

談天目錄

第一冊

卷首 例	一
卷一 論地	五
卷二 命名	二三
卷三 測量之理	三三
卷四 地理	五九
第二冊	
卷五 天圖	一
卷六 日躔	一六

卷七 月離……………四七

卷八 動理……………六四

卷九 諸行星……………六九

卷十 諸月……………九五

第二册

卷十一 彗星……………一

卷十二 攝動……………二三

卷十三 橢圓諸根之變……………四二

卷十四 逐時經緯度之差……………六三

第四册

卷十五 恆星……………一

卷十六	恆星新理	二〇
卷十七	星林	五七
卷十八	曆法	八九
附表		一〇七

談天

卷十一 彗星

古人以彗星之行。速率甚大而無法。恆隱而忽見。光或甚巨。異于常星。故恆目爲災異。人皆畏之。雖智者不免焉。今始知其行與繞日諸星同理。未嘗無法。然其狀及功用。亦未能深悉。又有難解者數事。如尾其一也。凡此俱俟後賢深考之。

彗之見于史者。多至數百次。意古時未有遠鏡。所見者彗之大者耳。近代遠鏡日精。大率每年必見一二彗。甚或二彗三彗並見于一時。故知彗之數必多至數千。有彗晝在地平上。則不能見。惟日食既方見之。漢宣帝元康四年日食。見大彗在日旁。事載賽乃加所著書。又有數彗光最大。正午亦能見。載于史者。明建文五年嘉靖十一年。近道光二十三年。諸彗皆是也。而前古漢初元五年。羅馬國主該撒亞古士督新嗣位。大會臣民。陳百戲。賽祀鬼神。彗忽晝見。時前主該撒儒略死未逾時。國人皆謂彗卽儒

略之神也。至作詩歌詠其事。

凡彗之頭。大率爲大光體。其狀不一定。中心一點最明。如一行星。或如一恆星。背日之面。發長光二道。近頭合爲一。或不合漸遠頭漸闊漸散。其本末略似流星後之光。或似火箭後之光。是謂尾。亞利斯多。託周威烈王五年之彗。尾長六十度。而近代萬歷四十六年之彗。尾長一百零四度。康熙十九年之彗。尾長七十度。或云九十度。乾隆三十四年之彗。尾長九十七度。道光二十三年之彗。尾長六十五度。二版

二乃嘉慶二十四年之彗也。此彗不甚大。然不難目見之。

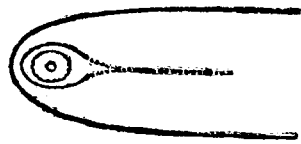
彗非恆有尾。有光甚明而尾短不顯者。有體甚大而絕無尾者。萬歷十三年。乾隆二十八年。二次所見彗是也。葛西尼言康熙三年二十一年二次之彗爲正圓形。甚清皙。若木星然。彗或有數尾者。乾隆九年之彗有六尾。如摺扇狀。長三十度。道光三年見一小彗二尾。其交角約一百六十度。一尾背日。光更明。一尾幾向日。稍淡。凡彗之尾恆微曲向後。若有力撓之。

凡小彗非遠鏡不能見者甚多。或無尾。望之若正圓或橢圓之星氣。漸近中心漸厚。疑無實體。女士密哲勒于道光二十七年八月二十七日。用一百倍力之遠鏡。測一彗正過五等恆星。不能言其質何邊。

爲厚。此恆星地面霧氣高十餘尺。尙能掩之。而隔彗望之甚明。此彗非實體之證。彗雖大。不見有朔弦望之象。然借日光而明。無可疑者。蓋彗乃薄氣積成。能透日光。故內外透明也。竊意彗體甚小。而包體之氣甚大。體與氣俱受日光而明。則上三事俱非難解矣。譬如日落時。天半之霞。通體光明。以彗之薄比之。此霞猶是實體也。故以目視彗。疑爲實體。用遠鏡察之。知非實體。或中心有一點更明者。意是實體耳。此實體甚小。其攝力不能收束所包之氣。故氣漲。甚大甚薄也。假如地球之質積變小。僅賸千分之一。則攝外氣之力亦變小。僅得千分之一。其氣必漲大。多一千倍。或不止一千倍。蓋氣距中心愈遠。攝力愈小。故也。然氣雖大。必仍包其中體。此理僅能解彗氣之薄。至其尾常別有理也。

彗之頭。其外體或似煙。或似霧。或似雲。可以上條理解之。尾之本包頭。而與頭不相連。望之若雲二層。中有空處。其狀如水瀉。其曲勢合拋物線。頭在內。近瀉之頂。如圖。此可明尾分爲二之故。人于地斜望其瀉。故愈近邊光愈深。

彗之行。一若無法。有數日內連次見者。有歷數月見者。有行甚緩。有行甚速。亦有于本



道之二處。一甚緩。一甚速者。明成化八年之彗。其最速時一日中過四十度。有順有逆有曲折。又諸彗之道。徧天空皆有之。不似諸行星道。俱近黃道一帶也。有初見光甚淡而小。行甚緩。尾甚微。既而漸速。光漸明大。尾出漸大。甚長且甚明。至近日而隱復見出對邊。大率過卑點後光最大。尾亦最長。故疑彗之尾生于日光也。又過卑點後。其行先速後遲。久之尾漸短。光亦漸淡而小。以至不見。

若不知攝力之理。則彗之行。無法能解之。奈端已考明繞日諸體。皆依圓錐諸曲線而行。因悟彗星道亦必依此理。康熙十九年之彗尾長。且近日。用以驗其理最便。因測之。果合。其道爲橢圓而極長。與拋物線幾無別。日居其一心。彗之行道。所過面積。與時有比例。與行星無異。此後人皆信之。無復疑者。

凡有彗星見。大率三次測其赤道經緯度。以推其橢圓道。或拋物道之大小及方向。即可定其諸根數。曰最卑點之經度。曰正交點之經度。曰與黃道交角度。曰半長徑。曰兩心差。曰過最卑之時。及繞日順逆行。大略皆與行星同。諸根既定。即可依法推其全道。詳卷九再論從地心之視方位條而更測驗以考其合否。考驗之法。此爲最嚴。

拋物線爲圓錐上橢圓與雙曲線二線分界處之一線。卽長徑大至無窮之橢圓。彗所行橢圓道大率

極長。故見時其所行道依拋物線推之。不覺其不合。然彗有再見者。若其道爲拋物線。則已過最卑後。不能復回。而或入于恆星中。或滅于天空。安能再見耶。今測得彗星行橢圓道者居多。此等彗若不因行星攝動。令道大變。必永爲太陽之屬星。或疑有彗行雙線道者。但未有二人詳推其道而得實證。彗星道之根數已知。則無論何時。距地球數及尾之實方向亦可知。故其頭之實徑。尾之實長實廣。俱不難推。今取已推得者。錄數則于此。以廣見聞。康熙十九年之彗。過最卑點後僅二日。奈端測其尾。已長一億七千萬里。推其最長時。必至三億六千萬里。乾隆三十四年之彗。其尾長一億四千萬里。嘉慶十六年之彗。其尾長三億一千萬里。其頭在透光氣中了了可見。與尾不連。實徑一百六十萬里。其實漲大至此。以意度之。必不能復斂。其中心質積微。攝力甚小故也。凡彗數次復見。其尾漸小。或亦因此也。

康熙二十一年有彗見。尾長三十度。好里測其過最卑。得諸根數。與嘉靖十年萬曆三十五年二次之彗。根數略同。意必一彗也。其再見約計七十五或七十六年。因言乾隆二十四年必再見。及期將至。天學家俱欲驗其言。或恐因大行星攝動。必生差。格來羅依奈端攝力之理。推得因土星攝動。常退後一

百日。因木星攝動。當退後五百十八日。并之。得六百十八日。乃依根數預推其時。內減此日數。謂見時當在乾隆二十四年清明前後二月之中。既而二月十四日。彗星果見。在清明前二十四日。其後精歷算者。復預推其再見過最卑之時。大慕鎖推得道光十五年九月十四日。邦的古浪推得九月十七日。陸孫白推得九月二十一日。立曼推得十月初七日。而陸孫白立曼二家。細考康熙二十一年乾隆二十四年測簿。又細推諸行星之攝動。故人更信之。六月三十日。立曼以所推刊板傳送。閏六月十一日。羅馬天氣晴朗。最先見之。若淡星氣然。與陸孫白所推是日當在之處。不差一度。二十六日。人共見之。所過之道略與所推合。九月二十六日。過最卑。後其行向南。北半球不能見。十六年正月。至三月。俱見于南半球。至三月二十日而隱。此彗因好里所測定。即名好里彗云。

好里彗道光間見時。遠鏡較乾隆時力更大。而統地球皆測之。故考察最詳。初見時距日甚遠。僅若小圓星氣。微橢。無尾。有一點較明。不在中心。八月十一日。尾初發。逐日漸大。至十四日。長四五度。二十四日。至二十度。為最長。既而漸小。至九月初八日。僅長三度。十五日。二度半。意未至最卑點。其尾已隱。過最卑點日。俄羅斯之波羅略有人測之。不言有尾也。當八月十一日。尾初發時。其中體忽明。向日之面

發光一道。未幾即隱。既而復發。至十七日其勢更猛。既而時隱時發。以至不見。其光之狀及方向變化不定。連二夜無時或同。有時爲一道。距中體不遠。有時爲扇形。有時或二道。或三道。或多道。發于各方向。如六板一圖甲爲八月十七。乙爲十八。丙爲十九。丁爲二十一。四夜內中體發光之狀也。向上卽向日之面。因頭太大不能作。戊圖亦十八夜之狀。兼中體與頭作之。乃縮本也。此時見光道擺動于向日線之左右。一若指南針擺動于午線之左右。其光之本甚明。距中體稍遠卽暗。散入空中而不見。其形曲向後。若煙或水氣出小孔。遇風不能當之狀。天學家據此立彗星例若干條如左。

一、凡彗之中體。受日之熱必發氣。其氣于彗體包力小處洩出。條條直射。意此氣洩時必有令彗倒退力。而彗行之方向。必因之微變。

一、中體發氣。必在向日之面。故洩出之方向恆對日。

一、氣洩出。日有力推之令退至中體之後。行甚遠。而成尾之質。

一、彗之質。有不變氣者。有變氣而包中體。以成頭及鬚者。

一、日推氣成尾之力。與攝力異。而較攝力更大。何則此氣洩時。有中體漲力。又有彗之本行力。而退後

甚速。故知推力甚大。蓋推力能銷盡此二力。尙有餘力。推氣令急向後也。

一、若彗之攝力。不大于一切萬物之攝力。尾必離彗而去。竊意尾離彗中體如是之遠。中體如是之小。其攝力必不能攝定之。然則彗每近日一次。必稍減體中成尾之質。久之。能令洩出之氣漸少。而其狀漸似行星。

一、續彗尾發至甚遠。意必散于天空。而不能回聚至中體。故每過最卑點一次。必稍減中體成尾之質。因成尾之質。不受日之攝力。而受日之推力。則減餘之質。受日之攝力必益大。與體質之多少爲反比。行道爲橢圓。每過最卑點一次。其周時必減小于前一次之周時。至受日推力之質盡去而止。

好里彗過最卑後二月不見。至十二月初八夜始復見。其狀大異于前。尾已無。以目望之。大如四五等星。而薄若星氣。用大力遠鏡窺之。爲小光面。徑二分強。外有氣包之。鬚甚多。其面內近心處。有中體。略明。背日發一短光線。如六版一圖中之己。彗離日稍遠。鬚速滅。若面食之。而其面驟變大。初九及十六日。依彗距地。以分微尺測而推之。其光面變大之比。若一與四十比。從此漸大漸薄。以至不見。其不見由于無光可測。非關遠也。變大時。其面背日之半。略變長。其全形作拋物線狀。如六版一圖中之庚。

向日之半。恆有明皙之界。而底變淡難辨。意此時若光未滅。亦能見其發尾。但其面漸大漸暗。故惟見其後。有若尾之根者。目與小力遠鏡。俱能察之。而彗已極遠。數夜遂不見。拋物包漸大漸暗時。其中體無大變。但所發之光線。漸變長而明。其方向合拋物體之軸。亦不似前向日發光時變化無定也。竊意若前日之向日發光。爲養尾之用。則今日之背日發光。必爲收尾之用。久之。此光亦漸變暗。又末一夜所見之狀。如始一夜所見之狀。一若小圓星氣。近中心有光點也。

彗之見于史者。中有若干次。或疑卽一彗。一爲康熙十九年之彗。推得其周時爲五百七十五年。其前一次。北宋崇寧五年正月。時君士但丁及猶太亦見之。故中西史中俱載焉。又前一次。陳太建七年四月。史載正午見彗。近日。又前一次。前漢初元五年。彗書見。意卽一彗也。又前有二次。一載古希臘書。一載和馬詩。此時之歷不甚明。今推之。一當在周頃王元年。一當在殷時也。英士韋思敦。謂此彗昔行近地時。成挪亞之洪水云。

續此類之彗。所見者罕。前所記者。可爲典要。因格細辨所記康熙十九年彗星之理。其內有諸行星攝動之力。依所推得者。言其周時。既爲五百七十五年。則無有橢圓道能合之。故憶度其周時。當爲八

千八百十四年也。另有所記北宋崇寧五年之彗。與康熙十九年之彗。不能合一道。故以此二彗爲一彗。必不能也。

一爲明嘉靖三十五年之彗。甚大。近或推得。約于咸豐十年當復見。而至今未見也。此彗或疑卽南宋景定五年七月之彗。欣特曾取當時測簿細推之。根數悉合。無可疑也。又宋開寶八年六月之彗。其光日出後尙能見。尾長四十度。又晉太元二十年所見。漢永元十六年所見。恐皆卽此彗。其周時約二百九十二年弱。又順治十八年。明嘉靖十一年。建文五年。南宋紹興十五年。唐大順二年四月。蜀漢延熙六年。俱有大彗。或云是一彗。其周時一百二十九年。果爾。則乾隆五十四五十五年之間。當再見。而竟不見。意其過最卑。或在夏至後一月。則以其道之方向推之。法當恆隱也。嘉靖十一年順治十八年二次測簿。墨商曾細推之。謂根數不同。恐非一彗。阿爾白士覆推。所得嘉靖年根數。與墨商大異。而順治年根數。與墨商合。故此一彗。尙未能定。

彗之周時有甚小者。一曰囚格彗。初推得其根而預定其再見時者。爲白靈之囚格。卽以人之名名之也。亦行橢圓道。兩心差甚大。其道與黃道交角約十三度二十二分。其周時爲一千二百十一日。嘉慶

二十四年。用四次測簿參考得之。因格推得其橢圓道。謂道光二年當復見。至期果見。龍格子新南維立斯巴拉馬大測之時。歐羅巴州不見。此後天下星臺。皆預推而測之。以因格彗逐次過最卑之時。細考之。除諸行星之攝動外。尚有差覺。其周漸小。每周減一百分之十一。如此。距日之中數及長徑。亦必略變小。因格言此必天空中有薄氣阻其行。令速率變小。故離心力亦變小。而日之攝力。拉之令近也。此說若確。則彗之體若非自消盡。久之必與日相併。惟因其體質之輕。故無所不可依前言。本卷彗星例詳能有別理解說之。彗體可不必滅也。又測因格彗之體積。漸近日漸小。漸遠日漸大。與好里彗同。乏勒思謂徧天空有薄氣。漸近日漸厚。故擠彗之體。令變小也。果爾。則將謂彗體之外如一片。令內氣與天空氣不通耶。恐未必然。竊意因距日遠近。冷熱不同。令彗之體或變爲雲。或變爲不能見之薄氣。故覺有大小耳。善闡案。此恐乏氏之說不誤。此彗無尾。有小中體。不在中心。恆偏于向日之一邊。其形狀未能測定。一曰比乙拉彗。乃道光六年比乙拉在奧地利所測得者。意即乾隆三十七年及嘉慶十年之彗也。所行道甚橢。其周時爲二千四百十日。其道與黃道交角十二度三十四分。道光十二年二十六年咸豐二年俱爲再見之期。其交點最近地道。道光十二年。設地行速一月。必遇彗于交點。恐亦一大危事也。比乙

拉彗甚小。最明時尙不能以目見。而道光二十五年。乃獨顯一大異事。忽分爲二彗。並行七十度。遠鏡能合觀之。十一月二十一日。初覺有異。望之如一梨。至十二月十六日。米利堅華盛頓初見。分爲二。十八日。統歐羅巴州皆見爲雙彗。初分時見小彗之中體。距本中體之心二分。其距心線之方向與經圈交角約三百二十八度。小彗在本彗之北。從此漸分爲二。至二十六年正月初四日。小彗距本彗心三分。十二日距心四分。十八日距心五分。二月初八日。距心九分十九秒。而距心線之方向略不變。其分後二彗各有變狀。且各有中體及短尾。尾之方向平行。與距心線略近正交。十二月十六日。新彗較舊彗小而暗。其後大小明暗互相消長。正月十四日。新彗爲月所奪。而舊彗仍見。十五日。二彗大小明暗略同。十九至二十一日。新彗明于舊彗。中體清皙若恆星。二十三日。舊彗倍明于新彗。中體最明若恆星。從此新彗漸暗。直至二月十八日後。二彗並見。至二月二十七日。而僅見一彗。至三月二十七日而俱隱。二彗互爲明暗時。新彗于尾之外。另發光一條作弧形。與舊彗相聯若橋然。舊彗復明時。亦另發光一條。故正月二十七二十八二夜。視舊彗若有三小尾。其一聯于新彗。三尾之角約一百二十度。時瑞士日內瓦星臺官拔蘭大木。詳考測簿。分推得二彗之根數。謂正月十五夜至二月二十五夜。所見

二體相距之大小。乃視距非真距也。準地距二彗線。及此距線與二彗聯線之交角。推其真距約三十九倍地半徑。幾及月地距三分之二。彗之質甚微。相距如是遠。其相與之攝動必幾若無。

續此事甚奇也。因其根數。知此雙彗。在咸豐二年。必復見。測天家咸詳測之。至六七月間。英國堪比日星臺查里司。羅馬之色幾與斯得路佛三人。皆測此二彗。其方向相與之勢相同。所以當時見太陽。

又加一屬星也。見六版第二圖參弟尼以根數推之。言其二彗當于同治四年十二月十一日與十三日。各復過最卑點。然而諸測天家雖勤測之。皆未見之也。

又有一彗。道光二十三年十月初一日。巴黎斯飛測得之。其道爲橢圓。呢谷來推其根數。力佛理亞復改正之。其周時爲二千七百十七日六八。兩心差爲 $\odot \cdot 55596$ 。其道與黃道交角十一度二十分三十一秒。依諸根及諸行星攝動力。推得再見過最卑。約在咸豐元年三月初二日。其後于道光三十年十一月二十三夜。查里斯測見之。斯得路佛亦測之。至明年二月初三日而隱。在三十日過最卑點。與推得之數略合。咸豐八年復過最卑。

諸彗之道。俱爲極長橢圓。與黃道交角又大小不一。則其出入諸行星道。必有時與星最近。甚者或相

遇。如比乙拉彗道與地道甚近。恐數百萬年後。與地球必有相遇之時。又乾隆三十五年之彗。閏五月初八日。距地最近時。約七倍月地距。又三十二年。此彗與木星最近時。爲五十八分。木星道半徑之一。或謂此時爲木星所攝動。而其道愈近地。勒石力推此彗之兩心差爲○·七八五八。其周時約五年半。其道與黃道交角一度二十四分。乾隆三十五年六月二十二日。過最卑。四十一年復過最卑。近日不能見。四十四年七月十一日。距木星最近。爲四百九十一分。木星道半徑之一。卽木星第四月道半徑五分之四。此時受木星攝動更大。其道大變。測算諸根。與勒石力前所推大異。而木星及諸月。不見有攝動。故知彗體之質甚微也。

道光二十四年七月初九日。羅馬星臺官迪未谷測得一彗。知其道爲橢圓。與拋物線大不合。自二十日過最卑。直至十月二十八日。每夜俱可測之。各家推其根數。大略相同。其周時約一千九百九十日。若無攝動。再過最卑。當在道光二十九年十二月。此時彗恆近日。不能見。凡小彗。測其體恆不清。暫。故最難推。今以諸家所推根數列爲表。令讀者知測算之精密也。推者六家。曰呢谷來。曰欣特。曰哥勒。曰斯迷。曰飛。曰書白。曰白倫諾。此彗最明時。目亦能見。有小尾。力佛理亞細推。謂與康熙十七年所見同一彗。而樂竭與毛費二人。謂與萬

歷十三年第谷所測者同一彗。又乾隆八年三十一年嘉慶二十四年三次所見恐俱卽此彗也。凡牛
 以地道牛徑爲一兩。心差以牛長徑爲一。

道光二十四年七月各家所推迪未谷彗諸根數表

	過最卑時	最卑黃經度	正交黃經度	交黃道角	牛長徑	兩心差	周日				
尼	三·二九四八	三四三	三	五·五	六三	四九	二五	四·四五八	三·〇九五	〇·六七六	一九九二
欣	三·三七六六	三四三	三	四·一	五	二四·一	二五	二七·一	三·〇八五二	〇·六五六	一九九〇
哥	三·二七六四	三四三	二九	四·九	六	四	二五	一·九	三·二二二	〇·六八一	二四〇〇
飛	三·三〇九九	三四三	三一	一五·五	六三	四九	二五	四·五〇	三·〇九九六	〇·六七六	一九九二
書	三·三三七〇	三四三	三	三一·五	六三	五	二五	五·八	三·〇三六三	〇·六八六	一九九三
白	三·二九五六	三四三	三〇	四·六	六	四	二五	五·三	三·〇三五	〇·六七八	一九九六

道光二十六年二月初一日。勃陸孫測得一彗。言其道非拋物線。今以諸家推得橢圓諸根數。列爲表。
 推者四家曰白倫諸曰欣特曰威令根曰特漢。此彗甚暗。形狀無大異。其根數與嘉靖十一年之彗。大略相近。

道光二十六年各家所推勃陸孫彗諸根數表

特	威	欣	白	月	日	過最卑時	最卑黃經度	正交黃經度	交黃道度	半長徑	兩心差	周日
一	二	二	二	一	二	三〇·八五五	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六
						二六·四五一	二六·三三	一〇三·三	三〇·二	二·八七五三	·七三三	一七六

道光二十六年閏五月初三夜。彼得測得一彗。達喉詳推其根數。得周時五千八百零四日三。兩心差卑。○·七五六七二。半長徑六·三二〇六六。交黃道角三十一度二分十四秒。是年五月初八日過最卑。

道光二十三年。有大彗見。未過最卑時。統地球俱不見。正月二十九日過最卑。二月初一日始見于萬地曼蘭。初三日。北半球熱帶內初見其尾。而赤道南日落後。見其頭。在西地平上用遠鏡察之。其面若行星。尾分爲二。交角甚小。有黑氣一道隔之。長約二十五度。尾根有光。射出與尾同方向。其北又發光一道。引長其尾。與尾交角五六度。其長距頭六十五度。其南亦有光一道。但暗于北者。中體甚明。若一

二等恆星。至十一日。若三等恆星。光驟暗。十九日日不能見。而尾仍極明。愈遠中體愈明。若以目視。不能見其與頭連。初三日後。尾成一長光帶。覺微彎。十一日。加爾各搭革勒里休測見尾之南。又發一尾。與本尾交角十八度。而長幾倍本尾。約一百度。前後日俱不見。于一日中發之。能令如是遠。可想見中體發力之大。若所發爲實質。則其力更強于攝力。此彗過最卑後一日。印度貿易公局有船曰阿文格論頭爾。過好望角。日將落時。共見此彗。狀若小佩刀。是日米利堅波德蘭格拉格。午後三小時六分。用紀限儀測見其中體。距日心僅三度五十分四十三秒。中體與尾俱甚明皙。如月在清天。近頭處色略異。格氏謂中體如此厚。設過日面。亦能見也。又測尾長五十九分。約倍日視徑。此日。彗距地與日略同。推其實長約五百萬里。此爲古今最異之彗。故其根數。歷算家多推之。今擇其尤密者。列爲表。凡最卑

地道半徑爲一。此彗之異者。最卑距日甚近。古今所見之彗。未有若是近日者。試以日地距之中數爲半徑。命爲一。則日半徑爲十六分一秒五之正弦。○·○○四六六。取下表中諸距日之中數。爲○·○○五三四。大于日半徑僅○·○○〇六八。約爲七分之一。是彗在最卑時。距日面數。如七分日半徑之一。凡日所發光與熱。距日愈遠則愈分而愈薄。其比例如半天球與日視面之比。地球所見日之視面。其

徑爲三十二分三秒。此彗在最卑時所見日之視面。其徑爲一百二十一度三十二分。準幾何。凡球截面之比。若四分截弧之一之正弦平方比。依法推得地與彗所見日二視面之比。若一與四萬七千零四十二之比。即地與彗所受日光熱之比。試思若四萬七千零四十二箇太陽。合以照我。其光與熱。當若何耶。巴格所造陽隧。徑二十七寸。聚光點距鏡六尺半。用時光熱盡彙于聚光點。必與見日視徑二十三度二十六分處同。比球所受光熱。大一千九百十五倍。與彗所受光熱比。若二與四十九比。而此鏡已能鎔瑪瑙與水晶。或再用一斂光鏡增其力至七倍。則比地所受光熱爲一萬三千四百零五倍。即此聚光點之光熱。與彗所受光熱比。若二與七比。然則此彗所受光熱。真不可思議也。此彗在最卑時。其速率一秒中行一千零五十八里。自正交至中交。不過二小時強。在中交距日。倍最卑時。所受光熱少四分之三。按康熙十九年之彗。最卑距日心爲 $\odot \cdot \odot \cdot \odot$ 六二。其距日面如三分日半徑之一弱。較此彗一倍強。奈端推其受熱。已多于赤鐵二千倍云。此彗之道雖未能細推。然測知其非拋物線而爲橢圓。康熙七年。里斯本。薄羅那。及巴西等地。俱見大彗之尾。與此時所見之尾略同。自正月二十一日後。數日間。其方向亦略同。光甚大。照海面生影。其後頭出地平。亦如此彗不甚清皙。當時雖未細測。

但諸事俱相似。人多意其爲一彗。其周時約一百七十五年。後細考舊彗測簿而益信。又考史而知晉泰始四年正月。劉宋元嘉十九年九月。唐貞元七年。宋開寶元年。南宋紹興十三年。元延祐四年。明弘治七年。諸次所見。必皆卽此彗也。蓋準所推。常見于泰始四年。劉宋元嘉二十年。唐武德元年。貞元九年。開寶元年。紹興十三年。延祐五年。弘治六年。與史所見或同年。或先後一二年。因有諸行星攝動。故不能一定也。或疑康熙二十八年十月二十六日。至十一月十一日所見之彗。與此彗同。爾時粗測其方位。冰立取測簿細推其根數。最卑甚近日。又最卑及交點之經度。俱略同。但交黃道角六十九度。大不合。庇爾思復推之。僅三十度四分。則非甚不合。然則一百七十五年中。常見八次。其周時爲二十一年八七五。自道光二十三年正月二十九日上推。見于史者。不獨如上所云。又有雍正十一年。康熙二十八年。明嘉靖三十八年。及十六年。正德十年。成化七年。宣德元年。永樂三年。洪武十六年。元至正二十一年。後至元六年二月。元貞二年。宋咸淳十年。紹定三年。嘉定元年。元符元年。嘉祐元年七月。景祐元年。大中祥符五年。淳化元年。後唐同光三年。唐大中十一年九月。嗣聖元年。梁永壽元年。中大通二年。劉宋永和二年。蜀漢延熙八年。或十年。漢光和三年冬。延熹元年。諸彗疑皆是也。果爾。則同治三年

冬過最卑前後。俱當見于南半球。後格勞孫合各次測簿。統考其根數。謂其周時僅六年三八。或云二十一年八七五。以三分之。當爲七年二九二。方與諸史合。此說恐未必合理。然用如此小周時。其行法尙能合。則二十一年之周時。更可信矣。

諸家所推道光二十三年正月大彗星諸根數表

推步家	過最卑時最卑黃經度				正交黃經度			交黃道角			最卑距日	順逆行
	日	度	分	秒	度	分	秒	度	分	秒		
因格	三〇・二七四五〇	二七九	二三〇	四	一五	五	三五	一二	三八	〇・〇〇五二二	逆行	
拔爾大木	三〇・二五二八七	二七八	一八	三	五一	四	三五	八	五六	〇・〇〇五八一	逆行	
腦爾	三〇・二一九九二	二七八	二八	二五	一	四	三五	三五	二九	〇・〇〇五七九	逆行	
呢谷來	三〇・二五三七七	二七八	三六	三三	一	三	三五	三五	三六	〇・〇〇五五八	逆行	
彼得	三〇・二三六七三	二七九	五九	一七	三	五	三五	一五	四二	〇・〇〇四二八	逆行	

近代天算家所最究心者莫如彗。推彗之法。日精一日。考諸行星攝動之力。日密一日。徧查古史所記及測簿。以新法盡推其根數。一有彗見。輒用新法考之。三四日後。卽能得其根數之大略。復細測而推

之。遂愈密。人人樂此不疲。略覺有不合拋物線處。則大喜。輒徧查舊彗根數相合否。以證其爲橢圓道。若干年復見也。又悉推諸行星之攝動。以證其見之期。或差而前。或差而後。噠國昔王下令。徧地球能測得一彗者。旌以金牌。由是測彗者益衆。亦益精。而得彗亦益多。每得一彗。卽郵告噠國。噠國卽以金牌郵寄之。而以其測單徧送各國星臺。令詳測之。故彗一出。卽能盡得其根數也。

續測天諸家所得彗星之多者。有木斯得二十九。梅西爾得十四。墨商得十。迪末谷得八。女士侯失勒。加羅林得八。又米利堅女士密哲勒與旱堡女士龍格于道光二十七年。異處同時得一彗。而密哲勒稍先。

因測彗。又得旁通諸理。憑周時差。而知徧天空有薄氣。能阻動其一也。又彗近行星時。測其攝動力。可推行星質積多少。如水星之質積古昔未知。道光十八年。有彗近之。始大略能推定。二十八年十二月二十六日。是彗復過水星。較前更近。僅十五倍月地距。而推得其質積益密。

彗之尾若係實質。則常其過最卑時。疾行旋轉而尾不曲。與攝力理不合。與重學中動理亦不合。康熙十九年道光二十三年二次之彗。其尾幾與地道半徑等。旋過最卑皆不壞。而道光之彗。其尾之方向。

旋過一百八十度。僅二小時略強。如是之速。恐未必是實質也。或云彗能于薄氣中作負影。似有理。此須俟後世格致家精密察。方能定也。

有多彗。測其道似與拋物線合。或謂彗本非日所屬。因入我日屬界。而暫遵日法。此說是否難定。若果爾。則諸橢圓道之彗。昔時必因近行星爲所攝動。而變拋物線爲橢圓也。恐又有彗近行星。或變拋物線爲雙線者。然變爲橢圓。必行無數周。變爲雙線。則永不再見。故測得彗道雙線少而橢圓多也。

諸行星諸月大率皆順行。而彗則有逆行者。嘉慶時所見諸彗之道。拉白拉瑟推其與黃道交角之中數。略近九十度。則皆可云順行。因交角鈍。似逆行耳。近代彗之橢圓根數。已推定者。凡三十六。其交黃道角大小不等。逆行者只有五彗。其二已有確證。一卽好里彗。一乃道光二十三年之大彗也。而交角十七度以內。無一逆行者。此外書瑪割與阿爾白士所推得道光三年以前諸彗之根數。其交角小于十度者九彗。逆行者二。小于二十度者二十三彗。逆行者七。凡道近于黃道。而周時有一定者。大率皆順行。與行星同。欣特言周時一定之彗。當分爲二類。一周時約七十五年。略與天王等。好里彗周時七十六年。阿爾白士測得一彗七十四年。迪未谷所測得第四彗七十三年。勃陸孫所測得第三彗七十

五年共四彗。一周時略如小行星與木星周時之中率。詳末卷附表中。又言小行星中有一二路如彗之狀。

續凡有定時之彗。其道之長徑略在一方向。向北在天球黃經七十度。北緯三十度。乃近天河內積水星也。其向南亦在天河相對之一點。

近代嘉慶十六年。道光三年。二大彗之外。咸豐八年杜捺底測得第三大彗。自四月二十一日至十二月間。其頭甚明。尾似羽帚。最長至三十度。曲向彗已離之處。似留于後者。其曲非因有所阻也。乃因尾自彗發出。彗向日而行與其本速率而行之和而然也。米利堅測者。云有長狹而直之淡光線二條。爲羽帚連其頭內外曲線之二切線。用大力遠鏡觀其頭形。繁而奇。咸豐十一年見一大彗。其尾甚長。而一邊直。六月二十三日。地球雖未通過其尾。亦已甚近。同治元年。又見一大彗。其頭結成定質。噴氣之光。獨有一條。

卷十二 攝動

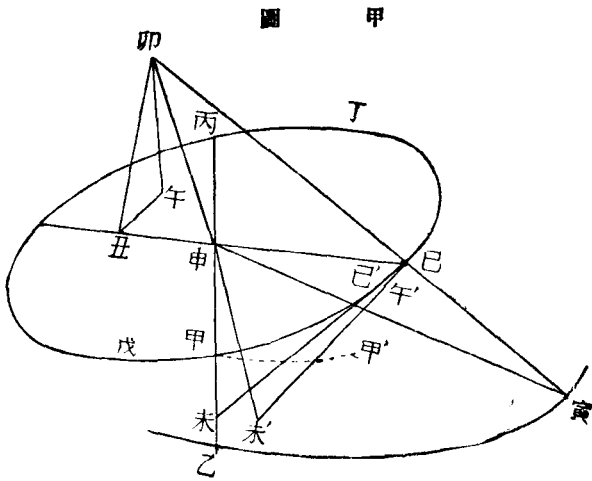
前數卷屢言月與行星于刻白爾所定三例外。尙有小差。名曰攝動。在行星。則因他行星之攝力加之。令繞日之道小變。在月。則有二故。一因本星之他月攝力加之。令繞星之道小變。二因日與他行星之攝力加于本星及月。時時不同。又生小變。攝動之差雖甚微。然積久則成大差。故古昔所定橢圓之根數。今不合也。

設天空只有一日一行星。則或行星繞日。或日與行星共繞一公重心。其所行之道。必永久不變。設空中又增一體。則新體必攝二舊體。令其道生微差。蓋攝力加于二體不等。則二體相連屬之例必變而生差也。故差非生于攝二體之全力。而生于攝二體力之較也。

諸行星之質積。較日皆甚微。最大者爲木星。亦僅得一千一百分日質積之一。故其攝力。較日亦甚微。而攝動他星之力甚小也。諸月所受攝動力。最大者莫如日。但月距本星甚近。而距日甚遠。故星月二體。受日攝力之較甚微。全攝力令星與月同繞日。而其較令月星攝動。奈端推我月受日攝動力之中數。爲六十三萬八千分地面攝力即重之一。而爲地令月行橢圓力一百七十九分之一。日之攝動力尙如此小。他行星攝動力之微更可知矣。故諸體攝動力之和。所生差甚微。然積久而著。則令所行之

道亦變。其變之源。從剎那時中起。故當以法推剎那時中諸體攝動之和力所生微差。以爲根。設欲密之又密。當推諸體互相攝動。以求本體之差。然若歷時非甚遠。亦不必如是。但分推各體攝動本體所生差。并之即得。其法恆推三體之力。一中體。一發攝動力體。一受攝動力體。發力受力二體。可交互相易。中體恆作不動論。設二星相攝動。則日爲中體。設二月相攝動。或月爲日所攝動。則以本星爲中體。將日常作最遠之大月。其繞本星之道。如本星繞日之道。凡相攝動之二體。恆稱內行星外行星。日攝動月。月卽內行星。日卽外行星也。乃命發力體爲寅。中體爲申。受力體爲巳。設寅加攝力于申巳二體等。且平行。則巳或繞申行。或巳申共繞公重心。其行俱不變。此如二球在空中。受地攝力下墜。其方位不變。攝力等故也。然攝力之理。近則大而遠則小。故寅加于巳申二體之力。必不能恆等。又方向恆不同。則亦不能平行。故不能不生攝動。今細論之。加于巳體者有四力。一申攝巳之力。一巳攝申之力。巳引申猶申引巳也。此二力俱爲巳申方向。并爲一力。巳依此力繞申成橢圓。一寅之攝力。在寅巳方向。令巳向寅。一寅加申之攝力。令巳于寅申平行線上退行。善闡案此力加申不加巳。申依此力進。行一若巳依此力退行而申不動也。如圖丙巳甲爲受攝動體之道。寅乙爲發攝動體之道。二道面之交線爲丙申甲乙。其交角爲巳甲甲引長

寅已成寅卯。令寅卯與寅申比。若寅申之平方與寅巳之平方比。則申寅線顯寅加申之攝力大小方向。寅申線即顯令巳退行力之大小方向。卯寅線顯寅加于巳之攝力大小方向。準重學理。卯寅寅申二力之并力線為卯申。即顯巳所受攝動力之大小方向也。自巳點與卯申平行作一相等線。理即明。蓋攝動力實加于巳也。設欲知卯申力若干。有比例如左。



一率 申寅 申積 申寅平方
 二率 卯申 寅積 申巳平方
 三率 寅攝申力 申攝寅力 申攝巳力
 四率 攝動力 寅攝申力 申攝寅力

以合理推之如左

一率 申寅立方乘申積

二率 申巳平方及卯申及寅積連乘數

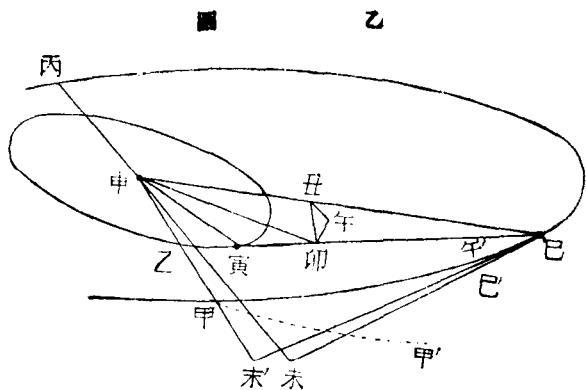
三率 申攝巳力

四率 攝動力

諸體攝動表

發攝 動體	受攝 動體	最	遠	中	距	最	近
日	月		九〇		一七九		八九
木星	土星		三五四		三一二		一二八
木星	地		九五六八三		一四七五七五		五三二六八
金星	地		二五五二〇八		二一〇二四五		二六八三三
海王	天王		五七四二〇		五六五九二		五五一九
水星	海王		八四五		八四五		八四五
木星	穀女		六四三三		六九三七		一〇三三
土星	木星		二〇二四八		二一五七九		三〇六五

諸數皆已知。故攝動力易推也。設發攝動體之道爲平圓。則申寅不變。而攝動力之比例。恆如卯申之比例。道爲微橢。理亦略同。凡卷中或不言橢圓。卽作平圓論也。令略取受攝動發攝動二體。相距最遠最近適中三處。其攝動力與中體攝動力之比例。列爲表。中體力恆爲一。以表中諸數約之得攝動力。設巳距寅。小于申距寅。如甲圖。則寅卯大于寅巳。卯必居寅巳引長之線內。在巳道面之上。而寅在巳道面之下。故卯申力推巳向寅道面內申寅線中之天點。設巳



距寅。等于申距寅。則寅卯寅申寅巳三線俱等。且卯與巳合。天與申合。故卯申力推巳向中體。設巳距寅大于申距寅。如乙圖。則寅卯小于寅巳。卯必居寅巳之間。與寅同在巳道面之下。故卯申力推巳向寅道餘半面內寅申引長線中之天點。甲圖爲近體受遠體之攝動。如地受木星攝。月受日攝是也。乙圖爲遠體受近體攝動。如火星受地球攝是也。凡攝動力之方向。恆在寅巳申三體之面內。以此力當作獨力。則攷論諸行星之力互相加。心中不亂。又設以寅爲定點。而巳行于橢圓道繞申。則卯點亦必行成橢圓道。

攝力之方向。即卯申之方向。而卯申之方向因申寅申巳二半徑。及巳寅之距。及巳行之方向而變。僅以攝力爲獨力。則歷久

所生星道之變。不能瞭然。故當依重學理復論其分力。有數法。一分爲三力在天空有一定方向。相與

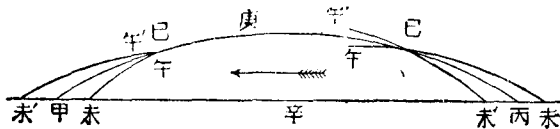
俱成直角。推每力之數。其合力即獨力之數。論攝動之公理。此法最便。近代諸家俱用之。以致攝動之深理。二亦分爲三力。相與俱成直角。而方向不一定。如圖中卯午午丑申三線是也。丑申與帶徑申已同方向。名帶徑率。午丑正交丑申。而在巳道面內。名橫率。卯午正交巳道面。名垂率。此三率力。其方向相與皆正交。故不相憑藉。而加于巳令生動差各不同。帶徑力或向中體。或背背中體。故不能變巳道面之方位。亦不能變同時同面積之比例。僅能變橢圓各點之曲率及速率。蓋橢圓道視巳申相距之遠近而異。此力向中體。則令巳申變近。此力背背中體。則令巳申變遠。故也。而同時同面積之理。不關中體之攝力。凡帶徑上之力皆然。此力方向恒在帶徑上。故不變面積也。橫力既正交帶徑力。則不能變巳申距。又在巳道面內。則不能變巳道面之方位。而能變巳之遲速。令同時同面積之例不合。蓋巳繞申每刹那中所成面積。即巳申線所過之積。巳行增速。則面積亦增。巳行減速。則面積亦減。故也。垂力正交巳道面。故不能變巳申距。亦不能變巳之遲速。但或拉巳令近寅道面。或推巳令遠寅道面。而令巳道變方位也。此爲奈端以後諸歷家同用之法。三亦分爲三力。相與亦俱成直角。而方向時變不一定。前法帶徑率。今改用巳點之法線。前法橫率。今改用巳點之切線。二線詳代微積拾級名法切二力。設巳道爲

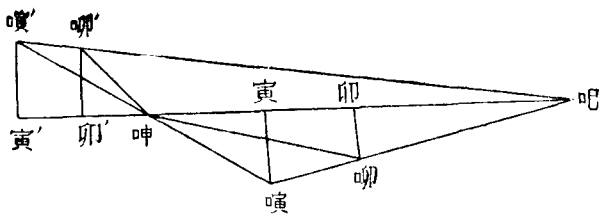
正圓。或微橢。則此法與前法略無異。若橢率甚大。則法切二方向。與帶徑率橫率之方向不同。帶徑之力令巳申之距變遠近。橫力令巳行變遲速。法力能變曲率。此力向內。則曲率增。向外。則曲率損。切力能變速率。此力順。則速率增。逆則速率損。設欲知攝動力所變角度及距中體遠近。則第二法較顯明易推。設欲知攝動力所變橢圓道之根數。則第三法爲妙。而第二法垂率。今不改。垂力之用。令巳出于巳道原面。而行于重曲線。此重曲線以申爲心。而逐點之方向不同。因此巳道之根數恆變。令其面之方位刻刻移動。設空中有一定面。而巳道面與定面之交線。刻刻旋移也。今以前圖詳解之。設巳體自丙行至巳。無攝動力。則在巳點時。其行必向巳。而有卯午平行之垂力加于巳。則巳必因之斜行。故不行于巳。巳曲線。而行于巳午曲線。甲圖巳午線在巳巳線之下。乙圖在巳巳線之上。是巳道面因垂力變其方位。原面巳申巳一分。變爲新面巳申午一分也。引長巳巳爲巳未切線。遇寅道面于未點。作申未。卽原面之交線。引長巳午爲巳未切線。遇寅道面于未點。作申未。卽新面之交線。故準甲圖。必令寅道面內之交線退後。準乙圖。必令寅道面內之交線進前。法切二力于此事無涉。不能令巳離原面。亦不能阻其離原面。僅能令切線遇交線之點稍移。令未申及未申之距或變近或變遠。而二交線不

動。再申論之。假如前圖寅在巳原道面之上。天在寅申之間。則亦在原道面上。而卯必在原道面之下。則垂力卯午必向上。故推巳向上。而巳午曲線必在巳巳曲線之上。引長之遇寅道面未點。必在未點之前。故若寅道面不動。則交點必進前。即動而不消盡。進前之理仍如故。

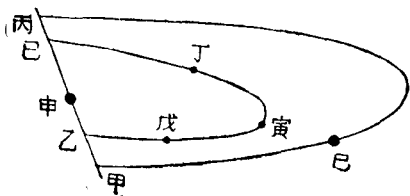
設以寅道面爲定面。而垂力拉巳體令向寅道面。則寅道上之交點必退後。若推巳體令遠寅道面。則交點必進前。如圖。丙辛甲爲從申點平視寅道半周。丙庚甲爲未攝動時巳道半周。巳行自丙至甲。垂力拉巳令行于巳午。在丙庚甲丙辛甲之間。引長巳午成巳未。爲巳新道之一分。是二交點俱退行。一自丙至未。一自甲至未也。若垂力推巳令行于巳午。在丙庚甲之外。引長巳午成巳未。爲巳新道之一分。是二次點俱進行。一自丙至未。一自甲至未也。

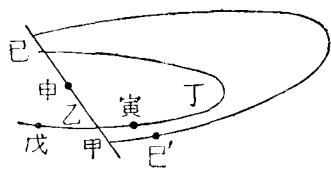
前乙圖。巳道大于寅道。設二道相距。大于寅道半徑。又寅巳二星同在交線之一邊。則垂力必推巳令遠。故無論巳寅各在半周何點。寅道上交點必進前。若二星在交線之





兩邊。則垂力必拉已令近。亦無論已寅各在半周何點。寅道上交點必退後。故寅已繞申。無論各若干周。但二星在交線一邊。交點必進行。在交線兩邊。交點必退行。若二道俱略近正圓。則進退之時等。而每次退行必大于進行。取相對之二方向。以圖明之。二星在交線一邊時。內星爲噴。在交線兩邊時。內星爲啞。其方向恰相對。引長吧呻。作噴寅噴寅二垂線。星道略近正圓。則噴呻等于噴呻。故噴寅等于噴寅。準前噴啞與噴呻比。若噴呻與噴吧之二平方比。又噴啞與噴呻比。若噴呻與噴吧之二平方比。噴呻等于噴呻。而吧噴大于吧噴。則噴啞必小于噴啞。故吧哪與吧噴比。大于吧哪與吧噴比。作哪卯哪卯爲吧呻之二垂線。準相似三角形理。哪卯與噴寅比。大于哪卯與噴寅比。故哪卯大于哪卯。攷吧噴噴三點之公面與吧道面之交線爲吧寅。故若從哪哪作

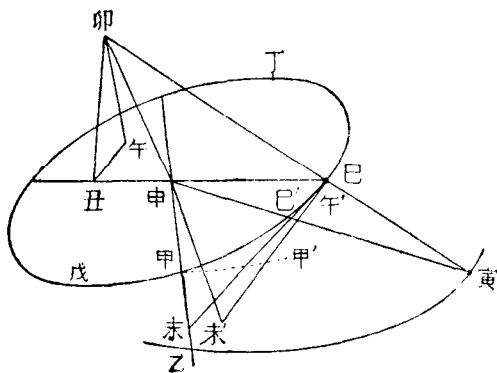




吧道面二垂線。其比例必若哪卯與哪卯比。是哪點之垂線。大于哪點之垂線。夫哪
 呻與哪呻。顯噴噴攝動巳之二全力。則此
 二垂線。必顯二垂力。哪點垂力。令交點退
 行。哪點垂力。令交點進行。二力有大小。故
 退行大于進行也。

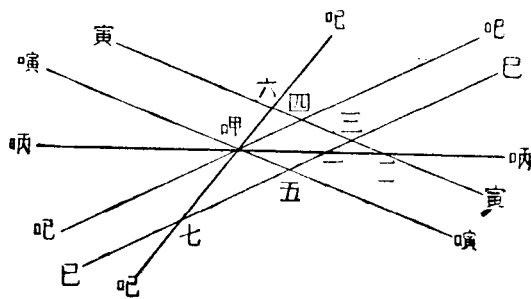
設二道相距。小于寅道半徑。無論巳在何
 處于交線一邊取寅道丁戊二點。相距不
 滿一百二十度。令距巳申俱等。設寅行全周。巳仍在原處不
 動。則寅自丁至戊時。交點亦退行。是退行愈多。若丁寅戊弧。
 大半在交線此邊。如丁乙。小半在交線彼邊。如乙戊。則寅在
 丁乙分內。交點退行。在乙戊分內。交點進行。而寅道距巳最
 近點在丁乙分內。退行力最大。則丁乙分內之退行。大于乙

圖 甲



戊分內之進行。不能消盡。故寅在乙戊分內。計交點之度。仍爲退行。是以總全周論之。視前條退行更大也。又設內星爲外星攝動。寅道大于巳道。取寅丁寅戊。皆等于寅申。設巳行一周。寅在原處不動。則巳自丁至甲。自戊至丙。交點必退行。自丙至丁。自甲至戊。交點必進行。凡寅在交線。則無垂力。交點不動。寅不在交線。則丁甲與戊丙和。恆大于半周。寅愈近交線中點之垂線。則其和愈大。垂力亦愈大。交點之進退愈速。巳愈近于丁或戊。垂力愈小。在此二點則無。而交點不動。巳在交點。交點亦不動。蓋垂力雖非消盡。方向亦不變。然此時交點退行變進行。則必留也。統論之。交點退行之時長。進行之時短。又退行之力更大。其行更速。故巳每周。其退行必多于進行也。此以平圓言之。若微橢理亦合。

今立公款。凡二道。此道交彼道之點。退行于彼道上。設別有定面。在原交角內。則二道交定面之點亦必退行于定面。在原交角外。則一道之



交點退行于定面。一道之交點反進行于定面。如圖。吧吧噴噴爲二道原方位。巳巳寅寅爲二道各退行後新方位。吧交點退行于噴道。自呬至五。噴交點退行于吧道。自呬至四。兩定面在原交角內。則吧交點退行于定面。自呬至一。噴交點退行于定面。自呬至二。吧吧定面在原交角外。則噴交點退行。自呬至六。吧交點反進行。自呬至七。若非共交于一點。依三方面方位推之。理同。

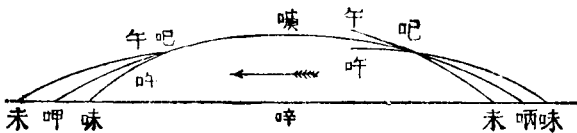
諸行星道交黃道點。俱退行于黃道。此以黃道爲本。而推諸行星之攝動。若于諸行星中另虛設一定面以爲本。則常并推黃道被諸星之攝動。而準上條。諸行星交定面之點。或進行或退行。不一定也。

諸行星相距甚遠。質積又俱甚微。故其交點之行甚緩。大率百年中。最速者不滿一度。其遲者不滿半度。而月獨不然。約十八年六。已退行一周。其故有二。一、太陽所發攝動力與地攝力之比。甚大于諸行星所發攝動力與太陽攝力之比。一因月之周時僅二十九日半。較諸行星之周時甚小也。準上條。用垂力推其退行度分。與測望所得合。故知攝動之理。確無可疑也。

各行星交點之移所關尚輕。而各星道交角之變所關甚大。以黃道言之。黃道交定面之角變。則黃道交赤道之角亦變。而各地之四時俱變。假如黃道與赤道合。則統地球恆如春時。設黃道過二極。則冬

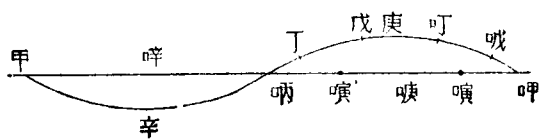
夏二時寒暑極盛。萬物不能生。故各星道交角之變爲最要事。今詳攷之。前諸圖中巳申午面爲受攝動體。繼離巳點後一刹那中所過之面。此面交寅道面或定面之角。與未攝動時之巳申巳面不同。而已申巳巳申午二面之交角。卽巳申未巳申未二面之交角。既知此角。亦知寅道面二交線之角未申未。卽可依弧三角法推其與寅道面之二交角。然則一刹那中交角之變。與交點之移。理相聯屬。欲攷此。亦必攷彼也。此一若巳道爲鐵線圈。巳體爲一珠行其上。巳道之方位變。巳行之方向亦必變。然則巳行之方向變。巳道之方位亦必變。所以交角與交點。必同變也。諸行星及我月之道。相與成角俱甚小。故雖交角與交點同變。而交角之變。較交點變甚小。蓋巳申未未申未之交角。卽二道之交角。既甚小。則未巳未角。必甚小于未申未角。若二道面之交角甚微。幾近于合。則巳巳午角變雖甚微。未點移至未點。必甚大也。

準前說。一刹那中因攝動所成之微曲線若在兩啞啞啞二道面之中間。如吧呷。交點必退行。若在兩啞啞面之外。如吧午。交點必進行。而交角之變大變小。不與交點



相應。微曲線爲吧呷。交角必變爲吧味呷。微曲線爲吧午。交角必變爲吧未呷。在呷唳象限內。吧味呷小於吧呷呷。吧未呷大於吧呷呷。在唳呷象限內。吧味呷大於吧呷呷。吧未呷小於吧呷呷。故凡攝動力拉已向寅面。前甲乙二圖已之本動亦漸近寅面。或攝動力推已遠寅面。已之本動亦漸遠寅面。則交角變大。凡攝動力拉已向寅面。已之本動却漸遠寅面。或攝動力推已遠寅面。已之本動却漸近寅面。則交角變小。約言之。已本動與攝動。其向寅面背寅面同。則交角變大。異則交角變小。

角之變。一刹那中甚微。積久則大。欲推其數。非積分術不能。今不言數。但依上條之理。論其由小漸變大。復由大漸變小。有一定時分。一、其道之面。擺動于中面之兩邊。設外行星爲內行星所攝動。內星道之半徑。不及外星道半徑之半。如圖。呷呷甲爲從申望寅全道。在天空如一直線。呷呷辛甲爲已道。設寅體在呷呷半周內。則已行第一象限呷呷。爲漸遠寅面。垂力亦令遠寅面。故交角變大。行第二象限庚呷。爲漸近寅面。垂力却令遠寅面。故交角變小。行第三象限呷辛。爲漸遠寅面。垂力却令近寅面。故交角變小。行第四象



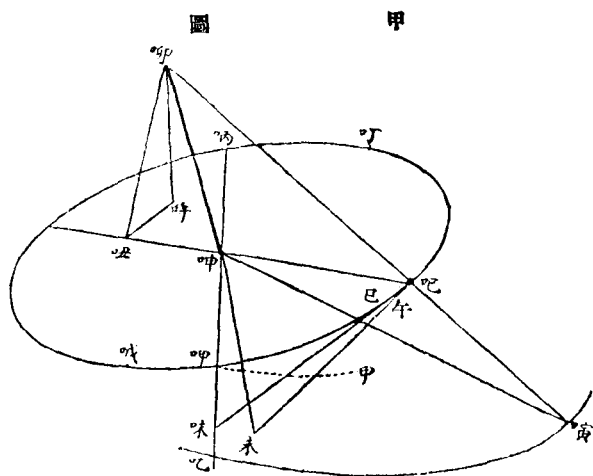
限辛甲爲漸近寅面。垂力亦令近寅面。故交角變大。是已行一周。其道面擺動二次。若寅定于喫點不動。兩邊之攝力等。則已行一周。其道面必復至原處。若寅在他點。兩邊攝力不等。則已行一周。其角變大變小。不能適相補。但寅體在噴與在寅。距喫相等。所生之變必恰相反。而二處所得中數。一似寅體平分爲二。一在噴。一在寅。所生之變。必適相補。以遍寅道各點所得中數推之。一似寅體勻分子全道成一圈。故在交線左右所生各變。一一相對相補也。若外星爲內星攝動。而內星道之半徑。大于外星道半徑之半。又或內星爲外星所攝動。則已道內叮噠一段。其變必與本象限相反。任設寅體在噴。乃取噴噴等于庚寅。又取丁戊與叮噠相似。則寅體在噴寅。已在叮噠丁戊。其相關之理。亦正相反。而恰相補。仍同也。寅借已及交線相與之方位。莫不周徧。則其變盡相補足。而其道復如故。假如我月爲受攝動力之體已。其周二十七日三二二。日爲發攝動力之體寅。其周三百六十五日二五六。交線之周。六千七百九十三日三九一。其比例約如一、十三、二百四十九。故已行十三周。寅行一周。設無交線動。則已與寅之方位必略如故。但此時交線所行度分。已過二百四十九分。周天之十三。約如十九分之。一。爲退行。故已與寅之原方位。差于交點前十九分周天之一。必更十九倍之。已行二百四十九周。寅

行十九周。然後方位復如初。古歷所謂一章也。然數末尙有小分。去之不用。故其方位仍微不合。欲令此微不合亦消去。當用會數。卽章數之若干倍也。此設二體之道。皆爲平圓。則然。若皆爲橢圓。則統計諸方位。令交角增之力。恆大于令交角損之力。設交點與長徑俱不動。則交角必有增無減。今不然者。一因交點有行分。過半周時。諸方位令交角增損之力相反。一因長徑亦以不率速行。則令交角增損之方位。恆移易于道中故也。又交角因兩心差所生變。亦有一定時。而兩心差甚小。所生變甚微。則所生交角差大小之限亦必甚微。幾何家言諸道相與之交角。令諸行星之力相定于空中。拉格浪細推其理。謂各行星之質積乘本道長徑之平方根。又以交定面角之正切平方乘之。所得諸數。其和恆等。試以今黃道面爲定面。依法推得其和數。果恆等而甚小。然則諸大行星之道。永無大變。而諸行星互相補其差。此并小行星亦在內。

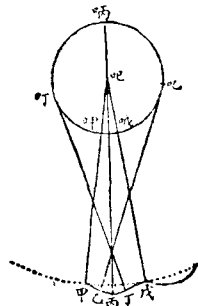
黃道面恆因諸行星之攝動力而變。令黃赤大距漸小。百年約四十八秒。測諸星之緯度或增或損而知之。準上條理。則其變小必有限。至限必復變大也。其最大最小在中數之左右。各一度二十一分。黃道面變方位。交定面之點必退行。此事與歲差難糅難分。此當詳攷歲差之理以辨別之。歲差者。黃

赤交點恆退行于黃道面。是也。此與諸行星道交點退行之理同。亦生于攝動。其攝動力非發于諸行

星。而發于日與月。蓋日較諸行星甚大。月較諸行星甚近。故此二體之攝力。同攝地球赤道上之凸積。地又自轉。而歲差生焉。今細論之。如甲圖。外星噴攝內星吧。假如吧之質積平散于全道。成一流質圈。噴之攝力加之。令繞呷行于本面。則必生二事。一、道之面必變如浪紋形。叮呷與呷二段。交噴面角必愈大。呷呷與呷叮二段。交角必愈小。一、交點必退行于噴道面。此二事各不相涉。若不為流質圈。而為定質。成一堅圈。則圈中有若干分。欲令交角變大。有若干分。欲令交角變小。此必相消。每時刻依圈行。用其相消之餘成角之變。又圈中諸質點。有若干分。欲交點順



行。有若干分。欲交點退行。亦必相消。以其餘成進退行。夫赤道。卽定質圈也。發攝動力者。爲日爲月。俱不與赤道同面。則其交點必恆退行。蓋堅圈與質體周行于圈。理同也。此圈若不帶他物。交點之退行當甚速。今赤道圈與地球合爲一體。交點行之理。惟赤道及諸距等圈有之。與全地球無涉。諸圈體質之和卽地殼。較全地球甚小。則諸圈退行力。爲地球質阻力所消甚多。故交點行速率變甚小。以日力言之。卽歲差也。然赤道之交點。又因月攝退行于白道。夫白道既退行于黃道。交角略不變。故白極依交點行之速繞黃極。而赤道既退行于黃道。又退行于白道。則赤極依二退行。必行成次擺線道。如圖吧爲黃極。呬呬啞啞爲白極。所行之小圈。十九年一周。甲丙戊爲赤極所行之次擺線。其時大于十九年。若僅有日攝力。赤道當行于甲戊虛線。今又有月攝力。則赤極所行方向恆正交赤白二極距。如白極在甲。赤極行在甲。其方向正交呬甲。白極至呬。赤極行至乙。其方向正交呬乙。白極自呬行一周餘至戊。赤極行成一次擺線甲丙戊。其速率時大時小。每次皆然。是謂歲差合尖錐動所生之行法。依此理攷諸力之率。卽得歲差及尖錐動之數。與測



望密合。日月所生二差之比。若二與五之比。既得此二差。則黃道交定而點因諸行星攝動退行之數亦得。與理所應得亦密合也。

雖此諸外攝動之全力成此變動。而不使赤黃二道之交角改變。或疑不合例。但觀前言。見本卷角知之變條

不論發攝動力之體在何方向。其繞圈之各點不同。而使圈之交角有改變。必有相反之改變以消。故無不合例。

諸動外又有一動。名曰感動。先言其公理。凡諸體或以實質相聯。或以攝力相聯。中有一體以一定之周時旋行。必感動各體。令其各分生一定時之動。其周時俱與原動相應。而其最速最遲時不盡相應。各體有易感者。有不易感者。有一分易感一分不易感者。故其感動有時不覺。有時可推。有時較本動更易見。故地軸因日月旋行所感。又生二小尖錐動。其周時一爲半歲。一爲半月。感動中事之最大者。爲潮汐。乃水之感動也。理詳別卷。

卷十三 橢圓諸根之變

上卷論垂力令受攝動之面變方位。故交點有進退。交角有增損。此卷論法切二力令橢圓道變狀。及星行橢圓周變速率之理。

行星道因攝動不復成橢圓。亦無他曲線可比擬。而歷家恆用橢圓者。取其便于推步也。其法謂橢圓道之方位形狀大小兩心差。依攝動徐變。而本星一若未嘗受攝動力。但隨星道之變。而依常法行于其周。是則諸攝動力皆加于星道。而星與道相屬之理不變。此法出于自然。非假設也。各星道根數之變甚緩。如地道百年中。兩心差之增損。不過○・○○○。最卑點之行。不過十九分三十九秒。若一周時中微細之變。雖畫其道于徑六尺之板。用最精顯微鏡。亦難察也。則雖有變。不可不謂之橢圓。但其變積久必著。是又不能不推也。

凡橢圓道之變分爲二。一曰長差。其復時遠。一曰短差。其復時近。如上卷論交角之變。寅巳周數相會。略相補者。卽短差也。相補後尙餘微差。積久而大。此必俟寅巳及交點三者之周俱相會。然後消盡。卽長差也。二差中短差尤要。長差不過短差之小餘。大率行星于剎那中微離其道。漸離漸遠。旣而復漸近。漸歸本道。再漸離于對面亦然。兩面自離至復。皆相似。終古恆如是。本道乃兩面軌跡之中數。是謂

之根數。與前一刻後一刻橢圓之根數不同。因曲率能變距日之遠近。方向能變橢圓之方位也。然長徑不因之而增減。距日之遠近。生于長徑。不能變長徑。而橢圓之方位。與長徑無涉也。準刻白爾測定之例。凡橢圓道皆憑中心攝力而成。星任在道中何點。若知其速率及距日數。長徑亦可知而星行之方向不論。蓋方向變。僅能令兩心差及橢圓之方位變。而不能令長徑變也。然則長徑因何而變乎。曰長徑之刻刻增減。其故因速率之變而生。速率之變。因切力而生。切力與星行方向同。則速率增而長徑亦增。方向異。則速率減而長徑亦減。如上圖。呬吧爲長徑。作呬吧、呬吧、呬吧二虛線。其交長徑角與呬吧、呬吧、呬吧二線等。設外星在呬吧、內星在吧。則呬吧加攝力于呬吧、呬吧二體。與呬吧加攝力于呬吧、呬吧二體等。而吧、吧所受之切力亦等。故吧所增之速。等于吧所減之速。而長徑必一增一減。其所增必等于所減。設噴道爲正圓。噴吧二周時無等數。則二星行至多周。必有時噴與吧在長徑此邊之方位。與前在彼邊之方位相似。此方位長徑之變與彼方位長徑之變。必恰相反。至無窮周歷。盡一切方位。則所生長徑之變。必恰補盡。設噴吧二道俱爲正圓。則噴行一周。長徑必復如初。蓋四象限之切力。兩兩相等而相反。故恰相補也。設吧道爲正圓。噴道爲橢圓。則噴從最卑至最高半周。漸遠于呬。其攝動力必漸衰。從最高至

最卑半周。漸近于呻。其攝動力必漸加。吧不能定居于嘖道之長徑上。故嘖行一周。其切力雖相反。而不相等。不能恰相補。必行多周。歷盡吧嘖呻相與之各方位。然後長徑之變盡補。

設吧嘖二道俱爲橢圓。而二長徑之方向不同。則與上條所論之理不合。當以動重學之公理論之。凡物動時。有向心力恆加之。令刻刻變速率。名曰長加力。其力之大小。與距心遠近之平方有反比例。物在空中從此點至彼點。其速率之變。憑二點空中之方位。不憑二點中間所過之曲線。諸長加力中之平行力。可當作無窮遠定心所發。如此若物行從吧起。仍至吧時。其速率必仍如初。上條諸理俱不論。準此。設嘖有定處不動。吧恆受三力。一、呻之攝力。方向爲吧呻。二、嘖之攝力。方向爲吧嘖。三、嘖加呻之攝力。方向爲嘖呻。恆在嘖呻平行線上。吧行一周復至原處。其速率與長徑必略如初。尙有小差。爲攝動力變其道所生。然甚小。可不論。設嘖雖不繞呻。而漸遠于呻。則吧至原處。速率之差不能補足。必吧行多周。俟嘖復漸近呻。然後消盡。則嘖無論定于何方。吧行多周。必得各點相對。俱如上圖。吧令嘖所加之力相反。然則嘖雖不定。行無數周時。必盡得嘖在道中各方位。吧行若干周中之相對各點。其力兩兩相反。故歷年甚久後。所生之差。必消盡也。又設令吧定于一處。嘖行若干周。理亦同。夫攝動

力令兩心差生短差。又令長徑移方位。則吧與噴至原方位時。其距呻遠近及速率。必各不同。然長徑行一周。其距呻遠近必復原。兩心差之變一終。其速率必復原。故吧噴至原方位。長徑周兩心差變終。三者會于一時。則一切如初。此必多歷年所。久之又久之。始一遇也。此乃動重學之理。其力之方向或在平面內。或無論從何處來。皆同。故噴吧二道雖有交角。理亦合。但有交角變及交點行。則吧行一周。不能至一定之原方位。然交角變大小。其面恆在中面之二邊。相去不遠。而每次交點行一周時。吧至原經度。必不在原處。或在中面上。或在中面下。其距必有時彼此相等。故歷無數周。其差必消盡。如上所論。既爲公理。則無論有若干定心。無論何方位。且無論有若干發攝動力之體。其理俱同。不過推其相消。法更繁耳。有此奇理。故知諸行星道之長徑。其差必復。此平速周時亦然。如歲實雖有消長。統計之。實無增損也。故諸行星距日之數。不能增至無窮。亦不至漸近日而合爲一。統計之。其道大小不變也。此事拉格浪考得之。實推步家至要之理也。地日距若加十分之一。則一切動植諸物俱難生活。然長徑變長變短。離中數不遠。依理推測諸行星長徑之增損。除火木間諸小星外。未有過中數千分之一也。

表差生力切

差之根	生所力切	在所吧	行 吧
退徑長	增率速	論 無	卑 至高
進徑長	損率速	論 無	卑 至高
進徑長	增率速	論 無	高 至卑
退徑長	損率速	論 無	高 至卑
損差心兩	增率速	點 高近	論 無
增差心兩	損率速	點 高近	論 無
增差心兩	增率速	點 卑近	論 無
損差心兩	損率速	點 卑近	論 無

表差生力法

差之根	向所力法	在所吧	行 吧
退徑長	內 向	點 高近	論 無
進徑長	外 向	點 高近	論 無
進徑長	內 向	點 卑近	論 無
退徑長	外 向	點 卑近	論 無
增差心兩	內 向	論 無	卑 至高
損差心兩	外 向	論 無	卑 至高
損差心兩	內 向	論 無	高 至卑
增差心兩	外 向	論 無	高 至卑

自卑點向高點。則諸例俱相反。又若法力向外。則一切相反。又兩心差、卑點距二事之變。互為消長。此變速則彼變遲。此極速。則彼為無也。又餘心之移。憑切法二力。此二力恆正交。亦互為消長。此力愈大。則彼力愈小也。欲推利那中攝動之差。必準動重學。分推利那中切法二力所得之速率。各令二根所生之差。視其同號則相加。異號則相減。或先取啐吧、啐角。倍于法力所生啐吧、啐角。又取吧、啐等于吧啐。加減切力所生長徑差。得啐。為餘心之處。其他俱可推矣。欲知啐吧、啐角。以此時吧行速率。約法力所生之速率。即得。今列二表。吧行全道切法二力生差之例。一覽可了然矣。

設吧嘖二星各從某處起。積若干時。欲推諸根之積差。常用積分法。其法極精深。今不細述。

長徑之用。兩心差之變。本一理。試設其道爲正圓論之。簡而易明也。

道爲正圓。則切法二力與橫帶徑二力合。故推橫力帶徑力。如推切

法二力也。如圖。嘖吧與嘖呻之二平方比。若嘖呻與嘖哪比。哪吧爲

嘖哪少嘖吧。哪咄等于哪吧乘哪吧正弦。亦等于哪吧乘哪吧

呻嘖吧二角和之正弦。又咄呻爲吧咄少吧呻。即等于哪吧乘哪吧

呻餘弦少吧呻。亦等于哪吧乘哪吧呻吧二角和之餘弦少呻

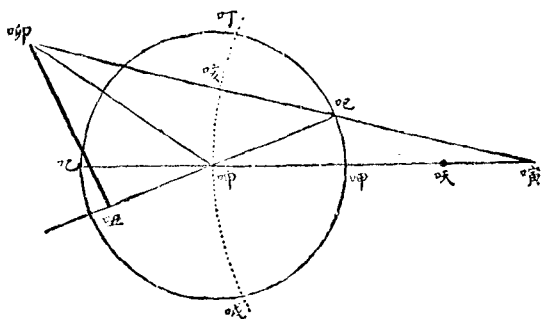
吧。哪咄即顯切力。咄呻即顯法力也。凡吧從吧至吧。從吧至吧。切力

令其速增。從吧至吧。從吧至吧。切力令其速減。在吧叮吧吧四點。切

力消盡。在吧叮吧吧四點之中。則最大。又吧近吧吧二點。切

法力向外。近吧吧二點。法力向內。在吧叮吧吧四點。法力最大。在吧

叮吧吧吧吧四分之中。則消盡。試設吧在各處。一一作圖。玩之



自明也。若噴最遠。則法力消盡之點。略近叮噤而遠呬。

依上條之理推月道。法更簡。蓋噴爲日。距地月甚遠。月道半徑。日視之不過八分。故哪吧與呬吧一若

平行線。而叮呻噤一若直線。正交呬吧。以呻吧爲半徑。則吧噤爲呬吧之餘

弦。故哪吧等于哪吧乘呬吧。呬吧等于哪吧乘呬吧。又哪吧等

于三箇吧噤。即等于三箇呻吧乘呬吧。是以哪吧等于三箇呻吧乘呬

吧。正餘弦相乘積。亦等于二分呻吧之三乘呬吧。即等于三箇呻吧乘

之餘弦。以一加之。又以二分呻吧之一乘之。若呬吧乘之。亦等于三倍呻吧乘

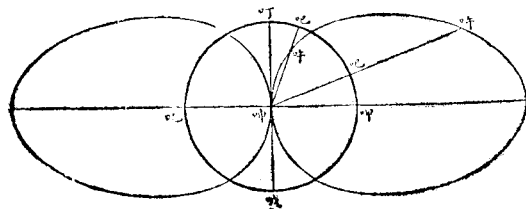
之餘弦。以一加之。又以二分呻吧之一乘之。若呬吧乘之。亦等于三倍呻吧乘

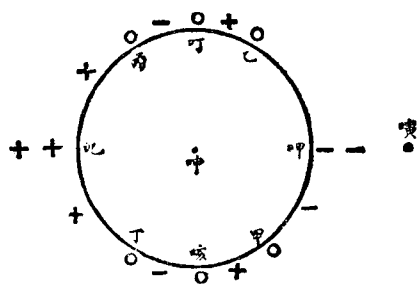
半徑之一。則哪吧消盡。蓋哪吧線割吧道二點。距呬吧二點。各六十四度十四

分也。試向吧道全周諸點作呻呬線。等于三箇呻吧乘呬吧。平方數。聯

諸呬點。必成二卵形之橢圓。出入吧道。四交點距呬吧二點。各六十四度十四

分。吧呬恆顯加于吧點之法力大小方向也。





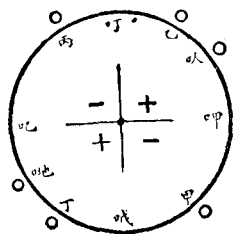
準上條。凡呬線兩邊呬呬吧角等。攝動力恆與呬吧有比例。呬吧即月地距。故月在橢圓高點。攝動力增大。在卑點。攝動力減小。其最大最小之比例約如二十八與二十五。準此論法力變長徑方位。設長徑向日。卑點在呬。高點在吧。取呬甲呬乙呬丙呬丁四分。各六十四度十四分。吧在甲呬之間。法力向外。而近卑點。則長徑必退後。理見前在丙丁之間。法力向外。而近高點。則長徑必進前。在呬吧二點。其行最速。漸遠二點。漸遲。在甲乙丙丁四點。則遲極而定。自乙至丁。法力向內。而近卑點。則長徑必進前。但行甚遲。蓋初離乙。法力小。漸近丁。法力雖漸大。然其方位不易動。長徑故也。過丁至橢圓長徑餘心上垂線界而復定。自此界至丙。法力向內。而近高點。則長徑必退後。而亦甚遲。吧在丁呬及呬甲之間。理同。圖中 \uparrow 為速進。 \downarrow 為速退。 \uparrow 為遲進。 \downarrow 為遲退。 \circ 為定。若兩邊 $\uparrow\downarrow$ 之力相等。則一周中遲速之數必相消。然高點之力恆大于卑點。其比例若二十八與二十五。惟叮呬左右二象限之力相等。故近叮呬二點。 $\uparrow\downarrow$ 二行略消盡。而近呬吧二點。 $\uparrow\downarrow$ 二行不能消盡。進必多。

于退。若高點在呬。卑點在叱。則理俱相反。圖中上下之號。必皆易位而最大之力在呬。仍爲進。故一周中長徑之進亦多于退。又設長徑正交向日之線。高點在呬。卑點在叮。吧在乙丙之間。法力向內。而近卑點。則長徑必進。而不速。因法力不大也。在呬乙及丙叱之間。法力向外。而近卑點。則長徑必退。亦不速。在甲呬及叱丁之間。法力向外。而近高點。則長徑必進。亦不速。在丁甲之間。法力向內。而近高點。則長徑必退。高點法力。大于卑點。故一周中長徑之退多于進。若高點在叮。卑點在呬。理同。總論之。最高在呬叱二點。法力向外。全周中長徑進多于退。在叮呬二點。法力向內。退多于進。然月近呬叱二點。法力大。近叮呬二點。法力小。又乙丙丁甲二弧。甚小于甲乙丙丁二弧。又長徑在全周各方位中。有定而不行時。其方位亦較近丁戊二點。故一歲中日繞地一周。長徑盡歷諸方位。統計其行。進必多于退也。更論切力變長徑方位。設卑點在呬。月行呬叮象限。切力必令速率損。而月自卑至高。故長徑退。行叮呬象限。切力必令速率增。月仍自卑至高。故長徑進。行呬呬象限。切力必令速率損。而月自高至卑。故長徑退。行呬呬象限。切力必令速率增。月仍自高至卑。故長徑進。是在呬呬半周。長徑恆退。在叮呬呬半周。長徑恆進。然近高點之切力。強于近卑點。故全周中。進必多于退。若卑點在乙。則俱相反。在呬

呬叮半周。長徑恆進。在叮呬半周。長徑恆退。而進仍近高點。則全周中亦進多于退。又設卑點在叮。月行呬叮象限。速率損而自高至卑。故長徑進。行叮呬象限。速率增而自卑至高。故長徑退。行呬呬象限。速率損而自卑至高。故長徑退。行呬呬象限。速率增而自高至卑。故長徑進。是在呬叮呬半周恆進。在呬呬半周恆退。高點在呬。力更強。故全周中退多于進。若卑點在呬。理同。總論之。最高在呬。呬二點。進多于退。在叮呬二點。退多于進。其數略相等而相消也。故日繞地一周。長徑盡歷諸方位。其近朔望點時。法力必令進前。近二弦點時。法力必令退後。但進速而退遲。故總計之爲進。切力亦然。而進退之遲速等。故總計之無進退。是一歲中切力不能變。法力所生長徑之總差。然逐時能令法力所生差增大。何則。日行與月同方向。長徑近朔望點。其進隨日。故切力之加。比日不動更久。長徑近二弦點。其退隨日。故切力之加。比日不動更暫。夫準法力。進本有餘。今因切力加久。而更有餘。退本不足。今因切力加暫。而更不足。是謂以攝動加于攝動。天算家言長徑之動。大略若攝動力平方之比。理本此也。上諸條論月道長徑攝動之法。最爲繁重。初奈端用帶徑力推長徑之行。所得較實測數僅得半。後歷算諸家細測詳推。終不能密合。遂謂奈端攝力之理。未足盡憑。格來老始亦云然。旣而忽得其解。乃知

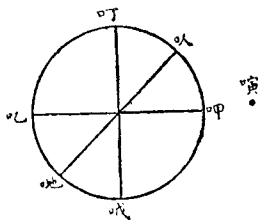
攝力之理。精深神妙。不能改也。案月道長徑順行。三千二百三十二日五七五三四三而一周。約九年弱。

論法力變。月道兩心差。任設卑點在吠。高點在哞。月行方向自呷至叮。準前論。吧在甲乙丙丁四點及哞。吠高卑點。兩心差皆不變。則在吠乙哞丁二弧。其變甚小。因向外法力甚小。又其方位不能大變也。而在吠乙。爲自卑至高。在哞丁。爲自高至卑。正相反。則一令增一令損。略相消。雖近高點力稍強。必損多于增。然統全周計之。甚小也。乙叮丙及丁吠甲二弧。較象限甚小。法力俱向內。吧在此二弧。不能令兩心差大變。而令增損正相反。丁甲弧近高點。力稍強。增多于損。與前吠乙哞丁二弧之損多于增。正相消也。吧在甲吠丙哞二弧。法力向外。力最大。

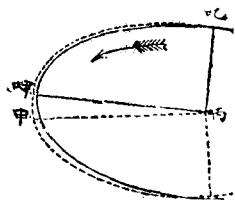


而丙哞近高點。力尤強。吧自卑向高。則必增多于損。此較不能消。爲全周兩心差之變。設卑點在哞。高點在吠。全周兩心差之變。亦增多于損。蓋法力最強在甲吠弧。仍向外。吧仍自卑至高也。凡長徑在呷叮吠哞二象限內。兩心差恆增多于損。在叮吠哞呷二象限內。則反是。圖中上指增多。下指損多也。

論切力變月道兩心差。吧行呬叮叱咄二象限。切力令速率減。行叮叱咄呬吧二象限。切力令速率增。故吧在呬呬象限。距卑點不滿九十度。恆令兩心差損。在叱咄象限。距高點不滿九十度。恆令兩心差增。叱咄之增。多于呬呬之損。若高點在呬呬間。卑點在叱咄間。則呬呬增而叱咄損。亦增多于損。又吧在叮叱象限。距卑點不滿九十度。恆令兩心差增。在呬呬象限。距高點不滿九十度。恆令兩心差損。呬呬之損多于叮叱之增。若高點在叮叱間。卑點在呬呬間。則呬呬增而叮叱損。亦增多于增。統計之。日行一周。切力所生差適消盡。但逐時與法力合。令其差增大。與變長徑方位之理同。至日與長徑之周相會而復初。設日與長徑同起程于一點。日一年一周。長徑九年一周。則歷四分年之一。又加三十二分年之一。共三十二分年之九。長徑一若退行一象限。先自呬至吧。兩心差恆損。至吧爲最小。次自吧至叱。兩心差恆增。至叱爲最大。而復與日會。餘仿此。兩心差最大最小比。若三與二比。月道長徑行之理。可以器顯之。法用鐵線或銅線。任長十餘尺。懸一鉛球。下承以平板。球板相去甚微。取球略偏。向旁推放之。令旋轉。必行成小橢圓。原垂線在其中點。若于球底中心安一鉛筆。必畫橢圓。



圈于板。此長徑之方向不甚變。爲風氣所阻。橢圓必漸變小而定。若取球大偏。與垂線成角約十五度至二十度。旁推之。則所行橢圓大。其長徑之方向。每周必以漸增速移。與球行之方向同。久之長徑必至短徑之處。既而還至原方向。卽如月道長徑之行也。曰。此橢圓道之長徑。何以能進前行。曰。取球偏而放之令旋轉。必常有力加之。其方向恆正交鐵線。此力恆變。其大小之比。若鐵線交原垂線角正弦之比。弧甚小。則正弦之比略如弧之比。取球小偏。弧與正弦無別。其行一周。球受中心之攝力。與距數比例恆合。故長徑不移。若球大偏。鐵線與垂線成大角。則受中心之攝力。恆如正弦之比例。而距數恆如弧之比例。弧變大。正弦亦變大。而正弦之變。不能若弧之速。故球向中心之力。較行橢圓之力略小。則近長徑界曲率必損。故至原長徑界。不能復正交距心線。必行至甲。方正交。是長徑進前也。觀



圖是明。此不過借以明月道。實與月道之理不全合。蓋其攝動僅有帶徑力無橫力也。推諸行星道長徑之行。兩心差之變。有簡于月道者。有繁于月道者。其簡者何。一周中長徑之變甚微。則體與長徑逐周所成各方位略不變。又發攝動體或進或退。受攝動體之長徑雖隨之進退。亦甚小。

俱可不論。又月道之長徑進退甚大。故其行有倍數。須重推而得。諸行星之長徑進退微。皆無倍數也。其繁者何。受攝動發攝動二體周時之比。甚小于十三與一之比。則吧行一周。噴與吧道長徑變方位之度甚大。前論月吧一周設噴爲不動以便算。其差不甚大。若行星則吧一周噴已行多度。設爲不動。其差甚大。故不能也。如木受土攝動。木一周。土已行一百四十度。設爲不動。則攝動諸力。盡不合矣。又若外星受內星攝動。則寅與吧道長徑方位之變。速于噴與中體方位之變。更不能設噴爲不動矣。又噴道兩心差變。爲最要事。其故甚繁。不能以言喻。必用代數式及微分法。方能推之。又水金及地球爲木土諸星所攝動。與常理不甚合。各道之長徑。因土木諸星所攝而進前。常也。乃有時憑吧噴二體相距二兩心差之大小。二長徑相與之方位。令長徑退後。與常理相反。如金星道之長徑。受地球水星攝動力之和而退後。受木土諸星之力而進前。而退更速于進。故其長徑恆退行是也。

推諸行星道長徑行。兩心差之變。設其道略近正圓。則攝動諸力無大變。故長徑進退。兩心差大小。行若干周後。盡歷諸方位。必相消而復初。觀前切法二力生差表。理易明。蓋噴任在本道恰相對二點。一與吧之高點成方位。一與吧之卑點成方位。相似而相反。二道既略近正圓。則切法二力。距合點線同。

卽俱相似。故吧之卑點前後半周。與噴道此點諸力相關。一如吧之高點前後半周。與相對點諸力相關。又吧自高至卑半周。與噴道此點諸力相關。一如自卑至高半周。與相對點諸力相關。而長徑進退。兩心差增損。俱恰相反。故噴任在何點。加于吧之力。與噴吧俱在對面所加之力。必恰相消。而長徑兩心差之變。亦必恰相消。設二道俱非正圓。則諸力不能恰相消。然兩心差非甚大。則其大分仍如上相消。所謂短差也。而餘小分積久不消。以成長差。推長差法甚繁。今不暇細論。但論生差之大凡。亦必分法切二力。法力所生。在二星合點爲最大。蓋在合點法力最強故也。雖合點距高卑點各九十度時。長徑不移。合點合高卑二點時。兩心差不生變。而距此二方位各九十度。則法力所生之差最大也。切力最強時。每因方位之故相消。又無論合點距高卑二點若干。二星合時無切力。故長差生于法力者爲多。生于合點之法力爲最多也。設合點在二道最近點。則所生差尤多。今試論之。夫同心二橢圓。各有卑點。其方位刻刻不同。則二道最近點在吧道之卑點可。在吧道之高點可。在道中無論何點俱可。設在卑點。吧道在內。噴道在外。則法力向外。故長徑退。吧道在外。噴道在內。則法力向內。故長徑進。設在高點。則俱相反。然兩心差俱不變。在高卑中間諸點。則長徑之進退小。而兩心差之增損大。準此。若僅

有二行星。久之最近點必因長徑兩心差之變而亦漸變。而長徑之行。又因最近點變而或增或損或相反。兩心差亦因之或增或損。俱有定時。與長徑相應。然又有諸行星。皆相攝動。則亦當推諸道兩心之最近點。故其法雜糅而甚繁也。

統觀卷中諸條之理。知交點行與交角變相應。長徑行與兩心差變相應。二者彼此相似。卑點進退行成大弧。其較餘歷久而一周。兩心差微增微損以應之。歷久而復初。交點行亦歷久而一周。交角亦增損以應之。歷久而復初。如月道。交點行甚速。交角變速而不能積爲長差。則卑點行愈速。兩心差亦變速而不能積爲長差。蓋月受日及衆行星及地赤道上凸質諸攝動力。生諸小變。其變甚速。故不能久積以令橢率大變。測月之兩心差中數。古今同也。

諸行星相攝動。最卑之行兩心差之變。二道互爲消長。交點交角亦然。舉土木二星以例其餘。設土木外無他行星。則土道兩心差。最大必爲 $0 \cdot 08409$ 。最小必爲 $0 \cdot 01345$ 。木道兩心差最大必爲 $0 \cdot 06036$ 。最小必爲 $0 \cdot 02606$ 。木之兩心差最大時。土之兩心差最小。木最小時。土最大。歷七萬四百十四年而一終。若諸星道之兩心差俱復初。必歷幾萬萬年也。

卑點之行。于本星無甚關係。而兩心差之變。則關係甚大。蓋本星而寒暑之中率。實憑之增損焉。各行星每周受日之光熱。與橢圓道之短徑恆有比例。兩心差變。則短徑變。而寒暑之中率必變。然則幾萬萬年中。所生之差。必有行星兩心差之變甚大。令附而諸物俱不能生活。設我地球當之。則人物必俱死。卽不死。亦必大苦矣。解者曰。無慮也。天算家已詳推之。而知其必無是事。拉格浪謂諸行星之質積。各乘其道之長徑平方根。又以其兩心差之平方乘之。其得數之和恆等。此乘數中。一爲長徑之平方根。一爲兩心差之平方。而各道之長徑增損。無長差。則兩心差之增損。必不至懸絕也。

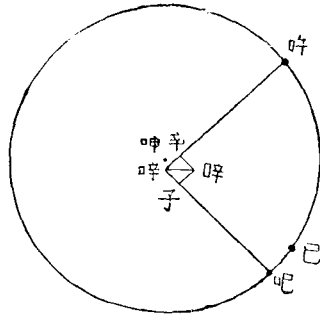
續乾隆四十七年。拉格浪推諸行星道兩心差變之限。依諸相與之攝動而計之。惟因其所爲根數之金星體質有誤。故得數不確。道光二十三年。力佛理亞以確切之根數推之。得當時七行星道之最大兩心差。爲水星道○·二二五六六。金星道○·○八六七一六。地道○·○七七七四七。火星道○·一四二二四三。木星道○·○六一五四八。土星道○·○八四九一九。天王星道○·○六四六四六。雖拉格浪之數。因其根數有數差。而得兩心差之常變差不合。但所得變之最大界限。則與力佛理亞所得者。大同而小異耳。力佛理亞得地道之最小兩心差○·○三三一四。在

嘉慶五年以此年爲元。漸變大。大極而又漸小。再至最小之時。歷二萬三千九百八十年。適在同治元年後二萬三千九百十九年也。木星土星天王星道之兩心差。自最小至最小之時。約九千萬年。而多少四千年不定。土星道之兩心差。最小 $\circ\cdot\circ$ 一三六。自最小至最小之時。約三萬四千六百四十七年。而多少一百十七年不定。下次最小。當在同治元年後一萬六千零五十三年。附表載有力佛理亞所推地道之根數。自元之前十萬年至後十萬年。每萬年之數另有克羅爾所推得地道兩心差。在元之前後。各一百萬年之數。

卷十四 逐時經緯度之差

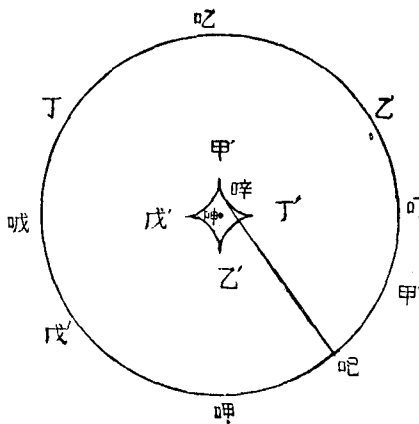
欲知行星與月逐時經緯度之差。不特當知長差。亦不特當知短差。必當知短差令橢圓行變遲速而經度變。令星月道之面與定面變交角而緯度變。經緯度諸變法。其中有因久測而得。前人但知其當然。未知其所以然。後人用攝力遞解遞明。初若與攝力不合。細考之。知亦本于攝力。而攝力之理。愈確不可易已。

發攝動受攝動二體之周相會。所生之差。或自相消而復初。此差因受攝動道之本心繞中心點。行成

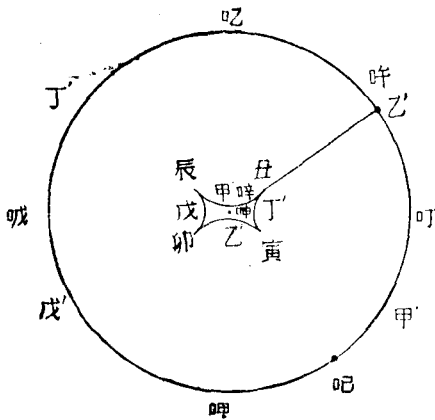


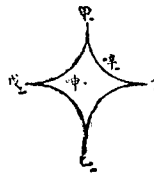
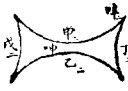
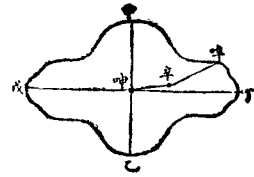
曲線道而生。設道爲正圓。則中心點卽圓心。若微橢。則中心點卽本心所繞之心。本心繞中心點兼用法切二力。如圖。啐爲本心。吧爲受攝動體。吧已爲一刹那中所過之道。若無攝動力。則吧已爲橢圓之一分。啐不動。因有攝動力。故啐移至辛。求辛點所在。準前卷法力變吧啐線爲已辛線。啐吧辛角倍于法力所變切線角。而吧啐之距不變。故辛必行于啐吁線。吁距吧九十度。若法力向外。則啐行向吁。法力向內。則啐行背吁。啐所至恆爲辛。又切力能增損吧啐。若切力令吧行增速。則吧啐亦增。令吧行損速。則吧啐亦損。啐所至恆爲子。作辛啐與啐吧平行。作子啐與啐吁平行。交于啐。卽得受攝動體本心所在。月受日攝。此差最顯。名曰二均差。一月而復。宋開寶八年。亞喇伯歷家阿波維法所測得。其限約一度四分。奈端以攝動力明其故。設月道爲正圓。理更易明。道既正圓。則恆常以平速行。乃朔望前二象限。切力恆令速率增。後二象限。恆令速率損。故其速率在朔望二點。爲最大。在上下

弦二點。爲最小。近朔望。必大于平速。近二弦。必小于平速。故其道在朔望。必較正圓微匾。在二弦。必較正圓微凸。又朔望點左右各六十四度十四分。法力向外。令道之曲率略小。二弦點左右各二十五度四十六分。法力向內。令道之曲率略大。是切法二力。共變正圓爲橢圓。其長徑二界。即二弦點。其短徑二界。即朔望點也。故在朔望點。月最近地。且速于平速。在二弦點。月最遠地。且遲于平速。故從地望月。當朔望時。其行度最速。而當二弦時。其行度最遲。朔弦望弦之間。有點恰得平速。然其前或積速。或積遲。俱未消。故在此點。真經度平經度之較最大。在朔望二弦點。其變遲速最大。而積差却消盡。正得平經度。依理推其數。與測望密合。案切力在朔望二弦點爲無。而在朔弦望弦間之點爲最大。在吡吡叮叮二象限。令速率增。在吡叮吡吡二象限。令速率損。速率增。則長徑變長。速率損。則長徑變短。法力在甲'乙'丁'戊'四點。距朔望點各六十四度十四分。爲無。在戊'吡'甲'及乙'吡'丁'



二弧。向外。在甲'叮'乙'丁'戊'二弧。向內。乃先論切力令啐點行法。吧行呷叮呷呷二象限。啐漸近吧。吧行叮呷呷二象限。啐漸遠吧。吧在呷呷叮呷四點。啐不動。故吧在呷一剎那中。啐在甲'不動。吧離呷向叮。則啐恆向吧行。而成甲'丁'線。啐吧恆為甲'丁'之切線。吧至呷叮之中。則啐距吧得中與吧呷距等。此時啐向吧行最速。吧自此至叮。啐向吧漸遲。至叮而定。吧自叮至呷。啐背吧而行。成丁'乙'線。速率之變與前同。吧自呷至呷。自呷至呷。啐行成乙'戊'戊'甲'二線。理同。故依切力。啐必繞呷行。成甲'丁'乙'戊'四歧點曲線道。與吧行相逆。再論法力令啐點行法。吧在呷呷二點。啐向呷行為最速。吧在叮呷二點。啐背呷行為最速。吧在甲'乙'丁'戊'四點。啐不動。故吧在呷。啐在叮。啐在甲'向呷行最速。吧離呷向叮。啐離叮向呷。啐向呷行漸遲。吧行六十四度十四分至甲'。呷行亦同。而啐行至丑'。成甲'丑'線。啐呷線恆為曲線之切線。啐至丑'不復向呷而定。吧至叮。啐至呷。啐背呷行至丁'。在丁'背





呬最速。呬行全周復至呬。則呬行丑寅卯辰四歧點曲線道而復至甲。亦繞呬。與
 呬行相逆。乃取此二行。并之命二呬點爲辛^一。甲^二。丁^三。戊亦依類作識。法作呬^一。辛^二。
 與呬^一。辛^二。等。且平行。又作辛^一。呬^二。與呬^一。辛^二。等。且平行。二曲線相對無數諸點。皆依此。作
 呬^一。辛^二。諸線。乃聯諸呬點。成甲^一。丁^二。乙^三。戊^四。橢曲線形。爲月道本心所行之真道。其
 半短徑呬^一。甲^二。等于呬^一。加呬^二。甲^三。其半長徑呬^一。丁^二。等于呬^一。加呬^二。甲^三。丁^四。乙^五。戊^六。四點。
 與呬道呬^一。叮^二。呬^三。四點相對。故朔望月在本道呬^一。叮^二。點。其距餘心較近于本心。二
 弦月在本道叮^一。呬^二。點。其距餘心較遠于本心。呬^一。行甲^一。丁^二。乙^三。戊^四。橢曲道一周。月行呬^一。
 叮^二。呬^三。亦一周。其行相逆。朔望月所在。爲一刹那中橢圓之卑點。二弦月所在。爲
 一刹那中橢圓之高点。

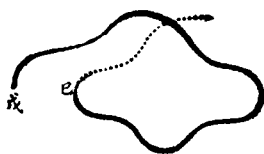
設月距地之中數爲一。命呬^一。甲^二。爲二呬。命呬^一。甲^二。爲二叮。命呬^一。丁^二。爲二呬。則橢曲道
 之半短徑呬^一。甲^二。爲 $1 + \frac{1}{2}$ 。半長徑呬^一。叮^二。爲 $1 + \frac{1}{2}$ 。故月在呬^一。其一刹那
 之兩心差必爲 $\frac{1}{2}$ 。月在叮^一。其一刹那之兩心差必爲 $\frac{1}{2}$ 。月自呬^一。至叮^一。切力令長徑漸損。所損

全分。等于甲丁曲線。必小于呻甲加呻丁。即小于四呬。故半長徑之全較小于二呬。其中數呻呬與最長最短之較。必皆小于呬。命此較為角。設月在呬或叮。為一刹那之卑點。其半長徑為一。兩心差為。故距地數為。角本小于呬。則此數小于。月在叮或噉。為一刹那之高點。其半長徑為。兩心差為。故距地數為。呬本大于角。則此數大于。二距地數較。為。凡橢圓略近于正圓。則其橢圓周各點速率之比。若合各半徑平方根之正比。及各點距呻數平方之反比。今在呬在叮。二半徑為。即若一與之比。則其二平方根之比。若一與之比。又二距呻數之比。若一與之比。與一與之比。其二平方之反比與之比。即若一與之比。即若一與之比。兩比例并之。若一與之比。玩此率。知此差憑法力。大于憑切力。諸式之例
詳代數學。

上條所論。設日為定。今設日行于略近正圓之道。則中所見吧噶之距度等。切法二力亦等。惟朔望二弦四點。及無法力四點。不定于月道而隨日進行。其逐時所過度。與日行等。故甲丁乙戊及甲丁乙戊

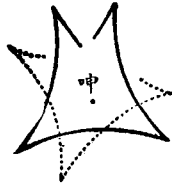
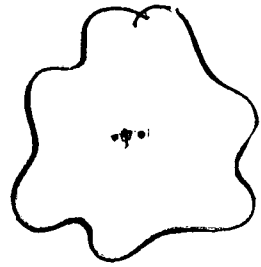
二曲線形。啐行一周後不能復至原處。而曲線必更彎。令歧點進行。與日行同方向。故吧與啐行之度必變大。其比若月之恆星周與太陽周比。見七卷而二曲線形并之。仍略如橢曲道。但啐一周後不能復至原處。必繞啐成橢曲螺線。其最近啐恆在朔望點。最遠啐恆在二弦點。四點相距各大于九十度。此例亦如上。而月隨之亦成橢曲螺線。其曲線隨切法二力變大變小。變大則二歧點中間之曲線必漸長。而歧點距啐漸遠。橢曲道亦漸大。比例仍同。月行之差亦漸大。變小理同。行星因發攝動體之行而變。與此無異。

上論以月距日爲甚遠。故近日半道與遠日半道。所受攝動力大略相同。然朔時月距日近。望時距日遠。其較約二百分之一。因此生一月行差。名月角差。月行一周。經度約差二分。此差雖附于大差。然諸行星互相攝動所生諸差中。此亦爲要事。故細論之。此差生啐行曲線之差。及所成橢曲道之差。如前切法二力圖。設月已從戊起。行本道自啐至叮。本心啐從戊起。行曲線形。在切力圖行戊甲丁。在法力圖行戊癸丑丁。因切法力更大。故此二半曲線形。大于丁乙戊及丁癸卯戊餘二半曲線形。則啐不能復至原處戊。每周皆然。合二行。如圖。啐從戊起。行橢曲道一周。不至戊而至己。戊己之聯線與二弦點



之聯線平行。復從己起行一周。所成曲道。與前一周曲道同例。以後每周皆然。是謂重橢曲道。啐行一周。日亦行黃道若干度。二弦點之方位隨日而變。故啐從己起。行一周至庚。庚點不在聯戊己引長之直線內。而在二弦點聯線新方位平行線己庚內。故一歲中所得戊己等點。環繞一中點。一若重橢曲道中心點亦繞此中點。成一小道。故兩心差無長差。若日不行即地不行。則兩心差必生長差。久之必變

成極大也。二行星相攝動。亦生二差。理與月差及月角差同。然道之大小不同。則其差亦異。觀前二體攝動表。見十卷。自明。如海王攝動天王。在下合點之力。較上合點大十餘倍。故重橢曲道中心點繞坤之道。與橢曲道之比例。較月甚大。又設外星受內星攝動。則發攝動體之行度。速于受攝動體。故雖順行。而道上切法諸無力點。順行甚速。恆追及吧。則吧一若退行。而吧遇此諸點。則道之本心啐。適至曲線之歧點。故無論噴在何處。吧行過諸無力點。啐行過諸歧點。中間之度必變小。其比例若太陽周與恆星周之比。凡吧行每太陽周。啐依切法二力。在二曲線形上。次第過諸歧點。其相距之度皆同。距合點



度又彼此相同。故合切法二力之曲線形。成一曲線道。每周中相當諸點亦同。二曲線之歧點。必令合曲線道生凸處。每二歧點間之曲線。必令合曲線道生凹處。故啐所行之真道。若噴不動。則一周後必仍至原處。若噴亦動。則不能復至原處。而成曲螺線道。設吧噴二周有等數。則二合中間啐所過恆星經度。與三百六十度有比例。若無等數。則亦無比例。而一太陽周中。依所行二曲線若干歧點及方位。以成合曲線道。道上之向內向外及或速或遲。每次仍同。

準上論。則凡二星之攝動法。當分三種。第一發攝動體噴在外。則切法二力。在吧道上。各有四無力點。切力之四點。一為下合點。一為上合點。餘二點在下合點左右。其距發攝動體與日同。名曰等距點。法力之四點。俱在合點與等距點之間。若噴體甚遠。則法力四無力點。遠于合點。近于二弦點。與月道同。噴體漸近。則下合等距中間二無力點。更近下合點。若噴吧二道等。則二無法力點俱與下合點合為一。第二發攝動體噴在內。而噴道

徑大于吧道半徑。則切力有四無力點。法力只有二無力點。切力之四點。二在合衝二點。二在兩等距點。與上同。噴道愈大。等距點愈遠于衝點。愈小。愈近于衝點。二道相等。距衝點六十度。吧道徑倍噴道徑。則與衝點合為一。如土星受木星攝動。等距點離衝點二十三度三十三分。已自衝後行一象限。速率恆損。再行至合。速率恆增。自合至衝亦然。法力二點。距合點近于距衝點。噴道變大小。此二點方位不甚變。第三。亦噴在內。而噴道徑小于吧道半徑。則切法二力。各有二無力點。切力之二點。在合衝二點。已自衝至合半道。速率恆增。自合至衝半道。速率恆損。距合點約

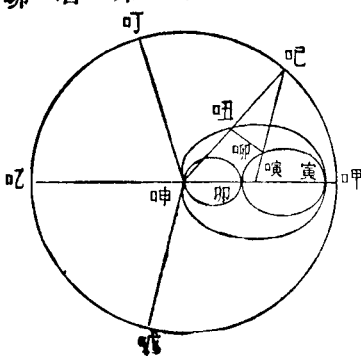
九十度增損最大。法力二點。與第二種略同。學者當依此三種作若干圖。令噴道自極大至極小。設噴為不動。如前卷作哪咄二點。十三卷長

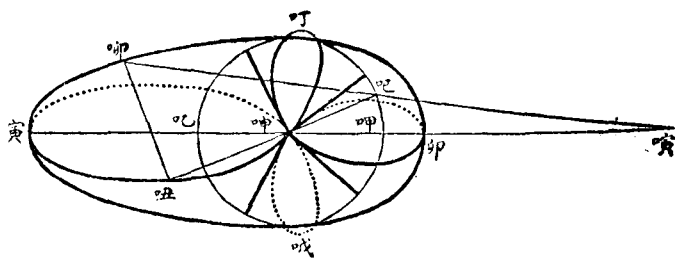
徑之行條。便各在一橢圓上。玩之。理自明也。如圖呻咄哪為直角。咄哪為

切力率。呻咄為法力率。哪恆行于寅哪橢圓。咄恆行于咄呻及呻卯

二橢圓。此為第三種圖。若第二種。二橢圓之公頂點寅在吧道外。若

第一種。則寅咄呻卯二橢圓。變為四橢圓圈。其二圈之頂點。切寅哪





橢圓。餘二圈割吧道于二等距點及二切點。已至切點。則嘖吧呻爲直角。詳玩此二圖。則本心呻所成螺曲線之圖亦易作。有三事當論之一、吧與嘖二合之中間。呻所行成小曲線。其諸小浪紋。及末一點變方位。大略同。二、嘖爲外星。呻行曲線道恆逆。故每歷利那。橢圓之長徑恆微退。若呻非屈曲行。則每合。長徑與合點方位恆同。三、若但長徑恆退。而呻非屈曲行。則已行一周。必兩次在利那中橢圓之卑點。兩次在高點。與月繞地之理同。今呻又屈曲行。則必生差。亦與月之差相似。所異者。所生大差中。又有諸微差附之。諸差之積。用以加減角差。諸差外又有一種差。或因吧道或因嘖道之兩心差消不盡餘變所生。或兼因吧嘖二道之兩心差變而生。令每合。二星之距太陽及相距俱不等。故前後二合。其兩心差不能如一。長徑亦不能如一。但其差不過一周中未消之微餘。故其本心離當至處甚微。長徑大小之差亦甚微。此二差皆

因切力而生。若非久積。可不論。設諸行星之周有等數。則諸合點之徑度有一定。即能久積。是諸合點散列本道。其中必有一點。加力于根數較強。故歷盡諸合。成一會終。其每周之餘差已補。因此一點力更強。必尙留微差未補。再一會終。其差漸大。如此遞推。必待長徑變高卑點移。令行星之周無等數。而最有力之合點移。其差方漸消。

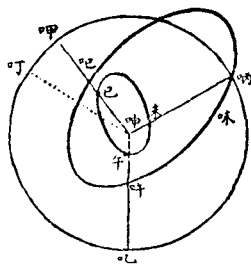
攷諸行星之平速。相與有等絕無。然有略近于有等者。如木五周土二周。其時略相近。故方位略如初。木五周得二萬一千六百六十三日。土二周得二萬一千五百十八日。其較一百四十六日。一百四十六日中。木約行十二度。土約行五度。故木五周至原合點。土已過原合點五度。細推之。二星每合爲七千二百五十三日四。三合得二萬一千七百六十日。在土星行爲較二恆星周多八度六分。在木星行爲較五恆星周多八度六分。故每三合。較前三合必進前八度六分。雖非盡密合。然大略相近。是以每合。經度必增多。而生一最長差。名曰木土差。置三百六十度。以八度六分約之。得四十四又九分之四。用以乘二萬一千七百六十日。得九十六萬七千一百十一日。約二千六百四十八年。爲合點一周。然此乃三合點之一。餘二合點距此點。一約一百二十三度。一約二百四十六度。俱每合進八度六分。故

此點復至原處。餘二點俱復至原處。是以每八百八十三年。即三分二千六百四十八年之一。當有一合在此原點。然其長差。因積久而大。故增至九百十八年而始有一合也。初歷家用古今木土二星之測數相比較。覺二星平速隨時不同。如萬歷至康熙時。土之周時變長。木之周時變短。蓋土之速率損。木之速率增也。康熙至嘉慶時。則反是。其速率增損雖甚微。但積久而大。則推算與測望不合。歷代天文諸士不能解其故。幾欲廢奈端攝力之說。至拉白拉瑟發明之。上所論列。即拉白氏之說也。此差遞增遞損。最大土星經度約四十九分。木星經度約二十一分。淺言之。一星變速。則一星變遲。蓋木令土自吧向噴。則土必令木自噴向吧。故一星退後。一星必進前。然其理尙未全。何則。凡論攝動。恆以日爲定。兩星相聯屬而行。攝動力令聯屬之行變。其力非加於二星之聯線也。詳十卷若云日與二星俱繞一公重心。而二星加攝力于日。各令行一小橢圓。日兼用此二橢圓行成一小道。如是。則噴吧互相攝動之力。謂全加于聯線上。于理方無虧缺也。準此。凡吧因噴而生進行。噴必因吧而生退行。二者相等。又以其繞公重心之橢圓行言之。一星之速率變。則餘一星之速率亦必變。而恆相反。故長差之一終。中函二星之多周。案公重心在日體中。距日心甚微。故或以日爲心。或以公重心爲心。推平速之度無異。

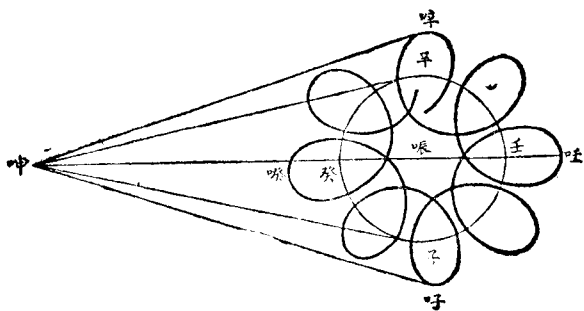
也。

凡二星相與攝動。其長徑于最長時分中。變大變小。有一定之時。長差因之而生。幾何家定其率。謂二星經度變之比。若二星體積各以本道長徑平方根乘之之反比。驗諸測望相合。今論其理。如圖。吧呷味爲土道。巳午未爲木道。吧巳爲二星。先合于呻呷線。次合于呻呷線。距呻呷一百二十三度。又次合于呻呷線。距呻呷二百四十六度。又次合于呻叮線。距呻呷三百六十八度。呻呷線俱甚遠于呻呷。準二道之最高點所生變。必與呻呷大不同。而呻叮略近于呻呷。則必略如初。故每三合必大消其差。所以長差。乃各合點之差。每三合相消未盡之餘。積久而成也。幾何家以代數術推其差。用三次式。乃有立方及三元項之式也。則隨兩心差及交角俱可知。若干時中之積分亦可知。積分者逐時之微分。久積而成大分也。

凡二行星之平速。略近于等數者。理皆如土木二星。如金十三周。與地八周之時略相近。故每五合。方位略如初。其差不滿二百四十分周之一。故相消之餘甚微。愛里曾細推之。最大不過數秒。其周時約



二百四十年也。經度之增減有長差。本心移動亦有長差。與之相應。蓋本心移動。生于兩心差之增減。及長徑之易方位也。詳前卷。凡正圓道。本心啐所繞之中心點。與日心呻合。橢圓道則不合。而用一周中本心所歷諸方位。可推中心點所在。若體每在合點時。曲線之歧點指切力合本心所行之曲線也。距中心點俱等。則中心點不動。然在諸合點中。必有一合令其歧點距中心點獨遠。則中心點必移。遞合遞移。故本心繞其中心點。而中心點又繞一定中心。定中心者。長差一終時中中心點所成道之中心也。如圖。呻爲日。若無差。則嘖爲本心。今有差。故本心行于啐吁嘖曲線道。以繞嘖。而一終中兩心差最小爲呻嘖。最大爲呻吁。長徑方位變之二限爲呻啐呻吁。又中心點所行之道爲辛壬子癸則壬嘖爲兩心差中數差。啐呻吁爲最卑點之經度大差。本心移動一終。與經度差一終之時等。但移動差之最大。與經度差



之最大。非必同時。蓋長徑之增損。憑切力。切力最大不在二合點。而遠在他點。兩心差之增損。兼憑切法二力。法力最大在下合點。是以諸合點中。令長徑增損最大之合點。非必令兩心差增損最大之合點。故長徑最大。非必與兩心差或最大或最小合。亦非必與高卑點進退最大合。然此星道之長徑及兩心差變。彼星道之長徑及兩心差必有相反之變。此理之必然也。

無論行星與月。所變之根數皆有六。曰交點經度。曰交角。曰長徑。曰兩心差。曰卑點經度。曰元點。卑點經度以上五根之變。前已詳論。今特解元點之變。元點者。歷元星所在之點也。前卷曾已平經度推橢圓之實經度。詳九卷今反其法。測得實經度并知諸根。用以推其時之平經度。則元點亦可知。蓋平經度與時正相應。歷若干平經度。當有若干時也。故此根名平經元點。設星道之諸根數不變。則任用何時實經度。推得其元點皆同也。

準上條。其元點憑上推而得。非昔時測望所得。故難保其無二變。二變惟何。一憑他事而變。一自然面變。今試考論之。推算必用諸根。而諸根恆變。如測得星之日心經度。用前後二種根數各上推其元。所得必不同。是憑他事之變實有之。推元不能用別法。二數皆依常法推得。其不同者。因所設根數不同。

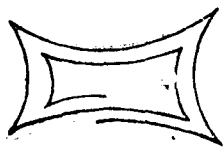
是自然之變實無也。又無論何時。星道之變。與星在道上方位之變。皆因攝動力變星之速率及方向而生。可以本心逐時之行及道面方位逐時之變發明之。故元點不能自變。但憑他根數而變也。然經度之差。若非因長徑令周時變而生。而因他根數變而生。可當作元點之自然變。考此種差。因受攝動力距中體之中數刻刻變。不生于半長徑之變。蓋半長徑爲虛數。此刻刻變之中數爲真數。此種攝動差與月略同。不因吧道之變而生。故可設吧道本無兩心差長差。而以本心啐繞中心點。與餘心相應。又設噴甚遠。與月同。以便論算。準前論及圖。本卷一條先論切力。切力逐時令長徑增損。故其周時亦有增損。此事之外。吧之每周。切力又令本心啐繞啐行四歧點之曲線。如甲丁乙戊每二歧點間之曲線。相似亦相等。設噴爲不動。則吧在二合點。必居一刹那中橢圓之最卑點。吧在距合點一象限之二點。必居一刹那中橢圓之最高點。故于真橢圓長徑增損所生差之外。吧在二合點。距呻必小于原正圓道之半徑。吧在二象限點。距呻必大于原正圓道之半徑。然全周中諸距之中數不變。因甲丁乙戊四點距呻皆等。而四曲邊皆相似。則近啐吧漸損之數。與近叮吧漸增之數相等。故一周中長徑變大變小。恰相消也。則此種差非生于切力。次論法力。法力每周亦令本心啐行於四歧點之曲線。如啐噴哪振。

而每二歧點間之曲線不相等。二長二短。因法力向外之時多。且強于向內之時故也。雖吧在二合點。居最卑點。在二象限點。居最高點。與切力同。然呻丁甚大于呻甲。故近叮噉距數之增。甚大于近呬。距數之損。則統全周諸距數計之。增必有餘。故每周吧呻距之中數。必漸大。此變不由于真橢圓長徑之增損。蓋法力不能變長徑也。然法力能變吧呻距。而不能變吧之速率。故吧呻距增。吧行度率必變小。吧呻距損。吧行度率必變大。是吧呻距增損。吧行速率之大小。必有相反之變。且行度率變。其比例必更大。蓋行橢圓法。等時得等面積。而行度率之比。恆若距數平方之反比。法力不能變此例。故每周行度率之中數必變小。而每周之時必變大。此與長徑之增損及所生之周時。俱無涉。若噉甚近。理無異。或在內道。則行度變大。周時變小。餘亦同。

上條之理。一若噉體散爲等積之圈。與呻同心。其力與法力向內向外之較等。恆加于吧呻。呻在中心。吧繞呻。故此加吧之力。爲圈加于呻吧二攝力之較。凡圈之攝力恆向心。故統計呻所受。四面恰消盡無餘。而統計吧所受。則恆有餘。吧在圈內。餘力恆向外。令吧離心。吧在圈外。餘力恆向內。令吧向心。故噉在吧道外。能減呻之中攝力。在吧道內。能助呻之中攝力。助中攝力。則吧噉行多周。中攝力漸變大。

其周時及吧呻距必俱變小。減中攝力。則吧嘖行多周。中攝力漸變小。其周時及吧呻距。必俱變大。故凡諸內星之行度率恆變小。而諸外星之行度率恆變大。凡外星道之內有諸內星。其攝力和令中攝力增大。然此事究不能測。舍推算外。無別法可證之。蓋可測者。星之平速。平速生于中力。而中力兼日與諸內星之攝力。雜糅難分也。但已知諸星之質分甚微。雖難分。亦無害也。

日攝動月。二體行多周。令月地距及周時恆變大。但亦有小差。此小差久則消盡。星亦有之。月尤易覺。其最顯者。爲月之年差。蓋月之經度。準地行橢圓道最高至最卑。最卑至最高。而變小變大。故一歲一終。欲明此理。設日行橢圓繞地。自最高至最卑。距地漸近。則攝動力漸大。其比例若距數立方之反比例。故月道之本心。依法力所行甲丁乙戊曲線。必漸大而遠于呻。每周不能回至原處。而成歧點螺曲線。觀圖自明。準此。則嘖近高點。漸離呻。嘖近卑點。漸向呻。其嘖在高卑二距之較。必漸增。而每周中嘖呻距之中數及周時。俱變大。設日自最卑至最高。則一切相反。故日地距漸小之時。月之平度率必變小。漸大之時。平度率必變大。設月道爲正圓。則日之行。僅令月受攝動力之諸分。較日不行歷時更久。詳見前故所得無異。但



歷時久而更大。其比若月之恆星周與太陽周之比。此理與測望所得合。故其差最大在十與十一分之間。而月行有時大于平度。有時小于平度。此種差所關有甚要者。其積時最久。名曰月平速長差。好里取迦勒底人所記最古之月食。與近代月食相校勘。知月之周時。今小古大。又以唐時亞喇伯測望之數合考之。知月之平速。古小今大。約百年積速十一秒。數雖甚微。但久久積之。則漸著。此事及木土差。本卷考諸行星條其理幾何家久考不能知。或謂攝力之理有時窮。或謂古表不足憑。至拉白拉瑟始發其秘。假如日月同從合點起。歷十二合。日未至原處。而所差無幾。至十三合。則日已過原處。故十二合前。半周經度所生差未消盡。十三合。消盡而生反差。則度必微增。由是二十六合。日離原處略倍三十九合。日離原處略三倍。如此累加十三合。累倍。而每次增度之比例必漸小。至日離原處半周。而不增。餘半周理同。而度微損。日離原處一周。名曰大周。其度之增損略消盡。然其合視原處尙有小餘。則度尙有小差。然較十三合之差甚微也。以此小餘之弧分。約三百六十度。所得用乘大周之時。名曰廣周。尙有小差。則更微矣。如此累推之。若地道不變。可數百年而得恰盡。然諸行星之攝力加于地。令地橢圓道之兩心差徐徐而變。細考之。自上古以來恆變小。如是久之又久。必至兩心差消盡。而地道變成正

圓。後復變橢圓。其兩心差徐徐變大。至限而復徐徐變小。此變一終之時極久。非言語譬喻所能明。視開關至今。若一刹那耳。月之平速長差因此而生。故雖歷大周廣周之久時。終不能消盡。蓋地道兩心差恆變小。則反力較正力更大。故所補數與變數不相同。亦不相等。猶之上山力不足。下山力有餘也。必俟地道兩心差復變大。正力較反力大。始能消盡其差也。故日月及日道之卑點。三者相與之方位。每一次復原。月之諸差略消盡。必餘甚微之增速。久積之成經度之大差也。

觀上所論。知諸行星及諸月。若一體有一定時之變。亦令諸體相應而生一定時之變。月與地球相屬之動。惟日能令月生變。諸行星之質微。距地月遠。除金星外。其攝力不能令生大差。然能令地道變。卽如今日道變。月道因之而亦變。而月道差。較地道差更易見也。

若日子橢圓理之外。別有他故。令距地數有一定時變大變小。則必令月生同時差。與月之年差理同。故凡行星令地道生最小變。其變卽顯于月之行度。人在地但測月之經度。行星之力易見。卽前所云感動之理也。凡月之經度變大。一周中所增甚微。乃速率漸增微分所積。然每周輒得一倍。又其速漸增之率恆增。則經度變大之數亦必恆增。久之相反。速率恆變小。則經度亦恆變小。稍稍消其前所增

之度分。故月橢圓未受行星攝動力。一若靜體。迨此力加之。令遞增速率。一若靜體受長加力而動。其速率刻刻增也。

地日距與月地距之理同。有二長差法。一、因動之切力變速率。令橢圓之長徑有增損。則準刻白爾之例。必生周時之變。蓋周時與中距之比。恆若立方與平方之比也。二、因兩心差之變及卑點之移。令一周中二體之距有增損。橢圓之面積隨之變。而平速亦變。蓋平速與距數之平方根恆有反比例。故以公理論之。凡平速之變。與距數之變恆相應也。

前論金星攝動地球。其經度之變。二百四十年而復。此亦平速差也。故地速率損時。日地中距變大。增時。日地中距變小。平速差甚微。所得日地距增損更微。而月度率之變。爲微之又微。然積之至一千四百八十四月。經度增至二十三秒爲最大。又歷一千四百八十四月。亦損至二十三秒。此事漢孫考得之。然金星之攝力。不獨加于地。令月生變。亦直加于月。所生之差。漢孫亦推得之。而推法不傳。今略論其理。凡金星攝動月之力。可用諸分力代顯之。其諸分力。各于一定時中。有一方向最大。漸變小。至于對面方向相反至最大。復變小。至無。又于原方向相反至最大。如此遞變不已。諸分力一終之時各

不同。凡三體。以一體平速時之倍數減他體平速時之倍數。以其較與餘一體之平速時相減。視其較。卽知所推力一終之時。此諸定時之力。可各推其攝動。一若別無他力也。設其力之一終時。與受攝動體之周時不相涉。而力最大之時。於道中無一定方位。則若干周所生差。必自相消。僅有短差。無長差也。若力之一終。與月之轉終略同。力最大之方位。每次略相近。則必有長差也。假如力最大。初在月道最高點。所生之差。若力一終不能相消。必累次積之。直至力最大與最卑點會。始能消盡。力之一終與月之轉終較愈小。則長差消盡之時愈遠也。

月受金星之攝動力。依金星距地遠近而異。其距數。憑金地日三者依橢圓道內之方位而得。由其距數所生之較數。有最繁者。其中有一甚微率。推其一終時。法以地球平速時之十六倍。減金星平速時之十八倍。其餘略近月之平速時。月轉終爲二十七日十三小時十八分三十二秒三。力之一終爲二十七日十三小時七分三十五秒六。差十分五十六秒七。約爲三千六百二十五分月轉終之一。此二時齊等。約二百七十三年。其半爲一百三十六年五。所生之差恆積而大。又歷一百三十六年五。而漸消盡。漢孫推得經度積差。最大時爲二十七秒四。近時測月經度有諸小差。依上所論切法二種小差

推之。皆合。按用表推月。尙有小差甚多。俱有表。今不細論。其中有大於此差者。前所論角差。

本卷上論以月距日

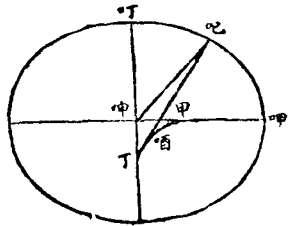
據。因近日遠日月之二半道而生其攝動力不等。愈近日愈大。已知日月二道之比例。則其差俱可推。若已知其差。即可依諸差比例。而得諸距數。然其差甚小。用以推日之距數。恐不密。若其差稍大。則可耳。

月因攝動而生之諸差。最大者名曰出差。因兩心差增損。又因日與長徑移方位。令長徑進退而生。蓋長徑進退。則月在本道之方位亦進退。前後各約一度二十分三十秒。昔多祿某考上古所傳測望簿。始知此差。以上諸差并而成一公率。詳月離專書。今不論。

月道又有小攝動。生於地球赤道凸質之力。凡正圓球諸質點所生攝力。皆如發於球心。而扁圓球諸質點所生攝力。其方向不能盡對球心。亦不能盡合距心平方之反比例。故其力加於月。必生最小攝動。令月道之交點最高點生差。最奇妙者。令月道軸成小尖錐動。猶月力加於赤道凸質。而令地軸成小尖錐動。凡行星成扁球狀。恆攝所屬諸月道。令漸近本星赤道面。木星之扁率最大。土星有光環助其凸質力。故此二星之扁力。較他星更強。是以土木諸月之道。與本星之赤道面幾相合。最近之月。則

最近赤道。稍遠則稍離。力漸小也。蓋距數增。攝力之率驟變小。則正球與扁球之較。漸不覺也。故土星諸內月之道。幾與赤道面合。最遠之月。距星心約如土星全徑六七十倍。其近與赤道面之交角。亦不小也。然其遠月之攝力。必不能攝動光環與赤道令生大差。設有攝動。令星軸成尖錐動。則較地球必甚緩。蓋土星與其月之比。甚大於地與我月之比也。故其歲差之周。歷時甚久。不能覺也。

潮汐一事。與日月之攝動相關。或云日月之力。攝正面之海水上升。是矣。而相對背面之水亦上升。何也。曰子但知攝力引動地面之水。而不知并引動地體也。設水受攝而地不受攝。則惟正面之水上升矣。今水地俱受攝。正面之水受攝力。較地體多。故上升。對面之水受攝力。較地體少。地去而水留。故亦上升也。此與月地同受日攝力。朔望時月地距大。二弦時月地距小。同一理也。設前圖十三卷長徑之行條。呬叮叱不爲月道。而爲地球大圈上之水面。噴不爲日而爲月。吧爲水面之任一點。唧呻顯吧點所受攝動力之大小方向。呻噴顯月攝地之全力加於呻點。唧呻力加於吧。必引吧向天。其方向與唧呻平行。而地之攝力必引吧向呻。此二力之并力爲吧哂。引長之必與



叮呻線相遇。去呻無幾。因月之攝動力。甚小於地之攝力故也。設於呷叮象限各點俱作并力線吧晒。必恆爲甲丁小曲線之切線。而海面恆正交吧晒線。此流質重學理也。故叮吧呷一象限。各點依二力而成定面。必恆以吧晒爲曲率半徑。在叮點曲率最小。在呷點曲率最大。而成一橢圓。呷爲中點。丁甲爲漸伸線。曲率漸伸線俱詳代微積拾級。呻呷爲半長徑。呻叮爲半短徑。故海面成長橢圓體。其長徑恆向發攝動體。準月之攝力推之。長短二半徑之較。約當得五十八寸。準日之攝力推之。長短二半徑之較。約當得二十三寸。設惟有月力。而月不動。地球亦不自轉。則海面成橢圓體勢甚安穩。既成而定。永不變。今此橢圓體剛欲成。水面未定。月已進前。則橢圓體之頂點亦移。刻刻如此。故海面必依此勢。成最廣而扁之浪。此浪之頂恆隨月。月有視行。則必依感動之理。與月之諸差相合。此浪之最高卑。行至海岸。卽爲潮之長落。日之攝力。亦成如此最廣之浪。浪頂恆隨日之視行。亦與日之諸差相合。日月二浪。有時合而相加。有時離而相消。朔望爲二潮之和。兩弦爲二潮之較。潮之定數。今雖未能密推。然若能推得其定面。則無定何地。其比例與橢圓體所應得之數。俱可無大誤。大率日月二潮之高。約爲二尺與五尺。故朔望兩弦潮之高卑。若七與三之比。

潮繞地一周。爲潮日。設止有月。而月行於赤道面。則潮日卽太陰日。爲月周時。及地一日自轉相合而成。又設止有日。而日行於赤道面。則潮日卽平太陽日。今皆不然。乃憑二浪頂點相合之公共最高點。繞地一周而成一潮日。此點在二浪中間。依二浪或漸相合或漸相離而生進退。故潮日之變有大小。在朔望時其變最大也。無論何海口。水之長落。必與日月過午線相應。若水不因他故而動。亦無阻力。如爲海底所滯。或過長峽等事。則本海口所當得橢圓體之最高。應時而至。與上條潮日之候必相合。設有此諸故。則必生差。諸海口之差各不同。察統地球一切海口潮汐最高之候。亦一要事。蓋準此能知統地球潮候之差也。考此事當細心。勿以平潮誤爲最高之時。雖有時平潮與長水落水合。然其故大不同。此若誤。必不能考定潮之理。蓋一切俱紊也。

凡日月之赤緯度異。潮亦因之而異。蓋潮之頂點。恆欲正對發攝動之體。其體之方位變。則潮亦隨之而變也。故每月每年。潮必漸增而大。復漸減而小。當以黃白交點之周時推之。一周中月在赤道南北之緯度。最大爲二十九度。最小爲十七度。

以幾何理言之。日月攝水成潮之力。與距地之立方有反比例。日月之道俱爲橢圓。其距地乍遠乍近。

故日力變大小。在一十九與二十一之間。其中數爲二十。月力變大小。在四十三與五十九之間。其中數爲五十一。故潮之最高與最卑之比。若五十九二十一兩數和爲四十三一十九兩數較之比。卽若八十與二十四之比。約爲十與三之比也。凡分別潮高卑之故。最要者莫如地勢。或地有峽口。潮入必驟漲而高。如北亞墨利加芬地灣阿那波里之潮。高出平水十二丈。英國李力斯波漲水落水相去或至五丈。中國海寧之潮。高於平水或四五丈。

考行星之質積多少。有月者。可測其月。但星推周時以推得星之攝力。卽知星之質積。無月者則不能攝。而用攝動力。則無論有月無月。俱能推之。蓋凡行星依其質積及方位。加攝動力於他行星。準方位可推其力之率。測得其攝動力若干。卽可以力之率。比例而得其質積也。用此法推得木星之質積。知舊時半特測木星所定木星之質積。大不合。因所用之器不精故也。又用木星攝動因格彗推定之數。亦知半特所得不合。大率舍太陽外。攝力之最大無過木星。近賴愛里考定之。知舊所用分微尺不甚精。推月離木最遠度甚疎。因改用精器細測。前人之謬訛。一一糾正。厥功甚大。

測諸行星相攝動。而知各星與日二質積之比例率。測木星諸月相攝動。亦知各月與星二質積之比

例率。異日細測土星諸月。亦可知其比例率。拉白拉瑟細推木星諸月。參考木月食時諸測望簿。以定諸月之質積。其最少者。與太陽比。若一與六千五百萬之比。此大小二體。一若用天平衡之。法之精密。至此。嗚呼奇矣。

定我月之質積有二法。一、考日月之二潮。精測其最大最小。以分二體之攝力。即可推其質積之比例率也。一、考地軸之尖錐動。此動止屬月之攝力。與日無涉。既得其攝力。即知其質積也。二法所得。同月之質約爲七十五分地質之一。

天算家考天王攝動。能推未見之海王。定其方位。用遠鏡試測。果得之。前已略言其事。九卷五緯經條此事爲攝動之奇證。故復詳言之。乾隆四十六年。初測得天王星。後屢測。略得其道之諸根。據以上考。疑佛蘭德於康熙二十九、五十一、五十四諸年。六次所測得相等諸恆星。後復不見者。恐俱即此星。又乾隆十八年。白拉里二十一年。梅爾所測得之星。及乾隆十五、二十九、三十三、三十四、三十六諸年。勒末聶十二次所測得諸星。亦皆即此星也。此諸人俱用精器。測亦細密。故其測簿可信。據以改正諸根數。蓋橢圓之分愈大。則根數愈易推定也。又以土木諸行星所發之攝動加減之意。其能密合矣。步伐爾既作

木土二表。卽今所用者。又欲作天王表。乃準乾隆四十六年至嘉慶二十五年所測。用一橢圓道及諸攝動。上推不能悉合。因謂舊測不足信。然用其所作表下推。與測望亦不能密合。所測經度恆多於表中經度。自乾隆六十年其差漸大。至道光二年而止。此後漸小。至道光十年。所測與表合。過此復不合。所測經度。恆少於表中經度。則此表不能定星之行法也。乃考其不合之故。如呷板一圖。其橫線爲所推天王日心經度。每分五十度。其縱線爲經度差。每分一百秒。每年測天王經度。或與所推合。或大於所推。或小於所推。於橫線或上或下。俱用黑點識之。如康熙二十九年佛蘭德所測。大於所推六十五秒。九識於橫線之上是也。餘仿此。若作線聯諸黑點。則成浪紋狀。橫線之上有二彎。其下有一彎。又略依其狀作呷呷叮叮呷呷線。令交橫線之點。相距各一百八十度。乃依此線各點距橫線之度。移相對諸黑點向橫線。如乾隆十五年之點甲移向乙。與乙距丙等。則與交點呷略合一橫線。準此。則知其差大半由於天王根數之誤。蓋經度遞大遞小。恰距一百八十度。此兩心差或卑點有誤。所生差皆應如是也。考兩心差或誤。則所推較所測。每隔一百八十度。其經度必遞大遞小。而在最高最卑二點。必恰合無差。今步伐爾所推最卑點之經度。約一百六十八度。最高點約三百四十八度。略在圖中呷

啊吶吶等字之中物甲諸點。而不在呷吶等點。則非兩心差之誤。而必爲最卑點之誤矣。如呷板二圖。任取辰天爲星之平經度。天人爲所推橢圓真經度與平經度之差。味爲最卑點之經度。吧或嘑爲最高點之經度。各人點恆在吧呷味呻浪紋曲線內。嘑至味在吧嘑線之下。味至吧在其上。設最卑點實在未。全曲線當爲巳午未申酉。則辰天平經度與真經度之差爲天人。而人人爲所推所測。二真經度之差。乃取吧呷味呻浪曲線。伸爲辰卯直線。依二真經度之人人諸差。作呷吶嘑啞啞曲線。如呷板三圖。則曲線與直線之距。卽最卑點誤置之證也。此圖之曲線必成上下二浪。其交直線啞啞二點。相距必一百八十度。卽二圖之呷叭二點。在二真經度最大差呷午及呻申之間。距最卑最高點各九十度。既知其差大半。因最卑點誤置。則必將最卑點移前若干度以改正之。法取一圖之橫線并二浪紋曲線。于橫線各點作諸縱線。與二曲線相遇。視諸縱線在上下兩邊。則取其較在一邊。則取其和。依之作線。必如四圖諸點聯成之曲線。又作甲乙線。少斜於呷吶線。以代之。則自康熙五十一年至嘉慶五年。所測與改正推法所得略無差。而康熙二十九年所測。尙差三十五秒。此測本未精。可不論。夫以呷吶橫線爲天王經度。周時有小差。以甲乙斜線代之。其差消盡。是其逐度小差之比。若距二線

交點之比。交點在乾隆三十四年。準此。則依呷叱所推天王之度。恆在所測度之前。是表中所用平速稍強。周時稍弱。必減其平速。增其周時。依法推至嘉慶九年。與測望略無差。而此後又生一差。其行增速。愈久愈大。較所推橢圓行。恆進前。直至道光二年。積差最大。自此至今。速率復漸減。天算家論此事。謂必有他力加之。此力或前所無。或雖有。甚微不能覺。至道光二年。力之方向相反。且反力更強於原力。論此力者。紛紛不一。或謂必有未見之外行星。此乃其攝動力也。其說最合理。於是英亞但史。法蘭西力佛理亞。用攝動之法。反推之。求未見星所在之方位。二人所得略同。力佛理亞推得道光二十六年八月四日。未見星之日心經度。爲三百二十六度。亞但史推得是日日心經度。爲三百二十九度十九分。其較不過三度十九分。又推其星之道面。略與黃道面合。力佛理亞寓書于伯靈星臺官嘉勒。請依所推試測之。是夜嘉勒與因格同測。果得之。爲八等星。明夜復測之。見其經度已變。知確係行星。非恆星也。後復細測。依奈端攝力之理推之。知天王諸差。果皆生於此星也。嘉勒推得本日之地心經度。爲三百二十五度五十三分。化作日心經度。得三百二十六度五十二分。較力佛理亞所推。差五十二分。較亞但史所推。差二度二十七分。而較二人所推得之中數。僅差四十七分。

今略言其推法。海王之質積與諸根。俱爲未知之數。惟波特曾言半長徑略倍天王半長徑。約大於地道半徑三十八倍三六四。而天王諸根。亦爲未知之數。蓋發攝動體之諸根俱未知。則受攝動體之諸根。亦難定也。故推步之法甚繁。惟略知一道之長徑。則可設餘一道之長徑。而半用代數號。半用實數。依拉白拉瑟天重學款中之公式。寫其諸項。無論何時。可顯其攝動力之率。以此諸式及所改天王之根數。用表中經度。推得其數。以測望之數校勘之。乃改正式中海王之諸根與質積。及天王未定之根。俱能得其真數。次減小海王之距數再推之。蓋據前推所得。知先所設距數太大也。而得諸數更密。列表於後。

海王諸根表

推者	道光二十六年		平黃經半長徑兩心差	卑點黃經質積
	月	日		
力佛理亞	一一	一五	三一八 四七·四	三六·一五三九 〇·一〇七六一〇 二九四 四五·八
亞但史	八	一七	三三三 三三三	二·〇 三七·二四七四 〇·一二〇六一五 二九 一一·〇 〇·〇〇〇一五〇〇三

力佛理亞依測望簿推至道光二十五年。亞但史推至二十年。亞但史又另推五年。知半長徑不合。當更減小。定爲三十三・三三。與測望略合。後人益復精測。覺亞但史後所定半長徑。尙失之大。須再減。既測得其數。據以上推。知拉浪於乾隆六十年三月二十日及二十二日所測得之恆星。因前後測不合。自疑初測誤者。蓋卽海王也。米利堅瓦克據此諸測。推得諸根數如後。

元時 道光二十六年十一月十五日倫敦午正

平經度 三百二十八度三十二分四十四秒二

半長徑 三十・〇三六七

兩心差 〇・〇〇八七一九四六

最卑經度 四十七度十二分六秒五〇

正交經度 一百三十度四分二十秒八一

交角 一度四十六分五十八秒九七

周時 一百六十四太陽年六一八一

每年平速行 二度一八六八八

右根較力佛理亞及亞但史所推。差甚大。然所得海王之方位甚相近。蓋用二種根數。推海王此日所在。與測望所見之處。俱相近也。又其距日。亦與二種根所得距日中數甚相近。蓋用力佛理亞根數。推得本日之帶徑爲三十三。而卑點距日。爲三十二・二六三四。又推得嘉慶十一年至道光二十七年海王最卑點。不過四十二度。則本日海王距日。必在三十二・六與三十三之間。後有表兼列海王之眞度。及二人推得之度。觀之知其數之相近。所列之度。皆日心經度也。

圖中諸黑點。乃識天王星每年之經度及推與測之差。其年皆記以英字。今釋之。康熙二十九年 五十一 五十四 乾隆十五年 十八 二十一 四十六 六十 嘉慶十 二十一 光二道

天王海王二星諸黃經度帶徑表

年	天 王 海		王 力 佛 理 亞		亞 但 史		
	黃 經 度	黃 經 帶 徑	黃 經 帶 徑	黃 經 帶 徑	黃 經 帶 徑	黃 經 帶 徑	
嘉慶十	一九七・八	二三五・九	三〇・三	二四一・二	三三三・一	二四六・五	三四・二

十五	二二〇・九	二四七・〇	三〇・三	二五一・一	三三二・八	二五五・九	三三三・七
二十	二四三・二	二五八・〇	三〇・三	二六一・二	三三二・五	二六五・五	三三三・三
二十五	二六四・七	二六八・八	三〇・二	二七一・四	三三二・四	二七五・四	三三三・一
道光元	二六九・〇	二七一・〇	三〇・二	二七三・五	三三二・三	二七七・四	三三三・〇
二	二七三・三	二七三・二	三〇・二	二七五・六	三三二・三	二七九・五	三三三・〇
三	二七七・六	二七五・三	三〇・二	二七七・六	三三二・三	二八一・五	三三二・九
四	二八一・八	二七七・四	三〇・二	二七九・七	三三二・三	二八三・六	三三二・九
五	二八五・八	二七九・六	三〇・二	二八一・八	三三二・三	二八五・六	三三二・八
十	三〇六・一	二九〇・五	三〇・一	二九二・一	三三二・三	二九六・〇	三三二・八
十五	三二六・〇	三〇一・四	三〇・一	三〇二・五	三三二・四	三〇六・三	三三二・八
二十	三四五・七	三一二・二	三〇・一	三一二・六	三三二・六	三一六・三	三三二・九
二十五	三六五・三	三二三・一	三〇・〇	三三二・六	三三二・九	三二六・〇	三三三・一
二十七	三七三・三	三二七・六	三〇・〇	三三六・五	三三三・一	三三九・三	三三三・二

觀此表。知天王與海王合。在道光元年之末。力佛理亞所推。在三年之首。亞但史所推。在四年之末。故二人所推海王之攝力方向。與真略同也。凡攝力在合時最大。今列諸家所推嘉慶十年道光二十五年及合時海王之攝力。并質積。列於後。準前卷理。十二卷諸數皆已知條。日攝天王之力恆爲一。以所得各母數約之。得全攝動力也。

推海王攝動力之比例表

推	者	質	積	嘉慶十年	力合	時	力	道光二十五年	力
庇爾思	一九八四〇	二七五四〇	七五〇八	三三三三九〇					
斯得路佛	一四四九六	二〇二四四	五五一九	二三八一〇					
力佛理亞	九三二二一	二〇八三七	五一九三	一九九三五					

按庇爾爾思在米利堅堪比日星臺。斯得路佛在波羅略星臺。用弗鑾解拂所造之遠鏡。測拉斯拉所得之海王月。以推海王之質積。然二得數大不同。蓋用分微尺。其細數最難確。故不能決其誰得誰失也。海王之質積既未能定。故但憑力佛理亞所推嘉慶十年至道光二十五年。四十年中之攝動。爲最有力之時。依前理^{本卷準上論條}作圖。以顯法切二力之大小率。如甲板五圖。吧爲天王。噴爲海王。二平圓爲二星之道。吧嘞爲法力率。其方向恆正交吧道。卽前圖之申丑。吧叭爲切力率。其方向恆切吧道。卽前圖之丑卯。呻嘞寅呋呻甲呻卯呻乙呋四圈曲線爲嘞點所行之道。呋叭丙巳呋戊丁嘞呋四圈曲線爲叭點所行之道。在上下二合點之左右。法力向外。餘處皆向內。近下合點。法力最大。遠勝於近上合點。下合點左右各三十五度五分之點。無法力。故天王在下合點。所受法力最大。行八年三六漸變小而無。此後法力向內。自小而大。然嘞點在甲或乙小圈內。則向內力最大。時亦甚微。歷時最少故也。後嘞點行呻卯圈。向內力復漸小而無。乃復向外。至上合點而最大。餘可類推。天王在丙丁呋呋四點。皆無切力。乙呋呋丙二弧。各七十一度二十分。天王自乙至呋。行十七年。其速率因切力而增。自呋至丙。亦行十七年。其速率因切力而損。自丙至乙。切力不大。觀圖自明。準此。則四圖嘉慶五年後。經度漸

變大。至道光二年而止者。乃切力順加漸變大。令速之增率漸大。後切力復變小。增率漸小。至合點而切力爲無。速率得平。所生也。道光二年後經度漸變小者。乃切力逆加漸變大。令速之損率漸大。所生也。故其曲線前高而後卑。皆生於切力無可疑焉。曰此與法力無關乎。曰切力能直令速率變。十三卷此後詳論法力令距日數變。準同時同面積之理。而速率亦變。本卷準上條其元點條然自嘉慶五年至道光二十五年。

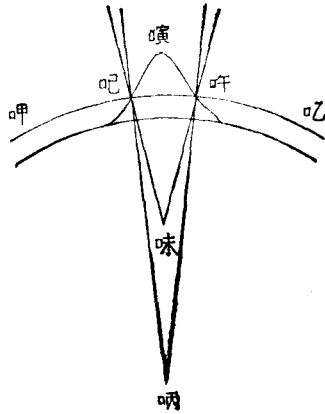
法力所生經度差甚小。與測量數不相闕也。細論之。切力所變速率。合前合後。恰相反而相消。故平速仍不變。又所變最卑點兩心差。亦相反而相消。故雖變如不變也。法力不能直令速率變。然自無力點至無力點。其向外之力積久而大。令星距日數變大。而速率變小。其向內之力甚小。不能消盡。故僅有切力。則其差每周必消盡。而有法力。則恆有餘差。自初測至今。歷時未久。未能得其確證。然觀四圖。黑點漸向下。速於漸向上。可知因法力令兩心差卑點生變而然也。然則天王之經度差。必恆如浪紋曲線。直至後下合前二十年。二根略變。而浪之方向相反。上合亦然。但其變視下合甚小也。

力佛理亞亞但史二家。推海王所在。用心甚精而苦。故嘉勒依其方位。一測即得。而論者或謂其推法無理。其星之測得。乃偶合耳。嗚呼偵矣。夫天王之周。爲八十四年〇一四〇。海王之周。爲一百六十四

年六一八一。每一百七十一年五八而一下合。近時之下合在道光二年。前下合必在順治六年。其時尙未知有天王。至康熙二十九年始測得之。後屢測未覺有差。至嘉慶五年始覺有微差。至十年而其差顯著。至二十五年差益大。而人人論此事未能解其故也。後雖知爲未見之星所攝動。然欲推未見星之方位則甚難。凡二星合時其攝動力最大。必先推定其時。則合之前後攝動漸大漸小之率始可知。然欲憑測望而定其攝動最大其事非易。測望不能無差也。故至道光二年後又若干年尙不能定最大之時。至二人出始略能推定之。烏得云偶然耶。夫樹作花時人見而候其果熟而采之。乃云此果得自偶然。智乎愚乎。

續前數條所論推定屬太陽諸體之相距及相與之行動。及體質與太陽體質之比。以地球體質爲一。而謂之元。此元與地面體質或輕重之比。尙未論及也。能知地球體質之全重。爲鉛或他物一觔重之若干倍。則知此元矣。已知地球之大小。再求其疏密率。即可知其全重之數。惟其疏密率終未有定數。茲能定之。則天學能與重學相合矣。詳論如左。求地球疏密率之法。將已知大小之體。並知其與任何別體之相距數。而試得其在體所有之攝力。即可得地球之疏密率。準地心力之例。凡各

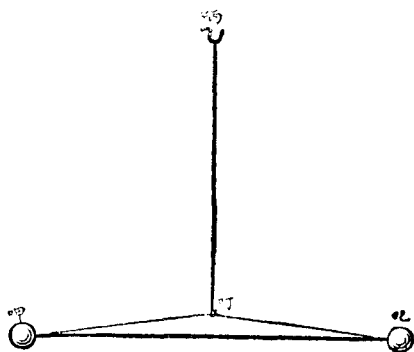
球體質之疏密率相等。而有大小不等。則各球面每質點攝力相與之比。如球半徑之比。設有徑一尺之球。而其體質之疏密率。等於地球之體質。則球面之上。一質點之攝力。僅爲四億一百八十四萬九千二百八十分。此質點本重之一。故此一尺徑之球。與別一尺徑之球相切之攝力。僅爲十六億七百三十九萬七千一百二十分。球體之一也。如此極微之數。尋常權重之法所不能測。必用精妙之法。方能測得。而再可詳推也。若用大攝力之物。則能令其微數變大而易見。法用地面上所有最大之物。而不必造作一球。因凡物無論大小形狀。知其體質。可用積分法推算此物面之上。一質點之攝力。故擇形狀合宜之大山一座。依奈端之例。用線懸重物於大山之旁。則必受山之攝動。而不能合原垂線。惟山雖甚大。與原垂線所差者甚微。且用懸線或水準於山旁。皆不能合原垂線。必用精妙測天之器。在山相對之兩邊。各測定天星。得其準線之交角。再與用三角法測此二處當有之原角。比較而得。受山旁攝力之偏度也。如圖。噴爲山。呬爲赤經圈。交於山旁之吧呬二點。此二點之聯線。經過山之最大攝力處。啞爲地球之中心。見卷四。假如以木作一地球象條。吧呬呬角爲二處緯度之較。可用三角法測地面而得。吧呬之實相距。再由地球之徑與扁率而變之爲緯較之秒數。用天頂尺



於吧啞兩處。測天頂之恆星。因天頂尺之酒準。必受旁攝力向山而偏。故所得之準線。必與地球之半徑線不合。而成吧味啞角。大於吧啞啞角。二角相減。即得山之南北兩邊攝力偏度之和。次乃測量此山而作小樣。又取山內各處之質。而求得其重率。依此法推算。雖覺繁重而得數恆確。惟其旁攝力必依命爲一之元數定之。如以一觔重之球。其心相距一尺之點爲元是也。將諸元之和變爲合地平方向之力。卽爲山之旁攝力之全數。此數與地球合垂線方向之攝力比。如兩處攝力偏度和之切線與半徑比。分其兩處偏度之法。使兩處偏度和與兩處偏度比。如攝力全數與兩處推得之攝力比。惟用以上之法。繁難之至。必有精妙之器。及能精測之多人。乾隆三年。法蘭西博物士部額與拉工大民。在祕魯國測量地球之子午線時。見卷四量子午用此法測成波拉索山。得準線兩處偏度之和約十一秒。惜測量之器非極精。所得不足甚信。乾隆三十九年。馬斯奇林

測蘇格蘭之失哈連山。得準線偏度之和十六秒六。其山雖僅高三千尺。而形勢甚便。所得可信。黑頓白來非二人。先後各依此推算之。得地球之疏密率中數。與地面水之疏密率比。若四·七一三與一比。近時用三角法測量英國全地之官哲末士。在蘇格蘭之壹丁不測一山。得北邊偏度二秒二。南邊偏度二秒。依此推算之。得地球疏密中數爲五·三一六。又法。以鐘擺測山峯之攝力。與地球之攝力而比較之。亦可得地球疏密率之中數。因地心力之減小。與距地心之平方有比。而依鐘擺每動之歷時。可知鐘擺所受之地心力。見卷四一用鐘擺條設將已知在地面處每動歷時之鐘擺置於空中。距海面若干高之處。其每動之歷時。可詳推而得。若將此擺置於與前等高之山峯之巔。則有山質之攝力與地心力相合。其每動之歷時。較前次之在空中必少也。白拉納賈利尼在亞卑斯山之一峯名色尼。依此法測量而推算之。得地球疏密率中數爲四·九五。又法將鐘擺置於深礦之內。亦可測得地球之疏密率。按奈端之例。凡勻質之空球殼。以一點任置殼內之何處。皆無偏向一邊之力。因其四面之攝力皆相同也。又例。一點受同質大小二球之攝力與二球之徑有比。準此二例。則物若降至地球面之下入於深礦之內若干尺。其所受地球攝力。必等於全攝力內減去此

若干深地球殼所有攝力。是以全地球之內外質若疏密率相同者。則在礦內之攝力。必小於全地心力矣。一全地球內質之疏密率若大於外殼之疏密率者。則在礦內之攝力。或較全地攝力。不但不減小而反有加大者。地球外殼之疏密率既易推測而得。則依此可得地球疏密率之中數矣。英國天文官愛里。曾試此法數次。第一次在哥奴瓦銅錫礦內深一千二百尺。將鐘擺之器。自下取上。至半途而礦內自燃。因致磔開落下。未得試成。第二次仍在此礦內。適有大礮石漸漸低下。致多水滿礦底。亦皆試未成。第三次在達罕府之南特爾爾字煤礦內深一千二百尺。用電氣線連上下二鐘。擺以比較動數。絕不參差。得礦口之秒擺此擺每秒動一次較礦底之秒擺。一日中少二秒又四分秒之一。依此推算得地球之疏密率中數爲六·五六五。以上諸法所得之數。參差頗多。而末一次與前各次。參差更多。皆難取信。有密者勒剋思一法。依前言用鉛球之攝力。與地心攝力相比。將其得數與前數相消而得可信之數。後賈分第依此法試之。如圖。用長木桿。兩端各連小球呬。用細鐵絲一條。橫繫木桿之兩端。又用細鐵絲繫於橫鐵之中點。而上掛於鈎。則木桿不受折力。若有外力使木桿平轉。則直鐵絲受絞力。而其質生相等之簧力。去其外力。則簧力使木桿退回。而仍平轉至



原處。再以永動性轉過。至不勝絲質之簧力。而再退回。如此往復轉動。成合地平面之弧線。而每次成弧線所歷之時相同。已知二球與木桿之重。則依每次成弧線所歷之時。可按靜重學之理。定鐵絲加於球之動力。即爲絞力之率。加外力之法。以大鉛球近於呬乙二球。一在左。一在右。則呬乙二球同受攝力而移動。即使鐵絲受絞力移至絞力與攝力相定而再移。過則攝力不勝絞力。球必自回。後則自行擺動必多次而始停。木桿之末有針指其平轉之弧度。另用時辰表表其每動所歷之時。則將每動之歷時與弧度可與鐵絲之較力比較。而知其攝力。然人若近此球。則另加人之攝力而不準。故弧度宜用遠鏡窺之。且其桿與球爲空氣所阻。弧度必漸短。又二大鉛球以地平方向現攝力。而攝力與相距之平方有反比。合於絞力而成并力。因此并力。故其時其速其弧度與獨有鐵絲之絞力者大不同。若欲詳考各事。推算甚繁。幸其攝力極微。可不必詳推。而用簡

便之略數。得數亦無大差矣。惟此外能混亂其數之故尙多。不可不防。皆因寒暑不同。而空氣流動也。茲不盡言。賈分第用此法得地球之疏密率中數爲五·四八。嗣後來迤用此法得五·四三八。再後倍里弗用此法精心詳考得五·六六。此二數爲更可信。茲將所得諸數臚列之。馬斯奇林測於失哈連之地。白拉非推算之得四·七一三。賈利尼以鐘擺測於色尼山。如略改定得四·九五。哲末士以攝力測於壹丁不山。得五·三一六。來迤用賈分第法得五·四三八。賈分第測得五·四八。倍里弗重推之。得五·四四八。倍里弗再用賈分第法。測得五·六六。愛里用鐘擺測於南特爾字煤礦。得六·五六五。此諸數之中數。爲五·四四一。若取最大最小二數之中數。則爲五·六三九。故五·五可爲略近數。而易記憶。以地爲正圓球。徑二萬二千八百八十里。則得地球體積爲六兆三千三百三十九億一千五百九十七萬立方里。以水一立方尺之重爲四十八觔八。則地球之重爲九秭八千一百四十五垓六千京觔也。