Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 7

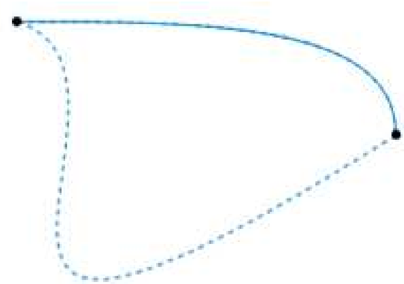
Homotope Wege

DEFINITION 7.1. Es sei $I = [0,1]$ und seien $\gamma_1, \gamma_2 \colon I \to X$ stetige Wege in einen topologischen Raum X mit der Eigenschaft, dass $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ gilt. Eine *Homotopie relativ* zu $\{0,1\}$ von γ_1 nach γ_1 ist eine stetige Abbildung

$$H \colon I \times I \longrightarrow X,$$

die die folgenden Eigenschaften erfüllt.

(1) $H(s,0) = \gamma_1(s)$ für alle $s \in I$.
(2) $H(s,1) = \gamma_2(s)$ für alle $s \in I$.
(3) $H(0,t) = \gamma_1(0)$ für alle $t \in I$.
(4) $H(1,t) = \gamma_1(1)$ für alle $t \in I$.



Zwei Wege

$$\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \longrightarrow X$$

heißen *homotop*, wenn es eine solche Homotopie zwischen ihnen gibt. Man schreibt $\gamma_0 \sim \gamma_1$ für homotope Wege. Die Homotopie ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Wege von x nach y, die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen *Homotopieklasse*.

Zwei stetige Wege kann man miteinander verknüpfen, indem man zuerst den einen Weg und anschließend den anderen Weg durchläuft. Man spricht von der Hintereinanderlegung von Wegen und schreibt einfach $\gamma\delta$, wobei γ zuerst durchlaufen wird. Als Definitionsbereich erhält man dabei das Intervall $[0,2]$. Man kann aber, indem man die beiden Wege doppelt so schnell durchläuft, auch das Einheitsintervall als Definitionsbereich wählen. Unter dem Rückweg zu γ versteht man den entgegengesetzt durchlaufenen Weg, man bezeichnet ihn mit γ^{-1}.

Lemma 7.2. *Es sei X ein topologischer Raum und seien $x, y, z \in X$ Punkte. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Homotopie zwischen stetigen Wegen von $[0,1]$ nach X mit x als Anfangspunkt und y als Endpunkt ist eine Äquivalenzrelation.*
(2) *Wenn γ_1 und γ_2 zueinander homotop sind, so sind auch die Rückwege γ_1^{-1} und γ_2^{-1} zueinander homotop.*
(3) *Wenn γ_1 und γ_2 homotope Wege von x nach y und δ_1 und δ_2 homotope Wege von y nach z sind, so sind auch die Verknüpfungen $\gamma_1\delta_1$ und $\gamma_2\delta_2$ homotop.*
(4) *Die Hintereinanderlegung $\gamma\gamma^{-1}$ ist zum konstanten Weg homotop.*

Beweis. Siehe Aufgabe 7.2, Aufgabe 7.6, Aufgabe 7.3 und Aufgabe 7.5. □

Die Fundamentalgruppe

Es sei X ein topologischer Raum, den wir als wegzusammenhängend voraussetzen wollen, zu je zwei Punkten $x, y \in X$ gibt es also einen stetigen Weg

$$\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$. Ein Weg γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist, wenn also der Startpunkt mit dem Endpunkt übereinstimmt. Dieser Punkt heißt dann auch *Aufpunkt* des Weges. Häufig betrachtet man stetige geschlossene Wege in X als stetige Abbildungen $\gamma\colon S^1 \to X$.

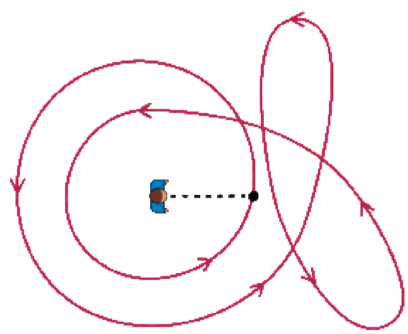
Zu geschlossenen homotopen Wegen $\gamma_0 \sim \delta_0$ und $\gamma_1 \sim \delta_1$ sind auch die Verknüpfungen $\gamma = \gamma_0\gamma_1$ und $\delta = \delta_0\delta_1$ zueinander homotop. Dies erlaubt eine Verknüpfung auf der Menge der Äquivalenzklassen von homotopen geschlossenen Wegen mit Aufpunkt x, die die Fundamentalgruppe heißt.

Definition 7.3. Es sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Punkt. Unter der *Fundamentalgruppe* $\pi_1(X, x_0)$ von X mit Aufpunkt x_0 versteht man die Menge aller Homotopieklassen von stetigen geschlossenen Wege mit Anfangs- und Endpunkt x_0 mit der Hintereinanderlegung von Wegen als Verknüpfung.

Diese Menge ist mit dem konstanten Weg (also der Homotopieklasse des konstanten Weges) als neutralem Element in der Tat eine Gruppe. Die Assoziativität ist dabei nicht völlig selbstverständlich, da drei geschlossene Weg je nach Klammerung zu unterschiedlichen Wegen auf dem Einheitsintervall führen. Die entstehenden Wege sind aber homotop, so dass auf den Homotopieklassen die Assoziativität gilt. Die inverse Homotopieklasse ist durch den entgegengesetzt durchlaufenen Weg gegeben. Deren Verknüpfung ist in der Tat homotop zum konstanten Weg, oder, wie man auch sagt, *nullhomotop*.

Definition 7.4. Ein topologischer Raum X heißt *einfach-zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und wenn jeder stetige geschlossene Weg in X nullhomotop ist.

Der einfache Zusammenhang bedeutet, dass $\pi_1(X, x) = 0$ ist (für einen beliebigen Aufpunkt $x \in X$).



Die Fundamentalgruppe der punktierten reellen Ebene ist $\mathbb{Z}$, man spricht von der *Windungszahl* des Weges.

Definition 7.5. Ein topologischer Raum X heißt *kontrahierbar* (oder *zusammenziehbar*) auf einen Punkt $P \in X$, wenn es eine stetige Abbildung

$$H\colon [0,1] \times X \longrightarrow X$$

gibt derart, dass die Eigenschaften

(1) $H(1, -) = \mathrm{Id}_X$,
(2) $H(0, -) = P$,
(3) $H(t, P) = P$ für alle $t \in [0,1]$

gelten.

Beispielsweise ist der $\mathbb{R}^n$ kontrahierbar und nach dem folgenden Satz auch einfach zusammenhängend.

Satz 7.6. *Die Fundamentalgruppe eines kontrahierbaren Raumes ist trivial.*

Lemma 7.7. *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und seien $x, y \in X$ Punkte. Dann sind die Fundamentalgruppen und $\pi_1(X, x)$ und $\pi_1(X, y)$ zueinander isomorph.*

Beweis. Siehe Aufgabe 7.10. ∎

Man beachte, dass hierbei der Isomorphismus nicht kanonisch gegeben ist, sondern von der Wahl eines Verbindungsweges von x nach y abhängt. Die Aussage ist der Grund, dass man häufig einfach $\pi_1(X)$ ohne einen expliziten Aufpunkt schreibt.

Zu einer stetigen Abbildung

$$\varphi\colon\ X \longrightarrow Y$$

und einem Punkt $x \in X$ mit $y = \varphi(x)$ induziert ein stetiger geschlossener Weg $\gamma\colon\ [0,1] \to X$ mit Aufpunkt x einen stetigen geschlossenen Weg $\varphi \circ \gamma$ in Y mit Aufpunkt y. Diese Zuordnung ist mit Homotopien von Wegen verträglich, d.h. wenn $\gamma \sim \delta$ zwei homotope Wege in X mit Aufpunkt x sind, so sind auch $\varphi \circ \gamma$ und $\varphi \circ \delta$ homotop. Daher gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_1(X,x) \longrightarrow \pi_1(Y,y).$$

Diese Abbildung ist sogar ein Gruppenhomomorphismus.

Überlagerungen und Fundamentalgruppe

Die Berechnung der Fundamentalgruppe ist im Allgemeinen schwierig. Ein wichtiges Hilfsmittel sind Überlagerungen. Zu einer Überlagerung

$$Y \longrightarrow X$$

und einem vorgegebenen Punkt $y \in Y$ über $\gamma(0) \in X$ gibt es nach Satz 6.11 eine eindeutige Liftung $\tilde{\gamma}$ mit

$$\tilde{\gamma}(0) = y.$$

Wir erwähnen ohne Beweis einige Sätze, wie die Fundamentalgruppe mit Decktransformationen zusammenhängen.

Lemma 7.8. *Es sei*

$$p\colon\ Y \longrightarrow X$$

eine Überlagerung von topologischen Räumen X und Y. Es seien

$$\gamma_1, \gamma_2\colon\ [a,b] \longrightarrow X$$

stetige homotope Wege und sei $y \in Y$ ein Punkt oberhalb von $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$. Dann sind die nach Satz 6.11 eindeutigen Liftungen

$$\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2\colon\ [a,b] \longrightarrow Y$$

mit dem Startwert y ebenfalls zueinander homotop und besitzen insbesondere den gleichen Endpunkt.

Satz 7.9. *Es sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, es sei*

$$p\colon\ Y \longrightarrow X$$

eine Überlagerung und sei Y einfach zusammenhängend. Dann ist die Decktransformationsgruppe der Überlagerung isomorph zur Fundamentalgruppe von X.

Der Isomorphismus funktioniert dabei folgendermaßen. Man fixiert einen Aufpunkt $x \in X$ und darüber einen Punkt $y \in Y$. Einer Decktransformation $\varphi\colon Y \to Y$ wird die Homotopieklasse $[\varphi \circ \gamma] \in \pi_1(X, x)$ zugeordnet, wobei γ ein verbindender Weg in Y von y nach $\varphi(y)$ ist. Aus dieser Aussage folgt beispielsweise, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ gleich $\mathbb{Z}$ ist.

Satz 7.10. *Es sei G eine endliche Gruppe, die auf einem einfach zusammenhängenden Hausdorff-Raum X fixpunktfrei operiere. Dann ist*

$$X \longrightarrow X \backslash G$$

eine Überlagerung und die Fundamentalgruppe des Bahnenraumes $X \backslash G$ ist gleich G.

Die erste Homologiegruppe

Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes ist im Allgemeinen nicht kommutativ. Man kann aber jeder nichtkommutativen Gruppe eine kommutative Gruppe zuordnen, indem man die Restklassengruppe modulo der Kommutatoruntergruppe bildet, siehe die Aufgaben. Im Fall der Fundamentalgruppe nennt man

$$H_1(X, \mathbb{Z}) := \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

die erste *Homologiegruppe* von X. Diese kann man aber auch anders und auch mit anderen Koeffizientengruppen, etwa mit $\mathbb{R}$ statt mit $\mathbb{Z}$, konstruieren. Eine duale Version werden wir im Kontext von Garben und Kohomologietheorien einführen.

Abbildungsverzeichnis