受驗準備用書

平面三角法要覽

商務印書館發行

受驗準備用書

面三角法要覽

匡文濤編譯
駱師曾校訂

商務印書館發行

中華民國二十八年五月初版
中華民國三十二年十月國難後第一版
中華民國三十四年七月國難後第二版

(51113)

平面三角法要覽一冊
每冊定價大洋貳角伍分 S
外埠酌加運費匯費

編譯者 匡文濤
校訂者 駱師曾
發行兼印刷者 商務印書館 上海河南路
發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者胡達聰)

例　言

一是書以日本研究社所發行之中等教科新カード式參考書爲藍本而斟酌本國制度及習慣特爲譯補以資參考

一是書供學校生徒自修溫習小學教員檢定考試參考之用

一是書雖爲便於記憶之書然與他書有別可利用最短之時間便於少量之記憶

一是書裏面連續讀之可作教科書用而其表面則採應用問題故前者便於學習後者便於檢查

一是書網羅各科教科書之項目殆悉盡無遺而紙數之少形狀之小尤便於研究

一是書代數幾何三角均譯自原文而問題間爲改正約十之二三惟算術則纂改稍多且次序亦略爲更動如單複利息算前後相連而體求積法移置在後特誌之以示區別

一是書譯自鄙門半肩行李無書可稽腹儉時促謬訛必多尚望愛讀諸君有以正之幸甚

泰和匡文濤自識時在民國六年三月

平面三角法要覽

目次

測角之種類	角之單位	各單位間之關係	問題
六十分法	一直角九十等分之一名一度用此爲角之單位 $1^\circ=60'$ $1'=60''$ (注意) ° ′ ″ 爲度分秒之記號	某角以弧度法測之其測度爲 θ 以六十分法測之其測度爲 D 則有次之關係 $\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180^\circ}$ $\theta=\pi\times\frac{D}{180^\circ}$ $D=180^\circ\times\frac{\theta}{\pi}$	(1) 0.65 直角爲幾度 (2) $97^\circ 5' 15''$ 爲幾直角 (3) 正三角形,正五角形, 正六角形之一角各有幾度 (4) 某度數以弧度法表之則其數之二倍與某度數之和爲 $23\frac{2}{7}$ 度求其數如何 但 π 爲 $\frac{22}{7}$ (5) 內角爲等差級數最小角爲120° 公差爲5° 間此是幾邊形
弧度法	於任意之圓等於其半徑之弧上所立之中心角名半徑角用此爲角之單位 1 半徑角$=\frac{2\text{ 直角}}{\pi}$ $=57^\circ17'44''.8$		

角之問題解答

(1) $90^\circ \times 0.65 = 58^\circ.5$

$60' \times 0.5 = 30'$

答 $58^\circ 30'$

(2) $97^\circ 5' 15'' \div 90^\circ$

$= 349515'' \div 324000''$

$= 1.07875$

答 1.07875 直角

(3) $180^\circ \div 3 = 60^\circ$ 此乃正三角形之一角

而正五角形之一角爲

$180^\circ - 360^\circ \div 5 = 108^\circ$

正六角形之一角爲

$180^\circ - 360^\circ \div 6 = 120^\circ$

(4) 令所求之度數爲 x 度

此以弧度表之則爲 $\frac{x}{180}\pi$

由題得 $x + \frac{2x\pi}{180} = 23\frac{2}{7}$

令 $\pi = \frac{22}{7}$

則 $x\left(1 + \frac{1}{90} \times \frac{22}{7}\right) = 23\frac{2}{7}$

$\therefore \ x = 22^\circ\frac{1}{2}$

答 $22^\circ 30$

(5) 令此多角形爲 n 邊形則

外角之和 $= 360^\circ$

最大外角 $= 180^\circ - 120 = 60^\circ$

由等差級數之和之公式得

$\frac{n}{2}\{2 \times 60 - (n-1) \times 5^\circ\} = 360^\circ$

$\therefore \ n = 16$ 或 9

令 $n = 16$ 則最小外角爲

$60^\circ - 15 \times 5^\circ = -15^\circ$

是 16 不適用

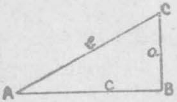
$\therefore \ n = 9$

答 九邊形

三角函數相互之關係　(平面三角法 3)

定義

次之六個曰三角函數



設 B=90° 則

$\sin A=\frac{a}{b}=\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}=\angle A$ 之正弦

$\cos A=\frac{c}{b}=\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\angle A$ 之餘弦

$\tan A=\frac{a}{c}=\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}=\angle A$ 之正切

$\cot A=\frac{c}{a}=\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}=\angle A$ 之餘切

$\sec A=\frac{b}{c}=\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}=\angle A$ 之正割

$\operatorname{cosec} A=\frac{b}{a}=\frac{\text{斜線}}{\text{垂線}}=\angle A$ 之餘割

基本公式

逆數關係

$\sin A \operatorname{cosec} A=1$ ....(1)

$\cos A \sec A=1$ ....(2)

$\tan A \cot A=1$ ....(3)

相除關係

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}$ ....(4)

$\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$ ....(5)

平方關係

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ ....(6)

$1+\tan^2 A=\sec^2 A$ ......(7)

$1+\cot^2 A=\operatorname{cosec}^2 A$ ...(8)

問題

(1) $\triangle ABC$ 其 $\angle B$ 爲直角 BC,AB 各爲 3, 4 試求 A 之三角函數

(2) 設 $\sin A=\frac{2}{3}$ 試求 A 之他三角函數但 A 爲銳角

(3) 設 $\tan A=t$ 試求 A 之他三角函數

(4) 設 $\cos A=\frac{12}{13}$ 試求 A 之他三角函數

(5) 設 $\tan A=2+\sqrt{3}$ 則 A 之他三角函數如何

(1) $BC=3,\ AB=4,\ AC=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2}=5$

$\therefore\ \sin A=\frac{3}{5},\qquad \cos A=\frac{4}{5}$

$\tan A=\frac{3}{4},\qquad \cot A=\frac{4}{3}$

$\sec A=\frac{5}{4},\qquad \text{cosec}\ A=\frac{5}{3}$

(2) $\sin A=\frac{2}{3},\qquad \sin^2 A+\cos^2 A=1$

$\therefore\ \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\text{cosec}\ A=\frac{1}{\sin A}=\frac{3}{2}$

(3) $\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{1}{t}$

$\sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}=\sqrt{1+t^2}$

$\cos A=\frac{1}{\sec A}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

$\sin A=\tan A\cos A=t\times\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\text{cosec}\ A=\frac{1}{\sin A}=\frac{\sqrt{1+t^2}}{t}$

(4) $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{5}{13}\times\frac{13}{12}=\frac{5}{12}$

$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{12}{5}$

$\sec A=\frac{1}{\cos A}=\frac{13}{12}$

$\text{cosec}\ A=\frac{1}{\sin A}=\frac{13}{5}$

(5) 與 (3) 同樣得

$\cot A=2-\sqrt{3},\qquad \sec A=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$\cos A=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\qquad \sin A=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\text{cosec}\ A=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

證法

(1) 變複雜一邊之形等於他一邊之法

例　試證明下式

$\tan^2A+\cot^2A-(\sin^2A\tan^2A+\cos^2A\cot^2A)=1$

(證) 左邊 $=\tan^2A-\sin^2A\tan^2A+\cot^2A$

$-\cos^2A\cot^2A$

$=\tan^2A(1-\sin^2A)+\cot^2A(1-\cos^2A)$

$=\tan^2A\cos^2A+\cot^2A\sin^2A$

$=\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}\cos^2A+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}\sin^2A$

$=\sin^2A+\cos^2A$

$=1$

問題

試證明次之恆等式

(1) $\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}+\dfrac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$

(2) $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$

(3) $(p\cos A+q\sin A)^2+(q\cos A-p\sin A)^2$

$=p^2+q^2$

(4) $2(\sin^6A-\cos^6A)-3(\sin^4A+\cos^4A)+1=0$

(5) $\operatorname{cosec}\alpha\sec^2\alpha+\sin\alpha\tan^2\alpha-2\tan\alpha\sec\alpha$

$=\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha$

(平面三角法 6) 三角恆等式證明問題之解答(其一)

(1) 左邊 $=\dfrac{(1+\sin\theta-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta+\cos\theta)^2}{(1+\sin\theta)^2-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2\{(1+\sin\theta)^2+\cos^2\theta\}}{1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{2(2+2\sin\theta)}{2\sin\theta+2\sin^2\theta}=\dfrac{2}{\sin\theta}=2\operatorname{cosec}\theta$

(2) 左邊 $=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2=\left(\dfrac{\sin A+1}{\cos A}\right)^2$

$=\dfrac{\sin^2 A+2\sin A+1}{\cos^2 A}$

$=\dfrac{1-\cos^2 A+2\sin A+1}{\cos^2 A}$

$=\dfrac{2(1+\sin A)-\cos^2 A}{1-\sin^2 A}$

$=\dfrac{2(1+\sin A)-(1-\sin^2 A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\dfrac{(1+\sin A)\{2-(1-\sin A)\}}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\dfrac{(1+\sin A)(1+\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$

(3) 左邊 $=p^2\cos^2 A+q^2\sin^2 A+q^2\cos^2 A+p^2\sin^2 A$

$=p^2(\cos^2 A+\sin^2 A)+q^2(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=p^2+q^2$

(4) 左邊 $=2(\sin^2 A+\cos^2 A)(\sin^4 A-\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)+1$

$=2\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-3\sin^2 A\cos^2 A\}-3\{(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A\}+1$

$=2(1-3\sin^2 A\cos^2 A)-3(1-2\sin^2 A\cos^2 A)+1$

$=2-6\sin^2 A\cos^2 A-3+6\sin^2 A\cos^2 A+1$

$=3-3=0$

(5) 左邊 $=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin\alpha\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\dfrac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{1-2\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{(1-\sin^2\alpha)^2}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$

$=\dfrac{1}{\sin\alpha}-\sin\alpha=\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha$

三角恆等式之證明(其二)　(平面三角法 7)

證法

(2)　分別變化兩邊之形而比較其結果之法

例　$\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin A\cos^2 A$ 試證之

(證)　$\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+(\cos^2 A)^2$

$$=\sin^4 A+(1-\sin^2 A)^2$$

$$=\sin^4 A+1-2\sin^2 A+\sin^4 A$$

$$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A$$

$$1-2\sin^2 A\cos^2 A=1-2\sin^2 A(1-\sin^2 A)$$

$$=1-2\sin^2 A+2\sin^4 A$$

故所設之式之兩邊相等

問題

試證明次之各等式

(1)　$(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$

(2)　$(\sin A+\cos A)(\tan A+\cot A)=\sec A+\operatorname{cosec} A$

(3)　$(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$

(4)　$(2-\cos^2 A)(1+2\cot^2 A)=(2+\cot^2 A)(2-\sin^2 A)$

 三角恆等式證明問題之解答(其二)

(1) 左邊 $=(2-\cos^2A)(1+2\cot^2A)$

$=(2-\cos^2A)\left(1+\dfrac{2\cos^2A}{\sin^2A}\right)$

$=(1+\sin^2A)\dfrac{\sin^2A+2\cos^2A}{\sin^2A}$

$=\dfrac{(1+\sin^2A)(1+\cos^2A)}{\sin^2A}$

右邊 $=\left(2+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}\right)(1+\cos^2A)$

$=\dfrac{2\sin^2A+\cos^2A}{\sin^2A}(1+\cos^2A)$

$=\dfrac{(1+\sin^2A)(1+\cos^2A)}{\sin^2A}$

故原式之左右相等

(2) 左邊 $=(\sin A+\cos A)\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)$

$=(\sin A+\cos A)\dfrac{\sin^2A+\cos^2A}{\sin A\cos A}$

$=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$

右邊 $=\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{\sin A+\cos A}{\sin A\cos A}$

故原式之左右相等

(3) 左邊 $=1+\sin^2A+\cos^2A+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$=1+1+2\sin A+2\cos A+2\sin A\cos A$

$=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$

右邊 $=2(1+\sin A+\cos A+\sin A\cos A)$

故原式之左右相等

(4) 左邊 $=(2-\cos^2A)(1+2\cot^2A)$

$=(1+\sin^2A)(2\operatorname{cosec}^2A-1)$

$=(1+\sin^2A)\left(\dfrac{2}{\sin^2A}-1\right)$

$=\dfrac{2}{\sin^2A}+2-1-\sin^2A$

$=\dfrac{2}{\sin^2A}+\cos^2A$

右邊 $=(2+\cot^2A)(2-\sin^2A)=(1+\operatorname{cosec}^2A)(1+\cos^2A)$

$=1+\dfrac{1}{\sin^2A}+\cos^2A+\dfrac{\cos^2A}{\sin^2A}=\dfrac{2}{\sin^2A}+\cos^2A$

∴ 左邊＝右邊

證法

(3) 變公式之形作一新式又變新式之形作一旣知之恆等式之法

例 1. $1+\sec^4 A-\tan^4 A=2\sec^2 A$ 試證之

(證) 公式 $1+\tan^2 A=\sec^2 A$

$\therefore\ 1-\sec^2 A=-\tan^2 A$

$\therefore\ 1-2\sec^2 A+\sec^4 A=\tan^4 A$

$\therefore\ 1+\sec^4 A-\tan^4 A=2\sec^2 A$

例 2. $\operatorname{cosec} A-\cot A=\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A+\cot A}$ 試證之

(證) 欲證此恆等式但證次式可也

$(\operatorname{cosec} A-\cot A)(\operatorname{cosec} A+\cot A)=1$

$\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A=1$

$\operatorname{cosec}^2 A=1+\cot^2 A$

然此爲公式

故原式之兩邊相等

問題

試證次之恆等式

(1) $\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A$
$=1+2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$

(2) $\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x$

(3) $\dfrac{\tan^2 A-\cot^2 A}{\sec A+\operatorname{cosec} A}=\sec A-\operatorname{cosec} A$

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$

三角恆等式證明問題之解答(其三)

(1) $\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A=1+2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A$

證上式但證次式可也

$$\operatorname{cosec}^4 A+\cot^4 A-2\operatorname{cosec}^2 A\cot^2 A=1$$

$$(\operatorname{cosec}^2 A-\cot^2 A)^2=1$$

$$(1+\cot^2 A-\cot^2 A)^2=1$$

$$1=1$$

此足證原式之左右相等

(2) $\tan^2 x\sin^2 x=\tan^2 x-\sin^2 x$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin^2 x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}$$

$\therefore$ 原式成立

(3) 變其形為

$$\tan^2 A-\cot^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$$

$$(1+\tan^2 A)-(1+\cot^2 A)=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$$

$$\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A=\sec^2 A-\operatorname{cosec}^2 A$$

此足證明原式之左右相等

(4) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$

變其形為

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$$

$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$$

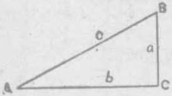
$$\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}=(\tan\theta+\sec\theta)^2$$

$$\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2$$

$$(\sec\theta+\tan\theta)^2=(\sec\theta+\tan\theta)^2$$

$\therefore$ 原式成立

餘角之公式



命 $C=90^\circ$ 則

$B=90^\circ-A$

$\sin B=\dfrac{b}{c}$

$\therefore\ \sin(90^\circ-A)=\dfrac{b}{c}$

又 $\cos A=\dfrac{b}{c}$

$\therefore\ \sin(90^\circ-A)=\cos A$

又 $\cos(90^\circ-A)=\sin A$

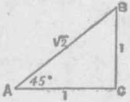
$\tan(90^\circ-A)=\cot A$

$\cot(90^\circ-A)=\tan A$

$\sec(90^\circ-A)=\mathrm{cosec}\,A$

$\mathrm{cosec}(90^\circ-A)=\sec A$

45°之三角函數



$\left.\begin{array}{r}C=90^\circ\\ A=45^\circ\end{array}\right\}$

設 $AC=1$ 則

$AB=\sqrt{2}$

$\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

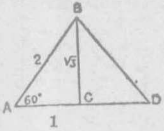
$\tan 45^\circ=1$

$\cot 45^\circ=1$

$\sec 45^\circ=\sqrt{2}$

$\mathrm{cosec}\,45^\circ=\sqrt{2}$

60°, 30° 之三角函數



$\triangle ABC$ 爲正三角形

令 $AC=CD=1$ 則

$AB=2,\ BC=\sqrt{3}$

$\angle BAC=60^\circ\quad \angle ABC=30^\circ$

$\therefore\ \sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30^\circ$

$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}=\sin 30^\circ$

$\tan 60^\circ=\sqrt{3}=\cot 30^\circ$

$\cot 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan 30^\circ$

$\sec 60^\circ=2=\mathrm{cosec}\,30^\circ$

$\mathrm{cosec}\,60^\circ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\sec 30^\circ$

問題

(1) 試求次式之值

$(\sin 30^\circ+\sin 45^\circ)$
$\times(\tan 60^\circ+\cot 30^\circ)$
$-4\sec 45^\circ(\mathrm{cosec}\,60^\circ$
$-\sec 30^\circ)$

(2) 試求次式之值

$\sin^2(A+45^\circ)\sin^2(45^\circ-A)$

(3) 試證下式

$\cot 60^\circ(1+\cos 30^\circ+\sin 30^\circ)$
$=\cos 60^\circ+\sin 60^\circ$

(4) 試化簡下式

$\sin(90^\circ-A)\cot(90^\circ-A)$

(5) 試求下式中 x 之値

$\sin 30^\circ=x\cot 60^\circ$

 餘角及特別角之三角函數問題之解答

(1) $(\sin 30°+\sin 45°)(\tan 60°+\cot 30°)$
$-4\sec 45°(\operatorname{cosec} 60°-\sec 30°)$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{3}+\sqrt{3})-4\times\sqrt{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times 2\sqrt{3}-0$$

$$=\frac{(1+\sqrt{2})\times 2\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{6}$$

(2) $\sin^2(A+45°)+\sin^2(45°-A)$

$$=\sin^2(A+45°)+\cos^2\{90°-(45°-A)\}$$

$$=\sin^2(A+45°)+\cos^2(45°+A)$$

$$=\sin^2(A+45°)+\cos^2(A+45°)$$

$$=1$$

(3) $\cot 60°(1+\cos 30°+\sin 30°)$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 60°+\sin 60°$$

(4) $\sin(90°-A)\cot(90°-A)$

$$=\cos A\tan A$$

$$=\cos A\frac{\sin A}{\cos A}$$

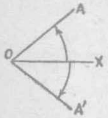
$$=\sin A$$

(5) $\sin 30°=x\cot 60°$

$$\frac{1}{2}=x\times\frac{1}{\sqrt{3}}$$

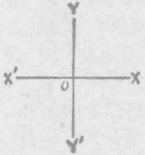
$$\therefore\quad x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

角之正負



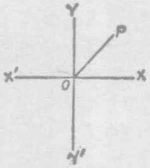
自始線OX與時計之針反對而旋轉者其所成之角爲正角反之爲負角

象　限



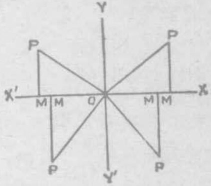
XX′ 與 Y′Y 互爲垂直則
XOY 之部分爲第一象限
YOX′ 之部分爲第二象限
X′OY′ 之部分爲第三象限
Y′OX 之部分爲第四象限

直線之正負



XX′ 與 YY′ 互爲垂直又OP在此平面上O之周迴轉則與OX及OY同方向之直線爲正與此反對方向之直線爲負而迴線OP常定爲正

任意角之三角函數



如上圖從 P 點向 XX′ 作垂線其足爲 M 設 ∠XOP 爲 α 則

$$\sin\alpha=\frac{PM}{OP},\qquad \cos\alpha=\frac{OM}{OP}$$

$$\tan\alpha=\frac{PM}{OM},\qquad \cot\alpha=\frac{OM}{PM}$$

$$\sec\alpha=\frac{OP}{OM},\qquad \mathrm{cosec}\,\alpha=\frac{OP}{PM}$$

問題

(1) 問各象限內三角函數之符號

(2) 問次列三角函數之符號
(*a*) $\sin 120°$, (*b*) $\cos 295°$, (*c*) $\tan 280°$

(3) 問次列三角函數之符號
(*a*) $\sin(-70°)$, (*b*) $\cos(-390°)$, (*c*) $\tan(-780°)$

任意角問題之解答

(1) 如 13 頁之圖

第一象限內

PM 爲正 OM 爲正 OP 爲正

$\therefore\ \sin\alpha=\dfrac{PM}{OP}$ 爲正

同樣 $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ 亦爲正

第二象限內

PM 爲正 OM 爲負 OP 爲正

$\therefore\ \sin\alpha=\dfrac{PM}{OP}$ 爲正

$\cos\alpha=\dfrac{OM}{OP}$ 爲負

$\tan\alpha=\dfrac{PM}{OM}$ 爲負

今作一覽表示之如次

函數＼象限	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
I	+	+	+	+	+	+
II	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	+	−	−
IV	−	+	−	−	+	−

(2) (a) $120°=90°+30°$ 是 $120°$ 在第二象限內

$\therefore\ \sin 120°$ 爲正

(b) $295°=90°\times3+25°$ 是 $295°$ 在第四象限內

$\therefore\ \cos 295°$ 爲正

(c) $280°=90°\times3+10°$ 是 $280°$ 在第四象限內

$\therefore\ \tan 280°$ 爲負

(3) (a) $-70°$ 第四象限之角

$\therefore\ \sin(-70°)$ 爲負

(b) $-390°=-360°-30°$ 是 $-390°$ 爲第四象限之角

$\therefore\ \cos(-390°)$ 爲正

(c) $-780°=-360°\times2-60°$ 是 $-780°$ 爲第四象限之角

$\therefore\ \tan(-780°)$ 爲負

(備考) $\sin(n\times360°+A)=\sin A$

$\cos(n\times360°+A)=\cos A$

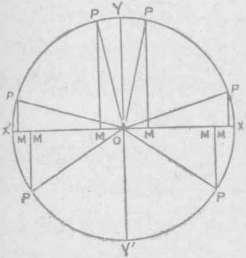
$\tan(n\times360°+A)=\tan A$

$\cot(n\times360°+A)=\cot A$

$\sec(n\times360°+A)=\sec A$

$\operatorname{cosec}(n\times360°+A)=\operatorname{cosec} A$

變化之狀態



OP 有一定之長在 O 之周上依時計針反對之方向迴轉自 OX 爲始其三角函數之變化如次

sin XOP=PM/OP 其 OP 雖常爲一定然 PM 視 ∠XOP 而增減 ∠XOP=0° 則 PM 爲 0 ∠XOP 漸近 90° 從而 P M亦漸增至 ∠XOP=90° 則 PM 等於 OP 故 sin XOP 在 0° 時則爲 0 由此漸增至 90° 之時則爲 1 以後次第減少迨 ∠XOP 至 180° 時則爲 0 又次第減小至 270° 時則爲 −1 以後次第增大至 360° 時則爲 0 今以表示其變化如次

	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
sin A	自 0 至 1	自 1 至 0	自 0 至 −1	自 −1 至 0
cos A	自 1 至 0	自 0 至 −1	自 −1 至 0	自 0 至 1
tan A	自 0 至 +∞	自 −∞ 至 0	自 0 至 +∞	自 −∞ 至 0
cot A	自 +∞ 至 0	自 0 至 −∞	自 +∞ 至 0	自 0 至 −∞
sec A	自 1 至 +∞	自 −∞ 至 −1	自 −1 至 −∞	自 +∞ 至 1
cosec A	自 +∞ 至 1	自 1 至 +∞	自 −∞ 至 −1	自 −1 至 −∞

問題

(1) 次列各度數試求其三角函數之值

0°, 90°, 180°, 270°, 360°

(2) 試於自 0° 至 90° 之角求其適於次式之正角

$$2\sin^2 x+3\cos x-3=0$$

(3) 設 x 爲實數則次之方程式能成立否

$$\cos A=x+\frac{1}{x}$$

(平面三角法 16)　三角函數値之變化問題之解答

(1)

$$\begin{cases} \sin 0^\circ = 0 \\ \cos 0^\circ = 1 \\ \tan \ ^\circ = 1 \\ \cot 0^\circ = \infty \\ \sec 0^\circ = 1 \\ \operatorname{cosec} 0^\circ = \infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 270^\circ = -1 \\ \cos 270^\circ = 0 \\ \tan 270^\circ = \infty \\ \cot 270^\circ = 0 \\ \sec 270^\circ = \infty \\ \operatorname{cosec} 270^\circ = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 90^\circ = 1 \\ \cos 90^\circ = 0 \\ \tan 90^\circ = \infty \\ \cot 90^\circ = 0 \\ \sec 90^\circ = \infty \\ \operatorname{cosec} 90^\circ = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin 360^\circ = 0 \\ \cos 360^\circ = 1 \\ \tan 360^\circ = 0 \\ \cot 360^\circ = \infty \\ \sec 360^\circ = 1 \\ \operatorname{cosec} 360^\circ = \infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 180^\circ = 0 \\ \cos 180^\circ = -1 \\ \tan 180^\circ = 0 \\ \cot 180^\circ = \infty \\ \sec 180^\circ = -1 \\ \operatorname{cosec} 180^\circ = \infty \end{cases}$$

(2)

$$2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$$

$$2(1-\cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 1) = 0$$

$\therefore \quad \cos x = \frac{1}{2}$ 或 $\cos x = 1$

$x = 60^\circ$ 或 $x = 0^\circ$

(3)　$\cos A = x + \frac{1}{x}$

$\therefore \quad x\cos A = x^2 + 1$

$\therefore \quad x^2 - x\cos A + 1 = 0$

x 爲實數則其判別式當爲 0 或爲正

$\therefore \quad \cos^2 A - 4\times 1 \geqq 0$

$\therefore \quad \cos^2 A \geqq 4$

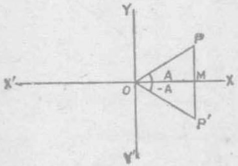
然　$\cos^2 A$ 永不能比 1 大

$\therefore \quad \cos^2 A \geqq 4$ 不能成立

故原方程式不能成立

二角之三角函數之關係(其一)　(平面三角法 17)

(−A)　與　A



令　$\angle MOP=\angle MOP'$,

$OP=OP'$, $P'M=-PM$

$\therefore\ \sin(-A)=\dfrac{P'M}{OP'}=\dfrac{-PM}{OP}$

$=-\sin A$

$\therefore\ \sin(-A)=-\sin A$

同理　$\cos(-A)=\cos A$

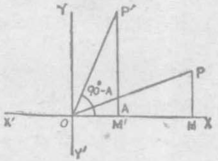
$\tan(-A)=-\tan A$

$\cot(-A)=-\cot A$

$\sec(-A)=\sec A$

$\operatorname{cosec}(-A)=-\operatorname{cosec} A$

(90°−A)　與　A



設　$\left.\begin{array}{l}\angle MOP=A\\ \angle M'OP'=90^\circ-A\\ OP=OP'\end{array}\right\}$ 則

$P'M'=OM$, $OM'=PM$

$\sin(90^\circ-A)=\dfrac{P'M'}{OP'}=\dfrac{OM}{OP}=\cos A$

$\therefore\ \sin(90^\circ-A)=\cos A$

同理　$\cos(90^\circ-A)=\sin A$

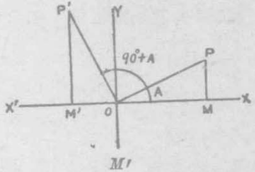
$\tan(90^\circ-A)=\cot A$

$\cot(90^\circ-A)=\tan A$

$\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$

$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A$

(90°+A)　與　A



設　$OP'=OP$, $\angle POP'=90^\circ$

則　$P'M'=OM$, $PM=OM'$

$\sin(90^\circ+A)=\dfrac{P'M'}{OP'}=\dfrac{OM}{OP}=\cos A$

$\therefore\ \sin(90^\circ+A)=\cos A$

同理　$\cos(90^\circ+A)=-\sin A$

$\tan(90^\circ+A)=-\cot A$

$\cot(90^\circ+A)=-\tan A$

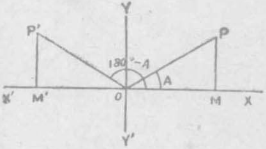
$\sec(90^\circ+A)=-\operatorname{cosec} A$

$\operatorname{cosec}(90^\circ+A)=\sec A$

(平面三角法 18) 二角之三角函數之關係問題解答(其一)

問題	解答
(1) 試求次之函數之值 $\sin 120^\circ$ $\cos 120^\circ$ $\tan 120^\circ$ $\sin(-150^\circ)$ $\cos(-150^\circ)$ $\tan(-150^\circ)$	(1) $\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ=-\frac{1}{2}$ $\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$ $\sin(-150^\circ)=-\sin 150^\circ=-\sin(90^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$ $\cos(-150^\circ)=-\cos 150^\circ=-\cos(90^\circ+60^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan(-150^\circ)=-\tan 150^\circ=-\tan(90^\circ+60^\circ)=\cot 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$
(2) 設 $A+B+C=180^\circ$ 試證次式 $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$ $\tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$	(2) $A+B+C=180^\circ,\ \frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ,\ \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$ 則 $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\quad\therefore\ \cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$ 又 $\tan\frac{B+C}{2}=\tan\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{A}{2}$ $\therefore\ \tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$

(180° − A) 與 A



設 $\angle POM = A$, $\angle P'OM = 180° - A$,
$OP' = OP$, $\angle P'M'O = \angle PMO = R\angle$

則 $P'M' = PM$, $OM' = -OM$

$\therefore \sin(180° - A) = \dfrac{P'M'}{OP} = \dfrac{PM}{OP} = \sin A$

$\therefore \sin(180° - A) = \sin A$

同理 $\cos(180° - A) = -\cos A$

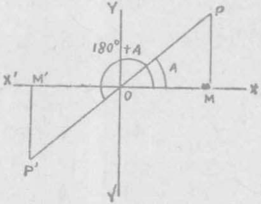
$\tan(180° - A) = -\tan A$

$\cot(180° - A) = -\cot A$

$\sec(180° - A) = -\sec A$

$\operatorname{cosec}(180° - A) = \operatorname{cosec} A$

(180° + A) 與 A



設 $\angle POM = A$, $\angle P'OM = 180° + A$,
$OP' = OP$, $\angle P'M'O = \angle PMO = R\angle$

則 $P'M' = -PM$, $OM' = -OM$

$\therefore \sin(180° + A = \dfrac{P'M'}{OP} = \dfrac{-PM}{OP}$
$= -\sin A$

同理 $\cos(180° + A) = -\cos A$

$\tan(180° + A) = \tan A$

$\cot(180° + A) = \cot A$

$\sec(180° + A) = -\sec A$

$\operatorname{cosec}(180° + A) = -\operatorname{cosec} A$

問題

(1) 試將次式簡單之

$$\frac{\sin(180° + A)}{\tan(180° - A)} \times \frac{\cos(360° - A)}{\sin(-A)}$$

(2) 試求次之函數之值

$\tan 225°$,

$\cos(-4005°)$

(3) 試化次之函數爲最簡之式

$\sin(270° - A)$

(4) 試求次式之值

$$\frac{\sin 225°}{\cos 240°}$$

 二角之三角函數之關係問題解答(其二)

(1) $\dfrac{\sin(180°+A)}{\tan(180°-A)}\times\dfrac{\cos(360°-A)}{\sin(-A)}$

$$=\frac{-\sin A}{-\tan A}\times\frac{\cos(-A)}{-\sin A}$$

$$=\frac{\sin A\cos A}{-\tan A\sin A}$$

$$=-\frac{\cos A}{\tan A}$$

$$=-\frac{\cos A}{\frac{\sin A}{\cos A}}$$

$$=-\frac{\cos^2 A}{\sin A}$$

(2) $\tan 225°=\tan(180°+45°)=\tan 45°=1$

$\cos(-4005°)=\cos 4005°$

$$=\cos(360°\times 11+45°)$$

$$=\cos 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3) $\sin(270°-A)=\sin\{180°+(90°-A)\}$

$$=-\sin(90°-A)$$

$$=-\cos A$$

(4) $\dfrac{\sin 225°}{\cos 240°}=\dfrac{\sin(180°+45°)}{\cos(180°+60°)}$

$$=\frac{-\sin 45°}{-\cos 60°}$$

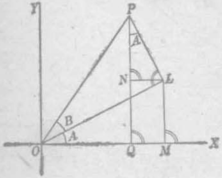
$$=\frac{\sin 45°}{\cos 60°}$$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{2}$$

和之公式之證明



設 $\angle XOL=A,\ \angle LOP=B,\ \angle XOP=(A+B)$

$\angle PLO=\angle LMO=\angle PQO=\angle LNP=R\angle$

則 $\angle LPN=A$

$$\sin(A+B)=\frac{QP}{OP}=\frac{QN+NP}{OP}=\frac{ML+NP}{OP}$$

$$=\frac{ML}{OP}+\frac{NP}{OP}=\frac{ML}{OL}\cdot\frac{OL}{OP}+\frac{NP}{LP}\cdot\frac{LP}{OP}$$

$\therefore\ \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ (公式)

又 $$\cos(A+B)=\frac{OQ}{OP}=\frac{OM-QM}{OP}=\frac{OM-NL}{OP}=\frac{OM}{OP}-\frac{NL}{OP}=\frac{OM}{OL}\cdot\frac{OL}{OP}-\frac{NL}{LP}\cdot\frac{LP}{OP}$$

$\therefore\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$ (公式)

(注意) A, B 爲任意之值上二公式亦得成立

問題

(1) 試求 $\sin 75^\circ$ 之值

(2) 試求 $\cos 105^\circ$ 之值

(3) 試求適於次式 x 之值

$\cos 75^\circ=x\sin 105^\circ$

 二角和之正弦餘弦問題之解答

(1) $\sin 75° = \sin(45°+30°)$

$= \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos 105° = \cos(60°+45°)$

$= \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45°$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

$= -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\cos 75° = \cos(45°+30°)$

$= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\sin 105° = \sin(60°+45°)$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\therefore \sqrt{6}-\sqrt{2} = (\sqrt{6}+\sqrt{2})x$

$\therefore x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{4}$

$= \frac{8-2\sqrt{12}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2-\sqrt{3}$

差之公式之證明

$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$

$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$

$=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\therefore\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ (公式)

$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$

$=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$

$=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\therefore\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ (公式)

問題

(1) 試證次之公式

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

(2) 試證次之公式

$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

(3) 試求 $\sin 15^\circ$ 之值

(4) 設 $\sin A=\frac{11}{61}$,

$\sin B=\frac{9}{41}$

則 $\cos(A-B)$ 之值如何

(1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

$=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)$

$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

又 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$=(1-\cos^2\alpha)-(1-\cos^2\beta)$

$=\cos^2\beta-\cos^2\alpha$

(2) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

又 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$

$=(1-\sin^2\alpha)-(1-\cos^2\beta)$

$=\cos^2\beta-\sin^2\alpha$

(3) $\sin 15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)$

$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(4) $\cos A=\pm\sqrt{1-\left(\frac{11}{61}\right)^2}=\pm\frac{60}{61}$

$\cos B=\pm\sqrt{1-\left(\frac{9}{41}\right)^2}=\pm\frac{40}{41}$

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$=\pm\frac{60}{61}\times\frac{40}{41}+\frac{11}{61}\times\frac{9}{41}$

$=\pm\frac{2400}{2501}+\frac{99}{2501}$

$=\frac{2499}{2501}$ 或 $-\frac{2301}{2501}$

二角和及差之正切餘切

公式	證明	問題
$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$ $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$ $\cot(A-B)=\dfrac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$	$\tan(A\pm B)=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos(A\pm B)}=\dfrac{\sin A\cos B\pm\cos A\sin B}{\cos A\cos B\mp\sin A\sin B}$ $=\dfrac{(\sin A\cos B\pm\cos A\sin)\div\cos A\cos B}{(\cos A\cos B\mp\sin A\sin)\div\cos A\cos B}$ $=\dfrac{\tan A\pm\tan B}{1\mp\tan A\tan B}$ $\cot(A\pm B)=\dfrac{\cos(A\pm B)}{\sin(A\pm B)}=\dfrac{\cos A\cos B\mp\sin A\sin B}{\sin A\cos B\pm\cos A\sin B}$ $=\dfrac{(\cos A\cos B\mp\sin A\sin B)\div\sin A\sin B}{(\sin A\cos B\pm\cos A\sin B)\div\sin A\sin B}$ $=\dfrac{\cot A\cot B\mp1}{\cot B\pm\cot A}$	(1) 試求 $\tan 15°$ 之值 (2) 試求 $\cot 15°$ 之值 (3) 設 $\left.\begin{array}{l}\tan x=\frac{1}{2}\\ \tan y=\frac{1}{3}\end{array}\right\}$ 則 $(x+y)$ 之一值為 45° 試證之 (4) 試證次式 $\dfrac{1}{1+\tan A\tan 2A}$ $=\dfrac{1}{\sec 2A}$

 二角和及差之正切餘切問題之解答

(1) $\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

(2) $\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$$

(3) $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$$= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ $\tan(x+y) = 1$

$\therefore$ $(x+y)$ 之一值爲 45°

(4) $1 + \tan A \tan 2A = 1 + \frac{\sin A \sin 2A}{\cos A \cos 2A}$

$$= \frac{\cos A \cos 2A + \sin A \sin 2A}{\cos A \cos 2A}$$

$$= \frac{\cos(2A - A)}{\cos A \cos 2A} = \frac{\cos A}{\cos A \cos 2A}$$

$$= \sec 2A$$

$\therefore$ $\frac{1}{1 + \tan A \tan 2A} = \frac{1}{\sec 2A}$

公式	公式之證明	問題
$\sin 2A=2\sin A\cos A$	$\sin 2A=\sin(A+A)$	(1) 設 $\sin A=\frac{1}{3}$ 試求 $\cos 2A$ 之值
$\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A$	$=\sin A\cos A+\cos A\sin A$	(2) 設 $\sin A=\frac{3}{5}$ 試求 $\sin 2A$ 及
$=1-2\sin^2 A$	$=2\sin A\cos A$	$\cos 2A$ 之值
$=2\cos^2 A-1$	$\cos 2A=\cos(A+A)$	
	$=\cos A\cos A-\sin A\sin A$	(3) $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ 試證之
	$=\cos^2 A-\sin^2 A$	(4) $\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}$
	$=1-\sin^2 A-\sin^2 A$	(5) $\sin x+\cos x=a$
	$=1-2\sin^2 A$	$\sin 2x=b$
	$=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)$	上二式同時成立其條件如何
	$=2\cos^2 A-1$	

 二倍角之正弦餘弦問題之解答

(1) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

$= 1 - 2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$= 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

(2) $\sin A = \frac{3}{5}$

$\cos A = \pm\sqrt{(1-\sin^2 A)}$

$= \pm\frac{4}{5}$

$\therefore\ \sin 2A = 2\sin A\cos A$

$= 2\times\frac{3}{5}\times\left(\pm\frac{4}{5}\right)$

$= \pm\frac{24}{25}$

$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$= 1 - 2\times\frac{9}{25} = 1 - \frac{18}{25}$

$= \frac{7}{25}$

(3) $\sin A = \sin 2\left(\frac{A}{2}\right)$

$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

(4) $\cos A = \cos 2\left(\frac{A}{2}\right)$

$= \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}$

(5) $\sin x + \cos x = a$

$\therefore\ \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = a^2$

$1 + \sin 2x = a^2$

$1 + b = a^2$

$\therefore$ 所求之條件為

$1 + b = a^2$

公式	公式之證明	問題
$\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$	$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ 令 A=B 則上式變爲 $\tan 2A=\dfrac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$ $\therefore\ \tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	(1) 試證次式 $\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$ (2) 設 $\tan A=\frac{1}{3}$ 則 $\tan 2A$ 之值如何 (3) 試證次式 $4+\tan A\tan 2A=\dfrac{1}{\cos 2A}+3$ (4) 設 $\tan A=2$ 則 $\sin 2A$ 之值如何

 二倍角之正切餘切問題之解答

(1) $\tan A=\tan 2\left(\frac{A}{2}\right)$

$$=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

(2) $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$$=\frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}$$

$$=\frac{3}{4}$$

(3) $4+\tan A\tan 2A=\frac{1}{\cos 2A}+3$

$\therefore\ 1+\tan A\tan 2A=\frac{1}{\cos 2A}$

$$\frac{\cos A\cos 2A+\sin A\sin 2A}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}$$

$$\frac{\cos(2A-A)}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}$$

$$\frac{\cos A}{\cos A\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}$$

$$\frac{1}{\cos 2A}=\frac{1}{\cos 2A}$$

即得證

(4) $\sin 2A=2\sin A\cos A$

$$=\frac{2\sin A}{\cos A}\cos^2 A$$

$$=\frac{2\tan A}{\sec^2 A}=\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$=\frac{2\times 2}{1+2^2}=\frac{4}{5}$$

公式	公式之證明	問題
$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$ $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$ $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$ $\cot 3a = \dfrac{3\cot a - \cot^3 a}{1 - 3\cot^2 a}$	$\sin 3a = \sin(a+2a) = \sin a\cos 2a + \cos a\sin 2a$ $= \sin a(1 - 2\sin^2 a) + \cos a(2\sin a\cos a)$ $= \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a\cos^2 a$ $= \sin a - 2\sin^3 a + 2\sin a(1 - \sin^2 a)$ $= 3\sin a - 4\sin^3 a$ $\cos 3a = \cos(a+2a) = \cos a\cos 2a - \sin a\sin 2a$ $= \cos a(2\cos^2 a - 1) - \sin a(2\sin a\cos a)$ $= 2\cos^3 a - \cos a - 2\sin^2 a\cos a$ $= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1 - \cos^2 a)\cos a$ $= 4\cos^3 a - 3\cos a$ $\tan 3a = \tan(2a+a) = \dfrac{\tan 2a + \tan a}{1 - \tan 2a\tan a}$ $= \dfrac{\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} + \tan a}{1 - \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}\tan a} = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$ $\cot 3a$ 得與 $\tan 3a$ 同樣之方法證之	(1) 設 $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$ 則 $\sin 3\theta$ 之值如何 (2) 試計算 $\sin 18°$ 之值以求 $\cos 18°$ (3) $\sin^3 a = \dfrac{3\sin a - \sin 3a}{4}$ $\cos^3 a = \dfrac{3\cos a + \cos 3a}{4}$ (4) 試證次式 $\cos^3 a\sin 3a + \sin^3 a\cos 3a = \dfrac{3}{4\operatorname{cosec} 4a}$

(平面三角法 32) 三倍角之三角函數問題之解答

(1) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= 3\times\frac{2}{5} - 4\times\left(\frac{2}{5}\right)^3$

$= \frac{6}{5} - \frac{32}{125} = \frac{118}{125}$

(2) $18°\times 5 = 90°,\quad 18°\times 2 + 18°\times 3 = 90°.$

$18°\times 2 = 90° - 18°\times 3$

$\therefore\ \sin(18°\times 2) = \sin(90° - 18°\times 3)$

$2\sin 18°\cos 18° = \cos(18°\times 3)$

$2\sin 18°\cos 18° = 4\cos^3 18° - 3\cos 18°$

$\therefore\ 2\sin 18° = 4\cos^2 18° - 3$

$2\sin 18° = 4(1 - \sin^2 18°) - 3$

$4\sin^2 18° + 2\sin 18° - 1 = 0$

$\therefore\ \sin 18° = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

其負值不適用

$\therefore\ \sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos 18° = \sqrt{1-\sin^2 18°} = \sqrt{1-\frac{6-2\sqrt{5}}{16}}$

$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

(3) 由公式得

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

$\therefore\ \sin^3 a = \frac{3\sin a - \sin 3a}{4}$

又 $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$\therefore\ \cos^3 a = \frac{3\cos a + \cos 3a}{4}$

(4) $\cos^3 a\sin 3a + \sin^3 a\cos 3a$

$= \cos^3 a(3\sin a - 4\sin^3 a)$

$+ \sin^3 a(4\cos^3 a - 3\cos a)$

$= 3\sin a\cos a(\cos^2 a - \sin^2 a)$

$= \frac{3}{2}\sin 2a\cos 2a$

$= \frac{3\sin 4a}{4}$

$= \frac{3}{4\operatorname{cosec} 4a}$

種類	問題
二倍角	(1) 試證 $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ (2) 試證 $\cos 2\theta \sec^2\theta=1-\tan^2\theta$ (3) 試證 $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta$ (4) 試證 $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\cos 2A$
三倍角	(5) 試證 $\dfrac{\cos 3A+\sin 3A}{\cos A-\sin A}=1+2\sin 2A$ (6) 試證 $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}=2$

(平面三角法 34) 倍角之三角函數問題之解答

(1) $\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}=\dfrac{2\tan A}{\sec^2 A}=\dfrac{2\sin A}{\cos A}\times\cos^2 A$

$=2\sin A\cos A=\sin 2A$

(2) $\cos 2\theta\sec^2\theta=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\times\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$=\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=1-\tan^2\theta$

(3) $\cos^4\theta-\sin^4\theta=(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$

(4) $\dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}{1+\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}=\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos^2 A+\sin^2 A}$

$=\cos^2 A-\sin^2 A=\cos 2A$

(5) $\dfrac{\cos 3A+\sin 3A}{\cos A-\sin A}$

$=\dfrac{4\cos^3 A-3\cos A+3\sin A-4\sin^3 A}{\cos A-\sin A}$

$=\dfrac{4(\cos^3 A-\sin^3 A)-3(\cos A-\sin A)}{\cos A-\sin A}$

$=4(\cos^2 A+\cos A\sin A+\sin^2 A)-3$

$=4(1+\sin A\cos A)-3$

$=1+2\sin 2A$

(6) $\dfrac{\sin 3A}{\sin A}-\dfrac{\cos 3A}{\cos A}$

$=3-4\sin^2 A-4\cos^2 A+3$

$=6-4(\sin^2 A+\cos^2 A)$

$=2$

公式	公式之證明	問題
$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$ $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$	$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ 此二式相加則得第一公式相減則得第二公式 其餘二公式亦可以 $\cos(\alpha+\beta)$ 與 $\cos(\alpha-\beta)$ 加減得之	(1) 試證次式 $\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(A+C)\cos(A-C)=\cos 2A$ (2) 試變 $4\sin A\sin B\sin C$ 爲和之形狀 (3) 試變 $\sin 20^\circ\cos 5^\circ$ 爲和之形狀 (4) 試證次式 $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$

(平面三角法 36) 變正弦及餘弦之積爲和及差之問題解答

(1) $\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(B+C)\cos(B-C)+\cos(A+C)\cos(A-C)$

$=\frac{1}{2}(\cos 2B+\cos 2A)-\frac{1}{2}(\cos 2C+\cos 2B)+\frac{1}{2}(\cos 2C+\cos 2A)=\frac{1}{2}(2\cos 2A)=\cos 2A$

(2) $4\sin A\sin B\sin C=2\sin A\cdot 2\sin B\sin C=2\sin A\{\cos(B-C)-\cos(B+C)\}$

$=2\sin A\cos(B-C)-2\sin A\cos(B+C)$

$=\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)-\{\sin(A+B+C)+\sin(A-B-C)\}$

$=\sin(A+B-C)+\sin(A-B+C)+\sin(-A-B-C)+\sin(-A+B+C)$

(3) $\sin 20^\circ\cos 5^\circ=\frac{1}{2}(\sin 25^\circ+\sin 15^\circ)=\frac{\sin 25^\circ}{2}+\frac{\sin 15^\circ}{2}$

(4) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{2}(\cos 60^\circ+\cos 20^\circ)\cos 80^\circ$

$=\frac{1}{4}\cos 80^\circ+\frac{1}{4}(\cos 100^\circ+\cos 60^\circ)$

$=\frac{1}{4}(\cos 80^\circ+\cos 100^\circ+\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{4}(\cos 80^\circ-\cos 80^\circ+\frac{1}{2})$

$=\frac{1}{8}$

公式	公式之證明	問題
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\beta-\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin(A+B)+\sin(A-B)$ $=2\sin A\cos B$ 令 $A+B=\alpha,\ A-B=\beta$ 則 $A=\frac{\alpha+\beta}{2},\ B=\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\therefore\ \sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ 其他三式亦得同樣證明之	(1) 試將 $\frac{\cos 50^\circ-\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ-\sin 50^\circ}$ 簡單之 (2) 試化 $\cos x+\cos(120^\circ-x)+\cos(120^\circ+x)$ 爲最簡之式 (3) 設 x, y, z 爲等差級數則次式能成立試證之 $\sin x-\sin z=2\sin(y-z)\cos y$ (4) 試求次式之極大極小 $\sin x+\cos x$

變正弦及餘弦之和或差爲積之形狀之問題解答

(1) $\dfrac{2\sin 60^\circ \sin 10^\circ}{2\cos 60^\circ \sin 10^\circ}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

(2) $\cos x+\cos(120^\circ+x)+\cos(120^\circ-x)$

$=\cos x+2\cos 120^\circ \cos x$

$=\cos x+2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\cos x$

$=\cos x-\cos x$

$=0$

(3) $x+z=2y$

$\therefore$ $x-z=2(y-z)$

$\sin x-\sin z=2\cos\dfrac{x+z}{2}\sin\dfrac{x-z}{2}$

$=2\cos y\sin(y-z)$

(4) $\sin x+\cos x$

$=\sin x+\sin(90^\circ-x)$

$=2\sin 45^\circ \cos(x-45^\circ)$

$=\sqrt{2}\cos(x-45^\circ)$

$\cos(x-45^\circ)$ 之極大爲 1

$\cos(x-45^\circ)$ 之極小爲 -1

$\therefore$ 所求之極大爲 $\sqrt{2}$

極小爲 $-\sqrt{2}$

分角之三角函數(已知 $\cos A$ 求 $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}$) (平面三角法 39)

公式	證明	問題
$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ $\tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$	$\cos 2A=1-2\sin^2 A=2\cos^2 A-1$ $\therefore\ \cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ $\therefore\ \sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}$ $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ 同樣 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$ $\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$	(1) 已知 $\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 試計算 $\sin 36^\circ$ (2) 已知 $\cos 315^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 試求 $\cos 157^\circ.5$ (3) 試求 $\tan 22^\circ 30'$ 之值 (4) $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$ 試證明之

(1) $\sin 30°$ 爲正

$$\sin 36° = \sqrt{\frac{1-\cos 72°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

(2) $$\cos 157°.5 = -\sqrt{\frac{1+\cos 315°}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{6}}$$

$$= -\frac{\sqrt{18+6\sqrt{3}}}{6}$$

(3) $$\tan 22°\,30' = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}} = \sqrt{2}-1$$

(4) $$\frac{\sin A}{1+\cos A} = \frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2}$$

又 $$\frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} = \tan\frac{A}{2}$$

分角之三角函數(已知 $\sin A$ 而求 $\sin\frac{A}{2}$ 及 $\cos\frac{A}{2}$) (平面三角法 41)

公式	證明	問題
$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})$ $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A})$	$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ $\therefore\ \left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$ $\therefore\ \sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}$ (1) 同樣 $\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A}$ (2) (1) ± (2) 則 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})$ $\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A})$ 設知 ∠A 則此公式之符號可由(1)與(2)決定	(1) 設 $\sin 100^\circ=s$ 試以 s 表 $\sin 50^\circ$ 及 $\cos 50^\circ$ (2) $\tan A=\frac{3}{4}$ 試計算 $\sin\frac{A}{2}$

 分角之三角函數(已知 $\cos A$ 而求 $\sin\frac{A}{2}$, $\cos\frac{A}{2}$)問題之解答

(1) 由公式得

$$\sin 50^\circ+\cos 50^\circ=\sqrt{1+\sin 100^\circ}$$

$$\sin 50^\circ-\cos 50^\circ=\sqrt{1-\sin 100^\circ}$$

$$(\because \sin 50^\circ>\cos 50^\circ)$$

$$\therefore \sin 50^\circ=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 100^\circ}+\sqrt{1-\sin 100^\circ})$$

$$\therefore \sin 50^\circ=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+s}+\sqrt{1-s})$$

又 $\cos 50^\circ=\tfrac{1}{2}(\sqrt{1+s}-\sqrt{1-s})$

(2) $1+\tan^2 A=\sec^2 A$

$$\therefore \sec A=\sqrt{1+\tan^2 A}=\pm\sqrt{\frac{25}{16}}=\pm\frac{5}{4}$$

$$\therefore \cos A=\pm\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin A=\tan A\cos A=\frac{3}{4}\left(\pm\frac{4}{5}\right)=\pm\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pm\sqrt{1+\frac{3}{5}}\pm\sqrt{1-\frac{3}{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ 或 } \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$$

公式	證明	問題
$\sin(A+B)\sin(A-B)$ $=\sin^2A-\sin^2B$ $=\cos^2B-\cos^2A$ $\cos(A+B)\cos(A-B)$ $=\cos^2A-\sin^2B$ $=\cos^2B-\sin^2A$	$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$ $\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$ $\therefore\ \sin(A+B)\sin(A-B)$ $=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$ $=\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$ $=\sin^2A-\sin^2B$ $=1-\cos^2A-(1-\cos^2B)$ $=\cos^2B-\cos^2A$ 第二公式亦可同樣證明之	(1) 試證 $\cos^2A-\cos^23A$ $=\sin 4A\sin 2A$ (2) $\cos^2A+\cos^2(A-2B)-1$ $=\cos 2(A-B)\cos 2B$ 試證之 (3) 試證 $\dfrac{\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$ $=\tan(A+B)\tan(A-B)$ (4) 試簡單 $\sin^2 100°-\sin^2 50°$

(平面三角法 44) 正弦(或餘弦)之積與差之關係問題之解答

(1) $\cos^2 A-\cos^2 3A$

$=\sin(3A+A)\sin(3A-A)$

$=\sin 4A\sin 2A$

(2) $\cos^2 A+\cos^2(A-2B)-1$

$=\cos^2 A-\{1-\cos^2(A-2B)\}$

$=\cos^2 A-\sin^2(A-2B)$

$=\cos(A+A-2B)\cos(A-A+2B)$

$=\cos 2(A-B)\cos 2B$

(3) $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A-\sin^2 B}$

$=\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$

$=\tan(A+B)\tan(A-B)$

(4) $\sin^2 100^\circ-\sin^2 50^\circ$

$=\sin(100^\circ+50^\circ)\sin(100^\circ-50^\circ)$

$=\sin 150^\circ\sin 50^\circ$

$=\sin 30^\circ\sin 50^\circ$

$=\frac{1}{2}\sin 50^\circ$

意義	公式	證明	問題
設 $a^x=y$ 記之爲 $\log_a y=x$ 此 x 謂之以 a 爲底 y 之對數 例如 $3^5=243$ 記爲 $\log_3 243=5$ 此 5 稱爲以 3 爲底 243 之對數	(1) $\log_a 1=0$ (2) $\log_a a=1$ (3) $\log_a mn=\log_a m+\log_a n$ (4) $\log_a \frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$ (5) $\log_a m^p=p\log_a m$ (6) $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ (注意) $\log m=\log_{10} m$	(1) $a^0=1,\quad \therefore\quad \log_a 1=0$ (2) $a^1=a,\quad \therefore\quad \log_a a=1$ 令 $\log_a m=x,\quad \log_a n=y$ 則 $m=a^x,\ n=a^y$ (3) $mn=a^x a^y=a^{x+y}$ $\therefore\quad \log_a mn=x+y=\log_a m+\log_a n$ (4) $\frac{m}{n}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ $\therefore\quad \log_a \frac{m}{n}=x-y=\log_a m-\log_a n$ (5) $m=a^x\quad \therefore\quad m^p=a^{px}$ $\therefore\quad \log_a m^p=px=p\log_a m$ (6) 令 $\log_a m=x,\ \log_b m=y$ 則 $a^x=m=b^y\quad \therefore\quad a^{\frac{x}{y}}=b,\ b^{\frac{y}{x}}=a$ $\therefore\quad \log_a b=\frac{x}{y}$ 又 $\log_b a=\frac{y}{x}$ $\therefore\quad \log_b a=1/\log_a b$	(1) 試求 lo$_2$32 (2) 設 $\log(x^2y^2)=a,\ \log\frac{x}{y}=b$ 試求 $\log x,\ \log y$ (3) 試證下式 $\log_a m\times\frac{1}{\log_a b}=\log_b m$

(平面三角法 46) 對數之意義及公式問題之解答

(1) $\log_2 32=\log_2 2^5=5\log_2 2=5\times 1=5$

(2) $\log(x^2y^2)=a$ ... ... (1)

$\log\frac{x}{y}=b$ ... ... (2)

從 (1) $\log x^2+\log y^2=a$

$2\log x+2\log y=a$

$\log x+\log y=\frac{a}{2}$ ... ... (3)

從 (2) $\log x-\log y=b$ ... ... (4)

$\frac{(3)+(4)}{2}$ $\log x=\frac{a+2b}{4}$

$\frac{(3)-(4)}{2}$ $\log y=\frac{a-2b}{4}$

(3) $\log_a m=x$

$\log_b m=y$

$a^x=m=b^y$

$a^{\frac{x}{y}}=b$

$\log_a a^{\frac{x}{y}}=\log_a b$

$\frac{x}{y}=\log_a b$

$\frac{x}{\log_a b}=y$

$\therefore \frac{\log_a m}{\log_a b}=\log_b m$

意義

常用對數者即以 10 爲底之對數也

但其底 10 通常不書

$10^0=1$	$\log 1=0$
$10^1=10$	$\log 10=1$
$10^2=100$	$\log 100=2$
$10^3=1000$	$\log 1000=3$
$10^4=10000$	$\log 10000=4$
$0.1=\frac{1}{10}=10^{-1}$	$\log 0.1=-1$
$0.01=\frac{1}{100}=10^{-2}$	$\log 0.01=-2$
$0.001=\frac{1}{1000}=10^{-3}$	$\log 0.001=-3$

同數字列於同順序之數之對數

$$\log(N\times 10^p)=\log N+\log 10^p=\log N+p$$

$$\log\frac{N}{10^p}=\log N-\log 10^p=\log N-p$$

例如 $\log 4.215=0.62480$

$$\begin{aligned}\log 421.5&=\log(4.215\times 100)\\&=\log 4.215+\log 100\\&=0.62480+2\\&=2.62480\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log 0.04215&=\log(4.215\div 100)\\&=\log 4.215-\log 100\\&=0.62480-2\\&=\bar{2}.62480\end{aligned}$$

同數字列於同順序之數之對數其小數部分(假數)相同所異者惟整數部分(指數)耳

問題

(1) 問某數對數之指標與其數之關係

(2) 問 2^{11} 爲幾位之數但 $\log 2=0.30103$

(3) 問 $\left(\frac{1}{7}\right)^{12}$ 自小數點以後幾位始有有效數字但 $\log 7=0.84510$

 常用對數之意義及指標假數問題之解答

(1) 例如

$\log 4.215 = 0.62480$

$\log 42.12 = 1.62480$

$\log 422.1 = 2.62480$

$\log 4215 = 3.62480$

$\log 42150 = 4.62480$

$\log 0.4215 = \bar{1}.62480$

$\log 0.04215 = \bar{2}.62480$

其數之整數部分爲一位則指標爲 0 二位則爲 1 三位爲 2 四位爲 3 卽比整數部分之位數少 1 又無整數部者其最初之有效數字在小數點右一位則爲 $\bar{1}$ 右二位則爲 $\bar{2}$ 卽自小數點至最初有效數字之位數與指標相等

(2) $\log 2^{11} = 11 \log 2$

$= 11 \times 0.30103$

$= 3.31133$

其指標 3 故爲整數部四位之數

(3) $\log\left(\frac{1}{7}\right)^{12} = 12 \log\left(\frac{1}{7}\right)$

$= 12(\log 1 - \log 7)$

$= -12 \log 7$

$= -12 \times 0.84510$

$= -10.14120$

$= \overline{11}.8588$

(注意) 假數常爲正

其指標 $\overline{11}$ 故$\left(\frac{1}{7}\right)^{12}$之最初有效數字在小數點以11位

眞數爲表中所有者	眞數爲表中所無者	問題
例 求 485.4 之對數 由表得 $\log 4.854=0.68610$ $\log 485.4$ 之指標爲 2 $\therefore \log 485.4=2.68610$	例 求 48.543 之對數 因差小時眞數之差與其對數之差爲比例 $\log 48.54=1.68610$ $\log 48.55=1.68619$ 其眞數之差爲 0.01 其對數之差爲 0.00009 令 $\log 48.543-\log 48.54=x$ 則 $0.01:0.003=0.00009:x$ $\therefore x=\frac{0.003\times 0.00009}{0.01}=0.000027$ $\therefore \log 48.543=1.68610+0.000027$ $=1.68613$ (注意) 對數表 P. P. 之部分表示上記計算(比例)之結果	(1) 試求 $\log 1050.9$ (2) 試求 $\log 600$ (3) 試求 $\log\sqrt{262}$ (4) 試求 $\log[(\sqrt{386})^3\times 47]$ (5) 試求 $\log 15764$

 有眞數求對數問題之解答

(1) 由表得 $\log 1.0509=0.0215614$

$\therefore \quad \log 1050.9=3.0215614$

(2) 由表得 $\log 6 \quad =0.77815$

$\therefore \quad \log 600=2.77815$

(3) $\log \sqrt{262}=\frac{1}{2}\log 262$

$=\frac{1}{2}\times 2.41830$

$=1.20915$

(4) $\log \{(\sqrt{386})^3\times 47\}$

$=\frac{3}{2}\log 386+\log 47$

$=\frac{3}{2}\times 2.58659+1.67210$

$=5.55198$

(5) $\log 15760=4.19756$

$\log 15770=4.19783$

$10:4=27:x$

$x=\frac{27\times 4}{10}=10.8$

$\therefore \quad \log 15764=4.19767$

(注意) 27 乃 783 與 756 之差

4 乃 15764 與 15760 之差

10.8 謂之比例分乃由比例式求出

對數爲表中所有者

例 1. 有 $\log x=5.85739$ 試求適於此式 x 之眞數

由表得

$$3.85739=\log 7201$$

$$\therefore\ 5.85739=\log 720100$$

$$\therefore\ x=720100$$

例 2. $\log x=\bar{1}.85739$ 則

$$\therefore\ x=0.7201$$

對數爲表中所無者

例 $\log x=3.09188$

$$\begin{array}{rr} 3.09188 & \\ 3.09167=\log 1235 & \\ 3.09202=\log 1236 & \\ \hline 35 & 1 \\ 21 & x \end{array}$$

$$\therefore\ 35:21=1:x$$

$$\therefore\ x=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}=0.6$$

$$\therefore\ x=1235.6$$

問題

(1) 有 $\log x=\bar{2}.81291$ 試求其適於上式之 x 之眞數

(2) 有 $\log x=4.18632$ 試求其適於上式之 x 之眞數

有對數求眞數問題之解答

(1) 由表得 $\log 6.5 = 0.81291$

$\therefore \quad x = 0.065$

(2) $\log x = 4.18632$

由表 $\log 15350 = 4.18611$

$\log 15360 = 4.18639$

10	28
x	21

$10 : x = 28 : 21$

$$x = \frac{21 \times 10}{28} = 7.5$$

$\therefore \quad x = 15350 + 7.5$

$\therefore \quad x = 15357.5$

度數爲表中所有者	度數爲表中所無者	問　題
例　log sin 15°40′ 由表求得 9.43143 然實際之對數當於此減 10 $\therefore$　$\log\sin 15°40' = \bar{1}.43143$ (注意)　通常皆不減 10 而記之如次 $L\sin 15°40' = 9.43143$	例　log sin 15°41′20″ 檢表 $\log\sin 15°41' = \bar{1}.43188$ $\log\sin 15°42' = \bar{1}.43233$ 1′　0.00045 20″　x $60'':20'' = 45:x$ $\therefore\ x = \frac{45\times 20}{60} = 15$ $\therefore$　log sin 15°41′42″ $= \bar{1}.43188 + 0.00015$ $= \bar{1}.43203$	(1)　log sin A 及 log cos A 之指標如何 (2)　比例部分當加減時所宜注意者若何 (3)　試求 log sin 25° 34′ 45″ (4)　試求 log cos 25° 34′ 45″

(平面三角法 54) 有角度求其三角函數之對數問題之解答

(1) sin A 及 cos A 不能比 1 大故其對數之指標常不爲正卽爲負或爲 0

(2) 正弦及正切其比例部分加於小角之對數

餘弦及餘切其比例部分減於小角之對數

(3) $\log\sin 25°34' = \bar{1}.63504$

$\log\sin 25°35' = \bar{1}.63531$

$60''$ 　　27

$45''$ 　　x

$\therefore\ x = \dfrac{27\times 45}{60} = 20.25$

$\therefore\ \log\sin 25°34'45'' = \bar{1}.63504 + 0.00020$

$= \bar{1}.63524$

(4) $\log\cos 25°34' = \bar{1}.95525$

$\log\cos 25°35' = \bar{1}.95519$

$60''$ 　　6

$45''$ 　　x

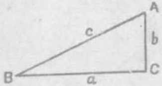
$(0'' : 45'' = 6 : x$

$\therefore\ x = \dfrac{6\times 45}{60} = 4.5$

$\therefore\ \log\cos 25°34'45'' = \bar{1}.95525 - 0.000045$

$\therefore\ \log\cos 25°34'45'' = \bar{1}.95520$

用對數解直角三角形之法

種類	解法	問題
C 爲直角有 a, b 二邊者 	$\tan A=\frac{a}{b}$ $\therefore \log\tan A=\log a-\log b$ ∴ 求得 A 即可由 B=90°−A 以求得 B 由 $\frac{a}{c}=\sin A$ $\therefore \log c=\log a-\log\sin A$ 從此即可求得 c	(1) 有三角形 ABC 其 ∠B=90° AC=5 尺 BC=2 丈 試求 ∠A
有斜邊 c 及他之一邊 a 者	$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}$ $\therefore \log b=\frac{1}{2}\{\log(c+a)+\log(c-a)\}$	(2) 有三角形 ABC 其 ∠C=90° AC=12 寸 ∠A=25° 試求 c 邊
有一角 A 及一邊 b 者	$\frac{b}{c}=\cos A$ $\therefore \log c=\log b-\log\cos A$ 從此即可求得 c 邊	

(1)

$$\tan A=\frac{a}{b}$$

$$\tan A=\frac{20}{5}=4 \text{ 尺}$$

$$\log \tan A=\log 4=0.60206$$

$$\log \tan 75^\circ 57'=0.60162$$

$$\log \tan 75^\circ 58'=0.60215$$

$$1' \qquad 53$$

$$x'' \qquad 44$$

$$60'':x''=53:44$$

$$\therefore \quad x=\frac{44\times 60}{53}=49.8$$

$$\therefore \quad \angle A=75^\circ 57' 49''.8$$

(2)

$$\frac{b}{c}=\cos A$$

$$c=\frac{b}{\cos A}$$

$$\log c=\log b-\log \cos A$$

$$=\log 12-\log \cos 25^\circ$$

$$=1.07918-\bar{1}.95728$$

$$=1.12190$$

檢表知 $c=13.24$

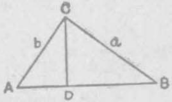
答 13.24 寸

公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

但 a, b, c 表三角形之三邊 A, B, C 表對於 a, b, c 之內角

證明



$$CD=a\sin B$$

$$CD=b\sin A$$

$$\therefore\ a\sin B=b\sin A$$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

同樣 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$

$$\therefore\ \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

問題

(1) 設 △ABC 其 $2a^2-3b^2=4bc$ 則 $2\sin^2A-3\sin^2B=4\sin B\sin C$ 試證之

(2) 於 △ABC 試證次式 $a(\sin^2B+\sin^2C)=\sin A(b\sin B+c\sin C)$

(3) 於 △ABC 其 $\frac{A}{2}=\frac{B}{3}=\frac{C}{4}$ 則 $\frac{a+c}{2b}=\cos\frac{A}{2}$ 試證之

 三角形邊角關係問題之解答(其一)

(1) 令 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=d$

則 $a=d\sin A$

$b=d\sin B$

$c=d\sin C$

以上各式代入 $2a^2-3b^2=4bc$ 則

$2(d\sin A)^2-3(d\sin B)^2=4(d\sin B)(d\sin C)$

$\therefore\ 2\sin^2A-3\sin^2B=4\sin B\sin C$

(2) 左邊$=a(\sin^2B+\sin^2C)$

$=d\sin A(\sin^2B+\sin^2C)$

右邊$=\sin A(d\sin^2B+d\sin^2C)$

$=d\sin A(\sin^2B+\sin^2C)$

$\therefore$ 兩邊相等

(3) $\dfrac{A}{2}=\dfrac{B}{3}=\dfrac{C}{4}=\dfrac{A+B+C}{2+3+4}=\dfrac{180^\circ}{9}=20^\circ$

$\therefore\ A=40^\circ,\ B=60^\circ,\ C=80^\circ$

令 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=d$ 則

$$\frac{a+c}{2b}=\frac{d\sin A+d\sin C}{2d\sin B}=\frac{\sin A+\sin C}{2\sin B}$$

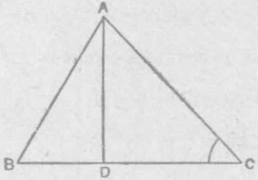
$$=\frac{\sin 40^\circ+\sin 80^\circ}{2\sin 60^\circ}=\frac{2\sin 60^\circ\cos 20^\circ}{2\sin 60^\circ}$$

$$=\cos 20^\circ=\cos\frac{A}{2}$$

公式

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\quad b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

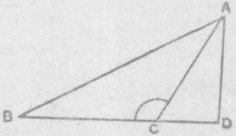
證明



$C<90^\circ$ 由幾何學之定理得

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-2BC\cdot CD$

$c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$

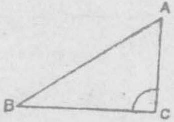


$C>90^\circ$ 由幾何學定理得

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2+2BC\cdot CD$

$c^2=b^2+a^2+2ab\cos(180^\circ-C)$

$\therefore\quad c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$



設 $C=90^\circ$ 則 $\cos C=0$

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$

$\therefore\quad c^2=b^2+a^2$

$\therefore\quad c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$

問題

(1) 於 $\triangle ABC$ 其 $A=60^\circ$, $b=8$, $c=5$ 則 a 如何

(2) 於 $\triangle ABC$ 試證次之公式

$a=b\cos C+c\cos B,\quad b=c\cos A+a\cos C,\quad c=a\cos B+b\cos A$

(平面三角法 60) 三角形邊角關係問題之解答(其二)

(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\therefore\ a^2=8^2+5^2-2\times5\times8\cos60^\circ$

$\therefore\ a^2=64+25-80\times\frac{1}{2}$

$\therefore\ a^2=49$

$\therefore\ a=\pm7$

然 a 爲三角形之一邊宜爲正數

$\therefore\ a=7$

答 $a=7$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$\therefore\ b^2+c^2=c^2+b^2+2a^2-2ca\cos B-2ab\cos C$

$\therefore\ 2a^2=2ab\cos C+2ca\cos B$

$\therefore\ a=b\cos C+c\cos B$

同樣得證他之二式

公式	證明	問題
$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	由公式 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$ $\therefore\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 同樣得證次之二式	(1) 於 $\triangle ABC$ 已知 $a=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\ b=\frac{1}{\sqrt{2}},\ c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 試求 $\angle B$ (2) 於 $\triangle ABC$ 試以 a, b, c 表次式 $\frac{b^2}{a}\cos A+\frac{c^2}{b}\cos B+\frac{a^2}{c}\cos C$

(平面三角法 62) 三角形邊角關係問題之解答(其三)

(1) $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$$=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ B=45^\circ$

(2) $\cos A=\dfrac{b^2+ca-a^2}{2bc}$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$\therefore\ 原式=\frac{b^2}{a}\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2}{b}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2}{c}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4}{2abc}$$

解答之例	問題
例題 設三角形之三角爲 A, B, C 其對邊爲 a, b, c 則有次之關係試證之 $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$ **解答** 左邊 $=a\sin B\cos C-a\cos B\sin C$ $+b\sin C\cos A-b\cos C\sin A$ $+c\sin A\cos B-c\cos A\sin B$ 然 $\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B} & \therefore\ a\sin B=b\sin A\\ \dfrac{b}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C} & \therefore\ b\sin C=c\sin B\\ \dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C} & \therefore\ a\sin C=c\sin A\end{array}\right\}$ $\therefore$ 左邊 $=a\sin B\cos C-a\cos B\sin C$ $+b\sin C\cos A-a\sin B\cos C$ $+a\sin C\cos B-b\sin C\cos A$ $=0$	(1) 於 △ABC 試證次式 $\dfrac{a+b}{a-b}=\tan\dfrac{A+B}{2}\cot\dfrac{A-B}{2}$ (2) 於 △ABC 其 $a \neq b$ 若有次之關係式則 C 爲直角試證之 $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$ (3) 於 △ABC 試證次式 $\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$

(1) 令 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k$ (公式)

則 $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$

$$\therefore \frac{a+b}{a-b}=\frac{k\sin A+k\sin B}{k\sin A-k\sin B}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}$$

$$=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}$$

(2) 由前題

$$\frac{a+b}{a-b}=\tan\frac{A+B}{2}\cot\frac{A-B}{2}$$

$$\therefore \frac{a-b}{a+b}=\cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}$$

然 $\tan\dfrac{A-B}{2}=\dfrac{a-b}{a+b}$ (假設)

$$\therefore \cot\frac{A+B}{2}=1,\quad \therefore \frac{A+B}{2}=45^\circ$$

$$\therefore A+B=90^\circ \quad \therefore C=90^\circ$$

(3) 由公式 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得

$$\frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A}{2\sin A\cos A}=\frac{b\cos B}{2\sin B\cos B}$$

$$=\frac{c\cos C}{2\sin C\cos C}$$

$$\therefore \frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A}{\sin 2A}=\frac{b\cos B}{\sin 2B}=\frac{c\cos C}{\sin 2C}$$

$$\therefore \frac{a}{2\sin A}=\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}$$

公式

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

但 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$

證明

$\cos 2A=1-2\sin^2 A$ $\quad\therefore\quad$ $\cos A=1-2\sin^2\dfrac{A}{2}$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2s-2c)(2s-2b)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

又 $\cos A=2\cos^2\dfrac{A}{2}-1$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{s(2s-2a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

又 $\tan\dfrac{A}{2}=\sin\dfrac{A}{2}\Big/\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

問題

(1) 於 △ABC 試證次之等式

$$1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{2c}{a+b+c}$$

(2) 於三角形試簡單次式

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}$$

 三角形半角與邊之關係問題之解答

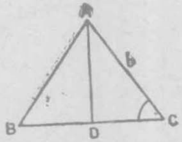
(1) $1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1-\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\times\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=1-\frac{s-c}{s}=\frac{c}{s}=\frac{2c}{2s}=\frac{2c}{a+b+c}$

(2) 原式$=(b-c)\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}+(c-a)\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}+(a-b)\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$

$$=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

$$=\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}\times 0$$

$$=0$$

公式	證明	問題
令△ABC之面積爲S則 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	 $S=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}a\cdot AD=\frac{1}{2}ab\cdot\sin C$ 次之二式亦得同樣證明之 又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ $=\frac{1}{2}ab\,2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ $=ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$ $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$	(1) 試證△ABC之面積爲 $\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$ (2) △之三邊爲17寸, 25寸, 28寸則其面積如何 (3) 於△ABC試證次式 $S=s^2\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

三角形面積問題之解答

(1) $S=\frac{1}{2}bc\sin A$

然由公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\left.\begin{aligned} b&=\frac{a\sin B}{\sin A}\\ c&=\frac{a\sin C}{\sin A}\end{aligned}\right\}$$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}bc\sin A$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin B}{\sin A}\cdot\frac{a\sin C}{\sin A}\cdot\sin A$$

$$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}$$

$$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$$

(2) $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$s=\frac{17+25+28}{2}=35$$

$\therefore\ S=\sqrt{35(35-17)(35-25)(35-28)}$

$$=\sqrt{35\times18\times10\times7}$$

$$=\sqrt{5\times7\times2\times3^2\times2\times5\times7}$$

$$=5\times7\times2\times3$$

$$=210$$

答 210 平方寸

(3) $s\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$

$$=s^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-c)(s-a)(s-a)(s-b)}{s(s-a)s(s-b)s(s-c)}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=S$$

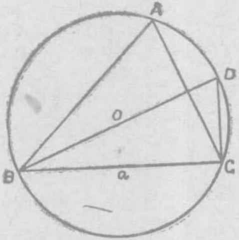
三角形之外接圓

公式

$$R=\frac{a}{2\sin A}$$

其 R 爲 △ABC 外接圓之半徑

證明



令 BD 爲 △ABC 外接圓之直徑則

$\angle BDC=\angle BAC=A,$

$\angle BCD=R\angle$

$\therefore \frac{BC}{BD}=\sin BDC$

$\therefore \frac{a}{2R}=\sin A \quad \therefore R=\frac{a}{2\sin A}$

問題

(1) a, b, c 爲 △ 之三邊 S 爲其面積 R 爲其外接圓之半徑則 $R=\frac{abc}{4S}$ 試證之

(2) △ABC 之一角爲 30° 其對邊爲 5 寸則其外接圓之半徑若干

(3) 於 △ABC 試證次式

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$$

三角形之外接圓問題之解答

(1) $R=\dfrac{a}{2\sin A}$

$=\dfrac{abc}{2bc\sin A}$

$=\dfrac{abc}{4\times\frac{1}{2}bc\sin A}$

$=\dfrac{abc}{4S}$

(2) $R=\dfrac{a}{2\sin A}$

$=\dfrac{5}{2\sin 30^\circ}$

$=\dfrac{5}{2\times\frac{1}{2}}=5$

(3) 設 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ 則

$a=2R\sin A$

$b=2R\sin B$

$c=2R\sin C$

$\therefore\ a\cos A+b\cos B+c\cos C$

$=2R(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)$

$=R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$

$=R\{2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C\}$

$=R\{2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C)$

$=2R\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2R\sin C\cdot 2\sin A\sin B$

$=4R\sin A\sin B\sin C$

三角形之內切圓及傍切圓之半徑

公式	證明

公式

$$r=\frac{S}{s}$$

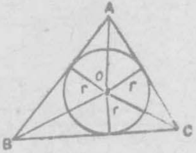
$$r_1=\frac{S}{s-a}$$

$$r_2=\frac{S}{s-b}$$

$$r_3=\frac{S}{s-c}$$

但 r 爲內切圓之半徑 r_1, r_2, r_3 爲傍切圓之半徑

證明



設 $\triangle ABC=S$

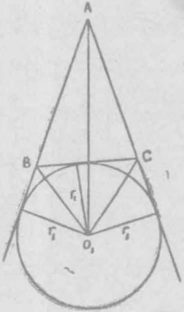
$a+b+c=2s$

則 $\triangle ABC=\triangle ABO+\triangle BCO+\triangle CAO$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}cr+\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br$

$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=sr$

$$r=\frac{S}{s}$$



又 $\triangle ABC=$

$\triangle O_1AB+\triangle O_1CA-\triangle O_1BC$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}cr_1+\frac{1}{2}br_1-\frac{1}{2}ar_1$

$=\frac{1}{2}r_1(b+c-a)$

$=\frac{1}{2}r_1(2s-2a)$

$=r_1(s-a)$

$$\therefore\ r_1=\frac{S}{s-a}$$

他之二公式亦得同樣證明之

問題 試證次之各式

(1) $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. (2) $r_1=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$. (3) $\sqrt{rr_1r_2r_3}=S$. (4) $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$

 三角形之內切圓及傍切圓半徑問題之解答

(1) $$r=\frac{S}{s}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

(2) $$r_1=\frac{S}{s-a}=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$$

$$=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{(s-a)}}$$

(3) $$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$r_1=\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

$$r_2=\sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$$

$$r_3=\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$$

$$\sqrt{rr_1r_2r_3}=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=S$$

(4) $$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)}{s(s-b)(s-c)}}+\sqrt{\frac{(s-b)}{s(s-a)(s-c)}}+\sqrt{\frac{(s-c)}{s(s-a)(s-b)}}$$

$$=\frac{s-a+s-b+s-c}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

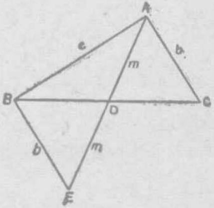
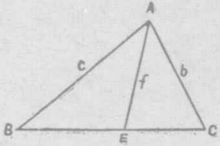
$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{3s-2s}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{s}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{1}{r}$$

公式	證明		問題
設△ABC中線AD之長爲 m 則 $m=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$		於△ABC其 $\overline{AE}^2=\overline{AB}^2+\overline{BE}^2-2AB\cdot BE\cos ABE$ $\therefore\ (2m)^2=c^2+b^2-2cb\cos(180^\circ-A)$ $=c^2+b^2+2bc\cos A$ $\therefore\ m=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2+2b\cos A}$	(1) 於△ABC試引∠A之中線AD以證次式 $\tan ADB=\frac{2bc\sin A}{b^2-c^2}$
設△ABC之∠A二等分線AE之長爲 f 則 $f=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$		$\triangle ABC=\triangle ABE+\triangle ACE$ $\therefore\ \frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}cf\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bf\sin\frac{A}{2}$ $\therefore\ 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=f(c+b)\sin\frac{A}{2}$ $\therefore\ f=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$	(2) 於△ABC其A外角之二等分線AE之長爲則 $f=\frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$ 試證之

 三角形之中線及角之二等分線問題解答

(1) 設 $\angle ADB=\phi$ 考 $\triangle ABD$ 則

$$\frac{\sin BAD}{\sin ADB}=\frac{a}{2c} \text{ 即 } \frac{\sin(\phi+B)}{\sin\phi}=\frac{a}{2c}$$

$$\therefore \cos B+\sin B\cot\phi=\frac{a}{2c}$$

$$\therefore \cot\phi=\frac{\frac{a}{2c}-\cos B}{\sin B}$$

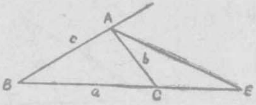
$$\therefore \tan\phi=\frac{2c\sin B}{a-2c\cos B}$$

$$=\frac{2ac\sin B}{a^2-(a^2+c^2-b^2)}$$

$$=\frac{2ac\sin B}{b^2-c^2}$$

$$\therefore \tan ADB=\frac{2ac\sin B}{b^2-c^2}$$

(2) $\triangle ABC=\triangle ABE-\triangle ACE$



即 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}cf\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)$

$$-\frac{1}{2}bf\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

$$\therefore 2bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=f(c-b)\cos\frac{A}{2}$$

$$\therefore f=\frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$$

種類	解法	問題
已知一邊及二角者 設已知 a, B, C	從 $A=180°-(B+C)$ 以求 A $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ $\therefore\ b=\frac{a\sin B}{\sin A}$ 從 $\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$ 求得 b 又 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ $\therefore\ c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ 從 $\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$ 求得 c	(1) 於 △ABC 其 $a=485$ 尺 $B=78°$ $C=66°$ 試求 b, c

 任意三角形解法問題之解答(其一)

(1) $A=180°-(B+C)=180°-(78°+66°)=36°$

$\log a=\log 485$ 尺 $=2.68574$

$\log \sin A=\log \sin 36°=\bar{1}.76922$

$\log \sin B=\log \sin 78°=\bar{1}.99040$

$\log \sin C=\log \sin 66°=\bar{1}.96073$

$$b=\frac{a \sin B}{\sin A}$$

$\therefore\ \log b=\log a+\log \sin B-\log \sin A$

$=2.68574+\bar{1}.9904-\bar{1}.76922$

$=2.90692$

$\log 807.0=2.90687$

$\log 807.1=2.90693$

.1	6
x	5

$\therefore\ .1:x=6:5$

$\therefore\ x=.1\times\frac{5}{6}=0.08$

$\therefore\ b=807+0.08=807.08$ 尺

次 $c=\frac{a \sin C}{\sin A}$

$\therefore\ \log c=\log a+\log \sin C-\log \sin A$

$=2.68574+\bar{1}.96073-\bar{1}.76922$

$=2.87725$

$\log 753.7=2.87720$

$\log 753.8=2.87726$

.1	6
x	5

$\therefore\ 6:5=.1:x$

$\therefore\ x=.1\times\frac{5}{6}=0.08$

$\therefore\ c=753.7+0.08=753.78$ 尺

種類	解法	問題
已知二邊及其夾角者 設已知 a, b, C	$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$ $=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$ 從 $\tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ 求得 $\frac{A-B}{2}$ 以此與 $90°-\frac{C}{2}=\frac{A+B}{2}$ 加減得 A 及 B 從 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$ 求得 c	(1) 於 △ABC 其 $A=65°$ $b=281.4$ 寸 $c=208$ 寸 試求 B, C 及 a

(1) $\log(b-c)=\log 73.4=1.86570$

$\log(b+c)=\log 489.4=2.68966$

$\log\cot\frac{A}{2}=\log\cot 32°30'=0.19581$

$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\frac{73.4}{489.4}\cot 32°30'$

$\log\tan\frac{B-C}{2}=\log 73.4-\log 489.4+\log\cot 32°30'$

$=\bar{1}.17604+0.19581=\bar{1}.37185$

$\bar{1}.37193\ldots\ldots 13°15'$

$\bar{1}.37137\ldots\ldots 13°14'$

$56 \qquad 1'$

$8 \qquad x''$

$\therefore\ x'=60''\times\frac{8}{56}=9''$

$\therefore\ \frac{B-C}{2}=13°15'-9''=13°14'51''$

又 $\frac{B+C}{2}=90°-\frac{A}{2}=57°30'$

$B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}=\underline{70°44'51''}$

$C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}=\underline{44°15'\ 9''}$

$\log c=\log 208=2.31806$

$\log\sin A=\log\sin 65°=\bar{1}.95728$

$\log\sin C=\log\sin 44°15'9''=\bar{1}.84375$

$\log a=\log c+\log\sin A-\log\sin C$

$=2.31806+\bar{1}.95728-\bar{1}.84375$

$=2.43159$

$\therefore\ a=270.14$ 寸

任意三角形之解法(其三) (平面三角法 79)

種類	解法	問題
已知二邊及其對角之一者 設已知 a, b, A	$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ $\therefore\ \sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ ……(1) 又 $C=180^\circ-(A+B)$ ……(2) $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ $\therefore\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$ ……(3) 從(1)求得 B 即 $\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a$ 由是從(2)即可得 C 從(3)求得 c 即 $\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$ (討論) A≧90° 時 $\begin{cases}a\leqq b & \text{則問題爲不能}\\ a>b & \text{則只有一解}\end{cases}$ A<90° 時 $\begin{cases}a<b\sin A & \text{則無解}\\ a=b\sin A & \text{則只有一解}\\ b>a>b\sin A & \text{則有二解}\\ a\geqq b & \text{則只有一解}\end{cases}$	(1) 於 △ABC 其 $a=4945.2$ 寸 $b=5876.2$ 寸 $A=47^\circ 26'$ 試求其餘一邊及二角

(1)

$$\log\sin B=\log b+\log\sin A-\log a$$
$$C=180^\circ-(A+B)$$
$$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$$

$\log b=\log 5876.2$	$=3.76910$	
$\log\sin A=\log\sin 47^\circ 26'$	$=\bar{1}.86717$	
$-\log a=-\log 4945.2$	$=\bar{4}.30581$	
$\log\sin B$	$=\bar{1}.94208$	或
∴ $B=$	$61^\circ\ 3'43''$	$118^\circ 56'17''$
$A=$	$47^\circ 26'$	$47^\circ 26'$
$A+B=$	$108^\circ 29'43''$	$166^\circ 22'17''$
$A+B+C=$	180°	180°
$C=$	$71^\circ 30'17''$	$13^\circ 37'43''$

$\log a=$	$\log 4945.2$	$=3.69419$	或 3.69419
$\log\sin C=$	$\log\sin 71^\circ 30'17''$	$=\bar{1}.97697$	$(13^\circ 37'43'')\,\bar{1}.37222$
$-\log\sin A=$	$-\log\sin 47^\circ 26'$	$=0.13283$	0.13283
	$\log c$	$=3.80399$	3.19924
	∴ c	$=6367.9$	1582.1

答 $\begin{cases} B=61^\circ\ 3'43'' \text{ 或 } 118^\circ 56'17'' \\ C=71^\circ 30'17'' \text{ 或 } 13^\circ 37'43'' \\ c=6367.9 \text{ 寸 或 } 1582.1 \text{ 寸} \end{cases}$

種　類	解　法	問　題
知三邊即 a, b, c 以求三角即 A, B, C	令 $2s=a+b+c$ 則 $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ $\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$ 而 $C=180°-(A+B)$ $\therefore \log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)\}$ $\log\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\{\log(s-c)+\log(s-a)-\log s-\log(s-b)\}$ 由是即可求得 A, B, C	(1) 有 △ABC 其 $a=275.3$ 尺 $b=189.2$ 尺 $c=301.5$ 尺 試求 A, B, C

(1) $a=275.3 \qquad s=383$

$b=189.2 \qquad s-a=107.7$

$c=301.5 \qquad s-b=193.8$

$2s=766 \qquad s-c=\ 81.5$

$$\log(s-b)=2.28735$$
$$\log(s-c)=1.91116$$
$$-\log s=\bar{3}.41680$$
$$-\log(s-a)=\bar{3}.96778$$
$$2\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.58309$$
$$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.79154$$
$$\therefore\ \frac{A}{2}=31°44'.93$$
$$\therefore\ \underline{A=63°29'52''}$$

$$\log(s-c)=1.91116$$
$$\log(s-a)=2.03222$$
$$-\log s=\bar{3}.41680$$
$$-\log(s-b)=\bar{3}.71265$$
$$2\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.07283$$
$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.53642$$
$$\therefore\ \frac{B}{2}=18°58'.66$$
$$\therefore\ \underline{B=37°57'19''}$$

$$A=\ 63°29'52''$$
$$B=\ 37°57'19''$$
$$A+B=101°27'11''$$
$$A+B+C=180°$$
$$\underline{C=\ 78°32'49''}$$

例題	解法	問題
知一邊及其對角與他二邊之和解此三角形即知 a, A, $b+c$ 試求其餘之各件	$\because \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b+c}{\sin B+\sin C}$ $\therefore \quad \frac{a}{b+c}=\frac{\sin A}{\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}$ 即 $\quad \frac{a}{b+c}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}$ $\therefore \quad \cos\frac{B-C}{2}=\frac{(b+c)\sin\frac{A}{2}}{a}$ 從此求得 $\frac{B-C}{2}$ 又 $\frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$ 以此與 $\frac{B-C}{2}$ 加減卽得 B, C 由是卽求得 a 從而依一邊與二角之解法解之即得所求	(1) 知二邊 a, b 及二角之差 A−B 試解此三角形 (2) 知一角 B, 一邊 a 及他二邊之和 $b+c$ 試解此三角形

(1) 由公式 $\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}(A-B)$

求得 $\frac{1}{2}(A+B)$以此與 $\frac{1}{2}(A-B)$加減卽得 A, B

然由 $C=180°-(A+B)$ 求得 C

由是知 a, b, C 依此以求之卽得

從而求得 $c=\frac{a\sin C}{\sin A}$

(2) 因知 a, 及 $b+c$ 而知

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

$$s-a=\frac{1}{2}(b+c-a)$$

故由 $\tan\frac{C}{2}=\frac{s-a}{s}\cot\frac{B}{2}$

求得 C

又由 $A=180°-(B+C)$

求得 A

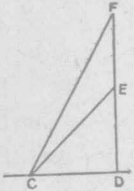
然後可由 $b=\frac{a}{\sin A}\sin B$

而求得 b

例題

1. 有人仰望塔頂及塔頂上所立長 l 尺旗竿之上端得仰角 A, 及 B 求塔之高

解法



令 DE＝塔高＝x, EF＝旗竿之長 l

C 爲觀測點

$\angle ECD=A$, $\angle FCD=B$

$CD=y$

則 $CD\tan ECD=DE$

$CD\tan FCD=DF$

而 $y\tan A=x$, $y\tan B=x+l$

從而 $\frac{\tan B}{\tan A}=\frac{x+l}{x}$

$$\therefore\ x=\frac{l\tan A}{\tan B-\tan A}$$

$$=\frac{l\cos B\sin A}{\sin(B-A)}$$

問題

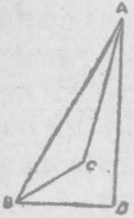
(1) 從山麓之某地點 B 測得山頂A之仰角爲 60° 在水平面與傾斜 30° 之坂路上自 B 點上行 1530 尺之 C 點測得 $\angle BCA$ 爲 120° 求山之高

(2) 在塔基仰望樹頂得仰角 α 登塔 h 尺再仰望之得仰角 β 求樹之高

(1) 令 AD＝山之高＝x 尺

$$\angle DBA=60°,\quad \angle DBC=30°$$

$$\therefore\ \angle CBA=30°$$



就 △ABC 解之

$$BA=\frac{BC\sin BCA}{\sin BAC}$$

$$=\frac{1530\sin 120°}{\sin(180°-30°-120°)}$$

$$=\frac{1530\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$=1530\times\sqrt{3}$$

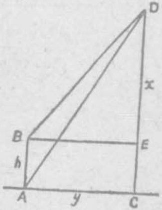
而 $AD=BA\sin 60°$

$$=1530\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=2295$$

$\therefore$ AD＝2295 尺

(2) CD 爲樹之高 A,B 爲前後之觀測點過 B 作水平線交 CD 於 E 則



$$\angle DAC=\alpha,\quad \angle DBE=\beta$$

今令 $AC=y,\quad DC=x$

則 $DC=AC\tan DAC,$

$DE=BE\tan DBE$

從而 $x=y\tan\alpha$

$x-h=y\tan\beta$

由是 $$\frac{x}{x-h}=\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}$$

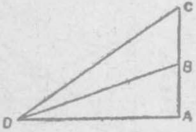
$$\therefore\ x=\frac{h\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

$$=\frac{h\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

例題

2. 以長 b 之竿立於高 a 之臺上試求此竿與臺視角相等之地點但 $b>a$

解法



(解) BC 爲竿 AB 爲臺 D 爲觀測點則

$AB=a,\quad BC=b$

$\angle ADB=\angle BDC$

令 $DA=x,\quad \angle ALB=y$

則 $$\tan y=\frac{a}{x}\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(1)$$

$$\tan 2y=\frac{a+b}{x}\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad(2)$$

以 (1) 代入 (2) 則

$$\frac{2\frac{a}{x}}{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{a+b}{x}$$

解之取其正號則 $x=a\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$

即凡距臺底 $a\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$ 之點皆是

問題

(1) 有塔及塔尖距其塔之基底爲 a 尺於其同水平面上之一點視之含相等之角若已知塔高爲 h 尺則塔尖之高爲 $\left(\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h$ 尺試證之

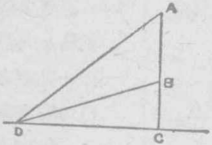
(2) 在水平線 ABC 上求高 PC 但知 A 點測之爲 α 度 B 點測之爲 β 度而 AB 之長爲 a 則

$PC=a\sin\alpha\sin\beta\csc(\beta-\alpha)$

試證之

(1) 解　AB 爲塔尖 BC 爲塔 D 爲觀測點

然　$CD=a,\quad BC=h$



今令　$AB=x$ 則

$$\tan ADC=\frac{AC}{CD}=\frac{2\tan BDC}{1-\tan^2 BDC}$$

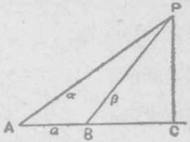
$$=2\frac{CB}{CD}\Big/\left\{1-\left(\frac{CB}{CD}\right)^2\right\}=\frac{2h}{a}\Big/\left\{1-\left(\frac{h}{a}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{2ah}{a^2-h^2}$$

$$\therefore\quad \frac{x+h}{a}=\frac{2ah}{a^2-h^2}$$

從而　$$x=\left(\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h$$

(2)　令　$PC=x$ 則



由　$\triangle APC$　得　$AC=x\cot\alpha$

由　$\triangle BPC$　得　$BC=x\cot\beta$

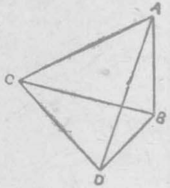
然　$AC-BC=AB=a$

$$\therefore\quad a=x(\cot\alpha-\cot\beta)=x\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)$$

$$=x\frac{\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$$

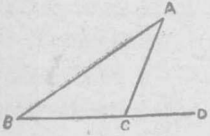
$$=\frac{x\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\therefore\quad x=a\sin\alpha\sin\beta\csc(\beta-\alpha)$$

例　題	解　法	問　題
3. 有人立於高 h 尺之絕壁頂上望西方見一船成 α 俯角迨一時間後見同船在南方成 β 俯角問船之速度如何	 絕壁 AB $=h$ 尺船之位置前在 C 點後在 D 點則 $\angle ACB=\alpha$ $\angle ADB=\beta$ 且 $\angle CBD=\angle R$ 由是 $CB=h\cot\alpha$ $DB=h\cot\beta$ 而 $\overline{DC}^2=\overline{CB}^2+\overline{BD}^2$ $\therefore\ DC=\sqrt{h^2(\cot^2\alpha+\cot^2\beta)}$ $=h\sqrt{\cot^2\alpha+\cot^2\beta}$ 此乃一時間船所行之距離卽船之速度	(1) 有船向東航行見一燈臺在東北東後進 4 浬此臺在北北東試求最初之測點與燈臺之距離 (2) 有船向正北進行見與航路成 α 角之直線上有二燈臺後船轉航路向北西之方向進行 a 浬見一燈臺在船之正東一燈臺在北東試求二燈臺之距離

(平面三角法 90)　測量問題之解答(其三)

(1)　A 爲燈臺 B, C 爲前後之測點則



$\angle ABD=22°30'$

$\angle ACD=67°30'$

$BC=4$ 浬

今令　$AB=x$ 浬 則

$$x=\frac{4\sin(180°-67°30')}{\sin(67°30'-22°30')}$$

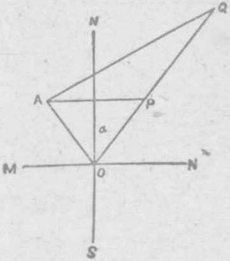
$$=\frac{4\cos 22°30'}{\sin 45°}$$

$$=\frac{4\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2}\Big/\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ x=2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$$

答　$2\sqrt{(4+2\sqrt{2})}$ 浬

(2)　O, A 爲船前後之二位置



P,Q 爲二燈臺之位置

則方位 AQ 爲北東 AP 爲正東

$\angle QAP=45°$

$\angle PAO=45°$

$\angle AOM=45°$

又　$\angle NOP=\alpha$

$$\therefore\ \angle APQ=45°+45°+\alpha=90°+\alpha$$

由 $\triangle APQ$ 得 $\begin{cases}\dfrac{PQ}{\sin QAP}=\dfrac{AQ}{\sin QPA}\\ AQ=OA\tan AOQ\end{cases}$

$$\therefore\ \frac{PQ}{\sin 45°}=\frac{a\tan(45°+\alpha)}{\sin(90°+\alpha)}$$

$$\therefore\ PQ=\frac{a\tan(45°+\alpha)\sin 45°}{\sin(90°+\alpha)}=\frac{a\tan(45°+\alpha)}{\sqrt{2}\cos\alpha}$$

例題

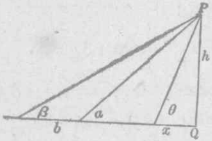
4　水平面上有一向北方傾斜之塔自其正南方距塔基 a, b 之二點測之則得塔之高度爲 α 及 β 而塔之傾度爲 θ 其垂直高爲 h 則

$$\tan\theta=\frac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta}$$

$$h=\frac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

試證之

解法



從塔頂 P 向地面上引垂線 PQ 以 h 代之從塔基至 Q 之距離以 x 代之則

$x+a=$(塔一測點至 Q 之距離)

$x+b=$(從他測點至 Q 之距離)

由是 $\cot\theta=\dfrac{x}{h}$, $\cot\alpha=\dfrac{x+a}{h}$, $\cot\beta=\dfrac{x+b}{h}$

$$\therefore\quad h=\frac{b-a}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

而 $$x=h\cot\alpha-a=\frac{(b-a)\cot\alpha}{\cot\beta-\cot\alpha}-a$$

$$=\frac{b\cot\alpha-a\cot\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{h}{x}=\frac{b-a}{b\cot\alpha-a\cot\beta}$$

問題

(1) 有目標過其直下水平之一直線上取 A, B, C 三點測之 B 之仰角爲 A 仰角之二倍 C 之仰角爲 A 仰角之三倍而

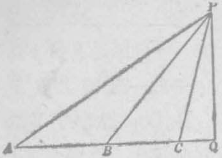
$AB=a$, $BC=b$

則目標之高爲

$$\frac{a}{2b}\sqrt{\{(a+b)(3b-a)\}}$$

試證之

(1) P 爲目標 PQ 爲自 P 至含 A, B, C 之水平面上所作之垂線



令　$PQ=x,\ CQ=y$ 則 $\angle PAQ=\theta$

則　$\angle PBQ=2\theta,\ \angle PCQ=3\theta$

由是　$\tan\theta=\dfrac{x}{y+a+b},\ \tan 2\theta=\dfrac{x}{y+b},\ \tan 3\theta=\dfrac{x}{y}$

$\therefore\ y+a+b=x\cot\theta,\ y+b=x\cot 2\theta,\ y=x\cot 3\theta$

$\therefore\ a=x(\cot\theta-\cot 2\theta),\ b=x(\cot 2\theta-\cot 3\theta)$

$$\therefore\ a=x\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right)=\frac{x\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta}=\frac{x}{\sin 2\theta}$$

$$\therefore\ b=x\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}-\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}\right)=\frac{x\sin(3\theta-2\theta)}{\sin 2\theta\sin 3\theta}=\frac{x\sin\theta}{\sin 2\theta\sin 3\theta}=\frac{x}{\sin 2\theta(3-4\sin^2\theta)}$$

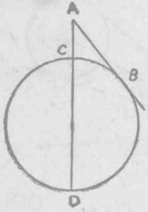
故　$\sin 2\theta=\dfrac{x}{a},\ 3-4\sin^2\theta=\dfrac{x}{b\sin 2\theta}=\dfrac{a}{b}$

$$\therefore\ 3-2(1-\cos 2\theta)=\frac{a}{b}\qquad \therefore\ \cos 2\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-1\right)$$

由是　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a}{b}-1\right)^2=1$

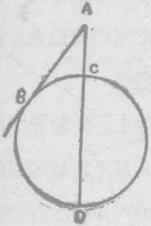
$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2}=1-\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}-1\right)^2=\frac{4b^2-(a-b)^2}{4b^2}=\frac{3b^2+2ab-a^2}{4b^2}=\frac{(3b-a)(a+b)}{4b^2}$$

$$\therefore\ x=\frac{a}{2b}\sqrt{\{(a+b)(3b-a)\}}$$

例　　題	解　　法	問　　題
5. 地球之半徑爲 r 則高 h 之點至視水平之距離等於 $\sqrt{2rh}$	 CD 爲地球之徑 A 爲高 h 之一點自 A 向地球作一切線 AB 則 $AB=\sqrt{AC \cdot AD}=\sqrt{h(2r+h)}$ $=\sqrt{2rh+h^2}$ 然 h 比 $2r$ 爲極小故 h^2 對於 $2rh$ 更小去之可也 $\therefore\ AB=\sqrt{2rh}$	(1) 於地上得望見高 h 尺丘陵之頂則其最大之距離有幾哩 (2) 從地上一定點望空中直徑 6 尺之輕氣球其視角爲 30° 其中心之仰角爲 45° 求此輕氣球之中心距地面鉛直之高 但地球之半徑爲 3960 哩

測量問題之解答(其五)

(1) AC爲丘陵之高 h 尺 CD爲地球之直徑 AB爲望見A之最大距離命爲 x 則AB爲切地球A點之切線



$$\therefore\ \overline{AB}^2=AD\cdot AC$$

$$\therefore\ AB=\sqrt{\{AC(CD+AC)\}}$$

然AC比於CD爲極小故CD+AC可視作CD由是

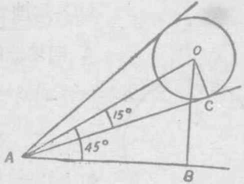
$$AB=\sqrt{(AC\cdot CD)}$$

$$\therefore\ x=\sqrt{2hr}=\sqrt{2.\frac{h}{5280}\cdot 3960}$$ 因1哩=5280呎)

$$=\sqrt{\frac{3h}{2}}$$

故最大距離爲 $\sqrt{\frac{3h}{2}}$ 哩

(2) O爲輕氣球之中心其直下相當於地上之一點B而A爲測點C在平面OAB之內卽過A切輕氣球之直線之切點OC爲輕氣球之半徑卽3尺∠OAC爲望輕氣球視角之半分卽15°



由是 $$OA=\frac{OC}{\sin OAC}=\frac{3}{\sin 15^\circ}$$

而 $$\angle OAB=45^\circ$$

$$\therefore\ OB=OA\sin OAB=\frac{3}{\sin 15^\circ}\times\sin 45^\circ$$

$$=\frac{3}{\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3(\sqrt{3}+1)$$

$$=8.196$$

答 8.196尺

定 義	解 答 之 例	問 題
逆函數 正弦爲 a 則 a 稱爲其角之逆正弦以 $\sin^{-1}a$ 記之或記之爲 $\arcsin a$ 他之函數準此 例如 $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 與 $\theta=\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 是表同一之關係	(例題) $2\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}$ 試證之 (解答) 令 $\tan^{-1}y=A$ 則 $\tan A=y$ 又 $2\tan^{-1}y=2A$ 而 $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $=\frac{2y}{1-y^2}$ $\therefore\ \tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}=2A$ 由是 $2\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{2y}{1-y^2}$	試證下列各式 (1) $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$ (2) $\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{47}$ (3) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=45^\circ$

逆三角函數問題之解答(其一)

(1) 令 $\tan^{-1}m=\mathrm{A}$, $\tan^{-1}n=\mathrm{B}$ 則

$$\tan \mathrm{A}=m,\ \tan \mathrm{B}=n$$

$$\tan(\mathrm{A}+\mathrm{B}=\frac{\tan \mathrm{A}+\tan \mathrm{B}}{1-\tan \mathrm{A}\tan \mathrm{B}}=\frac{m+n}{1-mn}$$

然 $\mathrm{A}+\mathrm{B}=\tan^{-1}m+\tan^{-1}n$

$$\therefore\ \tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$$

(2) 題之兩邊應用前題則

$$\text{左邊}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{8}}=\tan^{-1}\frac{3}{11}$$

$$\text{右邊}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{47}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{47}}=\tan^{-1}\frac{3}{11}$$

是左右互相等卽爲本題之證

(3) 由前題(1)得

$$\tan^{-1}\tfrac{1}{2}+\tan^{-1}\tfrac{1}{5}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}=\tan^{-1}\tfrac{7}{9}$$

由是 $\tan^{-1}\tfrac{1}{2}+\tan^{-1}\tfrac{1}{5}+\tan^{-1}\tfrac{1}{8}$

$$=\tan^{-1}\tfrac{7}{9}+\tan^{-1}\tfrac{1}{8}$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}$$

$$=\tan^{-1}1$$

$$=45^\circ$$

例題

1. $\sin^{-1}a=\cos^{-1}\surd(1-a^2)$

$$=\tan^{-1}\frac{a}{\surd(1-a^2)}$$

$$=\cot^{-1}\frac{\surd(1-a^2)}{a}$$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\surd(1-a^2)}$$

$$=\csc^{-1}\frac{1}{a}$$

試證之

證法

令　$\sin^{-1}a=t$ 則 $a=\sin t$

由是　$\surd(1-a^2)=\cos t$

$$\therefore\ t=\cos^{-1}\surd(1-a^2)$$

又從 $a=\sin t$ 得

$$\frac{a}{\surd(1-a^2)}=\tan t \quad \therefore\ t=\tan^{-1}\frac{1}{\surd(1-a^2)}$$

又從　$\frac{\surd(1-a^2)}{a}=\cot t,\ \frac{1}{\surd(1-a^2)}=\sec t$

$$\frac{1}{a}=\csc t$$

$$\therefore\ t=\cot^{-1}\frac{\surd(1-a^2)}{a}=\sec^{-1}\frac{1}{\surd(1-a^2)}$$

$$=\csc^{-1}\frac{1}{a}$$

問題

試證次之各式

(1)　$\sin^{-1}\frac{12}{13}=\cot^{-1}\frac{5}{12}$

(2)　$\sin^{-1}a+\sin^{-1}b$

$$=\sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\}$$

(3)　$\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}$

$$=45^\circ$$

 逆三角函數問題之解答(其二)

(1) $$\sin^{-1}a=\cot^{-1}\frac{\sqrt{(1-a^2)}}{a}$$

而 $a=\frac{12}{13}$以此代入上式

則 $$\sin^{-1}\frac{12}{13}=\cot^{-1}\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}\Big/\frac{12}{13}=\cot^{-1}\frac{5}{12}$$

(2) 令 $\sin^{-1}a=A,\ \sin^{-1}b=B$

則 $a=\sin A,\quad b=\sin B$

由是 $\sqrt{1-a^2}=\cos A,\ \sqrt{1-b^2}=\cos B$

但 $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

由是 $A+B=\sin^{-1}(\sin A\cos B+\sin B\cos A)$

以上之各值代入之則

$$\sin^{-1}a+\sin^{-1}b=\sin^{-1}(a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2})$$

(3) 令 $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}=A,\ \cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=B$

則 $$\frac{9}{\sqrt{82}}=\cos A,\quad \frac{5}{\sqrt{41}}=\cos B$$

由是 $$\frac{1}{\sqrt{82}}=\sin A,\quad \frac{4}{\sqrt{41}}=\sin B$$

但 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

由是 $A+B=\cos^{-1}(\cos A\cos B-\sin A\sin B)$

故以上之值代入之則

$$\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$=\cos^{-1}\left(\frac{9}{\sqrt{82}}\times\frac{5}{\sqrt{41}}-\frac{1}{\sqrt{82}}\times\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$$

$$=\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=45^\circ$$

例題

2. $3\tan^{-1}a=\tan^{-1}\dfrac{3a-a^3}{1-3a^2}$

試證之

證明

令　$\tan^{-1}a=A$

則　$a=\tan A$

以　$\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

$$\therefore\ 3A=\tan^{-1}\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

以上之值代入之卽得

$$3\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{3a-a^3}{1-3a^2}$$

問題

試證次之二式

(1) $2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\dfrac{a^2-1}{2a}$

(2) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{4}+\tan^{-1}\dfrac{1}{20}$

$$=\frac{\pi}{4}-\tan^{-1}\frac{1}{1985}$$

(1) 令 $\cot^{-1}a=A$

則 $a=\cot A$

但 $\cot 2A=\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$

由是 $2A=\cot^{-1}\dfrac{\cot^2 A-1}{2\cot A}$

此以上之值代入之卽得

$$2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\frac{a^2-1}{2a}$$

(2) 令 $\tan^{-1}\dfrac{1}{4}=A,\quad \tan^{-1}\dfrac{1}{20}=B$

則 $\tan 3A=\dfrac{3\tan A-\tan^3 A}{1+3\tan^2 A}=\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{4^3}}{1-\frac{3}{4^2}}=\dfrac{47}{52}$

又 $\tan(3A+B)=\dfrac{\tan 3A+\tan B}{1-\tan 3A\tan B}$

$$=\frac{\frac{47}{52}+\frac{1}{20}}{1-\frac{47}{52\times 20}}=\frac{992}{993}$$

令 $C=\tan^{-1}\dfrac{1}{1985}$

則 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-C\right)=\dfrac{1-\frac{1}{1985}}{1+\frac{1}{1985}}=\dfrac{1984}{1986}=\dfrac{992}{993}$

$\therefore\ 3A+B=\dfrac{\pi}{4}-C$

由是卽得本題之證

<table>
<tr><th>例題</th><th>證明</th><th>問題</th></tr>
<tr>
<td>3. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$
試證之</td>
<td>令　$\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}=A$
則　$\sin A=\sqrt{\frac{x}{x+a}}$
$\sin^2A=\frac{x}{x+a}$
由是　$\cos^2A=1-\sin^2A$
$=1-\frac{x}{x+a}=\frac{a}{x+a}$
$\tan^2A=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}=\frac{x}{a}$
$\therefore\ A=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$
即　$\sin^{-1}\sqrt{\frac{x}{x+a}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{a}}$</td>
<td>(1)　設 $\sec\theta-\csc\theta=\frac{4}{3}$
則　$\theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$
試證之
(2)　設　$\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$
則　$\theta=\pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$
試證之</td>
</tr>
</table>

逆三角函數問題之解答(其四)

(1) 以 $\sec\theta-\csc\theta=\frac{4}{3}$

而 $$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ \sin\theta-\cos\theta=\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta=\frac{2}{3}\sin 2\theta$

自乘則

$$1-\sin 2\theta=\frac{4}{9}\sin^2 2\theta$$

解此二次方程式則

$$\sin 2\theta=\frac{3}{4}\text{ 或 }-3$$

但 -3 不適用

$$\therefore\ \sin 2\theta=\frac{3}{4}$$

由是 $$2\theta=\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \theta=\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

(2) 以 $\sin(\pi\cos\theta)=\cos(\pi\sin\theta)$

而 $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi\cos\theta\right)=\cos(\pi\sin\theta)$$

故解答含於次式中

$$\frac{\pi}{2}-\pi\cos\theta=2n\pi\pm\pi\sin\theta$$

$$\therefore\ \cos\theta\pm\sin\theta=\frac{1}{2}-2n$$

自乘則

$$1\pm\sin 2\theta=\left(\frac{1}{2}-2n\right)^2$$

若 n 爲任意整數(正或負)則 $\sin 2\theta$ 之絕對值大於 1

故 n 不可不爲零

$$\therefore\ 1\pm\sin 2\theta=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \sin 2\theta=\pm\frac{3}{4}$$

由是 $$2\theta=\pm\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \theta=\pm\frac{1}{2}\sin^{-1}\frac{3}{4}$$

解答之例	問題
(例題) 試解 $2\sin^2 x=3\cos x$ (解答) 由題之方程式得 $1-\cos^2 x=\frac{3}{2}\cos x$ $\therefore\ \cos^2 x+\frac{3}{2}\cos x=1$ 解此二次方程式得 $\cos x=\frac{1}{2}$ 或 -2 但 -2 不適用因無論如何 $\cos x$ 之絕對值不能大於 1 故也 $\therefore\ \cos x=\frac{1}{2}$ 　從而 $x=\frac{\pi}{3}$ 故一般 　$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$	(1) 試於 0° 與 180° 之間求適於下式 x 之一切值 $2\cos^2 x+3\sin x=3$ (2) 試解次之方程式 $\sin^2 x+\cos 2x=\cos x$

(平面三角法104) 三角方程式問題之解答(其一)

(1) $$2\cos^2 x+3\sin x=3$$

由題之方程式得

$$2(1-\sin^2 x)+3\sin x=3$$

$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$$

$$(2\sin x-1)(\sin x-1)=0$$

$$\therefore\quad \sin x=\tfrac{1}{2} \text{ 或 } \sin x=1$$

故一般為 $x=n\times180^\circ+(-1)^n30^\circ$

及 $x=n\times180^\circ+(-1)^n90^\circ$

由是在 0° 與 180° 之間之角為

30°, 150°, 90°

(2) $$\sin^2 x+\cos 2x=\cos x$$

由此式得

$$1-\cos^2 x+2\cos^2 x-1=\cos x$$

即 $$\cos^2 x-\cos x=0$$

$$\cos x(\cos x-1)=0$$

$$\therefore\quad \cos x=0 \text{ 或 } \cos x=1$$

故一般

$$x=2n\times180^\circ\pm90^\circ$$

又 $x=2n\times180^\circ$

即 $n\times180^\circ+90^\circ$ 或 $2n\times180^\circ$

例題	解法	問題
1. 有方程式 $\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x=\frac{7}{4}$ 試求其適於此方程式 x 之值但 $x<90^\circ$	變原式爲 $1-\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x-\frac{7}{4}=0$ 或 $4\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+3=0$ 即 $(2\cos x-\sqrt{3})^2=0$ 由是 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ x=30^\circ$	(1) 有方程式 $4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0$ 試求其 θ 之適當之值 但 $\theta<90^\circ$ (2) 試解方程式 $\sin x+\cos x=1$

三角方程式問題之解答(其二)

(1) $4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0$

將此式分解因數

$(2\sin\theta-1)(2\sin\theta-\sqrt{3})=0$

$\therefore\quad 2\sin\theta-1=0$

及 $2\sin\theta-\sqrt{3}=0$

由是 $\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

故 $\begin{cases}\theta=30^\circ\\ \theta=60^\circ\end{cases}$

(2) $\sin x+\cos x=1$

將此式平方之

$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x=1$

即 $\sin 2x+1=1$

$\therefore\quad \sin 2x=0$

$\therefore\quad 2x=n\pi$

由是 $x=\dfrac{n\pi}{2}$

例題	解法	問題
2. 試解方程式 $\cos 2x=\cos x+\sin x$	由題得 $\cos^2x-\sin^2x=\cos x+\sin x$ $\therefore\quad (\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)=\cos x+\sin x$ 由是　$\cos x+\sin x=0, \cdots\ \cdots\ \cdots(1)$ $\cos x-\sin x=1\ \cdots\ \cdots\ \cdots(2)$ 由 (1) 得　$\tan x=-1$ $\therefore\quad x=n\pi-\frac{\pi}{4}$ 由 (2) 得　$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore\quad \cos x\cos\frac{\pi}{4}-\sin x\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$ 即　$\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$ $\therefore\quad x+\frac{\pi}{4}=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. 由是　$x=2n\pi$ 或 $2n\pi-\frac{\pi}{2}$	(1) 試解方程式 $\sin 2\theta-\cos 2\theta-\sin\theta+\cos\theta=0$ (2) 有方程式 $5\sin x=\cos 2x+2$ 試求 x 適當之值

 三角方程式問題之解答(其三)

(1) $\sin 2\theta-\cos 2\theta-\sin\theta+\cos\theta=0$

由此式得

$$(\sin 2\theta-\sin\theta)+(\cos\theta-\cos 2\theta)=0$$

即 $2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}=0$

由是 $\sin\frac{\theta}{2}=0$ ... ... (1)

及 $\cos\frac{3\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}=0$ ... ... (2)

由(1)得 $\frac{\theta}{2}=n\cdot 180°$ 或 $\theta=n\cdot 360°$

由(2)得 $\tan\frac{3\theta}{2}=-1$

由是 $\frac{3\theta}{2}=n\cdot 180°-45°$

即 $\theta=n\cdot 120°-30°=(4n-1)30°$

(2) $5\sin x=\cos 2x+2$

變此式爲

$$5\sin x=1-2\sin^2 x+2$$

即 $2\sin^2 x+5\sin x-3=0$

分解爲

$$(2\sin x-1)(\sin x+3)=0$$

由是 $\sin x=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

但 $\sin x+3=0$ 不能成立

例題	解法	問題
3. 試解次之方程式 $2\cos x\cos 3x=-1$	由原式得 $\cos 4x+\cos 2x+1=0$ $2\cos^2 2x+\cos 2x=0$ 由是　$\cos 2x(2\cos 2x+1)=0$ 卽　$\cos 2x=0$ ... ... (1) 及　$\cos 2x=-\frac{1}{2}$ ... ... (2) 從(1)得　$2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$ $\therefore\ x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$ 從(2)得　$2x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$ $\therefore\ x=n\pi\pm\frac{1}{3}\pi$	(1) $\cos^3 x\sin 3x+\sin^3 x\cos 3x=\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 試解之 (2) $\cos x+\cos 7x=\cos 4x$ 試解之

(1) $$\cos^3 x\sin 3x+\sin^3 x\cos 3x=\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

變爲 $$\cos^3 x(3\sin x-4\sin^3 x)$$

$$+\sin^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

或 $$3\cos^3 x\sin x-3\sin^3 x\cos x=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos x\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\sin 2x\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin 4x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

由是 $$4x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{n}{4}\pi+(-1)^n\frac{\pi}{12}$$

(2) $$\cos x+\cos 7x=\cos 4x$$

變爲 $$2\cos 3x\cos 4x=\cos 4x$$

故 $$\cos 4x=0 \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$2\cos 3x=1 \quad \dots\dots\dots\dots (2)$$

從(1)得 $$4x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ x=(2n+1)\frac{\pi}{8}$$

從(2) $$3x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ x=(6n\pm1)\frac{\pi}{9}$$

例題	解法	問題
4. 解次之方程式 $\cos x-\cos 2x=\sin 3x$	由原式得 $2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{3x}{2}$ $\therefore\ \sin\frac{3x}{2}=0\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (1)$ 及 $\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{3x}{2}\ \dots\ \dots\ \dots\ (2)$ 從(1)得 $\frac{3x}{2}=n\pi\quad\therefore\ x=\frac{2}{3}n\pi$ 從(2)得 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{3x}{2}$ $\therefore\ \frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}=2n\pi\pm\frac{3x}{2}$ $\therefore\ x=\frac{\pi}{4}(1-4n)$ 及 $x=\frac{\pi}{2}(4n-1)$	(1) $\cos nx+\cos(n-2)x=\cos x$ 試解之 (2) $3\sec^4 x+8=10\sec^2 x$ 試解之

(1) $\cos nx+\cos(n-2)x=\cos x$

變爲 $2\cos(n-1)x\cos x=\cos x$

$\therefore\ \cos x=0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (1)$

或 $\cos(n-1)x=\frac{1}{2} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \quad (2)$

從(1)得 $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$

從(2)得 $(n-1)x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{3}$

(2) $3\sec^4x+8=10\sec^2x$

移項 $3\sec^4x-10\sec^2x+8=0$

分解因數 $(3\sec^2x-4)(\sec^2x-2)=0$

卽 $\sec^2x=2$ 或 $\frac{4}{3}$

$\therefore\ \sec x=\sqrt{2}$ 或 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{4}$ 或 $\dfrac{\pi}{6}$

一般 $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$ 或 $2n\pi\pm\dfrac{\pi}{6}$

例題	解法	問題
5. $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)$ $=\cot^{-1}(n-1)$ 試解之	公式 $\cot(a_1+a_2)=\dfrac{\cot a_1\cot a_2-1}{\cot a_1+\cot a_2}$ 令 $\cot a_1=x,\ \cot a_2=n^2-x+1$ 則 $a_1+a_2=\cot^{-1}\dfrac{x(n^2-x+1)-1}{x+(n^2-x+1)}$ 即 $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)$ $=\cot^{-1}\dfrac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}$ 依題之等式得 $\dfrac{n^2x-x^2+x-1}{n^2+1}=n-1$ 由是 $n^2x-x^2+x-1=n^3-n^2+n-1$ 解之得 $x=n$ 及 $x=n^2-n+1$	(1) $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\sec^{-1}5x=45°$ 求其適當之 x 之值 (2) $3\tan^{-1}\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$ $=\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$ 試求其 x 之值

(1) 令 $\frac{1}{2}\sec^{-1}5x=A$

則 $$\sec^{-1}5x=2A$$

從而 $$5x=\sec 2A$$

或 $$\cos 2A=\frac{1}{5x}$$

由是 $$\tan A=\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}$$

依題得

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}=45^\circ$$

$$\therefore\ \frac{x+\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}}{1-x\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}}=\tan 45^\circ=1$$

或 $$x+\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}=1-x\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}$$

解之得

$$x=\pm\tfrac{1}{3}$$

(2) 令 $\tan^{-1}\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\theta$ 則

$$\tan\theta=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \tan 3\theta=\left\{\frac{3}{2+\sqrt{3}}-\frac{1}{(2+\sqrt{3})^3}\right\}\Big/\left\{1-\frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}\right\}$$

$$=\frac{3(2+\sqrt{3})^2-1}{(2+\sqrt{3})^3-3(2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{20+12\sqrt{3}}{20+12\sqrt{3}}=1$$

$$\therefore\ 3\theta=\tan^{-1}1$$

故題之方程式如次

$$\tan^{-1}1-\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{1}{x}$$

求兩邊之正切則

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\Big/\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{x}$$

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ x=2$$

例題	解法	問題
6. $x+y=a$ $\sin x+\sin y=b$ 試解之	變題之第二方程式爲 $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=b$ $\therefore\ \cos\frac{x-y}{2}=\frac{b}{2\sin\frac{x+y}{2}}=\frac{b}{2\sin\frac{a}{2}}$ 從此求得 $\frac{x-y}{2}$ 令 $\frac{x-y}{2}=\theta\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots(1)$ 從題之第一式得 $\frac{x+y}{2}=\frac{a}{2}\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots(2)$ 由 (1), (2) 得 $x=\frac{a}{2}+\theta,\quad y=\frac{a}{2}-\theta$	(1) $x+y=90^\circ$ $\sin x+\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 試解之 (2) $x+y=a$ $\sin x\sin y=b$ 試解之

三角方程式問題解答(其七)

(1)

$$\begin{cases} x+y=90^\circ \\ \sin x+\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\because \quad x+y=90^\circ$$

$$\therefore \quad \cos y=\sin x$$

由是題之第二方程式爲

$$2\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 或 \quad \sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \quad x=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

同樣 $y=\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2)

$$\begin{cases} x+y=a \\ \sin x\sin y=b \end{cases}$$

以 2 乘第二方程式之兩邊其正弦之積之二倍以餘弦之差代之則得

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2b$$

以第一式代入之

$$\cos(x-y)=\cos a+2b$$

從此求得 $x-y$

與第一方程式組合則得 x 及 y

解 答 之 例	問 題
（例題） $\begin{cases} \sin\theta+\cos\theta=a \\ \sin 2\theta+\cos 2\theta=b \end{cases}$ 試消去 θ （解答） 第一式平方之 $1+\sin 2\theta=a^2 \quad \therefore \quad \sin 2\theta=a^2-1$ 代入第二方程式而變化之 $\cos 2\theta=b-a^2+1$ $\therefore \quad (a^2-1)^2+(b-a^2+1)^2=1$ $2a^4-2a^2b-4a^2+b^2+2b+1=0$	試消去下二題之 θ (1) $\begin{cases} x=\sin\theta+\cos\theta \\ y=\tan\theta+\cot\theta \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \tan\theta+\sin\theta=m \\ \tan\theta-\sin\theta=n \end{cases}$

(1) $$x=\sin\theta+\cos\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$y=\tan\theta+\cot\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)平方之

$$x^2=1+2\sin\theta\ \mathrm{ccs}\,\theta$$

$$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=\frac{x^2-1}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

從(2) $$y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\cdots\cdots (4)$$

以(3)代入(4)

$$y=\frac{2}{x^2-1}$$

$$\therefore\ x^2y-y=2$$

(2) $$\tan\theta+\sin\theta=m \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\tan\theta-\sin\theta=n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(1)+(2)則

$$2\tan\theta=m+n$$

(1)−(2)則

$$2\sin\theta=m-n$$

$$\therefore\ \tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=\frac{(m+n)^2}{4}$$

或 $$\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{(m+n)^2}{4}$$

由是 $$\frac{\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2}=\frac{(m+n^2}{4}$$

$$\therefore\ 16mn-m^4+2m^2n^2-n^4=0$$

例題	解法	問題
1. $\cot\theta+\tan\theta=x$ $\csc\theta-\sin\theta=y$ 試消去其 θ	從第一式 $\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=x$ ………… (1) 從第二式 $\dfrac{\cos^2\theta}{\sin\theta}=y$ ………… (2) (2)÷(1) 則 $\cos^3\theta=\dfrac{y}{x}$ 或 $\cos^2\theta=\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ 以此代入(2)則 $y=\dfrac{1}{\sin\theta}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$ 或 $\sin^2\theta=\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$ 由是 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}+\dfrac{1}{x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}}=1$ 或 $x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{3}}+1=x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$	(1) $x=3\cos\theta+\cos 3\theta$ $y=3\sin\theta-\sin 3\theta$ 試消去 θ (2) $x=\sec\phi-\cos\phi$ $y=\csc\phi-\sin\phi$ 試消去 ϕ

(1)

$$x=3\cos\theta+\cos 3\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=3\sin\theta-\sin 3\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(1)

$$x=3\cos\theta+4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos^3\theta$$

$$\therefore\ \left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

從(2)

$$y=3\sin\theta-3\sin\theta+4\sin^3\theta=4\sin^3\theta$$

$$\therefore\ \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\sin^2\theta \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3)+(4) 則

$$\left(\frac{x}{4}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$

$$\therefore\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$$

(2)

$$x=\sec\phi-\cos\phi \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$y=\csc\phi-\sin\phi \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

從(1)　$x=\dfrac{1}{\cos\phi}-\cos\phi$

或　$x=\dfrac{1-\cos^2\phi}{\cos\phi}=\dfrac{\sin^2\phi}{\cos\phi}\cdots\cdots\cdots(3)$

從(2)　$y=\dfrac{1}{\sin\phi}-\sin\phi$

或　$y=\dfrac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi}=\dfrac{\cos^2\phi}{\sin\phi}\cdots\cdots\cdots(4)$

(3)×(4) 則

$$xy=\sin\phi\cos\phi$$

或　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=\dfrac{\sin^{\frac{4}{3}}\phi}{\cos^{\frac{2}{3}}\phi}+\dfrac{\cos^{\frac{4}{3}}\phi}{\sin^{\frac{2}{3}}\phi}=\dfrac{\sin^2\phi+\cos^2\phi}{\cos^{\frac{2}{3}}\phi\sin^{\frac{2}{3}}\phi}$

由是　$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1\Big/x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}$

或　$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})=1$

例 題	解 法	問 題
2. $m\sec x=1+\tan x$ $n\sec x=1-\tan x$ 試消去 x	將題之二式平方之 $m^2\sec^2 x=(1+\tan x)^2\cdots\ \cdots\ \cdots(1)$ $n^2\sec^2 x=(1-\tan x)^2\cdots\ \cdots\ \cdots(2)$ (1)+(2) 則 $(m^2+n^2)\sec^2 x=(1+\tan x)^2+(1-\tan x)^2$ $=2(1+\tan^2 x)$ $=2\sec^2 x$ $\therefore\ m^2+n^2=2$	(1) $x=a\sin\alpha\cos\beta$ $y=b\sin\alpha\sin\beta$ $z=c\cos\alpha$ 試從上三式消去 α, β (2) $3-\cos 4\theta=x+y$ $4\sin 2\theta=x-y$ 試消去 θ

(2) 變原三式之形爲

$$\frac{x}{a}=\sin\alpha\cos\beta$$

$$\frac{y}{b}=\sin\alpha\sin\beta$$

$$\frac{z}{c}=\cos\alpha$$

各各平方且邊邊相加

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

或 $b^2c^2x^2+c^2a^2y^2+a^2b^2z^2=a^2b^2c^2$

(2)

$$-\cos 4\theta=x+y\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (1)$$

$$4\sin 2\theta=x-y\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (2)$$

從 (1) $\cos 4\theta=3-(x+y)$

或 $2\cos^2 2\theta-1=3-(x+y)$

$$\therefore\ 16\cos^2 2\theta=32-8(x+y)\cdots\ \cdots\ (3)$$

將 (2) 平方之

$$16\sin^2 2\theta=(x-y)^2\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (4)$$

(3)+(4)

$$16=32-8(x+y)+(x-y)^2$$

$$\therefore\ (x-y)^2-8(x+y)+16=0$$

解答之例	問題
(例題) 設 A, B, C 爲三角形之三角試證次式 $\sin A-\sin B+\sin C=4\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ (解答) $\sin A-\sin B+\sin C=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$ $=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$ $=2\cos\frac{A+B}{2}\left(\sin\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)$ $=2\cos\frac{A+B}{2}\left(2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$ $=4\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$ $=4\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$	(1) 設 $A+B+C=2\pi$ 試證次式 $\sin A+\sin B+\sin C$ $=4\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}\sin\frac{A+B}{2}$ (2) 試證次之等式 $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}$ $=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$

(1) $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{A+C}{2}$$

(2) $\tan\frac{A+B}{2}-\tan\frac{A-B}{2}$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}-\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}$$

$$=\frac{\sin B}{\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)}$$

$$=\frac{2\sin B}{\cos A+\cos B}$$

例題	證明	問題
1. 試證下式 $1+\tan\alpha\tan\frac{\alpha}{2}$ $=\sec\alpha$	$\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$. $\therefore\ 1+\tan\alpha\tan\frac{\alpha}{2}=1+\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\tan\frac{\alpha}{2}$ $=1+\dfrac{2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}+2\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ $=\dfrac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\left(1+\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)\Big/\left(1-\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}\right)$ $=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1}{\cos\alpha}=\sec\alpha$	試證次之恆等式 (1) $\dfrac{\sin 3A-\sin 2A}{\sin 3A+\sin 2A}=\cot\dfrac{5A}{2}\tan\dfrac{A}{2}$ (2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (3) $1+\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{1-2\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2A}$

恆等式問題之解答(其二)

(1) $$\frac{\sin 3A-\sin 2A}{\sin 3A+\sin 2A}=\frac{2\cos\frac{3A+2A}{2}\sin\frac{3A-2A}{2}}{2\sin\frac{3A+2A}{2}\cos\frac{3A-2A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{5A}{2}\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{5A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\cot\frac{5A}{2}\tan\frac{A}{2}$$

(2) $$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(3) $1+\tan(A+B)\tan(A-B)$

$$=1+\frac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$$

$$=1+\frac{\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$$

$$=\frac{\cos^2A-\sin^2B+\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$$

$$=\frac{1-2\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}$$

例題	證明	問題
2. 於△ABC 試證次式 $\tan A\tan B$ $+\tan B\tan C$ $+\tan C\tan A$ $=1+\sec A\sec B\sec C$	$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A$ $=\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}+\dfrac{\sin C\sin A}{\cos C\cos A}$ $=\dfrac{\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$ 但　$\cos(A+B+C)=\cos 180^\circ=-1$ 卽　$\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$ $-\sin B\sin C\cos A-\sin C\sin A\cos B=-1$ $\therefore \sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B$ $=\cos A\cos B\cos C+1$ $\therefore \tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\ \mathrm{tain}\ A$ $=\dfrac{\cos A\cos B\cos C+1}{\cos A\cos B\cos C}$ $=1+\sec A\sec B\sec C$	試證次之各式 (1) $\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$ $=2\sin 45^\circ\cos 15^\circ$ (2) $\sec(45^\circ+\alpha)$ $\times\sec(45^\circ-\alpha)$ $=2\sec 2\alpha$ (3) $\tan(45^\circ+A)$ $-\tan(45^\circ-A)$ $=2\tan 2A$

恆等式問題之解答(其三)

(1) $\sin 60^\circ+\sin 30^\circ$

$$=\sin(45^\circ+15^\circ)+\sin(45^\circ-15^\circ)$$

$$=\sin 45^\circ\cos 15^\circ+\cos 45^\circ\sin 15^\circ+\sin 45^\circ\cos 15^\circ-\cos 45^\circ\sin 15^\circ$$

$$=2\sin 45^\circ\cos 15^\circ$$

(2) $\sec(45^\circ+\alpha)\sec(45^\circ-\alpha)$

$$=\frac{1}{\cos(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)}$$

$$=\frac{1}{\cos\frac{90^\circ+2\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-2\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}2\cos\frac{90^\circ+2\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-2\alpha}{2}}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 90^\circ)}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\cos 2\alpha}=2\sec 2\alpha$$

(3) $\tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)$

$$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}-\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$$

$$=\frac{(1+\tan A)^2-(1-\tan A)^2}{1-\tan^2 A}$$

$$=\frac{4\tan A}{1-\tan^2 A}$$

而 $\tan 2A=\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

$\therefore\ \tan(45^\circ+A)-\tan(45^\circ-A)=2\tan 2A$

12803