+3$, wovon das Quadrat ist

$$ggu^4+2fgu^3+6guu+ffuu+2fu+9$$

und macht die drey letzten Glieder verschwinden, so wird erstlich $0=2f$ das ist $f=0$, und hernach $6g+ff=-18$, und dahero $g=-3$; alsdann geben die zwey ersten Glieder durch u^3 dividirt $-3u+12=ggu+2fg=9u$; und daher $u=1$, welcher Wert zu nichts führet. Wollen wir nun weiter setzen $u=1+t$, so wird unsere Formel $-12t-3t^4$, welche ein Quadrat seyn soll, welches nicht geschehen kann, wofern t nicht negativ ist. Es sey also $t=-s$, so wird unsere Formel $12s-3s^4$, welche in dem Fall $s=1$ ein Quadrat wird, alsdann aber wäre $t=-1$ und $u=0$, woraus nichts gefunden werden kann. Man mag auch die Sache angreiffen wie man will, so wird man niemahls einen solchen Werth finden, der uns zu unserm Endzweck führet; woraus man schon ziemlich sicher schließen kann, daß es nicht möglich sey zwey Cubos zu finden, deren Summe ein Cubus wäre, welches aber auch folgender Gestalt bewiesen werden kann.

243.

Lehr-Satz: Es ist nicht möglich zwey Cubos zu finden, deren Summe oder auch Differenz ein Cubus wäre.

Hier ist vor allen Dingen zu bemercken, daß wann die Summe unmöglich ist, die Differenz auch unmöglich seyn müße. Dann wann es unmöglich ist daß $x^3+y^3=z^3$, so ist es auch unmöglich daß $z^3-y^3=x^3$, nun aber ist z^3-y^3 die Differenz von zwey Cubis. Es ist also genung die Unmöglichkeit blos von der Summe, oder auch nur von der Differenz zu zeigen, weil das andere daraus folgt. Der Beweis selbst aber wird aus folgenden Sätzen bestehen.

I. Kann man annehmen, daß die Zahlen x und y untheilbar unter sich sind. Dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so würden sich die Cubi durch den Cubum deßelben theilen laßen. Wäre z. E. $x=2a$, und $y=2b$ so würde $x^3+y^3=8a^3+8b^3$, und wäre dieses ein Cubus, so müßte auch a^3+b^3 ein Cubus seyn.

II. Da nun x und y keinen gemeinen Theiler haben, so sind diese beyde Zahlen entweder beyde ungerad, oder die eine gerad, und die andere ungerad. Im erstern Falle müßte z gerad seyn; im andern Fall aber müßte z ungerad seyn. Also sind von den drey Zahlen x, y und z immer zwey ungerad und eine gerad. Wir wollen dahero zu unserm Beweis die beyden ungeraden nehmen, weil es gleich viel ist, ob wir die Unmöglichkeit der Summe oder der Differenz zeigen, indem die Summe in die Differenz verwandelt wird, wann die eine Wurzel negativ wird.

III. Es seyen demnach x und y zwey ungerade Zahlen, so wird so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn. Man setze dahero $\frac{x+y}{2}=p$ und $\frac{x-y}{2}=q$, so wird $x=p+q$ und $y=p-q$, woraus erhellet, daß von den zwey Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß; dahero aber wird $x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq)$: es muß also bewiesen werden, daß dieses Product $2p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne. Sollte aber die Sache von der Differenz bewiesen werden, so würde $x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(qq+3pp)$, welche Formel der vorigen gantz ähnlich ist, indem nur die Buchstaben p und q verwechselt sind, dahero es genung ist die Unmöglichkeit von dieser Formel $2p(pp+3qq)$ zu zeigen, weil daraus nothwendig folget, daß weder die Summe noch die Differenz von zweyen Cubis ein Cubus werden könne.

IV. Wäre nun $2p(pp+3qq)$ ein Cubus, so wäre derselbe gerad und also durch 8 theilbar: folglich müßte auch der achte Theil unserer Formel eine gantze Zahl und dazu ein Cubus seyn, nemlich $\frac{1}{4}p(pp+3qq)$. Weil nun von den Zahlen p und q die eine gerad, die andere aber ungerad ist, so wird $pp+3qq$ eine ungerade Zahl seyn und sich nicht durch 4 theilen lassen, woraus folget daß sich p durch 4 theilen laßen müße und also $\frac{p}{4}$ eine gantze Zahl sey.

V. Wann nun dieses Product $\frac{p}{4}\cdot(pp+3qq)$ ein Cubus seyn sollte, so müßte ein jeder Factor besonders, nemlich $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$, ein Cubus seyn, so nemlich dieselben keinen gemeinen Theiler haben. Dann wann ein Product von zwey Factoren, die unter sich untheilbar sind ein Cubus seyn soll, so muß nothwendig ein jeder für sich ein Cubus seyn; wann dieselben aber einen gemeinen Theiler haben, so muß derselbe besonders betrachtet werden. Hier ist demnach die Frage: ob diese zwey Factoren p und $pp+3qq$ nicht einen gemeinen Factor haben könnten? welches also untersucht wird. Hätten dieselben einen gemeinen Theiler, so würden auch diese pp und $pp+3qq$ eben denselben gemeinen Theiler haben, und also auch ihre Differenz, welche ist $3qq$, mit dem pp eben denselben gemeinen Theiler haben; da nun p und q unter sich untheilbar sind, so können die Zahlen pp und $3qq$ keinen andern gemeinen Theiler haben als 3, welches geschieht wann sich p durch 3 theilen läßt.

VI. Wir haben dahero zwey Fälle zu erwegen: der erste ist wann die Factoren p und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, welches immer geschieht, wann sich p nicht durch 3 theilen läßt; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welches geschieht wann sich p durch 3 theilen läßt, da dann beyde durch 3 theilbar seyn werden. Diese zwey Fälle müßen sorgfältig von einander unterschieden werden, weil man den Beweis für einen jeden ins besondere führen muß.

VII. Erster Fall. Es sey demnach p nicht durch 3 theilbar und also unsere beyden Factoren $\frac{p}{4}$ und $pp+3qq$ untheilbar unter sich, so müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Laßt uns dahero $pp+3qq$ zu einem Cubo machen, welches geschieht wann man, wie oben gezeigt worden, setzt

$$p+q\sqrt{-3}=(t+u\sqrt{-3})^3 \quad \text{und} \quad p-q\sqrt{-3}=(t-u\sqrt{-3})^3.$$

Damit dadurch werde $pp+3qq=(tt+3uu)^3$ und also ein Cubus; hieraus aber wird

$$p=t^3-9tuu=t(tt-9uu) \quad \text{und} \quad q=3ttu-3u^3=3u(tt-uu);$$

weil nun q eine ungerade Zahl ist, so muß u auch ungerad, t aber gerad seyn, weil sonsten $tt-uu$ eine gerade Zahl würde.

VIII. Da nun $pp+3qq$ zu einem Cubo gemacht und gefunden worden

$$p=t(tt-9uu)=t(t+3u)(t-3u),$$

so müßte jetzt noch $\frac{p}{4}$ und also auch $2p$, ein Cubus seyn; dahero diese Formel $2t(t+3u)(t-3u)$ ein Cubus seyn müßte. Hier ist aber zu bemercken, daß t erstlich eine gerade Zahl und nicht durch 3 theilbar ist, weil sonsten auch p durch 3 theilbar seyn würde, welcher Fall hier ausdrücklich ausgenommen ist; also sind diese drey Factoren $2t$, $t+3u$ und $t-3u$ unter sich untheilbar, und deswegen müßte ein jeder für sich ein Cubus seyn. Man setze dahero $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$ so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist $2t$ auch ein Cubus, und folglich hätten wir hier zwey Cubos f^3 und g^3 deren Summe wieder ein Cubus wäre, welche offenbahr ungleich viel kleiner wären, als die anfänglich angenommenen Cubi x^3 und y^3. Dann nachdem wir gesetzt haben $x=p+q$ und $y=p-q$, anjetzo aber p und q durch die Buchstaben t und u bestimmt haben, so müßen die Zahlen p und q viel größer seyn als t und u.

IX. Wann es also zwey solche Cubi in den größten Zahlen gäbe, so könnte man auch in viel kleineren Zahlen eben dergleichen anzeigen deren Summ auch ein Cubus wäre, und solcher Gestalt könnte man immer auf kleinere dergleichen Cubos kommen. Da es nun in kleinen Zahlen dergleichen Cubos gewis nicht giebt, so sind sie auch in den allergrößten nicht möglich. Dieser Schluß wird dadurch bekräftiget, daß auch der andere Fall eben dahin leitet, wie wir so gleich sehen werden.

X. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar, q aber nicht, und man setze $p=3r$ so wird unsere Formel

$$\frac{3r}{4}\cdot(9rr+3qq),\quad \text{oder}\quad \frac{9}{4}r(3rr+qq),$$

welche beyde Factoren unter sich untheilbar sind, weil sich $3rr+qq$ weder durch 2 noch durch 3 theilen läßt, und r eben so wohl gerad seyn muß als p, deswegen muß ein jeder von diesen beyden Factoren für sich ein Cubus seyn.

XI. Machen wir nun den zweyten $3rr+qq$ oder $qq+3rr$ zu einem Cubo, so finden wir wie oben $q=t(tt-9uu)$ und $r=3u(tt-uu)$; wo zu mercken, daß weil q ungerad war, hier auch t ungerad, u aber eine gerade Zahl seyn müße.

XII. Weil nun $\frac{9r}{4}$ auch ein Cubus seyn muß und also auch mit dem Cubo $\frac{8}{27}$ multiplicirt, so muß $\frac{2r}{3}$ das ist $2u(tt-uu)=2u(t+u)(t-u)$ ein Cubus seyn, welche drey Factoren unter sich untheilbar und also ein jeder für sich ein Cubus seyn müßte; wann man aber setzt $t+u=f^3$ und $t-u=g^3$, so folgt daraus $2u=f^3-g^3$, welches auch ein Cubus seyn müßte, indem $2u$ ein Cubus ist. Solcher Gestalt hätte man zwey weit kleinere Cubos f^3 und g^3 deren Differenz ein Cubus wäre, und folglich auch solche deren Summe ein Cubus wäre; dann man darf nur setzen $f^3-g^3=h^3$, so wird $f^3=h^3+g^3$, und also hätte man zwey Cubos deren Summe ein Cubus wäre. Hierdurch wird nun der obige Schluß vollkommen bestätiget, daß es auch in den größten Zahlen keine solche Cubi gebe, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, und das deswegen, weil in den kleinsten Zahlen dergleichen nicht anzutreffen sind.[1])

244.

Weil es nun nicht möglich ist zwey solche Cubos zu finden, deren Summe oder Differenz ein Cubus wäre, so fält auch unsere erste Frage weg, und man pflegt hier vielmehr den Anfang mit dieser Frage zu machen, wie drey

1) Siehe die Anmerkung p. 410, ferner EULERS Abhandlung 272 (des ENESTRÖMSCHEN Verzeichnisses) *Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur*, Novi Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1760/1), 1763, p. 105—128; *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

Cubi gefunden werden sollen, deren Summe einen Cubus ausmache: man kann aber zwey von denselben nach Belieben annehmen, also daß nur der dritte gefunden werden soll; welche Frage wir anjetzo vornehmen wollen.

245.

II. Frage: Es wird zu zwey gegebenen Cubis a^3 und b^3 noch ein dritter Cubus x^3 verlangt, welcher mit denselben zusammen wiederum einen Cubum ausmache?

Es soll also diese Formel $a^3+b^3+x^3$ ein Cubus werden, welches da es nicht anders geschehen kann, als wann schon ein Fall bekannt ist, ein solcher Fall aber hier sich von selbsten darbiethet nemlich $x=-a$, so setze man $x=y-a$, da wird $x^3=y^3-3ayy+3aay-a^3$, und dahero unsere Formel die ein Cubus werden soll $y^3-3ayy+3aay+b^3$, wovon das erste und letzte Glied schon ein Cubus ist, dahero man so gleich zwey Auflösungen finden kann.

I. Nach der ersten setze man die Wurzel davon $y+b$, deren Cubus ist $y^3+3byy+3bby+b^3$; woraus wir bekommen $-3ay+3aa=3by+3bb$, dahero $y=\frac{aa-bb}{a+b}=a-b$; folglich $x=-b$ welcher uns zu nichts dienet.

II. Man kan aber die Wurzel auch setzen $b+fy$, davon der Cubus ist $f^3y^3+3bffyy+3bbfy+b^3$; und f also bestimmen, daß auch die dritten Glieder wegfallen, welches geschieht wann $3aa=3bbf$ oder $f=\frac{aa}{bb}$, da dann die zwey ersten Glieder durch yy dividirt geben $y-3a=f^3y+3bff=\frac{a^6y}{b^6}+\frac{3a^4}{b^3}$, welche mit b^6 multiplicirt giebt

$$b^6y-3ab^6=a^6y+3a^4b^3;$$

daraus gefunden wird

$$y=\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3}{b^3-a^3},$$

und allso

$$x=y-a=\frac{2ab^3+a^4}{b^3-a^3}=a\cdot\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}.$$

Wann also die beyden Cubi a^3 und b^3 gegeben sind, so haben wir hier die Wurzel des dritten gesuchten Cubi gefunden, und damit dieselbe positiv werde, so darf man nur b^3 für den größern Cubum annehmen, welches wir durch einige Exempel erläutern wollen.

I. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 1 und 8, also daß $a = 1$ und $b = 2$, so wird diese Form $9 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{17}{7}$; dann da wird $9 + x^3 = \frac{8000}{343} = \left(\frac{20}{7}\right)^3$.

II. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 8 und 27, also daß $a = 2$ und $b = 3$, so wird diese Form $35 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{124}{19}$.

III. Es seyen die zwey gegebenen Cubi 27 und 64, also daß $a = 3$ und $b = 4$, so wird diese Form $91 + x^3$ ein Cubus, wann $x = \frac{465}{37}$.

Wollte man zu zwey gegebenen Cubis noch mehr dergleichen dritte finden, so müßte man in der ersten Form $a^3 + b^3 + x^3$ ferner setzen $x = \frac{2ab^3 + a^4}{b^3 - a^3} + z$, da man dann wieder auf eine ähnliche Formel kommen würde, woraus sich neue Werthe für z bestimmen ließen, welches aber in allzuweitläufige Rechnungen führen würde.

246.

Bey dieser Frage ereignet sich aber ein merckwürdiger Fall, wann die beiden gegebenen Cubi einander gleich sind, oder $b = a$; dann da bekommen wir $x = \frac{3a^4}{0}$ das ist unendlich, und erhalten also keine Auflösung; dahero diese Frage wann $2a^3 + x^3$ ein Cubus werden soll, noch nicht hat aufgelößt werden können. Es sey z. E. $a = 1$ und also unsere Formel $2 + x^3$, so ist zu mercken, daß was man auch immer vor Veränderungen vornehmen mag, alle Bemühungen vergebens sind, und nimmer daraus ein geschickter Werth für x gefunden werden kann, woraus sich schon ziemlich sicher schließen läßt, daß zu einem doppelten Cubo kein Cubus gefunden werden könne, welcher mit jenem zusammen einen Cubum ausmachte, oder daß diese Gleichung $2a^3 + x^3 = y^3$ unmöglich sey; aus derselben aber folget diese $2a^3 = y^3 - x^3$, und dahero auch nicht möglich ist zwey Cubos zu finden, deren Differenz ein doppelter Cubus wäre, welches auch von der Summe zweyer Cubus zu verstehen und folgender Gestalt bewiesen werden kann.

247.

Lehr-Satz. Weder die Summe, noch die Differenz zwischen zwey Cubis kann jemahls einem doppelten Cubo gleich werden, oder diese Formel $x^3 \pm y^3 = 2z^3$ ist an sich selbst unmöglich, außer dem Fall $y = x$, welcher für sich klar ist.

Hier können wieder x und y als untheilbar unter sich angenommen werden, dann wann sie einen gemeinen Theiler hätten, so müßte auch z

dadurch theilbar seyn und also die gantze Gleichung durch den Cubum davon getheilt werden können. Weil nun $x^3 \pm y^3$ eine gerade Zahl seyn soll, so müßen beyde Zahlen x und y ungerad seyn, dahero so wohl ihre Summe als Differenz gerad seyn wird. Man setze allso $\frac{x+y}{2}=p$ und $\frac{x-y}{2}=q$, so wird $x=p+q$ und $y=p-q$; da dann von den Zahlen p und q die eine gerad die andere aber ungerad seyn muß. Hieraus folgt aber

$$x^3+y^3=2p^3+6pqq=2p(pp+3qq), \quad \text{und} \quad x^3-y^3=6ppq+2q^3=2q(3pp+qq),$$

welche beyde Formeln einander völlig ähnlich sind. Dahero es genung seyn wird zu zeigen, daß diese Formel $2p(pp+3qq)$ kein doppelter Cubus, und also diese $p(pp+3qq)$ kein Cubus seyn könne, wovon der Beweis in folgenden Sätzen enthalten ist.

I. Hier kommen wieder zwey Fälle zu betrachten vor, davon der erste ist, wann die zwey Factoren p und $pp+3qq$ keinen gemeinen Theiler haben, da dann ein jeder für sich ein Cubus seyn muß; der andere Fall aber ist, wann dieselben einen gemeinen Theiler haben, welcher wie wir oben gesehen kein anderer seyn kann als 3.

II. Erster Fall. Es sey demnach p nicht theilbar durch 3, und also die beyden Factores unter sich unteilbar, so mache man erstlich $pp+3qq$ zu einem Cubo, welches geschieht, wann $p=t(tt-9uu)$ und $q=3u(tt-uu)$, also daß noch der Werth von p ein Cubus seyn müßte. Da nun t durch 3 nicht theilbar ist, weil sonsten p auch durch 3 theilbar seyn würde, so sind diese zwey Factoren t und $tt-9uu$ untheilbar unter sich, und muß folglich ein jeder für sich ein Cubus seyn.

III. Der letztere aber hat wieder zwey Factores, nemlich $t+3u$ und $t-3u$, welche unter sich untheilbar sind, erstlich weil sich t nicht durch 3 theilen läßt, hernach aber weil von den Zahlen t und u die eine gerad und die andere ungerad ist. Dann wann beyde ungerad wären, so würde nicht nur p sondern auch q ungerad werden, welches nicht seyn kann, folglich muß auch ein jeder von diesen Factoren $t+3u$ und $t-3u$ für sich ein Cubus seyn.

IV. Man setze dahero $t+3u=f^3$ und $t-3u=g^3$, so wird $2t=f^3+g^3$. Nun aber ist t für sich ein Cubus welcher sey $=h^3$, allso daß $f^3+g^3=2h^3$ wäre, das ist wir hätten zwey weit kleinere Cubos nemlich f^3 und g^3, deren Summe auch ein doppelter Cubus wäre.

V. Zweyter Fall. Es sey nun p durch 3 theilbar und also q nicht. Man setze demnach $p = 3r$, so wird unsere Formel

$$3r(9rr + 3qq) = 9r(3rr + qq),$$

welche Factoren jetzt unter sich untheilbar sind und dahero ein jeder ein Cubus seyn muß.

VI. Um nun den letzteren $qq + 3rr$ zu einem Cubo zu machen, so setze man $q = t(tt - 9uu)$ und $r = 3u(tt - uu)$, da dann wieder von den Zahlen t und u die eine gerad, die andere aber ungerad seyn muß, weil sonsten die beyde Zahlen q und r gerad würden. Hieraus aber bekommen wir den erstern Factor $9r = 27u(tt - uu)$, welcher ein Cubus seyn müßte, und folglich auch durch 27 dividirt, nemlich $u(tt - uu)$ das ist $u(t + u)(t - u)$.

VII. Weil nun auch diese drey Factoren unter sich untheilbar sind, so muß ein jeder für sich ein Cubus seyn. Setzt man demnach für die beyden letztern $t + u = f^3$ und $t - u = g^3$, so bekommt man $2u = f^3 - g^3$; weil nun auch u ein Cubus seyn muß, so erhalten wir in weit kleinern Zahlen zwey Cubos f^3 und g^3, deren Differenz gleichfals ein doppelter Cubus wäre.

VIII. Weil es nun in kleinen Zahlen keine dergleichen Cubos giebt, deren Summe oder Differenz ein doppelter Cubus wäre, so ist klar daß es auch in den größten Zahlen dergleichen nicht gebe.

IX. Man könnte zwar einwenden, daß da es in kleinern Zahlen gleich wohl einen solchen Fall gebe, nemlich wann $f = g$, der obige Schluß betriegen könnte. Allein wann $f = g$ wäre, so hätte man in dem erstern Fall $t + 3u = t - 3u$ und also $u = 0$, folglich wäre auch $q = 0$ und da wir gesetzt hatten $x = p + q$ und $y = p - q$, so wären auch die zwey ersten Cubi x^3 und y^3 schon einander gleich gewesen, welcher Fall ausdrücklich ausgenommen worden. Eben so auch in dem andern Fall, wann $f = g$ wäre, so müßte seyn $t + u = t - u$ und also wiederum $u = 0$, dahero auch $r = 0$ und folglich $p = 0$, da dann wiederum die beyden erstern Cubi x^3 und y^3 einander gleich würden, von welchem Fall aber keines weges die Frage ist.

248.

III. Frage: Man verlangt auf eine allgemeine Art drey Cubos x^3, y^3 und z^3, deren Summe wiederum einen Cubum ausmache?

Wir haben schon gesehen, daß man zwey von diesen Cubis für bekannt annehmen und daraus immer den dritten bestimmen könne, wann nur die beyden erstern einander nicht gleich wären; allein nach der obigen Methode findet man in einem jeden Fall nur einen Werth für den dritten Cubum und es würde sehr schwer fallen daraus noch mehrere ausfindig zu machen.

Wir sehen also hier alle drey Cubos als unbekannt an; und um eine allgemeine Auflösung zu geben, setzen wir $x^3+y^3+z^3=v^3$, und bringen den einen von den erstern auf die andere Seite, damit wir bekommen $x^3+y^3=v^3-z^3$; welcher Gleichung folgender Gestalt ein Genügen geschehen kann.

I. Man setze $x=p+q$ und $y=p-q$, so wird wie wir gesehen $x^3+y^3=2p(pp+3qq)$; ferner setze man $v=r+s$ und $z=r-s$, so wird $v^3-z^3=2s(ss+3rr)$; dahero dann seyn muß

$$2p(pp+3qq)=2s(ss+3rr), \quad \text{oder} \quad p(pp+3qq)=s(ss+3rr).$$

II. Wir haben oben gesehen, daß eine solche Zahl $pp+3qq$ keine andere Theiler habe, als welche selbst in eben dieser Form enthalten sind. Weil nun diese beyde Formeln $pp+3qq$ und $ss+3rr$ nothwendig einen gemeinen Theiler haben müßen, so sey derselbe $=tt+3uu$.

III. Zu diesem Ende setze man

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu) \quad \text{und} \quad ss+3rr=(hh+3kk)(tt+3uu),$$

da dann $p=ft+3gu$ und $q=gt-fu$ wird; folglich

$$pp=fftt+6fgtu+9gguu \quad \text{und} \quad qq=ggtt-2fgtu+ffuu;$$

hieraus

$$pp+3qq=(ff+3gg)tt+(3ff+9gg)uu$$

das ist

$$pp+3qq=(ff+3gg)(tt+3uu).$$

IV. Eben so erhalten wir aus der andern Formel

$$s=ht+3ku \quad \text{und} \quad r=kt-hu,$$

woraus diese Gleichung entspringt

$$(ft+3gu)(ff+3gg)(tt+3uu)=(ht+3ku)(hh+3kk)(tt+3uu),$$

welche durch $tt+3uu$ dividirt giebt

$$ft(ff+3gg)+3gu(ff+3gg)=ht(hh+3kk)+3ku(hh+3kk),$$

oder

$$ft(ff+3gg)-ht(hh+3kk)=3ku(hh+3kk)-3gu(ff+3gg),$$

woraus wir erhalten

$$t = \frac{3k(hh+3kk)-3g(ff+3gg)}{f(ff+3gg)-h(hh+3kk)}u.$$

V. Um nun gantze Zahlen zu bekommen, so nehme man

$$u = f(ff+3gg) - h(hh+3kk),$$

damit sey

$$t = 3k(hh+3kk) - 3g(ff+3gg),$$

wo man die vier Buchstaben f, g, h und k nach Belieben annehmen kann.

VI. Hat man nun aus diesen vier Zahlen die Werthe für t und u gefunden, so erhält man daraus:

I.) $p = ft + 3gu$, II.) $q = gt - fu$, III.) $s = ht + 3ku$, IV.) $r = kt - hu$,

und hieraus endlich für die Auflösung unserer Frage

$$x = p + q, \quad y = p - q, \quad z = r - s \quad \text{und} \quad v = r + s,$$

welche Auflösung so allgemein ist, daß darinnen alle mögliche Fälle enthalten sind, weil in dieser gantzen Rechnung keine willkührliche Einschränckung gemacht worden.

Der gantze Kunstgriff bestehet darinn, daß unsere Gleichung durch $tt + 3uu$ theilbar gemacht wurde, wodurch die Buchstaben t und u durch eine einfache Gleichung haben bestimmt werden können. Die Anwendung dieser Formeln kann auf unendlich vielerley Art angestellet werden, wovon wir einige Exempel anführen wollen.

I. Es sey $k = 0$ und $h = 1$, so wird

$$t = -3g(ff+3gg) \quad \text{und} \quad u = f(ff+3gg) - 1;$$

hieraus also

$p = -3fg(ff+3gg) + 3fg(ff+3gg) - 3g = -3g$, $q = -(ff+3gg)^2 + f$, ferner $s = -3g(ff+3gg)$ und $r = -f(ff+3gg) + 1$, woraus wir endlich bekommen

$$x = -3g - (ff+3gg)^2 + f, \quad y = -3g + (ff+3gg)^2 - f,$$

$z = (3g - f)(ff+3gg) + 1$ und endlich $v = -(3g+f)(ff+3gg) + 1$.

Laßt uns nun setzen $f=-1$ und $g=+1$, so bekommen wir

$$x=-20,\quad y=14,\quad z=17\quad \text{und}\quad v=-7;$$

dahero haben wir diese Gleichung

$$-20^3+14^3+17^3=-7^3\quad \text{oder}\quad 14^3+17^3+7^3=20^3.$$

II. Es sey $f=2$, $g=1$ und also $ff+3gg=7$; ferner $h=0$ und $k=1$, also $hh+3kk=3$, so wird seyn $t=-12$ und $u=14$; hieraus wird

$$p=2t+3u=18,\quad q=t-2u=-40,\quad r=t=-12\quad \text{und}\quad s=3u=42;$$

dahero wir bekommen

$$x=p+q=-22,\quad y=p-q=58,\quad z=r-s=-54\quad \text{und}\quad v=r+s=30;$$

also daß

$$-22^3+58^3-54^3=30^3\quad \text{oder}\quad 58^3=30^3+54^3+22^3.$$

Da sich nun alle Wurzeln durch 2 theilen laßen, so wird auch seyn

$$29^3=15^3+27^3+11^3.$$

III. Es sey $f=3$, $g=1$, $h=1$ und $k=1$, also $ff+3gg=12$ und $hh+3kk=4$, so wird $t=-24$ und $u=32$, welche sich durch 8 theilen laßen; und da es hier nur auf ihre Verhältniße ankommt, so wollen wir setzen $t=-3$ und $u=4$. Hieraus bekommen wir $p=3t+3u=+3$, $q=t-3u=-15$, $r=t-u=-7$ und $s=t+3u=+9$; hieraus wird $x=-12$ und $y=18$, $z=-16$ und $v=2$, also daß

$$-12^3+18^3-16^3=2^3\quad \text{oder}\quad 18^3=16^3+12^3+2^3:$$

oder auch durch 2 abgekürtzt

$$9^3=8^3+6^3+1^3.$$

IV. Laßt uns setzen $g=0$ und $k=h$, so daß f und h nicht bestimmt werden. Da wird nun $ff+3gg=ff$ und $hh+3kk=4hh$; also bekommen wir $t=12h^3$ und $u=f^3-4h^3$; daher ferner $p=ft=12fh^3$, $q=-f^4+4fh^3$, $r=12h^4-hf^3+4h^4=16h^4-hf^3$ und $s=3hf^3$, daraus endlich

$$x=p+q=16fh^3-f^4,\qquad y=p-q=8fh^3+f^4,$$

$$z=r-s=16h^4-4hf^3,\quad \text{und}\quad v=r+s=16h^4+2hf^3.$$

Nehmen wir nun $f=h=1$, so erhalten wir $x=15$, $y=9$, $z=12$

und $v = 18$, welche durch 3 abgekürtzt geben $x = 5$, $y = 3$, $z = 4$ und $v = 6$, also daß

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3.$$

Hierbey ist merckwürdig, daß diese drey Wurzeln 3, 4, 5 um Eins steigen, dahero wir untersuchen wollen ob es noch mehr dergleichen gebe?

249.

IV. Frage: Man verlangt drey Zahlen in einer Arithmetischen Progression, deren Differenz $= 1$, also daß die Cubi derselben Zahlen zusammen addirt, wieder einen Cubum hervorbringen?

Es sey x die mittlere dieser Zahlen, so wird die kleinere $= x - 1$ und die größere $= x + 1$; die Cubi derselben addirt geben nun

$$3x^3 + 6x = 3x(xx + 2),$$

welches ein Cubus seyn soll. Hierzu ist nun nöthig daß ein Fall bekannt sey wo dieses geschieht, und nach einigem Probiren findet man $x = 4$, dahero setzen wir nach den oben gegebenen Regeln $x = 4 + y$, so wird

$$xx = 16 + 8y + yy \quad \text{und} \quad x^3 = 64 + 48y + 12yy + y^3,$$

woraus unsere Formel wird $216 + 150y + 36yy + 3y^3$, wo das erste Glied ein Cubus ist, das letzte aber nicht. Man setze demnach die Wurzel $6 + fy$ und mache daß die beyden ersten Glieder wegfallen; da nun der Cubus davon ist $216 + 108fy + 18ffyy + f^3y^3$, so muß seyn $150 = 108f$, also $f = \frac{25}{18}$. Die übrigen Glieder aber durch yy dividirt geben $36 + 3y = 18ff + f^3y = \frac{25^2}{18} + \frac{25^3}{18^3}y$, oder $18^3 \cdot 36 + 18^3 \cdot 3y = 18^2 \cdot 25^2 + 25^3 y$ oder $18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2 = 25^3 y - 18^3 \cdot 3y$, dahero

$$y = \frac{18^3 \cdot 36 - 18^2 \cdot 25^2}{25^3 - 3 \cdot 18^3} = \frac{18^2(18 \cdot 36 - 25^2)}{25^3 - 3 \cdot 18^3},$$

und also

$$y = -\frac{324 \cdot 23}{1871} = -\frac{7452}{1871}; \quad \text{folglich} \quad x = \frac{32}{1871}.$$

Da es beschwerlich scheinen möchte diese Reduction zu einem Cubo weiter zu verfolgen, so ist zu mercken daß die Frage immer könne auf Quadrate gebracht werden. Dann da $3x(xx + 2)$ ein Cubus seyn soll, so setze man denselben $= x^3y^3$, da man denn erhält $3xx + 6 = xxy^3$ und also $xx = \frac{6}{y^3 - 3} = \frac{36}{6y^3 - 18}$. Da nun der Zähler dieses Bruchs schon ein Quadrat ist, so ist nur noch nöthig, den Nenner $6y^3 - 18$ zu einem Quadrat zu machen; wozu wiederum nöthig ist einen Fall zu errathen. Weil sich aber 18 durch 9 theilen läßt, 6 aber nur durch 3, so muß y sich auch durch 3 theilen laßen. Man setze deswegen $y = 3z$, so wird unser Nenner $= 162z^3 - 18$ welcher durch 9 dividirt, nemlich $18z^3 - 2$, noch ein Quadrat seyn muß. Dieses geschieht nun offenbar wann $z = 1$; man setze dahero $z = 1 + v$, so muß seyn $16 + 54v + 54vv + 18v^3 = \square$. Davon setze man die Wurzel $4 + \frac{27}{4}v$, deren Quadrat ist $16 + 54v + \frac{729}{16}vv$, und also $54 + 18v = \frac{729}{16}$; oder $18v = -\frac{135}{16}$, folglich $2v = -\frac{15}{16}$, und $v = -\frac{15}{32}$, hieraus erhalten wir $z = 1 + v = \frac{17}{32}$, ferner $y = \frac{51}{32}$.

Nun wollen wir den obigen Nenner betrachten, welcher war

$$6y^3 - 18 = 162z^3 - 18 = 9(18z^3 - 2).$$

Von diesem Factor aber $18z^3 - 2$ haben wir die Quadrat-Wurzel $4 + \frac{27}{4}v = \frac{107}{128}$, also die Quadrat-Wurzel aus dem gantzen Nenner ist $\frac{321}{128}$; aus dem Zähler aber ist derselbe $= 6$, woraus folget $x = \frac{6}{\frac{321}{128}} = \frac{256}{107}$, welcher Werth von dem vorher gefundenen gantz unterschieden ist. Also sind die Wurzeln von unsern drey Cubis folgende:

$$\text{I.)}\ x - 1 = \frac{149}{107}; \quad \text{II.)}\ x = \frac{256}{107}; \quad \text{III.)}\ x + 1 = \frac{363}{107},$$

deren Cubi zusammen addirt einen Cubum hervorbringen, davon die Wurzel seyn wird $xy = \frac{256}{107} \cdot \frac{51}{32} = \frac{408}{107}$.

250.

Wir wollen hiermit diesen Abschnitt von der unbestimmten Analytic beschließen, weil wir bey den angebrachten Fragen Gelegenheit genug gefunden haben die vornehmsten Kunstgriffe zu erklären, welche bisher in dieser Wissenschaft sind gebraucht worden.

ENDE DES ZWEYTEN THEILS

ADDITIONS

A L'ANALYSE INDÉTERMINÉE

PAR

JOSEPH LOUIS LAGRANGE

Les Additions à l'analyse indéterminée ont paru pour la première fois dans la traduction de *l'Algèbre* d'EULER faite par JEAN III BERNOULLI et publiée en 2 volumes à Lyon en 1774 sous le titre: *Élémens d'algebre par M. LÉONARD EULER, traduits de l'Allemand, avec des notes et des additions. Tome premier. De l'analyse déterminée. Tome second. De l'analyse indéterminée.* Les Additions de LAGRANGE y occupent les pages 369—664 du second volume. F. R.

TABLE DES MATIERES CONTENUES DANS LES ADDITIONS

AVERTISSEMENT

Les Géometres du siecle passé se sont beaucoup occupés de l'Analyse indéterminée, qu'on appelle vulgairement *Analyse de* DIOPHANTE; mais il n'y a proprement que Messieurs BACHET et FERMAT qui aient ajouté quelque chose à ce que DIOPHANTE lui-même nous a laissé sur cette matiere.

On doit sur-tout au premier une Méthode complette pour résoudre en nombres entiers tous les problemes indéterminés du premier degré;*) le second est l'Auteur de quelques Méthodes pour la résolution des équations indéterminées qui passent le second degré;**) de la Méthode singuliere, par laquelle on démontre qu'il est impossible que la somme ou la différence de deux carrés-carrés, puisse jamais être un carré;†) de la solution d'un grand nombre de problemes très-difficiles et de plusieurs beaux théoremes sur les nombres entiers, qu'il a laissés sans démonstration, mais dont la plupart ont été ensuite démontrés par Mr. EULER dans les Commentaires de Pétersbourg.††)

---

*) Voyez plus bas le paragraphe III. Au reste, je ne parle point ici de son *Commentaire sur* DIOPHANTE, parce que cet Ouvrage, excellent dans son genre, ne renferme à proprement parler aucune découverte.

**) Ce sont celles qui sont exposées dans les chapitres 8, 9 et 10 du Traité précédent. Le P. BILLI les a recueillies dans différens écrits de M. FERMAT, et les a publiées à la tête de la nouvelle édition de DIOPHANTE, donnée par M. FERMAT le fils.

†) Cette méthode est détaillée dans le chapit. 13 du Traité précédent; on en trouve les principes dans la *Remarque* de M. FERMAT, qui est après la Question XXVI du Livre VI de DIOPHANTE.

††) Les problemes et les théoremes dont nous parlons, sont répandus dans les *Remarques* de M. FERMAT sur les Questions de DIOPHANTE, et dans ses Lettres imprimées dans les *Opera Mathematica, etc.* et dans le second volume des *Œuvres de* WALLIS.

On trouvera aussi dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour les années 1770 et suiv. les démonstrations de quelques théoremes de cet Auteur, qui n'avoient pas encore été démontrés.

Cette branche de l'Analyse a été presque abandonnée dans ce siecle; et si on en excepte M^r. EULER, je ne connois personne qui s'y soit appliqué; mais les belles et nombreuses découvertes que ce grand Géometre y a faites, nous ont bien dédommagé de l'espece d'indifférence que les autres Géometres paroissent avoir eue jusqu'ici pour ces sortes de recherches. Les *Commentaires de Pétersbourg* sont pleins des travaux de M^r. EULER dans ce genre, et l'Ouvrage qu'il vient de donner est un nouveau service qu'il rend aux Amateurs de l'Analyse de DIOPHANTE. On n'avoit point encore d'Ouvrage où cette science fût traitée d'une maniere méthodique, et qui renfermât et expliquât clairement les principales regles connues jusqu'ici pour la solution des problemes indéterminés. Le Traité précédent réunit ce double avantage; mais pour le rendre encore plus complet, j'ai cru devoir y faire plusieurs additions dont je vais rendre compte en peu de mots.

La théorie des fractions continues est une des plus utiles de l'Arithmétique, où elle sert à résoudre avec facilité des problemes qui, sans son secours, seroient presqu'intraitables; mais elle est d'un plus grand usage encore dans la solution des problemes indéterminés, lorsqu'on ne demande que des nombres entiers. Cette raison m'a engagé à exposer cette théorie avec toute l'étendue nécessaire pour la faire bien entendre; comme elle manque dans les principaux Ouvrages d'Arithmétique et d'Algebre, elle doit être peu connue des Géometres; je serai satisfait, si je puis contribuer à la leur rendre un peu plus familiere. A la suite de cette théorie qui occupe le § I, viennent différens problemes curieux et entiérement nouveaux, qui dépendent à la vérité de la même théorie, mais que j'ai cru devoir traiter d'une maniere directe, pour en rendre la solution plus intéressante; on y remarquera principalement une méthode très-simple et très-facile pour réduire en fractions continues les racines des équations du second degré, et une démonstration rigoureuse que ces fractions doivent toujours être nécessairement périodiques.

Les autres Additions concernent sur-tout la résolution des équations indéterminées du premier et du second degré; je donne pour celles-ci des méthodes générales et nouvelles, tant pour le cas où l'on ne demande que des nombres rationnels, que pour celui où l'on exige que les nombres cherchés soient entiers; et je traite d'ailleurs quelques autres matieres importantes et relatives au même objet.

Enfin le dernier paragraphe renferme des recherches sur les fonctions qui ont la propriété, que le produit de deux ou de plusieurs fonctions semblables, est aussi une fonction semblable; j'y donne une méthode générale pour trouver ces sortes de fonctions, et j'en fais voir l'usage pour la résolution de différens problemes indéterminés, sur lesquels les méthodes connues n'auroient aucune prise.

Tels sont les principaux objets de ces Additions, auxquelles j'aurois pu donner beaucoup plus d'étendue, si je n'avois craint de passer de justes bornes; je souhaite que les matieres que j'y ai traitées puissent mériter l'attention des Géometres, et réveiller leur goût pour une partie de l'Analyse, qui me paroît très-digne d'exercer leur sagacité.

PARAGRAPHE I

SUR LES FRACTIONS CONTINUES

1. Comme la théorie des Fractions continues manque dans les livres ordinaires d'Arithmétique et d'Algebre, et que par cette raison elle doit être peu connue des Géometres, nous croyons devoir commencer ces Additions par une exposition abrégée de cette théorie, dont nous aurons souvent lieu de faire l'application dans la suite.

On appelle en général *fraction continue* toute expression de cette forme,

$$\alpha + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cfrac{d}{\delta +, \text{ etc.}}}}$$

où les quantités α, β, γ, δ, etc. et b, c, d, etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs; mais nous ne considérerons ici que les fractions continues, où les numérateurs b, c, d, etc. sont égaux à l'unité, c'est-à-dire celles qui sont de la forme

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta +, \text{ etc.}}}}$$

α, β, γ, etc. étant d'ailleurs des nombres quelconques entiers positifs ou négatifs; car celles-ci sont, à proprement parler, les seules qui soient d'un grand usage dans l'Analyse, les autres n'étant presque que de pure curiosité.

2. Milord Brouncker est, je crois, le premier qui ait imaginé les fractions continues; on connoît celle qu'il a trouvée pour exprimer le rapport du carré circonscrit à l'aire du cercle, et qui est

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 +, \text{ etc.}}}}$$

Mais on ignore le chemin qui l'y a conduit. On trouve seulement dans l'*Arithmetica infinitorum* quelques recherches sur ce sujet, dans lesquelles WALLIS démontre d'une maniere assez indirecte, quoique fort ingénieuse, l'identité de l'expression de BROUNCKER avec la sienne, qui est, comme l'on sait, $\frac{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdots}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots}$; il y donne aussi la méthode de réduire en général toutes sortes de fractions continues à des fractions ordinaires. Au reste, il ne paroît pas que l'un ou l'autre de ces deux grands Géometres ait connu les principales propriétés et les avantages singuliers des fractions continues; nous verrons ci-après que la découverte en est principalement due à HUYGHENS.

3. Les fractions continues se présentent naturellement toutes les fois qu'il s'agit d'exprimer en nombres des quantités fractionnaires ou irrationnelles. En effet, supposons qu'on ait à évaluer une quantité quelconque donnée a, qui ne soit pas exprimable par un nombre entier; la voie la plus simple est de commencer par chercher le nombre entier qui sera le plus proche de la valeur de a, et qui n'en différera que par une fraction moindre que l'unité. Soit ce nombre α, et l'on aura $a-\alpha$ égal à une fraction plus petite que l'unité; de sorte que $\frac{1}{a-\alpha}$ sera au contraire un nombre plus grand que l'unité; soit donc $\frac{1}{a-\alpha}=b$, et comme b doit être un nombre plus grand que l'unité, on pourra chercher de même le nombre entier qui approchera le plus de la valeur de b; et ce nombre étant nommé β, on aura de nouveau $b-\beta$ égal à une fraction plus petite que l'unité, et par conséquent $\frac{1}{b-\beta}$ sera égal à une quantité plus grande que l'unité, qu'on pourra désigner par c; ainsi, pour évaluer c, il n'y aura qu'à chercher pareillement le nombre entier le plus proche de c, lequel étant désigné par γ, on aura $c-\gamma$ égal à une quantité plus petite que l'unité, et par conséquent $\frac{1}{c-\gamma}$ sera égal à une quantité d plus grande que l'unité, et ainsi de suite. Par ce moyen il est clair qu'on doit épuiser peu à peu la valeur de a, et cela de la maniere la plus simple et la plus prompte qu'il est possible, puisqu'on n'emploie que des nombres entiers dont chacun approche, autant qu'il est possible, de la valeur cherchée.

Maintenant, puisque $\frac{1}{a-\alpha}=b$, on aura $a-\alpha=\frac{1}{b}$, et $a=\alpha+\frac{1}{b}$; de même, à cause de $\frac{1}{b-\beta}=c$, on aura $b=\beta+\frac{1}{c}$; et, à cause de $\frac{1}{c-\gamma}=d$, on aura pareillement $c=\gamma+\frac{1}{d}$, et ainsi de suite; de sorte qu'en substituant successivement ces valeurs, on aura

$$a = \alpha + \frac{1}{b},$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{c}},$$

$$= \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{d}}},$$

et en général

$$a = \alpha + \frac{1}{\beta + \frac{1}{\gamma + \frac{1}{\delta + \text{, etc.}}}}$$

Il est bon de remarquer ici que les nombres α, β, γ, etc. qui représentent, comme nous venons de le voir, les valeurs entieres approchées des quantités a, b, c, etc. peuvent être pris chacun de deux manieres différentes, puisqu'on peut prendre également, pour la valeur entiere approchée d'une quantité donnée, l'un ou l'autre des deux nombres entiers, entre lesquels se trouve cette quantité; il y a cependant une différence essentielle entre ces deux manieres de prendre les valeurs approchées par rapport à la fraction continue qui en résulte; car si on prend toujours les valeurs approchées plus petites que les véritables, les dénominateurs β, γ, δ, etc. seront tous positifs; au lieu qu'ils seront tous négatifs, si on prend les valeurs approchées toutes plus grandes que les véritables, et ils seront en partie positifs et en partie négatifs, si les valeurs approchées sont prises tantôt trop petites et tantôt trop grandes.

En effet, si α est plus petit que a, $a - \alpha$ sera une quantité positive; donc b sera positif, et β le sera aussi; au contraire $a - \alpha$ sera négatif, si α est plus grand que a; donc b sera négatif, et β le sera aussi. De même si β est plus petit que b, $b - \beta$ sera toujours une quantité positive; donc c le sera aussi, et par conséquent aussi γ; mais si β est plus grand que b, $b - \beta$ sera une quantité négative; de sorte que c, et par conséquent aussi γ, seront négatifs, et ainsi de suite.

Au reste, lorsqu'il s'agit de quantités négatives, j'entends par quantités plus petites celles qui, prises positivement, seroient plus grandes; nous aurons cependant quelquefois dans la suite occasion de comparer entr'elles des quantités purement par rapport à leur grandeur absolue; mais nous aurons soin d'avertir alors qu'il faudra faire abstraction des signes.

Je dois remarquer encore que si, parmi les quantités b, c, d, etc., il s'en trouve une qui soit égale à un nombre entier, alors la fraction continue sera terminée, parce qu'on pourra y conserver cette quantité même; par exemple, si c est un nombre entier, la fraction continue qui donne la valeur de a, sera

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c.}}$$

En effet, il est clair qu'il faudroit prendre $\gamma = c$, ce qui donneroit $d = \frac{1}{c-\gamma} = \frac{1}{0} = \infty$, et par conséquent $\delta = \infty$; de sorte que l'on auroit

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\infty}}},$$

les termes suivans évanouissant vis-à-vis de la quantité infinie ∞; or $\frac{1}{\infty} = 0$; donc on aura simplement

$$a = \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{c.}}$$

Ce cas arrivera toutes les fois que la quantité a sera commensurable, c'est-à-dire qu'elle sera exprimée par une fraction rationnelle; mais lorsque a sera une quantité irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue ira nécessairement à l'infini.

4. Supposons que la quantité a soit une fraction ordinaire $\frac{A}{B}$, A et B étant des nombres entiers donnés; il est d'abord évident que le nombre entier α qui approchera le plus de $\frac{A}{B}$, sera le quotient de la division de A par B; ainsi supposant la division faite à la maniere ordinaire, et nommant α le quotient et C le reste, on aura $\frac{A}{B} - \alpha = \frac{C}{B}$; donc $b = \frac{B}{C}$; pour avoir de même la valeur entiere approchée β de la fraction $\frac{B}{C}$, il n'y aura qu'à diviser B par C, et prendre pour β le quotient de cette division; alors nommant D le reste, on aura $b - \beta = \frac{D}{C}$, et par conséquent $c = \frac{C}{D}$; on continuera donc à diviser C par D, et le quotient sera la valeur du nombre γ, et ainsi de suite; d'où résulte cette regle fort simple pour réduire les fractions ordinaires en fractions continues.

Divisez d'abord le numérateur de la fraction proposée par son dénominateur, et nommez le quotient α; divisez ensuite le dénominateur par le reste, et nommez le quotient β; divisez après cela le premier reste par le second reste, et soit le *quotient γ; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier, jusqu'à ce qu'on parvienne à une division qui se fasse sans reste, ce qui doit nécessairement arriver, puisque les restes sont tous des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue*

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + , \text{ etc.}}}}$$

qui sera égale à la fraction donnée.

5. Soit proposé de réduire en fraction continue la fraction $\frac{1103}{887}$; on divisera donc 1103 par 887, on aura le quotient 1 et le reste 216; on divisera 887 par 216, on aura le quotient 4 et le reste 23; on divisera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 et le reste 9; on divisera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 et le reste 5; on divisera 9 par 5, on aura le quotient 1 et le reste 4; on divisera 5 par 4, on aura le quotient 1 et le reste 1; enfin, divisant 4 par 1, on aura le quotient 4 et le reste nul, de sorte que l'opération sera terminée. Rassemblant donc par ordre tous les quotiens trouvés, on aura cette série 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4, d'où l'on formera la fraction continue

$$\frac{1103}{887} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}.$$

6. Comme dans la maniere ordinaire de faire les divisions, on prend toujours pour quotient le nombre entier qui est égal ou moindre que la fraction proposée, il s'ensuit que par la méthode précédente on n'aura que des fractions continues, dont tous les dénominateurs seront des nombres positifs.

Or on peut aussi prendre pour quotient le nombre entier, qui est immédiatement plus grand que la valeur de la fraction, lorsque cette fraction n'est pas réductible à un nombre entier, et pour cela il n'y a qu'à augmenter d'une unité la valeur du quotient trouvé à la maniere ordinaire; alors le reste sera négatif, et le quotient suivant sera nécessairement négatif. Ainsi on pourra à volonté rendre les termes de la fraction continue positifs ou négatifs.

Dans l'exemple précédent, au lieu de prendre 1 pour le quotient de 1103 divisé par 887, je puis prendre 2; mais j'aurai le reste négatif -671, par lequel il faudra maintenant diviser 887; on divisera donc 887 par -671, et l'on aura ou le quotient -1 et le reste 216, ou le quotient -2 et le reste -455. Prenons le quotient plus grand -1, et alors il faudra diviser le reste -671 par le reste 216, d'où l'on aura ou le quotient -3 et le reste -23, ou le quotient -4 et le reste 193. Je continue la division en adoptant le quotient plus grand -3; j'aurai à diviser le reste 216 par le reste -23, ce qui me donnera ou le quotient -9 et le reste 9, ou le quotient -10 et le reste -14, et ainsi de suite.

De cette maniere on aura

$$\frac{1103}{887} = 2 + \cfrac{1}{-1 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{1}{-9 + \text{, etc.}}}}$$

où l'on voit que tous les dénominateurs sont négatifs.

7. On peut au reste rendre positif chaque dénominateur négatif, en changeant le signe du numérateur; mais il faut alors changer aussi le signe du numérateur suivant; car il est clair qu'on a

$$\mu + \cfrac{1}{-\nu + \cfrac{1}{\pi + \text{, etc.}}} = \mu - \cfrac{1}{\nu - \cfrac{1}{\pi + \text{, etc.}}}$$

Ensuite on pourra, si l'on veut, faire disparoître tous les signes — de la fraction continue, et la réduire à une autre, où tous les termes soient positifs; car on a en général

$$\mu - \cfrac{1}{\nu + \text{, etc.}} = \mu - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\nu - 1 + \text{, etc.}}}$$

comme on peut s'en convaincre aisément, en réduisant ces deux quantités en fractions ordinaires.

On pourroit aussi par un moyen semblable introduire des termes négatifs à la place des positifs, car on a

$$\mu + \cfrac{1}{\nu + \text{, etc.}} = \mu + 1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\nu - 1 + \text{, etc.}}}$$

D'où l'on voit que par ces sortes de transformations on peut quelquefois simplifier une fraction continue, et la réduire à un moindre nombre de termes; ce qui aura lieu toutes les fois qu'il y aura des dénominateurs égaux à l'unité positive ou négative.

En général il est clair que pour avoir la fraction continue la plus convergente qu'il est possible vers la valeur de la quantité donnée, il faut toujours prendre pour α, β, γ, etc. les nombres entiers qui approchent le plus des quantités a, b, c, etc. soit qu'ils soient plus petits ou plus grands que ces quantités; or il est facile de voir que si, par exemple, on ne prend pas pour α le nombre entier qui approche le plus, soit en excès ou en défaut, de a, le nombre suivant β sera nécessairement égal à l'unité; en effet la différence entre a et α sera alors plus grande que $\frac{1}{2}$, par conséquent on aura $b = \frac{1}{a-\alpha}$ plus petit que 2; donc β ne pourra être qu'égal à l'unité.

Ainsi toutes les fois que dans une fraction continue on trouvera des dénominateurs égaux à l'unité, ce sera une marque que l'on n'a pas pris les dénominateurs précédens aussi approchans qu'il est possible, et que par conséquent la fraction peut se simplifier en augmentant ou en diminuant ces dénominateurs d'une unité, ce qu'on pourra exécuter par les formules précédentes, sans être obligé de refaire en entier le calcul.

8. La méthode de l'art. 4 peut servir aussi à réduire en fraction continue toute quantité irrationnelle ou transcendante, pourvu qu'elle soit auparavant exprimée en décimales; mais comme la valeur en décimales ne peut être qu'approchée, et qu'en augmentant d'une unité le dernier caractere on a deux limites, entre lesquelles doit se trouver la vraie valeur de la quantité proposée, il faudra, pour ne pas sortir de ces limites, faire à la fois le même calcul sur les deux fractions dont il s'agit, et n'admettre ensuite dans la fraction continue que les quotiens qui résulteront également des deux opérations.

Soit, par exemple, proposé d'exprimer par une fraction continue le rapport de la circonférence du cercle au diametre.

Ce rapport exprimé en décimales est, par le calcul de Viete, 3,1415926535....; de sorte qu'on aura la fraction $\frac{31415926535}{10000000000}$ à réduire en fraction continue par la méthode ci-dessus; or, si on ne prend que la fraction $\frac{314159}{100000}$, on trouve les quotiens 3, 7, 15, 1, etc., et si on prenoit la fraction plus grande $\frac{314160}{100000}$, on trouveroit les quotiens 3, 7, 16, etc. de sorte que le troisieme quotient demeureroit incertain; d'où l'on voit que, pour pouvoir pousser seulement la fraction continue au-delà de trois termes, il faudra nécessairement adopter une valeur de la périphérie qui ait plus de six caracteres.

Or, si on prend la valeur donnée par LUDOLPH en trente-cinq caracteres, et qui est 3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288; et qu'on opere en même temps sur cette fraction et sur la même, en y augmentant le dernier caractere 8 d'une unité, on trouvera cette suite de quotiens, 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1, 4, 2, 6, 6, 1; de sorte que l'on aura

$$\frac{\textit{Periph.}}{\textit{diamétr.}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 +, \text{ etc.}}}}}}}$$

Comme il y a ici des dénominateurs égaux à l'unité, on pourra simplifier la fraction, en y introduisant des termes négatifs, par les formules de l'art. 7, et l'on trouvera

$$\frac{\textit{Périph.}}{\textit{diamétr.}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 +, \text{ etc.}}}}}}$$

ou bien

$$\frac{\textit{Périph.}}{\textit{diamétr.}} = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-3 +, \text{ etc.}}}}}}$$

9. Nous avons montré ailleurs comment on peut appliquer la théorie des fractions continues à la résolution numérique des équations, pour laquelle on n'avoit encore que des méthodes imparfaites et insuffisantes. (Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin pour les années 1767 et 1768.[1]) Toute la difficulté consiste à pouvoir trouver dans une équation quelconque la valeur entiere la plus approchée, soit en excès ou en défaut, de la racine cherchée, et c'est sur quoi nous avons donné les premiers des regles sûres et géné-

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, publiées par les soins de M. I.-A. SERRET, t. II, p. 538 et 581.
H. W.

rales, par lesquelles on peut non-seulement reconnoître combien de racines réelles positives ou négatives, égales ou inégales, contient la proposée, mais encore trouver facilement les limites de chacune de ces racines, et même les limites des quantités réelles qui composent les racines imaginaires. Supposant donc que x soit l'inconnue de l'équation proposée, on cherchera d'abord le nombre entier qui approchera le plus de la racine cherchée, et nommant ce nombre α, il n'y aura qu'à faire, comme on l'a vu dans l'art. 3, $x = \alpha + \frac{1}{y}$, (je nomme ici x, y, z, etc. ce que j'ai dénoté dans l'art. cité par a, b, c, etc.); et substituant cette valeur à la place de x, on aura, après avoir fait évanouir les fractions, une équation du même degré en y, qui devra avoir au moins une racine positive ou négative plus grande que l'unité. On cherchera donc de nouveau la valeur entiere approchée de cette racine, et nommant cette valeur β, on fera ensuite $y = \beta + \frac{1}{z}$, ce qui donnera de même une équation en z, qui aura aussi nécessairement une racine plus grande que l'unité, et dont on cherchera pareillement la valeur entiere approchée γ, et ainsi de suite. De cette maniere la racine cherchée se trouvera exprimée par la fraction continue

$$\alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \text{, etc.}$$

qui sera terminée si la racine est commensurable, mais qui ira nécessairement à l'infini, si elle est incommensurable.

On trouvera dans les Mémoires cités tous les principes et les détails nécessaires pour se mettre au fait de cette méthode et de ses usages, et même différens moyens pour abréger souvent les opérations qu'elle demande; nous croyons n'y avoir presque rien laissé à désirer sur ce sujet si important.

Au reste, pour ce qui regarde les racines des équations du second degré, nous donnerons plus bas, (art. 33 et suiv.), une méthode particuliere et très-simple pour les convertir en fractions continues.

10. Après avoir expliqué la génération des fractions continues, nous allons en montrer les usages et les principales propriétés.

Il est d'abord évident que plus on prend de termes dans une fraction continue, plus on doit approcher de la vraie valeur de la quantité qu'on a exprimée par cette fraction; de sorte que si on s'arrête successivement à chaque terme de la fraction, on aura une suite de quantités qui seront nécessairement convergentes vers la quantité proposée.

Ainsi ayant réduit la valeur de a à la fraction continue

$$\alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta +, \text{ etc.}}}}$$

on aura les quantités

$$\alpha, \quad \alpha + \frac{1}{\beta}, \quad \alpha + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma}}, \quad \text{etc.}$$

ou bien, en réduisant,

$$\alpha, \quad \frac{\alpha\beta + 1}{\beta}, \quad \frac{\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma}{\beta\gamma + 1}, \quad \text{etc.}$$

qui approcheront de plus en plus de la valeur de a.

Pour pouvoir mieux juger de la loi et de la convergence de ces quantités, nous remarquerons que par les formules de l'article 3 on a

$$a = \alpha + \frac{1}{b}, \quad b = \beta + \frac{1}{c}, \quad c = \gamma + \frac{1}{d}, \quad \text{etc.}$$

d'où l'on voit d'abord que α est la premiere valeur approchée de a; qu'ensuite si on prend la valeur exacte de a, qui est $\frac{\alpha b + 1}{b}$, et qu'on y substitue pour b sa valeur approchée β, on aura cette valeur plus approchée $\frac{\alpha\beta + 1}{\beta}$; qu'on aura de même une troisieme valeur plus approchée de a, en mettant d'abord pour b sa valeur exacte $\frac{\beta c + 1}{c}$, ce qui donne $a = \frac{(\alpha\beta + 1)c + \alpha}{\beta c + 1}$, et prenant ensuite pour c la valeur approchée γ; par ce moyen la nouvelle valeur approchée de a sera

$$\frac{(\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha}{\beta\gamma + 1};$$

continuant le même raisonnement, on pourra approcher davantage, en mettant, dans l'expression de a trouvée ci-dessus, à la place de c sa valeur exacte $\frac{\gamma d + 1}{d}$, ce qui donnera

$$a = \frac{((\alpha\beta + 1)\gamma + \alpha)d + \alpha\beta + 1}{(\beta\gamma + 1)d + \beta},$$

et prenant ensuite pour d sa valeur approchée δ; de sorte qu'on aura pour la quatrieme approximation la quantité

$$\frac{((\alpha\beta+1)\gamma+\alpha)\delta+\alpha\beta+1}{(\beta\gamma+1)\delta+\beta},$$

et ainsi de suite.

De-là il est facile de voir que si par le moyen des nombres α, β, γ, δ, etc. on forme les expressions suivantes,

$$\begin{array}{ll} A=\alpha & A^1=1 \\ B=\beta A+1 & B^1=\beta \\ C=\gamma B+A & C^1=\gamma B^1+A^1 \\ D=\delta C+B & D^1=\delta C^1+B^1 \\ E=\varepsilon D+C & E^1=\varepsilon D^1+C^1 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

on aura cette suite de fractions convergentes vers la quantité a,

$$\frac{A}{A^1},\ \frac{B}{B^1},\ \frac{C}{C^1},\ \frac{D}{D^1},\ \frac{E}{E^1},\ \frac{F}{F^1},\ \text{etc.}$$

Si la quantité a est rationnelle, et représentée par une fraction quelconque $\frac{V}{V^1}$, il est évident que cette fraction sera toujours la derniere dans la série précédente; puisque dans ce cas la fraction continue sera terminée, et que la derniere fraction de la série ci-dessus doit toujours équivaloir à toute la fraction continue.

Mais si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, alors la fraction continue allant nécessairement à l'infini, on pourra aussi pousser à l'infini la série des fractions convergentes.

11. Examinons maintenant la nature de ces fractions; et d'abord il est visible que les nombres A, B, C, etc. doivent aller en augmentant, aussi bien que les nombres A^1, B^1, C^1, etc. car:

1°. Si les nombres α, β, γ, etc. sont tous positifs, les nombres A, B, C, etc. et A^1, B^1, C^1, etc. seront aussi tous positifs, et l'on aura évidemment $B>A$, $C>B$, $D>C$, etc. et $B^1=$ ou $>A^1$, $C^1>B^1$, $D^1>C^1$, etc.

2°. Si les nombres α, β, γ, etc. sont tous ou en partie négatifs, alors parmi les nombres A, B, C, etc. et A^1, B^1, C^1, etc. il y en aura de positifs et de négatifs; mais dans ce cas on considérera que l'on a en général par les formules précédentes

$$\frac{B}{A} = \beta + \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}, \quad \frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}, \text{ etc.}$$

d'où l'on voit d'abord que si les nombres α, β, γ, etc. sont différens de l'unité, quels que soient d'ailleurs leurs signes, on aura nécessairement, en faisant abstraction des signes, $\frac{B}{A}$ plus grand que l'unité; donc $\frac{A}{B}$ moindre que l'unité, par conséquent $\frac{C}{B}$ plus grand que l'unité, et ainsi de suite; donc B plus grand que A, C plus grand que B, etc.

Il n'y aura d'exception que lorsque parmi les nombres α, β, γ, etc. il s'en trouvera d'égaux à l'unité; supposons, par exemple, que le nombre γ soit le premier qui soit égal à ± 1; on aura d'abord B plus grand que A, mais C sera moindre que B, s'il arrive que la fraction $\frac{A}{B}$ soit de signe différent de γ; ce qui est clair par l'équation $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$; parce que dans ce cas $\gamma + \frac{A}{B}$ sera un nombre moindre que l'unité; or je dis qu'alors on aura nécessairement D plus grand que B; car puisque $\gamma = \pm 1$, on aura, (art. 10), $c = \pm 1 + \frac{1}{d}$, et $c - \frac{1}{d} = \pm 1$; or, comme c et d sont des quantités plus grandes que l'unité, (art. 3), il est clair que cette équation ne pourra subsister, à moins que c et d ne soient de même signe; donc, puisque γ et δ sont les valeurs entieres approchées de c et d, ces nombres γ et δ devront être aussi de même signe; mais la fraction $\frac{C}{B} = \gamma + \frac{A}{B}$ doit être de même signe que γ, à cause que γ est un nombre entier, et $\frac{A}{B}$ une fraction moindre que l'unité; donc $\frac{C}{B}$ et δ seront des quantités de même signe; par conséquent $\frac{\delta C}{B}$ sera une quantité positive. Or on a $\frac{D}{C} = \delta + \frac{B}{C}$; donc multipliant par $\frac{C}{B}$, on aura $\frac{D}{B} = \delta \frac{C}{B} + 1$; donc $\frac{\delta C}{B}$ étant une quantité positive, il est clair que $\frac{D}{B}$ sera plus grand que l'unité; donc D plus grand que B.

De-là on voit que s'il arrive que dans la série A, B, C, etc. il se trouve un terme qui soit moindre que le précédent, le terme suivant sera nécessairement plus grand; de sorte qu'en mettant à part ces termes plus petits, la série ne laissera pas d'aller en augmentant.

Au reste on pourra toujours éviter, si l'on veut, cet inconvénient, soit en prenant les nombres α, β, γ, etc. tous positifs, soit en les prenant tous différens de l'unité, ce qui est toujours possible.

On fera les mêmes raisonnemens par rapport à la série A^1, B^1, C^1, etc. dans laquelle on a pareillement

$$\frac{B^1}{A^1}=\beta,\quad \frac{C^1}{B^1}=\gamma+\frac{A^1}{B^1},\quad \frac{D^1}{C^1}=\delta+\frac{B^1}{C^1},\ \text{etc.}$$

d'où l'on déduira des conclusions semblables aux précédentes.

12. Maintenant, si on multiplie en croix les termes des fractions voisines dans la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. on trouvera

$$BA^1-AB^1=1,\quad CB^1-BC^1=AB^1-BA^1,\quad DC^1-CD^1=BC^1-CB^1,\ \text{etc.}$$

d'où je conclus qu'on aura en général

$$\begin{aligned}BA^1-AB^1&=1\\ CB^1-BC^1&=-1\\ DC^1-CD^1&=1\\ ED^1-DE^1&=-1,\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Cette propriété est très-remarquable, et donne lieu à plusieurs conséquences importantes.

D'abord on voit que les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. doivent être déjà réduites à leurs moindres termes; car si, par exemple, C et C^1 avoient un commun diviseur autre que l'unité, le nombre entier CB^1-BC^1 seroit aussi divisible par ce même diviseur, ce qui ne se peut, à cause de $CB^1-BC^1=-1$.

Ensuite si on met les équations précédentes sous cette forme

$$\begin{aligned}\frac{B}{B^1}-\frac{A}{A^1}&=\frac{1}{A^1B^1}\\ \frac{C}{C^1}-\frac{B}{B^1}&=-\frac{1}{B^1C^1}\\ \frac{D}{D^1}-\frac{C}{C^1}&=\frac{1}{C^1D^1}\\ \frac{E}{E^1}-\frac{D}{D^1}&=-\frac{1}{D^1E^1},\ \text{etc.}\end{aligned}$$

il est aisé de voir que les différences entre les fractions voisines de la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. vont continuellement en diminuant, de sorte que cette série est nécessairement convergente.

Or je dis que la différence entre deux fractions consécutives est aussi petite qu'il est possible; en sorte qu'entre ces mêmes fractions il ne sauroit tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions-là.

Car prenons, par exemple, les deux fractions $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{D}{D^1}$, dont la différence est $\frac{1}{C^1D^1}$, et supposons, s'il est possible, qu'il existe une autre fraction $\frac{m}{n}$, dont la valeur tombe entre celles de ces deux fractions, et dans laquelle le dénominateur n soit moindre que C^1 ou que D^1; donc puisque $\frac{m}{n}$ doit se trouver entre $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{D}{D^1}$, il faudra que la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{C}{C^1}$, qui est $\frac{mC^1-nC}{nC^1}$ ou $\frac{nC-mC^1}{nC^1}$, soit plus petite que $\frac{1}{C^1D^1}$, différence entre $\frac{D}{D^1}$ et $\frac{C}{C^1}$; mais il est clair que celle-là ne sauroit être moindre que $\frac{1}{nC^1}$; donc, si $n < D^1$, elle sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{C^1D^1}$; de même la différence entre $\frac{m}{n}$ et $\frac{D}{D^1}$ ne pouvant être plus petite que $\frac{1}{nD^1}$, sera nécessairement plus grande que $\frac{1}{C^1D^1}$, si $n < C^1$, au lieu qu'elle devroit en être plus petite.

13. Voyons présentement de combien chaque fraction de la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, etc. approchera de la valeur de la quantité a. Pour cela on remarquera que les formules trouvées dans l'art. 10 donnent

$$a = \frac{Ab+1}{A^1b}$$

$$a = \frac{Bc+A}{B^1c+A^1}$$

$$a = \frac{Cd+B}{C^1d+B^1}$$

$$a = \frac{De+C}{D^1e+C^1}$$

et ainsi de suite.

Donc si on veut savoir de combien la fraction $\frac{C}{C^1}$, par exemple, approche de la quantité, on cherchera la différence entre $\frac{C}{C^1}$ et a; en prenant pour a la quantité $\frac{Cd+B}{C^1d+B^1}$, on aura

$$a - \frac{C}{C^1} = \frac{Cd+B}{C^1d+B^1} - \frac{C}{C^1} = \frac{BC^1-CB^1}{C^1(C^1d+B^1)} = \frac{1}{C^1(C^1d+B^1)},$$

à cause de $BC^1 - CB^1 = 1$, (art. 12); or, comme on suppose que δ soit la valeur approchée de d, en sorte que la différence entre d et δ soit moindre que l'unité, (art. 3), il est clair que la valeur de d sera renfermée entre les deux nombres δ et $\delta \pm 1$, (le signe supérieur étant pour le cas où la valeur approchée δ est moindre que la véritable d, et le signe inférieur pour le cas où δ est plus grand que d), et que par conséquent la valeur de $C^1 d + B^1$, sera aussi renfermée entre ces deux-ci, $C^1\delta + B^1$ et $C^1(\delta \pm 1) + B^1$, c'est-à-dire entre D^1 et $D^1 \pm C^1$; donc la différence $a - \frac{C}{C^1}$ sera renfermée entre ces deux limites $\frac{1}{C^1 D^1}$, $\frac{1}{C^1(D^1 \pm C^1)}$; d'où l'on pourra juger de la quantité de l'approximation de la fraction $\frac{C}{C^1}$.

14. En général on aura

$$a = \frac{A}{A^1} + \frac{1}{A^1 b}$$

$$a = \frac{B}{B^1} - \frac{1}{B^1(B^1 c + A^1)}$$

$$a = \frac{C}{C^1} + \frac{1}{C^1(C^1 d + B^1)}$$

$$a = \frac{D}{D^1} - \frac{1}{D^1(D^1 e + C^1)}$$

et ainsi de suite.

Or, si on suppose que les valeurs approchées α, β, γ, etc. soient toujours prises moindres que les véritables, ces nombres seront tous positifs, aussi bien que les quantités b, c, d, etc. (art. 3); donc les nombres A^1, B^1, C^1, etc. seront aussi tous positifs; d'où il s'ensuit que les différences entre la quantité a et les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. seront alternativement positives et négatives; c'est-à-dire que ces fractions seront alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a.

De plus, comme $b > \beta$, $c > \gamma$, $d > \delta$, etc. (*hyp.*) on aura

$$b > B^1, \quad B^1 c + A^1 > B^1\gamma + A^1 > C^1, \quad C^1 d + B^1 > C^1\delta + B^1 > D^1, \text{ etc.}$$

et comme $b < \beta + 1$, $c < \gamma + 1$, $d < \delta + 1$, etc. on aura

$$b < B^1 + 1,$$

$$B^1 c + A^1 < B^1(\gamma + 1) + A^1 < C^1 + B^1, \quad C^1 d + B^1 < C^1(\delta + 1) + B^1 < D^1 + C^1, \text{ etc.}$$

de sorte que les erreurs qu'on commettroit en prenant les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. pour la valeur de a, seroient respectivement moindres que

$$\frac{1}{A^1B^1},\ \frac{1}{B^1C^1},\ \frac{1}{C^1D^1},\ \text{etc.}$$

mais plus grandes que

$$\frac{1}{A^1(B^1+A^1)},\ \frac{1}{B^1(C^1+B^1)},\ \frac{1}{C^1(D^1+C^1)},\ \text{etc.}$$

d'où l'on voit combien ces erreurs sont petites, et combien elles vont en diminuant d'une fraction à l'autre.

Mais il y a plus: puisque les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a, il est clair que la valeur de cette quantité se trouvera toujours entre deux fractions consécutives quelconques; or nous avons vu ci-dessus, (art. 12), qu'il est impossible qu'entre deux telles fractions puisse se trouver une autre fraction quelconque qui ait un dénominateur moindre que l'un de ceux de ces deux fractions; d'où l'on peut conclure que chacune des fractions dont il s'agit, exprime la quantité a plus exactement que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque, dont le dénominateur seroit plus petit que celui de la fraction suivante; c'est-à-dire que la fraction $\frac{C}{C^1}$, par exemple, exprimera la valeur de a plus exactement que toute autre fraction $\frac{m}{n}$, dans laquelle n seroit moindre que D^1.

15. Si les valeurs approchées α, β, γ, etc. sont toutes ou en partie plus grandes que les véritables, alors parmi ces nombres il y en aura nécessairement de négatifs, (art. 3), ce qui rendra aussi négatifs quelques-uns des termes des séries A, B, C, etc. A^1, B^1, C^1, etc. par conséquent les différences entre les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. et la quantité a ne seront plus alternativement positives et négatives, comme dans le cas de l'article précédent; de sorte que ces fractions n'auront plus l'avantage de donner toujours des limites en *plus* et en *moins* de la quantité a, avantage qui me paroît d'une très-grande importance, et qui doit par conséquent faire préférer toujours dans la pratique les fractions continues où les dénominateurs seront tous positifs. Ainsi nous ne considérerons plus dans la suite que des fractions de cette espece.

16. Considérons donc la série

$$\frac{A}{A^1},\ \frac{B}{B^1},\ \frac{C}{C^1},\ \frac{D}{D^1},\ \text{etc.}$$

dans laquelle les fractions sont alternativement plus petites et plus grandes que la quantité a, et il est clair qu'on pourra partager cette série en ces deux-ci:

$$\frac{A}{A^1},\ \frac{C}{C^1},\ \frac{E}{E^1},\ \text{etc.}$$

$$\frac{B}{B^1},\ \frac{D}{D^1},\ \frac{F}{F^1},\ \text{etc.}$$

donc la premiere sera composée de fractions toutes plus petites que a, et qui iront en augmentant vers la quantité a; donc la seconde sera composée de fractions toutes plus grandes que a, mais qui iront en diminuant vers cette même quantité. Examinons maintenant chacune de ces deux séries en particulier: dans la premiere on aura, (art. 10 et 12),

$$\frac{C}{C^1}-\frac{A}{A^1}=\frac{\gamma}{A^1C^1}$$

$$\frac{E}{E^1}-\frac{C}{C^1}=\frac{\varepsilon}{C^1E^1},\ \text{etc.}$$

et dans la seconde on aura

$$\frac{B}{B^1}-\frac{D}{D^1}=\frac{\delta}{B^1D^1}$$

$$\frac{D}{D^1}-\frac{F}{F^1}=\frac{\zeta}{D^1F^1},\ \text{etc.}$$

Or, si les nombres γ, δ, ε, etc. étoient tous égaux à l'unité, on pourroit prouver, comme dans l'art. 12, qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre des séries précédentes, il ne pourroit jamais se trouver aucune autre fraction dont le dénominateur seroit moindre que ceux de ces deux fractions; mais il n'en sera pas de même, lorsque les nombres γ, δ, ε, etc. seront différens de l'unité: car dans ce cas on pourra insérer entre les fractions dont il s'agit autant de fractions *intermédiaires* qu'il y aura d'unités dans les nombres $\gamma-1$, $\delta-1$, $\varepsilon-1$, etc. et pour cela il n'y aura qu'à mettre successivement dans les valeurs de C et C^1, (art. 10), les nombres 1, 2, 3, etc. γ à la place de γ; et de même dans les valeurs de D et D^1, les nombres 1, 2, 3, etc. δ à la place de δ, et ainsi de suite.

17. Supposons, par exemple, que γ soit $=4$, on aura $C=4B+A$ et $C^1=4B^1+A^1$, et on pourra insérer entre les fractions $\frac{A}{A^1}$ et $\frac{C}{C^1}$ trois fractions *intermédiaires*, qui seront

$$\frac{B+A}{B^1+A^1},\quad \frac{2B+A}{2B^1+A^1},\quad \frac{3B+A}{3B^1+A^1}.$$

Or il est clair que les dénominateurs de ces fractions forment une suite croissante arithmétiquement depuis A^1 jusqu'à C^1; et nous allons voir que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A^1}$ jusqu'à $\frac{C}{C^1}$, en sorte qu'il seroit maintenant impossible d'insérer dans la série

$$\frac{A}{A^1},\quad \frac{B+A}{B^1+A^1},\quad \frac{2B+A}{2B^1+A^1},\quad \frac{3B+A}{3B^1+A^1},\quad \frac{4B+A}{4B^1+A^1} \text{ ou } \frac{C}{C^1}$$

aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, et dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions. Car si on prend les différences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA^1-AB^1=1$,

$$\frac{B+A}{B^1+A^1}-\frac{A}{A^1}=\frac{1}{A^1(B^1+A^1)}$$

$$\frac{2B+A}{2B^1+A^1}-\frac{B+A}{B^1+A^1}=\frac{1}{(B^1+A^1)(2B^1+A^1)}$$

$$\frac{3B+A}{3B^1+A^1}-\frac{2B+A}{2B^1+A^1}=\frac{1}{(2B^1+A^1)(3B^1+A^1)}$$

$$\frac{C}{C^1}-\frac{3B+A}{3B^1+A^1}=\frac{1}{(3B^1+A^1)C^1};$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B+A}{B^1+A^1}$, etc. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives; ensuite, comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, on pourra prouver par un raisonnement analogue à celui que nous avons fait dans l'art. 12, qu'il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{m}{n}$, si le dénominateur n tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou en général s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs.

De plus, comme les fractions dont nous parlons sont toutes plus petites[1]) que la vraie valeur de a, et que la fraction $\frac{B}{B^1}$ en est plus grande[1]), il est évident que chacune de ces fractions approchera de la quantité a, en sorte que la différence en sera plus petite que celle de la même fraction et de la fraction $\frac{B}{B^1}$; or on trouve

$$\frac{B}{B^1}-\frac{A}{A^1}=\frac{1}{A^1B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{B+A}{B^1+A^1}=\frac{1}{(B^1+A^1)B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{2B+A}{2B^1+A^1}=\frac{1}{(2B^1+A^1)B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{3B+A}{3B^1+A^1}=\frac{1}{(3B^1+A^1)B^1}$$

$$\frac{B}{B^1}-\frac{C}{C^1}=\frac{1}{C^1B^1}.$$

Donc, puisque ces différences sont aussi égales à l'unité divisée par le produit des dénominateurs, on y pourra appliquer le même raisonnement de l'article 12, pour prouver qu'aucune fraction $\frac{m}{n}$ ne sauroit tomber entre une quelconque des fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B+A}{B^1+A^1}$, $\frac{2B+A}{2B^1+A^1}$, etc. et la fraction $\frac{B}{B^1}$, si le dénominateur n est plus petit que celui de la même fraction; d'où il suit que chacune de ces fractions approche plus de la quantité a que ne pourroit faire toute autre fraction plus petite que a, et qui auroit un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui seroit conçue en termes plus simples.

18. Nous n'avons considéré dans l'article précédent que les fractions *intermédiaires* entre $\frac{A}{A^1}$ et $\frac{C}{C^1}$, il en sera de même des fractions *intermédiaires* entre $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{E}{E^1}$, entre $\frac{E}{E^1}$ et $\frac{G}{G^1}$, etc. si ε, η, etc. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B^1}$, $\frac{D}{D^1}$, $\frac{F}{F^1}$, etc. tout ce que nous

---

1) Edition originale: . . . *comme les fractions . . . sont toutes plus grandes . . . et que . . .* $\frac{B}{B^1}$ *en est plus petite . . .* A la suite de cette erreur qui se trouve dans toutes les éditions ultérieures, y compris celle de SERRET, et qui se continue dans les 5 équations suivantes, il a fallu y changer les signes des différences. H. W.

venons de dire relativement à la premiere série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. de sorte que, si les nombres δ, ζ, etc. sont plus grands que l'unité, on pourra insérer entre les fractions $\frac{B}{B^1}$ et $\frac{D}{D^1}$, entre $\frac{D}{D^1}$ et $\frac{F}{F^1}$, etc. différentes fractions *intermédiaires* toutes plus grandes que a, mais qui iront continuellement en diminuant, et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité a plus exactement que ne pourroit faire aucune autre fraction plus grande que a, et qui seroit conçue en termes plus simples.

De plus, si β est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B^1}$ les fractions $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$, etc. jusqu'à $\frac{\beta A+1}{\beta}$, savoir $\frac{B}{B^1}$, et ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions *intermédiaires.*

De cette maniere on aura donc ces deux suites complettes de fractions convergentes vers la quantité a.

Fractions croissantes et plus petites que a:

$$\frac{A}{A^1},\quad \frac{B+A}{B^1+A^1},\quad \frac{2B+A}{2B^1+A^1},\quad \frac{3B+A}{3B^1+A^1},\quad \text{etc.}\quad \frac{\gamma B+A}{\gamma B^1+A^1},$$

$$\frac{C}{C^1},\quad \frac{D+C}{D^1+C^1},\quad \frac{2D+C}{2D^1+C^1},\quad \frac{3D+C}{3D^1+C^1},\quad \text{etc.}\quad \frac{\varepsilon D+C}{\varepsilon D^1+C^1},$$

$$\frac{E}{E^1},\quad \frac{F+E}{F^1+E^1},\quad \text{etc. etc. etc.}$$

Fractions décroissantes et plus grandes que a:

$$\frac{A+1}{1},\quad \frac{2A+1}{2},\quad \frac{3A+1}{3},\quad \text{etc.}\quad \frac{\beta A+1}{\beta},$$

$$\frac{B}{B^1},\quad \frac{C+B}{C^1+B^1},\quad \frac{2C+B}{2C^1+B^1},\quad \text{etc.}\quad \frac{\delta C+B}{\delta C^1+B^1},$$

$$\frac{D}{D^1},\quad \frac{E+D}{E^1+D^1},\quad \text{etc. etc. etc.}$$

Si la quantité a est irrationnelle ou transcendante, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. que nous nommerons dans la suite fractions *principales*, pour les distinguer des fractions *intermédiaires*, va d'elle-même à l'infini, (art. 10).

Mais si la quantité a est rationnelle et égale à une fraction quelconque $\frac{V}{V^1}$, nous avons vu dans l'article cité, que la série dont il s'agit sera terminée, et que la derniere fraction de cette série sera la fraction même $\frac{V}{V^1}$, donc cette fraction terminera aussi nécessairement une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra toujours aller à l'infini.

En effet, supposons que δ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, alors $\frac{D}{D^1}$ sera la derniere des fractions *principales*, et la série des fractions plus grandes que a sera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D^1}$; or l'autre série des fractions plus petites que a se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C^1}$, qui précede $\frac{D}{D^1}$; mais pour la continuer, il n'y a qu'à considérer que le dénominateur ε, qui devroit suivre le dernier dénominateur δ, sera $= \infty$, (art. 3); de sorte que la fraction $\frac{E}{E^1}$, qui suivroit $\frac{D}{D^1}$ dans la suite des fractions *principales*, seroit $\frac{\infty D + C}{\infty D^1 + C^1} = \frac{D}{D^1}$; or par la loi des fractions *intermédiaires*, il est clair qu'à cause de $\varepsilon = \infty$, on pourra insérer entre les fractions $\frac{C}{C^1}$ et $\frac{E}{E^1}$ une infinité de fractions *intermédiaires*, qui seront

$$\frac{D+C}{D^1+C^1}, \quad \frac{2D+C}{2D^1+C^1}, \quad \frac{3D+C}{3D^1+C^1}, \quad \text{etc.}$$

Ainsi dans ce cas on pourra, après la fraction $\frac{C}{C^1}$ dans la premiere suite de fractions, placer encore les fractions *intermédiaires* dont nous parlons, et les continuer à l'infini.

PROBLEME

19. *Une fraction exprimée par un grand nombre de chiffres étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en approcher davantage sans en employer de plus grandes.*

Ce probleme se résoudra facilement par la théorie que nous venons d'expliquer.

On commencera par réduire la fraction proposée en fraction continue par la méthode de l'art. 4, en ayant soin de prendre toutes les valeurs approchées plus petites que les véritables, pour que les nombres β, γ, δ, etc. soient tous positifs; ensuite, à l'aide des nombres trouvés α, β, γ, etc. on formera, d'après les formules de l'art. 10, les fractions $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. dont la derniere sera nécessairement la même que la fraction proposée, parce que dans ce cas la fraction continue est terminée. Ces fractions seront alternativement plus petites et plus grandes que la fraction donnée, et seront successivement conçues en termes plus grands; et de plus elles seront telles que chacune de ces fractions approchera plus de la fraction donnée, que ne pourroit faire toute autre fraction quelconque qui seroit conçue en termes moins simples. Ainsi on aura par ce moyen toutes les fractions conçues en moindres termes que la proposée, qui pourront satisfaire au probleme.

Que si on veut considérer en particulier les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la proposée, on insérera entre les fractions précédentes autant de fractions *intermédiaires* que l'on pourra, et on en formera deux suites de fractions convergentes, les unes toutes plus petites et les autres toutes plus grandes que la fraction donnée, (art. 16, 17 et 18); chacune de ces suites aura en particulier les mêmes propriétés que la suite des fractions principales $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, $\frac{C}{C^1}$, etc. car les fractions dans chaque suite seront successivement conçues en plus grands termes, et chacune d'elles approchera plus de la fraction proposée, que ne pourroit faire aucune autre fraction qui seroit pareillement plus petite ou plus grande que la proposée, mais qui seroit conçue en termes plus simples.

Au reste il peut arriver qu'une des fractions *intermédiaires* d'une série n'approche pas si près de la fraction donnée, qu'une des fractions de l'autre série, quoique conçue en termes moins simples que celle-ci; c'est pourquoi il ne convient d'employer les fractions *intermédiaires*, que lorsqu'on veut que les fractions cherchées soient toutes plus petites ou toutes plus grandes que la fraction donnée.

EXEMPLE I

20. Suivant M. DE LA CAILLE, l'année solaire est de $365^j\,5^h\,48'\,49''$, et par conséquent plus longue de $5^h\,48'\,49''$ que l'année commune de 365^j; si cette différence étoit exactement de 6 heures, elle donneroit un jour au bout de quatre années communes; mais si on veut savoir au juste au bout de combien d'années communes cette différence peut produire un certain nombre de jours, il faut chercher le rapport qu'il y a entre 24^h et $5^h\,48'\,49''$, et on trouve ce rapport $=\frac{86400}{20929}$; de sorte qu'on peut dire qu'au bout de 86400 années communes, il faudroit intercaler 20929 jours pour les réduire à des années tropiques.

Or, comme le rapport de 86400 à 20929 est exprimé en termes fort grands, on propose de trouver en des termes plus petits des rapports aussi approchés de celui-ci qu'il est possible.

On réduira donc la fraction $\frac{86400}{20929}$ en fraction continue par la regle donnée dans l'art. 4, qui est la même que celle qui sert à trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres donnés: on aura

20929	86400	$4 = \alpha$
	83716	
2684	20929	$7 = \beta$
	18788	
2141	2684	$1 = \gamma$
	2141	
543	2141	$3 = \delta$
	1629	
512	543	$1 = \varepsilon$
	512	
31	512	$16 = \zeta$
	496	
16	31	$1 = \eta$
	16	
15	16	$1 = \vartheta$
	15	
1	15	$15 = \iota$
	15	
	0.	

Connoissant ainsi tous les quotiens α, β, γ, etc. on en formera aisément la série $\frac{A}{A^1}$, $\frac{B}{B^1}$, etc. de la maniere suivante:

$$\begin{array}{ccccccccc} 4, & 7, & 1, & 3, & 1, & 16, & 1, & 1, & 15, \\ \frac{4}{1}, & \frac{29}{7}, & \frac{33}{8}, & \frac{128}{31}, & \frac{161}{39}, & \frac{2704}{655}, & \frac{2865}{694}, & \frac{5569}{1349}, & \frac{86400}{20929}, \end{array}$$

où l'on voit que la derniere fraction est la même que la proposée.

Pour faciliter la formation de ces fractions, on écrira d'abord, comme je viens de le faire, la suite des quotiens 4, 7, 1, etc. et on placera au-dessous de ces coefficiens les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. qui en résultent.

La premiere fraction aura toujours pour numérateur le nombre qui est au-dessus, et pour dénominateur l'unité.

La seconde aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la premiere, plus l'unité, et pour dénominateur le nombre même qui est au-dessus.

La troisieme aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la seconde, plus celui de la premiere; et de même pour dénominateur, le produit du nombre qui est au-dessus par le dénominateur de la seconde, plus celui de la premiere.

Et en général chaque fraction aura pour numérateur le produit du nombre qui y est au-dessus par le numérateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente; et pour dénominateur le produit du même nombre par le dénominateur de la fraction précédente, plus celui de l'avant-précédente.

Ainsi $29 = 7 \cdot 4 + 1$, $7 = 7$, $33 = 1 \cdot 29 + 4$, $8 = 1 \cdot 7 + 1$, $128 = 3 \cdot 33 + 29$, $31 = 3 \cdot 8 + 7$, et ainsi de suite; ce qui s'accorde avec les formules de l'art. 10.

Maintenant on voit par les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. que l'intercalation la plus simple est celle d'un jour dans quatre années communes, ce qui est le fondement du calendrier Julien; mais qu'on approcheroit plus de l'exactitude en n'intercalant que sept jours dans l'espace de vingt-neuf années communes, ou huit dans l'espace de trente-trois ans, et ainsi de suite.

On voit de plus que comme les fractions $\frac{4}{1}$, $\frac{29}{7}$, $\frac{33}{8}$, etc. sont alternativement plus petites et plus grandes que la fraction $\frac{86400}{20929}$ ou $\frac{24^h}{5^h 48' 49''}$, l'intercalation d'un jour sur quatre ans sera trop forte, celle de sept jours sur vingt-neuf ans trop foible, celle de huit jours sur trente-trois ans trop forte, et ainsi de suite; mais chacune de ces intercalations sera toujours la plus exacte qu'il est possible dans le même espace de temps.

Or, si on range dans deux séries particulieres les fractions plus petites et les fractions plus grandes que la fraction donnée, on y pourra encore insérer différentes fractions secondaires pour compléter les séries; et pour cela on suivra le même procédé que ci-dessus, mais en prenant successivement à la place de chaque nombre de la série supérieure tous les nombres entiers moindres que ce nombre, (lorsqu'il y en a).

Ainsi, considérant d'abord les fractions croissantes

$$\begin{array}{ccccc} & 1, & 1, & 1, & 15, \\ \frac{4}{1}, & \frac{33}{8} & \frac{161}{39}, & \frac{2865}{694}, & \frac{86400}{20929}, \end{array}$$

on voit qu'à cause que l'unité est au-dessus de la seconde, de la troisieme et de la quatrieme, on ne pourra placer aucune fraction *intermédiaire*, ni entre la premiere et la seconde, ni entre la seconde et la troisieme, ni entre la troisieme et la quatrieme; mais comme la derniere fraction a au-dessus d'elle le nombre 15, on pourra entre cette fraction et la précédente, placer quatorze fractions *intermédiaires*, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique

$$2865 + 5569, \quad 2865 + 2 \cdot 5569, \quad 2865 + 3 \cdot 5569, \quad \text{etc.}$$

et dont les dénominateurs formeront aussi la progression arithmétique

$$694 + 1349, \quad 694 + 2 \cdot 1349, \quad 694 + 3 \cdot 1349, \quad \text{etc.}$$

Par ce moyen la suite complette des fractions croissantes sera

$$\frac{4}{1}, \quad \frac{33}{8}, \quad \frac{161}{39}, \quad \frac{2865}{694}, \quad \frac{8434}{2043}, \quad \frac{14003}{3392}, \quad \frac{19572}{4741}, \quad \frac{25141}{6090}, \quad \frac{30710}{7439}, \quad \frac{36279}{8788},$$

$$\frac{41848}{10137}, \quad \frac{47417}{11486}, \quad \frac{52986}{12835}, \quad \frac{58555}{14184}, \quad \frac{64124}{15533}, \quad \frac{69693}{16882}, \quad \frac{75262}{18231}, \quad \frac{80831}{19580}, \quad \frac{86400}{20929}.$$

Et comme la derniere fraction est la même que la fraction donnée, il est clair que cette série ne peut pas être poussée plus loin.

De-là on voit que si on ne veut admettre que des intercalations qui pechent par excès, les plus simples et les plus exactes seront celles d'un jour sur quatre années, ou de huit jours sur trente-trois ans, ou de trente-neuf sur cent soixante-un ans, et ainsi de suite.

Considérons maintenant les fractions décroissantes

$$\begin{array}{cccc} 7, & 3, & 16, & 1, \\ \dfrac{29}{7}, & \dfrac{128}{31}, & \dfrac{2704}{655}, & \dfrac{5569}{1349}, \end{array}$$

et d'abord, à cause du nombre 7 qui est au-dessus de la premiere fraction, on pourra en placer six autres avant celle-ci, dont les numérateurs formeront la progression arithmétique $4+1$, $2 \cdot 4+1$, $3 \cdot 4+1$, etc. et dont les dénominateurs formeront la progression 1, 2, 3, etc.; de même, à cause du nombre 3, on pourra placer entre la premiere et la seconde fraction deux fractions *intermédiaires*; et entre la seconde et la troisieme on en pourra placer 15, à cause du nombre 16 qui est au-dessus de la troisieme; mais entre celle-ci et la derniere on n'en pourra insérer aucune, à cause que le nombre qui y est au-dessus est l'unité.

De plus, il faut remarquer que comme la série précédente n'est pas terminée par la fraction donnée, on peut encore la continuer aussi loin que l'on veut, comme nous l'avons fait voir dans l'art. 18. Ainsi on aura cette série de fractions croissantes

$$\frac{5}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{17}{4},\ \frac{21}{5},\ \frac{25}{6},\ \frac{29}{7},\ \frac{62}{15},\ \frac{95}{23},\ \frac{128}{31},\ \frac{289}{70},\ \frac{450}{109},\ \frac{611}{148},\ \frac{772}{187},$$

$$\frac{933}{226},\ \frac{1094}{265},\ \frac{1255}{304},\ \frac{1416}{343},\ \frac{1577}{382},\ \frac{1738}{421},\ \frac{1899}{460},\ \frac{2060}{499},\ \frac{2221}{538},\ \frac{2382}{577},\ \frac{2543}{616},$$

$$\frac{2704}{655},\ \frac{5569}{1349},\ \frac{91969}{22278},\ \frac{178369}{43207},\ \frac{264769}{64136},\ \frac{351169}{85065},\ \frac{437569}{105994},\ \text{etc.}$$

lesquelles sont toutes plus petites que la fraction proposée, et en approchent plus que toutes autres fractions qui seroient conçues en termes moins simples.

On peut conclure de-là, que si on ne vouloit avoir égard qu'aux intercalations qui pécheroient par défaut, les plus simples et les plus exactes seroient celles d'un jour sur cinq ans, ou de deux jours sur neuf ans, ou de trois jours sur treize ans, etc.

Dans le calendrier GRÉGORIEN on intercale seulement quatre-vingt dix-sept jours dans quatre cents années; on voit par la table précédente qu'on approcheroit beaucoup plus de l'exactitude en intercalant cent neuf jours en quatre cents cinquante années.

Mais il faut remarquer que dans la réformation GRÉGORIENNE on s'est servi de la détermination de l'année donnée par COPERNIC, laquelle est de $365^j\,5^h\,49'\,20''$. En employant cet élément on auroit, au lieu de la fraction $\frac{86400}{20929}$, celle-ci $\frac{86400}{20960}$, ou bien $\frac{540}{131}$; d'où l'on trouveroit par la méthode précédente les quotiens 4, 8, 5, 3, et de-là ces fractions *principales*

$$\begin{array}{cccc} 4, & 8, & 5, & 3, \\ \frac{4}{1}, & \frac{33}{8}, & \frac{169}{41}, & \frac{540}{131}, \end{array}$$

qui sont, à l'exception des deux premieres, assez différentes de celles que nous avons trouvées ci-dessus. Cependant on ne trouve pas parmi ces fractions la fraction $\frac{400}{97}$ adoptée dans le calendrier GRÉGORIEN; et cette fraction ne peut pas même se trouver parmi les fractions *intermédiaires* qu'on pourroit insérer dans les deux séries $\frac{4}{1}$, $\frac{169}{41}$, et $\frac{33}{8}$, $\frac{540}{131}$; car il est clair qu'elle ne pourroit tomber qu'entre ces deux dernieres fractions, entre lesquelles, à cause du nombre 3 qui est au-dessus de la fraction $\frac{540}{131}$, il peut tomber deux fractions *intermédiaires*, qui seront $\frac{202}{49}$ et $\frac{371}{90}$; d'où l'on voit qu'on auroit approché plus de l'exactitude, si dans la réformation GRÉGORIENNE on avoit prescrit de n'intercaler que quatre-vingt-dix jours dans l'espace de trois cents soixante et onze ans.

Si on réduit la fraction $\frac{400}{97}$ à avoir pour numérateur le nombre 86400, elle deviendra $\frac{86400}{20952}$, ce qui supposeroit l'année tropique de $365^{j}\ 5^{h}\ 49'\ 12''$.

Dans ce cas l'interpolation GRÉGORIENNE seroit tout-à-fait exacte; mais comme les observations donnent l'année plus courte de plus de $20''$, il est clair qu'il faudra nécessairement, au bout d'un certain espace de temps, introduire une nouvelle intercalation.

Si on vouloit s'en tenir à la détermination de M. DE LA CAILLE, comme le dénominateur 97 de la fraction $\frac{400}{97}$ se trouve entre les dénominateurs de la cinquieme et de la sixieme des fractions principales trouvées ci-devant, il s'ensuit de ce que nous avons démontré, (art. 14), que la fraction $\frac{161}{39}$ approcheroit plus de la vérité que la fraction $\frac{400}{97}$; au reste, comme les Astronomes sont encore partagés sur la véritable longueur de l'année, nous nous abstiendrons de prononcer sur ce sujet; aussi n'avons-nous eu d'autre objet dans les détails que nous venons de donner, que de faciliter les moyens de se mettre au fait des fractions continues et de leurs usages; dans cette vue nous ajouterons encore l'exemple suivant.

EXEMPLE II

21. Nous avons déjà donné, (art. 8), la fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence du cercle au diametre, en tant qu'elle résulte de la fraction de LUDOLPH; ainsi il n'y aura qu'à calculer, de la maniere enseignée dans l'exemple précédent, la série des fractions convergentes vers ce même rapport, laquelle sera

$$\begin{array}{ccccccccc}
3, & 7, & 15, & 1, & 292, & 1, & 1, & 1, & 2, \\
\frac{3}{1}, & \frac{22}{7}, & \frac{333}{106}, & \frac{355}{113}, & \frac{103993}{33102}, & \frac{104348}{33215}, & \frac{208341}{66317}, & \frac{312689}{99532}, & \frac{833719}{265381},
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1, & 3, & 1, & 14, & 2, & 1, \\
\frac{1146408}{364913}, & \frac{4272943}{1360120}, & \frac{5419351}{1725033}, & \frac{80143857}{25510582}, & \frac{165707065}{52746197}, & \frac{245850922}{78256779},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 2, & 2, & 2, \\
\frac{411557987}{131002976}, & \frac{1068966896}{340262731}, & \frac{2549491779}{811528438}, & \frac{6167950454}{1963319607}, & \frac{14885392687}{4738167652},
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
1, & 84, & 2, & 1, \\
\frac{21053343141}{6701487259}, & \frac{1783366216531}{567663097408}, & \frac{3587785776203}{1142027682075}, & \frac{5371151992734}{1709690779483},
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
1, & 15, & 3, & 13, \\
\frac{8958937768937}{2851718461558}, & \frac{139755218526789}{44485467702853}, & \frac{428224593349304}{136308121570117}, & \frac{5706674932067741}{1816491048114374},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
1, & 4, & 2, \\
\frac{6134899525417045}{1952799169684491}, & \frac{30246273033735921}{9627687726852338}, & \frac{66627445592888887}{21208174623389167},
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
6, & 6, & 1, \\
\frac{430010946591069243}{136876735467187340}, & \frac{2646693125139304345}{842468587426513207}, & \frac{3076704071730373588}{979345322893700547}.
\end{array}$$

Ces fractions seront donc alternativement plus petites et plus grandes que la vraie raison de la circonférence au diametre, c'est-à-dire que la premiere $\frac{3}{1}$ sera plus petite, la seconde $\frac{22}{7}$ plus grande, et ainsi de suite; et chacune d'elles approchera plus de la vérité que ne pourroit faire toute autre fraction qui seroit exprimée en termes plus simples, ou, en général, qui auroit un dénominateur moindre que le dénominateur de la fraction suivante; de sorte que l'on peut assurer que la fraction $\frac{3}{1}$ approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction dont le dénominateur seroit moindre que 7; de même la fraction $\frac{22}{7}$ approchera plus de la vérité que toute autre fraction dont le dénominateur seroit moindre que 106, et ainsi des autres.

Quant à l'erreur de chaque fraction, elle sera toujours moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette fraction par celui de la fraction suivante. Ainsi l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ sera moindre que $\frac{1}{7}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ sera moindre que $\frac{1}{7 \cdot 106}$, et ainsi de suite. Mais en même temps l'erreur de chaque fraction sera plus grande que l'unité divisée par le produit du dénominateur de cette fraction, par la somme de ce dénominateur et du dénominateur de la fraction suivante; de sorte que l'erreur de la fraction $\frac{3}{1}$ sera plus grande que $\frac{1}{8}$, celle de la fraction $\frac{22}{7}$ plus grande que $\frac{1}{7 \cdot 113}$, et ainsi de suite, (art. 14).

Si on vouloit maintenant séparer les fractions plus petites que le rapport de la circonférence au diametre, d'avec les plus grandes, on pourroit, en insérant les fractions *intermédiaires* convenables, former deux suites de fractions, les unes croissantes et les autres décroissantes vers le vrai rapport dont il s'agit; on auroit de cette maniere

Fractions plus petites que $\frac{\textit{périph.}}{\textit{diam.}}$.

$$\frac{3}{1},\ \frac{25}{8},\ \frac{47}{15},\ \frac{69}{22},\ \frac{91}{29},\ \frac{113}{36},\ \frac{135}{43},\ \frac{157}{50},\ \frac{179}{57},\ \frac{201}{64},\ \frac{223}{71},\ \frac{245}{78},\ \frac{267}{85},\ \frac{289}{92},\ \frac{311}{99},\ \frac{333}{106},$$

$$\frac{688}{219},\ \frac{1043}{332},\ \frac{1398}{445},\ \frac{1753}{558},\ \frac{2108}{671},\ \frac{2463}{784},\ \text{etc.}$$

Fractions plus grandes que $\frac{\textit{périph.}}{\textit{diam.}}$

$$\frac{4}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{355}{113},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{312689}{99532},\ \frac{1146408}{364913},\ \frac{5419351}{1725033},\ \frac{85563208}{27235615},$$

$$\frac{165707065}{52746197},\ \frac{411557987}{131002976},\ \frac{1480524883}{471265707},\ \text{etc.}$$

Chaque fraction de la premiere série approche plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples, et qui pécheroit aussi par défaut; et chaque fraction de la seconde série approche aussi plus de la vérité que ne peut faire aucune autre fraction exprimée en termes plus simples et péchant par excès.

Au reste ces séries deviendroient fort prolixes, si on vouloit les pousser aussi loin que nous avons fait celle des fractions *principales* donnée ci-dessus.

Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettent pas de les insérer ici dans toute leur étendue, mais on peut les trouver au besoin dans le chap. XI de *l'Algebre* de WALLIS, (*Operum Mathemat.* vol. II.).

REMARQUE

22. La premiere solution de ce probleme a été donnée par WALLIS dans un petit Traité qu'il a joint aux *Œuvres posthumes* d'HORROCIUS, et on la retrouve dans l'endroit cité de son *Algebre;* mais la méthode de cet Auteur est indirecte et fort laborieuse. Celle que nous venons de donner est due à HUYGHENS, et on doit la regarder comme une des principales découvertes de ce grand Géometre. La construction de son automate planétaire paroît en avoir été l'occasion. En effet il est clair que pour pouvoir représenter exactement les mouvemens et les périodes des planetes, il faudroit employer des roues où les nombres des dents fussent précisément dans les mêmes rapports que les périodes dont il s'agit; mais comme on ne peut pas multiplier les dents au-delà d'une certaine limite dépendante de la grandeur de la roue, et que d'ailleurs les périodes des planetes sont incommensurables, ou du moins ne peuvent être représentées avec une certaine exactitude que par de très-grands nombres, on est obligé de se contenter d'un *à-peu-près,* et la difficulté se réduit à trouver des rapports exprimés en plus petits nombres, qui approchent autant qu'il est possible de la vérité, et plus que ne pourroient faire d'autres rapports quelconques qui ne seroient pas conçus en termes plus grands.

M. HUYGHENS résout cette question par le moyen des fractions continues, comme nous l'avons fait ci-dessus; il donne la maniere de former ces fractions par des divisions continuelles, et il démontre ensuite les principales propriétés des fractions convergentes qui en résultent, sans oublier même les fractions *intermédiaires.* Voyez dans ses *Opera posthuma* le Traité intitulé *Descriptio automati planetarii.*

D'autres grands Géometres ont ensuite considéré les fractions continues d'une maniere plus générale. On trouve sur-tout dans les Commentaires de Pétersbourg, (tom. IX et XI des anciens, et tom. IX et XI des nouveaux), des Mémoires de Mr. EULER[1]) remplis des recherches les plus savantes et les plus

1) Voir les mémoires 71, 123, 281 et 323 (suivant *l'Index* d'*ENESTRÖM*), *LEONHARDI EULERI Opera omnia*, series I, vol. 10 et 2. H. W.

ingénieuses sur ce sujet; mais la théorie de ces fractions, envisagée du côté arithmétique qui en est le plus intéressant, n'avoit pas encore été, ce me semble, autant cultivée qu'elle le méritoit; c'est ce qui m'a engagé à en composer ce petit Traité pour la rendre plus familiere aux Géometres. Voyez aussi les Mémoires de Berlin pour les années 1767 et 1768.[1])

Au reste cette théorie est d'un usage très-étendu dans toute l'Arithmétique, et il y a peu de problemes de cette science, au moins parmi ceux pour lesquels les regles ordinaires ne suffisent pas, qui n'en dépendent directement ou indirectement. M^r^. Jean Bernoulli vient d'en faire une application heureuse et utile dans une nouvelle espece de calcul qu'il a imaginé pour faciliter la construction des tables de parties proportionnelles. Voyez le tome I de son *Recueil pour les Astronomes.*

1) Voir la note p. 514. H. W.

PARAGRAPHE II

SOLUTIONS DE QUELQUES PROBLEMES CURIEUX ET NOUVEAUX D'ARITHMÉTIQUE

Quoique les problemes dont nous allons nous occuper aient un rapport immédiat avec le précédent, et dépendent des mêmes principes, nous croyons cependant devoir les traiter d'une maniere directe, et sans rien supposer de ce qui a été démontré jusqu'ici.

On aura par ce moyen la satisfaction de voir comment dans ces sortes de matieres on est nécessairement conduit à la théorie des fractions continues; d'ailleurs cette théorie en deviendra beaucoup plus lumineuse, et recevra par-là de nouveaux degrés de perfection.

PROBLEME I

23. *Etant donnée une quantité positive a, rationnelle ou non, et supposant que p et q ne puissent être que des nombres entiers positifs et premiers entr'eux, on demande de trouver des valeurs de p et q, telles que la valeur de $p-aq$, (abstraction faite du signe), soit plus petite qu'elle ne seroit, si on donnoit à p et q des valeurs moindres quelconques.*

Pour pouvoir résoudre ce probleme directement, nous commencerons par supposer que l'on ait en effet déjà trouvé des valeurs de p et q qui aient les conditions requises; donc prenant pour r et s des nombres quelconques entiers positifs moindres que p et q, il faudra que la valeur de $p-aq$ soit moindre que celle de $r-as$, abstraction faite des signes de ces deux quantités, c'est-à-dire en les prenant toutes deux positivement. Or je remarque d'abord que si les nombres r et s sont tels que $ps-qr=\pm 1$, le signe supérieur ayant lieu lorsque $p-aq$ est un nombre positif, et l'inférieur, lorsque $p-aq$ est un nombre négatif, on en peut conclure en général que la valeur de toute expression $y - az$ sera toujours plus grande, (abstraction faite du signe), que celle de $p - aq$, tant qu'on ne donnera à z et à y que des valeurs entieres, moindres que celles de p et q.

En effet, il est clair qu'on peut supposer en général

$$y = pt + ru, \quad \text{et} \quad z = qt + su,$$

t et u étant deux inconnues; or par la résolution de ces équations on a

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps};$$

donc, à cause de $ps - qr = \pm 1$, $t = \pm(sy - rz)$, et $u = \mp(qy - pz)$; d'où l'on voit que t et u seront toujours des nombres entiers, puisque p, q, r, s et y, z sont supposés entiers.

Donc, t et u étant des nombres entiers, et p, q, r, s des nombres entiers positifs, il est clair que pour que les valeurs de y et z soient moindres que celles de p et q, il faudra nécessairement que les nombres t et u soient de signes différens.

Maintenant je remarque que la valeur de $r - as$ sera aussi de différent signe que celle de $p - aq$; car faisant $p - aq = P$, et $r - as = R$, on aura $\frac{p}{q} = a + \frac{P}{q}$, $\frac{r}{s} = a + \frac{R}{s}$; mais l'équation $ps - qr = \pm 1$, donne $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \pm \frac{1}{qs}$; donc $\frac{P}{q} - \frac{R}{s} = \pm \frac{1}{qs}$; donc, puisqu'on suppose que le signe ambigu soit pris conformément à celui de la quantité $p - aq$ où P, il faudra que la quantité $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ soit positive, si P est positif, et négative, si P est négatif; or comme s est $< q$, et que R est plus grand que P, (*hyp.*), il est clair que $\frac{R}{s}$ sera à plus forte raison plus grand que $\frac{P}{q}$, (abstraction faite du signe); donc la quantité $\frac{P}{q} - \frac{R}{s}$ sera toujours de signe différent de $\frac{R}{s}$, c'est-à-dire de R, puisque s est positif; donc P et R seront nécessairement de signes différens.

Cela posé, on aura, en substituant les valeurs ci-dessus de y et z, $y - az = (p - aq)t + (r - as)u = Pt + Ru$; or t et u étant de signes différens, aussi bien que P et R, il est clair que Pt et Ru seront des quantités de mêmes signes; donc puisque t et u sont d'ailleurs des nombres entiers, il est visible que la valeur de $y - az$ sera toujours plus grande que P, c'est-à-dire que la valeur de $p - aq$, abstraction faite des signes.

Mais il reste maintenant à savoir si, les nombres p et q étant donnés, on peut toujours trouver des nombres r et s moindres que ceux-là, et tels que $ps - qr = \pm 1$, les signes ambigus étant à volonté; or cela suit évidemment de la théorie des fractions continues; mais on peut aussi le démontrer directement et indépendamment de cette théorie. Car la difficulté se réduit à prouver qu'il existe nécessairement un nombre entier positif et moindre que p, lequel étant pris pour r, rendra $qr \pm 1$ divisible par p; or supposons qu'on substitue successivement à la place de r les nombres naturels 1, 2, 3, etc. jusqu'à p, et qu'on divise les nombres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, etc. $pq \pm 1$ par p, on aura p restes moindres que p, qui seront nécessairement tous différens les uns des autres; car si, par exemple, $mq \pm 1$ et $nq \pm 1$, (m et n étant des nombres entiers différens qui ne surpassent pas p), étant divisés par p, donnoient un même reste, il est clair que leur différence, $(m - n)q$, devroit être divisible par p; or c'est ce qui ne se peut, à cause que q est premier à p, et que $m - n$ est un nombre moindre que p. Donc, puisque tous les restes dont il s'agit sont des nombres entiers positifs moindres que p et différens entr'eux, et que ces restes sont au nombre de p, il est clair qu'il faudra nécessairement que le zéro se trouve parmi ces restes, et conséquemment qu'il y ait un des nombres $q \pm 1$, $2q \pm 1$, $3q \pm 1$, etc. $pq \pm 1$, qui soit divisible par p; or il est clair que ce ne peut être le dernier; ainsi il y aura surement une valeur de r moindre que p, laquelle rendra $rq \pm 1$ divisible par p; et il est clair en même temps que le quotient sera moindre que q; donc il y aura toujours une valeur entiere et positive de r moindre que p, et une autre valeur pareille de s et moindre que q, lesquelles satisferont à l'équation $s = \frac{qr \pm 1}{p}$, ou $ps - qr = \pm 1$.

24. La question est donc réduite maintenant à trouver quatre nombres entiers et positifs, p, q, r, s, dont les deux derniers soient moindres que les premiers, c'est-à-dire $r < p$ et $s < q$, et qui soient tels que $ps - qr = \pm 1$, que de plus les quantités $p - aq$ et $r - as$ soient de signes différens, et qu'en même temps $r - as$ soit une quantité plus grande que $p - aq$, abstraction faite des signes.

Désignons, pour plus de simplicité, r par p^{I} et s par q^{I}, en sorte que l'on ait $pq^{\text{I}} - qp^{\text{I}} = \pm 1$; et comme $q > q^{\text{I}}$, (*hyp.*), soit μ le quotient qui proviendroit de la division de q par q^{I}, et soit le reste q^{II}, qui sera par conséquent $< q^{\text{I}}$; soit de même μ^{I} le quotient de la division de q^{I} par q^{II}, et q^{III} le reste, qui sera $< q^{\text{II}}$; pareillement soit μ^{II} le quotient de la division de q^{II} par q^{III}, et q^{IV} le reste $< q^{\text{III}}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste nul; on aura de cette maniere

$$\begin{aligned} q &= \mu q^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{II}} \\ q^{\mathrm{I}} &= \mu^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{III}} \\ q^{\mathrm{II}} &= \mu^{\mathrm{II}} q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{IV}} \\ q^{\mathrm{III}} &= \mu^{\mathrm{III}} q^{\mathrm{IV}} + q^{\mathrm{V}}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

où les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. seront tous entiers et positifs, et où les nombres q, q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. seront aussi entiers positifs, et formeront une suite décroissante jusqu'à zéro.

Supposons pareillement

$$\begin{aligned} p &= \mu p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{II}} \\ p^{\mathrm{I}} &= \mu^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{III}} \\ p^{\mathrm{II}} &= \mu^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} + p^{\mathrm{IV}} \\ p^{\mathrm{III}} &= \mu^{\mathrm{III}} p^{\mathrm{IV}} + p^{\mathrm{V}}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Et comme les nombres p et p^{I} sont regardés ici comme donnés, aussi bien que les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. on pourra déterminer par ces équations les nombres p^{II}, p^{III}, p^{IV}, etc. qui seront évidemment tous entiers.

Maintenant, comme on doit avoir $pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1$, on aura aussi, en substituant les valeurs précédentes de p et q, et effaçant ce qui se détruit, $p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{I}} = \pm 1$; et substituant de nouveau dans cette équation les valeurs de p^{I} et q^{I}, il viendra $p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} = \pm 1$, et ainsi de suite; de sorte qu'on aura en général

$$\begin{aligned} pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} &= \pm 1 \\ p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} &= \mp 1 \\ p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} &= \pm 1 \\ p^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{IV}} - q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{IV}} &= \mp 1, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Donc, si q^{III}, par exemple, étoit nul, on auroit $-q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} = \pm 1$; donc $q^{\mathrm{II}} = 1$ et $p^{\mathrm{III}} = \mp 1$; mais si q^{IV} étoit $= 0$, on auroit $-q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{IV}} = \mp 1$; donc $q^{\mathrm{III}} = 1$ et $p^{\mathrm{IV}} = \pm 1$; donc en général, si $q^{\varrho} = 0$, on aura $q^{\varrho-1} = 1$; et ensuite $p^{\varrho} = \pm 1$, si ϱ est pair, et $p^{\varrho} = \mp 1$, si ϱ est impair.

Or, comme on ne sait pas d'avance si c'est le signe supérieur ou l'inférieur qui doit avoir lieu, il faudroit supposer successivement $p^{\varrho} = 1$ et $= -1$; mais je remarque que l'on peut toujours ramener l'un de ces cas à l'autre;

et pour cela il est clair qu'il suffit de prouver qu'on peut toujours faire en sorte que le ϱ du terme q^ϱ qui doit être nul, soit pair ou impair à volonté. En effet, supposons, par exemple, que q^{IV} soit $=0$, on aura donc $q^{\text{III}}=1$ et $q^{\text{II}}>1$, c'est-à-dire $q^{\text{II}}=2$ ou >2, à cause que les nombres q, q^{I}, q^{II}, etc. forment naturellement une série décroissante; donc, puisque $q^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}q^{\text{III}}+q^{\text{IV}}$, on aura $q^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}$, de sorte que μ^{II} sera $=$ ou >2; ainsi on pourra, si l'on veut, diminuer μ^{II} d'une unité, sans que ce nombre devienne nul, et alors q^{IV}, qui étoit $=0$, deviendra $=1$, et q^{V} sera $=0$; car mettant $\mu^{\text{II}}-1$ à la place de μ^{II}, on aura $q^{\text{II}}=(\mu^{\text{II}}-1)q^{\text{III}}+q^{\text{IV}}$; mais $q^{\text{II}}=\mu^{\text{II}}$, $q^{\text{III}}=1$; donc $q^{\text{IV}}=1$; ensuite ayant $q^{\text{III}}=\mu^{\text{III}}q^{\text{IV}}+q^{\text{V}}$, c'est-à-dire $1=\mu^{\text{III}}+q^{\text{V}}$, on aura nécessairement $\mu^{\text{III}}=1$ et $q^{\text{V}}=0$.

De-là on peut donc conclure en général que, si $q^\varrho=0$, on aura $q^{\varrho-1}=1$ et $p^\varrho=\pm 1$, le signe ambigu étant à volonté.

Maintenant, si on substitue les valeurs de p et q données par les formules précédentes dans $p-aq$, celles de p^{I} et q^{I} dans $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$, et ainsi des autres, on aura

$$\begin{aligned}
p-aq &= \mu\ (p^{\text{I}}-aq^{\text{I}})+p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}\\
p^{\text{I}}-aq^{\text{I}} &= \mu^{\text{I}}\ (p^{\text{II}}-aq^{\text{II}})+p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}\\
p^{\text{II}}-aq^{\text{II}} &= \mu^{\text{II}}\ (p^{\text{III}}-aq^{\text{III}})+p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}\\
p^{\text{III}}-aq^{\text{III}} &= \mu^{\text{III}}(p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}})+p^{\text{V}}-aq^{\text{V}},\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}+\frac{p-aq}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}\\
\mu^{\text{I}} &= \frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}+\frac{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}\\
\mu^{\text{II}} &= \frac{aq^{\text{IV}}-p^{\text{IV}}}{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}}+\frac{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}}\\
\mu^{\text{III}} &= \frac{aq^{\text{V}}-p^{\text{V}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}}+\frac{p^{\text{III}}-aq^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}},\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Or, comme, (*hyp.*), les quantités $p-aq$ et $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$ sont de signes différens, et que de plus $p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}$ doit être, (abstraction faite des signes), $>p-aq$, il s'ensuit que $\frac{p-aq}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$ sera une quantité négative et plus petite que l'unité. Donc, pour que μ soit un nombre entier positif, comme il le faut, il est clair que $\frac{aq^{\text{II}}-p^{\text{II}}}{p^{\text{I}}-aq^{\text{I}}}$ doit être une quantité positive plus grande que l'unité; et il est visible en même temps que μ ne peut être que le nombre entier, qui est immédiatement moindre que $\frac{aq^{\mathrm{II}}-p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}$, c'est-à-dire, qui est contenu entre ces limites $\frac{aq^{\mathrm{II}}-p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}$ et $\frac{aq^{\mathrm{II}}-p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}-1$; car puisque $-\frac{p-aq}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}>0$ et <1, on aura $\mu<\frac{aq^{\mathrm{II}}-p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}$ et $>\frac{aq^{\mathrm{II}}-p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}-1$.

De même, puisque nous venons de voir que $\frac{aq^{\mathrm{II}}-p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}$ doit être une quantité positive plus grande que l'unité, il s'ensuit que $\frac{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}}-aq^{\mathrm{II}}}$ sera une quantité négative plus petite que l'unité, (je dis plus petite que l'unité, en faisant abstraction du signe). Donc, pour que μ^{I} soit un nombre entier positif, il faudra que $\frac{aq^{\mathrm{III}}-p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{II}}-aq^{\mathrm{II}}}$ soit une quantité positive plus grande que l'unité, et le nombre μ^{I} ne pourra être par conséquent que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de la quantité $\frac{aq^{\mathrm{III}}-p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{II}}-aq^{\mathrm{II}}}$.

On prouvera de la même maniere et par la considération, que μ^{II} doit être un nombre entier positif, que la quantité $\frac{aq^{\mathrm{IV}}-p^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{III}}-aq^{\mathrm{III}}}$ sera nécessairement positive et au-dessus de l'unité, et que μ^{II} ne pourra être que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de la même quantité, et ainsi de suite.

Il s'ensuit de-là, 1°. que les quantités $p-aq$, $p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}$, $p^{\mathrm{II}}-aq^{\mathrm{II}}$, etc. seront successivement de signes différens, c'est-à-dire alternativement positives et négatives, et qu'elles formeront une suite continuellement croissante; 2°. que si on désigne par le signe $<$ le nombre entier, qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe, on aura pour la détermination des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc.

$$\mu<\frac{aq^{\mathrm{II}}-p^{\mathrm{II}}}{p^{\mathrm{I}}-aq^{\mathrm{I}}}$$
$$\mu^{\mathrm{I}}<\frac{aq^{\mathrm{III}}-p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{II}}-aq^{\mathrm{II}}}$$
$$\mu^{\mathrm{II}}<\frac{aq^{\mathrm{IV}}-p^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{III}}-aq^{\mathrm{III}}},\ \text{etc.}$$

Or nous avons vu plus haut que la série q, q^{I}, q^{II}, etc. doit se terminer par zéro, et qu'alors le terme précédent sera $=1$, et le terme correspondant à zéro dans l'autre série p, p^{I}, p^{II}, etc. sera $=\pm 1$ à volonté.

Ainsi supposons, par exemple, que l'on ait $q^{\mathrm{IV}} = 0$, on aura donc $q^{\mathrm{III}} = 1$ et $p^{\mathrm{IV}} = 1$; donc $p^{\mathrm{III}} - aq^{\mathrm{III}} = p^{\mathrm{III}} - a$, et $p^{\mathrm{IV}} - aq^{\mathrm{IV}} = 1$; donc il faudra que $p^{\mathrm{III}} - a$ soit une quantité négative et moindre que 1, abstraction faite du signe; c'est-à-dire que $a - p^{\mathrm{III}}$ devra être > 0 et < 1; de sorte que p^{III} ne pourra être que le nombre entier, qui sera immédiatement au-dessous de a; on connoîtra donc les valeurs de ces quatre termes

$$\begin{array}{ll} p^{\mathrm{IV}} = 1 & \qquad q^{\mathrm{IV}} = 0 \\ p^{\mathrm{III}} < a & \qquad q^{\mathrm{III}} = 1, \end{array}$$

à l'aide desquelles on pourra, en remontant par les formules ci-dessus, trouver tous les termes précédens. En effet on aura d'abord la valeur de μ^{II}, ensuite on aura p^{II} et q^{II} par les formules $p^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} + p^{\mathrm{IV}}$ et $q^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{II}} q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{IV}}$; de-là on trouvera μ^{I} et ensuite p^{I} et q^{I}, et ainsi du reste.

En général soit $q^{\varrho} = 0$, on aura $q^{\varrho-1}$ et $p^{\varrho} = 1$; et on prouvera, comme ci-dessus, que $p^{\varrho-1}$ ne pourra être que le nombre entier qui est immédiatement au-dessous de a; de sorte qu'on aura ces quatre termes

$$\begin{array}{ll} p^{\varrho} \;\; = 1 & \qquad q^{\varrho} \;\; = 0 \\ p^{\varrho-1} < a & \qquad q^{\varrho-1} = 1; \end{array}$$

ensuite on aura

$$\mu^{\varrho-2} < \frac{aq^{\varrho} - p^{\varrho}}{p^{\varrho-1} - aq^{\varrho-1}} < \frac{1}{a - p^{\varrho-1}}$$

$$p^{\varrho-2} = \mu^{\varrho-2} p^{\varrho-1} + p^{\varrho}, \quad q^{\varrho-2} = \mu^{\varrho-2} q^{\varrho-1} + q^{\varrho}$$

$$\mu^{\varrho-3} < \frac{aq^{\varrho-1} - p^{\varrho-1}}{p^{\varrho-2} - aq^{\varrho-2}}$$

$$p^{\varrho-3} = \mu^{\varrho-3} p^{\varrho-2} + p^{\varrho-1}, \quad q^{\varrho-3} = \mu^{\varrho-3} q^{\varrho-2} + q^{\varrho-1},$$

et ainsi de suite.

On pourra donc remonter de cette maniere aux premiers termes p et q; mais nous remarquerons que tous les termes suivans, p^{I}, q^{I}, p^{II}, q^{II}, etc. jouissent des mêmes propriétés que ceux-là, et résolvent également le probleme proposé. Car il est visible par les formules précédentes que les nombres $p, p^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}$, etc. et $q, q^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{II}}$, etc. sont tous entiers positifs, et forment deux séries continuellement décroissantes, dont la premiere se termine par l'unité, et la seconde par zéro.

De plus, on a vu que ces nombres sont tels, que $pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1$, $p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} = \mp 1$, etc. et que les quantités $p - aq$, $p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}$, $p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}$, etc.

sont alternativement positives et négatives, et forment en même temps une suite continuellement croissante. D'où il suit que les mêmes conditions qui ont lieu entre les quatre nombres p, q, r, s, ou $p, q, p^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{I}}$, et d'où dépend la solution du probleme, comme on l'a vu plus haut, ont lieu également entre les nombres $p^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}, q^{\mathrm{II}}$, et entre ceux-ci, $p^{\mathrm{II}}, q^{\mathrm{II}}, p^{\mathrm{III}}, q^{\mathrm{III}}$, et ainsi de suite.

Donc, en commençant par les derniers termes p^{ϱ} et q^{ϱ}, et remontant toujours par les formules qu'on vient de trouver, on aura successivement toutes les valeurs de p et q qui peuvent résoudre la question proposée.[1])

---

1) Dans l'avertissement de toutes les éditions ultérieures se trouve la remarque suivante: „Dans cette nouvelle édition, on a fait quelques changements à l'analyse du Probleme I du § II, pour la rendre plus directe et plus facile à suivre". Il est possible que ces changements proviennent de LAGRANGE lui-même, bien qu'on ne puisse le prouver. Abstraction faite de quelques modifications de rédaction, l'essentiel de ces changements consiste en ceci:

Il s'agit de la détermination de la série croissante de grandeurs:

$$p - aq, \quad p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}, \quad p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}, \quad \text{etc.}$$

Dans la plus ancienne édition qui a servi de base à celle-ci et qui date de 1774, on ne suppose connu que les quatre nombres $p, q, p^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{I}}$, satisfaisant à la condition $pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1$. Puis, on détermine les μ ainsi que les $q^{\mathrm{II}}, q^{\mathrm{III}}$, etc. par l'algorithme d'EUCLIDE:

$$q = \mu q^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{II}}, \quad q^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{III}}, \quad q^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{II}} q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{IV}}, \quad \text{etc.}$$

ensuite les $p^{\mathrm{II}}, p^{\mathrm{III}}, p^{\mathrm{IV}}$, etc. par les équations:

$$p = \mu p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{II}}, \quad p^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{III}}, \quad p^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} + p^{\mathrm{IV}}, \quad \text{etc.}$$

Il faut alors démontrer, par une longue série de considérations, que les grandeurs $p^{i} - aq^{i}$ forment une série croissante.

Dans la rédaction ultérieure, le point de départ est la série d'équations

$$pq^{\mathrm{I}} - qp^{\mathrm{I}} = \pm 1, \quad p^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} = \mp 1, \quad p^{\mathrm{II}} q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{II}} p^{\mathrm{III}} = \pm 1, \quad \text{etc.}$$

où l'on sait déjà que les $p, p^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}$, etc. d'une part, les $q, q^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{II}}$, etc. d'autre part, sont des suites décroissantes de nombres, et que les $p^{i} - aq^{i}$ vont en augmentant. De ces équations, il suit:

$$\begin{gathered} q^{\mathrm{I}}(p - p^{\mathrm{II}}) = p^{\mathrm{I}}(q - q^{\mathrm{II}}) \\ q^{\mathrm{II}}(p^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{III}}) = p^{\mathrm{II}}(q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{III}}) \\ \text{etc.} \end{gathered}$$

et de là, vu que p^{i} et q^{i} sont premiers entr'eux:

$$\begin{array}{ll} p = \mu p^{\mathrm{I}} + p^{\mathrm{II}} & q = \mu q^{\mathrm{I}} + q^{\mathrm{II}} \\ p^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{III}} & q^{\mathrm{I}} = \mu^{\mathrm{I}} q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{III}} \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

H. W.

25. Comme les valeurs des termes p^ϱ, $p^{\varrho-1}$, etc. q^ϱ, $q^{\varrho-1}$, etc. sont indépendantes de l'exposant ϱ, nous pouvons en faire abstraction, et désigner les termes de ces deux séries croissantes de cette maniere,

$$p^0,\ p^{\mathrm{I}},\ p^{\mathrm{II}},\ p^{\mathrm{III}},\ p^{\mathrm{IV}},\ \text{etc.}\qquad q^0,\ q^{\mathrm{I}},\ q^{\mathrm{II}},\ q^{\mathrm{III}},\ q^{\mathrm{IV}},\ \text{etc.}$$

ainsi nous aurons les déterminations suivantes,

$$\begin{array}{ll}
p^0 = 1 & q^0 = 0 \\
p^{\mathrm{I}} = \mu & q^{\mathrm{I}} = 1 \\
p^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{I}}\, p^{\mathrm{I}} + 1 & q^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{I}} \\
p^{\mathrm{III}} = \mu^{\mathrm{II}}\, p^{\mathrm{II}} + p^{\mathrm{I}} & q^{\mathrm{III}} = \mu^{\mathrm{II}}\, q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{I}} \\
p^{\mathrm{IV}} = \mu^{\mathrm{III}} p^{\mathrm{III}} + p^{\mathrm{II}} & q^{\mathrm{IV}} = \mu^{\mathrm{III}}\, q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{II}} \\
\quad\text{etc.} & \quad\text{etc.}
\end{array}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
&\mu < a \\
&\mu^{\mathrm{I}} < \frac{p^0 - aq^0}{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}} < \frac{1}{a-\mu} \\
&\mu^{\mathrm{II}} < \frac{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}} \\
&\mu^{\mathrm{III}} < \frac{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}} \\
&\mu^{\mathrm{IV}} < \frac{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}} - aq^{\mathrm{IV}}},\ \text{etc.}
\end{aligned}$$

où le signe $<$ dénote le nombre entier qui est immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée après ce signe.

On trouvera ainsi successivement toutes les valeurs de p et q qui pourront satisfaire au probleme, ces valeurs ne pouvant être que les termes correspondans des deux séries

$$p^0,\ p^{\mathrm{I}},\ p^{\mathrm{II}},\ p^{\mathrm{III}},\ \text{etc.}\quad \text{et}\ q^0,\ q^{\mathrm{I}},\ q^{\mathrm{II}},\ q^{\mathrm{III}},\ \text{etc.}$$

COROLLAIRE I

26. Si on fait

$$b = \frac{p^0 - aq^0}{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}$$

$$c = \frac{aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}}{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}$$

$$d = \frac{p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}}{aq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}}, \quad \text{etc.}$$

on aura, comme il est facile de le voir,

$$b = \frac{1}{a - \mu}$$

$$c = \frac{1}{b - \mu^{\mathrm{I}}}$$

$$d = \frac{1}{c - \mu^{\mathrm{II}}}, \quad \text{etc.}$$

et $\mu < a$, $\mu^{\mathrm{I}} < b$, $\mu^{\mathrm{II}} < c$, $\mu^{\mathrm{III}} < d$, etc. donc les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. ne seront autre chose que ceux que nous avons désignés par α, β, γ, etc. dans l'art. 3, c'est-à-dire que ces nombres seront les termes de la fraction continue qui représente la valeur de a, en sorte que l'on aura ici

$$a = \mu + \frac{1}{\mu^{\mathrm{I}}} + \frac{1}{\mu^{\mathrm{II}}} +, \text{ etc.}$$

Par conséquent les nombres p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc. seront les numérateurs, et q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. les dénominateurs des fractions convergentes vers a, fractions que nous avons désignées ci-devant par $\frac{A}{A^{\mathrm{I}}}$, $\frac{B}{B^{\mathrm{I}}}$, $\frac{C}{C^{\mathrm{I}}}$, etc. (art. 10).

Ainsi tout se réduit à convertir la valeur de a en une fraction continue, dont tous les termes soient positifs, ce qu'on peut exécuter par les méthodes exposées plus haut, pourvu qu'on ait soin de prendre toujours les valeurs approchées en défaut; ensuite il n'y aura plus qu'à former la suite des fractions *principales* convergentes vers a, et les termes de chacune de ces fractions donneront des valeurs de p et q, qui résoudront le probleme proposé; de sorte que $\frac{p}{q}$ ne pourra être qu'une de ces mêmes fractions.

COROLLAIRE II

27. Il résulte de-là une nouvelle propriété des fractions dont nous parlons; c'est que nommant $\frac{p}{q}$ une des fractions *principales* convergentes vers a,

(pourvu qu'elles soient déduites d'une fraction continue, dont tous les termes soient positifs), la quantité $p-aq$ aura toujours une valeur plus petite, (abstraction faite du signe), qu'elle n'auroit, si on y mettoit à la place de p et q d'autres nombres moindres quelconques.

PROBLEME II

28. *Etant proposée la quantité*

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc. } + Vq^m,$$

dans laquelle A, B, C, etc. sont des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et où p et q sont des nombres indéterminés qu'on suppose devoir être entiers et positifs; on demande quelles valeurs on doit donner à p et q, pour que la quantité proposée devienne la plus petite qu'il est possible.

Soient α, β, γ, etc. les racines réelles, et $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\pi \pm \varrho\sqrt{-1}$, etc. les racines imaginaires de l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +, \text{ etc. } + V = 0,$$

on aura par la théorie des équations

$$\begin{aligned} &Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc. } + Vq^m = A(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\ldots \\ &(p-(\mu+\nu\sqrt{-1})q)(p-(\mu-\nu\sqrt{-1})q)(p-(\pi+\varrho\sqrt{-1})q)(p-(\pi-\varrho\sqrt{-1})q)\ldots. \\ &= A(p-\alpha q)(p-\beta q)(p-\gamma q)\ldots((p-\mu q)^2+\nu^2q^2)((p-\pi q)^2+\varrho^2q^2)\ldots \end{aligned}$$

Donc la question se réduit à faire en sorte que le produit des quantités $p-\alpha q$, $p-\beta q$, $p-\gamma q$, etc. et $(p-\mu q)^2+\nu^2q^2$, $(p-\pi q)^2+\varrho^2q^2$, etc. soit le plus petit qu'il est possible, tant que p et q sont des nombres entiers positifs.

Supposons qu'on ait trouvé les valeurs de p et q qui répondent au *minimum*; et si l'on met à la place de p et q d'autres nombres moindres, il faudra que le produit dont il s'agit, acquiere une valeur plus grande. Donc il faudra nécessairement que quelqu'un des facteurs augmente de valeur. Or il est visible que si α, par exemple, étoit négatif, le facteur $p-\alpha q$ diminueroit toujours, lorsque p et q décroîtroient; la même chose arriveroit au facteur $(p-\mu q)^2+\nu^2q^2$, si μ étoit négatif, et ainsi des autres; d'où il s'ensuit que parmi les facteurs simples réels il n'y a que ceux où les racines sont positives, qui puissent augmenter de valeur; et parmi les facteurs doubles imaginaires, il n'y aura que ceux où la partie réelle de la racine imaginaire sera positive, qui puissent augmenter aussi; de plus il faut remarquer à l'égard de ces derniers, que pour que $(p-\mu q)^2+\nu^2 q^2$ augmente tandis que p et q diminuent, il faut nécessairement que la partie $(p-\mu q)^2$ augmente, parce que l'autre terme $\nu^2 q^2$ diminue nécessairement; de sorte que l'augmentation de ce facteur dépendra de la quantité $p-\mu q$, et ainsi des autres.

Donc les valeurs de p et q qui répondent au *minimum*, doivent être telles que la quantité $p-aq$ augmente, en donnant à p et q des valeurs moindres, et prenant pour a une des racines réelles positives de l'équation

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+, \text{ etc. } +V=0,$$

ou une des parties réelles positives des racines imaginaires de la même équation, s'il y en a.

Soient r et s deux nombres entiers positifs moindres que p et q; il faudra donc que $r-as$ soit $>p-aq$, (abstraction faite du signe de ces deux quantités). Qu'on suppose, comme dans l'article 23, que ces nombres soient tels que $ps-qr=\pm 1$, le signe supérieur ayant lieu, lorsque $p-aq$ est positive; et l'inférieur, lorsque $p-aq$ est négative; en sorte que les deux quantités $p-aq$ et $r-as$ deviennent de différens signes, et l'on aura exactement le cas auquel nous avons réduit le probleme précédent, (art. 24), et dont nous avons déjà donné la solution.

Donc, (art. 26), les valeurs de p et q devront nécessairement se trouver parmi les termes des fractions *principales* convergentes vers a, c'est-à-dire vers quelqu'une des quantités que nous avons dit pouvoir être prises pour a. Ainsi il faudra réduire toutes ces quantités en fractions continues, (ce qu'on pourra exécuter facilement par les méthodes enseignées ailleurs), et en déduire ensuite les fractions convergentes dont il s'agit, après quoi on fera successivement p égal à tous les numérateurs de ces fractions, et q égal aux dénominateurs correspondans, et celle de ces suppositions qui donnera la moindre valeur de la fonction proposée, sera nécessairement aussi celle qui répondra au *minimum* cherché.

REMARQUE I

29. Nous avons supposé que les nombres p et q devoient être tous deux positifs; il est clair que si on les prenoit tous deux négatifs, il n'en résulteroit aucun changement dans la valeur absolue de la formule propo-

sée; elle ne feroit que changer de signe dans le cas où l'exposant m seroit impair; et elle demeureroit absolument la même, dans le cas où l'exposant m seroit pair; ainsi il n'importe quels signes on donne aux nombres p et q, lorsqu'on les suppose tous deux de mêmes signes.

Mais il n'en sera pas de même, si on donne à p et q des signes différens; car alors les termes alternatifs de l'équation proposée changeront de signe, ce qui en fera changer aussi aux racines α, β, γ, etc. $\mu \pm \nu\sqrt{-1}$, $\pi \pm \varrho\sqrt{-1}$, etc. de sorte que celles des quantités α, β, γ, etc. μ, π, etc. qui étoient négatives, et par conséquent inutiles dans le premier cas, deviendront positives dans celui-ci, et devront être employées à la place des autres.

De-là je conclus en général que lorsqu'on recherche le *minimum* de la formule proposée sans autre restriction, sinon que p et q soient des nombres entiers, il faut prendre successivement pour a toutes les racines réelles α, β, γ, etc. et toutes les parties réelles μ, π, etc. des racines imaginaires de l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +, \text{ etc.} + V = 0,$$

en faisant abstraction des signes de ces quantités; mais ensuite il faudra donner à p et q les mêmes signes, ou des signes différens, suivant que la quantité qu'on aura prise pour a, aura eu originairement le signe positif ou le signe négatif.

REMARQUE II

30. Lorsque parmi les racines réelles α, β, γ, etc. il y en a de commensurables, alors il est clair que la quantité proposée deviendra nulle, en faisant $\frac{p}{q}$ égal à une de ces racines; de sorte que dans ce cas il n'y aura pas, à proprement parler, de *minimum*; dans tous les autres cas il sera impossible que la quantité dont il s'agit devienne zéro, tant que p et q seront des nombres entiers; or, comme les coefficiens A, B, C, etc. sont aussi des nombres entiers, (*hyp.*), cette quantité sera toujours égale à un nombre entier, et par conséquent elle ne pourra jamais être moindre que l'unité.

Donc, si on avoit à résoudre en nombres entiers l'équation

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc.} + Vq^m = \pm 1,$$

il faudroit chercher les valeurs de p et q par la méthode du probleme précédent, excepté dans les cas où l'équation

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} +, \text{ etc.} + V = 0$$

auroit des racines ou des diviseurs quelconques commensurables; car alors il est visible que la quantité

$$Ap^m + Bp^{m-1}q + Cp^{m-2}q^2 +, \text{ etc.}$$

pourroit se décomposer en deux ou plusieurs quantités semblables de degrés moindres; de sorte qu'il faudroit que chacune de ces formules partielles fût égale à l'unité en particulier, ce qui donneroit pour le moins deux équations qui serviroient à déterminer p et q.

Nous avons déjà donné ailleurs, (Mémoires de l'Académie de Berlin pour l'année 1768[1]), une solution de ce dernier probleme; mais celle que nous venons d'indiquer est beaucoup plus simple et plus directe, quoique toutes les deux dépendent de la même théorie des fractions continues.

PROBLEME III

31. *On demande les valeurs de p et de q, qui rendront la quantité*

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2$$

la plus petite qu'il est possible, dans l'hypothese qu'on n'admette pour p et q que des nombres entiers.

Ce probleme n'est, comme l'on voit, qu'un cas particulier du précédent; mais nous avons cru devoir le traiter en particulier, parce qu'il est susceptible d'une solution très-simple et très-élégante, et que d'ailleurs nous aurons dans la suite occasion d'en faire usage dans la résolution des équations du second degré à deux inconnues, en nombres entiers.

Suivant la méthode générale il faudra donc commencer par chercher les racines de l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

lesquelles sont, comme l'on sait,

$$\frac{-B \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)}}{2A}.$$

Or, 1°. si $B^2 - 4AC$ est égal à un nombre carré, les deux racines seront commensurables, et il n'y aura point de *minimum* proprement dit, parce que la quantité $Ap^2 + Bpq + Cq^2$ pourra devenir nulle.

1) Voir la note p. 514. H. W.

2°. Si $B^2 - 4AC$ n'est pas carré, alors les deux racines seront irrationnelles ou imaginaires, suivant que $B^2 - 4AC$ sera $>$ ou < 0, ce qui fait deux cas qu'il faut considérer séparément; nous commencerons par le dernier, qui est le plus facile à résoudre.

Premier Cas lorsque $B^2 - 4AC < 0$

32. Les deux racines étant dans ce cas imaginaires, on aura $\frac{-B}{2A}$ pour la partie toute réelle de ces racines, laquelle devra par conséquent être prise pour a. Ainsi il n'y aura qu'à réduire la fraction $\frac{-B}{2A}$, (en faisant abstraction du signe qu'elle peut avoir), en fraction continue par la méthode de l'art. 4, et en déduire ensuite la série des fractions convergentes, (art. 10), laquelle sera nécessairement terminée; cela fait, on essayera successivement pour p les numérateurs de ces fractions, et pour q les dénominateurs correspondans, en ayant soin de donner à p et q les mêmes signes ou des signes différens, suivant que $\frac{-B}{2A}$ sera un nombre positif ou négatif. On trouvera de cette maniere les valeurs de p et q, qui peuvent rendre la formule proposée un *moindre.*

EXEMPLE

Soit proposée, par exemple, la quantité

$$49p^2 - 238pq + 290q^2.$$

On aura donc ici $A = 49$, $B = -238$, $C = 290$; donc $B^2 - 4AC = -196$, et $\frac{-B}{2A} = \frac{238}{98} = \frac{17}{7}$. Opérant donc sur cette fraction de la maniere enseignée dans l'art. 4, on trouvera les quotiens 2, 2, 3, à l'aide desquels on formera ces fractions, (voyez l'art. 20),

$$\begin{array}{cccc} & 2, & 2, & 3. \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}. \end{array}$$

De sorte que les nombres à essayer seront 1, 2, 5, 17 pour p, et 0, 1, 2, 7 pour q; or désignant par P la quantité proposée, on trouvera

p	q	P
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49;

d'où l'on voit que la plus petite valeur de P est 5, laquelle résulte de ces suppositions $p=5$ et $q=2$; ainsi on peut conclure en général que la formule proposée ne pourra jamais devenir plus petite que 5, tant que p et q seront des nombres entiers; de sorte que le *minimum* aura lieu, lorsque $p=5$ et $q=2$.

Second Cas lorsque $B^2-4AC>0$

33. Comme dans le cas présent l'équation $Ax^2+Bx+C=0$ a deux racines réelles irrationnelles, il faudra les réduire l'une et l'autre en fractions continues. Cette opération peut se faire avec la plus grande facilité par une méthode particuliere que nous avons exposée ailleurs, et que nous croyons devoir rappeler ici, d'autant qu'elle se déduit naturellement des formules de l'article 25, et qu'elle renferme d'ailleurs tous les principes nécessaires pour la solution complette et générale du probleme proposé.

Dénotons donc par a la racine qu'on a dessein de convertir en fraction continue, et que nous supposerons toujours positive, et soit en même temps b l'autre racine, on aura, comme l'on sait, $a+b=-\frac{B}{A}$, et $ab=\frac{C}{A}$; d'où $a-b=\frac{\sqrt{(B^2-4AC)}}{A}$, ou bien en faisant, pour abréger,

$$B^2-4AC=E,$$

$a-b=\frac{\sqrt{E}}{A}$, où le radical $\sqrt{E}$ peut être positif ou négatif; il sera positif, lorsque la racine a sera la plus grande des deux, et négatif, lorsque cette racine sera la plus petite; donc

$$a=\frac{-B+\sqrt{E}}{2A},\qquad b=\frac{-B-\sqrt{E}}{2A}.$$

Maintenant, si on conserve les mêmes dénominations de l'art. 25, il n'y aura qu'à substituer à la place de a la valeur précédente, et la difficulté ne consistera qu'à pouvoir déterminer facilement les valeurs entieres approchées μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc.

Pour faciliter ces déterminations, je multiplie le haut et le bas des fractions

$$\frac{p^0-aq^0}{aq^{\text{I}}-p^{\text{I}}},\quad \frac{aq^{\text{I}}-p^{\text{I}}}{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}},\quad \frac{p^{\text{II}}-aq^{\text{II}}}{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}},\ \text{etc.}$$

respectivement par $A(bq^{\text{I}}-p^{\text{I}})$, $A(p^{\text{II}}-bq^{\text{II}})$, $A(bq^{\text{III}}-p^{\text{III}})$, etc. et comme on a

$$A(p^0 - aq^0)(p^0 - bq^0) = A$$

$$A(aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}})(bq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}) = Ap^{\mathrm{I}2} - A(a+b)p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} + Aabq^{\mathrm{I}2} = Ap^{\mathrm{I}2} + Bp^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} + Cq^{\mathrm{I}2},$$

$$A(p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}})(p^{\mathrm{II}} - bq^{\mathrm{II}}) = Ap^{\mathrm{II}2} - A(a+b)p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} + Aabq^{\mathrm{II}2} = Ap^{\mathrm{II}2} + Bp^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} + Cq^{\mathrm{II}2}, \text{ etc.}$$

$$A(p^0 - aq^0)(bq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}}) = -\mu A - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\sqrt{E},$$

$$A(aq^{\mathrm{I}} - p^{\mathrm{I}})(p^{\mathrm{II}} - bq^{\mathrm{II}}) = -Ap^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} + Aap^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} + Abp^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} - Aabq^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}}$$
$$= -Ap^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} - Cq^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} - \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{I}}),$$

$$A(p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}})(bq^{\mathrm{III}} - p^{\mathrm{III}}) = -Ap^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} + Aap^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{II}} + Abp^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - Aabq^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}}$$
$$= -Ap^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} - Cq^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} - \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}}) + \tfrac{1}{2}\sqrt{E}(p^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{II}}),$$

et ainsi de suite, je fais, pour abréger,

$$\begin{aligned}
P^0 &= A\\
P^{\mathrm{I}} &= Ap^{\mathrm{I}2} + Bp^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{I}} + Cq^{\mathrm{I}2}\\
P^{\mathrm{II}} &= Ap^{\mathrm{II}2} + Bp^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{II}} + Cq^{\mathrm{II}2}\\
P^{\mathrm{III}} &= Ap^{\mathrm{III}2} + Bp^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{III}} + Cq^{\mathrm{III}2}, \text{ etc.}\\
Q^0 &= \tfrac{1}{2}B\\
Q^{\mathrm{I}} &= A\mu + \tfrac{1}{2}B\\
Q^{\mathrm{II}} &= Ap^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}} + \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}} + q^{\mathrm{I}}p^{\mathrm{II}}) + Cq^{\mathrm{I}}q^{\mathrm{II}}\\
Q^{\mathrm{III}} &= Ap^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}} + \tfrac{1}{2}B(p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}} + q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{III}}) + Cq^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

J'aurai, à cause de

$$p^{\mathrm{II}}q^{\mathrm{I}} - q^{\mathrm{II}}p^{\mathrm{I}} = 1, \quad p^{\mathrm{III}}q^{\mathrm{II}} - q^{\mathrm{III}}p^{\mathrm{II}} = -1, \quad p^{\mathrm{IV}}q^{\mathrm{III}} - q^{\mathrm{IV}}p^{\mathrm{III}} = 1, \text{ etc.}$$

les formules suivantes,

$$\begin{aligned}
\mu &< \frac{-Q^0 + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^0}\\
\mu^{\mathrm{I}} &< \frac{-Q^{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\mathrm{I}}}\\
\mu^{\mathrm{II}} &< \frac{-Q^{\mathrm{II}} + \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\mathrm{II}}}\\
\mu^{\mathrm{III}} &< \frac{-Q^{\mathrm{III}} - \frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\mathrm{III}}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Or, si dans l'expression de Q^{II} on met pour p^{II} et q^{II} leurs valeurs $\mu^{\text{I}}p^{\text{I}}+1$ et μ^{I}, elle deviendra $\mu^{\text{I}}P^{\text{I}}+Q^{\text{I}}$; de même si on substitue dans l'expression de Q^{III} pour p^{III} et q^{III} leurs valeurs $\mu^{\text{II}}p^{\text{II}}+p^{\text{I}}$ et $\mu^{\text{II}}q^{\text{II}}+q^{\text{I}}$, elle se changera en $\mu^{\text{II}}P^{\text{II}}+Q^{\text{II}}$, et ainsi du reste; de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
Q^{\text{I}} &= \mu P^{0} + Q^{0}\\
Q^{\text{II}} &= \mu^{\text{I}} P^{\text{I}} + Q^{\text{I}}\\
Q^{\text{III}} &= \mu^{\text{II}} P^{\text{II}} + Q^{\text{II}}\\
Q^{\text{IV}} &= \mu^{\text{III}} P^{\text{III}} + Q^{\text{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Pareillement si on substitue dans l'expression de P^{II} les valeurs de p^{II} et q^{II}, elle deviendra $\mu^{\text{I}2}P^{\text{I}}+2\mu^{\text{I}}Q^{\text{I}}+A$; et si on substitue les valeurs de p^{III} et q^{III} dans l'expression de P^{III}, elle deviendra $\mu^{\text{II}2}P^{\text{II}}+2\mu^{\text{II}}Q^{\text{II}}+P^{\text{I}}$, et ainsi de suite; de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
P^{\text{I}} &= \mu^{2} P^{0} + 2\mu Q^{0} + C\\
P^{\text{II}} &= \mu^{\text{I}2} P^{\text{I}} + 2\mu^{\text{I}} Q^{\text{I}} + P^{0}\\
P^{\text{III}} &= \mu^{\text{II}2} P^{\text{II}} + 2\mu^{\text{II}} Q^{\text{II}} + P^{\text{I}}\\
P^{\text{IV}} &= \mu^{\text{III}2} P^{\text{III}} + 2\mu^{\text{III}} Q^{\text{III}} + P^{\text{II}}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Ainsi on pourra, à l'aide de ces formules, continuer aussi loin qu'on voudra les suites des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc., Q^{0}, Q^{I}, Q^{II}, etc. et P^{0}, P^{I}, P^{II}, etc. qui dépendent, comme l'on voit, mutuellement les uns des autres, sans qu'il soit nécessaire de calculer en même temps les nombres p^{0}, p^{I}, p^{II}, etc. et q^{0}, q^{I}, q^{II}, etc.

On peut encore trouver les valeurs de P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. par des formules plus simples que les précédentes, en remarquant que l'on a

$$Q^{\text{I}2}-AP^{\text{I}}=(\mu A+\tfrac{1}{2}B)^{2}-A(\mu^{2}A+\mu B+C)=\tfrac{1}{4}B^{2}-AC,$$
$$Q^{\text{II}2}-P^{\text{I}}P^{\text{II}}=(\mu^{\text{I}}P^{\text{I}}+Q^{\text{I}})^{2}-P^{\text{I}}(\mu^{\text{I}2}P^{\text{I}}+2\mu^{\text{I}}Q^{\text{I}}+A)=Q^{\text{I}2}-AP^{\text{I}},$$

et ainsi de suite; c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
Q^{\text{I}2} - P^{0}P^{\text{I}} &= \tfrac{1}{4}E\\
Q^{\text{II}2} - P^{\text{I}}P^{\text{II}} &= \tfrac{1}{4}E\\
Q^{\text{III}2} - P^{\text{II}}P^{\text{III}} &= \tfrac{1}{4}E, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$P^{\mathrm{I}} = \frac{Q^{\mathrm{I}2} - \frac{1}{4}E}{P^0}$$

$$P^{\mathrm{II}} = \frac{Q^{\mathrm{II}2} - \frac{1}{4}E}{P^{\mathrm{I}}}$$

$$P^{\mathrm{III}} = \frac{Q^{\mathrm{III}2} - \frac{1}{4}E}{P^{\mathrm{II}}}, \text{ etc.}$$

Les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. étant donc trouvés ainsi, on aura, (art. 26), la fraction continue

$$a = \mu + \frac{1}{\mu^{\mathrm{I}}} + \frac{1}{\mu^{\mathrm{II}}} +, \text{ etc.}$$

et pour trouver le *minimum* de la formule $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, il n'y aura qu'à calculer les nombres $p^0, p^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}, p^{\mathrm{III}}$, etc. et $q^0, q^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{II}}, q^{\mathrm{III}}$, etc. (art. 25), et les essayer ensuite à la place de p et q; mais on peut encore se dispenser de cette opération, en remarquant que les quantités P^0, P^{I}, P^{II}, etc. ne sont autre chose que les valeurs de la formule dont il s'agit, lorsqu'on y fait successivement $p = p^0, p^{\mathrm{I}}, p^{\mathrm{II}}$, etc. et $q = q^0, q^{\mathrm{I}}, q^{\mathrm{II}}$, etc. Ainsi il n'y aura qu'à voir quel est le plus petit terme de la suite P^0, P^{I}, P^{II}, etc. qu'on aura calculée en même temps que la suite μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. et ce sera le *minimum* cherché; on trouvera ensuite les valeurs correspondantes de p et q par les formules citées.

34. Maintenant je dis qu'en continuant la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. on doit nécessairement parvenir à deux termes consécutifs de signes différens, et qu'alors tous les termes suivans seront aussi deux à deux de différens signes. Car on a, (art. précédent),

$$P^0 = A(p^0 - aq^0)(p^0 - bq^0), \quad P^{\mathrm{I}} = A(p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}})(p^{\mathrm{I}} - bq^{\mathrm{I}}), \text{ etc.}$$

or de ce qu'on a démontré dans le probleme I, il s'ensuit que les quantités $p^0 - aq^0$, $p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}$, $p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}$, etc. doivent être de signes alternatifs, et aller toujours en diminuant; donc, 1°. si b est une quantité négative, les quantités $p^0 - bq^0$, $p^{\mathrm{I}} - bq^{\mathrm{I}}$, etc. seront toutes positives; par conséquent les nombres P^0, P^{I}, P^{II}, etc. seront tous de signes alternatifs; 2°. si b est une quantité positive, comme les quantités $p^{\mathrm{I}} - aq^{\mathrm{I}}$, $p^{\mathrm{II}} - aq^{\mathrm{II}}$, etc. et à plus forte raison les quantités $\frac{p^{\mathrm{I}}}{q^{\mathrm{I}}} - a$, $\frac{p^{\mathrm{II}}}{q^{\mathrm{II}}} - a$, etc. forment une suite décroissante à l'infini, on arrivera nécessairement à une de ces dernieres quantités, comme $\frac{p^{\mathrm{III}}}{q^{\mathrm{III}}} - a$, qui sera

$< a - b$, (abstraction faite du signe), et alors toutes les suivantes, $\frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}} - a$, $\frac{p^{\text{V}}}{q^{\text{V}}} - a$, etc. le seront aussi; de sorte que toutes les quantités $a - b + \frac{p^{\text{III}}}{q^{\text{III}}} - a$, $a - b + \frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}} - a$, etc. seront nécessairement de même signe que la quantité $a - b$; par conséquent les quantités $\frac{p^{\text{III}}}{q^{\text{III}}} - b$, $\frac{p^{\text{IV}}}{q^{\text{IV}}} - b$, etc. et celles-ci, $p^{\text{III}} - bq^{\text{III}}$, $p^{\text{IV}} - bq^{\text{IV}}$, etc. à l'infini, seront toutes de même signe; donc les nombres P^{III}, P^{IV}, etc. seront tous de signes alternatifs.

Supposons donc en général que l'on soit parvenu à des termes de signes alternatifs dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et que P^{λ} soit le premier de ces termes, en sorte que tous les termes, P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$, etc. à l'infini, soient alternativement positifs et négatifs, je dis qu'aucun de ces termes ne pourra être plus grand que $\frac{1}{4}E$[1]). Car si, par exemple, P^{III}, P^{IV}, P^{V}, etc. sont tous de signes alternatifs, il est clair que les produits deux à deux, $P^{\text{III}}P^{\text{IV}}$, $P^{\text{IV}}P^{\text{V}}$, etc. seront nécessairement tous négatifs; mais on a, (art. précédent),

$$Q^{\text{IV}2} - P^{\text{III}}P^{\text{IV}} = \frac{1}{4}E,\ \ Q^{\text{V}2} - P^{\text{IV}}P^{\text{V}} = \frac{1}{4}E, \text{ etc.}$$

donc les nombres positifs, $-P^{\text{III}}P^{\text{IV}}$, $-P^{\text{IV}}P^{\text{V}}$, etc., seront tous moindres que $\frac{1}{4}E$, ou au moins pas plus grands que $\frac{1}{4}E$; de sorte que, comme les nombres P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. sont d'ailleurs tous entiers par leur nature, les nombres P^{III}, P^{IV}, etc. et en général les nombres P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, etc. (abstraction faite de leurs signes), ne pourront jamais surpasser le nombre $\frac{1}{4}E$.

Il s'ensuit aussi de-là que les termes Q^{IV}, Q^{V}, etc. et en général $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$, etc. ne pourront jamais être plus grands que $\frac{1}{2}\sqrt{E}$.

D'où il est facile de conclure que les deux séries P^{λ}, $P^{\lambda+1}$, $P^{\lambda+2}$, etc. et $Q^{\lambda+1}$, $Q^{\lambda+2}$, etc. quoique poussées à l'infini, ne pourront être composées que d'un certain nombre de termes différens, ces termes ne pouvant être pour la premiere que les nombres naturels jusqu'à $\frac{1}{4}E$ pris positivement ou négativement, et pour la seconde, les nombres naturels jusqu'à $\frac{1}{2}\sqrt{E}$ avec les fractions intermédiaires $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc. pris aussi positivement ou négativement; car il est visible par les formules de l'article précédent que les nombres Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. seront toujours entiers, lorsque B sera pair, mais qu'ils contiendront chacun la fraction $\frac{1}{2}$, lorsque B sera impair.

Donc, en continuant les deux séries P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc.

1) Dans l'édition originale, E n'a le coefficient $\frac{1}{4}$ ni ici ni aux passages suivants. H. W.

il arrivera nécessairement que deux termes correspondans, comme P^π et Q^π, reviendront après un certain intervalle de termes, dont le nombre pourra toujours être supposé pair, car, comme il faut que les mêmes termes P^π et Q^π reviennent en même temps une infinité de fois, à cause que le nombre des termes différens dans l'une et dans l'autre série est limité, et par conséquent aussi le nombre de leurs combinaisons différentes, il est clair que si ces deux termes revenoient toujours après un intervalle d'un nombre impair de termes, il n'y auroit qu'à considérer leurs retours alternativement, et alors les intervalles seroient tous composés d'un nombre pair de termes.

On aura donc, en dénotant par 2ϱ le nombre des termes intermédiaires,

$$P^{\pi+2\varrho} = P^\pi, \qquad \text{et} \qquad Q^{\pi+2\varrho} = Q^\pi,$$

et alors tous les termes P^π, $P^{\pi+1}$, $P^{\pi+2}$, etc. Q^π, $Q^{\pi+1}$, $Q^{\pi+2}$, etc. et μ^π, $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, etc. reviendront aussi au bout de chaque intervalle de 2ϱ termes. Car il est facile de voir par les formules données dans l'article précédent pour la détermination des nombres μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. et P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. que dès qu'on aura

$$P^{\pi+2\varrho} = P^\pi, \qquad \text{et} \qquad Q^{\pi+2\varrho} = Q^\pi,$$

on aura aussi $\mu^{\pi+2\varrho} = \mu^\pi$, ensuite

$$Q^{\pi+2\varrho+1} = Q^{\pi+1}, \qquad \text{et} \qquad P^{\pi+2\varrho+1} = P^{\pi+1};$$

donc aussi $\mu^{\pi+2\varrho+1} = \mu^{\pi+2\varrho}$, et ainsi de suite.

Donc, si Π est un nombre quelconque égal ou plus grand que π, et que m dénote un nombre quelconque entier positif, on aura en général

$$P^{\Pi+2m\varrho} = P^\Pi, \quad Q^{\Pi+2m\varrho} = Q^\Pi, \quad \mu^{\Pi+2m\varrho} = \mu^\Pi;$$

de sorte qu'en connoissant les $\pi + 2\varrho$ premiers termes de chacune de ces trois suites, on connoîtra aussi tous les suivans, qui ne seront autre chose que les 2ϱ derniers termes répétés à l'infini dans le même ordre.

De tout cela il s'ensuit que pour trouver la plus petite valeur de

$$P = Ap^2 + Bpq + Cq^2,$$

il suffit de pousser les séries P^0, P^{I}, P^{II}, etc. et Q^0, Q^{I}, Q^{II}, etc. jusqu'à ce que deux termes correspondans, comme P^π et Q^π, reparoissent ensemble après un nombre pair de termes intermédiaires, en sorte que l'on ait

$$P^{\pi+2\varrho}=P^{\pi}, \text{ et } Q^{\pi+2\varrho}=Q^{\pi};$$

alors le plus petit terme de la série P^{0}, P^{I}, P^{II}, etc. $P^{\pi+2\varrho}$ sera le *minimum* cherché.

COROLLAIRE I

35. Si le plus petit terme de la série P^{0}, P^{I}, P^{II}, etc. $P^{\pi+2\varrho}$ ne se trouve pas avant le terme P^{π}, alors ce terme reparoîtra une infinité de fois dans la même suite prolongée à l'infini; ainsi il y aura alors une infinité de valeurs de p et de q qui répondront au *minimum*, et qu'on pourra trouver toutes par les formules de l'art. 25, en continuant la série des nombres μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. au-delà du terme $\mu^{\pi+2\varrho}$ par la répétition des mêmes termes $\mu^{\pi+1}$, $\mu^{\pi+2}$, etc. comme on l'a dit plus haut.

On peut aussi dans ce cas avoir des formules générales qui représentent toutes les valeurs de p et de q dont il s'agit; mais le détail de la méthode qu'il faut employer pour y parvenir, nous meneroit trop loin; quant à présent, nous nous contenterons de renvoyer pour cet objet aux Mémoires de Berlin déjà cités, année 1768, p. 123 et suivantes[1]) où l'on trouvera une théorie générale et nouvelle des fractions continues périodiques.

COROLLAIRE II

36. Nous avons démontré dans l'art. 34, qu'en continuant la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. on doit trouver des termes consécutifs de signes différens. Supposons donc, par exemple, que P^{III} et P^{IV} soient les deux premiers termes de cette qualité, on aura nécessairement les deux quantités $p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}$ et $p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}$ de mêmes signes, à cause que les quantités $p^{\mathrm{III}}-aq^{\mathrm{III}}$ et $p^{\mathrm{IV}}-aq^{\mathrm{IV}}$ sont de leur nature de différens signes. Or en mettant dans les quantités $p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}$, $p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}$, etc. les valeurs de p^{V}, p^{VI}, etc. q^{V}, q^{VI}, etc. (art. 25), on aura

$$p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}=\mu^{\mathrm{IV}}(p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}})+p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}$$
$$p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}=\mu^{\mathrm{V}}(p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}})+p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}, \text{ etc.}$$

D'où, à cause que μ^{IV}, μ^{V}, etc. sont des nombres positifs, il est clair que

1) Voir la note p. 514. H. W.

toutes les quantités $p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}$, $p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}$, etc. à l'infini, seront de mêmes signes que les quantités $p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}$ et $p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}$; par conséquent tous les termes P^{III}, P^{IV}, P^{V}, etc. à l'infini, auront alternativement les signes *plus* et *moins*.

Maintenant on aura par les équations précédentes

$$\mu^{\mathrm{IV}}=\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}-\frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$$

$$\mu^{\mathrm{V}}=\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}-\frac{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$$

$$\mu^{\mathrm{VI}}=\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}-\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}},\ \text{etc.}$$

où les quantités $\frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$, $\frac{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, etc. seront toutes positives.

Donc, puisque les nombres μ^{IV}, μ^{V}, μ^{VI}, etc. doivent être tous entiers positifs, (*hyp.*), la quantité $\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$ devra être positive et >1, de même que les quantités $\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, $\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}$, etc.; donc les quantités $\frac{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, $\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}$, etc. seront positives et moindres que l'unité; de sorte que les nombres μ^{V}, μ^{VI}, etc. ne pourront être que les nombres entiers, qui sont immédiatement moindres que les valeurs de $\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}$, $\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}$, etc.; quant au nombre μ^{IV}, il sera aussi égal au nombre entier, qui est immédiatement moindre que la valeur de $\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}$, toutes les fois qu'on aura $\frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}<1$. Ainsi on aura

$$\mu^{\mathrm{IV}}<\frac{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}},\quad \text{si } \frac{p^{\mathrm{III}}-bq^{\mathrm{III}}}{p^{\mathrm{IV}}-bq^{\mathrm{IV}}}<1,$$

$$\mu^{\mathrm{V}}<\frac{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}}{p^{\mathrm{V}}-bq^{\mathrm{V}}},$$

$$\mu^{\mathrm{VI}}<\frac{p^{\mathrm{VII}}-bq^{\mathrm{VII}}}{p^{\mathrm{VI}}-bq^{\mathrm{VI}}},\ \text{etc.}$$

le signe $<$ placé après les nombres μ^{IV}, μ^{V}, μ^{VI}, etc. dénotant, comme plus haut, les nombres entiers qui sont immédiatement au-dessous des quantités qui suivent ce même signe.

Or il est facile de transformer, par des réductions semblables à celles de l'art. 33, les quantités $\frac{p^{\text{V}}-bq^{\text{V}}}{p^{\text{IV}}-bq^{\text{IV}}}$, $\frac{p^{\text{VI}}-bq^{\text{VI}}}{p^{\text{V}}-bq^{\text{V}}}$, etc. en celles-ci,

$$\frac{Q^{\text{V}}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{IV}}},\quad \frac{Q^{\text{VI}}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{V}}},\ \text{etc.};$$

de plus la condition de $\frac{p^{\text{III}}-bq^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-bq^{\text{IV}}}<1$ peut se réduire à celle-ci

$$\frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}<\frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}};$$

laquelle, à cause de $\frac{aq^{\text{III}}-p^{\text{III}}}{p^{\text{IV}}-aq^{\text{IV}}}>1$, aura sûrement lieu lorsqu'on aura $\frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}=$ ou <1; donc on aura

$$\mu^{\text{IV}}<\frac{Q^{\text{V}}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{IV}}},\quad \text{si } \frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}=\text{ ou }<1,$$

$$\mu^{\text{V}}<\frac{Q^{\text{VI}}-\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{V}}},$$

$$\mu^{\text{VI}}<\frac{Q^{\text{VII}}+\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P^{\text{VI}}},\ \text{etc.}$$

En combinant ces formules avec celles de l'art. 33, qui renferment la loi des séries P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. on verra aisément que si on suppose donnés deux termes correspondans de ces deux séries, dont le numéro soit plus grand que 3, on pourra remonter aux termes précédens jusqu'à P^{IV} et Q^{V}, et même jusqu'aux termes P^{III} et Q^{IV}, si la condition de $\frac{-P^{\text{III}}}{P^{\text{IV}}}=$ ou <1 a lieu; en sorte que tous ces termes seront absolument déterminés par ceux qu'on a supposé donnés.

En effet connoissant, par exemple, P^{VI} et Q^{VI}, on connoîtra d'abord P^{V} par l'équation

$$Q^{\text{VI}2}-P^{\text{V}}P^{\text{VI}}=\frac{1}{4}E;$$

ensuite ayant Q^{VI} et P^{V}, on trouvera la valeur de μ^{V}, à l'aide de laquelle on trouvera ensuite la valeur de Q^{V} par l'équation

$$Q^{\text{VI}}=\mu^{\text{V}}P^{\text{V}}+Q^{\text{V}};$$

or l'équation

$$Q^{\mathrm{V}2} - P^{\mathrm{IV}} P^{\mathrm{V}} = \frac{1}{4} E$$

donnera P^{IV}; et si on sait d'avance que $\frac{-P^{\mathrm{III}}}{P^{\mathrm{IV}}}$ doit être $=$ ou < 1, on trouvera μ^{IV}, après quoi on aura Q^{IV} par l'équation

$$Q^{\mathrm{V}} = \mu^{\mathrm{IV}} P^{\mathrm{IV}} + Q^{\mathrm{IV}},$$

et ensuite P^{III} par celle-ci,

$$Q^{\mathrm{IV}2} - P^{\mathrm{III}} P^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{4} E.$$

De-là il est facile de tirer cette conclusion générale, que si P^{λ} et $P^{\lambda+1}$ sont les premiers termes de la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. qui se trouvent consécutivement de différens signes, le terme $P^{\lambda+1}$ et les suivans reviendront toujours après un certain nombre de termes intermédiaires, et qu'il en sera de même du terme P^{λ}, si l'on a $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ ou < 1.

Car imaginons, comme dans l'art. 34, que l'on ait trouvé $P^{\pi+2\varrho} = P^{\pi}$, et $Q^{\pi+2\varrho} = Q^{\pi}$, et supposons que π soit $> \lambda$, c'est-à-dire $\pi = \lambda + \nu$; donc on pourra d'un côté remonter du terme P^{π} au terme $P^{\lambda+1}$ ou P^{λ}, et de l'autre, du terme $P^{\pi+2\varrho}$ au terme $P^{\lambda+2\varrho+1}$ ou $P^{\lambda+2\varrho}$; et comme les termes d'où l'on part, de part et d'autre sont égaux, tous les dérivés seront aussi respectivement égaux; de sorte qu'on aura $P^{\lambda+2\varrho+1} = P^{\lambda+1}$, ou même $P^{\lambda+2\varrho} = P^{\lambda}$, si $\frac{\pm P^{\lambda}}{P^{\lambda+1}} =$ ou < 1.

Par-là on pourra donc juger d'avance du commencement des périodes dans la série P^{0}, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. et par conséquent aussi dans les deux autres séries, Q^{0}, Q^{I}, Q^{II}, Q^{III}, etc. et μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc.; mais quant à la longueur des périodes, cela dépend de la nature du nombre E, et même uniquement de la valeur de ce nombre, comme je pourrois le démontrer, si je ne craignois que ce détail ne me menât trop loin.

COROLLAIRE III

37. Ce qu'on vient de démontrer dans le corollaire précédent peut servir encore à prouver ce beau théoreme:

Que toute équation de la forme $p^2 - Kq^2 = 1$, *où* K *est un nombre entier positif non carré, et* p *et* q *deux indéterminées, est toujours résoluble en nombres entiers.*

Car, en comparant la formule $p^2 - Kq^2$ avec la formule générale $Ap^2 + Bpq + Cq^2$, on a $A = 1$, $B = 0$, $C = -K$; donc, (art. 33),

$$E = B^2 - 4AC = 4K, \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}\sqrt{E} = \sqrt{K}.$$

Donc $P^0 = 1$, $Q^0 = 0$; donc $\mu < \sqrt{K}$, $Q^{\mathrm{I}} = \mu$, et $P^{\mathrm{I}} = \mu^2 - K$; d'où l'on voit 1°. que P^{I} est négatif, et par conséquent de signe différent de P^0; 2°. que $-P^{\mathrm{I}}$ est $=$ ou > 1, parce que K et μ sont des nombres entiers; de sorte qu'on aura $\frac{P^0}{-P^{\mathrm{I}}} =$ ou < 1; donc on aura, (art. précédent), $\lambda = 0$ et $P^{2\varrho} = P^0 = 1$; de sorte qu'en continuant la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. le terme $P^0 = 1$ reviendra nécessairement après un certain intervalle de termes; par conséquent on pourra toujours trouver une infinité de valeurs de p et de q qui rendent la formule $p^2 - Kq^2$ égale à l'unité.

COROLLAIRE IV

38. On peut aussi démontrer cet autre théoreme:

Que si l'équation $p^2 - Kq^2 = \pm H$ est résoluble en nombres entiers, en supposant K un nombre positif non-carré, et H un nombre positif et moindre que $\sqrt{K}$, les nombres p et q doivent être tels que $\frac{p}{q}$ soit une des fractions principales convergentes vers la valeur de $\sqrt{K}$.

Supposons que le signe supérieur doive avoir lieu, en sorte que

$$p^2 - Kq^2 = H;$$

donc on aura

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{p + q\sqrt{K}} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)};$$

qu'on cherche deux nombres entiers positifs, r et s, moindres que p et q, et tels que $ps - qr = 1$, ce qui est toujours possible, comme on l'a démontré dans l'art. 23, et l'on aura $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{1}{qs}$; donc retranchant cette équation de la précédente, il viendra

$$\frac{r}{s} - \sqrt{K} = \frac{H}{q^2\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} - \frac{1}{qs};$$

de sorte qu'on aura

$$p - q\sqrt{K} = \frac{H}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)}$$

$$r - s\sqrt{K} = \frac{1}{q}\left(\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} - 1\right).$$

Or, comme $\frac{p}{q} > \sqrt{K}$ et $H < \sqrt{K}$, il est clair que $\frac{H}{\frac{p}{q} + \sqrt{K}}$ sera $< \frac{1}{2}$; donc $p - q\sqrt{K}$ sera $< \frac{1}{2q}$; donc $\frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)}$ sera à plus forte raison $< \frac{1}{2}$, puisque $s < q$; de sorte que $r - s\sqrt{K}$ sera une quantité négative, laquelle, prise positivement, sera $> \frac{1}{2q}$, à cause de $1 - \frac{sH}{q\left(\frac{p}{q} + \sqrt{K}\right)} > \frac{1}{2}$.

Ainsi on aura les deux quantités $p - q\sqrt{K}$ et $r - s\sqrt{K}$, ou bien, en faisant $a = \sqrt{K}$, $p - aq$ et $r - as$, lesquelles seront assujetties aux mêmes conditions que nous avons supposées dans l'art. 24, et d'où l'on tirera des conclusions semblables; donc, etc. (art. 26).

Si l'on avoit

$$p^2 - Kq^2 = -H,$$

alors il faudroit chercher les nombres r et s, tels que $ps - qr = -1$, et l'on auroit ces deux équations

$$q\sqrt{K} - p = \frac{H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}$$

$$s\sqrt{K} - r = \frac{1}{q}\left(\frac{sH}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)} - 1\right).$$

Comme $H < \sqrt{K}$ et $s < q$, il est clair que $\frac{sH}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}$ sera < 1; de sorte que la quantité $s\sqrt{K} - r$ sera négative; or je dis que cette quantité, prise positivement, sera plus grande que $q\sqrt{K} - p$; pour cela il faut démontrer que

$$\frac{1}{q}\left(1 - \frac{sH}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}\right) > \frac{H}{q\left(\sqrt{K} + \frac{p}{q}\right)}, \text{ ou bien que } 1 > \frac{H\left(1 + \frac{s}{q}\right)}{\sqrt{K} + \frac{p}{q}},$$

savoir $\sqrt{K} + \frac{p}{q} > H + \frac{sH}{q}$; mais $H < \sqrt{K}$, (*hyp.*); donc il suffit de prouver que $\frac{p}{q} > \frac{s\sqrt{K}}{q}$, ou bien que $p > s\sqrt{K}$; c'est ce qui est évident, à cause que la quantité $s\sqrt{K}-r$ étant négative, il faut que $r > s\sqrt{K}$, et à plus forte raison $p > s\sqrt{K}$, puisque $p > r$.

Ainsi les deux quantités, $p-q\sqrt{K}$ et $r-s\sqrt{K}$, seront de différens signes, et la seconde sera plus grande que la premiere, (abstraction faite des signes), comme dans le cas précédent; donc, etc.

Donc, lorsqu'on aura à résoudre en nombres entiers une équation de la forme

$$p^2-Kq^2=\pm H,$$

ou $H<\sqrt{K}$, il n'y aura qu'à suivre les mêmes procédés de l'art. 33, en faisant $A=1$, $B=0$ et $C=-K$; et si dans la série P^0, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. $P^{\pi+2\varrho}$, on rencontre un terme $=\pm H$, on aura la résolution cherchée; sinon on sera assuré que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE

39. Nous n'avons considéré dans l'art. 33 qu'une des racines de l'équation $Ax^2+Bx+C=0$, que nous avons supposée positive; si cette équation a ses deux racines positives, il faudra les prendre successivement pour a, et faire la même opération sur l'une que sur l'autre; mais si l'une des deux racines ou toutes deux étoient négatives, alors on les changeroit d'abord en positives, en changeant seulement le signe de B, et on opéreroit comme ci-dessus; mais ensuite il faudroit prendre les valeurs de p et de q avec des signes differens, c'est-à-dire l'une positivement et l'autre négativement, (art. 29).

Donc en général on donnera à la valeur de B le signe ambigu $\pm$, de même qu'à $\sqrt{E}$, c'est-à-dire qu'on fera $Q^0=\mp\frac{1}{2}B$, et qu'on mettra $\pm$ à la place de $\sqrt{E}$, et il faudra prendre ces signes, en sorte que la racine

$$a=\frac{\mp\frac{1}{2}B\pm\frac{1}{2}\sqrt{E}}{A}$$

soit positive, ce qui pourra toujours se faire de deux manieres différentes; le signe supérieur de B indiquera une racine positive, auquel cas il faudra prendre p et q tous deux de mêmes signes; au contraire le signe inférieur de B indiquera une racine négative, auquel cas les valeurs de p et q devront être prises de signes différens.

EXEMPLE

40. *On demande quels nombres entiers il faudroit prendre pour* p *et* q, *afin que la quantité*

$$9p^2-118pq+378q^2$$

devînt la plus petite qu'il est possible.

Comparant cette quantité avec la formule générale du probleme III, on aura $A=9$, $B=-118$, $C=378$, donc $B^2-4AC=316$; d'où l'on voit que ce cas se rapporte à celui de l'art. 33. On fera donc $E=316$ et $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$, où l'on remarquera d'abord que $\sqrt{79}>8$ et <9; de sorte que dans les formules dont il ne s'agira que d'avoir la valeur entiere approchée, on pourra prendre sur le champ à la place du radical $\sqrt{79}$ le nombre 8 ou 9, suivant que ce radical se trouvera ajouté ou retranché des autres nombres de la même formule.

Maintenant on donnera tant à B qu'à $\sqrt{E}$ le signe ambigu ± 1, et on prendra ensuite ces signes tels que

$$a=\frac{\pm 59 \pm \sqrt{79}}{9}$$

soit une quantité positive, (art. 39); d'où l'on voit qu'il faut toujours prendre le signe supérieur pour le nombre 59, et que pour le radical $\sqrt{79}$ on peut prendre également le supérieur et l'inférieur. Ainsi on fera toujours $Q^0=-\frac{1}{2}B$, et $\sqrt{E}$ pourra être pris successivement en plus et en moins.

Soit donc 1°. $\frac{1}{2}\sqrt{E}=\sqrt{79}$ avec le signe positif, on fera, (art. 33), le calcul suivant:

$$\begin{array}{lll}
Q^0 = -59, & P^0 = 9, & \mu < \frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7, \\[1ex]
Q^{\text{I}} = \quad 9\cdot 7 - 59 = 4, & P^{\text{I}} = \frac{16-79}{9} = -7, & \mu^{\text{I}} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1, \\[1ex]
Q^{\text{II}} = -\ 7\cdot 1 + \ 4 = -3, & P^{\text{II}} = \frac{9-79}{-7} = 10, & \mu^{\text{II}} < \frac{3+\sqrt{79}}{10} = 1, \\[1ex]
Q^{\text{III}} = \quad 10\cdot 1 - \ 3 = 7, & P^{\text{III}} = \frac{49-79}{10} = -3, & \mu^{\text{III}} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-3} = 5, \\[1ex]
Q^{\text{IV}} = -\ 3\cdot 5 + \ 7 = -8, & P^{\text{IV}} = \frac{64-79}{-3} = 5, & \mu^{\text{IV}} < \frac{8+\sqrt{79}}{5} = 3, \\[1ex]
Q^{\text{V}} = \quad 5\cdot 3 - \ 8 = 7, & P^{\text{V}} = \frac{49-79}{5} = -6, & \mu^{\text{V}} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-6} = 2, \\[1ex]
Q^{\text{VI}} = -\ 6\cdot 2 + \ 7 = -5, & P^{\text{VI}} = \frac{25-79}{-6} = 9, & \mu^{\text{VI}} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1, \\[1ex]
Q^{\text{VII}} = \quad 9\cdot 1 - \ 5 = 4, & P^{\text{VII}} = \frac{16-79}{9} = -7, & \mu^{\text{VII}} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1, \\[1ex]
\quad \text{etc.} & \quad \text{etc.} & \quad \text{etc.}
\end{array}$$

Je m'arrête ici, parce que je vois que $Q^{\text{VII}}=Q^{\text{I}}$, et $P^{\text{VII}}=P^{\text{I}}$, et que la différence entre les deux numéros 1 et 7 est paire; d'où il s'ensuit que tous les termes suivans seront aussi les mêmes que les précédens; ainsi on aura $Q^{\text{VII}}=4$, $Q^{\text{VIII}}=-3$, $Q^{\text{IX}}=7$, etc. $P^{\text{VII}}=-7$, $P^{\text{VIII}}=10$, etc. de sorte qu'on pourra, si l'on veut, continuer les séries ci-dessus à l'infini, en ne faisant que répéter les mêmes termes.

2°. Prenons maintenant le radical $\sqrt{79}$ avec un signe négatif, et le calcul sera comme il suit:

$$
\begin{array}{lll}
Q^{0} = -59, & P^{0} = 9, & \mu < \frac{59-\sqrt{79}}{9} = 5, \\
Q^{\text{I}} = 9\cdot 5 - 59 = -14, & P^{\text{I}} = \frac{196-79}{9} = 13, & \mu^{\text{I}} < \frac{14+\sqrt{79}}{13} = 1, \\
Q^{\text{II}} = 13\cdot 1 - 14 = -1, & P^{\text{II}} = \frac{1-79}{13} = -6, & \mu^{\text{II}} < \frac{1-\sqrt{79}}{-6} = 1, \\
Q^{\text{III}} = -6\cdot 1 - 1 = -7, & P^{\text{III}} = \frac{49-79}{-6} = 5, & \mu^{\text{III}} < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3, \\
Q^{\text{IV}} = 5\cdot 3 - 7 = 8, & P^{\text{IV}} = \frac{64-79}{5} = -3, & \mu^{\text{IV}} < \frac{-8-\sqrt{79}}{-3} = 5, \\
Q^{\text{V}} = -3\cdot 5 + 8 = -7, & P^{\text{V}} = \frac{49-79}{-3} = 10, & \mu^{\text{V}} < \frac{7+\sqrt{79}}{10} = 1, \\
Q^{\text{VI}} = 10\cdot 1 - 7 = 3, & P^{\text{VI}} = \frac{9-79}{10} = -7, & \mu^{\text{VI}} < \frac{-3-\sqrt{79}}{-7} = 1, \\
Q^{\text{VII}} = -7\cdot 1 + 3 = -4, & P^{\text{VII}} = \frac{16-79}{-7} = 9, & \mu^{\text{VII}} < \frac{4+\sqrt{79}}{9} = 1, \\
Q^{\text{VIII}} = 9\cdot 1 - 4 = 5, & P^{\text{VIII}} = \frac{25-79}{9} = -6, & \mu^{\text{VIII}} < \frac{-5-\sqrt{79}}{-6} = 2, \\
Q^{\text{IX}} = -6\cdot 2 + 5 = -7, & P^{\text{IX}} = \frac{49-79}{-6} = 5, & \mu^{\text{IX}} < \frac{7+\sqrt{79}}{5} = 3, \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

On peut s'arrêter ici, puisque l'on a trouvé $Q^{\text{IX}}=Q^{\text{III}}$ et $P^{\text{IX}}=P^{\text{III}}$, et que la différence des numéros 9 et 3 est paire; car en continuant les séries on ne retrouveroit plus que les mêmes termes qu'on a déjà trouvés.

Or, si on considere les valeurs des termes P^{0}, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. trouvées dans les deux cas, on verra que le plus petit de ces termes est égal à -3; dans le premier cas, c'est le terme P^{III} auquel répondent les valeurs p^{III} et q^{III}; et dans le second cas, c'est le terme P^{IV} auquel répondent les valeurs p^{IV} et q^{IV}.

D'où il s'ensuit que la plus petite valeur que puisse recevoir la quantité proposée est -3; et pour avoir les valeurs de p et q qui y répondent, on prendra dans le premier cas les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, savoir 7, 1 et 1, et l'on en formera les fractions *principales* convergentes $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{15}{2}$; la troisieme fraction sera donc $\frac{p^{\text{III}}}{q^{\text{III}}}$, en sorte que l'on aura $p^{\text{III}} = 15$ et $q^{\text{III}} = 2$; c'est-à-dire que les valeurs cherchées seront $p = 15$ et $q = 2$. Dans le second cas on prendra les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, savoir 5, 1, 1, 3, lesquels donneront ces fractions $\frac{5}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{39}{7}$; de sorte qu'on aura $p^{\text{IV}} = 39$ et $q^{\text{IV}} = 7$; donc $p = 39$ et $q = 7$.

Les valeurs qu'on vient de trouver pour p et q dans le cas du *minimum*, sont aussi les plus petites qu'il est possible; mais on pourra, si l'on veut, en trouver successivement d'autres plus grandes; car il est clair que le même terme -3 reviendra toujours au bout de chaque intervalle de six termes; de sorte que dans le premier cas on aura $P^{\text{III}} = -3$, $P^{\text{IX}} = -3$, $P^{\text{XV}} = -3$, etc. et dans le second, $P^{\text{IV}} = -3$, $P^{\text{X}} = -3$, $P^{\text{XVI}} = -3$, etc. Donc dans le premier cas on aura pour les valeurs satisfaisantes de p et q celles-ci, p^{III}, q^{III}, p^{IX}, q^{IX}, p^{XV}, q^{XV}, etc. et dans le second cas celles-ci, p^{IV}, q^{IV}, p^{X}, q^{X}, p^{XVI}, q^{XVI}, etc. Or les valeurs de μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. sont dans le premier cas 7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, etc. à l'infini, parce que $\mu^{\text{VII}} = \mu^{\text{I}}$ et $\mu^{\text{VIII}} = \mu^{\text{II}}$, etc. ainsi il n'y aura qu'à former par la méthode de l'art. 20 les fractions

$$\begin{array}{cccccccccc} 7, & 1, & 1, & 5, & 3, & 2, & 1, & 1, & 1, & 5, \\ \frac{7}{1}, & \frac{8}{1}, & \frac{15}{2}, & \frac{83}{11}, & \frac{264}{35}, & \frac{611}{81}, & \frac{875}{116}, & \frac{1486}{197}, & \frac{2361}{313}, & \frac{13291}{1762}, \text{ etc.} \end{array}$$

et on pourra prendre pour p les numérateurs de la troisieme, de la neuvieme, etc. et pour q les dénominateurs correspondans; on aura donc $p = 15$, $q = 2$, ou $p = 2361$, $q = 313$, ou, etc.

Dans le second cas les valeurs de μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. seront 5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 1, 2, etc. parce que $\mu^{\text{IX}} = \mu^{\text{III}}$, $\mu^{\text{X}} = \mu^{\text{IV}}$, etc. On formera donc ces fractions-ci,

$$\begin{array}{ccccccccccc} 5, & 1, & 1, & 3, & 5, & 1, & 1, & 1, & 2, & 3, & 5, \\ \frac{5}{1}, & \frac{6}{1}, & \frac{11}{2}, & \frac{39}{7}, & \frac{206}{37}, & \frac{245}{44}, & \frac{451}{81}, & \frac{696}{125}, & \frac{1843}{331}, & \frac{6225}{1118}, & \frac{32968}{5921}, \text{ etc.} \end{array}$$

et les fractions quatrieme, dixieme, etc. donneront les valeurs de p et q, lesquelles seront donc $p = 39$, $q = 7$, ou $p = 6225$, $q = 1118$, ou, etc.

De cette maniere on pourra donc trouver par ordre toutes les valeurs de p et q, qui rendront la formule proposée $= -3$, valeur qui est la plus petite qu'elle puisse recevoir. On pourroit même avoir une formule générale qui renfermât toutes ces valeurs de p et de q; on la trouvera, si l'on en est curieux, par la méthode que nous avons exposée ailleurs, et dont nous avons parlé plus haut, (art. 35).

Nous venons de trouver que le *minimum* de la quantité proposée est -3, et par conséquent négatif; or on pourroit proposer de trouver la plus petite valeur positive que la même quantité puisse recevoir, alors il n'y auroit qu'à examiner les séries P^0, P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. dans les deux cas, et on verroit que le plus petit terme positif est 5 dans les deux cas; et comme dans le premier cas c'est P^{IV}, et dans le second P^{III} qui est $=5$, les valeurs de p et de q, qui donneront la plus petite valeur positive de la quantité proposée, seront p^{IV}, q^{IV}, ou p^{X}, q^{X}, ou, etc. dans le premier cas, et p^{III}, q^{III}, ou p^{IX}, q^{IX}, ou, etc. dans le second; de sorte que l'on aura par les fractions ci-dessus $p=83$, $q=11$, ou $p=13291$, $q=1762$, etc. ou $p=11$, $q=2$, $p=1843$, $q=331$, etc.

Au reste, on ne doit pas oublier de remarquer que les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. trouvés dans les deux cas ci-dessus, ne sont autre chose que les termes des fractions continues, qui représentent les deux racines de l'équation

$$9x^2-118x+378=0.$$

De sorte que ces racines seront

$$7+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+, \text{ etc.}$$

$$5+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+, \text{ etc.}$$

expressions qu'on pourra continuer à l'infini par la simple répétition des mêmes nombres.

Ainsi on voit par-là comment on doit s'y prendre pour réduire en fractions continues les racines de toute équation du second degré.

SCOLIE

41. M. Euler a donné dans le tome XI des Nouveaux Commentaires de Pétersbourg[1]) une méthode analogue à la précédente, quoique déduite de

1) Mémoire 323 (suivant l'Index d'Eneström): *De usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo.* Novi comment. acad. sc. Petrop. 11 (1765), 1767 p. 28—66; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

principes un peu différens, pour réduire en fraction continue la racine d'un nombre quelconque entier non-carré, et il y a joint une table où les fractions continues sont calculées pour tous les nombres naturels non-carrés jusqu'à 120. Comme cette table peut être utile en différentes occasions, et sur-tout pour la solution des problemes indéterminés du second degré, comme on le verra plus bas, (§ VII), nous croyons faire plaisir à nos Lecteurs de la leur présenter ici; on remarquera qu'à chaque nombre radical il répond deux suites de nombres entiers; la supérieure est celle des nombres P^0, $-P^{I}$, P^{II}, $-P^{III}$, etc. et l'inférieure est celle des nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc.

$\sqrt{2}$	1 1 1 1 etc. 1 2 2 2 etc.	$\sqrt{17}$	1 1 1 1 1 etc. 4 8 8 8 8 etc.
$\sqrt{3}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 1 1 2 1 2 1 2 etc.	$\sqrt{18}$	1 2 1 2 1 2 1 2 1 etc. 4 4 8 4 8 4 8 4 8 etc.
$\sqrt{5}$	1 1 1 1 etc. 2 4 4 4 etc.	$\sqrt{19}$	1 3 5 2 5 3 1 3 5 2 5 3 1 etc. 4 2 1 3 1 2 8 2 1 3 1 2 8 etc.
$\sqrt{6}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 2 2 4 2 4 2 4 etc.	$\sqrt{20}$	1 4 1 4 1 4 1 4 1 etc. 4 2 8 2 8 2 8 2 8 etc.
$\sqrt{7}$	1 3 2 3 1 3 2 3 1 etc. 2 1 1 1 4 1 1 1 4 etc.	$\sqrt{21}$	1 5 4 3 4 5 1 5 4 3 4 5 1 etc. 4 1 1 2 1 1 8 1 1 2 1 1 8 etc.
$\sqrt{8}$	1 4 1 4 1 4 1 etc. 2 1 4 1 4 1 4 etc.	$\sqrt{22}$	1 6 3 2 3 6 1 6 3 2 3 6 1 etc. 4 1 2 4 2 1 8 1 2 4 2 1 8 etc.
$\sqrt{10}$	1 1 1 1 etc. 3 6 6 6 etc.	$\sqrt{23}$	1 7 2 7 1 7 2 7 1 etc. 4 1 3 1 8 1 3 1 8 etc.
$\sqrt{11}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 3 3 6 3 6 3 6 etc.	$\sqrt{24}$	1 8 1 8 1 8 1 etc. 4 1 8 1 8 1 8 etc.
$\sqrt{12}$	1 3 1 3 1 3 1 etc. 3 2 6 2 6 2 6 etc.	$\sqrt{26}$	1 1 1 1 etc. 5 10 10 10 etc.
$\sqrt{13}$	1 4 3 3 4 1 4 3 3 4 1 etc. 3 1 1 1 1 6 1 1 1 1 6 etc.	$\sqrt{27}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 5 5 10 5 10 5 10 etc.
$\sqrt{14}$	1 5 2 5 1 5 2 5 1 etc. 3 1 2 1 6 1 2 1 6 etc.	$\sqrt{28}$	1 3 4 3 1 3 4 3 1 etc 5 3 2 3 10 3 2 3 10 etc.
$\sqrt{15}$	1 6 1 6 1 6 1 etc. 3 1 6 1 6 1 6 etc.	$\sqrt{29}$	1 4 5 5 4 1 4 5 5 4 1 etc. 5 2 1 1 2 10 2 1 1 2 10 etc.

$\sqrt{30}$	1 5 1 5 1 5 1 5 1 etc. 5 2 10 2 10 2 10 2 10 etc.	$\sqrt{48}$	1 12 1 12 1 12 etc. 6 1 12 1 12 1 etc.
$\sqrt{31}$	1 6 5 3 2 3 5 6 1 6 5 etc. 5 1 1 3 5 3 1 1 10 1 1 etc.	$\sqrt{50}$	1 1 1 1 etc. 7 14 14 14 etc.
$\sqrt{32}$	1 7 4 7 1 7 4 7 1 etc. 5 1 1 1 10 1 1 1 10 etc.	$\sqrt{51}$	1 2 1 2 1 2 etc. 7 7 14 7 14 7 etc.
$\sqrt{33}$	1 8 3 8 1 8 3 8 1 etc. 5 1 2 1 10 1 2 1 10 etc.	$\sqrt{52}$	1 3 9 4 9 3 1 3 9 4 9 3 1 3 etc. 7 4 1 2 1 4 14 4 1 2 1 4 14 4 etc.
$\sqrt{34}$	1 9 2 9 1 9 2 9 1 etc. 5 1 4 1 10 1 4 1 10 etc.	$\sqrt{53}$	1 4 7 7 4 1 4 7 7 4 1 4 7 etc. 7 3 1 1 3 14 3 1 1 3 14 3 1 etc.
$\sqrt{35}$	1 10 1 10 1 10 1 10 etc. 5 1 10 1 10 1 10 1 etc.	$\sqrt{54}$	1 5 9 2 9 5 1 5 9 2 9 5 1 5 etc. 7 2 1 6 1 2 14 2 1 6 1 2 14 2 etc.
$\sqrt{37}$	1 1 1 1 1 etc. 6 12 12 12 12 etc.	$\sqrt{55}$	1 6 5 6 1 6 5 6 1 6 etc. 7 2 2 2 14 2 2 2 14 2 etc.
$\sqrt{38}$	1 2 1 2 1 2 1 etc. 6 6 12 6 12 6 12 etc.	$\sqrt{56}$	1 7 1 7 1 7 1 etc. 7 2 14 2 14 2 14 etc.
$\sqrt{39}$	1 3 1 3 1 3 1 etc. 6 4 12 4 12 4 12 etc.	$\sqrt{57}$	1 8 7 3 7 8 1 8 7 etc. 7 1 1 4 1 1 14 1 1 etc.
$\sqrt{40}$	1 4 1 4 1 4 1 etc. 6 3 12 3 12 3 12 etc.	$\sqrt{58}$	1 9 6 7 7 6 9 1 9 6 etc. 7 1 1 1 1 1 1 14 1 1 etc.
$\sqrt{41}$	1 5 5 1 5 5 1 etc. 6 2 2 12 2 2 12 etc.	$\sqrt{59}$	1 10 5 2 5 10 1 10 5 etc. 7 1 2 7 2 1 14 1 2 etc.
$\sqrt{42}$	1 6 1 6 1 6 1 etc. 6 2 12 2 12 2 12 etc.	$\sqrt{60}$	1 11 4 11 1 11 4 etc. 7 1 2 1 14 1 2 etc.
$\sqrt{43}$	1 7 6 3 9 2 9 3 6 7 1 7 6 etc. 6 1 1 3 1 5 1 3 1 1 12 1 1 etc.	$\sqrt{61}$	1 12 3 4 9 5 5 9 4 3 12 1 12 3 etc. 7 1 4 3 1 2 2 1 3 4 1 14 1 4 etc.
$\sqrt{44}$	1 8 5 7 4 7 5 8 1 8 5 etc. 6 1 1 1 2 1 1 1 12 1 1 etc.	$\sqrt{62}$	1 13 2 13 1 13 2 etc. 7 1 6 1 14 1 6 etc.
$\sqrt{45}$	1 9 4 5 4 9 1 9 4 5 4 9 1 9 4 etc. 6 1 2 2 2 1 12 1 2 2 2 1 12 1 2 etc.	$\sqrt{63}$	1 14 1 14 1 14 etc. 7 1 14 1 14 1 etc.
$\sqrt{46}$	1 10 3 7 6 5 2 5 6 7 3 10 1 10 3 etc. 6 1 3 1 1 2 6 2 1 1 3 1 12 1 3 etc.	$\sqrt{65}$	1 1 1 1 etc. 8 16 16 16 etc.
$\sqrt{47}$	1 11 2 11 1 11 2 11 1 etc. 6 1 5 1 12 1 5 1 12 etc.	$\sqrt{66}$	1 2 1 2 1 etc. 8 8 16 8 16 etc.

$\sqrt{67}$	1 3 6 7 9 2 9 7 6 3 1 3 6 etc. 8 5 2 1 1 7 1 1 2 5 16 5 2 etc.	$\sqrt{84}$	1 3 1 3 1 3 etc. 9 6 18 6 18 6 etc.
$\sqrt{68}$	1 4 1 4 1 4 etc. 8 4 16 4 16 4 etc.	$\sqrt{85}$	1 4 9 9 4 1 4 9 etc. 9 4 1 1 4 18 4 1 etc.
$\sqrt{69}$	1 5 4 11 3 11 4 5 1 5 4 etc. 8 3 3 1 4 1 3 3 16 3 3 etc.	$\sqrt{86}$	1 5 10 7 11 2 11 7 10 5 1 5 10 etc. 9 3 1 1 1 8 1 1 1 3 18 3 1 etc.
$\sqrt{70}$	1 6 9 5 9 6 1 6 9 etc. 8 2 1 2 1 2 16 2 1 etc.	$\sqrt{87}$	1 6 1 6 1 6 etc. 9 3 18 3 18 3 etc.
$\sqrt{71}$	1 7 5 11 2 11 5 7 1 7 5 etc. 8 2 2 1 7 1 2 2 16 2 2 etc.	$\sqrt{88}$	1 7 9 8 9 7 1 7 9 etc. 9 2 1 1 1 2 18 2 1 etc.
$\sqrt{72}$	1 8 1 8 1 8 etc. 8 2 16 2 16 2 etc.	$\sqrt{89}$	1 8 5 5 8 1 8 5 etc. 9 2 3 3 2 18 2 3 etc.
$\sqrt{73}$	1 9 8 3 3 8 9 1 9 8 etc. 8 1 1 5 5 1 1 16 1 1 etc.	$\sqrt{90}$	1 9 1 9 1 etc. 9 2 18 2 18 etc.
$\sqrt{74}$	1 10 7 7 10 1 10 7 etc. 8 1 1 1 1 16 1 1 etc.	$\sqrt{91}$	1 10 9 3 14 3 9 10 1 10 9 etc. 9 1 1 5 1 5 1 1 18 1 1 etc.
$\sqrt{75}$	1 11 6 11 1 11 6 etc. 8 1 1 1 16 1 1 etc.	$\sqrt{92}$	1 11 8 7 4 7 8 11 1 11 8 etc. 9 1 1 2 4 2 1 1 18 1 1 etc.
$\sqrt{76}$	1 12 5 8 9 3 4 3 9 8 5 12 1 12 5 etc. 8 1 2 1 1 5 4 5 1 1 2 1 16 1 2 etc.	$\sqrt{93}$	1 12 7 11 4 3 4 11 7 12 1 12 7 etc. 9 1 1 1 4 6 4 1 1 1 18 1 1 etc.
$\sqrt{77}$	1 13 4 7 4 13 1 13 4 etc. 8 1 3 2 3 1 16 1 3 etc.	$\sqrt{94}$	1 13 6 5 9 10 3 15 2 15 3 10 9 5 6 13 1 etc. 9 1 2 3 1 1 5 1 8 1 5 1 1 3 2 1 18 etc.
$\sqrt{78}$	1 14 3 14 1 14 3 etc. 8 1 4 1 16 1 4 etc.	$\sqrt{95}$	1 14 5 14 1 14 etc. 9 1 2 1 18 1 etc.
$\sqrt{79}$	1 15 2 15 1 15 2 etc. 8 1 7 1 16 1 7 etc.	$\sqrt{96}$	1 15 4 15 1 15 etc. 9 1 3 1 18 1 etc.
$\sqrt{80}$	1 16 1 16 1 16 etc. 8 1 16 1 16 1 etc.	$\sqrt{97}$	1 16 3 11 8 9 9 8 11 3 16 1 16 etc. 9 1 5 1 1 1 1 1 1 5 1 18 1 etc.
$\sqrt{82}$	1 1 1 1 etc. 9 18 18 18 etc.	$\sqrt{98}$	1 17 2 17 1 17 etc. 9 1 8 1 18 1 etc.
$\sqrt{83}$	1 2 1 2 1 2 etc. 9 9 18 9 18 9 etc.	$\sqrt{99}$	1 18 1 18 1 etc. 9 1 18 1 18 etc.

Ainsi on aura, par exemple,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} +, \text{ etc.}$$

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} +, \text{ etc.}$$

et ainsi des autres.

Et si on forme les fractions convergentes $\frac{p^0}{q^0}, \frac{p^{\mathrm{I}}}{q^{\mathrm{I}}}, \frac{p^{\mathrm{II}}}{q^{\mathrm{II}}}, \frac{p^{\mathrm{III}}}{q^{\mathrm{III}}}$, etc. d'après chacune de ces fractions continues, on aura

$$(p^0)^2 - 2(q^0)^2 = 1, \quad p^{\mathrm{I}2} - 2q^{\mathrm{I}2} = -1, \quad p^{\mathrm{II}2} - 2q^{\mathrm{II}2} = 1, \quad \text{etc.}$$

et de même,

$$(p^0)^2 - 3(q^0)^2 = 1, \quad p^{\mathrm{I}2} - 3q^{\mathrm{I}2} = -1, \quad p^{\mathrm{II}2} - 3q^{\mathrm{II}2} = 1, \quad \text{etc. etc.}$$

PARAGRAPHE III

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ A DEUX INCONNUES EN NOMBRES ENTIERS

ADDITION POUR LE CHAPITRE 1[1])

42. Lorsqu'on a à résoudre une équation de cette forme

$$ax - by = c,$$

où a, b, c sont des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et où les deux inconnues x et y doivent être aussi des nombres entiers, il suffit de connoître une seule solution, pour pouvoir en déduire facilement toutes les autres solutions possibles.

En effet, supposons que l'on sache que ces valeurs, $x = \alpha$ et $y = \beta$, satisfont à l'équation proposée, α et β étant des nombres entiers quelconques, on aura donc $a\alpha - b\beta = c$, et par conséquent $ax - by = a\alpha - b\beta$, ou bien $a(x - \alpha) - b(y - \beta) = 0$; d'où l'on tire

$$\frac{x-\alpha}{y-\beta} = \frac{b}{a}.$$

Qu'on réduise la fraction $\frac{b}{a}$ à ses moindres termes, et supposant qu'elle se change par-là en celle-ci, $\frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}}$, où b^{I} et a^{I} seront premiers entr'eux, il est visible que l'équation $\frac{x-\alpha}{y-\beta} = \frac{b^{\mathrm{I}}}{a^{\mathrm{I}}}$ ne sauroit subsister, dans la supposition que $x - \alpha$ et $y - \beta$ soient des nombres entiers, à moins que l'on ait $x - \alpha = mb^{\mathrm{I}}$, et $y - \beta = ma^{\mathrm{I}}$, m étant un nombre quelconque entier; de sorte que l'on aura en général

$$x = \alpha + mb^{\mathrm{I}}, \quad \text{et} \quad y = \beta + ma^{\mathrm{I}},$$

m étant un nombre entier indéterminé.

---

1) Voir p. 326. H. W.

Comme on peut prendre m positif ou négatif à volonté, il est facile de voir qu'on pourra toujours déterminer ce nombre m, en sorte que la valeur de x ne soit pas plus grande que $\frac{b^{\text{I}}}{2}$, ou que celle de y ne soit pas plus grande que $\frac{a^{\text{I}}}{2}$, (abstraction faite des signes de ces quantités); d'où il s'ensuit que si l'équation proposée, $ax - by = c$, est résoluble en nombres entiers, et qu'on y substitue successivement à la place de x tous les nombres entiers tant positifs que négatifs, renfermés entre ces deux limites $\frac{b^{\text{I}}}{2}$ et $\frac{-b^{\text{I}}}{2}$, on en trouvera nécessairement un qui satisfera à cette équation; et on trouvera de même une valeur satisfaisante de y parmi les nombres entiers positifs ou négatifs, contenus entre les limites $\frac{a^{\text{I}}}{2}$ et $\frac{-a^{\text{I}}}{2}$.

Ainsi on pourra par ce moyen trouver une premiere solution de la proposée, après quoi on aura toutes les autres par les formules ci-dessus.

43. Mais si on ne veut pas employer la méthode de tâtonnement que nous venons de proposer, et qui seroit souvent très-laborieuse, on pourra faire usage de celle qui est exposée dans le chapitre 1 du traité précédent, et qui est très-simple et très-directe, ou bien on pourra s'y prendre de la maniere suivante.

On remarquera 1°. que si les nombres a et b ne sont pas premiers entr'eux, l'équation ne pourra subsister en nombres entiers, à moins que le nombre donné c ne soit divisible par la plus grande commune mesure de a et b. De sorte qu'en supposant la division faite lorsqu'elle a lieu, et désignant les quotiens par a^{I}, b^{I}, c^{I}, on aura à résoudre l'équation

$$a^{\text{I}}x - b^{\text{I}}y = c^{\text{I}},$$

où a^{I} et b^{I} seront premiers entr'eux.

2°. Que si l'on peut trouver des valeurs de p et de q qui satisfassent à l'équation

$$a^{\text{I}}p - b^{\text{I}}q = \pm 1,$$

on pourra résoudre l'équation précédente; car il est visible qu'en multipliant ces valeurs par $\pm c^{\text{I}}$, on aura des valeurs qui satisferont à l'équation $a^{\text{I}}x - b^{\text{I}}y = c^{\text{I}}$; c'est-à-dire qu'on aura

$$x = \pm pc^{\text{I}}, \quad \text{et} \quad y = \pm qc^{\text{I}}.$$

Or l'équation $a^{\text{I}}p - b^{\text{I}}q = \pm 1$ est toujours résoluble en nombres entiers, comme nous l'avons démontré dans l'art. 23; et pour trouver les plus petites valeurs de p et de q qui y peuvent satisfaire, il n'y aura qu'à convertir la fraction $\frac{b^{\text{I}}}{a^{\text{I}}}$ en fraction continue par la méthode de l'art. 4, et en déduire ensuite la série des fractions *principales* convergentes vers la même fraction $\frac{b^{\text{I}}}{a^{\text{I}}}$ par les formules de l'art. 10; la derniere de ces fractions sera la fraction même $\frac{b^{\text{I}}}{a^{\text{I}}}$, et si on désigne l'avant-derniere par $\frac{p}{q}$, on aura par la loi de ces fractions, (art. 12), $a^{\text{I}}p - b^{\text{I}}q = \pm 1$, le signe supérieur étant pour le cas où le quantieme de la fraction $\frac{p}{q}$ est pair, et l'inférieur pour celui où ce quantieme est impair.

Ces valeurs de p et de q étant ainsi connues, on aura donc d'abord $x = \pm pc^{\text{I}}$ et $y = \pm qc^{\text{I}}$, et prenant ensuite ces valeurs pour α et β, on aura en général, (art. 42),

$$x = \pm pc^{\text{I}} + mb^{\text{I}}, \quad y = \pm qc^{\text{I}} + ma^{\text{I}},$$

expressions qui renfermeront nécessairement toutes les solutions possibles en nombres entiers de l'équation proposée.

Au reste, pour ne laisser aucun embarras dans la pratique de cette méthode, nous remarquerons que quoique les nombres a et b puissent être positifs ou négatifs, on peut néanmoins les prendre toujours positivement, pourvu qu'on donne des signes contraires à x, si a est négatif, et à y, si b est négatif.

EXEMPLE

44. Pour donner un exemple de la méthode précédente, nous prendrons celui de l'art. 14 du chapitre 1 du traité précédent [p. 332] où il s'agit de résoudre l'équation $39p = 56q + 11$; changeant p en x et q en y, on aura donc

$$39x - 56y = 11.$$

Ainsi on fera $a = 39$, $b = 56$ et $c = 11$; et comme 56 et 39 sont déjà premiers entr'eux, on aura $a^{\text{I}} = 39$, $b^{\text{I}} = 56$, $c^{\text{I}} = 11$. On réduira donc en fraction continue la fraction $\frac{b^{\text{I}}}{a^{\text{I}}} = \frac{56}{39}$, et pour cela on fera, (comme on l'a déjà pratiqué dans l'art. 20), le calcul suivant,

$$\begin{array}{rrrrrrr}
39 & 56 & 1 & & & & \\
 & 39 & & & & & \\
 & 17 & 39 & 2 & & & \\
 & & 34 & & & & \\
 & & 5 & 17 & 3 & & \\
 & & & 15 & & & \\
 & & & 2 & 5 & 2 & \\
 & & & & 4 & & \\
 & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & & 2 & \\
 & & & & & 0. &
\end{array}$$

Ensuite, à l'aide des quotiens 1, 2, 3, etc. on formera les fractions

$$\begin{array}{ccccc}
1, & 2, & 3, & 2, & 2, \\
\frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{10}{7}, & \frac{23}{16}, & \frac{56}{39},
\end{array}$$

et la pénultieme fraction $\frac{23}{16}$ sera celle que nous avons désignée en général par $\frac{p}{q}$; de sorte qu'on aura $p = 23$, $q = 16$; et comme cette fraction est la quatrieme, et par conséquent d'un quantieme pair, il faudra prendre le signe supérieur; ainsi l'on aura en général

$$x = 23 \cdot 11 + 56m, \quad \text{et} \quad y = 16 \cdot 11 + 39m,$$

m pouvant être un nombre quelconque entier positif ou négatif.

REMARQUE

45. On doit la premiere solution de ce probleme à M. Bachet de Meziriac qui l'a donnée dans la seconde édition de ses Récréations mathématiques, intitulées *Problemes plaisans et délectables, etc.* La premiere édition de cet Ouvrage a paru en 1612, mais la solution dont il s'agit n'y est qu'annoncée, et ce n'est que dans l'édition de 1624 qu'on la trouve complette. La méthode de M. Bachet est très-directe et très-ingénieuse, et ne laisse rien à désirer du côté de l'élégance et de la généralité.

Nous saisissons avec plaisir cette occasion de rendre à ce savant Auteur la justice qui lui est due sur ce sujet, parce que nous avons remarqué que les Géometres qui ont traité le même probleme après lui, n'ont jamais fait aucune mention de son travail.

Voici en peu de mots à quoi se réduit la méthode de M. Bachet. Après avoir fait voir comment la solution des équations de la forme

$$ax - by = c,$$

(a et b étant premiers entr'eux), se réduit à celle de

$$ax - by = \pm 1,$$

il s'attache à résoudre cette derniere équation, et pour cela il prescrit de faire entre les nombres a et b la même opération que si on vouloit chercher leur plus grand commun diviseur, (c'est aussi la même que nous avons pratiquée ci-devant); ensuite nommant c, d, e, f, etc. les restes provenant des différentes divisions, et supposant, par exemple, que f soit le dernier reste, qui sera nécessairement égal à l'unité, (à cause que a et b sont premiers entr'eux, *hyp.*), il fait, lorsque le nombre des restes est pair, comme dans ce cas,

$$e \mp 1 = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \quad \frac{\delta c \mp 1}{d} = \gamma, \quad \frac{\gamma b \pm 1}{c} = \beta, \quad \frac{\beta a \mp 1}{b} = \alpha;$$

ces derniers nombres β et α seront les plus petites valeurs de x et y.

Si le nombre des restes étoit impair, comme si g étoit le dernier reste $= 1$, alors il faudroit faire

$$f \pm 1 = \zeta, \quad \frac{\zeta e \mp 1}{f} = \varepsilon, \quad \frac{\varepsilon d \pm 1}{e} = \delta, \text{ etc.}$$

Il est facile de voir que cette méthode revient au même dans le fond que celle du chapitre premier; mais elle en est moins commode, parce qu'elle demande des divisions; au reste, les Géometres qui sont curieux de ces matieres, verront avec plaisir dans l'Ouvrage de M. Bachet les artifices qu'il a employés pour parvenir à la regle précédente, et pour en déduire la solution complette des équations de la forme $ax - by = c$.

PARAGRAPHE IV

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR RÉSOUDRE EN NOMBRES ENTIERS LES ÉQUATIONS A DEUX INCONNUES DONT L'UNE NE PASSE PAS LE PREMIER DEGRÉ

ADDITION POUR LE CHAPITRE 3[1])

46. Soit proposée l'équation générale,

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fx^3 + gx^2y + hx^4 + kx^3y +, \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle les coefficiens a, b, c, etc. soient des nombres entiers donnés, et où x et y soient deux nombres indéterminés, qui doivent aussi être entiers.

Tirant la valeur de y de cette équation, on aura

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}}{c + ex + gx^2 + kx^3 +, \text{etc.}};$$

ainsi la question sera réduite à trouver un nombre entier qui, étant pris pour x, rende le numérateur de cette fraction divisible par son dénominateur.

Soit supposé

$$p = a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}$$
$$q = c + ex + gx^2 + kx^3 +, \text{etc.}$$

et qu'on retranche x de ces deux équations par les regles ordinaires de l'Algebre, on aura une équation finale de cette forme,

$$A + Bp + Cq + Dp^2 + Epq + Fq^2 + Gp^3 +, \text{etc.} = 0,$$

où les coefficiens A, B, C, etc. seront des fonctions rationnelles et entieres des nombres a, b, c, etc.

---

1) Voir p. 345. H. W.

Maintenant, puisque $y = -\frac{p}{q}$, on aura aussi $p = -qy$; de sorte qu'en substituant cette valeur de p, il viendra

$$A - Byq + Cq + Dy^2q^2 - Eq^2y + Fq^2 -, \text{etc.} = 0,$$

où l'on voit que tous les termes sont multipliés par q, à l'exception du premier terme A; donc il faudra que le nombre A soit divisible par le nombre q, autrement il seroit impossible que les nombres q et y pussent être entiers à la fois.

On cherchera donc tous les diviseurs du nombre entier connu A, et on prendra successivement chacun de ces diviseurs pour q; on aura par chacune de ces suppositions une équation déterminée en x, dont on cherchera, par les méthodes connues, les racines rationnelles et entieres, s'il y en a; on substituera ensuite ces racines à la place de x, et on verra si les valeurs résultantes de p et de q seront telles que $\frac{p}{q}$ soit un nombre entier. On sera sûr de trouver par ce moyen toutes les valeurs entieres de x, qui peuvent donner aussi des valeurs entieres pour y dans l'équation proposée.

De-là on voit que le nombre des solutions en entiers de ces sortes d'équations est toujours nécessairement limité; mais il y a un cas qui doit être excepté, et qui échappe à la méthode précédente.

47. Ce cas est celui où les coefficiens e, g, k, etc. sont nuls, en sorte que l'on ait simplement

$$y = -\frac{a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}}{c};$$

or voici comment il faudra s'y prendre pour trouver toutes les valeurs de x qui pourront rendre la quantité

$$a + bx + dx^2 + fx^3 + hx^4 +, \text{etc.}$$

divisible par le nombre donné c: je suppose d'abord qu'on ait trouvé un nombre entier n qui satisfasse à cette condition, il est facile de voir que tout nombre de la forme $n \pm \mu c$ y satisfera aussi, μ étant un nombre quelconque entier; de plus, si n est $> \frac{c}{2}$, (abstraction faite des signes de n et de c), on pourra toujours déterminer le nombre μ et le signe qui le précede, en sorte que le nombre $n \pm \mu c$ devienne $< \frac{c}{2}$; et il est aisé de voir que cela ne sauroit se faire que d'une seule maniere, les valeurs de n et de c

étant données; donc, si on désigne par n^{I} cette valeur de $n \pm \mu c$, laquelle est $< \frac{c}{2}$, et qui satisfait à la condition dont il s'agit, on aura en général

$$n = n^{\mathrm{I}} \mp \mu c,$$

μ étant un nombre quelconque.

D'où je conclus que si on substitue successivement, dans la formule $a + bx + dx^2 + fx^3 +$, etc. à la place de x tous les nombres entiers positifs ou négatifs qui ne passent pas $\frac{c}{2}$, et qu'on dénote par n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. ceux de ces nombres qui rendront la quantité $a + bx + dx^2 +$, etc. divisible par c, tous les autres nombres qui pourront faire le même effet, seront nécessairement renfermés dans ces formules

$$n^{\mathrm{I}} \pm \mu^{\mathrm{I}} c, \quad n^{\mathrm{II}} \pm \mu^{\mathrm{II}} c, \quad n^{\mathrm{III}} \pm \mu^{\mathrm{III}} c, \text{ etc.}$$

μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. étant des nombres quelconques entiers.

On pourroit faire ici différentes remarques pour faciliter la recherche des nombres n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. mais nous ne croyons pas devoir nous arrêter davantage sur ce sujet, d'autant que nous avons déjà eu occasion de le traiter dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie de Berlin pour l'année 1768,[1]) et qui a pour titre *Nouvelle Méthode pour résoudre les Problemes indéterminés.*[2])

48. Je dirai cependant encore un mot de la maniere de déterminer deux nombres x et y, en sorte que la fraction

$$\frac{ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 + fy^{m-3}x^3 + \text{, etc.}}{c}$$

devienne un nombre entier; c'est une recherche qui nous sera fort utile dans la suite.

Je suppose que y et x doivent être premiers entr'eux, et que de plus y doive être premier à c, je dis qu'on pourra toujours faire

$$x = ny - cz,$$

---

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 655. H. W.

2) Les éditions ultérieures contiennent l'addition suivante:

„Voyez aussi un Mémoire de LEGENDRE *Sur l'Analyse indéterminée*, dans le Recueil de l'Academie des Sciences de Paris pour l'année 1785.“ H. W.

n et z étant des nombres indéterminés; car en regardant x, y et c comme des nombres donnés, on aura une équation qui sera toujours résoluble en entiers par la méthode du § III, à cause que y et c n'ont d'autre commune mesure que l'unité, par l'hypothese. Or, si on substitue cette expression de x dans la quantité $ay^m + by^{m-1}x + dy^{m-2}x^2 +$, etc. elle deviendra

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 +, \text{etc.})y^m - (b + 2dn + 3fn^2 +, \text{etc.})cy^{m-1}z$$
$$+ (d + 3fn +, \text{etc.})c^2y^{m-2}z^2 -, \text{etc.}$$

et il est clair que cette quantité ne sauroit être divisible par c, à moins que le premier terme

$$(a + bn + dn^2 + fn^3 +, \text{etc.})y^m$$

ne le soit, puisque tous les autres termes sont des multiples de c. Donc, comme c et y sont supposés premiers entr'eux, il faudra que la quantité

$$a + bn + dn^2 + fn^3 +, \text{etc.}$$

soit elle-même divisible par c; ainsi il n'y aura qu'à chercher par la méthode de l'art. précédent toutes les valeurs de n qui pourront satisfaire à cette condition, et alors on aura en général

$$x = ny - cz,$$

z étant un nombre quelconque entier.

Il est bon d'observer que quoique nous ayons supposé que les nombres x et y doivent être premiers entr'eux, ainsi que les nombres y et c, notre solution n'en est cependant pas moins générale; car si on vouloit que x et y eussent une commune mesure α, il n'y auroit qu'à mettre αx^{I} et αy^{I} à la place de x et y, et on regarderoit ensuite x^{I} et y^{I} comme premiers entr'eux; de même si y^{I} et c devoient avoir une commune mesure β, on pourroit mettre βy^{II} à la place de y^{I}, et il seroit permis de regarder y^{II} et c comme premiers entr'eux.[1])

1) L'article 48 est rédigé un peu différemment dans les éditions de l'an III et de 1798, ainsi que dans celle de Serret, mais dans l'édition ultérieure de 1807, la forme originale en est rétablie. Aux endroits cités, l'article en question commence ainsi:

„Considérons maintenant les équations de la forme

$$ay^m + by^{m-1}x + cy^{m-2}x^2 + dy^{m-3}x^3 + \cdots = h,$$

dans lesquelles $a, b, c \cdots, h$ sont des nombres entiers donnés, et où les deux indéterminées x, y, qui forment partout dans le premier membre le même nombre m de dimensions, doivent être aussi des nombres entiers."

La suite ne présente plus de changements. La fin de cet article est modifiée comme suit:

„Nous avons supposé, dans la solution précédente, que x et y doivent être premiers entre eux, ainsi que y et h entre eux; ces suppositions sont permises, puisque les nombres x et y sont indéterminés; mais, comme elles ne paraissent point absolument nécessaires, il faut encore examiner dans quels cas elles peuvent cesser d'avoir lieu.

Supposons donc: 1^0 que x et y puissent avoir une commune mesure α; il n'y aura qu'à mettre partout, dans l'équation proposée, αx_1, αy_1 à la place de x et y, et regarder ensuite x_1 et y_1 comme premiers entre eux. Or, par cette substitution, il est clair que tous les termes du premier membre de l'équation se trouveront multipliés par α^m; par conséquent, il faudra que le second membre h soit divisible par α^m: d'où il suit qu'on ne peut prendre pour α que les diviseurs du nombre h qui s'y trouveront élevés à la puissance m. Ainsi, si le nombre h ne contient aucun facteur élevé à la puissance m, on sera assuré que les nombres x et y devront nécessairement être premiers entre eux.

Si le nombre h contient un ou plusieurs facteurs élevés à la puissance m, alors il faudre prendre successivement pour α chaque facteur ou combinaison de facteurs, dont la puissance m divisera le nombre h, et l'on aura autant de solutions différentes en regardant dans chacune x_1 et y_1 comme premiers entre eux.

Supposons: 2^0 que y et h aient une commune mesure β, on mettra βy_1 et βh_1 à la place de y et h, et l'on regardera ensuite y_1 et h_1 comme premiers entre eux. Par ces substitutions, tous les termes du premier membre qui contiennent y se trouveront multipliés par une puissance de β; il n'y aura que le dernier terme, que je représenterai par gx^m, qui, ne contenant point y, ne se trouvera point multiplié par β. Mais, puisque le second membre h devient βh_1, il s'ensuit que le terme gx^m devra aussi être divisible par β; or, x et y étant déjà supposés premiers entre eux, x ne saurait être divisible par β; donc il faudra que le coefficient g le soit. D'où je conclus qu'on pourra prendre pour β successivement tous les diviseurs de g, et, après la substitution de βy_1 et βh_1 au lieu de y et de h et la division de toute l'équation par β, on aura de nouveau le cas ou l'indéterminée y_1 sera nécessairement première au nombre h_1 qui formera le second membre." H. W.

PARAGRAPHE V

MÉTHODE DIRECTE ET GÉNÉRALE POUR TROUVER LES VALEURS DE x QUI PEUVENT RENDRE RATIONNELLES LES QUANTITÉS DE LA FORME $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ ET POUR RÉSOUDRE EN NOMBRES RATIONNELS LES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ A DEUX INCONNUES LORSQU'ELLES ADMETTENT DES SOLUTIONS DE CETTE ESPECE

ADDITION POUR LE CHAPITRE 4[1])

49. Je suppose d'abord que les nombres connus a, b, c soient entiers; s'ils étoient fractionnaires, il n'y auroit qu'à les réduire à un même dénominateur carré, et alors il est clair qu'on pourroit toujours faire abstraction de leur dénominateur; quant au nombre x, on supposera ici qu'il puisse être entier ou fractionnaire, et on verra par la suite comment il faudra résoudre la question, lorsqu'on ne veut admettre que des nombres entiers.

Soit donc

$$\sqrt{(a+bx+cx^2)}=y,$$

et l'on en tirera

$$2cx+b=\sqrt{(4cy^2+b^2-4ac)};$$

de sorte que la difficulté sera réduite à rendre rationnelle la quantité

$$\sqrt{(4cy^2+b^2-4ac)}.$$

50. Supposons donc en général qu'on ait à rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(Ay^2+B)}$, c'est-à-dire, à rendre Ay^2+B égal à un carré, A et B étant des nombres entiers donnés positifs ou négatifs, et y un nombre indéterminé qui doit être rationnel.

---

1) Voir p. 349. H. W.

Il est d'abord clair que si l'un des nombres A ou B étoit $=1$, ou égal à un carré quelconque, le probleme seroit résoluble par les méthodes connues de DIOPHANTE, qui sont détaillées dans le chapitre 4; ainsi nous ferons ici abstraction de ces cas, ou plutôt nous tâcherons d'y ramener tous les autres.

De plus, si les nombres A et B étoient divisibles par des nombres carrés quelconques, on pourroit aussi faire abstraction de ces diviseurs, c'est-à-dire, les supprimer, en ne prenant pour A et B que les quotiens qu'on auroit après avoir divisé les valeurs données par les plus grands carrés possibles; en effet, supposant $A=\alpha^2 A^1$, $B=\beta^2 B^1$, on aura à rendre carré le nombre $A^1\alpha^2 y^2+B^1\beta^2$; donc divisant par β^2, et faisant $\frac{\alpha y}{\beta}=y^1$, il s'agira de déterminer l'inconnue y^1, en sorte que $A^1 y^{1\,2}+B^1$ soit un carré.

D'où il s'ensuit que dès qu'on aura trouvé une valeur de y propre à rendre Ay^2+B égal à un carré, en rejetant dans les valeurs données de A et de B les facteurs carrés α^2 et β^2 qu'elles pourroient renfermer, il n'y aura qu'à multiplier la valeur trouvée de y par $\frac{\beta}{\alpha}$, pour avoir celle qui convient à la quantité proposée.

51. Considérons donc la formule Ay^2+B, dans laquelle A et B soient des nombres entiers donnés qui ne soient divisibles par aucun carré; et comme on suppose que y puisse être une fraction, faisons $y=\frac{p}{q}$, p et q étant des nombres entiers et premiers entr'eux, pour que la fraction soit réduite à ses moindres termes; on aura donc la quantité $\frac{Ap^2}{q^2}+B$ qui devra être un carré; donc Ap^2+Bq^2 devra en être un aussi; de sorte qu'on aura à résoudre l'équation

$$Ap^2+Bq^2=z^2,$$

en supposant p, q et z des nombres entiers.

Or je dis qu'il faudra que q soit premier à A, et que p le soit à B; car si q et A avoient un commun diviseur, il est clair que le terme Bq^2 seroit divisible par le carré de ce diviseur; et que le terme Ap^2 ne seroit divisible que par la premiere puissance du même diviseur, à cause que q et p sont premiers entr'eux, et que A est supposé ne contenir aucun facteur carré; donc le nombre Ap^2+Bq^2 ne seroit divisible qu'une seule fois par le diviseur commun de q et de A, par conséquent il seroit impossible que ce nombre fût un carré. On prouvera de même que p et B ne sauroient avoir aucun diviseur commun.

Résolution de l'équation $Ap^2+Bq^2=z^2$ en nombres entiers

52. Supposons A plus grand que B, on écrira cette équation ainsi,

$$Ap^2=z^2-Bq^2,$$

et on remarquera que comme les nombres p, q et z doivent être entiers, il faudra que z^2-Bq^2 soit divisible par A.

Donc, puisque A et q sont premiers entr'eux, (art. précédent), on fera, suivant la méthode du § IV, art. 48, ci-dessus,

$$z=nq-Aq^{\text{I}},$$

n et q^{I} étant deux nombres entiers indéterminés; ce qui changera la formule z^2-Bq^2 en celle-ci,

$$(n^2-B)q^2-2nAqq^{\text{I}}+A^2q^{\text{I}2},$$

dans laquelle il faudra que n^2-B soit divisible par A, en prenant pour n un nombre entier non $>\frac{A}{2}$.

On essayera donc pour n tous les nombres entiers qui ne surpassent pas $\frac{A}{2}$, et si on n'en trouve aucun qui rende n^2-B divisible par A, on en conclura sur le champ que l'équation $Ap^2=z^2-Bq^2$ n'est pas résoluble en nombres entiers, et qu'ainsi la quantité Ay^2+B ne sauroit jamais devenir un carré.

Mais si on trouve une ou plusieurs valeurs satisfaisantes de n, on les mettra l'une après l'autre à la place de n, et on poursuivra le calcul comme on va le voir.

Je remarquerai seulement encore qu'il seroit inutile de donner aussi à n des valeurs plus grandes que $\frac{A}{2}$; car nommant n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. les valeurs de n moindres que $\frac{A}{2}$, qui rendront n^2-B divisible par A, toutes les autres valeurs de n qui pourront faire le même effet seront renfermées dans ces formules, $n^{\text{I}}\pm\mu^{\text{I}}A$, $n^{\text{II}}\pm\mu^{\text{II}}A$, $n^{\text{III}}\pm\mu^{\text{III}}A$, etc. (article 47 du § IV); or, substituant ces valeurs à la place de n dans la formule $(n^2-B)q^2-2nAqq^{\text{I}}+A^2q^{\text{I}2}$, c'est-à-dire $(nq-Aq^{\text{I}})^2-Bq^2$, il est clair qu'on aura les mêmes résultats que si on mettoit seulement n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc. à la place de n, et qu'on ajoutât à q^{I} les quantités $\mp\mu^{\text{I}}q$, $\mp\mu^{\text{II}}q$, $\mp\mu^{\text{III}}q$, etc., de sorte que, comme q^{I} est un nombre indéterminé, ces substitutions ne donneroient pas des formules différentes de celles qu'on aura par la simple substitution des valeurs n^{I}, n^{II}, n^{III}, etc.

53. Puis donc que $n^2 - B$ doit être divisible par A, soit A^{I} le quotient de cette division, en sorte que $AA^{\text{I}} = n^2 - B$; et l'équation

$$Ap^2 = z^2 - Bq^2 = (n^2 - B)q^2 - 2nAqq^{\text{I}} + A^2q^{\text{I}2},$$

étant divisée par A, deviendra celle-ci,

$$p^2 = A^{\text{I}}q^2 - 2nqq^{\text{I}} + Aq^{\text{I}2},$$

où A^{I} sera nécessairement moindre que A, à cause que $A^{\text{I}} = \frac{n^2 - B}{A}$ et que $B < A$, et n non $> \frac{A}{2}$.

Or, 1°. si A^{I} est un nombre carré, il est clair que cette équation sera résoluble par les méthodes connues, et l'on en aura la solution la plus simple qu'il est possible, en faisant $q^{\text{I}} = 0$, $q = 1$ et $p = \sqrt{A^{\text{I}}}$.

2°. Si A^{I} n'est pas égal à un carré, on verra si ce nombre est moindre que B, ou au moins s'il est divisible par un nombre quelconque carré, en sorte que le quotient soit moindre que B, abstraction faite des signes; alors on multipliera toute l'équation par A^{I}, et l'on aura, à cause de $AA^{\text{I}} - n^2 = -B$,

$$A^{\text{I}}p^2 = (A^{\text{I}}q - nq^{\text{I}})^2 - Bq^{\text{I}2};$$

de sorte qu'il faudra que $Bq^{\text{I}2} + A^{\text{I}}p^2$ soit un carré; donc divisant par p^2 et faisant $\frac{q^{\text{I}}}{p} = y^{\text{I}}$ et $A^{\text{I}} = C$, on aura à rendre carrée la formule $By^{\text{I}2} + C$, laquelle est, comme l'on voit, analogue à celle de l'art. 50. Ainsi, si C contient un facteur carré γ^2, on pourra le supprimer, en ayant attention de multiplier ensuite par γ la valeur qu'on trouvera pour y^{I}, pour avoir sa véritable valeur; et l'on aura une formule qui sera dans le cas de celle de l'art. 51, mais avec cette différence que les coefficiens B et C de celle-ci seront moindres que les coefficiens A et B de celle-là.

54. Mais si A^{I} n'est pas moindre que B, ni ne peut le devenir en le divisant par le plus grand carré qui le mesure, alors on fera $q = \nu q^{\text{I}} + q^{\text{II}}$, et substituant cette valeur dans l'équation, elle deviendra

$$p^2 = A^{\text{I}}q^{\text{II}2} - 2n^{\text{I}}q^{\text{II}}q^{\text{I}} + A^{\text{II}}q^{\text{I}2},$$

où

$$n^{\text{I}} = n - \nu A^{\text{I}}, \quad \text{et} \quad A^{\text{II}} = A^{\text{I}}\nu^2 - 2n\nu + A = \frac{n^{\text{I}2} - B}{A^{\text{I}}}.$$

On déterminera, ce qui est toujours possible, le nombre entier ν, en sorte que n^{I} ne soit pas $> \frac{A^{\text{I}}}{2}$, abstraction faite des signes, et alors il est clair que A^{II} deviendra $< A^{\text{I}}$, à cause de $A^{\text{II}} = \frac{n^{\text{I}2} - B}{A^{\text{I}}}$ et de $B =$ ou $< A^{\text{I}}$ et $n^{\text{I}} =$ ou $< \frac{A^{\text{I}}}{2}$.

On fera donc ici le même raisonnement que nous avons fait dans l'article précédent, et si A^{II} est carré, on aura la résolution de l'équation; si A^{II} n'est pas carré, mais qu'il soit $< B$ ou qu'il le devienne, étant divisé par un carré, on multipliera l'équation par A^{II} et on aura, en faisant $\frac{p}{q^{\text{II}}} = y^{\text{I}}$ et $A^{\text{II}} = C$, la formule $By^{\text{I}2} + C$, qui devra être un carré, et dans laquelle les coefficiens B et C, (après avoir supprimé dans C les diviseurs carrés, s'il y en a), seront moindres que ceux de la formule $Ay^2 + B$ de l'art. 51.

Mais si ces cas n'ont pas lieu, on fera, comme ci-dessus, $q^{\text{I}} = \nu^{\text{I}} q^{\text{II}} + q^{\text{III}}$, et l'équation se changera en celle-ci,

$$p^2 = A^{\text{III}} q^{\text{II}2} - 2 n^{\text{II}} q^{\text{II}} q^{\text{III}} + A^{\text{II}} q^{\text{III}2},$$

où

$$n^{\text{II}} = n^{\text{I}} - \nu^{\text{I}} A^{\text{II}}, \quad \text{et} \quad A^{\text{III}} = A^{\text{II}} \nu^{\text{I}2} - 2 n^{\text{I}} \nu^{\text{I}} + A^{\text{I}} = \frac{n^{\text{II}2} - B}{A^{\text{II}}}.$$

On prendra donc pour ν^{I} un nombre entier, tel que n^{II} ne soit pas $> \frac{A^{\text{II}}}{2}$, abstraction faite des signes; et comme B n'est pas $> A^{\text{II}}$, (*hyp.*), il s'ensuit de l'équation $A^{\text{III}} = \frac{n^{\text{II}2} - B}{A^{\text{II}}}$ que A^{III} sera $< A^{\text{II}}$; ainsi on pourra faire derechef les mêmes raisonnemens que ci-dessus, et on en tirera des conclusions semblables, et ainsi de suite.

Maintenant, comme les nombres A, A^{I}, A^{II}, A^{III}, etc. forment une suite décroissante de nombres entiers, il est visible qu'en continuant cette suite on parviendra nécessairement à un terme moindre que le nombre donné B; et alors nommant ce terme C, on aura, comme nous l'avons vu ci-dessus, la formule $By^{\text{I}2} + C$ à rendre égale à un carré. De sorte que par les opérations que nous venons d'exposer, on sera toujours assuré de pouvoir ramener la formule $Ay^2 + B$ à une autre plus simple, telle que $By^2 + C$, au moins si le probleme est résoluble.

55. Or, de même qu'on a réduit la formule $Ay^2 + B$ à celle-ci $By^{\text{I}2} + C$, on pourra réduire cette derniere à cette autre-ci, $Cy^{\text{II}2} + D$, où D sera moindre que C, et ainsi de suite; et comme les nombres A, B, C, D, etc. forment une série décroissante de nombres entiers, il est clair que cette série ne pourra pas aller à l'infini, et qu'ainsi l'opération sera toujours nécessai-

rement terminée. Si la question n'admet point de solution en nombres rationnels, on parviendra à une condition impossible; mais si la question est résoluble, on arrivera toujours à une équation semblable à celle de l'art. 53, et où l'un des coefficiens, comme A^{I}, sera carré; en sorte qu'elle sera susceptible des méthodes connues; or cette équation étant résolue, on pourra, en rétrogradant, résoudre successivement toutes les équations précédentes, jusqu'à la premiere $Ap^2 + Bq^2 = z^2$.

Eclaircissons cette méthode par quelques exemples.

EXEMPLE I

56. *Soit proposé de trouver une valeur rationnelle de x, telle que la formule*

$$7 + 15x + 13x^2$$

devienne un carré. (Voyez chapitre 4, art. 57 du traité précédent.)

On aura donc ici $a = 7$, $b = 15$, $c = 13$; donc $4c = 4 \cdot 13$, et $b^2 - 4ac = -139$; de sorte qu'en nommant y la racine du carré dont il s'agit, on aura la formule

$$4 \cdot 13y^2 - 139$$

qui devra être un carré; ainsi on aura $A = 4 \cdot 13$ et $B = -139$, où l'on remarquera d'abord que A est divisible par le carré 4; de sorte qu'il faudra rejeter ce diviseur carré et supposer simplement $A = 13$; mais on se souviendra ensuite de diviser par 2 la valeur qu'on trouvera pour y, (art. 50).

On aura donc, en faisant $y = \frac{p}{q}$, l'équation $13p^2 - 139q^2 = z^2$, ou bien, à cause que 139 est > 13, on fera $y = \frac{q}{p}$, pour avoir $-139p^2 + 13q^2 = z^2$, équation qu'on écrira ainsi,

$$-139p^2 = z^2 - 13q^2.$$

On fera, (art. 52), $z = nq - 139q^{\text{I}}$, et il faudra prendre pour n un nombre entier non $> \frac{139}{2}$, c'est-à-dire < 70, tel que $n^2 - 13$ soit divisible par 139; je trouve $n = 41$, ce qui donne $n^2 - 13 = 1668 = 139 \cdot 12$; de sorte qu'en faisant la substitution et divisant ensuite par -139, on aura l'équation

$$p^2 = -12q^2 + 2 \cdot 41\, qq^{\text{I}} - 139q^{\text{I}2}.$$

Or, comme -12 n'est pas un carré, cette équation n'a pas encore les conditions requises; ainsi, puisque 12 est déjà moindre que 13, on multipliera toute l'équation par -12, et elle deviendra $-12p^2=(-12q+41q^{\mathrm{I}})^2-13q^{\mathrm{I}\,2}$, de sorte qu'il faudra que $13q^{\mathrm{I}\,2}-12p^2$ soit un carré, ou bien, en faisant $\frac{q^{\mathrm{I}}}{p}=y^{\mathrm{I}}$, que $13y^{\mathrm{I}\,2}-12$ en soit un aussi.

On voit ici qu'il n'y auroit qu'à faire $y^{\mathrm{I}}=1$, mais comme ce n'est que le hasard qui nous donne cette valeur, nous allons poursuivre le calcul selon notre méthode, jusqu'à ce que l'on arrive à une formule qui soit susceptible des méthodes ordinaires. Comme 12 est divisible par 4, je rejette ce diviseur carré, en me souvenant que je dois ensuite multiplier la valeur de y^{I} par 2; j'aurai donc à rendre carrée la formule $13y^{\mathrm{I}\,2}-3$, ou bien, en faisant $y^{\mathrm{I}}=\frac{r}{s}$, (on suppose que r et s sont des nombres entiers premiers entr'eux, en sorte que la fraction $\frac{r}{s}$ soit déjà réduite à ses moindres termes, comme la fraction $\frac{q}{p}$), celle-ci $13r^2-3s^2$; soit la racine z^{I}, j'aurai

$$13r^2=z^{\mathrm{I}\,2}+3s^2,$$

et je ferai $z^{\mathrm{I}}=ms-13s^{\mathrm{I}}$, m étant un nombre entier non $>\frac{13}{2}$, c'est-à-dire <7, et tel que m^2+3 soit divisible par 13; or je trouve $m=6$, ce qui donne $m^2+3=39=13\cdot 3$; donc substituant la valeur de z^{I} et divisant toute l'équation par 13, on aura

$$r^2=3s^2-2\cdot 6ss^{\mathrm{I}}+13s^{\mathrm{I}\,2}.$$

Comme le coefficient 3 de s^2 n'est ni carré ni moindre que celui de s^2 dans l'équation précédente, on fera, (art. 54), $s=\mu s^{\mathrm{I}}+s^{\mathrm{II}}$, et substituant l'on aura la transformée

$$r^2=3s^{\mathrm{II}\,2}-2(6-3\mu)s^{\mathrm{II}}s^{\mathrm{I}}+(3\mu^2-2\cdot 6\mu+13)s^{\mathrm{I}\,2};$$

on déterminera μ, en sorte que $6-3\mu$ ne soit pas $>\frac{3}{2}$, et il est clair qu'il faudra faire $\mu=2$, ce qui donne $6-3\mu=0$; et l'équation deviendra

$$r^2=3s^{\mathrm{II}\,2}+s^{\mathrm{I}\,2},$$

laquelle est, comme l'on voit, réduite à l'état demandé, puisque le coefficient du carré de l'une des deux indéterminées du second membre est aussi carré.

On fera donc, pour avoir la solution la plus simple qu'il est possible, $s^{\mathrm{II}}=0$, $s^{\mathrm{I}}=1$ et $r=1$; donc $s=\mu=2$, et de-là $y^{\mathrm{I}}=\frac{r}{s}=\frac{1}{2}$; mais nous avons vu qu'il faut multiplier la valeur de y^{I} par 2; ainsi on aura $y^{\mathrm{I}}=1$; donc, en rétrogradant toujours, on aura $\frac{q^{\mathrm{I}}}{p}=1$; donc $q^{\mathrm{I}}=p$; donc l'équation

$$-12p^2=(-12q+41q^{\mathrm{I}})^2-13q^{\mathrm{I}\,2},$$

donnera $(-12q+41p)^2=p^2$; donc $-12q+41p=p$, c'est-à-dire $12q=40p$; donc $y=\frac{q}{p}=\frac{40}{12}=\frac{10}{3}$; mais comme il faut diviser la valeur de y par 2, on aura $y=\frac{5}{3}$; ce sera le côté de la racine de la formule proposée $7+15x+13x^2$; ainsi faisant cette quantité $=\frac{25}{9}$, on trouvera par la résolution de l'équation, $26x+15=\pm\frac{7}{3}$, d'où

$$x=-\frac{19}{39},\ \text{ou}\ =-\frac{2}{3}.$$

On auroit pu prendre aussi $-12q+41p=-p$, et l'on auroit eu $y=\frac{q}{p}=\frac{21}{6}$, et divisant par 2, $y=\frac{21}{12}$; faisant donc $7+15x+13x^2=\left(\frac{21}{12}\right)^2$, on trouvera $26x+15=\pm\frac{9}{2}$; donc

$$x=-\frac{21}{52},\ \text{ou}\ =-\frac{3}{4}.$$

Si on vouloit avoir d'autres valeurs de x, il n'y auroit qu'à chercher d'autres solutions de l'équation $r^2=3s^{\mathrm{II}2}+s^{\mathrm{I}2}$, laquelle est résoluble en général par les méthodes connues; mais on peut aussi, dès qu'on connoît une seule valeur de x, en déduire immédiatement toutes les autres valeurs satisfaisantes de x par la méthode expliquée dans le chapitre 4 du traité précédent.

REMARQUE

57. Supposons en général que la quantité $a+bx+cx^2$ devienne égale à un carré g^2, lorsque $x=f$, en sorte que l'on ait $a+bf+cf^2=g^2$; donc $a=g^2-bf-cf^2$; de sorte qu'en substituant cette valeur dans la formule proposée, elle deviendra

$$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2).$$

Qu'on prenne $g+m(x-f)$ pour la racine de cette quantité, m étant un nombre indéterminé, et l'on aura l'équation

$$g^2+b(x-f)+c(x^2-f^2)=g^2+2mg(x-f)+m^2(x-f)^2,$$

c'est-à-dire en effaçant g^2 de part et d'autre, et divisant ensuite par $x-f$,

$$b+c(x+f)=2mg+m^2(x-f);$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{fm^2-2gm+b+cf}{m^2-c}.$$

Et il est clair qu'à cause du nombre indéterminé m, cette expression de x doit renfermer toutes les valeurs qu'on peut donner à x, pour que la formule proposée devienne un carré; car quel que soit le nombre carré auquel cette formule peut être égale, il est visible que la racine de ce nombre pourra toujours être représentée par $g+m(x-f)$, en donnant à m une valeur convenable. Ainsi quand on aura trouvé par la méthode expliquée ci-dessus une seule valeur satisfaisante de x, il n'y aura qu'à la prendre pour f, et la racine du carré qui en résultera pour g; l'on aura, par la formule précédente, toutes les autres valeurs possibles de x.

Dans l'exemple précédent on a trouvé $y=\frac{5}{3}$ et $x=-\frac{2}{3}$; ainsi on fera $g=\frac{5}{3}$ et $f=-\frac{2}{3}$, et l'on aura

$$x=\frac{19-10m-2m^2}{3(m^2-13)},$$

c'est l'expression générale des valeurs rationnelles de x, qui peuvent rendre carrée la quantité $7+15x+13x^2$.

EXEMPLE II

58. *Soit encore proposé de trouver une valeur rationnelle de y, telle que*

$$23y^2-5$$

soit un carré.

Comme 23 et 5 ne sont divisibles par aucun nombre carré, il n'y aura aucune réduction à y faire. Ainsi en faisant $y=\frac{p}{q}$, il faudra que la formule $23p^2-5q^2$ devienne un carré z^2; de sorte qu'on aura l'équation

$$23p^2=z^2+5q^2.$$

On fera donc $z=nq-23q^{\text{I}}$, et il faudra prendre pour n un nombre entier non $>\frac{23}{2}$, tel que n^2+5 soit divisible par 23. Je trouve $n=8$, ce qui donne $n^2+5=23\cdot 3$, et cette valeur de n est la seule qui ait les conditions requises. Substituant donc $8q-23q^{\text{I}}$ à la place de z, et divisant toute l'équation par 23, j'aurai celle-ci,

$$p^2=3q^2-2\cdot 8qq^{\text{I}}+23q^{\text{I}2},$$

dans laquelle on voit que le coefficient 3 est déjà moindre que la valeur de B qui est 5, abstraction faite du signe.

Ainsi on multipliera toute l'équation par 3, et l'on aura

$$3p^2 = (3q - 8q^{\mathrm{I}})^2 + 5q^{\mathrm{I}2};$$

de sorte qu'en faisant $\frac{q^{\mathrm{I}}}{p} = y^{\mathrm{I}}$, il faudra que la formule $-5y^{\mathrm{I}2} + 3$ soit un carré, où les coefficiens 5 et 3 n'admettent aucune réduction.

Soit donc $y^{\mathrm{I}} = \frac{r}{s}$, ($r$ et s sont supposés premiers entr'eux, au lieu que q^{I} et p peuvent ne pas l'être), et l'on aura à rendre carrée la quantité $-5r^2 + 3s^2$; de sorte qu'en nommant la racine z^{I}, on aura $-5r^2 + 3s^2 = z^{\mathrm{I}2}$ et de-là

$$-5r^2 = z^{\mathrm{I}2} - 3s^2.$$

On prendra donc $z^{\mathrm{I}} = ms + 5s^{\mathrm{I}}$, et il faudra que m soit un nombre entier non $> \frac{5}{2}$, et tel que $m^2 - 3$ soit divisible par 5; or c'est ce qui est impossible, car on ne pourroit prendre que $m = 1$ ou 2, ce qui donne $m^2 - 3 = -2$ ou $= 1$. Ainsi on en doit conclure que le probleme n'est pas résoluble, c'est-à-dire qu'il est impossible que la formule $23y^2 - 5$ puisse jamais devenir égale à un nombre carré, quelque nombre que l'on substitue à la place de y.

COROLLAIRE

59. Si on avoit une équation quelconque du second degré à deux inconnues, telle que

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0,$$

et que l'on proposât de trouver des valeurs rationnelles de x et y qui satisfissent à cette équation, on y pourroit parvenir, lorsque cela est possible, par la méthode que nous venons d'exposer.

En effet, si on tire la valeur de y en x, on aura

$$2fy + ex + c = \sqrt{\left((c + ex)^2 - 4f(a + bx + dx^2)\right)},$$

ou bien en faisant $\alpha = c^2 - 4af$, $\beta = 2ce - 4bf$, $\gamma = e^2 - 4df$,

$$2fy + ex + c = \sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)};$$

de sorte que la question sera réduite à trouver des valeurs de x qui rendent rationnel le radical $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)}$.

REMARQUE

60. Nous avons déjà traité ce même sujet, mais d'une maniere un peu différente, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin pour

l'année 1767[1]), et nous croyons être les premiers qui ayons donné une méthode directe et exempte de tâtonnement pour la solution des problemes indéterminés du second degré. Le Lecteur qui sera curieux d'approfondir cette matiere, pourra consulter les Mémoires cités, où il trouvera sur-tout des remarques nouvelles et importantes sur la recherche des nombres entiers qui, étant pris pour n, peuvent rendre $n^2 - B$ divisible par A, A et B étant des nombres donnés.

On trouvera aussi dans les Mémoires pour les années 1770[2]) et suivantes, des recherches sur la forme des diviseurs des nombres représentés par $z^2 - Bq^2$; de sorte que par la forme même du nombre A, on pourra juger souvent de l'impossibilité de l'équation $Ap^2 = z^2 - Bq^2$, où $Ay^2 + B =$ *à un carré*, (art. 52).[3])

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377. H. W.

2) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 581. H. W.

3) Les éditions ultérieures contiennent l'addition suivante:

„LEGENDRE s'est occupé depuis, dans le Mémoire cité plus haut (art. 47), à chercher les conditions générales de la possibilité ou de l'impossibilité des équations indéterminées du second degré, et il est parvenu à ce théorème remarquable, que

L'équation $ax^2 + by^2 = cz^2$, *dans laquelle* a, b, c *sont positifs, premiers entre eux et dégagés de tout facteur carré, est résoluble, si l'on peut trouver trois entiers* λ, μ, ν, *tels que les trois quantités* $\frac{a\lambda^2 + b}{c}, \frac{c\mu^2 - b}{a}, \frac{c\nu^2 - a}{b}$ *soient des entiers.*" H. W.

PARAGRAPHE VI

SUR LES DOUBLES ET TRIPLES ÉGALITÉS

61. Nous traiterons ici en peu de mots des doubles et triples égalités, qui sont d'un usage très-fréquent dans l'analyse de DIOPHANTE, et pour la solution desquelles ce grand Géometre et ses Commentateurs ont cru devoir donner des regles particulieres.

Lorsqu'on a une formule contenant une ou plusieurs inconnues à égaler à une puissance parfaite, comme à un carré ou à un cube etc., cela s'appelle dans l'analyse de DIOPHANTE une égalité simple; et lorsqu'on a deux formules contenant la même ou les mêmes inconnues à égaler chacune à des puissances parfaites, cela s'appelle une égalité double, et ainsi de suite.

Jusqu'ici on a vu comment il faut résoudre les égalités simples où l'inconnue ne passe pas le second degré, et où la puissance proposée est la seconde, c'est-à-dire le carré.

Voyons donc comment on doit traiter les égalités doubles et triples de la même espece.

62. Soit d'abord proposée cette égalité doublée,

$$a + bx = \textit{à un carré}$$

$$c + dx = \textit{à un carré},$$

où l'inconnue x ne se trouve qu'au premier degré.

Faisant $a + bx = t^2$ et $c + dx = u^2$, et chassant x de ces deux équations, on aura $ad - bc = dt^2 - bu^2$; donc $dt^2 = bu^2 + ad - bc$, et

$$(dt)^2 = dbu^2 + (ad - bc)d;$$

de sorte que la difficulté sera réduite à trouver une valeur rationnelle de u, telle que $dbu^2 + ad^2 - bcd$ devienne un carré. On résoudra cette égalité simple par la méthode exposée ci-dessus, et connoissant ainsi u on aura $x = \frac{u^2 - c}{d}$.

Si l'égalité doublée étoit

$$ax^2 + bx = \textit{à un carré}$$
$$cx^2 + dx = \textit{à un carré},$$

il n'y auroit qu'à faire $x = \frac{1}{x^{\mathrm{I}}}$, et multiplier ensuite l'une et l'autre formule par le carré $x^{\mathrm{I}2}$, on auroit ces deux autres égalités

$$a + bx^{\mathrm{I}} = \textit{à un carré} \quad \text{et} \quad c + dx^{\mathrm{I}} = \textit{à un carré},$$

qui sont semblables aux précédentes.

Ainsi on peut résoudre en général toutes les égalités doubles où l'inconnue ne passe pas le premier degré, et celles où l'inconnue se trouve dans tous les termes, pourvu qu'elle ne passe pas le second degré; mais il n'en est pas de même lorsque l'on a des égalités de cette forme,

$$a + bx + cx^2 = \textit{à un carré}$$
$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = \textit{à un carré}.$$

Si on résoud la premiere de ces égalités par notre méthode, et qu'on nomme f la valeur de x qui rend $a + bx + cx^2 =$ au carré g^2, on aura en général, (art. 57),

$$x = \frac{fm^2 - 2gm + b + cf}{m^2 - c};$$

donc substituant cette expression de x dans l'autre formule $\alpha + \beta x + \gamma x^2$, et la multipliant ensuite par $(m^2 - c)^2$, on aura à résoudre l'égalité

$$\alpha(m^2 - c)^2 + \beta(m^2 - c)(fm^2 - 2gm + b + cf) + \gamma(fm^2 - 2gm + b + cf)^2 = \textit{à un carré},$$

dans laquelle l'inconnue m monte au quatrieme degré.

Or on n'a jusqu'à présent aucune regle générale pour résoudre ces sortes d'égalités, et tout ce qu'on peut faire, c'est de trouver successivement différentes solutions, lorsqu'on en connoît une seule. (Voyez le chapitre 9).

63. Si on avoit la triple égalité

$$\left.\begin{array}{l} ax + by \\ cx + dy \\ hx + ky \end{array}\right\} = \textit{à un carré},$$

on feroit $ax + by = t^2$, $cx + dy = u^2$, et $hx + ky = s^2$, et chassant x et y de ces trois équations, on auroit celle-ci,

$$(ak - bh)u^2 - (ck - dh)t^2 = (ad - cb)s^2;$$

de sorte qu'en faisant $\frac{u}{t} = z$, la difficulté se réduiroit à résoudre l'égalité simple,

$$\frac{ak - bh}{ad - cb} z^2 - \frac{ck - dh}{ad - cb} = \text{à un carré},$$

laquelle est, comme l'on voit, dans le cas de notre méthode générale.

Ayant trouvé la valeur de z, on aura $u = tz$, et les deux premieres équations donneront

$$x = \frac{d - bz^2}{ad - cb} t^2, \quad y = \frac{az^2 - c}{ad - cb} t^2.$$

Mais si la triple égalité proposée ne contenoit qu'une seule variable, on retomberoit alors dans une égalité où l'inconnue monteroit au quatrieme degré.

En effet, il est clair que ce cas peut se déduire du précédent, en faisant $y = 1$; de sorte qu'il faudra que l'on ait $\frac{az^2 - c}{ad - cb} t^2 = 1$, et par conséquent

$$\frac{az^2 - c}{ad - cb} = \text{à un carré}.$$

Or, nommant f une des valeurs de z qui peuvent satisfaire à l'égalité ci-dessus, et faisant, pour abréger, $\frac{ak - bh}{ad - cb} = e$, on aura en général, (art. 57),

$$z = \frac{fm^2 - 2gm + ef}{m^2 - e}.$$

Donc, substituant cette valeur de z dans la derniere égalité, et la multipliant toute par le carré de $m^2 - e$, on aura celle-ci,

$$\frac{a(fm^2 - 2gm + ef)^2 - c(m^2 - e)^2}{ad - cb} = \text{à un carré},$$

où l'inconnue m monte, comme l'on voit, au quatrieme degré.

PARAGRAPHE VII

MÉTHODE DIRECTE ET GÉNÉRALE POUR TROUVER TOUTES LES VALEURS DE y EXPRIMÉES EN NOMBRES ENTIERS PAR LESQUELLES ON PEUT RENDRE RATIONNELLES LES QUANTITÉS DE LA FORME $\sqrt{(Ay^2+B)}$ A ET B ÉTANT DES NOMBRES ENTIERS DONNÉS ET POUR TROUVER AUSSI TOUTES LES SOLUTIONS POSSIBLES EN NOMBRES ENTIERS DES ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU SECOND DEGRÉ A DEUX INCONNUES

ADDITION POUR LE CHAPITRE 6[1])

64. Quoique par la méthode du § V on puisse trouver des formules générales qui renferment toutes les valeurs rationnelles de y, propres à rendre Ay^2+B égal à un carré, cependant ces formules ne sont d'aucun usage, lorsqu'on demande pour y des valeurs exprimées en nombres entiers; c'est pourquoi nous sommes obligés de donner ici une méthode particuliere pour résoudre la question dans le cas des nombres entiers.

Soit donc

$$Ay^2+B=x^2;$$

et comme A et B sont supposés des nombres entiers, et que y doit être aussi un nombre entier, il est clair que x devra être pareillement entier; de sorte qu'on aura à résoudre en entiers l'équation

$$x^2-Ay^2=B.$$

Je commence par remarquer ici que si B n'est divisible par aucun nombre carré, il faudra nécessairement que y soit premier à B; car suppo-

1) Voir p. 369. H. W.

sons, s'il est possible, que y et B aient une commune mesure α, en sorte que $y = \alpha y^{\mathrm{I}}$, et $B = \alpha B^{\mathrm{I}}$; donc on aura $x^2 - A\alpha^2 y^{\mathrm{I}2} = \alpha B^{\mathrm{I}}$, d'où il s'ensuit qu'il faudra que x^2 soit divisible par α; et comme α n'est ni carré ni divisible par aucun carré, (*hyp.*), à cause que α est facteur de B, il faudra que x soit divisible par α; faisant donc $x = \alpha x^{\mathrm{I}}$, on aura $\alpha^2 x^{\mathrm{I}2} = \alpha^2 A y^{\mathrm{I}2} + \alpha B^{\mathrm{I}}$, ou bien en divisant par α, $\alpha x^{\mathrm{I}2} = \alpha A y^{\mathrm{I}2} + B^{\mathrm{I}}$; d'où l'on voit que B^{I} devroit encore être divisible par α, ce qui est contre l'hypothese.

Ce n'est donc que lorsque B contient des facteurs carrés que y peut avoir une commune mesure avec B; et il est facile de voir par la démonstration précédente que cette commune mesure de y et de B ne peut être que la racine d'un des facteurs carrés de B, et que le nombre x devra avoir la même commune mesure; en sorte que toute l'équation sera divisible par le carré de ce commun diviseur de x, y et B.

De-là je conclus, 1°. que si B n'est divisible par aucun carré, y et B seront premiers entr'eux.

2°. Que si B est divisible par un seul carré α^2, y pourra être premier à B ou divisible par α, ce qui fait deux cas qu'il faudra examiner séparément; dans le premier cas on résoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B$, en supposant y et B premiers entr'eux; dans le second on aura à résoudre l'équation $x^2 - Ay^2 = B^{\mathrm{I}}$, B^{I} étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, en supposant aussi y et B^{I} premiers entr'eux; mais il faudra ensuite multiplier par α les valeurs qu'on aura trouvées pour y et x, pour avoir les valeurs convenables à l'équation proposée.

3°. Que si B est divisible par deux différens carrés, α^2 et β^2, on aura trois cas à considérer; dans le premier on résoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B$, en regardant y et B comme premiers entr'eux; dans le second on résoudra de même l'équation $x^2 - Ay^2 = B^{\mathrm{I}}$, B^{I} étant $= \frac{B}{\alpha^2}$, dans l'hypothese de y et B^{I} premiers entr'eux, et on multipliera ensuite les valeurs de x et y par α; dans le troisieme on résoudra l'équation $x^2 - Ay^2 = B^{\mathrm{II}}$, B^{II} étant $= \frac{B}{\beta^2}$, dans l'hypothese de y et B^{II} premiers entr'eux, et on multipliera ensuite les valeurs de x et de y par β.

4°. etc. Ainsi on aura autant d'équations différentes à résoudre, qu'il y aura de différens diviseurs carrés de B; mais ces équations seront toutes de la même forme

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

et y sera aussi toujours premier à B.

65. Considérons donc en général l'équation

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

où y est premier à B; et comme x et y doivent être des nombres entiers, il faudra que $x^2 - Ay^2$ soit divisible par B.

On fera donc, suivant la méthode du § IV, art. 48, $x = ny - Bz$, et l'on aura l'équation

$$(n^2 - A)y^2 - 2nByz + B^2z^2 = B,$$

par laquelle on voit que le terme $(n^2 - A)y^2$ doit être divisible par B, puisque tous les autres le sont d'eux-mêmes; donc, comme y est premier à B, (*hyp.*), il faudra que $n^2 - A$ soit divisible par B; de sorte qu'en faisant $\frac{n^2 - A}{B} = C$, on aura, après avoir divisé par B,

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1;$$

or cette équation est plus simple que la proposée, en ce que le second membre est égal à l'unité.

On cherchera donc les valeurs de n qui peuvent rendre $n^2 - A$ divisible par B; pour cela il suffira, (art. 47), d'essayer pour n tous les nombres entiers positifs ou négatifs non $> \frac{B}{2}$; et si parmi ceux-ci on n'en trouve aucun qui satisfasse, on en conclura d'abord qu'il est impossible que $n^2 - A$ puisse être divisible par B, et qu'ainsi l'équation proposée n'est pas résoluble en nombres entiers.

Mais si on trouve de cette maniere un ou plusieurs nombres satisfaisans, on les prendra l'un après l'autre pour n, ce qui donnera autant de différentes équations qu'il faudra traiter séparément, et dont chacune pourra fournir une ou plusieurs solutions de la question proposée.

Quant aux valeurs de n qui surpasseroient celle de $\frac{B}{2}$, on en pourra faire abstraction, parce qu'elles ne donneroient point d'équations différentes de celles qui résulteront des valeurs de n qui ne sont pas $> \frac{B}{2}$, comme nous l'avons déjà montré dans l'art. 52.

Au reste, comme la condition par laquelle on doit déterminer n est que $n^2 - A$ soit divisible par B, il est clair que chaque valeur de n pourra être également positive ou négative; de sorte qu'il suffira d'essayer successivement pour n tous les nombres naturels qui ne sont pas plus grands que $\frac{B}{2}$, et de prendre ensuite les valeurs satisfaisantes de n tant en *plus* qu'en *moins*.

Nous avons donné ailleurs des regles pour faciliter la recherche des valeurs de n qui peuvent avoir la propriété requise, et même pour trouver ces valeurs *à priori* dans un grand nombre de cas. Voyez les Mémoires de Berlin pour l'année 1767, pages 194 et 274.[1])

Résolution de l'équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ en nombres entiers

On peut résoudre cette équation par deux méthodes différentes que nous allons expliquer.

PREMIERE MÉTHODE

66. Comme les quantités C, n, B sont supposées des nombres entiers, de même que les indéterminées y et z, il est visible que la quantité

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

sera toujours nécessairement égale à des nombres entiers; par conséquent l'unité sera la plus petite valeur qu'elle puisse recevoir, à moins qu'elle ne puisse devenir nulle, ce qui ne peut arriver que lorsque cette quantité peut se décomposer en deux facteurs rationnels; comme ce cas n'a aucune difficulté, nous en ferons d'abord abstraction, et la question se réduira à trouver les valeurs de y et z, qui rendront la quantité dont il s'agit la plus petite qu'il est possible; si le *minimum* est égal à l'unité, on aura la résolution de l'équation proposée, sinon on sera assuré qu'elle n'admet aucune solution en nombres entiers. Ainsi le probleme présent rentre dans le probleme III du § II, et est susceptible d'une solution semblable. Or, comme l'on a ici

$$(2n)^2 - 4BC = 4A,$$

(art. 65), il faudra distinguer deux cas, suivant que A sera positif ou négatif.

Premier Cas lorsque $n^2 - BC = A < 0$

67. Suivant la méthode de l'art. 32 il faudra réduire en fraction continue la fraction $\frac{n}{C}$, prise positivement; c'est ce qu'on exécutera par la regle de l'art. 4; ensuite on formera par les formules de l'art. 10 la série des fractions convergentes vers $\frac{n}{C}$, et il n'y aura plus qu'à essayer successivement les numérateurs de ces fractions pour le nombre y, et les dénominateurs correspon-

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377 et 655. H. W.

dans pour le nombre z; si la proposée est résoluble en nombres entiers, on trouvera de cette maniere les valeurs satisfaisantes de y et z; et réciproquement on sera assuré que la proposée n'admet aucune solution en nombres entiers, si parmi les nombres qu'on aura essayés il ne s'en trouve point de satisfaisans.

Second Cas lorsque $n^2 - BC = A > 0$

68. On fera usage ici de la méthode de l'art. 33 et suiv.; ainsi, à cause de $E = 4A$, on considérera d'abord la quantité, (art. 39),

$$a = \frac{n \pm \sqrt{A}}{C},$$

dans laquelle il faudra déterminer les signes tant de la valeur de n, que nous avons vu pouvoir être également positive et négative, que de $\sqrt{A}$, en sorte qu'elle devienne positive; ensuite on fera le calcul suivant:

$$\begin{array}{lll}
Q^0 = -n, & P^0 = C, & \mu < \dfrac{-Q^0 \pm \sqrt{A}}{P^0} \\
Q^{\text{I}} = \mu P^0 + Q^0, & P^{\text{I}} = \dfrac{Q^{\text{I}2} - A}{P^0}, & \mu^{\text{I}} < \dfrac{-Q^{\text{I}} \mp \sqrt{A}}{P^{\text{I}}} \\
Q^{\text{II}} = \mu^{\text{I}} P^{\text{I}} + Q^{\text{I}}, & P^{\text{II}} = \dfrac{Q^{\text{II}2} - A}{P^{\text{I}}}, & \mu^{\text{II}} < \dfrac{-Q^{\text{II}} \pm \sqrt{A}}{P^{\text{II}}} \\
Q^{\text{III}} = \mu^{\text{II}} P^{\text{II}} + Q^{\text{II}}, & P^{\text{III}} = \dfrac{Q^{\text{III}2} - A}{P^{\text{II}}}, & \mu^{\text{III}} < \dfrac{-Q^{\text{III}} \mp \sqrt{A}}{P^{\text{III}}} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

et on continuera seulement ces séries jusqu'à ce que deux termes correspondans de la premiere et de la seconde série reparoissent ensemble; alors, si parmi les termes de la seconde série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. il s'en trouve un égal à l'unité positive, ce terme donnera une solution de l'équation proposée, et les valeurs de y et z seront des termes correspondans des deux séries p^0, p^{I}, p^{II}, etc. et q^0, q^{I}, q^{II}, etc. calculées par les formules de l'art. 25; sinon on en conclura sur le champ que la proposée n'est pas résoluble en nombres entiers. (Voyez l'exemple de l'art. 40.)

Troisieme Cas lorsque $A =$ *à un carré*

69. Dans ce cas le nombre $\sqrt{A}$ deviendra rationnel, et la quantité

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

pourra se décomposer en deux facteurs rationnels. En effet cette quantité n'est autre chose que celle-ci,

$$\frac{(Cy-nz)^2-Az^2}{C}$$

laquelle, en supposant $A=a^2$, peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{(Cy\pm(n+a)z)(Cy\pm(n-a)z)}{C}.$$

Or, comme $n^2-a^2=BC=(n+a)(n-a)$, il faudra que le produit de $n+a$ par $n-a$ soit divisible par C, et par conséquent que l'un de ces deux nombres $n+a$ et $n-a$ soit divisible par un des facteurs de C, et l'autre par le facteur réciproque; supposons donc $C=bc$ et que $n+a=fb$, et $n-a=gc$, f et g étant des nombres entiers, et la quantité précédente deviendra le produit de ces deux facteurs linéaires, $cy\pm fz$ et $by\pm gz$; donc, puisque ces deux facteurs sont égaux à des nombres entiers, il est clair que leur produit ne sauroit être $=1$, comme l'équation proposée le demande, à moins que chacun d'eux ne soit en particulieur $=\pm 1$; on fera donc

$$cy\pm fz=\pm 1 \quad \text{et} \quad by\pm gz=\pm 1,$$

et on déterminera par-là les nombres y et z; si ces nombres se trouvent entiers, on aura la solution de l'équation proposée, sinon elle sera insoluble au moins en nombres entiers.

SECONDE MÉTHODE

70. Qu'on pratique sur la formule

$$Cy^2-2nyz+Bz^2$$

des transformations semblables à celles dont nous avons fait usage plus haut, (art. 54), et je dis qu'on pourra toujours parvenir à une transformée, telle que

$$L\xi^2-2M\xi\psi+N\psi^2,$$

les nombres L, M, N étant des nombres entiers dépendans des nombres donnés C, B, n, en sorte que l'on ait

$$M^2-LN=n^2-CB=A,$$

et que de plus $2M$ ne soit pas plus grand, (abstraction faite des signes), que le nombre L, ni que le nombre N, les nombres ξ et ψ seront aussi des nombres entiers, mais dépendans des nombres indéterminés y et z.

En effet soit, par exemple, C moindre que B, et qu'on mette la formule dont il s'agit sous cette forme

$$B^{\mathrm{I}}y^2 - 2nyy^{\mathrm{I}} + By^{\mathrm{I}2},$$

en faisant $C = B^{\mathrm{I}}$ et $z = y^{\mathrm{I}}$; si $2n$ n'est pas plus grand que B^{I}, il est clair que cette formule aura déjà d'elle-même les conditions requises; mais si $2n$ est plus grand que B^{I}, alors on supposera $y = my^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}}$, et substituant on aura la transformée

$$B^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{I}2} - 2n^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}} + B^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}2},$$

où

$$n^{\mathrm{I}} = n - mB^{\mathrm{I}},$$

$$B^{\mathrm{II}} = m^2B^{\mathrm{I}} - 2mn + B = \frac{n^{\mathrm{I}2} - A}{B^{\mathrm{I}}}.$$

Or, comme le nombre m est indéterminé, on pourra, en le supposant entier, le prendre tel que le nombre $n - mB^{\mathrm{I}}$ ne soit pas plus grand que $\frac{1}{2}B^{\mathrm{I}}$; alors $2n^{\mathrm{I}}$ ne surpassera pas B^{I}. Ainsi, si $2n^{\mathrm{I}}$ ne surpasse pas non plus B^{II}, la transformée précédente sera déjà dans le cas qu'on a en vue; mais si $2n^{\mathrm{I}}$ est plus grand que B^{II}, on continuera alors à supposer $y^{\mathrm{I}} = m^{\mathrm{I}}y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{III}}$, ce qui donnera la nouvelle transformée

$$B^{\mathrm{III}}y^{\mathrm{II}2} - 2n^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{III}} + B^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{III}2},$$

où

$$n^{\mathrm{II}} = n^{\mathrm{I}} - m^{\mathrm{I}}B^{\mathrm{II}},$$

$$B^{\mathrm{III}} = m^{\mathrm{I}2}B^{\mathrm{II}} - 2m^{\mathrm{I}}n^{\mathrm{I}} + B^{\mathrm{I}} = \frac{n^{\mathrm{II}2} - A}{B^{\mathrm{II}}}.$$

On déterminera le nombre entier m^{I}, en sorte que $n^{\mathrm{I}} - m^{\mathrm{I}}B^{\mathrm{II}}$ ne soit pas plus grand que $\frac{B^{\mathrm{II}}}{2}$, moyennant quoi $2n^{\mathrm{II}}$ ne surpassera pas B^{II}; de sorte que l'on aura la transformée cherchée, si $2n^{\mathrm{II}}$ ne surpasse pas non plus B^{III}, mais si $2n^{\mathrm{II}}$ surpasse B^{III}, on supposera de nouveau $y^{\mathrm{II}} = m^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{III}} + y^{\mathrm{IV}}$, etc. etc.

Or il est visible que ces opérations ne peuvent pas aller à l'infini; car puisque $2n$ est plus grand que B^{I} et que $2n^{\mathrm{I}}$ ne l'est pas, il est clair que n^{I} sera moindre que n; de même $2n^{\mathrm{I}}$ est plus grand que B^{II}, et $2n^{\mathrm{II}}$ ne l'est pas; donc n^{II} sera moindre que n^{I}, et ainsi de suite; de sorte que les nombres n, n^{I}, n^{II}, etc. formeront une suite décroissante de nombres entiers, laquelle ne pourra par conséquent pas aller à l'infini. On parviendra donc nécessairement à une formule où le coefficient du terme moyen ne sera pas plus grand que ceux des deux termes extrêmes, et qui aura d'ailleurs les autres propriétés que nous avons énoncées ci-dessus; ce qui est évident par la nature même des transformations pratiquées.

Pour faciliter la transformation de la formule

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2$$

en celle-ci,

$$L\xi^2 - 2M\xi\psi + N\psi^2,$$

je désigne par D le plus grand des deux coefficiens extrêmes C et B, et par D^{I} l'autre coefficient; et, *vice versâ*, je désigne par θ la variable dont le carré se trouvera multiplié par D^{I} et par θ^{I} l'autre variable; en sorte que la formule proposée prenne cette forme

$$D^{\mathrm{I}}\theta^2 - 2n\theta\theta^{\mathrm{I}} + D\theta^{\mathrm{I}2},$$

où D^{I} soit moindre que D; ensuite je n'aurai qu'à faire le calcul suivant:

$$\begin{array}{llll}
m = \dfrac{n}{D^{\mathrm{I}}}, & n^{\mathrm{I}} = n - mD^{\mathrm{I}}, & D^{\mathrm{II}} = \dfrac{n^{\mathrm{I}2} - A}{D^{\mathrm{I}}}, & \theta = m\,\theta^{\mathrm{I}} + \theta^{\mathrm{II}} \\
m^{\mathrm{I}} = \dfrac{n^{\mathrm{I}}}{D^{\mathrm{II}}}, & n^{\mathrm{II}} = n^{\mathrm{I}} - m^{\mathrm{I}}D^{\mathrm{II}}, & D^{\mathrm{III}} = \dfrac{n^{\mathrm{II}2} - A}{D^{\mathrm{II}}}, & \theta^{\mathrm{I}} = m^{\mathrm{I}}\theta^{\mathrm{II}} + \theta^{\mathrm{III}} \\
m^{\mathrm{II}} = \dfrac{n^{\mathrm{II}}}{D^{\mathrm{III}}}, & n^{\mathrm{III}} = n^{\mathrm{II}} - m^{\mathrm{II}}D^{\mathrm{III}}, & D^{\mathrm{IV}} = \dfrac{n^{\mathrm{III}2} - A}{D^{\mathrm{III}}}, & \theta^{\mathrm{II}} = m^{\mathrm{II}}\theta^{\mathrm{III}} + \theta^{\mathrm{IV}}
\end{array}$$

etc. etc. etc.

où il faut bien remarquer que le signe $=$, qui est mis après les lettres m, m^{I}, m^{II}, etc. n'indique pas une égalité parfaite, mais seulement une égalité aussi approchée qu'il est possible, en tant qu'on n'entend par m, m^{I}, m^{II}, etc. que des nombres entiers. Je n'ai employé ce signe $=$ que faute d'un autre signe convenable.

Ces opérations doivent être continuées jusqu'à ce que dans la série n, n^{I}, n^{II}, etc. on trouve un terme comme n^{ϱ}, qui, (abstraction faite du signe), ne surpasse pas la moitié du terme correspondant D^{ϱ} de la série D^{I}, D^{II}, D^{III}, etc. non plus que la moitié du terme suivant $D^{\varrho+1}$. Alors on pourra faire $D^{\varrho} = L$, $n^{\varrho} = N$, $D^{\varrho+1} = M$, et $\theta^{\varrho} = \psi$, $\theta^{\varrho+1} = \xi$, ou bien $D^{\varrho} = M$, $D^{\varrho+1} = L$ et $\theta^{\varrho} = \xi$, $\theta^{\varrho+1} = \psi$. Nous supposerons toujours dans la suite qu'on ait pris pour M le plus petit des deux nombres D^{ϱ}, $D^{\varrho+1}$.

71. L'équation $Cy^2 - 2nyz + Dz^2 = 1$ sera donc réduite à celle-ci,

$$L\xi^2 - 2N\xi\psi + M\psi^2 = 1,$$

où $N^2 - LM = A$, et où $2N$ n'est ni $> L$ ni $> M$, (abstraction faite des signes). Or, M étant le plus petit des deux coefficiens L et M, qu'on multiplie toute l'équation par ce coefficient M, et faisant

$$v = M\psi - N\xi,$$

il est clair qu'elle se changera en celle-ci,

$$v^2 - A\xi^2 = M,$$

dans laquelle il faudra maintenant distinguer les deux cas de A positif et de A négatif.

Soit 1°. A négatif et $= -a$, a étant un nombre positif, l'équation sera donc

$$v^2 + a\xi^2 = M.$$

Or, comme $N^2 - LM = A$, on aura $a = LM - N^2$; d'où l'on voit d'abord que les nombres L et M doivent être de mêmes signes; d'ailleurs $2N$ ne doit être ni $> L$ ni $> M$; donc N^2 ne sera pas $> \frac{LM}{4}$; donc $a =$ ou $> \frac{3}{4}LM$; et puisque M est supposé moindre que L, ou au moins pas plus grand que L, on aura à plus forte raison $a =$ ou $> \frac{3}{4}M^2$; donc $M =$ ou $< \sqrt{\frac{4a}{3}}$; donc $M < \frac{4}{3}\sqrt{a}$.

On voit par-là que l'équation $v^2 + a\xi^2 = M$ ne sauroit subsister dans l'hypothese que v et ξ soient des nombres entiers, à moins que l'on ne fasse $\xi = 0$ et $v^2 = M$, ce qui demande que M soit un nombre carré.

Supposons donc $M = \mu^2$, et l'on aura $\xi = 0$, $v = \pm\mu$; donc par l'équation $v = M\psi - N\xi$, on aura $\mu^2\psi = \pm\mu$, et par conséquent $\psi = \pm\frac{1}{\mu}$; de sorte que ψ ne sauroit être un nombre entier, comme il le doit, (*hyp.*), à moins que μ ne soit égal à l'unité, soit $= \pm 1$, et par conséquent $M = 1$.

De-là je tire donc cette conséquence, que l'équation proposée ne sauroit être résoluble en nombres entiers, à moins que M ne se trouve égal à l'unité positive. Si cette condition a lieu, alors on fera $\xi = 0$, $\psi = \pm 1$, et on remontera de ces valeurs à celles de y et z.

Cette méthode revient pour le fond au même que celle de l'art. 67, mais elle a sur celle-là l'avantage de n'exiger aucun tâtonnement.

2°. Soit maintenant A un nombre positif, on aura $A = N^2 - LM$; or, comme N^2 ne peut pas être plus grand que $\frac{LM}{4}$, il est clair que l'équation ne pourra subsister, à moins que $-LM$ ne soit un nombre positif, c'est-à-dire que L et M ne soient de signes différens. Ainsi A sera nécessairement $< -LM$, ou tout au plus $= -LM$, si $N = 0$; de sorte qu'on aura $-LM =$ ou $< A$, et par conséquent $M^2 =$ ou $< A$, ou $M =$ ou $< \sqrt{A}$.

Le cas de $M = \sqrt{A}$ ne peut avoir lieu que lorsque A est un carré; par conséquent ce cas est très-facile à résoudre par la méthode donnée plus haut, (art. 69).

Reste donc le cas où A n'est pas carré, et dans lequel on aura nécessairement $M < \sqrt{A}$, (abstraction faite du signe de M); alors l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$ sera dans le cas du théoreme de l'art. 38, et se résoudra par conséquent par la méthode que nous y avons indiquée.

Ainsi il n'y aura qu'à faire le calcul suivant,

$$\begin{array}{lll}
Q^0 = 0, & P^0 = 1, & \mu < \sqrt{A} \\
Q^{\mathrm{I}} = \mu, & P^{\mathrm{I}} = Q^{\mathrm{I}2} - A, & \mu^{\mathrm{I}} < \dfrac{-Q^{\mathrm{I}} - \sqrt{A}}{P^{\mathrm{I}}} \\
Q^{\mathrm{II}} = \mu^{\mathrm{I}} P^{\mathrm{I}} + Q^{\mathrm{I}}, & P^{\mathrm{II}} = \dfrac{Q^{\mathrm{II}2} - A}{P^{\mathrm{I}}}, & \mu^{\mathrm{II}} < \dfrac{-Q^{\mathrm{II}} + \sqrt{A}}{P^{\mathrm{II}}} \\
Q^{\mathrm{III}} = \mu^{\mathrm{II}} P^{\mathrm{II}} + Q^{\mathrm{II}}, & P^{\mathrm{III}} = \dfrac{Q^{\mathrm{III}2} - A}{P^{\mathrm{II}}}, & \mu^{\mathrm{III}} < \dfrac{-Q^{\mathrm{III}} - \sqrt{A}}{P^{\mathrm{III}}} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

qu'on continuera jusqu'à ce que deux termes correspondans de la premiere et de la seconde série reparoissent ensemble, ou bien jusqu'à ce que dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. il se trouve un terme égal à l'unité positive, c'est-à-dire $= P^0$; car alors tous les termes suivans reviendront dans le même ordre dans chacune des trois séries, (art. 37). Si dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. il se trouve un terme égal à M, on aura la résolution de l'équation proposée; car il n'y aura qu'à prendre pour v et ξ les termes correspondans des séries p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc. q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. calculées d'après les formules de l'art. 25; et même on pourra trouver une infinité de valeurs satisfaisantes de v et ξ, en continuant à l'infini les mêmes séries.

Or, dès qu'on connoîtra deux valeurs de v et ξ, on aura par l'équation $v = M\psi - N\xi$ celle de ψ, laquelle sera aussi toujours égale à un nombre entier; ensuite on pourra remonter de ces valeurs de ξ et ψ, c'est-à-dire de $\theta^{\varrho+1}$ et θ^{ϱ}, à celles de θ et θ^{I}, ou bien de y et z, (art. 70).

Mais si dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. il n'y a aucun terme qui soit $= M$, on en conclura hardiment que l'équation proposée n'admet aucune solution en nombres entiers.

Il est bon de remarquer que comme la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. ainsi que les deux autres, Q^0, Q^{I}, Q^{II}, etc. et μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. ne dépendent que du nombre A, le calcul une fois fait pour une valeur donnée de A servira pour toutes les équations où A, c'est-à-dire $n^2 - CB$, aura la même valeur; et c'est en quoi la méthode précédente est préférable à celle de l'art. 68, qui exige un nouveau calcul pour chaque équation.

Au reste, tant que A ne passera pas 100, on pourra faire usage de la table que nous avons donnée à l'art. 41, laquelle contient pour chaque radical $\sqrt{A}$ les valeurs des termes des deux séries P^0, $-P^{\mathrm{I}}$, P^{II}, $-P^{\mathrm{III}}$, etc. et μ, μ^{I}, μ^{II}, μ^{III}, etc. continuées jusqu'à ce que l'un des termes P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. devienne $= 1$, après quoi tous les termes suivans de l'une et de l'autre série reviennent dans le même ordre. De sorte qu'on pourra juger sur le champ, par le moyen de cette table, de la résolubilité de l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$.

De la maniere de trouver toutes les solutions possibles de l'Équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$ *lorsqu'on n'en connoît qu'une seule*

72. Quoique par les méthodes que nous venons de donner on puisse trouver successivement toutes les solutions de cette équation, lorsqu'elle est résoluble en nombres entiers, cependant on peut parvenir à cet objet d'une maniere encore plus simple que voici:

Qu'on nomme p et q les valeurs trouvées de y et z, en sorte que l'on ait

$$Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1,$$

et qu'on prenne deux autres nombres entiers r et s, tels que $ps - qr = 1$, (ce qui est toujours possible, à cause que p et q sont nécessairement premiers entr'eux), qu'on suppose ensuite

$$y = pt + ru, \quad \text{et} \quad z = qt + su,$$

t et u étant deux nouvelles indéterminées; substituant ces expressions dans l'équation

$$Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1,$$

et faisant pour abréger

$$P = Cp^2 - 2npq + Bq^2,$$
$$Q = Cpr - n(ps + qr) + Bqs,$$
$$R = Cr^2 - 2nrs + Bs^2,$$

on aura cette transformée,

$$Pt^2 + 2Qtu + Ru^2 = 1.$$

Or on a, (*hyp.*), $P = 1$; de plus, si on nomme ϱ et σ deux valeurs de r et s qui satisfassent à l'équation $ps - qr = 1$, on aura en général, (art. 42),

$$r = \varrho + mp, \quad s = \sigma + mq,$$

m étant un nombre quelconque entier; donc mettant ces valeurs dans l'expression de Q, elle deviendra

$$Q = Cp\varrho - n(p\sigma + q\varrho) + Bq\sigma + mP;$$

de sorte que, comme $P = 1$, on pourra rendre $Q = 0$, en prenant

$$m = - Cp\varrho + n(p\sigma + q\varrho) - Bq\sigma.$$

Maintenant je remarque que la valeur de $Q^2 - PR$ se réduit, (après les substitutions et les réductions), à celle-ci, $(n^2 - CB)(ps - qr)^2$; de sorte que, comme $ps - qr = 1$, on aura

$$Q^2 - PR = n^2 - CB = A;$$

donc faisant $P = 1$ et $Q = 0$, il viendra $-R = A$, savoir $R = -A$; ainsi l'équation transformée ci-dessus se changera en celle-ci,

$$t^2 - Au^2 = 1;$$

or, comme y, z, p, q, r et s sont par l'hypothese des nombres entiers, il est facile de voir que t et u seront aussi des nombres entiers; car, en tirant leurs valeurs des équations $y = pt + ru$ et $z = qt + su$, on a

$$t = \frac{sy - rz}{ps - qr}, \quad \text{et} \quad u = \frac{qy - pz}{qr - ps},$$

c'est-à-dire, à cause de $ps - qr = 1$,

$$t = sy - rz, \quad u = pz - qy.$$

Il n'y aura donc qu'à résoudre en nombres entiers l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1,$$

et chaque valeur de t et de u donnera de nouvelles valeurs de y et z.

En effet, substituant dans les valeurs générales de r et s la valeur du nombre m trouvée ci-dessus, on aura

$$r = \varrho(1 - Cp^2) - Bpq\sigma + np(p\sigma + q\varrho),$$
$$s = \sigma(1 - Bq^2) - Cpq\varrho + nq(p\sigma + q\varrho),$$

ou bien, à cause de $Cp^2 - 2npq + Bq^2 = 1$,

$$r = (Bq - np)(q\varrho - p\sigma) = -Bq + np,$$
$$s = (Cp - nq)(p\sigma - q\varrho) = Cp - nq.$$

Donc mettant ces valeurs de r et s dans les expressions ci-dessus de y et z, on aura en général

$$y = pt - (Bq - np)u,$$
$$z = qt + (Cp - nq)u.$$

73. Tout se réduit donc à résoudre l'équation

$$t^2 - Au^2 = 1.$$

Or, 1°. si A est un nombre négatif, il est visible que cette équation ne sauroit subsister en nombres entiers, qu'en faisant $u = 0$ et $t = 1$, ce qui donneroit $y = p$ et $z = q$. D'où l'on peut conclure que dans le cas où A est un nombre négatif, l'équation proposée, $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$, ne peut jamais admettre qu'une seule solution en nombres entiers.

Il en seroit de même, si A étoit un nombre positif carré; car faisant $A = a^2$, on auroit $(t + au)(t - au) = 1$; donc $t + au = \pm 1$, et $t - au = \pm 1$; donc $2au = 0$; donc $u = 0$, et par conséquent $t = \pm 1$.

2°. Mais si A est un nombre positif non carré, alors l'équation $t^2 - Au^2 = 1$ est toujours susceptible d'une infinité de solutions en nombres entiers, (art. 37), qu'on peut trouver toutes par les formules données ci-dessus, (art. 71, n°. 2); mais il suffira de trouver les plus petites valeurs de t et u, et pour cela, dès que l'on sera parvenu, dans la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. à un terme égal à l'unité, il n'y aura qu'à calculer par les formules de l'art. 25 les termes correspondans des deux séries p^{I}, p^{II}, p^{III}, etc. et q^{I}, q^{II}, q^{III}, etc. ce seront les valeurs cherchées de t et u. D'où l'on voit que le même calcul qu'on aura fait pour la résolution de l'équation $v^2 - A\xi^2 = M$, servira aussi pour celle de l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Au reste, tant que A ne passe pas 100, on a les plus petites valeurs de t et u toutes calculées dans la table qui est à la fin du chapitre 7 du traité précédent et dans laquelle les nombres a, m, n sont les mêmes que ceux que nous appelons ici A, t et u.

74. Désignons par t^{I}, u^{I} les plus petites valeurs de t, u dans l'équation $t^2 - Au^2 = 1$; et de même que ces valeurs peuvent servir à trouver de nouvelles valeurs de y et z dans l'équation $Cy^2 - 2nyz + Bz^2 = 1$, de même aussi elles pourront servir à trouver de nouvelles valeurs de t et u dans l'équation $t^2 - Au^2 = 1$, qui n'est qu'un cas particulier de celle-là. Pour cela il n'y aura qu'à supposer $C = 1$ et $n = 0$, ce qui donne $-B = A$, et prendre ensuite t, u à la place de y, z, et t^{I}, u^{I} à la place de p, q. Faisant donc ces substitutions dans les expressions générales de y et z de l'art. 72, et mettant de plus T, V à la place de t, u, on aura en général

$$t = Tt^{\text{I}} + AVu^{\text{I}},$$
$$u = Tu^{\text{I}} + Vt^{\text{I}},$$

et pour la détermination de T et V l'équation $T^2 - AV^2 = 1$, qui est semblable à la proposée.

Ainsi on pourra supposer $T = t^{\text{I}}$, et $V = u^{\text{I}}$, ce qui donnera

$$t = t^{\text{I}2} + Au^{\text{I}2}, \quad u = t^{\text{I}}u^{\text{I}} + t^{\text{I}}u^{\text{I}}.$$

Nommant donc t^{II}, u^{II} les secondes valeurs de t et u, on aura

$$t^{\text{II}} = t^{\text{I}2} + Au^{\text{I}2}, \quad u^{\text{II}} = 2t^{\text{I}}u^{\text{I}}.$$

Maintenant il est clair qu'on peut prendre ces nouvelles valeurs t^{II}, u^{II} à la place des premieres t^{I}, u^{I}; ainsi l'on aura

$$t = Tt^{\text{II}} + AVu^{\text{II}},$$
$$u = Tu^{\text{II}} + Vt^{\text{II}},$$

où l'on peut supposer de nouveau $T = t^{\mathrm{I}}$, $V = u^{\mathrm{I}}$, ce qui donnera

$$t = t^{\mathrm{I}}t^{\mathrm{II}} + Au^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{II}}, \quad u = t^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{II}} + u^{\mathrm{I}}t^{\mathrm{II}}.$$

Ainsi on aura de nouvelles valeurs de t et u, lesquelles seront

$$\begin{aligned} t^{\mathrm{III}} &= t^{\mathrm{I}}t^{\mathrm{II}} + Au^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{II}} = t^{\mathrm{I}}(t^{\mathrm{I}2} + 3Au^{\mathrm{I}2}), \\ u^{\mathrm{III}} &= t^{\mathrm{I}}u^{\mathrm{II}} + u^{\mathrm{I}}t^{\mathrm{II}} \quad = u^{\mathrm{I}}(3t^{\mathrm{I}2} + Au^{\mathrm{I}2}), \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

75. La méthode précédente ne fait trouver que successivement les valeurs t^{II}, t^{III}, etc. u^{II}, u^{III}, etc. voyons maintenant comment on peut généraliser cette recherche. On a d'abord

$$t = Tt^{\mathrm{I}} + AVu^{\mathrm{I}}, \quad u = Tu^{\mathrm{I}} + Vt^{\mathrm{I}};$$

d'où je tire cette combinaison,

$$t \pm u\sqrt{A} = (t^{\mathrm{I}} \pm u^{\mathrm{I}}\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A});$$

donc supposant $T = t^{\mathrm{I}}$ et $V = u^{\mathrm{I}}$, on aura

$$t^{\mathrm{II}} \pm u^{\mathrm{II}}\sqrt{A} = (t^{\mathrm{I}} \pm u^{\mathrm{I}}\sqrt{A})^2.$$

Qu'on mette à présent ces valeurs de t^{II} et u^{II} à la place de celles de t^{I} et u^{I}, l'on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (t^{\mathrm{I}} \pm u^{\mathrm{I}}\sqrt{A})^2(T \pm V\sqrt{A}),$$

où faisant de nouveau $T = t^{\mathrm{I}}$ et $V = u^{\mathrm{I}}$, et nommant t^{III}, u^{III} les valeurs résultantes de t et u, il viendra

$$t^{\mathrm{III}} \pm u^{\mathrm{III}}\sqrt{A} = (t^{\mathrm{I}} \pm u^{\mathrm{I}}\sqrt{A})^3.$$

On trouvera de même

$$t^{\mathrm{IV}} \pm u^{\mathrm{IV}}\sqrt{A} = (t^{\mathrm{I}} \pm u^{\mathrm{I}}\sqrt{A})^4,$$

et ainsi de suite.

Donc, si pour plus de simplicité on nomme maintenant T et V les premieres et plus petites valeurs de t, u, que nous avons nommées ci-dessus t^{I}, u^{I}, on aura en général

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m,$$

m étant un nombre quelconque entier positif; d'où l'on tire à cause de l'ambiguité des signes

$$t = \frac{(T+V\sqrt{A})^m + (T-V\sqrt{A})^m}{2}$$

$$u = \frac{(T+V\sqrt{A})^m - (T-V\sqrt{A})^m}{2\sqrt{A}}.$$

Quoique ces expressions paroissent sous une forme irrationnelle, cependant il est aisé de voir qu'elles deviendront rationnelles, en développant les puissances de $T \pm V\sqrt{A}$; car on a, comme l'on sait,

$$\left(T \pm V\sqrt{A}\right)^m = T^m \pm mT^{m-1}V\sqrt{A} + \frac{m(m-1)}{2}T^{m-2}V^2A$$
$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}T^{m-3}V^3A\sqrt{A} +, \text{ etc.}$$

Donc

$$t = T^m + \frac{m(m-1)}{2}AT^{m-2}V^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2\cdot 3\cdot 4}A^2T^{m-4}V^4 +, \text{ etc.}$$

$$u = mT^{m-1}V + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}AT^{m-3}V^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}A^2T^{m-5}V^5 +, \text{ etc.}$$

où l'on pourra prendre pour m des nombres quelconques entiers positifs.

Il est clair qu'en faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4,$ etc. on aura des valeurs de t et u, qui iront en augmentant.

Or je vais prouver que l'on aura de cette maniere toutes les valeurs possibles de t et u, pourvu que T et V en soient les plus petites. Pour cela il suffit de prouver qu'entre les valeurs de t et u qui répondent à un nombre quelconque m, et celles qui répondroient au nombre suivant $m+1$, il est impossible qu'il se trouve des valeurs intermédiaires qui puissent satisfaire à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Prenons, par exemple, les valeurs t^{III}, u^{III}, qui résultent de la supposition de $m = 3$, et les valeurs t^{IV}, u^{IV}, qui résultent de la supposition $m = 4$, et soient, s'il est possible, d'autres valeurs intermédiaires θ et v, qui satisfassent aussi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$.

Puisque l'on a $t^{\text{III}2} - Au^{\text{III}2} = 1$, $t^{\text{IV}2} - Au^{\text{IV}2} = 1$ et $\theta^2 - Av^2 = 1$, on aura

$$\theta^2 - t^{\text{III}2} = A(v^2 - u^{\text{III}2}), \quad \text{et} \quad t^{\text{IV}2} - \theta^2 = A(u^{\text{IV}2} - v^2),$$

d'où l'on voit que si $\theta > t^{\text{III}}$ et $< t^{\text{IV}}$, on aura aussi $v > u^{\text{III}}$ et $< u^{\text{IV}}$. De plus on aura aussi ces autres valeurs de t et u, savoir

$$t = \theta t^{\text{IV}} - Avu^{\text{IV}}, \quad u = \theta u^{\text{IV}} - vt^{\text{IV}},$$

qui satisferont à la même équation $t^2 - Au^2 = 1$; car en les y substituant, on auroit

$$(\theta t^{\text{IV}} - Avu^{\text{IV}})^2 - A(vt^{\text{IV}} - \theta u^{\text{IV}})^2 = (\theta^2 - Av^2)(t^{\text{IV}2} - Au^{\text{IV}2}) = 1,$$

équation identique, à cause de $\theta^2 - Av^2 = 1$, et $t^{\text{IV}2} - Au^{\text{IV}2} = 1$, (*hyp.*). Or ces deux dernieres équations donnent

$$\theta - v\sqrt{A} = \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}, \quad \text{et} \quad t^{\text{IV}} - u^{\text{IV}}\sqrt{A} = \frac{1}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}};$$

donc mettant, dans l'expression de $u = \theta u^{\text{IV}} - vt^{\text{IV}}$, à la place de θ, $v\sqrt{A} + \frac{1}{\theta + v\sqrt{A}}$, et à la place de t^{IV}, $u^{\text{IV}}\sqrt{A} + \frac{1}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}}$, on aura

$$u = \frac{u^{\text{IV}}}{\theta + v\sqrt{A}} - \frac{v}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}};$$

de même, si on considere la quantité $t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}t^{\text{IV}}$, elle pourra aussi, à cause de $t^{\text{III}2} - Au^{\text{III}2} = 1$, se mettre sous la forme

$$\frac{u^{\text{IV}}}{t^{\text{III}} + u^{\text{III}}\sqrt{A}} - \frac{u^{\text{III}}}{t^{\text{IV}} + u^{\text{IV}}\sqrt{A}}.$$

Or, il est facile de voir que la quantité précédente doit être plus petite que celle-ci, à cause de $\theta > t^{\text{III}}$ et $v > u^{\text{III}}$; donc on aura une valeur de u, qui sera moindre que la quantité $t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}t^{\text{IV}}$; mais cette quantité est égale à V; car

$$t^{\text{III}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 + (T - V\sqrt{A})^3}{2}, \qquad u^{\text{III}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^3 - (T - V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}},$$

$$t^{\text{IV}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 + (T - V\sqrt{A})^4}{2}, \qquad u^{\text{IV}} = \frac{(T + V\sqrt{A})^4 - (T - V\sqrt{A})^4}{2\sqrt{A}},$$

d'où

$$t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - t^{\text{IV}}u^{\text{III}} = \frac{(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^4 - (T-V\sqrt{A})^4(T+V\sqrt{A})^3}{2\sqrt{A}};$$

de plus

$$(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^3 = (T^2 - AV^2)^3 = 1,$$

puisque $T^2 - AV^2 = 1$, (*hyp.*); donc

$$(T-V\sqrt{A})^3(T+V\sqrt{A})^4 = T + V\sqrt{A},$$

et

$$(T-V\sqrt{A})^4(T+V\sqrt{A})^3 = T - V\sqrt{A};$$

de sorte que la valeur de $t^{\text{III}}u^{\text{IV}} - u^{\text{III}}t^{\text{IV}}$ se réduira à $\frac{2V\sqrt{A}}{2\sqrt{A}} = V.$

Il s'ensuivroit donc de-là qu'on auroit une valeur de $u < V$, ce qui est contre l'hypothese, puisque V est supposé la plus petite valeur possible de u. Donc il ne sauroit y avoir des valeurs de t et u intermédiaires entre celles-ci, t^{III}, t^{IV} et u^{III}, u^{IV}. Et comme ce raisonnement peut s'appliquer en général à toutes valeurs de t et u qui résulteroient des formules ci-dessus, en y faisant m égal à un nombre entier quelconque, on en peut conclure que ces formules renferment effectivement toutes les valeurs possibles de t et u.

Au reste, il est inutile de remarquer que les valeurs de t et de u peuvent être également positives ou négatives; car cela est visible par l'équation même $t^2 - Au^2 = 1$.

De la maniere de trouver toutes les solutions possibles en nombres entiers des Équations indéterminées du second degré à deux inconnues

76. Les méthodes que nous venons d'exposer suffisent pour la résolution complette des équations de la forme $Ay^2 + B = x^2$; mais il peut arriver qu'on ait à résoudre des équations du second degré d'une forme plus composée; c'est pourquoi nous croyons devoir montrer comment il faudra s'y prendre.

Soit proposée l'équation

$$ar^2 + brs + cs^2 + dr + es + f = 0,$$

où a, b, c, d, e, f soient des nombres entiers donnés, et où r et s soient deux inconnues qui doivent être aussi des nombres entiers.

J'aurai d'abord, par la résolution ordinaire,

$$2ar + bs + d = \sqrt{(bs+d)^2 - 4a(cs^2 + es + f)},$$

d'où l'on voit que la difficulté se réduit à faire en sorte que

$$(bs+d)^2 - 4a(cs^2 + es + f)$$

soit un carré.

Supposons pour plus de simplicité

$$b^2 - 4ac = A,$$
$$bd - 2ae = g,$$
$$d^2 - 4af = h,$$

et il faudra que $As^2 + 2gs + h$ soit un carré; supposons ce carré $= y^2$, en sorte que l'on ait l'équation

$$As^2 + 2gs + h = y^2,$$

et tirant la valeur de s, on aura

$$As + g = \sqrt{(Ay^2 + g^2 - Ah)};$$

de sorte qu'il ne s'agira plus que de rendre carrée la formule $Ay^2 + g^2 - Ah$.

Donc, si on fait encore

$$g^2 - Ah = B,$$

on aura à rendre rationnel le radical

$$\sqrt{(Ay^2 + B)};$$

c'est à quoi on parviendra par les méthodes données.

Soit $\sqrt{(Ay^2 + B)} = x$, en sorte que l'équation à résoudre soit

$$Ay^2 + B = x^2,$$

l'on aura donc $As + g = \pm x$; d'ailleurs on a déjà $2ar + bs + d = \pm y$; ainsi dès qu'on aura trouvé les valeurs de x et y, on aura celles de r et s par les deux équations

$$s = \frac{\pm x - g}{A}, \quad r = \frac{\pm y - d - bs}{2a}.$$

Or, comme r et s doivent être des nombres entiers, il est visible qu'il faudra 1°. que x et y soient des nombres entiers aussi; 2°. que $\pm x - g$ soit divisible par A, et qu'ensuite $\pm y - d - bs$ le soit par $2a$. Ainsi, après avoir trouvé toutes les valeurs possibles de x et y en nombres entiers, il restera encore à trouver parmi ces valeurs celles qui pourront rendre r et s des nombres entiers.

Si A est un nombre négatif ou un nombre positif carré, nous avons vu que le nombre des solutions possibles en nombres entiers est toujours limité; de sorte que dans ces cas il n'y aura qu'à essayer successivement pour x et y les valeurs trouvées, et si l'on n'en rencontre aucune qui donne pour r et s des nombres entiers, on en conclura que l'équation proposée n'admet point de solution de cette espece.

La difficulté ne tombe donc que sur le cas où A est un nombre positif non carré, cas dans lequel on a vu que le nombre des solutions possibles en entiers peut être infini; comme l'on auroit dans ce cas un nombre infini de valeurs à essayer, on ne pourroit jamais bien juger de la résolubilité de l'équation proposée, à moins d'avoir une regle qui réduise le tâtonnement entre certaines limites; c'est ce que nous allons rechercher.

77. Puisqu'on a, (art. 65),

$$x = ny - Bz,$$

et, (art. 72),

$$y = pt - (Bq - np)u, \quad \text{et} \quad z = qt + (Cp - nq)u,$$

il est facile de voir que les expressions générales de r et s seront de cette forme,

$$r = \frac{\alpha t + \beta u + \gamma}{\delta}, \quad s = \frac{\alpha^{\mathrm{I}} t + \beta^{\mathrm{I}} u + \gamma^{\mathrm{I}}}{\delta^{\mathrm{I}}},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha^{\mathrm{I}}, \beta^{\mathrm{I}}, \gamma^{\mathrm{I}}, \delta^{\mathrm{I}}$ étant des nombres entiers connus, et t, u étant donnés par les formules de l'art. 75, dans lesquelles l'exposant m peut être un nombre entier positif quelconque; ainsi la question se réduit à trouver quelle valeur on doit donner à m, pour que les valeurs de r et s soient des nombres entiers.

78. Je remarque d'abord qu'il est toujours possible de trouver une valeur de u qui soit divisible par un nombre quelconque donné Δ; car supposant $u = \Delta\omega$, l'équation $t^2 - Au^2 = 1$ deviendra $t^2 - A\Delta^2\omega^2 = 1$, laquelle est toujours résoluble en nombres entiers; et l'on trouvera les plus petites valeurs de t et ω, en faisant le même calcul qu'auparavant, mais en prenant $A\Delta^2$ à

la place de A; or, comme ces valeurs satisfont aussi à l'équation $t^2 - Au^2 = 1$, elles seront nécessairement renfermées dans les formules de l'art. 75. Ainsi il y aura nécessairement une valeur de m qui rendra l'expression de u divisible par Δ.

Qu'on dénote cette valeur de m par μ, et je dis que si dans les expressions générales de t et u de l'article cité on fait $m = 2\mu$, la valeur de u sera divisible par Δ, et celle de t étant divisée par Δ donnera 1 pour reste.

Car si on désigne par T^{I} et V^{I} les valeurs de t et u, où $m = \mu$, et par T^{II} et V^{II} celles où $m = 2\mu$, on aura, (art. 75),

$$T^{\text{I}} \pm V^{\text{I}}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{\mu}, \quad \text{et} \quad T^{\text{II}} \pm V^{\text{II}}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

donc

$$(T^{\text{I}} \pm V^{\text{I}}\sqrt{A})^2 = T^{\text{II}} \pm V^{\text{II}}\sqrt{A},$$

c'est-à-dire en comparant la partie rationnelle du premier membre avec la rationnelle du second, et l'irrationnelle avec l'irrationnelle,

$$T^{\text{II}} = T^{\text{I}2} + A V^{\text{I}2}, \quad \text{et} \quad V^{\text{II}} = 2T^{\text{I}} V^{\text{I}};$$

donc, puisque V^{I} est divisible par Δ, V^{II} le sera aussi, et T^{II} laissera le même reste que laisseroit $T^{\text{I}2}$; mais on a $T^{\text{I}2} - AV^{\text{I}2} = 1$, (*hyp.*), donc $T^{\text{I}2} - 1$ doit être divisible par Δ et même par Δ^2, puisque $V^{\text{I}2}$ l'est déjà; donc $T^{\text{I}2}$ et par conséquent aussi T^{II} étant divisé par Δ, laissera le reste 1.

Maintenant je dis que les valeurs de t et u qui répondent à un exposant quelconque m, étant divisées par Δ, laisseront les mêmes restes que les valeurs de t et u, qui répondroient à l'exposant $m + 2\mu$. Car désignant ces dernieres par θ et v, on aura

$$t \pm u\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^m, \quad \text{et} \quad \theta \pm v\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{m+2\mu};$$

donc

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

mais nous venons de trouver ci-dessus

$$T^{\text{II}} \pm V^{\text{II}}\sqrt{A} = (T \pm V\sqrt{A})^{2\mu};$$

donc on aura

$$\theta \pm v\sqrt{A} = (t \pm u\sqrt{A})(T^{\text{II}} \pm V^{\text{II}}\sqrt{A}),$$

d'où l'on tire, en faisant la multiplication et comparant ensuite les parties rationnelles ensemble et les irrationnelles ensemble,

$$\theta = t\,T^{\text{II}} + AuV^{\text{II}}, \quad v = tV^{\text{II}} + uT^{\text{II}}.$$

Or V^{II} est divisible par $\varDelta$, et T^{II} laisse le reste 1; donc θ laissera le même reste que t, et v le même reste que u.

Donc en général les restes des valeurs de t et u répondantes aux exposans $m+2\mu$, $m+4\mu$, $m+6\mu$, etc. seront les mêmes que ceux des valeurs qui répondent à l'exposant quelconque m.

De-là on peut donc conclure que si l'on veut avoir les restes provenans de la division des termes t^{I}, t^{II}, t^{III}, etc. et u^{I}, u^{II}, u^{III}, etc. qui répondent à $m=1, 2, 3$, etc. par le nombre $\varDelta$, il suffira de trouver ces restes jusqu'aux termes $t^{2\mu}$ et $u^{2\mu}$ inclusivement; car, après ces termes, les mêmes restes reviendront dans le même ordre, et ainsi de suite à l'infini.

Quant aux termes $t^{2\mu}$ et $u^{2\mu}$, auxquels on pourra s'arrêter, ce seront ceux dont l'un $u^{2\mu}$ sera exactement divisible par $\varDelta$, et dont l'autre $t^{2\mu}$ laissera l'unité pour reste; ainsi il n'y aura qu'à pousser les divisions jusqu'à ce qu'on parvienne aux restes 1 et 0; alors on sera assuré que les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes que l'on a déjà trouvés.

On pourroit aussi trouver l'exposant 2μ *à priori;* car il n'y auroit qu'à faire le calcul indiqué dans l'art. 71, n°. 2, premierement pour le nombre A, et ensuite pour le nombre $A\varDelta^2$; et si on nomme π le numéro du terme de la série P^{I}, P^{II}, P^{III}, etc. qui dans le premier cas sera $=1$, et ϱ le numéro du terme qui sera $=1$ dans le second cas, on n'aura qu'à chercher le plus petit multiple de π et de ϱ, lequel étant divisé par π, donnera la valeur cherchée de μ.

Ainsi si l'on a, par exemple, $A=6$ et $\varDelta=3$, on trouvera dans la table de l'art. 41 pour le radical $\sqrt{6}$,

$$P^{0}=1, \quad P^{\text{I}}=-2, \quad P^{\text{II}}=1;$$

donc $\pi=2$; ensuite on trouvera dans la même table pour le radical $\sqrt{(6\cdot 9)}=\sqrt{54}$,

$$P^{0}=1, \ P^{\text{I}}=-5, \ P^{\text{II}}=9, \ P^{\text{III}}=-2, \ P^{\text{IV}}=9, \ P^{\text{V}}=-5, \ P^{\text{VI}}=1;$$

donc $\varrho=6$; or le plus petit multiple de 2 et 6 est 6, qui étant divisé par 2 donne 3 pour quotient, de sorte qu'on aura ici $\mu=3$ et $2\mu=6$.

Donc, pour avoir dans ce cas tous les restes de la division des termes t^{I}, t^{II}, t^{III}, etc. et u^{I}, u^{II}, u^{III}, etc. par 3, il suffira de chercher ceux des six premiers termes de l'une et de l'autre série; car les termes suivans redonneront toujours les mêmes restes, c'est-à-dire que les septiemes termes donneront les mêmes restes que les premiers, les huitiemes les mêmes restes que les seconds, et ainsi de suite à l'infini.

Au reste, il peut arriver quelquefois que les termes t^{μ} et u^{μ} aient les mêmes propriétés que les termes $t^{2\mu}$ et $u^{2\mu}$, c'est-à-dire que u^{μ} soit divisible par $\varDelta$, et que t^{μ} laisse l'unité pour reste. Dans ces cas on pourra s'arrêter à ces mêmes termes; car les restes des termes suivans $t^{\mu+1}$, $t^{\mu+2}$, etc. $u^{\mu+1}$, $u^{\mu+2}$, etc. seront les mêmes que ceux des termes t^{I}, t^{II}, etc. u^{I}, u^{II}, etc. et ainsi des autres.

En général nous désignerons par M la plus petite valeur de l'exposant m, qui rendra $t-1$ et u divisibles par $\varDelta$.

79. Supposons maintenant que l'on ait une expression quelconque composée de t et u et de nombres entiers donnés, de maniere qu'elle représente toujours des nombres entiers, et qu'il s'agisse de trouver les valeurs qu'il faudroit donner à l'exposant m, pour que cette expression devienne divisible par un nombre quelconque donné $\varDelta$, il n'y aura qu'à faire successivement $m = 1, 2, 3$, etc. jusqu'à M; et si aucune de ces suppositions ne rend l'expression proposée divisible par $\varDelta$, on en conclura hardiment qu'elle ne peut jamais le devenir, quelques valeurs qu'on donne à m.

Mais si l'on trouve de cette maniere une ou plusieurs valeurs de m qui rendent la proposée divisible par $\varDelta$, alors nommant N chacune de ces valeurs, toutes les valeurs possibles de m qui pourront faire le même effet, seront N, $N+M$, $N+2M$, $N+3M$, etc. et en général $N+\lambda M$, λ étant un nombre entier quelconque.

De même, si l'on avoit une autre expression composée de même de t, u et de nombres entiers donnés, laquelle dût être en même temps divisible par un autre nombre quelconque donné $\varDelta^{\mathrm{I}}$, on chercheroit pareillement les valeurs convenables de M et de N, que nous désignerons ici par M^{I} et N^{I}, et toutes les valeurs de l'exposant m qui pourront satisfaire à la condition proposée seront renfermées dans la formule $N^{\mathrm{I}} + \lambda^{\mathrm{I}} M^{\mathrm{I}}$, λ^{I} étant un nombre quelconque entier. Ainsi il n'y aura plus qu'à chercher les valeurs qu'on doit donner aux nombres entiers λ et λ^{I}, pour que l'on ait $N+\lambda M = N^{\mathrm{I}} + \lambda^{\mathrm{I}} M^{\mathrm{I}}$, savoir

$$M\lambda - M^{\mathrm{I}}\lambda^{\mathrm{I}} = N^{\mathrm{I}} - N,$$

équation résoluble par la méthode de l'art. 42.

Il est maintenant aisé de faire l'application de ce que nous venons de dire au cas de l'art. 77, où les expressions proposées sont de la forme $\alpha t + \beta u + \gamma$, $\alpha^{\mathrm{I}} t + \beta^{\mathrm{I}} u + \gamma^{\mathrm{I}}$, et les diviseurs sont δ et δ^{I}.

Il faudra seulement se souvenir de prendre les nombres t et u successivement en *plus* et en *moins*, pour avoir tous les cas possibles.

REMARQUE[1])

80. Si l'équation proposée à résoudre en nombres entiers étoit de la forme

$$ar^2 + 2brs + cs^2 = f,$$

on y pourroit appliquer immédiatement la méthode de l'art. 65; car 1°. il est visible que r et s ne pourroient avoir un commun diviseur, à moins que le nombre f ne fût en même temps divisible par le carré de ce diviseur; de sorte qu'on pourra toujours réduire la question au cas où r et s seront premiers entr'eux. 2°. On voit aussi que s et f ne pourroient avoir un commun diviseur, à moins que ce diviseur n'en fût un aussi du nombre a, en supposant r premier à s; ainsi on pourra réduire encore la question au cas où s et f seront premiers entr'eux. (Voyez l'art. 64).

Or, s étant supposé premier à f et à r, on pourra faire $r = ns - fz$, et il faudra, pour que l'équation soit résoluble en nombres entiers, qu'il y ait une valeur de n positive ou négative pas plus grande que $\frac{f}{2}$, laquelle rende la quantité $an^2 + 2bn + c$ divisible par f. Cette valeur étant mise à la place de n, toute l'équation deviendra divisible par f, et se trouvera réduite au cas de celle de l'art. 66 et suiv.

Il est facile de voir que la même méthode peut servir à réduire toute équation de la forme

$$ar^m + br^{m-1}s + cr^{m-2}s^2 +, \text{etc.} + ks^m = f,$$

a, b, c, etc. étant des nombres entiers donnés, et r et s deux indéterminées

---

1) Cette remarque ne se trouve pas dans les éditions ultérieures. H. W.

qui doivent être aussi des nombres entiers, en une autre équation semblable, mais dans laquelle le terme tout connu soit l'unité, et alors on y pourra appliquer la méthode générale du § II. Voyez la remarque de l'art. 30.

EXEMPLE I

81. *Soit proposé de rendre rationnelle cette quantité,*

$$\sqrt{(30 + 62s - 7s^2)},$$

en ne prenant pour s que des nombres entiers.

On aura donc à résoudre cette équation

$$30 + 62s - 7s^2 = y^2,$$

laquelle étant multipliée par 7, peut se mettre sous cette forme,

$$7 \cdot 30 + (31)^2 - (7s - 31)^2 = 7y^2,$$

ou bien, en faisant $7s - 31 = x$ et transposant,

$$x^2 = 1171 - 7y^2,$$

ou

$$x^2 + 7y^2 = 1171.$$

Cette équation est donc maintenant dans le cas de l'art. 64; de sorte qu'on aura $A = -7$ et $B = 1171$; d'où l'on voit d'abord que y et B doivent être premiers entr'eux, puisque ce dernier nombre ne renferme aucun facteur carré.

On fera, suivant la méthode de l'art. 65,

$$x = ny - 1171z,$$

et il faudra, pour que l'équation soit résoluble, que l'on puisse trouver pour n un nombre entier positif ou négatif non $> \frac{B}{2}$, c'est-à-dire non > 580, tel que $n^2 - A$ ou $n^2 + 7$ soit divisible par B ou par 1171.

Je trouve $n = \pm 321$, ce qui donne $n^2 + 7 = 1171 \times 88$; ainsi je substitue dans l'équation précédente $\pm 321y - 1171z$ à la place de x, moyennant quoi elle se trouve toute divisible par 1171, et la division faite, elle devient

$$88y^2 \mp 642yz + 1171z^2 = 1.$$

Pour résoudre cette équation je vais faire usage de la seconde méthode exposée dans l'art. 70, parce qu'elle est en effet plus simple et plus commode que la premiere. Or, comme le coefficient de y^2 est plus petit que celui de z^2, j'aurai ici $D = 1171$, $D^{\text{I}} = 88$ et $n = \pm 321$; donc, retenant pour plus de simplicité la lettre y à la place de θ, et mettant y^{I} à la place de z, je ferai le calcul suivant, où je supposerai d'abord $n = 321$:

$$\begin{aligned}
m &= \frac{321}{88} = 4, & n^{\text{I}} &= 321 - 4\cdot 88 = -31,\\
m^{\text{I}} &= \frac{-31}{11} = -3, & n^{\text{II}} &= -31 + 3\cdot 11 = 2,\\
m^{\text{II}} &= \frac{2}{1} = 2, & n^{\text{III}} &= 2 - 2\cdot 1 = 0,\\
D^{\text{II}} &= \frac{31^2+7}{88} = 11, & y &= 4y^{\text{I}} + y^{\text{II}},\\
D^{\text{III}} &= \frac{4+7}{11} = 1, & y^{\text{I}} &= -3y^{\text{II}} + y^{\text{III}},\\
D^{\text{IV}} &= \frac{7}{1} = 7, & y^{\text{II}} &= 2y^{\text{III}} + y^{\text{IV}}.
\end{aligned}$$

Puisque $n^{\text{III}} = 0$ et par conséquent $< \frac{D^{\text{III}}}{2}$ et $< \frac{D^{\text{IV}}}{2}$, on s'arrêtera ici et on fera

$$D^{\text{III}} = M = 1,\ D^{\text{IV}} = L = 7,\ n^{\text{III}} = 0 = N,\ \text{et}\ y^{\text{III}} = \xi,\ y^{\text{IV}} = \psi,$$

à cause que D^{III} est $< D^{\text{IV}}$.

Maintenant je remarque que A étant $= -7$, et par conséquent négatif, il faut, pour la résolubilité de l'équation, que l'on ait $M = 1$; c'est ce que l'on vient de trouver; de sorte qu'on en peut conclure d'abord que la résolution est possible. On supposera donc $\xi = y^{\text{III}} = 0$, $\psi = y^{\text{IV}} = \pm 1$; et l'on aura, par les formules ci-dessus,

$$y^{\text{II}} = \pm 1,\quad y^{\text{I}} = \mp 3 = z,\quad y = \mp 12 \pm 1 = \mp 11,$$

les signes ambigus étant à volonté. Donc

$$x = 321y - 1171z = \mp 18,$$

et conséquemment

$$s = \frac{x+31}{7} = \frac{31 \mp 18}{7} = \frac{13}{7},\ \text{ou} = \frac{49}{7} = 7.$$

Or, comme on exige que la valeur de s soit égale à un nombre entier, on ne pourra prendre que $s=7$.

Il est remarquable que l'autre valeur de s, savoir $\frac{13}{7}$, quoique fractionnaire, donne néanmoins un nombre entier pour la valeur du radical

$$\sqrt{(30+62s-7s^2)},$$

et le même nombre 11 que donne la valeur $s=7$; de sorte que ces deux valeurs de s seront les racines de l'équation $30+62s-7s^2=121$.

Nous avons supposé ci-dessus $n=321$; or on peut faire également $n=-321$; mais il est facile de voir d'avance que tout le changement qui en résultera dans les formules précédentes, c'est que les valeurs de m, m^{I}, m^{II}, et de n^{I}, n^{II}, changeront de signe, moyennant quoi les valeurs de y^{I} et de y deviendront aussi de différens signes, ce qui ne donnera aucun nouveau résultat, puisque ces valeurs ont déjà d'elles-mêmes le signe ambigu $\pm$.

Il en sera de même dans tous les autres cas; de sorte qu'on pourra toujours se dispenser de prendre successivement la valeur de n en *plus* et en *moins*.

La valeur $s=7$ que nous venons de trouver, résulte de la valeur de $n=\pm 321$; on pourroit trouver d'autres valeurs de s, si on trouvoit d'autres valeurs de n qui eussent la condition requise; mais comme le diviseur $B=1171$ est un nombre premier, il ne sauroit y avoir d'autres valeurs de n de la même qualité, comme nous l'avons démontré ailleurs, (Mémoires de Berlin pour l'année 1767, pag. 194[1]), d'où il faut conclure que le nombre 7 est le seul qui puisse satisfaire à la question.

J'avoue au reste qu'on peut résoudre le probleme précédent avec plus de facilité par le simple tâtonnement; car dès qu'on est parvenu à l'équation $x^2=1171-7y^2$, il n'y aura qu'à essayer pour y tous les nombres entiers dont les carrés multipliés par 7 ne surpasseront pas 1171, c'est-à-dire tous les nombres $<\sqrt{\frac{1171}{7}}<13$.

Il en est de même de toutes les équations où A est un nombre négatif; car dès qu'on est arrivé à l'équation $x^2=B+Ay^2$, ou, (en faisant $A=-a$), $x^2=B-ay^2$, il est clair que les valeurs satisfaisantes de y, s'il y en a, ne pourront se trouver que parmi les nombres $<\sqrt{\frac{B}{a}}$. Aussi n'ai-je donné des

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377. H. W.

méthodes particulieres pour le cas de A négatif, que parce que ces méthodes ont une liaison intime avec celles qui concernent le cas de A positif, et que toutes ces méthodes étant ainsi rapprochées les unes des autres, peuvent se prêter un jour mutuel et acquérir un plus grand degré d'évidence.

EXEMPLE II

82. Donnons maintenant quelques exemples pour le cas de A positif, et *soit proposé de trouver tous les nombres entiers qu'on pourra prendre pour y, en sorte que la quantité radicale,*

$$\sqrt{(13y^2+101)},$$

devienne rationnelle.

On aura ici, (art. 64), $A=13$, $B=101$, et l'équation à résoudre en entiers sera

$$x^2-13y^2=101,$$

dans laquelle, à cause que 101 n'est divisible par aucun carré, y sera nécessairement premier à 101.

On fera donc, (art. 65),

$$x=ny-101z,$$

et il faudra que n^2-13 soit divisible par 101, en prenant $n<\frac{101}{2}<51$.

Je trouve $n=35$, ce qui donne $n^2=1225$ et $n^2-13=1212=101\cdot 12$; ainsi on pourra prendre $n=\pm 35$, et substituant, au lieu de x, $\pm 35y-101z$, on aura une équation toute divisible par 101, qui, la division faite, sera

$$12y^2\mp 70yz+101z^2=1.$$

Employons encore, pour résoudre cette équation, la méthode de l'art. 70; faisons $D^{\text{I}}=12$, $D=101$, $n=\pm 35$, mais au lieu de la lettre θ nous conserverons la lettre y, et nous changerons seulement z en y^{I}, comme dans l'exemple précédent.

Soit, 1°. $n=35$, on fera le calcul suivant:

$$m=\frac{35}{12}=3,\quad n^{\text{I}}=35-3\cdot 12=-1,\quad D^{\text{II}}=\frac{1-13}{12}=-1,\quad y=3y^{\text{I}}+y^{\text{II}},$$

$$m^{\text{I}}=\frac{-1}{-1}=1,\quad n^{\text{II}}=-1+1=0,\qquad D^{\text{III}}=\frac{-13}{-1}=13,\quad y^{\text{I}}=y^{\text{II}}+y^{\text{III}}.$$

Comme $n^{\text{II}}=0$ et conséquemment $<\frac{D^{\text{II}}}{2}$ et $<\frac{D^{\text{III}}}{2}$, on s'arrêtera ici et l'on aura la transformée

$$D^{\text{III}}y^{\text{II}2}-2n^{\text{II}}y^{\text{II}}y^{\text{III}}+D^{\text{II}}y^{\text{III}2}=1,$$

ou bien

$$13y^{\text{II}2}-y^{\text{III}2}=1,$$

laquelle étant réduite à cette forme

$$y^{\text{III}2}-13y^{\text{II}2}=-1,$$

sera susceptible de la méthode de l'art. 71, n°. 2; et comme $A=13$ est <100, on pourra faire usage de la table de l'art. 41.

Ainsi il n'y aura qu'à voir si dans la série supérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{13}$ il se trouve le nombre 1 dans une place paire; car il faut, pour que l'équation précédente soit résoluble, que dans la série P^0, P^{I}, P^{II}, etc. il se trouve un terme $=-1$; mais on a $P^0=1$, $-P^{\text{I}}=4$, $P^{\text{II}}=3$, etc. donc, etc. or, dans la série 1, 4, 3, 3, 4, 1, etc. on trouve justement 1 à la sixieme place, en sorte que $P^{\text{V}}=-1$; donc on aura une solution de l'équation proposée en prenant $y^{\text{III}}=p^{\text{V}}$ et $y^{\text{II}}=q^{\text{V}}$, les nombres p^{V}, q^{V} étant calculés d'après les formules de l'art. 25, en donnant à μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. les valeurs 3, 1, 1, 1, 1, 6, etc. qui forment la série inférieure des nombres répondans à $\sqrt{13}$ dans la même table.

On aura donc

$$\begin{array}{ll}
p^0=1 & q^0=0\\
p^{\text{I}}=3 & q^{\text{I}}=1\\
p^{\text{II}}=p^{\text{I}}+p^0=4 & q^{\text{II}}=1\\
p^{\text{III}}=p^{\text{II}}+p^{\text{I}}=7 & q^{\text{III}}=q^{\text{II}}+q^{\text{I}}=2\\
p^{\text{IV}}=p^{\text{III}}+p^{\text{II}}=11 & q^{\text{IV}}=q^{\text{III}}+q^{\text{II}}=3\\
p^{\text{V}}=p^{\text{IV}}+p^{\text{III}}=18 & q^{\text{V}}=q^{\text{IV}}+q^{\text{III}}=5.
\end{array}$$

Donc $y^{\text{III}}=18$ et $y^{\text{II}}=5$; donc

$$y^{\text{I}}=y^{\text{II}}+y^{\text{III}}=23,\quad \text{et}\quad y=3y^{\text{I}}+y^{\text{II}}=74.$$

Nous avons supposé ci-dessus $n=35$, mais on peut aussi prendre $n=-35$. Soit donc, 2°. $n=-35$, on fera

$$m = \frac{-35}{12} = -3,\quad n^{\mathrm{I}} = -35+3\cdot 12 = 1,\quad D^{\mathrm{II}} = \frac{1-13}{12} = -1,\quad y = -3y^{\mathrm{I}}+y^{\mathrm{II}},$$

$$m^{\mathrm{I}} = \frac{1}{-1} = -1,\quad n^{\mathrm{II}} = 1-1 = 0,\qquad D^{\mathrm{III}} = \frac{-13}{-1} = 13,\quad y^{\mathrm{I}} = -y^{\mathrm{II}}+y^{\mathrm{III}};$$

ainsi on aura les mêmes valeurs de D^{II}, D^{III} et n^{II} qu'auparavant, de sorte que la transformée en y^{II} et y^{III} sera aussi la même.

On aura donc aussi $y^{\mathrm{III}} = 18$ et $y^{\mathrm{II}} = 5$; donc

$$y^{\mathrm{I}} = -y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{III}} = 13,\quad \text{et}\quad y = -3y^{\mathrm{I}} + y^{\mathrm{II}} = -34.$$

Nous avons donc trouvé deux valeurs de y avec les valeurs correspondantes de y^{I} ou z; et ces valeurs résultent de la supposition de $n = \pm 35$; or, comme on ne peut trouver aucune autre valeur de n qui ait les conditions requises, il s'ensuit que les valeurs précédentes seront les seules valeurs *primitives* que l'on puisse avoir; mais on pourra ensuite en trouver une infinité de *dérivées* par la méthode de l'art. 72.

Prenant donc ces valeurs de y et z pour p et q, on aura en général, (art. cité),

$$y = 74t - (101\cdot 23 - 35\cdot 74)u = 74t + 267u$$
$$z = 23t + (\ 12\cdot 74 - 35\cdot 23)u = 23t + \ 83u$$

ou

$$y = -34t - (101\cdot 13 - 35\cdot 34)u = -34t - 123u$$
$$z = 13t + (-12\cdot 34 + 35\cdot 13)u = 13t + 47u$$

et il n'y aura plus qu'à tirer les valeurs de t et u de l'équation $t^2 - 13u^2 = 1$; or ces valeurs se trouvent déjà toutes calculées dans la table qui est à la fin du chapitre 7 du traité précédent; on aura donc sur le champ $t = 649$ et $u = 180$; de sorte que prenant ces valeurs pour T et V dans les formules de l'art. 75, on aura en général

$$t = \frac{(649+180\sqrt{13})^m + (649-180\sqrt{13})^m}{2}$$

$$u = \frac{(649+180\sqrt{13})^m - (649-180\sqrt{13})^m}{2\sqrt{13}}$$

où l'on pourra donner à m telle valeur qu'on voudra, pourvu qu'on ne prenne que des nombres entiers positifs.

Or, comme les valeurs de t et u peuvent être prises tant en *plus* qu'en *moins*, les valeurs de y qui peuvent satisfaire à la question seront toutes renfermées dans ces deux formules,

$$y = \pm 74t \pm 267u,$$
$$y = \pm 34t \pm 123u,$$

les signes ambigus étant à volonté.

Si on fait $m = 0$, on aura $t = 1$ et $u = 0$; donc

$$y = \pm 74, \quad \text{ou} \quad = \pm 34;$$

et cette derniere valeur sera la plus petite qui puisse résoudre le probleme.

Nous avons déjà résolu ce même probleme dans les Mémoires de Berlin pour l'année 1768, p. 243[1]); mais comme nous y avons fait usage d'une méthode un peu différente de la précédente, et qui revient au même pour le fond que la *premiere* méthode de l'art. 66 ci-dessus, nous avons cru devoir le redonner ici, pour que la comparaison des résultats qui sont les mêmes par l'une et l'autre méthode, puisse leur servir de confirmation, s'il en est besoin.

EXEMPLE III

83. *Soit proposé encore de trouver des nombres entiers qui, étant pris pour y, rendent rationnelle la quantité*

$$\sqrt{(79y^2 + 101)}.$$

On aura donc à résoudre en entiers l'équation

$$x^2 - 79y^2 = 101,$$

dans laquelle y sera premier à 101, puisque ce nombre ne renferme aucun facteur carré.

Qu'on suppose donc

$$x = ny - 101z,$$

et il faudra que $n^2 - 79$ soit divisible par 101, en prenant $n < \frac{101}{2} < 51$; on trouve $n = 33$, ce qui donne $n^2 - 13 = 1010 = 101 \cdot 10$; ainsi on pourra prendre $n = \pm 33$, et ces valeurs seront les seules qui aient la condition requise.

1) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 719. H. W.

Substituant donc $\pm 33y - 101z$ à la place de x, et divisant toute l'équation par 101, on aura cette transformée

$$10y^2 \mp 66yz + 101z^2 = 1.$$

On fera donc $D^{\text{I}} = 10$, $D = 101$, $n = \pm 33$, et prenant d'abord n en *plus*, on opérera comme dans l'exemple précédent; on aura ainsi

$$m = \frac{33}{10} = 3, \quad n^{\text{I}} = 33 - 3 \cdot 10 = 3, \quad D^{\text{II}} = \frac{9-79}{10} = -7, \quad y = 3y^{\text{I}} + y^{\text{II}}.$$

Or, comme $n^{\text{I}} = 3$ est déjà $< \frac{D^{\text{I}}}{2}$ et $< \frac{D^{\text{II}}}{2}$, il ne sera pas nécessaire d'aller plus loin; ainsi on aura la transformée

$$-7y^{\text{I}2} - 6y^{\text{I}}y^{\text{II}} + 10y^{\text{II}2} = 1,$$

laquelle étant multipliée par -7, pourra se mettre sous cette forme,

$$(7y^{\text{I}} + 3y^{\text{II}})^2 - 79y^{\text{II}2} = -7.$$

Puisque donc 7 est $< \sqrt{79}$, si cette équation est résoluble, il faudra que le nombre 7 se trouve parmi les termes de la série supérieure des nombres qui répondent à $\sqrt{79}$ dans la table de l'art. 41, et même que ce nombre 7 y occupe une place paire, puisqu'il a le signe —. Mais la série dont il s'agit ne renferme que les nombres 1, 15, 2, qui reviennent toujours; donc on doit conclure sur le champ que la derniere équation n'est pas résoluble, et qu'ainsi la proposée ne l'est pas, au moins d'après la valeur de $n = 33$.

Il ne reste donc qu'à essayer l'autre valeur $n = -33$, laquelle donnera

$$m = \frac{-33}{10} = -3, \quad n^{\text{I}} = -33 + 3 \cdot 10 = -3, \quad D^{\text{II}} = \frac{9-79}{10} = -7, \quad y = -3y^{\text{I}} + y^{\text{II}},$$

de sorte qu'on aura cette autre transformée,

$$-7y^{\text{I}2} + 6y^{\text{I}}y^{\text{II}} + 10y^{\text{II}2} = 1,$$

laquelle se réduit à la forme

$$(7y^{\text{I}} - 3y^{\text{II}})^2 - 79y^{\text{II}2} = -7,$$

qui est semblable à la précédente. D'où je conclus que l'équation proposée n'admet absolument aucune solution en nombres entiers.

REMARQUE

84. M. Euler, dans un excellent Mémoire imprimé dans le tome IX des Nouveaux Commentaires de Pétersbourg[1]), trouve par induction cette regle, pour juger de la résolubilité de toute équation de la forme

$$x^2 - Ay^2 = B,$$

lorsque B est un nombre premier; c'est que l'équation doit être possible toutes les fois que B sera de la forme $4An + r^2$, ou $4An + r^2 - A$; mais l'exemple précédent met cette regle en défaut; car 101 est un nombre premier de la forme $4An + r^2 - A$, en faisant $A = 79$, $n = -4$ et $r = 38$; cependant l'équation $x^2 - 79y^2 = 101$ n'admet aucune solution en nombres entiers.

Si la regle précédente étoit vraie, il s'ensuivroit que si l'équation $x^2 - Ay^2 = B$ est possible lorsque B a une valeur quelconque b, elle le seroit aussi en prenant $B = 4An + b$, pourvu que B fût un nombre premier. On pourroit limiter cette derniere regle, en exigeant que b fût aussi un nombre premier; mais avec cette limitation même elle se trouveroit démentie par l'exemple précédent; car on a $101 = 4An + b$, en prenant $A = 79$, $n = -2$ et $b = 733$; or 733 est un nombre premier de la forme $x^2 - 79y^2$, en faisant $x = 38$ et $y = 3$; cependant 101 n'est pas de la même forme $x^2 - 79y^2$.

---

1) Mémoire 279 (suivant l'Index d'Eneström): *De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros*, Novi comment. acad. sc. Petrop. **9** (1762/3), 1764, p. 3—39; *Leonhardi Euleri Opera omnia*, series I, vol. 2. H. W.

PARAGRAPHE VIII

REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DE LA FORME
$$p^2 = Aq^2 + 1$$
ET SUR LA MANIERE ORDINAIRE DE LES RÉSOUDRE EN NOMBRES ENTIERS

85. La méthode du chapitre 7 du traité précédent, pour résoudre les équations de cette espece, est la même que celle que M. WALLIS donne dans son *Algebre*, (chapitre XCVIII), et qu'il attribue à Milord BROUNKER; on la trouve aussi dans *l'Algebre* de M. OZANAM, qui en fait honneur à M. DE FERMAT. Quoi qu'il en soit de l'Inventeur de cette méthode, il est au moins certain que M. DE FERMAT est l'Auteur du probleme qui en fait l'objet; il l'avoit proposé comme un défi à tous les Géometres Anglois, ainsi qu'on le voit par le *Commercium epistolicum* de M. WALLIS; c'est ce qui donna occasion à Milord BROUNKER d'inventer la méthode dont nous parlons; mais il ne paroît pas que cet Auteur ait connu toute l'importance du probleme qu'il avoit résolu; on ne trouve même rien sur ce sujet dans les écrits qui nous sont restés de M. FERMAT, ni dans aucun des Ouvrages du siecle passé, où l'on traite de l'Analyse indéterminée. Il est bien naturel de croire que M. FERMAT, qui s'étoit principalement occupé de la théorie des nombres entiers, sur lesquels il nous a d'ailleurs laissé de très-beaux théoremes, avoit été conduit au probleme dont il s'agit par les recherches qu'il avoit faites sur la résolution générale des équations de la forme

$$x^2 = Ay^2 + B,$$

auxquelles se réduisent toutes les équations du second degré à deux inconnues; cependant ce n'est qu'à M. EULER que nous devons la remarque que ce probleme est nécessaire pour trouver toutes les solutions possibles de ces sortes d'équations. (Voyez le chapitre 6 ci-dessus[1]), le tome VI des Anciens Commentaires de Pétersbourg[2]), et le tome IX des Nouveaux.[3])

La méthode que nous avons suivie pour démontrer cette proposition est un peu différente de celle de M. EULER, mais aussi est-elle, si je ne me trompe, plus directe et plus générale. Car d'un côté la méthode de M. EULER conduit naturellement à des expressions fractionnaires lorsqu'il s'agit de les éviter, et de l'autre on ne voit pas clairement que les suppositions qu'on y fait pour faire disparoître les fractions, soient les seules qui puissent avoir lieu. En effet nous avons fait voir ailleurs qu'il ne suffit pas toujours de trouver une seule solution de l'équation $x^2 = Ay^2 + B$, pour pouvoir en déduire toutes les autres, à l'aide de l'équation $p^2 = Aq^2 + 1$; et qu'il peut y avoir souvent, au moins lorsque B n'est pas un nombre premier, des valeurs de x et y qui ne sauroient être renfermées dans les expressions générales de M. EULER. (Voyez l'art. 45 de mon *Mémoire sur les problemes indéterminés,* dans les Mémoires de Berlin, année 1767.[4])

Quant à la méthode de résoudre les équations de la forme

$$p^2 = Aq^2 + 1,$$

il nous semble que celle du chapitre 7, quelque ingénieuse qu'elle soit, est encore assez imparfaite. Car, 1°. elle ne fait pas voir que toute équation de ce genre est toujours résoluble en nombres entiers, lorsque A est un nombre positif non carré. 2°. Il n'est pas démontré qu'elle doive faire parvenir toujours à la résolution cherchée. M. WALLIS a, à la vérité, prétendu prouver la premiere de ces deux propositions; mais sa démonstration n'est, si j'ose le dire, qu'une simple pétition de principe. (Voyez le chapitre XCIX de son *Algebre*). Je crois donc être le premier qui en ait donné une tout-à-fait rigoureuse; elle se trouve dans les Mélanges de Turin, tome IV[5]); mais elle est très-longue et très-indirecte; celle de l'art. 37 ci-dessus[6]), est tirée des vrais principes de la chose, et ne laisse, ce me semble, rien à désirer. Cette mé-

1) Voir p. 369. H. W.

2) Mémoire 29 (suivant l'Index d'ENESTRÖM): *De solutione problematum DIOPHANTAEORUM per numeros integros*, Comment. acad. sc. Petrop. **6** (1732/3), 1738, p. 175—188; *LEONHARDI EULERI Opera omnia,* series I, vol. 2. H. W.

3) Voir la note p. 630. H. W.

4) *Oeuvres de LAGRANGE*, t. II, p. 457. H. W.

5) *Oeuvres de LAGRANGE*, t. I, p. 671. H. W.

6) Voir p. 562. H. W.

thode nous met aussi en état d'apprécier celle du chapitre 7, et de reconnoître les inconvéniens où l'on pourroit tomber, si on la suivoit sans aucune précaution; c'est ce que nous allons discuter.

86. De ce que nous avons démontré dans le § II, il s'ensuit que les valeurs de p et q qui satisfont à l'équation $p^2 - Aq^2 = 1$, ne peuvent être que les termes de quelqu'une des fractions *principales* déduites de la fraction continue qui exprimeroit la valeur de $\sqrt{A}$; de sorte que supposant cette fraction continue représentée ainsi,

$$\mu + \cfrac{1}{\mu^{\mathrm{I}} + \cfrac{1}{\mu^{\mathrm{II}} + \cfrac{1}{\mu^{\mathrm{III}} + \text{, etc.}}}}$$

on aura nécessairement

$$\frac{p}{q} = \mu + \cfrac{1}{\mu^{\mathrm{I}} + \cfrac{1}{\mu^{\mathrm{II}} + \text{, etc.} \atop + \cfrac{1}{\mu^{\varrho}}}},$$

μ^{ϱ} étant un terme quelconque de la série infinie μ^{I}, μ^{II}, etc. dont le quantieme ϱ ne peut se déterminer qu'*à posteriori.*

Il faut remarquer que dans cette fraction continue les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. doivent être tous positifs, quoique nous ayons vu dans l'art. 3 qu'on peut en général, dans les fractions continues, rendre les dénominateurs positifs ou négatifs, suivant que l'on prend les valeurs approchées plus petites ou plus grandes que les véritables; mais la méthode du probleme I, (art. 23 et suiv.) exige absolument que les valeurs approchées μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. soient toutes prises en défaut.

87. Maintenant, puisque la fraction $\frac{p}{q}$ est égale à une fraction continue dont les termes sont μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. μ^{ϱ}, il est clair, par l'art. 4, que μ sera le quotient de p divisé par q, que μ^{I} sera celui de q divisé par le reste, μ^{II} celui de ce reste divisé par le second reste, et ainsi de suite; de sorte que nommant r, s, t, etc. les restes dont il s'agit, on aura, par la nature de la division,

$$p = \mu q + r,\ q = \mu^{\mathrm{I}} r + s,\ r = \mu^{\mathrm{II}} s + t, \text{ etc.}$$

où le dernier reste sera nécessairement $= 0$, et l'avant-dernier $= 1$, à cause que p et q sont des nombres premiers entr'eux. Ainsi μ sera la valeur entiere approchée de $\frac{p}{q}$, μ^{I} celle de $\frac{q}{r}$, μ^{II} celle de $\frac{r}{s}$, etc. ces valeurs étant toutes prises moindres que les véritables, à l'exception de la derniere μ^{ϱ}, qui sera exactement égale à la fraction correspondante, à cause que le reste suivant est supposé nul.

Or, comme les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. μ^{ϱ}, sont les mêmes pour la fraction continue qui exprime la valeur de $\frac{p}{q}$, et pour celle qui exprime la valeur de $\sqrt{A}$, on peut prendre, jusqu'au terme μ^{ϱ}, $\frac{p}{q}=\sqrt{A}$, c'est à-dire

$$p^2-Aq^2=0.$$

Ainsi on cherchera d'abord la valeur approchée en défaut de $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire de $\sqrt{A}$, et ce sera la valeur de μ; ensuite on substituera dans $p^2-Aq^2=0$, à la place de p sa valeur $\mu q+r$, ce qui donnera

$$(\mu^2-A)q^2+2\mu qr+r^2=0,$$

et on cherchera de nouveau la valeur approchée en défaut de $\frac{q}{r}$, c'est-à-dire de la racine positive de l'équation

$$(\mu^2-A)\left(\frac{q}{r}\right)^2+2\mu\frac{q}{r}+1=0,$$

et l'on aura la valeur de μ^{I}.

On continuera à substituer dans la transformée $(\mu^2-A)q^2+2\mu qr+r^2=0$, à la place de q, $\mu^{\text{I}}r+s$; on aura une équation dont la racine sera $\frac{r}{s}$; on prendra la valeur approchée en défaut de cette racine, et l'on aura la valeur de μ^{II}. On substituera $\mu^{\text{II}}s+t$ à la place de r, etc.

Supposons maintenant que t soit, par exemple, le dernier reste, qui doit être nul, s sera l'avant-dernier, qui doit être $=1$; donc si la transformée en s et t de la formule p^2-Aq^2 est

$$Ps^2+Qst+Rt^2,$$

il faudra qu'en y faisant $t=0$ et $s=1$, elle devienne $=1$, pour que l'équation proposée $p^2-Aq^2=1$ ait lieu; donc P devra être $=1$. Ainsi il n'y aura qu'à continuer les opérations et les transformations ci-dessus, jusqu'à ce que l'on parvienne à une transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité; alors on fera dans cette formule la premiere des deux indéterminées, comme r, égale à 1, et la seconde, comme s, égale à zéro; et en remontant on aura les valeurs convenables de p et q.

On pourroit aussi opérer sur l'équation même $p^2 - Aq^2 = 1$, en ayant seulement soin de faire abstraction du terme tout connu 1, et par conséquent aussi des autres termes tout connus qui peuvent résulter de celui-ci, dans la détermination des valeurs approchées μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. de $\frac{p}{q}$, $\frac{q}{r}$, $\frac{r}{s}$, etc. dans ce cas on essayera à chaque nouvelle transformation, si l'équation transformée peut subsister en y faisant l'une des deux indéterminées $= 1$ et l'autre $= 0$; quand on sera parvenu à une pareille transformée, l'opération sera achevée, et il n'y aura plus qu'à revenir sur ses pas pour avoir les valeurs cherchées de p et de q.

Nous voilà donc conduits à la méthode du chapitre 7. A examiner cette méthode en elle-même et indépendamment des principes d'où nous venons de la déduire, il doit paroître assez indifférent de prendre les valeurs approchées de μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. plus petites ou plus grandes que les véritables, d'autant que, de quelque maniere qu'on prenne ces valeurs, celles de r, s, t, etc. doivent aller également en diminuant jusqu'à zéro, (art. 6).

Aussi M. WALLIS remarque-t-il expressément qu'on peut employer à volonté les limites en *plus* ou en *moins* pour les nombres μ, μ^{I}, μ^{II}, etc. et il propose même ce moyen comme propre à abréger souvent le calcul; c'est aussi ce que M. EULER fait observer dans l'art. 102 et suiv. du chapitre cité[1]); cependant je vais faire voir par un exemple, qu'en s'y prenant de cette maniere on peut risquer de ne jamais parvenir à la solution de l'équation proposée.

Prenons l'exemple de l'art. 101 du même chapitre où il s'agit de résoudre une équation de cette forme,

$$p^2 = 6q^2 + 1 \quad \text{ou bien} \quad p^2 - 6q^2 = 1.$$

On aura donc $p = \sqrt{(6q^2 + 1)}$, et négligeant le terme constant 1, $p = q\sqrt{6}$; donc

$$\frac{p}{q} = \sqrt{6} > 2 < 3;$$

prenons la limite en *moins* et faisons $\mu = 2$, et ensuite $p = 2q + r$; substi-

1) Voir p. 381. H. W.

tuant donc cette valeur, on aura

$$-2q^2 + 4qr + r^2 = 1;$$

donc

$$q = \frac{2r + \sqrt{(6r^2 - 2)}}{2},$$

ou bien, en rejetant le terme constant -2,

$$q = \frac{2r + r\sqrt{6}}{2}, \text{ d'où } \frac{q}{r} = \frac{2 + \sqrt{6}}{2} > 2 < 3;$$

prenons de nouveau la limite en *moins*, et faisons $q = 2r + s$, la derniere équation deviendra

$$r^2 - 4rs - 2s^2 = 1,$$

où l'on voit d'abord qu'on peut supposer $s = 0$ et $r = 1$; ainsi on aura $q = 2$, $p = 5$.

Maintenant reprenons la premiere transformée $-2q^2 + 4qr + r^2 = 1$, où nous avons vu que $\frac{q}{r} > 2$ et < 3, et au lieu de prendre la limite en *moins*, prenons-la en *plus*, c'est-à-dire, supposons $q = 3r + s$, ou bien, puisque s doit être alors une quantité négative, $q = 3r - s$, on aura la transformée suivante,

$$-5r^2 + 8rs - 2s^2 = 1,$$

laquelle donnera

$$r = \frac{4s + \sqrt{(6s^2 - 5)}}{5};$$

donc, négligeant le terme constant 5,

$$r = \frac{4s + s\sqrt{6}}{5}, \quad \text{et} \quad \frac{r}{s} = \frac{4 + \sqrt{6}}{5} > 1 < 2.$$

Prenons de nouveau la limite en *plus*, et faisons $r = 2s - t$, on aura

$$-6s^2 + 12st - 5t^2 = 1;$$

donc

$$s = \frac{6t + \sqrt{(6t^2 - 6)}}{6};$$

donc, rejetant le terme -6,

$$s = \frac{6t + t\sqrt{6}}{6}, \quad \text{et} \quad \frac{s}{t} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} > 1 < 2.$$

Qu'on continue à prendre les limites en *plus* et qu'on fasse $s = 2t - u$, il viendra

$$-5t^2 + 12tu - 6u^2 = 1;$$

donc

$$t = \frac{6u + \sqrt{(6u^2 - 5)}}{5}; \text{ donc } \frac{t}{u} = \frac{6 + \sqrt{6}}{5} > 1 < 2.$$

Faisons donc de même $t = 2u - x$, on aura

$$-2u^2 + 8ux - 5x^2 = 1;$$

donc, etc.

Continuant de cette maniere à prendre toujours les limites en *plus*, on ne trouvera jamais de transformée où le coefficient du premier terme soit égal à l'unité, comme il le faut, pour qu'on puisse trouver une solution de la proposée.

La même chose arrivera nécessairement toutes les fois qu'on prendra la premiere limite en *moins*, et les suivantes toutes en *plus*; je pourrois en donner la raison *à priori*; mais comme le Lecteur peut la trouver aisément par les principes de notre théorie, je ne m'y arrêterai pas. Quant à présent il me suffit d'avoir montré la nécessité de traiter ces sortes de problemes d'une maniere plus rigoureuse et plus profonde qu'on ne l'avoit encore fait.

PARAGRAPHE IX

DE LA MANIERE DE TROUVER DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE TOUS LES DEGRÉS QUI ÉTANT MULTIPLIÉES ENSEMBLE PRODUISENT TOUJOURS DES FONCTIONS SEMBLABLES

ADDITION POUR LES CHAPITRES 11 ET 12[1])

88. Je crois avoir eu en même temps que M. EULER l'idée de faire servir les facteurs irrationnels et même imaginaires des formules du second degré, à trouver les conditions qui rendent ces formules égales à des carrés ou à des puissances quelconques; j'ai lu sur ce sujet à l'Académie, en 1768, un Mémoire qui n'a pas été imprimé, mais dont j'ai donné un précis à la fin de mes *Recherches sur les Problemes indéterminés*, qui se trouvent dans le volume pour l'année 1767[2]), lequel a paru en 1769, avant même la traduction allemande de l'*Algebre* de M. EULER.

J'ai fait voir dans l'endroit que je viens de citer, comment on peut étendre la même méthode à des formules de degrés plus élevés que le second; et j'ai par ce moyen donné la solution de quelques équations dont il auroit peut-être été fort difficile de venir à bout par d'autres voies. Je vais maintenant généraliser encore davantage cette méthode, qui me paroît mériter particulierement l'attention des Géometres par sa nouveauté et par sa singularité.

89. Soient α et β les deux racines de l'équation du second degré

$$s^2 - as + b = 0,$$

et considérons le produit de ces deux facteurs

$$(x + \alpha y)(x + \beta y),$$

1) Voir p. 414 et 425. H. W.

2) *Oeuvres de* LAGRANGE, t. II, p. 377 et 655. H. W.

qui sera nécessairement réel; ce produit sera $x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2$; or on a $\alpha + \beta = a$, et $\alpha\beta = b$, par la nature de l'équation $s^2 - as + b = 0$; donc on aura cette formule du second degré

$$x^2 + axy + by^2,$$

laquelle est composée des deux facteurs

$$x + \alpha y \quad \text{et} \quad x + \beta y.$$

Maintenant il est visible que si l'on a une formule semblable

$$x^{\text{I}2} + ax^{\text{I}}y^{\text{I}} + by^{\text{I}2},$$

et qu'on veuille les multiplier l'une par l'autre, il suffira de multiplier ensemble les deux facteurs $x + \alpha y$, $x^{\text{I}} + \alpha y^{\text{I}}$, et les deux $x + \beta y$, $x^{\text{I}} + \beta y^{\text{I}}$, ensuite les deux produits l'un par l'autre. Or le produit de $x + \alpha y$ par $x^{\text{I}} + \alpha y^{\text{I}}$ est $xx^{\text{I}} + \alpha(xy^{\text{I}} + yx^{\text{I}}) + \alpha^2 yy^{\text{I}}$; mais puisque α est une des racines de l'équation $s^2 - as + b = 0$, on aura $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$; donc $\alpha^2 = a\alpha - b$; donc, substituant cette valeur de α^2 dans la formule précédente, elle deviendra

$$xx^{\text{I}} - byy^{\text{I}} + \alpha(xy^{\text{I}} + yx^{\text{I}} + ayy^{\text{I}});$$

de sorte qu'en faisant, pour plus de simplicité,

$$X = xx^{\text{I}} - byy^{\text{I}}, \quad Y = xy^{\text{I}} + yx^{\text{I}} + ayy^{\text{I}},$$

le produit des deux facteurs $x + \alpha y$, $x^{\text{I}} + \alpha y^{\text{I}}$, sera

$$X + \alpha Y,$$

et par conséquent, de la même forme que chacun d'eux. On trouvera de même que le produit des deux autres facteurs, $x + \beta y$ et $x^{\text{I}} + \beta y^{\text{I}}$, sera

$$X + \beta Y;$$

de sorte que le produit total sera $(X + \alpha Y)(X + \beta Y)$, savoir

$$X^2 + aXY + bY^2.$$

C'est le produit des deux formules semblables,

$$x^2 + axy + by^2, \quad \text{et} \quad x^{\text{I}2} + ax^{\text{I}}y^{\text{I}} + by^{\text{I}2}.$$

Si on vouloit avoir le produit de ces trois formules semblables

$$x^2 + axy + by^2, \quad x^{\text{I}2} + ax^{\text{I}}y^{\text{I}} + by^{\text{I}2}, \quad x^{\text{II}2} + ax^{\text{II}}y^{\text{II}} + by^{\text{II}2},$$

il n'y auroit qu'à trouver celui de la formule $X^2 + aXY + bY^2$ par la derniere $x^{II2} + ax^{II}y^{II} + by^{II2}$, et il est visible, par les formules ci-dessus, qu'en faisant

$$X^{I} = Xx^{II} - bYy^{II}, \quad Y^{I} = Xy^{II} + Yx^{II} + aYy^{II},$$

le produit cherché seroit

$$X^{I2} + aX^{I}Y^{I} + bY^{I2}.$$

On pourra trouver de même le produit de quatre ou d'un plus grand nombre de formules semblables à celle-ci, $x^2 + axy + by^2$, et ces produits seront toujours aussi de la même forme.

90. Si on fait $x^{I} = x$ et $y^{I} = y$, on aura

$$X = x^2 - by^2, \quad Y = 2xy + ay^2,$$

et par conséquent

$$(x^2 + axy + by^2)^2 = X^2 + aXY + bY^2.$$

Donc, si l'on veut trouver des valeurs rationnelles de X et Y, telles que la formule

$$X^2 + aXY + bY^2$$

devienne un carré, il n'y aura qu'à donner à X et à Y les valeurs précédentes, et l'on aura pour la racine du carré la formule

$$x^2 + axy + by^2,$$

x et y étant deux indéterminées.

Si on fait de plus $x^{II} = x^{I} = x$ et $y^{II} = y^{I} = y$, on aura

$$X^{I} = Xx - bYy, \quad Y^{I} = Xy + Yx + aYy,$$

c'est-à-dire en substituant les valeurs précédentes de X et Y,

$$X^{I} = x^3 - 3bxy^2 - aby^3, \quad Y^{I} = 3x^2y + 3axy^2 + (a^2 - b)y^3;$$

donc

$$(x^2 + axy + by^2)^3 = X^{I2} + aX^{I}Y^{I} + bY^{I2}.$$

Ainsi, si l'on proposoit de trouver des valeurs rationnelles de X^{I} et Y^{I}, telles que la formule

$$X^{I2} + aX^{I}Y^{I} + bY^{I2}$$

devînt un cube, il n'y auroit qu'à donner à X^{I} et Y^{I} les valeurs précédentes, moyennant quoi on auroit un cube dont la racine seroit

$$x^2 + axy + by^2,$$

x et y étant deux indéterminées.

On pourroit résoudre d'une maniere semblable les questions où il s'agiroit de produire des puissances quatriemes, cinquiemes, etc. mais on peut aussi trouver immédiatement des formules générales pour une puissance quelconque m, sans passer par les puissances inférieures.

Soit donc proposé de trouver des valeurs rationnelles de X et Y, telles que la formule $X^2 + aXY + bY^2$ devienne une puissance m, c'est-à-dire qu'il s'agisse de résoudre l'équation

$$X^2 + aXY + bY^2 = Z^m.$$

Comme la quantité $X^2 + aXY + bY^2$ est formée du produit des deux facteurs $X + \alpha Y$ et $X + \beta Y$, il faudra, pour que cette quantité devienne une puissance du degré m, que chacun de ses deux facteurs devienne aussi une semblable puissance.

Faisons donc d'abord

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m;$$

et développant cette puissance par le théoreme de Newton, on aura

$$x^m + mx^{m-1}y\alpha + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3\alpha^3 +, \text{ etc.}$$

Or, puisque α est une des racines de l'équation $s^2 - as + b = 0$, on aura aussi $\alpha^2 - a\alpha + b = 0$; donc

$$\alpha^2 = a\alpha - b,\ \ \alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha = (a^2 - b)\alpha - ab,$$

$$\alpha^4 = (a^2 - b)\alpha^2 - ab\alpha = (a^3 - 2ab)\alpha - a^2b + b^2,$$

et ainsi de suite. Ainsi il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans la formule précédente, et elle se trouvera par-là composée de deux parties, l'une toute rationnelle qu'on comparera à X, et l'autre toute multipliée par la racine α, qu'on comparera à αY.

Si on fait pour plus de simplicité

$$\begin{array}{ll} A^{\text{I}} = 1 & B^{\text{I}} = 0 \\ A^{\text{II}} = a & B^{\text{II}} = b \\ A^{\text{III}} = aA^{\text{II}} - bA^{\text{I}} & B^{\text{III}} = aB^{\text{II}} - bB^{\text{I}} \\ A^{\text{IV}} = aA^{\text{III}} - bA^{\text{II}} & B^{\text{IV}} = aB^{\text{III}} - bB^{\text{II}} \\ A^{\text{V}} = aA^{\text{IV}} - bA^{\text{III}}, \text{ etc.} & B^{\text{V}} = aB^{\text{IV}} - bB^{\text{III}}, \text{ etc.} \end{array}$$

on aura

$$\begin{aligned} \alpha &= A^{\text{I}}\,\alpha - B^{\text{I}} \\ \alpha^2 &= A^{\text{II}}\,\alpha - B^{\text{II}} \\ \alpha^3 &= A^{\text{III}}\alpha - B^{\text{III}} \\ \alpha^4 &= A^{\text{IV}}\alpha - B^{\text{IV}}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Donc, substituant ces valeurs et comparant, on aura

$$X = x^m - mx^{m-1}yB^{\text{I}} - \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2B^{\text{II}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3B^{\text{III}} -, \text{ etc.}$$

$$Y = mx^{m-1}yA^{\text{I}} + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2A^{\text{II}} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3A^{\text{III}} +, \text{ etc.}$$

Or, comme la racine α n'entre point dans les expressions de X et Y, il est clair qu'ayant

$$X + \alpha Y = (x + \alpha y)^m,$$

on aura aussi

$$X + \beta Y = (x + \beta y)^m;$$

donc, multipliant ces deux équations l'une par l'autre, on aura

$$X^2 + aXY + bY^2 = (x^2 + axy + by^2)^m,$$

et par conséquent

$$Z = x^2 + axy + by^2.$$

Ainsi le probleme est résolu.

Si a étoit $= 0$, les formules précédentes deviendroient beaucoup plus simples; car on auroit

$$A^{\text{I}} = 1,\ A^{\text{II}} = 0,\ A^{\text{III}} = -b,\ A^{\text{IV}} = 0,\ A^{\text{V}} = b^2,\ A^{\text{VI}} = 0,\ A^{\text{VII}} = -b^3, \text{ etc.}$$

et de même

$$B^{\text{I}} = 0,\ B^{\text{II}} = b,\ B^{\text{III}} = 0,\ B^{\text{IV}} = -b^2,\ B^{\text{V}} = 0,\ B^{\text{VI}} = b^3, \text{ etc.}$$

donc

$$X = x^m - \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} y^2 b$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-4} y^4 b^2 -, \text{ etc.}$$

$$Y = m x^{m-1} y - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^{m-3} y^3 b$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^{m-5} y^5 b^2 -, \text{ etc.}$$

et ces valeurs satisferont à l'équation

$$X^2 + bY^2 = (x^2 + by^2)^m.$$

91. Passons maintenant aux formules de trois dimensions; pour cela nous désignerons par α, β, γ les trois racines de l'équation du troisieme degré,

$$s^3 - as^2 + bs - c = 0,$$

et nous considérerons ensuite le produit de ces trois facteurs,

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

lequel sera nécessairement rationnel, comme on va le voir. La multiplication faite, on aura le produit suivant,

$$\begin{gathered} x^3 + (\alpha + \beta + \gamma) x^2 y + (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) x^2 z + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) x y^2 \\ + (\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta) xyz + (\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) x z^2 \\ + \alpha\beta\gamma y^3 + (\alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta) y^2 z + (\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2\beta + \beta^2\gamma^2\alpha) y z^2 \\ + \alpha^2\beta^2\gamma^2 z^3; \end{gathered}$$

or par la nature de l'équation on a

$$\alpha + \beta + \gamma = a, \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b, \quad \alpha\beta\gamma = c;$$

de plus on trouvera

$$\begin{gathered} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = a^2 - 2b, \\ \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma = ab - 3c, \\ \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma = b^2 - 2ac, \\ \alpha^2\beta\gamma + \beta^2\alpha\gamma + \gamma^2\alpha\beta = (\alpha + \beta + \gamma)\alpha\beta\gamma = ac, \\ \alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\gamma^2\beta + \beta^2\gamma^2\alpha = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)\alpha\beta\gamma = bc; \end{gathered}$$

donc faisant ces substitutions, le produit dont il s'agit sera

$$x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2$$
$$+ cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Et cette formule aura la propriété, que si on multiplie ensemble autant de semblables formules que l'on veut, le produit sera toujours aussi une formule semblable.

En effet, supposons qu'on demande le produit de cette formule-là par cette autre-ci,

$$x'^3 + ax'^2y' + (a^2 - 2b)x'^2z' + bx'y'^2 + (ab - 3c)x'y'z' + (b^2 - 2ac)x'z'^2$$
$$+ cy'^3 + acy'^2z' + bcy'z'^2 + c^2z'^3;$$

il est clair qu'il n'y aura qu'à chercher celui de ces six facteurs,

$$x + \alpha y + \alpha^2 z, \quad x + \beta y + \beta^2 z, \quad x + \gamma y + \gamma^2 z,$$
$$x' + \alpha y' + \alpha^2 z', \quad x' + \beta y' + \beta^2 z', \quad x' + \gamma y' + \gamma^2 z';$$

qu'on multiplie d'abord $x + \alpha y + \alpha^2 z$ par $x' + \alpha y' + \alpha^2 z'$, on aura ce produit partiel

$$xx' + \alpha(xy' + yx') + \alpha^2(xz' + zx' + yy') + \alpha^3(yz' + zy') + \alpha^4 zz';$$

or, α étant une des racines de l'équation $s^3 - as^2 + bs - c = 0$, on aura

$$\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0, \quad \text{par conséquent} \quad \alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c;$$

donc

$$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac;$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs, et faisant pour abréger

$$X = xx' + c(yz' + zy') + aczz',$$
$$Y = xy' + yx' - b(yz' + zy') - (ab - c)zz',$$
$$Z = xz' + zx' + yy' + a(yz' + zy') + (a^2 - b)zz',$$

le produit dont il s'agit deviendra de cette forme

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z,$$

c'est-à-dire de la même forme que chacun des produisans. Or, comme la racine α n'entre point dans les valeurs de X, Y, Z, il est clair que ces quantités seront les mêmes en changeant α en β ou en γ; donc, puisque l'on a déjà

$$(x+\alpha y+\alpha^2 z)(x^{\mathrm{I}}+\alpha y^{\mathrm{I}}+\alpha^2 z^{\mathrm{I}}) = X+\alpha Y+\alpha^2 Z,$$

on aura aussi, en changeant α en β,

$$(x+\beta y+\beta^2 z)(x^{\mathrm{I}}+\beta y^{\mathrm{I}}+\beta^2 z^{\mathrm{I}}) = X+\beta Y+\beta^2 Z,$$

et en changeant α en γ,

$$(x+\gamma y+\gamma^2 z)(x^{\mathrm{I}}+\gamma y^{\mathrm{I}}+\gamma^2 z^{\mathrm{I}}) = X+\gamma Y+\gamma^2 Z;$$

donc, multipliant ces trois équations ensemble, on aura d'un côté le produit des deux formules proposées, et de l'autre la formule

$$\begin{gathered}X^3+aX^2Y+(a^2-2b)X^2Z+bXY^2+(ab-3c)XYZ+(b^2-2ac)XZ^2\\ +cY^3+acY^2Z+bcYZ^2+c^2Z^3,\end{gathered}$$

qui sera donc égale au produit demandé, et qui est, comme l'on voit, de la même forme que chacune des deux formules dont elle est composée.

Si on avoit une troisieme formule telle que celle-ci,

$$\begin{gathered}x^{\mathrm{II}3}+ax^{\mathrm{II}2}y^{\mathrm{II}}+(a^2-2b)x^{\mathrm{II}2}z^{\mathrm{II}}+bx^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{II}2}+(ab-3c)x^{\mathrm{II}}y^{\mathrm{II}}z^{\mathrm{II}}+(b^2-2ac)x^{\mathrm{II}}z^{\mathrm{II}2}\\ +cy^{\mathrm{II}3}+acy^{\mathrm{II}2}z^{\mathrm{II}}+bcy^{\mathrm{II}}z^{\mathrm{II}2}+c^2z^{\mathrm{II}3},\end{gathered}$$

et qu'on voulût avoir le produit de cette formule et des deux précédentes, il est clair qu'il n'y auroit qu'à faire

$$\begin{aligned}X^{\mathrm{I}} &= Xx^{\mathrm{II}}+c(Yz^{\mathrm{II}}+Zy^{\mathrm{II}})+acZz^{\mathrm{II}},\\ Y^{\mathrm{I}} &= Xy^{\mathrm{II}}+Yx^{\mathrm{II}}-b(Yz^{\mathrm{II}}+Zy^{\mathrm{II}})-(ab-c)Zz^{\mathrm{II}},\\ Z^{\mathrm{I}} &= Xz^{\mathrm{II}}+Zx^{\mathrm{II}}+Yy^{\mathrm{II}}+a(Yz^{\mathrm{II}}+Zy^{\mathrm{II}})+(a^2-b)Zz^{\mathrm{II}},\end{aligned}$$

et l'on auroit pour le produit cherché

$$\begin{gathered}X^{\mathrm{I}3}+aX^{\mathrm{I}2}Y^{\mathrm{I}}+(a^2-2b)X^{\mathrm{I}2}Z^{\mathrm{I}}+bX^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}2}+(ab-3c)X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}}+(b^2-2ac)X^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}2}\\ +cY^{\mathrm{I}3}+acY^{\mathrm{I}2}Z^{\mathrm{I}}+bcY^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}2}+c^2Z^{\mathrm{I}3}.\end{gathered}$$

92. Faisons maintenant $x^{\mathrm{I}}=x$, $y^{\mathrm{I}}=y$, $z^{\mathrm{I}}=z$; nous aurons

$$\begin{aligned}X &= x^2+2cyz+acz^2,\\ Y &= 2xy-2byz-(ab-c)z^2,\\ Z &= 2xz+y^2+2ayz+(a^2-b)z^2,\end{aligned}$$

et ces valeurs satisferont à l'équation

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 + (a^2 - 2b)X^2Z + (ab - 3c)XYZ + acY^2Z \\ + (b^2 - 2ac)XZ^2 + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^2,$$

en prenant

$$V = x^3 + ax^2y + bxy^2 + cy^3 + (a^2 - 2b)x^2z + (ab - 3c)xyz + acy^2z \\ + (b^2 - 2ac)xz^2 + bcyz^2 + c^2z^3;$$

donc, si l'on avoit, par exemple, à résoudre une équation de cette forme,

$$X^3 + aX^2Y + bXY^2 + cY^3 = V^2,$$

a, b, c étant des quantités quelconques données, il n'y auroit qu'à rendre $Z = 0$, en faisant

$$2xz + y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = -\frac{y^2 + 2ayz + (a^2 - b)z^2}{2z},$$

et substituant cette valeur de x dans les expressions précédentes de X, Y et V, on aura des valeurs très-générales de ces quantités, qui satisferont à l'équation proposée.

Cette solution mérite d'être bien remarquée à cause de sa généralité et de la maniere dont nous y sommes parvenus, qui est peut-être l'unique qui puisse y conduire facilement.

On auroit de même la résolution de l'équation

$$X^{\mathrm{I}3} + aX^{\mathrm{I}2}Y^{\mathrm{I}} + (a^2 - 2b)X^{\mathrm{I}2}Z^{\mathrm{I}} + bX^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}2} + (ab - 3c)X^{\mathrm{I}}Y^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}} + (b^2 - 2ac)X^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}2} \\ + cY^{\mathrm{I}3} + acY^{\mathrm{I}2}Z^{\mathrm{I}} + bcY^{\mathrm{I}}Z^{\mathrm{I}2} + c^2Z^{\mathrm{I}3} = V^3,$$

en faisant dans les formules ci-dessus

$$x^{\mathrm{II}} = x^{\mathrm{I}} = x, \quad y^{\mathrm{II}} = y^{\mathrm{I}} = y, \quad z^{\mathrm{II}} = z^{\mathrm{I}} = z,$$

et prenant

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2 \\ + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Et on pourroit résoudre aussi successivement les cas où, au lieu de la troisieme puissance V^3, on auroit V^4, V^5, etc. mais nous allons traiter ces questions d'une maniere tout-à-fait générale, comme nous l'avons fait dans l'art. 90 ci-dessus.

93. Soit donc proposé de résoudre une équation de cette forme,

$$X^3 + aX^2Y + (a^2 - 2b)X^2Z + bXY^2 + (ab - 3c)XYZ + (b^2 - 2ac)XZ^2$$
$$+ cY^3 + acY^2Z + bcYZ^2 + c^2Z^3 = V^m.$$

Puisque la quantité qui forme le premier membre de cette équation n'est autre chose que le produit de ces trois facteurs,

$$(X + \alpha Y + \alpha^2 Z)(X + \beta Y + \beta^2 Z)(X + \gamma Y + \gamma^2 Z),$$

il est clair que pour rendre cette quantité égale à une puissance du degré m, il ne faudra que rendre chacun de ses facteurs en particulier égal à une pareille puissance. Soit donc

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m;$$

on commencera par développer la puissance m de $x + \alpha y + \alpha^2 z$ par le théoreme de NEWTON, ce qui donnera

$$x^m + mx^{m-1}(y + \alpha z)\alpha + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}(y + \alpha z)^2\alpha^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}(y + \alpha z)^3\alpha^3 +, \text{etc.}$$

ou bien, en formant les différentes puissances de $y + \alpha z$, et ordonnant ensuite par rapport aux dimensions de α,

$$x^m + mx^{m-1}y\alpha + \left(mx^{m-1}z + \frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2\right)\alpha^2$$
$$+ \left(m(m-1)x^{m-2}yz + \frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}x^{m-3}y^3\right)\alpha^3 +, \text{etc.}$$

Mais comme dans cette formule on ne voit pas aisément la loi des termes, nous supposerons en général

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m = P + P^{\text{I}}\alpha + P^{\text{II}}\alpha^2 + P^{\text{III}}\alpha^3 + P^{\text{IV}}\alpha^4 +, \text{etc.}$$

et l'on trouvera

$$
\begin{aligned}
P &= x^m,\\
P^{\mathrm{I}} &= \frac{myP}{x},\\
P^{\mathrm{II}} &= \frac{(m-1)yP^{\mathrm{I}} + 2mzP}{2x},\\
P^{\mathrm{III}} &= \frac{(m-2)yP^{\mathrm{II}} + (2m-1)zP^{\mathrm{I}}}{3x},\\
P^{\mathrm{IV}} &= \frac{(m-3)yP^{\mathrm{III}} + (2m-2)zP^{\mathrm{II}}}{4x}, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

c'est ce qui se démontre facilement par le calcul différentiel.

Maintenant on aura, à cause que α est une des racines de l'équation $s^3 - as^2 + bs - c = 0$, on aura, dis-je, $\alpha^3 - a\alpha^2 + b\alpha - c = 0$; d'où

$$\alpha^3 = a\alpha^2 - b\alpha + c;$$

donc

$$\alpha^4 = a\alpha^3 - b\alpha^2 + c\alpha = (a^2 - b)\alpha^2 - (ab - c)\alpha + ac,$$

$$\alpha^5 = (a^2 - b)\alpha^3 - (ab - c)\alpha^2 + ac\alpha = (a^3 - 2ab + c)\alpha^2 - (a^2b - b^2 - ac)\alpha + (a^2 - b)c,$$

et ainsi de suite.

De sorte que si on fait pour plus de simplicité

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{I}} &= 0\\
A^{\mathrm{II}} &= 1\\
A^{\mathrm{III}} &= a\\
A^{\mathrm{IV}} &= aA^{\mathrm{III}} - bA^{\mathrm{II}} + cA^{\mathrm{I}}\\
A^{\mathrm{V}} &= aA^{\mathrm{IV}} - bA^{\mathrm{III}} + cA^{\mathrm{II}}\\
A^{\mathrm{VI}} &= aA^{\mathrm{V}} - bA^{\mathrm{IV}} + cA^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B^{\mathrm{I}} &= 1\\
B^{\mathrm{II}} &= 0\\
B^{\mathrm{III}} &= b\\
B^{\mathrm{IV}} &= aB^{\mathrm{III}} - bB^{\mathrm{II}} + cB^{\mathrm{I}}\\
B^{\mathrm{V}} &= aB^{\mathrm{IV}} - bB^{\mathrm{III}} + cB^{\mathrm{II}}\\
B^{\mathrm{VI}} &= aB^{\mathrm{V}} - bB^{\mathrm{IV}} + cB^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}
\end{aligned}
$$

$$C^{\mathrm{I}} = 0$$
$$C^{\mathrm{II}} = 0$$
$$C^{\mathrm{III}} = c$$
$$C^{\mathrm{IV}} = aC^{\mathrm{III}} - bC^{\mathrm{II}} + cC^{\mathrm{I}}$$
$$C^{\mathrm{V}} = aC^{\mathrm{IV}} - bC^{\mathrm{III}} + cC^{\mathrm{II}}$$
$$C^{\mathrm{VI}} = aC^{\mathrm{V}} - bC^{\mathrm{IV}} + cC^{\mathrm{III}}, \text{ etc.}$$

on aura

$$\alpha = A^{\mathrm{I}}\alpha^2 - B^{\mathrm{I}}\alpha + C^{\mathrm{I}}$$
$$\alpha^2 = A^{\mathrm{II}}\alpha^2 - B^{\mathrm{II}}\alpha + C^{\mathrm{II}}$$
$$\alpha^3 = A^{\mathrm{III}}\alpha^2 - B^{\mathrm{III}}\alpha + C^{\mathrm{III}}$$
$$\alpha^4 = A^{\mathrm{IV}}\alpha^2 - B^{\mathrm{IV}}\alpha + C^{\mathrm{IV}}, \text{ etc.}$$

Substituant donc ces valeurs dans l'expression de

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^m,$$

elle se trouvera composée de trois parties, l'une toute rationnelle, l'autre toute multipliée par α, et la troisieme toute multipliée par α^2; ainsi il n'y aura qu'à comparer la premiere à X, la seconde à αY, et la troisieme à $\alpha^2 Z$, et l'on aura par ce moyen

$$X = P + P^{\mathrm{I}}C^{\mathrm{I}} + P^{\mathrm{II}}C^{\mathrm{II}} + P^{\mathrm{III}}C^{\mathrm{III}} + P^{\mathrm{IV}}C^{\mathrm{IV}} +, \text{ etc.}$$
$$Y = -P^{\mathrm{I}}B^{\mathrm{I}} - P^{\mathrm{II}}B^{\mathrm{II}} - P^{\mathrm{III}}B^{\mathrm{III}} - P^{\mathrm{IV}}B^{\mathrm{IV}} -, \text{ etc.}$$
$$Z = P^{\mathrm{I}}A^{\mathrm{I}} + P^{\mathrm{II}}A^{\mathrm{II}} + P^{\mathrm{III}}A^{\mathrm{III}} + P^{\mathrm{IV}}A^{\mathrm{IV}} +, \text{ etc.}$$

Ces valeurs satisferont donc à l'équation

$$X + \alpha Y + \alpha^2 Z = (x + \alpha y + \alpha^2 z)^m;$$

et comme la racine α n'entre point en particulier dans les expressions de X, Y et Z, il est clair qu'on pourra changer α en β, ou en γ; de sorte qu'on aura également

$$X + \beta Y + \beta^2 Z = (x + \beta y + \beta^2 z)^m,$$

et

$$X + \gamma Y + \gamma^2 Z = (x + \gamma y + \gamma^2 z)^m.$$

Or, multipliant ensemble ces trois équations, il est visible que le premier membre sera le même que celui de l'équation proposée, et que le second sera égal à une puissance m, dont la racine étant nommée V, on aura

$$V = x^3 + ax^2y + (a^2 - 2b)x^2z + bxy^2 + (ab - 3c)xyz + (b^2 - 2ac)xz^2 \\ + cy^3 + acy^2z + bcyz^2 + c^2z^3.$$

Ainsi on aura les valeurs demandées de X, Y, Z et V, lesquelles renfermeront trois indéterminées x, y, z.

94. Si on vouloit trouver des formules de quatre dimensions qui eussent les mêmes propriétés que celles que nous venons d'examiner, il faudroit considérer le produit de quatre facteurs de cette forme,

$$\begin{gathered} x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t \\ x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t \\ x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t \\ x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t, \end{gathered}$$

en supposant que α, β, γ, δ fussent les racines d'une équation du quatrieme degré, telle que celle-ci,

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0;$$

on aura ainsi

$$\begin{gathered} \alpha + \beta + \gamma + \delta = a, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b, \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c, \\ \alpha\beta\gamma\delta = d, \end{gathered}$$

moyennant quoi on pourra déterminer tous les coefficiens des différens termes du produit dont il s'agit, sans connoître les racines α, β, γ, δ en particulier. Mais comme il faudra faire pour cela différentes réductions qui peuvent ne pas se présenter facilement, on pourra s'y prendre, si on le juge plus commode, de la maniere que voici.

Qu'on suppose en général

$$x + sy + s^2z + s^3t = \varrho;$$

et comme s est déterminé par l'équation

$$s^4 - as^3 + bs^2 - cs + d = 0,$$

qu'on chasse s de ces deux équations par les regles connues, et l'équation résultante de l'évanouissement de s étant ordonnée par rapport à l'inconnue ϱ, montera au quatrieme degré; de sorte qu'elle pourra se mettre sous cette forme,

$$\varrho^4 - N\varrho^3 + P\varrho^2 - Q\varrho + R = 0.$$

Or cette équation en ϱ ne monte au quatrieme degré que parce que s peut avoir les quatre valeurs α, β, γ, δ et qu'ainsi ϱ peut avoir aussi ces quatre valeurs correspondantes,

$$\begin{aligned} &x + \alpha y + \alpha^2 z + \alpha^3 t \\ &x + \beta y + \beta^2 z + \beta^3 t \\ &x + \gamma y + \gamma^2 z + \gamma^3 t \\ &x + \delta y + \delta^2 z + \delta^3 t, \end{aligned}$$

lesquelles ne sont autre chose que les facteurs dont il s'agit d'avoir le produit. Donc, puisque le dernier terme R doit être le produit de toutes les quatre racines, ou valeurs de ϱ, il s'ensuit que cette quantité R sera le produit demandé.

Mais en voilà assez sur ce sujet, que nous pourrons peut-être reprendre dans une autre occasion.

Je terminerai ici ces Additions, que les bornes que je me suis prescrites ne me permettent pas d'étendre plus loin; peut-être même les trouvera-t-on déjà trop longues; mais les objets que j'y ai traités étant d'un genre assez nouveau et peu connu, j'ai cru devoir entrer dans plusieurs détails nécessaires pour se mettre bien au fait des méthodes que j'ai exposées, et de leurs différens usages.

FIN.