Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 9

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 9.1. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.2. Bestimme die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}$ zum identischen Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{v}$.

Aufgabe 9.3. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3+5i \\ 1-i \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 4+i \end{pmatrix},$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{C}^2$.

Aufgabe 9.4. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(-2, 5)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgabe 9.5.*

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9.6. Es sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 mit der Basis $\mathfrak{u} = X^0, X^1, X^2, X^3$. Zeige, dass die Polynome

$X^3 + 3X^2 - X + 4,\ -X^3 + 4X^2 + 5X + 3,\ 2X^2 - X + 1,\ 3X^3 + 5X^2 + 7X - 2$

ebenfalls eine Basis von V bilden und bestimme die beiden Übergangsmatrizen.

Aufgabe 9.7. Es sei V der Vektorraum der 2×2-Matrizen mit der Standardbasis

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ebenfalls eine Basis von V ist und bestimme die Übergangsmatrizen.

Aufgabe 9.8.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension n. Es seien $\mathfrak{u} = u_1, \ldots, u_n$, $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ Basen von V. Zeige, dass die Übergangsmatrizen zueinander in der Beziehung

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{u}} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}} \circ M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$$

stehen.

Aufgabe 9.9. Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der von

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum $U \subseteq K^3$ die Dimension 2 besitzt.

b) Bestimme eine Basis und die Dimension des Lösungsraumes $L \subseteq K^3$ der linearen Gleichung

$$-6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0.$$

c) Bestimme eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap L$.

d) Bestätige Lemma 9.7 in diesem Beispiel.

Aufgabe 9.10. Zeige, dass der Raum der $m \times n$-Matrizen über einem Körper K die direkte Summe aus den Spaltenräumen S_j, $j = 1, \ldots, n$, ist, wobei der j-te Spaltenraum aus denjenigen $m \times n$-Matrizen besteht, die in der j-ten Spalte beliebige Einträge und sonst überall den Eintrag 0 besitzen. Man gebe die direkte Summenzerlegung für die 3×4-Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 8 & 10 & -2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

an.

Aufgabe 9.11. Zeige, dass der Raum der $n \times n$-Matrizen über einem Körper K die direkte Summe aus dem Raum der Diagonalmatrizen, dem Raum der oberen Dreiecksmatrizen mit Nulldiagonale und dem Raum der unteren Dreiecksmatrizen mit Nulldiagonale ist.

Aufgabe 9.12.*

Man gebe ein Beispiel für Untervektorräume U_1, U_2, U_3 in einem Vektorraum V derart, dass $V = U_1 + U_2 + U_3$ ist, dass $U_i \cap U_j = 0$ für $i \neq j$ ist, und so, dass die Summe nicht direkt ist.

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

Eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt.

Aufgabe 9.13. Es sei $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Zeige, dass es eine direkte Summenzerlegung

$$V = G \oplus U$$

gibt, wobei G den Untervektorraum der geraden Funktionen und U den Untervektorraum der ungeraden Funktionen bezeichnet.

Aufgabe 9.14. Der Vektorraum V sei die direkte Summe der Untervektorräume V_1 und V_2. Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq V$ nicht die direkte Summe der Untervektorräume $U \cap V_1$ und $U \cap V_2$ sein muss.

Aufgabe 9.15. Bestimme ein direktes Komplement zu dem von $\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}$ erzeugten Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9.16.*

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume gleicher Dimension. Zeige, dass U_1 und U_2 ein gemeinsames direktes Komplement besitzen.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.17. (4 Punkte)

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9.18. (6 (3+1+2) Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^3$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(2, 5, 4)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgabe 9.19. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei $w \in V$ ein Vektor mit einer Darstellung

$$w = \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

wobei $s_k \neq 0$ sei für ein bestimmtes k. Es sei

$$\mathfrak{w} = v_1, \ldots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \ldots, v_n \,.$$

Bestimme die Übergangsmatrizen $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}$ und $M^{\mathfrak{w}}_{\mathfrak{v}}$.

Aufgabe 9.20. (8 (2+2+3+1) Punkte)

Sei K ein Körper.

a) Zeige, dass der von

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum $U \subseteq K^4$ die Dimension 3 besitzt.

b) Bestimme eine Basis und die Dimension des Lösungsraumes $L \subseteq K^4$ der linearen Gleichung

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 6x_4 \; = \; 0.$$

c) Bestimme eine Basis und die Dimension des Durchschnitts $U \cap L$.

d) Bestätige Lemma 9.7 in diesem Beispiel.