Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 18

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 18.1. Lucy Sonnenschein befindet sich auf dem Zahlenstrahl in Position 2 und schaut in die positive Richtung. Sie bewegt sich drei Schritte nach vorne (das bezieht sich auf ihre momentane Ausrichtung), sodann sieben Schritte zurück, sie macht sodann eine Halbdrehung, dann geht sie vier Schritte nach vorne, macht wieder eine Halbdrehung, macht einen Salto rückwärts im Stand und geht zwei Schritte zurück. In welcher Position befindet sie sich zum Schluss?

Übungsaufgaben

Aufgabe 18.2. Welche Vorstellungen zu den ganzen Zahlen (einschließlich der Verknüpfungen) haben Sie?

Aufgabe 18.3. Es seien zwei Haufen H und G an (hinreichend vielen) Äpfeln gegeben. Es werden der Reihe nach 7 Äpfel von H nach G, 13 Äpfel von G nach H, dann 10 Äpfel von G nach H und schließlich 9 Äpfel von H nach G transportiert. Wie viele Äpfel werden insgesamt und in welche Richtung transportiert?

Aufgabe 18.4. Lucy Sonnenschein hat einen Stand auf dem Flohmarkt. Sie verkauft ein altes Kleid für 8 Euro, trinkt einen Kaffee für 2 Euro, verkauft eine alte Schallplatte für 5 Euro, hat Hunger und holt sich eine Schlachtplatte für 7 Euro, verschenkt einen Aschenbecher und kauft sich beim Nachbarstand eine coole Bluse für 3 Euro. Wie sieht ihr finanzielles Gesamtergebnis vom Flohmarkttag aus?

Aufgabe 18.5. Mustafa Müller und Heinz Ngolo tauschen Fußballbildchen aus. Mustafa gibt Heinz vier Bildchen und Heinz gibt Mustafa fünf Bildchen. Daheim merkt Mustafa, dass er jetzt eines doppelt hat und gibt es am Nachmittag zurück. Heinz hat vier neue Bildchen von seiner Oma bekommen, davon gibt er zwei an Mustafa weiter. Der revanchiert sich mit einem Bildchen. Wie viele Bildchen haben sie unter dem Strich ausgetauscht?

Aufgabe 18.6. Gabi Hochster und Heinz Ngolo tauschen Küsse aus. Gabi gibt Heinz drei Küsse, daraufhin gibt Heinz Gabi fünf Küsse, woraufhin Gabi einen Kuss zurückgibt. Wie viele Küsse haben sie unter dem Strich ausgetauscht?

Aufgabe 18.7. Wir betrachten die Tage

$$\ldots \text{ vorvorvorgestern, vorvorgestern, vorgestern, gestern, heute,}$$
$$\text{morgen, übermorgen, überübermorgen, überüberübermorgen,} \ldots$$

als Zahlen und addieren mit ihnen.

(1) Bestimme vorgestern von morgen.
(2) Bestimme vorvorvorgestern von übermorgen.
(3) Bestimme vorvorvorvorgestern von vorvorvorgestern von überüberüberüberübermorgen.
(4) Welchen Tag von überüberüberübermorgen muss ich nehmen, um heute zu erhalten?
(5) Wie bestimmt man den negativen Tag zu einem gegebenen Tag?
(6) Welchen Tag von überüberüberübermorgen muss ich nehmen, um vorvorgestern zu erhalten?
(7) Wie selbstverständlich ist in diesem Modell das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz?

Aufgabe 18.8. Wie zählt man die Jahre in der Geschichte? Warum?

Aufgabe 18.9. Was hat die Temperaturskala mit den ganzen Zahlen zu tun?

Aufgabe 18.10. Soll man eine negative Zahl stets mit einem Minuszeichen als $-x$ schreiben? Oder darf man eine negative Zahl auch mit x bezeichnen?

Aufgabe 18.11. Präzisiere an jeder Stelle der Definition der Addition auf $\mathbb{Z}$, ob $+$ die Addition in $\mathbb{N}$ oder in $\mathbb{Z}$ bezeichnet und ob $-$ die Differenz auf $\mathbb{N}$ oder die Negation bezeichnet.

Aufgabe 18.12. Beweise die übrigen Fälle für die Assoziativität der Addition in $\mathbb{Z}$ wie im Beweis zu Lemma 18.8.

Aufgabe 18.13. Zeige, dass zu gegebenen ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung

$$a + x = b$$

eine eindeutige Lösung, nämlich $b - a$, besitzt.

Aufgabe 18.14. Zeige, dass für jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ die Additionsabbildung mit a, also

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv ist. Was ist die Umkehrabbildung?

Aufgabe 18.15. Betrachte die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Differenz als Verknüpfung, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\, (a,b) \longmapsto a - b.$$

Besitzt diese Verknüpfung ein neutrales Element? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, gibt es zu jedem Element ein inverses Element?

Aufgabe 18.16. Präzisiere an jeder Stelle der Definition der Multiplikation auf $\mathbb{Z}$, ob $\cdot$ die Multiplikation in $\mathbb{N}$ oder in $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Aufgabe 18.17. Beweise die Assoziativität der Multiplikation in $\mathbb{Z}$. Wie kann man die Anzahl der möglichen Fälle reduzieren?

Aufgabe 18.18. Heinz Ngolo multipliziert eine positive Zahl mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer positiven Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer positiven Zahl, das Ergebnis multipliziert er mit einer negativen Zahl. Ist das Ergebnis positiv oder negativ?

Aufgabe 18.19. Berechne

$$(-1)^{934050663653}.$$

Aufgabe 18.20.*

Zeige, dass für zwei von 0 verschiedene ganze Zahlen x, y auch das Produkt $x \cdot y$ von 0 verschieden ist.

Aufgabe 18.21. Erstelle eine Verknüpfungstabelle für die Multiplikation der ganzen Zahlen, wobei aber nur die drei Symbole $0, p, n$ (für positiv und negativ) vorkommen sollen. Ist eine solche Verknüpfungstabelle wohldefiniert und sinnvoll? Ist diese Verknüpfung assoziativ, kommutativ, besitzt sie ein neutrales Element?

Ist eine entsprechende Verknüpfungstabelle für die Addition sinnvoll?

Aufgabe 18.22. Was kommt heraus, wenn man -7 „positiv nimmt“ oder von -7 „das Positive nimmt“?

Aufgabe 18.23. Beweise die folgenden Eigenschaften für den Betrag ganzer Zahlen.

(1) $|x| \geq 0$.
(2) $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
(3) $|x| = |y|$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$ ist.
(4) $|y - x| = |x - y|$.
(5) $|xy| = |x|\,|y|$.
(6) Es ist $|x + y| \leq |x| + |y|$ (*Dreiecksungleichung für den Betrag*).

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.24. (2 Punkte)

Die Familie Müller hat im Monat Dezember folgende Einnahmen und Ausgaben (alles in Euro). Gehälter: 4847, Lebensmittelkosten: 1250, Kosten für das Silvesterfeuerwerk: 101, Schuldentilgung: 705, Zinsen: 280, Geschenke kaufen: 325, Lottogewinn: 253, Unterstützung an die Oma: 300, Taschengeld für die Kinder: 40, Spende an die Bahnhofsmission: 80, auf der Straße gefunden: 20, Heizungskosten: 531, Fortbildungsseminar: 345, Ausflug an die Nordsee: 470, Wasser- und Strom: 360, Opernbesuch: 108, Erlös durch den Verkauf der Fußballbildchen von Mustafa: 35.

Wie hoch sind die Gesamteinnahmen und wie hoch sind die Gesamtausgaben der Familie im Dezember? Wie sieht die Gesamtbilanz für den Monat Dezember aus?

Aufgabe 18.25. (3 Punkte)

Die Fahrradtournee „Rund um die Nordseedünen“ besteht aus sechs Etappen. Auch in diesem Jahr kommen nur drei Fahrer für den Sieg in Frage: Albert Albrecht, Bruno Rotato und Cico Ferrari. Bei der ersten Etappe fährt Albert einen Vorsprung von 13 Sekunden auf Bruno und von 16 Sekunden auf Cico heraus. Bei der zweiten Etappe landet Cico an erster Stelle mit einem Vorsprung von 19 Sekunden auf die zeitgleichen Albert und Bruno. Das dritte Rennen gewinnt Bruno, Cico kommt 8 Sekunden danach ins Ziel mit einem Vorsprung von 3 Sekunden auf Albrecht. Bei der vierten Etappe verliert Bruno 1 Sekunde auf Cico und 3 Sekunden auf Albrecht. Die fünfte Etappe gewinnen Albrecht und Cico zeitgleich mit einem Vorsprung von 4 Sekunden auf Bruno. Bei der letzten Etappe verliert Albrecht 11 Sekunden gegenüber Cico, dafür gewinnt er 7 Sekunden gegenüber Bruno.

Welche Gesamtzeitabstände bestehen am Ende der Tournee zwischen den drei Fahrern?

Aufgabe 18.26. (4 Punkte)

Ein Apotheker hat eine zweischalige Waage zur Verfügung und die folgenden Gewichte: Zwei 1-Gramm-Gewichte, ein 5-Gramm-Gewicht, zwei 10-Gramm-Gewichte, ein 50-Gramm-Gewicht, zwei 100-Gramm-Gewichte, ein 500-Gramm-Gewicht, u.s.w. Zeige, dass er mit diesen Gewichten jede Menge (in vollen Gramm) abwiegen kann.

Aufgabe 18.27. (2 Punkte)

Zeige, dass die Multiplikation mit -1 auf den ganzen Zahlen, also die Abbildung

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z},\ g \longmapsto -g,$$

bijektiv ist.

Aufgabe 18.28. (4 Punkte)

Unter welchen Bedingungen gilt für ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Gleichheit

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |a_i| ?$$