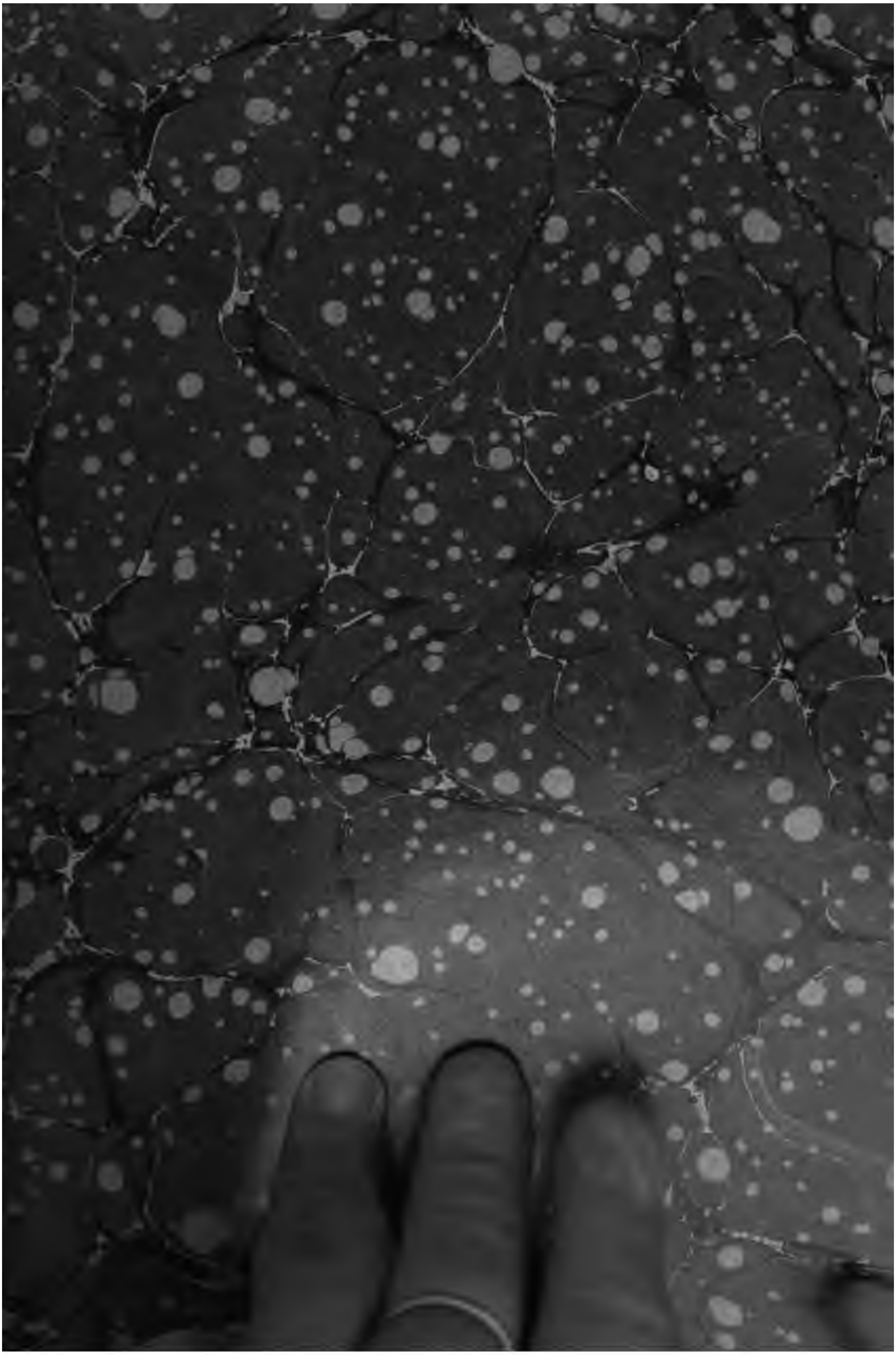


161
K

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, David Hilbert, Carl Neumann, Max Noether,
Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

54. Band. 1. u. 2. (Doppel-)Heft.

Ausgegeben am 30. Oktober.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Mitteilung.

Grunert's Archiv der Mathematik und Physik ist in den Verlag von B. G. Teubner in Leipzig übergegangen und wird von den Herren Geheimen Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin, Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr. und Oberlehrer Dr. E. Jahnke in Berlin redigiert werden.

Das Archiv berücksichtigt seit seiner Gründung besonders die Bedürfnisse der Lehrer höherer Lehranstalten; die Mittel zur Verwirklichung dieser Tendenz werden in einem demnächst auszugebenden näheren Programme von der Redaktion gekennzeichnet werden.

Für die Redaktion bestimmte Sendungen nehmen die genannten Herren sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen.

13

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

54. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Inhalt des vierundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Brodén, T., in Lund. Einiges über Functionen mit nicht-abzählbaren Unstetigkeitsstellen 518

Capelli, A., in Neapel. Sulla riduttibilità della funzione $x^n - A$ in un campo qualunque di razionalità 602

Christoffel, E. B., †, Liste der veröffentlichten Abhandlungen 344

—— —— —— Vollständige Theorie der Riemann'schen ϑ-Function. (Mit 3 Figuren im Text) 347

Dickson, Leonard, Eugene, in Chicago. The Alternating Group on Eight Letters and the Quaternary Linear Congruence Group Modulo Two . . 564

Geiser, C. F., in Zürich und **L. Maurer** in Tübingen. Elwin Bruno Christoffel 329

Hansen, Carl, in Kopenhagen. Note sur la sommation de la série de Lambert 604

Heffter, L., in Bonn, Zur Theorie der Resultanten 541

Hensel, K., in Berlin. Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der Abel'schen Integrale 437

Hirsch, Arthur, in Zürich. Ueber bilineare Relationen zwischen den Perioden der Integrale reciproker Formenschaaren 202

Kühne, H., in Dortmund. Ueber Striktionen 545

Landau, Edmund, in Berlin. Ueber die asymptotischen Werthe einiger zahlentheoretischer Functionen 570

—— —— —— Ueber die mittlere Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen von 1 bis x in drei Factoren 592

Liebmann, Heinrich, in Leipzig. Neuer Beweis des Satzes, dass eine geschlossene convexe Fläche sich nicht verbiegen lässt 505

Minkowski, Hermann, in Zürich. Ueber die Annäherung an eine reelle Gröſse durch rationale Zahlen 91

Neumann, C., in Leipzig. Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, insbesondere über die Vervollkommnungen, welche die betreffenden *Poincaré*'schen Untersuchungen in letzter Zeit durch die Arbeiten von *A. Korn* und *E. R. Neumann* erhalten haben 1

Pascal, Ernst, in Pavia. Grundlagen für eine Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter O. 400

Petrovitch, Michel, in Belgrad (Serbien). Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre. (Mit 2 Figuren im Text) 417

Seite

Ricci, M. M. G. und **Levi-Civita T.,** in Padua. Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications 125

—— —— Berichtigungen hierzu 608

Richmond, Herbert, in Cambridge. Ueber Minimalflächen. (Eine Berichtigung) 323

Schoenflies, A., in Königsberg. Ueber die überall oscillirenden differenzirbaren Functionen 553

Stäckel, Paul, in Kiel. Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie 49

—— —— —— Ueber die Gestalt der Bahncurven bei einer Klasse dynamischer Probleme 86

Timerding, H. E., in Strassburg. Ueber die sechzehn Doppelebenen einer Kummer'schen Fläche 498

Wellstein, I., in Strassburg. Zur Theorie der algebraischen Körper . . . 521

Windelband, in Strafsburg. Zum Gedächtniss Elwin Bruno Christoffel's. 341

Wolfskehl, Paul, in Darmstadt. Ueber eine Aufgabe der elementaren Arithmetik 503

Zindler, Konrad, in Innsbruck. Ueber die Anzahl der wesentlichen Veränderlichen in einer r-gliedrigen continuirlichen Gruppe von Punkttransformationen 325

Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, insbesondere über die Vervollkommnungen, welche die betreffenden *Poincaré*'schen Untersuchungen in letzter Zeit durch die Arbeiten von *A. Korn* und *E. R. Neumann* erhalten haben.

Von

C. Neumann in Leipzig.

Es sei gegeben eine geschlossene Fläche σ *ohne Ecken und Kanten*, mit dem Aussenraum $\mathfrak{A}$ und dem Innenraum $\mathfrak{J}$. Auf dieser Fläche σ seien irgend welche Functionswerthe f in bestimmter Weise vorgeschrieben, von denen nur bekannt ist, dass sie auf σ überall *stetig* mit einander zusammenhängen.

Die Aufgabe, um die es sich hier handelt, ist nun eine doppelte. Einerseits soll eine Fundamentalfunction Φ_a des Raumes $\mathfrak{A}$ construirt werden, welche auf σ identisch ist mit den daselbst vorgeschriebenen Werthen f; und andrerseits soll eine Fundamentalfunction Ψ_i des Raumes $\mathfrak{J}$ construirt werden, welche ebenfalls auf σ mit jenen Werthen f übereinstimmt. Dabei ist das Wort „Fundamentalfunction" in demselben Sinne zu nehmen, wie es früher*) von mir definirt wurde [vgl. die I. Abh. Seite 720—731].

Es ist von mir (z. B. in der I. Abh.) gezeigt worden, wie man jene gesuchten Functionen Φ_a und Ψ_i in sehr einfacher Weise zusammenzusetzen im Stande ist aus gewissen *primären Fundamentalfunctionen* $W, W', W'', W''', \cdots$, die ihrerseits auf Grund der vorgeschriebenen Werthe f leicht zu bilden sind. Doch beruht diese Methode — ich habe sie kurzweg *die Methode des arithmetischen Mittels* genannt — wesentlich auf der Voraussetzung, dass die gegebene Fläche σ *überall convex* sei.

---

*) Abgesehen von meinem Werk: Ueber das *Log. u. Newt. Potential, 1877*, sind namentlich zwei Abhandlungen über diese Dinge von mir publicirt worden, 1887 und 1888, beide in den Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Dieselben können etwa kurzweg als I. Abh. und II. Abh. bezeichnet werden. Uebrigens wird von der II. Abh. im Folgenden kein Gebrauch gemacht werden.

Später hat nun *Poincaré* (Acta mathematica, 1896, Bd. 20, S. 59—142) durch recht mühsame und tiefgehende Untersuchungen, die zum Theil an gewisse frühere Untersuchungen von *Schwarz* sich anlehnen (Schwarz Ges. Werke, Bd. I, Seite 249, 250, etc.: Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhaltes betreffendes Problem der Variations-Rechnung, October 1885), — dargethan dass diese Methode des arithmetischen Mittels wahrscheinlich auch dann noch anwendbar sein werde, wenn die gegebene Fläche σ der Anforderung, überall convex zu sein, *nicht* entspricht.

Poincaré hat wohl selber seine Untersuchungen immer nur als mehr oder weniger provisorisch angesehen, und namentlich es als einen Uebelstand empfunden, dass seine Untersuchungen sich wesentlich stützen auf das *Dirichlet'sche Princip*, dass sie also auf einem Fundamente beruhen, welches der hinreichenden Zuverlässigkeit und Festigkeit einstweilen noch entbehrt. Trotzdem wird die ausserordentliche Wichtigkeit der in den Poincaré'schen Untersuchungen enthaltenen neuen Gedanken wohl keinem Mathematiker, der in diesen Gebieten einigermassen zu Hause ist, entgangen sein. Musste doch, angesichts dieser Untersuchungen, unwillkürlich die Hoffnung entstehen, dass die in denselben enthaltenen neuen Gedanken früher oder später die Mittel liefern möchten zur Erreichung des eigentlich erstrebten Zieles, dass sie früher oder später die Bausteine liefern möchten zur Construction eines allen Anforderungen in voller Strenge entsprechenden theoretischen Gebäudes.

Und die in letzter Zeit von *A. Korn in München* (Lehrbuch der Potentialtheorie, 1899, Berlin bei Dümmler) angestellten Untersuchungen können nur dazu dienen, uns in dieser Hoffnung weiter zu bestärken. *A. Korn* hat aus den schon genannten primären Fundamentalfunctionen $W, W', W'', W''', \cdots$ zuvörderst gewisse *secundäre Fundamentalfunctionen* $\mathrm{W}, \mathrm{W}', \mathrm{W}'', \mathrm{W}''', \cdots$ zusammengesetzt, und sodann jene Poincaré'schen Gedanken auf diese neuen Functionen $\mathrm{W}, \mathrm{W}', \mathrm{W}'', \mathrm{W}''', \cdots$ zu übertragen gesucht. In solcher Weise ist es ihm gelungen, einen wesentlichen Schritt vorwärts zu machen, nämlich die Anwendbarkeit der Methode des arithmetischen Mittels auf *nicht* überall convexe Flächen zu beweisen, — *ohne* dass er dabei nöthig gehabt hätte, auf jenes bedenkliche Dirichlet'sche Princip sich irgendwie zu stützen.

Demgemäss mag es mir gestattet sein, auf diese *A. Korn*'schen Untersuchungen hier näher einzugehen. Dabei beabsichtige ich zu zeigen, wie man diesen Untersuchungen eine etwas anschaulichere Gestaltung, und namentlich auch gewissen Theilen derselben, durch Anwendung zweier von *E. R. Neumann in Halle* gefundener Sätze, ein etwas strengeres Gefüge zu verleihen im Stande ist. Ich erlaube mir, auf den Inhalt der einzelnen Paragraphe des vorliegenden Aufsatzes etwas näher einzugehen.

In den §§ 1, 2, 3 werde ich zunächst die schon früher von mir aus den vorgeschriebenen Werthen f successive sich ergebenden Fundamentalfunctionen $W^{(n)}$, d. i. $W, W', W'', W''', \cdots$, sowie auch die an diese $W^{(n)}$ unmittelbar sich anlehnenden *Korn*'schen Fundamentalfunctionen $\mathrm{W}_i^{(n)}$, $\mathrm{W}_a^{(n)}$ zur deutlichen Anschauung zu bringen suchen. Dabei werden namentlich auch die den Function $\mathrm{W}_i^{(n)}$, $\mathrm{W}_a^{(n)}$ zugehörigen *Schwarz*'schen Constanten $\left[\mathrm{W}_i^{(n)}\right]$ und $\left[\mathrm{W}_a^{(n)}\right]$ einer genaueren Betrachtung zu unterwerfen sein. Ich nenne diese Constanten die *Schwarz*'schen Constanten, weil Schwarz der Erste gewesen ist, der (in seiner schon vorhin Seite 2 genannten Abhandlung vom Jahre 1885) auf diese Constanten aufmerksam gemacht, und zugleich schöne und wichtige Methoden angegeben hat zur Untersuchung ihrer Werthe und der zwischen ihnen stattfindenden Relationen.

Sodann werde ich in den §§ 4, 5, 6 auf den eigentlichen Kernpunkt der *Poincaré*'schen Untersuchungen, nämlich auf jene wichtigen Sätze eingehen, zu denen Poincaré (in seiner schon Seite 2 genannten Abhandlung vom Jahre 1896), auf Grund einer gewissen eigenthümlichen Raumtransformation, gelangt ist. Doch werde ich von diesen Sätzen nur allein diejenigen angeben, welche *ohne* Anwendung des Dirichlet'schen Princips ableitbar sind, — und auch diese nur *historisch* angeben, ohne auf ihre Ableitung oder Begründung mich näher einzulassen.

Auf Grund dieser Poincaré'schen Sätze ergeben sich alsdann, wie schon *Korn* gezeigt hat, — und zwar auf Wegen, die im Wesentlichen schon durch die Arbeiten von *Schwarz* und *Poincaré* vorgezeichnet waren — gewisse Schranken für die Werthe der Constanten $\left[\mathrm{W}_i^{(n)}\right]$, $\left[\mathrm{W}_a^{(n)}\right]$, und ebenso auch gewisse Schranken für die Werthe jener mit $\mathrm{W}_i^{(n)}$ und $\mathrm{W}_a^{(n)}$ bezeichneten Fundamentalfunctionen.

Die beiden §§ 6A und 6B enthalten den nachträglichen und ziemlich mühsamen Beweis für eine gewisse schon im § 6 ausgesprochene Behauptung. Die Methode des Beweises ist, der Hauptsache nach, dieselbe, die schon *Poincaré* gegeben hat, und die auch von *Korn* benutzt ist.

Ich komme schliesslich zu den §§ 7, 8, 9. — Bis hierher habe ich im Wesentlichen den Untersuchungen von *A. Korn* (in seinem schon auf Seite 2 genannten Werk von 1899) mich anschliessen können. Diese Wege von Korn noch weiterhin zu verfolgen, bin ich indessen nicht im Stande gewesen. Nach mancherlei vergeblichen Bemühungen, trotzdem zum gewünschten Ziel zu gelangen, — sind mir schliesslich zwei Sätze zu Statten gekommen, die mein Neffe *E. R. Neumann* gefunden hat, und die derselbe (im November, 1899) mir mündlich mittheilte*).

*) Implicite sind diese Sätze auch enthalten in dem inzwischen von *E. R. Neumann* publicirten Aufsatz in den Göttinger Nachrichten, 1899, Seite 300.

Diese beiden E. R. Neumann'schen Sätze werde ich im § 7 angeben und beweisen. Und unter Anwendung derselben werde ich sodann im § 8 zur Lösung der eigentlich gestellten Aufgabe gelangen. — Endlich wird der § 9 einige Erörterungen enthalten über die Zuverlässigkeit, resp. Unzuverlässigkeit der in Anwendung gebrachten Schlussfolgerungen.

Bemerkung. — Was die Functionen

$$(\alpha) \qquad W,\ W',\ W'',\ W''',\ \ldots\ W^{(n)},\ \ldots$$

betrifft, so werde ich im Folgenden festhalten an meinen bisherigen Bezeichnungen. Demgemäss sollen $W_a^{(n)}$ und $W_i^{(n)}$ die Werthe der Function $W^{(n)}$ in irgend welchen Punkten a und i der Räume $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{J}$ vorstellen. Ferner soll, wenn s einen Punkt der Fläche σ bezeichnet, unter $W_s^{(n)}$ derjenige Werth verstanden werden, den die Function $W^{(n)}$ *direct* in diesem Punkte s besitzt; während andrerseits $W_{as}^{(n)}$ und $W_{is}^{(n)}$ diejenigen Werthe sein sollen, gegen welche $W_a^{(n)}$ und $W_i^{(n)}$ convergiren, sobald man die Punkte a und i jenem Punkte s ins Unendliche sich nähern lässt. Alles zusammengenommen, besitzt daher die Function $W^{(n)}$ im Punkte s *drei* Werthe: $W_s^{(n)}$, $W_{as}^{(n)}$ und $W_{is}^{(n)}$; und zwischen diesen drei Werthen findet die Relation statt:

$$(\beta) \qquad 2\,W_s^{(n)} = W_{as}^{(n)} + W_{is}^{(n)};$$

so dass also der directe Werth $W_s^{(n)}$ das arithmetische Mittel ist aus den beiden Convergenzwerthen $W_{as}^{(n)}$ und $W_{is}^{(n)}$.

Zweite Bemerkung. — Unter x soll im Folgenden ein *ganz beliebiger* Raumpunkt verstanden werden. Im Besondern aber soll ein solcher Punkt x, jenachdem er *ausserhalb* σ, *auf* σ, oder *innerhalb* σ liegt, respective mit a, s oder i bezeichnet werden.

Dritte Bemerkung. — Endlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass im Folgenden gewisse *rein geometrische Constanten* auftreten werden, nämlich Constanten, deren Werthe lediglich von der Beschaffenheit der gegebenen Fläche σ abhängen. Solche rein geometrische Constanten sollen stets durch den Index g ausgezeichnet werden. So z. B. wird die *Grösse* der Fläche σ (ihr Areal) mit σ_g bezeichnet werden. Im Ganzen werden zehn solche Constanten auftreten:

$$A_g,\ G_g,\ H_g,\ J_g,\ K_g,\ L_g \quad \text{und} \quad \lambda_g,\ \sigma_g,\ \alpha_g,\ \beta_g.$$

Neben diesen rein geometrischen Constanten aber werden noch andere Constanten auftreten, die nicht blos von der Beschaffenheit der Fläche σ, sondern überdies auch noch von den auf σ vorgeschriebenen Werthen f abhängen. Derartige Constanten werden (ohne bestimmtes Princip) theils mit $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{K}$, theils auch mit C, D, γ, etc. bezeichnet werden.

§ 1.

Die aus den vorgeschriebenen Werthen f successive sich ergebenden Fundamentalfunctionen $W^{(n)}$.

Es sei $d\sigma$ ein Element der gegebenen Fläche σ, und ν die auf $d\sigma$ errichtete *innere Normale*. Ist nun überdies irgendwo im Raume ein Punkt x gegeben, und bezeichnet r den Abstand dieses Punktes x vom Elemente $d\sigma$, so soll unter $(d\sigma)_x$ folgender Ausdruck verstanden werden:

$$(1) \qquad (d\sigma)_x = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} d\sigma = \frac{\cos\vartheta}{r^2} d\sigma;$$

so dass also ϑ den Winkel vorstellt, unter welchem die beiden von $d\sigma$ ausgehenden Linien r und ν gegen einander geneigt sind. [Vgl. die I. Abh. Seite 732, (2), wo E, T, h für r, $\frac{1}{r}$, 2 gesetzt sind].

Nach bekannten Sätzen wird alsdann das über die ganze Fläche σ ausgedehnte Integral

$$(2) \qquad \int (d\sigma)_x$$

$= 0$, oder $= 2\pi$, oder $= 4\pi$ sein, jenachdem der Punkt x *ausserhalb* σ, oder *auf* σ, oder *innerhalb* σ gelegen ist. Es unterliegt das keinem Zweifel, weil nach unserer gleich zu Anfang (Seite 1) gemachten Voraussetzung die Fläche σ weder Ecken noch Kanten besitzen soll. [Vgl. die I. Abh. Seite 736 (7) und (α)].

Es mag mir noch gestattet sein, an die Art und Weise zu erinnern, wie die Functionen W, W', W'', $\cdots$ gebildet zu denken sind. [Vgl. die I. Abh. Seite 782].

Von den vorgeschriebenen Werthen f aus bestimmt sich die Function W mittelst der Formel:

$$(3) \qquad W_x = \frac{1}{2\pi} \int f (d\sigma)_x,$$

wo $(d\sigma)_x$ die in (1) angegebene Bedeutung hat. Selbstverständlich ist in dieser Formel (3) die Integration ausgedehnt zu denken über alle Elemente der ganzen gegebenen Fläche σ.

Man bezeichne nun diejenigen Werthe, welche W *direct* in den einzelnen Punkten s der Fläche σ besitzt, mit W_s, und setze überdies:

$$(4) \qquad W_s = f',$$

so dass also W_s und f' nur verschiedene Bezeichnungen für ein und dieselben

Werthe sind. Alsdann bestimmt sich, von den Werthen f' aus, eine neue Function W' mittelst der Formel:

$$W'_x = \frac{1}{2\pi}\int f'\, d\sigma)_x; \tag{5}$$

so dass also W' zu f' in genau derselben Beziehung steht, wie W zu f.

In solcher Weise weitergehend, gelangt man, unter Wiederholung der Formeln (3), (4), (5), zu folgender Tabelle*):

$$\left\{\begin{aligned} W_x &= \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_x. \\ W'_x &= \frac{1}{2\pi}\int f'\ (d\sigma)_x, \text{ wo } f' = W_s, \\ W''_x &= \frac{1}{2\pi}\int f''\ (d\sigma)_x, \text{ wo } f'' = W'_s, \\ W'''_x &= \frac{1}{2\pi}\int f'''(d\sigma)_x, \text{ wo } f''' = W''_s, \\ &\text{ets. etc. etc.} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Nach bekannten Sätzen [I. Abh. Seite 748] bilden nun die Werthe W_i und die Werthe $W_s + f_s$ in ihrer Gesammtheit ein durchweg *stetiges* Werthsystem; so dass also z. B. in jedem Punkt s der Fläche σ die Relation stattfindet:

$$W_{is} = W_s + f_s. \tag{7}$$

Desgleichen werden auch die Werthe W_a und $W_s - f_s$, zufolge jener Sätze, in ihrer Gesammtheit ein durchweg *stetiges* Werthsystem repräsentiren; so dass für jedweden Punkt s der Fläche σ die Relation zu notiren ist:

$$W_{as} = W_s - f_s. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt durch Addition sofort:

$$W_{is} + W_{as} = 2\,W_s. \tag{9}$$

Diese Formeln (7), (8), (9) gewinnen, falls man daselbst für W_s die in (6) angegebene Bezeichnung f'_s substituirt, die Gestalt:

$$\left\{\begin{aligned} W_{is} &= f'_s + f_s, \\ W_{as} &= f'_s - f_s, \\ W_{is} + W_{as} &= 2f'_s. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Analoge Formeln ergeben sich in analoger Weise für die Functionen $W', W'', W''', \cdots$; so dass man, unter Wiederholung der Formeln (10), zu folgender Tabelle gelangt:

*) Wenn z. B. in der zweiten Zeile der Tabelle (6) bemerkt ist, das im dortigen Integral enthaltene f' solle $= W_s$ sein, so ist dabei offenbar unter s ein Punkt des unter dem Integral befindlichen Elementes $d\sigma$ zu verstehen.

$$(11)\qquad \begin{cases} W_{is} = f_s' + f_s, \\ W_{is}' = f_s'' + f_s', \\ W_{is}'' = f_s''' + f_s'', \\ W_{is}''' = f_s'''' + f_s''', \\ \text{etc.} \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{as} = f_s' - f_s, \\ W_{as}' = f_s'' - f_s', \\ W_{as}'' = f_s''' - f_s'', \\ W_{as}''' = f_s'''' - f_s''', \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Noch sei daran erinnert, dass die normalen Ableitungen der Functionen $W^{(n)}$ nach einem von mir bewiesenen Satz [Math. Annalen, Bd. 16, Seite 438] auf beiden Seiten der Fläche σ *im Allgemeinen* einander gleich sind, dass also *im Allgemeinen* die Relation stattfinden wird:

$$(12)\qquad \frac{\partial W_i^{(n)}}{\partial \nu} = \frac{\partial W_a^{(n)}}{\partial \nu}.$$

Einführung der constanten A_g und $\mathfrak{a}$. — Unter allen Werthen, welche $f^{(n)}$ auf σ besitzt, sei der absolut grösste mit $\mathfrak{M}(f^{(n)})$ bezeichnet; so dass also die Formel zu notiren ist:

$$(13)\qquad \text{abs}\,(f^{(n)}) \leqq \mathfrak{M}(f^{(n)}), \quad \text{wo } n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

Markirt man nun auf der Fläche σ irgend einen Punkt s, und bildet man das Integral

$$\frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s,$$

so wird der Werth dieses Integrals derjenige sein, der im Vorhergehenden bald mit W_s bald mit f_s' bezeichnet wurde. Also:

$$f_s' = W_s = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s.$$

Hieraus folgt sofort:

$$(14)\qquad \text{abs}\, f_s' \leqq \frac{1}{2\pi}\int [\text{abs}\, f]\,[\text{abs}\,(d\sigma)_s].$$

Nach (13) ist aber $\text{abs}\, f \leqq \mathfrak{M}(f)$. Somit folgt aus (14):

$$(15)\qquad \text{abs}\, f_s' \leqq \mathfrak{M}(f)\cdot\left[\frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma)_s\right].$$

Der grösste Werth, den der hier in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck bei beliebigen Lagen des Flächenpunktes s anzunehmen vermag, wird offenbar eine der Fläche σ eigenthümliche Constante sein. Und diese *rein geometrische Constante* mag [in Einklang mit unseren Festsetzungen Seite 4] mit A_g bezeichnet werden. Alsdann gewinnt die Formel (15) die Gestalt:

$$(16)\qquad \text{abs}\, f_s' \leqq A_g\,\mathfrak{M}(f).$$

Nun war s auf der Fläche σ beliebig gewählt. Und wir können daher diesen Punkt s auf der Fläche σ beliebig verschieben, ohne dass die Formel (16) ihre Gültigkeit verliert. Mit andern Worten: Die Formel (16) wird gültig sein für sämmtliche Werthe, welche die Function f' auf der gegebenen Fläche σ überhaupt besitzt. Demgemäss können wir dieser Formel (16) kurzweg die Gestalt geben:

$$\text{abs}\, f' \leqq A_\varrho \mathfrak{M}(f). \tag{17}$$

In ähnlicher Weise wird sich offenbar ergeben:

$$\text{abs}\, f'' \leqq A_\varrho \mathfrak{M}(f'); \tag{18}$$

und ebenso auch:

$$\text{abs}\, f''' \leqq A_\varrho \mathfrak{M}(f''). \tag{19}$$

U. s. w. U. s. w.

Setzt man nun zur Abkürzung $\mathfrak{M}(f) = \mathfrak{a}$, so ist nach (13):

$$\text{abs}\, f \leqq \mathfrak{M}(f) = \mathfrak{a}; \tag{α}$$

während gleichzeitig die Formel (17) übergeht in:

$$\text{abs}\, f' \leqq A_\varrho\, \mathfrak{a}. \tag{β}$$

Diese Formel (β) gilt für alle Werthe, welche abs f' auf der gegebenen Fläche σ überhaupt besitzt, und wird daher z. B. auch gültig sein für den grössten dieser Werthe. Auf Grund der für die Charakteristik $\mathfrak{M}$ gegebenen Definition (13), ergiebt sich nun aus der Formel (β) sofort: $\mathfrak{M}(f') \leqq A^\varrho\, \mathfrak{a}$. Dies in die Formel (18) substituirt, erhält man:

$$\text{abs}\, f'' \leqq A_\varrho A_\varrho \mathfrak{a}. \tag{γ}$$

Hieraus folgt z. B. $\mathfrak{M}(f'') \leqq A_\varrho A_\varrho \mathfrak{a}$; und dies in der Formel (19) substituirt, erhält man:

$$\text{abs}\, f''' \leqq A_\varrho A_\varrho A_\varrho \mathfrak{a}. \tag{δ}$$

U. s. w. U. s. w.

Die Zusammenstellung all' dieser Formeln (α), (β), (γ), (δ), etc. führt zu folgender Tabelle:

$$\begin{cases} \text{abs}\, f \;\; \leqq \mathfrak{a}, \\ \text{abs}\, f' \;\leqq \mathfrak{a} A_\varrho, \\ \text{abs}\, f'' \leqq \mathfrak{a} A_\varrho^2, \\ \text{abs}\, f''' \leqq \mathfrak{a} A_\varrho^3, \\ \quad \text{etc. etc.} \end{cases} \tag{20}$$

Leicht lässt sich zeigen, dass die rein geometrische Constante $A_\varrho \geqq 1$ sein muss. Es ist nämlich offenbar:

$$\text{abs}\left[\frac{1}{2\pi}\int (d\sigma)_s\right] \leqq \frac{1}{2\pi}\int \text{abs}\,(d\sigma)_s.$$

Der hier in den eckigen Klammern stehende Ausdruck ist aber, nach (2), stets $= 1$. Somit folgt:

$$(21) \qquad 1 \leqq \frac{1}{2\pi} \int \operatorname{abs}(d\sigma)_s.$$

Nun bezeichnet aber A_g [vgl. den Uebergang von (15) zu (16)] den grössten Werth des hier in (21) auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks. Somit folgt aus (21) sofort $1 \leqq A_g$, d. i.

$$(22) \qquad A_g \geqq 1. \text{ — Q. e. d.}$$

§ 2.

Die von *Arthur Korn* eingeführten Fundamentalfunctionen $\mathrm{W}^{(n)}$.

Korn hat, statt meiner Fundamentalfunctionen $W^{(n)}$, oder wenigstens neben denselben, gewisse andere Fundamentalfunctionen $\mathrm{W}^{(n)}$ eingeführt, die mit jenen durch folgende einfache Relationen verbunden sind:

$$(23) \qquad \begin{cases} \mathrm{W}_i = W_i, \\ \mathrm{W}_i' = W_i' - W_i, \\ \mathrm{W}_i'' = W_i'' - W_i', \\ \mathrm{W}_i''' = W_i''' - W_i'' \\ \quad \text{etc. etc.,} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{W}_a = W_a, \\ \mathrm{W}_a' = W_a' + W_a, \\ \mathrm{W}_a'' = W_a'' + W_a', \\ \mathrm{W}_a''' = W_a''' + W_a'', \\ \quad \text{etc. etc.;} \end{cases}$$

sodass also diese $\mathrm{W}^{(n)}$ zu beiden Seiten der Fläche σ, d. i. in den Räumen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ durch verschiedene Formeln definirt sind.

Lässt man in diesen Formeln (23) die Punkte i und a unendlich nahe an einen auf σ gelegenen Punkt s heranrücken, so erhält man mit Hinblick auf (11) sofort:

$$(24) \qquad \begin{cases} \mathrm{W}_{is} = f_s' + f_s, \\ \hline \mathrm{W}_{is}' = f_s'' - f_s, \\ \mathrm{W}_{is}'' = f_s''' - f_s', \\ \mathrm{W}_{is}''' = f_s'''' - f_s'', \\ \quad \text{etc. etc.} \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{W}_{as} = f_s' - f_s, \\ \hline \mathrm{W}_{as}' = f_s'' - f_s, \\ \mathrm{W}_{as}'' = f_s''' - f_s', \\ \mathrm{W}_{as}''' = f_s'''' - f_s'', \\ \quad \text{etc. etc.,} \end{cases}$$

und hieraus folgt sofort:

$$(25) \qquad \begin{cases} \mathrm{W}_{is} - \mathrm{W}_{as} = 2f_s, \\ \hline \mathrm{W}_{is}' - \mathrm{W}_{as}' = 0, \\ \mathrm{W}_{is}'' - \mathrm{W}_{as}'' = 0, \\ \mathrm{W}_{is}''' - \mathrm{W}_{as}''' = 0, \\ \quad \text{etc. etc.;} \end{cases}$$

sodass also W' W'', W''', $\cdots$ (*nicht aber* W) *zu beiden Seiten der Fläche* σ *einerlei Werthe haben.*

Die Formeln (24) *linker* Hand kann man in zwei Columnen bringen, indem man die geraden und die ungeraden W's von einander sondert. Man erhält in solcher Weise:

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{ll} W_{is} = f'_s + f_s & \\ W''_{is} = f'''_s - f'_s & \\ W^{(4)}_{is} = f^{(5)}_s - f'''_s & \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\ W^{(2n)}_{is} = f^{(2n+1)}_s - f^{(2n-1)}_s & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} W'_{is} = f''_s - f_s, \\ W'''_{is} = f^{(4)}_s - f''_s, \\ W^{(5)}_{is} = f^{(6)}_s - f^{(4)}_s, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ W^{(2n-1)}_{is} = f^{(2n)}_s - f^{(2n-2)}_s; \end{array}\right.$$

und hieraus durch Addition:

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l} W'_{is} + W'''_{is} + W^{(5)}_{is} + \cdots + W^{(2n-1)}_{is} = f^{(2n)}_s - f_s, \\ W_{is} + W''_{is} + W^{(4)}_{is} + \cdots + W^{(2n)}_{is} = f^{(2n+1)}_s + f_s. \end{array}\right.$$

Wir kehren zurück zu den ursprünglichen Formeln (23). Aus den beiden Formeln (23) *erster Zeile* ergiebt sich, mit Hinblick auf (12), sofort:

$$(A)\qquad \frac{\partial W_a}{\partial \nu} - \frac{\partial W_i}{\partial \nu} = 0,$$

$$(A')\qquad \frac{\partial W_a}{\partial \nu} + \frac{\partial W_i}{\partial \nu} = 2\frac{\partial W}{\partial \nu},$$

wobei es einerlei ist, ob man im Ausdruck $\frac{\partial W}{\partial \nu}$ unter W das W_a oder das W_i versteht. Ebenso erhält man aus den beiden Formeln (23) *zweiter Zeile:*

$$(B)\qquad \frac{\partial W'_a}{\partial \nu} - \frac{\partial W'_i}{\partial \nu} = 2\frac{\partial W}{\partial \nu},$$

$$(B')\qquad \frac{\partial W'_a}{\partial \nu} + \frac{\partial W'_i}{\partial \nu} = 2\frac{\partial W'}{\partial \nu}.$$

Desgleichen ergiebt sich aus den beiden Formeln (23) *dritter Zeile:*

$$(C)\qquad \frac{\partial W''_a}{\partial \nu} - \frac{\partial W''_i}{\partial \nu} = 2\frac{\partial W'}{\partial \nu},$$

$$(C')\qquad \frac{\partial W''_a}{\partial \nu} + \frac{\partial W''_i}{\partial \nu} = 2\frac{\partial W''}{\partial \nu}.$$

U. s. w. — Hieraus ergeben sich nun weiter folgende wichtige Gleichungen:

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial W_a}{\partial \nu} - \dfrac{\partial W_i}{\partial \nu} = 0, \quad \text{[nämlich aus (A)]}, \\ \dfrac{\partial W'_a}{\partial \nu} - \dfrac{\partial W'_i}{\partial \nu} = \dfrac{\partial W_a}{\partial \nu} + \dfrac{\partial W_i}{\partial \nu}, \quad \text{[aus (B) und (A')]}, \\ \dfrac{\partial W''_a}{\partial \nu} - \dfrac{\partial W''_i}{\partial \nu} = \dfrac{\partial W'_a}{\partial \nu} + \dfrac{\partial W'_i}{\partial \nu}, \quad \text{[aus (C) und (B')]}, \\ \qquad\qquad \text{etc. etc. etc.} \end{array}\right.$$

§ 3.

Ueber die den Fundamentalfunctionen $W_i^{(n)}$, $W_a^{(n)}$ zugehörigen *Schwarz*'schen Constanten $[W_i^{(n)}]$, $[W_a^{(n)}]$.

Sind für den Innenraum $\mathfrak{J}$ irgend zwei Functionen gegeben: $\varphi_i = \varphi(x, y, z)$ und $\psi_i = \psi(x, y, z)$, so wird das über alle Elemente $d\tau$ des Innenraumes $\mathfrak{J}$ ausgedehnte Integral

$$(1) \qquad [\varphi_i, \psi_i] = \int_{\mathfrak{J}} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \psi_i}{\partial z} \right) d\tau$$

zu bezeichnen sein als eine bestimmte den Functionen φ_i und ψ_i zugehörige *Constante*. Sollte zufälliger Weise $\varphi_i = \psi_i$ sein, so mag das betreffende Symbol $[\varphi_i, \varphi_i]$ kurzweg mit $[\varphi_i]$ benannt werden. Also:

$$((1)) \qquad [\varphi_i] = [\varphi_i, \varphi_i] = \int_{\mathfrak{J}} \left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \right)^2 \right) d\tau.$$

Analoges setzen wir fest mit Bezug auf den Aussenraum $\mathfrak{A}$. Sind nämlich für diesen Raum irgend zwei Functionen gegeben: $\varphi_a = \Phi(x, y, z)$ und $\psi_a = \Psi(x, y, z)$, so wird das über alle Volumelemente $d\tau$ des Aussenraumes $\mathfrak{A}$ ausgedehnte Integral

$$(2) \qquad [\varphi_a, \psi_a] = \int_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \frac{\partial \psi_a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \frac{\partial \psi_a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \frac{\partial \psi_a}{\partial z} \right) d\tau$$

eine den Functionen φ_a und ψ_a zugehörige *Constante* sein. Auch mag gesetzt werden:

$$((2)) \qquad [\varphi_a] = [\varphi_a, \varphi_a] = \int_{\mathfrak{A}} \left(\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial z} \right)^2 \right) d\tau.$$

Endlich mögen diese Constanten (1), (2) speciell für die *Korn*'schen Functionen $W_i^{(p)}, W_i^{(q)}$ und $W_a^{(p)}, W_a^{(q)}$ mit $C_i^{(p,q)}$ und $C_a^{(p,q)}$ bezeichnet werden. Es mag also gesetzt werden:

$$(3) \qquad \begin{cases} C_i^{(p,q)} = \left[W_i^{(p)}, W_i^{(q)} \right] = \int_{\mathfrak{J}} \left(\frac{\partial W_i^{(p)}}{\partial x} \frac{\partial W_i^{(q)}}{\partial x} + \cdots \right) d\tau, \\ C_a^{(p,q)} = \left[W_a^{(p)}, W_a^{(q)} \right] = \int_{\mathfrak{A}} \left(\frac{\partial W_a^{(p)}}{\partial x} \frac{\partial W_a^{(q)}}{\partial x} + \cdots \right) d\tau; \end{cases}$$

woraus mittelst bekannter Green'scher Transformationen sich ergiebt:

$$(4) \qquad \begin{cases} C_i^{(p,q)} = \left[W_i^{(p)}, W_i^{(q)} \right] = -\int W_i^{(p)} \frac{\partial W_i^{(q)}}{\partial \nu} d\sigma, \\ C_a^{(p,q)} = \left[W_a^{(p)}, W_a^{(q)} \right] = +\int W_a^{(p)} \frac{\partial W_a^{(q)}}{\partial \nu} d\sigma, \end{cases}$$

die Integrationen ausgedehnt über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Fläche σ. Offenbar sind diese Constanten in Bezug auf die Indices p, q *symmetrisch*, nämlich:

$$(5) \qquad C_i^{(p,q)} = C_i^{(q,p)} \quad \text{und} \quad C_a^{(p,q)} = C_a^{(q,p)}.$$

Uebrigens gelten für diese Constanten noch mancherlei andere Formeln.

Ableitung eines ersten Formelsystems. — Es sei zuvörderst erinnert an die bekannten Gleichungen [Seite 9 (25) und Seite 10 (28)]:

$$(A) \qquad W_{as}^{(p)}\,d\sigma = W_{is}^{(p)}\,d\sigma, \qquad (p=1,2,3,\cdots)$$

$$(B) \qquad \text{und} \quad \frac{\partial W_a}{\partial \nu} - \frac{\partial W_i}{\partial \nu} = 0.$$

Multiplicirt man nun die Formel (B) mit dem Ausdruck (A), und integrirt man sodann über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Fläche σ, so erhält man sofort:

$$\int W_{as}^{(p)} \frac{\partial W_a}{\partial \nu}\,d\sigma - \int W_{is}^{(p)} \frac{\partial W_i}{\partial \nu}\,d\sigma = 0, \qquad (p=1,2,3,\cdots),$$

also mit Hinblick auf (4): $C_a^{(p,0)} + C_i^{(p,0)} = 0$, oder was dasselbe ist:

$$(6) \qquad C_a^{(0,p)} + C_i^{(0,p)} = 0, \qquad (p=1,2,3,\cdots);$$

sodass sich also folgendes Formelsystem ergiebt:

$$(7) \qquad \begin{cases} C_a^{(0,1)} + C_i^{(0,1)} = 0, \\ C_a^{(0,2)} + C_i^{(0,2)} = 0, \\ C_a^{(0,3)} + C_i^{(0,3)} = 0, \\ \quad \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Ableitung eines zweiten Formelsystems. — Es sei erinnert an folgende Gleichungen [Seite 9 (25) und Seite 10 (28)]:

$$(\mathfrak{A}) \qquad W_{as}^{(p+1)}\,d\sigma = W_{is}^{(p+1)}\,d\sigma, \qquad (p=0,1,2,3,\cdots),$$

$$(\mathfrak{B}) \qquad \frac{\partial W_a^{(q+1)}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_i^{(q+1)}}{\partial \nu} = \frac{\partial W_a^{(q)}}{\partial \nu} + \frac{\partial W_i^{(q)}}{\partial \nu}, \qquad (q=0,1,2,3,\cdots).$$

Multiplicirt man nun diese Formel ($\mathfrak{B}$) mit dem Ausdruck ($\mathfrak{A}$) und integrirt sodann über alle Elemente $d\sigma$ der gegebenen Fläche σ, so erhält man:

$$\int W_{as}^{(p+1)} \frac{\partial W_a^{(q+1)}}{\partial \nu}\,d\sigma - \int W_{is}^{(p+1)} \frac{\partial W_i^{(q+1)}}{\partial \nu}\,d\sigma =$$
$$= \int W_{as}^{(p+1)} \frac{\partial W_a^{(q)}}{\partial \nu}\,d\sigma + \int W_{is}^{(p+1)} \frac{\partial W_i^{(q)}}{\partial \nu}\,d\sigma,$$

also mit Hinblick auf (4):

$$(\mathfrak{C})\quad C_a^{(p+1,q+1)} + C_i^{(p+1,q+1)} = C_a^{(p+1,q)} - C_i^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=0,1,2,3,\cdots).$$

Führt man nun zur augenblicklichen Abkürzung die Bezeichnungen ein:

$$(\mathfrak{D})\quad \begin{cases} \Sigma^{(\alpha,\beta)} = C_a^{(\alpha,\beta)} + C_i^{(\alpha,\beta)}, \\ \Delta^{(\alpha,\beta)} = C_a^{(\alpha,\beta)} - C_i^{(\alpha,\beta)}, \end{cases}$$

so gewinnt die Formel ($\mathfrak{C}$) die Gestalt:

$$(\mathfrak{E})\quad \Sigma^{(p+1,q+1)} = \Delta^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=0,1,2,3,\cdots).$$

Bekanntlich ist $C_a^{(\alpha,\beta)}$ [vgl. (5)] *symmetrisch* in Bezug auf α und β. Gleiches gilt von $C_i^{(\alpha,\beta)}$. Und gleiches gilt daher nach ($\mathfrak{D}$) auch von $\Sigma^{(\alpha,\beta)}$ und $\Delta^{(\alpha,\beta)}$. Beachtet man dies, und beachtet man ferner, dass die Zahlen p und q beide *denselben* Spielraum $0, 1, 2, 3, \cdots$ besitzen, so erkennt man, dass die in der Formel ($\mathfrak{E}$) auftretende Grösse $\Sigma^{(p+1,q+1)}$ in Bezug auf ihre beiden Indices symmetrisch ist. Diese Grösse bleibt nun aber nach jener Formel ($\mathfrak{E}$) ungeändert, wenn man ihren *zweiten* Index um 1 vermindert, und dabei gleichzeitig den Buchstaben Σ in Δ umwandelt. Folglich wird sie, in Anbetracht jener Symmetrie, auch dann ungeändert bleiben, wenn man ihren *ersten* Index um 1 vermindert, und dabei wiederum Σ in Δ umwandelt. Kurz, jene Symmetrie führt zu der Einsicht, dass parallel der Formel ($\mathfrak{E}$), auch folgende Formel stattfinden wird:

$$(\mathfrak{F})\quad \Sigma^{(p+1,q+1)} = \Delta^{(p,q+1)}, \qquad (p,q=0,1,2,3,\cdots).$$

Aus ($\mathfrak{E}$) und ($\mathfrak{F}$) folgt sofort:

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{F})\quad \Delta^{(p,q+1)} = \Delta^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=0,1,2,3,\cdots).$$

Um einen Schritt vorwärts zu kommen, wollen wir jetzt in ($\mathfrak{E}$) die Zahl $p+1$ durch p ersetzen. In solcher Weise erhalten wir: $\Sigma^{(p,q+1)} = \Delta^{(p,q)}$, oder was dasselbe ist:

$$(\mathfrak{G})\quad \Delta^{(p,q)} = \Sigma^{(p,q+1)}, \qquad \begin{pmatrix} p=1,2,3,\cdots \\ q=0,1,2,3,\cdots \end{pmatrix},$$

wo q nach wie vor den Spielraum $0, 1, 2, 3, \cdots$ besitzt, während p auf den etwas *engeren* Spielraum $1, 2, 3, \cdots$ beschränkt ist. In Anbetracht dieser *verschiedenen* Spielräume von p und q wird zu sagen sein, dass die linke Seite $\Delta^{(p,q)}$ der Formel ($\mathfrak{G}$) in Bezug auf ihre Indices p und q einer vollkommenen Symmetrie *ermangelt*. Doch kann man eine solche vollkommene Symmetrie leicht dadurch herstellen, dass man den Werth $q=0$ ganz fallen lässt, der Formel ($\mathfrak{G}$) also die Gestalt giebt:

$$(\mathfrak{H})\quad \Delta^{(p,q)} = \Sigma^{(p,q+1)}, \qquad (p,q=1,2,3,\cdots).$$

In dieser Formel ($\mathfrak{H}$) erfreut sich nun in der That die linke Seite $\Delta^{(p,q)}$ in Bezug auf ihre Indices p und q einer absolut vollständigen Symmetrie.

Diese Grösse $\Delta^{(p,q)}$ bleibt nun aber, nach der Formel ($\mathfrak{H}$), ungeändert, wenn man ihren *zweiten* Index um 1 vermehrt, und dabei gleichzeitig Δ in Σ umwandelt. Folglich wird sie in Anbetracht jener Symmetrie, auch dann ungeändert bleiben, wenn man ihren *ersten* Index um 1 vermehrt, falls man dabei nur wiederum Δ in Σ umwandelt. Somit ergiebt sich, dass, parallel zur Formel ($\mathfrak{H}$), auch folgende Formel stattfinden wird:

$$(\mathfrak{J})\qquad \Delta^{(p,q)} = \Sigma^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=1,2,3,\cdots).$$

Aus ($\mathfrak{H}$) und ($\mathfrak{J}$) folgt sofort:

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{J})\qquad \Sigma^{(p,q+1)} = \Sigma^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=1,2,3,\cdots).$$

Ersetzt man Σ und Δ durch ihre eigentlichen Bedeutungen ($\mathfrak{D}$), so erhalten die gefundenen Formeln ($\mathfrak{E}\mathfrak{F}$) und ($\mathfrak{H}\mathfrak{J}$) folgende Gestalt:

$$(\mathfrak{K})\qquad C_a^{(p,q+1)} - C_i^{(p,q+1)} = C_a^{(p+1,q)} - C_i^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=0,1,2,3,\cdots),$$

$$(\mathfrak{L})\qquad C_a^{(p,q+1)} + C_i^{(p,q+1)} = C_a^{(p+1,q)} + C_i^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=1,2,3,\cdots).$$

Hieraus aber folgt durch Subtraction und Addition sofort:

$$(8)\qquad C_i^{(p,q+1)} = C_i^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=1,2,3,\cdots),$$

$$(9)\qquad C_a^{(p,q+1)} = C_a^{(p+1,q)}, \qquad (p,q=1,2,3,\cdots).$$

Auf Grund der Formel (8) gelangt man, wie leicht zu übersehen ist, zu den einzelnen Zeilen folgenden Systems, abgesehen von der *ersten* Zeile:

$$(10)\qquad \begin{cases} D_i^{(2)} = C_i^{(1,1)}, \\ D_i^{(3)} = C_i^{(1,2)} = C_i^{(2,1)}, \\ D_i^{(4)} = C_i^{(1,3)} = C_i^{(2,2)} = C_i^{(3,1)}, \\ D_i^{(5)} = C_i^{(1,4)} = C_i^{(2,3)} = C_i^{(3,2)} = C_i^{(4,1)}, \\ \qquad \text{etc. etc. etc.} \end{cases}$$

Hier sind die D_i's als blosse Abbreviaturven anzusehen für die Werthe der Grössen rechter Hand. Demgemäss ist z. B. die *erste* Zeile des Systems (10) ohne nennenswerthen Inhalt; sie sagt nur aus, dass die Constante $C_i^{(1,1)}$ weiterhin mit $D_i^{(2)}$ bezeichnet werden soll.

Ferner ergeben sich aus der Formel (9) die einzelnen Zeilen folgenden Systems, abgesehen von der *ersten* Zeile:

$$(11)\qquad \begin{cases} D_a^{(2)} = C_a^{(1,1)}, \\ D_a^{(3)} = C_a^{(1,2)} = C_a^{(2,1)}, \\ D_a^{(4)} = C_a^{(1,3)} = C_a^{(2,2)} = C_a^{(3,1)}, \\ D_a^{(5)} = C_a^{(1,4)} = C_a^{(2,3)} = C_a^{(3,2)} = C_a^{(4,1)}, \\ \qquad \text{etc. etc. etc.} \end{cases}$$

wo ebenfalls die D_a's blosse Abbreviaturen sind; sodass also auch hier die *erste* Zeile eines tieferen Inhalts entbehrt.

Ableitung eines dritten Formelsystems. — Man kann die Formel ($\mathfrak{C}$) Seite 13, indem man ihre Glieder etwas anders ordnet, auch so schreiben:

$$(12)\quad \left(C_i^{(p+1,q+1)} + C_a^{(p+1,q+1)}\right) + \left(C_i^{(p+1,q)} - C_a^{(p+1,q)}\right) = 0, \quad {\scriptstyle (p,\,q=0,1,2,3,\cdots)},$$

Hieraus folgt z. B. für $p = q = 0$:

$$(\mathfrak{f}_0)\qquad \left(C_i^{(1,1)} + C_a^{(1,1)}\right) + \left(C_i^{(1,0)} - C_a^{(1,0)}\right) = 0. \;-*$$

Giebt man ferner in (12) den Zahlen p, q solche Werthe, deren *Summe* $= 1$ ist, d. i. die Werthe 0, 1 und 1, 0, so erhält man:

$$(\mathfrak{f}_1)\qquad \begin{cases} \left(C_i^{(1,2)} + C_a^{(1,2)}\right) + \left(C_i^{(1,1)} - C_a^{(1,1)}\right) = 0, \\ \left(C_i^{(2,1)} + C_a^{(2,1)}\right) + \left(C_i^{(2,0)} - C_a^{(2,0)}\right) = 0. \;-* \end{cases}$$

Giebt man endlich in (12) den Zahlen p, q solche Werthe, deren *Summe* $= 2$ ist, d. i. die Werthe 0, 2 und 1, 1 und 2, 0, so erhält man:

$$(\mathfrak{f}_2)\qquad \begin{cases} \left(C_i^{(1,3)} + C_a^{(1,3)}\right) + \left(C_i^{(1,2)} - C_a^{(1,2)}\right) = 0, \\ \left(C_i^{(2,2)} + C_a^{(2,2)}\right) + \left(C_i^{(2,1)} - C_a^{(2,1)}\right) = 0, \\ \left(C_i^{(3,1)} + C_a^{(3,1)}\right) + \left(C_i^{(3,0)} - C_a^{(3,0)}\right) = 0. \;-* \end{cases}$$

U. s. w. U. s. w. — Unter diesen Formeln ($\mathfrak{f}_0$), ($\mathfrak{f}_1$), ($\mathfrak{f}_2$), etc. sind die mit einem Stern (*) versehenen Formeln mit Gliedern behaftet, die den Index 0 enthalten, und die daher durch unsere Abbreviaturen D_i, D_a, (10), (11) nicht darstellbar sind. Die *übrigen* Formeln aber sind ohne Weiteres für jene Abbreviaturen geeignet. Und zwar ergeben sich in solcher Weise die beiden ersten Zeilen folgenden Systems:

$$(13)\qquad \begin{cases} \left(D_i^{(3)} + D_a^{(3)}\right) + \left(D_i^{(2)} - D_a^{(2)}\right) = 0, & \text{[ergiebt sich aus } (\mathfrak{f}_1)], \\ \left(D_i^{(4)} + D_a^{(4)}\right) + \left(D_i^{(3)} - D_a^{(3)}\right) = 0, & \text{[ergiebt sich aus } (\mathfrak{f}_2)], \\ \left(D_i^{(5)} + D_a^{(5)}\right) + \left(D_i^{(4)} - D_a^{(4)}\right) = 0, \\ \left(D_i^{(6)} + D_a^{(6)}\right) + \left(D_i^{(5)} - D_a^{(5)}\right) = 0, \\ \qquad\qquad \text{etc. etc. etc.,} \end{cases}$$

dessen übrige Zeilen in analoger Art zu erhalten sind. Diese Formeln (13) lassen sich zusammenfassen in der Generalformel:

$$(14)\qquad \left(D_i^{(n+1)} + D_a^{(n+1)}\right) + \left(D_i^{(n)} - D_a^{(n)}\right) = 0, \qquad {\scriptstyle (n=2,3,4,\cdots)}.$$

Bemerkung. — Aus der zuletzt angestellten Betrachtung (12), (13), (14), ergiebt sich, dass der Inhalt der Formel (12) durch die Gleichungen (13) oder (14) noch keineswegs erschöpft ist. Vielmehr sind dabei noch übergangen die in (f_0), (f_1), (f_2), etc. mit einem Stern (*) bezeichneten Gleichungen. Diese letzteren liefern folgendes Formelsystem:

$$(15) \qquad \begin{cases} \left(D_i^{(2)} + D_a^{(2)}\right) + \left(C_i^{(1,0)} - C_a^{(1,0)}\right) = 0, & [\text{vgl. } (f_0)], \\ \left(D_i^{(3)} + D_a^{(3)}\right) + \left(C_i^{(2,0)} - C_a^{(2,0)}\right) = 0, & [\text{vgl. } (f_1)], \\ \left(D_i^{(4)} + D_a^{(4)}\right) + \left(C_i^{(3,0)} - C_a^{(3,0)}\right) = 0, & [\text{vgl. } (f_2)], \\ \text{etc. etc. etc.} \end{cases}$$

Zur weiteren Abkürzung dieser Formeln (15) könnte man versucht sein, die Constante $C_i^{(1,0)}$, $C_i^{(2,0)}$, $C_i^{(3,0)}$, etc. und $C_a^{(1,0)}$, $C_a^{(2,0)}$, $C_a^{(3,0)}$, etc. respective mit $D_i^{(1)}$, $D_i^{(2)}$, $D_i^{(3)}$, etc. und $D_a^{(1)}$, $D_a^{(2)}$, $D_a^{(3)}$, etc. zu bezeichnen. Das aber würde ganz *unzulässig* sein. Denn es würde z. B. das in solcher Weise definirte $D_i^{(2)} = C_i^{(2,0)}$ völlig *verschieden* sein von der schon vorhin, in (10) definirten Constanten $D_i^{(2)} = C_i^{(1,1)}$.

Uebrigens wird von diesen Formeln (15) im Folgenden *kein* Gebrauch gemacht werden.

§ 4.

Ueber einige Sätze, die aus der *Poincaré*'schen Raumtransformation sich ergeben.

Poincaré hat in seiner schon genannten Abhandlung eine gewisse Raumtransformation angegeben, und aus dieser Transformation, zum Theil unter Anwendung des Dirichlet'schen Princips, wichtige Folgerungen gezogen. Von diesen Folgerungen wollen wir drei Sätze herausheben, *und zwar drei Sätze, bei deren Ableitung das Dirichlet'sche Princip keine Rolle spielt, die also von der Gültigkeit oder Ungültigkeit dieses Princips völlig unabhängig sind.* Im Anschluss an die bisher betrachtete geschlossene Fläche σ, können diese drei Sätze folgendermassen ausgesprochen werden:

Erster Poincaré'scher Satz. — *Es sei Φ_i irgend eine Fundamentalfunction des Innenraumes $\mathfrak{J}$ der Fläche σ. Ferner denke man sich eine Constante γ der Art bestimmt, dass das über die Fläche σ ausgedehnte Integral*

$$(1) \qquad \int (\Phi - \gamma)\, d\sigma = 0$$

ist. Alsdann wird folgende Formel gelten:

$$(2) \qquad \int (\Phi - \gamma)^2\, d\sigma \leqq G_g[\Phi_i].$$

Hier bezeichnet G_g eine der Fläche σ zugehörige Constante, während $[\Phi_i]$ oder $[\Phi_i, \Phi_i]$ die in ((1)) Seite 11 angegebene Bedeutung haben soll.

Dieser Satz wird im Folgenden nur einmal gebraucht werden, und zwar auf Seite 22. In den Integralen (1) und (2) sind offenbar unter Φ diejenigen Werthe zu verstehen, welche die betrachtete Fundamentalfunction Φ_i auf der Fläche σ besitzt.

Zweiter Poincaré'scher Satz. — *Es sei Φ_a irgend eine Fundamentalfunction des Aussenraums $\mathfrak{A}$ der Fläche σ. Ferner denke man sich eine Constante δ der Art bestimmt, dass das Integral*

$$\int (\Phi - \delta)\, d\sigma = 0 \tag{3}$$

ist. Alsdann wird die Formel stattfinden:

$$\int (\Phi - \delta)^2\, d\sigma \leqq H_g [\Phi_a], \tag{4}$$

wo H_g eine der Fläche σ eigenthümlich zugehörige Constante bezeichnet, während $[\Phi_a]$ oder $[\Phi_a, \Phi_a]$ die in ((2)) *Seite 11 angegebene Bedeutung hat.*

Dieser Satz ist hier nur der Vollständigkeit willen aufgeführt; er wird im Folgenden gar nicht gebraucht werden. In den Integralen (3) und (4) sind offenbar Φ diejenigen Werthe, welche die betrachtete Function Φ_a auf σ besitzt.

Dritter Poincaré'scher Satz. — *Es seien Φ_i und Φ_a Fundamentalfunctionen respective für $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$; und zwar mögen diese beiden Functionen auf der Fläche σ einerlei Werthe haben. Alsdann wird folgende Formel gelten:*

$$\frac{1}{2J_g} \leqq \frac{[\Phi_i]}{[\Phi_a]} \leqq J_g, \tag{5}$$

wo J_g eine der Fläche σ eigenthümliche Constante vorstellt, während $[\Phi_i]$ und $[\Phi_a]$ die in ((1)) *und* ((2)) *Seite 11 angegebenen Bedeutungen haben sollen.*

Aus der Formel (5) *folgt übrigens sofort:*

$$\frac{1}{2J_g} \leqq J_g, \quad \text{mithin:} \quad J_g \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Setzt man also $2J_g = K_g$, so ergiebt sich:

$$K_g \geqq \sqrt{2} > 1. \tag{7}$$

Gleichzeitig wird die Formel (5) *bei Einführung dieser neuen Constanten $K_g = 2J_g$ die Gestalt erhalten:*

$$\frac{1}{K_g} \leqq \frac{[\Phi_i]}{[\Phi_a]} \leqq \frac{K_g}{2} \leqq K_g. \tag{8}$$

Dabei sei noch Folgendes bemerkt: *Die positive Constante K_g ist* [*nach* (7)] $\geqq \sqrt{2}$. *Und im Anschluss an diese Constante soll nun weiterhin eine neue Constante L_g eingeführt werden mittelst der Formel:*

(9) $$L_g = \frac{K_g - 1}{K_g + 1},$$

sodass also dieses L_g ein positiver ächter Bruch sein wird.

Dieser dritte Poincaré'sche Satz wird im Folgenden nur einmal zur Anwendung kommen, und zwar auf dieser selben Seite bei (11).

Die in den Poincaré'schen Sätzen*) auftretenden Constanten G_g, H_g, J_g, K_g, L_g sind durchweg der gegebenen Fläche σ eigenthümlich zugehörig. Sie sind zu bezeichnen als *rein geometrische Constanten*. [Vgl. Seite 4].

§ 5.

Ueber gewisse Schranken für die Werthe der Constanten $[W_i^{(n)}]$ und $[W_a^{(n)}]$.

Unter Anwendung zweier *ganz beliebiger* Constanten α und β, mögen aus den Korn'schen Fundamentalfunctionen $W_i^{(n)}$, $W_i^{(n+1)}$ und $W_a^{(n)}$, $W_a^{(n+1)}$ folgende neuen Fundamentalfunctionen gebildet werden:

(10) $$\begin{cases} \Phi_i = \alpha W_i^{(n)} + \beta W_i^{(n+1)}, \\ \Phi_a = \alpha W_a^{(n)} + \beta W_a^{(n+1)}, \quad (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

Nun ist bekanntlich [vgl. (25) Seite 9] auf der Fläche σ:

(10a) $$\begin{cases} W_{is}^{(n)} = W_{as}^{(n)} \text{ und } W_{is}^{(n+1)} = W_{as}^{(n+1)}, \quad (\text{weil } n=1,2,3,\cdots), \\ \text{mithin auch } \Phi_{is} = \Phi_{as}. \end{cases}$$

Demgemäss erhält man, *auf Grund des dritten Poincaré'schen Satzes* (8), folgende Formel:

(11) $$\frac{1}{K_g} \leqq \frac{[\Phi_i]}{[\Phi_a]} \leqq K_g;$$

und hieraus ergiebt sich sofort:

(12) $$\begin{cases} K_g[\Phi_i] \geqq [\Phi_a] \quad \text{und} \\ K_g[\Phi_a] \geqq [\Phi_i]. \end{cases}$$

Um die in diesen Formeln (11), (12) enthaltenen Constanten $[\Phi_i]$ und $[\Phi_a]$ näher kennen zu lernen, notiren wir zuvörderst die aus (10) entspringende Gleichung:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \alpha \frac{\partial W_i^{(n)}}{\partial x} + \beta \frac{\partial W_i^{(n+1)}}{\partial x}.$$

*) Was die Ableitung und Begründung der *drei Poincaré'schen Sätze* anbetrifft, so mag hier nur verwiesen werden auf die schon früher (Seite 2) genannte Poincaré'sche Abhandlung.

Aus dieser und ähnlichen Gleichungen folgt sofort:

$$\int_{\mathfrak{J}}\left(\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\right)^2\right)d\tau=\int_{\mathfrak{J}}\left(\left(\alpha\frac{\partial W_i^{(n)}}{\partial x}+\beta\frac{\partial W_i^{(n+1)}}{\partial x}\right)^2+\cdots\right)d\tau,$$

also mit Hinblick auf (1), ((1)) Seite 11:

$$[\Phi_i]=[\Phi_i,\Phi_i]=\alpha^2\left[W_i^{(n)},W_i^{(n)}\right]+2\alpha\beta\left[W_i^{(n)},W_i^{(n+1)}\right]+\beta^2\left[W_i^{(n+1)},W_i^{(n+1)}\right],$$

also unter Anwendung der in (3) Seite 11 eingeführten einfacheren Bezeichnungen:

$$[\Phi_i]=\alpha^2 C_i^{(n,n)}+2\alpha\beta C_i^{(n,n+1)}+\beta^2 C_i^{(n+1,n+1)},$$

oder endlich mit Rücksicht auf (10) Seite 14:

$$(13)\qquad [\Phi_i]=\alpha^2 D_i^{(2n)}+2\alpha\beta D_i^{(2n+1)}+\beta^2 D_i^{(2n+2)},\qquad (n=1,2,3,\cdots);$$

denn es ist zu beachten, dass die Zahl n, nach der in (10) getroffenen Festsetzung, auf den Spielraum $1, 2, 3, \cdots$ beschränkt sein soll.

Analog mit (13) wird sich nun offenbar auch folgende Formel ergeben:

$$(14)\qquad [\Phi_a]=\alpha^2 D_a^{(2n)}+2\alpha\beta D_a^{(2n+1)}+\beta^2 D_a^{(2n+2)},\qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

wo die D_a die in (11) Seite 14 angegebenen Constanten sind.

Substituirt man diese Werthe (13), (14) in den Formeln (12), so erhält man sofort:

$$K_g\left[\alpha^2 D_i^{(2n)}+2\alpha\beta D_i^{(2n+1)}+\beta^2 D_i^{(2n+2)}\right]\geqq\left[\alpha^2 D_a^{(2n)}+2\alpha\beta D_a^{(2n+1)}+\beta^2 D_a^{(2n+2)}\right],$$

$$K_g\left[\alpha^2 D_a^{(2n)}+2\alpha\beta D_a^{(2n+1)}+\beta^2 D_a^{(2n+2)}\right]\geqq\left[\alpha^2 D_i^{(2n)}+2\alpha\beta D_i^{(2n+1)}+\beta^2 D_i^{(2n+2)}\right].$$

Diese beiden Formeln gelten nun für *ganz beliebige* Werthe der Constanten α, β. Man kann also in beiden Formeln, oder, falls es beliebt, auch nur in einer derselben, an Stelle von α, β *beliebige andere* Constanten setzen. Schreibt man nun die beiden Formeln von neuem hin, indem man dabei in der zweiten β durch $-\beta$ ersetzt, so erhält man:

$$\alpha^2\left[K_g D_i^{(2n)}-D_a^{(2n)}\right]+2\alpha\beta\left[K_g D_i^{(2n+1)}-D_a^{(2n+1)}\right]+\beta^2\left[K_g D_i^{(2n+2)}-D_a^{(2n+2)}\right]\geqq 0,$$

$$\alpha^2\left[K_g D_a^{(2n)}-D_i^{(2n)}\right]-2\alpha\beta\left[K_g D_a^{(2n+1)}-D_i^{(2n+1)}\right]+\beta^2\left[K_g D_a^{(2n+2)}-D_i^{(2n+2)}\right]\geqq 0,$$

und hieraus durch Addition:

$$(15)\qquad \begin{cases}\alpha^2(K_g-1)\left(D_i^{(2n)}+D_a^{(2n)}\right)+2\alpha\beta(K_g+1)\left(D_i^{(2n+1)}-D_a^{(2n+1)}\right)\\ \qquad +\beta^2(K_g-1)\left(D_i^{(2n+2)}+D_a^{(2n+2)}\right)\geqq 0,\qquad (\text{für } n=1,2,3,\cdots).\end{cases}$$

Setzt man jetzt zur augenblicklichen Abkürzung

$$(16\text{a})\qquad D_i^{(2n)}+D_a^{(2n)}=S\quad\text{und}\quad D_i^{(2n+2)}+D_a^{(2n+2)}=T,$$

und beachtet man, dass n eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ vorstellt, so wird zufolge der Gleichungen (13), (14) Seite 15:

$$(16\text{b}) \qquad D_i^{(2n+1)} - D_a^{(2n+1)} = -T;$$

sodass also die Formel (15) die Gestalt erhält:

$$(17) \qquad \alpha^2(K_g-1)S - 2\alpha\beta(K_g+1)T + \beta^2(K_g-1)T \geqq 0,$$

eine Formel, die man unter Anwendung der in (9) eingeführten Constanten L_g offenbar nur so schreiben kann:

$$(18) \qquad \alpha^2 - 2\alpha\beta\frac{T}{SL_g} + \beta^2\frac{T}{S} \geqq 0.$$

In dieser Formel (18) können nun die Constanten α, β, ebenso wie in den früheren Formeln, ganz beliebige Werthe haben. Man kann also z. B. $\alpha = L_g$ und $\beta = 1$ setzen. In solcher Weise ergiebt sich:

$$L_g^2 - 2\frac{T}{S} + \frac{T}{S} \geqq 0, \quad \text{d. i.} \quad L_g^2 \geqq \frac{T}{S},$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(19) \qquad \frac{T}{S} \leqq L_g^2,$$

oder, falls man hier für S und T ihre eigentlichen Bedeutungen (16a) substituirt:

$$(20) \qquad D_i^{(2n+2)} + D_a^{(2n+2)} \leqq L_g^2\left(D_i^{(2n)} + D_a^{(2n)}\right), \qquad (\text{wo } n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Nun ist:

$$D_i^{(2n)} = C_i^{(n,n)} = \left[\text{W}_i^{(n)}, \text{W}_i^{(n)}\right] = \left[\text{W}_i^{(n)}\right];$$

wie sich solches successive ergiebt aus (10) Seite 14, aus (3) Seite 11 und aus ((1)) Seite 11. Es ist also $D_i^{(2n)} = \left[\text{W}_i^{(n)}\right]$, und ebenso offenbar auch $D_a^{(2n)} = \left[\text{W}_a^{(n)}\right]$. Substituirt man aber diese Werthe von $D_i^{(2n)}$, $D_a^{(2n)}$ in (20), und für $D_i^{(2n+2)}$, $D_a^{(2n+2)}$ die analogen Werthe, so erhält man:

$$(21) \qquad \left[\text{W}_i^{(n+1)}\right] + \left[\text{W}_a^{(n+1)}\right] \leqq L_g^2\left(\left[\text{W}_i^{(n)}\right] + \left[\text{W}_a^{(n)}\right]\right), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Die Constanten $\left[\text{W}_i^{(n)}\right]$, $\left[\text{W}_a^{(n)}\right]$ sind ihrer Natur nach alle *positiv* [vgl. ((1)), ((2)) Seite 11]. Wir wollen uns nun eine *neue positive Constante* $\mathfrak{A}$ in solcher Weise festgesetzt denken, dass

$$(\alpha) \qquad [\text{W}_i'] + [\text{W}_a'] = L_g^2\,\mathfrak{A}$$

ist. Zu dieser Formel (α) fügen wir hinzu die aus (21) successive für $n = 1, 2, 3, \cdots$ entspringenden Formeln:

$$(\beta)\qquad \begin{cases} [W_i''] + [W_a''] \leqq L_g^2([W_i'] + [W_a']), \\ [W_i'''] + [W_a'''] \leqq L_g^2([W_i''] + [W_a'']), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[W_i^{(n)}\right] + \left[W_a^{(n)}\right] \leqq L_g^2\left(\left[W_i^{(n-1)}\right] + \left[W_a^{(n-1)}\right]\right). \end{cases}$$

Multipliciren wir nun all' diese Formeln (α), (β) mit einander, so erhalten wir sofort:

$$(22)\qquad \left[W_i^{(n)}\right] + \left[W_a^{(n)}\right] \leqq L_g^{2n}\,\mathfrak{A}, \qquad (\text{wo } n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Die Constanten $\left[W_i^{(n)}\right]$, $\left[W_a^{(n)}\right]$ sind, wie soeben bemerkt wurde, alle *positiv*. Somit folgt aus der Formel (22) *a fortiori:*

$$(23)\qquad \begin{cases} \left[W_i^{(n)}\right] \leqq L_g^{2n}\,\mathfrak{A}, \\ \left[W_a^{(n)}\right] \leqq L_g^{2n}\,\mathfrak{A}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{cases}$$

Diese beiden Formeln (23) in denen $\mathfrak{A}$ eine bestimmte positive Constante vorstellt [vgl. (α)], können füglich als *Schranken* bezeichnet werden, denen die Werthe der $\left[W_i^{(n)}\right]$ und $\left[W_a^{(n)}\right]$ unterworfen sind. Die in diesen Formeln auftretende rein geometrische Constante L_g ist bereits früher besprochen; sie ist ein *positiver ächter Bruch*, [vgl. (9) Seite 18].

§ 6.

Ueber gewisse Schranken für die Werthe der *Korn*'schen Fundamentalfunctionen $W_i^{(n)}$ und $W_a^{(n)}$.

Es sei zunächst erinnert an die Definition der Functionen $W^{(n)}$ und $f^{(n)}$ [vgl. (6) Seite 6]:

$$(1)\qquad \begin{cases} W_x^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int f^{(n)}\,(d\sigma)_x, \\ f^{(n+1)} = f_s^{(n+1)} = W_s^{(n)}, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots), \end{cases}$$

sowie auch an die betreffenden Flächenformeln [vgl. (11) Seite 7]:

$$(2)\qquad \begin{cases} W_{is}^{(n)} = f_s^{(n+1)} + f_s^{(n)}, \\ W_{as}^{(n)} = f_s^{(n+1)} - f_s^{(n)}, \quad \text{mithin:} \\ W_{is}^{(n)} + W_{as}^{(n)} = 2f_s^{(n+1)} = 2\,W_s^{(n)}, \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots). \end{cases}$$

Ferner sei erinnert an die Definition der Korn'schen Functionen $W^{(n)}$ [vgl. (23) Seite 9]:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{W}_i^{(n)} = W_i^{(n)} - W_i^{(n-1)}, \\ \mathrm{W}_a^{(n)} = W_a^{(n)} + W_a^{(n-1)}, \quad (n=1,2,3,\cdots), \end{cases}$$

und an die zugehörigen Flächenformeln [vgl. (24), (25) Seite 9]:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{W}_{is}^{(n)} = f_s^{(n+1)} - f_s^{(n-1)}, \\ \mathrm{W}_{as}^{(n)} = f_s^{(n+1)} - f_s^{(n-1)}, \quad \text{mithin:} \\ \mathrm{W}_{is}^{(n)} - \mathrm{W}_{as}^{(n)} = 0, \quad (n=1,2,3,\cdots). \end{cases}$$

Man denke sich nun eine Constante $\gamma^{(n)}$ der Art bestimmt, dass das Integral

$$(5)\qquad \int (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})\, d\sigma \text{ gerade } = 0 \text{ ist}; \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

Ob man hier unter $\mathrm{W}^{(n)}$ die $\mathrm{W}_{is}^{(n)}$ oder die $\mathrm{W}_{as}^{(n)}$ sich denkt, ist nach (4) gleichgültig.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, den Werth des Integrals:

$$(6)\qquad \Gamma^{(n)} = \int (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})^2\, d\sigma, \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

sowie auch die Werthe der Fundamentalfunction:

$$(7)\qquad \Omega_x^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})\,(d\sigma)_x, \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen. Selbstverständlich soll hier $(d\sigma)_x$ *die in* (1) *Seite* 5 *angegebene Bedeutung haben.*

Da $\gamma^{(n)}$ der Bedingung (5) unterworfen ist, so subordinirt sich das Integral $\Gamma^{(n)}$ (6) ohne Weiteres dem *ersten Poincaré'schen Satz (Seite* 16*)*; und man erhält also:

$$(8)\qquad \Gamma^{(n)} = \int \left(\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)}\right)^2 d\sigma \leqq G_g\left[\mathrm{W}_i^{(n)}\right], \quad (n=1,2,3,\cdots);$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (23) Seite 21:

$$(9)\qquad \Gamma^{(n)} = \int (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})^2\, d\sigma \leqq \mathfrak{A}\, G_g\, L_g^{2n}, \quad (n=1,2,3,\cdots).$$

Wir gehen über zu $\Omega^{(n)}$ (7), — Ebenso wie die Werthe der Fundamentalfunction $W^{(n)}$ *innerhalb* σ, *auf* σ und *ausserhalb* σ respective mit $W_i^{(n)}$, $W_s^{(n)}$ und $W_a^{(n)}$ bezeichnet sind, ebenso mögen auch die Werthe der durch die Formel (7) definirten neuen Fundamentalfunction $\Omega_x^{(n)}$ mit $\Omega_i^{(n)}$, $\Omega_s^{(n)}$ und $\Omega_a^{(n)}$ benannt werden. Auch sollen die Doppelindices *is* und *as* bei $\Omega^{(n)}$ genau in demselben Sinne angewendet werden, wie früher.

Markirt man nun auf der Fläche σ irgend einen Punkt s, so wird $\Omega^{(n)}$ daselbst den Werth haben:

(10) $$\Omega_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma^s (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})\,(d\sigma)_s, \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

Hieraus folgt nach bekanntem Satz [vgl. (2) Seite 5]:

$$\Omega_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma^s \mathrm{W}^{(n)}\,(d\sigma)_s - \gamma^{(n)},$$

oder, falls man für $\mathrm{W}^{(n)}$ seinen Werth (4) substituirt:

$$\Omega_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma^s f^{(n+1)}\,(d\sigma)_s - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma^s f^{(n-1)}\,(d\sigma)_s - \gamma^{(n)}, \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

Diese letzte Formel kann man, mit Hinblick auf (1), auch so schreiben:

$$\Omega_s^{(n)} = W_s^{(n+1)} - W_s^{(n-1)} - \gamma^{(n)}, \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

oder auch so:

$$\Omega_s^{(n)} = f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)} - \gamma^{(n)}, \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

Die rechte Seite dieser Formel ist, wie ein Blick auf (4) erkennen lässt, in einfacher Weise ausdrückbar mittelst der Functionen W. Man erhält in solcher Art:

(11) $$\Omega_s^{(n)} = \mathrm{W}_s^{(n+1)} - \gamma^{(n)}, \qquad (n=1,2,3,\cdots);$$

und dies dürfte wohl der einfachste Ausdruck sein, den man auf dem hier eingeschlagenen Wege für den Integralwerth (10) *zu erlangen im Stande ist**).

Wir werden nun aber diesen Integralwerth (10) in den beiden folgenden Paragraphen von Neuem, und zwar auf einem *ganz andern Wege* untersuchen; und dabei zu der Einsicht gelangen, dass derselbe der Formel entspricht:

(12) $$\mathrm{abs}\,\Omega_s^{(n)} \leqq \mathfrak{B}\,\lambda_g^n, \qquad (n=1,2,3,\cdots);$$

hier sind $\mathfrak{B}$ *und* λ_g *positive Constanten; und zwar ist* λ_g *ein* ***positiver ächter Bruch****, der, falls es beliebt, identificirt werden kann mit* $\sqrt{L_g}$, *wo* L_g *die in* (9) *Seite* 18 *angegebene Bedeutung besitzt.*

Diese Kenntniss (12) einstweilen antecipirend, erhalten wir nun aus (11) und (12) sofort:

(13) $$\mathrm{abs}\left(\mathrm{W}_s^{(n+1)} - \gamma^{(n)}\right) \leqq \mathfrak{B}\,\lambda_g^n, \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

Ob man hier unter $\mathrm{W}_s^{(n+1)}$ den Werth

(14) $\mathrm{W}_{is}^{(n+1)}$ oder den Werth $\mathrm{W}_{as}^{(n+1)}$

*) Man vergleiche, was weiterhin in (14) über die W's gesagt wird.

versteht, ist einerlei. Denn diese beiden Werthe sind nach (4) untereinander identisch.

Bemerkung. — Blickt man auf die einfachen Betrachtungen des gegenwärtigen Paragraphen zurück, so erkennt man sofort, dass bei Ableitung der Formel (11) keinerlei Kenntniss über den Werth der Constanten $\gamma^{(n)}$ vorausgesetzt ist, dass also diese Formel (11) gültig sein wird für *ganz beliebige* Werthe von $\gamma^{(n)}$.

Die Formel (12) hingegen, deren Ableitung in den beiden folgenden Paragraphen gegeben werden soll, ist, wie sich dort herausstellen wird, nur allein dann gültig, wenn man unter $\gamma^{(n)}$ jene *ganz bestimmte Constante* versteht, die der Formel (5), mithin z. B. auch den Formeln (8), (9) entspricht.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Von den beiden Formeln (11), (12) ist die zweite nur allein gültig für jene *ganz bestimmte* der Gleichung (5) entsprechende Constante $\gamma^{(n)}$. Und dies überträgt sich selbstverständlich auf die aus (11), (12) abgeleitete Formel (13).

Nun ist $W_i^{(n+1)}$ eine Fundamentalfunction des Raumes $\mathfrak{J}$. Die *extremen* Werthe einer solchen Function im Raume $\mathfrak{J}$ (d. i. ihr grösster und ihr kleinster Werth) sind aber bekanntlich stets an der *Grenze* dieses Raumes d. i. auf der Fläche σ anzutreffen [I. Abh. Seite 724]. Folglich werden die Werthe

$$W_i^{(n+1)},$$

ihrer Grösse nach, gelegen sein *zwischen* den auf der Fläche σ vorhandenen Werthen

$$W_s^{(n+1)}.$$

Demgemäss ergiebt sich aus (13) sofort:

$$\text{(15)} \qquad \text{abs}\left(W_i^{(n+1)} - \gamma^{(n)}\right) \leqq \mathfrak{B}\,\lambda_g^n, \qquad (n=1,2,3,\cdots).$$

Andrerseits ist $W_a^{(n+1)}$ eine Fundamentalfunction des Raumes $\mathfrak{A}$. Und die extremen Werthe einer solchen Function sind bekanntlich wiederum auf der *Grenze* des Raumes, d. i. auf der Fläche σ anzutreffen, [I. Abh. Seite 730]. Demgemäss gelangt man, auf Grund der Formel (13), auch zu folgender Formel:

$$\text{(16)} \qquad \text{abs}\left(W_a^{(n+1)} - \gamma^{(n)}\right) \leqq \mathfrak{B}\,\lambda_g^n, \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

wo unter a jeder beliebige Punkt des Raumes a zu verstehen ist, ebenso wie man in (15) unter i jeden beliebigen Punkt des Raumes $\mathfrak{J}$ sich denken kann.

Nimmt man nun insbesondere in (16) für a einen *unendlich fernen* Punkt, so wird nach bekanntem Satze [I. Abh., Seite 739, zweiter Satz]:

$W_a^{(n+1)} = 0$; so dass sich also durch Anwendung der Formel (16) auf einen solchen unendlich fernen Punkt a folgendes Resultat ergiebt:

$$\text{abs}\, \gamma^{(n)} \leqq \mathfrak{B} \lambda_g^n, \qquad (n=1,2,3,\cdots). \tag{17}$$

Solches constatirt greifen wir nun zurück zur Formel (11):

$$W_s^{(n+1)} = \gamma^{(n)} + \Omega_s^{(n)}, \qquad (n=1,2,3,\cdots); \tag{18}$$

aus der sich sofort ergiebt:

$$\text{abs}\, W_s^{(n+1)} < \text{abs}\, \gamma^{(n)} + \text{abs}\, \Omega_s^{(n)}.$$

Substituirt man hier auf der rechten Seite die Werthe (17) und (12), so erhält man:

$$\text{abs}\, W_s^{(n+1)} \leqq 2\mathfrak{B}\lambda_g^n = \left(\frac{2\mathfrak{B}}{\lambda_g}\right)\lambda_g^{n+1}, \qquad (n=1,2,3,\cdots). \tag{19}$$

An Stelle von $\mathfrak{B}$ wollen wir jetzt eine *neue positive Constante* $\mathfrak{C}$ einführen, die der Anforderung entsprechen soll:

$$\frac{2\mathfrak{B}}{\lambda_g} \leqq \mathfrak{C}; \tag{20}$$

und diese neue Constante $\mathfrak{C}$ wollen wir uns so gross denken, dass sie nicht nur der Anforderung (20), sondern gleichzeitig auch folgender Formel entspricht:

$$\text{abs}\, W_s' \leqq \mathfrak{C}\lambda_g, \tag{u}$$

welche Lage man dabei dem Punkte s auf der Fläche σ auch immer zuertheilen mag. — Fügen wir zu dieser Formel (u) noch hinzu die aus (19), (20) für $n = 1, 2, 3, \cdots$ entspringenden Formeln:

$$\begin{cases} \text{abs}\, W_s'' \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^2, \\ \text{abs}\, W_s''' \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^3, \\ \quad \text{etc. etc.,} \end{cases} \tag{v}$$

so gelangen wir, auf Grund all' dieser Formeln (u), (v), zu folgender Generalformel:

$$\text{abs}\, W_s^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \qquad (n=1,2,3,\cdots), \tag{21}$$

Aehnlich wie vorhin ist nun zu bemerken, dass die $W_i^{(n)}$, $W_a^{(n)}$, ihrer Grösse nach, alle gelegen sind *zwischen* den Werthen $W_s^{(n)}$. Somit ergeben sich aus (21) die allgemeinern Formeln:

$$\begin{cases} \text{abs}\, W_i^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \\ \text{abs}\, W_a^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \qquad (n=1,2,3,\cdots). \end{cases} \tag{22}$$

Diese Formeln (21), (22) werden zu bezeichnen sein als gewisse *Schranken* für die Werthe $W_s^{(n)}$, $W_i^{(n)}$, $W_a^{(n)}$, d. i. als Schranken für sämmtliche Werthe der hier betrachteten Fundamentalfunction $W^{(n)}$.

Beiläufige Bemerkungen. — Wir haben soeben die Fundamentalfunction (7):

$$(\alpha) \qquad \Omega_x^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int (W^{(n)} - \gamma^{(n)})\,(d\sigma)_x, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

betrachtet, und ihre Werthe $\Omega_s^{(n)}$ für alle *auf* σ gelegenen Punkte s näher bestimmt, [vgl. (11)]. Leicht lässt sich aber auch über diejenigen Werthe nähere Auskunft erlangen, welche diese Function *innerhalb* und *ausserhalb* σ besitzt. — Aus (α) ergiebt sich nämlich sofort:

$$\Omega_i^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int W^{(n)}\,(d\sigma)_i - 2\gamma^{(n)},$$

$$\Omega_a^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int W^{(n)}\,(d\sigma)_a;$$

falls man nur den Satz (2), Seite 5 in Anwendung bringt. Auf σ ist aber nach (4): $W^{(n)} = f^{(n+1)} - f^{(n-1)}$. Somit folgt:

$$\Omega_i^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int f^{(n+1)}\,(d\sigma)_i - \frac{1}{2\pi}\int f^{(n-1)}\,(d\sigma)_i - 2\gamma^{(n)},$$

$$\Omega_a^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int f^{(n+1)}\,(d\sigma)_a - \frac{1}{2\pi}\int f^{(n-1)}\,(d\sigma)_a,$$

oder mit Hinblick auf (1):

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \Omega_i^{(n)} = W_i^{(n+1)} - W_i^{(n-1)} - 2\gamma^{(n)}, \\ \Omega_a^{(n)} = W_a^{(n+1)} - W_a^{(n-1)}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \end{cases}$$

Hiermit sind die Werthe der Function $\Omega^{(n)}$ in beliebigen Punkten i und a ausgedrückt durch die dortigen Werthe der Functionen $W^{(n+1)}$ und $W^{(n-1)}$.

Leicht kann man schliesslich, von diesen Formeln (β) aus, von Neuem hingelangen zu der schon in (11) erhaltenen Formel. Es ist nämlich nach (2):

$$(\gamma) \qquad 2W_s^{(n)} = W_{is}^{(n)} + W_{as}^{(n)};$$

und ebenso ist offenbar auch:

$$(\delta) \qquad 2\Omega_s^{(n)} = \Omega_{is}^{(n)} + \Omega_{as}^{(n)}.$$

Substituirt man hier in (δ) auf der rechten Seite die aus (β) sich ergebenden Werthe, so erhält man:

$$(\varepsilon) \qquad 2\Omega_s^{(n)} = W_{is}^{(n+1)} - W_{is}^{(n-1)} + W_{as}^{(n+1)} - W_{as}^{(n-1)} - 2\gamma^{(n)}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Nach (2) ist aber:

$$\begin{cases} W_{is}^{(n+1)} = f_s^{(n+2)} + f_s^{(n+1)}, \\ W_{is}^{(n-1)} = f_s^{(n)} \quad + f_s^{(n-1)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} W_{as}^{(n+1)} = f_s^{(n+2)} - f_s^{(n+1)}, \\ W_{as}^{(n-1)} = f_s^{(n)} \quad - f_s^{(n-1)}, \end{cases}$$

mithin:

$$\begin{cases} W_{is}^{(n+1)} + W_{as}^{(n+1)} = 2f_s^{(n+2)}, \\ W_{is}^{(n-1)} + W_{as}^{(n-1)} = 2f_s^{(n)}. \end{cases}$$

Dies in (ε) substituirt, erhält man:

$$(\zeta) \qquad 2\,\Omega_s^{(n)} = 2f_s^{(n+2)} - 2f_s^{(n)} - 2\gamma^{(n)},$$

oder mit Hinblick auf (4)

$$(\eta) \qquad \Omega_s^{(n)} = \mathrm{W}_s^{(n+1)} - \gamma^{(n)}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Dies aber ist die Formel (11). — *Q. e. d.*

§ 6A.

Nachträglicher Beweis einer im vorigen Paragraph ausgesprochenen Behauptung.

Um die in (12) Seite 23 ausgesprochene Behauptung wirklich beweisen zu können, müssen wir zuvörderst gewisse der gegebenen Fläche σ eigenthümlich zugehörige Constanten σ_g, α_g, β_g einführen.

Die Constante σ_g definiren wir durch die Formel

$$\sigma_g = \int d\sigma;$$

so dass also σ_g die Grösse der gegebenen Fläche σ (ihr Areal) darstellt.

Was ferner die Constante α_g betrifft, so beschreibe man um irgend einen auf σ gelegenen Punkt s eine Kugel, und denke sich sodann den Radius dieser Kugel so weit verkleinert, bis alle innerhalb derselben befindlichen Flächenelemente $d\sigma$ um weniger als 45^0 gegen die in s an σ gelegte Tangentialebene geneigt sind.

Für jedweden auf σ liegenden Punkt s ergiebt sich in solcher Weise eine Kugel von bestimmtem Radius. Und der *kleinste* von all' diesen Radien mag mit α_g bezeichnet werden.

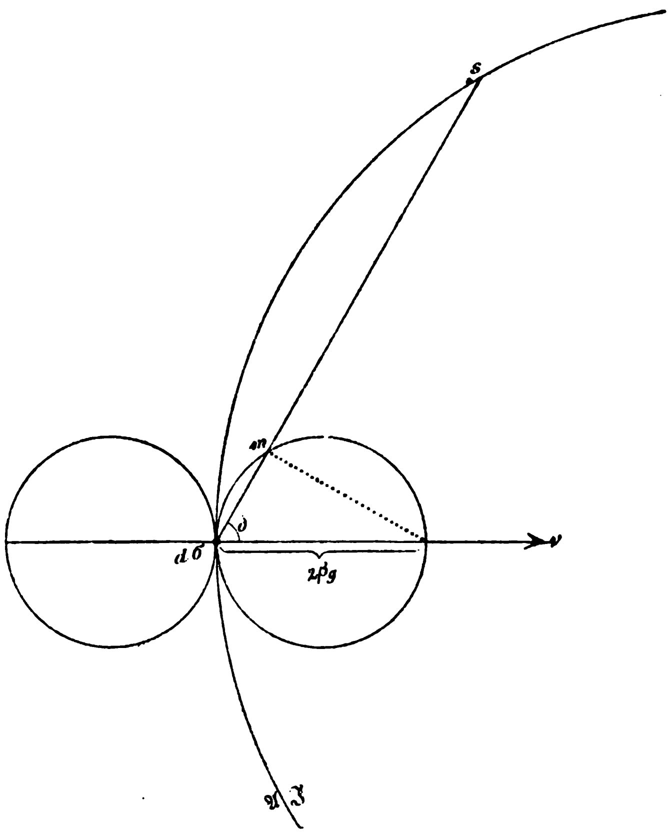
Was endlich die Constante β_g anbelangt, so denke man sich *zwei gleichgrosse Kugeln*, welche die gegebene Fläche σ in ein und demselben Punkte s berühren; der Art, dass die Berührung der einen Kugel von Innen, die der andern von Aussen stattfindet. Im Allgemeinen wird ein Theil der Fläche σ innerhalb der *einen* Kugel liegen. Möglicherweise aber kann gleichzeitig ein anderer Theil der Fläche σ innerhalb der *anderen* Kugel gelegen sein; denn die Fläche σ kann ja möglicherweise im Punkte s eine sattelförmige Gestalt haben. — Wir wollen nun aber jetzt den gemeinschaftlichen Radius der beiden Kugeln so weit verkleinern, bis weder in der einen noch in der anderen Kugel irgend ein Theil der Fläche σ anzutreffen ist; so dass alsdann sämmtliche Punkte der Fläche σ, mit alleiniger Ausnahme des Berührungspunktes s, *ausserhalb* der beiden Kugeln liegen.

Für jedweden auf σ gelegenen Punkt s erhält man in solcher Weise ein Kugelpaar von gewissem Radius. Und der *kleinste* von all' diesen Radien mag mit β_g bezeichnet werden.

Bemerkung. — *Selbstverständlich setzen wir voraus, die gegebene Fläche σ sei von solcher Beschaffenheit, dass die soeben definirten Constanten α_g und β_g bestimmte, von Null verschiedene Werthe haben.*

Ueber den Ausdruck $(d\sigma)_s$. — Dieser Ausdruck $(d\sigma)_s$ hat [vgl. (1), Seite 5) den Werth:

(1) $$(d\sigma)_s = \frac{\cos\vartheta}{r^2}\, d\sigma, \quad \text{[vgl. die folgende Figur*)].}$$



Die auf dem Element $d\sigma$ errichtete *innere Normale* sei mit ν bezeichnet, sodass also ϑ den Winkel vorstellt, unter welchem die beiden von $d\sigma$ ausgehenden Linien ν und r gegen einander geneigt sind. Und

*) In dieser Figur ist das unendlich kleine Flächenelement $d\sigma$ nur durch einen *Punkt* angedeutet. Auch wird dasselbe (eben weil es unendlich klein ist) im Folgenden hin und wieder kurzweg ein *Punkt* genannt werden.

zwar mag diese Linie r, vom Elemente $d\sigma$ aus, hinlaufen nach irgend einem Punkte s, der auf der Fläche σ eine ganz beliebige Lage hat.

Man construire nun zwei gleich grosse Kugeln, beide vom Radius β_g, welche die Fläche σ im Element $d\sigma$ von Innen und von Aussen berühren, und bezeichne diese beiden Kugeln mit $(\beta_g)_i$ und $(\beta_g)_a$. Nach der für β_g gegebenen Definition werden alsdann sämmtliche Punkte der Fläche σ, mit alleiniger Ausnahme des Elementes $d\sigma$, *ausserhalb* der beiden Kugeln liegen, und es wird daher im Allgemeinen z. B. auch der Punkt s *ausserhalb* der beiden Kugeln sich befinden, — es sei denn, dass s dem Element $d\sigma$ unendlich nahe oder gar auf diesem Element gelegen wäre. Die gerade Linie r $(d\sigma \rightarrowtail s)$ verbindet daher den gegenseitigen Berührungspunkt $d\sigma$ der beiden Kugelflächen mit einem Punkte s, der *ausserhalb* dieser beiden Flächen gelegen ist. Folglich muss diese Linie r $(d\sigma \rightarrowtail s)$, *zwischen* den beiden Punkten $d\sigma$ und s, die eine der beiden Kugelflächen schneiden, Und dieser zwischen $d\sigma$ und s gelegene Schnittpunkt (der möglicherweise dem Punkte $d\sigma$ unendlich nahe liegen kann) mag mit m bezeichnet werden. Auch mag, um die Vorstellung zu fixiren, für den Augenblick angenommen werden, dass $(\beta_g)_i$ diejenige der beiden Kugelflächen sei, welche von der Linie r $(d\sigma \rightarrowtail s)$ geschnitten wird, so dass also der Punkt m auf dieser Fläche $(\beta_g)_i$ liegt. Dieser Annahme entspricht die nebenstehende Figur.

Um die Hauptsache hervorzuheben: Es ist die Linie

$$(\alpha) \qquad (d\sigma \rightarrowtail m) \leqq r.$$

Nun ist aber die Linie $(d\sigma \rightarrowtail m)$ die eine Kathete des in der Figur gezeichneten rechtwinkligen Dreiecks, mithin:

$$(d\sigma \rightarrowtail m) \doteq 2\beta_g \cos\delta.$$

Somit geht die Formel (α) über in:

$$(\beta) \qquad 2\beta_g \cos\delta \leqq r;$$

hierfür kann man schreiben:

$$(\gamma) \qquad \frac{\cos\delta}{r} \leqq \frac{1}{2\beta_g},$$

oder falls man auf beiden Seiten durch r dividirt:

$$(2) \qquad \frac{\cos\delta}{r^2} \leqq \frac{1}{2\beta_g r}.$$

Es könnte nun aber auch der Fall eintreten, dass die Linie $r\,(d\sigma \rightarrowtail s)$ nicht die Fläche $(\beta_g)_i$, sondern die Fläche $(\beta_g)_a$ schneidet, so dass also der Punkt m alsdann auf der Fläche $(\beta_g)_a$ gelegen sein würde. In diesem Falle wiederholen sich, wie man leicht übersieht, genau dieselben Betrachtungen, nur mit dem Unterschiede, dass alsdann der Winkel δ ein stumpfer ist. Kurz man wird alsdann, an Stelle der Formel (2), folgende Formel erhalten:

$$\frac{\cos(180^0 - \vartheta)}{r^2} \leqq \frac{1}{2\beta_g r}, \quad \text{d. i.} \quad \frac{(-1)\cos\vartheta}{r^2} \leqq \frac{1}{2\beta_g r}. \tag{3}$$

Die beiden Formeln (2) und (3) lassen sich nun zusammenfassen zu folgender *Generalformel:*

$$\operatorname{abs}\frac{\cos\vartheta}{r^2} \leqq \frac{1}{2\beta_g r}. \tag{4}$$

Und mit Rücksicht hierauf erhält man aus (1) sofort:

$$\operatorname{abs}(d\sigma)_s \leqq \frac{d\sigma}{2\beta_g r}. \tag{5}$$

Endlich gehen wir jetzt über zur Betrachtung des zu untersuchenden Integrals, d. i. zur Formel (10), Seite 23:

$$2\pi\Omega_s^{(n)} = \int (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})\,(d\sigma)_s, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{6}$$

wobei unter $\gamma^{(n)}$ die durch die Formel (5), Seite 22:

$$\int (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})\,d\sigma = 0, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{7}$$

definirte Contsante zu verstehen ist. Dass unter so bewandten Umständen z. B. auch folgende Formel stattfindet:

$$\int (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)})^2\,d\sigma \leqq \mathfrak{A}\,G_g L_g^{2n}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{8}$$

ist uns bereits bekannt. [Vgl. (9), Seite 22].

Wir beschreiben nun um den auf der Fläche σ gelegenen Punkt s eine Kugel vom Radius α_g [vgl. Seite 27], und errichten in s auf der Fläche σ die *innere Normale* ν. Ueberdies beschreiben wir um diese Normale (als Axe) eine Cylinderfläche von vorläufig noch beliebigem Radius ϱ. Doch soll $\varrho \leqq \alpha_g$ sein, so dass also jene mit dem Radius α_g beschriebene Kugelfläche von dieser Cylinderfläche geschnitten wird. [Vgl. die folgende Figur.]

In solcher Weise zerfällt alsdann die gegebene Fläche σ in *drei Theile*, nämlich in einen Theil σ_1, der innerhalb der Cylinderfläche (ϱ) liegt, ferner in einen Theil σ_2, der zwischen der Cylinderfläche (ϱ) und der Kugelfläche (α_g) gelegen ist, und endlich in einen dritten Theil σ_3, der ausserhalb der Kugelfläche (α_g) sich befindet.

In beistehender Figur findet man den Punkt s, die Normale ν, die in s an die Fläche σ gelegte Tangentialebene, ferner die Kugelfläche (α_g) und die Cylinderfläche (ϱ) angedeutet. Die in der Figur durch s gehende

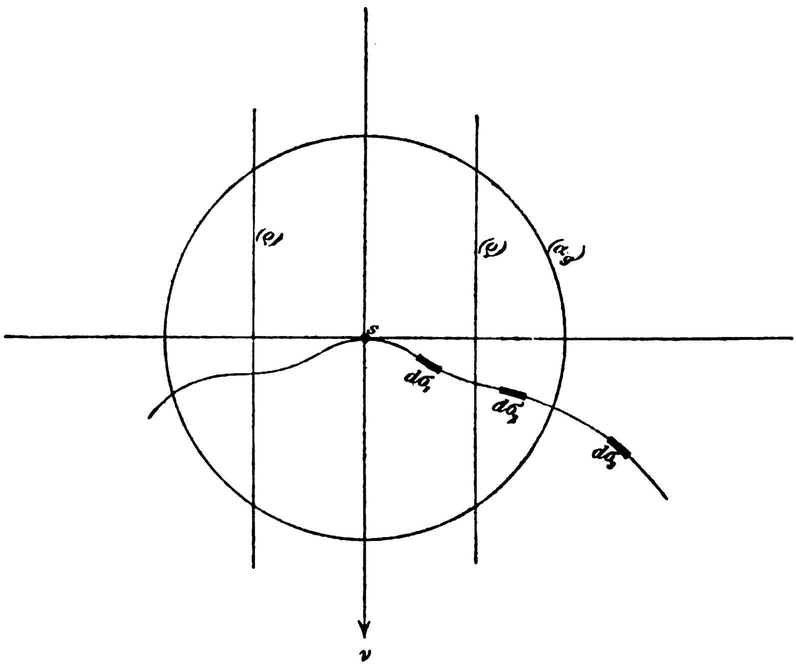
Curve soll die gegebene Fläche σ andeuten. Ferner bemerkt man in der Figur die Flächenelemente

$$d\sigma_1,\ d\sigma_2,\ d\sigma_3,$$

die respective den vorhin genannten Flächentheilen

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$$

angehören sollen. Die Entfernungen des Punktes s von den Elementen $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ mögen alle drei, ohne weitere Unterscheidung, mit r bezeichnet werden.



Substituirt man nun im Integral (6) für $(d\sigma)_s$ den Werth (1), und zerlegt man zugleich das Integral in *zwei* Integrale, entsprechend den Flächentheilen σ_1 und $\sigma_2 + \sigma_3$, so erhält man:

$$(9) \qquad 2\pi\Omega_s^{(n)} = \int\limits_{\sigma_1} (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)}) \frac{\cos\vartheta}{r^2}\, d\sigma + \int\limits_{\sigma_2+\sigma_3} (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)}) \frac{\cos\vartheta}{r^2}\, d\sigma;$$

woraus folgt:

$$(10) \qquad 2\pi \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq \operatorname{abs} \int\limits_{\sigma_1} + \operatorname{abs} \int\limits_{\sigma_2+\sigma_3} .$$

Nun ist offenbar:

$$\left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3}\right]^2 = \left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3} (\mathrm{W}^{(n)} - \gamma^{(n)}) \frac{\cos\vartheta}{r^2}\, d\sigma\right]^2,$$

also nach einem bekannten Satz von *Schwarz:*

$$\left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3}\right]^2 \leqq \left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3}(\mathrm{W}^{(n)}-\gamma^{(n)})^2\, d\sigma\right]\left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3}\frac{\cos^2\vartheta}{r^4}\, d\sigma\right],$$

also nach (8) *a fortiori**):

$$\left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3}\right]^2 \leqq \mathfrak{A}\, G_g L_g^{2n}\left[\int\limits_{\sigma_2}\frac{\cos^2\vartheta}{r^4}\, d\sigma + \int\limits_{\sigma_3}\frac{\cos^2\vartheta}{r^4}\, d\sigma\right].$$

Was die rechte Seite dieser letzten Formel betrifft, so wird nach (4) auf der ganzen Fläche σ, mithin z. B. auch auf σ_2:

$$\frac{\cos^2\vartheta}{r^4} \leqq \frac{1}{4\beta_g^2 r^2}$$

sein. Insbesondere aber wird auf σ_3:

$$\frac{\cos^2\vartheta}{r^4} \leqq \frac{1}{r^4} \leqq \frac{1}{\alpha_g^4}$$

sein, denn alle Elemente $d\sigma_3$ liegen [vgl. die letzte Figur] *ausserhalb* der Kugel (α_g), so dass also all' diese Elemente $d\sigma_3$ vom Punkte s Abstände besitzen, die $\geqq \alpha_g$ sind.

Somit ergiebt sich:

$$\left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3}\right]^2 \leqq \mathfrak{A}\, G_g L_g^{2n}\left[\int\limits_{\sigma_2}\frac{d\sigma}{4\beta_g^2 r^2} + \int\limits_{\sigma_3}\frac{d\sigma}{\alpha_g^4}\right];$$

hieraus folgt *a fortiori:*

$$\left[\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3}\right]^2 \leqq \mathfrak{A}\, G_g L_g^{2n}\left[\frac{1}{4\beta_g^2}\int\limits_{\sigma_2}\frac{d\sigma}{r^2} + \frac{\sigma_g}{\alpha_g^4}\right],$$

wo σ_g die auf Seite 27 angegebene Bedeutung hat. Somit ergiebt sich schliesslich:

$$\text{(11)}\qquad \operatorname{abs}\int\limits_{\sigma_2+\sigma_3} \leqq \sqrt{\mathfrak{A}\, G_g L_g^{2n}\left[\frac{1}{4\beta_g^2}\int\limits_{\sigma_2}\frac{d\sigma}{r^2} + \frac{\sigma_g}{\alpha_g^4}\right]}\,.$$

Dies ist *ein* Theil der rechten Seite der Formel (10). Was nun ferner den *anderen* Theil jener rechten Seite betrifft, so lautet derselbe:

$$\operatorname{abs}\int\limits_{\sigma_1} = \operatorname{abs}\int\limits_{\sigma_1}(\mathrm{W}^{(n)}-\gamma^{(n)})\,\frac{\cos\vartheta}{r^2}\, d\sigma;$$

---

*) Nach (8) ist das dortige über die *ganze* gegebene Fläche σ ausgedehnte Integral $\leqq \mathfrak{A}\, G_g L_g^{2n}$. Solches gilt daher *a fortiori* von dem hier vorliegenden Integral, welches nicht über die *ganze* Fläche σ, sondern nur über den mit $\sigma_2 + \sigma_3$ bezeichneten *Theil* derselben sich ausdehnt.

und hieraus folgt sofort:

$$\operatorname{abs}\int_{\sigma_1} \leqq \int_{\sigma_1} \left(\operatorname{abs} W^{(n)} + \operatorname{abs} \gamma^{(n)}\right) \cdot \operatorname{abs}\left(\frac{\cos\delta}{r^2}\right) \cdot d\sigma;$$

und hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf (4):

$$(12) \qquad \operatorname{abs}\int_{\sigma_1} \leqq \int_{\sigma_1} \left(\operatorname{abs} W^{(n)} + \operatorname{abs}\gamma^{(n)}\right) \frac{d\sigma}{2\beta_g r}.$$

Wir haben im gegenwärtigen Paragraph unter n überall eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ zu verstehen, wie aus (6), (7), (8) ersichtlich ist. Auf der Fläche σ ist daher [nach (4), Seite 22] allenthalben:

$$W_s^{(n)} = W_{is}^{(n)} = W_{as}^{(n)} = f_s^{(n+1)} - f_s^{(n-1)},$$

mithin z. B.:

$$\operatorname{abs} W_s^{(n)} \leqq \operatorname{abs} f_s^{(n+1)} + \operatorname{abs} f_s^{(n-1)},$$

also nach (20), Seite 8:

$$\operatorname{abs} W_s^{(n)} \leqq \mathfrak{a} A_g^{n+1} + \mathfrak{a} A_g^{n-1},$$

oder ein wenig anders geschrieben:

$$(\alpha) \qquad \operatorname{abs} W_s^{(n)} \leqq \mathfrak{c} A_g^n, \quad \text{wo} \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{a}\left(A_g + A_g^{-1}\right) \quad \text{ist};$$

so dass also $\mathfrak{c}$ (*ebenso wie* $\mathfrak{a}$) *eine bestimmte positive Constante vorstellt.*

Es repräsentirt $\gamma^{(n)}$, wie unmittelbar aus (7) ersichtlich ist, einen gewissen Mittelwerth unter denjenigen Werthen $W_s^{(n)}$, welche die Function $W^{(n)}$ auf der gegebenen Fläche σ besitzt. Und die Formel (α) wird daher, weil sie für all' jene Werthe $W_s^{(n)}$ gilt, auch gültig sein für diesen mittleren Werth. Demgemäss ergiebt sich aus (α):

$$(\beta) \qquad \operatorname{abs} \gamma^{(n)} \leqq \mathfrak{c} A_g^n.$$

Aus (α), (β) folgt nun weiter:

$$(\gamma) \qquad \operatorname{abs} W_s^{(n)} + \operatorname{abs} \gamma^{(n)} \leqq 2\mathfrak{c} A_g^n.$$

Dies in (12) substituirt, erhält man sofort:

$$(13) \qquad \operatorname{abs}\int_{\sigma_1} \leqq \frac{\mathfrak{c} A_g^n}{\beta_g} \int_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r}.$$

Unsere eigentliche Hauptformel (10) *gewinnt nun durch Substitution der Werthe* (11) *und* (13) *folgende Gestalt:*

$$(14) \qquad 2\pi \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq \frac{\mathfrak{c} A_g^n}{\beta_g} \int_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r} + \sqrt{\mathfrak{A}\, G_g\, L_g^{2n} \left[\frac{1}{4\beta_g^2} \int_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r^2} + \frac{\sigma_g}{\alpha_g^4}\right]}.$$

Um die hier noch vorhandenen, höchst einfachen Integrale (über σ_1 und σ_2) näher zu bestimmen, zerlegen wir [vgl. die Figur Seite 31] die im

Punkte s an die Fläche σ gelegte Tangentialebene, durch von s ausgehende Radien und um s beschriebene concentrische Kreise, in lauter unendlich kleine Rechtecke $u\,du\,dv$, wo u der Centralabstand und v das Azimuth sein soll. Zugleich denken wir uns die einzelnen Elemente $d\sigma$ der Fläche σ der Art eingerichtet, dass ihre senkrechten Projectionen auf jene Tangentialebene identisch sind mit diesen unendlich kleinen Rechtecken $u\,du\,dv$. Alsdann ist offenbar:

$$d\sigma = \frac{u\,du\,dv}{\cos\vartheta}, \tag{15}$$

wo ϑ den Neigungswinkel des Elementes $d\sigma$ gegen jene Tangentialebene vorstellt.

Nun liegen die Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ (vgl. die Figur Seite 31) sämmtlich innerhalb der um s beschriebenen Kugelfläche (α_g). Nach der für die Länge α_g gegebenen Definition (Seite 27) wird daher jener Winkel ϑ für die Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ durchweg $\leqq 45^0$ sein, woraus folgt: $\cos\vartheta \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, mithin $\frac{1}{\cos\vartheta} \leqq \sqrt{2}$. Demgemäss wird die Formel (15) für all' diese Elemente $d\sigma_1$ und $d\sigma_2$ die Gestalt erhalten:

$$d\sigma \leqq (\sqrt{2})\, u\,du\,dv. \tag{16}$$

Und mit Rücksicht hierauf ergeben sich für jene in (14) enthaltenen Integrale die Formeln:

$$\int_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r} \leqq \sqrt{2} \int\int \frac{u\,du\,dv}{r}, \tag{17}$$

$$\int_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r^2} \leqq \sqrt{2} \int\int \frac{u\,du\,dv}{r^2}. \tag{18}$$

Aus der geometrischen Anschauung ergiebt sich sofort, dass hier in (17) und (18) das $r \geqq u$ ist (denn u repräsentirt die senkrechte Projection von r auf die Tangentialebene). Somit folgt aus (17), (18) *a fortiori:*

$$\int_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r} \leqq \sqrt{2} \int\int \frac{u\,du\,dv}{u}, \tag{19}$$

$$\int_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r^2} \leqq \sqrt{2} \int\int \frac{u\,du\,dv}{u^2}. \tag{20}$$

Hier sind die Integrale auszudehnen über gewisse in der Tangentialebene liegende Flächen π_1 und π_2. Und zwar repräsentirt π_1 die senkrechte Projection von σ_1 auf die Tangentialebene, so dass also π_1 eine mit dem Radius ϱ um den Punkt s beschriebene *Kreisfläche* ist, [vgl. die Figur Seite 31]. Andererseits repräsentirt π_2 die senkrechte Projection von σ_2 auf die Tangentialebene, so dass also dieses π_2 eine in der Tangentialebene liegende *ringförmige Fläche* vorstellt. Der *innere* Rand dieser ringförmigen Fläche π_2 ist offenbar eine um s beschriebene Kreislinie vom Radius ϱ. Bezeichnet man nun andererseits den Radiusvector ihrer *äusseren* Randcurve mit ϱ', so kann man die Formeln (19), (20) folgendermassen schreiben:

$$\int_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r} \leqq \sqrt{2} \int_0^{\varrho} \int_0^{2\pi} du\, dv = (2\pi\sqrt{2})\,\varrho, \tag{21}$$

$$\int_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r^2} \leqq \sqrt{2} \int_{\varrho}^{\varrho'} \int_0^{2\pi} \frac{du\, dv}{u} = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\log \frac{\varrho'}{\varrho}\right) dv. \tag{22}$$

Nun ist aber offenbar [vgl. die Figur Seite 31] der Radiusvector ϱ' durchweg $\leqq \alpha_g$. Somit folgt aus (21), (22):

$$\int_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{r} \leqq (2\pi\sqrt{2})\,\varrho, \tag{23}$$

$$\int_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r^2} \leqq (2\pi\sqrt{2}) \left(\log \frac{\alpha_g}{\varrho}\right). \tag{24}$$

Unsere Hauptformel (14) *gewinnt nun durch Substitution der Werthe* (23), (24), *und indem man zugleich durch* 2π *auf beiden Seiten dividirt, folgendes Aussehen:*

$$\text{abs}\, \Omega_s^{(n)} \leqq \frac{c A_g^n \varrho \sqrt{2}}{\beta_g} + \sqrt{\frac{\mathfrak{A}\, G_g L_g^{2n}}{2\pi} \left[\frac{\sqrt{2}}{4\beta_g^2} \log \frac{\alpha_g}{\varrho} + \frac{\sigma_g}{2\pi\alpha_g^4}\right]}. \tag{25}$$

Bis zu diesem Augenblick ist der Cylinderradius ϱ noch immer *disponibel* geblieben; nur sollte er $\leqq \alpha_g$ sein, [vgl. Seite 30]. Dieser Anforderung entsprechend können wir setzen:

$$\frac{\varrho}{\alpha_g} = \left(\frac{L_g}{A_g}\right)^n; \tag{26}$$

denn L_g ist ein positiver ächter Bruch, und A_g eine positive Constante, die $\geqq 1$ ist. [Vgl. Seite 18, (9) und Seite 9, (22)]. Nimmt man aber für ϱ diesen Werth (26), so wird zugleich:

$$A_g^n \varrho = L_g^n \alpha_g \quad \text{und} \quad \log \frac{\alpha_g}{\varrho} = n\left(\log \frac{A_g}{L_g}\right), \tag{27}$$

wodurch unsere Hauptformel (25) übergeht in:

$$\text{abs}\, \Omega_s^{(n)} \leqq L_g^n \left\{\frac{c\alpha_g\sqrt{2}}{\beta_g} + \sqrt{\frac{\mathfrak{A}\, G_g}{2\pi}\left[n\left(\frac{\sqrt{2}}{4\beta_g^2} \log \frac{A_g}{L_g}\right) + \left(\frac{\sigma_g}{2\pi\alpha_g^4}\right)\right]}\right\}. \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{28}$$

Dass hier in der Formel (28) unter n eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots$ zu verstehen ist, bedarf keiner weiteren Erläuterung. Denn in *sämmtlichen* Formeln des gegenwärtigen Paragraphs repräsentirt n eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots$; wie solches z. B. bei (6), (7), (8) besonders notirt worden ist. Ferner repräsentiren hier in (28) die Buchstaben $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}$, A_g, G_g, L_g, σ_g, α_g, β_g lauter *positive Constanten*, d. i. positive Grössen, die weder von der Zahl n noch auch von der Lage des Flächenpunktes s abhängen. Insbesondere sind A_g, G_g, L_g, σ_g, α_g, β_g *rein geometrische Constanten*. Auch ist L_g ein *positiver ächter Bruch*.

Zur Abkürzung können wir die Formel (28) folgendermassen schreiben:

$$\text{(29)} \qquad \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq L_g^n \left(A + \sqrt{nC + B}\right), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

wo alsdann A, B, C ebenfalls *positive Constanten* sind; und zwar wird alsdann der Quotient $\frac{C}{B}$ eine *rein geometrische Constante* sein, und folgenden Werth besitzen:

$$\text{(30)} \qquad \frac{C}{B} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\alpha_g^4}{\sigma_g \beta_g^2}\right)\left(\log \frac{A_g}{L_g}\right).$$

Der Ausdruck (29) würde offenbar, falls nur $C = 0$ wäre, die von uns gewünschte Gestalt, nämlich die im vorigen Paragraph [in (12), Seite 23] angegebene Gestalt besitzen. Trotzdem nun aber C in Wirklichkeit *nicht* $= 0$ ist, wird es doch möglich sein, dem Ausdruck (29) jene eigentlich gewünschte Gestalt zu verleihen. Dies soll im folgenden Paragraph gezeigt werden.

§ 6B.

Fortsetzung des im vorigen Paragraph begonnenen Beweises.

Es ist im Auge zu behalten, dass A, B, C und L_g *positive* Constanten sind, und dass überdiess L_g ein *ächter Bruch* ist. Es bezeichne nun γ eine *feste* aber beliebig gewählte *positive ganze Zahl;* es sei z. B. $\gamma = 7$. Alsdann ist offenbar:

$$\begin{aligned} B &\leqq B + 7C, \\ B + C &\leqq B + 7C, \\ B + 2C &\leqq B + 7C, \\ &\cdots\cdots \\ B + 7C &\leqq B + 7C. \end{aligned}$$

Diese Ungleichungen werden nur noch weiter verstärkt werden, wenn man ihre rechten Seiten mit irgend welchen Factoren multiplicirt, die $\geqq 1$ sind. So ergiebt sich:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} B \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^0 (B+7C), \\ B+C \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^1 (B+7C), \\ B+2C \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^2 (B+7C), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ B+7C \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^7 (B+7C). \end{cases}$$

Multiplicirt man die letzte dieser Formeln mit $\frac{B+8C}{B+7C}$, so erhält man sofort:

$$(\beta)\qquad B+8C \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^8 (B+7C).$$

Nun gilt offenbar die Formel*): $\frac{B+9C}{B+8C} \leqq \frac{B+8C}{B+7C}$. Multiplicirt man aber diese Formel mit der Formel (β), so erhält man:

$$(\gamma)\qquad B+9C \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^9 (B+7C).$$

Nun gilt weiter die Formel**): $\frac{B+10C}{B+9C} \leqq \frac{B+8C}{B+7C}$. Multiplicirt man aber diese Formel mit der Formel (γ), so erhält man:

$$(\delta)\qquad B+10C \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^{10} (B+7C).$$

U. s. w. U. s. w.

All' diese Formeln (α), (β), (γ), (δ), etc. sind von einerlei Typus, nämlich zusammenfassbar in die Generalformel:

$$(1)\qquad B+nC \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^n (B+7C), \qquad (\text{wo } n=0,1,2,3,\cdots).$$

Von gleicher Allgemeinheit ist überdiess auch folgende Formel:

$$(2)\qquad A^2 \leqq \left(\frac{B+8C}{B+7C}\right)^n A^2, \qquad (n=0,1,2,3,\cdots),$$

die keines weiteren Beweises bedarf.

Zieht man aus der Formel (1) die Quadratwurzel, und ebenso auch aus (2), so erhält man:

$$(3)\qquad \sqrt{B+nC} \leqq \left(\sqrt{\frac{B+8C}{B+7C}}\right)^n \sqrt{B+7C},$$

$$(4)\qquad A \leqq \left(\sqrt{\frac{B+8C}{B+7C}}\right)^n A;$$

---

*) Dass diese Formel richtig ist erkennt man sofort, falls man nur die Nenner durch Multiplication fortschafft.

**) Von der Richtigkeit dieser Formel überzeugt man sich wieder durch Fortschaffung der Nenner.

und hieraus durch Addition:

$$(5) \quad A + \sqrt{B + nC} \leqq \left(\sqrt{\frac{B+8C}{B+7C}}\right)^n (A + \sqrt{B+7C}), \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots).$$

Nun hatten wir im vorigen Paragraph [in (29), Seite 36] gefunden:

$$(6) \qquad \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq L_g^n (A + \sqrt{B + nC}), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Hieraus aber folgt durch Substitution des Werthes (5):

$$(7) \qquad \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq \left(L_g \sqrt{\frac{B+8C}{B+7C}}\right)^n (A + \sqrt{B+7C}), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Nur beispielsweise haben wir jene *feste* positive ganze Zahl γ, von der zu Anfang dieses Paragraphs die Rede war, $= 7$ gesetzt. Geben wir derselben irgend welchen anderen Werth γ, so werden wir offenbar zu folgender mit (7) ganz analogen Formel gelangen:

$$(8) \quad \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq \left(L_g \sqrt{\frac{B+(\gamma+1)C}{B+\gamma C}}\right)^n (A + \sqrt{B+\gamma C}), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Es fragt sich nun, ob wir nicht vielleicht durch passende Wahl von γ dieser Formel (8) *die eigentlich gewünschte Gestalt* (12), *Seite* 23 *zu verleihen im Stande sind.*

L_g ist ein positiver ächter Bruch und A, B, C sind positive Constanten. Wir wollen nun jene feste positive ganze Zahl γ so gross uns denken, dass der Anforderung entsprochen wird:

$$\frac{B + \gamma C}{B + (\gamma+1) C} \geqq L_g;$$

was offenbar immer möglich ist, weil man die linke Seite dieser Formel durch Vergrösserung von γ beliebig nahe an 1 herandrücken kann. Alsdann ist

$$\frac{B + (\gamma+1) C}{B + \gamma C} \leqq \frac{1}{L_g},$$

oder, falls man auf beiden Seiten die Quadratwurzel zieht und hierauf noch mit L_g multiplicirt:

$$L_g \sqrt{\frac{B + (\gamma+1) C}{B + \gamma C}} \leqq \sqrt{L_g}.$$

Hierdurch aber geht alsdann die Formel (8) über in

$$(9) \qquad \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq (\sqrt{L_g})^n (A + \sqrt{B+\gamma C}), \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots),$$

wofür man auch schreiben kann:

$$(10) \qquad \operatorname{abs} \Omega_s^{(n)} \leqq \lambda_g^n \mathfrak{B}, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots).$$

Hier ist $\lambda_g = \sqrt{L_g}$, also (ebenso wie L_g) ein positiver ächter Bruch und zugleich eine rein geometrische Constante, während andererseits

$$\mathfrak{B} = A + \sqrt{B + \gamma C}$$

eine positive Constante vorstellt.

Durch diese Formel (9) *oder* (10) *ist nun endlich der Beweis erbracht für die Richtigkeit jener früher, in* (12), *Seite* 23, *aufgestellten Behauptung.* Kaum bedarf es der Bemerkung, dass beim Uebergang von (8) zu (10) eine gewisse Willkür stattgefunden hat. Man hätte z. B. durch passende Wahl von γ auch dafür sorgen können, dass λ_g nicht $= \sqrt{L_g}$, sondern $= (\sqrt[3]{L_g})^2$ geworden wäre. U. s. w. *Ganz allgemein wird man jene positive ganze Zahl* γ *der Art einrichten können, dass* $\lambda_g = L_g^p$ *wird, wo* p *einen beliebig gegebenen ächten Bruch vorstellt.* Dieser ächte Bruch p kann beliebig nahe an 1 liegen; folglich kann λ_g selber beliebig nahe an L_g gelegen sein.

§ 7.

Vorbereitung zu weiteren Untersuchungen, insbesondere über zwei von *Ernst Richard Neumann* aufgestellte Sätze.

Die auf der Fläche σ vorgeschriebenen Werthe f sind, abgesehen von ihrer Stetigkeit, als ganz willkürlich gegeben anzusehen. Markirt man nun auf σ irgend einen Punkt s, so wird der direct für diesen Punkt s sich ergebende Integralwerth

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s$$

derjenige sein, den wir im Vorhergehenden [vgl. Seite 5 etc.] bald mit W_s, bald mit f_s' bezeichnet haben. Es ist also

$$\text{(B)} \qquad f_s' = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s.$$

Auch ist bekannt [vgl. Seite 6, (10)], dass für jeden solchen Punkt s folgende Relationen stattfinden:

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} W_{is} = f_s' + f_s, \\ W_{as} = f_s' - f_s. \end{cases}$$

Wir wollen nun annehmen, jene auf σ vorgeschriebenen Werthe f seien zufälliger Weise von solcher Art, dass die aus ihnen, vermöge der Formel (B), entspringenden f' mit den f selber völlig *identisch* sind, so dass also für jedweden Punkt s der Fläche σ die Gleichung stattfindet:

$$\text{(D)} \qquad f_s = f_s', \quad \text{d. i.} \quad f_s = \frac{1}{2\pi}\int f(d\sigma)_s.$$

Alsdann ergiebt sich aus (C), dass für jeden solchen Punkt s der Werth $W_{as} = 0$ ist. Hieraus aber folgt nach einem bekannten Satz [I. Abh., Seite 730], dass die Function W_a im Raume $\mathfrak{A}$ allenthalben $= 0$ ist. Und hieraus folgt weiter mittelst eines früher von mir aufgestellten Satzes [Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipzig bei Teubner, 1877, daselbst Seite 157, (5)], dass die der Function W zu Grunde liegende Function f eine Constante ist, dass nämlich jene auf der Fläche σ ausgebreiteten f daselbst überall ein und denselben constanten Werth haben. Somit ergiebt sich folgender Satz:

Erster E. R. Neumann'scher Satz. — *Es seien auf der Fläche σ irgend welche Werthe f ausgebreitet, die daselbst überall stetig sind; und es sei in irgend welcher Art nachgewiesen, dass für sämmtliche Punkte s der Fläche σ die Gleichung* (D) *stattfindet:*

$$\text{(E)} \qquad f_s = \frac{1}{2\pi}\int f\,(d\sigma)_s.$$

Alsdann folgt hieraus, dass jene auf σ ausgebreiteten f daselbst überall ein und denselben constanten Werth haben.

Wir gehen jetzt über zu einer etwas anderen Betrachtung, indem wir annehmen, jene auf σ ausgebreiteten Werthe f seien von solcher Beschaffenheit, dass die aus ihnen, vermöge der Formel (B), entspringenden f' mit jenen Werthen f *entgegengesetzt gleich* sind, so dass also für jedweden Punkt s der Fläche σ die Gleichung stattfindet:

$$\text{(F)} \qquad f_s = -f_s', \quad \text{d. i.} \quad f_s = -\frac{1}{2\pi}\int f\,(d\sigma)_s.$$

Alsdann ergiebt sich aus (C) sofort, dass für jeden solchen Punkt s der Werth $W_{is} = 0$ ist. Hieraus folgt nach bekanntem Satz [I. Abh., Seite 724], dass die Function W_i im Raume $\mathfrak{J}$ allenthalben $= 0$ ist. Und hieraus folgt weiter [Unters. üb. d. log. und Newt. Potential, Seite 158, (9)], dass die Function f aus σ überall $= 0$ ist. Demgemäss gelangt man zu folgendem Satz:

Zweiter E. R. Neumann'scher Satz. — *Auf der Fläche σ seien irgend welche Werthe f ausgebreitet, die daselbst stetig sind; und es sei bekannt, dass für sämmtliche Punkte s der Fläche σ die Gleichung* (F) *stattfindet:*

$$\text{(G)} \qquad f_s = -\frac{1}{2\pi}\int f\,(d\sigma)_s.$$

Alsdann folgt hieraus, dass jene auf σ ausgebreiteten Werthe f daselbst überall $= 0$ sind.

§ 8.

Die eigentlich gesuchten Fundamentalfunctionen, welche auf der gegebenen Fläche die daselbst vorgeschriebenen Werthe besitzen.

Für die *Korn*'schen Fundamentalfunctionen W haben wir folgende Gleichungen erhalten [vgl. Seite 9, (25)]:

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{W}_{is} - \mathrm{W}_{as} = 2f_s, \\ \hline \mathrm{W}_{is}^{(1)} - \mathrm{W}_{as}^{(1)} = 0, \\ \mathrm{W}_{is}^{(2)} - \mathrm{W}_{as}^{(2)} = 0, \\ \mathrm{W}_{is}^{(3)} - \mathrm{W}_{as}^{(3)} = 0, \\ \quad \text{etc. etc.} \end{array}\right.$$

und ferner auch folgende Gleichungen [vgl. Seite 10 (27)]:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{W}_{is}^{(1)} + \mathrm{W}_{is}^{(3)} + \mathrm{W}_{is}^{(5)} + \cdots + \mathrm{W}_{is}^{(2n-1)} = f_s^{(2n)} \quad - f_s, \\ \mathrm{W}_{is} \;\; + \mathrm{W}_{is}^{(2)} + \mathrm{W}_{is}^{(4)} + \cdots + \mathrm{W}_{is}^{(2n)} \quad = f_s^{(2n+1)} + f_s. \end{array}\right.$$

Ersetzt man hier in (2) die W_{is}, unter Anwendung der Formeln (1), durch die W_{as}, so erhält man sofort:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{W}_{as}^{(1)} + \mathrm{W}_{as}^{(3)} + \mathrm{W}_{as}^{(5)} + \cdots + \mathrm{W}_{as}^{(2n-1)} = f_s^{(2n)} \quad - f_s, \\ \mathrm{W}_{as} \;\; + \mathrm{W}_{as}^{(2)} + \mathrm{W}_{as}^{(4)} + \cdots + \mathrm{W}_{as}^{(2n)} \quad = f_s^{(2n+1)} - f_s; \end{array}\right.$$

die rechten Seiten der Formeln (2), (3) sind ziemlich asymmetrisch, es sind daselbst drei Minuszeichen, und nur ein Pluszeichen vorhanden.

Ueberdies haben wir gefunden [vgl. Seite 25 (21), (22)], dass für sämmtliche Punkte i, s, a die Formeln stattfinden:

$$(4)\qquad \left.\left\{\begin{array}{l} \mathrm{abs}\; \mathrm{W}_i^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \quad \text{mithin auch:} \quad \mathrm{abs}\; \mathrm{W}_{is}^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \\ \mathrm{abs}\; \mathrm{W}_s^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \\ \mathrm{abs}\; \mathrm{W}_a^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \quad \text{mithin auch:} \quad \mathrm{abs}\; \mathrm{W}_{as}^{(n)} \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^n, \end{array}\right\}\right. \text{für } n=1,2,3,\cdots$$

wo $\mathfrak{C}$ und λ_g *positive Constanten* sind, und zwar λ_g ein *positiver ächter Bruch*.

Aus (4) folgt sofort, dass die Reihen

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} R = \mathrm{W}^{(1)} + \mathrm{W}^{(3)} + \mathrm{W}^{(5)} + \cdots \\ S = \mathrm{W} \;\;\; + \mathrm{W}^{(2)} + \mathrm{W}^{(4)} + \cdots \end{array}\right.$$

in allen Raumpunkten, d. i. in allen Punkten i, s, a convergent sind. Auch werden, wie man auf Grund der Formeln (4) leicht beweisen kann, R_i und S_i (ebenso wie die $\mathrm{W}_i^{(n)}$) *Fundamentalfunctionen des Raumes* $\mathfrak{J}$ sein. Und andererseits werden die R_a und S_a (ebenso wie die $\mathrm{W}_a^{(n)}$) *Fundamentalfunctionen des Raumes* $\mathfrak{A}$ sein. *Wir stellen uns nun die Aufgabe, diese Fundamentalfunctionen R_i, S_i und R_a, S_a, namentlich auch* *die Werthe derselben auf der gegebenen Fläche σ, einer näheren Untersuchung zu unterwerfen.*

Nach (5) ist:

$$R_{is} = W_{is}^{(1)} + W_{is}^{(3)} + W_{is}^{(5)} + \cdots,$$
$$S_{is} = W_{is} + W_{is}^{(2)} + W_{is}^{(4)} + \cdots,$$

also mit Hinblick auf (2):

$$(6) \qquad \begin{cases} R_{is} = \left(f_s^{(2n)} \quad - f_s\right) + W_{is}^{(2n+1)} + W_{is}^{(2n+3)} + \cdots, \\ S_{is} = \left(f_s^{(2n+1)} + f_s\right) + W_{is}^{(2n+2)} + W_{is}^{(2n+4)} + \cdots. \end{cases}$$

Was die hier in R_{is} auftretenden Restglieder betrifft, so ist offenbar:

$$\text{abs}\left(W_{is}^{(2n+1)} + W_{is}^{(2n+3)} + \cdots\right) \leqq \text{abs}\, W_{is}^{(2n+1)} + \text{abs}\, W_{is}^{(2n+3)} + \cdots,$$
$$\text{also nach (4):} \ \leqq \mathfrak{C}\lambda_g^{2n+1}\,(1 + \lambda_g^2 + \lambda_g^4 + \cdots),$$
$$\text{d. i.:} \ \leqq \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+1}, \ \text{wo} \ \mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{C}}{1 - \lambda_g^2}.$$

Demgemäss kann man schreiben:

$$W_{is}^{(2n+1)} + W_{is}^{(2n+3)} + \cdots = \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+1}\,\xi_s^{(n)},$$

wo alsdann die $\xi_s^{(n)}$ auf der Fläche σ ausgebreitete Werthe vorstellen, die sämmtlich zwischen -1 und $+1$ liegen.

In analoger Art wird man den Rest der Reihe S_{is} (6) untersuchen können; sodass man schliesslich zu folgenden Formeln gelangt:

$$(7) \qquad \begin{cases} R_{is} = \left(f_s^{(2n)} \quad - f_s\right) + \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+1}\,\xi_s^{(n)}, \\ S_{is} = \left(f_s^{(2n+1)} + f_s\right) + \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+2}\,\eta_s^{(n)}, \end{cases}$$

wo $\xi_s^{(n)}$ und $\eta_s^{(n)}$ auf der Fläche σ ausgebreitete Functionen vorstellen, deren Werthe durchweg zwischen -1 und $+1$ liegen; während unter $\mathfrak{K}$ die positive Constante zu verstehen ist:

$$(8) \qquad \mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{C}}{1 - \lambda_g^2}.$$

Löst man die Gleichungen (7) auf nach $f_s^{(2n)}$ und $f_s^{(2n+1)}$, so erhält man sofort:

$$(9) \qquad \begin{cases} f_s^{(2n)} \quad = \varrho_s - \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+1}\,\xi_s^{(n)}, \quad \text{wo } \varrho_s = R_{is} + f_s, \\ f_s^{(2n+1)} = \varsigma_s - \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+2}\,\eta_s^{(n)}, \quad \text{wo } \varsigma_s = S_{is} - f_s, \\ f_s^{(2n+2)} = \varrho_s - \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+3}\,\xi_s^{(n+1)}; \end{cases}$$

die letzte dieser Formeln (9) folgt nämlich unmittelbar aus der ersten durch Vertauschung von n mit $n+1$.

Markirt man nun auf der Fläche σ irgend einen Punkt s, so ist bekanntlich [vgl. Seite 6 (6) und auch Seite 39 (B)]:

$$(10)\qquad \begin{cases} f_s^{(2n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int f^{(2n)}(d\sigma)_s, \\ f_s^{(2n+2)} = \frac{1}{2\pi}\int f^{(2n+1)}(d\sigma)_s. \end{cases}$$

Substituirt man hier in (10) für die f's die Werthe (9) so erhält man:

$$\begin{cases} \varsigma_s - \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+2}\eta_s^{(n)} = \frac{1}{2\pi}\int\left(\varrho - \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+1}\xi^{(n)}\right)(d\sigma)_s, \\ \varrho_s - \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+3}\xi_s^{(n+1)} = \frac{1}{2\pi}\int\left(\varsigma - \mathfrak{K}\lambda_g^{2n+2}\eta^{(n)}\right)(d\sigma)_s. \end{cases}$$

Lässt man nun hier die Zahl n ins Unendliche wachsen, und beachtet man dabei, dass die $\xi^{(n)}$, $\eta^{(n)}$ durchweg zwischen -1 und $+1$ bleiben, und dass λ_g ein positiver ächter Bruch ist, so erhält man:

$$\begin{cases} \varsigma_s = \frac{1}{2\pi}\int \varrho\,(d\sigma)_s, \\ \varrho_s = \frac{1}{2\pi}\int \varsigma\,(d\sigma)_s; \end{cases}$$

woraus durch Addition und Subtraction sich ergiebt:

$$\begin{cases} \varrho_s + \varsigma_s = +\frac{1}{2\pi}\int(\varrho + \varsigma)(d\sigma)_s, \\ \varrho_s - \varsigma_s = -\frac{1}{2\pi}\int(\varrho - \varsigma)(d\sigma)_s. \end{cases}$$

Aus diesen beiden letzten Formeln folgt nun, unter Anwendung der beiden *E. R. Neumann*'schen Sätze [Seite 40 (F) und (G)] sofort, dass die Werthe $\varrho_s + \varsigma_s$ auf der Fläche σ constant, etwa $= 2C$, und dass die Werthe $\varrho_s - \varsigma_s$ daselbst überall $= 0$ sind. Also

$$\varrho_s + \varsigma_s = 2C \quad \text{und} \quad \varrho_s - \varsigma_s = 0,$$

folglich:

$$(11)\qquad \varrho_s = C \quad \text{und} \quad \varsigma_s = C,$$

wo C eine *unbekannte Constante* vorstellt.

Angesichts dieser Ergebnisse (11) gewinnen jetzt die Formeln (9) folgende Gestalt:

(12)
$$\begin{cases} f_s^{(2n)} = C - \mathfrak{K}\lambda_j^{2n-1}\xi_s^{(n)}, \\ f_s^{(2n-1)} = C - \mathfrak{K}\lambda_j^{2n-2}\eta_s^{(n)}; \end{cases}$$

woraus sich z. B. ergiebt:

(13)
$$\begin{cases} \left(f_s^{(2n)}\right)_{n=\infty} = C, \\ \left(f_s^{(2n-1)}\right)_{n=\infty} = C; \end{cases}$$

so dass also C als diejenige Constante zu bezeichnen ist, gegen welche alle Functionen $f_s^{(2n)}, f_s^{(2n-1)}$ bei ins Unendliche wachsendem n convergiren.

Was nun die eigentlich zu untersuchenden Fundamentalfunctionen (5) anbetrifft:

(14)
$$\begin{cases} R = \mathrm{W}^{(1)} + \mathrm{W}^{(3)} + \mathrm{W}^{(5)} + \cdots, \\ S = \mathrm{W} \quad + \mathrm{W}^{(2)} + \mathrm{W}^{(4)} + \cdots, \end{cases}$$

so sind diese Ausdrücke offenbar auch so darstellbar:

$$\begin{cases} R = (\mathrm{W}^{(1)} + \mathrm{W}^{(3)} + \mathrm{W}^{(5)} + \cdots + \mathrm{W}^{(2n-1)})_{n=\infty}, \\ S = (\mathrm{W} \quad + \mathrm{W}^{(2)} + \mathrm{W}^{(4)} + \cdots + \mathrm{W}^{(2n)})_{n=\infty}. \end{cases}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (2) und (3):

$$\begin{cases} R_{is} = \left(f_s^{(2n)} - f_s\right)_{n=\infty}, \\ R_{as} = \left(f_s^{(2n)} - f_s\right)_{n=\infty}, \end{cases} \qquad \begin{cases} S_{is} = \left(f_s^{(2n+1)} + f_s\right)_{n=\infty}, \\ S_{as} = \left(f_s^{(2n+1)} - f_s\right)_{n=\infty}; \end{cases}$$

also mit Hinblick auf (13):

(15)
$$\begin{cases} R_{is} = C - f_s, \\ R_{as} = C - f_s, \end{cases} \qquad \begin{cases} S_{is} = C + f_s, \\ S_{as} = C - f_s; \end{cases}$$

und diese Formeln (15) kann man schliesslich auch so schreiben:

(16)
$$\begin{cases} +f_s = C - R_{is}, \\ +f_s = C - R_{as}, \end{cases} \qquad \begin{cases} -f_s = C - S_{is}, \\ +f_s = C - S_{as}. \end{cases}$$

Diese Formeln (16) *liefern die Lösung des eigentlichen Problems. In der That zeigen die beiden Formeln* (16) *linker Hand, dass*

(17) $$C - R_i \quad \text{und} \quad C - R_a$$

jene eigentlich gesuchten Fundamentalfunctionen sind, welche auf der gegebenen Fläche σ die von Hause aus vorgeschriebenen Werthe f besitzen.

Gleichzeitig zeigen die beiden Formeln (16) *rechter Hand, dass*

(18) $$C - S_i \quad \text{und} \quad C - S_a$$

zwei Fundamentalfunctionen sind, die auf der gegebenen Fläche σ einander entgegengesetzte Werthe, nämlich die Werthe $-f$ und $+f$ besitzen.

Einigermassen beachtenswerth dürften noch sein die aus (15) durch Addition und Subtraction sich ergebenden beiden Formeln:

$$(19) \qquad R_{is} + S_{is} = 2C,$$

$$(20) \qquad R_{as} - S_{as} = 0.$$

Nach (19) besitzt die Fundamentalfunction $R_i + S_i$ auf der Fläche σ allenthalben ein und denselben constanten Werth $2C$. Und hieraus folgt nach bekanntem Satz, dass diese Function $R_i + S_i$ auch im Innenraum $\mathfrak{J}$ der Fläche überall $= 2C$ ist. Also

$$(21) \qquad R_i + S_i = 2C.$$

Ebenso folgt aus (20) dass allenthalben im Raume $\mathfrak{A}$

$$(22) \qquad R_a - S_a = 0$$

sein wird.

Vergleichung mit früheren Resultaten. — Bei meinen früheren Untersuchungen habe ich die den vorgeschriebenen Werthen f entsprechenden Fundamentalfunctionen der Räume $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{A}$ respective mit Ψ_i und Φ_a bezeichnet. Die damals [I. Abh. S. 784 (8)] für Ψ_i und Φ_a erhaltenen Ausdrücke lauten:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \Psi_i = C + [(W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \cdots], \\ \Phi_a = C - [(W_a + W_a') + (W_a'' + W_a''') + \cdots]. \end{cases}$$

Diese Formeln kann man nun mit Rücksicht auf Seite 9 (23) auch so schreiben:

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \Psi_i = C - [\mathrm{W}_i' + \mathrm{W}_i''' + \cdots], \\ \Phi_a = C - [\mathrm{W}_a' + \mathrm{W}_a''' + \cdots], \end{cases}$$

oder, falls es beliebt, auch so:

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} \Psi_i = C - \left[\mathrm{W}_i^{(1)} + \mathrm{W}_i^{(3)} + \mathrm{W}_i^{(5)} + \cdots\right], \\ \Phi_a = C - \left[\mathrm{W}_a^{(1)} + \mathrm{W}_a^{(3)} + \mathrm{W}_a^{(5)} + \cdots\right]. \end{cases}$$

Diese Formeln (γ) aber kann man endlich, bei Anwendung der in (5) eingeführten Bezeichnungen, auch so schreiben:

$$(\delta) \qquad \begin{cases} \Psi_i = C - R_i, \\ \Phi_a = C - R_a. \end{cases}$$

Und dies ist in voller Uebereinstimmung mit den in (17) erhaltenen Resultaten.

§ 9.

Schlussbemerkungen.

Man wird bereits erkannt haben, dass die in diesem Aufsatz dargelegte Theorie noch mit *erheblichen Mängeln* behaftet ist. So z. B. ist, was die Function

$$(\alpha) \qquad W_x^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int f^{(n)} (d\sigma)_x$$

anbelangt, vielfach Gebrauch gemacht worden von der in (12) Seite 7 angegebenen Formel:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial W_i^{(n)}}{\partial \nu} = \frac{\partial W_a^{(n)}}{\partial \nu}, \text{ —}$$

trotzdem, dass schon damals bemerkt wurde, diese Formel sei nur *„im Allgemeinen"* gültig. In der That wird sowohl die Existenz wie auch die gegenseitige Gleichheit dieser beiden normalen Ableitungen (oder vielmehr ihrer Grenzwerthe) nur dann mit Sicherheit behauptet werden dürfen, wenn sowohl die gegebene Fläche σ selber, sowie auch die auf ihr ausgebreiteten Werthe $f^{(n)}$ geeigneten näheren Determinationen unterworfen werden; wie solches z. B. aus meiner Abhandlung vom Jahre 1880 (Math. Annalen, Bd. 16, Seite 436) deutlich hervorgeht.

Hiermit hängt zusammen, dass die in (3) Seite 11 gegebene Definition der Constanten

$$(\gamma) \qquad C_i^{(p,q)} \text{ und } C_a^{(p,q)}$$

einigermassen bedenklich erscheint. Denn es ist fraglich, ob die bei jener Definition benutzten Ableitungen

$$(\delta) \qquad \frac{\partial W_i^{(p)}}{\partial x}, \frac{\partial W_i^{(q)}}{\partial x}, \cdots \text{ und } \frac{\partial W_a^{(p)}}{\partial x}, \frac{\partial W_a^{(q)}}{\partial x}, \cdots$$

in unmittelbarer Nähe der gegebenen Fläche σ bestimmte endliche Werthe besitzen.

Ferner sind bei Ableitung der *E. R. Neumann'schen Sätze* (Seite 39—40) zwei von mir in meinen Untersuchungen über das Logarithmische und Newton'sche Potential [daselbst Seite 157 (5) und Seite 158 (9)] aufgestellte allgemeine Theoreme benutzt worden. Diese beiden Theoreme aber werden von dem in Betreff der normalen Ableitungen (β) geäusserten Bedenken ebenfalls berührt, und werden daher, strenge genommen, als mehr oder weniger unzuverlässig zu bezeichnen sein.

Ganz besonders ist ferner hervorzuheben, dass auch die [auf Seite 16—18 besprochenen] *Poincaré'schen Sätze*, auf welche unsere Untersuchungen sich wesentlich stützen, — allerdings unabhängig sind vom Dirichlet'schen Princip — dennoch aber bis jetzt noch nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen sind.

Kurz wir sehen: *Das im vorliegenden Aufsatz aufgeführte theoretische Gebäude ist einstweilen nur als ein vorläufiges Gerüst zu bezeichnen, welches in seinen einzelnen Theilen noch mühsamer und sorgfältiger Durchforschungen dringend bedarf. Immerhin aber dürfte zu erwarten sein, dass dieses provisorische Gerüst durch solche tiefer gehende Forschungen, durch mancherlei Determinationen und Rectificationen, schliesslich in ein wirklich festes Gebäude sich verwandeln werde.*

Zu einem strengeren Beweis der Poincaré'schen Sätze könnte man vielleicht durch Benutzung der *isothermen Flächen* gelangen; falls man nicht etwa — nach dem Vorgange von Korn — die gegebene Fläche σ der Beschränkung unterwerfen will, sie solle convex sein mit Bezug auf einen bestimmten innern Punkt; (darunter ist zu verstehen, dass von diesem Punkt aus keine Tangenten an die Fläche möglich sein sollen).

Was andererseits die Frage nach dor Existenz und gegenseitigen Gleichheit der normalen Ableitungen (β) betrifft, — so dürften für diese und die damit zusammenhängenden Fragen von grösster Bedeutung sein die ausgezeichneten Arbeiten von *Tauber*, *Liapounoff* und *Steckloff*. Man findet die Arbeit von *Tauber* im VIII. Jahrgang der in Wien von v. Escherich und Gegenbauer herausgegebenen Monatshefte für Mathematik und Physik, 1897; ferner die ganz besonders schönen und sorgfältigen Arbeiten von *Liapounoff* in den Comptes rendus, 8. Novbr. und 22. Novbr., 1897, in den Schriften der mathematischen Gesellschaft zu Charkow, 1897; und im Journal de Mathématiques, Tome IV, Paris, 1898; endlich die Arbeiten von *Steckloff* in den Comptes rendus, 1897, 1899 und 1900.

Es würde ein grosser Irrthum sein, wenn man die soeben ausgesprochene Kritik als eine irgendwie abfällige oder abweisende ansehen wollte. Man möge bedenken, dass ich den *Poincaré*'schen Untersuchungen ein *ganz ausserordentliches Verdienst* beilege; und man möge ferner bedenken, dass die Arbeiten von *A. Korn* und *E. R. Neumann*, nach meiner Ansicht, einen *höchst schätzbaren weiteren Fortschritt* repräsentiren, insofern als durch sie die genannten Untersuchungen losgelöst worden sind vom Dirichlet'schen Princip; wie solches schon in der Einleitung (Seite 2) von mir hervorgehoben wurde.

Leipzig, März 1900.

Inhaltsübersicht.

Seite.

Einleitung 1

§ 1. Die aus den vorgeschriebenen Werthen f successive sich ergebenden Fundamentalfunctionen $W^{(n)}$ 5

§ 2. Die von *Arthur Korn* eingeführten Fundamentalfunctionen $W_i^{(n)}$ und $W_a^{(n)}$. 9

§ 3. Ueber die diesen Functionen zugehörigen *Schwarz*'schen Constanten $[W_i^{(n)}]$ und $[W_a^{(n)}]$ 11

§ 4. Die wichtigen Sätze von *Poincaré* 16

§ 5. Ueber gewisse Schranken für die Werthe der *Schwarz*'schen Constanten $[W_i^{(n)}]$ und $[W_a^{(n)}]$ 18

§ 6. Ueber gewisse Schranken für die Werthe der mit $W_i^{(n)}$ und $W_a^{(n)}$ bezeichneten *Korn*'schen Fundamentalfunctionen 21

§ 6 A. Nachträglicher Beweis einer gewissen im vorigen Paragraph ausgesprochenen Behauptung 27

§ 6 B. Fortsetzung dieses Beweises 36

§ 7. Vorbereitungen für die weiteren Untersuchungen, insbesondere über zwei von *E. R. Neumann* aufgestellte Sätze 39

§ 8. Die eigentlich gesuchten Fundamentalfunctionen, welche auf der gegebenen Fläche die daselbst vorgeschriebenen Werthe besitzen 40

§ 9. Schlussbemerkungen 46

Nachträgliche Bemerkung.

Meine Methode des arithmetischen Mittels (1870) hat später ein beachtenswerthes Seitenstück gefunden in einer von *Robin* entdeckten Methode (1887). Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass beide Methoden von gleicher Wichtigkeit sind, und einander gegenseitig ergänzen, indem die letztere Methode mit *einfachen Belegungen* in ganz ähnlicher Weise operirt, wie die erstere mit den sogenannten *Doppel-Belegungen*. — Man vergl. den Aufsatz von *E. R. Neumann* in den Götting. Nachrichten, 1899, Seite 291—301.

Friedrich Ludwig Wachter,
ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie.

Von

Paul Stäckel in Kiel.

1.

In dem achten Bande der Werke von Gauss (S. 175—176) findet man Stücke eines Briefes abgedruckt, den ein ehemaliger Zuhörer, Friedrich Ludwig Wachter, am 12. December 1816 von Danzig aus an ihn gerichtet hat. Dieser Brief ist gewiss vor allem wegen der darin überlieferten Aeusserungen von Gauss werthvoll, er enthält aber auch die Ergebnisse von Untersuchungen über die Parallelentheorie, zu denen Wachter selbst durch eine Unterredung mit Gauss angeregt worden war und in denen er sich als selbständiger, schöpferischer Denker bewährt, eine Meinung, die durch Wachters übrige Briefe an Gauss und durch eine kleine im Jahre 1817 veröffentlichte Schrift über das elfte Axiom Euklids nur bekräftigt wird. Auf diesen Beweisversuch Wachters hat bereits Camerer in seinem vortrefflichen *Excursus ad El. I. 29* hingewiesen (Euclidis Elementorum libri sex priores. Edidit J. G. Camerer. T. I. Berlin 1824. S. 439—440); während er lobend anerkennt, dass der Verfasser den Gegenstand auf neuen, verborgenen Wegen angegriffen habe, glaubt er sein endgültiges Urtheil aufschieben zu müssen, bis die in Aussicht gestellte ausführlichere, die noch vorhandenen Dunkelheiten aufklärende Darstellung erschienen sei. Sonst habe ich, abgesehen von mangelhaften Angaben in biographischen und bibliographischen Nachschlagewerken, Wachter nirgends erwähnt gefunden. Es liegt das wohl daran, dass jene Schrift sehr selten ist und dass Gauss' Nachlass bis vor kurzem unzugänglich war. Nachdem diese reichhaltige Quelle erschlossen ist, will ich im Folgenden über Wachters Leben und seine Leistungen für die nichteuklidische Geometrie einen kurzen Bericht geben und darauf als Belegstücke einige Briefe sowie die Demonstratio von 1817 in deutscher Uebertragung folgen lassen. Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, die mir die Benutzung des Gauss-Archivs und den Abdruck der oben erwähnten Briefe freundlichst gestattet hat, sowie der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, die mir einen Brief von Wachter an Bessel zur Verfügung gestellt hat, möchte ich auch an dieser Stelle meinen ergebenen Dank aussprechen.

2.

Friedrich Ludwig Wachter ist am 20. Juli 1792 zu Cleve geboren. Nachdem er das von seinem Vater Christian Friedrich Wachter geleitete Gymnasium in Hamm absolvirt hatte, wurde er am 1. Juli 1809 in Göttingen immatriculirt und studirte daselbst Mathematik und, unter Gauss' Leitung, Astronomie. Gauss war damals mit den 1801 bis 1807 entdeckten kleinen Planeten Ceres, Pallas, Juno und Vesta beschäftigt. Während er die umfangreichen Rechnungen zuerst allein auf sich genommen hatte, zog er jetzt seine Schüler Encke, Gerling, Möbius, Nicolai, Wachter zu Hilfe. Im Besonderen erhielt Wachter die Juno zugewiesen; Zachs Monatliche Correspondenz aus den Jahren 1811 und 1812 sowie die während derselben Zeit erschienenen Astronomischen Jahrbücher für 1814 und 1815 enthalten die Ergebnisse der Rechnungen Wachters, dessen grosse Sorgfalt und Geschicklichkeit Gauss in den begleitenden Worten wiederholt lobend hervorhebt. Astronomischen Inhalts war auch eine tüchtige Dissertation, die Wachter angeregt durch Gauss im Jahre 1813 entworfen hatte, die aber wegen seiner Theilnahme an dem Befreiungskriege (Dec. 1813 bis Mai 1814) erst 1815 unter dem Titel: *De elementis quae ad corporum coelestium revolutionem circa proprium axem spectant, ex observationibus geocentricis derivandis* in Göttingen erschienen ist. Die Drucklegung hatte Encke besorgt, da Wachter auf Gauss' Empfehlung seit Juni 1813 als Professor der Mathematik an dem Friedrichsgymnasium zu Altenburg angestellt war. Im Frühjahr 1816 legte er seine Stelle nieder und folgte im Herbst desselben Jahres einem Ruf an das Gymnasium illustre in Danzig. Hier nahm er schon früher begonnene Untersuchungen über „die Philosophie der Mathematik“ wieder auf. Er beabsichtigte über diesen Gegenstand ein Buch zu schreiben, als dessen Vorläufer er im Februar 1817 die kleine Schrift: *Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi* (16 S. 16⁰) drucken liess. Zur Ausführung seines Planes ist Wachter nicht gekommen. Am 3. April 1817 begab er sich auf den gewohnten Abendspaziergang, von dem er nicht zurückgekehrt ist. Alle Nachforschungen seiner Freunde und Collegen waren vergebens, und das Räthsel seines plötzlichen Verschwindens ist niemals gelöst worden. Welchen Eindruck die Nachricht von dem jähen, geheimnissvollen Ende seines „jungen Freundes“ auf Gauss gemacht hat, zeigt ein Brief an Gerling vom 15. Mai 1817: „Ich bin im Innersten erschüttert“, heisst es darin. „Wachter hatte einen braven Charakter, gewiss ausgezeichnete Talente, eine reine Leidenschaft für die Wissenschaft, und wenn auch seine metaphysischen Schwärmereien ihn auf Abwege führten, so glaube ich doch, dass ein reiferes Alter ihn immer mehr von jenen geheilt hätte, und dass er viel für die Wissenschaft geleistet haben würde“.*)

3.

In „metaphysischen Speculationen“ hatte Wachters Interesse für die Grundlagen der Geometrie seinen Ursprung; dass überhaupt das Wiedererwachen dieses Interesses seit dem Ende des achtzehnten Jahrhunderts mit dem Einflusse der Kantischen Philosophie zusammenhängt, habe ich schon an anderer Stelle hervorgehoben.**) Wie Wachter selbst bezeugt, wurde es verstärkt durch die für den Schulunterricht erforderliche Beschäftigung mit den Elementen. Dazu kam endlich im April 1816 eine mächtige Anregung durch eine Unterredung mit Gauss.

Noch vor diese Unterredung fällt eine Kritik der 1815 erschienenen *Vollständigen Theorie der Parallelen* von Matthias Metternich, ein Beitrag, den Wachter für die soeben durch v. Lindenau und Bohnenberger ins Leben gerufene *Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* geliefert hatte. Wachter deckt zunächst den argen Fehlschluss auf, dessen Metternich sich schuldig gemacht hatte (Bd. II, S. 64—74) und setzt dann seine eigene Ansicht über einen möglichen Beweis des Parallelenaxioms auseinander, indem er folgende Betrachtung anstellt.

*) Als Quelle für die vorstehende Skizze haben gedient: die gedruckten Briefwechsel Gauss-Olbers (Gauss, den 8. April 1813, 24. Juni 1815, 3. April und 4. Juni 1816, 28. April und 2. August 1817, Olbers, den 15. April 1816), Gauss-Schumacher (Gauss, den 10. März 1811, Schumacher, den 17. Juni 1814), Bessel-Olbers (Bessel, den 8. Mai 1817, Olbers, den 23. Mai 1817) und die ungedruckten Briefe Gauss an Gerling, den 15. Mai 1817, Gerling an Gauss, den 15. Juni 1817 und 25. März 1818 und Wachter an Gauss den 19. Mai, 29. Juni, 27. September und 16. December 1814, 28. März 1815, 12. December 1816 und 25. Februar 1817, sowie zwei Briefe von Wachters Vater an Gauss, einer vom 10. Mai 1817, ein späterer ohne Datum. Dazu kommen einige zum Theil ungenaue Angaben in den Schriften: M. Geyer, *Geschichte des Friedrichsgymnasiums zu Altenburg seit 1789*, Altenburg 1891, S. 6, 33, 80 und C. Bruhns, *Johann Franz Encke*, Leipzig 1869, S. 16, 17, 18, 25, auf die mich F. Engel in Leipzig hingewiesen hat.

**) Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, in Gemeinschaft mit F. Engel herausgegeben von P. Stäckel, Leipzig 1895, S. VI; im Folgenden mit P. Th. angeführt.

Steht die Gerade ND auf der Geraden MN senkrecht, während die Gerade MF mit MN einen spitzen Winkel bildet, so besagt das Axiom, dass MF und ND gehörig verlängert einander schneiden werden. „*Man setze jetzt MF sey parallel* [nicht schneidend] *mit ND.* Daraus würde

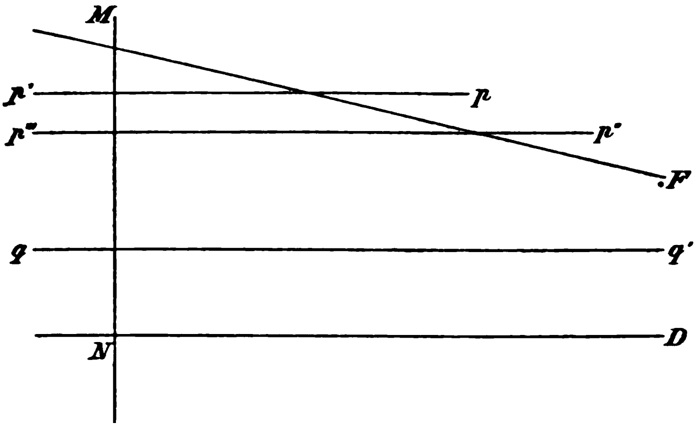


Fig. 1.

folgen, dass es senkrechte, wie qq', zwischen M und N gebe, welche die MF nicht schneiden, oder, wenn auch keine andere, wenigstens ND selbst eine solche senkrechte wäre. Eine von diesen, welche die MF nicht mehr schneidet, ist von N nach M zu gewiss die *letzte*. Man nehme unbestimmt qq' dafür; dann ist zwischen ihr und der MF keine senkrechte mehr möglich, ohne die MF zu schneiden. Auch fallen die Durchschnittspunkte derselben, wie der $p'p$, der $p'''p''$ u. s. w. in immer grössere Entfernungen von M, je mehr sie sich der Asymptote qq' nähern. Der letzte Durchschnittspunkt aber, lässt sich wegen der Unendlichkeit der MF nicht angeben; er würde in dem Augenblicke, wo $p'''p''$ in qq' übergienge, statt gefunden haben in einem Abstande von M, der über alle Gränzen hinausfiele. Die Winkel aber, wie $Mp''p'''$, unter welchen MF von jeder Senkrechten geschnitten wird, können nie Null werden, weil keine Senkrechte mit MF zusammenfallen kann; sie fallen also nothwendig zwischen irgend ein $\frac{1}{2^{n-1}}R$ und $\frac{1}{2^n}R$, so dass nie $\frac{1}{2^n}R = 0$. Nach *Satz* I liegt dann aber der Durchschnitt in einer Entfernung von M stets kleiner als $2^n L$. Dieser müsste aber wegen der Unendlichkeit der MF über jede Gränze hinauswachsen. *Mithin führt die Annahme, dass qq' die MF nicht schneide, auf den Widerspruch: dass die Gränze für $\frac{1}{2^n}$ nicht $= 0$, zugleich aber doch die Gränze für $2^n = \infty$ seyn soll.* Also kann MF nicht parallel mit qq' also auch nicht mit ND seyn; weil, was jetzt von der MF und qq' gezeigt ist, offenbar auch allgemein von jeder andern Linie durch M und jeder andern Asymptote gilt. W. Z. B. W."

In dem Versuche einer apagogischen Beweisführung ist Wachter mit Saccheri und Lambert zusammengetroffen, deren Arbeiten ihm freilich unbekannt waren. Ja noch mehr, seine Deduction, eine Asymptote qq' sei deshalb nicht möglich, weil sie mit MF den Winkel Null bilden und alsdann MF mit qq' zusammenfallen müsste, ist der Kern des ersten Beweises von Saccheri*). Wachter selbst scheint die Unzulänglichkeit seines Verfahrens gefühlt zu haben, denn am Schlusse seiner Besprechung bemerkt er: „Ob aber der eben versuchte Beweis für das elfte Axiom des Euklides wirklich die von den Mathematikern gewünschte Form habe, oder ob sich ihm nicht vielleicht eine noch strengere Form geben lasse, wagt Rec. nicht zu entscheiden", und meint, wollte man als *Axiom* aufstellen, dass *eine gerade Linie nicht Asymptote einer andern geraden Linie sein könne*, „so schiene dieses wenigstens viele andern, in der Paralleltheorie versuchten, Axiome an Anschaulichkeit zu übertreffen."**)

4.

„Es bleibt in der Geschichte der Mathematik gewiss merkwürdig", schrieb Wachter am 17. März 1817 an Bessel, indem er ihm seine *Demonstratio* übersandte, „dass noch niemand die Wahrheit des elften euklidischen Axioms bezweifelt hat, wie es, der Form nach, schon die sonst gebräuchliche apagogische Beweisart mit sich gebracht haben würde; und wie es des Geometers allein würdig gewesen wäre, wenigstens die Folgen zu entwickeln, die Statt haben müssten, sobald der Satz vielleicht falsch, oder doch völlig unbeweisbar war. Doch diese Folgen, von denen einige interessant genug scheinen, darzulegen, kommt mir — obgleich ich der erste gewesen bin, der die ersten aus einer dem elften Axiom entgegengesetzten Hypothesis handgreiflich folgenden Sätze angedeutet hat, in einer in der astronom. Zeitschrift abgedruckten Recension — weniger zu als Gauss, der, wie ich später von ihm erfuhr, schon seit vielen Jahren mit solchen Entwickelungen beschäftigt gewesen ist."

Wachter bezieht sich hierbei auf eine Unterredung mit Gauss, die er auch in seinem Briefe an Gauss vom 12. December 1816 wiederholt erwähnt. Für den Zeitpunkt dieses „letzten Aufenthalts in Göttingen" giebt zunächst der Eingang des Briefes einen Anhalt. „Nach einem in Zerstreuungen verlebten halben Jahre, nach einer ermüdenden Reise, nach

*) *Euclides ab omni naevo vindicatus.* Mailand 1733, S. 86. P. Th. S. 122.

**) Dieses Axiom hatte bereits Duttenhofer vorgeschlagen (*Versuch eines strengen Beweises der Theoreme von den Parallellinien.* Stuttgart 1813).

dem Eintritt in einen neuen Wohnort", so erklärt Wachter entschuldigend, schreibe er endlich an seinen verehrten Lehrer. Verbindet man hiermit die Angabe, die Gauss selbst in dem Briefe an Olbers vom 4. Juni 1816 macht: er [Wachter] war im April hier", so ist als Zeitpunkt jener Unterredung der *April 1816* gesichert.

Dass in ihr das elfte euklidische Axiom berührt wurde, ist sehr erklärlich; Gauss und Wachter hatten sich damals beide mit Metternichs Parallelentheorie befasst. Wachters Besprechung ist schon erwähnt worden. Gauss' Recension erschien anonym in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen vom 20. April 1816*); es ist gewiss kein Zufall, dass sie von Wachter in der Einleitung zur *Demonstratio* erwähnt und als Verfasser „summus geometra" genannt wird. Indem man die Angaben in den beiden vorher erwähnten Briefen Wachters verbindet, wird man annehmen dürfen, dass Gauss seinem jungen Freunde berichtet hat, er habe sich schon seit vielen Jahren mit der „antieuklidischen Geometrie" beschäftigt und sei sogar dazu gelangt, die dabei geltende „transcendente Trigonometrie" auszubilden. Die Art, in der Wachter diese Trigonometrie erwähnt, erweckt den Eindruck, als habe Gauss ihn aufgefordert, nun auch seinerseits die betreffenden Formeln herzuleiten, eine Aufgabe, der Wachter freilich nicht gewachsen war.

Wann hatte Gauss die „transcendente Trigonometrie" entdeckt? Um auf diese Frage zu antworten, muss man, was bisher nicht genügend geschehen ist, scharf unterscheiden zwischen nichteuklidischer Geometrie und Unbeweisbarkeit des elften Axioms. Auch ein Mathematiker, der von der unbedingten und ausschliesslichen Gültigkeit der euklidischen Geometrie überzeugt ist, kann eine nichteuklidische Geometrie hypothetisch ausbilden, hat doch Saccheri weder an der Beweisbarkeit des Parallelenaxioms noch an der empirischen Richtigkeit des Euklidischen Systems gezweifelt. Daher darf auch aus Schumachers Aufzeichnung vom November 1808, «Gauss habe die Theorie der Parallelen darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine constante a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsse, welches absurd ist», nicht geschlossen werden, dass Gauss damals die „transcendente Trigonometrie" noch nicht besessen habe; es ist vielmehr sehr wohl denkbar, dass er sie bereits im Sept. 1799 entdeckt hat, als er in sein Tagebuch die Notiz eintrug: *In principiis Geometriae egregios progressus fecimus***),

*) Sie ist abgedruckt Werke Bd. IV, S. 364—368, Bd. VIII, S. 170—174, P. Th. S. 220—223.

**) Werke, Bd. VIII, S. 162; auch der Brief von Gauss an Bolyai vom 16. Dec. 1799 spricht nur zu Gunsten dieser Vermuthung. Dass Gauss' Nachlass keine Aufzeichnungen darüber enthält, ist kein entscheidender Gegengrund, denn Gauss besass auch auf anderen Gebieten viel mehr, als er aufgeschrieben hat.

und wenn Engel sagt, dass Bartels, der bis 1807 mit Gauss verkehrte, von diesem „nicht wesentlich mehr über die Parallelenfrage erfahren hat, als das was er ebensogut aus Gesprächen mit Kaestner oder aus den damaligen Lehrbüchern der Geometrie, insbesondere aus den *Éléments* Legendres entnehmen konnte"*), so scheint mir damit mehr behauptet, als sich beweisen lässt. Dagegen stimme ich Engel darin vollständig zu, dass „Gauss in der Zeit bis 1808 ... zwar an der unbedingten Wahrheit des Euklidischen Parallelenaxioms zweifelhaft geworden, aber seiner Sache doch noch nicht ganz sicher war" und glaube sogar, dass man auf Grund des Briefes von Wachter dasselbe für die Zeit bis 1816 annehmen darf. Denn hätte Gauss seinem jungen Freunde gerade heraus erklärt, das elfte Axiom lasse sich schlechterdings nicht mittelst der übrigen Axiome beweisen, so müssten sich doch irgend welche Rückwirkungen einer solchen Aeusserung bei einem Mann, wie Wachter zeigen, der von der grössten Verehrung für Gauss beseelt war. Hiermit stimmt auch sehr gut überein, dass Gauss am 20. April 1817, veranlasst durch Wachters *Demonstratio*, an Olbers schreibt: „Ich komme immer mehr zu der Ueberzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht *vom* menschlichen Verstande noch *für* den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raumes, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen" und dass er in dem Briefe an Taurinus vom 8. November 1824 von seinen vergeblichen Anstrengungen erzählt, „einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser nichteuklidischen Geometrie zu entdecken."

Man darf hierin eine Bestätigung der von mir früher ausgesprochenen Ansicht sehen, „dass die Erkenntniss von der logischen Unanfechtbarkeit der nichteuklidischen Geometrie Gauss nicht durch eine geniale Intuition zu Theil geworden ist, sondern dass er sie erst im harten Kampfe gegen das alte Vorurtheil errungen hat"**).

Hierzu möchte ich eine Bemerkung psychologischer Natur hinzufügen, die das Vorangehende wohl erst in dem rechten Lichte erscheinen lässt. Es wäre irrig sich vorzustellen, dass Gauss die Fragen, um die es sich bei den Grundlagen der Geometrie handelt, mit der Klarheit und Deutlichkeit erfasst hatte, die nach ihm durch die Arbeit einer Generation

*) Nicolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei Geometrische Abhandlungen. Zweiter Theil. Leipzig, 1899, S. 378—379.

**) P. Stäckel und F. Engel, Gauss, die beiden Bolyai und die nichteuklidische Geometrie. Diese Annalen, Bd. 49, S. 151.

von Mathematikern erworben worden ist. Wir müssen zwar annehmen, dass er, um einen Ausdruck Goethes zu gebrauchen, mit der Dumpfheit der Genies so manches vorausgeschaut hat, was wir jetzt besitzen, aber das schliesst nicht aus, dass der Process der Loslösung von der zweitausendjährigen Autorität Euklids sich bei ihm allmählich und unter Schwankungen vollzogen hat, unter Rückfällen in die alte Anschauung, wenn er bei der Durchführung der neuen Ideen auf Schwierigkeiten stiess, wie zum Beispiel auf die Forderung, dass es eine constante, a priori der Länge nach gegebene Linie geben solle. Von diesem Gesichtspunkte aus wird man die Annahme, dass Gauss schon im Jahre 1799 in jugendkräftiger Entfaltung seines Genies zu der Conception einer nichteuklidischen Geometrie mit Einschluss der transcendenten Trigonometrie vorgedrungen ist und dass ihm diese Entdeckung „die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft gemacht“ hat (Brief an Bolyai vom 16. Dec. 1799), mit der Thatsache in Einklang bringen können, dass derselbe Gauss dennoch fünf Jahre später einen Beweis des elften Axioms für möglich gehalten hat (Brief an Bolyai vom 25. Nov. 1804).

Zum Schluss dieses Abschnittes möge noch bemerkt werden, dass auch der wiederholt auftretende Begriff mehrdimensionaler Räume durch Gauss an Wachter vermittelt worden zu sein scheint. Allerdings reicht die Geschichte dieses Begriffs mindestens bis ins siebzehnte Jahrhundert zurück, sodass die Möglichkeit einer andern Quelle nicht geleugnet werden kann; allein Wachter coquettirt mit den n Dimensionen wie jemand, der erst kürzlich davon erfahren hat, ja er versteigt sich in jugendlichem Enthusiasmus zu Räumen von unendlich vielen Dimensionen! Dass Gauss schon früh die n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten gehabt hat, kann als sichergestellt gelten.

5.

Was hat nun Wachter in seinem langen Briefe vom 12. Dec. 1816 für die Grundlagen der Geometrie geleistet? Da muss zunächst constatirt werden, dass es ihm an Selbstkritik gar sehr mangelte. Ein beträchtlicher Theil seiner Ausführungen muss als unreif und verfehlt bezeichnet werden. Vor allem trägt hieran seine unklare Auffassung des Unendlichen Schuld, die schon in der Besprechung der Metternichschen Parallelentheorie zu Tage tritt. Auf der andern Seite aber finden sich viele scharfsinnige Bemerkungen, und durch sein geniales Aperçu, dass, unabhängig von dem Parallelenaxiom, auf der Kugel von unendlich grossem Radius die Euklidische Geometrie verwirklicht ist, erhebt sich W a c h t e r zu der Höhe von L o b a t s c h e f s k i j und J o h a n n B o l y a i.

Dass in der Euklidischen Geometrie die Ebene als Grenze der Kugel angesehen werden kann, ist gewiss schon den griechischen Geometern bekannt gewesen, denen ja bereits der Sache nach die Transformation durch reciproke Radienvectoren im Raume geläufig war. Allein die Erkenntniss, dass umgekehrt die Annahme, die Grenzkugel sei eine Ebene, mit dem Parallelenaxiom äquivalent ist, scheint jungen Ursprungs zu sein. Vor Wachter kann ich dafür nur Grashof anführen, in dessen 1806 erschienenen *Theses sphaerologiae**) dieser Gedanke in etwas verschwommener Form entwickelt wird. Aus der späteren Zeit ist die vortreffliche Darstellung von J. W. H. Lehmann (*Mathematische Abhandlungen*, Zerbst 1829) zu nennen**). Ein ganz neuer Gedanke aber war es, die Geometrie auf einer Grenzkugel zu betrachten, und Wachter gebührt der Ruhm auch schon diesen weiteren Schritt gethan zu haben.

Weiter ist hervorzuheben, dass Wachter die *gerade Linie* als *die nur auf einzige Weise zwischen zwei gegebenen Punkten liegende* definirt. Bei Euklid lautet die Erklärung der geraden Linie: „Eine Linie ist gerade, wenn sie gegen die in ihr befindlichen Punkte auf einerlei Art gelegen ist", es folgt dann die Forderung, dass sich von jedem Punkte nach jedem Punkte eine gerade Linie ziehen lasse, und endlich besagt der neunte Grundsatz, dessen Echtheit allerdings angezweifelt wird, dass zwei gerade Linien keinen Raum einschliessen. Schon die griechischen Geometer haben versucht, diese Erklärung zu verbessern oder durch eine brauchbarere zu ersetzen, und später ist eine umfangreiche Litteratur über die Definition der Geraden entstanden.***) Die Definition, deren sich Wachter bedient, habe ich in den älteren Schriften nirgends gefunden. Es scheint fast, als ob sie auf Klügel zurückgeht. In seinem *Mathematischen*

---

*) P. Th. S. 304 und 315, wo nachzutragen ist, dass Grashof 1770—1841 gelebt hat. Er ist übrigens 1826 auf diesen Gegenstand zurückgekommen (Ueber die ersten Begriffe der Geometrie, zunächst mit Bezug auf Parallelen-Theorien, Programm des Karmeliter-Gymnasiums zu Köln), ohne dass seine Auseinandersetzungen an Klarheit gewonnen hätten. Zum Schluss (S. 11) fasst er das Ergebniss seiner Untersuchungen dahin zusammen, „dass eine Parallelen-Theorie ohne sphaerologische Begründung nothwendig eines Axioms bedarf, um in allen ihren Folgerungen bewiesen zu werden, und dass es vergeblich ist, einen Beweis für das elfte Euklidische Axiom oder für jedes ähnliche auf dem bisherigen Wege zu suchen."

**) Siehe meine Biographie von F. A. Taurinus (Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Heft 9. Leipzig 1899. S. 426—427).

***) Für die Griechen ist auf die Euklid-Kommentare von Proklos und von An-Nairîzî (herausgegeben von M. Curtze, Leipzig 1899) zu verweisen. Eine Zusammenstellung der neueren Litteratur findet man bei Schotten, *Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts*, Bd. I, Leipzig 1890, Kapitel 5; freilich giebt dieses Sammelwerk über die historische Entwicklung der Untersuchungen in Betreff der Grundbegriffe der Geometrie keine Auskunft.

Wörterbuche (Theil III. Leipzig 1808. S. 449) heisst es: „Daher kann man auch die gerade Linie für diejenige erklären, welche durch zwei Punkte, in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung, nur auf eine einzige Art gezogen werden kann.“ Klügel fügt hinzu, diese Eigenschaft der Geraden benutze Euklid bei seinen Beweisen, seine ursprüngliche Erklärung brauche er dabei gar nicht*).

Gegen Klügels Erklärung, die auf den ersten Blick etwas bestechendes hat, ist schon von seinem Schüler Grashof mit Recht eingewendet worden, dass diese Eigenschaft der Geraden nicht ausreicht, alle übrigen zu beweisen, „z. B. dass jede Gerade nach beiden Seiten verlängert werden kann, dass sie als Ganzes, wie man sich ausdrückt, unendlich ist und dass es überhaupt von jedem Punkte nach jedem Punkte eine Gerade giebt.“**)

Etwas ganz anderes ist es, wenn Hilbert***) unter seinen sieben *Axiomen der Verknüpfung* als erstes aufstellt: „Zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Gerade a“. Immerhin war die Erkenntniss, dass Euklids Definition der Geraden für die Beweise entbehrlich sei, ein wesentlicher Schritt vorwärts auf dem Wege zu der Aufstellung eines *formalen* Systems der Geometrie.

Auch auf die Definition der *Ebene* kommt Wachter zu sprechen und bemerkt sehr richtig, dass schon durch zwei gerade Linien, die einen Punkt gemein haben, eine Ebene bestimmt ist und dass man aus dieser Definition die gewöhnliche ableiten müsse, wonach die Ebene diejenige Fläche ist, in welcher nach allen Richtungen gerade Linien gezogen werden können. Er trifft hier mit Gauss zusammen, der, wie sein geometrischer Nachlass gezeigt hat, wiederholt auf diese Lücke in der Definition der Ebene zurückgekommen ist†).

6.

Die in dem Briefe vom 12. December 1816 ausgesprochenen Gedanken hat Wachter weiter verfolgt. Die Ergebnisse seiner Untersuchungen enthält

---

*) Genau ebenso hat Leibniz gedacht. In Aufzeichnungen, die Gerhardt 1858 herausgegeben hat (Leibniz' Mathematische Werke, Bd. 5), bemerkt er zu Euklids Definition: Haec definitio nullius momenti est, neque uspiam ab Euclide in demonstrando adhibitur neque satis intelligitur (In Euclidis πρῶτα, S. 185), und in der *Characteristica geometrica* von 1679 sagt er (a. a. O. S. 145): Haec autem linea quae a duobus solis punctis, per quae transit, determinata est, . . . linea dicitur *recta*.

**) Grashof, *Theses sphaerologiae*, Berlin 1806, S. 62. Vergl. auch Killing, *Einführung in die Grundlagen der Geometrie*. Bd. II. Paderborn 1898, Abschnitt VII, § 3.

***) *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Leipzig 1899.

†) Werke, Bd. VIII, S. 193—199.

seine Schrift: *Demonstratio axiomatis in Euclideis undecimi;* ihren wesentlichen Inhalt giebt ein Brief wieder, den er am 25. Februar 1817 an Gauss gerichtet hat.

Wachters Ziel ist: ohne Benutzung des Parallelenaxioms zu beweisen, dass durch drei beliebige Punkte der Ebene stets ein Kreis gelegt werden kann, woraus dann die Richtigkeit des elften Axioms selbst erschlossen werden könnte. In dieser Tendenz trifft er einerseits mit Lambert zusammen, dessen Beweisversuche auf die Frage nach der Existenz eines solchen Kreises hinauslaufen, was freilich bei Lambert selbst nicht deutlich zu Tage tritt*), andrerseits mit Wolfgang Bolyai, dessen Ausspruch: „könnten jede 3 Punkte, die nicht in einer Geraden sind, in eine sphärische [Fläche] fallen; so wäre das Eucl. Ax. XI bewiesen"**), wie man leicht erkennt, auf dasselbe herauskommt. Mit Recht hat Frischauf erklärt, dass von den Axiomen, die zum Ersatze des Parallelenaxioms vorgeschlagen worden sind, die Voraussetzung, dass drei Punkte, die nicht in einer Geraden liegen, stets auf einer Kugelfläche liegen sollen, am anschaulichsten ist***).

Dass Wachters Beweisversuch, der an Originalität fast alle Versuche dieser Art weit überragt und Camerers Lob, dass darin neue, verborgene Wege eingeschlagen worden seien, durchaus verdient, dennoch gescheitert ist, hat zwei Ursachen. Seine Deduction in § 3, Fall II enthält einen Fehlschluss, es wird dabei die Möglichkeit der *Hypersphären*†) übersehen, deren Normalen zu einander *Hyperasymptoten* sind. Aber auch wenn man hiervon absehen wollte, kann seine *Demonstratio* nicht befriedigen, weil ihre Grundlage: die Theorie der „Fläche von vier Punkten" ungenügend ist.

Wachter definirt die Fläche von vier Punkten als diejenige Fläche, die durch vier Punkte und nicht mehr vollständig bestimmt ist und mit einer andern Fläche derselben Art nicht mehr als einen Schnitt gemeinsam hat, der seinerseits durch drei Punkte und nicht mehr bestimmt ist; auf ganz ähnliche Art sei die „Linie von drei Punkten" zu erklären, während die gerade Linie die „Linie von zwei Punkten" ist. Wenn Wachter nun fortfährt: „Man schliesst hieraus leicht, dass unsere Fläche stetig ist, dass sie keine verschiedenen Fortsetzungen (Zweige) und keine doppelte

*) *Theorie der Parallellinien* § 17—26, § 88, P. Th. S. 167—176, 206—207, vergl. dazu die Bemerkung auf S. 144, die Schur bei seiner Besprechung (Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik, Bd. XXVI für 1895, S. 59) übersehen hat.

**) *Kurzer Grundriss eines Versuches* u. s. w., Maros-Vásárhely 1851, S. 46. Auf S. 45 hatte Bolyai bemerkt, dass in der absoluten Geometrie die Möglichkeit, „um jeden Δ einen Kreis zu beschreiben" wegfällt.

***) *Absolute Geometrie nach Johann Bolyai.* Leipzig 1872. S. 91.

†) Vergl. Gauss Werke Bd. VIII, S. 221.

Krümmung [d. h. nicht die Gestalt einer Sattelfläche] hat", so möchte ich mich trotz Wachters Versicherung, dass er diese Behauptung zur höchsten Evidenz bringen könne, Killing anschliessen, der in seiner *Einführung in die Grundlagen der Geometrie* (Bd. II. Paderborn 1898. S. 178) sich so äussert: „Was kann denn der Ausdruck: Eine Linie oder eine Fläche ist durch eine gewisse Zahl von Punkten bestimmt, für einen Inhalt haben, solange man die Eigenschaften der Linie oder der Fläche nicht als bekannt voraussetzt? Vergebens sieht man sich nach einer Erklärung dieses Ausdrucks um, die doch gegeben sein muss, ehe man mit der aufgestellten Definition operieren darf. — — — Man versuche nur, der Untersuchung des Kreises [allein] die Eigenschaft zu Grunde zu legen, dass er durch drei Punkte bestimmt sei; man wird schwerlich zum Ziele gelangen."

Somit hält vor der Kritik nur der erste Paragraph der *Demonstratio* Stand, auf den Wachter selbst grossen Werth gelegt zu haben scheint; sagt er doch in einem Briefe an seinen Vater, der wahrscheinlich aus dem Februar 1817 stammt, nachdem er sich gerühmt hat, das Problem der Parallelentheorie gelöst zu haben, für das die Anstrengungen zweier Jahrtausende nicht hingereicht hatten: „Doch hiernach wäre der Werth dieser Arbeit zu gering angeschlagen. Man hat bisher noch gar nicht einmal daran gedacht, die eminenten Folgen zu überblicken, die es hätte, wenn die Parallelentheorie nicht wahr wäre. Man hat nicht einmal gewagt, an der Wahrheit des 11ten Eucl. Axioms zu zweifeln, obgleich alle Bemühungen es zu beweisen vergebens waren." In der That enthält § 1 einen bemerkenswerthen Ansatz zu einer nichteuklidischen Geometrie. Wachter beweist hier auf originelle Art den Lehrsatz „*Leugnet man das elfte Axiom*, so giebt es aus jedem Punkte auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels eine gerade Linie, die den andern Schenkel asymptotisch berührt, und umgekehrt: auf dem einen Schenkel eines jeden spitzen Winkels giebt es einen solchen Punkt, dass die aus ihm unter rechtem Winkel gezogene Linie eine Asymptote des andern Schenkels ist," ein Theorem, das freilich schon Saccheri in seinem *Euclides ab omni naevo vindicatus* im Jahre 1733 ausgesprochen hatte (Lehrsatz XVII, XXVII und XXXII, P. Th. S. 70, 98—100, 107).

Beläge.

Wachter an Gauss. Danzig, den 12. Dec. 1816.

... Als ich mich vor ein paar Tagen mit den Principien der Geometrie beschäftigte, ward mir von neuem klar, wie die Kantische Ansicht, dass die Geometrie auf einer blossen Anschauung des Raumes beruhe, (desselben Ansicht der Arithmetik, als auf Anschauung der Zeit begründet, enthält, wie sich streng zeigen lässt, einen Paralogismus) das innere Wesen der Wissenschaft gar nicht erfasse, und eigentlich leer und nichtssagend dastehe. Und wenn man noch betrachtet, was sein bester Ausleger und Epitomator, der Königsberger Schulze, der, nach Kants eigenem Geständnisse, ihn am besten und durchaus verstanden haben soll, für die Principien der Geometrie geleistet hat: so darf man nicht fürchten, dem grossen Manne durch dieses Urtheil Unrecht zu thun. — Ich schlug den entgegengesetzten Weg ein; zeigte durch die strengste psychologisch-mathematische Analyse in mathematischer Form:

1) Dass mit der ursprünglichen Vorstellung des Ausgedehnten die ursprüngliche Vorstellung der Bewegung, eine zugleich mit der andern, und wechselsweise durch die andere gegeben sey, ohne welche Nachweisung sich, meinem Urtheil nach, die metaphysischen Einwürfe der Eleatiker vorzüglich des Zeno gegen die Möglichkeit der Bewegung überhaupt, und dann des Sextus Empiricus gegen die Möglichkeit einer Geometrie a priori nie befriedigend möchten widerlegen lassen.

2) Dass wirklich kein beschränkter, sondern ein nach allen Seiten hin unendlicher Raum uns gegeben sey. Erst wenn auf solche Weise nachgewiesen ist, dass man aus einem beschränkten, vorgeschriebenen Raume herausgehen könne, dass z. B. die Welt nicht in einer einzigen Kreislinie, Spirale oder Kugelfläche u. dergl. enthalten sey, kann man sich von einer speciellen Geometrie, die in jenem Falle allein möglich seyn würde, zur allgemeinen und reinen Wissenschaft erheben.

Wie nun diese mit der Aufgabe, die Lage zweier Punkte zu bestimmen, anfange, daraus die Nothwendigkeit der geraden Linie, als der nur auf einzige Weise zwischen zwei gegebenen Punkten liegenden, erhelle; — wie also der Geometer sich die Definition der geraden Linie, als derjenigen, welche von einer andern geraden in nicht mehr als einem Punkte geschnitten wird, selbst mache, und in keinem andern Sinne, als insofern sie ihm nothwendig ist; — wie erst bewiesen werden muss: dass ihre andere Eigenschaft, dass sie nicht mehrere Zweige habe, oder auch ihre Verlängerung auf einzige Weise möglich sey, erst Folge dieser Definition sey; (den Beweis führte ich auf eigenthümliche Weise apagogisch, indem ich diesen Satz auf den zurückführte, dass eine gerade Linie keinen Raum einschliessen könne; denn das oft gebrauchte Verfahren, nach dem man zuerst die Gleichheit aller rechten Winkel beweist, und dann hieraus den Satz ableitet, dass eine gerade Linie nicht Segment einer andern seyn könne, beruhet auf einem Paralogismus) etc. das versteht sich, glaube ich, für den eigentlichen Geometer von selbst; obgleich die meisten, alle aus der Kantischen philos. Schule, und alle empirischen, die gerade Linie nur als durch Anschauung gegeben sich denken können, wenn ihnen gleich nie eine in der reinen Anschauung zu Theil geworden ist.

Die Aufgabe der Lagebestimmung dreier Punkte führt sodann zur Aufgabe der Lagebestimmung zweier gerader Linien, die einen Punkt gemein haben, und zur Lösung dieser Aufgabe durch den Winkel in der Ebene, als derjenigen Fläche, welche von einer andern derselben Art in nicht mehr, als einer geraden Linie geschnitten wird. Aus dieser, durch jene Aufgabe sich als nothwendig ergebenden Definition der Ebene, ist dann die gewöhnliche abzuleiten: dass sie diejenige Fläche ist, in welcher nach allen Richtungen gerade Linien gezogen werden können. Nach diesen Grundbegriffen — andres, als weniger hieher gehörig, übergehe ich — kam ich wieder zur Parallel-Theorie und fand darüber Folgendes. Die von dieser Theorie unabhängigen Sätze Euklids setze ich voraus. Von dem geradlinigten Winkel, und der Oefnung seiner Schenkel ging ich wieder aus.

I) Die Basis eines gleichschenklichten Dreiecks ABC, welches entsteht, wenn auf beiden Schenkeln eines geradlinigten Winkels vom Scheitel aus gleiche Abschnitte genommen, und deren Endpunkte durch eine gerade Linie verbunden werden, wächst mit grössern Abschnitten über jede endliche Gränze hinaus.

Beweis. Man setze der Satz sey falsch: so muss es für jene Basis irgend eine Gränze geben. Sie sey gleich der endlichen Linie $L = BC = CD = DE$, welcher sich jene Dreiecksbasen asymptotisch mehr und mehr nähern, je weiter sie vom Scheitel A abstehen.

Man denke sich an dem Winkel BAC die Punkte B, C in unendlicher Entfernung vom Scheitel A (oder in einer Projection so, dass bei Verkürzung der Abstände AB, AC, die Winkelschenkel am Scheitel A

noch innerhalb der alsdann krummen Linien AB, AC liegen, und erst im unendlichen asymptotisch sie erreichen), ziehe darauf in derselben Ebene die geraden AD, AE etc., so dass $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAD = \sphericalangle DAE$ etc., wiederhole es, bis der Winkel $BAE > 90^0$. (Dass dieses möglich ist, lässt sich aus der unendlichen Theilbarkeit des Raumes streng beweisen. Doch bedarf es hier keines Weitern, und ich erwähne das nur, weil ein solcher Beweis für die oben angedeutete Art einer Begründung der Geometrie nothwendig gehört.) Alsdann wäre (Euklid I, 19, 20) $EB < BC + CD + ED$ etc. $< nL$, wenn n, L endliche Grössen, und zugleich $> AB$ d. i. ∞, welches widersprechend.

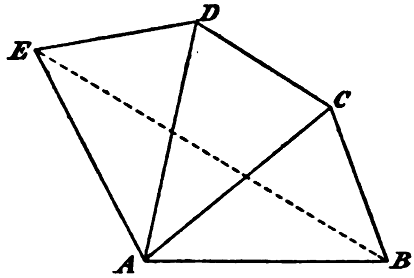


Fig 2.

2) Das Gränzverhältniss der Peripherie des mit unendlichem Radius beschriebenen Kreises, oder auch nur des einem Winkel BAC entsprechenden Theils zu diesem Radius, ist $= \infty$.

Beweis. Der Winkel BAC kann ins unendliche fort in kleinere Winkel getheilt werden. Von jedem gilt Satz (1), d. i. das Gränzverhältniss des ihm entsprechenden Theils der Peripherie zum unendlichen Radius ist $= 1$ und für n solche Winkel $= n$. Da nun jene Theilung keine Gränzen hat, so hat auch n keine Gränzen, (und wächst fort bis ∞?)

Auf diesen Satz gründete ich nun, nach mehrern vergeblichen Versuchen für oder gegen die Euklideische Parallel-Theorie, einen Beweis gegen sie. Ich glaube aber nicht, dass er Ihre Billigung finden kann, so wie ich ihn auch jetzt nicht mehr für bindend halte, und er mir von neuem zeigte, wie man beim Gebrauche des Begriffs ∞ nie vorsichtig genug seyn kann; — er stehe hier nur um des ferneren sich an ihn knüpfenden Ideengangs willen.

3) In der Euklideischen Paralleltheorie haben die Parallel-Linien überall gleichen Abstand; also würde das Verhältniss des Perimeters des Quadrats von unendlich grosser Seite, zu dieser Seite $= 4:1$ seyn. (Weil nun aber sowohl durch dieses Quadrat, da über den überall unendlich weit von einander abstehenden Seiten kein Theil der Ebene weiter hinausliegt, als auch durch die mit unendlich grossem Radius beschriebene Kreisfläche die ganze unendliche Ebene umfasst wird, und derselbe Perimeter nach S. (2) $= \infty$, nach S. (3) aber $= 4$ ist, so ist dieses widersprechend, und die Euklideische Theorie muss falsch seyn.) In der ihr entgegengesetzten wird dieser Widerspruch aufgehoben, weil dort eben-

falls der Abstand der Parallelen, so wie der Winkelschenkel über jede endliche Grösse hinaus wächst.

Also die anti-Euclideische oder Ihre Geometrie wäre wahr. Die Constante in ihr aber bleibt unbestimmt: warum? liesse sich vielleicht durch folgendes begreiflicher machen.

Wenn in einer Ebene die geraden AB, AC, BD und $\sphericalangle CAB + \sphericalangle DBA < 180^0$ gegeben sind, soll entschieden werden, ob die BD die AC schneide oder nicht. Hier ist nun zu bemerken, dass die Ebene durch die 3 Punkte A, B, C völlig gegeben ist, dass sie aber, nach meiner oben gegebenen Erklärung, nur in so fern construirt wurde, als die Lage von drei Punkten zu bestimmen war, und im allgemeinen also auch nichts weiter leisten kann, als dieses. Jetzt aber ist von einem Problem von 4 Punkten die Rede, da zu A, B, C noch ein 4ter Punkt in derselben Ebene hinzukommen muss, um die Lage von BD zu bestimmen, und es handelt sich also hier um einen speciellen Fall des allgemeinen Problems der Lagebestimmung von 4 Punkten, welches nur durch räumliche Construction zu lösen möglich ist. Mithin nur durch Herausgehen aus der Ebene kann entschieden werden, ob die BD die AC schneide oder nicht; aber auch, dass es überhaupt unentschieden bliebe, wäre sehr wohl denkbar. Es könnte als zufällig erscheinen, dass die Natur der geraden Linie und der Ebene, anfänglich durch ganz andere geometrische Beziehungen bestimmt, auch schon implicite eine bestimmte auf den Parallelismus Bezug habende Eigenschaft in sich schlösse. — Aber gesetzt: jenes müsste also, dem Wesen der geraden Linie und Ebene nach, wirklich unbestimmt bleiben, gäbe es dann keine Geometrie über Euklid's 28 Satz hinaus?

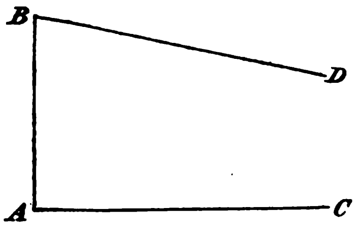


Fig. 3.

1) Gewiss nicht, sobald man bei der geraden Linie und Ebene stehen bleiben wollte.

Mithin mit derselben Nothwendigkeit, mit der die Bildung der geraden Linie und Ebene zur Lagebestimmung von 2 und 3 Punkten gefordert wurde, würden jetzt Linien gefordert, welche jene bestimmte Eigenschaft der Euklid. Parallelen haben, weil ohne diese alle Geometrie aufhören würde. Jenes Gerüste müsste dann wieder fallen; gerade Linie und Ebene träten in das Gebiet anderer Linien zurück, und es wären eben so, wie für diese, Gleichungen darzustellen, nur mit der ihnen nothwendig beiwohnenden Unbestimmtheit; — nur Verhältnisse könnten gegeben werden, und Ihre transcendente Trigonometrie wäre es, welche dieses leistete.

2) Diese Linien mit ihrer Ebene wären auch bald gefunden. Es sind die grössten Kreise einer mit unendlich grossem Halbmesser beschriebenen Kugelfläche. Wenn sonst die Geometer, um den Begriff der Ebene festzustellen, sagten: man solle sich eine Fläche denken, in der nach allen Richtungen hin gerade Linien möglich: — würde man jetzt, um die Vorstellung der nothwendigen Fundamentalfläche zu erhalten, fordern: sich eine Kugelfläche ins unendliche hin erweitert zu denken. Alles käme nur darauf an, dass diese classische Fläche nur auf einzige Weise möglich sey. Wäre sie es nicht: so versänke alle Geometrie in einem unbestimmten Unendlichen; das Loos des Geometers sowie des ganzen menschlichen Geistes könnte furchtbar genannt werden; es gäbe nichts absolut Wahres, keine Geometrie, keine Astronomie, keine Physik; alles läge vergraben in dem unergründlichen Meere des unendlich mal unendlichen Raumes. Wunderbare unbegreifliche Gränzen der menschlichen Fassungskraft; — nicht einmal wesenlose, ohne göttlichen Geisteshauch todte Raumformen vermöchte selbständig zu erschaffen der Mensch. Aber es ist zum Glück nicht so. Denn, wie man sich leicht überzeugen kann, ist jene unendliche Kugelfläche nur einzig, oder wenigstens eine mit der andern symmetrisch.

3) Auf jener Kugelfläche gilt offenbar die ganze Euklidische Geometrie, aber nur bis zur Stereometrie, welche unbestimmt bleibt. Nur in einem Raume mit vier Dimensionen würde auch diese sich geben lassen. Man denke sich nemlich als möglich, dass über der geraden Linie ACB statt 2 Recht. Winkel 4 R. W. lägen, und beschreibe mit dem Radius CA einen Halbkreis $ADEB$, ziehe CD und CE so, dass $ACD = BCE = 90^0$. Dann würde man das einemal eine Kugel beschreiben, für welche CD die Aequatorebene bildete, das andremal eine für CE. Beide Kugeln würden eine Berührung der dritten Art, oder eine körperliche Begränzung an ihrem Durchschnitt haben. Man denke sich diesen körperlichen Raum zu einer Fläche zusammengezogen. Dann wäre diese die für die Stereometrie klassische Fläche, durch welche der Raum bei stereometrischen Constructionen begränzt gedacht werden müsste. —

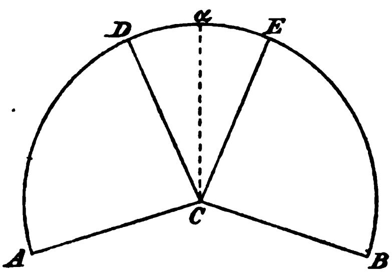


Fig. 4.

Vor kurzem suchte ich die Construction des Fundamentalkörpers, (der, was der Würfel für den Raum von drei Dimensionen) allgemein für einen Raum von beliebig vielen Dimensionen. Ich fand, dass dieses, wofern eine gewisse Schlussart richtig ist, mit der Zahl der rechten Winkel um einen Punkt in der Ebene zusammenhänge, dass nämlich der Raum n Dimensionen haben würde, wenn die Summe der rechten Winkel um einen Punkt herum $= 2^{n-1}$, und dass dann die Zahl der Ecken des Fundamentalkörpers in diesem Raum von n Dimensionen durch 2^n, die Zahl der Begränzungen der ersten Art von der Dimension $(n - 1)$ für jede Ecke durch n, und die Zahl derselben, der Gränzkörper von der Dimension $(n - 1)$ für den ganzen Körper durch $2n$, die Zahl der Berührungen der zweiten Art von d. Dim. $(n - 2)$ durch $4n$, sein körperlicher Inhalt, wenn die Seite L, durch L^n, und seine Diagonale durch $L\sqrt{n}$ gegeben werde. — Von einer andern Seite lässt sich zeigen: dass wenn es möglich, dass eine gerade Linie Zweige habe, sie derselben unendlich viele, und auch der Raum unendlich viele Dimensionen haben würde. Auf gewisse Weise könnte man sagen, dass auch in Ihrer, der antieuklideischen Geometrie, der Raum unendlich viele Dimensionen habe, die aber alle wieder im unendlichen liegen. Nämlich es sey*) BAC ein rechter Winkel, AD die Constante für das rechtwinklichte asymptotische Dreieck, dessen anderer Winkel $= 45^0$; der rechte Winkel werde durch AD halbirt, dann liesse sich dieselbe Construction durch DE, EF u. s. w. an den Punkten D, E, F u. s. w. wiederholen, ohne dass die Linie AC jemals erreicht würde, — und dieses auf analoge Art räumlich gedacht gäbe innerhalb des von den drei

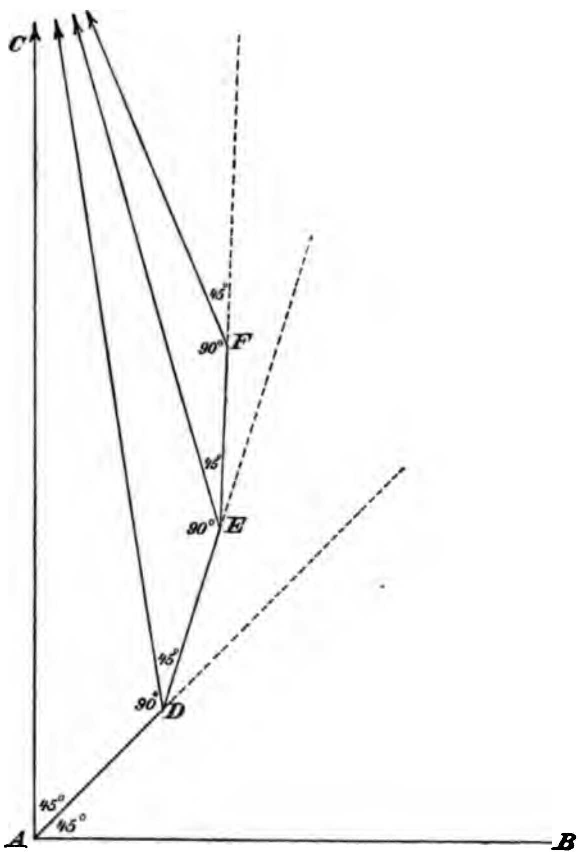


Fig. 5.

*) [Die flüchtig gezeichnete Figur des Originals ist durch eine genauere ersetzt worden. St.]

rechtwinkligen Ebenen begränzten Raumes körperliche Ecken, welche zuerst durch 3 Ebenen von 45^0 Oeffnung begränzt, der Reihe nach durch eben so viele Körper von der Dimension 3, 4, 5 u. s. w. bis ∞, begränzt gedacht werden könnten.

Das Resultat des Bisherigen wäre also so auszusprechen:

Die Euklideische Geometrie ist falsch; aber dennoch muss die wahre Geometrie mit demselben elften Euklideischen Axiom d. i. mit dem Postulat von Linien und Flächen anfangen, welche die in jenem Axiom behauptete Eigenschaft haben. Statt der geraden Linie und Ebene sind nur die grössten Kreise jener mit unendlichem Radius beschriebenen Kugel nebst ihrer Oberfläche zu setzen. Es entsteht zwar die eine Unbequemlichkeit daraus, dass die Theile dieser Fläche bloss symmetrisch, nicht wie bei der Ebene, congruent sind, d. i. dass der Radius nach der einen Seite hin unendlich, nach der andern imaginär ist; allein wie jene Unbequemlichkeit durch viele andere Vortheile, welche die Construction auf einer Kugelfläche darbietet, wieder aufgewogen werde, ist klar: sodass vielleicht auch dann noch, wenn die Euklideische Geometrie wahr wäre, zwar nicht mehr die Nothwendigkeit obwaltete, die Ebene als eine unendliche Kugelfläche zu betrachten, aber doch noch die Fruchtbarkeit dieser Ansicht dieselbe empfehlen könnte.

Allein als ich alles dieses durchdacht, als ich mich über das Resultat schon völlig beruhigt hatte, theils weil ich glaubte der Grund (la métaphysique) jener der Geometrie nothwendig anhaftenden Unbestimmtheit, — auch selbst der vollendeten Unentschiedenheit in dieser Sache, dann, wenn jener Beweis gegen die Euklideische Geometrie, wie ich nicht erwarten durfte, nicht für stringent zu halten sey — [, lasse sich aufklären]; theils weil doch alle die vielen bisherigen Untersuchungen aus der ebenen Geometrie nicht für verloren zu achten: sondern mit einigen Modificationen zu gebrauchen wären, und denn doch wenigstens bis zu einer ziemlich weiten Gränze hin, die sich vielleicht auch näher bestimmen liesse, auch die Sätze der körperlichen Geometrie und der Mechanik näherungsweise Gültigkeit hätten; fand ich heute Abend — eben mit einem Versuch beschäftigt, einen Eingang zu Ihrer transcendenten Trigonometrie zu finden, und weil es mir nicht gelingen wollte, in der Ebene dafür hinreichende, bestimmte Functionen zu erhalten, zu räumlichen Constructionen fortgehend, — zu meiner nicht geringen Überraschung folgenden Beweis für die Euklideische Parallel-Theorie.

1) Man beschreibe mit einem asymptotischen rechtwinklichten Dreieck einen geraden Kegel, welches möglich nach Eukl. XI. Lehrs. 4. Die krumme Oberfläche desselben wird also ebenfalls mit der Basis asymptotisch zusammenlaufen.

2) Man nehme vom Scheitel A aus in der Oberfläche des Kegels drei gerade Linien AB, AC, AD, so dass alle drei in dieselbe Halbkegelfläche fallen; und lege durch je zwei AB u. AC, AB u. AD, AC u. AD Ebenen resp. $ABCA$, $ABDA$, $ACDA$, von denen also jede nur in den zwei gegebenen geraden Linien von der Kegelfläche begränzt und ausserdem in keiner andern von ihr geschnitten wird. *Ferner können diese Ebenen nicht die Kegelbasis schneiden, weil sonst auch ihre Gränzen AB, AC, AD sie schneiden würden* *) gegen die Construction (1). Mithin müssen diese Ebenen soweit sie innerhalb des Kegels liegen, mit der Basis, also auch mit der Oberfläche des Kegels asymptotisch zusammenlaufen, und werden daher einen asymptotischen Raum einschliessen.

3) Man setze, von den Linien AB, AC, AD liege AC in der Mitte, sodass der ebene Winkel $BAD > BAC > CAD$, und ziehe aus irgend einem Punkte der begränzten Ebene $ABDA$ ein Perpendikel auf dieselbe (es wird hier nur gefodert, dass es ein solches Perpendikel gebe, (Eukl. XI Lehr. 4), nicht [dass es] eigentlich construirt werde, obgleich auch diese Construction, welche bei Euklid die Paralleltheorie voraussetzt, unabhängig und zwar mit mehr Concinnität durch die Kugel geleistet werden könnte), so muss dieses gehörig verlängert, aus jenem asymptotischen Raum (2) wieder herausgehen, und also die Ebenen $ABCA$ oder $ACDA$ schneiden. Durch einen Punkt dieses Perpendikels, innerhalb des asymptotischen Raums, denke man sich eine Ebene, parallel der Ebene $ABDA$ d. i. eine solche, auf welcher jenes Perpendikel ebenfalls senkrecht steht. Dieselbe wird entweder eine der Ebenen $ABCA$ oder $ACDA$ oder beide u. in diesem Falle auch ihre gemeinschaftliche Durchschnittslinie AC schneiden, und aus der Figur der Durchschnittslinie würde, wie man sich leicht überzeugt, folgen, dass entweder eine Ebene eine andere in mehr als einer geraden oder in einer krummen Linie schneiden, oder folgen, dass entweder eine gerade Linie, oder zwei eine Ebene begränzen könnten, welches unmöglich.

Also ist kein solcher asymptotischer Kegel möglich, also auch kein solches asymptotisches Dreieck. W. Z. B. W.

Der Beweis hätte sich übrigens auch leicht auf den Satz zurückführen lassen, dass zwei gerade Linien nicht zugleich in einem Punkte einander schneiden, und nach der andern Seite hin asymptotisch zusammenlaufen können.

Könnten Sie übrigens, grosser Mann! dieses und anderes Aehnliche Ihrer Billigung nicht unwerth achten: so wäre ich geneigt, in einiger

---

*) [Das *cursiv* gedruckte ist im Originale rot unterstrichen.]

Zeit, unter dem Namen: Philosophie der Mathematik, ein Werk erscheinen zu lassen, welches die Grundprincipien dieser Wissenschaft, der Arithmetik, Geometrie und Analysis, und vielleicht auch der reinen Mechanik enthalten soll. Schon vor geraumer Zeit wurde ich von zwei Männern, welchen in deutscher Philosophie, Art und Kunst, eine bedeutende Stimme zuerkannt wird, von Bouterwek und Fries dazu ermuntert, meine Ansichten über Mathematik, so weit diese mit der Philosophie zusammenhängt, bekannt zu machen. Ich zögerte, einestheils weil ein solches Unternehmen nur durch die strengste mathematische Analyse begründet werden darf, und mir hier noch manches fehlte; und dann auch, weil ich durch längeres Studium, vorzüglich des Plato, mir eine gewisse Form der Darstellung anzueignen hoffte, von welcher jenes Werk, das auch einen rein philosophischen Theil erhalten musste, nicht entblösst sein sollte. Würden Sie urtheilen, dass dasselbe von mir nicht temere susceptum sey: so würde es mir zum grossen Glücke gereichen, wenn ich dann dem Zuge meines Herzens folgen und diese Arbeit, von der ich alles, was von eigentlich mathematischem Sinn zeugen könnte, nur Ihnen zu verdanken hätte, als ein öffentliches monumentum pietatis Ihnen weihen dürfte.

Gerade im Begriff zu schliessen bemerke ich noch, dass der obige Beweis für die Eukl. Parallel-Theorie fehlerhaft ist. Der Fehler liegt offenbar in den roth unterstrichenen Zeilen. Der Durchschnitt jener drei Ebenen mit der Kegelbasis geschieht nur in einem asymptotischen Dreieck, dessen 3 Winkel = 0 sind. Gäbe es eine von drei ebenen Winkeln begränzte körperliche Ecke, von denen der eine Winkel = der Summe der beiden übrigen, so liesse sich auch dann noch der Beweis führen; aber dieses ist nicht möglich. — Also wäre auch hier die Hofnung verschwunden, zu einem völlig entschiedenen Resultat zu kommen, und ich muss mich wieder bei dem vorhin Angeführten beruhigen. Übrigens glaube ich auf jenem Wege wenigstens einen Schritt zu Ihrer transcendenten Trigonometrie gethan zu haben, indem ich mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie, die Verhältnisse aller Constanten, wenigstens durch Construction in rechtwinklichten Dreiecken, angeben kann. Es fehlt mir noch die wirkliche Berechnung der Basis eines gleichschenklichten Dreiecks aus der Seite, wofür ich suchen werde vom gleichseitigen Dreieck auszugehen. . . .

Wachter an Gauss. Danzig, den 25. Februar 1817.

Wohlgeborener,

Hochgeehrtester Herr Professor,

Sie haben noch nicht die Güte gehabt, verehrtester Lehrer, meinen Brief vom Dec. v. J. zu beantworten, und ich muss daraus schliessen, dass sie ihn keiner Antwort würdig geachtet haben. Mir wollte es später, in der Erinnerung, selbst so scheinen, als sei manches noch zu schülerhaft, Wahres mit vielem Halbwahren vermischt gewesen, als dass Sie es Ihrer Aufmerksamkeit hätten werth halten können. Es bleibt mir nichts anders übrig, als dass ich versuche, meinen Fehler wieder gut zu machen, indem ich Ihnen etwas Gediegeneres mitzutheilen wage, im Vertrauen auf Ihre gütige Nachsicht.

Sie finden mich nach zweimonatlicher Unterbrechung wieder zu demselben Punkte zurückgekehrt, zur Paralleltheorie. Ich weiss nicht, ob es meine wissenschaftliche Ausbildung hindern oder fördern mag, dass ich mich immer noch an der Schwelle der Mathematik herumdrehe; ich muss selbst fürchten, dass Sie solches sehr missbilligen werden; allein einestheils treibt mich leider der Elementarunterricht, zu dem meine Verhältnisse mich nöthigen, immer wieder dazu zurück; und dann auch glaube ich ein tieferes Eindringen in die Wissenschaft, durch ein völliges Klarwerden über ihre Grundbegriffe und Methode, erst gehörig begründet zu haben. Genug, ich hoffe, dass diesmal mein Bemühen nicht vergebens gewesen ist, und ich glaube jetzt, das Räthsel der Paralleltheorie gelöst zu haben.

Vor einigen Tagen ergab sich mir die Idee, und ich hielt sie fest, dass der Satz: Durch jede 3 Punkte in der Ebene sei ein Kreis möglich, nicht erst durch Hülfe der Paralleltheorie: sondern umgekehrt diese durch jenen erwiesen werden müsse. Allein es zeigte sich bald, dass der letztere Beweis auch nicht möglich. Es blieb nichts anders übrig, als zu 4 Punkten fortzugehen, und zu untersuchen, ob durch jede 4 Punkte im Raume eine Kugelfläche möglich, oder nicht möglich; mit welcher Untersuchung die ganze Geometrie stehen, oder fallen muss. Es gelang mir bald der Beweis, und ich wage es, Ihnen hier die Grundzüge desselben vorzulegen. Ich setze dabei voraus, dass das 11te Euklidische Axiom falsch sei, und zeige, dass jener Satz wahr sei, völlig unabhängig von aller Paralleltheorie.

1) Postulat. Durch jede 4 Punkte im Raume ist eine Fläche möglich, welche von einer andern, einzig und allein durch 4 Punkte bestimmten, in nicht mehr als einer allein durch 3 Punkte bestimmten

Linie geschnitten wird. Ich sehe dieses als die Definition der Fläche an, welche ich kurz die Fläche der 4 Punkte nennen will.

Es ist dieses das allgemeinste und einzige Postulat der Geometrie, von dem die Postulate einer Ebene durch 3 Punkte, oder der geraden Linie durch 2 Punkte, oder auch einer krummen Linie durch 3 Punkte in einer Ebene, nur besondere Fälle sind. Ich bin überzeugt, dass sich dieses Postulat zur höchsten Evidenz bringen lässt, und man muss es entweder zugeben, oder die ganze Geometrie läugnen.

2) Theorem. Die Fläche von 4 Punkten schliesst einen Raum ein.

Gesetzt es sei falsch, so wird sie entweder durch eine Ebene irgend wo asymptotisch begränzt, oder es giebt für sie keine solche asymptotische Ebene zur Gränze.

I. Man setze, sie habe eine solche Gränze. Dann fälle man aus irgend einem Punkte der Fläche eine Senkrechte auf diese asymptotische Ebene. Aus ihrem Durchschnittspunkte mit der Fläche giebt es eine gerade Linie, welche Asymptote der asymptotischen Ebene. Mit dieser beschreibe man einen asymptotischen Kegel, welcher entweder die Fläche in einem Theile schneidet, sodass gerade Linien in der Kegelfläche erst aus der inneren Seite der Fläche von 4 Punkten auf die äussere treten, und später wieder asymptotisch diese Fläche zwischen sich und der asymptotischen Ebene (der Kegelbasis) einschliessen, oder die Fläche bloss von innen asymptotisch berühren. In beiden Fällen ist eine (Berührungs)ebene an der Kegelfläche möglich, welche im letztern Falle die Fläche von 4 Punkten in zwei Linien (von drei Punkten) schneidet, gegen die Definition, oder im ersteren Falle in einer Linie von solcher Gestalt dass die beiden Zweige $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ asymptotisch zusammenlaufen, welches aber eine Linie nicht von 3 Punkten, sondern von 4 Punkten seyn würde, ebenfalls gegen die Definition.

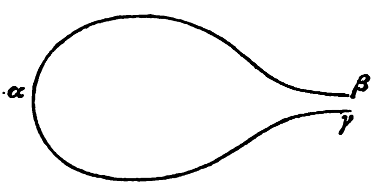


Fig. 6.

Der zweite Theil des Beweises ist leichter, da er sich auch schon von der Linie durch drei Punkte in einer Ebene auf gleiche Weise führen lässt, welches von dem ersten Fall des vorigen Theils nicht gilt, denn sonst brauchte man bei dem ganzen Beweise für das 11te Eucl. Axiom nicht aus der Ebene herauszugehen. Doch fand ich diesen Theil des Beweises erst später, und erst nach erhaltener Überzeugung, dass er in vier Dimensionen möglich.

II. Man setze die Fläche von 4 Punkten habe keine asymptotische Ebene. Es werde eine Ebene A so durch die Fläche gedacht, dass sie dieselbe in keiner geschlossenen Linie schneidet. Andere Ebenen darauf senkrecht, und unter einander parallel, werden mithin, der Hypothesis gemäss, bis ins unendliche fort die krumme Fläche schneiden. Darauf wähle man irgend 3 Punkte in dieser Fläche, nur nicht in der Ebene *A*, sondern auf einer Seite derselben, und beschreibe durch sie eine Kugelfläche von unendlich grossem Halbmesser, welche, wie leicht zu beweisen, ihre hohle Seite der convexen der Fläche von 4 Punkten zukehren und in den hohlen Raum der letzteren eintreten wird. Der Durchmesser der Kugel ist die Linie, die auf einer Ebene durch jene 3 Punkte senkrecht, und schneidet entweder die Ebene *A* oder irgend eine andere dieser parallelen Ebene. Woraus mit Hülfe der Sätze, die ich schon bei Gelegenheit der Metternichschen Recension in der Zeitschrift bewiesen, *folgen**) würde, dass der Mittelpunkt der Kugel wieder ausserhalb *des von* der hohlen Fläche umgebenen Raumes fallen müsste; als die *Ebene* die krumme Fläche noch in einer zweiten Linie schnitte; gegen die *De*finition.

3) Theorem. Die Fläche von 4 Punkten ist eine geschlossene, und mithin eine Kugel. Wie leicht zu beweisen.

4) Theorem, Durch jede 3 Punkte in der Ebene ist ein Kreis möglich. Folgt aus Th. 3.

5) Beweis für das 11te Axiom.

Es kann seyn, dass ich mich irre, allein ich habe mich so von der Evidenz meines Beweises überzeugt, dass ich wagte, ihn drucken zu lassen. Wenige Seiten darüber enthalten die im vorigen angedeuteten Beweise; zwar nur kurz, weil ich sonst fürchtete, wiederholt in den im vorigen Briefe an Sie begangenen Fehler der Weitläufigkeit zu verfallen; allein ich glaube, dass es für den eigentlichen Mathematiker hinreichen wird. In wenigen Tagen werde ich so frei sein, ein Exemplar der Abhandlung an Sie abgehen zu lassen.

Indem ich bescheiden die Hoffnung hege, dass Sie mir, verehrtester Lehrer, Ihr richtendes Urtheil über meinen Beweis nicht vorenthalten wollen, verharre ich in unbegränzter Hochachtung

Ihr

ergebener

F. L. Wachter.

*) [Der Brief ist stellenweise beschädigt. Die ergänzten Worte hier und im Folgenden sind durch *cursive* Typen gekennzeichnet worden.]

Wachter an Bessel. Danzig, den 17. März 1817.

... Der Titel der beiliegenden Abhandlung empfiehlt sie nicht als eine solche, welche man mit vielen Erwartungen zur Hand nehmen könnte. Die vielen meist sehr zuversichtlich angekündigten, aber misslungenen Versuche einer Begründung der Euklideischen Parallel-Theorie haben das Zutrauen, das man sonst in neue Versuche über diesen Gegenstand setzen durfte, fast vernichtet. Dennoch bleibt die endliche Vollendung dieser zweifelhaften Lehre ein Bedürfniss, ohne dessen Befriedigung alle Geometrie nebst ihrer Anwendung auf blossem empirischen Glauben beruhen müsste, — einer Überzeugungsart, welche dieser Wissenschaft völlig fremd, ja geradezu entgegengesetzt ist. Allein gerade der Mangel an allgemeinerer Verbreitung der ächten mathematischen Methode zeigt sich auch nirgends deutlicher als hier, wo man sich in einem steten logischen Kreise herumgedreht hat. Der wirkliche Beweis dafür, dass bei allen bisherigen Versuchen über Parallel-Theorie ein solcher Kreis zum Grunde liegt, ist nicht schwer zu führen; und es bleibt in der Geschichte der Mathematik gewiss merkwürdig, dass noch niemand die Wahrheit des elften euklideischen Axioms bezweifelt hat, wie es, der Form nach, schon die sonst gebräuchliche apagogische Beweisart mit sich gebracht haben würde; und wie es des Geometers allein würdig gewesen wäre, wenigstens die Folgen zu entwickeln, die Statt haben müssten, sobald dieser Satz vielleicht falsch, oder doch völlig unbeweisbar war. Doch diese Folgen, von denen einige interessant genug scheinen, darzulegen, kommt mir — obgleich ich der erste gewesen bin, der die ersten, aus einer dem elften Axiom entgegengesetzten Hypothesis handgreiflich folgenden Sätze angedeutet hat, in einer in der astronom. Zeitschrift abgedruckten Recension, — weniger zu als Gauss, der, wie ich später von ihm erfuhr, schon seit vielen Jahren mit solchen Entwickelungen beschäftigt gewesen ist. Ich bin nur froh, mich durch meine jetzige Arbeit von einer viermonatlichen Qual befreit zu haben, die durch ein völliges Verzweifeln an der Wahrheit der euklideischen Parallel-Theorie, mithin an der Möglichkeit aller Geometrie über den 28ten Satz des Euklides hinaus, denn auch keine andere ihr entgegengesetzte Geometrie könnte als wahr begründet werden — und durch den daraus unmittelbar folgenden Zweifel an aller, so weit sie von der Geometrie abhängig, absolut wahren Astronomie und Physik, entstanden war.

Das von mir zum Beweis des elften Axioms gebrauchte Verfahren ist in sich selbst klar, und ich muss nur wünschen in der Ausführung desselben durch mein Streben nach gedrängter Kürze nicht in den Fehler der Unverständlichkeit gefallen zu seyn. ...

Wachter, der Vater, an Gauss. Hamm, den 10. Mai 1817.

... Welche grosse Pläne hatte er noch! Als er mir sein letztes Werk die *Demonstratio axiomatis geometrici in Euclideis undecimi* übersandte, räsonnirte er vieles über die interessanten Folgen, die es gehabt hätte, wenn die Euclidische Geometrie nicht wahr wäre, deren Wahrheit er nun durch seine Schrift bewiesen zu haben überzeugt war. Indem er mir ihre Entstehungsgeschichte in seinem Kopfe meldet, sagt er:

„Hätte ich in gewöhnlichem Tone schreiben wollen, so hätte ich 5—10 Bogen gebraucht und Kupfertafeln, die ich hier schwerlich erhalten konnte. Ich habe mich der grössten Kürze befleissigt, sodass es jedem andern Mathematiker als H. *Gauss* schwer seyn wird, zu folgen. Es mag auch interessant scheinen, das, worüber seit Euclides Zeiten, Quartanten sind vergebens gearbeitet worden, auf einem einzigen Bogen ausgeführt zu sehen. Sie sehen, dass ich mit vieler Zuversicht schreibe. Aber halten Sie das nicht für Folgen meiner Phantasie, die Ihnen viel zu lebhaft scheint, sondern seyen Sie versichert, dass ich dabei so nüchtern gewesen bin und noch bin, dass ich am Ende nicht weiss, wohin mich diese Nüchternheit noch führen wird. Ich sollte viel Freude über das Gelingen meiner Arbeit empfinden, aber ich empfinde sie nicht. Ich habe das gefunden, wovon ich früher glaubte, wenn ich das erreicht, ruhig aus dieser Welt scheiden zu können. Ich könnte hoffen, viel Ruhm einzuärnten, für die Lösung eines Problems, für das die Anstrengung zweier Jahrtausende bisher nicht hingereicht hatte. Doch hiernach wäre der Werth dieser Arbeit zu gering angeschlagen. Man hat bisher noch gar nicht einmal daran gedacht, die eminenten Folgen zu überblicken, die es hätte, wenn die Paralleltheorie nicht wahr wäre. Man hat nicht mal gewagt, an der Wahrheit des 11ten Eucl. Axioms zu zweifeln, obgleich alle Bemühungen es zu beweisen vergebens waren, und es des Geometers nicht allein würdig, sondern ihm selbst nothwendig war, so lange auch das Entgegengesetzte dieses Satzes für möglich zu halten. Dass dieses nicht geschehen, ist ein sehr böses Zeichen für den Zustand der Wissenschaft und des geometrischen Sinnes. Man muss durchaus verzweifeln ächt mathematischen Sinn als Gemeingut unter die Menge zu bringen, vielleicht noch mehr als ächt ästhetischen und rein philosophischen Sinn zu verbreiten. Es giebt keine Schulen für reine Geometrie; sondern bloss empirische für den Tastsinn, gleichviel äussern oder innern, auch die sogenannte intellectuale Anschauung gehört hieher. — Es giebt in der Mathematik kein Axiom; will man sie, so muss man die Wissenschaft aufheben. Der einzige Mathematiker, von dem man hoffen darf, das anerkannt zu sehen, ist *Gauss*; er ist aber der einzige lathematiker, den es giebt und gegeben hat, und er ist noch viel zu enig anerkannt. Von Männern wie *Newton*, *La Grange*, *La Place*, *Le* 'endre, *Euler*, *Euclid*, *Archimed*, *Apollonius etc.* kann man dieses nur ι so fern sagen, als es die mathematischen tiefsinnigen Combinationen nd Anwendungen auf Astronomie und Physik betrifft. Die Principien, on welchen alles abhängt, haben sie nicht weiter gebracht. Ein Glück, ass der menschliche Geist eine solche Organisation besitzt, dass ein iner Tact oft eben so sicher leitet, als eine wissenschaftliche Überugung, und jener führt schneller zum Ziele als das meistens mühsam haltene. Hätte man gewartet bis die Principien aufs Reine gebracht aren: so wäre in höherer Mathematik und Physik bis dahin gar nichts eschehen. Hierin könnte sich das Walten eines höheren Geistes über en Menschen offenbaren, der dem menschlichen Geiste instinktartig einiebt, was ihm zuvörderst zu wissen noth thut. — Mich aber kann so was nicht befriedigen. Indess mein Geschäft ist geendigt; mir kommt nicht zu, die Wahrheit dieses Gegenstandes vor Augen zu legen. Ein rt für die Auseinandersetzung der mathematischen Methode kann in ukunft meine Philosophie der Mathematik werden. Dieselbe zu schreiben, ält mich nichts weiter ab, als noch nicht getriebenes Studium der latonischen Formen und Mangel an Aufmunterung von aussen, und daher Lust das, was ich selbst für mich lange besitze, und mir unwiderrechlich klar ist, zu Papier zu bringen. — Indess begnüge ich mich, urch die Lösung jenes Problems mich von einer 4 monatlichen Qual nd Pein wegen meines Zweifels an der Wissenschaft befreit zu haben, und as ist mir genug. Fremdes Urtheil kann dazu wenig hinzuthun oder ntfernen. — In dieser Welt erwarte ich kein Heil für Mathematik. Die nathematische Methode ist ein Extrem, das Äusserste der geistigen Abtraction, und in dieser Welt lässt Mangel an abstractem Sinn und an gehöriger Leitung dazu oder andere davon abziehende historische Wissenschaften oder das Practische ihres Lebens oder Mangel an Selbstdenken wenige zu diesem Äussersten kommen. — Verzeihen Sie mir diesen Ton, in den ich gefallen bin; er ist nicht böse; ich überhebe mich nicht über mich selbst; ich überhebe mich nicht über andre; ich weiss was ich, wie viel ich besitzen mag, und dies ist ein Minimum, aber schon das ist viel, etwas Rechtes zu wissen; wenigstens mehr als andre, die sich mit einer Masse von Kenntnissen brüsten, ohne zu wissen, wie und warum ihnen diese Kenntnisse geworden sind.“ . . .

Beweis des geometrischen Axioms, das bei Euklid das elfte ist.

Von

Dr. Friedrich Ludwig Wachter.

Danzig 1817.

Vorrede.

Nur wenig habe ich vorauszuschicken. Bekanntlich hat der im Folgenden behandelte Gegenstand bis jetzt jeder Anstrengung der Geometer gespottet, ja der grösste Geometer hat vor kurzem versichert (Götting. gel. Anzeigen. April 1816), die ganze Theorie der Parallelen habe von den Zeiten Euklids bis auf diesen Tag durchaus keinen Fortschritt gemacht. Daher schien es sicher, dass die bis jetzt zur Lösung dieses schwierigen Problems angewandten Methoden niemals zum Ziele führen werden, und ein andrer, von den früheren völlig verschiedener Weg war einzuschlagen. Die Sache der Kenner ist es jetzt, zu beurteilen ob wir dem Ziele näher gekommen sind; davon bin ich wenigstens überzeugt, dass man die Ursachen, die bewirkten, dass ein glücklicherer Erfolg bis jetzt versagt war, aus dem Folgenden mit Leichtigkeit erkennen wird.

Was die Behandlung des Gegenstandes betrifft, so haben wir für Gelehrte, nicht für Anfänger geschrieben und uns auf Details nicht einlassen wollen; Lehrsätze, deren von der Theorie der Parallelen unabhängigen Beweis jeder leicht finden wird, haben wir nur flüchtig gestreift. Überhaupt glauben wir den Dank der Geometer dadurch verdient zu haben, dass wir uns der grössten Kürze befleissigten, denn so wird, wie wir hoffen, der wahre Nerv des Beweises um so leichter erkannt werden.

Geschrieben Danzig, den 24. Februar 1817.

1.

Lehrsatz. *Leugnet man das elfte Axiom*, so giebt es aus
lem Punkte auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels
ne gerade Linie, die den andern Schenkel *asymptotisch* berührt,
.d umgekehrt: auf dem einen Schenkel eines jeden spitzen
inkels giebt es einen solchen Punkt, dass die aus ihm unter
chtem Winkel gezogene gerade Linie eine *Asymptote* des
.dern Schenkels ist.*)

Gegeben sei der rechte Winkel ABC. Man ziehe aus dem Punkte A
s Schenkels BA die Gerade AD unter dem Winkel BAD, der kleiner
ein Rechter ist. Es giebt augenscheinlich Lote, die aus Punkten der
raden AD auf AB gefällt sind und mit
B in Punkten zwischen A und B zu-
mmentreffen. Wir wollen annehmen, dass
Widerspruch mit dem Euklidischen Axiom
Gerade BC von AD nicht geschnitten
rd. Hieraus folgt, dass es Senkrechte
f AB giebt, die mit AD[**)] nicht zu-
mmenlaufen. Es bezeichne PQ diejenige
nkrechte, die in der Richtung von B

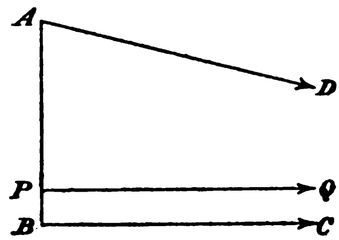


Fig. 1.

ch A die letzte der die Gerade AD nicht schneidenden ist, alsdann
t es auch die Grenze der schneidenden Senkrechten, und man erhält
her die Asymptote PQ der Geraden AD. Die Gerade BC möge eine
[yperasymptote und das Dreieck APQ ein asymptotisches Dreieck
eissen.

Der umgekehrte Lehrsatz ist etwas weniger zugänglich. Mit einem
symptotischen Dreieck beschreibe man einen Kegel, dessen Grundfläche
lso seine Mantelfläche asymptotisch berührt. Man denke sich durch die
Axe des Kegels zwei Ebenen gelegt, die mit einander und mit der Grund-
fläche rechte Winkel bilden. Alsdann möge durch die Schnitte, die sie mit

*) Vergl. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften. Bd. 2,
S. 76, 1816, wo wir schon vorher den Lehrsatz behandelt haben.

**) [Im Originale S. 5. Z. 6 v. u. steht AC statt AD.]

dem Kegelmantel gemein haben, die Ebene gelegt werden. Diese hat, wie man leicht beweist, einen dritten Schnitt mit der Grundfläche, und hieraus schliesst man: dass die Schnitte der drei Ebenen mit der Grundfläche des Kegels die Figur eines rechtwinkligen Dreiecks bilden, bei dem die beiden Seiten, von denen der rechte Winkel eingeschlossen wird, asymptotische Linien der dritten dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite sind.

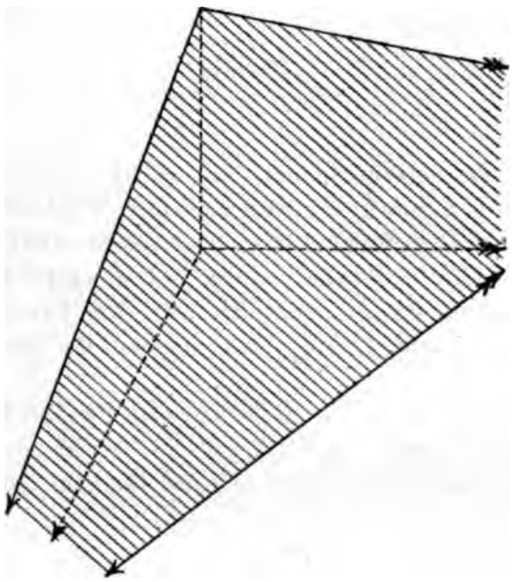


Fig. 2.

Nunmehr kann man, wie leicht zu erkennen, aus irgend einem Punkte [B] der zu dem rechten Winkel [A] gehörenden Hypotenuse gerade Linien [BC] unter einem beliebigen Winkel [BCA] der von der Grösse eines rechten Winkels bis zu einem verschwindenden abnimmt, nach einer der beiden andern Seiten ziehen, die alsdann den Scheitelpunkt [C] des Winkels und den einen der Schenkel [CA] enthalten wird. Der andere Schenkel ist die gezogene Gerade [BC] selbst, die verlängert mit einer gewissen Geraden [DE] asymptotisch zusammentrifft, die auf dem ersten Schenkel [CA] in

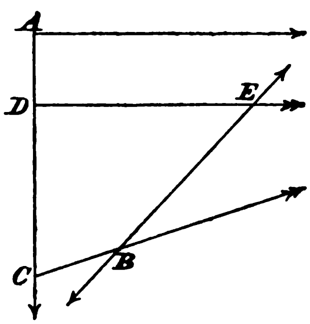


Fig. 3.

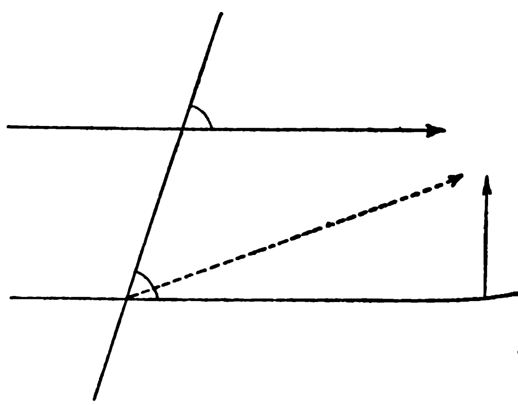


Fig. 4.

einem Punkte [D] zwischen dem Scheitelpunkte [C] des Winkels und dem Schnittpunkte [A] der beiden Asymptoten senkrecht steht.

Hieraus ergiebt sich sofort, wenn man die vorgeschlagene Annahme beibehält, der dritte Lehrsatz:

Auf jeder der beiden Geraden, die nach der Vorschrift von Eucl. Elem. I, Lehrsatz 27 [*)] unter einander parallel gemacht worden sind, giebt es einen solchen Punkt, dass die in ihm errichtete Senkrechte Asymptote der andern Parallelen wird. Dasselbe gilt von einer Geraden, die *Hyperasymptote* der andern ist.

2.

Bekanntlich hat die Kugelfläche die von dem elften Axiom unabhängige Eigenschaft durch vier Punkte vollständig bestimmt zu sein. Unsere ganze Untersuchung über die Theorie der Parallelen beruht nun auf dem umgekehrten Lehrsatze, dass es durch vier im Raume *beliebig* gegebene Punkte eine Kugelfläche giebt. Er liegt auf der Hand, sobald man das Euklidische Axiom gebrauchen darf, wir aber wollen zu beweisen versuchen, dass er auch unter der in dem vorhergehenden Artikel erwähnten, dem Axiom widersprechenden Hypothese seine Gültigkeit behält, oder dass dieser Lehrsatz von der Theorie der Parallelen ganz und gar unabhängig ist.

Bevor wir jedoch an den Beweis selbst gehen, müssen wir die Richtigkeit einer andern Behauptung darthun, die allgemeiner als jene ist: dass es eine Fläche durch vier beliebige Punkte giebt, die lediglich durch diese Punkte, und nicht mehr, so vollständig bestimmt ist, dass durch dieselben vier Punkte eine andere Fläche derselben Art nicht erzeugt werden kann. Wir nennen sie Fläche von vier Punkten. Ihre Erklärung ist also folgende. Eine Fläche von vier Punkten ist eine Fläche, die mit einer andern derselben Art nirgends mehr als einen Schnitt hat, der seinerseits durch drei Punkte und nicht mehr bestimmt ist. Man schliesst hieraus leicht, dass unsere Fläche überall stetig ist, dass sie keine verschiedenen Fortsetzungen (Zweige) und keine doppelte Krümmung hat. Auf ganz ähnliche Art wird es eine Linie von drei Punkten geben.

Nunmehr kommt alles darauf an zu zeigen, dass eine solche Fläche durch vier beliebige Punkte wirklich existire.

Durch drei Punkte von den vier gegebenen lege man die Ebene. Wenn der übrige Punkt in dieselbe Ebene hineinfällt, ist die Behauptung augenscheinlich richtig, denn der Schnitt zweier Ebenen mit einander wird durch zwei Punkte oder durch eine gerade Linie gegeben. Wenn nun der

*) [Wenn eine Gerade, die zwei Gerade trifft, mit ihnen gleiche Wechselwinkel bildet, so sind diese Geraden einander parallel.]

vierte Punkt mit den übrigen nicht in derselben Ebene liegt, so wird das Gesetz, nach dessen Vorschrift unsere Fläche von der Ebene abweicht, augenscheinlich allein von dem vierten Punkte abhängen und aus diesem Grunde das einfachste sein. Daher hätte es nichts zu bedeuten, wenn jemand andre Forderungen, die einen Widerspruch in sich enthalten, der unsrigen entgegenstellte, z. B. die Forderung einer Fläche von fünf Punkten bei drei Dimensionen, oder einer Linie von vier Punkten in der Ebene, die mit einer andern ihrer Art niemals mehr als vier oder drei Punkte gemein hätte, und wenn er einwendete, er sei noch nicht überzeugt, dass unsere Forderung keinen ähnlichen Widerspruch in sich trage. Denn es kann nicht überraschen, wenn ein verwickeltes Gesetz wie das einer Linie, die nicht nur durch drei Punkte, sondern ausserdem durch einen vierten hindurchgeht, zugleich neue Bedingungen (z. B. dass sie noch einen beliebigen fünften Punkt in sich aufnehmen kann) schon implicite in sich enthält. Unsere Forderung ist jedoch so einfach und zwingend, dass, wer sie zurückwiese, mit demselben Rechte die Forderung der geraden Linie als einer durch zwei Punkte bestimmten verwerfen müsste. Genug von dieser Frage, die wir bei anderer Gelegenheit ausführlicher behandeln werden; wir hoffen, dass sie so leicht niemand in Zweifel ziehen wird, und versprechen, falls jemand daran Anstoss nehmen sollte, sie zur höchsten Evidenz zu bringen.

Die Forderung der Fläche von vier Punkten ist das allgemeinste Postulat, zu dem die Postulate der geraden Linie, der Ebene und der Linie von drei Punkten nur als besondere Fälle gehören.

3.

Lehrsatz: Die Fläche von vier Punkten ist überall begrenzt oder sie erzeugt eine körperliche Figur.

Nehmen wir an, der Lehrsatz sei falsch oder die Fläche nicht überall begrenzt. Dann giebt es irgendwo eine Gerade AB, die in dem Punkte A die Fläche schneidet und, sie von dort ab niemals von neuem treffend, nach beiden Seiten ins Unendliche weiter geht. Augenscheinlich kann man in der Richtung von A nach B, von der Höhlung der Fläche weg, Ebenen angeben, die auf AB senkrecht stehen und mit der Fläche in einem überall begrenzten Schnitt zusammenlaufen. Entweder schneiden alle diese Ebenen von A und B hin bis ins Unendliche die Fläche oder einige schneiden, einige schneiden nicht mehr, sei es überhaupt nicht, sei es in einer nicht überall begrenzten Linie; in diesem Falle giebt es eine Ebene, die die erste der nichtschneidenden ist und die wir asymptotische Ebene nennen wollen. Jeden der beiden Fälle werden wir für sich besprechen.

I. Annahme, dass die *Fläche* eine asymptotische Ebene besitze.

Augenscheinlich giebt es aus jedem Punkte A der Fläche innerhalb des asymptotisch begrenzten Körpers eine Gerade AB, die auf der asymptotischen Ebene senkrecht steht. Durch die Gerade AB denke man sich eine zweite Ebene, die die erste in einer Geraden BC schneidet. Diese Ebene enthält sicher eine gewisse Gerade AD, die mit BC asymptotisch zusammenläuft (Art. 1). Mit dem hieraus entstandenen asymptotischen Dreiecke beschreibe man um die Axe AB den asymptotischen Kegel, dessen Scheitel im Punkte A liegt. Nunmehr lässt sich leicht zeigen, dass wenigstens ein Theil*) der Kegelfläche durch die Fläche von vier Punkten und die asymptotische Ebene eingeschlossen wird oder innerhalb des asymptotischen Körpers liegt. In diesem Theile der Kegelfläche ziehe man vom Scheitel A die Gerade AN, die, insofern sie Asymptote der asymptotischen Ebene ist, auch die Fläche im Unendlichen asymptotisch berührt. Liegt aber die asymptotische Ebene so, dass sie die Fläche in einer nicht überall begrenzten Linie schneidet, so nehme man den Punkt A in der Art, dass die durch A parallel der asymptotischen Ebene gezogene Ebene von A aus nach der Gegend hin, in der die Schnittlinie nicht begrenzt ist, innerhalb des Körpers zu liegen kommt; alsdann verhält sich die Sache ebenso wie vorher. Die Gerade AN schneidet die Fläche zwischen A und dem Punkte der asymptotischen Berührung entweder von neuem oder sie schneidet nicht, oder was dasselbe ist, sie liegt entweder zum Theil innerhalb zum Theil ausserhalb des Körpers oder ganz innerhalb.

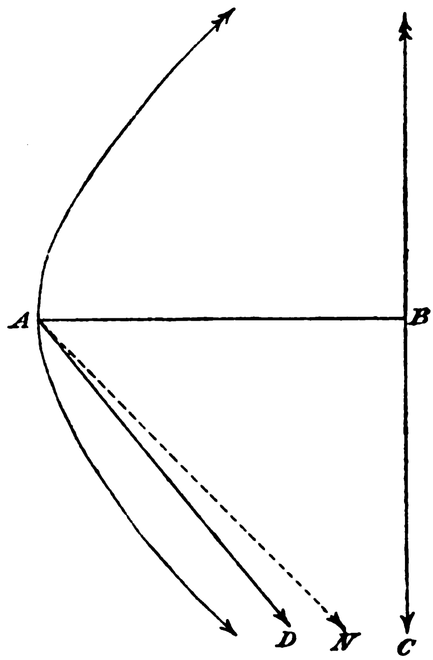


Fig. 5.

*) Es wäre zwar nicht schwer gewesen zu beweisen, dass es sogar einen Punkt A auf der Fläche giebt, wo deren Tangentialebene das Lot AB unter rechtem Winkel schneidet und wo daher die Kegelfläche von der Gegend des Scheitels an nicht zum Theil, sondern ganz und gar innerhalb des Körpers zu liegen kommt. Das hat jedoch mit unserer Absicht nichts zu thun.

1) Die Gerade AN möge die Fläche von neuem schneiden. Man nehme die Ebene, die den Kegel in der Geraden AN berührt. Diese Ebene wird ausser dem Schnitt in einer Linie von drei Punkten als vierten den Punkt der asymptotischen Berührung der Geraden AN mit der Fläche gemein haben, gegen die Erklärung; oder, wenn es erforderlich scheint noch weiter zu gehen, lässt es sich schliessen, dass es eine andere Ebene giebt, die unterhalb der Berührungsebene in den Kegel eintritt und zwei verschiedene Schnitte mit der Fläche bekommt. Das ist aber ein Widerspruch.

2) Die Gerade AN möge die Fläche nicht von neuem schneiden. Dann wird die schon benutzte Berührungsebene zwar nur einen einzigen Schnitt mit der Fläche besitzen, jedoch in einer krummen Linie, die, wie man leicht erkennt, zwei Zweige besitzt, welche von dem Scheitel A aus ins Unendliche gehen und mit einander asymptotisch zusammenlaufen. Es wäre nun nicht schwer gewesen zu beweisen, dass man eine andre Curve derselben Art finden kann, die so gelegen ist, dass sie jene in vier Punkten schneidet und dass es daher einen Schnitt zweier Flächen von vier Punkten in einer Linie von vier Punkten giebt, gegen die Erklärung. Wir halten uns jedoch hier bei dem Beweise nicht auf, da er durchaus dem entspricht, den wir in dem folgenden Artikel für den Körper auseinandersetzen werden.

II. Annahme, dass die *Fläche* keine asymptotische Ebene besitzt oder einen kegelförmigen Körper bildet.*)

Es bezeichne AB eine unendliche Gerade, die die Fläche nur in einem einzigen Punkte A schneidet und von hier aus ins Unendliche innerhalb des kegelförmigen Körpers fortgeht. Man beschreibe durch sie eine Ebene P. Zufolge unserer Voraussetzung besitzen offenbar alle auf der Ebene P senkrechten Ebenen bis ins Unendliche Schnitte mit der Fläche und haben aus diesem Grunde einen ihrer Theile innerhalb, einen andern ausserhalb des Körpers. Liegen jetzt drei Punkte auf der Fläche in der Art, dass die Ebene durch die gegebenen Punkte einen begrenzten Schnitt erzeugt, so giebt es unzählig viele Kugeln, welche die Fläche in denselben drei Punkten schneiden. Ihre Mittelpunkte bekommen sie, wie bekannt ist, auf einer zu jener Ebene senkrechten Geraden Rr. Man darf behaupten, dass eine jede von diesen Kugelflächen anfangs

*) Dieser Satz hätte sich auf ähnliche Art für die Linie von drei Punkten durch Figuren in der Ebene beweisen lassen, jedoch nicht der zweite Satz des ersten Theils dieses Artikels, und allein aus diesem Grunde musste die ganze Untersuchung an Körpern angestellt werden.

durch die drei gegebenen Punkte in den kegelförmigen Körper eintritt; gesetzt nämlich, sie trete aus dem Körper aus, so müsste es, wie leicht zu erkennen, ausser diesem ersten Schnitte der Kugel mit der Fläche einen zweiten geben; das ist aber unmöglich. Jetzt muss Rr ins Unendliche verlängert entweder die Ebene P schneiden oder eine Asymptote oder Hyperasymptote der Ebene sein.

Würde die Gerade Rr die Ebene schneiden oder deren Hyperasymptote sein, so würde sie unter Beibehaltung der Hypothese, von der wir ausgegangen sind, nach der Vorschrift des Lehrsatzes 2 und 3 des Artikels 1 irgendwo aus dem Körper wieder herausgehen, und es würde offenbar unter jenen Kugeln, die die Fläche in drei Punkten schneiden, gewisse geben, deren Mittelpunkte auf der Geraden Rr ausserhalb des kegelförmigen Raumes liegen. Wie hieraus erhellt, hat die angenommene Lage der Geraden Rr die Folge, dass die Kugelfläche, die anfangs in den Körper eintritt, irgendwo wiederum aus ihm herausgehen und darauf von neuem wieder eintreten muss, also mit der Fläche von vier Punkten zwei Schnitte von drei Punkten hat, was unmöglich ist.

Wenn aber die Gerade Rr zufällig Asymptote der Ebene ist, dann giebt es sicher eine andre Gerade Ss, die der geometrische Ort des Mittelpunktes der die Fläche in irgend drei andern gegebenen Punkten schneidenden Kugeln ist, und diese Gerade wird entweder die Ebene P schneiden oder deren Hyperasymptote sein oder es wird, wenn man nirgends eine Gerade dieser Art finden kann, die nicht asymptotisch ist, offenbar die Fläche von vier Punkten selbst sich als Kugelfläche von unendlich grossem Halbmesser herausstellen. Zieht man alsdann eine Ebene, die diese Kugel von unendlich grossem Halbmesser berührt, und legt eine andre Fläche durch den Berührungspunkt und drei zwischen der Ebene und der Kugelfläche liegende Punkte, so ist nicht schwer zu beweisen, dass man dort eine solche Gerade findet, von der dasselbe gilt, was wir soeben von der geraden Rr behaupteten. Hieraus folgt, dass die Kugel von unendlich grossem Halbmesser, die wir soeben annahmen, in Wirklichkeit nicht existirt. Wenn es beliebte, könnte man hieraus sofort schliessen, dass es keine Kugel von unendlich grossem Halbmesser giebt ausser der Ebene selbst, was sich freilich mit dem Euklidischen Axiome, jedoch durchaus nicht mit der ihm in Artikel 1 entgegengestellten Annahme verträgt. Wir gehen jedoch lieber in dem Beweise noch weiter.

Somit ist erhärtet, dass unsere überall stetige und begrenzte Fläche wirklich eine körperliche Figur bildet.

4.

Lehrsatz. Der durch die Fläche von vier Punkten begrenzte Körper ist eine Kugel.

Innerhalb des begrenzten Raumes des Körpers giebt es augenscheinlich eine Gerade endlicher Grösse, die von allen innerhalb des Körpers liegenden die grösste ist. Man halbire diese Gerade und ziehe die Ebene, die auf ihr in dem Theilpunkte (Mittelpunkte) rechtwinklig steht. Irgend eine Gerade, die in dieser Ebene durch den Mittelpunkt hindurchgeht, wird von der ersten Geraden entweder ebenfalls halbirt oder nicht halbirt. Tritt das letztere ein, so möge auch diese Gerade halbirt und der Zwischenpunkt zum Mittelpunkt genommen werden. Wie sich sehr leicht beweisen lässt, kann man aus diesem Mittelpunkte eine Kugel beschreiben, die mit der Fläche von vier Punkten zwei verschiedene Schnitte gemein hat. Damit wir also nicht zu Sätzen gelangen, die der angenommenen Erklärung widersprechen, bleibt nichts übrig als zuzugeben, dass die Fläche von vier Punkten eine Kugelfläche ist.

Auf dieselbe Art zeigt man, dass die überall begrenzte Linie von drei Punkten ein Kreis ist.

5.

Lehrsatz. Durch irgend welche drei Punkte in einer gegebenen Ebene, die nur nicht auf einer und derselben Geraden liegen dürfen, lässt sich ein Kreis beschreiben.

Man nehme irgend einen vierten Punkt ausserhalb der Ebene an; dann erhellt aus dem Vorhergehenden, dass man diesen vier Punkten eine Kugel umschreiben kann, die mithin von der Ebene durch die drei gegebenen Punkte in einer überall begrenzten Linie von drei Punkten, d. h. in einem Kreise, geschnitten wird.

6.

Lehrsatz. Das Euklidische Axiom ist wahr.

Irgend eine gegebene in den Punkten A und B begrenzte Gerade AB möge in C halbirt und durch den Punkt C eine zweite auf der Geraden AB senkrechte Gerade CD gezogen werden. Aus den Punkten A, B ziehe man in derselben Ebene mit AB und CD die Geraden AE und BF, die mit der gegebenen AB irgend einen spitzen Winkel bilden. Von dem Punkte C fälle man auf AE und BF die Lote CG und CH, die diese in den Punkten G und H schneiden. Man verlängere nd CH bis zu J und K, sodass $CJ = 2CG$, $CK = 2CX$ wird. ın lässt sich um die drei Punkte C, J, K ein Kreis beschreiben,

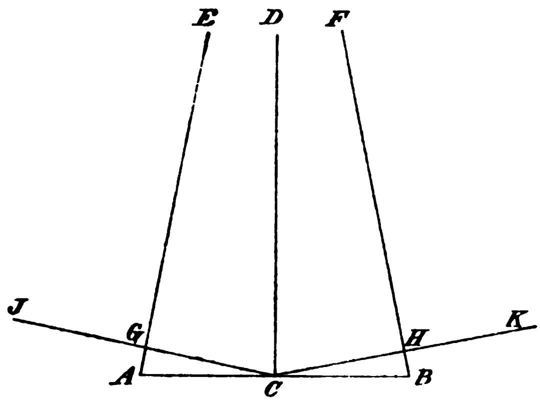


Fig. 6.

ı Mittelpunkt, wie man aus der Zeichnung erkennt, auf der Geraden .eren Schnittpunkt mit der Geraden AE oder BF bildet, den nachsen wir beabsichtigt hatten.

Ueber die Gestalt der Bahncurven bei einer Klasse dynamischer Probleme.

Von

Paul Stäckel in Kiel.

In verschiedenen, seit 1891 erschienenen Veröffentlichungen habe ich auf eine Klasse dynamischer Probleme hingewiesen, denen mehrere merkwürdige Eigenschaften zukommen, z. B. besitzen die Differentialgleichungen der Bewegung, wenn die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen n beträgt, mindestens n quadratische Integrale und sie lassen sich stets durch Quadraturen integriren. Neuerdings habe ich gefunden, dass *eine Bahncurve eines solchen Problems im Allgemeinen einen n-fach ausgedehnten Bereich überalldicht erfüllt**). Der Beweis für diese Eigenschaft, die freilich nach den Untersuchungen Poincarés nicht überraschen kann, scheint mir deshalb der Mittheilung werth, weil er sich mit sehr einfachen Hilfsmitteln führen lässt und weil sich dabei ein interessanter Satz über die Verteilung der *periodischen* Bahnen unter der Gesammtheit der Bahnen herausstellt.

Bildet man aus den $n(n+1)$ willkürlichen Functionen

$$\varphi_{\alpha\varkappa}(p_\alpha) \qquad \begin{pmatrix}\alpha=1,2,3,\cdots,n\\ \varkappa=0,1,2,\cdots,n\end{pmatrix},$$

die allein von dem jeweils hingeschriebenen Argumente abhängen, die $n+1$ Determinanten

$$\underset{(\alpha,\beta=1,2,\cdots,n)}{|\varphi_{\alpha\beta}|} = \Phi = \sum_\alpha \varphi_{\alpha\beta}\cdot\Phi_{\alpha\beta},$$

$$\Psi_\beta = \sum_\alpha \varphi_{\alpha 0}\cdot\Phi_{\alpha\beta} \qquad (\beta=1,2,\cdots,n),$$

so besitzt ein dynamisches Problem, bei dem die lebendige Kraft T durch

$$T=\frac{1}{2}\sum_\alpha \frac{\Phi}{\Phi_{\alpha 1}}\left(\frac{dp_\alpha}{dt}\right)^2$$

*) Für die Jacobi'sche Bewegung auf einer beliebigen Rotationsfläche habe ich diesen Satz bereits 1885 in meiner Inaugural-Dissertation: *Ueber die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche* ausgesprochen.

dargestellt werden kann, während gleichzeitig eine Kräftefunction Π der Form

$$\Pi = \frac{\Psi_1}{\Phi}$$

existirt, die n quadratischen Integrale:

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha} \frac{\Phi\Phi_{\alpha\beta}}{\Phi_{\alpha 1}^2}\left(\frac{dp_\alpha}{dt}\right)^2 - \frac{\Psi_\beta}{\Phi} = c_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, n),$$

wo $c_1, c_2, \ldots, c_n$ willkürliche Constanten bedeuten, und die Integralgleichungen der Bewegung werden:

$$\sum_\alpha \int \frac{\varphi_{\alpha 1}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}} = t - \tau,$$

$$\sum_\alpha \int \frac{\varphi_{\alpha\beta}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}} = c_\beta' \qquad (\beta = 2, 3, \cdots, n);$$

zur Abkürzung ist

$$2\varphi_{\alpha 0} + 2\varphi_{\alpha 1} c_1 + 2\varphi_{\alpha 2} c_2 + \cdots + 2\varphi_{\alpha n} c_n = \psi_\alpha(p_\alpha)$$

gesetzt worden, während $\tau, c_2', c_3', \ldots, c_n'$ n neue willkürliche Constanten bedeuten.

Im Allgemeinen wird man, wenn überhaupt Bewegungen möglich sind, die Ausdrücke $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, wenigstens für einen gewissen Bereich der Werthe von $c_1, c_2, \ldots, c_n$, auf die Form bringen können:

$$\psi_\alpha(p_\alpha) = (p_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - p_\alpha) \cdot \chi_\alpha(p_\alpha),$$

sodass a_α und b_α reelle, von $c_1, c_2, \ldots, c_n$ abhängende Constanten sind, und, wenn a_α kleiner als b_α gewählt wird, $\chi_\alpha(p_\alpha)$ in dem Intervalle

$$a_\alpha \leqq p_\alpha \leqq b_\alpha$$

nur endliche, positive, von Null verschiedene Werthe annimmt.

Nun gilt, wenn in dem Bereiche $\mathfrak{B}$, auf den die Veränderlichen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ durch die soeben hingeschriebenen Ungleichheiten beschränkt werden, die Determinante Φ nicht verschwindet, folgendes Theorem, das für die besonderen Fälle $n = 1$ und $n = 2$ bereits von Weierstrass und Staude bewiesen worden ist. Die Gleichungen

$$\sum_\alpha \int_{a_\alpha}^{p_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}(p_\alpha)\, dp_\alpha}{\sqrt{(p_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - p_\alpha)} \cdot \sqrt{\chi_\alpha(p_\alpha)}} = t_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, n)$$

definiren $p_1, p_2, \ldots, p_n$ für den Bereich $\mathfrak{B}$ als eindeutige, stetige, grade Functionen der unbeschränkt veränderlichen reellen Grössen $t_1, t_2, \ldots, t_n$, die n-fach periodisch sind mit den Periodensystemen

$$2\omega_{\alpha 1},\ 2\omega_{\alpha 2},\ \cdots,\ 2\omega_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots, n),$$

wo die Periode $2\omega_{\alpha\beta}$ durch

$$\omega_{\alpha\beta} = \int\limits_{a_\alpha}^{b_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}(p_\alpha)\, dp_\alpha}{\sqrt{(p_\alpha - a_\alpha)(b_\alpha - p_\alpha)}\cdot\sqrt{\chi_\alpha(p_\alpha)}}$$

gegeben wird. Alle zu einem Wertsystem $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ gehörigen Wertsysteme $t_1, t_2, \ldots, t_n$ werden dargestellt durch

$$\pm t_\beta^0 + \sum_\alpha 2m_\alpha\,\omega_{\alpha\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, n),$$

wenn $m_1, m_2, \ldots, m_n$ beliebige ganze Zahlen bedeuten; dabei gehört das Werthsystem $t_1^0, t_1^0, \ldots, t_n^0$ dem Bereiche

$$t_\beta = \sum_\alpha \tau_\alpha\,\omega_{\alpha\beta} \qquad (0 \leqq \tau_\alpha \leqq 1)$$

an und ist das einzige der verlangten Art in diesem Bereiche.

Um diesen Satz auf das vorliegende dynamische Problem anzuwenden, möge festgesetzt werden, dass zur Zeit $t = 0$ der bewegte Punkt sich an der Stelle $\bar p_1, \bar p_2, \ldots, \bar p_n$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ befinde und dass die Ableitungen nach der Zeit $p_1', p_2', \ldots, p_n'$ zu dieser Zeit die Werthe $\bar p_1', \bar p_2', \ldots, \bar p_n'$ besitzen. Alsdann werden die Integralgleichungen:

$$\sum_\alpha \int\limits_{a_\alpha}^{p_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha 1}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}} = \sum_\alpha \int\limits_{a_\alpha}^{\bar p_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha 1}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}} + t,$$

$$\sum_\alpha \int\limits_{a_\alpha}^{p_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha\, dp_\alpha}} = \sum_\alpha \int\limits_{a_\alpha}^{\bar p_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}\, dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}};$$

dabei sind die Constanten $c_1, c_2, \ldots, c_n$ durch die Gleichungen

$$\sum_\alpha \frac{\varphi_{\alpha 1}(\bar p_\alpha)\,\bar p_\alpha'}{\sqrt{\psi_\alpha(\bar p_\alpha)}} = 1,$$

$$\sum_\alpha \frac{\varphi_{\alpha\beta}(\bar p_\alpha)\,\bar p_\alpha'}{\sqrt{\psi_\alpha(\bar p_\alpha)}} = 0 \qquad (\beta = 2, 3, \cdots, n)$$

eindeutig bestimmt.

Ist jetzt $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ irgend eine Stelle des Bereiches $\mathfrak{B}$, so gehören dazu die Werthe

$$t_\beta^0 + \sum_\alpha 2m_\alpha\,\omega_{\alpha\beta}.$$

Nach einem bekannten Satze kann man aber, *sobald die n Systeme von je $n-1$ Perioden:*

$$2\omega_{\alpha 2},\ 2\omega_{\alpha 3},\ \ldots,\ 2\omega_{\alpha n}$$

von einander unabhängig sind, unendlich viele Systeme ganzer Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_n$ von der Beschaffenheit finden, dass jeder der $n-1$ Ausdrücke

$$\sum_\alpha 2m_\alpha\,\omega_{\alpha\beta} \qquad (\beta = 2, 3, \cdots, n)$$

irgend einem gegebenen Werthe beliebig nahe kommt*). Mithin kann man durch geeignete Wahl von $m_1, m_2, \ldots, m_n$ bewirken, dass für $\beta = 2, 3, \ldots, n$ die Grössen

$$t_\beta^0 + \sum_\alpha 2m_\alpha\,\omega_{\alpha\beta}$$

sich von den Grössen

$$\sum_\alpha \int_{a_\alpha}^{\bar{p}_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha\beta}\,dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}}$$

beliebig wenig unterscheiden, und hieraus folgt vermöge der Stetigkeit der Functionen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ von $t_1, t_2, \ldots, t_n$, dass zur Zeit

$$t = t_1^0 + \sum_\alpha 2m_\alpha\,\omega_{\alpha 1} - \sum_\alpha \int_{a_\alpha}^{p_\alpha} \frac{\varphi_{\alpha 1}\,dp_\alpha}{\sqrt{\psi_\alpha(p_\alpha)}}$$

auch die Coordinaten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des bewegten Punktes sich von den gegebenen Werthen $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$ beliebig wenig unterscheiden und dass somit *die betreffende Bahncurve den ganzen Bereich $\mathfrak{B}$ überalldicht erfüllt.*

Sobald die Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ die verlangte Beschaffenheit haben, was freilich nicht immer der Fall sein wird, kann diese Schlussweise nur dann versagen, wenn jene n Periodensysteme von einander abhängig sind, d. h. wenn sich n ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_n$ so bestimmen lassen, dass gleichzeitig die $n-1$ Gleichungen

$$\sum_\alpha 2g_\alpha\,\omega_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta = 2, 3, \cdots, n)$$

absolut genau erfüllt sind. *Giebt es solche Zahlen g_α, so ist die Bewegung periodisch und zwar mit der Periode*

$$2\Omega = \sum 2g_\alpha\,\omega_{\alpha 1}.$$

*) Vergl. etwa L. Kronecker, *Die Periodensysteme von Functionen reeller Variabeln.* Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrgang 1884, S. 107, Werke Bd. III, S. 31.

Lässt man den bewegten Punkt von der gegebenen Stelle $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \ldots, \bar{p}_n$ des Bereiches $\mathfrak{B}$ mit einer der Grösse nach gegebenen Geschwindigkeit $\bar{v}$ ausgehen, so bleibt nur noch die Anfangsrichtung der Bewegung willkürlich, die durch die Verhältnisse der Anfangswerthe $\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_n'$ bestimmt wird. Die Perioden $2\omega_{\alpha\beta}$ werden alsdann Functionen der homogenen Variabeln $\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_n'$, und daher definiren die $n-1$ homogenen Gleichungen

$$\sum_{\alpha}' 2x_\alpha\, \omega_{\alpha\beta} = 0 \qquad (\beta = 2, 3, \cdots, n)$$

die Verhältnisse der $\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_n'$ als im Allgemeinen stetige Functionen der Verhältnisse der $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nun liegen die rationalen Werte dieser Verhältnisse überalldicht, folglich wird dasselbe auch von den zugehörigen Werthen der Verhältnisse der $\bar{p}_1', \bar{p}_2', \ldots, \bar{p}_n'$ gelten, d. h. *die Anfangsrichtungen, welche zu periodischen Bahnen gehören, sind unter der Gesammtheit der Anfangsrichtungen überalldicht vertheilt.* Auf die physikalische Bedeutung dieses Satzes einzugehen ist hier nicht der Ort.

Kiel, im September 1899.

Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen.

Von

Hermann Minkowski in Zürich.

Obwohl die Theorie der Annäherung an eine reelle Grösse mit Hülfe von Kettenbrüchen seit Euler und Lagrange noch mannigfache Behandlung erfahren hat, scheint einer der interessantesten Sätze auf diesem Gebiete bisher nicht bemerkt worden zu sein. Nämlich unter den verschiedenen möglichen Kettenbruchentwicklungen für eine reelle Grösse a, wobei die Theilzähler ± 1 und die Theilnenner positive ganze Zahlen sind, giebt es eine bestimmte Art der Entwicklung (und zwar die am besten convergirende), *für welche die sämmtlichen Näherungsbrüche* $\frac{x}{y}$ *sich von vornherein in einfachster Weise charakterisiren lassen: Als Zähler und Nenner der einzelnen Näherungsbrüche erscheinen dabei genau die sämmtlichen Paare von ganzen Zahlen* x, y, *für die* $y > 0$ *ist,* x *und* y *relativ prim sind und dazu die Bedingung*

$$|(x-ay)y| < \frac{1}{2}$$

erfüllt ist. Von dem Falle, dass a gleich einer ganzen Zahl $+\frac{1}{2}$ ist, hat man hierbei abzusehen.*)

---

*) Bekanntlich lässt sich eine nach fallenden Potenzen von z fortschreitende convergente Reihe

$$f(z) = c_{-m} z^m + c_{-m+1} z^{m-1} + \cdots + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \cdots$$

in einen Kettenbruch

$$F_0(z) + \frac{1 \,|}{|\, F_1(z)} + \frac{1 \,|}{|\, F_2(z)} + \cdots$$

umwandeln, sodass $F_0(z)$ eine ganze rationale Function von z und $F_1(z)$, $F_2(z)$, $\cdots$ ganze rationale Functionen von z mindestens vom Grade 1 sind. Dabei gilt der Satz: Ein Quotient $\frac{P(z)}{Q(z)}$ zweier relativ primer ganzer rationaler Functionen vo

Auf die betreffende noch durch weitere bemerkenswerthe Eigenschaften ausgezeichnete Kettenbruchentwicklung habe ich bereits an anderer Stelle*) hingewiesen, ohne jedoch damals wahrzunehmen, dass die eben erwähnte Ungleichung für die Näherungsbrüche diese Entwicklung bereits vollständig charakterisirt.

Im Folgenden gebe ich eine auf geometrischen Betrachtungen gegründete und dadurch sehr anschauliche *Theorie des Systems zweier linearer Formen* $\alpha x + \beta y$, $\gamma x + \delta y$ mit *beliebigen* reellen Coefficienten und mit *ganzzahligen* Unbestimmten. Eine Anwendung der dabei zu Tage tretenden Resultate auf die specielleren Ausdrücke $x - ay$, y liefert dann insbesondere jene Sätze über die Annäherung an eine Grösse a.

§ 1.

Satz I. *Sind* $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ *zwei lineare Formen mit beliebigen reellen Coefficienten* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *und einer Determinante* $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, *so giebt es stets ganze Zahlen* x, y, *die nicht beide Null sind und für welche*

$$|\xi\eta| \leqq \frac{1}{2}$$

ausfällt.

Wird auf die Form $\xi\eta$ eine *ganzzahlige* Substitution $x = pX + p'Y$, $y = qX + q'Y$ mit einer *Determinante* ± 1 angewandt, so nennen wir $\xi\eta$ der transformirten Form in den neuen Variabeln X, Y *äquivalent*. Zugleich mit dem Satze I beweisen wir den folgenden

Zusatz. *Ist* $\xi\eta$ *weder mit der Form* XY *noch mit der Form* $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ *äquivalent, so giebt es stets ganze Zahlen* x, y, *wofür* $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ *und* $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ *ausfällt.*

Beweis. Wir deuten x, y als irgend welche Parallelcoordinaten in einer Ebene, wobei noch für jede der zwei Coordinaten die Entfernung Eins parallel ihrer Axe in willkürlicher Weise angenommen sein kann. Es sei O der *Nullpunkt* ($x = 0$, $y = 0$). Bedeutet A einen von O verschiedenen Punkt $x = p$, $y = q$, so soll der zu ihm in Bezug auf O symmetrische Punkt $x = -p$, $y = -q$ jedesmal mit A_0 bezeichnet werden.

---

immer dann und nur dann Näherungsbruch dieses Kettenbruchs, wenn die Entwicklung von

$$(P(z) - f(z)\,Q(z))\,Q(z)$$

nach fallenden Potenzen von z mit einer Potenz von z, deren Exponent negativ ist, beginnt. Der Satz, den ich im Texte angebe, stellt das wohl von manchem Mathematiker vermisste Analogon in der Grössenlehre zu diesem Satze der Functionenlehre vor.

*) Annales de l'École Normale supérieure, 3e série, t. XIII; 1896.

Die Gesammtheit derjenigen Punkte, für welche x wie y ganze Zahlen sind, heisse das *Zahlengitter*, und die einzelnen Punkte daraus sollen *Gitterpunkte* heissen.

Sind ϱ, σ positive Parameter, so bilden die vier Punkte R, R_0, S, S_0, für welche $\xi=\varrho,\ \eta=0$; $\xi=-\varrho,\ \eta=0$; $\xi=0,\ \eta=\sigma$; $\xi=0,\ \eta=-\sigma$ ist, die Ecken für ein Parallelogramm mit O als Mittelpunkt und mit den Linien $\xi=0,\ \eta=0$ als *Diagonalen*. Ein solches Parallelogramm werde mit $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ bezeichnet. Seine vier Seiten besitzen die Gleichungen $\pm\frac{\xi}{\varrho}\pm\frac{\eta}{\sigma}=1$, wo für die zwei Vorzeichen alle vier Combinationen $+,+;\ -,+;\ -,-;\ +,-$ in Betracht kommen, und der Bereich von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ wird daher durch

$$\left|\frac{\xi}{\varrho}\right|+\left|\frac{\eta}{\sigma}\right|\leqq 1$$

dargestellt.

Wir können nun von so kleinen Werthen für ϱ und σ ausgehen, dass das zugehörige Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ jedenfalls keinen Gitterpunkt ausser dem Nullpunkte O in sich fasst. Dann lassen wir ϱ und σ *unter Festhaltung der Grösse ihres Verhältnisses* $\varrho:\sigma$ wachsen. Dabei dehnt sich $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ nach allen Richtungen von O aus in gleichem Maasse aus. Wir müssen daher schliesslich zu gewissen Werthen ϱ, σ kommen, wobei $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ auf seiner *Begrenzung* weitere Gitterpunkte aufnimmt, während immer noch O der einzige Gitterpunkt im *Inneren* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ist. Es sei bei diesen Werthen ϱ, σ, bei denen wir nun verweilen, A $(x=p,\ y=q)$ ein Gitterpunkt auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$. Da zugleich mit A auch der Gitterpunkt A_0 $(x=-p,\ y=-q)$ auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ auftritt, so können wir annehmen, für A sei $\eta>0$ oder $\eta=0,\ \xi>0$. Wir setzen für A: $\xi=\varepsilon\lambda,\ \eta=\mu$, so dass $\mu\geqq 0,\ \lambda\geqq 0,\ \varepsilon=\pm 1$ ist.

Die ganzen Zahlen p, q haben gewiss keinen gemeinsamen Theiler >1, weil die Strecke OA keinen Gitterpunkt zwischen O und A enthält. Wir bestimmen zwei ganze Zahlen r, s irgendwie so, dass $ps-qr=\varepsilon$ ist, und setzen

$$x=p\overline{X}+rY,\quad y=q\overline{X}+sY.$$

Dabei werde $\varepsilon\xi=\lambda\overline{X}+\bar{\lambda}Y,\ \eta=\mu\overline{X}+\bar{\mu}Y$. Dann haben $\varepsilon\xi, \eta$ in $\overline{X}, Y$ die Determinante $\varepsilon\varepsilon=1$ und folgt

$$(1)\qquad Y=\lambda\eta-\mu\varepsilon\xi.$$

Die Gitterpunkte x, y werden genau die Punkte mit ganzzahligen Bestimmungsstücken $\overline{X}, Y$. Diese Punkte ergeben auf der Linie $Y=0$, d. i. der Geraden durch O und A die unendliche Punktreihe zu den Werthen $\overline{X}=\cdots-2,\ -1, 0, 1, 2, \cdots$, wobei $\overline{X}=0$ den Nullpunkt,

$\bar{X} = 1$ den Punkt A liefert und alle diese Punkte sich in einem constanten Abstande $= OA$ folgen. Sodann bilden sie auf einer jeden der zu $Y = 0$ parallelen Geraden $Y = 1$, $Y = -1$, $Y = 2$, $Y = -2, \cdots$ jedesmal eine äquidistante Punktreihe mit dem gleichen constanten Abstande $= OA$ zwischen benachbarten Punkten. Von diesen sämmtlichen einander parallelen Geraden sind $Y = 1$ und $Y = -1$ die zwei an $Y = 0$ nächstgelegenen.

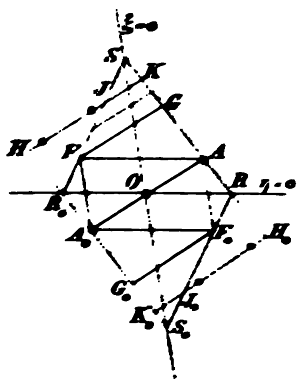


Fig. 1.

1. Wir nehmen zunächst an, dass A *nicht* eine *Ecke* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also $\lambda > 0, \mu > 0$ ist.*) Es sei F der Punkt $\xi = -\varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$. Das Parallelogramm mit den Ecken A, F, A_0, F_0 ist durch $-\lambda \leq \xi \leq \lambda$, $-\mu \leq \eta \leq \mu$ definirt und befindet sich, von den Ecken abgesehen, ganz im Inneren des Parallelogramms $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$.

Nehmen wir weiter an, dass A auch *nicht Mitte* einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ist. Die zu $A_0 OA$ parallele Gerade durch F trifft dann die Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ausser in F in einem zweiten Punkte G, so dass die Strecke FG offenbar *grösser* als OA ist. Ebenso würde jede parallele Gerade zu $A_0 OA$, die in dem Streifen zwischen $A_0 OA$ und FG verläuft, eine Strecke $> OA$ ganz im Inneren von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegen haben. Da nun im Inneren von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ sich kein Gitterpunkt ausser O befindet, welcher Punkt auf $Y = 0$ liegt, müssen danach die Geraden $Y = \pm 1$ ausserhalb des durch die Parallelen FG und $F_0 G_0$ begrenzten Streifens verlaufen, d. h. für den Punkt F muss jedenfalls $|Y| < 1$ sein. Nun hat man für F: $Y = 2\lambda\mu$, also folgt

$$2\lambda\mu < 1.$$

Danach ist der Gitterpunkt A hier von der im Satze I und dem Zusatze geforderten Beschaffenheit.

2. Ist A *Mitte* einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also $\lambda = \frac{1}{2}\varrho$, $\mu = \frac{1}{2}\sigma$, so ist $A_0 OA$, also die Gerade $Y = 0$ parallel einer Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$. Jede Parallele zu $A_0 OA$, welche in's Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintritt, hat dann mit $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eine Strecke $= A_0 OA > OA$ gemein. Die Geraden $Y = \pm 1$ können daher nicht in's Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintreten, $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt also ganz in dem Streifen $-1 \leq Y \leq 1$. Insbesondere gilt danach für den Punkt F: $Y < 1$, d. h. man hat

*) Wie die Buchstaben R und R_0 in der Figur eingetragen sind, ist darin $\varepsilon = 1$ für den Punkt A angenommen. Die Gitterpunkte sind hier und in den weiteren Figuren durch kleine Kreise angedeutet.

$$2\lambda\mu \leqq 1.$$

r Punkt A hat also wieder die im Satze I verlangte Beschaffenheit.

Das Gleichheitszeichen in dieser Ungleichung, (dessen Eintreten zu- ich $\rho\sigma = 2$ bedeuten würde), hat dann Statt, wenn eine Seite von ρ, σ) auf die Gerade $Y = 1$ fällt. Da diese Seite an Länge $= 2\,OA$, so enthält sie alsdann entweder *innerhalb* jeder ihrer durch F ge- nnten Hälften je einen Gitterpunkt, in welchem Falle für diese Gitter- nkte nach dem bereits in 1. Ausgeführten sich $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ rausstellt, oder aber es sind auf ihr sowohl beide Ecken wie die Mitte Gitterpunkte. In diesem zweiten Falle wären in $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ alle vier Mitten r Seiten Gitterpunkte. Wir können dann A als die Mitte von RS, h. $\varepsilon = 1$ voraussetzen. Ist für F hier $Y = 1$, $\overline{X} = g$ und setzt man $= X + gY$, so sind $A\left(\xi = \frac{1}{2}\rho,\ \eta = \frac{1}{2}\sigma\right)$ und $F\left(\xi = -\frac{1}{2}\rho,\ \eta = \frac{1}{2}\sigma\right)$ rch $X = 1$, $Y = 0$ und $X = 0$, $Y = 1$ bestimmt, und hat man daher

$$\xi = \frac{1}{2}\rho(X - Y),\quad y = \frac{1}{2}\sigma(X + Y),\quad \rho\sigma = 2,\quad \xi\eta = \frac{1}{2}(X^2 - Y^2).$$

3. Endlich nehmen wir an, dass der Gitterpunkt A eine *Ecke* von ρ, σ), also dafür $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ sei; dann ist selbstverständlich für sen Punkt $|\xi\eta| = 0 < \frac{1}{2}$. In jedem Falle entpricht somit der Gitter- nkt A den Bedingungen des Satzes I.

Um auch noch den Zusatz unter den letzten Umständen als richtig erkennen, stellen wir uns A etwa als die Ecke R ($\xi = \rho$, $\eta = 0$) von (ρ, σ) vor. Dann ist nach (1.): $Y = \rho\eta$. Nunmehr halten wir ρ fest nd denken uns den Parameter σ als veränderlich. Dabei bleibt die Diagonale R_0R (A_0OA) von $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ auf $Y = 0$ fest, während sich die Endpunkte S_0, S der anderen Diagonale auf der Linie $\xi = 0$ verschieben. Bei hinreichend kleinem σ liegt $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ ganz im Bereiche $-1 < Y < 1$, nthält dann also gewiss keinen Gitterpunkt ausser A_0, O, A. Wird $= \frac{1}{\rho}$, so erreicht $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ die Gerade $Y = 1$ mit der Ecke S ($\xi = 0$, $\eta = \sigma$). ällt dabei diese Ecke zugleich in einen Gitterpunkt, so sei für ihn $= 1$, $\overline{X} = g$. Setzt man alsdann $\overline{X} = X + gY$, so gilt für S: $\xi = 0$, $= \sigma$; $X = 0$, $Y = 1$, für R: $\xi = \rho$, $\eta = 0$; $X = 1$, $Y = 0$, also hat an in diesem Falle:

$$\xi = \rho X,\quad \eta = \sigma Y,\quad \rho\sigma = 1,\quad \xi\eta = XY.$$

Fällt hingegen der Punkt $\xi = 0$, $\eta = \frac{1}{\rho}$ nicht in einen Gitterpunkt, kann man σ über $\frac{1}{\rho}$ hinaus wachsen lassen, ohne dass zunächst neue

Gitterpunkte in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintreten. Dabei wird die Strecke, welche der Bereich von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ aus der Linie $Y = 1$ herausschneidet und deren variable Endpunkte J, K heissen mögen, nach beiden Enden zu immer ausgedehnter und wird sich schliesslich einer dieser zwei Fälle ereignen:

Entweder fällt, so lange noch diese Strecke $JK < OA$ ist, einer ihrer Endpunkte (wie in Fig. 2 der Punkt J) in einen Gitterpunkt A' auf der Geraden $Y = 1$. Dabei reicht dann wegen $JK < \frac{1}{2} A_0 O A$ das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ noch nicht an $Y = 2$ heran, enthält also gewiss keinen Gitterpunkt ausser O, A, A_0, A', A_0', und zugleich liegt der Punkt A' auf $Y = 1$ näher an S (wofür $Y < 2$ ist), als an dem anderen Endpunkte (A_0 in Fig. 2) der durch ihn gehenden Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, also ist A' keinenfalls Mitte dieser Seite. In diesem Falle gilt für A' nach den früheren Bemerkungen $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$, $\xi\eta| < \frac{1}{2}$.

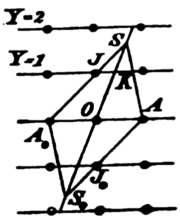


Fig. 2.

Der andere mögliche Fall ist, dass erst, wenn die Strecke JK bis zur Länge OA gewachsen ist, ihre beiden Endpunkte in Gitterpunkte zu liegen kommen. In dieser Endlage stösst dann $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ gerade mit der Ecke S auf $Y = 2$, sodass auch hier noch $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ keinen Gitterpunkt ausser O im Inneren enthält, aber in den Mitten aller vier Seiten Gitterpunkte aufweist. In diesem Falle erweist sich, wie schon oben unter 2. ausgeführt ist, $\xi\eta$ als äquivalent mit $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$. Werden alle erörterten Einzelheiten zusammengefasst, so tritt die Richtigkeit des zum Satze I gemachten Zusatzes hervor. —

Den Beweis der Ungleichung $2\lambda\mu \leqq 1$ für den Gitterpunkt A und damit des Satzes I können wir auch durch folgende, auf dem Begriffe des *Flächeninhalts* beruhende Betrachtung erhalten, die noch zu einem weiter reichenden Resultate führt.

Da wir im Hinblick auf die festzustellende Relation $|\xi\eta| \leqq \frac{1}{2}$ die Rolle der Formen ξ, η vertauschen, auch ξ durch $-\xi$ ersetzen können, wobei freilich als Werth der Determinante von ξ, η auch -1 zuzulassen ist, so dürfen wir ohne wesentliche Einschränkung annehmen, A falle auf die Seite RS von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ und noch derart, dass $RA \leqq AS$ ist, d. h. wir setzen $\varepsilon = 1$ und $\frac{\lambda}{\varrho} \geqq \frac{\mu}{\sigma}$ voraus. Indem A auf der Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt, hat man

$$(2) \qquad \frac{\lambda}{\varrho} + \frac{\mu}{\sigma} = 1,$$

also $\frac{\lambda}{\varrho} = \frac{1}{2} + \omega$, $\frac{\mu}{\sigma} = \frac{1}{2} - \omega$, $\frac{\lambda\mu}{\varrho\sigma} = \frac{1}{4} - \omega^2 \leqq \frac{1}{4}$. Nun werden wir beweisen, dass für ein Parallelogramm wie $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, welches einen Gitterpunkt A auf der Berandung, im Inneren aber O als einzigen Gitterpunkt enthält, stets

(3) $$\varrho\sigma \leqq 2$$

gilt. Daraus folgt dann unmittelbar $\lambda\mu \leqq \frac{1}{2}$. Dieser Satz (3) ist aber einschneidender.

Der *Flächeninhalt* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, d. h. das Doppelintegral $\iint dx\,dy$, über diesen Bereich erstreckt, ist, da ξ, η die Determinante ± 1 in x, y haben, $= 4 \cdot \frac{1}{2}\varrho\sigma = 2\varrho\sigma$. Es seien nun H, K (Fig. 1) die Schnittpunkte von $Y = 1$ mit den Geraden S_0R_0 und RS. Wegen (2) haben die Formen $\frac{\xi}{\varrho} + \frac{\eta}{\sigma}$ und Y die Determinante 1 in den Variabeln $\overline{X}, Y$ und dann eine Determinante ± 1 in x, y. Also ist der Flächeninhalt des Parallelogramms K_0H_0KH gleich 4.

Tritt nun die Strecke HK in das *Innere* von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ein, so liegt K auf RS zwischen A und S und hat HK mit $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eine Strecke JK gemein, die nothwendig $\leqq OA$ ist, weil kein Gitterpunkt ausser O im Inneren von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt. Wegen $JK \leqq OA$ liegt J auf R_0S und so, dass $R_0J \geqq JS$ ist. Infolgedessen ist der Flächeninhalt des Dreiecks JKS nicht grösser als der des Dreiecks JHR_0. Nun entsteht das Parallelogramm RSR_0S_0 aus dem Parallelogramm K_0H_0KH, indem von letzterem die Dreiecke J_0H_0R und JHR_0 fortgenommen und die Dreiecke $J_0K_0S_0$ und JKS von nicht grösserem Flächeninhalte hinzugefügt werden. Daraus folgt für die Flächeninhalte der zwei Parallelogramme das Verhältniss $2\varrho\sigma \leqq 4$.

Tritt jedoch die Strecke HK überhaupt nicht in das Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ein, so ist das Parallelogramm RSR_0S_0 ganz im Parallelogramme K_0H_0KH enthalten und daher ebenfalls $2\varrho\sigma \leqq 4$.

§ 2.

1. Es mögen ξ und η dieselbe Bedeutung wie in Satz I haben. Wir wollen jedoch jetzt von vornherein die besonderen Fälle ausschliessen, dass die Form $\xi\eta$ der Variabeln x, y mit der Form XY oder mit der Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ der Variabeln X, Y äquivalent ist. Von diesen Ausnahmefällen abgesehen, gilt der

Satz II. *Sind $x = p$, $y = q$ zwei relativ prime ganze Zahlen, wofür $|\xi| > 0$ und $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so kann man stets zwei ganze Zahlen*

$x = p'$, $y = q'$ finden, so dass $pq' - qp' = \pm 1$ ist und für welche ebenfalls $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ist, aber $|\xi|$ kleiner ausfällt als für das erstere System.

Beweis. Da wir anstatt p, q ebensogut das System $-p$, $-q$ zu Grunde legen können, nehmen wir an, für $x = p$, $y = q$ sei $\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$ und dabei $\mu > 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ oder $\mu = 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon = 1$. Wir bestimmen zwei ganze Zahlen r, s irgendwie so, dass

$$ps - qr = \varepsilon$$

ist, und setzen

$$x = p\bar{X} + rY, \quad y = q\bar{X} + sY.$$

Alsdann sei

$$\varepsilon\xi = \lambda\bar{X} + \bar{\lambda}Y, \quad \eta = \mu\bar{X} + \bar{\mu}Y,$$

so folgt noch

$$\lambda\bar{\mu} - \mu\bar{\lambda} = 1, \quad Y = \lambda\eta - \mu\varepsilon\xi = \varepsilon(py - qx).$$

Wir bezeichnen den Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ ($\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$) mit A, ferner, wenn $\mu > 0$ ist, mit F den Punkt $\xi = -\varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$. Für F wird $Y = 2\lambda\mu$, d. i. $Y < 1$ auf Grund unserer Voraussetzung über den Gitterpunkt A. Die Geraden $Y = \pm 1$ schliessen also das Parallelogramm mit den Ecken A, F, A_0, F_0 ganz zwischen sich ein, ohne es zu treffen, so dass insbesondere F und F_0 gewiss nicht Gitterpunkte sind.

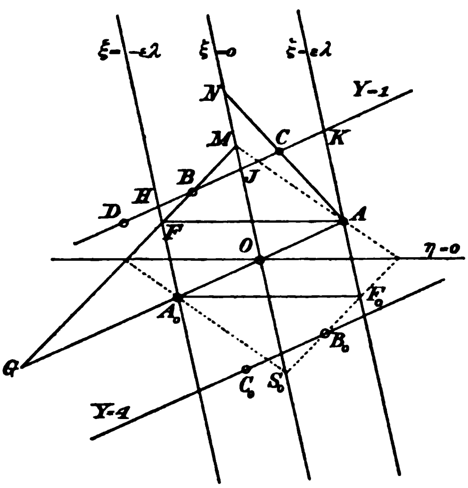


Fig. 3.

Die Gerade $Y = 1$ trifft nun die Linien $\xi = -\varepsilon\lambda$, $\xi = 0$, $\xi = \varepsilon\lambda$ in drei Punkten H, I, K (Fig. 3), für die $\eta = \frac{1 - \lambda\mu}{\lambda}$, $\eta = \frac{1}{\lambda}$, $\eta = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda}$ ist, welche Grössen sämmtlich $> \mu$ sind. Da $HJ = JK = OA$ ist, so werden auf dieser Geraden $Y = 1$ entweder die drei Punkte H, J, K Gitterpunkte sein, oder es liegt ein Gitterpunkt B innerhalb der Strecke HJ und ein Gitterpunkt C innerhalb der Strecke JK. In diesem letzteren Falle sei dann M der Schnittpunkt der Geraden FB (oder A_0B im Falle $\mu = 0$) mit der Geraden $\xi = 0$ und N der Schnittpunkt der Geraden AC mit der Geraden $\xi = 0$.

Wir bezeichnen nun mit A' ($x = p'$, $y = q'$) *erstens*, wenn J ein Gitterpunkt ist, diesen Gitterpunkt, *zweitens*, wenn in J kein Gitterpunkt fällt und wenn zugleich M näher an O liegt als N, also $OM < ON$ ist, den Gitterpunkt B, *drittens*, wenn in J kein Gitterpunkt fällt und dabei $OM \geqq ON$ ist, den Gitterpunkt C. Da A' auf $Y = 1$ liegt, gilt jedesmal $pq' - qp' = \varepsilon = \pm 1$. Für A' können wir sodann $\xi = \varepsilon' \lambda'$, $\eta = \mu'$ setzen, sodass $\lambda' = 0$ im ersten, $\varepsilon' = -\varepsilon$, $\lambda' > 0$ im zweiten, $\varepsilon' = \varepsilon$, $\lambda' > 0$ im dritten Falle ist, ferner in jedem Falle $\lambda' < \lambda$, $\mu' > \mu$. Im ersten Falle denken wir uns noch $\varepsilon' = -\varepsilon$. Wir wollen ferner hier unter $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ mit den Ecken RSR_0S_0 speciell dasjenige völlig bestimmte Parallelogramm mit $\xi = 0$, $\eta = 0$ als Diagonalen verstehen, dessen Berandung sowohl den Punkt A, wie den Punkt A' aufnimmt. Die Ecke $S(\xi = 0, \eta = \sigma)$ kommt dabei im ersten Falle in J, im zweiten in M, im dritten in N zu liegen. Wir können nun zeigen, dass in jedem Falle dieses Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ keinen Gitterpunkt ausser O im Inneren enthält und dass darin auch A' nicht Mitte einer Seite ist. Aus diesen Umständen folgt nach den Betrachtungen in § 1, dass $\lambda'\mu' < \frac{1}{2}$ ist, und da zudem $\lambda > \lambda' \geqq 0$ gilt, wird danach in der That der Gitterpunkt p', q' von der im Satze II geforderten Beschaffenheit sein. Wir unterscheiden nun die genannten drei Fälle:

Ist *erstens* J ein Gitterpunkt, $A' = J$, so erreicht das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ die Gerade $Y = 1$ nur im Punkte J. Dieses Parallelogramm enthält daher keinen Gitterpunkt ausser O im Inneren und A, A_0, J, J_0 auf der Begrenzung. Dabei werden J, J_0 die Ecken S, S_0. Da ferner H ausserhalb dieses Parallelogramms $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fällt, so liegt wegen $OH = AJ$ der Punkt A von S weiter entfernt als die Mitte $\xi = \frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ der Seite, welche A und S enthält. Man hat also $\lambda > \frac{\varrho}{2}$, $\mu < \frac{\sigma}{2}$. Andererseits gilt $\lambda' = 0 < \frac{\varrho}{2}$, $\mu' = \sigma > \frac{\sigma}{2}$. — Zu bemerken ist noch, dass hier jedenfalls $\mu > 0$ ist. Denn wäre $\mu = 0$, also auch A eine Ecke in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, so enthielte dieses Parallelogramm in den vier Ecken Gitterpunkte. Dann wäre nach § 1, 3. die Form $\xi\eta$ der Variabeln x, y äquivalent mit der Form XY der Variabeln X, Y.

Wir verfolgen jetzt die Annahme, dass J kein Gitterpunkt ist. Es bedeute noch G den Schnittpunkt der Geraden FB mit der Geraden $Y = 0$; dieser Punkt liegt im Falle $\mu > 0$ auf der Verlängerung von A_0O über A_0 hinaus, im Falle $\mu = 0$ fällt er mit A_0 zusammen. Aus den zwei ähnlichen Dreiecken GOM und BJM einerseits und aus den zwei ähnlichen Dreiecken OAN und JCN andererseits erhält man die Proportionen

(1) $$\frac{JM}{OJ + JM} = \frac{BJ}{GO}, \quad \frac{JN}{OJ + JN} = \frac{JC}{OA}.$$

Der *zweite* der obigen Fälle, $A' = B$, hat Statt, wenn J kein Gitterpunkt ist und dabei $OM < ON$ ist. Der gezeichneten Figur 3 ist speciell dieser Fall zu Grunde gelegt. Dabei giebt dann FBM (A_0BM für $\mu = 0$) eine Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ab. Für den Punkt M gilt hier stets $Y < 2$. Denn entweder hat man $BJ < JC$; wegen $BJ + JC = A_0O$ ist dann $BJ < \frac{1}{2} A_0O \leqq \frac{1}{2} GO$ und folgt aus (1): $JM < OJ$. Ist aber $BJ \geqq JC$, so ist wegen $BJ + JC = OA$ jetzt $JC \leqq \frac{1}{2} OA$ und folgt aus der zweiten Relation in (1): $JN \leqq OJ$, und um so mehr gilt dann $JM < OJ$. In jedem Falle ist dann weiter $OM < 2OJ$, d. h. eben $Y < 2$ für den Punkt M.

Das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ liegt somit hier ganz im Bereiche $-2 < Y < 2$. Von der Geraden $Y = 1$ enthält es eine Strecke mit B als einem Endpunkte und mit einem Punkte zwischen J und C als anderem Endpunkte, von der Geraden $Y = 0$ enthält es die Strecke A_0OA. Von Gitterpunkten finden sich also darin allein O im Inneren und A, A_0, B, B_0 auf der Begrenzung. Da ferner $BC = OA$ ist, die Strecke BC bei B in's Innere von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ eintritt, aber C ausserhalb $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fällt, so liegt B an $S (= M)$ *näher* als die Mitte $\xi = -\frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ der B und S enthaltenden Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, man hat also $\lambda' < \frac{\varrho}{2}$, $\mu' > \frac{\sigma}{2}$; und andererseits liegt deshalb der Punkt A von der Ecke $S (= M)$ *weiter* ab als die Mitte $\xi = \frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ der A und S enthaltenden Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$, mithin ist $\lambda > \frac{\varrho}{2}$, $\mu < \frac{\sigma}{2}$.

Ueber die Ermittlung des Gitterpunktes A' in diesen beiden ersten Fällen bemerken wir Folgendes: Man hat für A' hier $\xi = -\varepsilon\lambda'$, $\eta = \mu'$ und $0 \leqq \lambda' < \lambda$, andererseits $\overline{X} = g$, $Y = 1$, wo g eine ganze Zahl ist, und dann $p' = r + gp$, $q' = s + gq$. Nun folgt $-\varepsilon\lambda' = \varepsilon(\overline{\lambda} + g\lambda)$, also soll $0 \leqq -\overline{\lambda} - g\lambda < \lambda$ oder $0 \leqq -\frac{\overline{\lambda}}{\lambda} - g < 1$ sein. Danach ist g die grösste in $-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$ enthaltene ganze Zahl:

$$g = \left[-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}\right].$$

Die Relation $Y = 1$ für A' ist gleichbedeutend mit $\lambda\mu' + \mu\lambda' = 1$. Ist nun $-\frac{\overline{\lambda}}{\lambda}$ genau eine ganze Zahl, so wird $\lambda' = 0$, $A' = J$. Andernfalls wird $\lambda' > 0$ und ist der Punkt M auf der Geraden FB (A_0B für $\mu = 0$) bestimmt durch $\xi = 0$, $\frac{\eta - \mu'}{\xi + \varepsilon\lambda'} = \frac{\eta - \mu}{\xi + \varepsilon\lambda}$, also für M: $\eta(\lambda - \lambda') = \lambda\mu' - \mu\lambda' = 2\lambda\mu' - 1$, der Punkt N auf der Geraden AC hingegen ist, da C hier den Werthen $\xi = -\varepsilon\lambda' + \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu' + \mu$ entspricht, bestimmt durch $\xi = 0$, $\frac{\eta - \mu' - \mu}{\xi + \varepsilon\lambda' - \varepsilon\lambda} = \frac{\eta - \mu}{\xi - \varepsilon\lambda}$, also für N: $\eta\lambda' = \lambda\mu' + \mu\lambda' = 1$. Die Relation $OM < ON$ kommt danach auf $\frac{2\lambda\mu' - 1}{\lambda - \lambda'} < \frac{1}{\lambda'}$ d. i., da $\lambda > 0$ ist, auf $2\lambda'\mu' < 1$ hinaus.

Endlich nehmen wir als *dritten* Fall den, dass J kein Gitterpunkt ist und dabei $OM \geqq ON$ gilt. Dann hat für $A'(\xi = \varepsilon'\lambda', \eta = \mu')$ der Punkt C einzutreten, so dass $\varepsilon' = \varepsilon$ ist. Für B ist dann $\xi = -\varepsilon(\lambda - \lambda')$, $\eta = \mu' - \mu$; es folgt also zunächst $\mu' - \mu > \mu$. Die Relation $OM \geqq ON$ kommt hier nach der eben gemachten Ausführung auf $2(\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq 1$ hinaus.

Es sei zunächst $OM > ON$. Aus $JM > JN$ folgt nach (1), da $GO \geqq OA$ ist, $BJ > JC$. Diese Beziehung ist hier gleichbedeutend mit $\lambda - \lambda' > \lambda'$. Wegen $BJ + JC = OA$ hat man sodann $JC < \frac{1}{2}\, OA$, und wegen (1) daher $JN < OJ$. Danach gilt für den Punkt N jedenfalls $Y < 2$. Das Parallelogramm $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ reicht also nicht an $Y = 2$ heran. Von der Geraden $Y = 1$ enthält es eine Strecke mit einem Punkte zwischen B und J als einem Endpunkte und mit dem anderen Endpunkte in C, von der Geraden $Y = 0$ enthält es die Strecke $A_0 OA$. Danach enthält es keinen Gitterpunkt ausser O und A, A_0, C, C_0. Da ferner B ausserhalb dieses Parallelogramms liegt und $AC = OB$ ist, so ist AC grösser als die Hälfte der A und C enthaltenden Seite von $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ und befindet sich daher C näher an $S\,(= N)$ und A weiter von S als die Mitte $\xi = \frac{\varepsilon\rho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ dieser Seite; man hat also $\lambda' < \frac{\rho}{2} < \lambda$, $\mu' > \frac{\sigma}{2} > \mu$.

Jetzt sei $OM = ON$, sodass M mit N zusammenfällt. Nehmen wir zudem $\mu > 0$ an, so dass A nicht Ecke in $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ wird, so ist $GO > A_0 O$ und daher wieder $BJ > JC$, $\lambda - \lambda' > \lambda'$, und gelten alle Ueberlegungen wie vorhin, nur dass ausser A, A_0, C, C_0 noch die Gitterpunkte B und B_0 auf die Begrenzung von $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ zu liegen kommen. Weil OB parallel AC ist, wird dabei B Mitte einer Seite von $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$, also $\lambda - \lambda' = \frac{\rho}{2}$, $\mu' - \mu = \frac{\sigma}{2}$, dagegen ist, weil $OB = AC$ und weder A noch C eine Ecke von $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ ist, weder C noch A Mitte einer Seite von $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$; man hat wieder $\lambda' < \frac{\rho}{2} < \lambda$, $\mu' > \frac{\sigma}{2} > \mu$.

Hat man schliesslich $OM = ON$ *und dazu* $\mu = 0$, so ist $A_0 OA$ Diagonale von $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ und fällt G mit A_0 zusammen. Dann folgt $BJ = JC = \frac{1}{2}\, OA$, also $\lambda - \lambda' = \lambda'$ und weiter $JN = OJ$, $CN = AC = OB$. Unter diesen Umständen reicht $\mathfrak{P}(\rho, \sigma)$ mit der Ecke S gerade an $Y = 2$

heran, es enthält wieder im Inneren ausser O keinen Gitterpunkt, aber nicht bloss B, sondern auch C ist darin Mitte einer Seite. Für B wie für C gilt dann $|\xi\eta| = \frac{1}{2}$. Es wäre dieses derjenige Fall, wo $\xi\eta$ sich als äquivalent mit der Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ erweist, ein Fall, der vorweg ausgeschlossen wurde.

Aus den Betrachtungen in § 1 folgt nunmehr in jedem Falle, dass der Gitterpunkt A' den Forderungen des Satzes II entspricht. Zur Bestimmung dieses Gitterpunktes $x = p'$, $y = q'$ aus dem Gitterpunkte A hat sich zugleich die folgende Regel herausgestellt:

Man bezeichne mit g die grösste in $-\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$ enthaltene ganze Zahl und setze $h = g$ oder $h = g + 1$, je nachdem

$$(-\bar{\lambda} - \lambda g)(\bar{\mu} + \mu g) < \text{ oder } \geqq \frac{1}{2}$$

ist. Dann hat man $p' = r + ph$, $q' = s + qh$.

2. Verändern wir die Parameter ϱ, σ des in 1. betrachteten Parallelogramms $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ in der Weise, dass σ verkleinert wird, also S und S_0 näher an O heranrücken, dass aber die Seiten noch fortwährend durch A, A_0 (und F, F_0) gehen, so erhalten wir, so lange die Abnahme von σ eine gewisse Grenze nicht erreicht, ein neues Parallelogramm mit $\xi = 0$, $\eta = 0$ als Diagonalen, welches offenbar keine anderen Gitterpunkte ausser A_0, O, A enthält. Daraus geht der Satz hervor:

Satz III. *Ist ein Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ so beschaffen, dass die Zahlen p, q relativ prim sind und dafür $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ausfällt, so kann man stets Parallelogramme*

$$\left|\frac{\xi}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right| \leqq 1$$

construiren, welche den Gitterpunkt auf der Begrenzung liegen haben und ausser den drei Punkten $x, y = p, q$; $0, 0$; $-p, -q$ überhaupt keinen Gitterpunkt enthalten.

Wenn andererseits für einen Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ ein Parallelogramm der hier bezeichneten Art existirt, so zeigt der Beweis zum Satze I, dass umgekehrt stets p, q relativ prim sind und dafür $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ ausfällt.

Auf Grund dieses Satzes III beweisen wir über das Verhältniss der in 1. mit A und A' bezeichneten zwei Gitterpunkte den folgenden wichtigen Zusatz:

Es kann keinen von A, A_0, A', A_0' verschiedenen Gitterpunkt x, y geben,

· *den ebenfalls x, y relativ prim sind und ebenfalls* $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$, *dabei* ɤr $\lambda \geqq |\xi| \geqq \lambda'$ *wäre.*

Beweis. Nehmen wir an, es existirte ein Gitterpunkt A^* der hier ɛeichneten Art, und es sei für ihn $|\xi| = \lambda^*$, $|\eta| = \mu^*$. Wir hezeichnen ig. 4) mit E den Punkt $\xi = \lambda$, $\eta = \mu$, mit E' den Punkt $\xi = \lambda'$, $\eta = \mu'$, t R und S die Schnittpunkte der Geraden E' mit $\eta = 0$ und $\xi = 0$, weiter mit L den nkt $\xi = \lambda$, $\eta = 0$, mit L' den Punkt $\xi = \lambda'$, $= 0$, endlich mit E^* den Punkt $\xi = \lambda^*$, $\eta = \mu^*$. ch dem Satze III müsste es zufolge unserer raussetzungen möglich sein, ein Parallelo-amm $\mathfrak{P}(\varrho^*, \sigma^*)$ mit $\xi = 0$, $\eta = 0$ als Diago-len zu construiren, dessen Begrenzung den mkt A^* aufnimmt, welches aber weder A ch A' enthielte. Sind R^*, S^* die Ecken $\xi = \varrho^*$, $\eta = 0$ und $\xi = 0$, $= \sigma^*$ dieses Parallelogramms, so enthält die Strecke R^*S^* den Punkt *, es darf aber weder E, noch E' dem Dreiecke OR^*S^* angehören. a nun nach Voraussetzung E^* in dem Parallelstreifen $\lambda' \leqq \xi \leqq \lambda$ liegt nd noch dafür $\eta \geqq 0$ ist, müsste danach E^* sich nothwendig im Viereck $'LEE'$ und dabei nicht auf der Seite EE' desselben befinden. Aber as Parallelogramm RSR_0S_0 enthält im Inneren O als einzigen Gitter-unkt, danach kann E^* nicht in $L'LEE'$ bei Ausschluss der Strecke E' liegen. Ein Gitterpunkt, wie wir ihn in A^* angenommen haben, ann also nicht existiren.

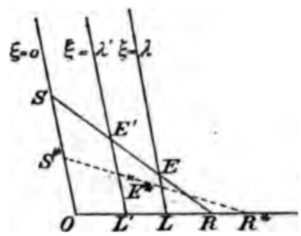


Fig. 4.

In entsprechender Weise leuchtet ein, dass es keinen von A, A_0, A', A_0' erschiedenen Gitterpunkt geben kann, für den ebenfalls x, y relativ prim ind und ebenfalls $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$, dabei aber $\mu \leqq |\eta| \leqq \mu'$ wäre.

3. Durch die aus A und A' entnommene Substitution

$$(\Gamma) \qquad x = pX + p'Y, \quad y = qX + q'Y,$$

leren Determinante $pq' - qp' = \pm 1$ ist, geht die Form $\xi\eta$ in eine quivalente Form

$$\varphi X^2 + \chi XY + \psi Y^2 = (\varepsilon\lambda X + \varepsilon'\lambda' Y)(\mu X + \mu' Y)$$

iber.

Man erhält zunächst die Gleichung $\chi^2 - 4\varphi\psi = 1$.

Sodann ist $\varphi = \varepsilon\lambda\mu$, $\psi = \varepsilon'\lambda'\mu'$ und gilt $|\varphi| < \frac{1}{2}$, $|\psi| < \frac{1}{2}$. Weiter at man, wenn $\varepsilon' = -\varepsilon$ ist, $\lambda\mu' + \mu\lambda' = 1$, $\lambda > \lambda' \geqq 0$, $\mu' > \mu \geqq 0$ und $= \varepsilon(\lambda\mu' - \mu\lambda') = \varepsilon(1 - 2\mu\lambda')$; also ist in diesem Falle $0 < \varepsilon\chi \leqq 1$. Venn dagegen $\varepsilon' = \varepsilon$ ist, hat man $\lambda\mu' - \mu\lambda' = 1$, $\lambda > 2\lambda' > 0$, $\mu' > 2\mu \geqq 0$

und $\chi = \varepsilon(\lambda\mu' + \mu\lambda') = \varepsilon(1 + 2\mu\lambda')$: da hier $2\mu\lambda' < \mu'\lambda' < \frac{1}{2}$ ist, folgt also, $1 \leqq \varepsilon\chi < \frac{3}{2}$. Die Relation $(\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq \frac{1}{2}$, die in diesem zweiten Falle besteht, ergiebt $\varepsilon(\chi - \varphi - \psi) \geqq \frac{1}{2}$. — Die Vorzeichen ε und ε' entnimmt man hiernach bereits aus dem Werthe von χ allein, ausser wenn gerade $\chi = \pm 1$ (also $\varphi = 0$ oder $\psi = 0$) ist.

Da aus $pq' - qp' = \pm 1$ schon hervorgeht, dass p und q einerseits und andererseits p' und q' relativ prim sind, so sind die besonderen Umstände, welche hier für die zwei Gitterpunkte $A(\xi = \varepsilon\lambda,\ \eta = \mu)$ und $A'(\xi = \varepsilon'\lambda',\ \eta = \mu')$ gelten, völlig zusammengefasst in den Beziehungen: $\lambda > 0$; $\mu > 0$, $\varepsilon = \pm 1$ oder $\mu = 0$, $\varepsilon = 1$; $pq' - qp' = \varepsilon$, ferner *entweder:*

$$\varepsilon' = -\varepsilon, \quad \lambda > \lambda' \geqq 0, \quad \lambda\mu < \frac{1}{2}, \quad \lambda'\mu' < \frac{1}{2}$$

oder:

$$\varepsilon' = \varepsilon, \quad \lambda > \lambda' > 0, \quad \lambda\mu < \frac{1}{2}, \quad (\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq \frac{1}{2}.$$

Bemerkenswerth ist noch, dass bei dieser zweiten Reihe von Bedingungen für $\varepsilon' = \varepsilon$ die Ungleichung $\lambda\mu < \frac{1}{2}$ eine Folge der übrigen Ungleichungen ist. Denn man hat hier $\lambda\mu' - \lambda'\mu = 1$. Aus

$$(\lambda - \lambda')(\mu' - \mu) \geqq \frac{1}{2}$$

und $\lambda > \lambda'$ folgt zuvörderst $\mu' > \mu$; sodann kann diese Ungleichung ersetzt werden durch

$$\lambda\mu' + \lambda'\mu - \lambda\mu - \lambda'\mu' \geqq \frac{1}{2}(\lambda\mu' - \lambda'\mu),$$

d. i.

$$\frac{1}{2}\lambda\mu' + \frac{3}{2}\lambda'\mu - \lambda\mu - \lambda'\mu' \geqq 0$$

oder

$$\frac{1}{2}(\lambda - \lambda')(\mu' - 2\mu) \geqq \frac{1}{2}\lambda'(\mu' - \mu).$$

Daraus folgt $\mu' - 2\mu > 0$. Ersetzt man weiter hier $\lambda\mu'$ durch $1 + \lambda'\mu$, so entsteht endlich

$$\frac{1}{2} + 2\lambda'\mu \geqq \lambda\mu + \lambda'\mu', \quad \text{also} \quad \frac{1}{2} \geqq \lambda\mu + \lambda'(\mu' - 2\mu),$$

und daraus entnimmt man in der That $\frac{1}{2} > \lambda\mu$.

§ 3.

Fassen wir die Resultate des § 1 und § 2 zusammen und nehmen die Sätze hinzu, welche daraus bei Vertauschung der Rollen von ξ und η, bei Ersetzung von ξ, η durch $\eta, -\xi$, hervorgehen, so entsteht der folgende

Satz IV. *Es seien $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ zwei lineare Formen mit beliebigen reellen Coefficienten und einer Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$; jedoch sei die Form $\xi\eta$ in x, y nicht äquivalent mit der Form XY oder der Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ in X, Y. Alsdann lassen sich die sämmtlichen Systeme von ganzen Zahlen x, y, für welche x, y relativ prim sind und $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ und zudem $\eta > 0$, bez. $\eta = 0$, $\xi > 0$ ist, in eine Reihe nach wachsendem Werthe η ordnen. Dabei sind sie zugleich nach abnehmendem Werthe $|\xi|$ geordnet.*

Für je zwei auf einander folgende Systeme $x = p$, $y = q$ und $x = p'$, $y = q'$ in der Reihe gilt dann stets

$$pq' - qp' = \pm 1.$$

Diese Reihe weist ein bestimmtes erstes System auf, wofür $\eta = 0$, $\xi > 0$, also $\frac{x}{\delta} = \frac{y}{-\gamma}$ und > 0 ist, wenn $\frac{\delta}{-\gamma}$ rational ist; sie weist ein bestimmtes letztes System auf, wofür $\xi = 0$, $\eta > 0$, also $\frac{x}{-\beta} = \frac{y}{\alpha}$ und > 0 ist, wenn $\frac{-\beta}{\alpha}$ rational ist. Sie ist ohne ein erstes System, wenn $\frac{\delta}{-\gamma}$ irrational ist, ohne ein letztes System, wenn $\frac{-\beta}{\alpha}$ irrational ist; sie ist nach Anfang und Ende hin unbegrenzt, wenn sowohl $\frac{\delta}{-\gamma}$ wie $\frac{-\beta}{\alpha}$ irrational sind.

Ist die Reihe ohne ein letztes System, so convergirt in ihrem Verlaufe $|\xi|$ nach Null und wächst η über jede Grenze; ist sie ohne ein erstes System, so wächst bei umgekehrter Folge der Systeme in ihr $|\xi|$ über jede Grenze und convergirt η nach Null.

Diese zuletzt erwähnte Thatsache folgt aus dem Umstande, dass überhaupt nur für eine endliche Anzahl von Systemen der Reihe $|\xi|$ oder η zwischen gegebenen positiven Grenzen liegen kann. Denn soll etwa $\varrho_1 \geqq |\xi| \geqq \varrho_0 > 0$ sein, so folgt aus $|\xi\eta| < \frac{1}{2}$ und $|\xi| \geqq \varrho_0$ noch $|\eta| < \frac{1}{2\varrho_0}$; in einem Parallelogramme $|\xi| \leqq \varrho_1$, $|\eta| \leqq \frac{1}{2\varrho_0}$ liegen aber stets nur eine endliche Anzahl von Gitterpunkten x, y.

Die Reihe der hier in Betracht kommenden Gitterpunkte x, y, nach wachsendem Werthe ihres η geordnet, soll die *Kette zu* den Formen ξ, η

heissen, ein einzelner Gitterpunkt $x = p$, $y = q$ daraus ein *Kettenglied*, ferner die mittelst zweier auf einander folgender Kettenglieder $x = p$, $y = q$ und $x = p'$, $y = q'$ gebildete Substitution

$$x = pX + p'Y, \quad y = qX + q'Y$$

eine *Substitution der Kette* heissen.

Wir bezeichnen die nach einander auftretenden Kettenglieder mit

$$p_i,\ q_i \qquad (i = \cdots -2, -1, 0, 1, 2, \cdots)$$

wobei wir, wenn ein erstes Glied vorhanden ist, *diesem* Gliede und anderenfalls einem beliebig gewählten Gliede den Index 0 ertheilen wollen. Für $x = p_i$, $y = q_i$ setzen wir $\xi = \varepsilon_i \lambda_i$, $\eta = \mu_i$, so dass $\mu_i \geqq 0$, $\lambda_i \geqq 0$, $\varepsilon_i = \pm 1$ sei. Ferner schreiben wir allgemein, soweit die Indices in Betracht kommen,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}} = \vartheta_i.$$

Für ein etwa vorhandenes erstes Glied ist $\varepsilon_0 = 1$. Für einen etwa vorhandenen letzten Index $i = w$, wobei dann $\lambda_w = 0$ wäre, denken wir uns $\vartheta_w = -1$ gewählt. Die Substitution

$$x = p_{i-1} X_i + p_i Y_i, \quad y = q_{i-1} X_i + q_i Y_i$$

oder kurz $\begin{pmatrix} p_{i-1}, & p_i \\ q_{i-1}, & q_i \end{pmatrix}$ bezeichnen wir mit T_i.

Man hat dann allgemein:

$$\lambda_{i-1} > \lambda_i, \quad \mu_{i-1} < \mu_i,$$

ferner

$$(1) \qquad \lambda_{i-1}\mu_i - \vartheta_i \mu_{i-1}\lambda_i = 1, \quad p_{i-1}q_i - q_{i-1}p_i = \varepsilon_{i-1}.$$

Die am Schlusse von § 2, 1 entwickelte Regel, welche überhaupt dazu verhilft, aus einem Kettengliede das nächstfolgende abzuleiten, ergiebt einen einfachen Zusammenhang zwischen drei auf einander folgenden Kettengliedern: p_{i-1}, q_{i-1}; p_i, q_i; p_{i+1}, q_{i+1}. Wir können p_i, q_i mit dem Gitterpunkte p, q (ε_i mit ε, λ_i mit λ) und p_{i+1}, q_{i+1} mit p', q' aus § 2 identificiren. Für die Zahlen r, s dort, welche der Bedingung $p_i s - q_i r = \varepsilon_i$ zu genügen haben, kann man dann mit Rücksicht auf (1): $s = -\vartheta_i q_{i-1}$, $r = -\vartheta_i p_{i-1}$ einführen, und dabei wird

$$\xi = \varepsilon_i \bar{\lambda} = -\vartheta_i \varepsilon_{i-1} \lambda_{i-1}.$$

Also ist dann $\bar{\lambda}$ durch $-\lambda_{i-1}$ zu ersetzen. Dadurch entsteht die folgende *Regel:*

Man bezeichne mit g_i die grösste in $\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}$ enthaltene ganze Zahl und setze $h_i = g_i$ oder $= g_i + 1$, je nachdem

$$(\lambda_{i-1} - g_i\lambda_i)(g_i\mu_i - \vartheta_i\mu_{i-1}) < \textit{oder} \geqq \frac{1}{2}$$

ist, dann gilt

$$p_{i+1} = -\vartheta_i p_{i-1} + h_i p_i, \qquad q_{i+1} = -\vartheta_i q_{i-1} + h_i q_i$$

und überdies wird $\vartheta_{i+1} = -1$ *im ersten,* $= 1$ *im zweiten Falle.*

Man erhält hiernach

$$(2) \quad \begin{pmatrix} p_{i-1}, & p_i \\ q_{i-1}, & q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_i \\ 1, & h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i, & p_{i+1} \\ q_i, & q_{i+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}, & \varepsilon_i\lambda_i \\ \mu_{i-1}, & \mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_i \\ 1, & h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_i\lambda_i, & \varepsilon_{i+1}\lambda_{i+1} \\ \mu_i, & \mu_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Es wird also

$$p_{i-1}X_i + p_iY_i = p_iX_{i+1} + p_{i+1}Y_{i+1},$$
$$q_{i-1}X_i + q_iY_i = q_iX_{i+1} + q_{i+1}Y_{i+1}$$

vermöge

$$X_i = -\vartheta_i Y_{i+1}, \qquad Y_i = X_{i+1} + h_i Y_{i+1}.$$

Setzt man allgemein $-\frac{X_i}{Y_i} = t_i$, so gilt daher weiter

$$(3) \quad \frac{-p_{i-1}t_i + p_i}{-q_{i-1}t_i + q_i} = \frac{-p_i t_{i+1} + p_{i+1}}{-q_i t_{i+1} + q_{i+1}},$$

während

$$(4) \quad t_i = \frac{\vartheta_i}{h_i - t_{i+1}}$$

ist. Dabei ist zu bemerken, dass Zähler und Nenner der rechten Seite von (3) genau die Ausdrücke sind, die bei der naturgemässen Umformung des Zählers oder des Nenners der linken Seite je in einen Quotienten zweier ganzer Functionen von t_{i+1} als die Zähler dieser beiden Quotienten erscheinen. Aus (3) und (4) erhält man sogleich allgemeiner:

$$(5) \quad \frac{-p_{i-1}t_i + p_i}{-q_{i-1}t_i + q_i} = \frac{-p_{k-1}t_k + p_k}{-q_{k-1}t_k + q_k}, \qquad i < k,$$

wenn

$$(6) \quad t_i = \cfrac{\vartheta_i}{h_i - \cfrac{\vartheta_{i+1}}{h_{i+1} - \cdots - \cfrac{\vartheta_{k-1}}{h_{k-1} - t_k}}}$$

ist, und dabei gilt über die Entstehung von Zähler und Nenner der rechten Seite in (5) aus Zähler und Nenner der linken Seite eine ganz entsprechende Bemerkung wie bei den Beziehungen (3) und (4).

Ebenso wie ξ, η haben η, $-\xi$ die Determinante 1. Die Kette zu $\eta, -\xi$ ist im Wesentlichen die umgekehrte Kette zu ξ, η. Durchläuft p_i, q_i die Gitterpunkte der Kette zu ξ, η in umgekehrter Reihenfolge,

d. h. sodass die Indices i abnehmen, so hat man dabei in den Systemen $x = -\varepsilon_i p_i$, $y = -\varepsilon_i q_i$, (für welche $-\xi \geqq 0$ ausfällt), die Glieder der Kette zu η, $-\xi$. Ueber den Fortgang in dieser letzteren Kette sei noch die aus (2) folgende Beziehung:

$$(7) \quad \begin{pmatrix} -\varepsilon_{i+1} p_{i+1}, & -\varepsilon_i p_i \\ -\varepsilon_{i+1} q_{i+1}, & -\varepsilon_i q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_{i+1} \\ 1, & h_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon_i p_i, & -\varepsilon_{i-1} p_{i-1} \\ -\varepsilon_i q_i, & -\varepsilon_{i-1} q_{i-1} \end{pmatrix}$$

angemerkt.

§ 4.

An die Sätze in § 2 schliesst sich folgendes Theorem an:

Satz V. *Sind* $\xi = \alpha x + \beta y$, $\eta = \gamma x + \delta y$ *zwei lineare Formen mit beliebigen reellen Coefficienten und einer Determinante* $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ *und sind* ξ_0, η_0 *irgend welche gegebene reelle Grössen, so giebt es stets ganze Zahlen* x, y, *für welche*

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \frac{1}{4}$$

ausfällt.

Beweis. Betrachten wir vorweg die Fälle, dass es eine ganzzahlige Substitution mit einer Determinante ± 1 giebt, durch welche die Form $\xi\eta$ der Variabeln x, y in die Form XY oder in die Form $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ der neuen Variabeln X, Y übergehe. Dem Werthsysteme $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ entspreche dabei das System $X = X_0$, $Y = Y_0$, so erweist sich vermöge jener Substitution

$$(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0) = (X - X_0)(Y - Y_0), \quad \text{bez.} \quad = \frac{1}{2}((X - X_0)^2 - (Y - Y_0)^2).$$

Bestimmen wir nun X und Y als ganze Zahlen so, dass $|X - X_0| \leqq \frac{1}{2}$, $|(Y - Y_0)| \leqq \frac{1}{2}$ ist, so wird im ersten Falle, wo $\xi\eta$ äquivalent XY ist, $|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \frac{1}{4}$. Dabei ist zu bemerken, dass das Gleichheitszeichen hier unter gewissen Umständen wirklich in Betracht kommt, nämlich wenn sowohl X_0 wie Y_0 gleich ganzen Zahlen vermehrt um $\frac{1}{2}$ sind. — Im zweiten Falle, wo $\xi\eta$ äquivalent $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ ist, stellt sich sogar $|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| \leqq \frac{1}{8}$ heraus.

Nunmehr schliessen wir die Fälle aus, dass $\xi\eta$ äquivalent mit XY oder mit $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ ist.

Betrachten wir irgend eine Substitution

$$x = pX + p'Y, \qquad y = qX + q'Y$$

r zu ξ, η gehörigen Kette. Wir bezeichnen den Gitterpunkt p, q mit A, n Gitterpunkt p', q' mit A'. Nach § 2 haben wir ein ganz bestimmtes rallelogramm RSR_0S_0 oder $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$: $\left|\frac{\xi}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta}{\sigma}\right| \leqq 1$, dessen Berandung wohl A, wie A' aufnimmt. Der grösseren Anschaulichkeit wegen wollen ir in der Zeichnungsebene die Coordinaten x, y derart interpretiren, dass eses Parallelogramm $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ ein *Quadrat* im gewöhnlichen Sinne wird. ir p, q sei $\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$, $(\lambda \geqq 0,\ \mu \geqq 0,\ \varepsilon = \pm 1)$, für p', q' sei $= \varepsilon'\lambda'$, $\eta = \mu'$, $(\lambda' \geqq 0,\ \mu' \geqq 0,\ \varepsilon' = \pm 1)$. Wir haben nun die beiden, ch in § 2 unterschiedenen Fälle $\varepsilon' = -\varepsilon$ und $\varepsilon' = \varepsilon$ gesondert zu tersuchen.

1°. Es sei zunächst $\varepsilon' = -\varepsilon$ und $\lambda > \lambda' \geqq 0$, $\mu' > \mu \geqq 0$. Ein eichzeitiges Eintreten von $\mu = 0$ und $\lambda' = 0$ ist dadurch ausgeschlossen, ss $\xi\eta$ nicht äquivalent XY sein soll. Es sei M die Seitenmitte $\xi = \frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $= \frac{\sigma}{2}$ und M' die Seitenmitte $\xi = -\frac{\varepsilon\varrho}{2}$, $\eta = \frac{\sigma}{2}$ in $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$. Nach n Bemerkungen in § 2 kommen A und A' derart auf der Berandung n $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ zu liegen, dass bei einer Umlaufung derselben in einem gewissen nne sich A, M, (S), A', M', A_0, M_0, (S_0), A_0', M_0' folgen (s. Fig. 5; n die Figur nicht zu compliciren, sind darin die Seiten von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ cht ausgezogen); A ist von M, A' von M' verschieden.

Da wir die Rollen von ξ und η vertauschen, anstatt ξ, η auch $\eta, -\xi$ Grunde legen können, so dürfen wir noch die Annahme $\lambda'\mu' \geqq \lambda\mu$ achen; (weil nicht zugleich $\lambda' = 0$, $\mu = 0$ sein kann, wird dann gewiss > 0, also A' von S verschieden sein). Da auf jeder Seite des Quadrates (ϱ, σ) der Werth $\left|\frac{\xi\eta}{\varrho\sigma}\right|$ stets von der Mitte der Seite nach ihren Enden n abnimmt und dabei auf allen vier Seiten gleichen Werth erhält bei r nämlichen *Entfernung* von der Seitenmitte, den Begriff der Entfernung gewöhnlichen Sinne genommen, so läuft jene Annahme darauf hinaus, ss $A'M' \leqq AM$ sein soll.

Wir construiren weiter das Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$, dessen Ecken auf $=0$, $\xi = 0$ halb so grosse Entfernungen von O haben wie R, R_0, S, S_0. ie Berandung von $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ nimmt die Punkte $X = \pm\frac{1}{2}$, $Y = 0$ d $X = 0$, $Y = \pm\frac{1}{2}$ auf. Legen wir sodann um jeden einzigen Gitter-nkt als Mittelpunkt ein Quadrat, welches dem Quadrate $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ gleich d in den Seiten parallel gestellt ist, so ergeben diese Quadrate das Bild r in Fig. 5 mit ausgezogener Umrandung gezeichneten Quadrate. Die nzelnen Gitterpunkte sind in dieser Figur durch ihre Coordinaten X, Y

angedeutet. Das erste Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ um den Nullpunkt stösst Stücken seiner Seiten an die Quadrate mit den Mittelpunkten A, A_0, A_0', während es die übrigen Quadrate überhaupt nicht trifft. Dan liegen jene Quadrate offenbar so, dass keine zwei in einander eingrei und zwischen sich lassen sie noch lauter gleiche und parallel liege Lücken in Form von Rechtecken, welche die einzelnen Punkte $X+$ $Y+\frac{1}{2}$ mit ganzzahligen X, Y zu Mittelpunkten haben.

Es sei beispielsweise $GHJK$ die rechteckige Lücke mit dem Mi punkte $X=\frac{1}{2}$, $Y=\frac{1}{2}$ oder L, so dass die Seiten GH, HJ, JK, .

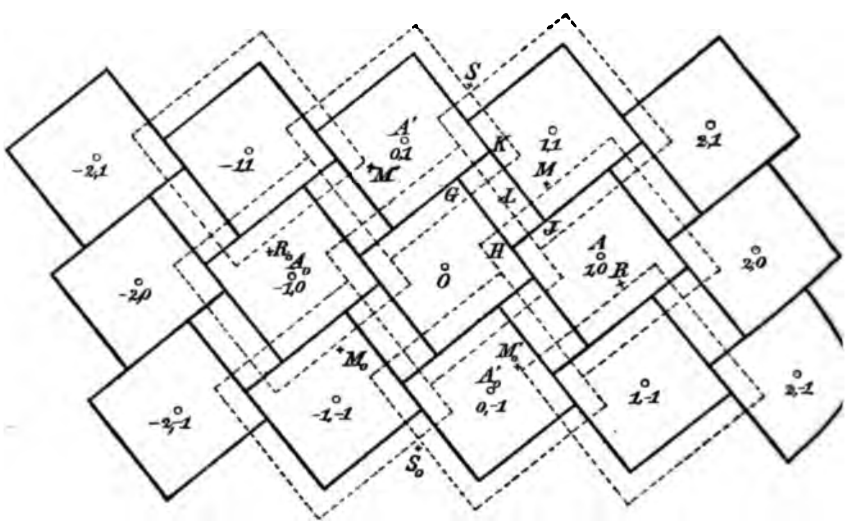


Fig. 5.

sich an die Quadrate mit den Mittelpunkten $X, Y = 0, 0;\ 1, 0;\ 1, 1;$ 0 anlegen. Da AH, $M'GM$, $A'K$ sämmtlich parallel der Linie $\eta=0$ si so ist $GH = MA \leq MS$ und $GK = M'A' < M'S$, also $GH \geq$ (und überdies $\frac{1}{2}RS \geq GH$, $\frac{1}{2}RS > GK$; (man beachte, dass A' ni in S fällt). In jeder der rechteckigen Lücken ist daher eine Seite klei die andere höchstens so gross als die Seite des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$

Unter dem Inhalt einer Figur wollen wir den Werth des Integr $\iint dX\,dY$ über ihre Fläche verstehen. Der Inhalt des Quadr $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ ist dann, weil $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, $pq'-qp'=\pm 1$ ist, gl $\frac{1}{2}\varrho\sigma$ und der Inhalt des Rechteckes $GHJK$ ist $<\frac{1}{2}\varrho\sigma$. Nun ko in der ganzen Ebene auf jeden Gitterpunkt $X = X^*$, $Y = Y^*$ einerseits ein Parallelogramm $-\frac{1}{2} \leqq X - X^* \leqq \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leqq Y - Y^* \leqq \frac{1}{2}$ vom Inhalte 1, wobei diese Parallelogramme die ganze Ebene lückenlos erfüllen, ohne gegenseitig in einander einzudringen, andererseits kommt hier auf jeden Gitterpunkt X^*, Y^* ein Quadrat mit dem Mittelpunkte X^*, Y^* vom Inhalte $\frac{1}{2}\varrho\sigma$ und ein Rechteck mit dem Mittelpunkte $X^* + \frac{1}{2}$, $Y^* + \frac{1}{2}$ von einem gewissen Inhalte $< \frac{1}{2}\varrho\sigma$, und alle diese Quadrate und Rechtecke erfüllen ebenfalls die ganze Ebene lückenlos, ohne gegenseitig in einander einzudringen. Danach folgt offenbar

$$\frac{1}{2}\varrho\sigma < 1 < 2 \cdot \frac{1}{2}\varrho\sigma. \tag{1}$$

Es verhalte sich die Entfernung des Punktes O von der Geraden GH zu der des Punktes L von dieser Geraden, also $\frac{1}{2} M'S : \frac{1}{2} M'A'$ wie $1 : \varkappa - 1$, dabei ist $1 < \varkappa < 2$. Construiren wir dann das Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ mit O als Mittelpunkt, dessen Seiten denen von $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ parallel sind, so geht dessen Berandung durch L und wird deshalb dieses Quadrat eine Hälfte der Lücke $GHJK$ vollständig überdecken. Legen wir nun um jeden Gitterpunkt als Mittelpunkt ein diesem Quadrate $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ gleiches und parallel gestelltes Quadrat, so werden daher diese Quadrate zweiter Art, die in Fig. 5 mit gestrichelter Berandung gezeichnet sind, jedenfalls die *ganze* Ebene, ohne Lücken zu lassen, überdecken. Also wird der Punkt, für den die Bestimmungsstücke ξ, η gleich den gegebenen Werthen ξ_0, η_0 sind, in wenigstens eines dieser Quadrate fallen müssen; für den Gitterpunkt x, y, welcher der Mittelpunkt des betreffenden Quadrates ist, gilt dann

$$\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta - \eta_0}{\sigma}\right| \leqq \frac{\varkappa}{2}. \tag{2}$$

In das Innere des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ dringen von allen übrigen dieser Quadrate zweiter Art nur die vier Quadrate mit den Mittelpunkten A, A_0, A', A_0'. Dabei liegen diese vier Quadrate selbst völlig auseinander, auch reichen sie nicht bis an den Nullpunkt O heran. Danach zeigt sich, dass die Gesammtheit dieser Quadrate zweiter Art die Ebene so überdecken, dass sie kein Gebiet mehr als zweifach überlagern, während noch gewisse ⅃ förmige Partieen mit den einzelnen Gitterpunkten als Mittelpunkten vorhanden sind, die jedesmal nur je einem dieser Quadrate angehören. Infolgedessen ist der Inhalt des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ noth wendig < 2, d. h. man hat

(3) $$\frac{1}{2}\varkappa^2\varrho\sigma < 2.$$

Aus (2) folgt, weil das geometrische Mittel zweier Beträge nicht grösser als ihr arithmetisches Mittel ist,

$$\left|\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{\varrho\sigma}\right| \leqq \left(\frac{\varkappa}{4}\right)^2,$$

und daraus mit Rücksicht auf (3)

$$|(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)| < \frac{1}{4}.$$

2⁰. Zweitens sei $\varepsilon' = \varepsilon$ und $\lambda > \lambda' > 0$, $\mu' > \mu \geqq 0$. Die Punkte A und A' werden hier von einer und derselben Seite von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ auf genommen, wobei weder A noch A' in die Mitte der Seite fallen und A aber nicht A' eine Ecke sein kann. Die Länge der betreffenden Seite ist $\leqq 2AA'$.

Gehen wir nunmehr zu dem Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ über und construiren um jeden Gitterpunkt als Mittelpunkt ein diesem gleiches und parallel gestelltes Quadrat, so liefern diese Quadrate das Bild der in Fig. 6 mit ausgezogener Umrandung gezeichneten Quadrate. Die Gitterpunkte sind dort durch ihre Coordinaten X, Y bezeichnet. Diese verschiedenen Quadrate nun greifen nicht in einander ein und lassen zwischen sich im Allgemeinen wieder lauter gleiche und parallel gelagerte rechteckige Lücken mit den einzelnen Punkten $X+\frac{1}{2}$, $Y+\frac{1}{2}$ für ganzzahlige X, Y als Mittelpunkten. Diese Lücken kommen nur zum Fortfall, wenn auch der Gitterpunkt $X=-1$, $Y=1$ auf die Begrenzung von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fällt, (wenn $(\lambda-\lambda')(\mu'-\mu) = \frac{1}{2}$ ist). Es sei, wenn nicht dieser Specialfall statthat $GHJK$ die rechteckige Lücke mit dem Mittelpunkte L: $X=\frac{1}{2}$, $Y=\frac{1}{2}$ wobei GH, HJ, JK, KG ihre an die Quadrate um $X, Y = 0,0;\ 1,0;\ 1,1;\ 0,1$ anstossenden Seiten seien. Dann ist die Seite GK gleich der Seite des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$, die Seite GH kleiner als diese Seite. Der Grenzfall, dass $GH = GK$ wäre, würde nur eintreten, wenn A und A' beide in Ecken von $\mathfrak{P}(\varrho, \sigma)$ fielen, was dadurch ausgeschlossen ist, dass $\xi\eta$ nicht äquivalent der Form XY sein soll. Nunmehr erweist sich durch eine entsprechende Ueberlegung wie in 1⁰, dass der Inhalt des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varrho}{2}, \frac{\sigma}{2}\right)$ zusammen mit dem des Rechteckes $GHJK$ gleich 1 sein muss, woraus

$$\frac{1}{2}\varrho\sigma \leqq 1 < 2 \cdot \frac{1}{2}\varrho\sigma \tag{1}$$

hervorgeht. Die Gleichung $\frac{1}{2}\varrho\sigma = 1$ hat statt, wenn die Lücken zum Fortfall kommen, also H mit G, J mit K zusammenfällt.

Es verhalte sich die Entfernung des Punktes A von der Geraden HJ zu der des Punktes L von dieser Geraden wie $1 : \varkappa - 1$, so ist $1 \leqq \varkappa < 2$.

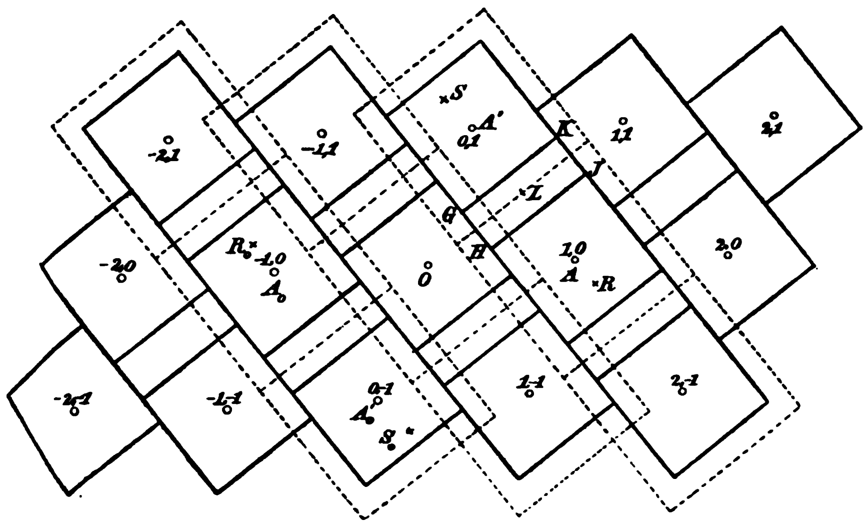


Fig. 6.

Construiren wir nun das Quadrat $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$, so wird es die Hälfte der Lücke mit dem Mittelpunkte $X = -\frac{1}{2}$, $Y = \frac{1}{2}$ vollständig überdecken. Legen wir dann gleiche und parallel gestellte Quadrate um jeden Gitterpunkt als Mittelpunkt, so erfüllen daher diese Quadrate jedenfalls die ganze Ebene. Also wird derjenige Punkt, für den die Bestimmungsstücke ξ, η die gegebenen Werthe $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$ haben, in wenigstens eines dieser Quadrate fallen müssen; alsdann gilt für den Gitterpunkt x, y, welcher der Mittelpunkt des betreffenden Quadrates ist,

$$\left|\frac{\xi - \xi_0}{\varrho}\right| + \left|\frac{\eta - \eta_0}{\sigma}\right| \leqq \frac{\varkappa}{2}. \tag{2}$$

Andererseits überdecken diese neuen Quadrate keinen Theil der Ebene mehr als *zweimal*, während noch gewisse Rechtecke mit den einzelnen Gitterpunkten als Mittelpunkten da sind, welche jedesmal nur je einem dieser Quadrate angehören. Infolgedessen muss der Inhalt des Quadrates $\mathfrak{P}\left(\frac{\varkappa\varrho}{2}, \frac{\varkappa\sigma}{2}\right)$ kleiner als 2, also

$$\frac{1}{2} x^2 \varrho \sigma < 2 \tag{3}$$

sein. Aus (2) und (3) ergiebt sich wie oben

$$|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| < \frac{1}{4}.$$

Damit ist der Satz V vollständig bewiesen. —

Wir bemerken noch Folgendes: Aus $1 < \varrho\sigma$ und $x^2\varrho\sigma < 4$ ent nimmt man $x^2 < 4$. Aus (2) erhält man daher $|\xi - \xi_0| < \varrho$; nach § ist aber stets $\varrho < 2\lambda$. Hat nun die Kette zu ξ, η kein letztes Glied, is also $\frac{-\beta}{\alpha}$ irrational, so convergirt im Verlaufe ihrer Glieder die Grösse nach Null. In solchem Falle kann man daher einen Gitterpunkt x, bestimmen, wofür $|(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)| < \frac{1}{4}$ ausfällt und zudem $|\xi - \xi$ unter einer beliebig vorgeschriebenen positiven Grösse liegt.

5.

Es sei jetzt a eine beliebige reelle Grösse, und wir setzen $\xi = x - a$ $\eta = y$. Die Form $(x - ay)y$ ist nur dann äquivalent mit der Form X wenn a eine ganze Zahl ist, und nur dann äquivalent mit $\frac{1}{2}(X^2 - Y^2)$ wenn a gleich einer ganzen Zahl vermehrt um $\frac{1}{2}$ ist. Von diesen zwei Fällen wollen wir absehen. Die Kette zu ξ, η hat hier ein bestimmtes erstes Glied p_0, q_0; für dasselbe soll $\frac{p_0}{1} = \frac{q_0}{0}$ und > 0 sein also hat man $p_0 = 1$, $q_0 = 0$. Für das zweite Kettenglied p_1, q_1 soll $p_0 q_1 - q_0 p_1 = \varepsilon_0 = 1$, also $q_1 = 1$ und $|(p_1 - a q_1) q_1| < \frac{1}{2}$ sein; also ist dann p_1 gleich der an der Grösse a **nächstgelegenen** ganzen Zahl h_0 für die $|h_0 - a| < \frac{1}{2}$ ist. Setzt man sodann in den Formeln (5) und (6) des § 3: $i = 1$, $t^k = 0$, so resultirt $\frac{p_k}{q_k} = h_0 - t_1$. Die in § 3 erhaltenen Resultate führen nunmehr zu folgendem Satze:

Satz VI. *Es sei a eine beliebige reelle Grösse, jedoch weder eine ganze Zahl, noch gleich einer ganzen Zahl $+ \frac{1}{2}$. Man bilde in folgender Weise eine Reihe von ganzzahligen Systemen p_i, q_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$.*

Zunächst sei $p_0 = 1$, $q_0 = 0$, sodann $q_1 = 1$ und $p_1 = h_0$ die an der Grösse a nächstgelegene ganze Zahl so, dass $|h_0 - a| < \frac{1}{2}$ ist. Allgemein wenn man bis zu einem Systeme p_i, q_i gelangt ist, wofür noch $p_i - a q_i \neq 0$

ausfällt, stelle man den Quotienten $\frac{p_{i-1}-aq_{i-1}}{p_i-aq_i}$ *her. Es sei* ϑ_i *sein Vorzeichen und* g_i *die grösste in dem absoluten Betrage dieses Quotienten enthaltene ganze Zahl, weiter* $h_i = g_i$ *oder* $= g_i + 1$, *je nachdem*

$$|((p_{i-1} - aq_{i-1}) - \vartheta_i g_i(p_i - aq_i))(g_i q_i - \vartheta_i q_{i-1})| < \text{oder} \geqq \frac{1}{2}$$

ist. Man setze sodann

$$p_{i+1} = h_i p_i - \vartheta_i p_{i-1}, \qquad q_{i+1} = h_i q_i - \vartheta_i q_{i-1}.$$

Der auf diese Weise ermittelten Reihe von Systemen p_i, q_i *kommen folgende Eigenschaften zu:*

1°. *Wenn* a *rational ist, bricht die Reihe mit einem gewissen System* p_w, q_w *ab, wofür* $p_w - aq_w = 0$ *ist. Wenn* a *irrational ist, so lässt sich die Reihe dieser Systeme unbegrenzt fortsetzen.*

2°. *Für je zwei auf einander folgende Systeme gilt stets*

$$p_i q_{i+1} - q_i p_{i+1} = \vartheta_1 \vartheta_2 \cdots \vartheta_i = \pm 1.$$

Die Zahlen p_i, q_i *sind stets relativ prim.*

3°. *Man hat*

$$\frac{p_k}{q_k} = h_0 - \frac{\vartheta_1|}{|h_1} - \frac{\vartheta_2|}{|h_2} - \cdots - \frac{\vartheta_{k-1}|}{|h_{k-1}}, \qquad (k = 1, 2, \cdots).$$

Dabei sind p_k *und* q_k *selbst denjenigen Ausdrücken gleich, die bei der naturgemässen Darstellung der rechten Seite als Quotient zweier ganzer Functionen der* h_i *und* ϑ_i *den Zähler bez. Nenner abgeben.*

4°. *Man hat*

$$0 < q_1 < q_2 < q_3 \cdots,$$

$$\frac{1}{2} > |p_1 - aq_1| > |p_2 - aq_2| > |p_3 - aq_3|, \cdots.$$

Um so mehr nehmen die Beträge $\left|\frac{p_k}{q_k} - a\right|$ *mit wachsendem Index ab. Wenn* a *irrational ist, convergiren die Brüche* $\frac{p_k}{q_k}$ *mit wachsendem Index nach der Grösse* a.

5°. Für jedes der Systeme p_k, q_k $(k = 1, 2, \cdots)$ gilt

$$|(p_k - aq_k)q_k| < \frac{1}{2}.$$

Umgekehrt: Ist x, y irgend ein System von relativ primen ganzen Zahlen, wofür $y > 0$ und

$$|(x - ay)y| < \frac{1}{2}$$

gilt, so findet sich das Zahlenpaar x, y stets unter den Systemen p_k, q_k $(k = 1, 2, \cdots)$.

Aus dem Satze V entnimmt man noch: *Sind b, c irgend zwei weitere reelle Grössen, so kann man stets ganze Zahlen x, y finden, so dass*

$$|(x-ay-b)(y-c)| < \frac{1}{4}$$

*ist, und zwar, wenn a irrational ist, noch derart, dass zugleich $|x-ay-b|$ unter einer beliebig kleinen positiven Grösse liegt.**)

Die hier definirte Kettenbruchentwicklung mit den Näherungsbrüchen $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \cdots$ zur Annäherung an die Grösse a soll der Diagonalkettenbruch für a heissen, mit Rücksicht darauf, dass diese Näherungsbrüche zu den Parallelogrammen mit den Linien $x-ay=0$ und $y=0$ als Diagonalen in einer ganz entsprechenden Beziehung stehen, wie die Näherungsbrüche bei der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung

$$a = l_0 + \frac{1|}{|l_1} + \frac{1|}{|l_2} + \cdots,$$

wo l_0 eine ganze Zahl, $l_1, l_2, \cdots$ lauter positive Zahlen sind, zu den Parallelogrammen mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und mit Seiten parallel zu $x-ay=0$, $y=0$. Für diese gewöhnliche (auch sogenannte regelmässige oder normale) Kettenbruchentwicklung würde ich alsdann den charakteristischeren Namen Parallelkettenbruch in Vorschlag bringen.

Nach einem bekannten Satze von Lagrange kommt jedes Zahlenpaar x, y, wobei x, y relativ prim sind, $y>0$ und $\left|\frac{x}{y}-a\right| < \frac{1}{2y^2}$ ist, als Zähler und Nenner eines Näherungsbruches der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung für a vor. Danach erscheinen alle Näherungsbrüche des Diagonalkettenbruches für a auch unter den Näherungsbrüchen des Parallelkettenbruches für a und wird also, falls nicht beide Entwicklungen zusammenfallen, der Parallelkettenbruch stets langsamer convergiren.

Der Diagonalkettenbruch für a möge mit $a = DK\begin{pmatrix} & \vartheta_1, & \vartheta_2, & \cdots \\ h_0, & h_1, & h_2, & \cdots \end{pmatrix}$, der Parallelkettenbruch für a mit $a = PK(l_0, l_1, l_2, \cdots)$ bezeichnet werden. Die schon vorhin angedeutete geometrische Auffassung der

---

*) Tschebyscheff hat (in einem russisch geschriebenen Aufsatze in den Mémoires der Petersburger Academie, t. X, Appendix 4, 1866) gezeigt, dass, wenn a, b reelle Grössen sind, stets ganze Zahlen x, y existiren, wofür $|(x-ay-b)y| < \frac{1}{2}$ ist. Hermite hat (Crelle's Journal, Bd. 88, 1880) bewiesen, dass der Ausdruck links durch ganze Zahlen x, y kleiner als $\sqrt{\frac{2}{27}}$ gemacht werden kann. Der Satz im Texte ergiebt ein schärferes Resultat, weil $\frac{1}{4} < \sqrt{\frac{2}{27}}$ ist.

Parallelkettenbrüche, welche der hier gegebenen Ableitung der Diagonalkettenbrüche entspricht, führt leicht zu folgendem Satze:

Um aus der Reihe der Systeme p_i, q_i $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ für den Diagonalkettenbruch von a die Reihe der Zähler und Nenner der sämmtlichen Näherungsbrüche des Parallelkettenbruches von a zu erhalten, hat man nur die erstere Reihe in der Weise zu erweitern, dass, so oft eine Zahl $\vartheta_i = 1$ (für ein $i \geqq 1$) ausfällt, zwischen die beiden Systeme p_{i-1}, q_{i-1} und p_i, q_i noch das neue System $p_i - p_{i-1}, q_i - q_{i-1}$ eingefügt wird.

Man leitet aus diesem Satze die nachstehende Regel ab, welche erlaubt, aus einem Diagonalkettenbruche $a = DK\begin{pmatrix} & \vartheta_1, & \vartheta_2, & \cdots \\ h_0, & h_1, & h_2, & \cdots \end{pmatrix}$ sogleich den Parallelkettenbruch $a = PK(l_0, l_1, l_2, \cdots)$ zu entnehmen:

Aus der Reihe der Zahlen $h_0, h_1, h_2, \cdots$ entsteht die Reihe der Zahlen $l_0, l_1, l_2, \cdots$, indem an Stelle einer jeden Zahl h_i substituirt wird:

$$\begin{array}{lll} h_i, & \textit{wenn} \;\; \vartheta_i = -1, & \vartheta_{i+1} = -1, \\ h_i - 1, & \textit{wenn} \;\; \vartheta_i = 1, & \vartheta_{i+1} = -1, \\ h_i - 1, 1, & \textit{wenn} \;\; \vartheta_i = -1, & \vartheta_{i+1} = 1, \\ h_i - 2, 1, & \textit{wenn} \;\; \vartheta_i = 1, & \vartheta_{i+1} = 1 \end{array}$$

ist; dabei hat man sich noch $\vartheta_0 = -1$ zu denken und dann von dieser Vorschrift auch für $i = 0$ Gebrauch zu machen.

Die Diagonalkettenbrüche sind hiernach nicht bloss wegen der einfacheren Charakterisirung ihrer Näherungsbrüche leichter zu handhaben, sie enthalten auch alle Einzelheiten über die darzustellenden Grössen, welche die Parallelkettenbrüche erkennen lassen.

Beispiel: Der Parallelkettenbruch für $\sqrt{13}$ ist

$$PK(3, 1, 1;\ 1, 1, 6, 1, 1;\ 1, 1, 6, 1, 1; \cdots)$$

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{7}{2};\ \frac{11}{3}, \frac{18}{5}, \frac{119}{33}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71};\ \frac{393}{109}, \frac{649}{180}, \frac{4287}{1189}, \frac{4936}{1369}, \frac{9223}{2558}; \cdots,$$

der Diagonalkettenbruch für $\sqrt{13}$ ist

$$DK\begin{pmatrix} & +, & -, & +, & +, & -, & +, & +, & \cdots \\ 4, & 2; & 2, & 8, & 2; & 2, & 8, & 2; & \cdots \end{pmatrix}$$

mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{4}{1}, \frac{7}{2};\ \frac{18}{5}, \frac{137}{38}, \frac{256}{71};\ \frac{649}{180}, \frac{4936}{1369}, \frac{9223}{2558}; \cdots$$

d. i. dem $2, 3;\ 5, 7, 8; \cdots 5k,\ 5k+2,\ 5k+3; \cdots$ ten Näherungsbruch der ersteren Entwicklung.

Dagegen würde diejenige Kettenbruchentwicklung

$$K\begin{pmatrix} & \vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \\ h_0, & h_1, h_2, \cdots \end{pmatrix} = h_0 - \frac{\vartheta_1|}{|h_1} - \frac{\vartheta_2|}{|h_2} - \cdots,$$

wobei $\vartheta_1 = \pm 1$, $\vartheta_2 = \pm 1, \cdots$ und die $h_1, h_2, \cdots$ positive ganze Zahlen sind derart, dass die Reste $-\frac{\vartheta_k|}{|h_k} - \frac{\vartheta_{k+1}|}{|h_{k+1}} - \cdots$ stets zwischen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ liegen, für $\sqrt{13}$:

$$K\begin{pmatrix} & 1, & 1, & -1, & 1, & 1, & -1, & 1, & \cdots \\ 4, & 3; & 2, & & 7, & 3; & 2, & & 7, & 3; \cdots \end{pmatrix}$$

sein mit den Näherungsbrüchen

$$\frac{4}{1}, \frac{11}{3}; \frac{18}{5}, \frac{137}{38}, \frac{393}{109}; \frac{649}{180}, \frac{4936}{1369}, \frac{14159}{3927}; \cdots$$

d. i. dem $2, 4; 5, 7, 9; \cdots 5k, 5k+2, 5k+4; \cdots$ten Näherungsbruche des Parallelkettenbruches für $\sqrt{13}$. Also erfüllt bei dieser Art der Entwicklung einerseits nicht jeder Näherungsbruch $\frac{x}{y}$ die Bedingung

$$\left|\frac{x}{y} - \sqrt{13}\right| < \frac{1}{2y^2},$$

andererseits kommt nicht jeder Bruch $\frac{x}{y}$ mit dieser Eigenschaft unter den Näherungsbrüchen vor.

Der Diagonalkettenbruch für die Basis der natürlichen Logarithmen lautet:

$$e = DK\begin{pmatrix} & 1, & -1, & 1, & -1, & \cdots & & 1, & -1, & \cdots \\ 3, & 3, & & 2, & 5, & 2, & \cdots & 2m+1, & & 2, & \cdots \end{pmatrix}.$$

Die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche dieses Kettenbruches geben also die sämmtlichen Auflösungen der Bedingung

$$-\frac{1}{2} < (x - ey)\,y < \frac{1}{2}$$

in relativ primen positiven ganzen Zahlen x, y.

§ 6.

1. Ein unendlicher Diagonalkettenbruch

(1) $$DK\begin{pmatrix} & \vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \\ h_0, & h_1, h_2, \cdots \end{pmatrix}$$

für eine irrationale Grösse a soll periodisch heissen, wenn es eine positive Zahl v giebt, so dass von einem gewissen Index j an stets

(2) $$\vartheta_k = \vartheta_{k+v}, \quad h_k = h_{k+v} \qquad (k = j, j+1, j+2, \cdots)$$

ist. Das System der Werthe

$$\begin{pmatrix} \vartheta_j, & \vartheta_{j+1}, & \cdots, & \vartheta_{j+v-1} \\ h_j, & h_{j+1}, & \cdots, & h_{j+v-1} \end{pmatrix}$$

heisse dann eine Periode des Kettenbruches.

Wir beweisen zunächst die folgende Thatsache:

Ist der Diagonalkettenbruch für eine irrationale Grösse a periodisch, so ist a Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten.

Wir verwenden für die Kette zu den Formen $\xi = x - ay$, $\eta = y$ die in § 3 eingeführten Bezeichnungen. Durch die Substitution

$$T_i = \begin{pmatrix} p_{i-1}, & p_i \\ q_{i-1}, & q_i \end{pmatrix}$$

geht ξ in $\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}X_i + \varepsilon_i\lambda_i Y_i$ über, man hat also die Formel der Composition:

$$(1, -a)\, T_i = (\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}, \varepsilon_i\lambda_i).$$

Aus § 3, Gleich. (2) leitet man allgemeiner die Regel

$$(\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}, \varepsilon_i\lambda_i)\begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_i \\ 1, & h_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_{i+1} \\ 1, & h_{i+1} \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_{k-1} \\ 1, & h_{k-1} \end{pmatrix} = (\varepsilon_{k-1}\lambda_{k-1}, \varepsilon_k\lambda_k), \quad i < k$$

ab, und daraus entnimmt man insbesondere eine Beziehung:

$$\varepsilon_k\lambda_k = \varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}r_{i,k} + \varepsilon_i\lambda_i s_{i,k},$$

wo $r_{i,k}$, $s_{i,k}$ gewisse ganze Zahlen sind, die bloss von den Werthen $\vartheta_i, h_i, \vartheta_{i+1}, h_{i+1}, \cdots, \vartheta_{k-1}, h_{k-1}$ abhängen. Da mit unbegrenzt wachsendem k die Grösse λ_k nach Null convergirt, ersieht man danach, dass das Verhältniss $\frac{\varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}}{\varepsilon_i\lambda_i}$ durch die unendliche Reihe der Grössen ϑ_k, h_k für die sämmtlichen Indices $k \geqq i$ vollständig bestimmt ist.

Wenn nun mit irgend einem Werthe v für alle Indices $k \geqq j$ die Beziehungen (2) statthaben, muss daher nothwendig

$$\frac{\varepsilon_{j+v-1}\lambda_{j+v-1}}{\varepsilon_{j+v}\lambda_{j+v}} = \frac{\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}}{\varepsilon_j\lambda_j}$$

sein. Setzen wir $\frac{\varepsilon_{j+v-1}\lambda_{j+v-1}}{\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}} = \tau$, wobei $0 < |\tau| < 1$ sein wird, so folgt

$$\varepsilon_{j+v-1}\lambda_{j+v-1} = \tau\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}, \quad \varepsilon_{j+v}\lambda_{j+v} = \tau\varepsilon_j\lambda_j.$$

Nun hat man

$$(1, -a)\, T_{j+v} = (\tau\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}, \tau\varepsilon_j\lambda_j), \quad (\varepsilon_{j-1}\lambda_{j-1}, \varepsilon_j\lambda_j)\, T_j^{-1} = (1, -a)$$

daraus entsteht

$$(1, -a)\, T_{j+v} T_j^{-1} = (\tau, -\tau a).$$

Bezeichnet man mit $\begin{pmatrix} \mathrm{p}, & \mathrm{r} \\ \mathrm{q}, & \mathrm{s} \end{pmatrix}$ das Coefficientenschema der Substitution $T_{j+1} T_j^{-1}$, so bedeutet diese letzte Formel

$$\mathrm{p} - a\mathrm{q} = \tau, \quad \mathrm{r} - a\mathrm{s} = -\tau a.$$

Daraus erhält man

$$(\mathrm{r} - a\mathrm{s}) + (\mathrm{p} - a\mathrm{q})\, a = 0$$

und hierin kann nicht $\mathrm{q} = 0$ sein, denn sonst müsste $\mathrm{p} = \tau$ sein, während τ keine ganze Zahl ist, da $|\tau|$ zwischen 0 und 1 fällt.

2. Wir beweisen jetzt die Umkehrung der eben festgestellten Thatsache:

Satz VII. *Ist eine irrationale Grösse a Wurzel einer quadratischen Gleichung mit rationalen Coefficienten, so ist der Diagonalkettenbruch für a stets periodisch.*

Beweis. Es sei

$$n_0 a^2 + n_1 a + n_2 = 0$$

diejenige Gleichung für a, in der n_0, n_1, n_2 relativ prime ganze Zahlen sind und $n_0 > 0$ ist. Man hat $a = \dfrac{-n_1 \pm \sqrt{n_1^2 - 4n_0 n_2}}{2n_0}$, so dass die ganze Zahl $D = n_1^2 - 4n_0 n_2$ positiv und wegen der vorausgesetzten Irrationalität von a jedenfalls nicht das Quadrat einer ganzen Zahl ist. Die zweite Wurzel jener Gleichung $\dfrac{-n_1 \mp \sqrt{D}}{2n_0}$ werde mit $\bar{a}$ bezeichnet.

Wir setzen

$$\xi = x - ay = \alpha x + \beta y, \quad \eta = \frac{1}{a - \bar{a}}(x - \bar{a} y) = \gamma x + \delta y, \quad \zeta = y.$$

Dabei haben ξ, η ebenso wie ξ, ζ die Determinante 1, und gilt eine Beziehung:

$$\zeta = \eta + b\xi, \quad b = -\frac{1}{a - \bar{a}} = \mp \frac{n_0}{\sqrt{D}}.$$

Sodann entsteht

$$\pm \sqrt{D}\, \xi\eta = f = n_0 x^2 + n_1 xy + n_2 y^2.$$

Wir betrachten nunmehr die Kette zu den Formen ξ, η. Diese Kette wird jedenfalls nach beiden Seiten unbegrenzt sein. Wir verwenden für diese Kette die in § 3 eingeführten Bezeichnungen. Ausserdem mögen ξ_i, η_i die Ausdrücke bedeuten, in welche ξ, η durch die Substitution

$$(T_i) \qquad x = p_{i-1} X_i + p_i Y_i, \quad y = q_{i-1} X_i + q_i Y_i$$

übergehen, und es bedeute T_i das quadratische Schema $\begin{pmatrix} \varepsilon_{i-1}\lambda_{i-1}, & \varepsilon_i \lambda_i \\ \mu_{i-1}, & \mu_i \end{pmatrix}$ der Coefficienten von ξ_i, η_i, wobei dann $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} T_i = \mathsf{T}_i$ gilt.

Durch die ganzzahlige Substitution T_i, deren Determinante ± 1 ist geht die Form $f = \pm \sqrt{D}\, \xi\eta$ in eine Form

$$f_i = \pm \sqrt{D}\,\xi_i \eta_i = N_0 X_i^2 + N_1 X_i Y_i + N_2 Y_i^2$$

iber. Dabei sind N_0, N_1, N_2 ganze rationale Zahlen und folgt $N_1^2 - 4N_0 N_2 = D$; a D nicht eine Quadratzahl ist, hat man gewiss $N_0 \neq 0$, $N_2 \neq 0$. Zulem bestehen dabei nach § 2, 3 diese Beziehungen:

entweder

$$\frac{\nu_2}{\nu_0} < 0, \quad \frac{N_1}{N_0} > 0, \quad |N_0| < \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad |N_2| < \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad |N_1| < \sqrt{D}$$

oder

$$\frac{\nu_2}{\nu_0} > 0, \quad \frac{N_1}{N_0} > 0, \quad |N_0| < \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad |N_2| < \tfrac{1}{2}\sqrt{D}, \quad \sqrt{D} < |N_1| < \tfrac{3}{2}\sqrt{D},$$
$$|N_1 - N_0 - N_2| > \tfrac{1}{2}\sqrt{D}.$$

n jedem Falle kommen hiernach für die ganzzahligen Coefficienten N_0, N_1, N_2 einer Form f_i von vornherein nur eine endliche Anzahl von öglichen Werthsystemen in Betracht. Man wird also jedenfalls irgend wei Indices $i = j$ und $i = j + v$, wo $v > 0$ ist, finden können, für relche die beiden Formen f_j und f_{j+v} in den Coefficienten N_0, N_1, N_2 bereinstimmen.

Ersetzt man X_{j+v}, Y_{j+v} in den Formen ξ_{j+v}, η_{j+v} durch die Zeichen X_j, Y_j der Variabeln in ξ_j, η_j, so werden dadurch Beziehungen

$$\xi_{j+v} = \mathsf{A}\xi_j + \mathsf{B}\eta_j, \qquad \eta_{j+v} = \Gamma\xi_j + \Delta\eta_j$$

ergestellt, wobei die Coefficienten $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \Gamma, \Delta$ durch $\mathsf{T}_{j+v} = \begin{pmatrix}\mathsf{A}, & \mathsf{B}\\ \Gamma, & \Delta\end{pmatrix}\mathsf{T}_j$ betimmt sind, und vermöge dieser Beziehungen muss dann $\xi_{j+v}\eta_{j+v} = \xi_j\eta_j$ ntstehen. Vergleicht man die Coefficienten von ξ_j^2, η_j^2, $\xi_j\eta_j$ auf beiden eiten dieser Gleichung, so folgt $\mathsf{A}\Gamma = 0$, $\mathsf{B}\Delta = 0$, $\mathsf{A}\Delta + \mathsf{B}\Gamma = 1$. anach muss entweder

3) $\mathsf{B} = 0, \quad \Gamma = 0, \quad \mathsf{A} = \frac{1}{\Delta} = \tau; \qquad \xi_{j+v} = \tau\xi_j, \quad \eta_{j+v} = \frac{1}{\tau}\eta_j$

der

3*) $\mathsf{A} = 0, \quad \Delta = 0, \quad \mathsf{B} = \frac{1}{\Gamma} = \tau; \qquad \xi_{j+v} = \tau\eta_j, \quad \eta_{j+v} = \frac{1}{\tau}\xi_j$

it einem von Null verschiedenen Factor τ sein. Die zweite Art von eziehungen aber ist unmöglich, weil in der Form η_j der zweite Coefficient einen grösseren absoluten Betrag hat als der erste Coefficient, in er Form ξ_{j+v} aber das Entgegengesetzte statthaben muss. Also gelten othwendig die Beziehungen (3) und die Vergleichung der Coefficienten η_j und η_{j+v} zeigt noch, dass τ positiv und < 1 ist.

Die Gleichungen (3) ergeben

$$\mathsf{T}_{j+v} = \begin{pmatrix}\tau, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}\end{pmatrix}\mathsf{T}_j, \qquad \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} T_{j+v} T_j^{-1} = \begin{pmatrix}\tau, & 0\\ 0, & \frac{1}{\tau}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}.$$

Ist $\begin{pmatrix} \mathrm{p}, & \mathrm{r} \\ \mathrm{q}, & \mathrm{s} \end{pmatrix}$ das Coefficientenschema der Substitution $T_{j+v} T_j^{-1}$, wobei p, q, r, s ganze Zahlen sind und $\mathrm{ps} - \mathrm{qr} = \pm 1$ ist, so verwandeln sich hiernach ξ, η, wenn man darin x, y durch $\mathrm{p}x + \mathrm{r}y$, $\mathrm{q}x + \mathrm{s}y$ ersetzt, in die Ausdrücke $\tau\xi$, $\frac{1}{\tau}\eta$. Diese zwei Ausdrücke ergeben dasselbe Product wie ξ und η. Durch die umgekehrte Substitution werden ξ, η in $\frac{1}{\tau}\xi$, $\tau\eta$ übergehen. Hat man nun einen Gitterpunkt x, y, für den x, y relativ prim sind und $\xi = \varepsilon\lambda$, $\eta = \mu$ ($\mu > 0$, $\lambda > 0$, $\varepsilon = \pm 1$), $\lambda\mu < \frac{1}{2}$ ist, so existirt dann also ein anderer Gitterpunkt, für den ebenfalls x, y relativ prim sind und $\xi = \tau\varepsilon\lambda$, $\eta = \frac{1}{\tau}\mu$ ist, und ferner ein Gitterpunkt, für den x, y relativ prim sind und $\xi = \frac{1}{\tau}\varepsilon\lambda$, $\eta = \tau\mu$ ist; und diese zwei weiteren Gitterpunkte müssen dann ebenso wie der erste als Glieder der Kette zu ξ, η auftreten.

Nach (3) haben wir $\varepsilon_{j+v}\lambda_{j+v} = \tau\varepsilon_j\lambda_j$, $\mu_{j+v} = \frac{1}{\tau}\mu_j$. Nun müssen weiter die Punkte $\xi = \varepsilon_{j+v+1}\lambda_{j+v+1}$, $\eta = \mu_{j+v+1}$ und $\xi = \tau\varepsilon_{j+1}\lambda_{j+1}$, $\eta = \frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$, welche beide als Glieder der Kette auftreten, identisch sein. Denn hätte man $\mu_{j+v+1} > \frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$, so würde der Punkt $\xi = \tau\varepsilon_{j+1}\lambda_{j+1}$, $\eta = \frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$ ein Kettenglied sein, für das $\mu_{j+v} < \eta < \mu_{j+v+1}$ wäre, während $\eta = \mu_{j+v}$ und $\eta = \mu_{j+v+1}$ ja zwei auf einander folgenden Kettengliedern entsprechen. Hätte man dagegen $\mu_{j+v+1} < \frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$, so würde $\xi = \frac{1}{\tau}\varepsilon_{j+v+1}\lambda_{j+v+1}$, $\eta = \tau\mu_{j+v+1}$ ein Kettenglied sein, wofür $\mu_j < \eta < \mu_{j+1}$ wäre, was ebenfalls nicht möglich ist. Also muss $\mu_{j+v+1} = \frac{1}{\tau}\mu_{j+1}$ sein und müssen sodann jene zwei Punkte zusammenfallen.

Auf dieselbe Art erschliesst man successive weiter

$$(4) \qquad \varepsilon_{k+v}\lambda_{k+v} = \tau\varepsilon_k\lambda_k, \qquad \mu_{k+v} = \frac{1}{\tau}\mu_k$$

für $k = j+2, j+3, \cdots$. Sodann kann man in der Reihe der Indices rückwärts gehen und diese Beziehungen (4), welche auch für $k = j-1$ bereits durch (3) feststehen, nach einander für $k = j-2, j-3, \cdots$ erhalten. Also gelten diese Beziehungen (4) überhaupt für jeden möglichen Index k. Man hat nunmehr für jeden Index i: $\mathrm{T}_{i+v} = \begin{pmatrix} \tau, & 0 \\ 0, & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix} \mathrm{T}_i$; andererseits gilt nach § 3, (2) die Regel $\mathrm{T}_{i+1} = \mathrm{T}_i \begin{pmatrix} 0, & -\vartheta_i \\ 1, & h_i \end{pmatrix}$. Wendet man die erstere Formel für zwei auf einander folgende Indices $i=k$, $i=k+1$ an und hernach die letztere für $i=k$ und $i=k+v$, so folgt zuerst $\mathrm{T}_{k+v}^{-1}\mathrm{T}_{k+v+1}=\mathrm{T}_k^{-1}\mathrm{T}_{k+1}$ und sodann:

(5) $$\vartheta_{k+v}=\vartheta_k,\quad h_{k+v}=h_k \qquad (k=\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots).$$

Nach diesen Beziehungen (5) kann die Kette zu ξ, η als **vollkommen periodisch** bezeichnet werden.

Wir ziehen endlich auch die Form $\zeta=y$ heran. Für ein jedes Glied $x=p_i$, $y=q_i$ der Kette zu den Formen ξ, η gilt $\eta>0$ und $|\xi\eta|<\frac{1}{2}$. Gleichzeitig ist dabei $\sqrt{D}\,|\xi\eta|$ stets eine rationale ganze Zahl. Indem diese Zahl $<\frac{1}{2}\sqrt{D}$ ist, kann sie nicht die grösste in $\frac{1}{2}\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl überschreiten. Wir setzen letztere ganze Zahl $\left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right]=\frac{1}{2}\sqrt{D}-d$, dabei wird $0<d<1$. Aus $\sqrt{D}\,|\xi\eta|\leqq\frac{1}{2}\sqrt{D}-d$ folgt mit Rücksicht auf $\zeta=y=\eta+b\xi$:

$$|\xi\zeta|\leqq\frac{1}{2}-\frac{d}{\sqrt{D}}+|b\xi^2|,\qquad \zeta\geqq\eta-|b\xi|.$$

Nun nimmt, wenn man die Reihe der Kettenglieder zu ξ, η durchläuft, darin sowohl $|\xi|$ wie $\left|\frac{\xi}{\eta}\right|$ beständig ab. Geht man soweit in dieser Reihe, dass $|b\xi^2|<\frac{d}{\sqrt{D}}$ und $\left|\frac{\xi}{\eta}\right|<\frac{1}{|b|}$ ist, so hat man dann also $|\xi\zeta|<\frac{1}{2}$, $\zeta>0$ und müssen daher die betreffenden Systeme $x=p_i$, $y=q_i$, die man nun antrifft, sämmtlich auch Glieder der Kette zu den Formen ξ, ζ sein.

Ist umgekehrt x, y ein Glied der Kette zu den Formen ξ, ζ, so ist dafür $\zeta>0$ und $|\xi\zeta|<\frac{1}{2}$; daraus folgt

$$\sqrt{D}\,|\xi\eta|<\frac{1}{2}\sqrt{D}+|\sqrt{D}\,b\xi^2|,\qquad \eta\geqq\zeta-|b\xi|.$$

Geht man nun in der Reihe der Kettenglieder zu ξ, ζ soweit, dass $|\sqrt{D}\,b\xi^2|\leqq 1-d$ und $\left|\frac{\xi}{\zeta}\right|<\frac{1}{|b|}$ ist, so folgt hier $\eta>0$ und andererseits $\sqrt{D}\,|\xi\eta|<\left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right]+1$. Da aber $\sqrt{D}\,|\xi\eta|$ hierbei stets eine ganze rationale Zahl wird, muss dann überhaupt $\sqrt{D}\,|\xi\eta|\leqq\left[\frac{1}{2}\sqrt{D}\right]<\frac{1}{2}\sqrt{D}$, mithin $|\xi\eta|<\frac{1}{2}$ sein. Danach findet sich alsdann das betreffende System x, y stets auch unter den Gliedern der Kette zu ξ, η.

Auf diese Weise stimmen überhaupt die zu ξ, η und die zu ξ, ζ gehörige Kette von gewissen zwei Gliedern an in dem ganzen weiteren Verlaufe ihrer Kettenglieder völlig mit einander überein. Da nun die einzelnen Werthe ϑ_i, h_i in einer Kette jedesmal aus drei auf einander folgenden Kettengliedern abzuleiten sind, so werden sich danach auch die Relationen (5) von einem gewissen Index an auf die Kette zu $\xi = x - ay$, $\zeta = y$ übertragen, d. h. eben der Diagonalkettenbruch für die Grösse a ist periodisch.

In entsprechender Beziehung wie der Diagonalkettenbruch für a zu der Kette steht, die zu den Formen ξ, η gehört, steht der Diagonalkettenbruch für die conjugirte algebraische Zahl $\bar{a}$ zu der Kette, die zu den Formen $(a - \bar{a})\,\eta$, $-\frac{1}{a - \bar{a}}\,\xi$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, zu η, $-\xi$ gehört. Der einfache Zusammenhang der Kette zu ξ, η und der Kette zu η, $-\xi$ ist am Schlusse von § 3 erörtert; aus der dort angegebenen Beziehung (7) erhellt nun, dass, wenn $\begin{pmatrix} \vartheta_j, & \vartheta_{j+1}, \cdots, & \vartheta_{j+v-1} \\ h_j, & h_{j+1}, \cdots, & h_{j+v-1} \end{pmatrix}$ eine Periode des Diagonalkettenbruches für a ist, $\begin{pmatrix} \vartheta_j, & \vartheta_{j+v-1}, \cdots, & \vartheta_{j+1} \\ h_{j+v-1}, & h_{j+v-2}, \cdots, & h_j \end{pmatrix}$ eine Periode des Diagonalkettenbruches für $\bar{a}$ sein wird.

Zürich, den 31. December 1899.

Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.

Par

M. M. G. Ricci et T. Levi-Civita à Padoue.

Table des matières.

Chapitre I.

Algorithme du calcul différentiel absolu.

Page.

§ 1. Transformations ponctuelles et systèmes de fonctions 128

§ 2. Systèmes covariants et contrevariants. — Exemples divers 130

§ 3. Addition, multiplication, composition des systèmes, — Quadrique fondamentale. — Systèmes réciproques 132

§ 4. Application á l'analyse vectorielle 135

§ 5. Dérivation covariante et contrevariante selon une forme fondamentale. — Conservation des règles du calcul différentiel ordinaire 138

§ 6. Système de Riemann. — Rélations entre les éléments du deuxième système dérivé d'un système covariant quelconque 142

§ 7. Caractère invariant des équations, que l'on rencontre en calcul différentiel absolu 143

Chapitre II.

La géométrie intrinsèque comme instrument de calcul.

§ 1. Généralités sur les systèmes orthogonaux de congruences dans un espace quelconque 145

§ 2. Dérivées intrinsèques et leurs relations 149

§ 3. Congruences normales et géodésiques. — Familles isothermes de surfaces. — Système canonique par rapport à une congruence donnée 150

§ 4. Propriétés des coefficients de rotation. — Lien avec la théorie du trièdre mobile d'après M. Darboux 156

§ 5. Formes canoniques des systèmes associés à la forme fondamentale 158

Chapitre III.

Applications analytiques.

§ 1. Classification des formes quadratiques différentielles 160

§ 2. Invariants absolus. — Remarques géométriques. — Paramètres différentiels . 161

Chapitre IV.

Applications géométriques.

Pag.

§ 1. Étude des variétés à deux dimensions (Géométrie sur une surface): Généralités. — Courbure. — Congruences. — Faisceaux de congruences. — Invariants d'un faisceau. — Théorème de Beltrami 165

§ 2. Surfaces de l'espace ordinaire. — Équations fondamentales de la théorie de l'applicabilité. — Formes particulières remarquables. — Généralisation des formules de Gauss et de Codazzi 168

§ 3. Surfaces jouissant de propriétés données. — Quadriques 171

§ 4. Extension de la théorie des surfaces aux espaces linéaires à n dimensions. 171

§ 5. Groupes de mouvements dans une variété quelconque 173

§ 6. Étude complète des groupes de mouvements pour les variétés V_3 à trois dimensions. — Résolution du problème: Reconnaître si une V_3 donnée admet un groupe de mouvements et le déterminer, lorsqu'il existe . . 174

§ 7. Relations des résultats qui précédent avec les recherches de Lie et de M. Bianchi 176

Chapitre V.

Applications mécaniques.

§ 1. Intégrales premières des équations de la dynamique. — Intégrales linéaires (ordinaires et particularisées) 178

§ 2. Intégrales quadratiques des systèmes non soumis à forces. — Forme intrinsèque des conditions d'existence. — Hypothèse particulière, qui conduit aux forces vives de M. Stäckel 183

§ 3. Surfaces, dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique (surfaces de Liouville). — Classification de ces surfaces d'après le nombre des intégrales distinctes 185

§ 4. Transformations des équations de la dynamique 186

Chapitre VI.

Applications physiques.

§ 1. Cas de réductibilité à deux variables de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ (Potentiels binaires) 191

§ 2. Des champs vectoriels 193

§ 3. Exemples divers: Équations en coordonnées générales de l'électrodynamique, de la théorie de la chaleur et de l'élasticité 196

Préface.

M. Poincaré*) a écrit que dans les Sciences mathématiques *une bonne notation a la même importance philosophique qu'une bonne classification dans les Sciences naturelles.* Évidemment, et même avec plus de raison, on peut en dire autant des méthodes, car c'est bien de leur choix que dépend la possibilité de *forcer* (pour nous servir encore des paroles de l'illustre géomètre français) *une multitude de faits sans aucun lien apparent à se grouper suivant leurs affinités naturelles.*

On peut aussi dire qu'un théorème démontré par des voies détournées et en ayant recours à des artifices et à des considérations, qui n'ont avec lui aucun lien essentiel, n'est bien souvent qu'une vérité découverte à moitié; car il arrive presque toujours que le même théorème se présente d'une manière plus complète et générale, si l'on y parvient par un chemin plus droit et avec des moyens plus appropriés.

Citons comme exemple la démonstration donnée par Jacobi et étendue par Beltrami de l'invariabilité de l'expression $\Delta_2 U$. Elle est certainement élégante et fait témoignage de la penétration d'esprit de son auteur; mais on est bien surpris que, pour démontrer un théorème, qui appartient par sa nature à la théorie algébrique de l'élimination, on ait à s'occuper de la variation d'une intégrale. C'est à cette remarque et à la possibilité devinée *a priori* de reconduire la théorie des paramètres différentiels du deuxième ordre à celle des invariants des formes algébriques qu'on doit les recherches, qui ont amené à la découverte des méthodes, que nous appelons de *Calcul différentiel absolu;***) et dont le premier résultat fut la découverte de toute une chaîne d'invariants différentiels contenant une ou plusieurs fonctions arbitraires, et dont le $\Delta_2 U$ est le premier et le plus important anneau.

L'algorithme du Calcul différentiel absolu, c'est à dire l'instrument matériel des méthodes, sur lesquelles nous allons entretenir les lecteurs des *Mathematische Annalen*, se trouve tout entier dans une remarque due à M. Christoffel***). — Mais les méthodes mêmes et les avantages, qu'ils présentent, ont leur raison d'être et leur source dans les rapports intimes, qui les lient à la notion de variété à n dimensions, que nous devons aux génies de Gauss et de Riemann. —

D'après cette notion une variété V_n est définie intrinséquement dans

*) Préface aux *Oeuvres de Laguerre* publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences.

**) Cfr. *Ricci* «Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali», Annali di matematica pura ed applicata, Serie II^a, Tomo XIV, 1886.

***) «Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades», Crelle's Journal, Band LXX, 1869.

ses propriétés métriques par n variables indépendantes et par toute une classe de formes quadratiques des différentielles de ces variables, dont deux quelconques sont transformables l'une en l'autre par une transformation ponctuelle. — Par conséquence une V_n reste invariée vis-à-vis de toute transformation de ses coordonnées. Le Calcul différentiel absolu, en agissant sur des formes covariantes ou contrevariantes au ds^2 de V_n pour en dériver d'autres de même nature, est lui aussi dans ses formules et dans ses résultats indépendant du choix des variables indépendantes. — Étant de la sorte essentiellement attaché à V_n, il est l'instrument naturel de toutes les recherches, qui ont pour objet une telle variété, ou dans lesquelles on rencontre comme élément caractéristique une forme quadratique positive des différentielles de n variables ou de leurs dérivées.

L'exposition sommaire, que nous allons donner ici de ces méthodes et de leurs applications, a pour but de convaincre les lecteurs des avantages, qu'ils présentent et qui nous semblent grands et évidents; et de diminuer, autant que cela se peut, à ceux, qui auraient envie de les appliquer à leur tour, les efforts, qu'exige la pratique de tout instrument nouveau. — Nous pensons que, après avoir surmonté les difficultés de l'initiation, on se convaincra aisément que la généralité, qu'ils consentent, en éloignant de toute question les éléments hétérogènes, qu'on introduit en s'attachant à un système déterminé de variables, contribue non seulement à l'élégance, mais aussi à l'agilité et à la perspicuité des demonstrations et des conclusions.

Chapitre I.

Algorithme du calcul différentiel absolu.*)

§ 1.

Transformations ponctuelles et systèmes de fonctions.

Désignons par T une transformation de variables tout à fait générale

$$x_i = x_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) \tag{1}$$

biunivoque et régulière dans le domaine, que nous aurons à considérer; par Ω un système de plusieurs fonctions $(f_1, f_2, \cdots, f_p)$ des variables x; fonctions, que nous appellerons *éléments* du système Ω. Désignons aussi par S une substitution, qui porte sur le système Ω en substituant à ses éléments $f_1, f_2, \cdots, f_p$ respectivement des fonctions $g_1, g_2, \cdots, g_p$ des variables y.

*) *Ricci* „Delle derivazioni covarianti e controvarianti" Studi éditi dall' Università di Padova ecc, Padova, 1888. „Lezioni sulla teoria delle superficie", Padova, presso i fratelli Drucker, 1898.

Concevons S comme fonction de T; c'est-à-dire supposons que, pour que transformation (1), qui porte sur les variables indépendantes, on une substitution bien déterminée S; et que S considérée comme fonction T soit assujettie aux conditions suivantes:

1°: Si l'on prend pour T la substitution identique, S coincide aussi c cette substitution.

2°: Si l'on désigne par T, T_1, T_2 trois transformations (1), par S_1, S_2 les S correspondantes, et si l'on a $T \equiv T_2 \cdot T_1$, on a aussi $\equiv S_2 \cdot S_1$.

Il y a bien de manières différentes de déterminer S comme fonction T. — On peut, par exemple (et c'est ce que l'on fait généralment), ndre comme éléments du système transformé ceux, que l'on tire des ments du système primitif en y substituant aux variables x leurs expsions par les y. — Nous dirons dans ce cas que le système considéré *transforme par invariance;* ou qu'il est *invariant.*

Mais bien souvent la nature d'un système donné peut nous faire référer une autre loi de transformation. Par exemple, si $f_1, f_2, \cdots, f_n$ sont s dérivées d'une fonction f par rapport respectivement à $x_1, x_2, \cdots, x_n$, n trouvera naturel de prendre comme éléments du système transformé les rivées $(f_1), (f_2), \cdots, (f_n)$ de la fonction (f), qui est la transformée de f r la transformation T; au lieu des expressions, que l'on obtient de $, f_2, \cdots, f_p$ en les transformant par T.

La substitution S sera dans ce cas definie par les formules

$$')\qquad (f_r) = \sum_1^n {}^s f_s \frac{\partial x_s}{\partial y_r}, \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

ns lesquelles les fonctions $f_1, f_2, \cdots, f_n$ doivent être exprimées par les riables y.

Si le système donné résulte d'une fonction f et de toutes ses dérivées squ'à un ordre donné, on peut exiger qu'il soit composé de la même nière après la transformation (1). — Dans ce cas les formules analytiles, qui représentent la loi de transformation du système sont assez mpliquées. — La fonction f se transforme par invariance, ses dérivées mières d'après les formules (2), les dérivées du deuxième ordre d'après formules

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_r \partial y_s} = \sum_1^n {}^{pq} \frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_q} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_p}{\partial y_s} + \sum_1^n {}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_p} \frac{\partial^2 x_p}{\partial y_r \partial y_s};$$

etc.

On a aussi des exemples remarquables en considérant les coefficients d'une expression linéaire et homogène dans les dérivées du premier ordre d'une fonction, telle que

$$\sum_1^n {}_r A^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}; \tag{4}$$

et ceux d'une expression quadratique et homogène dans les différentielles des variables indépendantes, telle que

$$\sum_1^n {}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s. \tag{5}$$

Lorsqu'on exécute une transformation (1) sur les variables indépendantes, on passe en même temps des expressions (4) et (5) à leurs transformées

$$\sum_1^n {}_r B^{(r)} \frac{\partial f}{\partial y_r},$$

$$\sum_1^n {}_{rs} b_{rs} dy_r dy_s;$$

les nouveaux coefficients $B^{(r)}$ et b_{rs} étant donnés respectivement par les formules

$$B^{(r)} = \sum_1^n {}_s A^{(s)} \frac{\partial y_r}{\partial x_s}, \tag{4'}$$

$$b_{rs} = \sum_1^n {}_{pq} a_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial y_r} \frac{\partial x_q}{\partial y_s}. \tag{5'}$$

Il est donc bien naturel d'exécuter sur les systèmes des coefficients des expressions (4) et (5) les substitutions (4') et (5'), chaque fois que l'on exécute une transformation (1) sur les variables indépendantes.

Nous concluons qu'il est souvent indiqué de substituer à la loi d'invariance d'autres lois de transformation ayant leur raison d'être dans la nature même des systèmes, que l'on a à étudier.

§ 2.

Systèmes covariants et contrevariants. Exemples divers.

Parmi les lois de transformation, que l'on peut concevoir, il y en a deux, qui jouent un rôle prépondérant dans l'Analyse mathématique; ce sont les lois, que nous appelons de *covariance* et de *contrevariance* s'appliquant aux systèmes *multiples*, dont nous allons nous occuper. — Nous ns qu'un système de fonctions de n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ est m^{uple} d'ordre, m si l'on a un élément déterminé du système pour chaque position avec répétition m à m des indices $1, 2, \cdots, n$. Une seule fonc- sera pour nous, comme cas limite, un système d'ordre 0. — Pour $= 1, 2, 3, \cdots$ on aura en particulier les systèmes *simples* ou *du premier re*, *doubles* ou *du deuxième ordre* etc. — Les dérivées du premier ordre d'une ction et les coefficients d'une expression linéaire et homogène par rapport es dérivées nous donnent des exemples de systèmes de premier ordre. — aura des systèmes doubles en considérant les dérivées du deuxième re d'une fonction, ou les coefficients d'une quadrique dans les dif- ntielles des variables indépendantes; et, en général, un système d'ordre sera constitué, par exemple, par les dérivées du même ordre d'une ction arbitraire.

Nous dirons qu'un système d'ordre m est *covariant* (et dans ce cas nous ignerons ses éléments par des symboles tels que $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $(r_1, r_2, \cdots, r_m$ vant prendre chacun toutes les valeurs $1, 2, \cdots, n)$, si les éléments $_{r_1 \cdots r_m}$ du système transformé sont donnés par les formules

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m} X_{s_1 s_2 \cdots s_m} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{s_1}} \frac{\partial x_{r_2}}{\partial y_{s_2}} \cdots \frac{\partial x_{r_m}}{\partial y_{s_m}}.$$

Nous désignerons au contraire par des symboles tels que $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ éléments d'un système *contrevariant*, c'est à dire d'un système, dont transformation est représentée par les formules

$$Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m} X^{(s_1 s_2 \cdots s_m)} \frac{\partial y_{r_1}}{\partial x_{s_1}} \frac{\partial y_{r_2}}{\partial x_{s_2}} \cdots \frac{\partial y_{r_m}}{\partial x_{s_m}},$$

éléments X et Y se rapportant respectivement aux variables x et y. — c'est bien entendu que dans les formules (6) et (7) on conçoit tout rimé en fonction des variables y. —

En désignant par X une fonction quelconque des variables x, par Y même fonction exprimée par les y, la formule

$$Y = X$$

t être regardée autant comme un cas particulier des (6) que comme cas particulier de (7). — C'est à cause de cela qu'un système d'ordre bien qu'étant invariant, peut être considéré aussi comme cas limite des tèmes covariants ou des systèmes contrevariants.

Dans la suite en introduisant un symbole tel que $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ (ou $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$) s entendrons qu'il se rapporte toujours à un élément quelconque d'un ème covariant (ou contrevariant) d'ordre m, que nous appellerons ème $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ (ou système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$).

Les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients d'une forme quadratique φ de différentielles, d'après les formules (2) et (5'), nous donnent des exemples de systèmes covariants respectivement du premier et du deuxième ordre. — On a au contraire des exemples de systèmes contrevariants en considérant les coefficients d'une expression linéaire dans les dérivées du premier ordre d'une fonction et les coefficients de la forme réciproque de φ. De même les formules

$$dy_r = \sum_1^n{}_s\, dx_s \frac{\partial y_r}{\partial x_s}$$

nous disent que les différentielles des variables indépendantes sont les éléments d'un système simple contrevariant.

Les systèmes, qui sont constitués par les dérivées d'un ordre $m > 1$ d'une fonction des variables indépendantes (comme il résulte par exemple des formules (3) pour $m = 2$) ne sont ni covariants ni contrevariants. — Les lois de transformation de ces systèmes sont bien complexes, et c'est là la source des difficultés, qu'on rencontre dans le Calcul Différentiel ordinaire pour transformer les expressions aux dérivées partielles d'ordre supérieur au premier.

Nous verrons que l'on peut éviter ces difficultés en substituant à la dérivation ordinaire une opération, qui peut la remplacer.

Il est utile de remarquer que les systèmes covariants ou contrevariants de la théorie des formes algébriques sont des cas particuliers de ceux, que nous venons de définir. En effet les transformations (1), que l'on considère dans la théorie des formes algébriques, sont linéaires et homogènes; et lorsqu' une transformation de cette nature agit sur les variables indépendantes, les coefficients des formes ponctuelles se transforment d'après les formules (6) et ceux des formes réciproques d'après les (7).

§ 3.

Addition, multiplication et composition de systèmes. — Quadrique fondamentale - Systèmes réciproques.

Addition. — Si $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $\Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ sont deux systèmes covariants d'un même ordre m,

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m}$$

est aussi un système covariant d'ordre m. Nous dirons qu'il est la *somme* des deux systèmes considérés. — D'une manière analogue on définit la somme de deux systèmes contrevariants d'ordre m, qui sera aussi un système contrevariant de cet ordre.

Multiplication. — Si $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, $\Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p}$ sont deux systèmes covariants respectivement des ordres m et p,

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \cdot \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p}$$

est un système covariant d'ordre $m + p$, que l'on appellera *produit* des deux systèmes. — Il suffit de substituer le mot *covariant* par le mot *contrevariant* pour avoir la définition du produit de deux systèmes contrevariants d'ordre quelconque.

Les définitions, que nous venons de donner, s'étendent naturellement à la somme et au produit de plusieurs systèmes ayant la même nature, covariante ou contrevariante.

Composition. — Si $X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}$ est un système covariant quelconque d'ordre $m + p$, et $\Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)}$ un système contrevariant d'ordre p, le système d'ordre m

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_p} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}$$

est covariant et d'ordre m. D'une manière analogue, étant donnés deux systèmes $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p)}$, $\Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p}$, on en tire un système contrevariant d'ordre m en posant

$$Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = \sum {}_{s_1 s_2 \cdots s_p} X^{(r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p)} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p}.$$

Nous dirons que le système $Y_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ (ou $Y^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$) est *composé* des deux systèmes considérés.

En particulier, pour $m = 0$, on a un système d'ordre *o* c'est-à-dire un invariant, qui résulte de la composition de deux systèmes de nature opposée et de même ordre.

Le lecteur pourra aisément se représenter ces propositions, dont l'usage est fréquent dans le calcul, comme dérivées d'un seul principe, celui de la *saturation des indices*.

Quadrique ou forme fondamentale.

Les méthodes de Calcul Différentiel absolu reposent essentiellement sur la considération d'une forme quadratique positive dans les différentielles de n variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$; c'est à dire d'une expression du type

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Les coefficients de cette expression, que nous appellerons *quadrique ou forme fondamentale,* se recontrent partout dans nos formules, et y portent une simplicité et une symétrie très remarquables.

Systèmes réciproques.

Si l'on désigne par $a^{(rs)}$ les coefficients de la forme réciproque de φ, on a les identités

$$a^{(rs)} = \sum_1^n {}_{pq}\, a^{(rp)}\, a^{(sq)}\, a_{pq}.$$

En général, étant donné un système covariant d'ordre m, $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, on en tire, à l'aide de la forme fondamentale, un système contrevariant du même ordre en posant

$$X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m}\, a^{(r_1 s_1)}\, a^{(r_2 s_2)} \cdots a^{(r_m s_m)}\, X_{s_1 s_2 \cdots s_m}. \tag{8}$$

De même, si l'on part d'un système contrevariant $\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$, on en tire un système covariant en posant

$$\Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_m}\, a_{r_1 s_1}\, a_{r_2 s_2} \cdots a_{r_m s_m}\, \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_m)}. \tag{9}$$

La succession des opérations (8) et (9) est bien l'identité, et c'est à cause de cela que nous appelons *réciproques* par rapport à la forme fondamentale deux systèmes tels que $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ et $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, ou $\Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ et $\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$.

Des formules (8) et (9) on tire aisément l'identité

$$\sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m}\, X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}\, \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m}\, X_{r_1 r_2 \cdots r_m}\, \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}, \tag{10}$$

qui nous dit que:

«Tout invariant composé d'un système covariant et d'un système contrevariant du même ordre est identique à l'invariant composé de leurs réciproques.»

La forme fondamentale étant fixée, il suffit de donner un système covariant ou contrevariant pour que leurs réciproques résultent déterminés avec eux. Ce fait trouve son expression matérielle dans la convention, que nous avons déjà appliquée dans les exemples donnés, et d'après laquelle la même lettre affectée de m indices représente un élément quelconque d'un système covariant d'ordre m ou de son réciproque, selon que ses indices sont placés en bas ou en haut de la lettre.

Nous désignerons d'orénavant par a le discriminant de la forme fondamentale. Quelle que soit cette forme, on peut en déduire deux systèmes d'ordre n réciproques par rapport à elle, dont les propriétés sont bien remarquables, et qu'il est souvent utile d'introduire dans les lculs. Fixons le signe à donner a $\sqrt{a}$ pour un système déterminé de riables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$, et convenons en même temps que e signe ne change, pas lorsqu'une substitution (1) agit sur les variables idépendantes, si le déterminant jacobien des x par rapport aux y est ositif; qu'il change, si ce déterminant est négatif. Le système d'ordre n, ont les éléments $\varepsilon_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ sont nuls, si les indices $r_1, r_2, \cdots, r_n$ ne sont as tous différents, et égaux à $\sqrt{a}$ ou à $-\sqrt{a}$, selon que, ces indices tant tous différents, la classe de la permutation $(r_1 r_2 \cdots r_n)$ est paire u impaire par rapport à la permutation fondamentale $(1, 2, \cdots, n)$, est ovariant. — Les éléments $\varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n)}$ du système réciproque sont respective- ent égaux à zéro ou à $\pm 1 : \sqrt{a}$.

Si l'on désigne par $\Delta(z_1 z_2 \cdots z_n)$ le jacobien de n fonctions $z_1, z_2, \cdots, z_n$ ris par rapport à n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ et divisé par $\sqrt{a}$, on a l'identité

$$\Delta(z_1 z_2 \cdots z_n) \equiv \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_n} \varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n)} \frac{\partial z_1}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial z_2}{\partial x_{r_2}} \cdots \frac{\partial z_n}{\partial x_{r_n}},$$

ui, en rendant intuitive la propriété invariantive de Δ, rend en même mps cet invariant accessible aux methodes du Calcul différentiel absolu.

Nous désignerons le système $\varepsilon_{r_1 r_2 \cdots r_n}$ (ou $\varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n)}$) par le nom de ystème covariant (ou contrevariant) E.

§ 4.

Applications á l'analyse vectorielle.*)

Nous allons donner dès à présent un exemple important d'application u Calcul différentiel absolu, en exposant les règles du calcul vectoriel n coordonnées générales.

Désignons par y_1, y_2, y_3 des coordonnées cartésiennes orthogonales uelconques dans notre espace, par (R) un vecteur dans ce même espace. — ntroduisons le ds^2 de l'espace comme forme fondamentale φ et nous urons en coordonnées y

$$\varphi = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2;$$

t en coordonnées générales

$$\varphi = \sum_1^3 {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

Représentons par $l_r (r = 1, 2, 3)$ les directions positives des lignes oordonnées, par $n_r (r = 1, 2, 3)$ celles des normales aux surfaces coordon-

*) Les résultats contenus dans ce paragraphe sont exposés ici pour la première s d'une manière systématique et complète.

nées de paramètre x_r, ces directions étant fixées de manière que, pour un déplacement infiniment petit dans le sens l_r ou n_r, on ait un incrément positif de la variable x_r.

Puisque la propriété caractéristique des substitutions orthogonales peut s'énoncer en disant qu'elles sont en même temps covariantes et contrevariantes, les composantes d'un vecteur (R) selon trois axes orthogonaux peuvent être considérées en même temps comme éléments d'un système covariant ou contrevariant vis-à-vis de tout changement de ces axes. — Nous allons déterminer pour des coordonnées générales x_1, x_2, x_3 les expressions des projections orthogonales $\overline{R}_{l_r}$ et $\overline{R}_{n_r}$ et des composantes R_{l_r} et R_{n_r} selon les tangentes aux lignes et selon les normales aux surfaces coordonnées.

Dans ce but prenons à considérer deux systèmes réciproques X_r, $X^{(r)}$, dont les éléments coincident, dans le cas des coordonnées cartésiennes y, avec les projections de (R) sur les axes coordonnés, projections, que l'on pourra désigner par des symboles Y_r ou $Y^{(r)}$.

Puisque la projection sur une droite quelconque d'un polygone fermé est nulle, en considérant les polygones ayant pour côtés R et ses composantes selon les axes y_1, y_2, y_3, ou bien selon les directions l_r, ou n_r, on a les formules

$$\overline{R}_{l_r} = \sum_1^3 {}_s\, Y_s \cos(l_r, y_s), \tag{11}$$

$$\overline{R}_{n_r} = \sum_1^3 {}_s\, Y^{(s)} \cos(n_r, y_s), \tag{12}$$

$$Y^{(s)} = \sum_1^3 {}_r\, R_{l_r} \cos(l_r, y_s), \tag{13}$$

$$Y_s = \sum_1^3 {}_r\, R_{n_r} \cos(n_r, y_s); \tag{14}$$

ou bien, en y substituant aux cosinus directeurs des l_r et n_r leurs expressions bien connues,

$$\sqrt{a_{rr}} \cdot \overline{R}_{l_r} = \sum_1^3 {}_s\, Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r}, \tag{11'}$$

$$\sqrt{a^{(rr)}} \cdot \overline{R}_{n_r} = \sum_1^3 {}_s\, Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}, \tag{12'}$$

.3′)
$$Y^{(s)} = \sum_1^3 {}_r \frac{1}{\sqrt{a_{rr}}} R_{l_r} \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

14′)
$$Y_s = \sum_1^3 {}_r \frac{1}{\sqrt{a^{(rr)}}} R_{n_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}.$$

D'après la nature covariante et respectivement contrevariante des systèmes X_r et $X^{(r)}$ on a les formules

$$X_r = \sum_1^3 {}_s Y_s \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

$$X^{(r)} = \sum_1^3 {}_s Y^{(s)} \frac{\partial x_r}{\partial y_s}$$

et aussi les formules équivalentes

$$Y^{(s)} = \sum_1^3 {}_r X^{(r)} \frac{\partial y_s}{\partial x_r},$$

$$Y_s = \sum_1^3 {}_r X_r \frac{\partial x_r}{\partial y_s};$$

et leur comparaison avec (11′), (12′), (13′) et (14′) donne

(15) $$\overline{R}_{l_r} = X_r : \sqrt{a_{rr}},$$

(16) $$\overline{R}_{n_r} = X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}},$$

(17) $$R_{l_r} = \sqrt{a_{rr}} \cdot X^{(r)},$$

(18) $$R_{n_r} = \sqrt{a^{(rr)}} \cdot X_r.$$

On peut en déduire que:

Deux systèmes réciproques simples X_r et $X^{(r)}$ étant donnés, on peut, quelles que soient les coordonnées x_1, x_2, x_3 de l'espace, regarder les expressions $X_r : \sqrt{a_{rr}}$ et $X^{(r)} : \sqrt{a^{(rr)}}$ comme celles des projections orthogonales d'un même vecteur sur les tangentes aux lignes coordonnées x_r et sur les normales aux surfaces coordonnées x_r, pendant que les expressions $\sqrt{a_{rr}} \cdot X^{(r)}$ et $\sqrt{a^{(rr)}} \cdot X_r$ représentent les composantes du même vecteur respectivement selon les mêmes lignes et les mêmes normales.

§ 5.

Dérivation covariante et contrevariante selon une for mentale. — Conservation des régles du calcul différential

Dérivation covariante. — M. Christoffel*) a remarqué le si un système d'ordre m, $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, est covariant, le syst $m+1$

(19) $$X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} = \frac{\partial X_{r_1 r_2 \cdots r_m}}{\partial x_{r_{m+1}}} - \sum_1^m {}^l \sum_1^n {}^q \begin{Bmatrix} r_l \, r_{m+1} \\ q \end{Bmatrix} X_{r_1 r_2 \cdots r_{l-}}$$

est aussi covariant. — Nous appellons *dérivation covariante* sel fondamentale φ l'opération, par laquelle, cette forme aidant d'un système donné $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ au système $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}}$; et que celui-ci est *le premier système dérivé de celui-là selon la f mentale.*

Pour $m = 0$, on a, comme cas-limite, que le premier sys d'un système d'ordre zéro X résulte des dérivées de cette fon que soit la forme fondamentale, et l'on pose par suite

(19') $$X_r = \frac{\partial X}{\partial x_r}.$$

De même on obtient le premier système dérivé d'un systèm en posant

(19'') $$X_{rs} = \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \sum_1^n {}^q \begin{Bmatrix} rs \\ q \end{Bmatrix} X_q,$$

et celui d'un système double X_{rs} en posant

(19''') $$X_{rst} = \frac{\partial X_{rs}}{\partial x_t} - \sum_1^n {}^q \left[\begin{Bmatrix} rt \\ q \end{Bmatrix} X_{qs} + \begin{Bmatrix} st \\ q \end{Bmatrix} X_{rq} \right].$$

Pour $X_{rs} = a_{rs}$, on a les identités

$$a_{rst} \equiv 0,$$

qui nous disent que:

Le premier système dérivé selon une forme fondamentale φ de ses coefficients est identiquement nul.

En appliquant les formules (19) au système covariant E le paragraphe 3, on vérifie que:

Le premier système dérivé du système covariant E selon un fondamentale quelconque est nul.

---

*) Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdr Grades, Crelle's Journal, Band LXX, 1869.

Si une lettre à m indices représente un système covariant, il sera entendu en général que la même lettre avec un indice en plus représente son premier système dérivé selon la forme fondamentale considérée.

Il va sans dire que par p dérivations covariantes selon φ on peut passer d'un système donné d'ordre m à un système d'ordre $m+p$ (p étant un nombre entier et positif quelconque) qui sera le $p^{\text{ième}}$ système dérivé de celui-ci selon la forme fondamentale. —

Par exemple, en partant d'un système d'ordre o, c'est-à-dire d'une fonction X, et en appliquant successivement les formules (19'), (19'') etc., on peut en tirer le premier, le deuxième système dérivé etc. En étendant aux ordres supérieurs la locution en usage pour le premier ordre, on appelle quelquefois les éléments X_{rs}, X_{rst} etc. *dérivées covariantes* du deuxième ordre, du troisième ordre etc. de la fonction X.

Des proprietés bien connues des symboles de Christoffel et des (19'') on déduit que:

Si un système simple covariant résulte des dérivées d'une fonction par rapport aux variables indépendantes, son premier système dérivé selon une forme fondamentale arbitraire est symétrique; et réciproquement.

D'après les formules (19), les dérivées des éléments d'un système covariant quelconque sont des fonctions linéaires de ces éléments et de ceux de son premier système dérivé selon une forme fondamentale quelconque. — On peut donc dans les calculs éliminer partout les dérivées des éléments d'un système covariant donné, en introduisant les éléments de son premier système dérivé. — Plus en général on pourra partout dans les calculs éliminer les dérivées des différents ordres des éléments d'un système covariant d'ordre quelconque m (et en particulier pour $m=0$ celles d'une fonction quelconque), en introduisant les éléments de ses systèmes dérivés des mêmes ordres. — On a en procédant ainsi l'avantage (§ 2) d'avoir affaire seulement à des systèmes, qui se transforment d'après une loi uniforme et bien plus simple que celles, qui régissent les transformations des dérivées des différents ordres d'un système covariant (et en particulier d'une fonction), lois, que l'on pourrait déduire par la dérivation ordinaire des formules (6).

On verra plus loin que c'est précisément à la loi de transformation des systèmes covariants que l'on doit la nature invariantive des formules et des équations, que l'on établit par les procédés du Calcul différentiel absolu.

Dérivation contrevariante. — Un système contrevariant $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ étant donné, on peut à l'aide de la quadrique fondamentale passer d'abord à son réciproque par rapport à cette forme, $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$, puis de celui-ci à son premier système dérivé selon φ $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}}$, et enfin au système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})}$ réciproque de ce dernier. — On appelle *dérivation contrevariante* selon φ l'opération, par laquelle, cette forme aidant, on passe du système primitif $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ au système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})}$, qui en est le premier système dérivé selon φ.

Les éléments du premier système dérivé s'expriment en fonction des éléments du système primitif et des coefficicnts de la forme fondamentale par les formules

$$(20)\quad X^{(r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1})} = \sum_1^n{}_t\, a^{(t r_{m+1})} \left\{ \frac{\partial X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}}{\partial x_t} + \sum_1^m{}_l \sum_1^n{}_q \begin{Bmatrix} tq \\ r_l \end{Bmatrix} X^{(r_1 r_2 \cdots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \cdots r_m)} \right\}$$

On pourrait faire au sujet de la dérivation contrevariante et des systèmes dérivés des systèmes contrevariants des considérations tout à fait analogues à celles, que l'on vient d'exposer au sujet de la dérivation covariante et des systèmes dérivés des systèmes covariants. — Il est, par exemple évident que, les systèmes a_{rst}, $E_{r_1 r_2 \cdots r_n r_{n+1}}$ étant identiquement nuls, on peut affirmer la même chose des systèmes $a^{(rst)}$ (premier système dérivé du système $a^{(rs)}$) et $\varepsilon^{(r_1 r_2 \cdots r_n r_{n+1})}$ (premier système dérivé du système E contrevariant).

On peut dire en général qu'il existe comme une loi de réciprocité ou de dualité, qui permet de tirer de tout théorème ou formule de Calcul différentiel absolu un théorème ou une formule réciproque, en échangeant entre eux les mots *covariant* et *contrevariant*, et en portant les indices de la position covariante à la contrevariante et viceversa.

Règles de calcul. — Les règles bien connues, qui ont trait à la dérivation des sommes et des produits de fonctions, s'étendent de la manière la plus naturelle à la dérivation covariante ou contrevariante des systèmes. En effet, en ayant recours aux formules (19) pour la dérivation covariante des systèmes tels que

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} + \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$
$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p},$$

on parvient aux identités

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} + \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}},$$
$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p r_{m+1}} = X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p} + X_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi_{s_1 s_2 \cdots s_p r_{m+1}};$$

les choses se passent d'une manière analogue pour les systèmes contre-riants; et pour la dérivation des systèmes sommes d'un nombre quel-nque de termes, ou produits d'un nombre quelconque de facteurs.

Considérons un système composé tel que

$$Y_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_p} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}.$$

n appliquant les formules (19) et (20) on trouve pour les éléments de on premier système dérivé les expressions

$$(21)\qquad Y_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} = \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_p} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p r_{m+1}} + \sum_1^n {}_{s_1 s_2 \cdots s_p t} \Xi^{(s_1 s_2 \cdots s_p t)} a_{t r_{m+1}} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s_1 s_2 \cdots s_p}.$$

n a aussi la formule réciproque pour la dérivation des systèmes com-osés contrevariants.

Pour un invariant tel que

$$Y = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$

n a

$$Y_s = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s} + \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m t} \Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m t)} a_{ts} X_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$

t, en substituant les systèmes $\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m t)}$ et $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ par leurs réci-roques,

$$(22)\qquad Y_s = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} \left(\Xi^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m s} + X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} \Xi_{r_1 r_2 \cdots r_m s}\right).$$

n particulier, pour dériver un invariant, tel que

$$Y = \sum_1^n {}_r \Xi^{(r)} X_r,$$

n a les formules

$$(22')\qquad Y_s = \sum_1^n \Xi^{(r)} X_{rs} + \sum_1^n {}_r X^{(r)} \Xi_{rs}.$$

onsidérons l'invariant

$$(\Delta_1 f)^2 = \sum_1^n f^{(r)} f_r,$$

f étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \cdots, x_n$. On aura encore

$$\Delta_1 f \cdot \frac{\partial \Delta_1 f}{\partial x_s} = \sum_1^n {}_r f^{(r)} f_{rs}.$$

§ 6.

Système de Riemann. — Relations entre les éléments du deuxième système dérivé d'un système covariant quelconque.

Soit

$$\varphi = \sum_1^n {}_{rs} a_{rs} dx_r dx_s$$

la quadrique fondamentale et posons

$$2a_{rs,t} = \frac{\partial a_{rt}}{\partial x_s} + \frac{\partial a_{st}}{\partial x_r} - \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t},$$

$$a_{rs,tu} = \frac{\partial a_{rt,s}}{\partial x_u} - \frac{\partial a_{ru,s}}{\partial x_t} + \sum_1^n {}_{pq} a^{(pq)}(a_{ru,p}\, a_{st,q} - a_{rt,p}\, a_{su,q}).$$

Les symboles $a_{rs,tu}$ sont les éléments d'un système quadruple covariant, qui a une grande importance dans la théorie des quadriques de différentielles. On les trouve dans la *Commentatio mathematica* de Riemann*) (à un facteur numérique près) et c'est à cause de cela que nous désignerons ce système par le nom de *système covariant de Riemann*. — Les expressions $a_{rs,tu}$ furent rencontrées avant la publication du Mémoire cité du grand géomètre par M. Christoffel**), qui en mit en évidence les propriétés fondamentales. Il suffira ici de rappeler que le nombre de ces expressions, qui ne sont liées entre elles par aucune relation linéaire, est $N = n^2(n^2-1):12$.

En particulier, pour $n = 1$, il suffit de considérer l'expression $a_{12,12}$, ou le rapport $a_{12,12} : a$, que nous désignerons par G, et qui est l'invariant de Gauss bien connu dans la théorie des surfaces.

Pour $n = 3$, on a $N = 6$. Dans ce cas les formules gagnent en symétrie si l'on convient que l'on peut remplacer deux indices l'un par l'autre lorsque leur différence est divisible par 3. — Nous introduirons dès à présent cette convention une fois pour toutes. — Les éléments du système covariant de Riemann linéairement indépendants entre eux peuvent alors tous être ramenés au type $a_{r+1\,r+2,\,s+1\,s+2}$, et en posant

$$\alpha^{(rs)} = a_{r+1\,r+2,\,s+1\,s+2} : a,$$

*) Gesammelte Werke, pag. 270.

**) «Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades», Crelle's Journal, B. LXX, 1869. Voir aussi, dans le même volume, les «Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen» par M. *Lipschitz*.

système $\alpha^{(rs)}$ est contrevariant. Ce système, que nous désignerons par nom de *système contrevariant de Riemann* (ou son réciproque α_{rs}) peut onc remplacer, si l'on a $n = 3$, le système covariant $a_{rs,tu}$.

Cela étant posé, soit $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ un système covariant quelconque; t considérons son deuxième système dérivé $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$. On a es identités

$$(23)\quad X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}} - X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1}} = \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{n}{}_{pq}\, a^{(pq)}\, a_{r_{m+1} r_{m+2},\, r_l p}\, X_{r_1 \cdots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \cdots r_m},$$

ui nous disent que l'élément $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ n'est pas en général dentique à l'élément $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$.

En particulier, pour $n = 2$, les (23) peuvent être remplacées par les ormules

$$(23')\quad \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, \varepsilon^{(rs)}\, X_{r_1 r_2 \cdots r_m rs} = G \cdot \sum_{1}^{m}{}_{l} \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a^{(rs)}\, \varepsilon_{r r_l}\, X_{r_1 \cdots r_{l-1}\, s\, r_{l+1} \cdots r_m},$$

t, pour $n = 3$, par

$$(23'')\quad \sum_{1}^{3}{}_{rst}\, \varepsilon^{(rst)}\, X_{r_1 r_2 \cdots r_m st} = \sum_{1}^{3}{}_{qst}\, a^{(qs)}\, \alpha^{(rt)} \sum_{1}^{m}{}_{l}\, \varepsilon_{r_l st}\, X_{r_1 \cdots r_{l-1}\, q\, r_{l+1} \cdots r_m}.$$

Si l'expression de la quadrique fondamentale peut se réduire à la orme $\sum_{1}^{n}{}_{i}\, dx_i^2$, le système covariant de Riemann est identiquement nul; t dans ce cas les formules (23) nous disent que:

«*Pour que un système* $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}}$ *soit le premier système dérivé d'un système d'ordre m, il est nécessaire et il suffit que les éléments* $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1} r_{m+2}}$ et $X_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+2} r_{m+1}}$ *soient identiques.*»

§ 7.

Caractère invariant des équations, que l'on rencontre en Calcul différentiel absolu.

Les équations (6), qui définissent la loi de transformation des systèmes covariants, nous disent qu'un système covariant quelconque est, ou n'est as, identiquement nul, indépendamment du choix des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$. — C'est bien cette propriété que l'on traduit, en disant qu'un système d'équations tel que

$$(24) \qquad X_{r_1 r_2 \cdots r_m} = 0,$$

a un caractère invariantif ou absolu. — On peut dire la même chose des systèmes d'équations du type

$$X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)} = 0,$$

mais il n'y a aucun intérêt à les considérer à part, puisqu'on peut les reconduire au type (24), en passant du système $X^{(r_1 r_2 \cdots r_m)}$ à son réciproque. — En effet (formules (8) et (9)) deux systèmes réciproques sont, ou ne sont pas, identiquement nuls ensemble.

Lorsqu'on se pose *ex-novo* un certain problème, il suffit de supposer ses éléments déterminatifs exprimés en variables tout à fait générales, et de substituer la dérivation covariante (selon une forme fondamentale presque toujours indiquée, par la nature de la question) à la dérivation ordinaire, pour que les équations du problème se présentent sans aucun effort sous forme invariantive. — Comme nous le verrons dans plusieurs applications, c'est là le grand chemin, qu'il faut suivre, lorsqu'il s'agit de théories générales, et lorsqu'on a pour but une exposition systèmatique de ces théories.

Mais bien souvent, en possédant déjà les équations (ε) du problème exprimées en certaines variables y, on veut les transformer en variables générales sans répéter pour ces variables les procédés, qui ont conduit aux équations (ε). — Il suffit pour cela de déterminer en variables générales un système X covariant ou contrevariant, dont les éléments exprimés en variables y coincident, à des facteurs près, avec les premiers membres des équations (ε). — Il est en effet évident que, en supposant que les seconds membres des équations (ε) soient nuls, on aura leurs transformées en coordonnées générales en égalant à zéro les éléments du système X.

Certainement cette méthode ne peut pas réussir dans tous les cas, mais elle conduit bien souvent au but d'une manière rapide et facile. C'est ce qui arrive particulièrement, comme nous le verrons, pour les équations de la Physique mathématique; à tel point que l'on est presque étonné de ce que, pour atteindre le même but, on ait autrefois parcouru des chemins bien difficiles et détournés.

Chapitre II.

Géométrie intrinsèque comme instrument de calcul.*)

§ 1.

néralités sur les systèmes orthogonaux de congruences dans un espace quelconque.

Dans ce chapitre nous aurons recours au langage géométrique en nsidérant la forme fondamentale φ comme le ds^2 d'une variété V_n n dimensions.

Cela étant posé, considérons un système d'équations tel que

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{\lambda^{(1)}} = \frac{dx_2}{\lambda^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{\lambda^{(n)}},$$

n désignant par $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ des fonctions des variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ rbitrairement données, mais régulières et qui ne s'annulent pas toutes la fois dans un certain champ C.

Ces équations définissent dans la variété V_n une congruence de lignes gulière dans C, et c'est à ce champ que nous bornerons nos considérations.

Si l'on regarde le système des $\lambda^{(r)}$ comme contrevariant, et l'on se ppelle que le système des différentiels des variables indépendantes l'est ssi, on reconnait la nature invariantive des équations (1). — Comme s équations ne changent pas en multipliant les λ par un même facteur, ous supposerons ce facteur préalablement déterminé de manière que l'on ait

$$(2)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)}\, \lambda^{(s)} = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \lambda^{(r)}\, \lambda_r = 1 \; {}^{**}).$$

Nous dirons alors que le système $\lambda^{(r)}$ est le *système coordonné contreriant* de la congruence représentée par les équations (1); et que son ciproque λ_r en est le *système coordonné covariant*.

Désignons par ds l'élément d'arc d'une ligne quelconque de la conruence; c'est à dire la valeur positive de $\sqrt{\varphi}$; et il résultera des formules 1) et (2) que ds est la valeur absolue des rapports (1). On aura donc n général

---

*) Cfr. *Ricci* «Sulla teoria degli iperspazî», Rendiconti della r. Accademia dei ncei, 24 Nov. 1895, et aussi «Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà alunque», Memorie della r. Accademia dei Lincei, 1896.

**) Dans le champ réel il est toujours possible de satisfaire à cette équation, rce que nous supposons que la forme fondamentale soit positive.

$$(1') \qquad \pm \frac{dx_r}{ds} = \lambda^{(r)}; \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)$$

et si l'on prendra, comme nous le ferons en suite, le signe positif, on déterminera pour chaque point de V_n une direction, que nous appellerons *direction positive*, de la ligne de la congruence, qui passe par ce point.

On reconnaît aisément que, si la variété V_n est euclidéenne, et les variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$ en sont des coordonnées cartésiennes orthogonales, les $\lambda^{(r)}$ (coïncidentes dans ce cas avec les λ_r) ne sont que les cosinus directeurs des lignes de la congruence.

D'après la définition, que Beltrami a donné pour l'angle α, que font entre elles deux directions dx_r et δx_r sortant d'un même point P de V_n, on a

$$\cos\alpha = \frac{\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, \delta x_s}{\sqrt{\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r dx_s} \cdot \sqrt{\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, \delta x_r \delta x_s}}.$$

Si l'on a deux congruences définies par leurs systèmes coordonnés contrevariants $\lambda^{(r)}$ et $\mu^{(r)}$, et l'on désigne par α l'angle, que font entre elles les lignes de ces congruences sortant de P, on aura d'après cette formule et les $(1')$,

$$(3) \qquad \cos\alpha = \sum_1^n {}_r\, \lambda^{(r)} \mu_r,$$

(ou bien, au lieu du second membre, $\sum_1^n {}_r\, \mu^{(r)} \lambda_r$, ou $\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)} \mu^{(s)}$, ou enfin $\sum_1^n {}_{rs}\, a^{(rs)} \lambda_r \mu_s$).

La condition d'orthogonalité des deux congruences est donc représentée par l'équation

$$(3') \qquad \sum {}_r\, \lambda^{(r)} \mu_r = 0.$$

Désignons par $\lambda_{h/r}$ $(h = 1, 2, \cdots, n)$*) les systèmes coordonnés covariants de n congruences et supposons que leurs lignes se rencontrent sous angle droit deux à deux et dans chaque point de V_n. En désignant par μ

*) Le trait, qui sépare les deux indices dans ce symbole est fait pour nous avertir qu'il s'agit de n systèmes simples; et non pas d'un système double; et que le premier indice individualise par ses différentes valeurs les différents systèmes; et le deuxième les différents éléments d'un même système.

l'unité et par η_{hk} $(h \neq k)$ le zéro, d'après les équations (2) et (3'), les $\lambda_{k/r}$ satisferont aux équations

$$(4) \qquad \sum_{1}^{n} {}_{r}\, \lambda_{h}^{(r)} \lambda_{k/r} = \eta_{hk}, \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, n)$$

qui ne sont qu'une généralisation de celles, qui lient entre eux les cosinus directeurs de n lignes orthogonales deux à deux dans une variété euclidéenne n fois étendue.

Nous appellerons *ennuple orthogonale dans la variété* V_n tout ensemble de n congruences tel que celui, que nous venons de considérer; et nous désignerons par [1], [2], $\cdots$, [n] les congruences de l'ennuple, par $1, 2, \cdots, n$ les lignes de ces congruences passant par un point quelconque de V_n; par $s_1, s_2, \cdots, s_n$ les arcs de ces lignes.

Expression d'un système covariant ou contrevariant quelconque en fonction des systèmes coordonnés d'une ennuple orthogonale. Si l'on a un système covariant quelconque $X_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ et une ennuple orthogonale tout à fait arbitraire [1], [2], $\cdots$, [n], on peut déterminer n^m fonctions $c_{h_1 h_2 \cdots h_m}$ telles que l'on ait les identités

$$(5) \qquad X_{r_1 r_2 \cdots r_m} = \sum_{1}^{n} {}_{h_1 h_2 \cdots h_m}\, c_{h_1 h_2 \cdots h_m} \lambda_{h_1/r_1} \lambda_{h_2/r_2} \cdots \lambda_{h_m/r_m}.$$

Ces fonctions sont même déterminées ayant les expressions

$$(5') \qquad c_{h_1 h_2 \cdots h_m} = \sum_{1}^{n} {}_{r_1 r_2 \cdots r_m}\, \lambda_{h_1}^{(r_1)} \lambda_{h_2}^{(r_2)} \cdots \lambda_{h_m}^{(r_m)} X_{r_1 r_2 \cdots r_m},$$

qui nous disent qu'elles sont des invariants. En passant des formules (5) ou (5') à leurs réciproques, on les étend aisément aux systèmes contrevariants.

En particulier, s'il s'agit du système a_{rs} ou $a^{(rs)}$, on a, à cause des équations (4), pour toute ennuple orthogonale [1], [2], $\cdots$, [n] les identités

$$(4') \qquad a_{rs} = \sum_{1}^{n} {}_{h}\, \lambda_{h/r} \lambda_{h/s},$$

$$(4'') \qquad a^{(rs)} = \sum_{1}^{n} {}_{h}\, \lambda_{h}^{(r)} \lambda_{h}^{(s)}.$$

Les déterminants $\left\| \lambda_{h/r} \right\|$ et $\left\| \lambda_{h}^{(r)} \right\|$, qui, d'après les (4), sont les discriminants de deux quadriques réciproques, sont donc respectivement ég $\sqrt{a}$ et à $1:\sqrt{a}$.*)

En revenant aux équations (5) et (5′), on en déduit que tout sy d'équations

$$X_{r_1 r_2 \cdots r_m} = 0$$

peut être remplacé par un système

$$c_{h_1 h_2 \cdots h_m} = 0;$$

c'est-à-dire (Chapitre I, § 7) que tout système absolu d'équations être transformé de manière que ses premiers membres soient des invar On a souvent recours avec avantage à cette transformation.

Remarquons encore que, étant

$$\frac{\partial x_r}{\partial s_h} = \lambda_h^{(r)},$$

en désignant par f une fonction quelconque de $x_1, x_2, \cdots, x_n$, on a

$$(6) \qquad \sum_1^n{}_r \lambda_h^{(r)} f_r = \frac{\partial f}{\partial s_h}. \quad (h = 1, 2, \cdots, n)$$

Éléments métriques du premier ordre. — Les propriétés métrique lignes $1, 2, \cdots, n$, qui sont en rapport avec ce que l'on désigne ordi ment par le nom de courbure des lignes gauches, comme on le com a priori, sont des fonctions des dérivées des $\lambda_{h/r}$. — Ces dérivées ne pas toutes indépendantes; au contraire elles doivent satisfaire $n^2(n+1):2$ équations, que l'on obtient en dérivant les équations

Posons

$$(7) \qquad \gamma_{hkl} = \sum_1^n{}_{rs} \lambda_k^{(r)} \lambda_l^{(s)} \lambda_{h/rs}, \qquad (h, k, l = 1, 2, \cdots, n)$$

et dérivons ces équations en appliquant la régle de dérivation des sys composés (Chapitre I, formules (22′)). — Nous trouvons d'abord les tions, dont il s'agit, sous la forme

$$(8) \qquad \sum_1^n{}_r \lambda_k^{(r)} \lambda_{h/rs} + \sum_1^n{}_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/rs} = 0, \qquad (h, k, l = 1, 2, \cdots n)$$

et l'on voit aisément qu'on peut les remplacer par les:

$$(8') \qquad \gamma_{hkl} + \gamma_{khl} = 0 \qquad (h, k, l = 1, 2, \cdots, n),$$

*) Les équations (4) nous disent aussi que la nature métrique d'une vari est déterminée, si l'on connait les systèmes coordonnés d'une ennuple ortho quelconque dans V_n.

qui comprennent comme cas particulier les

$$(8_1)\qquad \gamma_{hhl} = 0.$$

Le nombre des invariants γ_{hkl} indépendants entre eux est donc égal à $\frac{n^2(n-1)}{2}$, et puisque ce nombre est égal à la différence des nombres n^3 et $\frac{n^2(n+1)}{2}$, dont le premier est celui des dérivées des $\lambda_{h/r}$ et le second celui des relations, qui ont lieu entre ces dérivées, on pourra exprimer les $\lambda_{h/rs}$ en fonction des $\lambda_{h/r}$ et des invariants γ. En résolvant les équations (7) on obtient en effet ces expressions sous la forme

$$(7')\qquad \lambda_{h/rs} = \sum_1^n {}_{ij}\, \gamma_{hij}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s}.$$

Il nous suffira donc, pour étudier les propriétés métriques des lignes $1, 2, \cdots, n$, de fixer notre attention sur les invariants γ_{hij}; et en effet il sont liés aux dites propriétés par des relations très étroites et très simples. Sans nous arrêter ici à examiner en détail la signification géométrique et cynematique de chacune des γ, il nous suffira d'en dire ce qui est nécessaire pour les applications, qui vont suivre. — Ajoutons que, à cause de leurs significations cynématique, nous désignerons les invariants γ par le nom de *coefficients de rotation* de l'ennuple [1], [2], $\cdots$, [n].

§ 2.

Dérivées intrinsèques et leurs relations.

Il nous faut avant tout établir les relations, qui ont lieu entre deux dérivées telles que $\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h}$ et $\frac{\partial}{\partial s_h}\frac{\partial f}{\partial s_k}$, car on ne peut pas intervertir les opérations représentées par les symboles $\frac{\partial}{\partial s_h}$ et $\frac{\partial}{\partial s_k}$. En effet, si l'on écrive l'identité (6), on a d'abord

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}_r\, \lambda_h^{(r)} f_{rs} + \sum_1^n {}_r\, f^{(r)} \lambda_{h/rs},$$

et par suite

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}_s\, \lambda_k^{(s)} \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}_{rs}\, \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{rs} + \sum_1^n {}_{rs}\, f^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs},$$

ou encore, ayant égard aux identités

$$\sum_1^n {}_s \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs} = \sum_1^n {}_i \gamma_{hik} \lambda_{i/r},$$

$$\sum_1^n {}_{rs} f^{(r)} \lambda_k^{(s)} \lambda_{h/rs} = \sum_1^n {}_i \gamma_{hik} \frac{\partial f}{\partial s_i},$$

qui dérivent des (4), (6) et (7'),

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial f}{\partial s_h} = \sum_1^n {}_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{rs} + \sum_1^n {}_i \gamma_{hik} \frac{\partial f}{\partial s_i}.$$

Enfin on déduit de ces dernières les relations, dont il s'agit, sous la

(9) $$\frac{\partial}{\partial s_k} \frac{\partial f}{\partial s_h} - \frac{\partial}{\partial s_h} \frac{\partial f}{\partial s_k} = \sum {}_i (\gamma_{ikh} - \gamma_{ihk}) \frac{\partial f}{\partial s_i}.$$

§ 3.

Congruences normales et géodésiques. — Familles isotherm surfaces. — Système canonique pour une congruence donn

Congruences normales. — On dit qu'une congruence de lignes dans V_n est *normale*, si elle résulte de trajectoires orthogonales famille de surfaces de V_n $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{const.}$ Choisissons da ennuple orthogonale une congruence $[n]$ et proposons-nous de déte les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette congruenc normale.

Évidemment pour cela il faut et il suffit que toute directic normale à la ligne n appartienne à la surface $f = 0$, c'est-à-di l'on ait

$$\sum_1^n {}_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \delta x_r = 0.$$

En d'autres termes les conditions, dont il s'agit, sont les mêmes, qu nécessaires et suffisantes pour que les équations

$$X_h(f) = \sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} f_r = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-1)$$

soient satisfaites par une fonction f; c'est-à-dire pour que le s de ces équations soit complet. Nous devrons donc exprimer que $h, k = 1, 2, \cdots, n-1)$ les

$$(X_h X_k) f = X_h X_k(f) - X_k X_h(f)$$

sont des fonctions linéaires des $X_h(f)$.

On a:

$$X_h X_k(f) = \sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} \sum_1^n {}_s \left(\lambda_k^{(s)} f_{sr} + f^{(s)} \lambda_{k/sr}\right),$$

u, à cause des équations (8) et (7'), étant

$$\sum_1^n {}_r \lambda_h^{(r)} \lambda_{k/sr} = -\sum_1^n {}_i \gamma_{ikh} \lambda_{i/s},$$

$$X_h X_k(f) = \sum_1^n {}_{rs} \lambda_h^{(r)} \lambda_k^{(s)} f_{sr} - \sum_1^{n-1} {}_i \gamma_{ikh} X_i(f) - \gamma_{nkh} \frac{\partial f}{\partial s_n};$$

t par suite

$$X_h X_k(f) - X_k X_h(f) = \sum_1^{n-1} {}_i (\gamma_{ihk} - \gamma_{ikh}) X_i(f) + (\gamma_{nhk} - \gamma_{nkh}) \frac{\partial f}{\partial s_n}.$$

L'expression $\frac{\partial f}{\partial s_n}$, étant indépendante des

$$X_h(f) \quad (h = 1, 2, \cdots, n-1),$$

identité, que nous venons d'établir, nous dit que:

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la congruence $[n]$ *soit* *rmale sont exprimées par les* $(n-1)(n-2):2$ *équations*

10) $$\gamma_{nhk} = \gamma_{nkh}. \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

On a donc aussi que:

«Si toutes les congruences d'une ennuple orthogonale sont normales, outes les γ_{hkl} à trois indices distincts sont nulles et réciproquement.»

Comme on n'a rien déterminé sur le choix des congruences $[1], [2], \cdots$ $, [n-1]$, qui forment avec $[n]$ une ennuple orthogonale, les équations (9), ttendu leur signification géométrique, ont un caractère invariantif vis-à-is, non seulement de toutes les transformations possibles de coordonnées, ais aussi de tous les changements possibles des $n-1$ congruences $[1], [2], \cdots, [n-1]$, formant avec $[n]$ une ennuple orthogonale.

Les conditions (10) étant remplies, les $\lambda_{n/r}$ seront proportionnelles aux rivées f_r d'une fonction c'est-à-dire que l'on pourra déterminer un efficient μ tel que les

$$f_r = \mu \lambda_{n/r}$$

tisfassent aux équations

$$f_{rs} = f_{sr}.$$

Étant, a cause des formules (7'),

1) $$f_{rs} = \mu_s \lambda_{n/r} + \mu \sum_1^n {}_{ij} \gamma_{nij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s},$$

et en posant

$$\psi = \log \mu, \tag{12}$$

la fonction indéterminée ψ devra donc satisfaire aux équations

$$\psi_s \lambda_{n/r} + \sum_1^n {}_{ij}\, \gamma_{nij} \lambda_{i/r} \lambda_{j/s} = \psi_r \lambda_{n/s} + \sum_1^n {}_{ij}\, \gamma_{nij} \lambda_{i/s} \lambda_{j/r}.$$

En les multipliant par $\lambda_n^{(s)}$ et puis en les additionnant, après avoi
$s = 1, 2, \cdots, n$ et en ayant recours aux équations (4) et (9), on peut
substituer le système équivalent

$$\psi_r = \nu \lambda_{n/r} + \sum_1^{n-1} {}_i\, \gamma_{nin} \lambda_{i/r}, \tag{13}$$

ν étant indéterminée.

Familles isothermes de surfaces. On dit qu'une famille de su
$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \text{const}$ est isotherme dans la variété V_n et que f
un paramètre thérmométrique, si cette fonction satisfait à l'équatio

$$\sum_1^n {}_{rs}\, a^{(rs)} f_{rs} = 0.\text{*)} \tag{14}$$

On peut considérer une famille de surfaces comme individualisée, lor
connait la congruence de ses trajectoires orthogonales; ce, qui s
par d'autres mots, que toute famille de surfaces peut être représent
un système $\lambda_{n/r}$ satisfaisant en même temps à l'équation algébrique
aux équations (10) aux dérivées partielles du premier ordre. — Pro
nous d'établir les conditions nécessaires et suffissantes pour que
famille soit isotherme et d'en déterminer, ces conditions étant re
les paramètres thermométriques.

En substituant dans la formule (14) les expressions des f_{rs} d
par les (11), on la remplace par la formule équivalente

$$\frac{\partial \psi}{\partial s_n} = -\sum_1^n {}_i\, \gamma_{nii},$$

qui nous donne pour l'indéterminée ν de la formule (13) l'expressi

$$\nu = -\sum_1^{n-1} {}_i\, \gamma_{nii}. \tag{15}$$

---

*) Nous verrons plus loin l'identité de cette équation avec celle des fo
harmoniques.

ıe la famille de surfaces ayant les lignes n comme trajectoires ɑales soit isotherme, il faut donc et il suffit que, en remplaçant ν ı expression (15), les seconds membres des (13) résultent des d'une fonction ψ prises par rapport aux x_r; après quoi les

$$f_r = C e^{\psi} \lambda_{n/r}$$

ussi les dérivées d'une fonction f par rapport aux mêmes variables, et

$$f = C \int e^{\psi} \sum_1^n {}_r \lambda_{n/r}\, dx_r + c,$$

étant des constantes arbitraires) sera l'expression la plus générale ımètres thermométriques de la famille considérée.

reconnaît puis aisément que les conditions d'intégrabilité des ı (13) sont représentées par les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nu}{\partial s_h} + \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \nu \gamma_{hnn} + \displaystyle\sum_1^{n-1} {}_i \gamma_{inn} (\gamma_{ihn} - \gamma_{inh}) = 0, \\ \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} + \displaystyle\sum_1^{n-1} {}_i \gamma_{inn} \gamma_{ihk} = \dfrac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h} + \displaystyle\sum_1^{n-1} {}_i \gamma_{inn} \gamma_{ikh}. \end{cases}$$

$$(h, k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

congruences $[1], [2], \cdots, [n]$ sont toutes normales, c'est-à-dire si ɑt les intersections des surfaces de n familles orthogonales dans V_n, ations se réduisent à la forme bien plus simple

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \nu}{\partial s_h} + \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_n} + \nu \gamma_{hnn} = 0, \\ \dfrac{\partial \gamma_{hnn}}{\partial s_k} = \dfrac{\partial \gamma_{knn}}{\partial s_h}. \end{cases}$$

*ıgruences géodésiques.**) — En disant qu'une ligne est géodésique ıe variété V_n, dont le ds^2 est donné par la forme fondamentale φ, ifie que la variation première de l'intégrale

$$\int ds = \int \sqrt{\sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s}$$

selon cette ligne est nulle. Les conditions pour que toutes les

---

Voir *Ricci* «Dei sistemi di congruenze ortogonali etc.», § 5, et aussi «Lezioni ria delle superficie», Première Partie, Chapitre IV.

lignes n soient géodésiques (et nous dirons alors que la congruence $[n]$ est géodésique) sont exprimées par les équations

$$(16) \qquad \gamma_{inn} = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

qui ont les mêmes caractères invariantifs, que nous avons remarqués dans les (10). En particulier, si l'espace est euclidéen, les (16) nous donnent les caractéristiques intrinsèques des congruences rectilignes.

Courbure géodésique d'une congruence. — Si la congruence $[n]$ n'est pas géodésique, et l'on considère la variété V_n comme contenue dans un espace euclidéen S_{n+m}, on peut se représenter la courbure géodésique de la ligne $[n]$ dans un point quelconque P de V_n de la manière suivante. — Que l'on conduise par P dans S_{n+m} un vecteur tangent à V_n, dont la longueur γ soit donnée par la formule

$$\gamma^2 = \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn}^2,$$

et la direction par celle de la tangente à la ligne qui passe par P et appartient à la congruence ayant comme système coordonné covariant

$$\mu_r = \sum_1^{n-1}{}_i\, \gamma_{inn} \lambda_{i\,r}.$$

Ce vecteur jouit des propriétés suivantes:

1°: Il s'annule identiquement, si la congruence n est géodésique.

2°: Sa projection sur le plan tangent aux lignes i et n est égale à la courbure de la projection de la ligne n sur le même plan.

3°: Il est normal à la ligne n.

A cause de ces propriétés nous désignons ce vecteur par le nom de *courbure géodésique* et les lignes de la congruence ayant μ_r comme système coordonné covariant par celui de *lignes de courbure géodésique* de la congruence n.

Systèmes canoniques par rapport à une congruence donnée. Une congruence $[n]$ étant donnée, on peut d'une infinité de manières différentes lui associer $n-1$ congruences constituant avec $[n]$ une ennuple orthogonale dans la variété V_n. Parmi ces systèmes de $n-1$ congruences orthogonales l'une à l'autre et à la congruence $[n]$, il y en a un ou plusieurs que nous allons définir, et que nous appellerons canoniques par rapport à la congruence $[n]$.

Posons

$$2\, X_{rs} = \lambda_{n/rs} + \lambda_{n/sr},$$

et considérons le système d'équations algébriques

$$
(17)\qquad \begin{cases} \sum_1^n r\, \lambda_{n/r} \cdot \lambda^{(r)} = 0, \\ \lambda_n \cdot \mu + \sum_1^n r\, (X_{qr} + \omega\, a_{qr})\, \lambda^{(r)} = 0, \qquad (q = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}
$$

μ, ω, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ étant des indéterminées. C'est un système de $n+1$ équations linéaires et homogènes par rapport aux inconnues μ, $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)}$, et son déterminant égalé à zéro nous donne une équation du degré $n-1$ en ω

$$
(18)\qquad \Delta(\omega) = 0,
$$

dont les racines sont toutes réelles. — Désignons ces racines par ω_h $(h = 1, 2, \cdots, n-1)$ et supposons d'abord qu'elles soient toutes simples. Si l'on pose dans le système (17) $\omega = \omega_h$ et l'on associe à ce système l'équation (2), les inconnues $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ résultent, au signe près, determinées. — Leurs valeurs, que nous désignerons par $\lambda_h^{(r)}$ $(r = 1, 2, \cdots, n)$, sont les éléments du système coordonné covariant d'une congruence $[h]$; et les $n-1$ congruences $[1]$, $[2], \cdots, [n-1]$ étant orthogonales entre elles et à la congruence $[n]$ sont les éléments du système orthogonal canonique par rapport à cette dernière. Dans ce cas ce système est donc tout à fait déterminé.

Si les racines de l'équation (18) sont toutes égales entre elles, tout système de $n-1$ congruences formant avec $[n]$ une ennuple orthogonale satisfait aux équations (17) et peut être regardé comme canonique par rapport à $[n]$.

En général soient ω_1, $\omega_2, \cdots, \omega_m$ les racines distinctes de l'équation (18), $p_1, p_2, \cdots, p_m$ leurs ordres de multiplicité, et posons dans les équations (17) $\omega = \omega_h$ $(h = 1, 2, \cdots, m)$. On peut déterminer p_h congruences orthogonales entre elles deux à deux et telles que les éléments de leurs systèmes coordonnés contrevariants soient les solutions des équations (17). Il y a même dans le groupe Λ_h de ces congruences toute l'arbitrariété, qui appartient à une substitution orthogonale d'ordre p_h, c'est-à-dire une arbitrariété représentée par $p_h \cdot (p_h - 1) : 2$ fonctions arbitraires. Comme les congruences faisant partie de deux groupes Λ_h et Λ_k sont aussi orthogonales entre elles, on a de la sorte

$$
p_1 + p_2 + \cdots + p_m = n - 1
$$

congruences constituant avec $[n]$ une ennuple orthogonale. — Dans ce cas aussi les congruences $[1], [2], \cdots, [n-1]$ sont lés éléments d'un système orthogonal canonique par rapport à la congruence $[n]$, mais ce système n'est ni tout à fait déterminé, ni tout à fait arbitraire. Il contient des fonctions arbitraires, dont le nombre est égal à

$$\sum_1^m {}_i\, p_i(p_i-1):2\,.$$

Les coefficients de rotation de l'ennuple orthogonale, lorsque [1], [2], ⋯, [$n-1$] sont les éléments d'un système canonique par rapport à [n], sont liés entre eux par les relations caractéristiques

$$\gamma_{nhk}+\gamma_{nkh}=0. \tag{19}$$

En rapprochant ces équations aux (10) on en déduit que, si la congruence [n] est normale, les γ_{nhk} (pour $h \neq k$) sont toutes nulles dans le système orthogonal canonique à [n]. Dans ce cas les congruences, qui appartiennent à ce système, ont une signification géométrique bien simple: elles résultent des lignes de courbure des surfaces orthogonales aux lignes n.*)

On peut donner une interprétation géométrique assez simple pour le système orthogonal canonique à une congruence donnée quelconque, lorsque la variété fondamentale c'est l'espace euclidéen à trois dimensions.**) On pourrait même étendre cette interprétation à une variété V_n de nature quelconque; mais on ne peut pas s'arrêter à tous ces détails et il vaut mieux de passer à d'autres considérations.

§ 4.

Propriétés des coefficients de rotations et liens avec la théorie du trièdre mobile d'après M. Darboux.

On a vu dans le § 2 que l'on a $\frac{n^2(n-1)}{2}$ coefficients de rotation algébriquement indépendants entre eux pour une ennuple quelconque. Ces coefficients ne sont pas tous indépendants entre eux au point de vue fonctionnel; au contraire ils doivent satisfaire à des équations différentielles du premier ordre, que l'on obtient aisément en dérivant encore une fois les équations (7') et en éliminant les dérivées des $\lambda_{h/r}$ à l'aide de ces mêmes équations et des équations (23) du Chapitre Premier.

*) Plusieurs géomètres ont étudié la courbure des surfaces dans les hyperespaces. — Il suffira ici de rappeler le Mémoire fondamental. de M. *Lipschitz* „Entwickelungen einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen", Crelle's Journal, Band LXXI, 1870.

**) Cfr. *Levi-Civita* «Sulle congruenze di curve», Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 5 Marzo 1891.

En posant

$$(20)\quad \gamma_{hi,kl} = \frac{\partial \gamma_{hik}}{\partial s_l} - \frac{\partial \gamma_{hil}}{\partial s_k} + \sum_1^n{}^j \{\gamma_{hij}(\gamma_{jkl} - \gamma_{jlk}) + \gamma_{jhl}\gamma_{jik} - \gamma_{jhk}\gamma_{jil}\},$$

on parvient de la sorte aux équations

$$(21)\qquad \gamma_{hi,kl} = \sum_1^n{}^{qrst}\, \lambda_h^{(q)}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_k^{(s)}\, \lambda_l^{(t)}\, a_{qr,st},$$

qui avec les équations (8′) nous donnent toutes les conditions nécessaires et suffisantes pour que n^3 fonctions données γ_{hkl} puissent être regardées comme les coefficients de rotation d'une ennuple orthogonale dans la variété V_n, dont le ds^2 est exprimé par la forme fondamentale.

Pour $n = 2$, on a une seule formule (21), que l'on peut réduire à la forme suivante:

$$(21_1)\qquad \frac{\partial \gamma_{121}}{\partial s_2} + \frac{\partial \gamma_{212}}{\partial s_1} = \gamma_{121}^2 + \gamma_{212}^2 + G.$$

C'est une formule bien connue dans la théorie des surfaces, puisque γ_{121} et γ_{212} sont les courbures géodésiques des lignes 1 et 2.

Pour $n = 3$, en posant

$$(22)\qquad \gamma_{hk} = \gamma_{h+1\,h+2,\,k+1\,k+2},$$

les équations (21) peuvent être remplacées par les

$$(21_2)\qquad \gamma_{hk} = \sum_1^n{}^{rs}\, \lambda_h^{(r)}\, \lambda_k^{(s)}\, \alpha_{rs},$$

qui nous donnent en particulier

$$\gamma_{hk} = \gamma_{kh}.$$

En général les équations (21), étant liées au système covariant de Riemann, sont aussi intimement liées à la nature métrique de la variété V_n.

Ces équations ne sont pas autre chose que la généralisation de celles, qui ont lieu entre les composantes p, q, r des rotations dans la théorie du trièdre mobile.*) En supposant en effet la variété V_n coïncidente avec l'espace euclidéen à trois dimensions, les tangentes aux lignes 1, 2, 3 déterminent dans chaque point de cet espace un trièdre trirectangle. — Les invariants γ_{ihk} indépendants entre eux nous donnent alors les rotations $p_i, q_i, r_i\ (i = 1, 2, 3)$ qui se rapportent à des déplacements infiniment

*) *Darboux* «Leçons sur la théorie des surfaces», T. I, Chapitre V; et aussi *Königs* «Leçons de Cinématique», Chapitre X, et la Note M. M. *E.* et *F. Cosserat*, «Sur la Cinématique dans les milieux continus», qui suit ces *Leçons*.

petits selon les lignes 1, 2, 3. Les formules, que l'on tire pour des (21), sont même plus générales que celles, que l'on connait gé ment, puisqu'elles ne supposent pas que les congruences [1], [soient normales.*)

On peut voir dans cet exemple comment les méthodes de Différentiel absolu par leur généralité résument en eux mêmes et tous les avantages des différents procédés déjà connus.

§ 5.

Expressions canoniques des systèmes associés à la forme fondame

Dans l'étude des problèmes de Géométrie, de Physique, de Méc analytique etc. on est presque toujours conduit à des systèmes d'équ ayant un caractère invariantif (voir le § 7 du Chapitre Premie dans lesquelles on rencontre avec les coefficients d'une forme fon tale les éléments d'un ou de plusieurs systèmes simples et doul leurs dérivées. Pour fixer les idées nous nous bornerous ici d'un seul système associé.

Supposons d'abord que ce soit un système simple X_r. On l correspondre une congruence $[n]$ définie par les équations

$$\frac{dx_1}{X^{(1)}} = \frac{dx_2}{X^{(2)}} = \cdots = \frac{dx_n}{X^{(n)}},$$

et dont le système coordonné covariant résultera des éléments

$$\lambda_{n/r} = X_r : \varrho,$$

étant

$$\varrho^2 = \sum_1^n {}_r X^{(r)} X_r.$$

Nous dirons alors que les formules

(23) $$X_r = \varrho\, \lambda_{n/r},$$

nous donnent les expressions canoniques des X_r.

En partant de ces expressions canoniques on procèdera de la n suivante.

On commencera par associer à la congruence $[n]$ $n - 1$ congr formant avec elle une ennuple orthogonale (et il sera dans ce ca d'avoir recours au système, ou à un des systèmes, canoniques par rap la congruence $[n]$). Après cela on transformera les équations du pr

*) *Levi-Civita* «Tipi di potenziali, che si possono far dipendere de d coordinate», Memorie delle Accademia delle Scienze di Torino, Tomo XLIX, 18

n substituant respectivement aux a_{rs} et aux X_r les expressions données ar les formules (4') et (22), et à leurs dérivées les éléments des systèmes érivés par dérivation covariante selon la forme fondamentale.

On obtient de la sorte un système d'équations étroitement en rapport vec les éléments essentiels du problème, et dont l'interprétation géo- iétrique, presque toujours facile et naturelle, le caractérise d'une manière ette et opportune. — Ce système nous donnera aussi souvent des indications ès avantageuses pour son intégration, en rendant presque intuitif le ystème de variables indépendantes, qu'il faut choisir pour en obtenir, si ela est possible, les équations intégrales. — Dans ce cas on revient en n aux notations ordinaires, et l'on obtient les solutions canoniques du roblème.

Ces méthodes, nous le reconnaissons les premiers, n'ont pas la rétention d'éliminer les difficultés essentielles aux questions, aux quelles les sont appliquées. Au contraire elles ne conduisent qu'à des trans- rmations d'équations laissant nécessairement subsister toutes ces diffi- ultés. — Elles nous apprennent seulement à éviter tous les obstacles ccidentels; et par ce seul fait il arrive souvent que, en partant d'un ystème d'équations bien compliqué, on parvient à un système canonique ès simple et parfaitement abordable. On obtient alors des succès itéressants et inattendus là, où les méthodes ordinaires auraient presque ertainement échoué.

S'il s'agit d'un système double symétrique α_{rs}, on a recours aux quations

$$\text{3)}\qquad \sum_1^n {}^s (\alpha_{rs} - \varrho\, a_{rs})\, \lambda^{(s)} = 0. \qquad (r = 1, 2, \cdots, n)^{*)}$$

En éliminant $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(n)}$ on parvient à une équation du dégré n ı ϱ, dont les propriétés sont bien connues. Toutes ses racines $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$ nt réelles et leur substitution à ϱ dans les équations (23), conduit en ut cas à la détermination d'une ou de plusieurs ennuples orthogonales], [2], $\cdots$, [n], telles que l'on a pour les éléments du système donné les pressions canoniques

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}^h \varrho_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s}\,.$$

En partant de ces expressions on transforme les équations du problème on parvient souvent à ses solutions canoniques d'une manière tout à t analogue à celle, qui a été indiquée pour le cas des systèmes simples.

*) *Ricci* «Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville», Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1894 et aussi *Levi-Civita* ılla trasformazione delle equazioni dinamiche», § 7, Annali di Matematica, 1896.

Voyons désormais les règles générales, que l'on peut déduire pour un système d'ordre quelconque des exemples, que nous venons de considérer.

On a vu (§ 1) que les éléments d'un système covariant quelconque d'ordre m peuvent être exprimés comme fonctions homogènes du dégré m des éléments des systèmes coordonnés covariants d'une ennuple arbitraire, que nous appellerons désormais *ennuple de référence.* Pour obtenir les expressions canoniques des éléments d'un système simple X_r nous avons dans le premier exemple choisi cette ennuple de manière que dans les formules générales

$$X_r = \sum_1^n {}^h c_h \lambda_{h/r},$$

on eût

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_{n-1} = 0.$$

De même on a réduit dans le deuxième exemple les a_{rs} à leurs expressions canoniques en choisissant l'ennuple de référence de manière que dans les formules

$$a_{rs} = \sum_1^n {}^{hk} c_{hk} \lambda_{h/r} \lambda_{k/s}$$

on eût

$$c_{hk} = 0. \qquad (h \neq k)$$

En général, si l'on a affaire à un système covariant d'ordre m, il importe avant tout d'en réduire les éléments à des expressions canoniques bien choisies en prenant l'ennuple de référence de la manière la plus opportune. Après cela, pour établir les équations intrinsèques du problème, on n'aura qu'à suivre des procédés très simples et uniformes.

Chapitre III.

Applications analytiques.

§ 1.

Classification des formes quadratiques de différentielles.*)

Soit φ une forme quadratique des différentielles des n variables $x_1, x_2, \cdots, x_n$, essentiellement positive. En choisissant convenablement $n + \mu$ fonctions $y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots, y_{n+\mu}$ des x, on peut toujours (pour μ assez grand) satisfaire à l'équation

$$\varphi = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2 + \cdots + dy_{n+\mu}^2.$$

*) Cfr. *Ricci* «Principi di una teoria delle forme differenziali quadratiche» Ann. di Matematica, Ser. II*, T. XII, 1884, ou le Chapitre V, des «Lezioni, etc.».

La plus petite valeur m de μ, pour laquelle une telle égalité est possible, peut varier de 0 jusqu'à $\frac{n(n-1)}{2}$. On a de la sorte un criterium fondamental pour la classification des formes φ. Le nombre m s'appelle *classe de la forme* correspondante. Il ne peut pas dépasser $\frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, par exemple, les formes binaires ($n=2$) sont ou bien de classe zéro, ou bien de première classe.

Les formes de classe 0 (à un nombre quelconque de variables) sont caractérisées par ce fait que le système de Riemann (voir page 142) est identiquement nul. Pour les formes de première classe on a le théorème suivant:

Pour qu'une forme φ soit de première classe il faut et il suffit qu'on puisse déterminer un système double symétrique b_{rs} tel que

1°.
$$a_{rt,su} = b_{rs} b_{tu} - b_{ru} b_{ts},$$

2°. *le système b_{rst}* (dérivé covariant selon φ) *soit symétrique.**)

Lorsque ces conditions sont vérifiées, les fonctions $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}$ peuvent être déterminées comme intégrales d'un certain système complet.

Pour les formes des classes supérieures on démontre un théorème analogue.

Mais nous n'insistons pas davantage sur cet argument; une autre application importante du calcul différentiel absolu appelle notre attention.

§ 2.

Invariants absolus.**) — Remarques géométriques. — Paramètres différentiels.

Les recherches classiques de Jacobi, Lamé et Beltrami, auxquelles on doit l'introduction dans l'analyse des invariants bien connus sous le nom *de paramètres différentiels*, ont leur fondement dans la considération de la variation première de certaines intégrales. Malgré l'élégance et l'ingéniosité de cet artifice, on est ainsi conduit à des méthodes indirectes et très eloignées de celles, que la nature même de la question semble suggérer.

Elle rentre en effet dans le problème général suivant, qui n'est après tout qu'un problème d'élimination algébrique:

*) Nous disons qu'un système multiple est symétrique, lorsque ses éléments correspondants à une même combinaisons des indices sont identiques.

**) Voir *Ricci* «Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali» Ann. di Matematica, Ser. IIᵃ, T. XIV, 1886 et «Lezioni etc», Chap. V. A consulter aussi *Levi-Civita* «Sugli invarianti assoluti», Atti dell' Istituto Veneto, 1894.

Étant donnée une forme quadratique définie φ et un nombre quelcon de systèmes associés S (covariants ou contrevariants), *déterminer tous les variants absolus, que l'on peut former avec les coefficients de φ, les élém des systèmes S et les dérivées des uns et des autres jusqu'à un ordre μ à l'avance.*

Si l'on n'avait pas à considérer les dérivées, ce serait une quest bien connue, pour laquelle il suffirait de se rapporter à la théorie formes. L'intervention des dérivées semble au premier abord compliq beaucoup la recherche. Fort heureusement il n'en est rien. Le cal différentiel absolu nous ramène toujours à la même question, en substitu aux dérivées ordinaires les éléments des systèmes, qui proviennent systèmes donnés par dérivation selon φ. Plus précisément on a théorème:

Pour obtenir tous les invariants différentiels absolus d'ordre μ, il su de déterminer les invariants algébriques du système des formes suivantes:

1) *forme fondamentale φ;*
2) *formes associées S et leurs dérivées selon φ, jusqu'à l'ordre μ;*
3) (pour $\mu > 1$) *forme quadrilinéaire, dont les coefficients sont éléments du système de Riemann; formes dérivées de cette-ci jusq l'ordre $\mu - 2$.*

En appelant *invariants propres* d'une forme φ ceux, qui dépende uniquement des coefficients de φ et de leurs dérivées, on déduit de proposition précédente les deux corollaires que voici:

Les formes de classe 0 n'admettent aucun invariant différentiel prop

Les formes de classe supérieure ne possèdent pas des invariants différ tiels du premier ordre; leurs invariants d'ordre $\mu > 1$ sont ceux des formes 1),

Ces résultats prennent naturellement une forme bien plus simple pc les formes binaires et ternaires.

Pour $n = 2$ (Voir Chapitre I, § 6) le système de Riemann peut ê substitué par l'invariant G de Gauss, qui est le seul invariant du seco ordre propre des formes binaires.

Il est bon de remarquer dès à présent que, lorsqu'on regarde comme le ds^2 d'une surface, la valeur de G n'est que le produit rayons principaux de courbure. C'est pour cela que G s'appelle au *courbure totale de la forme φ*. D'après ce qui precède, nous pouvo affirmer que $G = 0$ donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'u forme binaire φ soit de classe zéro. En langage géométrique c'est proposition bien connue que les surfaces développables sont les seules soient applicables sur le plan.

Pour $G = 0$, notre forme binaire n'a pas évidemment des invariau propres; en général

Les invariants propres d'une forme binaire jusqu'à un ordre quelconque $\mu > 2$, s'obtiennent en déterminant les invariants absolus algébriques communs à la forme φ et à celles, qui ont pour coefficients les dérivées covariantes de G jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Ce résultat est contenu implicitement dans un mémoire de Casorati.*)

Pour $n = 3$, on peut substituer à la considération du système covariant de Riemann, celle du système contrevariant double $\alpha^{(rs)}$ ou de son réciproque α_{rs}, et il est bien clair avant tout que les conditions $\alpha_{rs} = 0$ sont à la fois nécessaires et suffisantes pour qu'une forme ternaire soit de classe 0. Lorsque le système α_{rs} n'est pas identiquement nul, la considération des deux formes quadratiques aux coefficients a_{rs} et α_{rs} nous donnera tous les invariants différentiels propres du second ordre. Comme invariants algébriques de ces deux formes on peut prendre les racines de l'équation

$$\| \alpha_{rs} - \varrho a_{rs} \| = 0,$$

que nous appellerons *invariants fondamentaux de la forme* φ. On est conduit à ce choix par la réduction du système double α_{rs} à sa forme canonique (Chap. II, § 5). Elle fait ressortir tout naturellement un triple des congruences orthogonales, très importantes pour l'étude géométrique des propriétés, qui généralisent la notion de courbure totale des variétés à deux dimensions.

Nous y reviendrons dans les applications géométriques (Chap. IV, § 8); pour le moment bornons-nous à avertir que nous appelons les congruences du triple *congruences principales* et *directions principales* celles de leur tangentes.

Il est à peine nécessaire d'ajouter que, pour avoir les invariants propres d'une variété ternaire, jusqu'à un ordre $\mu > 2$, il suffira de prendre en considération, à côté des deux formes employées tout-à-l'heure, celles, qui se déduisent par la dérivation covariante des α_{rs} jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Cela posé pour les invariants propres, examinons maintenant quelques exemples simples du cas général, où l'on a aussi des systèmes associés.

Supposons en premier lieu qu'il s'agisse de deux fonctions U et V associées à une forme quelconque φ à n variables.

Les paramètres différentiels du premier ordre $\underset{1}{\Delta} U$ et $\underset{1}{\Delta} V$ et celui, que Beltrami appelle paramètre mixte de U, V

$$\left(\nabla(U, V) = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a^{(rs)}\, U_r V_s\right)$$

épuisent le système des invariants différentiels du premier ordre.

*) «Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superfici curve», Ann. di Matematica, Ser. Iª, T. III e IV, 1860—61.

Lorsqu'on a affaire à une seule fonction associée U, pour premier ordre, on n'a évidemment que $\underset{1}{\Delta} U$; pour le deuxième o1 on devra considérer les invariants absolus des trois formes algébriq $\varphi = \sum_1^n {}_r\, U_r\, dx_r$, $\psi = \sum_1^n {}_{rs}\, U_{rs}\, dx_r\, dx_s$. En particulier les invariants couple φ, ψ sous leur forme rationnelle (c'est-à-dire les coefficients $\varrho^{n-1}, \varrho^{n-2}, \cdots$ l'équation $\frac{1}{a} \| U_{rs} - \varrho a_{rs} \| = 0$) seront respectiven des degrés $1, 2, \cdots, n$ par rapport aux dérivées secondes de U.

L'invariant du premier degré $\sum_1^n {}_{rs}\, a^{(rs)} U_{rs}$ n'est que le paramètre l connu $\underset{2}{\Delta} U$ de Beltrami.

Soit maintenant associé à notre forme φ un système simple X_r. donne lieu aux invariants du premier ordre, qui appartiennent au syst algébrique de trois formes, c'est-à-dire φ, la forme linéaire $\sum_1^n {}_r\, X_r\, dx$ la forme *bilinéaire* dont les coefficients sont les éléments du pre système dérivé selon φ du système des X_r. Parmi ces invariants convient de signaler

$$\Theta = \sum_1^n {}_{rs}\, a^{(rs)} X_{rs},$$

qui se présente fréquemment dans les applications. A ce même poin vue il ne sera pas sans intérêt d'avertir que des transformations fa conduisent à une seconde expression de Θ, c'est-à-dire

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^n {}_r\, \frac{\partial}{\partial x_r} (\sqrt{a}\, X^{(r)}),$$

qui est plus commode pour les calculs, tandis que l'expression précéd se prête mieux aux déductions théoriques. Dans le cas particulie deux variables seulement, on peut substituer à la forme bilinéaire, q vient d'indiquer, la forme quadratique aux coefficients $X_{rs} + X_{sr}$, po qu'on y ajoute l'invariant, qui s'obtient en composant le système X_{rs} le système contrevariant E (Chap. I, § 3). Son expression est

$$\sum_1^2 {}_{rs}\, \varepsilon^{(rs)} X_{rs} = \frac{1}{\sqrt{a}} (X_{12} - X_{21}),$$

ou, si l'on veut,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial X_1}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_1} \right\}.$$

D'une façon analogue, pour $n = 3$, il suffit d'associer au système double symétrique $X_{rs} + X_{sr}$, un système simple contrevariant, que nous définissons en posant:

$$2\mu^{(r)} = \sum_1^3{}_{st}\, \varepsilon^{(rst)} X_{st}.$$

En développant et en tenant compte de la convention faite à l'égard des indices, on trouve pour les $\mu^{(r)}$ les expressions

$$2\mu^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{ \frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}} \right\},$$

très-aisées à calculer effectivement dans les applications particulières.

Chapitre IV.

Applications géomètriques.

§ 1.

Étude des variétés à deux dimensions (Géométrie sur une surface): Généralités. — Courbure. — Congruences. — Faisceaux de congruences. — Invariants d'un faisceau. — Théorème de Beltrami.

La théorie des surfaces et des lignes tracées sur une surface, telle qu'elle a été fondée par Gauss s'est maintenant développée de manière à constituer à elle seule un vaste et fécond domaine scientifique. Mais, même dans les meilleures expositions de cette théorie, l'unité de méthode fait défaut: Elle ne ressort pas comme le développement naturel de principes simples et bien déterminés. Le calcul différentiel absolu y conduit au contraire sans aucun effort, en donnant à la théorie une forme aussi simple que possible.

Il conduit aussi à séparer rationnellement la théorie des variétés à deux dimensions, considérées en elles mêmes, de la théorie des surfaces, considérées comme douées d'une forme rigide dans notre espace. La première découle de la considération de la forme différentielle, qui exprime le ds^2 de la variété (*première forme fondamentale*); pour la seconde, il suffit d'associer une autre forme quadratique (*seconde forme fondamentale*, d'après M. Bianchi).

Nous commençons par la première. Soit une variété V_2 définie par l'expression du carré de son élément linéaire

$$ds^2 \quad \sum_1^2{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s \equiv \varphi.$$

Convenons de regarder cette forme comme fondamentale. Si son invariant de Gauss s'annule, nous savons déjà que la variété sera linéaire. Si cet invariant G n'est pas nul, l'association de G à φ donne lieu à tous les invariants propres de la forme, c'est-à-dire à toutes les expressions liées à des propriétés intrinsèques de la variété V_2.

Soient $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ les systèmes coordonnés covariants de deux congruences orthogonales quelconques de courbes tracées dans notre variété (congruences [1], [2]). Reprenons, pour $n = 2$, les positions générales (6) du Chapitre II. En faisant

$$\varphi_s = \sum_1^2{}_j \gamma_{21j}\, \lambda_{j/s}\,, \tag{1}$$

elles deviennent

$$\lambda_{1/rs} = -\lambda_{2/r}\, \varphi_s\,, \quad \lambda_{2/rs} = \lambda_{1/r}\, \varphi_s\,. \tag{2}$$

Les coefficients de rotation du couple [1], [2] se réduisent dans ce cas à deux seuls algébriquement indépendants; nous pourrons prendre $\gamma_{121}, \gamma_{212}$. Il représentent les courbures géodésiques des lignes 1 et 2 respectivement.

Si l'on pose

$$\bar{\varphi}_r = \sum_1^2{}_s\, \varepsilon_{rs}\, \varphi^{(s)}\,,$$

la formule (20) du Chap. II peut être remplacée par

$$\sum_1^2{}_{rs}\, a^{(rs)}\, \bar{\varphi}_{rs} = G. \tag{3}$$

Dans les deux dernières équations (2) considérons les $\lambda_{2/r}$ comme inconnues et immaginons en même temps les $\lambda_{1/r}$ remplacées par leurs valeurs

$$\lambda_{1/r} = \sum_1^2{}_s\, \varepsilon_{rs}\, \lambda_2^{(s)} \;{}^{*)}$$

et les φ_s par celles, qu'on tire des (1). La (3') constitue alors la condition nécessaire et suffisante pour que ces équations et la

$$\sum_1^2{}_r\, \lambda_{2/r}\, \lambda_2^{(r)} = 1 \tag{4}$$

forment un système complètement intégrable. Si l'on désigne par $\lambda_{2/r}$ les

*) On les obtient en résolvant les deux équations

$$\sum_1^2{}_r\, \lambda_1^{(r)}\, \lambda_{1/r} = 1, \quad \sum_1^2{}_r\, \lambda_1^{(r)}\, \lambda_{2/r} = 0,$$

léments d'une solution particulière de ce système algébrico — différentiel, a solution générale s'obtient en posant.

$$\lambda_r = \operatorname{sen} \alpha \, \lambda_{1/r} + \cos \alpha \, \lambda_{2/r} ,$$

ù α est une constante.

Pour une valeur particulière quelconque de α, les λ_r sont les éléments lu système coordonné covariant d'une congruence, dont les lignes forment, n chaque point de V_2, un angle α avec la ligne 2.

Il s'en suit que le système φ_r joue le même rôle pour toutes les ongruences, qui rencontrent une congruence donnée sons un angle constant α, quelque soit la valeur de α.

Un tel système de congruences se nomme *faisceau* et φ_r (ou respectivement $\varphi^{(r)}$) s'appelle *système coordonné covariant* (ou *contrevariant*) *du isceau.*

L'équation (3) représente donc la condition pour qu'un système φ_r onné à l'avance soit le système coordonné covariant d'un faisceau.

Si φ_r et ψ_r sont les systèmes covariants de deux faisceaux, les différences $_r - \psi_r$ ont une signification géométrique remarquable. Elles sont les érivées de l'angle, que forment entre elles les lignes de deux congruences éterminées, mais quelconques, des deux faisceaux.

En suivant les règles du § précédent, supposons qu'on ait construit us les invariants différentiels absolus, qu'on peut obtenir par l'association φ du système covariant d'une congruence [2]. On aura obtenu, par le ait même, toutes les expressions aptes à représenter les propriétés intrinsques d'une telle congruence, ou bien encore d'une ligne quelconque, acée dans la variété V_2.

En opérant, comme on vient de dire, nous trouvons un seul invariant lgébrique (ou d'ordre zéro), qui, conformément à (4), est égal à l'unité.

A cause des (2), les invariants différentiels du premier ordre sont les ivariants algébriques absolus, communs à la forme fondamentale et aux eux formes linéaires ayant pour coefficients $\lambda_{2/r}$ et φ_r.

Il sont au nombre de deux, par exemple

$$J_1 = \sum_1^2 {}_r \, \lambda_2^{(r)} \varphi_r = \gamma_{212} ,$$

$$J_2 = \sum_1^2 {}_r \, \varphi^{(r)} \varphi_r = \gamma_{121}^2 + \gamma_{212}^2 .$$

our avoir les invariants du second ordre, on devra adjoindre la forme ilinéaire aux coefficients φ_{rs}, ou, ce qui est le même, l'invariant G et forme quadratique ayant pour coefficients

$$\psi_{rs} = \frac{1}{2} (\varphi_{rs} + \varphi_{sr}) .$$

Parmi les invariants qui en résultent, on doit signaler

$$\vartheta = \sum_1^2{}_{rs}\, a^{(rs)}\, \psi_{rs} = \sum_1^2{}_{rs}\, a^{(rs)}\, \varphi_{rs}.$$

Enfin, pour obtenir tous les invariants d'un ordre quelconque $\mu > 2$, il faut considérer encore les systèmes dérivés de G et de ψ_{rs} jusqu'à l'ordre $\mu - 2$.

Les invariants propres de la forme fondamentale représentent, avons-nous dit, les propriétés intrinsèques de la variété V_2; de même ceux qui dépendent aussi des φ_r, ψ_{rs} et leurs dérivées, sans contenir toutefois les $\lambda_{2/r}$, se rapportent à des propriétés intrinsèques du faisceau, dont φ_r est le système covariant. Ainsi l'invariant J_2 représente la somme des carrés des courbures géodésiques de deux lignes appartenant à deux congruences orthogonales, mais quelconques, du faisceau. C'est une propriété du faisceau qu'une telle somme ait la même valeur pour un couple quelconque de congruences orthogonales.

De même l'invariant ϑ nous apprend que la différence

$$\frac{\partial \gamma_{212}}{\partial s_2} - \frac{\partial \gamma_{121}}{\partial s_1}$$

ne varie pas avec le couple considéré; lorsqu'elle s'annule (et dans ce cas seulement) toute congruence du faisceau est isotherme. D'ici ressort tout naturellement le théorème de Beltrami: *Si une congruence est isotherme, il en est de même pour toutes les congruences, qui appartiennent avec elle au même faisceau.*

§ 2.

Surfaces de l'espace ordinaire. — Équations fondamentales de la théorie de l'applicabilité. — Formes particulières remarquables. — Généralisation des formules de Gauss et de Codazzi.

Comme il résulte du § 1 du Chapitre précédent, pour déterminer toutes les surfaces, qui admettent une expression donnée pour leur ds^2, il suffit de déterminer tous les systèmes doubles b_{rs}, qui satisfont au système algébrico-différentiel

$$c) \qquad b_{rst} = b_{rts},$$

$$g) \qquad \frac{b}{a} = G,$$

où l'on a posé

$$b = b_{11}\, b_{22} - b_{12}^2.$$

Après cela les coordonnées y_1, y_2, y_3 des points de la surface, par rapport à un système cartesien orthogonal quelconque, sont les intégrales du système

$$\text{i)} \qquad a_{rs} = \sum_{1}^{3} {}_{h}\, y_{h/r}\, y_{h/s},$$

$$\text{j)} \qquad y_{h/rs} = z_h\, b_{rs}, \qquad (h = 1,2,3;\ r, s = 1,2)$$

les z_h étant définies par les équations

$$\sum_{1}^{3} {}_{h}\, z_h\, y_{h/r} = 0, \qquad (r = 1, 2)$$

$$\sum_{1}^{3} {}_{h}\, z_h^2 = 1.$$

Il va sans dire que $y_{h/r}$, $y_{h/rs}$ désignent les derivées covariantes des fonctions inconnues y_h. Le système i), j) est désormais complètement intégrable (car les conditions d'intégrabilité se réduisent précisément aux équations c) et g)). Son intégrale générale dépend de six constantes arbitraires; elles fixent la position des axes coordonnés par rapport à la surface, ou, si l'on veut, la position de la surface par rapport aux axes, lorsqu'on regarde ceux-ci comme donnés et qu'il s'agit de trouver la forme de la surface.

Nous voyons donc qu'à chaque intégrale particulière du système i), j) correspond une unique surface, déterminée à un déplacement rigide près, qui admet la forme φ comme expression du carré de son élément linéaire. Les équations i), j) peuvent être appelées *équations intrinsèques* de la surface. Ces équations, en concours avec c) et g) (qu'on dira *équations fondamentales de la théorie des surfaces*), se prêtent à l'etude des propriétés de la surface, qu'elles définissent beaucoup mieux que l'équation en termes finis, où figurent des éléments étrangers à la surface elle-même.

Les équations (c, g) aussi bien que les (i, j) se transforment convenablement (Chapitre II, § 1) en posant

$$\text{5)} \qquad b_{rs} = \sum_{1}^{2} {}_{hk}\, \omega_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s},$$

où les $\omega_{hk} = \omega_{kh}$ désignent trois, invariants et les $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ les systèmes covariants d'un couple orthogonal quelconque.

On démontre que ω_{11}, ω_{22} et ω_{12} mesurent, au signe près, les courbures normales et la torsion géodésique des lignes 1, 2.

En convenant pour un moment de ne pas considérer comme distincts les indices qui diffèrent entre eux par un multiple de 2, les formules c) et g) équivalent respectivement aux suivantes:

$$c_1)\qquad \frac{\partial \omega_{ii}}{\partial s_{i+1}} - \frac{\partial \omega_{ii+1}}{\partial s_{i+2}} = \sum_1^2{}_h \{\omega_{ih}\gamma_{ii+2h} + \omega_{i+1h}\gamma_{hh+1h+1}\}, \qquad (i = 1, 2)$$

$$g_1)\qquad \omega_{11}\,\omega_{22} - \omega_{12}^2 = G.$$

Si nous introduisons six nouvelles inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 en écrivant simplement (y, ξ) pour un quelconque des systèmes (y_h, ξ_h), les équations i) et j) deviennent

$$i_1)\qquad \begin{cases} \sum_1^3{}_h\, \xi_h^2 = 1, \quad \sum_1^3{}_h\, \eta_h^2 = 1, \quad \sum_1^3{}_h\, \xi_h\eta_h = 0, \\ y_r = \xi\,\lambda_{2/r} + \eta\,\lambda_{1/r}, \end{cases}$$

$$j_1)\qquad \begin{cases} \xi_r = \quad \eta\,\varphi_r + \zeta \sum_1^2{}_h\, \omega_{2h}\,\lambda_{h/r}, \\ \eta_r = -\,\xi\,\varphi_r + \zeta \sum_1^2{}_h\, \omega_{1h}\,\lambda_{h/r}, \end{cases}$$

étant

$$\zeta = \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Les inconnues ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 ne sont pas autre chose que les cosinus de direction des tangentes aux lignes 1, 2; les $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ sont alors les cosinus de la normale à la surface, toujours, bien entendu, par rapport aux axes y_1, y_2, y_3.

Comme il a été enseigné au Chapitre II, il y a un couple $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ pour qui les expressions (5) prennent une forme très simple, qui est leur forme canonique. Ce couple correspond aux lignes de courbure de la surface. On a alors $\omega_{12} = 0$, ce qui donne le théorème connu que les lignes de courbure ont leur torsion géodésique nulle; ω_{11}, ω_{22}, changées de signe, sont les courbures principales. Les c_1) et g_1) se réduisent dans ce cas aux formules bien connues de Codazzi et de Gauss.

On peut aussi supposer $\omega_{22} = 0$ (ce qui est loisible toutefois, pour un couple de congruences réelles, seulement lorsque $G \leq 0$). Les lignes de la congruence [2] sont alors asymptotiques; l'équation g_1) définit ω_{12} et les c_1) conduisent à des relations, signalées déjà par M. Raffy.*)

*) «Sur le problème général de la deformation des surfaces», Comptes Rendus, 13 Juin 1892.

Nous devons renvoyer aux «Lezioni etc.», si souvent citées, le lecteur désireux de se rendre complètement compte comment des formules indiquées descendent les théorèmes les plus importants de cette théorie. Il vaut mieux que nous nous arrêtions un moment sur un problème important de la théorie de l'applicabilité, où le calcul différentiel absolu a permis d'aller jusqu'un fond. Ce sera l'objet du § suivant.

§ 3.
Surfaces jouissant de propriétés données. — Quadriques.

Soit donnée une forme φ: Qu'on se propose de reconnaître si, parmi les surfaces, qui admettent la forme φ comme expression de leur ds^2, il en a qui satisfont à certaines conditions fixées à l'avance. Pour cela il suffira d'adjoindre aux équations c_1), g_1); i_1), j_1) celles, qui expriment analytiquement les conditions données. Tout se réduit alors à déterminer les conditions d'intégrabilité d'un tel système. Si on peut y satisfaire, on a par là même les équations dont dépend la recherche des surfaces inconnues. C'est la méthode classique, qui conduit par exemple à décider si, parmi les surfaces, auxquelles convient une expression déterminée pour l'élément linéaire, il y en a de réglées ou à courbure moyenne constante, etc. Nous nous bornons à avertir que les théorèmes connus sur la déformation de telles catégories de surfaces se retrouvent de la façon la plus spontanée en employant nos méthodes.

Nous nous en sommes servi en particulier*) pour reconnaître, s'il existe, et déterminer, lorsqu'il en est ainsi, les surfaces du second dégré non developpables, qui possèdent un élément linéaire donné. Ce problème, qui avait été résolu seulement pour la sphère, est maintenant épuisé pour une quadrique quelconque. On peut de la sorte, par des simples opérations en termes finis, décider si une forme donnée φ peut appartenir comme carré de l'élément linéaire à une surface du second dégré. *Il y a au plus une quadrique, à des mouvements près, qui jouit de cette propriété.* Lorsque il y en a une effectivement, elle reste ainsi déterminée.

§ 4.
Extension de la théorie des surfaces aux espaces linéaires à n dimensions.

Les considérations d'ordre générale, dont il a été question dans les §§, qui précèdent, s'étendent très aisément aux variétés à n dimensions contenues

*) *Ricci* «Sulle teoria intrinseca delle superficie ed in ispecie di quelle di secondo grado», Atti dell' Istituto Veneto, 1895; «Lezioni etc.», Seconde partie Chap. VI

dans un espace linéaire S_{n+1}. Il paraît à propos de réserver à de telles variétés le nom d'*hypersurfaces*. On s'en rend compte en se rappelant que les formules c) et g) de ce Chapitre sont un cas particulier ($n=2$) de celles, qu'on a rencontré au Chapitre précédant, pour exprimer qu'une forme φ est de la première classe.

On peut déduire des dites formules qu'une hypersurface à n dimensions, dont on connaît l'expression du ds^2, est déterminée de forme (en n'ayant pas égard à la position dans l'espace S_{n+1}) par une seconde forme quadratique différentielle. Si aux coefficients b_{rs} de cette dernière on donne des expressions analogues aux (5), on a les équations fondamentales

$$C)\qquad \frac{\partial \omega_{hi}}{\partial s_j}-\frac{\partial \omega_{hj}}{\partial s_i}=\sum_1^n{}^k\,\omega_{hk}(\gamma_{kji}-\gamma_{kij})+\sum_1^n{}^k(\omega_{jk}\gamma_{khi}-\omega_{ik}\gamma_{khj}),$$

$$G)\qquad \omega_{hk}\,\omega_{ij}-\omega_{hj}\,\omega_{ik}=\sum_1^n{}^{rstu}\,a_{rs,tu}\,\lambda_h^{(r)}\,\lambda_k^{(s)}\,\lambda_i^{(t)}\,\lambda_j^{(u)}.$$

A côté des coordonnées cartesiennes $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ des points de l'hypersurface, il convient d'introduire comme inconnues auxiliaires les cosinus de direction des lignes des congruences de référence. En désignant par ξ_{ik} le cosinus de l'angle que la ligne i fait avec l'axe des y_k, les équations intrinsèques d'une hypersurface peuvent se résumer comme il suit

$$\mathrm{I})\qquad \left\{\begin{aligned}&\sum_1^{n+1}{}^k\,\xi_{ik}\,\xi_{jk}=\begin{cases}1, & \text{pour } i=j\\ 0, & \text{pour } i\gtrless j\end{cases}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)\\ &y_r=\sum_1^n{}^i\,\xi_i\,\lambda_{i/r},\end{aligned}\right.$$

$$\mathrm{II})\qquad \xi_{i/r}=\sum_1^n{}^j\left(\zeta\,\omega_{ij}+\sum_1^n{}^l\,\gamma_{ijl}\,\xi_l\right)\lambda_{j/r},\qquad (i,r=1,2,\cdots,n)$$

où, à la place de ξ_i, il faut entendre successivement chacune des

$$\xi_{ih},\qquad (h=1,2,\cdots,n+1)$$

et on a écrit, pour abréger, ζ au lieu de

$$\sqrt{1-\sum_1^n{}^k\,\xi_k^2}.$$

Il est bien clair que $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{n+1}$ représentent les cosinus directeurs de la normale à l'hypersurface; les γ sont les coefficients de rotation par rapport aux n congruences de référence.

Les invariants ω ont aussi des significations analogues à celles, on a indiqué pour $n=2$. En prenant les b_{rs} sous leur forme onique, les congruences correspondantes sont formées, comme il arrive ır $n=2$, par les lignes de courbure de l'hypersurface. Il va sans e que dans ce cas les équations E), G); I), II) se simplifient notablément.

§ 5.

Groupes de mouvements dans une variété quelconque.*)

Soit φ l'expression du ds^2 d'une variété V_n. Considérons un mouveent infinitésimal, qui fait subir aux points de la variété un déplacement finiment petit $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \cdots, \xi^{(n)}$, c'est-à-dire qui fait passer chaque point $x_1, x_2, \cdots, x_n$) à la position voisine $(x_1+\xi_1^{(1)}, x_2+\xi_2^{(2)}, \cdots, x_n+\xi_n^{(n)})$. Nous irons *rigide* ou sans déformation un tel mouvement, si la forme φ admet ı transformation infinitésimale

$$Xf=\sum_{1}^{n} {}_r\, \xi^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}.$$

Les conditions, auxquelles doivent satisfaire les $\xi^{(r)}$, pour qu'il en soit insi, ont été données par M. Killing.**)

Avec les notations du calcul différentiel absolu, elles s'écrivent

$$\xi_{rs}+\xi_{sr}=0. \tag{k}$$

Soient

$$\xi_r=\varrho\,\lambda_r$$

es expressions canoniques des ξ_r.

La congruence, dont λ_r est le système coordonné covariant, est formée ar les trajectoires du mouvement rigide, engendré par la transformation nfinitésimale Xf.

En posant dans les k) pour les ξ_r leurs expressions canoniques, on rouve le théorème suivant, qui est une extension naturelle de ce, qui rrive pour les surfaces.

Pour qu'une congruence donnée C dans une variété quelconque V_n ésulte des trajectoires d'un mouvement sans déformation, il faut et il suffit:

a) *que tout système de $n-1$ congruences orthogonales entre elles et à C soit canonique* (par rapport à cette dernière).

---

*) *Ricci* «Sui gruppi continui di movimenti in una varietà qualunque a tre imensioni», Memorie della Società Italiana delle Scienze, Ser. 3ª, T. XII, 1899.

Les résultats de ce mémoire ont été résumés dans deux Notes des Comptes Rendus (16 et 22 Août 1898).

**) Voir le mémoire „Ueber die Grundlagen der Geometrie", Crelle's Journal, Bd. CIX, 1892.

b) *que toute congruence normale à C soit géodésique, ou telle que sa courbure géodésique soit en chaque point perpendiculaire à la ligne de C, passant par le même point.*

c) *que la congruence C soit normale et la famille ∞^1 des hypersurfaces orthogonales soit isotherme.*

Lorsque $n = 3$, en employant le système covariant E (Chap. I, § 3), les équations k) peuvent être remplacées par

$$k_0) \qquad \xi_{rs} = \sum_1^3{}_t\, \varepsilon_{rst}\, \mu^{(t)},$$

où les $\mu^{(r)}$ sont des inconnues auxiliaires, qui forment évidemment un système contrevariant.

Dans la variété V_3, que nous considérons, prenons un triple orthogonal quelconque [1], [2], [3] et introduisons à la place des ξ_r et μ_r les invariants η_i et ϑ_i, définis par les équations

$$\eta_i = \sum_1^3{}_r\, \xi^{(r)}\, \lambda_{i\,r}, \qquad \vartheta_i = \sum_1^3{}_r\, \mu^{(r)}\, \lambda_{i\,r}.$$

Les k_0) deviennent

$$k_0') \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \eta_i}{\partial s_i} &= \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihi}\, \eta_h, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+1}} &= \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihi+1}\, \eta_h + \vartheta_{i+2}, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial s_{i+2}} &= \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihi+2}\, \eta_h - \vartheta_{i+1}, \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

et on aura les conditions d'intégrabilité (Chap. II, § 2)

$$h) \qquad \frac{\partial \vartheta_i}{\partial s_j} = \sum_1^3{}_h\, \gamma_{ihj}\, \vartheta_h + \gamma_{jj+2}\, \eta_{j+1} - \gamma_{jj+1}\, \eta_{j+2}. \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

§ 6.

Étude complète des groupes de mouvements pour les variétés V_3 à trois dimensions. — Résolution du problème: Reconnaître si une V_3 donnée admet un groupe de mouvements et le déterminer, lorsqu'il existe.

Groupes intransitifs. — Dans une variété V_3 une famille ∞^1 de surfaces V_2 peut être représentée (Chap. II, § 3) par le même système (covariant par exemple) qui représente la congruence de ses trajectoires orthogonales. Soit donc donné un tel système et proposons-nous de reconnaître s'il y a des mouvements rigides dans V_3, qui transforment *chaque* V_2 en elle même. Tout d'abord il est à remarquer que, d'apres ce qui précède, on pourra regarder le problème comme résolu toutes les fois que du mouvement cherché restent déterminées les trajectoires; ce, qui arrivera pour les groupes à un seul paramètre.

Cela posé, regardons, dans les équations k_0'), h) du § précédent, comme congruence [3] celle des trajectoires orthogonales aux surfaces V_2. On aura

$$\eta_3 = 0, \tag{1}$$

les équations k_0'), pour $i = 3$, nous donneront

$$\sum_1^3{}_h \gamma_{3h3}\, \eta_h = 0, \tag{2}$$

$$\vartheta_1 = \sum_1^3{}_h \gamma_{3h2}\, \eta_h, \qquad \vartheta_2 = -\sum_1^3{}_h \gamma_{3h1}\, \eta_h. \tag{3}$$

Si la (2) n'est pas une identité, prise avec (1), elle nous fournit les rapports des ξ_1, ξ_2, ξ_3 et par conséquent les trajectoires du mouvement cherché, pourvu toutefois qu'il soit possible, c'est-à-dire que les conditions portées par le théorème du § 5 soient satisfaites.

Si, au contraire, la (2) est identiquement verifiée, on a

$$\gamma_{313} = \gamma_{323} = 0, \tag{4}$$

qui nous dit (Chap. II, § 3) que la congruence [3] est géodésique. Nous voyons donc que:

Pour qu'une variété V_3 admette un groupe de mouvements rigides à plus qu'un paramètre, qui laisse invariante toute surface d'une famille ∞^1, il faut que ces surfaces soient parallèles.

Remarquons maintenant que, à cause des équations (1) et (3), les fonctions inconnues se réduisent à trois seulement, soit η_1, η_2 et ϑ_3. Comme les équations k_0'), qui restent à considérer, et les h) donnent toutes les dérivées premières de ces trois fonctions, exprimées par les fonctions elles mêmes et par des quantités connues, on a encore:

Le groupe de mouvements rigides, qui laisse invariante toute surface d'une famille ∞^1, dépend au plus de trois paramètres.

Pour épuiser notre recherche, il faut discuter d'une façon complète le système simultané (1), (3), (4), k_0'), h). Un choix convenable du couple [1], [2] rend cette discussion bien aisée. Nous ne pouvons pas cependant la réproduire ici. Parmi les résultats auxquels elle conduit nous nous bornons à citer le suivant:

Si une variété V_3 admet un groupe à trois paramètres de l'espèce considérée tout à l'heure, en un point quelconque de V_3 les directions principales sont données par la normale et par les tangentes à la surface V_2, qui passe par le même point; les invariants principaux de V_3, dont deux coïncident, sont invariants du groupe et gardent par conséquent la même valeur sur chaque V_2.

Groupes transitifs. Voici les résultats obtenus pour ce cas, en partant toujours des équations k_0'), h) du § précédent.

Lorsque V_3 admet un groupe G à plus qu'un paramètre, les invariants principaux de V_3 sont invariants du groupe:

Pour que ce groupe soit transitif, il faut donc que les invariants principaux soient constants. Admettons qu'il en soit ainsi et désignons ces invariants par ω_1, ω_2, ω_3. Il nous faudra distinguer les trois cas suivants:

1°. $$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3\,;$$

2°. $$\omega_2 = \omega_3, \qquad \omega_1 \neq \omega_2\,;$$

3°. $$\omega_2 \neq \omega_3, \qquad \omega_3 \neq \omega_1, \qquad \omega_1 \neq \omega_2.$$

Dans le premier cas la variété V_3 est à courbure constante et le groupe G à six paramètres.

Dans le second cas à l'invariant ω_1 correspond une congruence principale [1] unique et déterminée; aux invariants ω_2 et ω_3 toutes les congruences orthogonales à [1]. Le groupe G sera transitif et à 4 paramètres, pourvu que soient encore satisfaites les conditions que voici:

a) la congruence [1] est géodésique; pour toute congruence orthogonale [2], la courbure géodésique est perpendiculaire à la fois aux lignes 1, 2;

b) les coefficients de rotation γ_{132}, γ_{123} ont des valeurs constantes opposées.

Dans le dernier cas, le triple [1], [2], [3] des congruences principales de V_3 est complètement déterminé. Pour que G soit transitif, il faut encore (et il suffit) que les coefficients de rotation du triple soient tous constants. Cette condition vérifiée, le groupe a précisément trois paramètres.

§ 7.

Relations des résultats précédents avec les recherches de Lie et de M. Bianchi.

Les recherches, dont on vient de parler, sont liées intimement avec celles de Lie sur le problème de Riemann-Helmholtz et celles de M. Bianchi ur les espaces à trois dimensions, qui admettent un groupe continu de ouvements *).

M. Bianchi a déterminé, en se rapportant à des variables convenablement choisies, tous les types de groupes de mouvements possibles dans ne variété V_3 et les éléments linéaires (exprimés par les mêmes variables), ui leurs correspondent.

Nous venons de nous occuper de la question suivante:

L'élément linéaire d'une variété quelconque V_3 étant donné en coorionnées générales, reconnaître s'il y a des mouvements rigides possibles ans cette variété, et déterminer, lorsqu'il y en a, le groupe, qu'ils forent, par ses équations de définition.

On fixe de la sorte les criteriums, qui permettent de décider si un ément linéaire donné rentre dans un des types de M. Bianchi. Ces ractères d'une nature invariante revêtent parfois une forme géométrique ès suggestive.

Nos résultats portent une contribution nouvelle au problème, que ie appelle de Riemann-Helmholz.

Rappelons pour cela que nous avons considéré au § précédent deux stèmes simples $\xi^{(r)}$ et $\mu^{(r)}$. Lorsque la variété V_3 est euclidéenne et x_2, x_3 sont des coordonnées cartésiennes orthogonales, les ξ sont les omposantes de la translation, les μ les composantes de la rotation, qui orrespondent au nouvement rigide infiniment petit, qu'on envisage. D'après § 4 du premier chapitre, nous pouvons immédiatement former les comosantes de ces vecteurs pour l'espace euclidéen en coordonnées générales. es mêmes expressions sont valables aussi pour une variété quelconque V_3, lorsqu'on se borne au domaine (du premier ordre) d'un point donné, arce que celui-ci fait toujours partie d'un espace linéaire tangent.

Cela posé, les équations de définition du groupe G des mouvements 'une variété donnée, nous apprennent que:

Dans les variétés à courbure constante, et dans ce cas seulement, il xiste un mouvement infiniment petit, pour lequel les composantes de translaon et celles de rotation prennent, dans un point donné, des valeurs initiales xées à l'avance.

Nous trouvons ici la signification cinématique précise des paroles de iemann**) qui contiennent la solution, donnée par lui, au problème, dont s'agit. Ce sont les paroles suivantes, réproduites aussi dans l'ouvrage e Lie: ***)

---

*) Voir les Memorie della Societa Italiana delle Scienze, Ser. 3ª, T. XI, 1897.

**) Gesammelte Werke, pag. 264.

***) *Lie-Engel*, Theorie der Transformationsgruppen, Dritter Abschnitt, pag. 289 suivantes.

Der gemeinsame Charakter dieser Mannigfaltigkeiten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Dehnung (ici, remarque Lie, il doit être sous entendu *beliebig*) *bewegen lassen.*

Si nous envisageons maintenant les variétés V_3, qui possèdent un groupe de mouvements G, transitif, mais à 4 paramètres seulement, la translation peut être encore choisie à volonté, mais la rotation doit s'effectuer autour d'un axe déterminé; lorsque le groupe transitif est à trois paramètres il n'est plus possible aucune rotation, tout en restant arbitraire la translation.

Remarquons en terminant que les résultats, qu'on vient d'exposer, répondent complétement, du moins pour les variétés à trois dimensions, à la question, qui a été mise à concours par la Société Jablonowski, pour l'année 1901 *).

Signalons encore cette circonstance, qu'on aurait pu dans la recherche se passer sans inconvénient de la théorie de groupes, bien qu'on ait préféré en adopter le langage pour faire mieux saisir au lecteur l'esprit des résultats et leur connexion avec ceux, qui étaient déjà connus.

Chapitre V.

Applications mécaniques.

§ 1.

Intégrales premières des équations de la dynamique — Intégrales linéaires (ordinaires et particularisées).

Considérons un système matériel à liaisons indépendantes du temps, avec n degrés de liberté. Soit

$$2T = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, x_r'\, x_s'$$

l'expression de la force vive du système. (On désigne selon l'usage par un accent les dérivées par rapport au temps t).

Les équations de Lagrange, qui définissent le mouvement du système sous l'action de forces données, sont

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x_h'}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_h} = X_h, \qquad (h = 1, 2, \cdots, n)$$

*) Voir par exemple B. 50, 1898, page 601 de ce même receuil.

où les X_k sont liées aux forces directement appliquées par des relations bien connues.

On reconnaît aisément que, lorsqu'on change les paramètres x_n, les X_k se transforment par covariance.. Introduisons aussi le système réciproque $X^{(k)}$, notre forme fondamentale étant, bien entendu,

$$2\,T dt^2 = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s.$$

En résolvant les équations de Lagrange par rapport aux dérivées secondes des coordonées, on a

$$(1)\qquad x_i'' = X^{(i)} - \sum_1^n {}_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} x_r' x_s' \text{*)};$$

c'est la forme, qui convient le mieux à notre but.

Soit maintenant f une fonction des x et des x'. Pour que

$$f = \text{const.}$$

soit une intégrale première des équations, il faut et il suffit que $\frac{df}{dt}$, c'est-à-dire

$$\sum_1^n {}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f}{\partial x_i'} x_i'' \right\}$$

s'annule identiquement, lorsqu'on remplace les x_i'' par leurs valeurs (1). La condition pourra donc s'écrire

$$(2)\quad \frac{df}{dt} = \sum_1^n {}_i \frac{\partial f}{\partial x_i'} X^{(i)} + \sum_1^n {}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i' - \frac{\partial f}{\partial x_i'} \sum_1^n {}_{rs} \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} x_r' x_s' \right\} \equiv 0.$$

Il est bien connu **) qu'à toute intégrale algébrique (à l'égard des x') du mouvement d'un système, sous l'action de forces données, correspond une intégrale homogène (toujours à l'égard des x') pour le mouvement du même système, sans forces.

C'est ainsi que l'étude de ce cas acquiert une importance toute particulière. Sous forme géométrique il correspond aux intégrales homogènes des géodésiques, car les trajectoires du mouvement en l'absence de forces ne sont autre chose que les géodésiques de la variété V_n, dont $2\,T dt^2$ est l'expression du ds^2.

*) Les $\begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix}$ sont les symboles de Christoffel de seconde espèce; voir Chap. I, § 5.

**) Voir par exemple: *Levi-Civita* «Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche», Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Vol. XXXI, 18

Appliquons donc en premier lieu la formule (2), pour exprime
qu'une forme homogène

$$f = \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} c_{r_1 r_2 \cdots r_m} x'_{r_1} x'_{r_2} \cdots x'_{r_m}$$

de degré m, égalée à une constante, donne lieu à une intégrale premièr des géodésiques. En remarqant que les coefficients de f forment un systèm covariant symétrique d'ordre m et ayant égard aux formules (20) du Chap. I, on passe immédiatement de (2) (où l'on suppose $X^{(i)} = 0$) à

$$(3) \qquad \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} c_{r_1 r_2 \cdots r_m r_{m+1}} x'_{r_1} x'_{r_2} \cdots x'_{r_m} x'_{r_{m+1}} \equiv 0.$$

Le premier système dérivé du système $c_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ s'est introduit par lui même. On peut prévoir dès à présent la simplification, que la dérivatio covariante va porter dans ce genre de recherches.

Si l'on ne suppose pas que toutes les X s'annulent à la fois, le conditions pour que $f =$ const. (f étant la forme considérée tout à l'heure) soit une intégrale du système (1) se composent de (3) et de

$$(4) \qquad \sum_1^n {}_{r_1 r_2 \cdots r_m} c_{r_1 r_2 \cdots r_m} X^{(r_1)} x'_{r_2} \cdots x'_{r_m} \equiv 0.$$

C'est ce qu'on peut déduire de (2), en remarquant que les termes d différent degré doivent s'annuler séparément et en outre que les coefficient $c_{r_1 r_2 \cdots r_m}$ sont symétriques par rapport aux m indices. De cette même remarque il suit qu'en égalant à zéro les coefficients de chaque terme en (4), on obtient

$$(4') \qquad \sum_1^n {}_{r_1} c_{r_1 r_2 \cdots r_m} X^{(r_1)} = 0. \qquad (r_2, r_3, \cdots, r_m = 1, 2, \cdots, n$$

Illustrons ces généralités, en discutant les conditions d'existence de intégrales

$$\sum_1^n {}_r c_r x_r' = \text{const.},$$

linéaires (par rapport, peut-on dire, aux composantes des vitesses. L'identité (3) devient

$$\sum_1^n {}_{rs} c_{rs} x_r' x_s' \equiv 0,$$

ou, en développant,

$$(5) \qquad c_{rs} + c_{sr} = 0. \qquad (r, s = 1, 2, \cdots,$$

S'il s'agit des géodésiques, il n'y a pas d'autres conditions; en général, on doit avoir égard aussi aux relations (4'), qui dépendent des forces appliquées. Elles se réduisent pour notre cas à

$$\sum_1^n {}_r\, c_r\, X^{(r)} = 0. \tag{6}$$

Nous avons déjà rencontré le système (5) (Chapitre précédent, § 5); il exprime que l'élément linéaire $\sqrt{2T}dt$ de la variété V_n admet la transformation infinitésimale $\sum_1^n {}_r\, c^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_r}$. Ce lien entre les intégrales linéaires des géodésiques et les mouvements sans déformation de la variété correspondante est trop bien connu pour qu'il mérite de s'y arrêter un seul moment.

En mettant le système c_r sous sa forme canonique $c_r = \varrho \lambda_r$, on obtient pour les équations (5) l'interprétation géométrique, qui a été signalée au § cité. La condition (6) prend aussi une signification bien simple; elle exprime que *la congruence canonique d'une intégrale linéaire doit être normale aux lignes de force.* Lorsque ces dernières dérivent d'un potentiel U, c'est-à-dirè, pour $X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$, on a plus simplement que la congruence canonique doit être équipotentielle.

A cause de leur importance, nous réservons aux intégrales quadratiques $\sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs}\, x_r'\, x_s' =$ const. le §, qui va suivre.

Nous voulons maintenant dire encore un mot sur les *intégrales particularisées* ou *équations invariantes.* On entend par là une équation

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ x_1', x_2', \cdots, x_n') = 0,$$

qui est satisfaite pour toute valeur de t, lorsque cela arrive pour l'instant initial. Cela veut dire que la condition $\frac{df}{dt} = 0$ doit être une conséquence des (1) et de l'équation $f = 0$ elle même. Nous sommes ainsi conduits à l'identité

$$\sum_1^n {}_i \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f}{\partial x_i'} x_i'' \right\} \equiv M f, \tag{7}$$

où les x'' s'entendent remplacées par leurs valeurs (1) et le multiplicateur M est une fonction des x et des x' indéterminée *a priori.*

Bornons-nous au cas simple, où f serait une fonction linéaires des x'. Il est alors loisible de supposer que l'équation invariante soit

$$\sum_1^n {}_r \lambda_{n/r}\, x_r' = 0,$$

$\lambda_{n/r}$ étant le système covariant d'une congruence $[n]$ de la variété V_n.

Le premier membre de (7) est le même que dans le cas des intégrales propres. On a donc

$$\sum_1^n {}_{rs} \lambda_{n/rs}\, x_r' x_s' + \sum_1^n {}_r X^{(r)} \lambda_{n/r} = M \sum_1^n {}_r \lambda_{n/r}\, x_r'.$$

Nous devons en conclure que le multiplicateur M peut être seulement de la forme $\sum_1^n {}_s \nu_s x_s'$, les coefficients ν étant encore indéterminés, mais fonctions seulement des x. L'identité se traduit dans les équations suivantes:

$$\sum_1^n {}_r X^{(r)} \lambda_{n/r} = 0, \qquad (r, s = 1, 2, \cdots, n) \tag{8}$$

$$\lambda_{n/rs} + \lambda_{n/sr} = \nu_r \lambda_{n/s} + \nu_s \lambda_{n/r}. \tag{9}$$

L'équation (8) nous dit que les lignes de force et celles de la congruence $[n]$ se coupent sous angle droit. Comme tout à l'heure, pour des forces conservatives, cela signifie que la congruence $[n]$ est équipotentielle. Pour discuter le systéme (9), on imaginera, bien entendu, associées à $[n]$, $n-1$ congruences, qui complètent l'ennuple et on posera

$$\omega_i = \sum_1^n {}_r \nu_r \lambda_i^{(r)}.$$

On tire alors des (9) les conditions équivalentes

$$\gamma_{nij} + \gamma_{nji} = \varepsilon_{jn} \omega_i + \varepsilon_{in} \omega_j, \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \tag{9'}$$

où les indéterminées ν se trouvent remplacées par les ω.

Pour $n = 2$, les (9') sont au nombre de trois. Deux servent à déterminer ω_1, ω_2; la troisième se réduit à $\gamma_{211} = 0$, ce qui veut dire que la congruence [1] est géodésique. Mais, à cause de (8), la congruence [1] est celle des lignes de force. Donc, *les problèmes à deux degrés de liberté possèdent une intégrale linéaire particularisée seulement lorsque les lignes de force sont géodésiques. Cette intégrale exprime que la vitesse et la force ont même direction.*

Il ne serait pas sans intérêt d'établir, aussi pour les problèmes à un nombre quelconque de degrés de liberté, les conditions sous lesquelles ils comportent une équation linéaire invariante.

§ 2.

Intégrales quadratiques des systèmes non soumis á forces. — Forme intrinsèque des conditions d'existence. — Hypothèse particulière, qui conduit aux forces vives de M. Stäckel.

Pour qu'un système non soumis à forces, c'est-à-dire les géodésiques de la variété V_n correspondante possèdent l'intégrale quadratique

$$\mathsf{H}_1 = \sum_1^n {}_{rs}\, c_{rs}\, x_r' x_s' = \text{const.},$$

il faut et il suffit, d'après (3), que la forme dérivée $\sum_1^n {}_{rst}\, c_{rst}\, x_r' x_s' x_t'$ soit identiquement nulle. On a ainsi les conditions

$$c_{rst} + c_{str} + c_{trs} = 0. \qquad (r, s, t = 1, 2, \cdots, n) \tag{10}$$

Pour en faire l'étude il convient naturellement d'introduire à la place des c_{rs} leurs expressions canoniques (Chap. II, § 5)

$$c_{rs} = \sum_1^n {}_h\, \varrho_h\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{h/s}, \tag{11}$$

où les ϱ_h désignent, comme on sait, les racines de l'équation

$$\| c_{rs} - \varrho\, a_{rs} \| = 0.$$

On trouve ainsi

$$\text{I)} \qquad (\varrho_h - \varrho_i)\, \gamma_{hij} + (\varrho_i - \varrho_j)\, \gamma_{ijh} + (\varrho_j - \varrho_h)\, \gamma_{jhi} = 0, \qquad (h, i, j = 1, 2, \cdots, n;\ h \neq i \neq j)$$

$$\text{II)} \qquad \frac{\partial \varrho_h}{\partial s_i} = 2\,(\varrho_h - \varrho_i)\, \gamma_{ihh}, \qquad (h, i = 1, 2, \cdots, n)$$

ce qui donne une forme intrinsèque à la question de déterminer tous les types de forces vives, dont les géodésique admettent au moins une intégrale quadratique. Pour obtenir ces types, il faut remonter de I), II) aux expressions des éléments linéaires des variétés V_n, où l'on peut avoir une ennuple de congruences caractérisées par lesdites équations. Les ϱ y figurent comme des indéterminées auxiliaires. En les supposant toutes égales entre elles, les équations I) sont satisfaites identiquement et les II) deviennent $\frac{\partial \varrho_h}{\partial s_i} = 0$, ce qui montre que la valeur commune des ϱ doit être constante. Les invariants γ ne restent aucunement liés par cette hypothèse. Il existe donc, indépendamment de l'ennuple et par conséquent pour toute variété V_n, une intégrale quadratique.

On devait s'y attendre; c'est l'intégrale des forces vives. On tire en effet de (11), en y faisant $\rho_h = C$, $c_{rs} = C \sum_1^n{}_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s} = C a_{rs}$ et l'intégrale $\mathsf{H}_1 =$ const. n'est autre chose que $\sum_1^n{}_{rs} a_{rs} x_r' x_s' =$ const.

A l'instar de ce cas bien évident, il parait convenable, pour la recherche des solutions du système I), II), de distinguer les divers cas, qui peuvent se présenter à l'égard des ρ. On aura donc à considérer séparément le cas, où toutes les ρ sont distinctes, celui où il y en a seulement $n - 1$, etc. en ayant soin de distinguer encore pour chaque cas les divers groupements des coïncidences possibles.

Une telle étude n'a pas encore été abordée, en général. Il serait du plus haut intérêt que la question fût épuisée, mais, à présent elle parait encore assez ardue.

On possède des solutions particulières de notre système. Elles correspondent aux forces vives découvertes par M. Stäckel*) (qui comprennent en particulier les exemples classiques de Hamilton et de Liouville). On les retrouve aisément à partir de I), II) en faisant l'hypothèse particulière que les congruences de l'ennuple de référence soient normales**).

Vu la grande généralité de cette classe de forces vives, on pourrait être tenté de croire qu'elles comprennent toutes les solutions du système I), II). Il en est ainsi évidemment pour $n = 2$ (toute congruence pouvant dans ce cas être regardée comme normale), mais, dès qu'on passe à un plus grand nombre de variables, on reconnait aisément l'existence de types nouveaux de solutions***). La véritable difficulté consiste à les former tous. Le premier pas à faire, dans cette voie, devrait être l'intégration du système I), II) dans le cas le plus proche à celui, où

*) Voir dans les Comptes Rendus deux notes remarquables de cet auteur (9 Mars 1893 et 7 Octobre 1895). A consulter aussi:

Di Pirro «Sugli integrali primi quadratici delle equazioni della meccanica» Annali di Matematica, Ser. IIa, T. XXIV, 1896;

Stäckel «Ueber die quadratischen Integrale der Differentialgleichungen der Dynamik», ibidem, T. XXV, 1897;

Painlevé «Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique» Comptes Rendus, 1er Février 1897.

**) Pour être exact, il faut avertir que l'on suppose d'avance la normalité de toutes les congruences de l'ennuple seulement dans le cas, où toutes les ρ seraient distinctes. Lorsqu'il y en a quelques unes, qui coïncident, l'hypothèse est un peu moins restrictive. Cfr.

Levi-Civita «Sur les intégrales quadratiques des équations de la mécanique» Comptes Rendus, 22 Février 1897.

***) *Levi-Civita* «Sur une classe de ds^2 à trois variables», Comptes Rendus 21 Juin 1897.

toutes les ϱ coïncident et l'intégration se fait à première vue. C'est le cas, où deux seulement des ϱ sont distinctes.

Nous signalons au lecteur cette recherche, qui — toute réduction faite — se présente sous un aspect assez simple.

§ 3.

Surfaces, dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique (surfaces de Liouville). — Classification de ces surfaces d'après le nombre des intégrales distinctes*).

Pour $n = 2$ les équations I), considérées tout à l'heure, font défaut et il reste seulement l'autre groupe, qui devient

$$\text{II}')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial s_1} = \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial s_2} = 0, \\ \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial s_2} = 2(\varrho_1 - \varrho_2)\gamma_{211}, \qquad \dfrac{\partial \varrho_2}{\partial s_1} = 2(\varrho_2 - \varrho_1)\gamma_{122}. \end{cases}$$

De celles-ci, en supposant $\varrho_1 \neq \varrho_2$, on tire les conditions d'intégrabilité

$$\text{III})\qquad \frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} = \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = -3\gamma_{211}\gamma_{122}.$$

Chaque couple [1], [2], pour lequel la condition III) soit vérifiée, donne une intégrale quadratique $H_1 = \text{const.}$ (distincte de celle des forces vives) des équations des géodésiques de la surface. Désignons par ϑ l'angle, que les lignes 2 forment avec les lignes d'une congruence géodésique quelconque. On peut aisément reconnaître que l'intégrale $H_1 = \text{const.}$ équivaut à la propriété géométrique suivante: On a tout le long d'une même géodésique

$$\varrho_1 \sin^2\vartheta + \varrho_2 \cos^2\vartheta = \text{const.}$$

On tire des equations III)

$$\frac{\partial \gamma_{211}}{\partial s_1} - \frac{\partial \gamma_{122}}{\partial s_2} = 0,$$

ce qui exprime (Chap. IV, § 1) que le couple [1], [2] appartient à un faisceau isotherme.

Des II') il suit sans difficulté qu'en prenant les lignes du couple [1], [2] comme coordonnées, on peut, par un choix convenable de leurs paramètres u, v, attribuer à la forme fondamentale l'expression

$$\varphi = (\varrho_2 - \varrho_1)(du^2 + dv^2).$$

---

*) *Ricci* «Sulla teoria delle linee geodetiche e dei sistemi isotermi di Liouville», Atti dell' Istituto Veneto, 1894; «Lezioni, etc.», Première partie, Chap. VI, VII.

Comme les II') nous disent encore que ϱ_1 et ϱ_2 ne dépendent que de u et v respectivement, nous avons bien pour φ une forme de Liouville. On remarquera d'autre côté qu' à toute forme de Liouville correspond un couple [1], [2] (les congruences formées par les lignes coordonnées), qui satisfait aux conditions III). Donc, pour que les géodésiques d'une surface possèdent une intégrale première quadratique, il faut et il suffit que l'élément linéaire de la surface soit réductible à la forme de Liouville.

Maintenant se pose d'elle même la question: Reconnaître si un élément linéaire, donné à l'avance, peut être réduit à la forme de Liouville et en combien de manières essentiellement différentes; déterminer ces formes réduites, lorsqu'elles existent. La recherche équivaut naturellement à celle du nombre et des expressions des intégrales quadratiques distinctes, qui appartiennent aux géodésiques d'une forme binaire donnée.

Voici les résultats de la recherche sous la première forme:

1°. *Les surfaces à courbure constante seules possèdent* ∞^4 *systèmes isothermes de Liouville* (On désigne ainsi, pour abréger, tout couple [1], [2], qui satisfait aux conditions III)).

2°. *Les surfaces à courbure variable admettent tout au plus* ∞^1 *systèmes isothermes de Liouville. Il y a effectivement une classe de surfaces, qui jouissent de cette propriété. Ce sont les surfaces applicables sur des surfaces de révolution et ayant en outre les lignes de courbure parallèles.*

3°. *Il existe des surfaces douées de* ∞^1 *systèmes de Liouville, et d'autres encore, qui en possèdent un seul.*

M. Koenigs dans un mémoire, couronné par l'Académie des Sciences de Paris*), s'est occupé d'une question intimement liée à celle, qui vient d'être exposée, mais non identique. Il s'est proposé en effet d'assigner tous les types d'éléments linéaires, qui admettent *au moins deux* systèmes de Liouville. Par cette voie on peut établir aussi quelques uns des résultats précédents (ceux qui se rapportent au nombre de systèmes de Liouville possibles). M. Koenigs les avait énoncés en même temps que M. Ricci.

§ 4.

Transformations des équations de la dynamique.

Le problème (à une transformation de formes différentielles quadratiques près) se pose, d'après M. Painlevé**), sous la forme suivante:

*) «Mémoire sur les lignes géodésiques», Mémoires des Savants Étrangers, T. XXXI, 1894.

**) «Sur la transformation des équations de la dynamique», Journal de Liouville, Cinquième Série, tom. X, 1894.

Etant donné un système dynamique (A), *dont les forces ne dépendent* *is des vitesses, reconnaître s'il admet des systèmes correspondants* (A_1) *et,* *ans le cas affirmatif, les déterminer tous.*

On nomme correspondants d'un système (A) tous les systèmes (A_1), ont les forces ne dépendent pas non plus des vitesses et qui ont les êmes trajectoires de (A).

A l'égard des systèmes correspondants on démontre tout d'abord que, i les forces sont nulles pour un système, le même doit arriver pour ses orrespondants. Dans cette hypothèse le problème de la transformation evêt l'aspect géométrique que voici:

Déterminer toutes les variétés V_n, qui peuvent être représentées sur une ariété donnée avec conservation des géodésiques, c'est-à-dire de telle sorte qu'à ute géodésique de V_n corresponde dans la représentation encore une géodésique.

Cette question a été étudiée par M. R. Liouville dans son mémoire Sur les équations de la dynamique» *). Il a établi des résultats généraux ien remarquables, sans donner toutefois une réponse définitive à la uestion. Peut être n'aurait-elle été possible sans le secours du calcul ifférentiel absolu. Nous allons donner une idée de la marche, qui a été uivie dans la résolution du problème par cette méthode **).

Soit

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s,$$

expression du ds^2 d'une variété V_n donnée,

$$\psi = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

a même expression pour une quelconque des variétés représentables sur V_n vec conservation des géodésiques. On fixe en premier lieu les équations, uxquelles doivent satisfaire les α_{rs}. Elles sont

$$2\mu\alpha_{rst} + 2\mu_t\alpha_{rs} + \mu_s\alpha_{rt} + \mu_r\alpha_{st} = 0,$$

ù μ est une inconnue auxiliaire et l'on regarde, bien entendu, φ comme rme fondamentale (μ_r et α_{rst} désignant les systèmes dérivées selon φ e μ et du système α_{rs}).

Appelons a et α les discriminants de φ et ψ et posons

$$A_{rs} = \mu^2\alpha_{rs}.$$

---

*) Acta Mathematica, T. 19, 1895.

**) *Levi-Civita* «Sulle trasformazioni delle equazioni dinamiche», Annali di tematica, Ser. II, T. XXIV, 1896.

Des équations précédentes on tire aisément

$$\mu = C\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

(C étant une constante) et

$$A_{rst} + A_{str} + A_{trs} = 0,$$

qui nous disent (§ 2) que

$$\sum_1^n {}_{rs} A_{rs} x_r' x_s' = \text{const.}$$

est une intégrale quadratiques pour les géodésiques de V_n. Substituons maintenant aux α_{rs} leurs expressions canoniques

$$\alpha_{rs} = \sum_1^n {}_h \rho_h \lambda_{h/r} \lambda_{h/s}.$$

Les équations de condition se transforment dans les suivantes

$$\text{E)} \quad \begin{cases} \text{a)} \quad (\rho_h - \rho_i)\gamma_{hij} = 0, \quad (h \neq i \neq j) \\ \text{b)} \quad 2(\rho_i - \rho_j)\gamma_{iji} = \dfrac{\partial \rho_i}{\partial s_j}, \quad (i \neq j) \\ \text{c)} \quad \dfrac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial s_j} = 0, \quad (i \neq j) \\ \text{d)} \quad \dfrac{\partial(\mu\rho_i)}{\partial s_i} + \rho_i \dfrac{\partial \mu}{\partial s_i} = 0. \end{cases} \qquad (h, i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

La forme de ce système nous prévient que le nombre et aussi la nature des équations, qui le composent, dépendent du nombre des racines distinctes de l'équation $\|\alpha_{rs} - \rho a_{rs}\| = 0$ et de leurs ordres de multiplicité.

Supposons d'abord que toutes les ρ soient distinctes. L'ennuple de référence reste dans ce cas complètement déterminé et, à cause des équations a), les coefficients de rotation à trois indices distincts doivent tous s'annuler.

Il s'en suit (Chap. II, § 3) que toutes les congruences de l'ennuple sont normales, et on est naturellement amené à prendre les correspondantes variétés orthogonales comme coordonnées. Avec un tel système coordonné, l'expression du ds^2 de V_n doit être de la forme

$$\varphi = \sum_1^n {}_i \mathsf{H}_i^2 dx_i^2,$$

les équations a) se réduisent à des identités et les b), c), d) deviennent respectivement:

$$\text{b}_1)\qquad 2(\varrho_i - \varrho_j)\frac{\partial \log \mathrm{H}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varrho_i}{\partial x_j} = 0, \qquad (i \neq j)$$

$$\text{c}_1)\qquad \frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_j} = 0, \qquad (i \neq j) \qquad\qquad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

$$\text{d}_1)\qquad \frac{\partial(\mu\varrho_i)}{\partial x_i} + \varrho_i\frac{\partial \mu}{\partial x_i} = 0.$$

L'intégration de ce système est aisée. On est conduit au résultat suivant:

Désignons par $\psi_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ une fonction quelconque de la seule variable x_i, par C et c deux constantes arbitraires. *Tout élément linéaire, ayant une expression de la forme*

$$\Gamma)\qquad ds^2 = \sum_1^n{}_i \left(\prod_1^n{}_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2$$

admet les correspondants

$$ds_1^2 = \frac{C}{(\psi_1 + c)(\psi_2 + c)\cdots(\psi_n + c)} \sum_1^n{}_i \frac{1}{\psi_i + c}\left(\prod_1^n{}_j |\psi_j - \psi_i|\right) dx_i^2$$

et ceux-ci seulement. (Dans les factoriels $\prod_1^n{}_j$ on doit exclure le facteur, où l'indice j prendrait la valeur i).

Passons maintenant à l'autre cas extrème, où toutes les ϱ seraient égales. Les a) sont satisfaites identiquement, et les autres équations exigent seulement que μ et la valeur commune C des ϱ soient constantes. Les expressions canoniques des α_{rs} sont $\alpha_{rs} = Ca_{rs}$, d'où il suit que la forme ψ n'est que la φ elle même, multipliée par une constante. Il était évident à priori que toute forme φ admet de tels correspondants. M. Painlevé les a appelé*) pour cela correspondants ordinaires. Ce sont seulement les correspondants non-ordinaires, qui peuvent nous intéresser.

Il est bien clair qu'en dehors de ce cas les autres hypothèses possibles à l'égard des ϱ aboutissent à des correspondants non-ordinaires. Chacune de ces hypothèses conduit à des types bien déterminés, qu'on calcule sans difficulté en intégrant les équations E), qui leurs appartiennent. Comme il est arrivé pour le premier type, l'interprétation géométrique met au jour le choix des variables, qui se prêtent mieux à l'intégration du système.

---

*) Loco cit.

En revenant pour un moment encore sur ce premier cas, il est bon de remarquer que l'intégrale quadratique, dont il a été en général prouvé l'existence, prend la forme

$$\sum_1^n{}^i (\psi_1+c)\cdots(\psi_{i-1}+c)(\psi_{i+1}+c)\cdots(\psi_n+c)\left(\prod_1^n{}^j |\psi_j-\psi_i|\right) x_i'^2 = \text{const.},$$

avec la même remarque que tout à l'heure à l'égard du factoriel.

Comme la valeur du premier membre doit être constante *quelle que soit* c, chacun des coefficients des différentes puissances de c nous donne séparément une intégrale quadratique. Elles sont ici au nombre de n (y compris celle des forces vives) toutes distinctes.

En général leur nombre est égal à celui des ϱ distinctes.

Ainsi qu'il a été fait (§ 3) pour $n=2$, ce ne serait pas sans importance d'établir, du moins pour $n=3$, les caractères invariantifs des variétés, dont l'expression de l'élément linéaire est réductible au type T) (*forme généralisée de Liouville*).

Plus généralement, il ne faut pas oublier que le problème de la transformation, tel qu'il a été énoncé au début de ce §, c'est-à-dire pour des forces non nulles, attend encore d'être résolu. M. Painlevé y a apporté des contributions très-intéressantes, qui épuisent même la question pour $n=2$ *).

Sera-t-il reservé au calcul différentiel absolu d'aller jusqu' au fond? Pour le moment nous ne pouvons qu'en exprimer l'espoir.

Du reste, dans cet ordre de questions, on a ouvert devant soi un très vaste champ de recherche.

Il suffit d'étendre avec M. Stäckel **) l'énoncé du problème de la transformation, en exigeant, non plus que deux systèmes dynamiques (A), (A_1) aient toutes les trajectoires en commun, mais une partie seulement, c'est-à-dire un ensemble de trajectoires, dépendant d'un certain nombre $k\,(<2n-1)$ de paramètres.

Dans un article, qui paraîtra prochainement, M. Malipiero envisage sous ce point de vue le cas des géodésiques, en présentant quelques remarques non dépourvues d'intérêt.

---

*) «Sur les transformations des équations de la dynamique», Comptes Rendus, 24 Août 1896. Voir aussi deux notes de *M. Viterbi* «Sulla trasformazione delle equazioni della dinamica a due variabili», Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 4 e 18 Febbraio 1900.

**) «Ueber Transformationen von Bewegungen», Göttinger Nachrichten, 1898.

Chapitre VI.

Applications physiques.

§ 1.

Cas de reductibilité à deux variables de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

(Potentiels binaires).

Si, dans l'équation de Laplace en coordonnées cartésiennes

$$\underset{2}{\Delta} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

on suppose la fonction u indépendante de z, il reste

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

qui définit une classe très étendue de potentiels, gardant la même valeur le long des droites parallèles à l'axe des z (potentiels logarithmiques, d'après M. C. Neumann).

De même, en prenant l'équation de Laplace en coordonnées polaires ρ, ϑ, φ, on peut supposer u indépendant de φ sans limiter davantage la généralité des solution. En effet, lorsqu'on pose $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$ dans

$$\frac{1}{\rho^2 \operatorname{sen} \vartheta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right\} = 0$$

il ne reste plus aucune trace de φ dans les coefficients. On obtient de la sorte une classe très importante d'intégrales de $\underset{2}{\Delta} u = 0$, les potentiels symétriques, qui sont bien connus d'après les recherches de Beltrami*). Ils restent constants sur les cercles $\rho =$ const., $\vartheta =$ const.

On peut encore dans l'équation ci-dessus supposer u indépendant de ρ. Les potentiels correspondants

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\operatorname{sen} \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

(aussi généraux, bien que moins importants de ceux, qui précèdent) ont pour lignes équipotentielles les droites issues de l'origine.

Il n'est pas permis de procéder d'une façon analogue à l'égard de ϑ, car, en supposant u indépendant de ϑ, on doit avoir séparément

*) Voir par exemple le mémoire «Sulla teoria delle funzioni potenziali simmetriche», Memorie della Accademia di Bologna, Ser. IV, T. II, 1881.

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^2 \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0,$$

et les intégrales de ce système simultané (c'est-à-dire

$$u = \left(c_1 + \frac{c_2}{\varrho}\right)\varphi + \left(c_3 + \frac{c_4}{\varrho}\right),$$

les c désignant des constantes) n'ont pas la même généralité que tout à l'heure.

Ces remarques nous conduisent à poser avec M. Volterra *) la question suivante:

Soit l'équation $\underset{2}{\Delta} u = 0$, transformée en coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3. En général, lorsqu'on posera $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ dans le premier membre, on ne pourra pas débarasser l'équation réduite de la variable x_3 (ou, si l'on veut, les deux équations $\underset{2}{\Delta} u = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ ne formeront pas un système complet). Il y a des cas (nous en avons rencontré des exemples bien simples) où une pareille circonstance se présente. *Il faut les déterminer tous.*

A chacun d'eux correspond une classe de potentiels, qui dépendent de deux coordonnées (*potentiels binaires*). Ils donnent lieu dans les applications aux mêmes simplifications que les potentiels logarithmiques et symétriques: M. Volterra, dans le mémoire cité, a fait cette étude en général.

Il restait à établir si, outre les types connus, il y en avait d'autres et lesquels.

C'est exactement la même question, qu'a été résolue par Riemann **), à l'égard de l'équation de propagation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \underset{2}{\Delta} u = 0 \quad (k \text{ étant une constante}).$$

Mais on ne pouvait songer à adopter la méthode de Riemann, à cause de l'extrême complication des formules. Il fallait ouvrir une brèche, pour se débarasser des matériaux encombrants.

C'est encore le calcul différentiel absolu qui en a fourni les moyens. Bornons-nous à faire saisir les résultats de la recherche ***).

Remarquons pour cela que une classe de potentiels binaires est caractérisée essentiellement par sa *congruence equipotentielle*, c'est-à-dire par la congruence

*) «Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale», Annali della Scuola Normale di Pisa, 1883.

**) «Commentatio mathematica, qua etc.», Ges. Werke, pag. 370.

***) *Levi-Civita* «Tipi di potenziali, che si possono far dipendere da due sole coordinate», Memorie della Accademia di Torino, Ser. II, T. XLIX, 1899.

$$x_1 = \text{const.}, \qquad x_2 = \text{const.},$$

formée par les lignes, le long desquelles tous les individus de la classe gardent une valeur constante. En effet, lorsqu'on connait cette congruence, il suffit d'associer aux familles $x_1(x, y, z) = \text{const.}$, $x_2(x, y, z) = \text{const.}$ une troisième famille indépendante quelconque $x_3(x, y, z) = \text{const.}$ L'équation, qui définit les potentiels corréspondants, s'obtient en transformant $\underset{1}{\Delta} u = 0$ en coordonnées x_1, x_2, x_3 et en y faisant $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$. (L'hypothèse qu'une congruence soit équipotentielle équivaut précisément à ce qu'on peut faire $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ dans $\underset{2}{\Delta} u = 0$, sans être gêné par x_3).

Le problème revient ainsi à déterminer toutes les congruences équipotentielles de notre espace.

Ces congruences (supposées réelles) se partagent dans les quatre catégories, que voici:

1°. Congruences rectilignes isotropes (d'après Ribaucour *);

2°. Congruence des cercles ayant même axe;

3°. Congruences de hélices;

4°. Congruences de spirales.

On en tire une classification correspondante pour les potentiels binaires. Ils sont *isotropes*, *symétriques*, *hélicoïdes*, *ou spirales*.

§ 2.

Des champs vectoriels **).

On a dans un domaine de l'éspace un *champ vectoriel*, lorsque à chaque point P du domaine correspond un vecteur (R) ayant l'origine en P.

Soient y_1, y_2, y_3 les coordonnées cartésiennes de P, Y_1, Y_2, Y_3 les composantes de (R) suivant les axes coordonnés. La loi de correspondance entre les points et les vecteurs du champ s'exprime par ce fait que les composantes Y_1, Y_2, Y_3 de (R) sont des fonctions des coordonnées y_1, y_2, y_3 de son point d'application. On suppose bien entendu qu'il s'agit de fonctions continues et douées de toutes les dérivées, qu'il nous faudra considérer.

---

*) Voir *Bianchi* «Lezioni di geometria differenziale», Chap. X; ou bien encore *Levi-Civita* «Sulle congruenze di curve», Rendiconti della Accademia dei Lincei, 5 Marzo 1899.

**) Pour les généralités sur les champs vectoriels, au point de vue, que nous envisageons ici, on consultera avec profit (outre le traité bien connu de Tait) le mémoire posthume du regretté *Ferraris* «Teoria geometrica dei campi vettoriali», Memorie dell' Accademia di Torino, T. XLVII, 1897 et un mémoire recent de M. *Donati* «Sulle proprietà caratteristiche dei campi vettoriali», Memorie dell' Accademia di Bologna, Ser. V, T. VII, 1898.

Lorsqu'on a affaire à un champ vectoriel, la quantité scalaire

$$\Theta = \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial Y_2}{\partial y_2} + \frac{\partial Y_3}{\partial y_3} \tag{1}$$

s'introduit naturellement.

On l'appelle *divergence* du champ au point P,

$$\Theta = \mathrm{Div}\,(R).$$

Elle joue presque toujours un rôle important dans les questions physiques. Ainsi par exemple, si le vecteur (R) représente le deplacement du point P dans une déformation élastique, Θ c'est la dilatation cubique de la particule, qui environne le même point. Plus généralement, lorsque (R) est un flux d'une nature quelconque, la condensation au point P est mésurée par Θ.

Si les composantes Y_r sont les dérivées d'une même fonction U (auquel cas nous dirons que la distribution vectorielle considérée est *potentielle*) il resulte évidemment

$$\Theta = \Delta_2 U. \tag{1'}$$

Il y a encore un vecteur très-intimement lié au champ, le *tourbillon* $2(\omega)$ (*curl* des anglais) de (R). Ses composantes $2\nu_1$, $2\nu_2$, $2\nu_3$ sont données par les formules suivantes:

$$\begin{cases} 2\nu_1 = \dfrac{\partial Y_3}{\partial y_2} - \dfrac{\partial Y_2}{\partial y_3}, \\ 2\nu_2 = \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_3} - \dfrac{\partial Y_3}{\partial y_1}, \\ 2\nu_3 = \dfrac{\partial Y_2}{\partial y_1} - \dfrac{\partial Y_1}{\partial y_2}. \end{cases} \tag{2}$$

Quant à l'interprétation physique, envisageons, par exemple, l'image hydrodynamique. Soit (R) la vitesse d'un fluide en mouvement, la rotation des particules est définie par le vecteur (ω). Il est identiquement nul pour les distributions potentielles.

Supposons maintenant que l'espace soit rapporté à des coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3.

La question de représenter un champ vectoriel et ses éléments se pose d'elle même.*)

On peut définir très facilement le champ par un système simple covariant X_r, dont les éléments se réduisent en coordonnées cartesiennes

---

*) M. *Abraham* dans un article recent, paru dans ce même recueil (B. 52, 1899, pag. 81) s'est occupé aussi de la représentation des champs vectoriels en coordonnées curvilignes. Il se borne toutefois aux coordonnées orthogonales, en employant pour la déduction des formules les méthodes ordinaires.

ux composantes de (R). Nous savons déjà (Chap, I, § 4) comment s'expriment, par les X_r, composantes et projections de (R) selon les lignes coordonnées. Mais, pour obtenir Θ et (ω), il est inutile de passer par l'intermédiaire de ces projections (et de transformations d'intégrales), comme on le fait habituellement. Les principes du calcul différentiel absolu permettent d'y parvenir sur le champ.*)

Il suffit en effet de poser

$$\Theta = \sum_1^3{}_{rs}\, a^{(rs)} X_{rs}, \tag{3}$$

$$2\mu^{(r)} = -\sum_1^3{}_{st}\, \varepsilon^{(rst)} X_{st}\ ^{**)} \qquad (r = 1, 2, 3). \tag{4}$$

On le démontre en remarquant que Θ est un invariant et que sa valeur en coordonnées cartesiennes y_1, y_2, y_3 $\left(a_{rs} = \varepsilon_{rs},\ X_{rs} = \frac{\partial Y_r}{\partial y_s}\right)$ se réduit précisément a (1). Pour les ditributions potentielles $\left(X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r} = U_r\right)$, il résulte $\Theta = \sum_1^3{}_{rs}\, a^{(rs)} U_{rs}$, ce qui est bien la forme générale du paramètre $\underset{2}{\Delta} U$. On devait évidemment s'y attendre d'après (1′).

De même le vecteur, défini par le système contrevariant $\mu^{(r)}$ (ou son réciproque μ_r) est bien (ω), car les éléments $\mu^{(r)}$, pour des coordonnées cartésiennes, ne sont pas autre chose que les ν_1, ν_2, ν_3 des formules (2). Comparez aussi Chap. IV, § 9).

Nous avons déjà remarqué (Chap. III, § 2) qu'on peut donner aux expressions (3) et (4) la forme

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^3{}_r \frac{\partial(\sqrt{a}\, X^{(r)})}{\partial x_r}, \tag{3′}$$

$$2\mu^{(r)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}} - \frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\} \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{4′}$$

où l'on doit, bien entendu, regarder comme identiques les valeurs de r,

*) La même méthode conduit aussi à traduire presque immédiatement en coordonnées quelconques certaines relations intégrales. C'est le cas par exemple des formules bien connues de Green et de Stokes. Voir, quant à cette dernière: *Ricci* «Del teorema di Stokes in uno spazio qualunque a tre dimensioni e in coordinate generali», Atti dell' Istituto Veneto, 1897.

**) Pour la définition des symboles, voyez Chap. I, § 5.

qui diffèrent entre eux d'un multiple de 3). Ces expressions sont parfois avantageuses pour les calculs.

Dans la théorie de l'élasticité et surtout en électrodynamique on rencontre un vecteur (Ω), lié au vecteur fondamental du champ par la relation

$$(\Omega) = -\text{Curl Curl}\,(R) = -2\,\text{Curl}\,(\omega).$$

Il serait bien aisé d'en calculer le système contrevariant $\mathsf{M}^{(r)}$ par la réitération de la formule (4), mais il est encore plus simple de se rapporter pour un moment à des coordonnées cartésiennes. Les éléments $\mathsf{N}^{(r)} = \mathsf{N}_r$ du système en question (composantes du vecteur (Ω)) sont, d'après (2)

$$\mathsf{N}_r = 2\left\{\frac{\partial v_{r+1}}{\partial y_{r+2}} - \frac{\partial v_{r+2}}{\partial y_{r+1}}\right\} = \frac{\partial}{\partial y_{r+2}}\left\{\frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+2}} - \frac{\partial Y_{r+2}}{\partial y_r}\right\} - \frac{\partial}{\partial y_{r+1}}\left\{\frac{\partial Y_{r+1}}{\partial y_r} - \frac{\partial Y_r}{\partial y_{r+1}}\right\},$$

ce qui peut s'écrire

$$\mathsf{N}_r = \sum_1^3{}_p \frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2} - \frac{\partial}{\partial y_r}\sum_1^3{}_p \frac{\partial Y_p}{\partial y_p} = \sum_1^3{}_p \frac{\partial^2 Y_r}{\partial y_p^2} - \frac{\partial \Theta}{\partial y_r}. \tag{5}$$

Si maintenant on pose

$$\mathsf{M}_r = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)} X_{rpq} - \frac{\partial \Theta}{\partial x_r}, \tag{5'}$$

on voit tout de suite que les M_r, pour des coordonnées cartésiennes, sont identiques aux N_r. Le système (5′) est bien covariant; c'est donc le système cherché.

§ 3.

Exemples divers. — Équations en condonnées générales de l'électrodynamique, de la théorie de la chaleur et de l'élasticité.

Électrodynamique. Dans un champ électromagnétique, représentons par deux vecteurs (F_e), (F_m) les forces électrique et magnétique correspondant à chaque point P du champ.

Ces forces sont en général variables avec le temps. Nous désignerons, comme d'habitude, par $\frac{\partial (F_e)}{\partial t}$ le vecteur, dont les composantes sont les dérivées des composantes de (F_e), par rapport au temps t, de même pour (F_m).

Cela posé, les équations indéfinies pour un diélectrique homogène, isotrope, en repos s'écrivent d'après Hertz:

$$(6)\qquad A\mu\frac{\partial(F_m)}{\partial t}=\mathrm{Curl}\,(F_e),$$

$$(7)\qquad A\varepsilon\frac{\partial(F_e)}{\partial t}=-\mathrm{Curl}\,(F_m),$$

A, μ, ε étant des constantes.

Nous pouvons les traduire en forme explicite, tout en adoptant des coordonnées curvilignes quelconques x_1, x_2, x_3. Il suffit d'avoir recours aux formules du § précédent. Introduisons pour cela les systèmes covariants X_r et L_r des deux vecteurs (F_e), (F_m). Les équations (6) et (7) développées deviennent

$$(6')\qquad A\mu\frac{\partial L_r}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial X_{r+2}}{\partial x_{r+1}}-\frac{\partial X_{r+1}}{\partial x_{r+2}}\right\},$$

$$(7')\qquad A\varepsilon\frac{\partial X_r}{\partial t}=\frac{1}{\sqrt{a}}\left\{\frac{\partial L_{r+1}}{\partial x_{r+2}}-\frac{\partial L_{r+2}}{\partial x_{r+1}}\right\}.$$

Il peut être utile (pour l'étude des vibrations, par exemple) d'avoir séparément les lois de variation de chacun des deux vecteurs (F_e), (F_m). C'est ce qu'on peut déduire par la combinaison des équations (6) et (7), en éliminant successivement (F_e) et (F_m). On trouve de la sorte

$$A^2\mu\varepsilon\frac{\partial^2(F_m)}{\partial t^2}=A\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Curl}\,(F_e)=A\varepsilon\,\mathrm{Curl}\,\frac{\partial(F_e)}{\partial t}=-\mathrm{Curl\,Curl}\,(F_m);$$

de même

$$A^2\mu\varepsilon\frac{\partial^2(F_e)}{\partial t^2}=-\mathrm{Curl\,Curl}\,(F_e),$$

En posant

$$\Theta_e=\mathrm{Div}\,(F_e),$$
$$\Theta_m=\mathrm{Div}\,(F_m),$$

les formules (5′) nous conduisent aux relations suivantes:

$$(6'')\qquad A^2\mu\varepsilon\frac{\partial^2 L_r}{\partial t^2}=\sum_1^3{}_{pq}\,a^{(pq)}L_{rpq}-\frac{\partial\Theta_m}{\partial x_r},$$

$$(7'')\qquad A^2\mu\varepsilon\frac{\partial^2 X_r}{\partial t^2}=\sum_1^3{}_{pq}\,a^{(pq)}X_{rpq}-\frac{\partial\Theta_e}{\partial x_r}.$$

Pour l'éther on a en particulier

$$\begin{cases}\mu=\varepsilon=1,\\ \Theta_m=\Theta_e=0.\end{cases}$$

On devrait maintenant traduire en coordonnées générales les conditions aux limites, puis, en introduisant les polarisations et le courant, considérer les cas des diélectriques isotropes et des conducteurs.

De même il serait intéressant de présenter quelques applicatio formules générales, que nous venons d'établir. Mais cela nous entra trop loin. Ici nous devons nous borner à de simples indications saires pour orienter le lecteur.

Chaleur. Le mouvement de la chaleur dans les corps condu lorsqu'on néglige à la fois les phénomènes d'absorption et le mécanique, est régi par l'équation

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{Div}\,(\mathfrak{F})\,; \tag{8}$$

C et ϱ représentent respectivement la chaleur spécifique et la densité température, $(\mathfrak{F})$ le flux de la chaleur, qui correspondent au point en dans le conducteur à l'instant t.

Le vecteur $(\mathfrak{F})$ est défini dans les corps isotropes par ce fait composante suivant une direction quelconque est proportionnelle dérivée de la température T dans la même direction. On aura do introduisant des coordonnées cartésiennes y_1, y_2, y_3 et les relatives posantes Y_1, Y_2, Y_3 de $(\mathfrak{F})$,

$$Y_r = c\,\frac{\partial T}{\partial y_r}, \qquad (r = \tag{9}$$

où le facteur c peut dépendre des coordonnées y_1, y_2, y_3.

Passons maintenant à des coordonnées quelconques. On aura pour le système covariant X_r de $(\mathfrak{F})$

$$X_r = c\,\frac{\partial T}{\partial x_r} = c\,T_r,$$

par conséquent, en nous servant de (3'),

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{Div}\,(\mathfrak{F}) = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_1^3{}_r \frac{\partial}{\partial x_r}\left(c\sqrt{a}\,\frac{\partial T}{\partial x_r}\right). \tag{8'}$$

Lorsque c est constant, on a

$$C\varrho\,\frac{\partial T}{\partial t} = c\,\underset{2}{\Delta}\,T.$$

C'est un résultat bien connu.

Considérons plus généralement le cas d'un conducteur quelc Les relations (9), entre les composantes du flux et les dérivées température, doivent être remplacées par les suivantes:

$$Y^{(r)} = \sum_1^3{}_p\, c^{(rp)}\,\frac{\partial T}{\partial y_p}, \tag{9'}$$

à les $c^{(rp)} = c^{(pr)}$ (*coefficients de conductivité*) peuvent être des fonctions elconques des y.

Ici encore il est bien aisé de traduire l'équation (8) en coordonnées énérales. Définissons en effet un système contrevariant double $c^{(rp)}$ par condition que ses éléments se réduisent précisément aux coefficients de nductivité pour les variables y.

Le système contrevariant de $(\mathfrak{F})$ pourra se représenter par

$$X^{(r)} = \sum_1^s {}_p\, c^{(pr)} T_p .$$

a raison en est toujours la même; c'est-à-dire le système est contreriant et coïncide avec $Y^{(r)} = Y_r$ pour les coordonnées y).

Prenons maintenant Div $(\mathfrak{F})$ sous la forme (3') et nous aurons

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_1^s {}_r \frac{\partial}{\partial x_r} \left\{ \sqrt{a} \sum_1^s {}_p\, c^{(pr)} \frac{\partial T}{\partial x_p} \right\}, \qquad ")$$

i est l'expression developpée de (8) dans le cas le plus général.

Lorsqu'on suppose le conducteur homogène, les coefficients de conctivité sont des constantes, mais il n'en est pas ainsi en général des $^{r)}$ se rapportant à des coordonnées quelconque; par conséquent on ne ut pas les faire sortir du signe de dérivation dans le second membre (8''). Il convient plutôt de revenir à l'expression, pour ainsi dire orique, du Div $(\mathfrak{F})$, c'est-à-dire

$$\sum_1 {}_{rs}\, a_{rs} X^{(rs)} .$$

nme, à cause de l'homogénéité, les dérivées par rapport aux y des fficients de conductivité s'annulent à la fois, il en sera de même des ivées *contrevariantes* des $c^{(pr)}$. La dérivation de

$$X^{(r)} = \sum_1^s {}_p\, c^{(rp)} T_p$$

me pourtant

$$X^{(rs)} = \sum_1^r {}_{pq}\, c^{(rp)} a^{(qs)} T_{pq},$$

ù

$$\text{Div}\,(\mathfrak{F}) = \sum_1^s {}_{rspq}\, a_{rs} a^{(qs)} c^{(rp)} T_{pq} = \sum_1^s {}_{pq}\, c^{(pq)} T_{pq},$$

et enfin

$$C\varrho \frac{\partial T}{\partial t} = \sum_1^3{}_{pq}\, c^{(pq)}\, T_{pq}.^{*)}$$

Cette équation assez simple s'applique donc aux conducteurs homogènes, mais d'une structure moléculaire quelconque.

Élasticité. Si u_r sont les composantes suivant les axes y_r du déplacement des points d'un milieu élastique, la déformation, qui en résulte dépend, comme on sait, des six quantités

$$2\alpha_{rs} = \frac{\partial u_r}{\partial y_s} + \frac{\partial u_s}{\partial y_r} \qquad (r, s = 1, 2, 3) \tag{10}$$

(α_{rr} est la dilatation linéaire pour la direction y_r, $\alpha_{r+1\, r+2}$ c'est un glissement, ou, si l'on veut, la dilatation angulaire des deux directions y_{r+1}, y_{r+2}).

Le potentiel des forces élastiques est une fonction 2Π des α_{rs} quadratique et homogène. Posons

$$2\Pi = \sum_1^3{}_{rspq}\, c^{(rspq)}\, \alpha_{rs}\, \alpha_{pq},$$

les coefficients d'élasticité $c^{(rspq)}$ $(= c^{(srpq)} = c^{(pqrs)}$ et leurs conséquences) pouvant dépendre des coordonnées y.

Si on désigne par Y_r (ou $Y^{(r)}$) les composantes de la force (F), qui agit sur l'unité de masse, par ϱ la densité et on pose encore

$$\Pi^{(rs)} = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{rs}} = \sum_1^3{}_{pq}\, c^{(rspq)}\, \alpha_{pq}, \tag{11}$$

les équations indéfinies de l'équilibre élastique s'écrivent:

$$\sum_1^3{}_s \frac{\partial \Pi^{(rs)}}{\partial y_s} = \varrho\, Y^{(r)}. \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{12}$$

Il est bien aisé de les présenter sous une forme valable pour des coordonnées quelconques x_1, x_2, x_3. Regardons à ce but u_r, $c^{(rspq)}$ comme les éléments, se rapportant en général aux coordonnées envisagées, de deux systèmes: simple covariant le premier, contrevariant du quatrième ordre le second.

*) On peut aussi justifier ce résultat par la simple remarque que les deux membres sont des invariants, et leur égalité est manifeste (d'après (8″) et l'homogénéité du conducteur) en se rapportant à des coordonnées cartésiennes.

Si l'on fait

$$2\alpha_{rs} = u_{rs} + u_{sr}, \tag{0'}$$

s (11) nous définissent un système double contrevariant $\Pi^{(rs)}$.

En représentant encore par $X^{(r)}$ le système contrevariant de la force F), les équations démandées seront

$$\sum_{v}^{s} {}_{js}\, a_{js}\, \Pi^{(rsj)} = \varrho X^{(r)}\,. \qquad (r = 1, 2, 3) \tag{11'}$$

C'est bien évident, car la forme même en montre la nature invariante t d'autre part on retrouve les équations (12), lorsqu'on suppose les oordonnées cartésiennes orthogonales.

Ce n'est pas la place ici d'aller plus loin, mais nous ne pouvons asser sous silence que la théorie de l'élasticité est peut-être une de celle, ù les méthodes du calcul différentiel absolu sont appelées a rendre les neilleurs services.*)

Padoue, Décembre 1899.

*) On consultera à ce propos: Riccí «Lezioni sulla teoria dell' elasticità», qui araîtront prochaînement.

Ueber bilineare Relationen zwischen den Perioden der Integrale reciproker Formenschaaren.

Von

Arthur Hirsch in Zürich.

Einleitung.

Wählt man die Fundamentalsysteme der Integrale von zwei zu einander adjungirten linearen homogenen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten in geeigneter Weise aus, so weisen die linearen Substitutionen, welche ihre Elemente bei Umlauf des Arguments um die singulären Punkte erfahren, contragredientes Verhalten auf. Das Gleiche gilt für zwei Functionenschaaren, welche mit je einem dieser zu einander adjungirten Integralsysteme zu derselben Art*) gehören. Nennen wir allgemein zwei Functionenschaaren mit Substitutionen von contragredientem Charakter *„reciproke Schaaren"*, so wird dieser Begriff offenbar bereits durch das letzterwähnte Beispiel erschöpft, sofern wir uns auf die Betrachtung solcher Functionenschaaren beschränken, welche an keiner Stelle unbestimmt werden. —

Als *„Perioden"* des Integrals einer mehrdeutigen Function bezeichnen wir, nur um einen kurzen Ausdruck zur Hand zu haben und ohne uns auf eine präcise Definition einzulassen, gewisse Werthe des Integrals, wenn sich die Integration in einem geschlossenen Zuge um Verzweigungspunkte des Integranden herum oder auch längs einer Verbindungslinie zwischen zweien dieser Punkte erstreckt.

In einer fundamentalen Abhandlung älteren Datums und einer neueren daran anknüpfenden Note hat Hr. Fuchs**) ein merkwürdiges System von bilinearen Relationen entwickelt, welche zwischen den Perioden der Integrale von Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden; und

---

*) Wir bedienen uns hier des Artbegriffs im gleichen Sinne, wie Hr. Schlesinger in seinem „Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen", Bd. II, 1, pag. 120.

**) Crelle's Journal Bd. 76, pag. 177, und Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1892 II, pag. 1113.

zwar dient Hrn. Fuchs als Grundlage seiner Untersuchung, nach dem Vorgange von Weierstrass gelegentlich der Herleitung der Beziehungen unter den Perioden der hyperelliptischen Integrale, das Abel-Jacobi'sche Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument. Da die in Rede stehenden Relationen berufen zu sein scheinen, in einer weiteren Entwicklung der Theorie der Integrale dieser Functionenschaaren und damit der Integrale der „homomorphen Functionen" eine ähnlich wichtige Rolle zu spielen, wie die Periodenrelationen in der Theorie der Abel'schen Integrale, so dürfte eine erneute Behandlung dieses Gegenstandes, welche sich zum Theil auf eine Ausdehnung der von Riemann im Falle der Abel'schen Integrale benutzten Principien stützt, nicht unangebracht sein. Ich habe derselben in meiner Arbeit *„Ueber bilineare Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen höherer Ordnung"* *) eine Erörterung des einfachsten Specialfalles, welcher durch die lineare Differentialgleichung erster Ordnung geliefert wird, vorangehen lassen, da dieser bei seinem elementaren Charakter eine bestimmtere Formulirung des Resultats gestattet. Die genannte Abhandlung soll im Folgenden mit H. I. citirt werden.

Ebenso wie daselbst findet auch in der vorliegenden Untersuchung die invariantentheoretische Auffassung und Methode grundsätzliche Verwendung, derzufolge unter gewissen Voraussetzungen die Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweckmässig nicht als Functionen, sondern als homogene Formen zu betrachten sind. — Der Gedankengang, der sich auf diese Auffassung gründet, mag hier in Kürze angedeutet werden. — Indem unter dem hervorgehobenen Gesichtspunkte der sonst ausgezeichnete unendlich ferne Verzweigungspunkt durch einen willkürlichen Parameter ersetzt wird, ist die Veranlassung gegeben, die Perioden der Integrale jener Lösungen in ihrer Abhängigkeit von diesem Parameter zu studiren. Sie erfüllen, als Functionen desselben betrachtet, ihrerseits wieder eine lineare Differentialgleichung; und zwar zeigt sich des näheren, *dass diejenigen beiden Differentialgleichungen, welchen die Perioden der Integrale von zwei adjungirten Formenschaaren genügen, ebenfalls zu einander adjungirt sind.* Dieser Umstand lässt uns unmittelbar die Existenz von bilinearen Relationen erkennen, welche die Perioden der Integrale gewisser reciproker Formenschaaren mit einander verbinden.

Was die explicite Formulirung derselben anbelangt, so liefert die Theorie der linearen Differentialgleichungen zwei verschiedene Darstellungsweisen, die ihrem algebraischen Charakter nach äquivalent sind. Die eine bedarf zu ihrer näheren Ausgestaltung der oben angedeuteten Erweiterung

*) Mathem. Annalen, Bd. 52.

einer Riemann'schen Idee. Indess ist letztere nicht etwa als blosses Hülfsprincip anzusehen; vielmehr führt gerade sie uns auf einen höheren Standpunkt, von welchem aus sich erst das ganze Gebiet verwandter Erscheinungen überblicken lässt. *Insbesondere gelangen wir durch parallel gehende Verallgemeinerung eines zweiten Riemann'schen Gedankens zur Construction gewisser Ungleichungen, welchen die reellen und imaginären Componenten der in Rede stehenden Perioden unter besonderen Voraussetzungen genügen.* — Zugleich gewähren diese Methoden die Einsicht, dass analoge Verhältnisse auch bei linearen Differentialgleichungen statthaben, deren Coefficienten eindeutige algebraische Functionen auf einer Riemann'schen Fläche sind; — doch liegt die Ausführung letzterer Bemerkung ausserhalb der uns hier gesteckten Grenzen.

Hinsichtlich der zweiten Darstellungsweise der Beziehungen unter den Perioden erweist sich als naturgemässer Ausgangspunkt wieder das Abel-Jacobi'sche Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument welches hierbei selbst in einer der homogenen Auffassung entsprechenden Form zu Tage tritt. Im Verlauf der ferneren Entwicklung lässt sich das von Hrn. Fuchs eingeschlagene Verfahren in gewissen Punkten vereinfachen und weiter führen; es gelingt schliesslich, *die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen einer Formenschaar explicit als rationale Invarianten der Perioden ihrer Integrale darzustellen.*

Zum Zweck der Herleitung der oben erwähnten linearen Differentialgleichung der Perioden und im weiteren Zusammenhange damit stütze ich mich auf die interessanten Untersuchungen von Hrn. Schlesinger*) über die Theorie der Euler'schen Transformirten einer linearen Differentialgleichung; dieselben werden zugleich, wie ich glaube, durch die Heranziehung des formentheoretischen Gesichtspunktes in ein helleres Licht gerückt.

Die vorliegende Abhandlung ist in drei Abschnitte eingetheilt. — Der erste beschäftigt sich mit der Construction und näheren Untersuchung der Differentialgleichung der Perioden und bringt nach einigen Vorbereitungen, die erst späteren Zwecken dienen, die allgemeine Formulirung der Periodenrelationen. — Der zweite Abschnitt enthält darauf die genauere Ausarbeitung der „Periodenrelationen zweiter Art", welche aus dem Abel-Jacobi'schen Theorem fliessen. — Der dritte Abschnitt endlich hat zum Gegenstand die sich in der Methode an Riemann anschliessende Entwicklung der „Relationen erster Art" sowie der Ungleichungen unter den Perioden.

---

*) „Ueber die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen", Crelle's J. Bd. 116, und „Zur Theorie der Euler'schen Transformirten einer homogenen linearen Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse", Crelle's J. Bd. 117; oder „Handbuch", Bd. II, 1. zwölfter Abschnitt.

Abschnitt I.

Die Differentialgleichung der Perioden.

§ 1.

Die Relationen zwischen den Lösungen von zwei zu einander adjungirten linearen Differentialgleichungen.

Indem ich mich im wesentlichen an die bezüglichen Festsetzungen von Darboux*) und Schlesinger**) anschliesse, will ich zunächst einige an sich bekannten Thatsachen, welche die Beziehungen von zwei zu einander adjungirten linearen Differentialgleichungen betreffen, kurz zusammenstellen, da dieselben als Grundlage der späteren Entwicklungen zu dienen haben.

Liegt ein lineares Differentialpolynom r-ter Ordnung vor:

$$A(u) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r} p_\varkappa(x)\, u^{(r-\varkappa)}, \tag{1}$$

so stellt

$$A'(v) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{r-\varkappa} \frac{d^{r-\varkappa}}{dx^{r-\varkappa}} (p_\varkappa(x) \cdot v) \tag{2}$$

den zu $A(u)$ adjungirten Differentialausdruck dar, welcher durch die Eigenschaft charakterisirt ist, dass er den Ausdruck

$$v \cdot A(u) - u \cdot A'(v)$$

zu einem exacten Differentialquotienten macht. Aus der Integration desselben geht der sog. begleitende bilineare Differentialausdruck $(r-1)$-ter Ordnung

$$A(u,v) \equiv \int \{v \cdot A(u) - u \cdot A'(v)\}\, dx \tag{3}$$

hervor, für den sich die Darstellung ergiebt:

$$A(u,v) = \sum_{\varkappa=0}^{r-1} \sum_{\lambda=0}^{r-1-\varkappa} (-1)^\lambda \frac{d^\lambda}{dx^\lambda} (p_\varkappa(x) \cdot v) \cdot u^{(r-1-\varkappa-\lambda)} \tag{3'}$$

oder

$$A(u,v) = \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{\tau=0}^{r-1} t_{\sigma\tau}\, u^{(\sigma)}\, v^{(\tau)}, \tag{3''}$$

wobei

---

*) Leçons sur la théorie générale des surfaces, t. II, chap. V.

**) „Handbuch“ Bd. I, zweiter Abschnitt, Kap. III.

$$
(4)\begin{cases} t_{\sigma\tau}(x) = \sum\limits_{\varkappa=0}^{r-1-\sigma-\tau} (-1)^{r-1-\sigma-\varkappa}(r-1-\sigma-\varkappa)_{\tau}\, p_{\varkappa}^{(r-1-\sigma-\tau-\varkappa)}(x), & \sigma+\tau \leqq r-1 \\ t_{\sigma\tau}(x) = 0, & \sigma+\tau > r-1 \end{cases}
$$

zu setzen ist.

Bilden die Functionen $[u_1, u_2, \cdots, u_r]$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung

$$
\text{(A)} \qquad A(u) = 0,
$$

so bezeichnen wir dasjenige Lösungssystem $[v_1, v_2, \cdots, v_r]$ der adjungirten Differentialgleichung

$$
\text{(A')} \qquad A'(v) = 0,
$$

welches durch die r linearen Gleichungen

$$
(5)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{r} u_i^{(\lambda)} v_i = 0, & (\lambda = 0, 1, \cdots, (r-2)) \\ \sum\limits_{i=1}^{r} u_i^{(r-1)} v_i = \frac{1}{p_0} \end{cases}
$$

definirt ist, als das *zu dem ersteren adjungirte System*. Bei strictem Festhalten an dieser Einführung findet keine genaue Reciprocität in dem Adjunctionsverhältniss beider Systeme statt. Aus (5) folgt nämlich vermittelst wiederholter Differentiation:

$$
(6)\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{r} v_i^{(\lambda)} u_i = 0, & (\lambda = 0, 1, \cdots, (r-2)) \\ \sum\limits_{i=1}^{r} v_i^{(r-1)} u_i = \frac{(-1)^{r-1}}{p_0}, \end{cases}
$$

woraus in Berücksichtigung, dass der Coefficient von $v^{(r)}$ in dem Polynom $A'(v)$ gleich $(-1)^r p_0(x)$ ist, hervorgeht, dass das zu $[v_1, v_2, \cdots, v_r]$ adjungirte System durch $[-u_1, -u_2, \cdots, -u_r]$ dargestellt wird.

Zwischen den Ableitungen der Elemente beider Functionenschaaren besteht nun, die Gleichungen (5) und (6) umfassend, ein System von r^2 bilinearen Relationen, welche man durch fortgesetzte Differentiation aus (5) gewinnt, nämlich:

$$
\text{(I)} \qquad \sum_{i=1}^{r} u_i^{(\sigma)} v_i^{(\tau)} = s_{\sigma\tau}(x); \qquad (\sigma, \tau = 0, 1, \cdots, (r-1))
$$

darin bedeuten die Grössen $s_{\sigma\tau}$ rationale Functionen der in $A(u)$ auftretenden Coefficienten und ihrer Ableitungen, deren Nenner durch eine Potenz von $p_0(x)$ gebildet wird. Und zwar ist insbesondere

$$(7)\qquad \begin{cases} s_{\sigma\tau} = 0, & \sigma+\tau < r-1 \\ s_{\sigma\tau} = \dfrac{(-1)^\tau}{p_0}, & \sigma+\tau = r-1 \end{cases}$$

während die Grössen $s_{r+\lambda,0}$ sich recurrirend aus den Gleichungen

$$(8)\qquad \sum_{i=0}^{\lambda+1} s_{r+\lambda-i,0} \sum_{\varkappa=0}^{i} \lambda_{i-\varkappa}\, p_\varkappa^{(i-\varkappa)}(x) = 0, \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots)$$

berechnen lassen, und $s_{\sigma\tau}$ für $\sigma+\tau > r-1$ vermittelst der Identität

$$(9)\qquad s_{\sigma\tau}(x) = \sum_{i=0}^{\tau} (-1)^i \tau_i\, s_{\sigma+i,0}^{(\tau-i)}(x)$$

auf jene zurückgeführt wird.

Eine zweite Darstellung der unter den Derivirten der Integrale $[u_1, u_2, \cdots, u_r]$ und $[v_1, v_2, \cdots, v_r]$ stattfindenden Beziehungen erhält man unmittelbar, indem man in (3) für u und v Lösungen der Differentialgleichungen (A) und (A') einträgt. Der bilineare Differentialausdruck $A(u, v)$ nimmt alsdann einen constanten Werth an, und zwar findet man leicht:

$$(10)\qquad A(u_i, v_\varkappa) = \delta_{i\varkappa}\text{*)}, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, r)$$

wobei, wie auch in der Folge, das Kronecker'sche Zeichen $\delta_{i\varkappa}$ für 0 oder 1 gebraucht wird, je nachdem $i \neq \varkappa$ oder $i = \varkappa$ ist. Es besteht demgemäss das System von r^2 Relationen:

$$(\mathrm{II})\qquad \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{\tau=0}^{r-1} t_{\sigma\tau}(x)\, u_i^{(\sigma)} v_\varkappa^{(\tau)} = \delta_{i\varkappa}, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, r)$$

welches mit dem System (I) algebraisch äquivalent ist**). Multiplicirt man die Gleichung (II) mit $u_\varkappa^{(\lambda)}$ und summirt über $\varkappa$, so folgt:

$$\sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{\tau=0}^{r-1} t_{\sigma\tau}\, u_i^{(\sigma)} s_{\lambda\tau} = u_i^{(\lambda)}, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, r \\ \lambda = 0, 1, \cdots, (r-1) \end{pmatrix}$$

mithin

$$(11)\qquad \sum_{\tau=0}^{r-1} s_{\lambda\tau}\, t_{\sigma\tau} = \delta_{\lambda\sigma}, \qquad (\lambda, \sigma = 0, 1, \cdots, (r-1))$$

*) Darboux, l. c. p. 103.

**) Vergl. H. I. pag. 160.

wodurch sich die quadratischen Matrices $\{s_{\sigma\tau}\}$ und $\{t_{\sigma\tau}\}$ als reciproke Systeme erweisen.

Beide Formelsysteme (I) *und* (II), *die wir weiterhin als „Relationen erster, bez. zweiter Art" bezeichnen wollen, haben bilineare Structur.* Während aber in der einzelnen Relation (I) die Derivationsindices der Zeichen $u_i^{(\sigma)}$, $v_\varkappa^{(\tau)}$ fixirt sind und die Elemente der Fundamentalsysteme wechseln, werden umgekehrt in der einzelnen Relation (II) diese Elemente festgehalten und ihre Ableitungen variirt.

Die r^2 Relationen eines jeden der Systeme (I) und (II) sind im allgemeinen von einander unabhängig, können sich jedoch unter besonderen Voraussetzungen auf eine geringere Zahl reduciren. Wir wollen speciell den Fall ins Auge fassen, dass die Differentialgleichung (A) zu sich selbst adjungirt ist. Es findet alsdann statt:

$$A'(u) \equiv (-1)^r A(u), \tag{12}$$

$$v_i = \sum_{\varkappa=1}^{r} c_{i\varkappa} u_\varkappa, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r) \tag{13}$$

woselbst die Coefficienten $c_{i\varkappa}$ gewisse Constanten bedeuten, deren Determinante nicht verschwindet. Trägt man diese Werthe der v_i aus (13) in (5) und (6) ein, so ergiebt sich:

$$\sum_{i,\varkappa=1}^{r} c_{i\varkappa} u_i^{(\lambda)} u_\varkappa = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, 1, \cdots, (r-2) \\ \dfrac{1}{p_0}, & \lambda = r-1 \end{cases} \tag{5'}$$

$$\sum_{i,\varkappa=1}^{r} c_{i\varkappa} u_i u_\varkappa^{(\lambda)} = \begin{cases} 0, & \lambda = 0, 1, \cdots, (r-2) \\ \dfrac{(-1)^{r-1}}{p_0}, & \lambda = r-1 \end{cases} \tag{6'}$$

also durch Combination:

$$\sum_{i=1}^{r} u_i^{(\lambda)} \sum_{\varkappa=1}^{r} [c_{i\varkappa} - (-1)^{r-1} c_{\varkappa i}] u_\varkappa = 0, \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots, (r-1))$$

oder, da die u_i ein Fundamentalsystem bilden:

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} [c_{i\varkappa} - (-1)^{r-1} c_{\varkappa i}] u_\varkappa = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

und schliesslich aus dem gleichen Grunde:

$$c_{i\varkappa} = (-1)^{r-1} c_{\varkappa i}.\text{*)} \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, r) \tag{14}$$

*) Vergl. Borel, „Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles", Annales de l'école normale, 3. série, t. 9, 1892, pag. 71.

Es geht daraus hervor, dass sich durch geeignete Wahl des Fundamentalsystems der u_i die Correlation (13) auf folgende kanonische Gestalt bringen lässt:

im Falle eines ungeraden r:

$$(13_1) \qquad v_i = u_i, \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

im Falle eines geraden $r = 2\varrho$:

$$(13_2) \qquad \begin{Bmatrix} v_i & = u_{\varrho+i}, \\ v_{\varrho+i} & = -u_i, \end{Bmatrix}^{*)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varrho)$$

die wir jetzt zu Grunde legen. Ferner wird zufolge (3) und (12)

$$\frac{dA(u, v)}{dx} = v \cdot A(u) + (-1)^{r-1} u \cdot A(v),$$

mithin ist

$$(15) \qquad A(u, v) \equiv (-1)^{r-1} A(v, u),$$

$$t_{\sigma\tau} = (-1)^{r-1} t_{\tau\sigma}, \qquad s_{\sigma\tau} = (-1)^{r-1} s_{\tau\sigma};$$

der bilineare Differentialausdruck $A(u, v)$ hat also symmetrischen Charakter bei ungeradem r, alternirenden bei geradem r.

Demgemäss erhalten wir im Falle eines ungeraden r zwei Systeme von je $\frac{r \cdot (r+1)}{2}$ Relationen:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \sum_{i=1}^{r} u_i^{(\sigma)} u_i^{(\tau)} = s_{\sigma\tau}, \qquad \begin{pmatrix} \sigma, \tau = 0, 1, \cdots, (r-1) \\ \sigma \leqq \tau \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{II}_1) \qquad \sum_{\sigma, \tau = 0}^{r-1} t_{\sigma\tau} u_i^{(\sigma)} u_\varkappa^{(\tau)} = \delta_{i\varkappa}, \qquad \begin{pmatrix} i, \varkappa = 1, 2, \cdots, r \\ i \leqq \varkappa \end{pmatrix}$$

im Falle eines geraden $r = 2\varrho$ zwei Systeme von je $\frac{r \cdot (r-1)}{2} = \varrho(2\varrho - 1)$ Relationen:

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \sum_{i=1}^{\varrho} \{ u_i^{(\sigma)} u_{\varrho+i}^{(\tau)} - u_{\varrho+i}^{(\sigma)} u_i^{(\tau)} \} = s_{\sigma\tau}, \qquad \begin{pmatrix} \sigma, \tau = 0, 1, \cdots, (2\varrho - 1) \\ \sigma < \tau \end{pmatrix}$$

---

*) In der Abhandlung von Jacobi „Ueber die Vertauschung von Parameter und Argument bei der dritten Gattung der Abel'schen und höhern Transcendenten", Ges. Werke Bd. II, pag. 134 findet sich irrthümlicherweise die Angabe, dass man stets die Gleichung $v_i = u_i$ herstellen könne.

$$
(\mathrm{II}_2)\quad \begin{cases}
\displaystyle\sum_{\substack{\sigma,\tau=0\\ \sigma<\tau}}^{2\varrho-1} t_{\sigma\tau}\left\{u_i^{(\sigma)}u_{\varrho+\varkappa}^{(\tau)} - u_i^{(\tau)}u_{\varrho+\varkappa}^{(\sigma)}\right\} = \delta_{i\varkappa}, & (i,\varkappa = 1, 2, \cdots, \varrho)\\
\left.\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\sigma,\tau=0\\ \sigma<\tau}}^{2\varrho-1} t_{\sigma\tau}\left\{u_i^{(\sigma)}u_\varkappa^{(\tau)} - u_i^{(\tau)}u_\varkappa^{(\sigma)}\right\} = 0,\\
&\sum_{\substack{\sigma,\tau=0\\ \sigma<\tau}}^{2\varrho-1} t_{\sigma\tau}\left\{u_{\varrho+i}^{(\sigma)}u_{\varrho+\varkappa}^{(\tau)} - u_{\varrho+i}^{(\tau)}u_{\varrho+\varkappa}^{(\sigma)}\right\} = 0,
\end{aligned}\right\} & \begin{pmatrix} i,\varkappa = 1, 2, \cdots, \varrho\\ i<\varkappa\end{pmatrix}
\end{cases}
$$

welche die Derivirten der Lösungen einer zu sich selbst adjungirten linearen Differentialgleichung mit einander verbinden.

§ 2.

Die invariante Darstellung der linearen Differentialgleichung.

Die Coefficienten $p_\varkappa(x)$ der linearen Differentialgleichung (A) mögen als ganze rationale Functionen vom μ-ten oder einem geringeren Grade vorausgesetzt werden. Wir legen der Integralfunction $u(x)$ jetzt eine Ordnung n bei und behandeln sie fortan als Form n-ter Ordnung. Diese Zahl n kann als ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl, willkürlich oder nach einem bestimmten Princip, gewählt werden. Verhalten sich z. B. die Lösungen von (A) in der Umgebung des unendlich fernen Punktes wie

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-n}, \left(\frac{1}{x}\right)^{-n+1}, \left(\frac{1}{x}\right)^{-n+2}, \cdots, \left(\frac{1}{x}\right)^{-n+r-1},$$

— was sich eventuell durch lineare Transformation des Arguments und multiplicative Aenderung der abhängigen Variabeln um eine Potenz von x erzielen lässt, — so wird man u zweckmässig die Ordnung n geben. Oder, hat der Coefficient $p_1(x)$ den Werth Null, so ist die Hauptdeterminante des Fundamentalsystems der Integrale eine Constante; da sich andrerseits ihre Ordnung, — unter n diejenige der Integrale verstanden, — durch $r(n-r+1)$ ausdrückt, so empfiehlt es sich, diese Zahl mit Null zu identificiren, also $n = (r-1)$ zu wählen.

Auf Grund dieser Festsetzung lässt sich nun offenbar das Differentialpolynom $A(u)$ auf die Gestalt eines Aggregats von Ueberschiebungen bringen*):

*) Vergl. H. I. § 1.

(16) $$A(u) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r} n_{r-\varkappa} \{ P_\varkappa(x),\ u \}_{r-\varkappa},$$

worin der Function $P_0(x) \equiv r!\, p_0(x)$ eine gewisse ganzzahlige Ordnung m und allgemein $P_\varkappa(x)$ die Ordnung $(m - 2\varkappa)$ beigelegt ist, und diese Coefficienten weiterhin als ganze rationale Formen anzusehen sind. Hierzu muss die Zahl m im allgemeinen gleich $(\mu + 2r)$ angenommen werden, doch genügt in besonderen Fällen schon eine kleinere Zahl. Gehört z. B. die Differentialgleichung (A) der Fuchs'schen Klasse an, so besitzt $p_\varkappa(x)$ den Grad $(\mu - \varkappa)$, und es reicht hin, $m = (\mu + r)$, unter Umständen auch unterhalb $(\mu + r)$ zu wählen, — was sich durch eine endliche Anzahl von Versuchen feststellen lässt. Wenn dabei $m < 2r$ ist, so müssen diejenigen Formen $P_\varkappa$, deren Ordnung kleiner als der Index ihrer Ueberschiebung ist, verschwinden, sodass in (16) nur die Coefficienten $P_0, P_1, \cdots, P_{m-r}$ wirklich auftreten.

Ist n gleich Null oder einer positiven ganzen Zahl unterhalb r, so werden zwar einige der Ueberschiebungen illusorisch; jedoch behält ihr Product mit dem hinzugefügten Binomialcoefficienten seinen Sinn und invarianten Charakter, wenn man dasselbe als Grenzwerth auffasst. So wird man z. B. im Falle $n = (r - 1)$

$$n_r \Big\{ P_0,\ \overset{n}{u} \Big\}_r = \lim_{\varepsilon=0} (r - 1 + \varepsilon)_r \Big\{ P_0,\ \overset{r-1+\varepsilon}{u} \Big\}_r = \frac{1}{r!}\, P_0 \cdot \frac{d^r u}{dx^r}$$

deuten.

Der Differentialausdruck $A'(v)$, welcher zu der in (16) *gegebenen Form von $A(u)$ adjungirt ist, erhält nun die Gestalt*)*:

(17) $$A'(v) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{r-\varkappa}\, \nu_{r-\varkappa} \{ P_\varkappa(x),\ v \}_{r-\varkappa},$$

worin ν die Ordnung der Form v bedeutet, die sich aus der Gleichung

(18) $$n + \nu = 2r - 2 - m$$

bestimmt.

Um ferner eine invariante Darstellung für den bilinearen Differentialausdruck $A(u,v)$ zu gewinnen, bringen wir zunächst das Product $v \cdot \{ P_0, u \}_r$ durch Umformung auf die Gestalt:

$$v \cdot \{ P_0, u \}_r = \sum_{\lambda=0}^{r} \{ P_0, (u, v)_\lambda \}_{r-\lambda} \cdot \frac{r!}{(r-\lambda)!} \frac{(m - 2r + \lambda)!}{(m - 2r + 2\lambda)!}\, \nu_\lambda,$$

wodurch

---

*) Siehe H. I. § 2.

$$n_r v \cdot \{P_0, u\}_r - (-1)^r \nu_r u \cdot \{P_0, v\}_r$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{r-1} \{P_0, (u, v)_\lambda\}_{r-\lambda} \cdot \frac{r!}{(r-\lambda)!} \frac{(m-2r+\lambda)!}{(m-2r+2\lambda)!} [n_r \nu_\lambda - (-1)^{r-\lambda} \nu_r n_\lambda]$$

wird. Auf Grund der leicht zu verificirenden Identität

$$\frac{d}{dx}\left\{\overset{\sigma}{\varphi(x)}, \overset{\tau}{\psi(x)}\right\}_{\varrho-1} = -(\sigma - \varrho + 1)\,\{\varphi(x), \psi(x)\}_\varrho,$$

worin die Ordnungen σ, τ der Formen φ, ψ der Bedingung $(\sigma+\tau)=2(\varrho-1)$ genügen, ergiebt sich dann:

$$(19)\qquad \int dx\,\{n_r v \cdot (P_0, u)_r - (-1)^r \nu_r u \cdot (P_0, v)_r\}$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{r-1} \{P_0, (u, v)_\lambda\}_{r-1-\lambda} \cdot \frac{r!}{(r-\lambda)!} \frac{(m-2r+\lambda)!}{(m-2r+2\lambda)!} \frac{1}{(m-r+\lambda+1)}$$
$$\cdot [(-1)^{r-\lambda} n_\lambda \nu_r - \nu_\lambda n_r].$$

Indess hat diese Darstellung nur für $m \geqq (2r-1)$ Gültigkeit, indem andernfalls einige der darin auftretenden Ueberschiebungen illusorisch werden. — Die rechte Seite von (19) stellt eine trilineare Covariante nullter Ordnung der Formen P_0, u, v dar, welche mit dem Symbol

$$(19')\qquad \{P_0; u, v\}_{r-1}$$

bezeichnet werden soll. Man findet für dasselbe den stets gültigen entwickelten Ausdruck:

$$(20)\qquad \{P_0; u, v\}_{r-1} = \sum_{\sigma=0}^{r-1} \sum_{\tau=0}^{r-1-\sigma} P_{0, r-1-\sigma-\tau}\, u_\sigma v_\tau$$
$$\cdot \sum_{\lambda=0}^{r-1-\sigma-\tau} (-1)^{\tau+\lambda} \frac{n!\,\nu!}{r!\,(n-\lambda-\sigma)!\,(\nu-r+1+\lambda+\sigma)!} (\lambda+\sigma)_\sigma\, (r-1-\lambda-\sigma)_\tau,$$

oder in symbolischer Schreibweise, indem man die Differentiationsindices in die Exponenten der Grössen P_0, u, v rückt und die Summationen über σ und τ ausführt:

$$(20')\quad \{P_0; u, v\}_{r-1} = \sum_{\lambda=0}^{r-1} \frac{(-1)^\lambda\, n!\, \nu!}{r!\,(n-\lambda)!\,(\nu-r+1+\lambda)!} (P_0 - u)^\lambda \cdot (P_0 - v)^{r-1-\lambda},$$

wobei hier sowie weiterhin das Zeichen $n!$ der Kürze halber in der Bedeutung von $\Gamma(n+1)$ benutzt wird.

Hiernach erhalten wir für den Differentialausdruck $A(u, v)$ die folgende Darstellung durch ein Aggregat von Covarianten:

$$(21)\qquad A(u,v) = \sum_{\varkappa=0}^{r-1} \{P_\varkappa;\, u, v\}_{(r-1-\varkappa)}$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{r-1}\sum_{\lambda=0}^{r-1-\varkappa} \{P_\varkappa, (u,v)_\lambda\}_{(r-1-\varkappa-\lambda)} \cdot \frac{(r-\varkappa)!}{(r-\varkappa-\lambda)!}\,\frac{(m-2r+\lambda)!}{(m-2r+2\lambda)!}\,\frac{1}{(m-r-\varkappa+\lambda+1)}$$
$$\cdot\,[(-1)^{r-\varkappa-\lambda} n_\lambda \nu_{r-\varkappa} - \nu_\lambda n_{r-\varkappa}].$$

Soll die Differentialgleichung $A(u) = 0$ zu sich selbst adjungirt sein, so bestimmt sich die Ordnung n der Integralform nach (18) durch

$$(18')\qquad n = \nu = \left(r - 1 - \frac{m}{2}\right),$$

und die Coefficienten $P_1, P_3, P_5, \cdots$ mit ungeradem Index müssen, wie der Vergleich von (16) und (17) zeigt, verschwinden, sodass

$$(16')\quad A(u) = n_r\{P_0, u\}_r + n_{r-2}\{P_2, u\}_{r-2} + n_{r-4}\{P_4, u\}_{r-4} + \cdots$$

wird. Im Falle eines ungeraden $r = (2\varrho + 1)$ wird alsdann:

$$(21_1)\qquad A(u,v) = \sum_{\varkappa=0}^{\varrho}\sum_{\lambda=0}^{\varrho-\varkappa} \{P_{2\varkappa}, (u,v)_{2\lambda}\}_{2(\varrho-\varkappa-\lambda)}$$
$$\cdot\,\frac{(2\varrho+1-2\varkappa)!}{(2\varrho+1-2\varkappa-2\lambda)!}\,\frac{(2n+1-4\lambda)!}{(2n+1-2\lambda)!}\,\frac{n_{2\lambda}\cdot n_{2\varrho+1-2\varkappa}}{(n-\varrho+\varkappa-\lambda)};$$

im Falle eines geraden $r = 2\varrho$:

$$(21_2)\qquad A(u,v) = -\sum_{\varkappa=0}^{\varrho-1}\sum_{\lambda=0}^{\varrho-1-\varkappa} \{P_{2\varkappa}, (u,v)_{2\lambda+1}\}_{2(\varrho-1-\varkappa-\lambda)}$$
$$\cdot\,\frac{(2\varrho-2\varkappa)!}{(2\varrho-2\varkappa-2\lambda-1)!}\,\frac{(2n-4\lambda-1)!}{(2n-2\lambda)!}\,\frac{n_{2\lambda+1}\cdot n_{2\varrho-2\varkappa}}{(n-\varrho+\varkappa-\lambda)},$$

worin der symmetrische, bez. alternirende Charakter des bilinearen Differentialausdrucks unmittelbar zu Tage tritt.

§ 3.

Alliirte lineare Differentialgleichungen.

Nach Erledigung dieser Präliminarien gehen wir dazu über, die soeben dargelegte homogene Auffassung auch auf die Integrale von Lösungen linearer Differentialgleichungen und deren Perioden zu übertragen. — Sei $u(x)$ eine solche Lösung, welcher zum Zweck des Uebergangs von der inhomogenen zur homogenen Darstellung die Ordnung n beigelegt wird, so ist bei Spaltung des Arguments x in $x_2 : x_1$ $u(x)$ zu ersetzen durch $x_1^{-n} u(x_1, x_2)$; gleichzeitig verwandelt sich das Integral

$$\int_a^b u(x)\,dx$$

in

$$\int_{a_1, a_2}^{b_1, b_2} x_1^{-n-2} \cdot u(x_1, x_2) \cdot (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1);$$

dabei bedeuten $a = a_2 : a_1$ und $b = b_2 : b_1$ zwei Verzweigungspunkte von u, und es ist der bestimmteren Vorstellung halber angenommen, dass die Integration von einem zum andern erlaubt sei.

Indem wir nun den Punkt $x_1 = 0$, welcher im allgemeinen ein Verzweigungspunkt des Integranden ist, durch einen willkürlichen Werth $z = z_2 : z_1$ ersetzen, betrachten wir die hierdurch generalisirte Periode

$$U(z_1, z_2) = \int_{a_1, a_2}^{b_1, b_2} (x_1 z_2 - x_2 z_1)^{-n-2} \cdot u(x_1, x_2) \cdot (x_1\,dx_2 - x_2\,dx_1)$$

als Form des Parameterpaares (z_1, z_2), worin sie die Ordnung $(-n-2)$ aufweist. Es leuchtet sofort ein, *dass* $U(z_1, z_2)$ *eine durch einen transcendenten Process erzeugte lineare Covariante der Grundform* $u(z_1, z_2)$ *vom Gewichte* $(n+1)$ *darstellt, wenn man die Verzweigungspunkte von* u *cogredient mit den Variabeln transformirt.*

In der That: geht $u(x_1, x_2)$ durch eine lineare Substitution von der Determinante δ in $u'(x_1', x_2')$ über, so wird bei Anwendung cogredienter Substitutionen auf (x_1, x_2), (z_1, z_2), (a_1, a_2), (b_1, b_2)

$$U(z_1, z_2) \quad \text{in} \quad \delta^{-n-1}\, U'(z_1', z_2')$$

umgesetzt, wobei

$$U'(z_1', z_2') = \int_{a_1', a_2'}^{b_1', b_2'} (x_1' z_2' - x_2' z_1')^{-n-2} \cdot u'(x_1', x_2') \cdot (x_1'\,dx_2' - x_2'\,dx_1')$$

ist. Da nun die Form $U'(z_1', z_2')$ aus der transformirten Grundform $u'(z_1', z_2')$ durch den gleichen Process abgeleitet ist wie $U(z_1, z_2)$ aus $u(z_1, z_2)$, so hat $U(z_1, z_2)$ den Charakter einer Covariante von $u(z_1, z_2)$, deren Gewicht sich aus dem negativ genommenen Exponenten von δ gleich $(n+1)$ ergiebt.

Der grösseren Bequemlichkeit halber bedienen wir uns weiterhin, unter Festhalten an der formentheoretischen Auffassung, der inhomogenen Schreibweise, wobei eine Form $f(x_1, x_2)$ durch das correspondirende

Functionszeichen $f(x)$ repräsentirt werden soll; dementsprechend schreiben wir jetzt die soeben betrachtete Periode:

$$(22) \qquad U(z) = \int_a^b (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\, dx.*)$$

Die Form n-ter Ordnung $u(x)$ genüge nun der linearen Differentialgleichung

$$(A_x) \qquad A_x(u) \equiv \sum_{x=0}^{r} n_{r-x} \{ P_x(x), u \}_{r-x} = 0,$$

worin die $P_x(x)$ ganze rationale Formen der Ordnung $(m-2x)$ bedeuten. Dann erfüllen auch die Perioden (22), als Formen von z betrachtet, bei geeigneter Wahl ihres Integrationsweges eine gewisse lineare Differentialgleichung, die wir zu der ersteren *„alliirt"* nennen wollen. Die Aufgabe, diese alliirte Differentialgleichung zu construiren, stellt offenbar die Inversion des von Hrn. Schlesinger behandelten Problems dar, die Eulersche Transformirte**) einer gegebenen Differentialgleichung zu berechnen. In der That steht vermittelst Gleichung (22) die vorliegende Differentialgleichung (A_x) im Verhältniss der Euler'schen Transformirten zu der von uns gesuchten Differentialgleichung; — dabei ist allerdings hervorzuheben, dass Hr. Schlesinger dem Exponenten von $(z-x)$ unter dem Integralzeichen in (22) einen willkürlichen Werth ertheilt, während derselbe bei unserer Auffassung durch die Ordnung von $u(x)$ festgelegt ist.

Indem wir an die gestellte Aufgabe herantreten, folgen wir der eleganten Methode des genannten Autors und formen zunächst den Differentialausdruck

$$A_x[(z-x)^n]$$

derart um, dass der Parameter z die Rolle des Arguments übernimmt. — Dabei soll der Fall eines ganzzahligen n vorerst ausgeschlossen bleiben.

Die Ueberschiebung $\{ \overset{m}{P}(x), \overset{n}{u}(x) \}_r$ lautet in expliciter Gestalt***):

$$\{ P(x), u(x) \}_r = \sum_{x=0}^{r} (-1)^x r_x P_x(x) \cdot u_{r-x}(x).$$

Setzt man hierin

$$u(x) = (z-x)^n,$$

*) Riemann, Werke, 2. Aufl., pag. 353, „Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation", und Hadamard, Thèse „Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor", troisième partie, betrachten die Erzeugung von $U(z)$ aus $u(z)$ aus dem Gesichtspunkte der „verallgemeinerten Differentiation".

**) Crelle's J. Bd. 117, pag. 148, oder „Handbuch" II, 1, pag. 414.

***) H. I. (10), (11).

so ist

$$u_{r-\varkappa}(x) = (-1)^{r-\varkappa}(z-x)^{n-r+\varkappa},$$

also

$$\{P(x), (z-x)^n\}_r = (-1)^r \sum_{\varkappa=0}^{r} r_\varkappa P_\varkappa(x) \cdot (z-x)^{n-r+\varkappa}.$$

Die Taylor'sche Entwicklung von $P_\varkappa(x)$ nach Potenzen von $(z-x)$ liefert:

$$P_\varkappa(x) = \sum_{\lambda=\varkappa}^{m} (-1)^{\lambda-\varkappa}(m-\varkappa)_{\lambda-\varkappa} P_\lambda(z) \cdot (z-x)^{\lambda-\varkappa},$$

wodurch

$$\{P(x), (z-x)^n\}_r = \sum_{\varkappa=0}^{r} \sum_{\lambda=\varkappa}^{m} (-1)^{r+\lambda+\varkappa} r_\varkappa (m-\varkappa)_{\lambda-\varkappa} P_\lambda(z) \cdot (z-x)^{n-r+\lambda},$$

und nach Vertauschung der Reihenfolge der Summationen

$$= \sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^{r+\lambda} P_\lambda(z) \cdot (z-x)^{n-r+\lambda} \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} (-1)^\varkappa r_\varkappa (m-\varkappa)_{\lambda-\varkappa}$$

wird. Hier ist weiter die innere Summe über $\varkappa$:

$$\sum_{\varkappa=0}^{\lambda} (-1)^\varkappa r_\varkappa (m-\varkappa)_{\lambda-\varkappa} = (-1)^\lambda \sum_{\varkappa=0}^{\lambda} r_\varkappa (\lambda-m-1)_{\lambda-\varkappa}$$

$$= (-1)^\lambda (\lambda-m-1+r)_\lambda = (m-r)_\lambda;$$

mithin

$$\{P(x), (z-x)^n\}_r = \sum_{\lambda=0}^{m-r} (-1)^{r+\lambda}(m-r)_\lambda P_\lambda(z) \cdot (z-x)^{n-r+\lambda},$$

oder, da, als Function von z angesehen,

$$(z-x)^{n-r+\lambda} = \frac{(n-r+\lambda)!}{(m+n-2r)!} \frac{d^{m-r-\lambda}}{dz^{m-r-\lambda}}[(z-x)^{m+n-2r}]$$

$$= [(z-x)^{m+n-2r}]_{(m-r-\lambda)}$$

ist,

$$(23) \qquad \{P(x), (z-x)^n\}_r = (-1)^r \{P(z), (z-x)^{m+n-2r}\}_{m-r}.$$

Ersetzt man hierin $P(x)$, m, r durch $P_\varkappa(x)$, $(m-2\varkappa)$, $(r-\varkappa)$, so folgt:

$$(23') \qquad \{P_\varkappa(x), (z-x)^n\}_{r-\varkappa} = (-1)^{r-\varkappa}\{P_\varkappa(z), (z-x)^{m+n-2r}\}_{(m-r-\varkappa)},$$

und schliesslich als Resultat der Umrechnung:

$$(24_1) \qquad A_x[(z-x)^n] = \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{r-\varkappa} n_{r-\varkappa}\{P_\varkappa(z), (z-x)^{m+n-2r}\}_{(m-r-\varkappa)}.$$

Indem wir in gleicher Weise das zu $A_x(u)$ adjungirte Differentialpolynom der Gleichung

$$(A'_x) \qquad A'_x(v) \equiv \sum_{x=0}^{r} (-1)^{r-x} v_{r-x} \{ P_x(x), v \}_{r-x} = 0$$

behandeln, erhalten wir:

$$(24_2) \qquad A'_x[(z-x)^r] = \sum_{x=0}^{r} v_{r-x} \{ P_x(z), (z-x)^{m+\nu-2r} \}_{(m-r-x)}.$$

Dabei ist zu erinnern, dass, wenn $m < 2r$, die Summationen über x auf der rechten Seite mit $x = (m-r)$ abbrechen, da in diesem Falle die Coefficienten $P_x(x)$ für $x > (m-r)$ verschwinden.

Die Identitäten (24_1) und (24_2) bleiben nun offenbar auch für ganzzahliges n in Geltung, mit Ausnahme derjenigen Fälle, wo eine der vorkommenden Ueberschiebungen illusorisch wird. Dies tritt unter folgenden Annahmen ein:

$$0 \leqq n \leqq r-1,$$
$$0 \leqq \nu \leqq r-1,$$
$$0 \leqq m+n-2r \leqq m-r-1,$$
$$0 \leqq m+\nu-2r \leqq m-r-1,$$

die zusammengefasst den Ausschluss von

$$r-1-m \leqq n \leqq r-1$$

ergeben, mit Ausnahme des speciellen Falles, dass $m = 2r$ und $n = \nu = -1$ ist. Aber auch dieser letztere soll bei Seite gelassen werden, indem wir uns seine gesonderte Discussion vorbehalten. Hingegen sind die Annahmen $n = (r-1)$ und $n = (r-1-m)$, wie man leicht einsieht, noch gestattet. Bei $n = (r-1)$ verliert allerdings Gl. (23') für $x = 0$ ihren Sinn; nach Multiplication mit n_r, — in welcher Verbindung allein sie für (24_1) benutzt wird — geht sie jedoch beim Grenzübergange mit $\lim n = (r-1)$ über in folgende:

$$\frac{1}{r!} P_0(x) \cdot \frac{d^r}{dx^r} [(z-x)^{r-1}] = \frac{(-1)^r}{r \cdot (m-r-1)!} P_0(z) \cdot \frac{d^{m-r}}{dz^{m-r}} [(z-x)^{m-r-1}],$$

welche richtig ist, da beide Seiten den Werth Null haben. Ebenso lässt sich die Zulassung von $n = (r-1-m)$ rechtfertigen.

Die Relationen (24_1) *und* (24_2) *sind demnach stets legitim, ausser wenn* n *eine solche ganze Zahl darstellt, für die*

$$(25) \qquad r-m \leqq n \leqq r-2$$

ist.

Es soll nun die Beziehung zwischen den Gleichungen (24_1) und (24_2) näher erforscht werden.

Wir führen für die auf der rechten Seite von (24_2) auftretende Differentialoperation von der Ordnung $(m-r)$ ein besonderes Symbol ein, indem wir setzen:

$$(26_1) \qquad \mathsf{A}_z(U) \equiv (\nu+1)\sum_{\varkappa=0}^{r} \nu_{r-\varkappa}\{P_\varkappa(z),\ U(z)\}_{(m-r-\varkappa)},$$

worin $U(z)$ als Form der Ordnung

$$(27_1) \qquad N = m + \nu - 2r = -n - 2$$

anzusehen ist. Ferner berechnen wir den zu $\mathsf{A}_z(U)$ adjungirten Differentialausdruck $\mathsf{A}'_z(V)$, indem wir die Formeln (18) und (17) heranziehen. Danach erhält man die Ordnung N von $V(z)$ aus der Gleichung

$$N + \mathsf{N} = 2(m-r) - 2 - m,$$

sodass

$$(27_2) \qquad \mathsf{N} = m + n - 2r = -\nu - 2$$

wird; und für $\mathsf{A}'_z(V)$ ergiebt sich zunächst:

$$\mathsf{A}'_z(V) = (\nu+1)\sum_{\varkappa=0}^{r}(-1)^{m-r-\varkappa}\frac{\mathsf{N}_{(m-r-\varkappa)}}{N_{(m-r-\varkappa)}}\,\nu_{r-\varkappa}\{P_\varkappa(z),\ V(z)\}_{(m-r-\varkappa)}.$$

Hier ist weiter der numerische Coefficient $c_\varkappa$ der $(m-r-\varkappa)$-ten Ueberschiebung auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} c_\varkappa &\equiv (-1)^{m-r-\varkappa}(\nu+1)\cdot\nu_{r-\varkappa}\frac{\mathsf{N}_{(m-r-\varkappa)}}{N_{(m-r-\varkappa)}} \\ &= (-1)^{m-r-\varkappa}\frac{(\nu+1)!}{(r-\varkappa)!\,(\nu-r+\varkappa)!}\,\frac{(-\nu-2)!\,(\nu-r+\varkappa)!}{(-n-2)!\,(n-r+\varkappa)!} \\ &= (-1)^{m-r-\varkappa}\frac{(-\nu-2)!}{(r-\varkappa)!\,(n-r+\varkappa)!}\cdot\frac{(\nu+1)!}{(-n-2)!}, \end{aligned}$$

und, da

$$\frac{(\nu+1)!}{(-n-2)!} = (-1)^{n+\nu+1}\frac{(n+1)!}{(-\nu-2)!},$$

$$c_\varkappa = (-1)^{r-\varkappa+1}\frac{(n+1)!}{(r-\varkappa)!\,(n-r+\varkappa)!} = (n+1)\cdot(-1)^{r-\varkappa+1}n_{r-\varkappa};$$

also wird

$$(26_2) \qquad \mathsf{A}'_z(V) \equiv -(n+1)\sum_{\varkappa=0}^{r}(-1)^{r-\varkappa}n_{r-\varkappa}\{P_\varkappa(z),\ V(z)\}_{(m-r-\varkappa)}.$$

Stellt man nunmehr die Gleichungen (24_2) mit (26_1) und (24_1) mit (26_2) zusammen, *so tritt folgende prägnante Beziehung zu Tage:*

$$(28_1) \qquad A'_x[(z-x)^\nu] = \frac{1}{\nu+1}\cdot\mathsf{A}_z[(z-x)^{-n-2}],$$

$$(28_2) \qquad A_x[(z-x)^n] = \frac{-1}{n+1}\cdot\mathsf{A}'_z[(z-x)^{-\nu-2}].$$

Wir multipliciren jetzt die Relation (28_1) mit einer Form $u(x)$ von der Ordnung n, (28_2) mit einer Form $v(x)$ von der Ordnung ν, und integriren über x, indem wir auf der linken Seite auf Grund von (3) partielle Integration anwenden; dadurch ergiebt sich, wenn man die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration nach verschiedenen Parametern berücksichtigt:

$$(29_1)\qquad \int\limits_{(l)}(z-x)^{\nu}\cdot A_x(u)\,dx-\int\limits_{(l)}dA_x(u,(z-x)^{\nu})$$
$$=\frac{1}{\nu+1}\cdot \mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{(l)}(z-x)^{-n-2}\cdot u(x)\,dx\right\},$$

$$(29_2)\qquad \int\limits_{(\lambda)}(z-x)^{n}\cdot A_x'(v)\,dx+\int\limits_{(\lambda)}dA_x((z-x)^{n},v)$$
$$=\frac{-1}{n+1}\cdot \mathsf{A}_z'\left\{\int\limits_{(\lambda)}(z-x)^{-\nu-2}\cdot v(x)\,dx\right\}.$$

Versteht man also unter $u(x)$, $v(x)$ Lösungen der Differentialgleichungen (A_x), bez. (A_x'), und verfügt über die Integrationswege l, λ derart, dass den Bedingungen

$$(30_1)\qquad \int\limits_{(l)}dA_x(u,(z-x)^{\nu})=0,$$

$$(30_2)\qquad \int\limits_{(\lambda)}dA_x((z-x)^{n},v)=0$$

genügt wird, so stellen die Perioden

$$(31_1)\qquad U(z)=\int\limits_{(l)}(z-x)^{-n-2}\cdot u(x)\,dx,$$

$$(31_2)\qquad V(z)=\int\limits_{(\lambda)}(z-x)^{-\nu-2}\cdot v(x)\,dx$$

Lösungen der Differentialgleichungen $(m-r)$-ter Ordnung

$$(\mathsf{A}_z)\qquad \mathsf{A}_z(U)=0,$$

bez.

$$(\mathsf{A}_z')\qquad \mathsf{A}_z'(V)=0$$

dar, — in welch' letzteren wir somit die zu (A_x), bez. (A_x') alliirten Differentialgleichungen gewonnen haben. Zugleich zeigt sich, dass die Alliirten von zwei adjungirten Differentialgleichungen ebenfalls zu einander adjungirt sind.

Die Forderungen (30) werden erfüllt, wenn wir nach dem Vorgange des Herrn Schlesinger*) als Integrationswege Doppelschleifen benutzen, die einen singulären Punkt a von $u(x)$, bez. $v(x)$, also eine Nullstelle von $P_0(x)$, und den Punkt z umwinden. Bezeichnen wir mit (a, z) eine solche Doppelschleife, welche von einem regulären Punkte ausgehend zuerst positiv um a, dann positiv um z, weiter negativ um a und schliesslich negativ um z herumläuft und zu dem Ausgangspunkte zurückkehrt, so liefern die Perioden

$$U(z) = \int_{(a,z)} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\, dx, \tag{$31_1'$}$$

$$V(z) = \int_{(a,z)} (z-x)^{-\nu-2} \cdot v(x)\, dx \tag{$31_2'$}$$

Lösungen von (A_z), bez. (A_z').

Gehen wir noch einmal auf die Relationen (28) zurück, so zeigt uns die Symmetrie ihrer Structur unmittelbar, *dass die Beziehung einer Differentialgleichung zu ihrer Alliirten involutorischen Charakter hat.* In der That ist danach nicht nur die Differentialgleichung (A_z) alliirt zu (A_x), sondern auch umgekehrt (A_x) alliirt zu (A_z), desgleichen sind (A_x') und (A_z') zu einander alliirt; so dass, wenn $U(z)$, $V(z)$ Lösungen von (A_z), bez. (A_z') sind, die Formen

$$u(x) = \int_{(L)} (x-z)^{n} \cdot U(z)\, dz, \tag{32_1}$$

$$v(x) = \int_{(\Lambda)} (x-z)^{\nu} \cdot V(z)\, dz \tag{32_2}$$

bei geeigneter Wahl der Integrationswege L, Λ die Differentialgleichungen (A_x), bez. (A_x') erfüllen.

Bei einer gewissen Beschränkung lässt sich selbst zwischen zwei einzelnen solchen Lösungen $u(x)$ und $U(z)$ von zwei alliirten Differentialgleichungen eine vollständige Reciprocität erzielen. — Das zum singulären Punkte $x = a$ gehörende kanonische Fundamentalsystem enthält bekanntlich mindestens ein Element, welches sich bei Umlauf des Arguments um a nur um einen Factor ändert. Sei jetzt $u(x)$ ein derartiges Integral, und $e^{2\pi i\varrho}$ der Factor, den es durch den Umlauf aufnimmt, — wobei ganzzahlige Werthe von ϱ, n und $(\varrho - n)$ ausgeschlossen sein sollen, — so gestattet $u(x)$ in der Umgebung von a, in welcher auch z gelegen sei, eine Entwicklung nach steigenden und fallenden Potenzen von $(x-a)$:

*) Crelle's J. Bd. 116, pag. 106, oder „Handbuch", II, 1, pag 417.

$$u(x) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} c_\varkappa (x-a)^{\varrho+\varkappa}.$$

Daraus ergiebt sich nach Substitution von

$$(x-a) = (z-a)\xi$$

für

(31₁′) $$U(z) = \int_{(a,z)} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\, dx$$

die Entwicklung:

$$U(z) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} c_\varkappa (z-a)^{\varrho-n-1+\varkappa} \int_{(0,1)} \xi^{\varrho+\varkappa}(1-\xi)^{-n-2}\, d\xi,$$

oder, nach Ausführung der Integration:

$$U(z) = -(1-e^{2\pi i\varrho})(1-e^{-2\pi i n}) \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} c_\varkappa \frac{(\varrho+\varkappa)!\,(-n-2)!}{(\varrho-n-1+\varkappa)!} (z-a)^{\varrho-n-1+\varkappa},$$

welche zeigt, dass sich $U(z)$ bei Umlauf von z um a um den Factor $e^{2\pi i(\varrho-n)}$ ändert*). Schreiben wir dieselbe der Kürze halber:

$$U(z) = \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} C_\varkappa (z-a)^{\varrho-n-1+\varkappa},$$

so erhalten wir in gleicher Weise für

(32₁′) $$\bar{u}(x) = \int_{(a,x)} (x-z)^n \cdot U(z)\, dz$$

die Entwicklung:

$$\bar{u}(x) = -(1-e^{2\pi i(\varrho-n)})(1-e^{2\pi i n}) \sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty} C_\varkappa \frac{(\varrho-n-1+\varkappa)!\,n!}{(\varrho+\varkappa)!} (x-a)^{\varrho+\varkappa},$$

mithin unter Berücksichtigung des Werthes von $C_\varkappa$:

$$\bar{u}(x) = (1-e^{2\pi i\varrho})(1-e^{2\pi i(\varrho-n)})(1-e^{2\pi i n})(1-e^{-2\pi i n})\, n!\,(-n-2)!\, u(x),$$

oder, da

$$n!\,(-n-2)! = \frac{\pi}{(n+1)\sin(n\pi)}$$

und

$$(1-e^{2\pi i n})(1-e^{-2\pi i n}) = 4\sin^2(n\pi),$$

(33) $$\bar{u}(x) = (1-e^{2\pi i\varrho})(1-e^{2\pi i(\varrho-n)}) \cdot \frac{4\pi\sin(n\pi)}{(n+1)} \cdot u(x).$$

---

*) Vergl. hierzu Schlesinger, Crelle's J. Bd. 116, pag. 130, oder „Handbuch", II, 1, pag. 461.

Wir wollen zwei Formen $u(x)$ und $U(z)$, die gemäss ($31_1'$), ($32_1'$), (33) *in reciproker Beziehung stehen, als „zu einander alliirt" bezeichnen.* — Diese Reciprocität der beiden Integrale hängt ersichtlich aufs engste mit einer von Abel*) herrührenden Bemerkung zusammen: „Wenn

$$\varphi(z) = \int_0^z (z-x)^{n-1} \cdot f'(x)\,dx$$

gesetzt wird, so ist umgekehrt

$$f(t) - f(0) = \frac{\sin(n\pi)}{\pi} \int_0^t (t-z)^{-n} \cdot \varphi(z)\,dz,$$

vorausgesetzt, dass n ein positiver echter Bruch ist."

Wenn die Differentialgleichung (A_x) zu sich selbst adjungirt ist, so gilt nach (18'):

$$n = \nu = r - 1 - \frac{m}{2}.$$

Im Zusammenhange mit dem Vorigen muss dabei aber die Ordnung m von $P_0(x)$ als eine ungerade Zahl vorausgesetzt werden, weil andernfalls n einen nach (25) unzulässigen ganzzahligen Werth erhalten würde. Aus der Zusammenstellung von (26_1) und (26_2) schliesst man nun im Hinblick auf die Structur, welche $A_x(u)$ in diesem Falle gemäss (16') hat, sofort, dass

$$\mathsf{A}_z(U) = (-1)^{r+1}\,\mathsf{A}'_z(U) = (-1)^{m-r}\,\mathsf{A}'_z(U),$$

dass also auch die alliirte Differentialgleichung (A_z) *zu sich selbst adjungirt ist, und zwar entgegengesetzt, wenn* (A_x) *es direct ist, und umgekehrt.*

Es ist oben auf den invarianten Charakter der Beziehung von zwei alliirten Formen hingewiesen worden; derselbe tritt jetzt auch an der Gestalt der alliirten Differentialgleichungen unmittelbar in Evidenz. Beide bauen sich nämlich mit den gleichen Coefficienten $P_0, P_1, \cdots P_r$ auf, welche, wie leicht zu erweisen, nach Adjunction von P_0 *Combinanten der Integralschaaren* sind. — Vergleichen wir noch die Jacobi'schen Combinanten D der Lösungssysteme beider Differentialgleichungen; man erhält:

$$D\{u_1(x), u_2(x), \cdots u_r(x)\} = (P_0(x))^{\frac{r(n-r+1)}{m}} \cdot e^{-r\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx},$$

$$D\{U_1(x), U_2(x), \cdots U_{m-r}(x)\} = (P_0(x))^{\frac{(m-r)(\nu-r+1)}{m}} \cdot e^{-r\int \frac{P_1(x)}{P_0(x)}dx},$$

mithin:

$$D\{U_1 \cdots U_{m-r}\} = P_0^{\nu+1} \cdot D\{u_1 \cdots u_r\}.$$

---

*) Oeuvres t. I, Nr. II, „Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies", pag. 14, und Nr. IX, „Résolution d'un problème de mécanique", pag. 99—100.

Betrachtet man die Beziehung einer vorgelegten Differentialgleichung (A_x) zu ihrer Alliirten (A_z) aus dem Gesichtspunkte der Integration der ersteren, so tritt durch den Uebergang auf die letztere eine Reduction des Integrationsproblems nur dann ein, wenn diese von kleinerer Ordnung ist als jene, wenn also $m < 2r$ ist.

Wir gehen nun noch auf die aus der bisherigen Erörterung ausgeschlossene, aber an sich zulässige Annahme ein, dass $m = 2r$, $n = \nu = -1$ ist. — In diesem Falle erhält die Relation (24_1), wie man zufolge (17) sogleich bemerkt, die einfache Gestalt:

$$(24') \qquad A_x\left(\frac{1}{z-x}\right) = A'_z\left(\frac{1}{z-x}\right).$$

Es geht daraus hervor, *dass jetzt die Differentialgleichung* (A_x) *zu sich selbst alliirt ist,* und umgekehrt erkennt man, dass zum Zusammenfallen einer Differentialgleichung mit ihrer Alliirten die obigen Bedingungen erforderlich sind. In der That ist ja auch in diesem Falle bei geeigneter Wahl des Integrationsweges das Integral

$$U(z) = \int\limits_{(l)} \frac{u(x)\,dx}{z-x}$$

nichts anderes als das Cauchy'sche Integral, welches $u(z)$ mit einem constanten Factor reproducirt. — Wir lassen diesen Fall künftig bei Seite und nehmen weiterhin überhaupt an, dass $m > 2r$, dass also die alliirte Differentialgleichung von höherer Ordnung ist als die vorgelegte.

Das Ergebniss dieser Entwickelungen fassen wir in folgenden Sätzen zusammen:

Theorem I. *Ist* $\mathsf{A}_z(U) = 0$ *die zu* $A_x(u) = 0$ *alliirte Differentialgleichung, so ist auch reciprok die letztere zur ersteren alliirt. Bei geringfügiger Modification der bisher benutzten Normirung tritt diese Reciprocität unmittelbar in ihrer Gestalt zu Tage; setzt man die eine in die Form:*

$$A_x(\overset{n}{u}) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r} \frac{n!}{(n-r+\varkappa)!}\,\{P_\varkappa(x),\, u\}_{r-\varkappa} = 0,$$

so lautet die andere:

$$\mathsf{A}_z(\overset{N}{U}) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{R} \frac{N!}{(N-R+\varkappa)!}\,\{P_\varkappa(z),\, U\}_{R-\varkappa} = 0,$$

wobei

$$r + R = m, \qquad n + N = -2$$

ist. Ihre Lösungen stehen generell in der gegenseitigen Beziehung:

$$U(z) = \int\limits_{(l)} (z-x)^{-n-2}\cdot u(x)\,dx, \qquad u(x) = \int\limits_{(L)} (x-z)^{n}\cdot U(z)\,dz.$$

Ist die Lösung $u(x)$ speciell so beschaffen, dass sie sich bei Umlauf des Arguments um einen singulären Punkt $x = a$ nur um den von 1 verschiedenen Factor ε ändert, so besteht zwischen den alliirten Formen $u(x)$ und $U(z)$ die Reciprocität, dass, wenn

$$U(z) = \int\limits_{(a,z)} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\, dx$$

gesetzt wird, umgekehrt

$$u(x) = \frac{(n+1)}{4\pi \sin(n\pi)\cdot(1-\varepsilon)(1-\varepsilon e^{-2\pi i n})} \int\limits_{(a,x)} (x-z)^n \cdot U(z)\, dz$$

stattfindet.

Theorem II. *Die Alliirten von zwei zu einander adjungirten Differentialgleichungen sind ebenfalls zu einander adjungirt.* Oder auch: *Die Adjungirten von zwei zu einander alliirten Differentialgleichungen sind ebenfalls zu einander alliirt.* Oder auch: *Die Processe der Bildung der Adjungirten und der Alliirten einer Differentialgleichung sind vertauschbar.*

Theorem III. *Ist ein Differentialausdruck zu sich selbst direct, bez. entgegengesetzt adjungirt, so ist sein alliirter Differentialausdruck zu sich selbst entgegengesetzt, bez. direct adjungirt.*

§ 4.

Alliirte Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse.

Wir wollen die Beziehungen zwischen zwei alliirten Differentialgleichungen noch weiter verfolgen, indem wir die specielle Voraussetzung einführen, dass die zu Grunde gelegte Gleichung (A_x) der Fuchs'schen Klasse angehört, — eine Annahme, auf welche wir uns künftig im wesentlichen beschränken werden. Wir haben dazu nur nöthig, die hierauf bezüglichen Darlegungen des Herrn Schlesinger unserem Standpunkt entsprechend zu modificiren.

Der Coefficient $P_0(x)$ der höchsten Ableitung in $A_x(u)$ wird unter der in Rede stehenden Voraussetzung durch ein Product

$$(34) \qquad P_0(x) = (x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2}\cdots(x-a_\mu)^{s_\mu}$$

dargestellt, worin die Exponenten $s_1, s_2 \cdots s_\mu$ kleiner oder gleich r sind, während ihre Summe

$$(35) \qquad s_1 + s_2 + \cdots + s_\mu = m$$

ist; und jeder weitere Coefficient $P_\varkappa(x)$ ist bez. durch diejenigen unter den Potenzen

$$(x-a_1)^{s_1-\varkappa},\ (x-a_2)^{s_2-\varkappa},\cdots(x-a_\mu)^{s_\mu-\varkappa}$$

divisibel, welche einen positiven Exponenten haben. Da nun diese die

Zugehörigkeit zur Fuchs'schen Klasse charakterisirenden Bedingungen gleichzeitig für die alliirte Differentialgleichung $\mathsf{A}_z(U) = 0$ erfüllt sind, so gehört dieselbe ebenfalls der Fuchs'schen Klasse an.

Stellt man ferner für beide Differentialgleichungen die determinirenden Gleichungen eines singulären Punktes $x = a_i$ auf und setzt sie zu einander in Beziehung, so ergiebt sich durch eine leichte Rechnung folgendes Verhältniss: unter den Wurzeln der determinirenden Gleichung von (A_x) fallen $(r - s_i)$ auf die Zahlen

$$0, 1, 2, \cdots (r - s_i - 1);$$

die übrigen mögen mit

$$\varrho_{i1}, \varrho_{i2}, \cdots \varrho_{i,s_i}$$

bezeichnet werden; von den Wurzeln der determinirenden Gleichung von (A_z) haben dann $(m - r - s_i)$ die Werthe

$$0, 1, 2, \cdots (m - r - s_i - 1),$$

und die s_i noch ausstehenden sind durch die Grössen

$$(\varrho_{i1} - n - 1),\ (\varrho_{i2} - n - 1), \cdots (\varrho_{i,s_i} - n - 1)$$

gegeben*).

Der Einfachheit halber werde für jeden singulären Punkt a_i das Auftreten ganzzahliger Exponenten $\varrho_{i\lambda}$ sowie ganzzahliger Differenzen derselben ausgeschlossen; desgleichen seien die Ordnung n und ihre Differenzen von sämmtlichen Werthen $\varrho_{i\lambda}$ nicht ganze Zahlen. Unter dieser Annahme, durch welche das Vorkommen von Logarithmen im Aufbau der Integrale vermieden wird, enthält das zu $x = a_i$ gehörige kanonische Fundamentalsystem von (A_x) neben $(r - s_i)$ regulären Integralen s_i Integrale $u_{i\lambda}$ von dem Charakter

$$u_{i\lambda}(x) \sim (x - a_i)^{\varrho_{i\lambda}}. \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots s_i)$$

Bildet man nun die zu letzteren alliirten Formen

$$U_{i\lambda}(z) = \int\limits_{(a_i, z)} (z - x)^{-n-2} \cdot u_{i\lambda}(x)\, dx, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots s_i) \tag{36}$$

so stellen dieselben die correspondirenden Integrale der alliirten Differentialgleichung (A_z) dar, die dem kanonischen Fundamentalsystem von $z = a_i$ angehören und das Verhalten

$$U_{i\lambda}(z) \sim (z - a_i)^{\varrho_{i\lambda} - n - 1}$$

aufweisen.

*) Vergl. Schlesinger, Crelle's J. Bd. 116, pag. 111 und 130, oder „Handbuch", II, 1, pag. 423 und 453.

Die gesammte Anzahl der Integrale von (A_z), die wir auf diese Weise erhalten, beträgt $\sum_{i=1}^{\mu} s_i = m$; sie müssen demnach r linearen homogenen Relationen mit constanten Coefficienten genügen, die sich folgendermassen construiren lassen. — Wird mit $\int\limits_{(a)}$ angedeutet, dass die Integration von einem beliebigen regulären Punkte b aus längs einer Schleife in positiver Richtung um den Punkt a herum nach b zurück geführt wird, so gilt zunächst:

$$
\begin{aligned}
(37) \qquad U_{i\lambda}(z) = &(1 - e^{-2\pi i n}) \int\limits_{(a_i)} (z-x)^{-n-2} \cdot u_{i\lambda}(x)\, dx \\
&- (1 - e^{2\pi i \varrho_{i\lambda}}) \int\limits_{(z)} (z-x)^{-n-2} \cdot u_{i\lambda}(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

Ist nun $\tilde{u}(x)$ irgend ein Integral von (A_x), und erstreckt man die Integration von

$$\tilde{U}(z) = \int\limits_{(C)} (z-x)^{-n-2} \cdot \tilde{u}(x)\, dx$$

über eine geschlossene Curve C, welche den Punkt z und sämmtliche singulären Punkte a_i einschliesst, so ist einerseits

$$(38) \qquad \tilde{U}(z) = 0;$$

andrerseits lässt sich $\tilde{U}$ durch die Summe von Schleifenintegralen

$$(39) \qquad \tilde{U}(z) = \int\limits_{(z)} (z-x)^{-n-2} \cdot \tilde{u}(x)\, dx + \sum_{i=1}^{\mu} \int\limits_{(a_i)} (z-x)^{-n-2} \cdot \tilde{u}_i(x)\, dx$$

ausdrücken, wobei die Formen $\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x), \cdots \tilde{u}_\mu(x)$ die aus der successiven Durchlaufung der Schleifen hervorgehenden analytischen Fortsetzungen von $\tilde{u}(x)$ bedeuten. Stellt man $\tilde{u}_i(x)$ durch das zu a_i gehörige kanonische Fundamentalsystem dar, so reducirt sich

$$\int\limits_{(a_i)} (z-x)^{-n-2} \cdot \tilde{u}_i(x)\, dx$$

offenbar auf ein Aggregat der s_i Integrale

$$\int\limits_{(a_i)} (z-x)^{-n-2} \cdot u_{i\lambda}(x)\, dx; \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots s_i)$$

und wenn diese vermöge (37) durch die $U_{i\lambda}(z)$ ersetzt werden, so ergiebt sich aus der Zusammenstellung von (38) und (39) eine lineare homogene Relation zwischen den m Integralen $U_{i\lambda}(z)$ und einem um z herum erstreckten Schleifenintegral

$$\overline{U}(z) = \int\limits_{(z)} (z-x)^{-n-2} \cdot \bar{u}(x)\, dx,$$

worin $\bar{u}(x)$ eine gewisse Lösung von (A_x) bedeutet. Letztere muss aber identisch Null sein; denn andernfalls würde zufolge der gewonnenen Relation selbst $\overline{U}(z)$ eine Lösung von (A_z) darstellen, was, wie die Bedingung (30_1) zeigt, durch die Annahme eines nicht ganzzahligen n ausgeschlossen ist. — Indem man für $\tilde{u}(x)$ die r Elemente eines Fundamentalsystems wählt, erhält man auf diese Weise die in Aussicht gestellten r homogenen linearen Relationen unter den m Integralen $U_{i\lambda}(z)$ von (A_z).

Dass aber nicht mehr als r solche Relationen stattfinden können, dass sich also aus den m $U_{i\lambda}(z)$ stets ein Fundamentalsystem von $(m-r)$ Elementen auswählen lässt, ist leicht folgendermassen einzusehen. Angenommen, es wären nur $p < (m-r)$ unter den $U_{i\lambda}(z)$ linear-unabhängig, so würden sämmtliche m Formen $U_{i\lambda}$ eine lineare Differentialgleichung p-ter Ordnung $\mathsf{B}_z(U) = 0$ erfüllen. Das kanonische Fundamentalsystem derselben am singulären Punkte $z = a_i$ bestünde aus den s_i Integralen $U_{i1}, U_{i2}, \cdots U_{i,s_i}$ und, wenn $s_i < p$ ist, noch anderen Elementen, welche letzteren sich regulär verhalten. Alle diese Elemente reproduciren sich bei Umlauf von z um a_i nur mit einem constanten Factor, und da das Gleiche auch für den unendlich fernen Punkt gilt, so ergiebt sich durch eine bekannte Schlussweise, dass die Coefficienten der Differentialgleichung $\mathsf{B}_z(U) = 0$ rationale Functionen sind, die wir sogleich als ganze Functionen ansetzen dürfen. Ist nun $U(z)$ ein solches Integral von $\mathsf{A}_z(U) = 0$, welches $\mathsf{B}_z(U)$ nicht annullirt, so würde sich hiernach die Function

$$W(z) = \mathsf{B}_z(U(z))$$

in der Umgebung jedes singulären Punktes a_i regulär verhalten, also überall im Endlichen endlich und eindeutig sein, dagegen in der Umgebung von $z = \infty$ den Charakter einer mehrdeutigen Potenz z^N haben, wo der Exponent N um eine ganze Zahl von $(-n)$ differirt. Dies wäre nur dadurch möglich, dass $W(z)$ identisch Null ist, was einen Widerspruch involvirt.

Demnach leisten unter den oben hervorgehobenen Annahmen die in Rede stehenden Perioden (36) *die vollständige Integration der alliirten Differentialgleichung.*

Aber diese Thatsache wird im allgemeinen auch dann noch Bestand haben, wenn man jene Einschränkungen aufhebt, indem die in Betracht kommenden Möglichkeiten sich als Grenzfälle des soeben besprochenen Falles ansehen und durch geeigneten Grenzübergang erledigen lassen werden.

§ 5.

Zusammengesetzte alliirte Differentialausdrücke.

Es sei $B_x(w)$ ein Aggregat von Ueberschiebungen ganzer rationaler Formen mit der Form w, von analogem Charakter wie $A_x(u)$; wir setzen darin $w(x) = A_x(u)$ ein und bilden so den *zusammengesetzten Differentialausdruck* $B_x A_x(u)$, *dessen alliirten wir im Folgenden zu construiren beabsichtigen.*

Die Zahlen r', m', n', ν', bez. R, M, N, N mögen für $B_x(w)$, bez. $B_x A_x(u)$ die analoge Bedeutung haben wie r, m, n, ν für $A_x(u)$. Da w die Ordnung von $A_x(u)$ haben muss, so ist

$$n' = m + n - 2r = -\nu - 2; \tag{40}$$

weiter ist offenbar

$$\begin{aligned} R &= r + r', \\ M &= m + m', \\ N &= n, \end{aligned} \tag{41}$$

und gemäss (18)

$$\begin{aligned} n + \nu &= 2r - 2 - m, \\ n' + \nu' &= 2r' - 2 - m', \\ N + \mathsf{N} &= 2R - 2 - M, \end{aligned}$$

woraus sich

$$\mathsf{N} = \nu' \tag{42}$$

ergiebt. — Wendet man nun auf die Identität (28_2)

$$A_x[(z-x)^n] = \mathsf{A}'_z[(z-x)^{-\nu-2}] \tag{43}$$

— unter Vernachlässigung des hier nebensächlichen numerischen Factors — die Operation B_x an und berücksichtigt die Vertauschbarkeit der Differentiationssymbole in bezug auf x und z, so folgt mit Benutzung von (40):

$$B_x A_x[(z-x)^n] = \mathsf{A}'_z B_x[(z-x)^n].$$

Bezeichnet man den zu B_x alliirten Ausdruck mit B_z und dessen adjungirten mit B'_z, so gilt nach Analogie von (43):

$$B_x[(z-x)^{n'}] = \mathsf{B}'_z[(z-x)^{-\nu'-2}],$$

mithin unter Anwendung von (41) und (42):

$$B_x A_x[(z-x)^N] = \mathsf{A}'_z \mathsf{B}'_z[(z-x)^{-\mathsf{N}-2}].$$

Daraus geht aber im Vergleich mit (43) hervor, dass der zu $B_x A_x(u)$ alliirte Differentialausdruck zu $\mathsf{A}'_z \mathsf{B}'_z(V)$ adjungirt, also auf Grund des

Reciprocitätssatzes von Thomé-Frobenius mit $\mathsf{B}_z\mathsf{A}_z(U)$ identisch ist. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Theorem IV. *Wenn die Differentialpolynome $A_x(u)$ und $\mathsf{A}_z(U)$, sowie $B_x(w)$ und $\mathsf{B}_z(W)$ zu einander alliirt sind, so gilt das Gleiche von den zusammengesetzten Ausdrücken $B_xA_x(u)$ und $\mathsf{B}_z\mathsf{A}_z(U)$.* Oder: *Der alliirte Ausdruck eines Products ist gleich dem Product der Alliirten der einzelnen Factoren, unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge.*

Mit Hülfe dieses Satzes lässt es sich leicht beurtheilen, welchen Einfluss die Multiplication eines Differentialausdrucks mit einem Factor auf den alliirten Ausdruck ausübt. Ist nämlich $B_x(w)$ ein Polynom nullter Ordnung:

$$B_x(w) = Q(x)\cdot w,$$

wo $Q(x)$ eine ganze rationale Form von der Ordnung m' darstellt, so gilt

$$\mathsf{B}_z(W) = \{\, Q(z),\ W\}_{m'},$$

worin $W(z)$ die Ordnung ν beizulegen ist; und wir erhalten folglich für den Alliirten des Ausdrucks $Q(x)\cdot A_x(u)$:

$$\{\, Q(z),\ \mathsf{A}_z(U)\}_{m'}.$$

Die aus der Nullsetzung des letzteren hervorgehende homogene Differentialgleichung kann ersetzt werden durch die inhomogene Gleichung:

$$\mathsf{A}_z(U) = W(z),$$

wenn $W(z)$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\{Q(z),\ W\}_{m'} = 0$$

bedeutet. Wir erhalten dasselbe sofort aus der Bemerkung, dass zufolge (43) die Identität stattfindet:

$$\{\, Q(z),\ (z-x)^{\nu}\}_{m'} = Q(x)\cdot(z-x)^{\nu-m'};$$

nennt man nämlich $q_1, q_2, \cdots q_{m'}$ die Wurzeln der Gleichung

$$Q(x) = 0,$$

so sind hiernach die Potenzen $(z-q_\varkappa)^\nu$ particuläre Integrale, welche das allgemeine Integral

$$W(z) = \sum_{\varkappa=1}^{m'} c_\varkappa (z-q_\varkappa)^\nu$$

liefern. — Dieser Ausdruck ist noch in bekannter Weise durch Grenzübergang zu modificiren, wenn einige der Wurzeln $q_\varkappa$ zusammenfallen. —

Multiplicirt man also die Differentialgleichung $A_x(u) = 0$ mit dem Factor $Q(x)$ von der Ordnung m', so tritt an die Stelle ihrer Alliirten $\mathsf{A}_z(U) = 0$ die inhomogene Gleichung

$$\mathsf{A}_z(U) = \sum_{\varkappa=1}^{m'} c_\varkappa(z-q_\varkappa)^\nu,$$

welche m' fremde Lösungen mit sich bringt.

§ 6.

Alliirte Klassen von Differentialgleichungen.

Ebenso wie man in der Theorie der algebraischen Functionen den Inbegriff aller derjenigen Functionen in Untersuchung zieht, welche zu derselben Riemann'schen Fläche gehören, so hat man im Gebiete der Functionen, die durch lineare Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse definirt werden, die Gesammtheit der Functionenschaaren in Betracht zu nehmen, welche dieselben Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte und die gleiche Monodromiegruppe besitzen. Nach dem Vorgange von Riemann*) fassen wir alle solche Systeme in eine „Klasse" zusammen und wollen sie mit einander „verwandt" nennen, — Bezeichnungen, welche auch auf die Differentialgleichungen übertragen werden. In der angedeuteten Ideenrichtung haben wir nun von unserm Standpunkte aus die — bereits von Herrn Schlesinger**) erörterte — Frage zu behandeln, *in welcher Beziehung die Alliirten von zwei verwandten Differentialgleichungen und ihre Lösungen zu einander stehn.*

Die correspondirenden Zweige von zwei verwandten Formenschaaren sind durch eine Relation

$$w(x) = F_x(u(x)) \tag{44}$$

verbunden, in welcher $F_x(u)$ ein lineares Differentialpolynom mit rationalen Coefficienten darstellt. Wir beschränken uns auf die Annahme, dass diese Coefficienten ganze Formen sind, — wodurch die Allgemeinheit nicht wesentlich beeinträchtigt wird, — und denken uns $F_x(u)$ als Aggregat von Ueberschiebungen gegeben, mit den charakteristischen Zahlen r', m', $n' = n$, ν', aus denen für w die Ordnung $(-\nu'-2)$ resultirt. Durch die Transformation (44) geht die Differentialgleichung

$$A_x(u) = 0$$

über in eine Differentialgleichung

$$B_x(w) = 0,$$

deren charakteristische Zahlen $r'' = r$, m'', $n'' = (-\nu'-2)$, ν'' sein mögen; und zwar wird im allgemeinen infolge des Hinzutretens von ausserwesentlich singulären Punkten $m'' > m$ ausfallen. Ihre alliirten Differentialgleichungen

$$\mathsf{A}_z(U) = 0,$$

bez.

$$\mathsf{B}_z(W) = 0$$

*) Ges. Werke, 2te Aufl. „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten", pag. 380.

**) Crelle's J. Bd. 117, Nr. III, IV; oder „Handbuch" II, 1. Nr. 239, 240.

sind von der Ordnung $(m-r)$, bez. $(m''-r)$ und haben zu Lösungen die Perioden:

$$U(z)=\int_{(a,z)}^{s}(z-x)^{-n-2}\cdot u(x)\,dx,$$

bez.

$$W(z)=\int_{(a,s)}^{e}(z-x)^{\nu'}\cdot w(x)\,dx.$$

Es ist nun vermöge (44)

$$W(z)=\int_{(a,s)}^{e}(z-x)^{\nu'}\cdot F_x(u)\,dx,$$

also, wenn man unter Anwendung der Lagrange'schen Relation partiell integrirt:

$$W(z)=\int_{(a,s)}u(x)\cdot F'_x[(z-x)^{\nu'}]\,dx+\int_{(a,z)}dF_x[u(x),\ (z-x)^{\nu'}].$$

Hier verschwindet der zweite Term; für den ersten berücksichtige man, dass nach (43) die Relation

$$F'_x[(z-x)^{\nu'}]=\Phi_z[(z-x)^{-n'-2}]$$

stattfindet, worin Φ_z den zu F_x alliirten Ausdruck bedeutet. Damit hat man:

$$W(z)=\int_{(a,s)}u(x)\cdot\Phi_z[(z-x)^{-n-2}]\,dx=\Phi_z\left\{\int_{(a,s)}(z-x)^{-n-2}\cdot u(x)\,dx\right\},$$

also schliesslich:

(45) $$W(z)=\Phi_z(U(z)).$$

Lautet z. B. die Transformation (44) speciell:

(44') $$w(x)=Q(x)\cdot u(x),$$

so finden wir nach (45):

(45') $$W(z)=\{Q(z),\ U(z)\}_{m'}.$$

Zufolge der gewonnenen Beziehung (45) sind demnach die Perioden $W(z)$ mit den $U(z)$ verwandt und erfüllen eine mit der Differentialgleichung

$$\mathsf{A}_z(U)=0$$

verwandte Gleichung $(m-r)$-ter Ordnung

$$\bar{\bar{\mathsf{B}}}_z(W)=0;$$

dieselbe ist für $m''=m$ mit der Gleichung

$$\mathsf{B}_z(W)=0$$

identisch, während für $m'' > m$ letztere reducibel wird und sich in der zusammengesetzten Form

$$\mathsf{B}_z(W) = \Gamma_z\,\ddot{\mathsf{B}}_z(W) = 0$$

darstellen lässt.

Wir formuliren dieses Ergebniss in dem

Theorem V. *Stehen zwei Formen $u(x)$ und $w(x)$ durch die Transformation*

$$w(x) = F_x(u)$$

in Beziehung, so sind die mit ihnen bez. alliirten Formen $U(z)$ und $W(z)$, die auf dem gleichen Integrationswege gebildet sind, durch die mit der ersteren alliirte Transformation

$$W(z) = \Phi_z(U)$$

verbunden. Die Alliirte der transformirten Differentialgleichung ist mit der Transformirten der alliirten Gleichung identisch oder enthält sie unter sich.

Man kann hiernach —, da im Falle, dass die Transformation (44) gebrochene Coefficienten enthält, im wesentlichen dasselbe Verhältniss hervorgeht, — den Begriff des Alliirtseins zweier einzelner Differentialgleichungen in gewisser Weise übertragen auf die Klassen von Differentialgleichungen, welche durch jene repräsentirt werden. Zwar constituiren die Alliirten der Differentialgleichungen einer Klasse nicht selbst eine Klasse; aber sie lassen sich durch Ausscheidung von „accessorischen Lösungen“ auf solche Differentialgleichungen reduciren, welche ihrerseits eine Klasse bilden. *Diese letztere wird man als die zur ursprünglichen Klasse alliirte Klasse bezeichnen können.*

Im Interesse einer präciseren Fassung dieses Begriffs müsste man indess zuvor die Aufgabe erledigen, innerhalb einer vorgelegten Klasse von linearen Differentialgleichungen eine solche Repräsentantin derselben ausfindig zu machen, für welche die Zahl m, d. h. die Anzahl ihrer singulären Punkte, letztere mit ihrer Multiplicität gezählt, möglichst klein ist; — *denn von diesem minimalen m hängt die wahre Anzahl $(m-r)$ der linear-unabhängigen Perioden ab.* — Doch gehen wir auf die angedeutete Frage nicht näher ein, da sie trotz ihrer principiellen Wichtigkeit bei den engeren Voraussetzungen, die wir im Verlaufe der Untersuchung treffen werden, nicht in Betracht kommt.

§ 7.

Die überall endlichen Integrale reciproker Formenschaaren.

Während wir im Vorhergehenden unmittelbar die Perioden der Integrale einer Formenschaar in ihrer Abhängigkeit von einem Parameter untersucht haben, wollen wir an dieser Stelle die *unbestimmten* Integrale der

Formenschaar selbst in Betracht ziehen. Es empfiehlt sich dabei, über den Kreis der oben herangezogenen „verwandten“ Formen hinauszugehen und die Gesammtheit derjenigen Formenschaaren zu Grunde zu legen, welche mit einer gegebenen zur gleichen „Art“ gehören; dieselben besitzen die nämlichen Verzweigungspunkte und um diese herum die gleichen Substitutionen, können aber in anderen Punkten, in deren Umgebung sie sich eindeutig verhalten, polare Unstetigkeiten erleiden. — Die einzelne Formenschaar, welche hiernach die ganze Art bestimmt, construiren wir, indem wir ein System von Lösungen der Differentialgleichung

$$(A_x) \qquad A_x(\overset{n}{u}) = 0,$$

die der Fuchs'schen Klasse angehören und irreductibel sein soll, mit dem Factor

$$(x-z)^{-n}$$

multipliciren, worin z einen willkürlichen Parameter bedeutet. Die mit dieser zur gleichen Art gehörenden, also gleichgruppigen Formenschaaren wollen wir kurz als *„Formen der Gruppe“*, speciell, wenn ihre Ordnung gleich Null ist, als *„Functionen der Gruppe“* bezeichnen; es liegt dabei die Vorstellung zu Grunde, dass die Gruppe gewissermassen als primär gegeben anzusehen ist, und dass sie durch die zu ihr gehörenden Formenschaaren erst realisirt wird. — Wenn wir in diesem Zusammenhange von einer „Form“ anstatt einer „Formenschaar“ sprechen, so rechtfertigt sich diese der Kürze halber gebrauchte Ausdrucksweise durch den Umstand, dass auf Grund der vorausgesetzten Irreductibilität sich aus der einzelnen Form stets r linear-unabhängige Zweige ableiten lassen, die als Fundamentalsystem der Schaar dienen können.

Greift man nun aus der Gesammtheit der Formen der Gruppe, — welche offenbar eine ganzzahlige Ordnung besitzen, — diejenigen von der Ordnung (-2) heraus, so liefert deren Integration gewisse Functionen von — im allgemeinen — andersartigem Charakter, die wir im Gegensatze zu den „Functionen der Gruppe“ *„Integralfunctionen der Gruppe“* nennen. Sie unterscheiden sich von jenen dadurch, dass sie bei den durch Umläufe des Arguments veranlassten linearen Substitutionen noch additive Constanten aufnehmen; beschreibt die Variable x insbesondere einen solchen geschlossenen „Periodenweg“, auf dem die Elemente der integrirten Formenschaar einzeln zu ihren Ausgangswerthen zurückgelangen, — wie es beispielsweise bei einem Doppelumlauf um einen Verzweigungspunkt und den Parameter z der Fall ist, — so vermehren sich dabei die Integralfunctionen um gewisse Grössen, die wir „eigentliche Perioden“ nennen.

Indem wir uns im Folgenden ausschliesslich mit den *überall endlichen Integralfunctionen* beschäftigen, werfen wir die Frage auf, *aus* *wieviel linear-unabhängigen Schaaren sich die Gesammtheit der überall endlichen Integralfunctionen der Gruppe linear mit willkürlichen constanten Coefficienten zusammensetzt.* — Für die Beantwortung derselben ist es nothwendig, zu berücksichtigen, dass sich bei der Erzeugung der überall endlichen Integralfunctionen vermittelst Integration geeigneter Formen (-2)-ter Ordnung neben den eigentlichen „Integralfunctionen" auch die überall endlichen „Functionen der Gruppe" einstellen, welche jenen nicht zugerechnet werden können, da sie keine „eigentlichen Perioden" besitzen. Daraus geht hervor: Die fragliche Anzahl N ist gleich der Anzahl N_1 derjenigen linear-unabhängigen Formenschaaren der Gruppe von der Ordnung (-2), welche in den Verzweigungspunkten von geringerer als der ersten Ordnung unendlich gross werden und sonst überall stetig sind, vermindert um die Anzahl N_2 der linear-unabhängigen Formenschaaren der Gruppe von der Ordnung 0, welche überall endlich sind.

Die gestellte Frage soll nun unter den folgenden einschränkenden Voraussetzungen ihre Erledigung finden:

1) die Ordnung n der Lösungen u von (A_x) ist von einer ganzen Zahl verschieden;

2) die Differentialgleichung (A_x) besitzt keine singulären Punkte, in deren Umgebung sich die Lösungen eindeutig verhalten;

3) die Wurzeln der determinirenden Gleichung eines jeden der singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\mu$ sind von einander verschieden und haben als reelle Bestandtheile negative echte Brüche.

Die Ordnung r der Differentialgleichung (A_x) sei vorerst grösser als 1 angenommen.

Setzt man

$$(46) \qquad (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\mu) = f(x),$$

so ist hiernach der Coefficient der höchsten Ableitung in $A_x(u)$

$$(47) \qquad P_0(x) = (f(x))^r,$$

seine Ordnung

$$(48) \qquad m = \mu r,$$

und es ist unmittelbar ersichtlich, dass auf Grund der getroffenen Festsetzungen die entsprechende Zahl bei keiner mit der gegebenen zur gleichen Klasse oder Art gehörenden Differentialgleichung niedriger ausfallen kann, *dass also $(m-r)$ die wahre Anzahl der in bezug auf z linear-unabhängigen Perioden der überall endlichen Integralfunctionen giebt.*

Zur Darstellung der Formen $w(x)$, welche mit einer Lösung $u(x)$ von (A_x) die Verzweigungspunkte und Umlaufssubstitutionen gemein haben, bilden wir zunächst eine Basis aus den r mit $u(x)$ covarianten Elementen:

$$u, (f, u)_1, (f^2, u)_2, \cdots, (f^{r-1}, u)_{r-1}.$$

Sie sind, wie aus den Annahmen 2) und 3) hervorgeht, so gewählt, dass sie in den singulären Punkten von geringerer als der ersten Ordnung unendlich gross werden und sich sonst überall endlich verhalten. Mit Hülfe derselben lässt sich w in die Gestalt setzen*):

$$(49)\quad w=\varphi_0(x)\cdot u+\varphi_1(x)\cdot(f,u)_1+\varphi_2(x)\cdot(f^2,u)_2+\cdots+\varphi_{r-1}(x)\cdot(f^{r-1},u)_{r-1},$$

worin die Coefficienten $\varphi_\varkappa(x)$ rationale Formen bedeuten, deren Ordnungen diejenigen ihrer Factoren zur Ordnung von w ergänzen. Umgekehrt gehört auch jeder Ausdruck von dieser Beschaffenheit mit u zur gleichen Art.

Sind die $\varphi_\varkappa(x)$ speciell ganze Formen, so wird w in den singulären Punkten von geringerer als der ersten Ordnung unendlich gross und ist sonst überall endlich; und umgekehrt, wenn w mit dieser Beschaffenheit vorausgesetzt wird, so müssen die $\varphi_\varkappa(x)$ ganze Formen sein, also insbesondere den Werth Null haben, wenn ihnen durch die Ordnung von w eine negative Ordnung vorgeschrieben wird. — Der erste Theil dieser Behauptung ist evident; zum Beweise des zweiten Theils berechne man aus den r linearen Gleichungen

$$(49')\qquad w_i=\sum_{\varkappa=0}^{r-1}\varphi_\varkappa(x)\cdot(f^\varkappa(x),\,u_i)_\varkappa,\qquad (i=1,2,\cdots r)$$

welche die correspondirenden Formenzweige u_i und w_i verbinden, die Coefficienten $\varphi_\varkappa(x)$; man erhält:

$$\varphi_\varkappa(x)=\frac{\left|(f^0,u_i)_0\,(f^1,u_i)_1\cdots(f^{\varkappa-1},u_i)_{\varkappa-1}\quad w_i\quad(f^{\varkappa+1},u_i)_{\varkappa+1}\cdots(f^{r-1},u_i)_{r-1}\right|}{\left|(f^0,u_i)_0\,(f^1,u_i)_1\cdots(f^{\varkappa-1},u_i)_{\varkappa-1}\,(f^\varkappa,u_i)_\varkappa\,(f^{\varkappa+1},u_i)_{\varkappa+1}\cdots(f^{r-1},u_i)_{r-1}\right|}.$$
$$(i=1,2,\cdots r)$$

Ist nun $x=a_\lambda$ einer der singulären Punkte und σ_λ die Summe der Wurzeln seiner determinirenden Gleichung, so verhält sich der Zähler dieses Bruches in der Umgebung von a_λ zufolge der über w gemachten Voraussetzung wie

$$(x-a_\lambda)^{\sigma_\lambda}\,\Phi_\varkappa(x-a_\lambda),$$

worin $\Phi_\varkappa$ eine nach ganzen positiven Potenzen ihres Arguments fortschreitende Reihe bedeutet. Der Nenner reducirt sich auf das Product

$$(f(x))^{\frac{r(r-1)}{2}}\cdot\left|u_i^{(\varkappa)}\right|,\qquad \binom{i=1,2,\cdots r}{\varkappa=0,1,\cdots(r-1)}$$

oder, da die Hauptdeterminante der u_i,

$$\left|u_i^{(\varkappa)}\right|=\prod_{\alpha=1}^{\mu}(x-a_\alpha)^{\left[\sigma_\alpha-\frac{r(r-1)}{2}\right]}$$

*) Vgl. Riemann, l. c. pag. 383.

ist, auf

$$\prod_{\alpha=1}^{\mu}(x-a_\alpha)^{\sigma_\alpha}.$$

Da hiernach $\varphi_\varkappa(x)$ für die Verzweigungspunkte endlich und eindeutig ausfällt und auch sonst im Endlichen keine Unstetigkeit erleidet, so ist $\varphi_\varkappa$ eine ganze Function, oder in homogener Auffassung eine ganze Form. — q. e. d.

Nachdem damit festgestellt ist, dass zur Construction der in Frage kommenden Formen w ausschliesslich ganze Coefficienten $\varphi_\varkappa(x)$ zur Verwendung gelangen, haben wir noch deren Ordnungen zu bestimmen. — Zufolge einem bekannten Satze über die Summe der Wurzeln aller determinirenden Gleichungen einer Differentialgleichung*) ist die Ordnung n mit den Zahlen σ_λ durch die Relation verbunden:

$$(50) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\mu}\sigma_\lambda - rn = (\mu-2)\frac{r(r-1)}{2},$$

aus der mit Berücksichtigung des für die determinirenden Wurzeln in 3) vorgeschriebenen Intervalls die Ungleichung hervorgeht:

$$(51) \qquad \frac{(\mu-2)(r-1)}{2} < (-n) < \frac{(\mu-2)(r+1)}{2} + 2.$$

Die — übrigens trivialen — Fälle $\mu=1$ und $\mu=2$ sind auszuschliessen, da für sie die Differentialgleichung (A_r) stets reductibel wird, sobald $r>1$ ist. Gemäss (51) ist also $(-n)$ eine positive Zahl.

Es sei α die grösste ganze Zahl, mit der $(\mu-2)$ in $(-n)$ enthalten ist, β der ganzzahlige Bestandtheil und γ der echte Bruch des Restes der Division, also

$$(52) \qquad (-n) = \alpha(\mu-2) + \beta + \gamma,$$

wobei

$$0 \leqq \beta \leqq (\mu-3), \qquad 0 < \gamma < 1.$$

Legt man jetzt der oben behandelten Form w, in deren Darstellung durch (49) die $\varphi_\varkappa(x)$ als willkürliche ganze rationale Formen von der ihnen zukommenden Ordnung anzusehen sind, die Ordnung

$$(-1-\gamma) = n + \alpha(\mu-2) + \beta - 1$$

bei, so liefert das Product

$$(x-z)^{\gamma-1}\cdot w(x)$$

auf Grund des Ergebnisses der vorhergehenden Betrachtung die allgemeinste Form der Gruppe von der Ordnung (-2), deren Integration eine überall

*) Fuchs, „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten", Crelle's J. Bd. 66, pag. 145, (10).

endliche Function erzeugt. Die Elemente, aus denen sich w mit willkürlichen Coefficienten zusammensetzt, sind linear-unabhängig, weil andernfalls die zu Grunde gelegte Differentialgleichung reductibel wäre. Die Anzahl dieser Elemente ist also gleich der gesuchten Zahl N_1 der in obigem Product enthaltenen linear-unabhängigen Formen. Da nun die Ueberschiebung

$$\{f^{\varkappa}, u\}_{\varkappa}$$

die Ordnung

$$n + \varkappa(\mu-2)$$

hat, so ist der Coefficient $\varphi_{\varkappa}(x)$ von der Ordnung

$$[(\alpha-\varkappa)(\mu-2) + \beta - 1],$$

liefert demnach

$$[(\alpha-\varkappa)(\mu-2) + \beta]$$

Elemente, so lange diese Zahl nicht negativ ist, andernfalls kein Element. Folglich ist

$$(53) \quad N_1 = \sum_{\varkappa=0}^{\alpha} [\alpha-\varkappa)(\mu-2) + \beta] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}(\mu-2) + (\alpha+1)\beta,$$

sobald, da der Summationsindex $\varkappa$ von vornherein nur die Zahlen

$$0, 1, 2, \cdots (r-1)$$

durchlaufen sollte, bei $\beta > 0$ $\alpha \leqq (r-1)$ oder bei $\beta = 0$ $\alpha \leqq r$ ausfällt. Letztere Bedingungen sind aber, wie man aus der Ungleichung (51) in Verbindung mit (52) ersieht, immer erfüllt, ausser wenn gleichzeitig

$$r = 2, \quad \mu = 3, \quad \alpha = 3, \quad \beta = 0$$

ist. In diesem Falle erhält man

$$(53') \qquad N_1 = 5.$$

Schreibt man ferner der Form w die Ordnung

$$(-\mu-\gamma) = n + (\alpha-1)(\mu-2) + (\beta-2)$$

vor und betrachtet die Coefficienten $\varphi_{\varkappa}(x)$ wiederum als willkürliche ganze rationale Formen von der ihnen zukommenden Ordnung, so stellt das Product

$$(x-z)^{\gamma} \cdot f(x) \cdot w(x)$$

die allgemeinste überall endliche Function der Gruppe dar. Indem hierbei auf $\varphi_{\varkappa}(x)$ die Ordnung

$$[(\alpha-1-\varkappa)(\mu-2) + (\beta-2)]$$

fällt, ergiebt sich für die Anzahl N_2 der in jenem Product enthaltenen linear-unabhängigen Formen, wenn $\beta > 0$ ist:

$$(54)\quad N_2 = \sum_{\varkappa=0}^{\alpha-1} [(\alpha-1-\varkappa)(\mu-2)+(\beta-1)] = \frac{(\alpha-1)\alpha}{2}\cdot(\mu-2)+\alpha(\beta-1);$$

wenn $\beta = 0$, aber $\alpha > 0$ ist:

$$(54')\quad N_2 = \sum_{\varkappa=0}^{\alpha-2} [(\alpha-2-\varkappa)(\mu-2)+(\mu-3)] = \frac{(\alpha-1)\alpha}{2}\cdot(\mu-2)-(\alpha-1);$$

wenn $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ ist, — was wegen der Ungleichung (51) nur bei $[r=2,\ \mu=3]$ eintreten kann:

$$(54'')\qquad N_2 = 0.$$

Aus

$$N = N_1 - N_2$$

erhält man nun die Anzahl der linear-unabhängigen Schaaren von überall endlichen Integralfunctionen der Gruppe:

$$(55)\qquad N = \alpha(\mu-1)+\beta-\delta_{0\beta},$$

mit den Ausnahmen $[r=2,\ \mu=3,\ \alpha=3]$, *wo*

$$(55')\qquad N = 4,$$

und $[r=2,\ \mu=3,\ \alpha=0]$, *wo*

$$(55'')\qquad N = 0$$

stattfindet.

Wir wenden uns jetzt dazu, für die Gruppe, welche zu der bisher betrachteten contragredient ist, die entsprechende Anzahl N' der linear-unabhängigen Schaaren von überall endlichen Integralfunctionen zu bestimmen. Man erkennt sogleich, dass für die contragrediente Gruppe die Differentialgleichung

$$(A_x')\qquad A_x'(\overset{*}{v}) = 0,$$

welche der zu Grunde gelegten Differentialgleichung (A_x) adjungirt ist, genau die gleiche Bedeutung hat, wie letztere für die ursprüngliche Gruppe. In der That erfährt ein geeignet gewähltes Lösungssystem von (A_x') nach Multiplication mit dem Factor

$$(x-z)^{-\nu}$$

die Substitutionen der contragredienten Gruppe. Dazu ist (A_x') gleichzeitig mit (A_x) irreductibel und gehört der Fuchs'schen Klasse an. Ferner übertragen sich die Voraussetzungen 1), 2), 3), die wir in betreff (A_x) gemacht haben, von selbst auf (A_x'), wie man daraus ersieht, dass die Summe der Ordnungen n und ν eine ganze Zahl ist, und dass sich je zwei correspondirende Wurzeln der determinirenden Gleichungen von (A^x) und (A'_x) zu (-1) ergänzen. — Setzt man demnach die positive Zahl

$$(56)\qquad (-\nu) = \alpha'(\mu-2) + \beta' + \gamma',$$

wo α' und β' ganze Zahlen sind,

$$0 \leqq \beta' \leqq (\mu-3), \qquad 0 < \gamma' < 1,$$

so erhält man gemäss (55) unmittelbar:

$$(57)\qquad N' = \alpha'(\mu-1) + \beta' - \delta_{0\beta'},$$

mit den Ausnahmen $[r=2,\ \mu=3,\ \alpha'=3]$, wo

$$(57')\qquad N' = 4,$$

und $[r=2,\ \mu=3,\ \alpha'=0]$, wo

$$(57'')\qquad N' = 0$$

ist.

Es ist nun besonders von Interesse, die Gesammtanzahl $(N+N')$ *der überall endlichen Integralfunctionen beider Gruppen festzustellen.* Dabei soll zunächst $\mu > 3$ angenommen werden. Man hat dann zufolge (55) und (57):

$$(58)\qquad N + N' = (\alpha+\alpha')(\mu-1) + (\beta+\beta') - (\delta_{0\beta}+\delta_{0\beta'}).$$

Da nach (18) die Zahlen n und ν in der Verbindung stehen:

$$n + \nu = 2r - 2 - m,$$

so ist mit Rücksicht auf (48), (52) und (56):

$$(59)\qquad (\alpha+\alpha')(\mu-2) + (\beta+\beta') + (\gamma+\gamma') = r(\mu-2) + 2,$$

also, weil

$$\gamma + \gamma' = 1$$

sein muss, entweder

$$\alpha + \alpha' = r, \qquad \beta + \beta' = 1$$

und folglich

$$\delta_{0\beta} + \delta_{0\beta'} = 1,$$

oder

$$\alpha + \alpha' = r - 1, \qquad \beta + \beta' = \mu - 1$$

und folglich

$$\delta_{0\beta} + \delta_{0\beta'} = 0.$$

In beiden Fällen erhält man aus (58):

$$(60)\qquad N + N' = r(\mu-1) = m - r.$$

Wenn ferner $\mu = 3$ ist, so sind die Zahlen $\beta, \beta' = 0$, also ist nach (59)

$$\alpha + \alpha' = r + 1,$$

und, wofern nicht die oben erwähnten Ausnahmen bei $r = 2$ vorliegen, zufolge (58):

$$N + N' = 2(\alpha+\alpha') - 2 = 2r,$$

womit sich Gleichung (60) *auch in diesem Falle als zutreffend erweist.*

Nehmen wir endlich $\mu = 3$ und $r = 2$ an, so bedingen sich wegen

$$\alpha + \alpha' = 3$$

die obigen Ausnahmefälle gegenseitig so, dass mit $\alpha = 3 \quad \alpha' = 0$ und mit $\alpha = 0 \quad \alpha' = 3$ wird. Alsdann erhält man aus (55') und (57''), bez. (55'') und (57')

$$N + N' = 4,$$

so dass die Beziehung (60) *wieder in Kraft bleibt.*

Es bleibt noch übrig, den Fall $r = 1$ nachzutragen, der aus der ganzen vorstehenden Deduction ausgeschlossen war. Man findet leicht

$$N_1 = E(-n),$$

welches Zeichen die grösste ganze in $(-n)$ enthaltene Zahl bedeuten soll; ferner ist

$$N_2 = 0,$$

da es in diesem Falle keine überall endlichen Functionen der Gruppe geben kann. Folglich haben wir

$$N = E(-n), \qquad N' = E(-\nu).$$

Da nun bei $r = 1$

$$n + \nu = -m$$

ist, so ergiebt sich:

$$N + N' = E(-n) + E(-\nu) = m - 1,$$

ein Resultat, welches sich ebenfalls der Relation (60) *unterordnet.*

Im § 4 ist der Nachweis geführt worden, dass unter unsern Voraussetzungen die zu (A_x) alliirte Differentialgleichung $(m-r)$-ter Ordnung (A_z) sich durch ein Fundamentalsystem von $(m-r)$ „Perioden", d. h. bestimmten Integralen vom Typus (36) integriren lässt. Andrerseits kann — worauf wir oben hingewiesen haben, — von diesen Lösungen keine als „accessorisch" im Sinne von § 6 ausgeschieden werden. Wir können daher sagen: „*Die Integralfunction*

$$I(x) = \int (z - x)^{-n-2} \cdot u(x)\, dx$$

besitzt $(m-r)$ *Perioden*", indem wir die Forderung, dass dieselben in bezug auf den Parameter z linear-unabhängig sind, als in diesem Zusammenhange selbstverständlich nicht weiter hervorheben. Analog sagen wir: „*Die vorgelegte Gruppe besitzt N überall endliche Integralfunctionen*", womit ausgedrückt werden soll, dass die Gesammtheit der überall endlichen Integralfunctionenschaaren der Gruppe sich aus N Elementen linear mit willkürlichen constanten Coefficienten zusammensetzt.

Denken wir uns nun N solcher Integralfunctionen ausgewählt, — deren Integranden also mit demjenigen von $I(x)$ „verwandt" sind, —

so besitzt jede derselben $(m-r)$ Perioden, die bez. auf den nämlichen Integrationswegen erzeugt werden wie die erwähnten $(m-r)$ Perioden von $I(x)$; und zwar sind zufolge Theorem V in § 6 diejenigen Perioden, welchen der gleiche Integrationsweg zu Grunde liegt, als Formen von z betrachtet mit einander „verwandt". Das Schema, welches entsteht, wenn man die je $(m-r)$ Perioden der N überall endlichen Integralfunctionen zeilenweise anordnet, so dass jede der $(m-r)$ Colonnen je N „verwandte" Perioden enthält, wollen wir kurz *„Periodenschema der Gruppe"* nennen. Daraufhin können wir das in Gleichung (60) erhaltene Hauptergebniss der Untersuchung dieses Paragraphen folgendermassen formuliren:

Theorem VI. *Unter den oben präcisirten Voraussetzungen in betreff der linearen Differentialgleichung, durch welche in Verbindung mit ihrer Adjungirten zwei contragrediente Substitutionsgruppen realisirt werden, ist die Summe der Anzahlen der überall endlichen Integralfunctionen beider Gruppen gleich der Anzahl der Perioden, welche die Integralfunctionen besitzen. Entwirft man also die Periodenschemata der beiden contragredienten Gruppen, so ergänzen sich dieselben zu einem quadratischen System.*

Es mag der Vermuthung Raum gegeben werden, dass dieses einfache Gesetz, welches wir hiermit aufgedeckt haben, in weiterem Umfange, als er durch unsere Prämissen abgesteckt ist, vielleicht in grösster Allgemeinheit Geltung besitzt; — abgesehen jedenfalls von gewissen Grenzfällen, wo die reellen Bestandtheile von determinirenden Exponenten ganzzahlig werden, ohne dass die imaginären Theile verschwinden. — Diese Vermuthung rechtfertigt sich in der That leicht bei $r=1$. Ihre allgemeinere Bestätigung würde für eine später folgende Anwendung von grosser Tragweite sein; doch sehen wir von der weiteren Verfolgung des Gegenstandes ab, um uns nicht zu sehr von dem Hauptziele dieser Untersuchung zu entfernen.

Unter Beibehaltung der oben gemachten Annahmen erledigen wir noch die Frage, *wann zu keiner der beiden contragredienten Gruppen überall endliche Functionen gehören*, wann also sowohl die Zahl N_2 wie die ihr für die contragrediente Gruppe entsprechende Zahl N_2' zu Null werden. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn die Differentialgleichung (A_x) durch algebraische Formen integrirt wird. — Eine einfache Discussion der Zahlen N_2 und N_2' zeigt, dass diese Forderung nur in folgenden Fällen erfüllt ist:

$$(61)\qquad \begin{cases} (I) & r=1; \\ (II_1) & r=2,\ E(-n)=\mu-2; \\ (II_2) & r=2,\ E(-n)=\mu-1; \\ (III) & r=3,\ \mu=3,\ E(-n)=2 \end{cases}$$

wodurch also der Kreis der oben in Betracht gezogenen Differentialgleichungen eine bedeutende Einschränkung erfährt.

§ 8.

Allgemeine Formulirung der bilinearen Relationen zwischen den Perioden.

Wir knüpfen jetzt an das Theorem II des § 3 an, um aus demselben die sich unmittelbar anbietenden Folgerungen zu ziehen. Dabei sei einstweilen die zu Grunde gelegte Differentialgleichung

$$(A_x) \qquad A_x(u) = 0$$

in betreff des Charakters ihrer singulären Punkte keiner Einschränkung unterworfen.

Mit Hilfe von $(m - r)$ geeignet gewählten particulären Lösungen

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_{m-r}(x)$$

von (A_x) — die nicht etwa linear-unabhängig sein können, da wir $m > 2r$ annehmen, — denken wir uns ein Fundamentalsystem von Integralen der zu (A_x) alliirten Differentialgleichung

$$(\mathsf{A}_z) \qquad \mathsf{A}_z(U) = 0$$

in Gestalt der Perioden

$$(62) \qquad U_i(z) = \int_{(l_i)} (z-x)^{-n-2} \cdot u_i(x)\, dx \qquad (i = 1, 2, \cdots, (m-r))$$

construirt. Dass diese Aufstellung wenigstens für den Fall der Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse im allgemeinen durchführbar ist, davon haben wir uns im § 4 überzeugt. Im übrigen lassen wir die Frage, inwieweit sonst diese Annahme gestattet ist, offen, und schliessen natürlich die Fälle, wo sie etwa unzulässig sein sollte, von der Betrachtung aus. — In analoger Weise bilden wir mit gewissen $(m - r)$ particulären Lösungen

$$v_1(y),\ v_2(y),\ \cdots,\ v_{m-r}(y)$$

der zu (A_y) adjungirten Differentialgleichung

$$(A'_y) \qquad A'_y(v) = 0$$

ein Fundamentalsystem von Integralen der zu (A'_y) alliirten und gleichzeitig zu (A_z) adjungirten Differentialgleichung

$$(\mathsf{A}'_z) \qquad \mathsf{A}'_z(V) = 0$$

in Gestalt der Perioden

$$(63) \qquad V_i(z) = \int_{(\lambda_i)} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v_i(y)\, dy. \qquad (i = 1, 2, \cdots, (m-r))$$

Dabei seien die Integrationswege l_i, λ_i so gewählt, dass die Differentiation der U_i, V_i nach z unter dem Integralzeichen gestattet ist.

Bilden jetzt die Functionen

$$\widetilde{V}_1(z),\ \widetilde{V}_2(z),\ \cdots,\ \widetilde{V}_{m-r}(z)$$

dasjenige Fundamentalsystem von (A_z'), welches zu dem System der Integrale

$$U_1(z),\ U_2(z),\ \cdots,\ U_{m-r}(z)$$

von (A_z) adjungirt ist, so finden unter den Elementen beider zufolge (I) in § 1 die $(m-r)^2$ „bilinearen Relationen erster Art" statt:

$$(64)\qquad \sum_{i=1}^{m-r} U_i^{(\sigma)}(z)\cdot\widetilde{V}_i^{(\tau)}(z)=\begin{cases}0\ , & \sigma+\tau<m-r-1\\ \dfrac{(-1)^\sigma C}{P_0(z)}, & \sigma+\tau=m-r-1\\ S_{\sigma\tau}(z); & \sigma+\tau>m-r-1\end{cases}$$

$$(\sigma,\tau=0,1,\cdots,(m-r-1))$$

darin bedeutet C eine Constante, die für die Relationen der Kategorie $(\sigma+\tau)=(m-r-1)$ den gleichen Werth hat, und die $S_{\sigma\tau}(z)$ stellen gewisse rationale Functionen von z dar, die sich aus den Ableitungen der $P_x(z)$ zusammensetzen und eine Potenz von $P_0(z)$ zum Nenner haben. — Uebrigens hindert nichts, die Differentiationsindices σ, τ auch über $(m-r-1)$ hinaus zu variiren; doch erhält man dadurch keine inhaltlich neuen Relationen.

Weiter sind nun die beiden Fundamentalsysteme der $V_i(z)$ und $\widetilde{V}_i(z)$ von (A_z') durch lineare Gleichungen

$$(65)\qquad \widetilde{V}_i(z)=\sum_{x=1}^{m-r} C_{ix}\,V_x(z)\qquad (i=1,2,\cdots,(m-r))$$

mit constanten Coefficienten von nicht verschwindender Determinante verbunden. Trägt man also diese Ausdrücke der $\widetilde{V}_i(z)$ in (64) ein, so ergiebt sich das System von Relationen:

$$\sum_{i,x=1}^{m-r} C_{ix}\,U_i^{(\sigma)}(z)\,V_x^{(\tau)}(z)=\begin{cases}0\ , & \sigma+\tau<m-r-1\\ \dfrac{(-1)^\sigma C}{P_0(z)}, & \sigma+\tau=m-r-1\\ S_{\sigma\tau}(z). & \sigma+\tau>m-r-1\end{cases}$$

Indem wir hierin die $U_i(z)$, $V_x(z)$ durch ihre in (62) und (63) angegebenen Werthe ersetzen wollen, tritt infolge der Differentiation speciell bei der Kategorie $(\sigma+\tau)=(m-r-1)$ auf der linken Seite der numerische Factor auf:

$$\frac{(-n-2)!}{(-n-2-\sigma)!}\,\frac{(-\nu-2)!}{(-\nu-2-\tau)!}=(-1)^\sigma\frac{(n+1+\sigma)!}{(n+1)!}\,\frac{(-\nu-2)!}{(n-r+1+\sigma)!}$$
$$=(-1)^\sigma\cdot(n+1+\sigma)_r\cdot\frac{r!\,(-\nu-2)!}{(n+1)!},$$

mit dessen Berücksichtigung wir folgende Beziehungen erhalten:

$$(66)\quad \sum_{i,\varkappa=1}^{m-r} C_{i\varkappa} \int_{(l_i)} (z-x)^{-n-2-\sigma} \cdot u_i(x)\, dx \cdot \int_{(\lambda_\varkappa)} (z-y)^{-\nu-2-\tau} \cdot v_\varkappa(y)\, dy$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , & \sigma+\tau < m-r-1 \\ \dfrac{\overline{C}}{(n+1+\sigma)_r\, P_0(z)}, & \sigma+\tau = m-r-1 \\ \overline{S}_{\sigma\tau}(z) \quad . & \sigma+\tau > m-r-1 \end{cases}$$

Um die durch die Differentiation zerstörte Homogeneität wiederherzustellen, führen wir die allgemeineren Perioden ein:

$$\overline{U}_i(z) = \int_{(l_i)} (z-x)^{-n-2-\sigma} \cdot u_i(x) \cdot G_\sigma(x)\, dx,$$

$$\overline{V}_\varkappa(z) = \int_{(\lambda_\varkappa)} (z-y)^{-\nu-2-\tau} \cdot v_\varkappa(y) \cdot H_\tau(y)\, dy,$$

in welchen $G_\sigma(x)$, $H_\tau(y)$ beliebige ganze rationale Formen von der Ordnung ihres Index bedeuten, und betrachten den Ausdruck:

$$\sum_{i,\varkappa=1}^{m-r} C_{i\varkappa}\, \overline{U}_i(z)\, \overline{V}_\varkappa(z).$$

Entwickelt man darin $G_\sigma(x)$ und $H_\tau(y)$ auf Grund der Taylor'schen Reihe nach Potenzen von $(z-x)$, bez. $(z-y)$, so stellt er sich als lineares Aggregat mit von z abhängenden Coefficienten derjenigen linken Seiten von (66) dar, deren Integranden $(z-x)$ und $(z-y)$ in nicht geringerer Potenz enthalten als $(-n-2-\sigma)$, bez. $(-\nu-2-\tau)$. Berücksichtigt man nun die rechten Seiten von (66), so erhält man folgendes

Theorem VII. *Die Perioden der Integrale gewisser reciproker Formenschaaren, die durch die adjungirten Differentialgleichungen* $(A_\varkappa)$ *und* $(A'_\varkappa)$ *definirt werden, sind durch ein System von* $(m-r)^2$ *bilinearen Relationen — wir nennen sie „Periodenrelationen erster Art" — verbunden, von der Structur:*

$$(67)\quad \sum_{i,\varkappa=1}^{m-r} C_{i\varkappa} \int_{(l_i)} (z-x)^{-n-2-\sigma} \cdot u_i(x) \cdot G_\sigma(x)\, dx \cdot \int_{(\lambda_\varkappa)} (z-y)^{-\nu-2-\tau} \cdot v_\varkappa(y) \cdot H_\tau(y)\, dy$$

$$= \begin{cases} 0 \quad , & \sigma+\tau < m-r-1 \\ \dfrac{C \cdot G_\sigma(z) \cdot H_\tau(z)}{(n+1+\sigma)_r \cdot P_0(z)}, & \sigma+\tau = m-r-1 \\ R_{\sigma\tau}(z) \quad ; & \sigma+\tau > m-r-1 \end{cases}$$

$$(\sigma, \tau = 0, 1, \cdots, (m-r-1))$$

darin sind die Grössen $C_{i\varkappa}$, C von z unabhängig, und $R_{\sigma\tau}(z)$ bedeutet eine rationale Covariante der Ordnung

$$-(n+\nu+4+\sigma+\tau)=(m-2r-2-\sigma-\tau)$$

von den Formen $G_\sigma(z)$, $H_\tau(z)$ und den $P_\varkappa(z)$, mit einer Potenz von $P_0(z)$ im Nenner.

Multiplicirt man Gleichung (67) mit $z^{(n+\nu+4+\sigma+\tau)}$ und lässt z unendlich wachsen, so ergiebt sich ein specielleres System von $\frac{(m-r)(m-r+1)}{2}$ Relationen:

$$\sum_{i,\varkappa=1}^{m-r} C_{i\varkappa}\int_{(l_i)} u_i(x)\, x^\sigma\, dx\cdot\int_{(\lambda_\varkappa)} v_\varkappa(y)\, y^\tau\, dy$$

$$=\begin{cases} 0\quad, & \sigma+\tau<m-r-1\\ \dfrac{C}{(n+1+\sigma)_r}, & \sigma+\tau=m-r-1\end{cases}$$

wobei allerdings der Standpunkt der Formentheorie aufgegeben ist.

Wir treffen nun insbesondere die Voraussetzung, dass die Differentialgleichung (A_z) zu sich selbst adjungirt ist, was zufolge Theorem III in § 3 für ihre alliirte Differentialgleichung (A_z) die nämliche Eigenschaft nach sich zieht. Alsdann können wir die Formen $v_\varkappa(y)$ mit $u_\varkappa(y)$, $V_\varkappa(z)$ mit $U_\varkappa(z)$ identificiren, und wenn wir die Gleichungen (65) daraufhin mit (13) in Parallele setzen, so zeigt sich gemäss (14), dass

$$C_{i\varkappa}=(-1)^{m-r-1}\,C_{\varkappa i},$$

oder, da in unserm Falle m nothwendig eine ungerade Zahl ist,

$$C_{i\varkappa}=(-1)^r\,C_{\varkappa i}$$

stattfindet. Damit gelangen wir zu folgendem

Theorem VIII. *Die Perioden der Integrale von gewissen Formenschaaren, welche durch die zu sich selbst adjungirte Differentialgleichung (A_z) definirt werden, sind durch ein System von $\frac{(m-r)(m-r+1)}{2}$, bez. $\frac{(m-r)(m-r-1)}{2}$ bilinearen Relationen — je nachdem r gerade oder ungerade ist, — verbunden, von der Structur:*

$$(68)\quad \sum_{i,\varkappa=1}^{m-r} C_{i\varkappa}\int_{(l_i)}(z-x)^{-n-2-\sigma}\cdot u_i(x)\cdot G_\sigma(x)\,dx\cdot\int_{(l_\varkappa)}(z-y)^{-n-2-\tau}\cdot u_\varkappa(y)\cdot H_\tau(y)\,dy$$

$$=\begin{cases} 0\quad, & \sigma+\tau<m-r-1\\ \dfrac{C\cdot G_\sigma(z)\cdot H_\tau(z)}{(n+1+\sigma)_r\cdot P_0(z)}, & \sigma+\tau=m-r-1\\ R_{\sigma\tau}(z)\quad; & \sigma+\tau>m-r-1\end{cases}$$

und zwar ist darin

$$C_{i\varkappa} = (-1)^r C_{\varkappa i},$$

sodass sie symmetrischen, bez. alternirenden Charakter haben.

Die soeben aufgestellten Gleichungen sind aus der Anwendung der „bilinearen Relationen erster Art“ des § 1 auf die Lösungen der Differentialgleichungen (A_z) und (A'_z) hervorgegangen. Indem wir nunmehr in gleicher Weise auch die „bilinearen Relationen zweiter Art“ des § 1 übertragen, erhalten wir also ein *neues System von Periodenrelationen, welches mit dem ersteren algebraisch äquivalent ist.* Nach der Darlegung in § 1 ergiebt sich dasselbe sofort in der Form:

$$(69) \qquad \mathsf{A}_z(U_i(z), V_\varkappa(z)) = \Gamma_{i\varkappa}, \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots, (m-r))$$

worin die Grössen $\Gamma_{i\varkappa}$ von z unabhängige Werthe besitzen. — Behufs expliciter Darstellung des bilinearen Differentialausdrucks $\mathsf{A}_z(U, V)$ bemerken wir, dass nach (26_1) und (27_1) $\mathsf{A}_z(U)$ sich auf folgende Gestalt bringen lässt:

$$\mathsf{A}_z(U) = \sum_{\varkappa=0}^{r} (-n-2)_{m-r-\varkappa} \cdot (-1)^{m+1} \frac{(n+1)!}{(-\nu-2)!} \frac{(m-r-\varkappa)!}{(r-\varkappa)!} \{P_\varkappa(z), U\}_{(m-r-\varkappa)},$$

woraus im Hinblick auf (16) und (21)

$$\mathsf{A}_z(U, V) = \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{m+1} \frac{(n+1)!}{(-\nu-2)!} \frac{(m-r-\varkappa)!}{(r-\varkappa)!} \{P_\varkappa(z);\, U(z), V(z)\}_{(m-r-1-\varkappa)}$$

hervorgeht. Führt man hier der Kürze wegen ein neues Zeichen ein:

$$[P_0; U, V]_{(m-r-1)} = (-1)^{m+1} \frac{(n+1)!}{(-\nu-2)!} \frac{(m-r)!}{r!} \{P_0; U, V\}_{(m-r-1)},$$

so ergiebt sich für die durch dasselbe repräsentirte trilineare Covariante von der Ordnung Null aus (20') leicht die symbolische Darstellung:

$$(70') \qquad [\overset{m}{P_0};\, \overset{(-n-2)}{U},\, \overset{(-\nu-2)}{V}]_{(m-r-1)}$$

$$= (-1)^{m+1} \sum_{\lambda=0}^{m-r-1} (n+1+\lambda)_r \cdot (P_0 - U)^\lambda \cdot (P_0 - V)^{m-r-1-\lambda}$$

und nach einigen Umformungen der entwickelte Ausdruck:

$$(70) \qquad [\overset{m}{P_0}(z);\, \overset{(-n-2)}{U}(z),\, \overset{(-\nu-2)}{V}(z)]_{(m-r-1)} =$$

$$\frac{(m-r)!}{m!} \sum_{\sigma=0}^{m-r-1} \sum_{\tau=0}^{m-r-1-\sigma} (-1)^{m+r+1+\sigma+\tau} m_{r+\sigma+\tau+1} P_{0,\, m-r-1-\sigma-\tau}(z)$$

$$\cdot\, U_\sigma(z) \cdot V_\tau(z) \cdot \sum_{\lambda=0}^{r} (-1)^\lambda (n-r+\lambda)_\lambda\, (\nu-\lambda)_{r-\lambda} \frac{(\sigma+r-\lambda)!}{\sigma!} \frac{(\tau+\lambda)!}{\tau!}.$$

Letzterer reducirt sich beispielsweise für $n = (r-1)$ auf:

$$\begin{aligned}&[\overset{m}{P}_0(z);\ \overset{(-r-1)}{U}(z),\ \overset{(m-r-1)}{V}(z)]_{(m-r-1)}\\ &= \sum_{\sigma=0}^{m-r-1}\ \sum_{\tau=0}^{m-r-1-\sigma} (-1)^{m+1+\sigma+\tau}\, m_{r+\sigma+\tau+1}\,(r+\sigma)_\sigma\\ &\quad\cdot P_{0,\,m-r-1-\sigma-\tau}(z)\cdot U_\sigma(z)\cdot V_\tau(z).\end{aligned}$$

Unter Benutzung dieses Zeichens haben wir nun das

Theorem IX. *Die Perioden der Integrale von zwei reciproken Formenschaaren, welche durch die adjungirten Differentialgleichungen* (A_x) *und* (A'_x) *definirt werden, sind durch ein System von* $(m-r)^2$ *Relationen — wir nennen sie „Periodenrelationen zweiter Art“ — verbunden, von der Structur:*

$$(71)\quad \mathsf{A}_z\Big\{\int\limits_{(l_i)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_i(x)\,dx\ ,\ \int\limits_{(\lambda_x)}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_x(y)\,dy\Big\} = \Gamma_{ix},$$

oder auch, — unter Vertauschung von Differentiation und Integration nach verschiedenen Variabeln:

$$(71')\quad \int\limits_{(l_i)}dx\int\limits_{(\lambda_x)}dy\cdot u_i(x)\cdot v_x(y)\cdot \mathsf{A}_z\{(z-x)^{-n-2},\ \ (z-y)^{-\nu-2}\} = \Gamma_{ix};\qquad (i,x=1,2,\cdots,(m-r))$$

darin stellt sich der bilineare Differentialausdruck $\mathsf{A}_z(U,V)$ *durch ein Aggregat von Covarianten dar:*

$$(72)\qquad \mathsf{A}_z(U,V) = \sum_{x=0}^{r}[P_x(z);\ U(z),\ V(z)]_{(m-r-1-x)},$$

und die Grössen Γ_{ix} *sind von* z *unabhängig.*

Wenn Gleichung (A_x), und somit auch (A_z), zu sich selbst adjungirt ist, so gilt zufolge (15):

$$(73)\qquad \mathsf{A}_z(U,V) = (-1)^r\mathsf{A}_z(V,U);$$

daraus fliesst im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden das

Theorem X. *Die Perioden der Integrale einer Formenschaar, welche durch die zu sich selbst adjungirte Differentialgleichung* (A_x) *definirt wird, erfüllen ein System von* $\frac{(m-r)\,(m-r+1)}{2}$, *bez.* $\frac{(m-r)\,(m-r-1)}{2}$ *Relationen — je nachdem* r *gerade oder ungerade ist, — von der Structur:*

$$(74)\quad \mathsf{A}_z\Big\{\int\limits_{(l_i)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_i(x)\,dx\ ,\ \int\limits_{(l_x)}(z-y)^{-n-2}\cdot u_x(y)\,dy\Big\} = \Gamma_{ix},$$

oder auch:

$$(74') \quad \int\limits_{(l_i)} dx \int\limits_{(l_x)} dy \cdot u_i(x) \cdot u_x(y) \cdot \mathsf{A}_s\{(z-x)^{-n-2},\ (z-y)^{-n-2}\} = \Gamma_{ix};$$

und zwar hat darin der bilineare Ausdruck

$$\mathsf{A}_s(U, V) = [P_0;\, U, V]_{(m-r-1)} + [P_2;\, U, V]_{(m-r-3)} + [P_4;\, U, V]_{(m-r-5)} + \cdots$$

symmetrischen, bez. alternirenden Charakter.

Es soll nun weiterhin unsere hauptsächliche Aufgabe sein, diesen hiermit ihrer allgemeinen Structur nach formulirten Periodenrelationen erster und zweiter Art — allerdings nur unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen — eine völlig bestimmte Gestalt zu geben.

Abschnitt II.

Die Periodenrelationen zweiter Art.

§ 9.

Das Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument.

Ich beginne mit der genaueren Ausgestaltung der Periodenrelationen zweiter Art, da sich diese auf kürzerem Wege erledigen lassen. — In der Gleichung (71), durch welche sie formulirt werden, ist, abgesehen von der Wahl der Integrationswege, nur noch der Werth der von z unabhängigen Grössen $\Gamma_{i\varkappa}$ zu ermitteln, welche jedenfalls zu der vorgelegten Differentialgleichung in einer gewissen transcendent-invarianten Beziehung stehen. Zu diesem Zweck nehmen wir zunächst mit dem Doppelintegral der linken Seite von (71′) eine Umformung vor, welche sich auf die charakteristischen Relationen (28)

$$(28_1)\qquad \mathsf{A}_z[(z-x)^{-n-2}] = \quad(\nu+1)\,A'_x[(z-x)^{\nu}],$$

$$(28_2)\qquad \mathsf{A}'_z[(z-y)^{-\nu-2}] = -(n+1)\,A_y[(z-y)^{n}]$$

stützt. Multiplicirt man die erstere mit $(z-y)^{-\nu-2}$, die letztere mit $(z-x)^{-n-2}$ und subtrahirt, so folgt die Gleichung:

$$(z-y)^{-\nu-2}\cdot\mathsf{A}_z[(z-x)^{-n-2}] - (z-x)^{-n-2}\cdot\mathsf{A}'_z[(z-y)^{-\nu-2}]$$
$$= (\nu+1)\,A'_x\left\{\frac{(z-x)^{\nu}}{(z-y)^{\nu+2}}\right\} + (n+1)\,A_y\left\{\frac{(z-y)^{n}}{(z-x)^{n+2}}\right\};$$

und hieraus geht durch Integration über z, mit Rücksicht auf die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration nach verschiedenen Parametern, die Beziehung hervor:

$$\mathsf{A}_z\{(z-x)^{-n-2},\,(z-y)^{-\nu-2}\}$$
$$= A'_x\left\{\left(\frac{z-x}{z-y}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{x-y}\right\} + A_y\left\{\left(\frac{z-y}{z-x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{y-x}\right\} + C,$$

worin C von z unabhängig ist. — Zur Bestimmung von C entwickelt man in der Umgebung von $z = x$ die einzelnen Terme nach Potenzen von $(z - x)$; durch eine leichte Rechnung ergiebt sich:

$$\mathsf{A}_z\{(z-x)^{-n-2}, (z-y)^{-\nu-2}\} = (\nu+1)_r (x-y)^{-\nu-2} P_0(x)\cdot(z-x)^{\nu-r+1} + (z-x)^{\nu-r+2}\cdot\Phi_1(z-x);$$

$$A'_x\left\{\left(\frac{z-x}{z-y}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{x-y}\right\} = (\nu+1)_r (x-y)^{-\nu-2} P_0(x)\cdot(z-x)^{\nu-r+1} + (z-x)^{\nu-r+2}\cdot\Phi_2(z-x);$$

$$A_y\left\{\left(\frac{z-y}{z-x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{y-x}\right\} = (z-x)^{\nu-r+2}\cdot(z-x)^{m-r-1}\,\Phi_3(z-x);$$

mithin:

$$C = (z-x)^{\nu-r+2}\cdot\Phi_4(z-x);$$

— darin bedeuten die Zeichen Φ Potenzreihen, die nach ganzen positiven Potenzen ihres Arguments fortschreiten. — Ist nun ν nicht ganzzahlig, so folgt für $\lim z = x$ $C = 0$, da C endlich sein muss. Ist aber ν eine ganze Zahl, so muss dieselbe nach der bei (25) gemachten Voraussetzung entweder grösser als $(r-2)$ oder kleiner als $(r-m)$ sein. Im ersten Falle folgt also wieder $C=0$, während im zweiten Falle $n > (r-2)$ und in der Umgebung von $z = y$

$$C = (z-y)^{n-r+2}\cdot\Phi_5(z-y)$$

ist, so dass sich immer $C = 0$ ergiebt. *Demnach gilt die Relation:*

$$\mathsf{A}_z\left\{(z-x)^{-n-2}, (z-y)^{-\nu-2}\right\} = A'_x\left\{\left(\frac{z-x}{z-y}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{x-y}\right\} + A_y\left\{\left(\frac{z-y}{z-x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{y-x}\right\} \tag{75}$$

unter der nämlichen Voraussetzung wie die Ausgangsgleichungen (28). — Wir multipliciren dieselbe mit dem Product $u(x)\cdot v(y)$, dessen Factoren beliebige Lösungen der Differentialgleichungen

$$A_x(u) = 0, \qquad A'_y(v) = 0$$

bedeuten, und integriren über x und y auf zwei Wegen, die keinen Punkt mit einander gemein haben; dann erhalten wir unter Benutzung der Identitäten:

$$v(y)\cdot A_y\left\{\left(\frac{z-y}{z-x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{y-x}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\mathsf{A}_y\left\{\left(\frac{z-y}{z-x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{y-x}, v(y)\right\}$$

$$u(x)\cdot A'_x\left\{\left(\frac{z-x}{z-y}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{x-y}\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}\mathsf{A}_x\left\{u(x), \left(\frac{z-x}{z-y}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{x-y}\right\}$$

die fundamentale Relation:

$$(76)\qquad \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy\, u(x)\cdot v(y)\cdot \mathsf{A}_z\left\{(z-x)^{-n-2},\ (z-y)^{-\nu-2}\right\}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1} u(x)\, dx \left[A_y\left\{\left(\frac{z-y}{z-x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{y-x},\, v(y)\right\}\right]_{y_0}^{y_1}$$

$$- \int_{y_0}^{y_1} v(y)\, dy \left[A_x\left\{u(x),\ \left(\frac{z-x}{z-y}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{x-y}\right\}\right]_{x_0}^{x_1},$$

welche das Abel-Jacobi'sche Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument in homogener Gestalt liefert. — Sie setzt zwei zu contragredienten Substitutionsgruppen gehörende Integralfunctionen in Beziehung, welche im wesentlichen so beschaffen sind, dass je die eine das Argument der andern als Parameter besitzt, an dessen Stelle sie eine logarithmische Unstetigkeit erfährt. — Lässt man z ins Unendliche rücken, so erhält man die gewöhnliche Formulirung des Theorems.*)

Die Gleichung (76) wird uns nun als Grundlage für die Bestimmung der Constanten Γ in den Periodenrelationen zweiter Art dienen.

§ 10.

Erste Gruppe der Periodenrelationen zweiter Art.

Indem wir die genauere Formulirung der Periodenrelationen ausschliesslich bei Differentialgleichungen der Fuchs'schen Klasse verfolgen, nehmen wir inbetreff der Gleichung (A_x) zunächst die Voraussetzungen des § 7 wieder auf. Danach besitze sie $\mu = \frac{m}{r}$ singuläre Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_\mu$, und die Wurzeln

$$\varrho_{i1},\ \varrho_{i2},\ \cdots,\ \varrho_{ir}$$

der zu a_i gehörenden determinirenden Gleichung seien von einander verschieden und ihre reellen Bestandtheile negative echte Brüche. Sind entsprechend

$$\sigma_{i1},\ \sigma_{i2},\ \cdots,\ \sigma_{ir}$$

die zu a_i gehörenden determinirenden Zahlen für die adjungirte Differentialgleichung (A'_x), so zeigt man leicht, dass

$$(77)\qquad \sigma_{ik} = -\varrho_{ik} - 1, \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, \mu \\ k = 1, 2, \cdots, r \end{pmatrix}$$

wonach dieselben ebenfalls von einander verschieden und in ihren reellen Theilen negative echte Brüche sind. — Diese Voraussetzungen decken

*) Vgl. Jacobi, Werke Bd. II, pag. 128 ff.

sich mit denjenigen, auf welche Hr. Fuchs seine Entwicklung gegründet hat.*) — Ausserdem nehmen wir n als von einer ganzen Zahl verschieden an.

Ich behaupte nun, dass auf Grund dieser Festsetzungen die zwischen irgend zwei singulären Punkten erstreckten Integrale

$$U(z) = \int_{a_h}^{a_k} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\, dx \quad , \quad V(z) = \int_{a_h}^{a_k} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v(y)\, dy$$

Lösungen der Differentialgleichungen (A_z), (A_z') darstellen. — Bedingung ist hierfür zufolge (30_1), (30_2), dass die Ausdrücke

$$[A_x(u(x),\, (z-x)^\nu)]_{a_h}^{a_k} \;,\; [A_y((z-y)^n,\, v(y))]_{a_h}^{a_k}$$

verschwinden. Betrachtet man allgemeiner die Functionen

$$A_x(u(x),\, \varphi(x)) \quad , \quad A_y(\psi(y),\, v(y)),$$

in welchen $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sonst beliebige, aber in den singulären Punkten sich regulär verhaltende Formen bedeuten, so geht aus den Identitäten

$$\frac{d}{dx} A_x(u(x),\, \varphi(x)) = -u(x) \cdot A_x'(\varphi(x)),$$
$$\frac{d}{dy} A_y(\psi(y),\, v(y)) = \quad v(y) \cdot A_y(\psi(y))$$

durch Integration ihrer Reihenentwicklungen folgendes hervor: wenn sich in der Umgebung des singulären Punktes a_i $u(x)$, $v(y)$ particulär verhalten wie $(x-a_i)^{\varrho_{ik}}$, $(y-a_i)^{\sigma_{ik}}$, so verhalten sich jene Ausdrücke wie

$$(x-a_i)^{\varrho_{ik}+1}, \qquad (y-a_i)^{\sigma_{ik}+1};$$

folglich hat man für beliebige Integrale $u(x)$, $v(y)$ von (A_x), (A_y') und für jeden singulären Punkt a_i:

(78) $$[A_x(u(x),\, \varphi(x))]_{x=a_i} = 0 \;,\; [A_y(\psi(y),\, v(y))]_{y=a_i} = 0,$$

sodass die obige Forderung in der That erfüllt ist.

Um die Werthe der Integranden eindeutig zu fixiren, legen wir in der complexen Ebene einen Schnitt von a_1 aus über $a_2, a_3, \cdots, a_\mu$ nach z, und führen die Integrationen auf der linken (positiven) Seite desselben aus. Benutzen wir successive die $(\mu-1)$ Seiten des Streckenzuges $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_\mu)$ als Integrationswege für x und y und setzen für $u(x)$, $v(y)$ die je r Elemente von Fundamentalsystemen der Gleichungen (A_x), (A_y') ein, so erhalten wir auf diese Weise insgesammt $r(\mu-1) = (m-r)$

*) „Ueber Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden," Crelle's Journal Bd. 76, Nr. 4.

Lösungen $U(z)$, $V(z)$ von (A_z), (A'_z), die, wie wir an späterer Stelle nachweisen werden, linear-unabhängig sind. Dies einmal angenommen, stellt dann also die Gleichung

$$(79)\quad \mathsf{A}_z\left\{\int_{a_h}^{a_h+1}(z-x)^{-n-2}\cdot u_i(x)\,dx\;,\int_{a_k}^{a_k+1}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\varkappa(y)\,dy\right\}=\text{const.}$$

$$\begin{pmatrix} i,\,\varkappa = 1, 2, \cdots r \\ h,\,k = 1, 2, \cdots (\mu-1)\end{pmatrix}$$

die Gesammtheit der in Aussicht gestellten $(m-r)^2$ Periodenrelationen dar. Dieselben ordnen sich in drei verschiedenen Gruppen an, je nachdem die Integrationswege (a_h, a_{h+1}), (a_k, a_{k+1}) von x, bez. y keinen Punkt gemeinsam haben, oder sich in einem Eckpunkte treffen, oder ganz zusammenfallen. Die erste Gruppe enthält

$$r^2\cdot(\mu-2)(\mu-3),$$

die zweite

$$r^2\cdot 2(\mu-2),$$

die dritte

$$r^2\cdot(\mu-1)$$

Gleichungen.

Die erste Gruppe lässt sich nun sofort erledigen, da wir, wenn die Integrationswege keinen Punkt mit einander gemein haben, in (76) nur $x_0 = a_h$, $x_1 = a_{h+1}$, $y_0 = a_k$, $y_1 = a_{k+1}$ einzutragen brauchen. Indem dabei zufolge (78)

$$\left[A_y\left\{\left(\frac{z-y}{z-x}\right)^{n+1}\cdot\frac{1}{y-x}\;,v(y)\right\}\right]_{a_k}^{a_k+1}=0,$$

$$\left[A_x\left\{u(x),\left(\frac{z-x}{z-y}\right)^{\nu+1}\cdot\frac{1}{x-y}\right\}\right]_{a_h}^{a_h+1}=0$$

wird, *erhalten wir die Gleichung*)*:

$$(80)\quad \mathsf{A}_z\left\{\int_{a_h}^{a_h+1}(z-x)^{-n-2}\cdot u(x)\,dx\;,\int_{a_k}^{a_k+1}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v(y)\,dy\right\}=0,$$

$$(h, k = 1, 2, \cdots (\mu-1);\quad k > h+1 \text{ oder } h > k+1),$$

welche also $r^2\cdot(\mu-2)(\mu-3)$ *Relationen repräsentirt.*

Integrirt man ferner in (76) über x von a_{h-1} bis a_{h+2}, — aber diesmal nicht längs der linken Seite des Schnittes selbst, sondern auf einem Wege, der links davon durch das Innere des Polygons führt, — integrirt man dazu über y von a_h bis a_{h+1}, so wird die rechte Seite

*) Vgl. Fuchs, l. c. Nr. 7.

wieder zu Null. Nachträglich kann man dann den Integrationsweg von x in das linke Ufer der Schnitte (a_{h-1}, a_h), (a_h, a_{h+1}), (a_{h+1}, a_{h+2}) deformiren, und *erhält somit die Gleichung:*

$$
(81)\qquad \begin{aligned}
&\mathsf{A}_z \left\{ \int_{a_{h-1}}^{a_h} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\,dx \quad, \int_{a_h}^{a_{h+1}} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v(y)\,dy \right\} + \\
&\mathsf{A}_z \left\{ \int_{a_h}^{a_{h+1}} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\,dx \quad, \int_{a_h}^{a_{h+1}} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v(y)\,dy \right\} + \\
&\mathsf{A}_z \left\{ \int_{a_{h+1}}^{a_{h+2}} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\,dx \quad, \int_{a_h}^{a_{h+1}} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v(y)\,dy \right\} = 0,
\end{aligned}
$$

$$(h = 1, 2, \cdots (\mu - 1))$$

welche unmittelbar die dritte Gruppe von Relationen liefert, wenn diejenigen der zweiten Gruppe bekannt sind. — Wir haben uns also weiterhin nur noch mit dieser letzteren zu beschäftigen.

§ 11.

Zweite Gruppe der Periodenrelationen zweiter Art.

Wir nehmen auf den Strecken (a_{h-1}, a_h), bez. (a_h, a_{h+1}) in der Nähe von a_h zwei Punkte an, $(a_h - \delta)$, bez. $(a_h + \varepsilon)$, und führen jetzt in (76) die Integration über x von a_{h-1} bis $(a_h - \delta)$, über y von $(a_h + \varepsilon)$ bis a_{h+1} aus, um darauf δ und ε gegen Null convergiren zu lassen. Da zufolge (79) das Resultat dieses Processes von z unabhängig ist, so dürfen wir auf der rechten Seite den Punkt z sogleich ins Unendliche verlegen und haben dann:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{A}_z \left\{ \int_{a_{h-1}}^{a_h} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\,dx \quad, \int_{a_h}^{a_{h+1}} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v(y)\,dy \right\} \\
&= \lim_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \left\{ -\int_{a_{h-1}}^{a_h-\delta} u(x)\,dx \left[A_y \left\{ \frac{1}{y-x}, v(y) \right\} \right]_{y=a_h+\varepsilon} \right. \\
&\qquad \left. - \int_{a_h+\varepsilon}^{a_{h+1}} v(y)\,dy \left[A_x \left\{ u(x), \frac{1}{x-y} \right\} \right]_{x=a_h-\delta} \right\}.
\end{aligned}
$$

Auf der Strecke $(a_{h-1}, (a_h - \delta))$ nehmen wir ferner in der Nähe des End-punktes einen Punkt $(a_k - \delta')$ an und zerlegen das Integral der rechten Seite $\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k - \delta}$ in die beiden Theile:

$$\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k-\delta'} + \int\limits_{a_k-\delta'}^{a_k-\delta} .$$

Von diesen verschwindet der erstere für $\lim \varepsilon = 0$, so dass nur der zweite zu berücksichtigen bleibt. Entsprechend kann man das Integral $\int\limits_{a_k+\varepsilon}^{a_{k+1}}$ durch $\int\limits_{a_k+\varepsilon}^{a_k+\varepsilon'}$ ersetzen. Indem wir noch der Kürze halber den Punkt a_k in den Nullpunkt verlegen und die linke Seite einfach mit A_ε bezeichnen, erhalten wir:

$$(82) \qquad \mathsf{A}_\varepsilon = \lim_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \left\{ -\int\limits_{-\delta'}^{-\delta} u(x)\,dx \left[A_y \left\{ \frac{1}{y-x}, v(y) \right\} \right]_{y=\varepsilon} \right.$$
$$\left. - \int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} v(y)\,dy \left[A_x \left\{ u(x), \frac{1}{x-y} \right\} \right]_{x=-\delta} \right\} .$$

Wir verstehen nunmehr unter $u(x)$, $v(y)$ speciell irgend welche Elemente der kanonischen Fundamentalsysteme des singulären Punktes 0, die so normirt sind, dass ihre Potenzentwicklungen mit den Termen x^ϱ, bez. y^σ beginnen. Darin sind die Exponenten ϱ, σ Wurzeln der zugehörigen determinirenden Gleichungen; doch behandeln wir sie einstweilen als variable Parameter, immerhin mit der Einschränkung, dass ihre reellen Theile als negative echte Brüche gelten. Setzt man diese Potenzreihen auf der rechten Seite von (82) ein, *so darf man die daraus resultirende Entwicklung derselben, wie leicht darzuthun ist, auf ihren ersten Term reduciren, indem alle höheren Glieder beim Grenzübergange verschwinden**). Man erhält nämlich unter Berücksichtigung der in (3') angegebenen Structur von $A(u, v)$ für das erste Integral der rechten Seite eine Reihe von folgendem Charakter:

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \left\{ \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta\gamma} \int\limits_{\delta}^{\delta'} \varepsilon^{\alpha+\gamma+\sigma} \frac{x^{\beta+\varrho}}{(x+\varepsilon)^\gamma}\,dx \right\} .$$

*) Vgl. Fuchs, l. c. Nr. 13.

ier hat das Integral

$$\int_{\delta}^{\delta'} \left(\frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right)^{\gamma} x^{\beta+\varrho}\, dx$$

stets einen endlichen Werth, da für die in Betracht kommenden Werthe von x und ε

$$\left|\frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right|$$

unterhalb einer endlichen Grenze liegt. Folglich verschwindet in obiger Reihe für $\lim \varepsilon = 0$ jeder Term, bei dem $\alpha > 0$ ist. Wenn aber $\alpha = 0$ und $\beta > 0$ ist, so hat man

$$\int_{\delta}^{\delta'} \varepsilon^{\gamma+\sigma} \frac{x^{\beta+\varrho}}{(x+\varepsilon)^{\gamma}}\, dx = \varepsilon^{1+\sigma} \int_{\delta}^{\delta'} \left(\frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right)^{\gamma-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{x+\varepsilon}\right) x^{\beta-1+\varrho}\, dx,$$

und da das Integral wiederum endlich bleibt, so geht auch dieser Ausdruck für $\lim \varepsilon = 0$ in Null über. Es bleibt also nur der Term erhalten, welcher $\alpha = 0$, $\beta = 0$ entspricht. — Das Gleiche gilt für das zweite Integral der rechten Seite von (82). — Vergegenwärtigen wir uns den Ursprung der übrig bleibenden Glieder, so ist hiermit folgendes gezeigt: Wird mit

$$F_x(u) \equiv c_0 x^r \cdot u^{(r)} + c_1 x^{r-1} \cdot u^{(r-1)} + c_2 x^{r-2} \cdot u^{(r-2)} + \cdots + c_r \cdot u$$

derjenige Differentialausdruck mit constanten Coefficienten c_x bezeichnet, dessen *determinirende Gleichung*

$$F(\varrho) = c_0 \cdot \varrho(\varrho-1) \cdots (\varrho-r+1) + c_1 \cdot \varrho \cdots (\varrho-r+2) + \cdots + c_r = 0$$

mit derjenigen der Differentialgleichung (A_x) *im Punkte* $x = 0$ *übereinstimmt*, — er ist durch diese Forderung offenbar vollständig bestimmt, — so dürfen wir auf der rechten Seite von (82) das Polynom A_x durch F_x, $u(x)$, $v(y)$ durch x^ϱ, y^σ ersetzen, *und erhalten demnach:*

$$(83) \qquad \mathsf{A}_\varepsilon = \lim_{\substack{\delta=0\\ \varepsilon=0}} \left\{ -\int_{-\delta'}^{-\delta} x^\varrho\, dx \left[F_y\left\{\frac{1}{y-x}, y^\sigma\right\}\right]_{y=\varepsilon} - \int_{\varepsilon}^{\delta'} y^\sigma\, dy \left[F_x\left\{x^\varrho, \frac{1}{x-y}\right\}\right]_{x=-\delta} \right\}.$$

Behufs weiterer Reduction ist dieser Ausdruck durch partielle Integration derart umzugestalten, dass unter den Integralzeichen nur die erste Potenz von $(x-y)$ im Nenner stehn bleibt. Um das hierzu geeignete Verfahren übersichtlich darzustellen, will ich zuvor einige Formeln ableiten, welche sich auf Differentialpolynome von der Structur von $F_x(x)$ beziehen. Solche

Differentialausdrücke mögen „*reducirt*“ genannt werden, und für ihren determinirenden Ausdruck soll immer das gleiche Symbol, aber ohne Suffix, gebraucht werden, wie für das Differentialpolynom selbst. α und β mögen beliebige Variabeln bedeuten. Es gilt dann zunächst:

$$(84) \qquad F_x(x^\alpha) = x^\alpha \cdot F(\alpha),$$

ferner, mit Rücksicht auf (77):

$$(85) \qquad F'_x(x^\beta) = x^\beta \cdot F(-\beta-1),$$

wenn mit $F'_x(v)$ der zu $F_x(u)$ adjungirte Ausdruck bezeichnet wird. Weiter ergiebt sich für den bilinearen Ausdruck $F_x(u, v)$:

$$\frac{d}{dx} F_x(x^\alpha, x^\beta) = x^\beta \cdot F_x(x^\alpha) - x^\alpha \cdot F'_x(x^\beta) = x^{\alpha+\beta} \cdot \{F(\alpha) - F(-\beta-1)\},$$

also:

$$(86) \qquad F_x(x^\alpha, x^\beta) = x^{\alpha+\beta+1} \cdot \left\{\frac{F(\alpha) - F(-\beta-1)}{\alpha+\beta+1}\right\}.$$

Hieraus geht hervor, dass auch die Ausdrücke

$$(87) \qquad x^{-\beta-1} \cdot F_x(u, x^\beta) \quad , \quad x^{-\alpha-1} \cdot F_x(x^\alpha, v)$$

„reducirt“ sind, da sie die hierfür charakteristische Eigenschaft (84) besitzen.

Ist ferner

$$Q_x(u) = \sum_{\varkappa=0}^{r} q_\varkappa(x) \cdot u^{(r-\varkappa)}$$

zunächst ein beliebiger Differentialausdruck mit ganzen rationalen Coefficienten, so hat man, unter Benutzung der Umformung von Abel-Jacobi*):

$$Q_x\left(\frac{1}{x-y}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{r} q_\varkappa(x) \frac{\partial^{r-\varkappa}}{\partial x^{r-\varkappa}} \left(\frac{1}{x-y}\right) = \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{r-\varkappa} \frac{\partial^{r-\varkappa}}{\partial y^{r-\varkappa}} \left[\frac{q_\varkappa(x)}{x-y}\right]$$

$$= \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{r-\varkappa} \frac{\partial^{r-\varkappa}}{\partial y^{r-\varkappa}} \left[\frac{q_\varkappa(y)}{x-y}\right] + \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{r-\varkappa} \frac{\partial^{r-\varkappa}}{\partial y^{r-\varkappa}} \left[\frac{q_\varkappa(x) - q_\varkappa(y)}{x-y}\right],$$

also zufolge (2):

$$Q_x\left(\frac{1}{x-y}\right) = Q'_y\left(\frac{1}{x-y}\right) + \sum_{\varkappa=0}^{r} (-1)^{r-\varkappa} \frac{\partial^{r-\varkappa}}{\partial y^{r-\varkappa}} \left[\frac{q_\varkappa(x) - q_\varkappa(y)}{x-y}\right].$$

Wenn nun $Q_x(u)$ speciell einen reducirten Differentialausdruck bedeutet, so ist

$$\frac{q_\varkappa(x) - q_\varkappa(y)}{x-y}$$

eine ganze rationale Function von y vom Grade $(r-\varkappa-1)$, welche also

*) Jacobi, Werke Bd. II, pag. 128 ff.

nach $(r-\varkappa)$-maliger Differentiation verschwindet. ***Für einen reducirten Differentialausdruck gilt daher einfach:***

$$(88) \qquad Q_x\left(\frac{1}{x-y}\right) = Q_y'\left(\frac{1}{x-y}\right) = -\,Q_y'\left(\frac{1}{y-x}\right)\cdot$$

Nach dieser Vorbereitung gehen wir jetzt an die beabsichtigte Reduction der in (83) auftretenden Integrale

$$K = -\int\limits_{-\delta'}^{-\delta} x^\varrho\, dx\left[F_y\left\{\frac{1}{y-x}, y^\sigma\right\}\right]_{y=\varepsilon},$$

$$\mathsf{K} = -\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} y^\sigma\, dy\left[F_x\left\{x^\varrho, \frac{1}{x-y}\right\}\right]_{x=-\delta}$$

heran. Setzt man

$$(89) \qquad \begin{cases} F_y(u, y^\sigma) \equiv y^{\sigma+1}\cdot M_y(u), \\ F_x(x^\varrho, v) \equiv x^{\varrho+1}\cdot \mathsf{M}_x(v), \end{cases}$$

so sind nach (87) $M_y(u)$ und $\mathsf{M}_x(v)$ reducirte Differentialausdrücke $(r-1)$-ter Ordnung, und es folgt mit Benutzung dieser Zeichen und unter Beachtung von (88):

$$K = -\,y^{\sigma+1}\int\limits_{-\delta'}^{-\delta} x^\varrho dx\cdot M_y\left(\frac{1}{y-x}\right) = -\,y^{\sigma+1}\int\limits_{-\delta'}^{-\delta} x^\varrho\, dx\cdot M_x'\left(\frac{1}{y-x}\right),$$

$$\mathsf{K} = -\,x^{\varrho+1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} y^\sigma\, dy\cdot \mathsf{M}_x\left(\frac{1}{x-y}\right) = \quad x^{\varrho+1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'} y^\sigma\, dy\cdot \mathsf{M}_y'\left(\frac{1}{y-x}\right)\cdot$$

Nunmehr lässt sich die partielle Integration unmittelbar bewerkstelligen, wobei die Identitäten

$$\frac{1}{y-x}\cdot M_x(x^\varrho) - x^\varrho\cdot M_x'\left(\frac{1}{y-x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\, M_x\left(x^\varrho, \frac{1}{y-x}\right),$$

$$\frac{1}{y-x}\cdot \mathsf{M}_y(y^\sigma) - y^\sigma\cdot \mathsf{M}_y'\left(\frac{1}{y-x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\, \mathsf{M}_y\left(y^\sigma, \frac{1}{y-x}\right)$$

heranzuziehen sind. Bezüglich der letzteren sei noch bemerkt, dass nach (84)

$$M_x(x^\varrho) = x^\varrho\cdot M(\varrho),$$

$$\mathsf{M}_y(y^\sigma) = y^\sigma\cdot \mathsf{M}(\sigma)$$

stattfindet; setzen wir dazu

$$(90) \qquad \begin{cases} M_x(x^\varrho, v) \equiv x^{\varrho+1}\cdot N_x(v), \\ \mathsf{M}_y(y^\sigma, v) \equiv y^{\sigma+1}\cdot \mathsf{N}_y(v), \end{cases}$$

so sind $N_x(v)$, $\mathsf{N}_y(v)$ gemäss (87) wiederum reducirte Differentialausdrücke

$(r-2)$-ter Ordnung. Daraufhin ergiebt sich durch Ausführung der partiellen Integration:

$$K = -M(\varrho)\cdot y^{\sigma+1}\int\limits_{-\delta'}^{-\delta}\frac{x^\varrho\,dx}{y-x} + y^{\sigma+1}\left[x^{\varrho+1}\cdot N_x\left(\frac{1}{y-x}\right)\right]_{x=-\delta'}^{x=-\delta},$$

also, wenn man $y=\varepsilon$ einträgt und berücksichtigt, dass der von $x=-\delta'$ herrührende Theil des zweiten Terms für $\lim\varepsilon=0$ verschwindet:

$$(91_1)\quad K = -M(\varrho)\cdot\varepsilon^{\sigma+1}\int\limits_{\delta}^{\delta'}\frac{(-x)^\varrho\,dx}{x+\varepsilon} + \left[x^{\varrho+1}\cdot y^{\sigma+1}\cdot N_x\left(\frac{1}{y-x}\right)\right]_{\substack{x=-\delta\\ y=\varepsilon}}.$$

Analog findet man, wenn man noch beachtet, dass nach (88)

$$\mathsf{N}_y\left(\frac{1}{y-x}\right) = \mathsf{N}'_x\left(\frac{1}{y-x}\right)$$

ist:

$$(91_2)\quad \mathsf{K} = \mathsf{M}(\sigma)\cdot(-\delta)^{\varrho+1}\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon'}\frac{y^\sigma\,dy}{y+\delta} + \left[x^{\varrho+1}\cdot y^{\sigma+1}\cdot \mathsf{N}'_x\left(\frac{1}{y-x}\right)\right]_{\substack{x=-\delta\\ y=\varepsilon}}.$$

Es handelt sich jetzt darum, die Symbole M, M, N, N, mit denen wir bisher operirten, wirklich zu construiren. — Gehen wir auf die Definition von M_y und M_x in (89) zurück, so erhalten wir mit Hülfe von (86):

$$(92)\quad \begin{cases} M(\alpha) = \dfrac{F(\alpha)-F(-\sigma-1)}{\alpha+\sigma+1},\\[2ex] \mathsf{M}(\beta) = \dfrac{F(\varrho)-F(-\beta-1)}{\beta+\varrho+1},\end{cases}$$

so dass

$$(93)\quad M(\varrho) = \mathsf{M}(\sigma) = \frac{F(\varrho)-F(-\sigma-1)}{\varrho+\sigma+1}$$

wird. In gleicher Weise folgt aus (90):

$$\begin{cases} N(\beta) = \dfrac{M(\varrho)-M(-\beta-1)}{\beta+\varrho+1},\\[2ex] \mathsf{N}(\alpha) = \dfrac{\mathsf{M}(\sigma)-\mathsf{M}(-\alpha-1)}{\alpha+\sigma+1},\end{cases}$$

oder, wenn man die Zeichen M, M durch ihre Werthe aus (92) ersetzt und zusammenfasst:

$$N(\beta) = \left\{\frac{-F(-\beta-1)}{(\varrho+\beta+1)(\sigma-\beta)} + \frac{F(\varrho)}{(\varrho+\beta+1)(\varrho+\sigma+1)} + \frac{F(-\sigma-1)}{(\sigma-\beta)(\varrho+\sigma+1)}\right\},$$

$$\mathsf{N}(\alpha) = \left\{\frac{F(\alpha)}{(\varrho-\alpha)(\sigma+\alpha+1)} - \frac{F(\varrho)}{(\varrho-\alpha)(\varrho+\sigma+1)} - \frac{F(-\sigma-1)}{(\sigma+\alpha+1)(\varrho+\sigma+1)}\right\}.$$

Der Vergleich dieser beiden Ausdrücke lässt sofort erkennen, dass

$$N(\beta) \equiv -\mathsf{N}(-\beta-1),$$

also zufolge (85)

(94) $$\mathsf{N}_x'(v) \equiv - N_x(v)$$

stattfindet. Beiläufig sei, obgleich wir dessen nicht mehr bedürfen, bemerkt, dass man aus dem Werthe von $N(\beta)$ für den Differentialausdruck $N_x(v)$ selbst folgende Darstellung erschliesst:

$$N_x(v) = \frac{1}{\varrho+\sigma+1}\left\{x^{-\varrho-1}\cdot F_x(x^\varrho, v) - x^\sigma \cdot F_x(x^{-\sigma-1}, v)\right\}.$$

Addiren wir nun die in (91_1) *und* (91_2) *erhaltenen Ausdrücke von K und* K, *so zerstören sich wegen* (94) *die Terme ausserhalb der Integralzeichen gegenseitig, und es bleibt mit Rücksicht auf* (93):

$$\mathsf{A}_z = K + \mathsf{K} = \left[\frac{F(\varrho) - F(-\sigma-1)}{\varrho+\sigma+1}\right]\left\{-\varepsilon^{\sigma+1}\int_\delta^{\delta'}\frac{(-x)^\varrho dx}{x+\varepsilon} + (-\delta)^{\varrho+1}\int_\varepsilon^{\varepsilon'}\frac{y^\sigma dy}{y+\delta}\right\}.$$

Hier hat, zufolge der Bedeutung der Zahlen ϱ und $(-\sigma-1)$ als Wurzeln der determinirenden Gleichung $F(\alpha) = 0$, der Factor

$$\left[\frac{F(\varrho) - F(-\sigma-1)}{\varrho+\sigma+1}\right]$$

den Werth Null, ausser wenn $\varrho + \sigma + 1 = 0$ ist, in welchem Falle er gleich

$$\frac{d}{d\varrho}F(\varrho)$$

wird. Alsdann ist der zweite Factor:

$$-e^{\pi i \varrho}\left\{\int_\delta^{\delta'}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^\varrho \frac{dx}{x+\varepsilon} + \int_\varepsilon^{\varepsilon'}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{-\varrho-1}\frac{dy}{y+\delta}\right\},$$

oder, nach Substitution von $x = \varepsilon z$, $y = \frac{\delta}{z}$:

$$= -e^{\pi i \varrho}\left\{\int_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta'}{\varepsilon}} z^\varrho \frac{dz}{1+z} + \int_{\frac{\delta}{\varepsilon'}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}} z^\varrho \frac{dz}{1+z}\right\} = -e^{\pi i \varrho}\int_{\frac{\delta}{\varepsilon'}}^{\frac{\delta'}{\varepsilon}} z^\varrho \frac{dz}{1+z},$$

also für $\lim \delta = 0$, $\varepsilon = 0$:

$$= -e^{\pi i \varrho}\int_0^\infty z^\varrho \frac{dz}{1+z} = e^{\pi i \varrho}\frac{\pi}{\sin(\pi\varrho)}.$$

Damit sind wir zu dem Resultat gelangt:

$$\mathsf{A}_z = \begin{cases} 0, & \varrho+\sigma+1 \neq 0, \\ \dfrac{dF(\varrho)}{d\varrho}\cdot\dfrac{e^{\pi i \varrho}\pi}{\sin(\pi\varrho)}. & \varrho+\sigma+1 = 0. \end{cases}$$

Wir bezeichnen nun den singulären Punkt, der gegenwärtig in Frage kommt, wieder mit a_k. Sei

$$\tilde{u}_1(x),\ \tilde{u}_2(x),\cdots \tilde{u}_r(x)$$

das zu a_k gehörige kanonische Fundamentalsystem von (A_x), und zwar:

$$\tilde{u}_\alpha = a_{\alpha 0}\, x^{\varrho_\alpha} + a_{\alpha 1}\, x^{\varrho_\alpha + 1} + \cdots;$$

sei ferner

$$\tilde{v}_1(x),\ \tilde{v}_2(x),\cdots \tilde{v}_r(x)$$

das zu ersterem adjungirte System der Integrale von (A_x'). Dann ist offenbar $\tilde{v}_\alpha$ von der Form:

$$\tilde{v}_\alpha = b_{\alpha 0}\, x^{-\varrho_\alpha - 1} + b_{\alpha 1}\, x^{-\varrho_\alpha} + \cdots,$$

und wir erhalten die Beziehung der Anfangscoefficienten aus der Forderung (10), wonach

$$A_x(\tilde{u}_\alpha, \tilde{v}_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

also auch

$$F_x\left(a_{\alpha 0}\, x^{\varrho_\alpha},\ b_{\beta 0}\, x^{-\varrho_\beta - 1}\right) = \delta_{\alpha\beta}$$

sein muss. Für $\beta = \alpha$ ergiebt sich mit Hülfe von (86):

$$a_{\alpha 0} \cdot b_{\alpha 0} \cdot \left(\frac{dF(\varrho)}{d\varrho}\right)_{\varrho_\alpha} = 1.*)$$

Tragen wir diese Integrale $\tilde{u}_\alpha$, $\tilde{v}_\beta$ an Stelle von u, v in A_z ein, *so erhalten wir demnach die Relation:*

$$(95_1)\qquad \mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}(z-x)^{-n-2}\cdot\tilde{u}_\alpha(x)\,dx\ ,\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}(z-y)^{-\nu-2}\cdot\tilde{v}_\beta(y)\,dy\right\}$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\,\frac{e^{\pi i\varrho_\alpha}\,\pi}{\sin(\pi\varrho_\alpha)} = \delta_{\alpha\beta}\,2\pi i\cdot\frac{e^{2\pi i\varrho_\alpha}}{e^{2\pi i\varrho_\alpha}-1}.$$

$$(\alpha,\ \beta = 1, 2, \cdots r).$$

Die hierin auftretenden Elemente sind sämmtlich in bestimmter Weise aus dem Differentialausdruck A_x hergeleitet. Ersetzt man sie durch die correspondirenden Elemente des adjungirten Ausdrucks A_x', *so wird man noch zu der Relation geführt:*

$$(95_2)\qquad \mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{a_k}^{a_{k+1}}(z-x)^{-n-2}\cdot\tilde{u}_\alpha(x)\,dx\ ,\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}(z-y)^{-\nu-2}\cdot\tilde{v}_\beta(y)\,dy\right\}$$

$$= \delta_{\alpha\beta}\,\frac{e^{-\pi i\varrho_\alpha}\,\pi}{\sin(\pi\varrho_\alpha)} = \delta_{\alpha\beta}\,2\pi i\cdot\frac{1}{e^{2\pi i\varrho_\alpha}-1}.$$

$$(\alpha,\ \beta = 1, 2, \cdots r)$$

---

*) Vgl. Fuchs, l. c. Nr. 10.

Diese Gleichungen (95_1) *und* (95_2) *liefern für* $h = 2, 3, \cdots (\mu - 1)$ *die zweite Gruppe von* $r^2 \cdot 2(\mu - 2)$ *Periodenrelationen zweiter Art.*

§ 12.

Darstellung der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe durch die Perioden.

Bevor wir die Relationen der zweiten Gruppe mit Benutzung von (81) zur Herleitung derjenigen der dritten Gruppe verwenden können, müssen wir sie von den bisher zu Grunde gelegten kanonischen Fundamentalsystemen der einzelnen singulären Punkte auf ein und dasselbe Fundamentalsystem übertragen. Es sei also

$$u_1(x),\ u_2(x), \cdots u_r(x)$$

ein beliebiges Fundamentalsystem von (A_x),

$$v_1(x),\ v_2(x), \cdots v_r(x)$$

das zu ihm adjungirte Fundamentalsystem von (A'_x). Dieselben sind mit den in (95) benutzten kanonischen Systemen $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ des singulären Punktes a_h durch lineare Gleichungen verbunden:

$$\left.\begin{aligned} u_\sigma(x) &= \sum_{\alpha=1}^{r} c_{\sigma\alpha}\, \tilde{u}_\alpha(x), \\ v_\tau(x) &= \sum_{\beta=1}^{r} c'_{\tau\beta}\, \tilde{v}_\beta(x), \end{aligned}\right\} \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots r)$$

für welche die Beziehung

$$\sum_{\sigma=1}^{r} u_\sigma \cdot v_\sigma = \sum_{\alpha=1}^{r} \tilde{u}_\alpha \cdot \tilde{v}_\alpha$$

identisch gelten muss. Es folgt daraus:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} c_{\sigma\alpha}\, c'_{\sigma\beta} = \delta_{\alpha\beta}; \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots r) \tag{96}$$

die Matrices $\{c_{\sigma\tau}\}$ und $\{c'_{\sigma\tau}\}$ sind also zu einander reciprok. — Setzt man nun zur Abkürzung

$$e^{2\pi i \varrho_\lambda} = \omega_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots r) \tag{97}$$

so ergeben sich durch den Uebergang von den kanonischen zu den soeben eingeführten Fundamentalsystemen aus (95_1) und (95_2) die Relationen*):

*) Vgl. Fuchs, l. c. Nr. 19, (8).

$$(98_1)\quad \mathsf{A}_s\left\{\int\limits_{a_{h-1}}^{a_h}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\ ,\int\limits_{a_h}^{a_h+1}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\tau(y)\,dy\right\}$$

$$= 2\pi i\sum_{\lambda=1}^{r} c_{\sigma\lambda}\,c'_{\tau\lambda}\cdot\frac{\omega_\lambda}{\omega_\lambda-1}\ ,$$

$$(98_2)\quad \mathsf{A}_s\left\{\int\limits_{a_h}^{a_h+1}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\ ,\int\limits_{a_{h-1}}^{a_h}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\tau(y)\,dy\right\}$$

$$= 2\pi i\sum_{\lambda=1}^{r} c_{\sigma\lambda}\,c'_{\tau\lambda}\cdot\frac{1}{\omega_\lambda-1}\cdot \qquad (\sigma,\tau=1,2,\cdots r)$$

Zur weiteren Umformung der rechten Seiten ziehen wir jetzt die Substitutionen heran, welche die Fundamentalsysteme u, v bei Umlauf des Arguments um den singulären Punkt a_h erfahren. Setzen wir dieselben in der Form an:

$$\left.\begin{aligned}\bar u_\sigma &= \sum_{\tau=1}^{r} g_{\sigma\tau}\cdot u_\tau,\\ \bar v_\sigma &= \sum_{\tau=1}^{r} g'_{\sigma\tau}\cdot v_\tau,\end{aligned}\right\}\qquad (\sigma=1,2,\cdots r)$$

indem wir den vollzogenen Umlauf durch Ueberstreichen andeuten, so stellen sich, mit Rücksicht darauf, dass

$$\bar{\tilde u}_\lambda = \omega_\lambda\,\tilde u_\lambda\ ,\quad \bar{\tilde v}_\lambda = \frac{1}{\omega_\lambda}\,\tilde v_\lambda$$

ist, und mit Hülfe von (96), die Coefficienten $g_{\sigma\tau}$, $g'_{\sigma\tau}$ folgendermassen dar:

$$(99)\qquad \left\{\begin{aligned} g_{\sigma\tau} &= \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\sigma\lambda}\,c'_{\tau\lambda}\,\omega_\lambda,\\ g'_{\sigma\tau} &= \sum_{\lambda=1}^{r} c'_{\sigma\lambda}\,c_{\tau\lambda}\,\frac{1}{\omega_\lambda},\end{aligned}\right\}\qquad (\sigma,\tau=1,2,\cdots r)$$

woraus

$$\sum_{\sigma=1}^{r} g_{\sigma\alpha}\,g'_{\sigma\beta} = \delta_{\alpha\beta}\qquad (\alpha,\beta=1,2,\cdots r)$$

hervorgeht.

Die rechten Seiten von (98) und (99) zeigen in ihrer Structur eine enge Verwandtschaft; auch hat bereits Hr. Fuchs*) darauf hingewiesen, dass die ersteren zufolge der Gleichungen (99) *algebraisch* von den Coefficienten $g_{\sigma\tau}$ abhängen. *Wir können aber leicht darthun, dass sie sich sogar rational und eindeutig umkehrbar durch die $g_{\sigma\tau}$ ausdrücken lassen.*

Zu dem Zweck führen wir, unter ω einen willkürlichen Parameter verstehend, die folgenden rationalen Functionen desselben ein:

$$G_{\sigma\tau}(\omega) \equiv (g_{\sigma\tau} - \delta_{\sigma\tau}\omega) = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\sigma\lambda} c'_{\tau\lambda} \cdot (\omega_\lambda - \omega),$$

$$H_{\sigma\tau}(\omega) \equiv \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\tau\lambda} c'_{\sigma\lambda} \cdot \frac{1}{\omega_\lambda - \omega},$$

und setzen speciell

$$G_{\sigma\tau}(1) = (g_{\sigma\tau} - \delta_{\sigma\tau}) \equiv G_{\sigma\tau},$$
$$H_{\sigma\tau}(1) \equiv H_{\sigma\tau}.$$

Es ist dann

$$G(\omega) \equiv |G_{\sigma\tau}(\omega)| = \prod_{\lambda=1}^{r} (\omega_\lambda - \omega),$$

also

$$G(\omega) = 0$$

die Fundamentalgleichung des singulären Punktes a_h, welche der Voraussetzung nach den Werth $\omega = 1$ nicht zur Wurzel hat. — Componirt man nun die Matrices

$$\{g_{\sigma i}\} \quad \text{und} \quad \{H_{\sigma\varkappa}(\omega)\}$$

mit einander, so folgt:

$$\sum_{\sigma} g_{\sigma i} H_{\sigma\varkappa}(\omega) = \sum_{\sigma,\alpha,\beta} c_{\sigma\alpha} c'_{i\alpha} \omega_\alpha \cdot c_{\varkappa\beta} c'_{\sigma\beta} \frac{1}{\omega_\beta - \omega} = \sum_{\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} c'_{i\alpha} c_{\varkappa\beta} \frac{\omega_\alpha}{\omega_\beta - \omega}$$
$$= \sum_{\alpha} c_{\varkappa\alpha} c'_{i\alpha} \left[1 + \frac{\omega}{\omega_\alpha - \omega}\right] = \delta_{i\varkappa} + \omega H_{i\varkappa}(\omega);$$

mithin ist:

$$\sum_{\sigma} (g_{\sigma i} - \delta_{\sigma i}\omega) \cdot H_{\sigma\varkappa}(\omega) = \delta_{i\varkappa}, \; .$$

oder also:

*) „Ueber die Relationen, welche die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe derselben verbinden". Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1892 II, pag. 1117.

$$\sum_{\sigma=1}^{r} G_{\sigma i}(\omega) \cdot H_{\sigma \varkappa}(\omega) = \delta_{i\varkappa}. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots r)$$

weisen sich die Matrices

$$\{G_{\sigma\tau}(\omega)\} \quad \text{und} \quad \{H_{\sigma\tau}(\omega)\}$$

ander reciprok, und wir werden fernerhin die Elemente der eradezu als dadurch definirt betrachten. *Demnach lassen sich rational durch die $g_{\sigma\tau}$ und den Parameter ω darstellen, indem rrespondirenden Subdeterminanten der $G_{\sigma\tau}(\omega)$ bildet und dieselben Determinante $G(\omega)$ dividirt.* Insbesondere ergeben sich für $H_{\sigma\tau}$ als rationale Functionen der $g_{\sigma\tau}$ mit nicht verschwinden-
ɪr.

wir uns auf diese Thatsache stützen, können wir nun sofort ebte Umformung der rechten Seiten von (98) ins Werk setzen.

$$c_{\sigma\lambda} c'_{\tau\lambda} \cdot \frac{\omega_\lambda}{\omega_\lambda - 1} = \sum_{\lambda=1}^{r} c_{\sigma\lambda} c'_{\tau\lambda} \cdot \left[1 + \frac{1}{\omega_\lambda - 1}\right] = \delta_{\tau\sigma} + H_{\tau\sigma},$$

$$c_{\sigma\lambda} c'_{\tau\lambda} \cdot \frac{1}{\omega_\lambda - 1} = H_{\tau\sigma}.$$

noch die Zugehörigkeit dieser Grössen zum singulären Punkte ınfügung des oberen Index h hervor, *so erhalten wir die zweite · Periodenrelationen in der folgenden definitiven Gestalt:*

$$\mathsf{A}_z \left\{ \int_{a_{h-1}}^{a_h} (z-x)^{-n-2} \cdot u_\sigma(x)\,dx \;, \int_{a_h}^{a_{h+1}} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v_\tau(y)\,dy \right\}$$
$$= 2\pi i \left(\delta_{\tau\sigma} + H^{(h)}_{\tau\sigma}\right),$$

$$\mathsf{A}_z \left\{ \int_{a_h}^{a_{h+1}} (z-x)^{-n-2} \cdot u_\sigma(x)\,dx \;, \int_{a_{h-1}}^{a_h} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v_\tau(y)\,dy \right\}$$
$$= 2\pi i\, H^{(h)}_{\tau\sigma}. \qquad \begin{pmatrix} \sigma, \tau = 1, 2, \cdots r \\ h = 2, 3, \cdots (\mu - 1) \end{pmatrix}$$

ıicht auf die in (100) enthaltene Reciprocität fliesst hieraus

rem XI. *Die Elemente der Matrix $\left\{g^{(h)}_{\sigma\tau}\right\}$, mit welcher sich das alsystem $[u_1(x), \cdots u_r(x)]$ bei Umlauf des Arguments um den Punkt a_h substituirt, lassen sich als rationale Invarianten der*

Perioden der Integrale dieser und der adjungirten Formenschaar darstellen; und zwar erhält man das gesuchte Coefficientenschema, indem man zu der Matrix:

$$\left\{\frac{1}{2\pi i}\,\mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{a_h}^{a_h+1}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\tau(x)\,dx\;,\int\limits_{a_{h-1}}^{a_h}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\sigma(y)\,dy\right\}\right\}\quad(\sigma,\tau=1,2,\cdots r)$$

die reciproke Matrix construirt und deren Diagonalelemente um die Einheit vermehrt.

Endlich lassen sich aus (101) auf Grund von (81) *die* $r^2\cdot(\mu-1)$ *Periodenrelationen der dritten Gruppe ableiten; sie lauten:*

$$(102)\qquad \mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{a_h}^{a_h+1}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\;,\int\limits_{a_h}^{a_h+1}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\tau(y)\,dy\right\}$$

$$=-2\pi i\left\{\delta_{\tau\sigma}+H_{\tau\sigma}^{(h)}+H_{\tau\sigma}^{(h+1)}\right\}.\qquad\begin{pmatrix}\sigma,\tau=1,2,\cdots r\\ h=1,2,\cdots(\mu-1)\end{pmatrix}$$

§ 13.

Nachweis der Vollständigkeit des Systems der Periodenrelationen.

Es bleibt uns noch übrig, den Nachweis zu führen, dass die zum Aufbau der Relationen (79) verwandten je $r(\mu-1)$ Perioden $U(z)$, $V(z)$ linear-unabhängig sind, — wodurch erst die Vollständigkeit des Systems der in (80), (101) und (102) erhaltenen Periodenrelationen gesichert wird. — Zu dem Zwecke ertheilen wir ihnen zunächst eine einheitliche Form, indem wir durchgängig a_1 als untere Grenze der Integrale einführen; alsdann ergiebt sich durch Combination der gefundenen Resultate leicht das folgende System von Gleichungen:

$$(103)\qquad \mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{a_1}^{a_h}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\;,\int\limits_{a_1}^{a_k}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\tau(y)\,dy\right\}$$

$$=\begin{Bmatrix}-2\pi i\left(\delta_{\tau\sigma}+H_{\tau\sigma}^{(1)}\right) & , & k<h\\ -2\pi i\left(\delta_{\tau\sigma}+H_{\tau\sigma}^{(1)}+H_{\tau\sigma}^{(h)}\right), & & k=h\\ -2\pi i\left(H_{\tau\sigma}^{(1)}\right) & , & k>h\end{Bmatrix}\cdot\quad\begin{pmatrix}\sigma,\tau=1,2,\cdots r\\ h,k=2,3,\cdots\mu\end{pmatrix}$$

Die Determinante der $(r(\mu-1))^2$ Elemente der linken Seite zerfällt in ein Product von drei Determinanten, deren eine, die Determinante des bilinearen Ausdrucks $\mathsf{A}_z(U,V)$, wie man aus (3″) und (4) ersieht, gleich $(P_0(z))^{n-r}$ ist, während die beiden andern die Hauptdeterminanten der Periodensysteme $U(z)$, bez. $V(z)$ sind. Sind die Elemente eines der letzteren ıt linear-unabhängig, so verschwindet folglich mit der betreffenden ıptdeterminante auch die Determinante der $(r(\mu-1))^2$ Elemente der ıten Seite von (103). Letztere Forderung ersetzen wir durch die .ivalente des Zusammenbestehens der $r(\mu-1)$ linearen homogenen ichungen mit ebenso vielen Unbekannten $x_{\tau k}$:

$$\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k=2}^{h-1}\left(\delta_{\tau\sigma}+H_{\tau\sigma}^{(1)}\right)x_{\tau k}+\sum_{\tau=1}^{r}\left(\delta_{\tau\sigma}+H_{\tau\sigma}^{(1)}+H_{\tau\sigma}^{(h)}\right)x_{\tau h}$$
$$+\sum_{\tau=1}^{r}\sum_{k=h+1}^{\mu}H_{\tau\sigma}^{(1)}x_{\tau k}=0,$$

ɜr zusammengefasst:

$$\sum_{\tau=1}^{r}H_{\tau\sigma}^{(h)}x_{\tau h}+\sum_{\tau=1}^{r}H_{\tau\sigma}^{(1)}\sum_{k=2}^{\mu}x_{\tau k}+\sum_{k=2}^{h}x_{\sigma k}=0. \qquad \begin{pmatrix}\sigma=1,2,\cdots r\\ h=2,3,\cdots\mu\end{pmatrix}$$

Hier führen wir im Interesse der Symmetrie weitere r Unbekannte durch die r Gleichungen ein:

4)
$$\sum_{k=1}^{\mu}x_{\tau k}=0, \qquad (\tau=1,2,\cdots r)$$

nit obige Gleichungen die Form erhalten:

$$\left\{\sum_{\tau=1}^{r}H_{\tau\sigma}^{(h)}x_{\tau h}+\sum_{k=1}^{h}x_{\sigma k}\right\}=\left\{\sum_{\tau=1}^{r}H_{\tau\sigma}^{(1)}x_{\tau 1}+x_{\sigma 1}\right\}.$$

ıtet man darauf, dass die rechte Seite aus der linken für $h=1$ hervor- t, so kann man letztere Relationen unter Heranziehung von r neuen bekannten x_σ besser folgendermassen darstellen:

$$\sum_{\tau=1}^{r}H_{\tau\sigma}^{(h)}x_{\tau h}+\sum_{k=1}^{h}x_{\sigma k}=x_\sigma. \qquad \begin{pmatrix}\sigma=1,2,\cdots r\\ h=1,2,\cdots\mu\end{pmatrix}$$

die H zu beseitigen, multiplicirt man nun mit $G_{i\sigma}^{(h)}$ und summirt r σ; dann folgt:

$$\sum_{\sigma=1}^{r}G_{i\sigma}^{(h)}x_\sigma=x_{ih}+\sum_{k=1}^{h}\sum_{\sigma=1}^{r}G_{i\sigma}^{(h)}x_{\sigma k},$$

r, wenn man auf die Bedeutung der G zurückgeht:

5)
$$\sum_{\sigma=1}^{r}g_{i\sigma}^{(h)}x_\sigma-x_i=\sum_{k=1}^{h}\sum_{\sigma=1}^{r}g_{i\sigma}^{(h)}x_{\sigma k}-\sum_{k=1}^{h-1}x_{ik}. \qquad \begin{pmatrix}i=1,2,\cdots r\\ h=1,2,\cdots\mu\end{pmatrix}$$

Zur weiteren Behandlung dieser Gleichungen ziehen wir die Substitutionen heran, welche das Fundamentalsystem $[u_1(x), \cdots u_r(x)]$ bei simultanem Umlauf des Arguments bez. um

$$(a_1),\ (a_1,\ a_2),\ (a_1,\ a_2,\ a_3), \cdots (a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots a_\mu)$$

erfährt. Die Substitutionscoefficienten $l_{\varkappa\lambda}^{(h)}$ des Umlaufs um $(a_1, a_2, \cdots a_h)$ berechnen sich aus den $l_{\varkappa\lambda}^{(h-1)}$ vermittelst der Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{r} l_{\varkappa i}^{(h-1)} g_{i\lambda}^{(h)} = l_{\varkappa\lambda}^{(h)}, \qquad \begin{pmatrix} \varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots r \\ h = 1, 2, \cdots \mu \end{pmatrix}$$

wobei

$$l_{\varkappa i}^{(0)} = \delta_{\varkappa i}$$

ist. — Multipliciren wir jetzt (105) mit $l_{\varkappa i}^{(h-1)}$ und summiren über i, so folgt:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(h)} x_\sigma - \sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(h-1)} x_\sigma = \sum_{k=1}^{h} \sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(h)} x_{\sigma k} - \sum_{k=1}^{h-1} \sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(h-1)} x_{\sigma k};$$

und durch Summation der zu $h = 1, 2, 3, \cdots \mu$ gehörenden Gleichungen ergiebt sich weiter:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(\mu)} x_\sigma - x_\varkappa = \sum_{k=1}^{\mu} \sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(\mu)} x_{\sigma k} = \sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(\mu)} \sum_{k=1}^{\mu} x_{\sigma k},$$

oder wegen (104):

$$\sum_{\sigma=1}^{r} l_{\varkappa\sigma}^{(\mu)} x_\sigma - x_\varkappa = 0. \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots r)$$

Da sich aber die $u_\varkappa(x)$ für grosse Werthe von x wie x^n verhalten und da der Umlauf um sämmtliche singulären Punkte $(a_1, a_2, \cdots a_\mu)$ einem negativen Umlauf um den unendlich fernen Punkt äquivalent ist, so gilt:

$$l_{\varkappa\sigma}^{(\mu)} = \delta_{\varkappa\sigma} \cdot e^{2\pi i n};$$

man hat also

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_r = 0,$$

weil n der Voraussetzung nach keine ganze Zahl ist.

Dadurch reduciren sich die Gleichungen (105) auf folgende:

$$\sum_{k=1}^{h} \sum_{\sigma=1}^{r} g_{i\sigma}^{(h)} x_{\sigma k} - \sum_{k=1}^{h-1} x_{ik} = 0. \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots r \\ h = 1, 2, \cdots \mu \end{pmatrix}$$

Nimmt man zunächst $h = 1$, so ist

$$\sum_{\sigma=1}^{r} g_{i\sigma}^{(1)} x_\sigma = 0, \qquad (i = 1, 2, \cdots r)$$

lso verschwinden, da die Determinante

$$\left|g_{i\sigma}^{(1)}\right| \neq 0$$

st, alle $x_{\sigma 1}$. Setzt man dann $h = 2$, so folgt, dass die $x_{\sigma 2}$ gleich Null ind; und indem man weiter $h = 3, \cdots \mu$ annimmt, erkennt man, dass lie Ausgangsgleichungen nur dadurch erfüllt werden können, dass sämmtiche Unbekannten verschwinden. *Damit ist aber der Beweis der Unabıängigkeit der Perioden $U(z)$, $V(z)$ und der Vollständigkeit des Systems der Relationen erbracht.*

§ 14.

Die Periodenrelationen zweiter Art in allgemeingültiger Fassung.

Die Herleitung sowol wie die in (103) gegebene Formulirung der Periodenrelationen unterliegt gewissen Beschränkungen in betreff der leterminirenden Exponenten, die wir zum Abschluss dieser Erörterungen beseitigen wollen. Indem wir zu diesem Zweck neben den singulären Punkten auch den Parameter z als Integrationsgrenze benutzen, bedarf es allerdings zunächst, damit die Integrale Sinn haben, einer weiteren Voraussetzung, nämlich, dass die reellen Bestandtheile der Zahlen n und ν kleiner als (-1) sind. Beide Bedingungen sind nach (18) mit einander verträglich, da wir $m > 2r$ angenommen haben.

Erstreckt man nun die Integration der Formen

$$(z-x)^{-n-2} \cdot u_i(x) \quad , \quad (z-y)^{-\nu-2} \cdot v_\varkappa(y)$$

ängs einer geschlossenen Curve, welche die singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\mu$ ınd z einschliesst, so haben die Integrale den Werth Null, woraus man eicht folgende Beziehungen erhält:

$$(1-\varepsilon)\int_{a_1}^{z}(z-x)^{-n-2} \cdot u_i(x)\, dx$$

$$= \sum_{k=2}^{\mu} \sum_{\sigma=1}^{r} \left(l_{i\sigma}^{(k-1)} - l_{i\sigma}^{(k)}\right) \int_{a_1}^{a_k} (z-x)^{-n-2} \cdot u_\sigma(x)\, dx,$$

$$-\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\int_{a_1}^{z}(z-y)^{-\nu-2} \cdot v_\varkappa(y)\, dy$$

$$= \sum_{k=2}^{\mu} \sum_{\tau=1}^{r} \left(l_{\varkappa\tau}^{\prime(k-1)} - l_{\varkappa\tau}^{\prime(k)}\right) \int_{a_1}^{a_k} (z-y)^{-\nu-2} \cdot v_\tau(y)\, dy;$$

darin ist

$$\varepsilon = e^{2\pi i n},$$

und die Matrix $\left\{l'^{(h)}_{\sigma\tau}\right\}$ reciprok zur Matrix $\left\{l^{(h)}_{\sigma\tau}\right\}$. Wenn man den Punkt z auch mit $a_{\mu+1}$ bezeichnet, so lässt sich vermittelst dieser Relationen ohne Mühe zeigen, dass die Gleichung (103) auch dann noch in Kraft bleibt, wenn die Indices h, k den Werth $(\mu+1)$ annehmen; — dabei ist zu identificiren:

$$g^{(\mu+1)}_{\sigma\tau} = \delta_{\sigma\tau} \cdot \frac{1}{\varepsilon},$$

woraus

$$G^{(\mu+1)}_{\sigma\tau} = \delta_{\sigma\tau} \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

und

$$H^{(\mu+1)}_{\sigma\tau} = \delta_{\sigma\tau} \cdot \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

folgt. — Combinirt man die Gleichungen des so erweiterten Systems (103) in der Weise, das z durchgängig als obere Integrationsgrenze eingeführt wird, so erhält man die $(r\mu)^2$ Relationen:

$$(106)\quad \mathsf{A}_z\left\{\int_{a_h}^{z}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\ ,\int_{a_k}^{z}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\tau(y)\,dy\right\}$$

$$= \begin{cases} -2\pi i\,\delta_{\tau\sigma}\cdot\dfrac{1}{1-\varepsilon}\ , & k<h \\ -2\pi i\left(\delta_{\tau\sigma}\cdot\dfrac{1}{1-\varepsilon}+H^{(h)}_{\tau\sigma}\right), & k=h \\ -2\pi i\,\delta_{\tau\sigma}\cdot\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\ , & k>h \end{cases}$$

von denen $r^2(2\mu-1)$ eine Folge der übrigen $(r(\mu-1))^2$ sind.

Jetzt ersetzen wir die zwischen den Punkten a_h und z erstreckten Integrale durch die entsprechenden Integrale mit doppeltem Umlauf um beide Punkte, welche letzteren sich folgendermassen durch die ersteren darstellen:

$$\int_{(a_h,\,z)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx$$

$$= -\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\sum_{i=1}^{r}\left(g^{(h)}_{\sigma i}-\delta_{\sigma i}\right)\int_{a_h}^{z}(z-x)^{-n-2}\cdot u_i(x)\,dx,$$

$$\int\limits_{(a_k,\,z)} (z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\tau(y)\,dy$$

$$= (1-\varepsilon)\sum_{\varkappa=1}^{r}\left(g'^{(k)}_{\tau\varkappa}-\delta_{\tau\varkappa}\right)\int\limits_{a_k}^{z}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\varkappa(y)\,dy.$$

Dadurch gehen die Formeln (106) *über in folgende:*

$$(107)\qquad \mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{(a_h,\,z)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\;,\int\limits_{(a_k,\,z)}(z-y)^{-\nu-2}\cdot v_\tau(y)\,dy\right\}$$

$$=\left|\begin{array}{ll} 2\pi i\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\sum\limits_{\lambda=1}^{r}\left[g^{(h)}_{\sigma\lambda}-\delta_{\sigma\lambda}\right]\left[g'^{(k)}_{\tau\lambda}-\delta_{\tau\lambda}\right], & k<h \\ -2\pi i\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)\left\{\left[g^{(h)}_{\sigma\tau}-\delta_{\sigma\tau}\right]+\varepsilon\left[g'^{(h)}_{\tau\sigma}-\delta_{\tau\sigma}\right]\right\}, & k=h \\ 2\pi i(1-\varepsilon)\sum\limits_{\lambda=1}^{r}\left[g^{(h)}_{\sigma\lambda}-\delta_{\sigma\lambda}\right]\left[g'^{(k)}_{\tau\lambda}-\delta_{\tau\lambda}\right]; & k>h \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix}\sigma,\tau=1,2,\cdots r\\ h,k=1,2,\cdots \mu\end{pmatrix}$$

und da hier die linke Seite stets ihren Sinn behält, welches auch die Werthe der determinirenden Exponenten und der sich nach (50) *aus ihnen ergebenden Ordnung n sein mögen, so ist es evident, dass wir sämmtliche Beschränkungen in betreff derselben fallen lassen können;* — nur darf n nicht ganzzahlig sein, weil sonst die Integrale zu Null werden und $\varepsilon = 1$ ist, also beide Seiten von (107) identisch verschwinden. — Es kommen indess nur diejenigen singulären Punkte in Betracht, welche Verzweigungsstellen sind; wenn sich nämlich die $u_\sigma(x)$ in der Umgebung von a_h eindeutig verhalten, so werden die um a_h und z in doppeltem Umlauf erstreckten Integrale zu Null und gleichzeitig ist $\left(g^{(h)}_{\sigma\lambda}-\delta_{\sigma\lambda}\right)=0$.

Es ist nun noch eine Complication hinwegzuräumen, welche sich infolge der Aufhebung jener Beschränkungen einstellt. Dieselben machten es nothwendig, dass der Coefficient $P_0(x)$ in dem Differentialpolynom $A_x(u)$ seine Linearfactoren in der r-ten Potenz enthielt, ohne dass sich eine ganze Form als Factor aus dem Ausdruck $A_x(u)$ abscheiden liess. Lässt man aber die in Rede stehenden Voraussetzungen bei Seite, so kann es eintreten, dass der ursprünglich zu Grunde gelegte Differentialausdruck $B_x(u)$ bezüglich seines Anfangscoefficienten anders beschaffen ist, und also erst durch Multiplication mit einer ganzen Form in denjenigen Differentialausdruck $A_x(u)$ übergeht, von dem das bilineare Polynom $\mathsf{A}_z(U, V)$ der linken Seite von (107) abzuleiten ist. Wir wollen nun das letztere unmittelbar mit dem Symbol $B_x(u)$ in Verbindung bringen.

Wir setzen zu diesem Zweck:

$$A_x(u) = C_x B_x(u), \tag{108}$$

wobei C_x einen Differentialausdruck von der speciellen Ordnung Null darstellt, — was indess für das Folgende unwesentlich ist. Alsdann gilt bezüglich der alliirten Ausdrücke nach Theorem IV in § 5:

$$\mathsf{A}_z(U) = \Gamma_z \mathsf{B}_z(U),$$

und gemäss dem Reciprocitätssatz:

$$\mathsf{A}'_z(V) = \mathsf{B}'_z \Gamma'_z(V).$$

Daraus folgt weiter:

$$V \cdot \mathsf{A}_z(U) - U \cdot \mathsf{A}'_z(V) = V \cdot \Gamma_z \mathsf{B}_z(U) - U \cdot \mathsf{B}'_z \Gamma'_z(V)$$

$$= \left[V \cdot \Gamma_z \mathsf{B}_z(U) - \mathsf{B}_z(U) \cdot \Gamma'_z(V)\right] + \left[\Gamma'_z(V) \cdot \mathsf{B}_z(U) - U \cdot \mathsf{B}'_z \Gamma'_z(V)\right],$$

und die Integration dieser Gleichung liefert die Beziehung:

$$\mathsf{A}_z(U, V) = \Gamma_z\{\mathsf{B}_z(U), V\} + \mathsf{B}_z\{U, \Gamma'_z(V)\}.$$

Versteht man jetzt unter U die in (107) auftretende aus $u_\sigma(x)$ abgeleitete Periode, so erfüllt dieselbe die Differentialgleichung

$$\mathsf{B}_z(U) = 0,$$

da ja $u_\sigma(x)$ eine Lösung von

$$B_x(u) = 0$$

ist. Folglich reducirt sich $\mathsf{A}_z(U, V)$ auf:

$$\mathsf{A}_z(U, V) = \mathsf{B}_z\{U, \Gamma'_z(V)\}.$$

Nun werde auch V mit der aus $v_\tau(y)$ abgeleiteten Periode in (107) identificirt, und es mögen $w_\tau(y)$ und $W(z)$ zu dem Differentialausdruck $B_x(u)$ in der gleichen Beziehung stehen wie $v_\tau(y)$ und $V(z)$ zu $A_x(u)$. Da aus (108)

$$A'_y(v) = B'_y C'_y(v)$$

folgt, so ist

$$w_\tau(y) = C'_y(v_\tau(y)),$$

woraus sich auf Grund des Theorems V in § 6 ergiebt:

$$W(z) = \Gamma'_z(V(z)).$$

Mithin erhalten wir:

$$\mathsf{A}_z(U, V) = \mathsf{B}_z(U, W);$$

und zwar ist dieses Resultat, wie man sich leicht überzeugt, genau richtig, obwol der Kürze wegen bei der Herleitung gewisse constante Factoren vernachlässigt wurden. Es geht aus demselben hervor, dass die Formeln (107) auch dann noch gültig sind, wenn man die zu Grunde gelegte Differentialgleichung nicht erst durch Multiplication mit einer Form in der erwähnten Weise normirt.

Damit sind wir nun zu folgendem, innerhalb gewisser Grenzen abschliessenden Ergebniss gelangt:

Theorem XII. Es sei

$$A_x(u) \equiv \sum_{\varkappa=0}^{r} n_{r-\varkappa} \{P_\varkappa(x), u\}_{r-\varkappa} = 0$$

eine beliebige Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse mit den Verzweigungsstellen $a_1, a_2, \cdots a_\mu$, *deren Coefficienten* $P_\varkappa(x)$ *ganze rationale Formen von der bez. Ordnung* $(m-2\varkappa)$ *sind;* n *sei die — als nicht ganzzahlig vorausgesetzte — Ordnung von* u. *Die Elemente*

$$u_1(x),\ u_2(x), \cdots u_r(x)$$

eines Fundamentalsystems von Lösungen mögen bei Umlauf des Arguments um die Verzweigungspunkte bez. die Substitutionen erfahren:

$$\bar{u}_\sigma = \sum_{\tau=1}^{r} g_{\sigma\tau}^{(h)} u_\tau\ , \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \cdots r \\ h = 1, 2, \cdots \mu \end{pmatrix}$$

wonach das zu diesem adjungirte System

$$v_1(x),\ v_2(x), \cdots v_r(x)$$

von der Ordnung $\nu = (2r-2-m-n)$ *bez. die contragredienten Substitutionen*

$$\bar{v}_\sigma = \sum_{\tau=1}^{r} g_{\sigma\tau}^{\prime\,(h)} v_\tau \qquad \begin{pmatrix} \sigma = 1, 2, \cdots r \\ h = 1, 2, \cdots \mu \end{pmatrix}$$

erleidet. Es sei ferner $\varepsilon = e^{2\pi i n}$ *und*

$$\mathsf{A}_z(U, V) = \sum_{\varkappa=0}^{r} \left[P_\varkappa(z);\ U(z),\ V(z)\right]_{(m-r-1-\varkappa)}.$$

Alsdann finden die in (107) *angegebenen* $(r\mu)^2$ *Periodenrelationen statt, unter denen höchstens* $(m-r)^2$ *von einander unabhängig sind.*

Da die rechte Seite von (107) invariant ist für alle Differentialgleichungen, welche zu der von $A_x(u) = 0$ repräsentirten Art gehören, so muss auch die linke Seite eine Artinvariante darstellen. Man kann diese Thatsache mit Hülfe der Theoreme IV und V direct erweisen, — worauf wir jedoch nicht näher eingehen wollen.

Bildet man die Matrix der $(r\mu)^2$ *Elemente der rechten Seite von* (107), *so ist der Rang derselben von fundamentaler Bedeutung, indem er offenbar im allgemeinen die Anzahl der Perioden liefert, welche die überall endlichen Integralfunctionen der von den Matrices* $\left\{g_{\sigma\tau}^{(h)}\right\}$ *constituirten Gruppe besitzen.*

Wir haben endlich noch zu erörtern, wie sich die Relationen (107) gestalten, wenn die Differentialgleichung $A_x(u)=0$ zu sich selbst adjungirt ist.

Wenn dabei r ungerade ist, so kann man nach (13_1) das System $[u_1(x), \cdots u_r(x)]$ so wählen, dass $v_\sigma(x)=u_\sigma(x)$ wird. Alsdann ist $g'^{(h)}_{\sigma\tau}=g^{(h)}_{\sigma\tau}$ und die Substitutionen $\left\{g_{\sigma\tau}^{(h)}\right\}$ sind demnach orthogonal. *Die Periodenrelationen lauten mithin in diesem Falle:*

$$(109)\quad \mathsf{A}_z\left\{\int\limits_{(a_h,z)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\;,\int\limits_{(a_k,z)}(z-y)^{-n-2}\cdot u_\tau(y)\,dy\right\}$$
$$=\begin{cases}4\pi i\left(g_{\sigma\tau}^{(h)}-g_{\tau\sigma}^{(h)}\right)\;, & k=h,\ \sigma<\tau,\\ 4\pi i\sum\limits_{\lambda=1}^{r}\left(g_{\sigma\lambda}^{(h)}-\delta_{\sigma\lambda}\right)\left(g_{\tau\lambda}^{(k)}-\delta_{\tau\lambda}\right); & k>h,\end{cases}$$
$$\begin{pmatrix}\sigma,\tau=1,2,\cdots r\\ h,k=1,2,\cdots\mu\end{pmatrix}$$

und zwar sind unter diesen $\frac{r\mu(r\mu-1)}{2}$ *Gleichungen höchstens* $\frac{(m-r)(m-r-1)}{2}$ *unabhängig.*

Nehmen wir r als gerade Zahl an und setzen $r=2\varrho$, so kann gemäss (13_2) das System $[u_1(x), \cdots u_\varrho(x), u_{\varrho+1}(x), \cdots u_{2\varrho}(x)]$ derart eingerichtet werden, dass

$$\left.\begin{aligned}v_\sigma(x) &= u_{\varrho+\sigma}(x)\\ v_{\varrho+\sigma}(x) &= -u_\sigma(x)\end{aligned}\right\}\qquad(\sigma=1,2,\cdots\varrho)$$

wird. Zwischen den reciproken Matrices $\{g_{\sigma\tau}\}$ und $\{g'_{\sigma\tau}\}$ finden dann folgende Beziehungen statt:

$$\left.\begin{aligned}g'_{\sigma\tau} &= g_{\varrho+\sigma,\varrho+\tau}, & g'_{\sigma,\varrho+\tau} &= -g_{\varrho+\sigma,\tau},\\ g'_{\varrho+\sigma,\tau} &= -g_{\sigma,\varrho+\tau}, & g'_{\varrho+\sigma,\varrho+\tau} &= g_{\sigma\tau},\end{aligned}\right\}\qquad(\sigma,\tau=1,2,\cdots\varrho)$$

mit deren Benutzung sich *die Periodenrelationen folgendermassen darstellen:*

$$
110)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\mathsf{A}_z\left\{\displaystyle\int\limits_{(a_h,z)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\;,\int\limits_{(a_k,z)}(z-y)^{-n-2}\cdot u_\tau(y)\,dy\right\}= \\
\left\{
\begin{array}{ll}
-\,4\pi i\left(g^{(h)}_{\sigma,\varrho+\tau}+g^{(h)}_{\tau,\varrho+\sigma}\right), & k=h,\quad \sigma\leqq\tau. \\
4\pi i\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\varrho}\left\{\left(g^{(h)}_{\sigma\lambda}-\delta_{\sigma\lambda}\right)g^{(k)}_{\tau,\varrho+\lambda}-g^{(h)}_{\sigma,\varrho+\lambda}\left(g^{(k)}_{\tau\lambda}-\delta_{\tau\lambda}\right)\right\}; & k>h.
\end{array}\right. \\[2em]
\mathsf{A}_z\left\{\displaystyle\int\limits_{(a_h,z)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_\sigma(x)\,dx\;,\int\limits_{(a_k,z)}(z-y)^{-n-2}\cdot u_{\varrho+\tau}(y)\,dy\right\}= \\
\left\{
\begin{array}{ll}
4\pi i\left(g^{(h)}_{\sigma\tau}-g^{(h)}_{\varrho+\tau,\varrho+\sigma}\right), & k=h. \\
\mp\,4\pi i\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\varrho}\left\{\left(g^{(h)}_{\sigma\lambda}-\delta_{\sigma\lambda}\right)\left(g^{(k)}_{\varrho+\tau,\varrho+\lambda}-\delta_{\tau\lambda}\right)-g^{(h)}_{\sigma,\varrho+\lambda}\,g^{(k)}_{\varrho+\tau,\lambda}\right\}; & k\lessgtr h.
\end{array}\right. \\[2em]
\mathsf{A}_z\left\{\displaystyle\int\limits_{(a_h,z)}(z-x)^{-n-2}\cdot u_{\varrho+\sigma}(x)\,dx\;,\int\limits_{(a_k,z)}(z-y)^{-n-2}\cdot u_{\varrho+\tau}(y)\,dy\right\}= \\
\left\{
\begin{array}{ll}
4\pi i\left(g^{(h)}_{\varrho+\sigma,\tau}+g^{(h)}_{\varrho+\tau,\sigma}\right), & k=h,\quad \sigma\leqq\tau. \\
4\pi i\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\varrho}\left\{g^{(h)}_{\varrho+\sigma,\lambda}\left(g^{(k)}_{\varrho+\tau,\varrho+\lambda}-\delta_{\tau\lambda}\right)-\left(g^{(h)}_{\varrho+\sigma,\varrho+\lambda}-\delta_{\sigma\lambda}\right)g^{(k)}_{\varrho+\tau,\lambda}\right\}; & k>h.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

$$
\begin{pmatrix}\sigma,\ \tau=1,2,\cdots\varrho \\ h,\ k=1,2,\cdots\mu\end{pmatrix}
$$

und zwar sind unter diesen $\frac{r\mu(r\mu+1)}{2}$ *Gleichungen höchstens* $\frac{(m-r)(m-r+1)}{2}$ *unabhängig.*

Abschnitt III.

Die Relationen erster Art und die Ungleichungen unter den Perioden.

§ 15.

Construction der Periodenrelationen erster Art.

Ich gehe nun zur näheren Ausarbeitung der Periodenrelationen erster Art über, wiederum unter der Annahme, dass die zu Grunde gelegte Differentialgleichung

$$(A_x) \qquad A_x(u) = \sum_{x=0}^{r} n_{r-x} \{ P_x(x), u \}_{r-x} = 0$$

der Fuchs'schen Klasse angehört.

Sei also wie in § 4

$$P_0(x) = (x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2} \cdots (x-a_\mu)^{s_\mu},$$

wobei

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_\mu = m,$$

und seien

$$\varrho_{i1}, \varrho_{i2}, \cdots \varrho_{i,s_i}; \quad 0, 1, \cdots (r-s_i-1)$$

die determinirenden Exponenten des singulären Punktes $x = a_i$ bezüglich der Differentialgleichung (A_x),

$$\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \cdots \sigma_{i,s_i}; \quad 0, 1, \cdots (r-s_i-1)$$

die determinirenden Zahlen desselben Punktes bezüglich der adjungirten Gleichung (A_x'), zwischen welchen, wie man leicht zeigt, die Beziehungen

$$\varrho_{i\lambda} + \sigma_{i\lambda} = r - s_i - 1 \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots s_i)$$

stattfinden. Unsere Voraussetzungen inbetreff derselben bemessen wir durch die Forderung, dass die zwischen irgend zwei singulären Punkten erstreckten Integrale

$$U(z) = \int_{a_h}^{a_k} (z-x)^{-n-2} \cdot u(x)\, dx \;, \; V(z) = \int_{a_h}^{a_k} (z-x)^{-\nu-2} \cdot v(x)\, dx,$$

worin $u(x)$, $v(x)$ Lösungen von (A_x), bez. (A'_x) bedeuten, Sinn haben sollen. Dazu müssen die reellen Theile von $\varrho_{i\lambda}$ und $\sigma_{i\lambda}$ grösser als (-1) sein, also derjenige von $\varrho_{i\lambda}$ zwischen (-1) und $(r-s_i)$ liegen. Im allgemeinen sind damit diese Formen $U(z)$, $V(z)$ nicht zugleich Lösungen der alliirten Differentialgleichungen (A_z), bez. (A'_z); dies tritt vielmehr, wie in § 10 gezeigt worden ist, mit Sicherheit nur dann ein, wenn die Grenzpunkte der Integrale a_h und a_k die Multiplicität r besitzen, also $s_h = s_k = r$ ist. — Ausserdem setzen wir die Ordnung n von $u(x)$ wiederum als nicht ganzzahlig voraus.

Zur Entwicklung der in Rede stehenden Periodenrelationen benutze ich nun die Methode der Randintegration, indem ich den Ansatz, mittels dessen Riemann*) die bilinearen Relationen unter den Perioden der Abel'schen Integrale abgeleitet hat, in einer den vorliegenden Verhältnissen entsprechenden Weise verallgemeinere.**)

Es soll im Folgenden

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots u_r(x)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (A_x) vorstellen, weiter

$$v_1(x),\ v_2(x),\ \cdots v_r(x)$$

dasjenige Fundamentalsystem von Lösungen der adjungirten Differentialgleichung (A'_x), welches nach der in (5) gegebenen Definition zu dem ersteren adjungirt ist. Man denke sich etwa je einen Zweig der $u_i(x)$ in der Umgebung eines regulären Punktes durch eine Potenzreihe dargestellt und die correspondirenden Zweige der $v_i(x)$ vermittelst der Gleichungen (5) aus jenen bestimmt. Markirt man in der complexen Ebene E die singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\mu$ sowie den Punkt z und führt einen Schnitt, der von a_1 ausgehend diese Punkte der Reihe nach verbindet und ins Unendliche ausläuft, so verhalten sich in der zerschnittenen Ebene E' diese Functionszweige u, v eindeutig.

Wir stellen uns ihren ganzen Werthvorrat in E' ausgebreitet vor und fassen insbesondere die Werthe ins Auge, welche sie an den Ufern eines Theilschnitts $(a_\lambda, a_{\lambda+1})$ besitzen. Da die Werthe der u_i auf dem negativen (rechten) Ufer durch einen positiven Umlauf von x um die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\lambda$ aus den Werthen auf dem positiven (linken) Ufer hervorgehen, so stellen sie sich als lineare homogene Functionen der letzteren mit constanten Coefficienten dar; es finden demnach für die u_i sowie auch die v_i Substitutionsgleichungen statt, die wir folgendermassen ansetzen:

*) „Theorie der Abel'schen Functionen", Nr. 20.

**) Vgl. H. I. § 5.

$$(111)\qquad \text{längs } (a_\lambda, a_{\lambda+1}): \begin{cases} u_i^- = \sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)} u_\varkappa^+ , \\ v_i = \sum_{\varkappa=1}^{r} \beta_{i\varkappa}^{(\lambda)} v_\varkappa^+ . \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots r)$$

Dabei verhalten sich aber die Variabelnsysteme der u_i und v_i, wenn man sie momentan nur als Träger der Substitutionen betrachtet, contragredient, es besteht mithin die Identität:

$$\sum_{i=1}^{r} u_i^- v_i^- = \sum_{i=1}^{r} u_i^+ v_i^+ ,$$

welche die Reciprocität der Matrices $\left\{\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}\right\}$ und $\left\{\beta_{i\varkappa}^{(\lambda)}\right\}$ und also die Relationen

$$(112)\qquad \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(\lambda)} \beta_{i\tau}^{(\lambda)} = \delta_{\sigma\tau} \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots r)$$

zur Folge hat. — Im Hinblick auf unser Ziel müssen wir diese Substitutionscoefficienten als bekannte Elemente betrachten, so gut wie die u_i, v_i selbst; wir dürfen es uns also genügen lassen, die unbekannten Coefficienten der in Frage stehenden Periodenrelationen auf jene zurückzuführen.

Während die soeben erörterten Beziehungen für die $(\mu-1)$ Schnitte $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \cdots (a_{\mu-1}, a_\mu)$ gelten, hat man in bezug auf den Schnitt, welcher von a_μ über z ins Unendliche führt, folgende Sachlage: der Umlauf von x, welcher die Werthe der u_i vom positiven Ufer in diejenigen auf dem negativen Ufer überführt, umschliesst sämmtliche singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\mu$, ist also einem negativen Umlauf um den unendlich fernen Punkt äquivalent; da sich die u_i für grosses x verhalten wie x^n, so nehmen sie bei diesem Umlauf den Factor

$$\varepsilon = e^{2\pi i n}$$

auf, der nach der Voraussetzung von 1 verschieden ist. Es findet also statt:

$$(113)\qquad \text{längs } (a_\mu, z, \infty): \begin{cases} u_i^- = \varepsilon\, u_i^+ , \\ v_i^- = \frac{1}{\varepsilon}\, v_i^+ . \end{cases}$$

Betrachten wir weiterhin die Producte

$$(z-x)^{-n-2} \cdot u_i(x), \quad (z-x)^{-\nu-2} \cdot v_i(x),$$

so gelten für die Werthe, welche dieselben an den Ufern der Theilschnitte annehmen, offenbar die gleichen Beziehungen wie für die u_i, v_i selbst, mit Ausnahme desjenigen Schnitts, welcher von z ausgehend ins Unendliche läuft; an letzterem wird der Werthunterschied dadurch aufgehoben, dass die hinzugetretenen Factoren $(z-x)^{-\varkappa-2}$, $(z-x)^{-\nu-2}$ bei dem den Punkt z einschliessenden Umlauf die Factoren $\frac{1}{\varepsilon}$, bez. ε aufnehmen. Da wir in der Folge nur mit den soeben eingeführten Producten zu thun haben, so soll deshalb der Theilschnitt (z, ∞) wieder beseitigt und der Punkt z durch einen kleinen Kreis K ausgeschlossen werden, der von einem Punkte b des positiven Ufers ausgeht und in dem gegenüberliegenden Punkte b' auf dem negativen Ufer mündet. Die Randcurve R, welche sich auf diese Weise aus den Ufern der Schnitte (a_1, a_2), (a_2, a_3), $\cdots$ $\cdots (a_{\mu-1}, a_\mu)$, (a_μ, b) und dem Kreise K zusammensetzt, begrenzt eine einfach zusammenhängende Fläche E'', die der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt wird. Es sollen darin die singulären Punkte a_λ, je nachdem sie auf dem positiven oder negativen Ufer in Rechnung kommen, durch a_λ und a'_λ unterschieden werden.

Wir verstehen nun unter $G_\sigma(x)$, $H_\tau(x)$ beliebige ganze rationale Formen von der Ordnung ihres Index und construiren damit die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} M_i(x) &= \int_{a_1}^{x} (z-x)^{-\varkappa-2-\sigma} \cdot u_i(x)\, G_\sigma(x)\, dx, \\ N_i(x) &= \int_{a_1}^{x} (z-x)^{-\nu-2-\tau} \cdot v_i(x)\, H_\tau(x)\, dx. \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,\cdots r)$$

Dieselben haben, da die Integranden sich für grosses x wie $\frac{1}{x^2}$ verhalten, in E'' überall endliche und eindeutig bestimmte Werthe, und unter den Werthen, die ihre Differentiale an den Ufern der Schnitte besitzen, finden auf Grund der soeben festgestellten Verhältnisse die Beziehungen statt:

$$\text{(114)} \qquad \text{längs } (a_\lambda, a_{\lambda+1}): \begin{cases} dM_i^- = \sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}\, dM_\varkappa^+, \\ dN_i^- = \sum_{\varkappa=1}^{r} \beta_{i\varkappa}^{(\lambda)}\, dN_\varkappa^+, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots r \\ \lambda=1,2,\cdots(\mu-1) \end{pmatrix}$$

$$\text{(115)} \qquad \text{längs } (a_\mu, b): \begin{cases} dM_i^- = \varepsilon\; dM_i^+, \\ dN_i^- = \frac{1}{\varepsilon}\; dN_i^+. \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots r)$$

Erstreckt man die Integration dieser Differentiale über die Randcurve R, so ergiebt sich der Werth Null; die Entwicklung der Identität

$$\int\limits_{(R)} dM_i(x) = 0$$

liefert:

$$M_i(a_\mu) + \left[M_i(b) - M_i(a_\mu)\right] + \left[M_i(b') - M_i(b)\right]$$
$$- \left[M_i(b') - M_i(a'_\mu)\right] - M_i(a'_\mu) \qquad = 0,$$

oder, da aus (115)

$$\left[M_i(b') - M_i(a'_\mu)\right] = \varepsilon\left[M_i(b) - M_i(a_\mu)\right]$$

folgt:

(116) $M_i(b) = \frac{1}{1-\varepsilon}\left\{\left[-\varepsilon M_i(a_\mu) + M_i(a'_\mu)\right] - \left[M_i(b') - M_i(b)\right]\right\}$;

analog erhält man aus der Identität

$$\int\limits_{(R)} dN_i(x) = 0:$$

(117) $N_i(b) = \frac{1}{1-\varepsilon}\left\{\left[N_i(a_\mu) - \varepsilon N_i(a'_\mu)\right] + \varepsilon\left[N_i(b') - N_i(b)\right]\right\}$.

Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir nunmehr die Entwicklung des Randintegrals

$$\int\limits_{(R)} \sum_{i=1}^{r} M_i(x) \cdot dN_i(x) = 0$$

in Angriff, welche uns zu den gesuchten Periodenrelationen führen wird. Dass dasselbe in der That den Werth Null hat, ist evident, da der Integrand in der einfach zusammenhängenden Fläche E'', welche von R begrenzt wird, überall eindeutig und endlich ist.

Zerlegt man das Integral nach den Theilstrecken, so folgt zunächst:

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu-1} \int\limits_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} \sum_{i=1}^{r} \{M_i^+ dN_i^+ - M_i^- dN_i^-\} + \int\limits_{a_\mu}^{b} \sum_{i=1}^{r} \{M_i^+ dN_i^+ - M_i^- dN_i^-\}$$
$$+ \int\limits_{b}^{b'} \sum_{i=1}^{r} M_i\, dN_i = 0,$$

oder, wenn wir die drei Terme der linken Seite der Reihe nach mit A, B, C bezeichnen:

$$A + B + C = 0.$$

Hier ist jetzt für die Strecke $(a_\lambda, a_{\lambda+1})$:

$$M_i^-(x) = M_i(a'_\lambda) + \int\limits_{a'_\lambda}^{x} dM_i^-(x),$$

oder, mit Benutzung von (114):

$$M_i^-(x) = M_i(a_\lambda') + \int_{a_\lambda}^{x} \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(\lambda)} dM_\sigma^+$$

$$= M_i(a_\lambda') + \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(\lambda)} \left[M_\sigma^+(x) - M_\sigma(a_\lambda)\right];$$

also wird, wieder unter Anwendung von (114):

$$\sum_{i=1}^{r} M_i^-(x)\, dN_i^-(x) = \sum_{i=1}^{r} M_i(a_\lambda')\, dN_i^-(x)$$

$$+ \sum_{\sigma,\tau=1}^{r} \left[M_\sigma^+(x) - M_\sigma(a_\lambda)\right] dN_\tau^+(x) \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(\lambda)} \beta_{i\tau}^{(\lambda)},$$

oder, zufolge (112):

$$= \sum_{i=1}^{r} M_i(a_\lambda')\, dN_i^-(x) + \sum_{\sigma=1}^{r} \left[M_\sigma^+(x) - M_\sigma(a_\lambda)\right] dN_\sigma^+(x).$$

Daraus ergiebt sich:

$$\sum_{i=1}^{r} \left\{M_i^+ dN_i^+ - M_i^- dN_i^-\right\} = \sum_{i=1}^{r} \left\{M_i(a_\lambda)\, dN_i^+(x) - M_i(a_\lambda')\, dN_i^-(x)\right\},$$

und durch Integration und Summation über λ:

$$(118)\quad A = \sum_{\lambda=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} \left\{ M_i(a_\lambda)\left[N_i(a_{\lambda+1}) - N_i(a_\lambda)\right] - M_i(a_\lambda')\left[N_i(a_{\lambda+1}') - N_i(a_\lambda')\right] \right\}.$$

In analoger Weise ist für die Strecke (a_μ, b):

$$M_i^-(x) = M_i(a_\mu') + \int_{a_\mu'}^{x} dM_i^-(x),$$

oder wegen (115):

$$M_i^-(x) = M_i(a_\mu') + \varepsilon\left[M_i^+(x) - M_i(a_\mu)\right],$$

woraus

$$\left\{M_i^+ dN_i^+ - M_i^- dN_i^-\right\} = \left\{M_i^+(x) - \frac{1}{\varepsilon} M_i^-(x)\right\} dN_i^+(x)$$

$$= \left[M_i(a_\mu) - \frac{1}{\varepsilon} M_i(a_\mu')\right] dN_i^+(x)$$

und also

$$B \equiv \int_{a_\mu}^{b} \sum_{i=1}^{r} \{ M_i^+ \, dN_i^+ - M_i^- \, dN_i^- \}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \left[M_i(a_\mu) - \frac{1}{\varepsilon} M_i(a_\mu') \right] \left[N_i(b) - N_i(a_\mu) \right]$$

hervorgeht. Ersetzt man hierin $N_i(b)$ durch den Ausdruck der rechten Seite von (117), so ergiebt sich:

$$(119) \qquad B = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{r} \left[M_i(a_\mu') - \varepsilon M_i(a_\mu) \right] \cdot \left\{ \left[N_i(a_\mu') - N_i(a_\mu) \right] - \left[N_i(b') - N_i(b) \right] \right\}.$$

Weiter zerlegen wir das über den Kreis K erstreckte Integral

$$C = \int_{b}^{b'} \sum_{i=1}^{r} M_i(x) \, dN_i(x)$$

in zwei Theile:

$$C = D + E,$$

wo

$$D = \int_{b}^{b'} \sum_{i=1}^{r} \left[M_i(x) - M_i(b) \right] dN_i(x)$$

und

$$E = \sum_{i=1}^{r} M_i(b) \left[N_i(b') - N_i(b) \right]$$

gesetzt ist. Trägt man in letzterem Ausdrucke für $M_i(b)$ den Ausdruck der rechten Seite von (116) ein, so wird

$$E = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \left[M_i(a_\mu') - \varepsilon M_i(a_\mu) \right] - \left[M_i(b') - M_i(b) \right] \right\} \cdot \left[N_i(b') - N_i(b) \right],$$

und, wenn man diesen Ausdruck mit demjenigen von B in (119) zu F vereinigt, so folgt:

$$(120) \quad F = B + E = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \left[M_i(a_\mu') - \varepsilon M_i(a_\mu) \right] \left[N_i(a_\mu') - N_i(a_\mu) \right] - \left[M_i(b') - M_i(b) \right] \left[N_i(b') - N_i(b) \right] \right\}.$$

Unsere Relation setzt sich jetzt so zusammen:

$$A + F + D = 0.$$

Um nun das Integral D weiter auszuführen, entwickeln wir den Differentialquotienten

$$\frac{d}{dx} M_i(x)$$

in der Umgebung von $x = z$ nach Potenzen von $(z - x)$:

$$\frac{d}{dx} M_i(x) = (z-x)^{-n-2-\sigma} \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^\alpha \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \left[u_i(z) \cdot G_\sigma(z)\right] \cdot \frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!}$$

und bezeichnen das Resultat der gliedweisen Integration dieser Reihe ohne Hinzufügung einer Integrationsconstanten mit $\overline{M}_i(x)$, so dass

$$(121) \quad \overline{M}_i(x) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (-1)^{\alpha+1} \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \left[u_i(z) \cdot G_\sigma(z)\right] \cdot \frac{(z-x)^{\alpha-n-1-\sigma}}{\alpha!\,(\alpha - n - 1 - \sigma)}$$

wird. Da alsdann

$$(122) \qquad \left[M_i(x) - M_i(b)\right] = \left[\overline{M}_i(x) - \overline{M}_i(b)\right]$$

ist, so hat man:

$$(123) \quad D = \int_b^{b'} \sum_{i=1}^{r} \left[\overline{M}_i(x) - \overline{M}_i(b)\right] dN_i(x) = \int_b^{b'} \sum_{i=1}^{r} \overline{M}_i(x)\, dN_i(x)$$
$$- \sum_{i=1}^{r} \overline{M}_i(b) \left[N_i(b') - N_i(b)\right].$$

Ferner ist nach (122):

$$\left[M_i(b') - M_i(b)\right] = \left[\overline{M}_i(b') - \overline{M}_i(b)\right];$$

und da man von b nach b' gelangt, indem man den Kreis K mit dem Mittelpunkt z in negativer Richtung durchläuft, so gilt:

$$(b' - z)^{-n} = (b - z)^{-n} \cdot e^{2\pi i n} = \varepsilon \cdot (b - z)^{-n},$$

also auf Grund von (121):

$$\overline{M}_i(b') = \varepsilon\, \overline{M}_i(b),$$

woraus

$$\left[M_i(b') - M_i(b)\right] = -(1 - \varepsilon)\, \overline{M}_i(b)$$

folgt. Entnimmt man hieraus den Werth von $\overline{M}_i(b)$ und trägt ihn in (123) ein, so ergiebt sich:

$$D = \int_b^{b'} \sum_{i=1}^{r} \overline{M}_i(x)\, dN_i(x) + \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{r} \left[M_i(b') - M_i(b)\right]\left[N_i(b') - N_i(b)\right].$$

Vereinigt man den Term ausserhalb des Integralzeichens mit F in (120) zu G, so heben sich dabei die nach den Hilfspunkten b und b' erstreckten Integrale von selbst heraus, und es wird

$$G = \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^{r} \left[M_i(a'_\mu) - \varepsilon M_i(a_\mu)\right]\left[N_i(a'_\mu) - N_i(a_\mu)\right]. \tag{124}$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$L = A + G, \tag{125}$$

$$R = \int_{b'}^{b} \sum_{i=1}^{r} \overline{M}_i(x)\, dN_i(x), \tag{126}$$

so lautet jetzt unsere Relation:

$$L = R; \tag{127}$$

und wir bezeichnen L als ihre „linke", R als ihre „rechte Seite".

Behufs weiterer Umgestaltung der linken Seite dieser Gleichung führen wir die zwischen je zwei aufeinander folgenden singulären Punkten erstreckten Integrale M_i und N_i mit folgenden bleibenden Bezeichnungen ein:

$$(128)\begin{cases} U_{i\lambda}(z) = M_i(a_{\lambda+1}) - M_i(a_\lambda) = \displaystyle\int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} (z-x)^{-n-2-\sigma} \cdot u_i^+(x)\, G_\sigma(x)\, dx, \\ V_{i\lambda}(z) = N_i(a_{\lambda+1}) - N_i(a_\lambda) = \displaystyle\int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} (z-x)^{-r-2-\tau} \cdot v_i^+(x)\, H_\tau(x)\, dx. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots r \\ \lambda = 1, 2, \cdots (\mu-1) \end{pmatrix}$$

Setzen wir ferner

$$\widetilde{U}_{i\lambda}(z) = M_i(a'_{\lambda+1}) - M_i(a'_\lambda),$$
$$\widetilde{V}_{i\lambda}(z) = N_i(a'_{\lambda+1}) - N_i(a'_\lambda),$$

so folgen aus (114) die Beziehungen:

$$(129)\quad \begin{cases} \widetilde{U}_{i\lambda} = \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}\, U_{\varkappa\lambda}, \\ \widetilde{V}_{i\lambda} = \displaystyle\sum_{\varkappa=1}^{r} \beta_{i\varkappa}^{(\lambda)}\, V_{\varkappa\lambda}, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots r \\ \lambda = 1, 2, \cdots (\mu-1) \end{pmatrix}$$

die wir weiterhin als Definitionsgleichungen der Zeichen $\widetilde{U}_{i\lambda}$, $\widetilde{V}_{i\lambda}$ ansehen wollen. Es fliesst daraus die Identität:

$$(130)\qquad \sum_{i=1}^{r} \widetilde{U}_{i\lambda} \widetilde{V}_{i\lambda} = \sum_{i=1}^{r} U_{i\lambda} V_{i\lambda}. \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots (\mu - 1))$$

Unter Anwendung dieser Bezeichnungen formt sich zunächst der in (118) angegebene Term A von L um in

$$(131)\qquad A = \sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih} V_{ik} - \widetilde{U}_{ih} \widetilde{V}_{ik} \right\}.$$

Zerlegt man ferner bei dem zweiten Term G von L in (124) die von ε abhängenden Grössen in folgender Art:

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) + \frac{1}{2},$$

$$\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) - \frac{1}{2},$$

so wird der Factor von $\frac{1}{2}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$:

$$\sum_{h,k=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} (U_{ih} - \widetilde{U}_{ih})\,(V_{ik} - \widetilde{V}_{ik}),$$

während $\frac{1}{2}$ zu multipliciren ist mit:

$$\sum_{h,k=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih} \widetilde{V}_{ik} - \widetilde{U}_{ih} V_{ik} \right\} - \sum_{h,k=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih} V_{ik} - \widetilde{U}_{ih} \widetilde{V}_{ik} \right\}.$$

Den zu subtrahirenden Term dieses Ausdrucks zerspalten wir in drei Theile, je nachdem $h < k$, $h = k$, $h > k$ ist. Nach (131) ist der erste Theil mit A identisch, und der zweite hat zufolge (130) den Werth Null; beim dritten werden wir die Summationsbuchstaben h und k vertauschen. Fassen wir gemäss (125) alles zusammen, *so erhalten wir die linke Seite L der Periodenrelationen erster Art in folgender definitiven Gestalt:*

$$(132)\qquad L = \frac{1}{2} \sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} \left[\left\{ U_{ih} V_{ik} - \widetilde{U}_{ih} \widetilde{V}_{ik} \right\} - \left\{ U_{ik} V_{ih} - \widetilde{U}_{ik} \widetilde{V}_{ih} \right\} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih} \widetilde{V}_{ik} - \widetilde{U}_{ih} V_{ik} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \sum_{h,k=1}^{\mu-1} \sum_{i=1}^{r} (U_{ih} - \widetilde{U}_{ih})\,(V_{ik} - \widetilde{V}_{ik}).$$

Allerdings ist hiermit das Ziel, welches uns durch die Structur der linken Seite von Gleichung (67) vorgesteckt wurde, nur dann völlig erreicht, wenn sämmtliche singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\mu$ die Multiplicität r haben, wenn also $s_1 = s_2 = \cdots = s_\mu = r$ und $r\mu = m$ ist. In der That stellt sich dann L als bilineare Form von je $r(\mu - 1) = (m - r)$ Variabeln U_{ih}, V_{ik} dar, welche für $\sigma = \tau = 0$ die zu (A_x), (A_x') bez. alliirten Differentialgleichungen (A_z), (A_z') befriedigen. Letztere Forderung ist dagegen bei andern Annahmen im allgemeinen nicht mehr erfüllt, und die Anzahl $r(\mu - 1)$ der Variabelnpaare von L wird grösser als $(m - r)$. Es muss alsdann, wie Gleichung (67) erkennen lässt, möglich sein, die bilineare Form L auf nur $(m - r)$ Variabelnpaare zu transformiren, welche lineare Combinationen der U_{ih}, bez. V_{ik} sind und ihrerseits bei $\sigma = \tau = 0$ die Differentialgleichungen (A_z), bez. (A_z') erfüllen. — Doch wollen wir auf diese Transformation nicht näher eingehen.

Wenn die vorgelegte Differentialgleichung (A_x) zu sich selbst adjungirt ist, so ist $n = \nu$, also $\varepsilon = -1$, so dass der letzte Term von L in (132) in Wegfall kommt. Wählt man dann bei ungeradem r das Fundamentalsystem gemäss (13_1) so, dass

$$v_i(x) = u_i(x), \qquad (i = 1, 2, \cdots r)$$

bei geradem $r = 2\varrho$ gemäss (13_2) so, dass

$$\left.\begin{aligned} v_i(x) &= \quad u_{\varrho+i}(x) \\ v_{\varrho+i}(x) &= - u_i(x) \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \cdots \varrho)$$

wird, so ist leicht zu erkennen, dass die bilineare Form L alternirenden, bez. symmetrischen Charakter erhält, wie es im Theorem VIII des § 8 in Aussicht gestellt war.

§ 16.

Die rechte Seite der Periodenrelationen erster Art.

Es bleibt uns übrig, die in (126) angegebene rechte Seite

$$R \equiv R_{\sigma\tau}(z) = \int_{b'}^{b} \sum_{i=1}^{r} \overline{M}_i(x) \frac{d}{dx} N_i(x)\, dx$$

der Relation (127) auszuwerthen. Zu dem Zweck entwickeln wir

$$\frac{d}{dx} N_i(x)$$

nach Potenzen von $(z - x)$:

$$\frac{d}{dx} N_i(x) = \sum_{\beta=0}^{\infty} (-1)^\beta \frac{d^\beta}{dz^\beta} \left[v_i(z) \cdot H_\tau(z)\right] \cdot \frac{(z-x)^{\beta-\nu-2-\tau}}{\beta!}$$

l multipliciren diese Reihe mit der in (121) für $\overline{M}_i(x)$ aufgestellten he. Unter Beachtung von (18), wonach

$$n + \nu = 2r - 2 - m$$

erhält man:

$$N_i(x) = \sum_{\alpha,\beta=0}^{\infty} (-1)^{\alpha+\beta+1} \frac{[u_i(z)\cdot G_\sigma(z)]^{(\alpha)}[v_i(z)\cdot H_\tau(z)]^{(\beta)}}{\alpha!\,\beta!\,(\alpha-n-1-\sigma)} (z-x)^{\alpha+\beta+m-2r-\sigma-\tau-1}.$$

. der Integration, die längs des um z geschlagenen Kreises K in itiver Richtung zu erfolgen hat, liefern sämmtliche Glieder den Werth ll, mit Ausnahme derjenigen, deren Exponent gleich (-1) ist. Es iebt sich daher:

$$R = 2\pi i \cdot (-1)^{m+\sigma+\tau} \sum_{\alpha,\beta} \sum_{i=1}^{r} \frac{[u_i(z)\cdot G_\sigma(z)]^{(\alpha)}[v_i(z)\cdot H_\tau(z)]^{(\beta)}}{\alpha!\,\beta!\,(\alpha-n-1-\sigma)}.$$

$$(\alpha+\beta = 2r - m + \sigma + \tau)$$

r ziehen hieraus sogleich folgenden Schluss: so lange $(\sigma+\tau) < (m-r-1)$, ist $(\alpha+\beta) < (r-1)$; löst man nun den erhaltenen Ausdruck auf, so llt er sich durch ein Aggregat von Termen dar, welche die Summen

$$\sum_{i=1}^{r} u_i^{(\alpha')} v_i^{(\beta')}$$

Factoren enthalten, wo $(\alpha'+\beta') \leqq (\alpha+\beta) < (r-1)$ ist. Da letztere r gemäss (7) den Werth Null haben, so finden wir

$$R_{\sigma\tau} = 0, \qquad (\sigma+\tau < m-r-1)$$

Uebereinstimmung mit (67).

Um nun den covarianten Charakter des Ausdrucks R hervortreten zu sen, führen wir die normirten Differentialquotienten des Hrn. Hilbert*) , vermittelst deren sich R folgendermassen darstellt:

$$R = (-1)^{m+\sigma+\tau} \frac{2\pi i}{p!} \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha=0}^{p} p_\alpha \frac{(n+\sigma)!}{(n+\sigma-\alpha)!} \frac{(\nu+\tau)!}{(\nu+\tau-p+\alpha)!} \cdot \frac{1}{(\alpha-n-1-\sigma)}$$
$$\cdot [u_i(z)\cdot G_\sigma(z)]_\alpha \, [v_i(z)\cdot H_\tau(z)]_{p-\alpha},$$

bei zur Abkürzung

$$p = 2r - m + \sigma + \tau$$

etzt ist. Hierin ist aber

$$\frac{(\nu+\tau)!}{(\nu+\tau-p+\alpha)!} = (-1)^{p-\alpha} \frac{(-\nu-\tau+p-\alpha-1)!}{(-\nu-\tau-1)!} = (-1)^{p+\alpha} \frac{(n+\sigma-\alpha+1)!}{(-\nu-\tau-1)!},$$

*) „Ueber eine Darstellungsweise der invarianten Gebilde im binären Formen- iete", Mathem. Annalen, Bd. 30, pag. 15. — Vgl. H. I. pag. 134.

wodurch man für R ein Aggregat von Ueberschiebungen erhält:

$$R = -2\pi i \cdot \frac{(n+\sigma)!}{p!\,(-\nu-\tau-1)!} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \left[u_i(z) \cdot G_\sigma(z) \right], \left[v_i(z) \cdot H_\tau(z) \right] \right\}_p .$$

Da die u_i, v_i in der Entwicklung dieses Ausdrucks nur in den Verbindungen

$$\sum_{i=1}^{r} u_i^{(\alpha)} v_i^{(\beta)}$$

auftreten, welche sich rational durch die Coefficienten $P_x(z)$ von (A_s) und deren Ableitungen darstellen lassen, so bleibt noch ihre Elimination zu bewerkstelligen. Zu dem Ende ist es erforderlich, den Ausdruck R auf invariante Weise so umzugestalten, dass die u_i und v_i nur mit einander gruppirt werden. Die gewünschte Umrechnung wird durch eine Formel geleistet, die wir mit Unterdrückung ihrer umständlichen Herleitung angeben wollen. Sind u, v, G, H Formen von der Ordnung bez. n, ν, σ, τ, und bedeutet p eine beliebige positive ganze Zahl, so lautet sie:

$$\left\{ (u \cdot G),\, (v \cdot H) \right\}_p = \sum_{h=0}^{p} \sum_{k=0}^{p-h} \left\{ (u, v)_h, (G, H)_k \right\}_{p-h-k}$$

$$\cdot \frac{(-1)^p p!\, n!\, \nu!\, \sigma!\, \tau!}{h!\, k!\, (p-h-k)!\, (n+\sigma)!\, (\nu+\tau)!\, (n-h)!\, (\nu-h)!} \frac{(n+\nu-2h+1)!}{(n+\nu-h+1)!}$$

$$\cdot \frac{(\sigma+\tau-2k+1)!}{(\sigma+\tau-k+1)!} \frac{(p-n-\nu-\sigma-\tau-2+h+k)!}{(p-n-\nu-\sigma-\tau-2)!}$$

$$\cdot \sum_{\lambda=0}^{p-h-k} (-1)^\lambda (p-h-k)_\lambda \frac{(n+\sigma-p+\lambda)!}{(h+\sigma-p+\lambda)!} \frac{(\nu+\tau-h-k-\lambda)!}{(\tau-k-\lambda)!} .$$

In unserm Falle hat man speciell

$$p = 2r - m + \sigma + \tau = n + \nu + \sigma + \tau + 2$$

zu setzen. Berücksichtigt man noch, dass die Covarianten

$$\sum_{i=1}^{r} (u_i, v_i)_h$$

für $h < (r-1)$ auf Grund von (7) verschwinden, so *erhält man folgende Darstellung von R:*

$$(133)\quad R \equiv R_{\sigma\tau}(z) = 2\pi i \sum_{h=r-1}^{p} \sum_{k=0}^{p-h} K_{hk} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{r} (u_i(z), v_i(z))_h \right], (G_\sigma(z), H_\tau(z))_k \right\}_{p-h-k} ,$$

wobei

$$K_{hk}=(-1)^{m+\sigma+h+1}\frac{n!}{(-\nu-1)!}\frac{\sigma!\,\tau!\,(h+k)!}{h!\,k!\,(p-h-k)!}\frac{(m-2r+h)!}{(m-2r+2h)!}$$

$$\cdot\frac{(\sigma+\tau-2k+1)!}{(\sigma+\tau-k+1)!}\sum_{\lambda=0}^{p-h-k}(-1)^{\lambda}(p-h-k)_{\lambda}\cdot(n+\sigma-p+\lambda)_{(h+\sigma-p+\lambda)}$$

$$\cdot(\nu+\tau-h-k-\lambda)_{(\tau-k-\lambda)}$$

setzen ist. — Beispielsweise erhält man für den Fall, dass $\tau=0$ und $_{\tau}(z)=1$ ist:

$$_{\sigma 0}(z)=2\pi i\cdot(-1)^{m+\sigma}\frac{n!\,\sigma!}{(\nu+1)}\sum_{h=r-1}^{2r-m+\sigma}\left\{\left[\sum_{i=1}^{r}(u_i(z),v_i(z))_h\right],G_\sigma(z)\right\}_{(2r-m+\sigma-h)}$$

$$\cdot\frac{(-1)^h}{(n-h)!\,(m-2r+2h)!\,(2r-m+\sigma-h)!}.$$

Nun lassen sich die hierin auftretenden Summen von Ueberschiebungen

$$\sum_{i=1}^{r}\big(u_i(z),\;v_i(z)\big)_h$$

ne Schwierigkeit durch rationale Covarianten der Coefficienten

$$P_0(z),\;P_1(z),\cdots P_r(z)$$

n (A_s) *darstellen*, deren Ausdrücke wir für die einfachsten Fälle angeben ollen. Zunächst ergiebt sich:

$$\sum_{i=1}^{r}(u_i,v_i)_{r-1}=r!\,\frac{(n-r+1)!}{n!}\,\frac{(\nu-r+1)!}{\nu!}\,\frac{(m-2)!}{(m-r-1)!}\cdot\frac{1}{P_0(z)}.$$

amit erledigt sich der Fall $(\sigma+\tau)=(m-r-1)$; und zwar finden wir r denselben aus (133):

$$R_{\sigma\tau}(z)=\frac{(-1)^r}{(n+\sigma+1)_r}\,2\pi i\cdot\frac{G_\sigma(z)\cdot H_\tau(z)}{P_0(z)},$$

Uebereinstimmung mit dem Ansatz in (67). Weiter berechnet man:

$$\sum_{i=1}^{r}(u_i,v_i)_r=-r\cdot r!\,\frac{(n-r)!}{n!}\,\frac{(\nu-r)!}{\nu!}\,\frac{m!}{(m-r)!}\,\frac{P_1(z)}{P_0^2(z)},$$

omit sich $R_{\sigma\tau}$ für $(\sigma+\tau)=(m-r)$ aufstellen lässt; u. s. w. — Allgeein sind wir damit zu dem Ergebniss gelangt:

Theorem XIII. *Versteht man unter* $L_{\sigma\tau}$ *die in* (132) *angegebene ineare Form L der zwischen den singulären Punkten erstreckten Integrale* $_{i\lambda}$, $V_{i\lambda}$, *welche in* (128) *erklärt sind, so erfüllen dieselben die folgenden elationen:*

$$
(134) \qquad \begin{cases} L_{\sigma\tau} = \quad 0, & \sigma+\tau < m-r-1 \\ L_{\sigma\tau} = \dfrac{(-1)^r}{(n+\sigma+1)_r} 2\pi i \cdot \dfrac{G_\sigma(z)\cdot H_\tau(z)}{P_0(z)}, & \sigma+\tau = m-r-1 \\ L_{\sigma\tau} = \quad R_{\sigma\tau}(z); & \sigma+\tau > m-r-1 \end{cases}
$$

hierin bedeutet $R_{\sigma\tau}(z)$ die in (133) *definirte Form, welche sich nach Multiplication mit*

$$(P_0(z))^{\sigma+\tau-m+r+2}$$

als ganze rationale Covariante der Formen $P_0(z)$, $P_1(z), \cdots P_r(z)$, $G_\sigma(z)$, $H_\tau(z)$ darstellen lässt.

Hiermit ist der in (67) enthaltene Ansatz für die Periodenrelationen erster Art innerhalb der oben präcisirten Einschränkungen realisirt.

§ 17.

Periodenrelationen für Integrale dritter und erster Gattung.

Ueberblicken wir die Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen, welche zur Construction der Periodenrelationen erster Art geführt haben, so tritt dabei deutlich zu Tage, dass der Erfolg der angewandten Methode sich ausschliesslich auf die Eigenschaft der Contragredienz der Formenschaaren $u_i(x)$ und $v_i(x)$ gründet, während der besondere Umstand, dass dieselben zugleich zu einander adjungirt sind, nur für die grösstmögliche Reduction der rechten Seite jener Relationen in Betracht kommt.

Indem wir jetzt dieses secundäre Moment abstreifen und allein die Reciprocität der Formenschaaren zu Grunde legen, wollen wir nunmehr das gleiche Verfahren bei gewissen allgemeineren Integralen zur Anwendung bringen. Nach Analogie mit der in der Theorie der Abel'schen Integrale üblichen Klassification bezeichnen wir die bereits im § 7 betrachteten überall endlichen „Integralfunctionen der Gruppe" als „Integrale erster Gattung", ferner solche „Integralfunctionen der Gruppe", welche sich überall endlich verhalten mit Ausnahme eines Punktes, in dem sie eine logarithmische Unstetigkeit erleiden, als „Integrale dritter Gattung", und Integralfunctionen mit einer Potenz-Unstetigkeit als „Integrale zweiter Gattung". Danach wären die im Vorhergehenden betrachteten Integrale $M_i(x)$ zur ersten Gattung zu rechnen, so lange $(n+\sigma) < (-1)$ ist, zur zweiten, wenn $(n+\sigma) > (-1)$ ausfällt.

In einer gegen die frühere etwas abgeänderten Bedeutung sollen

$$[u_1(x),\ u_2(x), \cdots u_r(x)],$$
$$[v_1(x),\ v_2(x), \cdots v_r(x)]$$

zwei Formenschaaren von der Ordnung (-1) vorstellen, welche folgende Eigenschaften besitzen:

1) Ihre Elemente verhalten sich überall endlich und eindeutig, mit Ausnahme der $(\mu+1)$ singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_{\mu+1}$.

2) Sie erfahren bei Umlauf des Arguments um die singulären Punkte lineare homogene Substitutionen mit constanten Coefficienten; und zwar sind die Substitutionen der beiden Schaaren zu einander contragredient, so dass der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{r} u_i(x)\cdot v_i(x)$$

ungeändert reproducirt wird.

3) Die singulären Punkte sind für die u_i, v_i Stellen der Bestimmtheit.

4) Die Exponenten, welche das Verhalten der u_i, v_i an den singulären Punkten determiniren, sind in ihrem reellen Bestandtheil grösser als (-1).

Sind ξ und η irgend zwei von einander und den singulären Punkten verschiedene Punkte, so haben wir unter diesen Voraussetzungen in den Integralen

$$M_i(x)=\int_{a_1}^{x}\frac{u_i(x)\,dx}{x-\xi}\ ,\quad N_i(x)=\int_{a_1}^{x}\frac{v_i(x)\,dx}{x-\eta}$$

Integrale dritter Gattung. Um dieselben eindeutig zu machen, ziehen wir einen Schnitt, der von a_1 über $a_2, \cdots a_{\mu+1}$ und ξ nach η führt, und der bei ξ durch die links und rechts liegenden kleinen Halbkreise (ξ_0, ξ_1), bez. (ξ_0', ξ_1'), sowie bei η durch den kleinen Kreis (η_0, η_0') ausgebuchtet wird. Die Beziehungen unter den Werthen der u_i, v_i an den Ufern der Theilschnitte seien wieder durch die Gleichungen bestimmt:

$$\text{längs } (a_\lambda, a_{\lambda+1}):\begin{cases} u_i^- = \sum\limits_{\varkappa=1}^{r}\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}u_\varkappa^+, \\ v_i^- = \sum\limits_{\varkappa=1}^{r}\beta_{i\varkappa}^{(\lambda)}v_\varkappa^+, \end{cases}\qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots r \\ \lambda=1,2,\cdots \mu \end{pmatrix}$$

wobei

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_{i\sigma}^{(\lambda)}\beta_{i\tau}^{(\lambda)}=\delta_{\sigma\tau}\qquad (\sigma,\tau=1,2,\cdots r)$$

ist. Ferner führen wir die Bezeichnungen ein:

$$U_{i\lambda}(\xi)=\int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}}u_i^+(x)\,\frac{dx}{x-\xi}\ ,\quad V_{i\lambda}(\eta)=\int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}}v_i^+(x)\,\frac{dx}{x-\eta}\ ,$$

sowie

$$\begin{cases} \widetilde{U}_{i\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)} U_{\varkappa\lambda}, \\ \widetilde{V}_{i\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \beta_{i\varkappa}^{(\lambda)} V_{\varkappa\lambda}. \end{cases} \qquad \binom{i = 1, 2, \cdots r}{\lambda = 1, 2, \cdots \mu}$$

Integrirt man nun längs der durch die Ufer der Schnitte und die Kreise gebildeten Randcurve R, so ist

$$\int_{(R)} dM_i = 0, \quad \int_{(R)} dN_i = 0,$$

woraus sogleich folgt:

$$(135) \qquad \begin{cases} 2\pi i \cdot u_i(\xi) = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \left(U_{i\lambda} - \widetilde{U}_{i\lambda}\right), \\ 2\pi i \cdot v_i(\eta) = \sum_{\lambda=1}^{\mu} \left(V_{i\lambda} - \widetilde{V}_{i\lambda}\right). \end{cases} \qquad \binom{i = 1, 2, \cdots r}{\lambda = 1, 2, \cdots \mu}$$

Darauf entwickeln wir wieder die Identität:

$$\int_{(R)} \sum_{i=1}^{r} M_i(x) \cdot dN_i(x) = 0.$$

Die Zerlegung des Integrals nach Theilstrecken liefert zunächst die Gleichung:

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} \int_{a_\lambda}^{a_\lambda+1} \sum_{i=1}^{r} \{M_i^+ dN_i^+ - M_i^- dN_i^-\} + \int_{a_\mu+1}^{\xi_0} \sum_{=1}^{r} \{M_i^+ dN_i^+ - M_i^- dN_i^-\}$$

$$+ \int_{\xi_1}^{\eta_0} \sum_{i=1}^{r} \{M_i^+ dN_i^+ - M_i^- dN_i^-\} + \int_{\xi_0}^{\xi_1} \sum_{i=1}^{r} M_i dN_i - \int_{\xi_0'}^{\xi_1'} \sum_{i=1}^{r} M_i dN_i$$

$$+ \int_{\eta_0}^{\eta_0'} \sum_{i=1}^{r} M_i dN_i = 0.$$

Hierin hat der erste Term den Werth:

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} = \sum_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \{U_{ih} V_{ik} - \widetilde{U}_{ih} \widetilde{V}_{ik}\},$$

aus dem Resultat der Berechnung des analogen Terms A in § 15,) hervorgeht. — Was den zweiten Term anbetrifft, so ist längs $(a_{\mu+1}, \xi_0)$

$$dN_i^- = dN_i^+$$

$$M_i^+ - M_i^- = \int_{(\xi)} dM_i = 2\pi i \cdot u_i(\xi),$$

$$\lim_{\xi_0=\xi} \int_{a_{\mu+1}}^{\xi_0} = 2\pi i \sum_{i=1}^{r} u_i(\xi) \int_{a_{\mu+1}}^{\xi} dN_i(x).$$

Der dritte Term verschwindet, weil auf der Strecke (ξ_1, η_0) $dN_i^- = dN_i^+$ $M_i^+ - M_i^- = 0$ ist. — Bezüglich des vierten Terms hat man:

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} M_i\, dN_i = [M_i \cdot N_i]_{\xi_0}^{\xi_1} - \int_{\xi_0}^{\xi_1} N_i\, dM_i,$$

in Rücksicht darauf, dass der Radius des Halbkreises (ξ_0, ξ_1) gegen . convergirt:

$$= N_i(\xi) \cdot [M_i]_{\xi_0}^{\xi_1} - N_i(\xi) \int_{\xi_0}^{\xi_1} dM_i = 0.$$

lich wird der vierte und ebenso der fünfte Term zu Null. — Endlich lt man vom letzten Term:

$$\lim_{\eta_0=\eta} \int_{\eta_0}^{\eta_0'} \sum_{i=1}^{r} M_i\, dN_i = -2\pi i \sum_{i=1}^{r} M_i(\eta) \cdot v_i(\eta).$$

Fassen wir alles zusammen, so ergiebt sich das

Theorem XIV. *Gehören zwei Schaaren von Integralfunctionen dritter ung zu zwei contragredienten Gruppen, und dient je der Parameter der als Argument der andern, so sind sie durch die Relation verbunden:*

$$) \qquad 2\pi i \sum_{i=1}^{r} \left\{ v_i(\eta) \int_{a_1}^{\eta} \frac{u_i^+(x)\, dx}{x-\xi} - u_i(\xi) \int_{a_{\mu+1}}^{\xi} \frac{v_i^+(x)\, dx}{x-\eta} \right\}$$

$$= \sum_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih}(\xi)\, V_{ik}(\eta) - \widetilde{U}_{ih}(\xi)\, \widetilde{V}_{ik}(\eta) \right\}.$$

haben hiermit eine neue Formulirung des Theorems über die Verchung von Parameter und Argument gewonnen, welche von derjenigen des § 9, (76) wesentlich verschieden ist; sie hat ihr Analogon in der Theorie der Abel'schen Integrale*).

Von besonderem Interesse ist der Fall, dass die Formenschaar der $u_i(x)$ orthogonal ist, dass also die Substitutionen, welche sie erfährt, den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{r} u_i^2(x)$$

in sich überführen. Da wir alsdann die reciproke Formenschaar der $v_i(x)$ mit der ersteren identificiren dürfen, *so ergiebt sich aus* (136) *die Relation:*

$$(137)\qquad 2\pi i \sum_{i=1}^{r}\left\{u_i(\eta)\int_{a_1}^{\eta}\frac{u_i^{+}(x)\,dx}{x-\xi} - u_i(\xi)\int_{a_{\mu+1}}^{\xi}\frac{u_i^{+}(x)\,dx}{x-\eta}\right\}$$
$$= \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\left\{U_{ih}(\xi)\,U_{ik}(\eta) - \widetilde{U}_{ih}(\xi)\,\widetilde{U}_{ik}(\eta)\right\}.$$

Nehmen wir ferner an, dass die Formen $v_i(x)$ in $x=\eta$ eine Nullstelle besitzen, so stellen die $N_i(x)$ Integrale erster Gattung dar, und die Gleichung (136) liefert dann eine Beziehung zwischen Integralen erster Gattung und den Perioden von solchen Integralen dritter Gattung der contragredienten Gruppe, welche das Argument der ersteren zum Parameter haben.

Führen wir schliesslich die Voraussetzung ein, dass beide Formenschaaren $u_i(x)$ und $v_i(x)$ in $x=\xi$, bez. $x=\eta$ eine Nullstelle besitzen, wodurch die Integrale $M_i(x)$, $N_i(x)$ in die erste Gattung eintreten, so gelangen wir zu folgendem einfachen und eleganten Resultat:

Theorem XV. *Gehören zwei Schaaren von überall endlichen Integralfunctionen zu contragredienten Gruppen, so erfüllen ihre Perioden die bilineare Relation:*

$$(138)\qquad \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\left\{U_{ih}V_{ik} - \widetilde{U}_{ih}\widetilde{V}_{ik}\right\} = 0,$$

wobei gleichzeitig die linearen Identitäten gelten:

$$(139)\qquad \begin{cases}\displaystyle\sum_{h=1}^{\mu}(U_{ih}-\widetilde{U}_{ih}) = 0,\\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\mu}(V_{ik}-\widetilde{V}_{ik}) = 0.\end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots r)$$

*) Vgl. Clebsch und Gordan, Theorie der Abel'schen Functionen, § 38.

Identificirt man den singulären Punkt $a_{\mu+1}$ mit dem Parameter z der im § 15 betrachteten Integrale und eliminirt vermittelst der Gleichungen (139) aus (138) diejenigen Perioden, welche z in der Grenze der Integration enthalten, so wird man im wesentlichen zu den Relationen $L_{\sigma\tau} = 0$ von (134) zurückgeführt, soweit dieselben sich auf Integrale erster Gattung beziehen.

§ 18.

Aufstellung einer Ungleichung für die Perioden gewisser Integrale erster Gattung.

Im Anschluss an die Ableitung der Periodenrelationen für die Abelschen Integrale, deren Verallgemeinerung die vorhergehenden Darlegungen zum Ziel hatten, entwickelt Riemann*) die fundamentale Ungleichung für die reellen und imaginären Bestandtheile der Perioden, von welcher die Convergenz der Thetareihe abhängt.

Im Folgenden beabsichtige ich nun auch zu dieser Ungleichung das Analogon in unserm Gebiete zu construiren, wozu es einer gewissen Ausdehnung der von Riemann zu jenem Zweck benutzten Methode bedarf.

Es soll von jetzt an die zu einer complexen Grösse z conjugirt imaginäre Grösse stets mit $\bar{z}$ bezeichnet werden.

Unsere Entwicklung wird sich auf folgenden Hülfssatz stützen:

Ist $M(x)$ eine nicht constante Function des complexen Arguments x, welche in einem einfach zusammenhängenden Gebiete E der x-Ebene sich eindeutig und endlich verhält, so gilt die Ungleichung:

$$i\int_{(R)} M \cdot d\overline{M} > 0,$$

wobei sich die Integration in positiver Richtung längs der Randcurve R jenes Gebietes erstreckt.

In der That, man setze $x = \xi + i\eta$ und

$$M(x) = S(\xi, \eta) + iT(\xi, \eta);$$

dann ist

$$\begin{aligned} M \cdot d\overline{M} &= S \cdot dS - iS \cdot dT + iT \cdot dS + T \cdot dT \\ &= -2iS \cdot dT + \tfrac{1}{2}\, d\{S^2 + T^2 + 2iS \cdot T\}, \end{aligned}$$

also **)

---

*) „Theorie der Abel'schen Functionen", Nr. 21.

**) Riemann, l. c.

$$i\int_{(R)} M\cdot d\overline{M} = 2\int_{(R)} S\cdot dT$$

$$= 2\int\!\!\int_{(E)} \left\{\frac{\partial S}{\partial \xi}\frac{\partial T}{\partial \eta} - \frac{\partial S}{\partial \eta}\frac{\partial T}{\partial \xi}\right\} d\xi\, d\eta = 2\int\!\!\int_{(E)} \left\{\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2\right\} d\xi\, d\eta > 0. \quad \text{q.e.d.}$$

Es sei nun

$$[u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_r(x)]$$

eine Formenschaar von der Ordnung (— 2), welche folgende Eigenschaften hat:

1) Ihre Elemente verhalten sich überall endlich und eindeutig, mit Ausnahme der $(\mu+1)$ singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_{\mu+1}$.

2) Bei Umlauf des Arguments um die singulären Punkte erfahren die u_i lineare homogene Substitutionen mit constanten Coefficienten, die so beschaffen sind, dass, wenn man die $\bar{u}_i$ den conjugirt imaginären Substitutionen unterwirft, die definite Hermite'sche quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \bar{u}_i$$

durch dieselben in sich transformirt wird.*)

3) Die singulären Punkte sind für die u_i Stellen der Bestimmtheit.

4) Die Exponenten, welche das Verhalten der u_i an den singulären Punkten determiniren, sind grösser als (— 1).

Die Forderung 2) involvirt bereits, wie aus einem Satze des Hrn. Frobenius**) hervorgeht, die Realität der in 4) erwähnten Exponenten und schliesst zugleich das Auftreten von Logarithmen im Aufbau der u_i aus. — Es sei ferner hervorgehoben, dass diese Bedingung 2) nach einem Theorem der Hrn. Löwy und Moore***) jedenfalls erfüllt ist, wenn die Formen $u_i(x)$ algebraisch sind, also eine endliche Substitutionsgruppe besitzen. —

Mit den Formen $u_i(x)$ bilden wir die Integrale

---

*) In der Abhandlung „Über eine Klasse linearer homogener Differentialgleichungen", Berliner Sitzungsberichte 1896, untersucht Hr. Fuchs Differentialgleichungen, mit deren Integralen sich eine Hermite'sche Form bilden lässt, die durch die Substitutionen der Gruppe in sich übergeführt wird.

**) Siehe „Über die principale Transformation der Thetafunctionen", Crelle's J. Bd. 95, pag. 267; vgl. auch Löwy, „Über bilineare Formen mit conjugirt imaginären Variablen", Mathem. Annalen, Bd. 50, pag. 565.

***) Löwy, „Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjugées de M. Hermite", Comptes rendus 1896; Moore, „An universal invariant for finite groups of linear substitutions: with application in the theory of the canonical form of a linear substitution of finite period." Mathem. Annalen, Bd. 50, pag. 213.

$$M_i(x) = \int_{a_1}^{x} u_i(x)\,dx, \qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

welche auf Grund der obigen Voraussetzungen überall endlich sind und sich in der von a_1 über $a_2, a_3, \cdots$ bis $a_{\mu+1}$ zerschnittenen Ebene eindeutig verhalten. Setzen wir die Beziehungen unter den Werthen der u_i an den Ufern der Theilschnitte wieder durch die Gleichungen fest:

$$\text{längs } (a_\lambda, a_{\lambda+1}): \qquad u_i^- = \sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)} u_\varkappa^+, \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,r \\ \lambda = 1,2,\cdots,\mu \end{pmatrix}$$

so legt die Voraussetzung 2), wonach

$$\left(\sum_{i=1}^{r} u_i\,\bar{u}_i\right)^- = \left(\sum_{i=1}^{r} u_i\,\bar{u}_i\right)^+$$

sein soll, den Coefficienten $\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ die Bedingungen auf:

$$(140) \qquad \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(\lambda)} \overline{\alpha_{i\tau}^{(\lambda)}} = \delta_{\sigma\tau}. \qquad (\sigma,\tau = 1,2,\cdots,r)$$

Weiter führen wir für die Perioden der Integrale M_i die Bezeichnungen ein:

$$(141) \qquad U_{i\lambda} = \int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} u_i^+(x)\,dx \qquad \begin{pmatrix} i = 1,2,\cdots,r \\ \lambda = 1,2,\cdots,\mu \end{pmatrix}$$

und setzen zur Abkürzung:

$$(142) \qquad \widetilde{U}_{i\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}\, U_{\varkappa\lambda},$$

sodass zufolge (140)

$$(143) \qquad \sum_{i=1}^{r} \widetilde{U}_{i\lambda}\,\overline{\widetilde{U}}_{i\lambda} = \sum_{i=1}^{r} U_{i\lambda}\,\overline{U}_{i\lambda} \qquad (\lambda = 1,2,\cdots,\mu)$$

ist. Integrirt man längs der von den Ufern der Theilschnitte gebildeten Randcurve R in positiver Richtung, so ist

$$\int_{(R)} dM_i = 0,$$

woraus sich für die Perioden die Identitäten ergeben:

$$(144) \qquad \sum_{\lambda=1}^{\mu} (U_{i\lambda} - \widetilde{U}_{i\lambda}) = 0. \qquad (i = 1,2,\cdots,r)$$

Auf Grund des oben angegebenen Hülfssatzes besteht nun die Ungleichung:

$$i\int\limits_{(R)}\sum_{i=1}^{r} M_i\cdot d\overline{M}_i > 0.$$

Zerlegt man das Integral nach den Theilstrecken, so hat man:

$$i\sum_{\lambda=1}^{\mu}\int\limits_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}}\sum_{i=1}^{r}\{M_i^+ d\overline{M}_i^+ - M_i^- d\overline{M}_i^-\} > 0;$$

und die weitere Entwicklung der linken Seite, deren Resultat sich bei der Analogie mit der Ausführung des Terms A in § 15, (131) sofort überblicken lässt, *liefert für die Perioden die Ungleichung:*

$$H = i\sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\{U_{ih}\overline{U}_{ik} - \widetilde{U}_{ih}\overline{\widetilde{U}}_{ik}\} > 0. \tag{145}$$

Dieselbe betrifft übrigens nur die Proportionen der Perioden, da man ja etwa mit $U_{11}\overline{U}_{11}$ dividiren kann.

Um die Hermite'sche quadratische Form H auf der linken Seite von (145) in reelle Gestalt umzusetzen, zerspalte man die Perioden U_{ih} in ihre reellen und imaginären Bestandtheile und setze in H ein:

$$U_{ih} = X_{ih} + iY_{ih},$$
$$\widetilde{U}_{ih} = \widetilde{X}_{ih} + i\widetilde{Y}_{ih};$$

behält man dann nur den reellen Theil des aufgelösten Ausdrucks H zurück, so ergiebt sich:

$$H = \sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\Big[\{X_{ih}Y_{ik} - \widetilde{X}_{ih}\widetilde{Y}_{ik}\} - \{X_{ik}Y_{ih} - \widetilde{X}_{ik}\widetilde{Y}_{ih}\}\Big] > 0. \tag{146}$$

Dass in der That H reell, also sein imaginärer Theil

$$i\sum_{\substack{h,k=1\\ h<k}}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\Big[(X_{ih}X_{ik} + Y_{ih}Y_{ik}) - (\widetilde{X}_{ih}\widetilde{X}_{ik} + \widetilde{Y}_{ih}\widetilde{Y}_{ik})\Big] \equiv 0$$

ist, lässt sich auch leicht direct verificiren. Aus (144) folgt nämlich:

$$\left\{\begin{aligned}\sum_{\lambda=1}^{\mu} X_{i\lambda} &= \sum_{\lambda=1}^{\mu}\widetilde{X}_{i\lambda},\\ \sum_{\lambda=1}^{\mu} Y_{i\lambda} &= \sum_{\lambda=1}^{\mu}\widetilde{Y}_{i\lambda};\end{aligned}\right. \tag{147}$$

lrirt man diese Gleichungen, addirt sie und summirt über i, so man:

$$\sum_{h,k=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\left[(X_{ih}X_{ik}+Y_{ih}Y_{ik})-(\widetilde{X}_{ih}\widetilde{X}_{ik}+\widetilde{Y}_{ih}\widetilde{Y}_{ik})\right]=0.$$

gt man dieses Aggregat in drei Theile, je nachdem $h<k$, $h>k$ $h=k$, so ist der letzte gleich

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}(U_{i\lambda}\overline{U}_{i\lambda}-\widetilde{U}_{i\lambda}\overline{\widetilde{U}}_{i\lambda}),$$

hwindet also zufolge (143); und die Vertauschung von h und k im ten Theil zeigt dessen Identität mit dem ersten Theil, welcher mithin sich den Werth Null hat, — wie zu beweisen war.

Besonders einfach gestaltet sich unser Ergebniss unter der speciellen ahme, dass die Substitutionscoefficienten $\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}$ reelle Zahlen sind, *dass die Transformationen, welche die Formen $u_i(x)$ erfahren, eine reelle gonale Gruppe bilden.* — In diesem Falle spaltet sich (142) in

$$\widetilde{X}_{i\lambda}=\sum_{\varkappa=1}^{r}\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}X_{\varkappa\lambda},$$

$$\widetilde{Y}_{i\lambda}=\sum_{\varkappa=1}^{r}\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}Y_{\varkappa\lambda},$$

aus der Multiplication dieser Gleichungen und Summation über i t die Identität:

) $$\sum_{i=1}^{r}\widetilde{X}_{i\lambda}\widetilde{Y}_{i\lambda}=\sum_{i=1}^{r}X_{i\lambda}Y_{i\lambda}. \qquad (\lambda=1,2,\cdots,\mu)$$

iplicirt man andrerseits die beiden Gleichungen (147) mit einander summirt über i, so folgt:

$$\sum_{h,k=1}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\{X_{ih}Y_{ik}-\widetilde{X}_{ih}\widetilde{Y}_{ik}\}=0.$$

zerlegen wir wieder die linke Seite in drei Theile, je nachdem $h<k$, k und $h=k$; der letzte verschwindet wegen (148); vertauschen wir im zweiten h und k, so bleibt:

$$\sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu}\sum_{i=1}^{r}\left[\{X_{ih}Y_{ik}-\widetilde{X}_{ih}\widetilde{Y}_{ik}\}+\{X_{ik}Y_{ih}-\widetilde{X}_{ik}\widetilde{Y}_{ih}\}\right]=0.$$

Addiren wir schliesslich diese Identität zu (146), so erhalten wir:

$$(146') \qquad \tfrac{1}{2} H = \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \{ X_{ih} Y_{ik} - \bar{X}_{ih} \bar{Y}_{ik} \} > 0.$$

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen in dem

Theorem XVI. *Gehört eine Schaar von überall endlichen Integralfunctionen zu einer Gruppe, deren Substitutionen gegenüber sich die definite Hermite'sche Form*

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \bar{u}_i$$

invariant verhält, so existirt eine aus den Perioden der Integralfunctionen gebildete Hermite'sche Form H, welche nur positiver Werthe fähig ist; und zwar ist

$$H = i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \{ U_{ih} \bar{U}_{ik} - \bar{U}_{ih} \bar{\bar{U}}_{ik} \} =$$

$$\sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \left[\{ X_{ih} Y_{ik} - \bar{X}_{ih} \bar{Y}_{ik} \} - \{ X_{ik} Y_{ih} - \bar{X}_{ik} \bar{Y}_{ih} \} \right].$$

Wenn die Gruppe speciell reell und also orthogonal ist, so lässt sich H in die Gestalt setzen:

$$H = 2 \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \{ X_{ih} Y_{ik} - \bar{X}_{ih} \bar{Y}_{ik} \}.$$

Die Hermite'sche Form H, welche die linke Seite der gewonnenen Ungleichung (145) bildet, hängt, wenn man die Abkürzungen (142) und die Identitäten (144) berücksichtigt, von $r(\mu - 1)$ Variabeln ab. Da nun offenbar der Rang dieser quadratischen Form in unserm Untersuchungsgebiete eine Fundamentalzahl darstellt, so wollen wir im Folgenden die Frage behandeln, wann er die maximale Höhe $r(\mu - 1)$ erreicht, unter welchen Bedingungen also H sich nicht auf eine geringere Anzahl von Variabeln transformiren lässt.

Ersetzt man in H und den Gleichungen (144) die $\bar{U}_{ih}$ durch ihre Werthe in (142), so erhält man:

$$(149) \qquad H = - i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{\sigma,\tau=1}^{r} U_{\sigma h} \bar{U}_{\tau k} \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(h)} \overline{\alpha_{i\tau}^{(k)}} - \delta_{\sigma\tau} \right\},$$

wobei die μr Variabelnpaare $U_{\sigma h}$, $\bar{U}_{\sigma h}$ durch je r lineare Relationen verbunden sind:

$$(150)\qquad \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\mu}\sum\limits_{\sigma=1}^{r} U_{\sigma k}\left(\alpha_{i\sigma}^{(k)}-\delta_{i\sigma}\right)=0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\mu}\sum\limits_{\tau=1}^{r} \overline{U}_{\tau k}\left(\overline{\alpha_{i\tau}^{(k)}}-\delta_{i\tau}\right)=0. \end{cases}\qquad (i=1,2,\cdots,r)$$

Soll nun, unter Berücksichtigung derselben, H nicht degeneriren, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass diejenige Determinante Δ nicht verschwindet, welche man erhält, wenn man das Coefficientenschema von H mit den Coefficientensystemen der Bedingungsgleichungen rändert. Um Δ übersichtlich darzustellen, benutzen wir folgende Abkürzungen für einige quadratische Matrices von je r^2 Elementen: Das Zeichen (0) bedeute eine solche, deren sämmtliche Elemente 0 sind; ferner mögen die Zeichen (h, k), (h), $(\bar{k})$ die Matrices:

$$(h,k)=\left\{\sum_{i=1}^{r}\alpha_{i\sigma}^{(h)}\overline{\alpha_{i\tau}^{(k)}}-\delta_{\sigma\tau}\right\},\qquad (\sigma,\tau=1,2,\cdots,r)$$

$$(h)=\left\{\alpha_{\tau\sigma}^{(h)}-\delta_{\tau\sigma}\right\},\qquad (\sigma,\tau=1,2,\cdots,r)$$

$$(\bar{k})=\left\{\overline{\alpha_{\sigma\tau}^{(k)}}-\delta_{\sigma\tau}\right\}\qquad (\sigma,\tau=1,2,\cdots,r)$$

repräsentiren, wobei σ der Zeilenindex, τ der Colonnenindex sein soll. — Mit Hülfe derselben lässt sich dann, wenn man beachtet, dass sämmtliche Coefficienten der Form H in (149), für welche $k \leqq h$ ist, den Werth Null haben, die Determinante Δ in wol selbstverständlicher Symbolik folgendermassen schreiben:

$$\Delta=\begin{vmatrix} (0) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots & (1,\mu) & (1) \\ (0) & (0) & (2,3) & (2,4) & \cdots & (2,\mu) & (2) \\ (0) & (0) & (0) & (3,4) & \cdots & (3,\mu) & (3) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ (0) & (0) & (0) & (0) & \cdots & (\mu-1,\mu) & (\mu-1) \\ (0) & (0) & (0) & (0) & \cdots & (0) & (\mu) \\ (\bar{1}) & (\bar{2}) & (\bar{3}) & (\bar{4}) & \cdots & (\bar{\mu}) & (0) \end{vmatrix}.$$

Hieraus ist aber unmittelbar ersichtlich, dass sich Δ auf das Product von Determinanten reducirt:

$$\Delta=|(\bar{1})|\cdot|(1,2)|\cdot|(2,3)|\cdot|(3,4)|\cdots|(\mu-1,\mu)|\cdot|(\mu)|.$$

Wir haben demnach:

$$(151) \qquad \Delta = \prod_{\lambda=1}^{\mu+1} \left| \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(\lambda-1)} \overline{\alpha_{i\tau}^{(\lambda)}} - \delta_{\sigma\tau} \right\} \right|, \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots, r)$$

wenn darin die Zeichen $\alpha_{\sigma\tau}^{(0)}$ und $\alpha_{\sigma\tau}^{(\mu+1)}$ mit $\delta_{\sigma\tau}$ identificirt werden.

Es ist nun zu untersuchen, welche Bedeutung das Verschwinden eines Factors von Δ:

$$\left| \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i\sigma}^{(\lambda-1)} \overline{\alpha_{i\tau}^{(\lambda)}} - \delta_{\sigma\tau} \right\} \right|,$$

oder, was auf dasselbe herauskommt, des conjugirt imaginären Ausdrucks:

$$\left| \left\{ \sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_{i\sigma}^{(\lambda-1)}} \alpha_{i\tau}^{(\lambda)} - \delta_{\sigma\tau} \right\} \right|$$

besitzt. Setzen wir

$$\sum_{i=1}^{r} \overline{\alpha_{i\sigma}^{(\lambda-1)}} \alpha_{i\tau}^{(\lambda)} = g_{\sigma\tau}^{(\lambda)},$$

so handelt es sich um die Bedeutung einer Wurzel $t = 1$ der Gleichung r-ten Grades:

$$\left| \left(g_{\sigma\tau}^{(\lambda)} - \delta_{\sigma\tau} t \right) \right| = 0. \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots, r)$$

Da zufolge (140) die Matrices

$$\left\{ \alpha_{\sigma\tau}^{(\lambda)} \right\} \text{ und } \left\{ \bar{\alpha}_{\sigma\tau}^{(\lambda)} \right\}$$

reciprok sind, so ergiebt sich:

$$\sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\varkappa\sigma}^{(\lambda-1)} g_{\sigma\tau}^{(\lambda)} = \alpha_{\varkappa\tau}^{(\lambda)},$$

das heisst: die Composition der Matrices $\left\{ \alpha_{\varkappa\sigma}^{(\lambda-1)} \right\}$ und $\left\{ g_{\sigma\tau}^{(\lambda)} \right\}$ liefert die Matrix $\left\{ \alpha_{\varkappa\tau}^{(\lambda)} \right\}$. Die erste giebt aber die Substitution der u_i bei simultanem Umlauf um die singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_{\lambda-1}$, die letzte bei Umlauf um $a_1, a_2, \cdots, a_{\lambda-1}, a_\lambda$. Folglich giebt die Matrix $\left\{ g_{\sigma\tau}^{(\lambda)} \right\}$ die Substitution bei Umlauf um den Punkt a_λ, und obige Gleichung in t ist also nichts anderes als die Fundamentalgleichung desselben. Soll ihr die Wurzel $t = 1$ genügen, so muss die determinirende Gleichung des Punktes a_λ eine ganzzahlige Wurzel besitzen. — Damit sind wir zu folgendem einfachen Resultat gelangt:

Die Hermite'sche quadratische Form

$$H = i \sum_{\substack{h, k=1 \\ h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih} \overline{U}_{ik} - \overline{U}_{ih} \overline{\overline{U}}_{ik} \right\}$$

hat den maximalen Rang $r(\mu - 1)$ *stets dann und nur dann, wenn die determinirenden Exponenten der* u_i, *von denen in der Prämisse* 4) *die Rede ist, sämmtlich von ganzen Zahlen verschieden sind.*

Man kann in diesem Falle H in die kanonische Gestalt transformiren:

$$H = \sum_{\lambda=1}^{r(\mu-1)} \varepsilon_\lambda P_\lambda \overline{P}_\lambda,$$

worin die P_λ $r(\mu - 1)$ linear-unabhängige Aggregate der Perioden U_{ih} darstellen, und die Coefficienten ε_λ die Werthe $(+1)$ oder (-1) haben. Variirt man die determinirenden Exponenten der u_i continuirlich zwischen Grenzen, die keine ganzzahligen Werthe einschliessen, so behalten die ε_λ constant ihre Werthe bei, sodass die quadratische Form H innerhalb eines solchen Continuums überall den gleichen Charakter hat; — denn eine Aenderung der Werthe der ε_λ würde den Durchgang von Δ durch Null erfordern, — was nach dem Obigen ausgeschlossen ist.

Betrachtet man, wie wir dies früher gethan haben, die Perioden U_{ih} *oder die* P_λ *in ihrer Abhängigkeit von einem variabeln Verzweigungspunkte, so verhält sich offenbar die Hermite'sche Form* H *gegenüber den linearen Substitutionen, vermittelst deren sich die Zweige der* P_λ *durch einander ausdrücken, invariant. Die Gleichung* $H = 0$ *liefert die natürliche Grenze für die Variabilität der Periodenquotienten.*

Wenn $u(x)$ irgend eine *algebraische* Form (-2)-ter Ordnung darstellt, deren Integral überall endlich ist, so existirt, wie oben erwähnt, stets ein Fundamentalsystem von linearen Combinationen ihrer Zweige:

$$u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots,\ u_r(x),$$

welches den aufgestellten Prämissen Genüge leistet. Die Ungleichung $H > 0$, welche sich für die Perioden des überall endlichen Integrals ergiebt, wird sich in diesem Falle mit der von Riemann l. c. entwickelten Ungleichung entweder decken, oder letztere wird aus der Addition mehrerer derartiger Ungleichungen $H > 0$ hervorgehen.

§ 19.

Die Ungleichung der hypergeometrischen Integrale höherer Ordnung.

Die vorstehenden Entwicklungen sollen jetzt für den einfachsten Fall $r = 1$ specialisirt und weiter verfolgt werden. —

Die Form $u(x)$ von der Ordnung (-2), auf welche sich bei dieser Annahme die zu Grunde gelegte Formenschaar reducirt, hat dann nothwendig die Gestalt:

(152) $$u(x) =$$
$$(x-a_1)^{s_1-1}(x-a_2)^{s_2-1}\cdots(x-a_\mu)^{s_\mu-1}(x-a_{\mu+1})^{s_{\mu+1}-1}\cdot F_{\mu-s-1}(x),$$
wobei die Summe s der Exponenten
$$s = s_1 + s_2 + \cdots + s_\mu + s_{\mu+1}$$
eine ganze Zahl ist und $F_{\mu-s-1}(x)$ eine beliebige ganze rationale Form von der Ordnung ihres Index bedeutet. Damit gemäss der Prämisse 2) das Product $u\bar{u}$ bei den Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt, müssen die Zahlen s_λ reell sein; nehmen wir sie als positive echte Brüche an, so genügt $u(x)$ allen Voraussetzungen, ohne dass die Allgemeinheit beeinträchtigt wird.

Die ganze Zahl s ist damit auf das Intervall eingeschränkt:
$$1 \leqq s \leqq \mu,$$
und das allgemeinste überall endliche Integral
$$M(x) = \int u(x)\,dx = \int \prod_{\lambda=1}^{\mu+1}(x-a_\lambda)^{s_\lambda-1}\cdot F_{\mu-s-1}(x)\,dx$$
stellt eine lineare Schaar von $(\mu - s)$ Elementen mit willkürlichen constanten Coefficienten dar; es existirt also ein solches gar nicht, wenn speciell $s = \mu$ ist. Setzt man zur Abkürzung
$$e^{2\pi i(s_1+s_2+\cdots+s_\lambda)} = \varrho_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \mu)$$
so bilden die Zahlen $\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_\mu$, deren absoluter Betrag die Einheit ist, ohne dass zwei aufeinander folgende gleich sind, das System der Multiplicatoren, welche $u(x)$ an den Schnitten $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \cdots, (a_\mu, a_{\mu+1})$ annimmt. Da durch dieselben nach Angabe der Punkte $a_1, a_2, \cdots, a_{\mu+1}$ das Integral $M(x)$ völlig bestimmt ist, so dürfen wir uns ausdrücken: Das Integral $M(x)$ gehört zu dem Multiplicatorsystem $(\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_\mu)$. *)

Gleichzeitig mit der Form $u(x)$ betrachten wir eine zweite Form von der Ordnung (-2), welche zu dem reciproken Multiplicatorsysteme $\left(\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}, \cdots, \frac{1}{\varrho_\mu}\right)$ gehört:

(153) $$v(x) = (x-a_1)^{-s_1}(x-a_2)^{-s_2}\cdots(x-a_\mu)^{-s_\mu}(x-a_{\mu+1})^{-s_{\mu+1}}G_{s-2}(x),$$
— worin $G_{s-2}(x)$ eine willkürliche ganze rationale Form von der Ordnung ihres Index bedeutet, — und führen das überall endliche Integral ein:
$$N(x) = \int v(x)\,dx = \int \prod_{\lambda=1}^{\mu+1}(x-a_\lambda)^{-s_\lambda}\cdot G_{s-2}(x)\,dx.$$

*) Vgl. H. I. pag. 148 ff.

Da dasselbe sich aus $(s-1)$ Elementen linear zusammensetzt, so ergänzen sich die Mannigfaltigkeitszahlen beider Integrale $M(x)$ und $N(x)$, $(\mu-s)$ und $(s-1)$, zu der Zahl $(\mu-1)$. In Uebereinstimmung mit dem Theorem VI des § 7 repräsentirt die gleiche Zahl $(\mu-1)$ auch die Anzahl der Elemente unter den Perioden

$$U_\lambda = \int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} u(x)\,dx, \quad V_\lambda = \int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} v(x)\,dx \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots, \mu)$$

jener Integrale, welche in bezug auf die Verzweigungspunkte $a_1, a_2, \cdots, a_{\mu+1}$, letztere als Parameter betrachtet, linear-unabhängig sind.

Specialisirt man nun die allgemeinen Resultate von (149), (138), (150) *für diese „hypergeometrischen Integrale* $(\mu-1)$*-ter Ordnung“* U_λ, V_λ, *so erhält man die Ungleichungen:*

$$H \equiv i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} U_h \overline{U}_k \left(1 - \frac{\varrho_h}{\varrho_k}\right) > 0,$$

$$K \equiv i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} V_h \overline{V}_k \left(1 - \frac{\varrho_k}{\varrho_h}\right) > 0,$$

und die bilineare Relation:

$$L \equiv i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} U_h V_k \left(1 - \frac{\varrho_h}{\varrho_k}\right) = 0,$$

wozu die linearen Gleichungen treten:

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} U_\lambda (1 - \varrho_\lambda) = 0,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu} V_\lambda \left(\frac{1-\varrho_\lambda}{\varrho_\lambda}\right) = 0.$$

Eliminirt man vermittelst der letzteren die überschüssigen Elemente U_μ, V_μ, so ergiebt sich nach einer kleinen Reduction folgende Darstellung der bilinearen Formen:

$$(154) \qquad \left\{ \begin{aligned} H &\equiv \sum_{h,k=1}^{\mu-1} c_{hk} U_h \overline{U}_k > 0, \\ -K &\equiv \sum_{h,k=1}^{\mu-1} c_{hk} \overline{V}_h V_k < 0, \\ L &\equiv \sum_{h,k=1}^{\mu-1} c_{hk} U_h V_k = 0, \end{aligned} \right.$$

worin

$$(155)\quad \begin{cases} c_{hk} = i\cdot\dfrac{1-\varrho_h}{\varrho_k}\cdot\dfrac{\varrho_k-\varrho_\mu}{1-\varrho_\mu}, & h\leqq k \\[2ex] c_{hk} = i\cdot\dfrac{1-\varrho_k}{\varrho_k}\cdot\dfrac{\varrho_h-\varrho_\mu}{1-\varrho_\mu}, & h\geqq k \end{cases}$$

zu setzen ist.

Will man jetzt diese Formen simultan auf kanonische Gestalt transformiren, so lässt die Structur der Ausdrücke H, K, L in (154) es als naturgemäss erscheinen, dass die Variabelnsysteme der U_k und V_k conjugirt complexen Transformationen unterworfen werden. Zu diesem Zweck diene C_λ als Abkürzung für die reelle Grösse

$$C_\lambda = i\cdot\frac{\varrho_{\lambda-1}-\varrho_\lambda}{\varrho_\lambda}\cdot\frac{\varrho_\lambda-\varrho_\mu}{\varrho_{\lambda-1}-\varrho_\mu}, \qquad (\lambda=1,2,\cdots,(\mu-1))$$

deren Vorzeichen mit ε_λ und deren absoluter Betrag mit Γ_λ bezeichnet werde. Man wird nun zunächst durch Induction zu den folgenden Substitutionen der U_h, V_k geführt, welche obiger Forderung entsprechen:

$$\begin{aligned} P_\lambda &= \sqrt{\Gamma_\lambda}\cdot\sum_{h=\lambda}^{\mu-1}\frac{\varrho_h-\varrho_\mu}{\varrho_\lambda-\varrho_\mu}\,U_h, \\ Q_\lambda &= \sqrt{\Gamma_\lambda}\cdot\sum_{k=\lambda}^{\mu-1}\frac{\varrho_k-\varrho_\mu}{\varrho_\lambda-\varrho_\mu}\,\frac{\varrho_\lambda}{\varrho_k}\,V_k, \end{aligned} \qquad (\lambda=1,2,\cdots,(\mu-1))$$

und verificirt dann ohne Schwierigkeit, dass vermittelst derselben H, K, L in die kanonischen Formen übergehen:

$$(156)\quad \begin{cases} H = \varepsilon_1 P_1\overline{P}_1 + \varepsilon_2 P_2\overline{P}_2 + \varepsilon_3 P_3\overline{P}_3 + \cdots + \varepsilon_{\mu-1}P_{\mu-1}\overline{P}_{\mu-1}, \\ -K = \varepsilon_1 Q_1\overline{Q}_1 + \varepsilon_2 Q_2\overline{Q}_2 + \varepsilon_3 Q_3\overline{Q}_3 + \cdots + \varepsilon_{\mu-1}Q_{\mu-1}\overline{Q}_{\mu-1}, \\ L = \varepsilon_1 P_1 Q_1 + \varepsilon_2 P_2 Q_2 + \varepsilon_3 P_3 Q_3 + \cdots + \varepsilon_{\mu-1}P_{\mu-1}Q_{\mu-1}. \end{cases}$$

Hier ist es nun von Wichtigkeit, die Anzahl der negativen Vorzeichen unter den ε_λ festzustellen, welche bekanntlich für alle Transformationen auf kanonische Gestalt invariant ist.*) Setzt man dazu C_λ in den Ausdruck um:

$$C_\lambda = 2\,\frac{\sin(\pi s_\lambda)\cdot\sin\pi(s_{\lambda+1}+s_{\lambda+2}+\cdots+s_\mu)}{\sin\pi(s_\lambda+s_{\lambda+1}+\cdots+s_\mu)},$$

so zeigt sich, da die $\sin(\pi s_\lambda)$ der Voraussetzung nach positiv sind, dass jene Anzahl gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Grössen:

*) Vgl. Hermite, „Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites données", Crelle's J. Bd. 52, pag. 40.

$$\sin(\pi s_\mu),\quad \sin\pi(s_\mu+s_{\mu-1}),\quad \sin\pi(s_\mu+s_{\mu-1}+s_{\mu-2}),\cdots$$
$$\cdots,\sin\pi(s_\mu+s_{\mu-1}+s_{\mu-2}+\cdots+s_2),\quad \sin\pi(s_\mu+s_{\mu-1}+s_{\mu-2}+\cdots+s_2+s_1)$$

ist. Denkt man sich nun die μ Zahlen:

$$s_\mu,\quad (s_\mu+s_{\mu-1}),\quad (s_\mu+s_{\mu-1}+s_{\mu-2}),\cdots$$
$$\cdots,(s_\mu+s_{\mu-1}+s_{\mu-2}+\cdots+s_2),\quad (s_\mu+s_{\mu-1}+s_{\mu-2}+\cdots+s_2+s_1)$$

als Strecken auf einer Geraden von einem Nullpunkte aus aufgetragen, so fällt in jedes der s Intervalle:

$$(0,1),\ (1,2),\ (2,3),\ \cdots,\ (s-2,\ s-1),\ (s-1,\ s)$$

der Endpunkt mindestens einer Strecke hinein, da sämmtliche Zahlen $s_\mu, s_{\mu-1}, s_{\mu-2},\cdots, s_2, s_1$ und $s_{\mu+1}=s-(s_1+s_2+\cdots+s_\mu)$ als positive echte Brüche angenommen sind. Zwei solche auf einander folgende Endpunkte geben in obiger Reihe zu einem Zeichenwechsel Veranlassung, sobald sie nicht in dem nämlichen Intervall gelegen sind. Daraus geht hervor, dass die Reihe jener Sinus $(s-1)$ Zeichenwechsel aufweist, dass also von den Vorzeichen ε_λ $(\mu-s)$ den Werth $(+1)$, $(s-1)$ den Werth (-1) haben.

Mit geringfügiger Modification der in (156) *benutzten Bezeichnung bringen wir dieses Ergebniss in der folgenden Darstellung der bilinearen Formen zum Ausdruck*:

$$(157)\qquad \begin{cases} H\equiv \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\mu-s} P_\lambda\overline{P}_\lambda - \sum_{\lambda=\mu-s+1}^{\mu-1} P_\lambda\overline{P}_\lambda > 0,\\ K\equiv -\displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\mu-s} Q_\lambda\overline{Q}_\lambda + \sum_{\lambda=\mu-s+1}^{\mu-1} Q_\lambda\overline{Q}_\lambda > 0,\\ L\equiv \displaystyle\sum_{\lambda=1}^{\mu-s} P_\lambda Q_\lambda - \sum_{\lambda=\mu-s+1}^{\mu-1} P_\lambda Q_\lambda = 0.\end{cases}$$

Berücksichtigen wir die oben hervorgehobene anderweite Bedeutung der Zahlen $(\mu-s)$ und $(s-1)$ als Anzahlen der in $M(x)$, bez. $N(x)$ enthaltenen Elemente, so erhalten wir das

Theorem XVII. *Es liege ein System von μ Multiplicatoren $(\varrho_1,\varrho_2,\cdots,\varrho_\mu)$ vor, deren absoluter Betrag die Einheit ist, und von denen je zwei auf einander folgende ungleiche Werthe und der erste und letzte von* 1 *verschiedene Werthe haben. Gehört zu diesem Multiplicatorsystem ein überall endliches Integral, so besitzt dasselbe $(\mu-1)$ Perioden, die in bezug auf die Verzweigungswerthe linear-unabhängig sind. Die Variabilität dieser Perioden ist dadurch eingeschränkt, dass eine gewisse aus ihnen gebildete Hermite'sche quadratische Form H vom Range $(\mu-1)$ nur positiver Werthe fähig ist.*

Der Trägheitsindex dieser Form (die Anzahl ihrer positiven Terme in kanonischer Darstellung) ist gleich der Anzahl der linear-unabhängigen überall endlichen Integrale, welche zu dem Multiplicatorsysteme gehören. Bildet man die entsprechende Zahl für das reciproke Multiplicatorsystem $\left(\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}, \cdots, \frac{1}{\varrho_\mu}\right)$, *so ergänzen sich beide Zahlen zum Range* $(\mu - 1)$ *der Formen. — Die Perioden der Integrale des einen und des andern Systems sind durch bilineare Relationen* $L = 0$ *verbunden.*

Unser Ergebniss lässt sich nun folgendermassen interpretiren: Die $(\mu - 2)$ Quotienten der Aggregate von hypergeometrischen Integralen $(\mu - 1)$-ter Ordnung:

$$\frac{P_2}{P_1}, \frac{P_3}{P_1}, \ldots, \frac{P_{\mu-1}}{P_1}$$

hängen von den Werthen der $(\mu + 1)$ singulären Stellen $a_1, a_2, \cdots, a_\mu, a_{\mu+1}$ ab, welche jedoch wesentlich nur mit ihren $(\mu - 2)$ Doppelverhältnissen in Betracht kommen. Man fasse jetzt umgekehrt diese $(\mu - 2)$ Doppelverhältnisse der a_i als Functionen jener ebenso zahlreichen Integralquotienten auf, und deute die reellen und imaginären Bestandtheile der letzteren als rechtwinklige Coordinaten eines Punktes im Raume $R_{2\mu-4}$ von $2(\mu - 2)$ Dimensionen. Dann sagt unser Resultat aus, dass die Existenz der in Rede stehenden $(\mu - 2)$ Functionen von $(\mu - 2)$ complexen Variabeln auf das im $R_{2\mu-4}$ durch die Fläche zweiter Ordnung

$$H = \sum_{\lambda=1}^{\mu-s} P_\lambda \overline{P}_\lambda - \sum_{\lambda=\mu-s+1}^{\mu-1} P_\lambda \overline{P}_\lambda = 0$$

abgegrenzte Gebiet $H > 0$ beschränkt ist.

Hiernach ordnen sich diese Functionen in $(\mu - 1)$ wesentlich verschiedenen Klassen an, je nachdem s eine der Zahlen $1, 2, 3, \cdots, (\mu - 1)$ darstellt, während sie bei $s = \mu$ gar nicht existiren. Wenn s den Werth 1 hat, — in welchem Falle zu dem reciproken Multiplicatorsystem kein überall endliches Integral gehört, — so ist H eine positiv definite Form und die Grenzfläche also imaginär; die Functionen existiren folglich in diesem Falle im ganzen Raume $R_{2\mu-4}$, und es ist dies offenbar die einzige Möglichkeit, wo sie algebraisch sein können. — In jedem der weiteren Fälle $s = 2, 3, \cdots, (\mu - 1)$ ist dagegen ihr Existenzgebiet — und zwar jedesmal in andrer Weise — eingeschränkt. Speciell im letzten Falle $s = (\mu - 1)$, wo zu dem vorgelegten Multiplicatorsysteme nur e i n überall endliches Integral gehört, hat man als Existenzgebiet das Innere der Hypersphäre:

$$\sum_{\lambda=2}^{\mu-1} \left(\frac{P_\lambda}{P_1}\right)\overline{\left(\frac{P_\lambda}{P_1}\right)} = 1.$$

Beiläufig wollen wir an diese letztere Thatsache eine Bemerkung anknüpfen. Nimmt man an, dass

$$s_\mu + s_{\mu-1} < 1$$

ist, so ist unter den Vorzeichen ε_λ in (156) $\varepsilon_{\mu-1}$ das einzige positive; die Ungleichung (156) lautet also:

$$P_{\mu-1}\overline{P}_{\mu-1} > P_1\overline{P}_1 + P_2\overline{P}_2 + \cdots + P_{\mu-2}\overline{P}_{\mu-2},$$

und es geht daraus hervor, dass $P_{\mu-1} \equiv \sqrt{\Gamma_{\mu-1}}\, U_{\mu-1}$ nie verschwinden kann, also das Integral $U_{\mu-1}$ stets von Null verschieden ist. Mit etwas veränderter Bezeichnung haben wir daher den Satz:

Sind $s_1, s_2, \cdots, s_{\mu+1}$ *reelle positive echte Brüche mit der ganzzahligen Summe*

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_{\mu+1} = \mu - 1,$$

und ist

$$s_1 + s_2 < 1,$$

so ist die durch das hypergeometrische Integral

$$J = \int_{a_1}^{a_2} (x-a_1)^{s_1-1}(x-a_2)^{s_2-1}(x-a_3)^{s_3-1}\cdots(x-a_{\mu+1})^{s_{\mu+1}-1}\,dx$$

definirte analytische Function von $a_1, a_2, \cdots, a_{\mu+1}$ *stets von Null verschieden, so lange nicht irgend zwei dieser Argumente zusammenrücken.*

Speciell für $\mu = 3$ ergiebt sich daraus:

Die Gauss'sche hypergeometrische Function $F(a, b, c, x)$ *besitzt, abgesehen von den Punkten* $x = 0, 1, \infty$, *keine Nullstelle, wenn* a, b, c *reelle positive echte Brüche sind und* c *grösser als* a *und* b *ist.*

Wir heben noch eine andere Eigenschaft der Hermite'schen Form H hervor. Beschreiben die Parameter $a_1, a_2, \cdots, a_{\mu+1}$ irgend welche geschlossenen Umläufe um einander, so erfahren die $(\mu - 1)$ Perioden lineare Substitutionen von der Art, dass die Form H durch sie ungeändert reproducirt wird; und es ist ersichtlich, dass diese Eigenschaft auch dann noch bestehen bleibt, wenn man den Exponenten $s_1, s_2, \cdots, s_{\mu+1}$ beliebige reelle Werthe mit ganzzahliger Summe ertheilt; nur muss man dazu die zwischen zwei singulären Punkten erstreckten Integrale durch solche mit Doppelumlauf ersetzen, um ihre Giltigkeit zu erweitern.

Unser Ergebniss bezüglich der Existenz einer — eventuell imaginären — natürlichen Grenze für die oben betrachteten Functionen der Periodenquotienten ist im Falle $\mu = 3$, der die zuerst von Hrn. Schwarz eingeführten automorphen Dreiecksfunctionen liefert, wohlbekannt. Diese Grenze bildet der reelle oder imaginäre Orthogonalkreis desjenigen Kreisbogendreiecks, welches durch jene Function auf die Halbebene abgebildet wird. *) Setzt man die hypergeometrischen Integrale in Gauss'sche Reihen um und bezeichnet die kanonischen Integrale der hypergeometrischen Differentialgleichung in der Umgebung von $x = 0$ mit

$$\varphi = F(a, b, c, x),$$
$$\psi = x^{1-c} F(a-c+1, b-c+1, 2-c, x),$$

so erhält man für H folgenden Ausdruck:

$$H = \frac{\sin(a\pi) \cdot \sin(c-a \cdot \pi)}{\sin(c\pi)}$$
$$\cdot \left\{ \varphi\bar{\varphi} - \psi\bar{\psi} \frac{\sin(a\pi) \cdot \sin(b\pi)}{\sin(c-a \cdot \pi) \cdot \sin(c-b \cdot \pi)} \left[\frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(1-b)\,\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)\,\Gamma(1-c)} \right]^2 \right\},$$

und es gilt die Ungleichung $H > 0$, wenn die reellen Parameter a, b, c den Beschränkungen unterliegen:

$$a > 0, \qquad b < 1,$$
$$c - a > 0, \qquad c - b < 1.$$

Ferner hat Hr. Picard**) im Falle $\mu = 4$ gelegentlich der Behandlung der Frage, unter welchen Bedingungen die Doppelverhältnisse der singulären Stellen sich als eindeutige Functionen der Integralquotienten ergeben, die Existenz der natürlichen Grenze durch einen Grenzübergang aus der Riemann'schen Ungleichung der Perioden der Abel'schen Integrale erschlossen.

Wir wenden uns jetzt zu den Ungleichungen und Relationen (157) zurück, um sie in ihrer Gesammtheit näher zu untersuchen. — Die allgemeinen überall endlichen Integrale $M(x)$ und $N(x)$ setzen sich, wie oben erwähnt, aus $(\mu - s)$, bez. $(s - 1)$ linear-unabhängigen Elementen zusammen, die mit den aus ihnen abgeleiteten Grössen durch obere Indices unterschieden werden mögen. Indem wir die Bezeichnung „Periode" auf die in (157) auftretenden Aggregate von Perioden P_λ, Q_λ übertragen, stellen wir im Sinne des Theorems VI, § 7 die zu beiden Multiplicatorsystemen gehörenden Periodenschemata auf:

---

*) Schwarz, „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt," Crelle's J. Bd. 75, Nr. V, VI.

**) „Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables", Annales de l'école normale, III série, t. II, 1885, pag. 375.

$$\begin{array}{l|llllllll}
M^{(1)}(x) & P_1^{(1)} & P_2^{(1)} & \cdots & P_{\mu-s}^{(1)} & P_{\mu-s+1}^{(1)} & \cdots & P_{\mu-1}^{(1)} \\
M^{(2)}(x) & P_1^{(2)} & P_2^{(2)} & \cdots & P_{\mu-s}^{(2)} & P_{\mu-s+1}^{(2)} & \cdots & P_{\mu-1}^{(2)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
M^{(\mu-s)}(x) & P_1^{(\mu-s)} & P_2^{(\mu-s)} & \cdots & P_{\mu-s}^{(\mu-s)} & P_{\mu-s+1}^{(\mu-s)} & \cdots & P_{\mu-1}^{(\mu-s)} \\
\hline
N^{(1)}(x) & Q_1^{(1)} & Q_2^{(1)} & \cdots & Q_{\mu-s}^{(1)} & Q_{\mu-s+1}^{(1)} & \cdots & Q_{\mu-1}^{(1)} \\
N^{(2)}(x) & Q_1^{(2)} & Q_2^{(2)} & \cdots & Q_{\mu-s}^{(2)} & Q_{\mu-s+1}^{(2)} & \cdots & Q_{\mu-1}^{(2)} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
N^{(s-1)}(x) & Q_1^{(s-1)} & Q_2^{(s-1)} & \cdots & Q_{\mu-s}^{(s-1)} & Q_{\mu-s+1}^{(s-1)} & \cdots & Q_{\mu-1}^{(s-1)}
\end{array},$$

worin die $P_\lambda^{(i)}$, bez. $Q_\lambda^{(i)}$ je einer Colonne, als Formen in den Parametern $a_1, a_2, \cdots, a_{\mu+1}$ betrachtet, verwandt sind, und die Substitutionen, welche diese Colonnen bei Umläufen der $a_\varkappa$ bez. erfahren, zu einander complex conjugirt sind. Bei der nun vorzunehmenden Normirung der Integrale $M^{(i)}(x)$, $N^{(i)}(x)$ lassen wir allerdings diese Auffassung der $a_\varkappa$ als Parameter fallen und legen kein Gewicht mehr darauf, dass die Perioden einer Reihe in bezug auf die $a_\varkappa$ linear-unabhängig bleiben, sondern sehen sie als constante Grössen an.

In obigem Schema ist die Determinante

$$\left|P_\sigma^{(\tau)}\right| \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots, (\mu - s))$$

der $(\mu - s)$ ersten Colonnen nothwendig von Null verschieden. Denn, wäre sie gleich Null, so liesse sich ein lineares Aggregat $M(x)$ der Integrale $M^{(1)}(x), \cdots, M^{(\mu-s)}(x)$ herstellen, von der Beschaffenheit, dass seine $(\mu - s)$ ersten Perioden $P_1, P_2, \cdots, P_{\mu-s}$ den Werth Null hätten. Alsdann würde sich die zu $M(x)$ gehörige Hermite'sche Form H auf den wesentlich negativen Ausdruck

$$H = -\left\{P_{\mu-s+1}\overline{P}_{\mu-s+1} + \cdots + P_{\mu-1}\overline{P}_{\mu-1}\right\},$$

oder bei $s = 1$ auf $H = 0$ reduciren, was sich mit der Ungleichung $H > 0$ nicht verträgt.

Das Nichtverschwinden der in Rede stehenden Determinante ermöglicht es nun, durch lineare Combinationen von $M^{(1)}(x), \cdots, M^{(\mu-s)}(x)$ ein System von „Normalintegralen“ zu construiren, von der Art, dass die Elemente $P_\sigma^{(\tau)}$ ihrer $(\mu - s)$ ersten Periodencolonnen die Werthe

$$P_\sigma^{(\tau)} = \delta_{\sigma\tau} \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots, (\mu - s))$$

erhalten, — was wir für das obige Schema als durchgeführt annehmen. — Da ferner aus dem analogen Grunde die Determinante

$$\left|Q_{\mu-s+\sigma}^{(\tau)}\right| \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots, (s - 1))$$

der $(s-1)$ letzten Colonnen ebenfalls von Null verschieden ist, so kann man sich die Integrale $N^{(1)}(x), \cdots, N^{(s-1)}(x)$ bereits so gewählt denken, dass

$$Q^{(\tau)}_{\mu-s+\sigma} = \delta_{\sigma\tau} \qquad (\sigma, \tau = 1, 2, \cdots (s-1))$$

ist. Bei dieser Festsetzung reduciren sich die bilinearen Relationen (157) unter den Perioden:

$$\sum_{\lambda=1}^{\mu-s} P^{(i)}_{\lambda} Q^{(\varkappa)}_{\lambda} - \sum_{\lambda=1}^{s-1} P^{(i)}_{\mu-s+\lambda} Q^{(\varkappa)}_{\mu-s+\lambda} = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots (\mu-s) \\ \varkappa = 1, 2, \cdots (s-1) \end{pmatrix}$$

auf die einfachen Beziehungen:

$$Q^{(\varkappa)}_{i} = P^{(i)}_{\mu-s+\varkappa}.$$

Damit sind wir zu dem Ergebniss gelangt:

Theorem XVIII. *Die überall endlichen Integrale von zwei reciproken Multiplicatorsystemen der in Rede stehenden Art lassen sich solcherweise auswählen, dass ihr Periodenschema die folgende Structur erhält:*

$$(158) \qquad \begin{array}{l|cccccccc}
M^{(1)}(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,s-1} \\
M^{(2)}(x) & 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2,s-1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \vdots & \cdot & \cdots & \cdot \\
M^{(\mu-s)}(x) & 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{\mu-s,1} & p_{\mu-s,2} & \cdots & p_{\mu-s,s-1} \\
\hline
N^{(1)}(x) & p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{\mu-s,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
N^{(2)}(x) & p_{12} & p_{22} & \cdots & p_{\mu-s,2} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
N^{(s-1)}(x) & p_{1,s-1} & p_{2,s-1} & \cdots & p_{\mu-s,s-1} & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}.$$

Bildet man für die aus diesen combinirten Integrale

$$M(x) = \sum_{i=1}^{\mu-s} \alpha_i M^{(i)}(x),$$

$$N(x) = \sum_{i=1}^{s-1} \beta_i N^{(i)}(x)$$

— unter den α_i, β_i willkürliche Grössen verstanden — die Formen H bez. K, so erhält man gemäss (157) die Ungleichungen:

$$(159) \qquad \begin{cases} H \equiv \sum\limits_{i,\varkappa=1}^{\mu-s} \alpha_i \bar{\alpha}_\varkappa \left\{ \delta_{i\varkappa} - \sum\limits_{\lambda=1}^{s-1} p_{i\lambda} \bar{p}_{\varkappa\lambda} \right\} > 0, \\ K \equiv \sum\limits_{i,\varkappa=1}^{s-1} \beta_i \bar{\beta}_\varkappa \left\{ \delta_{i\varkappa} - \sum\limits_{\lambda=1}^{\mu-s} p_{\lambda i} \bar{p}_{\lambda\varkappa} \right\} > 0; \end{cases}$$

die Variabilität der Grössen $p_{i\varkappa}$ ist also, wenn wir sie nunmehr wieder als Functionen der a_λ ansehen, dadurch begrenzt, dass die mit den Unbestimmten α_i, bez. β_i gebildeten Hermite'schen quadratischen Formen H, K positiv definit ausfallen müssen.

Es ist nun aber leicht zu zeigen, dass diese beiden Forderungen den gleichen Inhalt haben. — Zu dem Zwecke stützen wir uns auf folgenden Umstand: Eine Hermite'sche Form

$$f=\sum_{i,\varkappa=1}^{n} q_{i\varkappa}\,\alpha_i\,\bar{\alpha}_\varkappa,$$

worin also

$$\bar{q}_{\varkappa i}=q_{i\varkappa}$$

ist, lässt sich vermittelst einer Substitution, welche die Form

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\bar{\alpha}_i$$

in sich überführt, in die kanonische Gestalt

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\,\alpha_i'\,\overline{\alpha_i'}$$

transformiren, deren Coefficienten σ_i stets reell sind und die Gleichung erfüllen:

$$|(q_{i\varkappa}-\delta_{i\varkappa}\sigma)|=0. \qquad (i,\varkappa=1,2,\cdots n)$$

Danach ist die Forderung, dass f eine positiv definite Form sei, gleichbedeutend mit der, dass diese Gleichung nur positive Wurzeln besitze.

Stellt man nun die entsprechende Gleichung für die Form H in (159) auf und setzt darin sogleich $\sigma=1-\tau$, so erhält man die Gleichung:

$$(160_1)\quad \tau^{\mu-s}-S_1\tau^{\mu-s-1}+S_2\tau^{\mu-s-2}+\cdots+(-1)^{\mu-s}S_{\mu-s}=0,$$

in welcher, wie man ohne Mühe erkennt, der Coefficient

$$S_\lambda=\sum D_\lambda\,\overline{D_\lambda}$$

ist, wenn D_λ sämmtliche Subdeterminanten λ-ten Grades der rechteckigen Matrix

$$\{p_{i\varkappa}\} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2,\cdots(\mu-s)\\ \varkappa=1,2,\cdots(s-1)\end{pmatrix}$$

durchläuft. Die Wurzeln dieser Gleichung in τ müssen jetzt zufolge unserer Forderung kleiner als 1 sein, während sie auf Grund der Structur der Gleichung offenbar nicht negativ ausfallen können. — Ganz analog ergiebt sich für die Form K die Gleichung in τ:

$$(160_2)\quad \tau^{s-1}-S_1\tau^{s-2}+S_2\tau^{s-3}+\cdots+(-1)^{s-1}S_{s-1}=0.$$

Wenn nun $(s-1)=(\mu-s)$ ist, so sind beide Gleichungen (160_1) und (160_2) identisch. Ist aber etwa $(s-1)>(\mu-s)$, so verschwinden diejenigen Subdeterminanten D_λ identisch, deren Grad λ grösser als $(\mu-s)$ ist, und damit auch die Coefficienten S_λ für $\lambda>(\mu-s)$. Die Gleichung (160_2) besitzt demnach neben den Wurzeln von (160_1) nur Wurzeln Null. Folglich sind die Wurzeln beider Gleichungen zugleich kleiner als 1, und also beide Formen H und K gleichzeitig positiv definit. q. e. d.

Damit die Gleichung in σ nur positive Wurzeln besitzt, ist nothwendig und hinreichend, dass ihre Coefficienten alternirende Vorzeichen aufweisen. *Wir können daher die Bedingung* (159) *durch folgende Ungleichungen ersetzen, worin ϱ die kleinere der beiden Zahlen $(\mu-s)$ und $(s-1)$ bedeutet und $S_0=1$ ist:*

$$(161) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\varkappa}(-1)^\lambda(\varrho-\lambda)_{\varkappa-\lambda}\, S_\lambda>0. \qquad (\varkappa=1,2,\cdots\varrho)$$

Die $p_{i\varkappa}$, deren natürliche Grenzen hierdurch bestimmt werden, lassen sich als transcendente Moduln des Gebildes

$$y=(x-a_1)^{s_1}(x-a_2)^{s_2}\cdots(x-a_{\mu+1})^{s_{\mu+1}}$$

betrachten, zwischen denen allerdings, wenn nicht $s=2$ oder $=(\mu-1)$ ist, noch Relationen existiren.

Gehen wir jetzt auf die Resultate (157) *zurück, so haben wir in betreff derselben die Erkenntniss gewonnen, dass die Ungleichungen $H>0$ in Verbindung mit den Relationen $L=0$ die Existenz der Ungleichungen $K>0$ bereits nach sich ziehen.*

Schliesslich wollen wir noch das die Integrale dritter Gattung betreffende Ergebniss des § 17 für die Annahme $r=1$ specialisiren. Dazu setzen wir:

$$\begin{aligned} u'(x) &= (x-a_1)^{s_1-1}(x-a_2)^{s_2-1}\cdots(x-a_{\mu+1})^{s_{\mu+1}-1}\cdot F_{\mu-s}(x),\\ v'(x) &= (x-a_1)^{-s_1}\;(x-a_2)^{-s_2}\;\cdots(x-a_{\mu+1})^{-s_{\mu+1}}\;\cdot G_{s-1}(x), \end{aligned}$$

worin $F_{\mu-s}(x)$ und $G_{s-1}(x)$ im übrigen beliebige Formen von der Ordnung ihres Index bedeuten mögen, die jedoch schon mit einem solchen Factor versehen sind, dass

$$u'(\xi)=1, \quad v'(\eta)=1$$

wird. Alsdann erhalten wir durch Specialisirung von (136) in Verbindung mit (135) und Transformation der bilinearen Form der rechten Seite auf kanonische Gestalt die Gleichung:

$$2\pi\left\{\int\limits_{a_\mu+1}^{\xi}\frac{\acute{v}(x)\,dx}{x-\eta}-\int\limits_{a_\mu+1}^{\eta}\frac{\acute{u}(x)\,dx}{x-\xi}-\frac{2\pi i}{1-\varrho_\mu}\right\}$$
$$=\sum_{\lambda=1}^{\mu-s}\acute{P}_\lambda\,\acute{Q}_\lambda-\sum_{\lambda=\mu-s+1}^{\mu-1}\acute{P}_\lambda\,\acute{Q}_\lambda,$$

worin die $\acute{P}_\lambda$, $\acute{Q}_\lambda$ dieselben Aggregate von Perioden der Integrale dritter Gattung darstellen, wie in (157) die P_λ, Q_λ von den Perioden der entsprechenden Integrale erster Gattung.

Man kann nun offenbar das allgemeine Integral dritter Gattung

$$\int\frac{\acute{u}(x)\,dx}{x-\xi}$$

zerlegen in ein Aggregat von einem speciell gewählten Integral dritter Gattung und den in (158) eingeführten Normalintegralen erster Gattung, welche letzteren mit willkürlichen constanten Coefficienten behaftet sind. Ueber diese Coefficienten lässt sich insbesondere so verfügen, dass die Perioden des obigen Integrals:

$$\acute{P}_1,\ \acute{P}_2,\cdots\acute{P}_{\mu-s}$$

den Werth Null annehmen, und zwar ist durch diese Forderung die Form $F_{\mu-s}(x)$ völlig bestimmt. Desgleichen lassen sich die $(s-1)$ willkürlichen Coefficienten der Form $G_{s-1}(x)$ derart festlegen, dass die Perioden

$$\acute{Q}_{\mu-s+1},\ \acute{Q}_{\mu-s+2},\cdots\acute{Q}_{\mu-1}$$

zu Null werden.

Mit Benutzung der auf diese Weise normirten Formen, die wir $F_{\mu-s}(x;\xi)$, $G_{s-1}(x;\eta)$ *schreiben wollen, erhält jetzt das Theorem über die Vertauschung von Parameter und Argument bei Integralen dritter Gattung, welche zu reciproken Multiplicatorsystemen der oben charakterisirten Art gehören, folgende einfache Darstellung:*

(162)
$$\int\limits_{a_\mu+1}^{\eta}\prod_{\lambda=1}^{\mu+1}(x-a_\lambda)^{s_\lambda-1}\cdot\frac{F_{\mu-s}(x;\xi)}{x-\xi}\,dx$$
$$=\int\limits_{a_\mu+1}^{\xi}\prod_{\lambda=1}^{\mu+1}(x-a_\lambda)^{-s_\lambda}\cdot\frac{G_{s-1}(x;\eta)}{x-\eta}\,dx-\frac{2\pi i}{1-\varrho_\mu}.$$

§ 20.

Der Trägheitsindex der Hermite'schen Form.

Das merkwürdige Resultat, zu welchem wir bei der vorstehenden Erörterung des einfachsten Falles $r = 1$ im Theorem XVII gelangt sind, betreffend die Uebereinstimmung des Trägheitsindex der Hermite'schen Form H mit der Anzahl der überall endlichen Integralfunctionen der durch das gegebene Multiplicatorsystem definirten Gruppe, veranlasst uns, die Untersuchung des § 18 auch für allgemeines r in der hierdurch angedeuteten Richtung wieder aufzunehmen.

Neben dem Formensystem (—2)-ter Ordnung

$$[u_1(x),\ u_2(x),\ \cdots u_r(x)],$$

von dem die dortige Betrachtung ihren Ausgang nahm, legen wir ein zweites Formensystem (—2)-ter Ordnung zu Grunde:

$$[v_1(x),\ v_2(x),\ \cdots v_r(x)],$$

welches den gleichen Prämissen unterworfen ist wie das erstere und sich überdies zu jenem contragredient verhält. Da die Substitutionsgruppe der u_i der Voraussetzung nach die quadratische Form

$$\sum_{i=1}^{r} u_i \overline{u}_i$$

in sich überführt, so sind die Substitutionen, welche die v_i erfahren, zu den zugeordneten Substitutionen der u_i conjugirt imaginär.

Bedienen wir uns im Anschluss an (141) für die Perioden der Integrale dieser Formen der Bezeichnungen:

$$U_{i\lambda} = \int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} u_i^{+}(x)\,dx, \qquad V_{i\lambda} = \int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} v_i^{+}(x)\,dx, \qquad \binom{i = 1, 2, \cdots r}{\lambda = 1, 2, \cdots \mu}$$

so gelten nach (145) die Ungleichungen:

$$H \equiv i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih}\,\overline{U}_{ik} - \overline{U}_{ih}\,\overline{\overline{U}}_{ik} \right\} > 0,$$

$$K \equiv i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \left\{ V_{ih}\,\overline{V}_{ik} - \overline{V}_{ih}\,\overline{\overline{V}}_{ik} \right\} > 0,$$

sowie zufolge (138) die bilineare Relation:

$$L \equiv i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \left\{ U_{ih} V_{ik} - \widetilde{U}_{ih} \widetilde{V}_{ik} \right\} = 0;$$

dabei ist nach (142) zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{cases} \widetilde{U}_{i\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)} U_{\varkappa\lambda}, \\ \widetilde{V}_{i\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \overline{\alpha_{i\varkappa}^{(\lambda)}} V_{\varkappa\lambda}, \end{cases}$$

und es bestehen schliesslich unter den je $r\mu$ Elementen U_{ih}, V_{ih} gemäss (144) die je r linearen Gleichungen:

$$\begin{cases} \sum_{\lambda=1}^{\mu} (U_{i\lambda} - \widetilde{U}_{i\lambda}) = 0, \\ \sum_{\lambda=1}^{\mu} (V_{i\lambda} - \widetilde{V}_{i\lambda}) = 0. \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \cdots r)$$

Da K eine reelle Form ist, so darf man $(+i)$ mit $(-i)$ darin vertauschen, so dass

$$K \equiv -i \sum_{\substack{h,k=1\\h<k}}^{\mu} \sum_{i=1}^{r} \left\{ \overline{V_{ih}} V_{ik} - \overline{\widetilde{V}_{ih}} \widetilde{V}_{ik} \right\} > 0$$

wird. Die Zusammenstellung dieser Verhältnisse lässt nun erkennen, dass man mit der Transformation von H auf kanonische Gestalt gleichzeitig auch diejenige der Formen K und L erhält, wenn man die V_{ih} Substitutionen unterwirft, die zu denen der U_{ih} conjugirt imaginär sind, wenn also die U_{ih} und $\overline{V_{ih}}$ einerseits, die $\overline{U_{ih}}$ und V_{ih} andrerseits als cogredient behandelt werden. Bedeutet σ den Rang der Form H, welcher höchstens gleich $r(\mu-1)$ ist, und τ ihren Trägheitsindex, so ergiebt sich demnach vermittelst einer derartigen Transformation:

$$(163) \qquad \begin{cases} H \equiv \sum_{\lambda=1}^{\tau} P_\lambda \overline{P_\lambda} - \sum_{\lambda=\tau+1}^{\sigma} P_\lambda \overline{P_\lambda} > 0, \\ K \equiv -\sum_{\lambda=1}^{\tau} Q_\lambda \overline{Q_\lambda} + \sum_{\lambda=\tau+1}^{\sigma} Q_\lambda \overline{Q_\lambda} > 0, \\ L \equiv \sum_{\lambda=1}^{\tau} P_\lambda Q_\lambda - \sum_{\lambda=\tau+1}^{\sigma} P_\lambda Q_\lambda = 0, \end{cases}$$

worin die P_λ gewisse lineare Verbindungen der U_{ik} und die Q_λ die conjugirt imaginären Verbindungen der V_{ik} bedeuten. *Der Trägheitsindex von K ist folglich, complementär zu demjenigen von H, gleich* $(\sigma - \tau)$.

Bevor wir aus diesem Ergebniss weitere Schlüsse ziehen, mag hervorgehoben werden, dass die Functionen, welche zu Substitutionsgruppen der gegenwärtig betrachteten Art gehören, jedenfalls den algebraischen Functionen besonders nahe stehen. Darauf, dass ihre determinirenden Exponenten stets reell sind und dass sie keine Logarithmen enthalten können, ist schon an früherer Stelle hingewiesen worden. Sie theilen mit den algebraischen Functionen ferner eine Eigenschaft, die wir in folgendem Satze ausdrücken:

Zu einer Substitutionsgruppe, welche eine definite Hermite'sche Form invariant lässt, kann keine Schaar von überall endlichen Functionen gehören.

Der Beweis für diese Behauptung wird erbracht sein, wenn wir zeigen können, dass unter der Annahme der Existenz einer überall endlichen Functionenschaar

$$[f_1(x),\ f_2(x), \cdots f_r(x)]$$

die Hermite'sche Form H, welche zu dem System von Integralen

$$M_i(x) = \int^x \frac{df_i(x)}{dx}\, dx \qquad (i = 1, 2, \cdots r)$$

gehört, den Werth Null hat, während derselbe positiv sein müsste.

Bezeichnen wir zur Abkürzung den Werth, welchen die Function $f_i(x)$ im singulären Punkte a_λ annimmt, mit

$$A_{i\lambda} = f_i(a_\lambda),$$

so ist in H einzusetzen:

$$U_{ik} = A_{i,k+1} - A_{i,k}\ ,$$

und es verschwinden offenbar sämmtliche Grössen $A_{i\lambda}$ und mit ihnen H, wenn keiner der determinirenden Exponenten der Functionenschaar den Werth Null hat. In jedem Falle aber bleibt der Werth von $f_i(x)$ bei Convergenz von x gegen a_λ durch einen Umlauf von x um a_λ ungeändert, so dass der Ausdruck

$$B_{i\lambda} = \sum_{\varkappa=1}^{r} \left(\delta_{i\varkappa} - g_{i\varkappa}^{(\lambda)}\right) A_{\varkappa\lambda} = 0 \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots r \\ \lambda = 1, 2, \cdots (\mu+1) \end{pmatrix}$$

wird. Setzen wir noch der Kürze wegen

$$\sum_{\varkappa=1}^{r} \alpha_{i\varkappa}^{(\lambda-1)} B_{\varkappa\lambda} = C_{i\lambda}\ ,$$

so dass auch $C_{i\lambda}$ identisch verschwindet, so finden wir für H nach einigen Umformungen folgende Darstellung:

$$iH = \sum_{\substack{h,k=1 \\ h<k}}^{\mu+1} \sum_{i=1}^{r} C_{ih}\overline{C}_{ik} + \sum_{h=1}^{\mu+1} \sum_{i=1}^{r} A_{ih}\overline{B}_{ih},$$

aus welcher hervorgeht, dass H den Werth Null hat. q. e. d.

Indem wir nun wieder an das Resultat (163) anknüpfen, wollen wir voraussetzen, dass die Formenschaaren $u_i(x)$, $v_i(x)$ die allgemeinsten ihres Charakters sind, welche zu ihren Gruppen bez. gehören, und zwar mögen sie sich aus N, bez. N' Schaaren linear-unabhängig zusammensetzen. Es sind dann in Uebereinstimmung mit der Bezeichnung des § 7, N und N' die Anzahlen der überall endlichen Integralfunctionen beider Gruppen, da zu denselben, wie soeben bewiesen, keine überall endlichen Functionen gehören. Ich behaupte nun, *dass diese Anzahl der überall endlichen Integralfunctionen höchstens dem Trägheitsindex der zugehörigen Hermite'schen Form gleichkommt, dass also*

$$(164) \qquad \begin{cases} N \leqq \tau, \\ N' \leqq \sigma - \tau \end{cases}$$

stattfindet, woraus

$$(165) \qquad N + N' \leqq \sigma$$

folgt. Wäre nämlich etwa $N > \tau$, so könnte man über die N in der Formenschaar $u_i(x)$ auftretenden willkürlichen Constanten so verfügen, dass die τ Perioden $P_1, P_2, \cdots P_\tau$ den Werth Null erhielten, wodurch die Form H sich auf den negativen Ausdruck

$$H = -\sum_{\lambda=\tau+1}^{\sigma} P_\lambda \overline{P_\lambda}$$

reduciren würde, der im Falle $\tau = \sigma$ durch Null zu ersetzen wäre, — was mit $H > 0$ im Widerspruch steht.

Soweit basirt Alles auf den ursprünglichen Prämissen des § 18 bezüglich der Formenschaaren $u_i(x)$ und $v_i(x)$. Jetzt führen wir noch eine weitere Voraussetzung ein, dahingehend, dass die Summe der Anzahlen der überall endlichen Integralfunctionen beider Gruppen mit dem Range der bilinearen Formen H, K, L übereinstimmen, dass also

$$N + N' = \sigma$$

sein soll. Alsdann fliessen aus (164) unmittelbar die Beziehungen:

$$(166) \qquad \begin{cases} N = \tau, \\ N' = \sigma - \tau. \end{cases}$$

Diese Annahme rechtfertigt sich dadurch, dass sie nicht nur, wie wir im § 19 gesehen haben, für $r = 1$, sondern auch zufolge dem Theorem VI im § 7 für Formenschaaren jeder beliebigen Ordnung von höchst allgemeinem Charakter ganz von selbst erfüllt ist, ohne eine Einschränkung zu enthalten. Andrerseits freilich vertragen sich die daselbst getroffenen Voraussetzungen mit der durch unsere jetzigen Prämissen bedingten Nichtexistenz überall endlicher Functionen, wie am Schlusse des § 7 hervorgehoben ist, nicht, sobald $r > 3$ ist.

Mit den Ergebnissen (163) und (166) haben wir nun folgende Ergänzung des Theorems XVI und Verallgemeinerung von XVII gewonnen:

Theorem XIX. *Gehören zwei Schaaren von überall endlichen Integralfunctionen zu zwei contragredienten und zugleich conjugirt imaginären Gruppen, so existiren zwei aus den Perioden der Integralfunctionen bez. gebildete Hermite'sche Formen H und K, welche nur positiver Werthe fähig sind, und deren Trägheitsindices sich zu ihrem Range ergänzen. Wenn überdies, — was jedenfalls für $r = 1$ ohne Einschränkung stattfindet, — die Summe der Anzahlen N und N' der überall endlichen Integralfunctionen beider Gruppen gleich dem Range jener Formen H, K ist, so stimmen deren Trägheitsindices mit diesen Anzahlen N, N' bez. überein.*

Von hier aus lassen sich nun in betreff der Construction eines quadratischen Periodenschemas von überall endlichen Normalintegralen der beiden contragredienten Gruppen genau die gleichen Schlüsse ziehen wie im Falle $r = 1$ des Theorems XVIII, was wol keiner näheren Ausführung bedarf.

Wir ziehen nun die specielle Annahme in Betracht, dass die vorgelegte Gruppe mit ihrer contragredienten, die zugleich zu ihr conjugirt imaginär ist, zusammenfällt, also reell und orthogonal ist. Alsdann sind die bilinearen Formen H und L alternirend und $\sigma = 2\tau$. Da in diesem Falle beide Formenschaaren $u_i(x)$ und $v_i(x)$ der gleichen Gruppe angehören, so muss man bei simultaner Transformation von H und L die V_{ik} nicht nur, wie bisher, cogredient mit den $\overline{U}_{ik}$, sondern zugleich auch mit den U_{ik} substituiren, man darf also nur reelle Substitutionen verwenden. Durch eine solche lässt sich die früher benutzte kanonische Form nicht erzielen; dagegen kann man damit H und L in die kanonische Gestalt alternirender Formen überführen:

$$(167)\qquad \begin{cases} H \equiv i \sum_{\lambda=1}^{\tau} (P_\lambda \overline{P}_{\tau+\lambda} - P_{\tau+\lambda} \overline{P}_\lambda) > 0, \\ L \equiv i \sum_{\lambda=1}^{\tau} (P_\lambda Q_{\tau+\lambda} - P_{\tau+\lambda} Q_\lambda) = 0, \end{cases}$$

worin also die P_λ gewisse reelle Verbindungen der U_{ik} und die Q_λ die gleichen Verbindungen der V_{ik} bedeuten.

Entsprechend unserer früheren Voraussetzung nehmen wir jetzt an, dass die Anzahl N der überall endlichen Integralfunctionen der Gruppe mit dem Trägheitsindex τ übereinstimmt, und stellen das Periodenschema von τ beliebig gewählten linear-unabhängigen Integralfunctionen auf:

$$\left\{\begin{matrix} P_1^{(1)} & P_2^{(1)} \cdots & P_\tau^{(1)} & P_{\tau+1}^{(1)} & P_{\tau+2}^{(1)} \cdots & P_{2\tau}^{(1)} \\ P_1^{(2)} & P_2^{(2)} \cdots & P_\tau^{(2)} & P_{\tau+1}^{(2)} & P_{\tau+2}^{(2)} \cdots & P_{2\tau}^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_1^{(\tau)} & P_2^{(\tau)} \cdots & P_\tau^{(\tau)} & P_{\tau+1}^{(\tau)} & P_{\tau+2}^{(\tau)} \cdots & P_{2\tau}^{(\tau)} \end{matrix}\right\}.$$

In demselben ist die Determinante der τ ersten Colonnen von Null verschieden; denn andernfalls liesse sich eine Integralfunction bestimmen, für welche die Perioden $P_1, P_2, \cdots P_\tau$ verschwinden, was $H=0$ zur Folge hätte. Mithin lassen sich die τ Integralfunctionen derart normiren, dass die Perioden der τ ersten Colonnen die Werthe annehmen:

$$P_\varkappa^{(i)} = \delta_{i\varkappa}. \qquad (i, \varkappa = 1, 2, \cdots \tau)$$

Dadurch reduciren sich die bilinearen Relationen

$$L \equiv i \sum_{\lambda=1}^{\tau} \left(P_\lambda^{(\mu)} P_{\tau+\lambda}^{(\nu)} - P_{\tau+\lambda}^{(\mu)} P_\lambda^{(\nu)}\right) = 0$$

auf die Beziehungen:

$$P_{\tau+\mu}^{(\nu)} = P_{\tau+\nu}^{(\mu)},$$

sodass, wenn man

$$P_{\tau+\mu}^{(\nu)} = p_{\nu\mu}$$

setzt,

$$p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu} \tag{168}$$

stattfindet. — Combinirt man endlich aus den normirten Integralfunctionen mit unbestimmten Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\tau$ die allgemeine Integralfunction und stellt für dieselbe die Ungleichung $H > 0$ auf, so reicht es hin, die Grössen α_λ als reell anzunehmen, wobei sich ergiebt:

$$H \equiv i \sum_{\mu,\nu=1}^{\tau} (\bar{p}_{\mu\nu} - p_{\mu\nu})\, \alpha_\mu \alpha_\nu > 0. \tag{169}$$

Wir fassen diese Resultate zusammen in dem

Theorem XX. *Gehört eine Schaar von überall endlichen Integralfunctionen zu einer reellen orthogonalen Gruppe, so existirt eine aus den Perioden der Integralfunctionen gebildete Hermite'sche Form H von alternirendem Charakter, welche nur positiver Werthe fähig ist. Wenn überdies, — was jedenfalls für $r=1$ ohne Einschränkung stattfindet, — die Anzahl N der zu der Gruppe gehörenden überall endlichen Integralfunctionen mit dem*

Trägheitsindex τ der Form H übereinstimmt, so lassen sich dieselben derart auswählen, dass ihr Periodenschema die Structur erhält:

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1\tau} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2\tau} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{\tau 1} & p_{\tau 2} & \cdots & p_{\tau\tau} \end{matrix}\right\},$$

wobei

$$p_{\mu\nu} = p_{\nu\mu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots \tau)$$

ist. Die Variabilität dieser Grössen wird dadurch eingeschränkt, dass, unter $p'_{\mu\nu}$ die imaginäre Componente von $p_{\mu\nu}$ verstanden, die mit reellen Unbestimmten α_λ gebildete quadratische Form

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\tau} p'_{\mu\nu}\, \alpha_\mu\, \alpha_\nu$$

positiv definit sein muss.

Im Falle $r = 1$ gehören die in Rede stehenden Integralfunctionen zu einem hyperelliptischen Gebilde; ob bei höherem r andere Integrale als solche algebraischer Functionen den auferlegten Bedingungen entsprechen können, muss dahingestellt bleiben.

Ich schliesse diese durch Riemann angeregten Entwicklungen, welche uns zur Aufstellung der bilinearen Relationen erster Art sowie der Ungleichungen unter den Perioden geführt haben, mit dem Hinweise, dass sich die benutzten Methoden und wesentlichen Resultate auf die reciproken Formenschaaren einer Riemann'schen Fläche von höherem Geschlechte übertragen lassen, welche von E. Ritter*) in einer tief eindringenden Untersuchung behandelt worden sind.

Zürich, den 10. Dezember 1899.

---

*) „Ueber Riemann'sche Formenschaaren auf einem beliebigen algebraischen Gebilde", Mathem. Annalen, Bd. 47.

Ueber Minimalflächen.

(Eine Berichtigung.)

Von

HERBERT RICHMOND in Cambridge.

Im Laufe seiner berühmten Untersuchungen über algebraische Minimalflächen hat Sophus Lie alle diejenigen reellen Minimalflächen bestimmt, deren Ordnung niedriger als 17 ist und welche dabei keine Doppelflächen sind*). Unter den sieben Gattungen solcher Flächen, die Lie in dem auf S. 397 befindlichen Schema zusammengestellt hat, habe ich kürzlich bemerkt dass eine, und zwar die Fläche 12ter Ordnung 18ter Classe, nicht existirt. Ich wage das Folgende zu behaupten:

Es giebt eine reelle Minimalfläche 12ter Ordnung deren Classenzahl gleich 12 ist: andere reelle Minimalflächen 12ter Ordnung giebt es nicht.

Lie hatte nämlich die Existenz einer Minimalcurve vierter Ordnung erkannt (S. 388) deren abwickelbare Fläche den Kugelkreis als dreifache Curve enthält; setzte aber unrichtig voraus dass die vier unendlich entfernten Punkte dieser Curve paarweise zu einander conjugirt sein könnten (S. 394, 395). Dieser Specialfall der rationalen Raumcurven vierter Ordnung kann kein anderer als die äquianharmonische Curve**) sein, deren Tangenten bekanntlich sich zu drei und drei in den Punkten eines festen Kegelschnitts treffen***); fällt dieser Kegelschnitt mit dem Kugelkreis zusammen, so wird die Curve eine Minimalcurve. Aber es ist leicht zu erkennen, dass die vier unendlich entfernten Punkte dieser Curve ein äquianharmonisches Punktquadrupel auf dem Kugelkreise bilden: deswegen sind sie niemals in zwei conjugirt imaginäre Punktepaare theilbar.

---

*) Diese Annalen Bd. XIV, pag. 331 ff.

**) Diese Curve war schon in 1872 von Bertini entdeckt worden. Lomb. Ist. Rend (2) V, pag. 622—638.

***) Vergl. Rohn, Leipz. Ber. (1891) XLIII, pag. 20 ff.

Die einzige reelle Minimalfläche 12^{ter} Ordnung ist durch die Gleichungen

$$x = k\{u^3 - 3uv^2 + 3u \div (u^2+v^2)\},$$
$$y = k\{v^3 - 3vu^2 - 3v \div (u^2+v^2)\},$$
$$z = 6ku$$

dargestellt: ich habe die Sache in den *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, *Vol. XIX* genauer untersucht.

King's College, Cambridge, England, Feb. 23, 1900.

Ueber die Anzahl der wesentlichen Veränderlichen in einer r-gliedrigen continuirlichen Gruppe von Punkttransformationen.

Von

Konrad Zindler in Innsbruck.

Bei Bestimmung aller Typen dreigliedriger Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen hat sich gezeigt*), dass schon bei vier Veränderlichen **alle** möglichen Typen auftreten, oder: Jede dreigliedrige Gruppe von mehr als vier Veränderlichen ist mit einer Gruppe von höchstens vier Veränderlichen ähnlich**). Es fragt sich, ob auch für mehr als dreigliedrige Gruppen ein analoger Satz gilt, d. h. ob es für die Zahl n der Veränderlichen eine obere Grenze giebt, über die man nicht hinauszugehen braucht, um sämmtliche Typen r-gliedriger Gruppen in *beliebig* vielen Veränderlichen zu erhalten. Wir werden den Satz beweisen:

Eine etwaige obere Grenze liegt für ein ungerades r jedenfalls nicht unter $\left(\frac{r+1}{2}\right)^2$, *für ein gerades r nicht unter* $\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+1\right)$.

Wir bilden eine specielle r-gliedrige Gruppe G von ϱ-facher Ausbreitung***) $(\varrho < r)$ in n Veränderlichen $(n > r)$, die wir theils durch

---

*) „Ueber simultane gewöhnliche Differentialgleichungen, welche continuirliche Transformationsgruppen gestatten, § 9", Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. XI.

**) Hierbei wird der Begriff der Aehnlichkeit in dem etwas weitern Sinn gefasst, den Lie und Engel in der „Theorie der Transformationsgr." I. am Ende des § 92 erwähnen.

***) Ich sage, eine Gruppe habe ϱ-fache Ausbreitung, wenn eine allgemeine Stelle durch ihre Transformationen in ∞^ϱ Lagen übergeführt werden kann.

Symbole x, theils durch w bezeichnen, jenachdem die Ableitungen nach ihnen in den infinitesimalen Transformationen von G wirklich auftreten oder nicht. Diese Gruppe G ist folgende:

$$(1)\quad \begin{cases} U_i f = \dfrac{\partial f}{\partial x_i} & (i = 1, \cdots, \varrho), \\ V_k f = \displaystyle\sum_{i=1}^{\varrho} w_{k\varrho+i} \frac{\partial f}{\partial x_i} & (k = 0, 1, \cdots, r-\varrho-1). \end{cases}$$

In G treten die w in der Anzahl $\sigma = \varrho(r-\varrho)$ auf. Also ist

$$(2)\qquad n = \varrho + \sigma = \varrho(r+1) - \varrho^2.$$

Wir wollen zeigen, dass alle diese Veränderlichen „*wesentlich*“ sind, d. h. dass G mit keiner Gruppe in weniger als n Veränderlichen ähnlich sein kann.

Wäre G' eine solche Gruppe in $n' < n$ Veränderlichen, so müsste sie, wie G, r-gliedrig sein, ϱ-fache Ausbreitung haben und aus lauter vertauschbaren Transformationen bestehen (Lie und Scheffers, Vorl. üb. Gruppen, Kap. 17, Satz 4). Also müsste sich (nach Transf.-gr. I, S. 339, Satz 1) G', ohne dass die Zahl der Veränderlichen sich dabei vermehrt, auf eine solche Form G'' bringen lassen, dass irgend eine ϱ-gliedrige Untergruppe ϱ-facher Ausbreitung*) in der Gestalt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \cdots, \varrho)$$

erscheint. G wäre dann mit G'' durch eine solche Transformation ähnlich, welche die $\frac{\partial f}{\partial x}$ einzeln (abgesehen von der Bezeichnung) ungeändert lässt. Setzen wir eine Transformation an:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_i &= \varphi_i(x_\mu, w_\nu) \qquad && (i = 1, \cdots, \varrho), \\ \mathfrak{w}_k &= \psi_k(x_\mu, w_\nu) && (k = 1, \cdots, \sigma), \end{aligned}$$

wobei also ϱ Argumente durch ein einziges Symbol x_μ, σ Argumente durch w_ν vertreten sind. Bezeichnen wir

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_m} = \varphi_{im}, \qquad \frac{\partial \psi_k}{\partial x_m} = \psi_{km},$$

so wird vermöge (3)

$$(4)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = \sum_{i=1}^{\varrho} \varphi_{i\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_i} + \sum_{k=1}^{\sigma} \psi_{k\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{w}_k} \qquad (\lambda = 1, \cdots, \varrho).$$

---

*) u. zw. diejenige, welche den $U_i f$ vermöge der Aehnlichkeit entspricht.

Da aber vermöge (3) identisch

$$\frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\lambda}$$

sein soll, erhalten wir $\psi_{k\lambda} = 0$; $\varphi_{i\lambda} = 0$, ausser wenn $i = \lambda$, wo $\varphi_{i\lambda}$ den Werth eins hat. D. h. die allgemeinste Transformation, welche der Bedingung genügt, die Untergruppe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in sich überzuführen, hat die Form

$$(5) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_i &= x_i + f_i, \\ \mathfrak{w}_k &= \psi_k(w_\nu), \end{aligned}$$

wobei auch die f nur von den w abhängen, und die Functionaldeterminante $|\psi_{k\nu}|$ nicht identisch verschwinden darf. Jede Transformation der Form (5) ändert aber die V_k nur so, dass an Stelle der w Functionen der $\mathfrak{w}$ treten, die man durch Auflösung der Gleichungen $\mathfrak{w} = \psi$ nach den w erhält:

$$w_\nu = \chi_\nu(\mathfrak{w}_k).$$

Da auch die Functionaldeterminante $|\chi_{\nu k}|$ nicht identisch verschwindet, kann dabei kein $\mathfrak{w}$ herausfallen. Keine der Transformationen (5) ist daher im Stande, G in eine Gruppe G'' mit weniger Veränderlichen überzuführen. *Also sind in der That alle n Veränderlichen von G wesentlich.*

Wir wollen jetzt ϱ bei festem r ganzzahlig so wählen, dass n möglichst gross wird. Das geschieht nach (2) für ungerades r durch

$$\varrho = \frac{r+1}{2},$$

was den Maximalwerth

$$n = \left(\frac{r+1}{2}\right)^2$$

liefert, für gerades r durch

$$\varrho = \frac{r}{2} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{r}{2} + 1,$$

die denselben Maximalwerth

$$n = \frac{r}{2}\left(\frac{r}{2} + 1\right)$$

liefern. Hiermit ist der eingangs aufgestellte Satz bewiesen.

Es wird für

$$r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ 6,\ \ 7\ \cdots$$

der Reihe nach

$$n = 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 16\ \cdots.$$

Diese Zahl n ist die Zahl der Veränderlichen, bis zu der man mindestens gehen muss, wenn man sämmtliche Typen r-gliedriger Gruppen in *beliebig* vielen Veränderlichen aufstellen will. Für $r = 1, 2, 3$ braucht man jedoch auch *nicht weiter* zu gehen; ob auch für grössere r, steht noch offen. Für den einfachsten Fall $r = 3$ wird G:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad w_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + w_2 \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

ist jedoch der einzige Typus dreigliedriger Gruppen, der nicht schon bei drei Veränderlichen auftritt (vgl. hierüber, sowie über die zweigliedrigen Gruppen in beliebig vielen Veränderlichen, Monatsh. a. a. O., § 7, 9).

Wien, am 21. April 1900.

INHALT.

Seite

Ueber die Methode des arithmetischen Mittels, insbesondere über die Vervollkommnungen, welche die betreffenden *Poincaré*'schen Untersuchungen in letzter Zeit durch die Arbeiten von *A. Korn* und *E. R. Neumann* erhalten haben. Von C. Neumann in Leipzig 1
Friedrich Ludwig Wachter, ein Beitrag zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie. Von Paul Stäckel in Kiel 49
Ueber die Gestalt der Bahncurven bei einer Klasse dynamischer Probleme. Von Paul Stäckel in Kiel 86
Ueber die Annäherung an eine reelle Grösse durch rationale Zahlen. Von Hermann Minkowski in Zürich 91
Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. Von M. M. G. Ricci und T. Levi-Civita in Padua 125
Ueber bilineare Relationen zwischen den Perioden der Integrale reciproker Formenschaaren. Von Arthur Hirsch in Zürich 203
Ueber Minimalflächen. (Eine Berichtigung.) Von Herbert Richmond in Cambridge 323
Ueber die Anzahl der wesentlichen Veränderlichen in einer r-gliedrigen continuirlichen Gruppe von Punkttransformationen. Von Konrad Zindler in Innsbruck 325

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung den Manuscripten beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von **Johann Ambrosius Barth** in **Leipzig** und **B. G. Teubner** in **Leipzig**.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig

54. Band. 3. Heft.

Mit [illegible] Figuren im Text.

Ausgegeben am 26. Februar.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Elwin Bruno Christoffel.

Von

C. F. Geiser in Zürich und L. Maurer in Tübingen.

Elwin Bruno Christoffel ist am 10. November 1829 in Montjoie, einem kleinen Städtchen der preussischen Rheinprovinz (nahe an der belgischen Grenze) geboren. Auf dem Friedrich-Wilhelms-Gymnasium in Köln, wo der bald darauf durch die Befreiung Kinkels berühmt gewordene Karl Schurz sein Mitschüler war, erwarb er sich das Maturitätszeugniss. Seine Studienzeit verbrachte er an der Universität Berlin, wo ihn vor Allem Dirichlets Vorlesungen anzogen, mit deren Form und Gedankeninhalt er sich aufs Genaueste und Tiefste vertraut machte; sie sind für seine ganze Thätigkeit als Lehrer und Forscher massgebend geworden. Daneben interessirten ihn Borchardt's gehaltvolle Vorträge über elliptische Functionen; Steiner's geometrische Lehren suchte er sich wenigstens in den Grundprincipien anzueignen. Scherzweise bekannte er sich auch als Schüler G. S. Ohm's und belegte dies durch ein Blatt von zweifelhaftem künstlerischen Werthe, auf welchem er den bei diesem Docenten in der ersten Vorlesung gehörten Satz illustrirt hatte: „Lagrange stand auf den Schultern von Euler, wir aber stehen auf den Schultern von Lagrange.“*)

Das Bedürfniss einen vollkommenen Einblick in die Voraussetzungen zu gewinnen, auf welchen Dirichlet einzelne seiner Vorlesungen aufbaute, veranlasste Christoffel, sich eingehender mit Experimentalphysik zu beschäftigen, als dies damals bei den Studirenden der Mathematik üblich war. Er kam dadurch in persönliche Beziehungen zu Dove, was ihm die Möglichkeit gewährte, gelegentlich eigene physikalische Versuche anzustellen. Er muss in dieser Richtung eine entschiedene Begabung besessen haben;

---

*) Als Weierstrass seinen ersten Besuch bei Steiner machte, fragte ihn dieser in seiner ironischen Art: „Sie kommen wohl hauptsächlich nach Berlin, um Ohm kennen zu lernen?“ „Nein, ich wollte zu Ihnen und zu Dirichlet“. „Dann haben Sie Grütze im Kopf; wer Grütze hat, kommt zu Dirichlet und mir, die andern gehen zu Ohm.“

ich erinnere mich noch lebhaft an die Anschaulichkeit, mit welcher er mir einst unter blosser Benutzung eines eisernen Lineals, eines Bindfadens und der Brettchen einer Cigarrenkiste zeigte, wie gewisse Fundamentalgesetze des Magnetismus experimentell zu prüfen seien. Auch in dem Laboratorium des Chemikers Sonnenschein arbeitete er eifrig; er trug bei einer Explosion schwere Verwundungen am Kopfe davon, deren Narben noch lange Jahre sichtbar blieben.

Nachdem Christoffel verhältnissmässig spät seine Universitätsstudien abgeschlossen hatte (er promovirte am 12. März 1856), kehrte er nach Montjoie zurück und blieb dort bis zum Tode seiner Mutter, die er während der Leidenszeit einer langen Krankheit nicht hatte verlassen wollen. Der mehrjährige Aufenthalt in dem abgelegenen Orte, der keinerlei wissenschaftliche Anregung bot, ja sogar die einfachsten geselligen Beziehungen vermissen liess, ist von grosser Bedeutung für seine ganze Individualität geworden. Auf Grund einer hervorragenden Arbeitskraft und einer zielsicheren Intelligenz, unbeirrt von irgend welchen fremden Einmischungen, gewann er eine geistige Selbständigkeit, die sich in der Wissenschaft frei von Einseitigkeiten und unfruchtbaren Speculationen hielt. Er drang tief in die Riemann'schen Schöpfungen ein, soweit dieselben damals schon publicirt waren. In den Dirichlet'schen Vorlesungen erblickte er eine ausgezeichnete Vorschule für dieses Studium, ebenso in den functionentheoretischen Abhandlungen Cauchy's, die er damals schon genau gekannt haben muss. Er meinte gelegentlich, mit dem Citat in § 6 der Abhandlung über die Abel'schen Functionen habe sich Riemann die Hälfte des Umfangs der Ausarbeitung seiner Theorie gespart. Aber in diesen Jahren einsamer und angestrengter Studien bildeten sich auch einige Singularitäten des Charakters aus; er selbst sagte, in jenen Zeiten hätte er sogar das Sprechen verlernt. Und so verblieb ihm ein öfter hervortretender Zug von Menschenscheu, sowie eine Reizbarkeit, die auch den Freunden gegenüber sich leicht in Schroffheit und Misstrauen geltend machte. Selbst sein sonst so sachkundiges und gerne anerkennendes Urtheil über die wissenschaftlichen Leistungen anderer Mathematiker konnte in solchen Momenten getrübt erscheinen.

Als völlig reifer Mann habilitirte sich Christoffel im Jahre 1859 an der Universität Berlin, wo er ebensowohl durch seine wissenschaftliche Bedeutung wie durch seine Thätigkeit als Docent sich die volle Anerkennung von Kummer und Weierstrass erwarb. Hauptsächlich auf ihre Empfehlung hin wurde ihm 1862 die durch Dedekind's Weggang erledigte Stelle am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich übertragen. Bei Annahme des Rufes freute er sich darauf, vor einen grösseren Hörerkreis treten zu können, bei dem er eine weitgehende mathematische Vorbildung glaubte voraussetzen zu dürfen. Unter dieser Annahme hatte er insbesondere als Einleitung zu seinen Vorlesungen eine exacte Darlegung der Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung sorgfältig ausgearbeitet. Der erwartete Erfolg blieb zunächst aus, und die Studirenden ersuchten ihn, nach Verfluss des ersten Quartals, einen zugänglicheren Weg einzuschlagen. Ohne jede Empfindlichkeit entsprach er dem geäusserten Wunsche, begann die Vorlesung noch einmal auf total veränderter Grundlage und nun mit einer Wirkung, dass er sofort zu den ausgezeichnetsten Lehrern der Anstalt gezählt wurde. Später durfte er auch erhöhte Anforderungen stellen, zudem vereinigte sich in seinen Privatvorlesungen ein grosser Kreis von Schülern, welche er mit denjenigen Parthieen der Wissenschaft bekannt machen konnte, in denen sich seine eigene Forschung bewegte.

Es war ein unvergleichlicher Genuss, den Vorträgen Christoffels zu folgen. Schon die äussere Erscheinung des kräftig gebauten Mannes mit der ungesucht eleganten Haltung, dem fest wie in Bronze geprägten und doch geistig durchgearbeiteten Kopfe, den wunderbaren Augen, übte eine grosse Anziehungskraft aus. Die Sprache war einfach und lebendig, von einem leichten Flusse, ohne jede unnöthige Wiederholung oder nachträgliche Correctur. In dem für die künftigen Techniker obligatorischen Unterrichte liebte er es, bis zu ausführbaren geometrischen Constructionen und numerischen Rechnungen vorzudringen, deren Schlussergebnisse er ohne Prätention und Pedanterie in übersichtlicher Ordnung an der Tafel zusammenstellte. Der Hauptreiz und der Hauptwerth aller seiner Vorträge aber lag darin, dass er in bewusster Nachfolge Dirichlet's die Mathematik als eine Wissenschaft des reinen Gedankens behandelte. Die allgemeinen Grundbegriffe und Methoden wurden immer mit der grössten Präcision erläutert, die speciellen Probleme klar und scharf begrenzt, die gefundenen Lösungen in Bezug auf die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen ihrer Richtigkeit umfassend discutirt. Betrachtungen über das Unendlichwerden, über den Grenzprocesse, über Unstetigkeiten wandte er seine besondere Aufmerksamkeit zu, indem er sie von den zufälligen Umständen, unter denen sie sich darboten, befreite und in ihrer philosophischen, oder wie er lieber gesagt hätte, rein begrifflichen Bedeutung auseinanderlegte. Damit hing wohl die Kunst zusammen zu concentriren und zu condensiren. So gab er in ein- bis zweistündigen Semestervorlesungen eine Theorie der bestimmten Integrale, oder der partiellen Differentialgleichungen, oder der krummen Oberflächen, die alles Wesentliche enthielt und hervortreten liess, ohne dass er nöthig gehabt hätte durch geistreiche Aperçus oder beziehungsvollen Citatenreichthum die dem Gegenstand an und für sich innewohnende Bedeutung noch besonders zu erhöhen und in künstlicher Beleuchtung erscheinen zu lassen. Freilich verwandte er auf derartige

Collegien eine vorgängige Gedankenarbeit, dass er mir, jedenfalls ohne jede Uebertreibung, bei Beginn eines derselben sagen konnte: „Ich weiss jetzt schon, was ich in jeder der folgenden Stunden vorzutragen haben werde.“

Insofern man aus der Zeitfolge der von ihm publicirten Abhandlungen einen sichern Schluss ziehen darf, so ist der Züricher Aufenthalt für Christoffel auch in Bezug auf die selbständige wissenschaftliche Arbeit die reichste Zeit seines Lebens gewesen. Das Inhaltsverzeichniss des Crelle'schen Journals für die Bände 61—70 führt zehn hierhergehörige Abhandlungen auf, zu welchen man noch eine in den Annali di Matematica erschienene und eine von der Berliner Akademie der Wissenschaften veröffentlichte zu rechnen hat. Es war eine wohlverdiente Auszeichnung, dass er in Anerkennung dieser Leistungen von der eben genannten Körperschaft zu ihrem correspondirenden Mitgliede erwählt wurde.

Zu den Collegen Christoffels am eidg. Polytechnikum hatte während einiger Zeit auch Reuleaux gehört, der von dort im Jahre 1864 als Professor an das Gewerbeinstitut in Berlin berufen und Ende 1867 zum Director der aus diesem hervorgegangenen Gewerbe-Akademie ernannt worden war. Dies gab die Veranlassung, dass auch Christoffel an die neu organisirte Anstalt gezogen wurde. Eine bald nach Uebernahme der neuen Stellung an ihn ergangene vertrauliche Anfrage, ob er eventuell die Leitung der polytechnischen Schule in Aachen übernehmen würde, beantwortete er in ablehnendem Sinne. Er wollte seine wissenschaftliche Thätigkeit nicht durch Amtsgeschäfte administrativer Natur einschränken lassen — und wohl mochte er auch fühlen, dass ihm manche der wesentlichen Eigenschaften fehlten, die eine solche Amtsführung nothwendig fordert.

Christoffel hat die Rückkehr in's Vaterland als eine grosse Ehre und Freude geschätzt. Der Aufschwung, den Berlin während seiner Abwesenheit genommen, liess ihn die Anregungen und Vortheile einer Grossstadt aufs lebhafteste empfinden. Vor allem pries er es als ein besonderes Glück, dass er die grosse Zeit von 1870—71 in dem Centrum der materiellen und geistigen Machtentfaltung Deutschlands miterleben durfte. Und doch sprach er später mit einem gewissen Gefühl des Missbehagens von den drei Jahren (1869—72) seiner Thätigkeit an der Gewerbeakademie. Zwar stand er mit seinem nächsten Collegen im besten Einvernehmen: Aronhold's liebenswürdige und lebendige Art war ihm durchaus sympathisch. Von der Art wie sich dieser Mann aus den beschränktesten Verhältnissen, durch energische Ueberwindung der mannigfachsten Hindernisse eine bedeutende Stellung im Lehramte und in der Wissenschaft errungen hatte, sprach er mit rückhaltloser Anerkennung. Aber dass es ihm trotz der

Unterstützung durch einen so ausgezeichneten Mitarbeiter nicht gelingen wollte eine grössere Anzahl von Studirenden zu dauerndem Interesse an höhern mathematischen Vorlesungen heranzuziehen, veranlasste ihn zu sehr unliebsamen Vergleichungen mit den Züricher Verhältnissen. Es mag vielleicht, wenn auch unausgesprochen, ein Anderes dazu gekommen sein. Christoffel war früher Privatdocent an der Universität gewesen, er zählte zu den correspondirenden Mitgliedern der Akademie der Wissenschaften; ist es nicht denkbar, dass er sich neben seiner eigentlichen Lehrverpflichtung noch einen weitern, seinen Neigungen und Fähigkeiten entsprechenden Wirkungskreis ersehnte?

Alle Schwierigkeiten dieser Situation wurden durch die Berufung nach Strassburg gelöst. Freiherr von Roggenbach, der mit der ersten Einrichtung der neu zu gründenden Hochschule betraut war, wandte sich, um über die Besetzung der mathematischen Professuren fachkundigen Rath einzuholen, an Kronecker. Dieser nannte in erster Linie Christoffel, der auch, nachdem seinen Anforderungen entsprochen worden war, die ihm angebotene Stellung übernahm. Damit war er, noch in der ersten Hälfte der Vierziger stehend, also in vollster Manneskraft an ein Ziel gelangt, das allen seinen Wünschen und Hoffnungen die Erfüllung zu gewähren schien. Aber der mit den reichsten Mitteln durchgeführte grosse politische Gedanke: in dem wiedergewonnenen Reichslande eine Universität ersten Ranges aufzurichten, fand bei der deutschen Jugend nicht die freudige Aufnahme, die zur Sicherung einer dem ausgezeichneten Lehrkörper und den aufs grossartigste eingerichteten wissenschaftlichen Instituten entsprechenden Frequenz nöthig gewesen wäre. Die Anzahl der Studirenden blieb in den ersten Jahren sogar hinter bescheidenen Erwartungen zurück; insbesondere war in den mathematischen Fächern kein Grundstock von Schülern vorhanden, welche in einer systematisch geordneten Reihe von Vorlesungen einen höhern Abschluss ihrer akademischen Bildung gesucht hätten. So musste sich Christoffel einen Hörerkreis erst heranbilden. Er that es unter Einsetzung aller seiner Kräfte, sogar unter Einschränkung der bis dahin mit so reichem Erfolge gekrönten Publication wissenschaftlicher Abhandlungen. Die Resultate seiner Forschung sollten nun in erster Linie den Vorlesungen zu Gute kommen, aus deren Bedürfnissen sich umgekehrt häufig die Ziele seiner Untersuchungen ergaben. Gewiss war Strassburg durch diese Thätigkeit nicht in demselben Masse zu einem Mittelpunkte mathematischer Studien geworden, wie es nach- und nebeneinander Königsberg, Berlin, Göttingen waren oder sind. Aber Christoffel, der in der Wissenschaft gerne seine eigenen Wege ging und bei allem liebenswürdigen Verkehr mit seinen Zuhörern doch die persönlichen Beziehungen mehr vermied als aufsuchte, hat niemals die

Neigung besessen eine besondere Schule zu gründen und so erfüllte ihn das Erreichte mit der vollsten Befriedigung.

Seitdem er in der Auswahl des zu behandelnden Stoffes im Wesentlichen freie Hand hatte, bildete in den Vorlesungen, wenigstens in denjenigen, deren Inhalt mir bekannt geworden ist, die Functionentheorie den Hauptgegenstand. Es folgten sich in systematischer Anordnung: Bestimmte Integrale und unendliche Reihen; Einleitung in die Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse; Theorie der elliptischen Functionen; Theorie der Abel'schen Functionen; Anwendungen der Lehre von den Abel'schen Functionen. Aber auch in Vorlesungen, die mit diesem Cyklus nicht in unmittelbarem Zusammenhange standen: Algebraische Theorie der homogenen Formen und invarianten Substitutionen; Theorie der quadratischen und bilinearen Formen; Ausgewählte Kapitel aus der Lehre von den partiellen Differentialgleichungen, wurden überall die Beziehungen zu Aufgaben aus jenem centralen Gebiete der Mathematik hervorgehoben. Es ist vielleicht von Interesse zu wissen, dass er schon im Beginn der Strassburger Zeit, als er eben erneut all' seine Arbeit der Functionenlehre zuwandte, die Theorie der Abel'schen Functionen als eine vollständige Theorie der algebraischen Functionen bezeichnete, die jedoch zu ihrer Erledigung nicht mit algebraischen Hülfsmitteln ausreiche, sondern auch transcendente erfordere. Er vermied das Dirichlet'sche Princip, dessen Wahrheit unter beschränkenden Voraussetzungen ihm zwar unzweifelhaft, dessen Begründung ihm aber unsicher schien. Wie weit er sich in der Umgestaltung der Riemann'schen Methoden und Resultate mit Weierstrass begegnet haben mag, muss ich aus dem einfachen Grunde mangelnder Sachkenntniss dahingestellt lassen. Nur das sei noch hervorgehoben, dass er sich unausgesetzt bemühte, die „imposanten“ Leistungen des grossen Berliner Mathematikers, soweit dieselben durch den Urheber selbst publicirt waren, in ihrer ganzen Bedeutung zu erfassen.

Mehr als zwanzig Jahre lang ist Christoffel in seinem Strassburger Lehramte thätig gewesen; sobald es die in dieser Hinsicht eben so liberalen als vernünftigen Statuten der Universität zuliessen, trat er in den Ruhestand. Es entsprach seiner ganzen Lebensauffassung, wenn er auch in Bezug auf seine eigene Person gefunden hatte: es liege nicht im Interesse der Hochschulen, Professoren bis zum Aeussersten im Dienste zu belassen und auszunutzen. Der Einwurzelung noch so berechtigter wissenschaftlicher Richtungen und Traditionen sei eine Ablösung durch neue Kräfte, die sich auf veränderten Bahnen bewegen, vorzuziehen. Für sich selbst hoffte er noch auf eine Zeit intensiver, von jeder äussern Rücksicht unabhängigen wissenschaftlichen Thätigkeit; sogar die Anregung: die gewonnene Musse zur Ausarbeitung und Publication solcher Ergebnisse seiner Forschung zu verwenden, denen er selbst einen grossen Werth beilegte, wies er von der Hand. Neben den mathematischen Studien zog ihn die erneute Lectüre der alten Klassiker an. Er hatte sich einst auf dem Gymnasium eine ungewöhnliche Kenntniss der griechischen und lateinischen Sprache angeeignet; während des Züricher Aufenthalts bildeten Plato und Tacitus*) seine Lieblingslectüre in den Stunden der Erholung von angestrengter Arbeit; jetzt vertiefte er sich in die zeitgenössischen Quellen der römischen Kaisergeschichte.

Leider war seine Gesundheit schon beim Rücktritte stark erschüttert. Im Jahre 1892 hatte er noch in fast jugendlicher Spannkraft des Körpers und des Geistes ein paar frohe Tage des Wiedersehens und der Erinnerung in Zürich verlebt. Er hatte die Absicht sich von da nach Interlaken zu wenden; auf dem Wege dorthin traf ihn bei Brunnen das Missgeschick von einem Velocipedisten überfahren zu werden und einen Armbruch zu erleiden, der nur langsam und mangelhaft heilte. Zugleich vermehrten sich asthmatische Beschwerden, die ihn schon früher gelegentlich heimgesucht hatten. Wohl brachte später ein Winteraufenthalt in Grindelwald eine bedeutende Besserung und neuen Lebensmuth, aber in den letzten Jahren, die er in zunehmender Abgeschlossenheit und Einsamkeit verbrachte, sanken seine Kräfte mehr und mehr. Den siebzigsten Geburtstag verlebte er in äusserster Stille, da man auf seinen dringenden Wunsch von Deputationen und dergl. gänzlich Abstand genommen hatte. Bald nachher stellten sich die drohenden Anzeichen seiner letzten Krankheit ein, eines schweren Herz- und Nierenleidens, zu dem schliesslich noch die Wassersucht trat. Am 15. März dieses Jahres hat ihn der Tod erlöst.

Der kleine Kreis von Freunden, denen Christoffel seine persönliche Theilnahme zugewendet und in treuer Anhänglichkeit bewahrt hatte, ist durch den Hingang des auch ausserhalb seiner Wissenschaft so bedeutenden Mannes in tiefe Trauer versetzt. Den zahlreichen Schülern die er während einer fast vierzigjährigen Wirksamkeit gefunden, wird er als unvergleichlicher Lehrer in Erinnerung bleiben.

---

*) Einen heitern Beweis seiner genauen Kenntniss des grossen Historikers bewahrt das eidgenössische Polytechnikum. Im Jahre 1864 hatte Christoffel als Actuar der Gesammtconferenz das Protokoll in einer Sitzung zu führen, welche wegen Auflehnung der Studirenden gegen die oberste Leitung der Anstalt einberufen war. Als Motto über seine Wiedergabe der Verhandlungen schrieb er im Originaltext und in deutscher Uebersetzung das Citat aus den Annalen (V, 6): „Bei diesem Anlasse wurden vierundvierzig Reden gehalten, einige aus Furcht, die meisten aber aus Gewohnheit.“

Christoffel's wissenschaftliche Thätigkeit erstreckte sich auf die verschiedensten Gebiete der Mathematik, namentlich auf Functionentheorie, partielle Differentialgleichungen, Invariantentheorie und Flächentheorie. Der grösste Theil der Arbeit seines Lebens war der Functionentheorie gewidmet. Unter den Männern, die das Werk Riemann's weitergeführt und sein Verständniss weiteren Kreisen erschlossen haben, steht er in der ersten Reihe. Nur ein Theil seiner Arbeiten ist in Abhandlungen niedergelegt, der grössere Theil hat nur durch seine Vorlesungen Verbreitung gefunden.

In seinen ersten Publicationen functionentheoretischen Inhalts beschäftigte sich Christoffel mit dem Riemann'schen fundamentalen Problem, eine einfach zusammenhängende Fläche F auf die Fläche eines Kreises eindeutig der Art abzubilden, dass die Abbildung in den kleinsten Theilen ähnlich ist. In den beiden Abhandlungen: Sul problema delle temperature stazionarie (25)*) und sopra un problema proposto da Dirichlet (26) wird die Aufgabe vollständig für den Fall gelöst, dass F die Fläche eines Polygons oder die Ergänzungsfläche eines solchen ist (d. h. der Theil der Ebene, der nach Wegnahme der Polygonfläche übrig bleibt). Wenn die Winkel des Polygons zu 2π in einem rationalen Verhältniss stehen, so wird die Abbildung des Kreises auf die Polygonfläche durch ein Integral erster Gattung, die Abbildung auf die Ergänzungsfläche durch ein Aggregat von Integralen zweiter Gattung geleistet.

Später wandte sich Christoffel der Theorie der algebraischen Functionen zu. Er ging dabei seinen eigenen Weg: er steht auf dem Standpunkt der Riemann'schen Functionentheorie und unterscheidet sich dadurch sowohl von der Weierstrass'schen wie von der Brill-Noether'schen Richtung. Von Riemann selbst weicht er insofern ab, als er die Riemann'schen Existenzbeweise durch wirkliche Darstellung der in Rede stehenden Functionen zu ersetzen sucht.

In der Abhandlung (32) wird auf rein algebraischem Weg — unter Vermeidung transcendenter Hilfsmittel — nachgewiesen, dass die Anzahl der linear unabhängigen Integranden erster Gattung gleich dem Geschlecht p ist. Diese Abhandlung ist auch insofern interessant, als sie einen Einblick in die Methoden gewährt, deren sich Christoffel bei der functionentheoretischen Behandlung algebraischer Probleme zu bedienen pflegte. In der umfangreichen Abhandlung (31): Ueber die kanonische Form der Riemann'schen Integrale erster Gattung setzt sich Christoffel das Ziel für den Integranden erster Gattung eine endgültige Ausdrucksform festzustellen. Zu dem Zweck wird unter den Functionen einer Classe eine Function s ausgewählt, deren Ordnung μ möglichst niedrig ist. Es führt dies zu

*) Die beigesetzten Nummern beziehen sich auf das am Schluss folgende Literaturverzeichniss.

einer neuen Eintheilung der algebraischen Functionen, die der Eintheilung nach dem Geschlecht p an die Seite tritt, nämlich zu einer Eintheilung nach den Werthen von μ. Als einfachster Fall erscheinen die hyperelliptischen Functionen, die $\mu = 2$ entsprechen. Die Function z lässt sich als Quotient zweier Integranden erster Gattung darstellen, ist also nach Christoffels Bezeichnung eine Function erster Gattung*). Solange zwischen den $3p - 3$ Moduln der Classe nicht specielle Relationen bestehen, ist z^2 nicht mehr Function erster Gattung. Wenn dagegen die Moduln nicht von einander unabhängig sind, so können sehr wohl auch noch höhere Potenzen von z Functionen erster Gattung sein; z. B. ist im Fall der hyperelliptischen Functionen z^{p-1} Function erster Gattung.

Es lassen sich nun $\mu - 1$ „Fundamentalintegranden" erster Gattung $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_{\mu-1}$ der Art auswählen, dass der allgemeine Integrand erster Gattung sich in der Form

$$s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 + \cdots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1}$$

darstellen lässt, wo $y_1, y_2, \cdots y_{\mu-1}$ ganze Functionen von z bedeuten, deren Coefficienten verfügbare Parameter sind und deren Ordnungen die Summe $p - \mu + 1$ ergeben. Die Function z wird als unabhängige Variable eingeführt, als abhängige aber der allgemeine Integrand erster Gattung s. Die Coefficienten der Gleichung $F(s \mid z) = 0$ sind ganze homogene Functionen der Grössen $y_1, y_2, \cdots y_{\mu-1}$. Mit invariantentheoretischen Hilfsmitteln wird eine Reihe von interessanten Eigenschaften der Coefficienten dieser Gleichung nachgewiesen, für $\mu = 3$ wird die Gleichung explicite hergestellt. Eine genauere Betrachtung dieser Gleichung lässt die hervorragende Rolle erkennen, die die Fundamentalintegranden spielen, wenn es sich um die Bestimmung der Anzahl der unabhängigen Moduln handelt.

Die Resultate seiner langjährigen Studien über ϑ-Functionen hat Christoffel in einer Abhandlung zusammengefasst, die in diesem Band (S. 347) zum Druck gelangt. Die meisten hier veröffentlichten Resultate hatte er schon früher in seinen Vorlesungen mitgetheilt.

Um die Gesichtspunkte, die ihn geleitet haben, und die Ergebnisse, zu denen er gekommen ist, hier auseinander zu setzen, könnte ich nur wiederholen, was er selbst in der Einleitung zu seiner Abhandlung gesagt hat. Ich beschränke mich desshalb darauf, auf die ausserordentliche Eleganz hinzuweisen, mit der im letzten Theil der Abhandlung die Riemann'schen Constanten für die hyperelliptischen Functionen bestimmt sind.

In seinen letzten Lebensjahren hat Christoffel noch seine Stellung zu den Principienfragen in der Theorie der Functionen reeller Variablen, die

*) Brill-Noether bezeichnen eine derartige Function als Specialfunction.

in neuerer Zeit viel discutirt worden sind, zum Ausdruck bringen wollen.

Er hat das mit der Klarheit gethan, die alle seine Publicationen auszeichnet, in einer Abhandlung, die ebenfalls erst nach seinem Tod erschienen ist: Ueber die Vollwerthigkeit und die Stetigkeit annalytischer Ausdrücke (Ann. Bd. 53, S. 465). Es werden in derselben die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür festgestellt, dass ein analytischer — endlicher oder unendlicher — Ausdruck f für jedes Werthsystem der Variabeln, das einem bestimmten Gebiet angehört, einen bestimmten Functionswerth definirt. Es ergiebt sich, dass f innerhalb des betrachteten Gebietes stetig sein muss, und diese Bedingung reicht auch hin, wenn f ein endlicher Ausdruck ist; anderenfalls treten noch Convergenzbedingungen hinzu. Die Forderung der analytischen Darstellbarkeit führt sonach zu ganz erheblichen Einschränkungen des allgemeinen Functionsbegriffs.

Mit der Theorie der partiellen Differentialgleichungen hat sich Christoffel viel beschäftigt; sie gehörte an allen Hochschulen, an denen er wirkte, zu seinem regelmässigen Lehrprogramm. Von seinen Publicationen gehört hierher seine „Theorie der einwerthigen Potentiale“ (8), die ganz auf dem Boden der Riemann'schen Functionentheorie steht: das Potential wird nicht durch einen bestimmten Ausdruck definirt, sondern durch die partielle Differentialgleichung $\Delta V = 0$ und die in einzelnen Punkten, Linien und Flächen auftretenden Unstetigkeiten. Aus dieser Begriffsbestimmung werden dann die den einzelnen Classen von Potentialen entsprechenden Ausdrucksformen hergeleitet; in jedem Fall wird sorgfältig untersucht, ob diese Bedingungen zur Definition der Function hinreichen, was zu auch in functionentheoretischer Beziehung interessanten Bemerkungen führt. Christoffels hervorragendste Leistung auf diesem Gebiet sind die beiden 1876 und 1877 erschienenen Abhandlungen: Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten (29) und über die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper (30). Der den beiden Abhandlungen zu Grund liegende Gedanke tritt schon in voller Klarheit in der sehr bemerkenswerthen Anzeige von Riemann's Abhandlung: „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite“ hervor.*) In der Abhandlung (29) geht Christoffel von den bekannten partiellen Differentialgleichungen für die Bewegung von Flüssigkeiten aus:

$$(D)\ \frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial y}=0,\ \frac{\partial w}{\partial t}+a^2\frac{\partial s}{\partial z}=0$$

*) Fortschritte der Physik Bd. 13, S. 123 (1859).

wo in üblicher Weise s die Condensation und u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit bedeuten.

Es wird vorausgesetzt, dass die Functionen s, u, v, w zur Zeit t zu beiden Seiten einer Unstetigkeitsfläche Σ verschiedene Werthe haben. Die plötzlichen Zunahmen, die sie erfahren, wenn man die Fläche Σ überschreitet, werden mit S, U, V, W bezeichnet. Im ganzen übrigen Raum sind die Functionen s, u, v, w sammt ihren Derivirten stetig. Der Geltungsbereich der Differentialgleichungen (D) reicht desshalb — das ist wesentlich zu bemerken — von beiden Seiten her bis an die Fläche Σ heran und erleidet nur an dieser Fläche eine Unterbrechung. Die Functionen U, V, W sind in Folge der mechanischen Bedingungen des Problems durch S bestimmt, für diese letztere Function aber ergiebt sich — allein aus den eingeführten Voraussetzungen — eine partielle Differentialgleichung. Daraus folgt dann weiter: Lage und Gestalt von Σ und die längs Σ stattfindenden Werthe von S sind für jeden Zeitpunkt bestimmt, sobald die Anfangslage von Σ und die Anfangswerthe von S gegeben sind. Um die Fortpflanzung des Stosses durch die Flüssigkeit zu ermitteln, bedarf es daher nicht der Integration der partiellen Differentialgleichungen (D). Es entspricht das durchaus der bekannten Thatsache, dass der Verlauf einer Welle, die in einer Flüssigkeit durch einen Stoss erregt wird., von dem Bewegungszustand der Flüssigkeit zur Zeit des Stosses im wesentlichen unabhängig ist.

Die Abhandlung (30) beruht auf demselben Grundgedanken.

Functionen, die Unstetigkeiten aufweisen, die mit dem Fortbestehen partieller Differentialgleichungen verträglich sind, waren schon früher vielfach benützt worden — ich erinnere an die in der Potentialtheorie gebrauchte Green'sche Function, an die in der Theorie der Wärmeleitung auftretende Function $\frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}$, ferner an die Sätze der Functionentheorie über die Unstetigkeiten, die einwerthige Functionen in isolirten Punkten darbieten können. Aber erst Christoffel hat das hier zu Grunde liegende Princip scharf formuliert und in seiner Bedeutung für die Integrationstheorie klar erkannt.

Von seinen Arbeiten auf invariantentheoretischem Gebiet hat Christoffel nur einen Bruchtheil veröffentlicht. Darunter steht an erster Stelle der 1881 erschienene Beweis (15) des für die Invariantentheorie fundamentalen Satzes: Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit zwei algebraische Formen einander äquivalent sind, lassen sich durch eine gewisse Anzahl Gleichungen der Form $\Pi(a) = \Pi(b)$ ausdrücken, wo $\Pi(a)$ eine rationale Function der Coefficienten der ersten Form, $\Pi(b)$ dieselbe Function der Coefficienten der zweiten Form bedeutet. Von der Bemerkung ausgehend, dass zwei Formen äquivalent sind, wenn sie zur selben dritten äquivalent sind, führt Christoffel den Beweis mit rein algebraischen Hilfsmitteln; diese gestatten auch, genau die Grenzen anzugeben innerhalb deren der Satz gilt. Dieser Satz hat Christoffel lange beschäftigt: schon 1868 veröffentlichte er einen Beweis desselben (11), den er aber später selbst als nicht einwandfrei anerkannt hat. Seine gleichzeitige Beschäftigung mit der Theorie der Transformation algebraischer Formen und mit der Flächentheorie führten Christoffel dazu, sich das Problem zu stellen, die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür anzugeben, dass eine quadratische Differentialform

$$\sum a_{\lambda\mu}\, dx_\lambda\, dx_\mu \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \cdots n$$

in die gegebene Form

$$\sum b_{\lambda\mu}\, dy_\lambda\, dy_\mu$$

transformirt werden kann. Er hat diese Aufgabe in der Abhandlung: Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (13), die durch eine unmitelbar darauf folgende Note (14) ergänzt wird, vollständig gelöst. Für die Theorie der quadratischen Differentialformen ist diese Arbeit von grundlegender Bedeutung.

Von den geometrischen Disciplinen erregte die Flächentheorie am meisten Christoffel's Interesse. Seine hervorragendste Arbeit auf diesem Gebiet ist seine „Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke“ (18). Während die früheren Untersuchungen über diesen Gegenstand stets von einer der beiden beschränkenden Voraussetzungen ausgingen, dass entweder das betrachtete Dreieck unendlich klein ist, oder dass die Fläche, der es angehört, sich nur wenig von einer Kugel unterscheidet, entwickelt Christoffel eine allgemeine Trigonometrie für beliebige krumme Oberflächen. Die ganze Theorie wird auf die Theorie einer einzigen Function von vier Variabeln zurückgeführt, die Christoffel als „reducirte Länge des geodätischen Bogens“ bezeichnet. Diese reducirte Länge tritt in anderer Form schon bei Gauss auf. Benützt man geodätische Polarcoordinaten, so stellt sich das Quadrat des Linienelements in der Form dar:

$$ds^2 = dp^2 + m^2 dq^2.\text{*)}$$

Die hier auftretende Grösse m ist das, was Christoffel reducirte Länge nennt, nur betrachtet er diese Grösse nicht nur als Function der Coordinaten des *einen* Endpunkts, sondern als Function der Coordinaten der *beiden* Endpunkte.

*) Disquisitiones generales circa superficies curvas art. XIX.

Im Vorangehenden sind die Arbeiten Christoffels angeführt, die wohl für die Weiterentwicklung der Wissenschaft am meisten in's Gewicht fallen. Interessant und anregend sind sie alle, sowohl durch die Originalität des Gedankengangs, als auch durch die wohldisponirte, prägnante Darstellung.

Wenn man Christoffel's unermüdliche Thätigkeit und seinen Ideenreichthum bedenkt, so erscheinen seine Schriften wenig umfangreich. Der Grund dafür ist wohl in dem hohen Maass von Selbstkritik zu suchen, das ihm eigen war. Er konnte Untersuchungen, die zu den schönsten Ergebnissen führten, Jahre lang zurückhalten, weil sie ihm noch nicht hinreichend ausgereift erschienen; er hat eine druckfertige Abhandlung invariantentheoretischen Inhalts im letzten Augenblick unterdrückt, weil sie doch nicht all den Ansprüchen, die er an sich selbst stellte, genügte. Mit den Jahren nahm diese Zurückhaltung naturgemäss zu, und so ist es gekommen, dass von 1880 an in seinen Publicationen eine lange, nur einmal unterbrochene, Pause eintrat. Erst als sein fortschreitendes Leiden ihn an die Ordnung seines Nachlasses denken liess, stellte er noch die beiden oben besprochenen Arbeiten fertig.

Der handschriftliche Nachlass Christoffels ist auf der Strassburger Universitäts-Bibliothek deponirt.

Zum Gedächtniss Elwin Bruno Christoffel's.

Von

WINDELBAND.*)

Die Kaiser-Wilhelms-Universität rüstet sich zu dem ernsten Gange, ein hervorragendes Mitglied ihres Lehrkörpers zur letzten Rast zu geleiten. Soweit es die Ferienzeit erlaubt, haben wir uns trauernd an dieser Stätte seiner Arbeit zusammengefunden: da der Rektor in amtlichem Auftrage verreist, der Prorektor durch Krankheit verhindert ist, so fällt es mir zu, die Gefühle zum Ausdruck zu bringen, mit denen wir, tief ergriffen, an der Bahre eines bedeutenden Mannes stehen.

Er gehörte zu uns seit langen Jahren; er war einer von den Gründern

*) Wir glauben unseren Lesern einen Dienst zu erweisen, wenn wir im Anschluss an den Nekrolog von C. F. Geiser und L. Maurer mit Erlaubniss des Redners die bei Christoffel's Bestattung am 17. März 1900 gehaltene Rede seines Collegen Windelband hier zum Abdruck bringen, die von der Persönlichkeit Christoffel's und seine Stellung an der Strassburger Universität ein vortreffliches Bild giebt.

der Universität, von ihren ersten, bestimmenden Lehrern. Damals, 1872, wo die Neubegründung der Strassburger Hochschule als ein monumentales Friedenswerk der Nation beschlossen wurde, wo die Ueberzeugung galt, dass dies Werk nur Sinn und Recht habe, wenn es im grossen Stil entworfen, ausgeführt und erhalten werde, und dass dafür an Einrichtungen und Lehrkräften das Beste nur gerade gut genug sei, — damals war unter den Männern, die für diese Aufgabe glücklich ausgewählt wurden — der berufensten einer Elwin Bruno Christoffel.

Er stand um jene Zeit, ein angehender Vierziger, in seiner ἀκμῇ, und er brachte in das neue Amt nicht nur die erprobte Kraft wissenschaftlicher Arbeit, sondern auch reich bewährte Lehrerfahrung mit. Ein Kind des Rheinlands, in Montjoie 1829 geboren und auf dem Gymnasium in Köln gebildet, hatte er in Berlin, hauptsächlich unter Dirichlet, die mathematischen Wissenschaften studirt. An derselben Universität 1856 promovirt und 1859 habilitirt, war er einem Rufe des Züricher Polytechnikums gefolgt, um nach sechsjähriger Wirksamkeit an die Berliner Gewerbeakademie überzusiedeln, die damals noch nicht mit der Bauakademie zur technischen Hochschule vereinigt war. Von dort kam er hierher, um mit unserm Kollegen Reye zusammen den mathematischen Unterricht an der neuen Universität zu begründen und fortzuführen.

Christoffel zählt zweifellos zu den angesehensten Mathematikern seiner Zeit — als solcher nicht nur bei uns, sondern weit über die Grenzen Deutschlands hinaus anerkannt. Als Gelehrter hat er mehr durch die Intensität als durch die Ausdehnung seiner Leistungen gewirkt: es sind nicht umfangreiche Werke, die er hinterlassen hat, wohl aber eine Reihe glänzender Abhandlungen von tief eindringender Forschung und schöpferischer Originalität. Es ist hier nicht der Ort und ich bin nicht der Mann dazu, ihre wissenschaftliche Bedeutung und ihre Stellung in der Entwicklung einer so schwierigen Disciplin, wie es die höhere Mathematik ist, zu würdigen: nur das sei erwähnt, dass seine Arbeit mit Vorliebe den schwersten Problemen galt, den letzten Principienfragen, insbesondere denjenigen, welche sich um den Unendlichkeitsbegriff gruppiren — und dass er dabei stets seine eigenen Wege ging, allem Schablonenhaften, allem Analogiewesen abhold, kühn sich neue Arbeitsfelder erschliessend und bedeutsame Ergebnisse ihnen abringend.

Und an dem, was er so geschaffen hatte, hing er mit seiner ganzen Seele, mit einer Art von elementarer Ueberzeugungsgewalt — bis zu schroffer Ablehnung jeden Einspruchs. Die Natur hatte ihn zu einem mächtigen und eigenkräftigen Organ des mathematischen Denkens gebildet: aber er war nicht gemacht zu gemeinsamer Arbeit. Einsam stand er auf sich selbst — einer von denen, die es dürfen, weil sie etwas sind, womit sie sich selbst genügen. Denn „Recht hat jeder eigene Charakter, der übereinstimmt mit sich selbst“.

Denselben Eindruck urwüchsiger, ja knorriger Eigenart hatte jeder, der persönlich mit ihm in Berührung kam. Seine kräftige Gestalt mit dem ausgeprägten Kopf und dem lebhaften Spiel der Gesichtszüge verriethen schnell, dass er nicht war wie andre Leute: er sagte nichts, was für jeden greifbar auf der Hand lag; allem wusste er eine eigne Seite, eine neue Wendung abzugewinnen. Und er interessirte sich für Vieles und kannte Vieles. Mit offnem Blick schaute er in die Wirklichkeit: bei aller Abgeschlossenheit seines Wesens fehlte ihm nicht die rheinische Freude an der Geselligkeit, und er suchte seinen Umgang gern in andern Lebenskreisen, namentlich auch in militärischen, zu denen ihn die Gesinnung altpreussischer Königstreue hinzog. Er war ein scharfer Beobachter, ein vortrefflicher Erzähler, ein immer gern gesehener Gesellschafter, der von seiner inneren Sicherheit her Welt und Leben mit Humor betrachtete — mit einem Humor, der wohl auch eine sarkastische Ader haben konnte. Dabei hatte er viel gelesen und ging auch darin seine eignen Wege; das Ungewöhnliche reizte ihn, *τὰ δεινὰ τῶν ἀνθρωπίνων*. Er las mit Vorliebe die alten Historiker der römischen Kaiserzeit: was damals sich zugetragen, sagte er, das könne an wilder Unwahrscheinlichkeit von keines Poëten Phantasie überboten werden. Der historische Sinn, die Freude an unwiederholbaren Individualitäten erwuchs ihm als eine erfrischende Ergänzung seiner arithmetischen Abstractionsarbeit aus der eignen selbstgewissen Individualität.

Natürlich machte sich diese Selbstbehauptung auch im Gegensatze geltend. Es war nicht leicht, wenn er einmal eine Ansicht gewonnen, ihn davon abzubringen, und er war nicht gewohnt, den Widerspruch zu meiden. So blieb er denn, soweit wir sehen, trotz der anregenden Lebendigkeit seines Wesens, trotz der gemüthvollen Wohlthätigkeit, die er in der Stille reichlich geübt hat, trotz der dankbaren Anhänglichkeit, mit der er treue Pflege erwiderte, zuletzt doch ein einsamer Mann.

Aber diese in sich gefestigte und fast scheu geschlossene Natur gerieth nun in fruchtbaren Fluss, in mitreissende Bewegung, wenn er lehrte. Auf dem Katheder erst war er ganz er selbst, lebte er sich völlig aus. Hier wirkte er mit unvergleichlicher Gewalt auf seine Schüler, die bewundernd und fesselnd an seinen Lippen hingen. Er zog sie empor in die Höhe seines Denkens, er erzog sie zu selbständiger Forschung, und auch da, wo er mit den Wegen, die sie dann einschlugen, nicht einverstanden war, blieben sie ihm in treuer Dankbarbeit ergeben.

Und das ist denn vor allem auch die Dankbarkeit, mit deren herzlichem Ausdruck unsere Universität von ihm Abschied nimmt. Er war einer ihrer grossen Lehrer, und sie wird ihm dies Gedächtniss bewahren für alle Zeit. Er war alles in allem ein echter Typus des theoretischen Menschen. Das Leben ging ihm auf in θεωρία. Der ganze Inhalt seiner Existenz war die Arbeit an der Erkenntniss. Er wollte nichts von der Welt als die Wissenschaft. Noch in den letzten Jahren, als seine schon angegriffene Gesundheit ihn veranlasste, sich von den Vorlesungen zurückzuziehen, hat er unermüdlich weitergearbeitet, und eine letzte Abhandlung von ihm, erst vor wenigen Wochen abgeschlossen, befindet sich eben noch unter der Presse.

So war, wenn ich ihn recht verstehe, in den für uns bedeutsamen Hauptzügen der Mann, den wir zu Grabe tragen sollen: ein einsamer Forscher, dem die Wahrheit alles gewesen ist, der rücksichtslos für sie einstand, der auch von uns heute nichts verlangen und erwarten würde als Wahrheit — ein gewaltiger Lehrer, der weiter leben wird in den Keimen geistiger Arbeit, die er gesät, — einer von denen, welche die Fackel der Erkenntniss weiter geben von Geschlecht zu Geschlecht, und bei deren Hinscheiden das Wort des Trostes gilt: „multi pertransibunt et augebitur scientia".

Abhandlungen von E. B. Christoffel.

I. Inaugural-Dissertation.

1. De motu permanenti electricitatis in corporibus homogeneis. Berlin 1856.

II. In Crelle's Journal.

2. Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. Bd. 55. 1858.
3. Ueber die lineare Abhängigkeit von Functionen einer einzigen Veränderlichen. Bd. 55. 1858.
4. Zur Abhandlung: „Ueber Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen", pag. 231 des vorigen Bandes. Bd. 58. 1861.
5. Verallgemeinerung einiger Theoreme des Herrn Weierstrass. Bd. 63. 1864.
6. Ueber die kleinen Schwingungen eines periodisch eingerichteten Systems materieller Punkte. Bd. 63. 1864.
7. Ueber die Bestimmung der Gestalt einer krummen Oberfläche durch locale Messungen auf derselben. Bd. 64. 1865.
8. Zur Theorie der einwerthigen Potentiale. Bd. 64. 1865.
9. Ueber den Einfluss von Realitäts- und Stetigkeits-Bedingungen auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Bd. 66. 1866.
10. Ueber einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen. Bd. 67. 1867.

11. Beweis des Fundamentalsatzes der Invariantentheorie. Bd. 68. 1868.
12. Theorie der bilinearen Functionen. Bd. 68. 1868.
13. Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. Bd. 70. 1869.
14. Ueber ein die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem. Bd. 70. 1869.

III. In den Mathematischen Annalen.

15. Bemerkungen zur Invariantentheorie. Bd. 19. 1882.
16. Ueber die Vollwerthigkeit und Stetigkeit analytischer Ausdrücke. Bd. 53. 1900.
17. Vollständige Theorie der ϑ-Function. Bd. 54. 1901.

IV. Berliner Akademie.

a) In den Abhandlungen:

18. Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. 1868.

b) In den Monatsberichten:

19. Über die Dispersion des Lichts. 1861.
20. Über die Transformation ganzer homogener Differentialausdrücke. 1869.

V. In den Göttinger Nachrichten.

21. Ueber die Abbildung einer einblättrigen, einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise. 1870.
22. Ueber die Abbildung einer n-blättrigen einfach zusammenhängenden, ebenen Fläche auf einem Kreise. 1870.
23. Ueber die Integration von zwei partiellen Differentialgleichungen. 1871.

VI. In der Vierteljahrsschrift der naturf. Ges. in Zürich.

24. Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's. Bd. 41. 1896.

VII. In den Annali di Matematica. Ser. II.

25. Sul problema delle temperature stazionarie e la rappresentazione di una data superficie. Bd. I. 1867.
26. Sopra un problema proposto da Dirichlet. Bd. IV. 1870.
27. Observatio arithmetica. Bd. VI. 1874.
28. Sur une classe particulière de fonctions entières et de fractions continues. Bd. VIII. 1877.
29. Untersuchungen über die mit dem Fortbestehen linearer partieller Differentialgleichungen verträglichen Unstetigkeiten. Bd. VIII. 1877.

30. Ueber die Fortpflanzung von Stössen durch elastische feste Körper. Bd. VIII. 1877.
31. Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale erster Gattung. Bd. IX. 1878.
32. Algebraischer Beweis des Satzes von der Anzahl der linear-unabhängigen Integrale erster Gattung. Bd. X. 1880.
33. Lehrsätze über arithmetische Eigenschaften der Irrationalzahlen. Bd. XV. 1887.

VIII. In Poggendorff's Annalen.

34. Ueber die Dispersion des Lichts. Bd. 117. 1862. (Vgl. Nr. 19.)
35. Ueber die Dispersion des Lichtes. Bd. 124. 1865.

IX. In den Fortschritten der Physik.

Eine Reihe von Referaten über eigene und fremde Arbeiten in den Bänden 15—17 (1861—1863) (darunter ein sehr bemerkenswerthes über Riemann's Abhandlung „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite").

Vollständige Theorie der Riemann'schen ϑ-Function.

Von

E. B. Christoffel †.

Einleitung.

Die vorliegende Darstellung der Lehre von der ϑ-Function geht nicht n üblichen Weg. In der Theorie, so wie sie bis jetzt ausgebildet vorgt, richtet sich die Untersuchung ausschliesslich auf die Summe der .cobi'schen Reihe mit den Moduln und Argumenten Riemann's; sie fert Lehrsätze über die Fälle, wo diese Summe identisch Null und wo : es nicht ist, und über ihr Verhalten im letztern Falle, ohne grundtzliche Scheidung der beiden Voraussetzungen, unter denen die ϑ-Function r Verwendung kommen kann.

Ein solches Bedürfniss macht sich sofort geltend wenn man, über die ırstellung der algebraischen Functionen und ihrer Integrale hinausgehend, e ϑ-Function benutzt, um die Existenz ausgezeichneter Functionen darthun*). Das erste Beispiel, welches in dieser Beziehung aufgestellt ›rden ist, zeigt klar, um was es sich hierbei handelt.

Man bilde mit Riemann**) einen Ausdruck von der Form

$$\tau = e^{\Sigma \alpha_\mu u_\mu} \frac{\vartheta((u_\mu - f_\mu))}{\vartheta((u_\mu - e_\mu))},$$

ıd bestimme den Nenner so, dass τ in p vorgeschriebenen Punkten $\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ zur ersten Ordnung unendlich wird, und hierauf die Constanten ı Exponenten von e und die Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$ des Zählers so, dass an den Querschnitten vorgeschriebene Einheitswurzeln ausscheidet.

Die Existenz einer solchen Function τ ist dann für diejenigen Fälle ›sichert, wo keiner der beiden Ausdrücke $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$, $\vartheta((u_\mu - f_\mu))$ identisch ull ist, was beim ersten von der Wahl seiner Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ abıngt, beim andern von den Werthen der durch die Aufgabe geforderten

---

*) Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, Borchardt's Journal 65, ite 172.

**) Riemann, Theorie der Abel'schen Functionen, art. 27, Borchardt's Journal 54.

Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$. Das sind zwei durchaus verschiedene Fragen; ihre Entscheidung gründet sich auf Kriterien, im einen Falle für die Lagerung der Nullpunkte, im andern für die Werthe der Parameter, und in beiden Fällen kommt es sehr darauf an ob die Kriterien, welche für die Prüfung beider Fragen geboten werden, diese Prüfung auch gestatten.

Ich ziehe daraus vor allen Dingen den Schluss, dass die Theorie der ϑ-Functionen, wofern ihr eine unbeschränkte Verwendbarkeit gesichert werden soll, nach zwei Richtungen ausgebildet werden muss, einmal indem man die Function durch ihre Nullpunkte, das anderemal, indem man sie durch ihre Parameter bestimmt denkt.

Für eine lückenfreie Ausführung der Theorie in diesem Sinne dürfte es noch nicht zu spät sein. Dass eine solche auch die bekannten Resultate liefern muss, versteht sich von selbst; ich finde aber auch Resultate, welche darüber hinausgehen, unter Anderm den folgenden Zusatz:

> Wird der Begriff einer ϑ-Function nicht an ihre Ausdrucksform geknüpft, sondern an ihre massgebenden Eigenschaften, nämlich ihr Verhalten an den Querschnitten und im Innern der einfach zusammenhängenden Fläche T', der sie zugeordnet ist, so existirt eine solche Function unter allen Umständen, wie auch immer ihre Nullpunkte oder ihre Parameter vorgeschrieben werden mögen.

Daraus folgt z. B., dass die oben beschriebene *algebraische* Function r unter allen Umständen existirt, auch wenn vermöge der Wahl ihrer Unstetigkeitspunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ oder der durch die Aufgabe geforderten Parameter $f_1 f_2 \cdots f_p$ der Riemann'sche Ausdruck für die betreffende ϑ-Function versagt, nämlich identisch Null wird.

Freilich wird man bei dieser Auffassung der Function ϑ sich nicht an eine bevorzugte Ausdrucksform für dieselbe binden dürfen. Soll sie durch die Normalintegrale $u_1 u_2 \cdots u_p$ ausgedrückt werden, was in allen Fällen möglich ist, so wechselt in der That ihr Ausdruck durch eine unendliche Reihe je nach der Lagerung ihrer Nullpunkte oder der Wahl ihrer Parameter; verzichtet man aber darauf, sie in Function von $u_1 u_2 \cdots u_p$ auszudrücken, so kann man, wie das Alles im Folgenden ausgeführt werden werden wird, sie auch durch einen Ausdruck darstellen, welcher in allen Fällen dieselbe Form behält.

Dies führt zu unserm Ausgangspunkte zurück. Zum Zweck von Existenzbeweisen kann man über die ϑ-Function in dieser freilich nicht durch eine bevorzugte Ausdrucksform beschränkten Auffassung verfügen; für die wirkliche Darstellung algebraischer Functionen und ihrer Integrale dagegen verwende ich ausschliesslich die Riemann'sche Reihe, da diese Darstellung die einzige ist, in welche keine überflüssigen Irrationalitäten und namentlilch nur einerlei Irrationalitäten, nämlich die Werthe der Normalintegrale I. G. (nebst Differenzen derselben, den Periodicitätsmoduln) eingehen.

Nach dem Gesagten, wird eine kurze Uebersicht genügen, um den Gang meiner Untersuchungen darzulegen. Die Arbeit zerfällt in fünf Abschnitte.

Nach einer Vorbemerkung über die Convergenz der ϑ-Reihe so wie über die Stetigkeit und die Vollwerthigkeit ihrer Summe wird im I. Abschnitte der Fall vorgesehen, dass die Summe der Riemann'schen Reihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ vermöge der Wahl der Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ identisch Null ist, und für diesen Fall ein Ausdruck $\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu))$ nachgewiesen, welcher, ohne identisch zu verschwinden, eine ϑ-Function mit diesen Parametern darstellt. Dieser Ausdruck ist aber durch die Parameter nicht völlig bestimmt, da er ausser diesen noch andere verfügbare Constanten enthält. Im angegebenen Falle, wo $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ identisch Null ist, gibt es also für die nämlichen Parameter mehr als eine ϑ-Function, und es tritt nun die Frage auf, ob der Ausdruck ϑ_ϱ alle ϑ-Functionen mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ umfasst. Dies muss fürs Erste dahingestellt bleiben, aber der Nachweis dass die Function für jedes Parametersystem existirt, ist damit bereits geleistet.

In Folge dessen gewinnen die bekannten Sätze über die Anzahl der Nullpunkte und ihre Beziehung zu den Parametern bezüglich der letztern ganz unbeschränkte Gültigkeit, ebenso der, sonst nur mit anderweitigen Hülfsmitteln vollständig zu begründende Satz von der Möglichkeit, durch geeignete Wahl von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ die p Summen

$$u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

einem beliebigen Werthesysteme $v_1 v_2 \cdots v_p$ (im Sinne Riemanns) congruent zu machen.

Mit diesen Sätzen beginnt der II. Abschnitt, und dann wird mittelst der Nullpunkte irgend einer besondern, durch ihre Parameter gegebenen ϑ (oder ϑ_ϱ) ein Ausdruck

$$\log \vartheta = \log C + P(0|\varepsilon_1) + P(0|\varepsilon_2) + \cdots + P(0|\varepsilon_p) - L(0)$$

(oder $\vartheta = C r(\varepsilon_1) r(\varepsilon_2) \cdots r(\varepsilon_p)$; vergl. die Note zu Nr. 8) für dieselbe hergeleitet, von welchem sich sofort herausstellt, dass er für jede beliebige Lagerung der Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eine ϑ-Function darstellt.

Damit ist der Nachweis vollendet, dass die ϑ-Function, charakterisirt durch ihr Verhalten in der einfach zusammenhängenden Fläche T' und an den Querschnitten, stets existirt, mögen ihr die Parameter oder die Nullpunkte vorgeschrieben werden, und wie auch immer das geschehen mag.

Nur bezüglich der Ausdrucksformen für den ersten von diesen beiden

Fällen ist noch eine Lücke auszufüllen, da die Frage, ob die Reihenausdrücke ϑ, ϑ_ϱ alle ϑ-Functionen umfassen, im I. Abschnitte nicht erledigt werden konnte.

Dies geschieht im III. Abschnitte. Als Ausdruck einer ϑ-Function findet sich die Riemann'sche Reihe ϑ, und wenn diese versagt, stets eine Secundärreihe ϑ_ϱ. Letztere tritt ein, wenn unter den p Nullpunkten $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_\mu$ sich ϱ nothwendige befinden, in welchem Falle ich $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ in erweitertem Sinne ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten*) nenne. Das führt sofort zu einer *Schaar von ϑ-Functionen, welche alle die gleichen Parameter haben, also an den Querschnitten alle die gleichen Factoren ausscheiden.* Jede Function dieser Schaar hat zu Nullpunkten ein mit $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ corresiduales System $o_1\,o_2\cdots o_p$, darunter also jedesmal ϱ nothwendige Punkte $o_1\,o_2\cdots o_\varrho$. Diese können nach Belieben vorgeschrieben werden; durch sie und die Parameter der Schaar ist der Ausdruck der besondern Function ϑ_ϱ bestimmt, welche in diesen ϱ nothwendigen und den übrigen $p-\varrho$ durch sie bestimmten Punkten des zu $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ corresidualen Systems Null wird.

Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine Vervollständigung des Satzes aus Abschnitt II, Nr. 6, über die Erzeugung von p Parametern $v_1\,v_2\cdots v_p$ durch die Simultanwerthe der Normalintegrale II. G. in p geeigneten Punkten.

Der IV. Abschnitt weist die analytische Bedingung dafür nach, dass $u_1\,u_2\cdots u_p$ Simultanwerthe sind; sie ist nichts anderes, als die bekannte Gleichung Riemann's

$$\vartheta\left(\!\left(-\sum_{k=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_k)+K_\mu\right)\!\right)=0,$$

von welcher zu Anfange des III. Abschnittes zwei einwandfreie Beweise gegeben werden.

Der V. Abschnitt beginnt mit der directen Auswerthung der Riemann'schen Constanten $K_1\,K_2\cdots K_p$ für die ultraelliptischen Functionen aller Genera $p>1$, und entwickelt im Anschlusse hieran die allgemeinen Hülfsmittel zur Bestimmung dieser Constanten, welche wir durch Herrn Prym kennen gelernt haben, vervollständigt durch gehörige Berücksichtigung der Punktsysteme I. G. und die Secundärreihen ϑ_ϱ. —

---

*) Vergl. unten die Note zu Nr. 10. Der Begriff des Punktsystems I. G. im engern Sinne habe ich in meiner Abhandlung Ueber die canonische Form der Riemann'schen Integrale I. G. auseinandergesetzt. Brioschi's Ann. di Matematica 9, zu Anfang der Nr. 3.

Die Darstellung, welche Riemann selbst von seinen Entdeckungen gegeben hat, enthält Lücken; dieselben sind auch von anderer Seite bemerkt und, für die Theorie der Riemann'schen Reihe selbst, ausgefüllt worden*).

Dazu kommt ein anderer Punkt, den ich für wesentlicher halte. Man mag an die Lehre vom Verschwinden der ϑ-Function herantreten, von welcher Seite man will, überall greifen in dieselbe Bedingungen hinein, welche sich auf gewisse Lagerungen der Punkte beziehen, die an Stelle von Parametern eingeführt werden. Das betrifft in allen Fällen die Punktsysteme I. G., d. h. die Gruppen der Null- oder der Unstetigkeitspunkte der Functionen I. G. $\frac{dw_1}{dw_2}$, welche den eigentlichen Gegensatz zwischen den hier allein zu berücksichtigenden Fällen $p \gtreqless 2$ und den beiden Elementarfällen $p = 0$ und $p = 1$ begründen. Die einschlägigen Sätze über diese Punktsysteme, d. h. über die Gleichungen ersten Grades welche bewirken, dass der allgemeine Integrand I. G. in einem solchen System von Punkten verschwinde, ergeben sich mit der grössten Leichtigkeit, wenn man sie an der rechten Stelle (Abel'sches Theorem, Riemann-Roch'scher Satz) aufsucht und sie auf ihren *algebraischen* Inhalt beschränkt. Statt sie aus der Lehre von der ϑ-Function zu schöpfen, sind sie ihr zu Grunde zu legen, und liefern dann die Schlüssel für die merkwürdigen Erscheinungen, welche der Reihenausdruck dieser Function darbietet.

Die Theorie der Riemann'schen ϑ-Reihe allein wird mit diesen Hülfsmitteln sehr einfach: die Nummern 1, 2, 5 und 10—16 enthalten alle wesentlichen Punkte derselben. Ich habe mich nicht entschliessen können, meine Darstellung mit dieser, auf die ϑ-Reihe beschränkten Theorie zu beginnen, und dann erst die Untersuchungen folgen zu lassen, welche ich darüber hinaus für nöthig gehalten habe; die vorangehende Uebersicht lässt den Grund für die gewählte Anordnung deutlich erkennen.

Es ist hier am Orte, zwei Bezeichnungen vorauszuschicken, deren ich mich bediene und die ich für zweckmässig halte. Die eine betrifft die quadratische Form im Exponenten der allgemeinen Glieder der ϑ-Reihe; ich schreibe da

$$\sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu = \Phi(m_1 \mid m_2 \mid \cdots \mid m_p) = \Phi((m)).$$

Die andere betrifft die Simultanperioden der Normalintegrale I. G. $u_1\, u_2 \cdots u_p$. Ich schreibe

*) Carl Neumann, Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen. Leipzig 1883.

$$
\begin{aligned}
g_1\pi i + a_{11} h_1 + a_{12} h_2 + \cdots + a_{1p} h_p &= (gh)_1, \\
g_2\pi i + a_{21} h_1 + a_{22} h_2 + \cdots + a_{2p} h_p &= (gh)_2, \\
\text{—} \qquad \text{—} \qquad \text{—} & \\
g_\mu\pi i + a_{\mu 1} h_1 + a_{\mu 2} h_2 + \cdots + a_{\mu p} h_p &= (gh)_\mu, \\
\text{—} \qquad \text{—} \qquad \text{—} & \\
g_p\pi i + a_{p1} h_1 + a_{p2} h_2 + \cdots + a_{pp} h_p &= (gh)_p,
\end{aligned}
$$

so dass $(gh)_1, (gh)_2, \cdots (gh)_p$ für ganzzahlige Werthe von $g_1 g_2 \cdots g_p\, h_1 h_2 \cdots h_p$ die allgemeinen Ausdrücke für die Simultanperioden von $u_1 u_2 \cdots u_p$ sind.

Die übrigen Bezeichnungen Riemann's bezüglich der Fläche T und ihrer Querschnitte, sowie der verschiedenen Integralfunctionen werde ich ungeändert beibehalten.

Ich schliesse diese Einleitung mit einer Vorbemerkung über

Die Convergenz der Jacobi'schen ϑ-Reihe mit den Moduln Riemann's und die Stetigkeit und die Vollwerthigkeit ihrer Summe.

Den Ausdruck der p-fach unendlichen Jacobi'schen Reihe mit den Argumenten $w_1 w_2 \cdots w_p$ schreibe ich wie folgt

$$\vartheta = \sum c^{\Phi((m)) + 2\Sigma m w},$$

wo $\Sigma m w = m_1 w_1 + m_2 w_2 + \cdots + m_p w_p$ ist, und $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ die Riemann'schen Moduln sind. Die Summationen nach $m_1 m_2 \cdots m_p$ gehen, jede für sich, durch alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$.

Um die zu ϑ gehörige Modulreihe zu bilden, trennen wir im Exponenten des allgemeinen Gliedes das Reelle vom Imaginären:

$$w_\mu = u_\mu + i v_\mu \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \cdots p$$

und, wenn $x_1 x_2 \cdots x_p$ auf reelle Werthe beschränkt werden:

$$\Phi((x)) = -\varphi((x)) - i\psi((x)).$$

Dann lautet die verlangte Modulreihe:

$$\Theta = \sum e^{-\varphi((m)) + 2\Sigma m u},$$

und wo sie convergirt, ist bekanntlich die ursprüngliche Reihe nicht bloss convergent, sondern ihre Summe überdies unabhängig von der Anordnung der Summationen. —

Bezüglich der reellen quadratischen Form $\varphi((x))$ beweist Riemann den Satz dass (bei reellen Argumenten) φ eine vollständige positive Form ist, d. h. so lange sie nicht verschwindet, bleibt sie positiv, und sie wird $=0$ nur in dem Falle, wo alle Argumente zugleich verschwinden.

Solange die Summe der Quadrate dieser letztern, also die $\Sigma x^2 = 1$ bleibt, kann demnach φ nicht auf Null rücken. Ist α die untere Grenze für φ, oder eine kleinere positive Zahl, so bleibt $\varphi((x)) > \alpha$. Nimmt man nun $x_\mu = \frac{m_\mu}{r}$ für $\mu = 1, 2, \cdots p$ und $r^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_p^2$, so folgt $\varphi\left(\left(\frac{m}{r}\right)\right) > \alpha$, und durch Multiplication mit r^2:

$$\varphi((m)) > \alpha \sum m^2 \quad \text{und} \quad \alpha > 0$$

für jede beliebige Gruppe reeller Zahlen $m_1 m_2 \cdots m_p$, also

$$e^{-\varphi((m))} < e^{-\alpha \Sigma m^2},$$

endlich

$$\Theta < \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(m_1^2+m_2^2+\cdots+m_p^2)+2(m_1 u_1+m_2 u_2+\cdots+m_p u_p)}.$$

Dies ist das Product aus p Reihen der Form

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha m^2+2mu};$$

diese Reihe convergirt, solange u nicht unendlich wird. Um dies auszuschliessen, beschränke ich u auf endliche Grenzen $\pm\,\omega$, dann sei

$$\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha m^2+2mu} = f(u) \quad \text{für} \quad -\omega < u < \omega,$$

während ω positiv ist und von beliebiger Grösse sein kann, wofern es nur ohne Unbestimmtheit angegeben wird. Es folgt

$$\Theta < f(u_1)\, f(u_2) \cdots f(u_p)$$

wofern

$$-\omega_1 < u_1 < \omega_1, \; -\omega_2 < u_2 < \omega_2, \cdots -\omega_p < u_p < \omega_p$$

ist. Wir haben also das Resultat:

> Die Jacobi'sche Reihe
>
> $$\vartheta = \sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m w}$$
>
> mit den Riemann'schen Moduln $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ convergirt und ihre Summe ist von der Anordnung der Summationen unabhängig, solange die Argumente $w_1 w_2 \cdots w_p$ $(w_\mu = u_\mu + i v_\mu)$ einem durch die Ungleichheiten
>
> $$-\omega_1 < u_1 < \omega_1, \; -\omega_2 < u_2 < \omega_2, \cdots -\omega_p < u_p < \omega_p$$
>
> bestimmten Grössengebiete E angehören.

Diesen Convergenzbeweis habe ich im Sommer 1890 in einer Vorlesung über die ultraelliptischen Functionen (aller Genera $p > 2$) vorgetragen: um die nämliche Zeit (ich glaube etwas später) erschien die elegante

Arbeit des Herrn Krazer über die Transformationen der allgemeinen ϑ-Reihe, in welcher (gleich zu Anfange) als Grundlage zu einem einfachen Convergenzbeweise das aus dem Riemann'schen Satze ebenfalls leicht folgende Princip mitgetheilt wurde, dass die quadratische Form (bei reellen Argumenten) unter allen Umständen unendlich wird, sobald nicht alle Argumente bei endlichen Werthen bleiben. Wie der Beweis sich gestaltet, wird nicht ausgeführt, mit dem obigen kann er nicht identisch sein. —

Setzen wir

$$e^{2w_1} = \zeta_1,\ e^{2w_2} = \zeta_2, \cdots e^{2w_p} = \zeta_p,$$

so verwandelt ϑ sich in eine p-fache Potenzreihe

$$\vartheta = \sum e^{\Phi((m))} \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \cdots \zeta_p^{m_p}$$

mit dem Convergenzgebiete

$$\text{E.} \quad e^{-2w_1} < \text{Mod. } \zeta_1 < e^{2w_1}, \cdots e^{-2w_p} < \text{Mod. } \zeta_p < e^{2w_p}.$$

Nach der Lehre von den Potenzreihen ist daher ϑ innerhalb E stetige Function von $\zeta_1 \zeta_2 \cdots \zeta_p$, und das Gleiche gilt von jedem endlichen Ausdrucke

$$A = \sum_{-q_1}^{r_1} \sum_{-q_2}^{r_2} \cdots \sum_{-q_p}^{r_p} c^{\Phi((m))} \zeta_1^{m_1} \zeta_2^{m_2} \cdots \zeta_p^{m_p}.$$

Die Stetigkeit wird aber hierbei so verstanden, dass z. B. A innerhalb E stetige Function von ζ_1 heisst, wenn in jedem Theile ΔE von E die Maximalschwankung an A (sein grösster Schwankungsmodul) unter jede beliebig kleine vorzuschreibende Grenze ε gebracht werden kann, indem man die Maximalschwankung von ζ_1 unter eine, aus ε zu berechnende Grenze bringt, wofern diese letztere Grenze nicht unendlich klein gefordert ist.

In diesem Sinne ist dann weiter $\zeta_1 = e^{2w_1}$ als Summe einer Potenzreihe stetige Function von w_1, mithin auch A stetige Function von w_1.

Der Beweis springt in die Augen: Schwindet die Mschw. von A zugleich mit der Mschw. von ζ_1, und diese zugleich mit derjenigen von w_1, so schwindet die Mschw. von A und zugleich mit der Mschw. von w_1.

Es folgt:

Innerhalb E sind ϑ und sämmtliche Ausdrücke A stetige Functionen von w_1, von $w_2, \cdots$ und von w_p,

wofern die Stetigkeit so verstanden wird, wie soeben auseinandergesetzt wurde.

Und nun folgt aus den Sätzen meiner Abhandlung über Stetigkeit und Vollwerthigkeit analytischer Ausdrücke (Ann. Bd. 53, S. 465) dass ϑ innerhalb E vollwerthige Function von $w_1 w_2 \cdots w_p$ ist.

D. h. Zu jedem Argumentensystem $w_1 w_2 \cdots w_p$ innerhalb E gehört ein völlig bestimmter Werth von ϑ, den man durch einen ausführbaren Anfang der Rechnung mit beliebiger Genauigkeit gewinnen kann, gleichviel ob man die Argumente $w_1 \cdots w_p$ durch Annäherungen einführt oder, wenn ihr arithmetischer Charakter das zulässt, sie direct einsetzt. Innerhalb E wird durch eine einwandfreie Buchstabenrechnung mit dem Ausdrucke der ϑ-Reihe der Charakter des Ergebnisses als eine Werthbestimmung auf keiner Stufe aufgehoben oder in anfechtbarer Weise abgeändert, mit andern Worten, innerhalb E rechnet man mit den Argumenten von ϑ wie mit vollendeten Zahlen.

I.

Die ϑ-Function, bestimmt durch ihre Parameter; die primäre Reihe und die Secundärreihen.

1. Ich knüpfe an Riemann's Abhandlung über die Theorie der Abel'schen Functionen an. Durch z bezeichne ich die unabhängige Variable, durch s die grundlegende Irrationalität der Classe, durch T die aus n z-Ebenen zusammengesetzte Fläche, welcher s eindeutig und zugleich der Stetigkeit gemäss zugeordnet ist; durch $c_\lambda a_\lambda b_\lambda$ $(\lambda = 1\ 2 \cdots p)$ bezeichne ich die p Querschnittbündel, durch welche die Fläche in eine einfach-zusammenhängende T' verwandelt wird, durch $u_1 u_2 \cdots u_p$ die hierzu gehörigen Normalintegrale I. G.

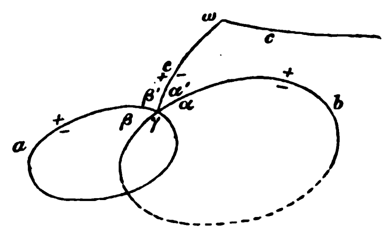


Fig. 1.

Die Schnittpaare $a_\lambda \cdot b_\lambda$ $(\lambda = 1 \cdots p)$ werden zuerst angelegt, und die Ränder so als $\overset{+}{a}\ \overset{-}{a}$, $\overset{+}{b}\ \overset{-}{b}$ bezeichnet, dass ein positiver Umlauf um die Fläche von $\overset{+}{a}$ auf $\overset{+}{b}$, und von $\overset{-}{a}$ auf $\overset{-}{b}$ hinüber führt. Zu diesen Schnittpaaren führen dann noch die Schnitte c_λ $(\lambda = 1 \cdots p)$ aus einem beliebigen Punkte ω nach einer beliebigen Stelle, wofür wir wie üblich die von $\overset{+}{a}_\lambda \overset{+}{b}_\lambda$ gebildete Ecke nehmen. Dort bilden sich also fünf Ecken $\alpha' \beta \gamma \alpha \beta'$ so, dass ein positiver Umlauf um T' dort dem Wege

$$(\overset{-}{c})\, \alpha'\, (\overset{+}{b})\, \beta\, (\overset{-}{a})\, \gamma\, (\overset{-}{b})\, \alpha\, (\overset{+}{a})\, \beta'\, (\overset{+}{c})$$

folgt.

Auf diese Fläche beschränkt sind dann die Integrale $u_1 u_2 \cdots u_p$ eindeutig und stetig, und es ist

$$\text{an } a_\lambda\!: \ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = \binom{\lambda}{\mu} \pi i; \quad \text{an } b_\lambda\!: \ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = a_{\lambda\mu}; \quad \text{an } c_\lambda\!: \ \overset{+}{u}_\mu - \overset{-}{u}_\mu = 0.$$

Sodann ist

$$\vartheta(v_1|v_2|\cdots|v_p)=\vartheta((v_\mu))=\sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu},$$

wo nach jedem m über alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu summiren ist. Ersetzt man hier jedes v_μ durch $v_\mu+g_\mu\pi i$, wo g_μ, und jedes m_λ durch $m_\lambda+h_\lambda$, wo jedes h_λ ganze Zahl ist, so ändert das die Summe der Reihe nicht, und giebt die Formel

$$e^{\Phi((h))+2\Sigma h_\mu v_\mu}\,\vartheta((v_\mu+(gh)_\mu))=\vartheta((v_\mu)),$$

wo die in der Einleitung erläuterten Bezeichnungen beide benutzt sind.

2. Durch o bezeichne ich den veränderlichen Punkt z, s in der Fläche T, und durch $u_\mu(o)$ den Werth des auf die Fläche T' beschränkten μ^{ten} Normalintegrals I. G. in diesem Punkte. Mit Hinzuziehung von p Parametern $e_1 e_2\cdots e_p$ wird die unendliche Reihe

$$\vartheta((u_\mu(o)\cdots e_\mu))=\sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu(u_\mu(o)-e_\mu)}$$

gebildet; ist ihre Summe nicht Null für alle Lagen des Punktes o, so stellt diese Reihe eine Function ϑ von z dar, welche die folgenden Eigenschaften hat:

(1) ϑ ist in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig:

$$\begin{array}{llll}
(2) \text{ an } a_\lambda \text{ ist:} & \overset{+}{u}_\mu=\overset{-}{u}_\mu+\binom{\lambda}{\mu}\pi i & \text{also} & \overset{+}{\vartheta}=\overset{-}{\vartheta},\\
\quad\;\, ,,\; b_\lambda\; ,,\;: & \overset{+}{u}_\mu=\overset{-}{u}_\mu+a_{\lambda\mu} & ,, & \overset{+}{\vartheta}=\overset{-}{\vartheta}\cdot e^{-a_{\mu\lambda}-2\bar{u}_\lambda+2e_\lambda},\\
\quad\;\, ,,\; c_\lambda\; ,,\;: & \overset{+}{u}_\mu=\overset{-}{u}_\mu & ,, & \overset{+}{\vartheta}=\overset{-}{\vartheta}.
\end{array}$$

3. Zum Ausgangspunkte nehme ich mit Riemann*) den Satz, dass es unter allen Umständen Parameter $f_1, f_2\cdots f_p$ giebt, bei denen $\vartheta_1=\vartheta(u_\mu-f_\mu)$ nicht identisch Null ist und in Folge dessen, falls $\vartheta_0=\vartheta((u_\mu-e_\mu))$ vermöge der Wahl seiner Parameter $e_1e_2\cdots e_p$ identisch Null ist, seine partiellen Derivirten von einer endlichen, durch die Parameter völlig bestimmten Ordnung an, nicht alle identisch Null sind.

Dabei gelten als partielle Derivirten von ϑ_0 die Werthe der partiellen Derivirten von $\vartheta((v_\mu))$ für $v_1=u_1-e_1,\ v_2=u_2-e_2,\cdots, v_p=u_p-e_p$.

Der erste Theil des Satzes folgt daraus, dass in der Entwicklung von ϑ_1 nach Potenzen von $e^{f_1}, e^{f_2},\cdots, e^{f_p}$ nicht alle Coefficienten $=0$ sind, der zweite daraus, dass in Folge dessen auch in der Entwicklung

*) Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 2. Crelle's Journal 65.

von ϑ_1 nach Potenzen von $e_1 - f_1, e_2 - f_2, \cdots, e_p - f_p$ die Coefficienten, nämlich die partiellen Derivirten von ϑ_0, nicht alle $= 0$ sein können.

Um dies weiter zu verfolgen, bilde man die neuen Parameter

$$e_1' = e_1 - \zeta x_1, \quad e_2' = e_2 - \zeta x_2, \cdots, e_p' = e_p - \zeta x_p$$

für

$$x_1 = e_1 - f_1, \quad x_2 = e_2 - f_2, \quad \cdots, x_p = e_p - f_p,$$

und den Ausdruck

$$\vartheta' = \vartheta((u_\mu - e_\mu')) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m(u-e)} \cdot e^{2\zeta \sum_\mu m_\mu x_\mu}.$$

Die Form dieses Ausdruckes zeigt, dass ϑ' als Function von ζ einwerthig und, so lange ζ endlich bleibt, auch stetig ist. Sie ist nicht identisch Null, da sie für $\zeta = 1$, also ohne Unstetigkeit in ϑ_1 übergeht. Aber für $\zeta = 0$ wird auch $\vartheta' = 0$, abermals ohne Unstetigkeit, also zu endlicher Ordnung, welche r heissen möge.

In der Entwicklung von ϑ' nach Potenzen von ζ:

$$\vartheta' = A_0 + 2\zeta \cdot A_1 + \frac{(2\zeta)^2}{1 \cdot 2} A_2 + \cdots,$$

wo

$$A_\varkappa = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m(u-e)} [m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_p x_p]^\varkappa$$

ist, fehlt das Anfangsglied $A_0 = \vartheta_0$ nach Voraussetzung. Ausserdem sind $A_1, A_2, \cdots, A_{r-1}$ gleich Null, *wenigstens bei den vorstehenden Werthen von* $x_1 x_2 \cdots x_p$, aber A_r ist nicht $= 0$. Daraus folgt zunächst, dass die partiellen Derivirten r^{ter} Ordnung von ϑ_0 nicht alle $= 0$ sind. Ist ferner $n < r$, also $A_n = 0$, so folgt nicht, dass die partiellen Derivirten n^{ter} Ordnung alle $= 0$ sind; denn wenn sie es nicht alle sind, so kann A_n gleichwohl vermöge der Werthe von $x_1 x_2 \cdots x_p$ gleich Null sein. Aber eins ist sicher, dass es eine Ordnung $\leqq r$ gibt, bis zu welcher alle partiellen Derivirten $= 0$ sind, während die Derivation dieser Ordnung selbst es nicht oder doch nicht alle sind.

Sei

$$\varrho$$

die niedrigste Ordnung, für welche nicht alle partiellen Derivirten von ϑ_0 verschwinden, so dass, falls $\varrho > 1$ ist, alle partiellen Derivirten von der ersten bis zur $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$, aber nicht alle von der ϱ^{ten} Ordnung gleich Null sind, und letzteres auch gilt, wenn $\varrho = 1$ ist. Es ist sicher gestellt, dass ϱ, welches durch die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ bestimmt ist, einen endlichen Werth hat, d. h. in keinem Falle unendlich gross vorausgesetzt werden darf.

Jetzt bilde man ϑ' für *willkürliche* Werthe von $x_1 x_2 \cdots x_p$; in seiner Entwicklung sind $A_0 A_1 \cdots A_{\varrho-1}$ alle $= 0$, aber A_ϱ ist es nicht, es bleibt

$$\vartheta' = \frac{(2\zeta)^\varrho}{\varrho!} A_\varrho + \frac{(2\zeta)^{\varrho+1}}{(\varrho+1)!} A_{\varrho+1} + \cdots.$$

Ordnet man A_ϱ nach Potenzen von $x_1 x_2 \cdots x_p$, so sind, worauf von hier an zu achten ist, die Coefficienten bis auf den fehlenden Factor 2^ϱ die partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von ϑ_0, und sie sind nicht alle $= 0$.

Wir untersuchen sie als Functionen von z. Der Reihenausdruck von A_ϱ (oben $A_\varkappa$) zeigt, dass A_ϱ als Function von z der Fläche T' eindeutig zugeordnet und in ihr von jeder Unstetigkeit frei ist. Sodann ist

$$\text{an } a_\lambda\text{: } \overset{+}{\vartheta'} = \overset{-}{\vartheta'}; \quad \text{an } b_\lambda\text{: } \overset{+}{\vartheta'} = \overset{-}{\vartheta'} \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}; \quad \text{an } c_\lambda\text{: } \overset{+}{\vartheta'} = \overset{-}{\vartheta'};$$

ausserdem für $\zeta = 0$:

$$\lim \frac{\varrho!\, \vartheta'}{(2\zeta)^\varrho} = A_\varrho, \quad \text{und} \quad \lim e_\lambda' = e_\lambda.$$

also ist

$$\text{an } a_\lambda\text{: } \overset{+}{A_\varrho} = \overset{-}{A_\varrho}; \quad \text{an } b_\lambda\text{: } \overset{+}{A_\varrho} = \overset{-}{A_\varrho} \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}; \quad \text{an } c_\lambda\text{: } \overset{+}{A_\varrho} = \overset{-}{A_\varrho},$$

d. h., wenn man dies mit Nr. 2 vergleicht, A_ϱ hat für alle Werthe von $x_1 x_2 \cdots x_p$ die charakteristischen Eigenschaften einer ϑ-Function mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$, also gilt das von allen partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von ϑ_0, soweit sie nicht identisch Null sind. Das ist zunächst der folgende Lehrsatz:

I. Versteht man unter einer, der Fläche T zugeordneten ϑ-Function nicht ausschliesslich die Summe der Riemann'schen Reihe, sondern, *mit Ausschluss identisch verschwindender Ausdrücke*, jede Function ϑ von z, welche

A. in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig ist, und

B. an a_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$; an b_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta} \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}$; an c_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$

giebt, und nennt dies eine ϑ-Function mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$, so existirt eine solche Function stets, wie auch ihre Parameter vorgeschrieben werden mögen.

4. Diese Eigenschaften behält A_ϱ auch, wenn die Producte aus Potenzen von $x_1 x_2 \cdots x_p$, mit denen im Ausdrucke von A_ϱ die Derivirten von ϑ_0 multiplicirt sind, durch willkürliche Constanten ersetzt werden. Dann tritt in der Reihenentwicklung von A_ϱ an die Stelle der Potenz

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_p x_p)^\varrho$$

eine ganze homogene Function ϱ^{ter} Ordnung von $m_1 m_2 \cdots m_p$, deren Coefficienten nach z constant sind, und welche

$$G_\varrho(m_1 | m_2 | \cdots | m_p) = G_\varrho((m))$$

heissen möge. An die Stelle von A_ϱ tritt der Ausdruck

$$\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu)) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m(u-e)}\, G_\varrho((m));$$

ich nenne ihn eine *Secundärreihe* ϱ^{ter} *Ordnung*, und im Gegensatze dazu $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ *die Primärreihe.* Das giebt den folgenden Satz:

II. Giebt es Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$, für welche die Summe der Primärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ als Function von z identisch Null ist, so bestimmt ein solches Parametersystem eine Ordnung ϱ in der Weise, dass die partiellen Derivirten ϱ^{ter} Ordnung von $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nicht alle identisch Null sind, wohl aber, wenn $\varrho > 1$ ist, alle partiellen Derivirten der vorangehenden Ordnungen es sind. In diesem Falle kann man die Homogenform ϱ^{ter} Ordnung $G_\varrho((m))$ so wählen, dass die Summe der Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung:

$$\vartheta_\varrho((u_\mu - e_\mu)) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m(u-e)}\, G_\varrho((m))$$

als Function von z nicht identisch verschwindet, und dann ist ϑ_ϱ eine ϑ-Function mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$.

Es muss zunächst dahingestellt bleiben, ob auch umgekehrt jede ϑ-function mit solchen Parametern sich durch eine Secundärreihe ausdrücken lässt, wozu vor allen Dingen der Nachweis gehört, dass der hier vorgesehene Fall, wo ϑ_0 identisch Null ist, wirklich vorkommt. Dass die unter dieser Voraussetzung nachgewiesenen Ausdrucksformen ϑ, ϑ_ϱ für alle Fälle ausreichen, wird sich in der Folge durch die wirkliche Bestimmung von G_ϱ aus vorgeschriebenen Bedingungen ergeben. Dabei stellt sich dann auch die wahre Bedeutung der Ordnung ϱ heraus, nebst einem ausführbaren Kriterium zur Ermittelung dieser Zahl, wofür die directe Untersuchung von ϑ_0 und seinen partiellen Derivirten nicht gelten kann.

Es erübrigt an dieser Stelle nur noch, zwei Eigenschaften der Secundärreihen einzuschalten, von denen die eine für beliebige Argumente $v_1 v_2 \cdots v_p$, die andere nur für die speciellen Werthe $u_1 - e_1,\ u_2 - e_2,\ \cdots,\ u_p - e_p$ derselben gilt.

Haben $e_1' e_2' \cdots e_p'$ dieselbe Bedeutung wie in den vorangehenden Nummern, so ist

$$\vartheta((u_\mu - e_\mu' + (gh)_\mu)) = \vartheta((u_\mu - e_\mu'))\, e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u_\mu - e_\mu')}.$$

Schreibt man nun $A_\varrho((u_\mu - e_\mu))$ an Stelle von A_ϱ, so giebt dies, mit $\frac{\varrho!}{(2\zeta)^\varrho}$ multiplicirt, für $\zeta = 0$:

$$A_\varrho((u_\mu - e_\mu + (gh)_\mu)) = A_\varrho((u_\mu - e_\mu)) \cdot e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u - e_\mu)},$$

also, wenn man hier $(m_1 x_1 + \cdots + m_p x_p)^\varrho$ als symbolische Form für $G_\varrho((m))$ benutzt:

(a) $$\vartheta_\varrho ((u_\mu - e_\mu + (gh)_\mu)) = \vartheta_\varrho ((u_\mu - e_\mu))\, e^{-\Phi((h)) - 2\Sigma h_\mu (u - e_\mu)},$$

genau wie bei der Primärreihe für beliebige Argumente v_μ an Stelle von $u_\mu - e_\mu$. Da ferner die Summe der Reihe

$$\vartheta_\varkappa ((v_\mu)) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m v} G_\varkappa ((m))$$

sich nicht ändert, wenn jedes m durch $-m$ ersetzt wird, so folgt:

(b) $$(-1)^\varkappa \vartheta_\varkappa ((-v_\mu)) = \vartheta_\varkappa ((v_\mu)).$$

II.

Die ϑ-Function, bestimmt durch ihre Nullpunkte.

5. Nun habe ϑ, welches auch sein Ausdruck sein möge, die im Lehrsatze I, Nr. 3 zusammengestellten Eigenschaften. Da ϑ in der Fläche T' von jeder Unstetigkeit frei ist, so kann es, wenn es überhaupt verschwindet, nur zu endlichen Ordnungen Null werden. In Folge dessen ist die Summe der Ordnungen, zu denen ϑ in der Fläche T' Null wird, das positiv um T' erstreckte Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T')} d \log \vartheta$, was sich wie bekannt $= p$ findet.

III. Die Anzahl der vereinigt oder getrennt liegenden Punkte von T', in denen die Function ϑ zur ersten Ordnung Null wird, ist p.

Seien $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ diese Punkte. Wir bilden das Integral $P = \int u_\mu(o)\, d \log \vartheta$ und beschränken, um einen eindeutigen Integranden zu erhalten, die Veränderlichkeit von z auf die Fläche T'. In dieser Fläche hat dann P nur logarithmische Unstetigkeiten, sie finden statt in den Nullpunkten von ϑ und ihre Gewichte sind die Werthe von u_μ in diesen Punkten. Die Summe dieser Gewichte ist also

$$u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(T')} u_\mu \, d \log \vartheta.$$

Nun folgt aus Lehrs. I. B, wenn alle g, h ganze Zahlen sind*):

---

*) Der Periodicitätsmodul des $\lg \vartheta$ an c_λ setzt voraus, dass die Ränder von c_λ so als $\overset{-}{c}$, $\overset{+}{c}$ bezeichnet sind, dass bei einem positiven Umlauf um T' der Weg von $\overset{-}{c}_\lambda$ aus zunächst über die vier Ränder von a_λ, b_λ führt und sich dann auf $\overset{+}{c}_\lambda$ fortsetzt. Dann ist an c_λ der Periodicitätsmodul, da $\lg \vartheta$ gleich

$$\int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (d \lg \overset{+}{\vartheta} - d \lg \overset{-}{\vartheta}) + \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (d \lg \overset{-}{\vartheta} - d \lg \overset{+}{\vartheta}) = 2\pi i,$$

gleichviel in welcher Ecke von a_λ, b_λ der Schnitt c_λ mündet.

$$\begin{aligned}
&\text{an } a_\lambda\text{:}\ \lg\overset{+}{\vartheta}-\lg\overset{-}{\vartheta}=2h_\lambda\pi i, && d\lg\overset{+}{\vartheta}-d\lg\overset{-}{\vartheta}=0,\\
&\text{,, } b_\lambda\text{:}\ \lg\overset{+}{\vartheta}-\lg\overset{-}{\vartheta}=-2g_\lambda\pi i-a_{\lambda\lambda}-2\overset{-}{u}_\lambda+2e_\lambda; && d\lg\overset{+}{\vartheta}-d\lg\overset{-}{\vartheta}=-2du_\lambda,\\
&\text{,, } c_\lambda\text{:}\ \lg\overset{+}{\vartheta}-\lg\overset{-}{\vartheta}=2\pi i, && d\lg\overset{+}{\vartheta}-d\lg\overset{-}{\vartheta}=0.
\end{aligned}$$

Die Rechnung wird am besten so ausgeführt, dass man überall $\overset{-}{u}_\mu$ durch $\overset{+}{u}_\mu$ und den Periodicitätsmodul ersetzt, und die Integrationen $(\lambda=\mu)$, welche sich ausführen lassen, auch bewerkstelligt. Dann ergiebt sich

$$\sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa)=e_\mu-(gh)_\mu+\frac{1}{2}[\pi i+a_{\mu\mu}]+\frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda\lessgtr\mu}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{-}{u}_\mu\,du_\lambda,$$

also der Satz:

IV. Zwischen den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$ der Function ϑ und ihren Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ bestehen die p Relationen

$$\text{C.}\qquad e_\mu=\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa)-K_\mu+(gh)_\mu \qquad (\mu=1\,2\cdots p),$$

wo 1) $K_1 K_2 \cdots K_p$ die Riemann'schen Constanten

$$\text{D.}\qquad K_\mu=\frac{1}{2}[\pi i+a_{\mu\mu}]+\frac{1}{\pi i}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{u}_\mu\,du_\lambda$$

bedeuten, und 2) die $2p$ ganzen Zahlen g, h dadurch gegeben sind, dass

$$\begin{aligned}
\text{E.}\quad &\text{an } a_\lambda\text{:}\ \log\overset{+}{\vartheta}-\log\overset{-}{\vartheta}=2h_\lambda\pi i,\\
&\text{,, } b_\lambda\text{:}\ \log\overset{+}{\vartheta}-\log\overset{-}{\vartheta}=-2g_\lambda\pi i-a_{\lambda\lambda}-2\overset{-}{u}_\lambda+2e_\lambda
\end{aligned}$$

ist.

6. Eine ϑ-Function mit den, für die vorstehenden Sätze erforderlichen Eigenschaften A. B. Lehrs. I. existirt aber stets, wenigstens in einer der Ausdrucksformen ϑ, ϑ_ϱ, wie auch immer die p Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ vorgeschrieben werden mögen.

Folglich lässt sich jedes Parametersystem $e_1 e_2 \cdots e_p$ in die vorstehende Form C. bringen.

Setzt man aber $e_\mu+K_\mu=v_\mu$, für $\mu=1\,2\cdots p$, so sind $v_1 v_2 \cdots v_p$ ebenso willkürlich, wie $e_1 e_2 \cdots e_p$, die man aus ihnen berechnen kann; es folgt:

V. Durch geeignete Wahl von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ in der Fläche T' und den Simultanperioden $(gh)_1, (gh)_2, \cdots, (gh)_p$ können die p Ausdrücke

$$\sum_1^p u_1(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_1; \quad \sum_1^p u_2(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_2; \cdots \sum_1^p u_p(\varepsilon_\varkappa) + (gh)_p$$

jedes beliebige Werthesystem

$$v_1 v_2 \cdots v_p$$

hervorbringen.

Eine Vervollständigung dieses Satzes wird sich weiter unten ergeben (Abschnitt III, Nr. 20).

7. Das Vorstehende gilt unabhängig von jeder Voraussetzung über die Ausdrucksform, durch welche die hier benutzte Function ϑ darzustellen ist. Wir führen zur Vereinfachung an ihrer Stelle eine andere ϑ-Function ein, welche für den Augenblick durch Θ bezeichnet werden möge, und zwar so dass

$$\lg \Theta = \lg \vartheta - 2 \sum_\mu h_\mu u_\mu + \text{const.}$$

wird. Das ändert nur die Querschnittseigenschaften, es wird nämlich

$$\text{an } a\colon \; \log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = 0,$$

$$\text{„ } b\colon \; \log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = -2 g_\lambda \pi i - a_{\lambda\lambda} - 2 \overset{-}{u}_\lambda + 2 e_\lambda - 2 \sum_\mu h_\mu a_{\lambda\mu},$$

während

$$\text{„ } c\colon \; \log \overset{+}{\Theta} - \log \overset{-}{\Theta} = 2\pi i$$

bleibt. Führt man aus C. den Werth von e_λ ein, so wird das, was in der zweiten Formel rechts steht,

$$= -a_{\lambda\lambda} - 2\overset{-}{u}_\lambda + 2\left[\sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa) - K_\lambda\right],$$

so dass die auf die neue Function Θ bezüglichen Formeln aus denen des IV. Satzes erhalten werden, wenn man dort die ganzen Zahlen g, h unterdrückt.

Ist insbesondere die hier benutzte Function ϑ durch die Primär- oder eine Secundärreihe ϑ gegeben, also, für $v_\mu = u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu$,

$$\vartheta = \vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \vartheta(\!(v_\mu - (gh)_\mu)\!),$$

so folgt aus a. Nr. 4

$$\vartheta = e^{-\Phi((h))+2\sum h_\mu v_\mu}\, \vartheta((v_\mu)),$$

also

$$\log \vartheta((v_\mu)) = \log \vartheta - 2 \sum h_\mu u_\mu + \text{const.},$$

mithin ist dann Θ die Primär- oder Secundärreihe $\vartheta((v_\mu))$, d. h.

$$\Theta = \vartheta((u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu)).$$

8. War also ϑ ursprünglich durch die Primär- oder eine Secundärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ gegeben, so tritt jetzt an seine Stelle der vereinfachte Ausdruck

$$\vartheta = \vartheta((u_\mu - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\mu) + K_\mu)),$$

und es ist

$$\begin{aligned}
&\text{an } a_\lambda: && \log \overset{+}{\vartheta} - \log \overset{-}{\vartheta} = 0, \\
&\quad\text{„ } b_\lambda: && \log \overset{+}{\vartheta} - \log \overset{-}{\vartheta} = -a_{\lambda\lambda} - 2[\overset{-}{u_\lambda} - \sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa) + K_\lambda], \\
&\quad\text{„ } c_\lambda: && \log \overset{+}{\vartheta} - \log \overset{-}{\vartheta} = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Hier sind an Stelle der Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ der Function ihre Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eingeführt, aber es darf nicht ausser Acht gelassen werden dass, während jene ganz nach Belieben vorausgesetzt werden dürfen, Bestimmungen ähnlicher Art über die Lagerung der letztern noch ausstehen. Aber das was hier vorliegt, reicht aus zur Herleitung eines Ausdrucks, welcher zunächst die vorstehende Function, dann aber für beliebig vorzuschreibende Lagen der p Nullpunkte eine ϑ-Function darstellt. Ist im Nullpunkte $\varepsilon_\varkappa$ der vorstehenden ϑ-Function $z = \zeta_\varkappa$, so ist dort $\log \vartheta = \log(z - \zeta_\varkappa) +$ funct. cont., und es sind $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ die einzigen Punkte der Fläche T', in denen $\log \vartheta = \infty$ wird.

Diese nämliche Unstetigkeit für einen beliebigen Punkt ε, und ausser ihr nur noch solche, die von der Lage des Punktes ε unabhängig sind, besitzt die von mir eingeführte Integralfunction $R(o|\varepsilon)$*), welche folgende Eigenschaften hat: Ist ζ der Werth von z im Punkte ε, und sind $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$ die unendlich fernen Punkte (Gebiete) der n-blättrigen Fläche T, so ist

*) Vergl. Brioschi, Annali di Mat. X, Seite 97 u. f., wo ich zwei Ausdrücke für $R(\varepsilon) = -R(0|\varepsilon)$ mitgetheilt habe.

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\text{in } \varepsilon: && R = \log(z-\zeta) + \text{funct. cont.},\\ &\text{in } \infty_1\,\infty_2\cdots\infty_n: && R = \frac{1}{n}\log z + \text{funct. cont.}\\ &&& = \frac{1}{n}\log(z-\zeta) + \text{funct. cont.}, \end{aligned}$$

und das sind die einzigen Punkte, in denen $R = \infty$ wird.

2) Um R eindeutig zu machen, zieht man in T' aus einem beliebigen Punkte Ω Schnitte $l\,l_1\cdots l_n$ nach $\varepsilon\,\infty_1\cdots\infty_n$. In der so modificirten Fläche T'' ist R eindeutig und stetig; werden bei jedem Schnitte l die Ränder so als $\overset{+}{l}$ und $\overset{-}{l}$ bezeichnet, dass ein positiver Umlauf um den Endpunkt vom —Rande zum +Rande führt, so ist

$$\begin{array}{c|ccccc} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda & l & l_1\,l_2\cdots l_n, \\ \overset{+}{R}-\overset{-}{R} & \mathfrak{A}_\lambda & \mathfrak{B}_\lambda & o & 2\pi i & -\frac{2\pi i}{n}, \end{array}$$

wo $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ constante Periodicitätsmoduln sind, zwischen denen die p Relationen

$$\mathfrak{B}_\mu = \frac{1}{\pi i}\sum_\lambda \mathfrak{A}_\lambda\, a_{\lambda\mu} + 2u_\mu(\varepsilon) - \frac{2}{n}\sum_{\varkappa=1}^{n} u_\mu(\infty_\varkappa)$$

bestehen.

Nun seien $o_1\,o_2\cdots o_n$ die n Punkte der Fläche T, die zum Argumente z gehören. Aus den Unstetigkeiten von R findet sich, dass die einwerthige Function von z:

$$\frac{d}{dz}\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa\,|\,\varepsilon) = \frac{1}{z-\zeta}$$

ist, also ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa\,|\,\varepsilon) = \log(z-\zeta) + C,$$

und C constant, so lange es stetig ist.

Für unsern Zweck ist ein genaues Verständniss dieser Formel unerlässlich. Während in der Fläche T, jedesmal dem gehörigen Blatte entlang, aber nicht durch alle n Blätter zugleich, die Schnitte c, a, b, $l\,l_1\cdots l_n$ geführt werden, führe man die gleichen Schnitte noch aus in einer einfachen z-Ebene, der Hülfsebene H. Die Fläche T verwandelt sich in eine (zweifach) zusammenhängende Fläche T'', H dagegen zerfällt in Stücken, und in jedem dieser Stücke hat C überall denselben Werth, aber beim Uebergange aus einem Stücke in ein anderes ändert C seinen Werth um den Periodicitätsmodul des Ausdruckes

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} R(o_\varkappa\,|\,\varepsilon) - \log(z-\zeta) = C.$$

Nun enthält R sowie jedes Normalintegral I. G. u_μ noch eine additive, verfügbare Constante, und es handelt sich um eine geeignete Wahl dieser Constanten.

Die Schnitte $l_1 l_2 \cdots l_n$, welche für alle Functionen R die gleichen sind, führe man so, dass sie von hinreichender Ferne an bis in's Unendliche einander bedecken. Von dort an ergiebt das in der Hülfsebene H nur noch einen einzigen Schnitt, und an diesem ist C stetig, da beim Uebergange über denselben alle $R(o_x \mid \varepsilon) = \frac{1}{n} \log(z - \zeta) +$ funct. cont. sich um gleichviel vermehren, und die Vermehrung des Subtrahenden $\log(z-\zeta)$ n-mal so gross ist.

Bei dieser Wahl der Schnitte $l_1 l_2 \cdots l_n$ hat also C in den fernen Gebieten von H überall den gleichen Werth, und nun wähle ich (bei gehöriger Deutung in $\log(z-\zeta)$) *die additive Constante von R so, dass dort $C = 0$ wird.* Dann folgt *für diesen Theil* der Hülfsebene H:

$$\sum_{x=1}^{n} R(o_x \mid \varepsilon) = \log(z - \zeta),$$

also für $z = \infty$

$$\lim \left[\sum_{x=1}^{n} R(o_x \mid \varepsilon) - \log z\right] = 0. \tag{1}$$

Ebenso wähle ich für jedes Normalintegral I. G. u_μ die additive Constante so, dass

$$\sum_{x=1}^{n} u_\mu(\infty_x) = 0, \qquad (\mu = 1\, 2 \cdots p) \tag{2}$$

wird, was

$$2u_x(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_{x=1}^{p} \mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon)\, a_{\lambda\mu}$$

giebt. Sodann führe ich statt R das Normalintegral P ein:

$$P(o \mid \varepsilon) = R(o \mid \varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_\mu \mathfrak{A}_\mu \cdot u_\mu(o); \tag{3}$$

es folgt

α) P wird unendlich nur in $\varepsilon, \infty_1\, \infty_2 \cdots \infty_n$ und zwar ist:

$$\text{in } \varepsilon\text{:} \quad P = \log(z - \zeta) + \text{funct. cont.};$$

$$\text{in } \infty_1\, \infty_2 \cdots \infty_n \text{ ist:} \quad P = \frac{1}{n} \log z + \text{funct. cont.}$$

β) In der Fläche T'' ist P eindeutig und stetig, aber es ist

$$\begin{array}{c|ccccc} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda & l & l_1 l_2 \cdots l_n, \\ \overset{+}{P} - \overset{-}{P} & o & 2u_\lambda(\varepsilon) & o & 2\pi i & -\frac{2\pi i}{n}. \end{array}$$

γ) Für $z = \infty$ wird

$$\lim\left[\sum_1^n P(o_\varkappa|\varepsilon) - \log z\right] = 0.$$

Hieraus folgt, dass das Integral III. Gattung

$$\Pi(o) = P(o|o_1) - P(o|o_2) \tag{4}$$

im Unendlichen stetig bleibt und die

$$\sum_{\varkappa=1}^n \Pi(\infty_\varkappa) = 0 \tag{5}$$

ist. —

Dies vorausgeschickt, bilde ich die Function

$$L(o) = \sum_{\varkappa=1}^p P(o|\varepsilon_\varkappa) - \log\vartheta; \tag{6}$$

es folgt

1) L wird unendlich nur in $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$, und zwar ist dort

$$L = \frac{p}{n}\log z + \text{funct. cont.}$$

2) Um L eindeutig zu machen, betrachte man es als das Integral des in T' eindeutigen Ausdruckes $\frac{dL}{dz}$; man hat dann T' nur in eine einfach zusammenhängende Fläche T_1' zu verwandeln, in welcher die fortgesetzte Umkreisung derjenigen Punkte gesperrt ist, in denen das Integral, nämlich L selbst, eine logarithmische Unstetigkeit besitzt. Das wird erreicht, indem man die nach $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$ führenden und zuletzt einander bedeckenden Schnitte $l_1 l_2 \cdots l_n$ statt in einem beliebigen Punkte Ω, von hier an im Ausgangspunkte ω der p Querschnittbündel c, a, b beginnen lässt.

3) In dieser Fläche T_1' ist also $L(o)$ eindeutig und stetig, und da

an	a_λ	b_λ	c_λ	$l_1 l_2 \cdots l_n$
$\overset{+}{P}(o\|\varepsilon_\varkappa) - \overline{P}$	0	$2u_\lambda(\varepsilon_\varkappa)$	0	$-\frac{1}{n}\cdot 2\pi i$
$\log\overset{+}{\vartheta} - \log\overline{\vartheta}$	0	$-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda - 2K_\lambda + 2\sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\varkappa)$	$2\pi i$	0

ist, so ist an den gleichen Schnitten

$\overset{+}{L} - \overline{L}$	0	$a_{\lambda\lambda} + 2\bar{u}_\lambda + 2K_\lambda$	$-2\pi i$	$-\frac{p}{n}2\pi i.$

Um hiervon sofort Anwendung zu machen, sei ϑ_1 irgend eine andere ϑ-Function mit den Nullpunkten $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ und $L_1 = \Sigma P(o|\delta_\varkappa) - \log\vartheta_1$:

die Differenz $L_1 - L$ ist der Fläche T selbst eindeutig zugeordnet und nie unstetig, also eine Constante. *Folglich ist die Function L selbst bis auf eine additive Constante für jede Lagerung der Nullpunkte von ϑ, also für alle ϑ-Functionen dieselbe.*

Berechnet man daher für p *beliebig angenommene Punkte* $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eine Function Θ aus der Formel $L(o) = \Sigma P(o|\varepsilon_\varkappa) - \log \Theta$, so erweist Θ sich als eine der Fläche T zugeordnete ϑ-Function mit den Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$; eine solche Function existirt also stets, wie auch ihre Nullpunkte vorgeschrieben werden mögen.

Das reicht für den Beweis dieses wichtigen Satzes aus; wir ziehen es vor, den Ausdruck der Function L in eine solche Form zu bringen, dass die entscheidende Eigenschaft, von der Lagerung der Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, genauer von der ihrem ursprünglichen Ausdrucke (6) zu Grunde liegenden Function ϑ nur in einer additiven Constante abzuhängen, an ihm selber sichtbar wird.

Sei $\Pi = \Pi(o)$ das obige Integral III. G. und z_1, z_2 seien die Werthe von z in seinen Unstetigkeitspunkten o_1, o_2, ferner sei

$$P = \int L(o)\, d\Pi,$$

wo wir z auf die Fläche T_1' beschränken, um einen eindeutigen Integranden zu erhalten. Innerhalb dieser Fläche wird $P = \infty$ nur in o_1 und o_2, und zwar ist

$$\text{in } o_1\text{: } \lim (z - z_1) \frac{dP}{dz} = L(o_1), \quad \text{in } o_2\text{: } \lim (z - z_2) \frac{dP}{dz} = -L(o_2);$$

also sind die Unstetigkeiten von P in diesen Punkten logarithmische mit den Gewichten $L(o_1)$ und $-L(o_2)$. Es folgt

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(T_1')} L\, d\Pi.$$

Bezeichnet man durch $(a_\lambda), (b_\lambda), \cdots$ die Beiträge, welche die einzelnen Schnitte liefern, so dass die auszuführende Formel lautet:

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \sum [(a_\lambda) + (b_\lambda) + (c_\lambda)] + \sum (l_\varkappa) \right\},$$

und beachtet man, dass $\frac{d\Pi}{dz}$ wie T verzweigt, also an jedem Schnitte $\overset{+}{d\Pi} = \overset{-}{d\Pi} = d\Pi$ ist, so ergiebt sich

$$\alpha) \qquad (a_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{+}{L} - \overset{-}{L})\, d\Pi = 0,$$

$$\beta) \qquad (b_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{-}{L} - \overset{+}{L})\, d\Pi = \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda (-a_{\lambda\lambda} - 2K_\lambda - 2\overset{-}{u}_\lambda)\, d\Pi.$$

Aber an a_λ ist $\overset{+}{\Pi} - \overset{-}{\Pi} = 0$, also $\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda d\Pi = 0$, es bleibt:

$$(b_\lambda) = -2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{-}{u}_\lambda\, d\Pi = -2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda [d(\overset{-}{u}_\lambda \overset{+}{\Pi}) - \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda],$$

d. i.

$$(b)_\lambda = -2[u_\lambda(\alpha_\lambda)\,\Pi(\alpha_\lambda') - u_\lambda(\gamma_\lambda)\,\Pi(\beta_\lambda)] + 2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda.$$

Nun ist $\Pi(\beta_\lambda) = \Pi(\alpha_\lambda')$, $u_\lambda(\alpha_\lambda) - u_\lambda(\gamma_\lambda) = \pi i$, also

$$u_\lambda(\alpha_\lambda)\,\Pi(\alpha_\lambda') - u_\lambda(\gamma_\lambda)\,\Pi(\beta_\lambda) = [u_\lambda(\alpha_\lambda) - u_\lambda(\gamma_\lambda)]\,\Pi(\alpha_\lambda') = \pi i\,\Pi(\alpha_\lambda'),$$

und so folgt

$$(b_\lambda) = 2\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda - 2\pi i\,\Pi(\alpha_\lambda').$$

γ)
$$(c_\lambda) = \int \left|\begin{matrix}\alpha'\\ c\\ \omega\end{matrix}\right|_\lambda (\overset{-}{L} - \overset{+}{L})\, d\Pi = 2\pi i[\Pi(\alpha_\lambda') - \Pi(\omega)].$$

Das giebt für's Erste

$$\sum [(a_\lambda) + (b_\lambda) + (c_\lambda)] = 2\sum \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda - p\cdot 2\pi i\,\Pi(\omega).$$

Dazu kommt

δ)
$$(l_\varkappa) = \int \left|\begin{matrix}\infty\\ l\\ \omega\end{matrix}\right|_\varkappa (\overset{+}{L} - \overset{-}{L})\, d\Pi = -\frac{p}{n}\cdot 2\pi i[\Pi(\infty_\varkappa) - \Pi(\omega)].$$

Nun ist

(5)
$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \Pi(\infty_\varkappa) = 0,$$

also folgt

$$\sum (l_\varkappa) = p\cdot 2\pi i\,\Pi(\omega).$$

Führt man die Werthe beider Summen in die auszuführende Formel ein, so hebt $\Pi(\omega)$ sich weg, und es bleibt

$$L(o_1) - L(o_2) = \frac{1}{\pi i}\sum \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \overset{+}{\Pi}\, du_\lambda.$$

Hier wird für Π sein Ausdruck $P(o\,|\,o_1) - P(o\,|\,o_2)$ aus (4) eingesetzt; ist dann, für einen Augenblick,

$$L(o) - \frac{1}{\pi i}\sum \int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda P(\overset{+}{\omega}\,|\,o)\, du_\lambda(\omega) = \Delta(o),$$

so haben wir $\Delta(o_1) = \Delta(o_2)$, also hat die Function $\Delta(o)$ in der Fläche T_1' überall denselben Werth. Bezeichnet man diesen durch $-\log C$, so ist C eine Constante. Jetzt giebt die Formel (6)

$$\log\vartheta = \sum_{\varkappa=1}^{p} P(o\,|\,\varepsilon_\varkappa) + \log C - \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda P(\overset{+}{\omega}\,|\,o)\,du_\lambda(\omega);$$

ich schreibe, mit etwas geänderter Bezeichnung:

$$L(o) = \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda=1}^{p}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda P(\overset{+}{\omega}\,|\,o)\,du_\lambda(\omega), \tag{7}$$

und erhalte den Satz

(8) Diese Function von z wird unendlich nur in $\infty_1\,\infty_2 \cdots \infty_n$, jedesmal ist

$$L = \frac{p}{n}\log z + \text{funct. cont.}$$

In der einfach zusammenhängenden Fläche T_1' ist sie eindeutig und stetig, und es ist

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda & l_1\, l_2 \cdots l_n \\ \overset{+}{L} - \overset{-}{L} & o & a_{\lambda\lambda} + 2\overset{-}{u}_\lambda + 2K_\lambda & -2\pi i & -\frac{p}{n}\cdot 2\pi i \end{array}.$$

Weiter folgt, zunächst für die vorgelegte ϑ-Function und die *aus ihrem Ausdrucke zu ermittelnden Nullpunkte* $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ *derselben:*

$$\vartheta = C e^{\Sigma P(o\,|\,\varepsilon_\varkappa) - L(o)}; \tag{9}$$

aber nun erkennt man auf den ersten Blick aus den Eigenschaften der Function P und der, mit Hülfe der speciellen Nullpunkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ gewonnenen, aber von ihnen ganz unabhängigen Function L*), dass der vorstehende Ausdruck (9) *für alle Lagerungen der Punkte* $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ die charakteristischen Eigenschaften der ϑ-Function hat, nämlich

1) dass ϑ in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig ist, und nur in $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ verschwindet, jedesmal zur ersten Ordnung;

*) Setzt man $\log r = P(o\,|\,\varepsilon) - \frac{1}{p}[L(o) + L(\varepsilon)]$, so ist r als Function von z in der einfach zusammenhängenden Fläche T' eindeutig und stetig, ausserhalb ε von Null verschieden und in ε Null zur ersten Ordnung. Dies ist die Function, welche vermöge ihrer ausgezeichneten Querschnittseigenschaften den Uebergang zwischen den algebraischen Functionen der Classe und den ϑ-Functionen *wirklich* vermittelt. Vergl. auch Riemann's Th. d. A. F. Artikel 3.

2) dass

$$\begin{array}{c||c|c|c} \text{an} & a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \\ \log\overset{+}{\vartheta} - \log\overset{-}{\vartheta} & o & -a_{\lambda\lambda} - 2[\overline{u}_\lambda - \sum_1^p u_\lambda(\varepsilon_\lambda) + K_\lambda] & 2\pi i \end{array}$$

also

3) an a_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$; an b_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta} \cdot e^{-a_{\lambda\lambda} - 2\bar{u}_\lambda + 2e_\lambda}$; an c_λ: $\overset{+}{\vartheta} = \overset{-}{\vartheta}$

ist, für

$$e_\lambda = \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\lambda(e_\varkappa) - K_\lambda.$$

Damit ist folgender Satz bewiesen:

VI. Die Riemann'sche ϑ-Function existirt stets, wie auch ihre p Nullpunkte vorgeschrieben werden mögen, und sie ist durch diese bis auf einen constanten Factor bestimmt. Sind es die Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, so kann man die ϑ-Function stets durch den Ausdruck

$$\vartheta = Ce^{P(o|\varepsilon_1) + P(o|\varepsilon_2) + \cdots + P(o|\varepsilon_p) - L(o)}$$

darstellen, wo C von z unabhängig ist, und dann ist, für $\mu = 1 \cdot 2 \cdots p$

$$e_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\lambda) - K_\mu$$

der μ^{te} Parameter dieser Function.

9. Fassen wir dies mit dem Lehrsatze I der Nr. 3 zusammen, so haben wir den

1. Fundamentalsatz.

VII. Die Riemann'sche ϑ-Function existirt stets, sei es dass ihr die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ oder die Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ vorgeschrieben werden, und wie das auch immer geschehen mag. Zwischen jenen und diesen besteht unter allen Umständen die Beziehung, dass für $\mu = 1\, 2 \cdots p$

$$e_\mu = u_\mu(\varepsilon_1) + u_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + u_\mu(\varepsilon_p) - K_\mu + (gh)_\mu$$

ist, wo alle g, h ganze Zahlen, und $K_1 K_2 \cdots K_p$ die Riemann'schen Constanten sind.

Von hier an handelt es sich nur noch um geeignete Ausdrucksformen für die ϑ-Function. Sie ergeben sich durch die Ausscheidung derjenigen Fälle, wo die Summe der primären Reihe identisch Null ist und den vollständigen Nachweis derjenigen Reihenausdrücke (Secundärreihen), welche dann an ihre Stelle treten.

III.

Die Reihenentwicklungen der ϑ-Function.

10. Die nun folgende Untersuchung bezieht sich zunächst auf Ausdrücke von der Form:

$$\vartheta(o\,|\,\varepsilon) = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) - \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_x) + K_\mu\right)\!\right),$$

unter ϑ die Primärreihe, also die Riemann'sche Reihe selbst verstanden. Aus dem Vorangehenden geht fürs Erste nur hervor, dass es Parameter, also auch Punktgruppen $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ giebt, für welche dieser Ausdruck als Function von z nicht identisch Null ist, und für diesen Fall kennen wir den Ausdruck jedes Parameters $\Sigma u_\mu(\varepsilon_x) - K_\mu$ durch die p Nullpunkte der Function. Der Fall, wo dieser Ausdruck identisch Null ist, ist im I. Abschnitte vorgesehen worden; dass er wirklich vorkommt, muss noch bewiesen werden.

Hülfssatz. Bilden die p Punkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ kein Punktsystem I. G.*), so ist der Ausdruck $\vartheta(o\,|\,\varepsilon)$ entweder identisch Null, oder $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ sind seine Nullpunkte.

Ist nämlich ϑ nicht identisch Null, und sind dann $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_p$ seine Nullpunkte, so ist der μ^{te} Parameter $= \Sigma u_\mu(\delta_x) - K_\mu + (gh)_\mu$, also ist für $\mu = 1, 2, \cdots p$

$$\sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_x) = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\delta_x) + (gh)_\mu\,.$$

Wären $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_p$ andere Punkte als $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, so wären beides Punktsysteme I. G., was bei $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ausgeschlossen wurde. Also sind letztere, falls ϑ nicht identisch Null ist, die Nullpunkte von ϑ. Lässt man o mit ε_q zusammenfallen, so folgt in beiden Fällen

$$(1) \qquad \vartheta\left(\!\left(-\sum_{k=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_x) + K_\mu\right)\!\right) = 0\,.$$

Das ist unter der Voraussetzung bewiesen, dass $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ mit ε_p zusammen kein Punktsystem I. G. bilden; es reicht aus, zu fordern, dass

*) Man bilde die q Gleichungen welche bewirken, dass der allgemeine Integrand I. G. in q Punkten $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_q$ zur Ordnung Eins verschwindet. Diese Punkte heissen im Folgenden ein Punktsystem I. G., wenn unter diesen q Gleichungen sich 1) überzählige befinden und 2) die Anzahl der wesentlichen $\overline{\overline{<}}\, p - 1$ ist. Jene entsprechen den „nothwendigen", diese den „wesentlichen" Punkten des Systems.

sie für sich allein kein solches bilden sollen. Denn wenn w' der unter dieser Voraussetzung bis auf einen constanten Factor völlig bestimmte Integrand I. G. ist, welcher in $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ verschwindet, so darf man für ε_p nur einen Punkt nehmen, in welchem w' nicht $= 0$ wird, um die ursprüngliche Voraussetzung zu erfüllen.

11. Es ist nun zu beweisen, dass die vorstehende Gleichung (1) auch noch gilt, wenn sich unter diesen $p-1$ Punkten nothwendige befinden, also $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ ein Punktsystem I. G. bilden.

Die Wichtigkeit dieses Lehrsatzes wird es rechtfertigen, wenn wir zwei Beweise desselben geben. Sind $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\alpha \cdots \varepsilon_{p-\varrho-1}\, \varepsilon'_{p-\varrho} \cdots \varepsilon'_\beta \cdots \varepsilon'_{p-1}$ ein Punktsystem I. G. mit den $p-\varrho-1$ wesentlichen Punkten ε_α und den ϱ nothwendigen Punkten ε'_β, so möge für jedes Punktsystem dieser Art

$$\vartheta\left(\!\left(-\sum_1^{p-\varrho-1} u_\mu(\varepsilon_\alpha) - \sum_{p-\varrho}^{p-1} u_\mu(\varepsilon'_\beta) + K_\mu\right)\!\right) \text{ als eine } E_\varrho$$

bezeichnet werden.

Es ist also bewiesen, dass jede $E_0 = 0$ ist. Ich werde voraussetzen, dass jede $E_{\varrho-1} = 0$ ist, was für $\varrho = 1$ richtig ist, und zeigen, dass darum auch jede $E_\varrho = 0$ folgt: das ist der erste Beweis des Satzes. Zu diesem Zweck bilde ich, unter ϑ stets *die Primärreihe* verstanden,

$$\vartheta = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - u_\mu(\omega) - \sum_1^{p-\varrho-1} u_\mu(\varepsilon_\alpha) - \sum_{p-\varrho}^{p-1} u_\mu(\varepsilon'_\beta) + K_\mu\right)\!\right),$$

wo ω ebenso wie 0 ein variabler Punkt ist, so dass ϑ, wenn 0 mit ω zusammenfällt, in die vorgelegte E_ϱ, aber wenn 0 mit einem der ϱ Punkte ε'_β zusammenfällt, in eine $E_{\varrho-1}$ übergeht, also nach Voraussetzung $= 0$ wird. Dies letztere setzt voraus, dass die $p-\varrho-1$ Punkte ε_α auch mit ω zusammen ein System wesentlicher Punkte bilden; bei der Wahl von ω sind also diejenigen Lagen auszuschliessen, in denen ω selbst ein zu den Punkten ε_α gehöriger nothwendiger Punkt sein würde. Nun findet der Hülfssatz statt, dass ϑ als Function von z entweder identisch Null ist, oder $\omega\ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-\varrho-1}\, \varepsilon'_{p-\varrho} \cdots \varepsilon'_{p-1}$ seine Nullpunkte sind: in beiden Fällen folgt die zu beweisende Gleichung $E_\varrho = 0$, wenn man 0 mit ω zusammenfallen lässt.

Ist nämlich ϑ nicht identisch Null, so hat es ausser den bereits nachgewiesenen ϱ Nullpunkten ε'_β noch $p-\varrho$ andere, welche $\eta_1 \cdots \eta_k \cdots \eta_{p-\varrho}$ heissen mögen, und dann ist der μ^{te} Parameter

$$u_\mu(\omega) + \sum u_\mu(\varepsilon_\alpha) + \sum u_\mu(\varepsilon'_\beta) - K_\mu = \sum u_\mu(\varepsilon'_\beta) + \sum u_\mu(\eta_k) - K_\mu + (gh)_\mu,$$

also folgt

$$u_\mu(\omega)+\sum u_\mu(\varepsilon_\alpha)=\sum u_\mu(\eta_\varkappa)+(gh)_\mu,$$

für $\mu=1,2,\cdots p$. Wären $\eta_1\cdots\eta_{p-\varrho}$ andere Punkte als $\omega\ \varepsilon_1\cdots\varepsilon_{p-\varrho-1}$, so wären beide Gruppen Punktsysteme I. G., was bei letzteren ausgeschlossen ist.

Also wird in allen Fällen $\vartheta=0$, wenn 0 mit ω zusammenfällt, d. h. ist jede $E_{\varrho-1}=0$, so ist auch die vorgelegte $E_\varrho=0$. Da aber jede $E_0=0$ ist, so ist es auch jede E_1, jede E_2 u. s. w. bis zur grössten Anzahl nothwendiger Punkte, die unter $p-1$ Punkten vorkommen können; die Gleichung (1) gilt also auch, wenn $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{p-1}$ irgend ein Punktsystem I. G. bilden, so haben wir den

2. Fundamentalsatz.

VIII. Dass für jede Lagerung der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{p-1}$ der Ausdruck

$$\vartheta\left(\!\left(-\sum_{\varkappa=1}^{p-1}u_\mu(\varepsilon_\varkappa)+K_\mu\right)\!\right)=0$$

ist.

Dieser Satz hat eine tiefere Bedeutung, die wir im IV. Abschnitte nachweisen werden.

12. Nach dem vorstehenden formalen Beweise halte ich es für unerlässlich zu zeigen, dass und wie die Richtigkeit des vervollständigten Satzes aus der Stetigkeit der Reihensumme ϑ folgt.

Um den Werth von E_ϱ zu finden, schliesse man jeden nothwendigen Punkt ε'_β in ein endliches Gebiet (ε'_β) ein, welches ausser ihm keinen zweiten nothwendigen Punkt enthält, und nehme beim Ausdrucke E_0 den entsprechenden Punkt ε_β in diesem Gebiete (ε'_β) an. Lässt man nun jeden Punkt ε_β in diesem Gebiete (ε'_β) schwanken, so bleibt $E_0=0$, so lange kein Punkt ε_β mit dem zugeordneten ε'_β zusammenfällt; wäre E_ϱ nicht $=0$, so wäre E_0 unstetig, weil seine Maximalschwankung in diesen Gebieten nicht $=0$ würde, wenn für jeden derselben die grösste Ortsänderung von ε_β, d. h. die Maximalschwankung des zugehörigen Werthes von z zum Verschwinden gebracht wird.

13. Daraus folgt nun, dass $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ unter allen Umständen Nullpunkte des Ausdruckes $\vartheta(0\,|\,\varepsilon)$ sind. Bilden sie aber ein Punktsystem I. G., so giebt es auch noch andere Gruppen von p Punkten $\delta_1\,\delta_2\cdots\delta_p$, so dass für $\mu=1,2,\cdots p$

$$\sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\delta_\varkappa) + (gh)_\mu$$

wird, und dann ist $\vartheta(0|\varepsilon)$ proportional zu $\vartheta(0|\delta)$, also wird $\vartheta(0|\varepsilon)$ auch $= 0$ in $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$, und ist demnach identisch Null, da es andernfalls nicht mehr als p Nullpunkte besitzt.

IX. Bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G., so ist die Summe der Primärreihe

$$\vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - \sum_{\varkappa=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

identisch Null.

14. Damit ist bewiesen, dass der im I. Abschnitte vorgesehene Fall, wo die Summe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ der Primärreihe identisch Null ist, wirklich vorkommt, und es folgt zugleich, dass die einzigen Fälle, wo dies nicht eintritt, unter denjenigen zu suchen sind, wo die Parameter sich in die Form

$$e_\mu = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) - K_\mu + (gh)_\mu$$

bringen lassen, ohne dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. bilden.

15. Zum ursprünglichen Satze, dass es (Parameter, also auch) Punktgruppen (ε) giebt, für welche $\vartheta(0|\varepsilon)$ nicht identisch Null ist, kommt also jetzt der Satz hinzu, dass es auch solche giebt, für welche $\vartheta(0|\varepsilon)$ identisch verschwindet. Sei

$$\vartheta(0|\varepsilon) = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - \sum_{1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

identisch Null, aber

$$\vartheta(0|\delta) = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(0) - \sum_{1}^{p} u_\mu(\delta_\varkappa) + K_\mu\right)\!\right)$$

sei es nicht.

Wir sind nach dem Vorangehenden sicher, dass $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ kein Punktsystem I. G. bilden, sodann kann es sein, dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein solches bilden, wir werden jetzt beweisen, dass letzteres wirklich der Fall ist.

Mit Benutzung eines Riemann'schen Gedankens*) bilde ich folgende Reihe von Ausdrücken:

---

*) Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 3.

$$\Delta_0 = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right),$$

$$\Delta_1 = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) + u_\mu(o_1) - u_\mu(\delta_{i_1}) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right),$$

$$— \quad — \quad — \quad —$$

$$\Delta_q = \vartheta\left(\!\left(\sum_0^q u_\mu(o_k) - \sum_1^q u_\mu(\delta_{i_k}) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right),$$

$$= \quad — \quad — \quad —$$

$$\Delta_p = \vartheta\left(\!\left(\sum_0^p u_\mu(o_k) - \sum_1^p u_\mu(\delta_k) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right).$$

Bei der Bildung von Δ_q ist für $\delta_{i_1}\delta_{i_2}\cdots\delta_{i_q}$ irgend eine Gruppe von q Punkten aus $\delta_1\delta_2\cdots\delta_p$ zu nehmen; das ist auf p_q Arten möglich, und so gross ist die Anzahl verschiedener Ausdrücke, welche unter Δ_q zu verstehen sind. Dann ist noch zu bemerken, dass $o\,o_1\cdots o_p$ unabhängig variable Punkte bedeuten.

Der erste Ausdruck Δ_0 ist nach Voraussetzung $=0$. Sodann ist klar, dass man aus einer Gruppe Δ_q die vorangehende Δ_{q-1} erhält, wenn man den letzten variablen Punkt o_q in jeder einzelnen Δ_q nacheinander mit $\delta_{i_1}\cdots\delta_{i_q}$ zusammenfallen lässt. Sind also sämmtliche Δ_q identisch Null, so sind es auch alle vorangehenden Gruppen $\Delta_{q-1}, \Delta_{q-2}, \cdots \Delta_1, \Delta_0$.

*Aber nicht alle folgenden sind es**), denn Δ_p ist nicht identisch Null, wie sofort folgt, wenn man $o_1 o_2\cdots o_p$ mit $\varepsilon_1\varepsilon_2\cdots\varepsilon_p$ zusammenfallen lässt, wodurch Δ_p ohne Unstetigkeit in den nicht identisch verschwindenden Ausdruck $\vartheta(o\,|\,\delta)$ übergeht.

Daraus folgt, dass es in der Reihe $1, 2, \cdots p$ *eine völlig bestimmte Zahl* ϱ giebt derart, dass 1) für $q<\varrho$ alle Ausdrücke Δ_q identisch Null sind, aber 2) nicht sämmtliche Functionen der Gruppe Δ_ϱ identisch verschwinden. Sei insbesondere

$$\Delta_\varrho = \vartheta\left(\!\left(\sum_0^\varrho u_\mu(o_k) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right)$$

nicht identisch Null. Dann wird es, wenn jetzt o der variable Punkt ist, $=0$ in $\delta_1\delta_2\cdots\delta_\varrho$ weil es, wenn o mit einem von diesen Punkten zusammenfällt, sich auf eine $\Delta_{\varrho-1}$ reducirt.

Seien $o_{\varrho+1}\cdots o_p$ die übrigen Nullpunkte von Δ_ϱ. *Sie sind durch den Ausdruck von* Δ_ϱ *völlig bestimmt,* d. h. soweit dieser unmittelbar zu

*) Vergleiche den § 2 in der Abhandlung des Herrn C. Neumann.

erkennen giebt, bestimmt durch die Lagerung von $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_\varrho$, von $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ und $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$, *und diese letztern sind frei wählbar.*

Für die Parameter von Δ_ϱ ergiebt sich

$$-\sum_1^\varrho u_\mu(o_k) + \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) + \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu$$
$$= \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) + \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_k) - K_\mu + (gh)_\mu,$$

zur Bestimmung von $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ erhält man also die Gleichungen des Abel'schen Theorems:

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=1}^p u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_{k=1}^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

die gesuchten Punkte $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ erweisen sich als unabhängig von der Lage der Punkte $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_\varrho$.

Durch diese p Gleichungen sind also, wie wir ausdrücklich wiederholen müssen, die $p - \varrho$ Punkte $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ völlig bestimmt, während $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ verfügbar bleiben. Denn sie geben

$$\Delta_\varrho = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) + \sum_1^p u_\mu(o_k) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\right)$$

proportional zu

$$\vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) - \sum_1^\varrho u_\mu(\delta_k) - \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_k) + K_\mu\right)\!\right);$$

könnte man $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ auf mehr als eine Art so wählen, dass den Gleichungen (a) Genüge geschieht, so hätte Δ_ϱ mehr als p Nullpunkte ohne identisch Null zu sein.

Nun ist die Gruppe $o_1 o_2 \cdots o_p$ nicht identisch mit der Gruppe $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$; denn selbst wenn beide Gruppen einzelne Punkte mit einander gemein haben, so enthält die erstere doch auch solche Punkte, die in der andern fehlen, nämlich $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$.

1) Also sind beide Gruppen Punktsysteme I. G., sie sind corresidual, und die eine enthält demnach ebensoviel nothwendige Punkte wie die andere.

2) Aber von der ersten Gruppe können wir die nothwendigen Punkte selber nachweisen, das giebt dann für die andere Gruppe die Anzahl ihrer nothwendigen Punkte. Da nämlich die p Gleichungen (a) ϱ Punkte der ersten Gruppe $(o_1 o_2 \cdots o_\varrho)$ unabhängig variabel lassen, und durch sie die $p - \varrho$ übrigen $(o_{\varrho+1} \cdots o_p)$ völlig bestimmen, so sind diese letztern

wesentliche Punkte und zu ihnen gehören jene als nothwendige. D. h. unterwirft man den allgemeinen Integranden I. G. w' der Bedingung, in den $p-\varrho$ Punkten $o_{\varrho+1}\cdots o_p$ zur ersten Ordnung zu verschwinden, so sind diese $p-\varrho$ Gleichungen von einander unabhängig, aber sie ziehen das Verschwinden von w' in $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ als nothwendige Folge nach sich.

3) Unter den obigen Voraussetzungen über die Functionengruppen $\Delta_{\varrho-1}$ und Δ_ϱ bilden also auch $\varepsilon_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G., welches aus $p-\varrho$ wesentlichen und ϱ nothwendigen Punkten besteht*).

Beschränken wir uns für einen Augenblick auf das, was unsern nächsten Zweck betrifft, so haben wir aus 1) den Satz:

X. Ist der Ausdruck

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_\mu)+K_\mu\right)\right)$$

identisch Null, so bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G.

16. Aber das ist die Umkehrung des Satzes IX, Nr. 13; beide vereinigt geben den

3. Fundamentalsatz.

XI. Damit

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k)+K_\mu\right)\right)$$

identisch verschwinde, ist erforderlich und hinreichend, dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. bilden.

Oder auch der

4. Fundamentalsatz.

XII. Der Ausdruck

$$\vartheta\left(\left(u_\mu(o)-\sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k)+K_\mu\right)\right)$$

ist stets und nur dann nicht identisch Null, wenn sich unter den p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ kein nothwendiger befindet, und dann sind dies die Nullpunkte der ϑ-Function.

17. Nun lässt sich (Nr. 6) jedes Parametersystem $e_1 e_2 \cdots e_p$ in die Form

*) Ich muss es einer andern Gelegenheit vorbehalten, auf die hier benutzten und, nachdem ich den wahren Inhalt herausgestellt habe, sehr leicht zu beweisenden Sätze über Punktsysteme I. G. im Zusammenhange (Abel'sches Theorem, Riemann-Roch'scher Satz) zurückzukommen.

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

bringen. Bilden $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ kein Punktsystem I. G., so ist $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nach dem Vorstehenden nicht identisch Null, und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ sind seine Nullpunkte. Bilden sie ein solches, to tritt der in den Nummern 3 und 4 vorgesehene Fall ein, wo $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ identisch Null ist, und es Secundärreihen zu einer durch die Parameter völlig bestimmten, an der angeführten Stelle durch ϱ bezeichneten Ordnung giebt, welche eine ϑ-Function mit diesen Parametern darstellen. Die Nullpunkte $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ einer solchen bilden dann (Nr. 10) ein mit $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System. So oft also vermöge der Wahl der Parameter Secundärreihen statthaben, bilden ihre Nullpunkte stets ein Punktsystem I. G.

Aber es findet auch der umgekehrte Satz statt, dass zu jedem Punktsystem I. G. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ eine Secundärreihe gehört, von welcher jenes die Nullpunkte sind, und wir sind jetzt im Stande, diese Reihe wirklich herzustellen.

Sei

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$$

ein gegebenes Punktsystem I. G., und ϱ die Anzahl seiner nothwendigen Punkte, also $\varrho \overline{\gt} 1$.

An Stelle der Reihe von $p+1$ Functionengruppen Δ der Nr. 15 bilde ich folgende $p+1$ Primärreihen:

$$F_q = \vartheta\Big(\Big(\sum_{k=0}^{q} u_\mu(o_k) - \sum_{k=1}^{q} u_\mu(\omega_k) - \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\Big)\Big)$$

für $q = 0, 1, \cdots p$. Wie am angegebenen Orte sind $o\, o_1 \cdots o_p$ unabhängig variable Punkte; aber während dort die Punkte $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_p$ noch in fester Lage vorausgesetzt werden mussten, sind sie hier durch unabhängig variable Punkte $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_p$ ersetzt.

Wiederum ist der erste Ausdruck F_0, in der Reihe $F_0 F_1 \cdots F_p$, identisch Null; ist es auch F_q, so sind es alle vorangehenden, aber nicht alle folgenden sind es, denn F_p ist nicht für alle Lagen der $2p+1$ variabeln Punkte $o\, o_1 \cdots o_p\; \omega_1 \cdots \omega_r$ Null da es, wenn $o_1 o_2 \cdots o_p$ nach $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ rücken, sich in eine Primärreihe verwandelt, deren Summe nach XII. nicht identisch Null ist. Daraus folgt, wie in Nr. 15 der Schluss, dass es zwischen o und p eine Zahl σ giebt, so dass F_σ nicht identisch Null ist, wohl aber $F_{\sigma-1}$ und jedes vorangehende F_q. Die Resultate, welche dort gefunden wurden, liefern jetzt den Werth von σ und damit die Umkehrung jener Sätze.

In der That verschwindet F_σ als Function von z in $\omega_1\,\omega_2 \cdots \omega_\sigma$ und nach Nr. 15 in denjenigen völlig bestimmten $p - \sigma$ Punkten $o_{\sigma+1} \cdots o_p$, welche durch $o_1 \cdots o_\sigma$ zu einem mit $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresidualen System ergänzt werden; in diesem sind aber $o_1\,o_2 \cdots o_\sigma$ und nur diese willkürlich wählbar, also sind sie die nothwendigen Punkte dieses Systems. Da aber die Anzahl der nothwendigen Punkte für beide corresiduale Systeme die nämliche ist, folgt $\sigma = \varrho$.

Wir müssen alles, was hiermit bewiesen ist, zusammenstellen.

Vorausgesetzt ist, dass $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten bilden. Es folgt

1) dass, unter ϑ die Primärreihe verstanden,

$$F_\varrho = \vartheta\left(\!\!\left(\sum_0^\varrho u_\mu(o_k) - \sum_1^\varrho u_\mu(\omega_k) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu \right)\!\!\right)$$

nicht identisch Null, sondern eine ϑ-Function ist;

2) dass es als Function von z Null wird in den ϱ unabhängig variabeln Punkten $\omega_1\,\omega_2 \cdots \omega_\varrho$ und denjenigen $p - \varrho$ Punkten $o_{\varrho+1} \cdots o_p$, welche vermöge der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_1^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

durch die ϱ Punkte $o_1\,o_2 \cdots o_\varrho$ zu einem mit $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresidualen System ergänzt werden;

3) dass ferner $F_\varrho = 0$ wird, wenn irgend einer der ϱ variabeln Punkte $\omega_1\,\omega_2 \cdots \omega_\varrho$ mit irgend einem der $\varrho + 1$ Punkte $o\,o_1 \cdots o_\varrho$ zusammenfällt und

4) dass F_ϱ in allen diesen Fällen nur zur ersten Ordnung Null wird.

Es handelt sich um die Folgerungen, welche sich aus diesen vier Grundeigenschaften der ϑ-Function F_ϱ ergeben. Dabei möge der Werth von z für den Punkt o_k durch z_k, für den Punkt ω_k durch ζ_k bezeichnet werden.

Wir entwickeln F_ϱ als Function von ζ_ϱ nach Potenzen von $\zeta_\varrho - z_\varrho$, indem wir dabei in der Fläche T den Punkt o_ϱ zum Entwicklungscentrum nehmen. Da F_ϱ in demselben zur ersten Ordnung verschwindet, so hat die Entwicklung die Form

$$F_\varrho = 2(z_\varrho - \zeta_\varrho)\,F'_{\varrho-1} + \frac{(2(z_\varrho - \zeta_\varrho))^2}{1 \cdot 2}\,F''_{\varrho-1} + \cdots,$$

und es ist $F'_{\varrho-1}$ als Function der übrigen Variabeln $z\,z_1 \cdots z_\varrho\;\zeta_1 \cdots \zeta_{\varrho-1}$ nicht identisch Null. Schreiben wir zur Abkürzung

$$v_\mu = \sum_0^{\varrho-1} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu$$

also

$$F_\varrho = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu v_\mu} \,.\, e^{2\Sigma m_\mu |u_\mu(o_\varrho) - u_\mu(\omega_\varrho)|},$$

so folgt

$$F'_{\varrho-1} = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu v_\mu} \,.\, \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

wenn $u'_\mu(o)$ den Werth von $\frac{du_\mu}{dz}$ im Punkte o bedeutet.

Das ist eine Secundärreihe erster Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2 \cdots v_p$:

$$F'_{\varrho-1} = \vartheta_1((v_\mu)) = \vartheta_1\Big(\Big(\sum_0^{\varrho-1} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\Big)\Big),$$

und es ist nun zunächst festzustellen, dass dies in Ansehung seiner Argumente, also vom Punkte o_ϱ abgesehen, eine ϑ-Function ist. In der That folgen die hierzu erforderlichen Eigenschaften (A. B. Lehrs. I, Nr. 3) innerhalb der Fläche T' aus der Form des Reihenausdrucks und, wie in Nr. 3 für A_ϱ, die Querschnittseigenschaften aus denen von F_ϱ, wenn man beachtet dass

$$F'_{\varrho-1} = \lim \frac{F_\varrho}{2(z_\varrho - \zeta_\varrho)}$$

ist, wenn ω_ϱ nach o_ϱ rückt.

Es handelt sich nun um den Nachweis, dass auch diese ϑ-Function die oben zusammengestellten vier Grundeigenschaften besitzt, nur dass $\varrho - 1$ an die Stelle von ϱ tritt.

Die erste derselben, dass $F'_{\varrho-1}$ ϑ-Function und nicht identisch Null ist, wurde bereits bewiesen. Sodann hat $F'_{\varrho-1}$, ebenso wie jeder andere Entwicklungscoefficient $F''_{\varrho-1}, \cdots$ als Function von z mit F_ϱ alle diejenigen Nullpunkte gemein, die von ζ_ϱ unabhängig sind, und dasselbe gilt von $F'_{\varrho-1}$ als Function einer der übrigen Variabeln $z_1 \cdots z_{\varrho-1}$ $\zeta_1 \cdots \zeta_{\varrho-1}$.

In allen diesen Fällen wird die Reihensumme F_ϱ nur zur ersten Ordnung Null, unter den Entwicklungscoefficienten $F'_{\varrho-1}, F''_{\varrho-1}, \cdots$ muss es also in jedem einzelnen Falle solche geben, die ebenfalls nur zu dieser niedrigsten Ordnung verschwinden. Dass $F'_{\varrho-1}$ in jedem Falle zu diesen letztern gehört, ist eine der übrigen Grundeigenschaften und muss bewiesen werden.

Als Function von z hat die ϑ-Function $F'_{\varrho-1}$ die Parameter

$$-\sum_1^{\varrho-1} u_\mu(o_k) + \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu,$$

was mit Benutzung der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_1^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu$$

in

$$\sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + \sum_\varrho^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu - K_\mu$$

übergeht. Sodann ist von den p Nullpunkten $\omega_1 \cdots \omega_\varrho\ o_{\varrho+1} \cdots o_p$ der Function F_ϱ nur einer von ζ_ϱ abhängig, nämlich der Punkt ω_ϱ; die $p-1$ übrigen sind also auch Nullpunkte aller Entwicklungscoefficienten, also auch von $F'_{\varrho-1}$ als Function von z.

Ist η der noch fehlende, so ist der vorstehende μ^{te} Parameter von $F'_{\varrho-1}$ auch

$$= \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + u_\mu(\eta) + \sum_{\varrho+1}^p u_\mu(o_k) - K_\mu + (g'h')_\mu,$$

es folgt

$$u_\mu(\eta) = u_\mu(o_\varrho) + (g-g' \,|\, h-h')_\mu,$$

für $\mu = 1, 2, \cdots p$. Also ist der gesuchte Punkt η kein anderer als der Punkt o_ϱ selber, weil es sonst eine wie die Fläche T verzweigte Function erster Ordnung von z gäbe, die nämlich in η Null, in o_ϱ unendlich zur Ordnung 1 wird und sonst stetig bleibt, was nur für $p = 0$ möglich ist, und die Existenz von Integralen I. G. ausschliesst.

Wir finden, dass $F'_{\varrho-1}$ als Function von z Null wird in den $\varrho - 1$ unabhängig variabeln Punkten $\omega_1\, \omega_2 \cdots \omega_{\varrho-1}$, dem Punkt ω_ϱ und den $p - \varrho$ Punkten $o_{\varrho+1} \cdots o_p$, wenn diese so bestimmt werden, dass $o_\varrho\, o_{\varrho+1} \cdots o_p$ mit den $\varrho - 1$ Punkten $o_1\, o_2 \cdots o_{\varrho-1}$ vermöge der Gleichungen (a) ein mit $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System bilden, und es ist zu beachten, dass hierbei die Anzahl der nothwendigen Punkte beider Systeme nicht in Betracht gekommen ist. Da dies p getrennt liegende Nullpunkte sind, so wird $F'_{\varrho-1}$ in ihnen nur zur ersten Ordnung Null.

Jetzt folgt ohne Weiteres, dass $F'_{\varrho-1}$ auch verschwindet, wenn umgekehrt einer der $\varrho - 1$ Punkte $\omega_1 \cdots \omega_{\varrho-1}$ mit einem der ϱ Punkte $o\, o_1 \cdots o_{\varrho-1}$ zusammenfällt also, wie soeben für den Fall, dass einer der letztern variabel ist, bewiesen wurde, jedesmal nur zur ersten Ordnung verschwindet.

Bei der ϑ-Function

$$F'_{\varrho-1} = \vartheta_1\left(\!\!\left(\sum_0^{\varrho-1} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-1} u_\mu(\omega_k) + \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu \right)\!\!\right)$$

sind also die gleichen Grundeigenschaften vorhanden, wie bei der ursprünglichen ϑ-Function F_ϱ, nur dass in ihren Argumenten die Anzahl der variabeln Punkte o von $\varrho+1$ auf ϱ, der Punkte ω von ϱ auf $\varrho-1$ gesunken ist.

Bei der Uebertragung der Grundeigenschaften von F_ϱ auf

$$F'_{\varrho-1} = \lim \frac{F_\varrho}{2(z_\varrho - \zeta_\varrho)}$$

ist bezüglich der Punktsysteme $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ und $o_1 o_2 \cdots o_p$ nur die, durch die Gleichungen (a) ausgedrückte Corresidualität derselben, nicht die Anzahl ihrer nothwendigen Punkte benutzt worden. In Folge dessen übertragen sie sich auch von der ϑ-Function $F'_{\varrho-1}$ auf

$$F''_{\varrho-2} = \lim \frac{F'_{\varrho-1}}{2(z_{\varrho-1} - \zeta_{\varrho-1})},$$

wenn $\omega_{\varrho-1}$ nach $o_{\varrho-1}$ rückt. Das giebt, wenn jetzt zur Abkürzung

$$v_\mu = \sum_0^{\varrho-2} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-2} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu$$

geschrieben wird,

$$F''_{\varrho-2} = \sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu} \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho-1}),$$

dies ist also eine Secundärreihe zweiter Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2 \cdots v_p$:

$$F''_{\varrho-2} = \vartheta_2((v_\mu)) = \vartheta_2\Big(\Big(\sum_0^{\varrho-2} u_\mu(o_k) - \sum_1^{\varrho-2} u_\mu(\omega_k) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\Big)\Big);$$

das ist nicht identisch Null, drückt in Ansehung seiner Argumente, also abgesehen von den beiden Punkten o_ϱ und $o_{\varrho-1}$, eine ϑ-Function aus, als Function von z wird $F''_{\varrho-2}=0$ in den $\varrho-2$ variabeln Punkten $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{\varrho-2}$ und denjenigen $p-\varrho+2$ Punkten $o_{\varrho-1} o_\varrho \cdots o_p$, welche bei der vorgeschriebenen Lage von $o_{\varrho-1}$ und o_ϱ, vermöge der Gleichungen

$$\text{(a)} \qquad \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_1^p u_\mu(o_k) + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

mit $o_1 o_2 \cdots o_{\varrho-2}$ zusammen ein zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduales System bilden, ferner wird diese Function $=0$, so oft einer der Punkte $\omega_1 \cdots \omega_{\varrho-2}$ mit einem der Punkte $o\, o_1 \cdots o_{\varrho-2}$ zusammenfällt, und in allen diesen Fällen wird sie $=0$ zur Ordnung Eins.

Diese Schlussweise setzt sich fort, und führt schliesslich zum Ausdrucke

$$F_0^{(\varrho)} = \sum e^{\Phi((m))+2\Sigma m_\mu v_\mu} . \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho-1}) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$

für

$$e_\mu = u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu;$$

das ist eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung mit den Argumenten $v_1 v_2 \cdots p_p$:

$$F_0^{(\varrho)} = \vartheta_\varrho(\!(v_\mu)\!) = \vartheta_\varrho(\!(u_\varrho(o) - \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu)\!)$$

und den Parametern

$$e_\mu = \sum_{k=1}^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p).$$

Ihre Summe ist Function einer einzigen Variablen z und nicht identisch Null. Sie drückt, als Function von z, eine ϑ-Function aus, und $o_1 o_2 \cdots o_p$ sind ihre Nullpunkte. Diese Punkte repräsentiren jedes zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduale System, da die ϱ nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ unabhängig variabel sind.

Nimmt man für $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ zunächst diese p Punkte $o_1 o_2 \cdots o_p$ selber, so ergiebt sich der Satz

XIII. Auch wenn die Nullpunkte $o_1 o_2 \cdots o_p$ der ϑ-Function ein Punktsystem I. G. bilden, kann man diese Function in Reihenform ausdrücken. Ist ϱ die Anzahl der nothwendigen Punkte dieses Systems, und sind das die Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$, so erhält man als Ausdruck für die verlangte ϑ-Function die Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung:

$$\vartheta_\varrho = \sum e^{\Phi((m)) + 2\sum m_\mu \left| u_\mu(o) - \sum_1^p u_\mu(o_k) + K_\mu \right|} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_1) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

wo im algebraischen Factor unter dem Summenzeichen jeder Integrand I. G. u'_μ auch durch die Function φ_μ ersetzt werden darf, welche seinen Zähler bildet.

18. Führt man aber im Ausdrucke von $F_0^{(\varrho)}$ an Stelle der Punkte ε Parameter ein:

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

und beachtet bezüglich der Simultanperioden $(gh)_\mu$ die Formel (a) Nr. 4, so ergiebt sich der folgende Satz:

XIV. Kann man die p Constanten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ auf irgend eine Art in die Form bringen

$$e_\mu = \sum_1^p u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu \quad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

so dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten bilden, so giebt es unendlich viele ϑ-Functionen mit den Parametern $e_1 e_2 \cdots e_p$. Ihr allgemeiner Ausdruck ist die Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung

$$\vartheta_\varrho(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu (u_\mu - e_\mu)} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_1)$$
$$\cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho),$$

welche ausser dem Punkte o noch von ϱ unabhängig variabeln Punkten $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ abhängt. Die Nullpunkte dieser Function bilden dasjenige zu $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ corresiduale System, dessen ϱ nothwendige Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ sind.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass alle diese corresidualen Systeme von p Punkten einzelne Punkte mit einander gemein haben, dann sind dies gemeinsame Nullpunkte aller ϑ-Functionen der Schaar. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn es in der Classe gar keine Function von der Ordnung p giebt. Benutzt man ϑ-Functionen dieser Art, so stellt der Quotient zweier ϑ-Functionen mit den gleichen Parametern eine algebraische Function τ der Classe dar, was niemals möglich ist, wenn nur primäre Reihen zur Verwendung kommen.*)

19. Setzen wir allgemein

$$\vartheta_\sigma = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu (u_\mu - e_\mu)} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_1) \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_2) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_\sigma),$$

wo $e_1 e_2 \cdots e_p$ dieselbe Bedeutung haben wie im vorigen Satze, so lässt sich leicht zeigen, dass unter den Voraussetzungen dieses Satzes nicht bloss $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!) = \vartheta_0$, sondern auch $\vartheta_1, \vartheta_2, \cdots \vartheta_{\varrho-1}$ gleich Null sind, und zwar für alle Lagen der Punkte $o\, o_1 \cdots o_{\varrho-1}$, während ϑ_ϱ nicht identisch Null ist. In der That geht

$$F^{(\sigma)}_{\varrho-\sigma} = \sum e^{\Phi((m)) + 2\Sigma m_\mu u_\mu} \cdot \sum m_\mu u'_\mu(o_\varrho) \cdot \sum m_\mu u'_\mu)o_{\varrho-1}) \cdots \sum m_\mu u'_\mu(o_{\varrho+1-\sigma}),$$

für

$$v_\mu = u_\mu(o) + \sum_{k=1}^{p-\sigma} |u_\mu(o_k) - u_\mu(\omega_k)| - e_\mu,$$

*) Vergl. Riemann, Theorie d. Ab. F. art. 27; der vorstehende Ausdruck ϑ_ϱ tritt auch schon bei Riemann auf, aber in ganz anderem Zusammenhange und mit andern Argumenten r_μ statt $u_\mu - e_\mu$. Ueber d. V. s. dh. 5 Formel 4.

in einen Ausdruck von der Form ϑ_σ über, wenn man $\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_{\varrho-\sigma}$ nach $o_1 o_2 \cdots o_{\varrho-\sigma}$ rücken lässt, nur dass die variabeln Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\sigma$ von ϑ_σ hier durch $o_\varrho o_{\varrho-\sigma} \cdots o_{\varrho+1-\sigma}$ ersetzt sind. Aber für $\sigma = 1, 2, \cdots \varrho - 1$ ist von diesem Ausdrucke $F^{(\sigma)}_{\varrho-\sigma}$ bewiesen, dass er verschwindet, wenn ein Punkt ω mit einem Punkte o zusammenfällt, also sind $\vartheta_0 \vartheta_1 \cdots \vartheta_{\varrho-1}$ alle identisch Null, während ϑ_ϱ es nicht ist.

Der Umstand, dass dies nicht bloss für alle Lagen von o, sondern auch von $o_1 o_2 \cdots o_{\varrho-1}$ gilt, führt nun zum Beweise des Satzes, dass unter den obigen Voraussetzungen über die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ für

$$v_1 = u_1 - e_1, \; v_2 = u_2 - e_2, \cdots v_p = u_p - e_p$$

ausser der Summe $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$ der Primärreihe auch ihre sämmtlichen partiellen Derivirten von der 1^{ten} bis zur $(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, aber nicht alle Derivirten ϱ^{ter} Ordnung verschwinden, was die Umkehrung der Sätze aus Nr. 3, 4, und 6 liefert.

Ist nämlich $\varrho > 1$, so ist $\vartheta_1 = 0$ für alle Lagen von o_1. Aber $u_1'(o_1), u_2'(o_1), \cdots u_p'(o_1)$ sind linear unabhängig*) und ϑ_1 ist in ihnen linear und homogen, also sind ihre Coefficienten $= 0$, das sind bis auf den fehlenden Factor 2 die partiellen Derivirten erster Ordnung von ϑ_0. Ist $1 < \sigma < \varrho$, so sind im Ausdrucke von ϑ_σ aus dem nämlichen Grunde $= 0$, 1) die Coefficienten von $u_1'(o_1), u_2'(o_1), \cdots u_p'(o_1)$; 2) in ihnen die Coefficienten von $u_1'(o_2), u_2'(o_2), \cdots u_p'(o_2)$, u. s. w., d. h. für die vorstehenden Werthe von $v_1 v_2 \cdots v_p$ verschwinden auch alle partiellen Derivirten σ^{ter} Ordnung von $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$. Dass die Derivirten ϱ^{ter} Ordnung nicht alle $= 0$ sind, versteht sich von selbst, da sonst $\vartheta_\varrho = 0$ wäre.

20. Dies mit den Sätzen der Nummern 3 und 4 zusammengehalten zeigt, dass, wenn $\vartheta(\!(u_\mu - e_\mu)\!)$ identisch Null ist, die Ordnung ϱ der Secundärreihe, welche dann an die Stelle der Primärreihe tritt, sich auf zwei Arten bestimmt, einmal durch das Verhalten der partiellen Derivirten von $\vartheta(\!(v_\mu)\!)$ für die speciellen Argumente $v_\mu = u_\mu - e_\mu$, andererseits aus der Beschaffenheit irgend einer Gruppe von p Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$, für welche

C. $$e_\mu = \sum_{k=1}^{p} u_\mu(\varepsilon_\mu) - K_\mu + (gh)_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

ist.

In Folge dessen sind wir in der Lage, den wichtigen Lehrsatz der Nr. 6, dass jedes System von p Zahlen $e_1 e_2 \cdots e_p$ sich in die vorstehende Form C. bringen lässt, durch folgende Zusätze zu vervollständigen.

---

*) Vergl. Riemann, Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen, art. 4.

1) Befindet sich unter den p Punkten ε kein nothwendiger, d. h. lassen $e_1 e_2 \cdots e_p$ sich nur auf eine Art in die vorstehende Form C. bringen, so ist die Summe der Primärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nicht identisch Null, und $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ sind ihre Nullpunkte.

Ist umgekehrt $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nicht identisch Null, so lassen sich ihre Parameter nur auf eine Art in die obige Form bringen, unter den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ befindet sich kein nothwendiger und sie sind die Nullpunkte von ϑ.

2) Bilden die p Punkte ε ein Punktsystem I. G. mit ϱ nothwendigen Punkten, so ist die Summe der Primärreihe $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nebst ihren ersten bis $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$ partiellen Derivirten identisch Null, die ϱ^{ten} Derivirten sind es nicht alle, und bei diesen Nullpunkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ tritt an die Stelle der Primärreihe eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung (Lehrs. XIII).

Ist umgekehrt $\vartheta((u_\mu - e_\mu))$ nebst seinen ersten bis $(\varrho - 1)^{\text{ten}}$, aber nicht allen ϱ^{ten} partiellen Derivirten identisch Null, so lassen sich die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ auf unendlich viel Arten in die obige Form C. bringen, indem man ϱ von den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ beliebige Lagen $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ vorschreiben kann, wodurch dann die Lagen $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ der $p - \varrho$ übrigen bestimmt sind. Solche p Punkte bilden ein Punktsystem I. G. vom Ueberschusse ϱ, und $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ sind die nothwendigen Punkte desselben. Alle diese, zu den gleichen Parametern gehörigen Punktsysteme sind corresidual. Zu solchen Parametern gehört eine Schaar von ϑ-Functionen, nämlich zu jeder Lagerung der nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ eine, von welcher diese und die zugehörigen $o_{\varrho+1} \cdots o_p$ die Nullpunkte sind. Ihr Ausdruck ist durch die Parameter $e_1 e_2 \cdots e_p$ und die nothwendigen Punkte $o_1 o_2 \cdots o_\varrho$ bestimmt (Lehrs. XIV).

Wie sich das auf die Constanten

$$V_1 = e_1 + K_1, \; V_2 = e_2 + K_2, \cdots V_p = e_p + K_p$$

des V. Lehrsatzes Nr. 6 überträgt, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

IV.

Analytische Bedingung dafür, dass $u_1 u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind.

21. Dies alles gründet sich auf den 2. Fundamentalsatz (Nr. 11) dass, unter ϑ die Primärreihe verstanden, der Ausdruck

$$E = \vartheta((- \sum_{k=1}^{p-1} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu))$$

stets $= 0$ ist. Aber dieser Satz haftet an folgenden Voraussetzungen:

1) dass $u_1(o)$, $u_2(o)$, $\cdots u_p(o)$ *für jede Lage* des Punktes o *Simultanwerthe* bedeuten, d. h. dass sie mit irgend welchen Anfangswerthen zunächst der einfach zusammenhängenden Fläche T' zugeordnet sind, und von dieser aus über das Querschnittsystem hinweg nur auf demselben Integrationswege fortgesetzt werden, wodurch sich für denselben Punkt o die ursprünglichen Werthe $u_1\ u_2 \cdots u_p$, vermehrt um *Simultanperioden* $(gh)_1$, $(gh)_2$, $\cdots (gh)_p$ ergeben.

2) Dass die Riemann'schen Constanten (Nr. 5, Lehrs. IV)

$$K_\mu = \frac{1}{2}[\pi i + a_{\mu\mu}] + \frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda \overset{+}{u}_\mu\, du_\lambda$$

aus diesen Simultanwerthen $\overset{+}{u}_\mu$ berechnet sind.

Als nächste Folgerung hieraus ergiebt sich, dass die Argumente

$$v_\mu = -u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) \cdots - u_\mu(\varepsilon_{p-1}) + K_\mu$$

von E von den Anfangswerthen der Integrale $u_1\ u_2 \cdots u_p$ unabhängig sind. Vermehrt man nämlich u_μ um eine *Constante* c_μ, so vermehrt K_μ sich um

$$\frac{1}{\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda c_\mu\, du_\lambda = (p-1)c_\mu,$$

also wird v_μ dadurch nicht geändert*).

Aendert man insbesondere die Normalintegrale um Simultanperioden, so hat das auf die Argumente von E gar keinen Einfluss.

Riemann benutzt dies zu einer endgültigen Bestimmung des Integrals I. G., indem er an ihrer Stelle die Differenzen $u_\mu - \frac{K_\mu}{p-1}$ einführt so dass, wenn man diese durch $w_1\ w_2 \cdots w_p$ bezeichnet,

$$E = \vartheta\big(\!\big(-w_\mu(\varepsilon_1) - w_\mu(\varepsilon_2) \cdots - w_\mu(\varepsilon_{p-1})\big)\!\big)$$

wird.

Für die folgende Ueberlegung ist eine Aenderung der Voraussetzungen nöthig, und um diese deutlicher hervortreten zu lassen, ist es besser, die Constanten $K_1\ K_2 \cdots K_p$ in Evidenz zu erhalten.

Ich setze voraus

a. dass $u_1\ u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe und zwar diejenigen sind, aus denen $K_1\ K_2 \cdots K_p$ ein für allemal genau oder bis auf Simultanperioden berechnet sind, was für die Formation der ϑ-Reihe ausreicht. Diese Aufgabe, in welcher sich alles concentrirt, was in der Lehre von den ϑ-Functionen an Schwierigkeiten noch zu überwinden übrig bleibt, ist

*) Riemann, Theorie der Ab. F. art. 22.

für die ultraelliptischen Functionen aller Genera p von Herrn Prym*) gelöst worden.

b. Dagegen werden wir bei den Werthen der Normalintegrale in den Punkten $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ die Beschränkung auf Simultanwerthe aufheben. Zu dem Zweck mögen, von Simultanwerthen $u_1 u_2 \cdots u_p$ aus, die Integrationen bis zu irgend einem Punkte ε fortgesetzt werden, der zur Verfügung bleibt. Verlaufen diese p Wege bei allen Normalintegralen in der Fläche T', so liefern sie Simultanwerthe, nämlich $u_1(\varepsilon)$, $u_2(\varepsilon)$, $\cdots u_p(\varepsilon)$; überschreiten sie das Querschnittsystem, so kommen zu diesen Simultanwerthen Perioden, und zwar sind das 1) Simultanperioden $(gh)_1$, $(gh)_2$, $\cdots (gh)_p$, wenn die p Integrale auf demselben Wege über T' hinaus fortgesetzt werden, sind es dagegen 2) für $u_1 u_2 \cdots u_p$ wesentlich verschiedene Wege, so liefern diese p Integrationen zwar wieder die Simultanwerthe $u_1(\varepsilon)$, $u_2(\varepsilon)$, $\cdots u_p(\varepsilon)$, vermehrt um Perioden, aber das sind dann nicht mehr nothwendig Simultanperioden. Zur Unterscheidung will ich sie, wenn diese p Wege aus T' nach dem Punkte ε führen, durch $P_1(\varepsilon), P_2(\varepsilon), \cdots P_p(\varepsilon)$ bezeichnen. Dann sind die Werthe der Normalintegrale, zu denen man durch diese Integrationen gelangt, folgende:

$$v_1(\varepsilon) = u_1(\varepsilon) + P_1(\varepsilon), \;\; v_2(\varepsilon) = u_2(\varepsilon) + P_2(\varepsilon), \cdots v_p(\varepsilon) = u_p(\varepsilon) + P_p(\varepsilon);$$

diese additiven Perioden drücken sich *mittelst ganzer Zahlen* g, h wie folgt aus:

$$P_\mu(\varepsilon) = g_\mu \pi i + h_1^{(\mu)} a_{1\mu} + h_2^{(\mu)} a_{2\mu} + \cdots + h_p^{(\mu)} a_{p\mu},$$

wo aber für die ganzen Zahlen h alle Beschränkungen aufgehoben sind, nämlich 1) die Beschränkung, dass $h_1^{(\mu)} h_2^{(\mu)} \cdots h_p^{(\mu)}$ für jedes μ dieselbe Zahlenreihe sein soll, und 2) die Beschränkung, dass diese Zahlen für $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ an Stelle von ε dieselben sein sollen. Die Werthe g_μ kommen nicht in Betracht, da es Periode zu jedem Argument ist.

c. Wird nun in dieser Weise bei den Argumenten von E die Beschränkung der Normalintegrale auf Simultanwerthe für alle Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ aufgehoben, während die Bedeutung von $u_1 u_2 \cdots u_p$ als Simultanwerthe und die Werthe der aus ihnen ein für allemal berechneten Riemann'schen Constanten K_1, K_2, $\cdots K_p$ beibehalten werden, so tritt an die Stelle von E der Ausdruck

$$E' = \vartheta\left(\!\!\left(-\sum_{k=1}^{p-1} v_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\!\!\right)$$

d. i.

*) Prym, Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche, Seite 35 und 18. Zürich 1866.

$$E' = \vartheta\left(\left(-\sum_1^{p-1} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu - P_\mu(\varepsilon_1) - P_\mu(\varepsilon_2) \cdots - P_\mu(\varepsilon_{p-1})\right)\right),$$

und wir untersuchen nun was daraus folgt, wenn dieser Ausdruck für alle Lagen von $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ verschwindet.

Ich nehme noch einen Punkt ε_p hinzu, und bilde

$$\vartheta = \vartheta\left(\left(u_\mu(o) - u_\mu(\varepsilon_p) - \sum_1^{p-1} v_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu\right)\right)$$

d. i.

$$\vartheta = \vartheta\left(\left(u_\mu(o) - \sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) + K_\mu - P_\mu(\varepsilon_1) - P_\mu(\varepsilon_2) \cdots - P_\mu(\varepsilon_{p-1})\right)\right).$$

Ist das 1) nicht identisch Null, so folgt, dass $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_p$ seine Nullpunkte sind, mithin seine Parameter

$$\sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-1}) = e_\mu$$

sich mittelst Simultanperioden $(gh)_\mu$ in der Form

$$\sum_1^{p} u_\mu(\varepsilon_k) - K_\mu + (gh)_\mu$$

ausdrücken. Das giebt $P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-1}) = (gh)_\mu$ für $\mu = 1, 2, \cdots p$. 2) Die Bedingung, dass ϑ nicht identisch verschwinde, kann man aber stets erfüllen, da die p Punkte $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_p$ durchaus zur Verfügung stehen. In der That kann man nach Lehrsatz V der Nr. 6 durch geeignete Wahl dieser Punkte bewirken, dass vorstehende Ausdrücke $e_1 e_2 \cdots e_p$ beliebig vorgeschriebenen Parametern $v_1 v_2 \cdots v_p$ gleich werden, insbesondere also auch so, dass ϑ nicht identisch Null wird.

Ist also $E' = 0$ bei jeder Annahme über die Punkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$, so sind die p Ausdrücke

$$P_\mu(\varepsilon_1) + P_\mu(\varepsilon_2) + \cdots + P_\mu(\varepsilon_{p-}) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

stets Simultanperioden $(gh)_\mu$.

Um auf dem kürzesten Wege zum Schlusse zu kommen, lassen wir $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ in einem Punkte ε zusammenfallen, es folgt für $\mu = 1, 2, \cdots p$

$$(p-1) P_\mu(\varepsilon) = (gh)_\mu.$$

Da aber alle $P_\mu(\varepsilon) = g_\mu \pi i + h_1^{(\mu)} a_{1\mu} + h_2^{(\mu)} a_{2\mu} + \cdots + h_p^{(\mu)} a_{p\mu}$ ganzzahlige Coefficienten haben, so geht die Division mit $p - 1$ in jedes einzelne g, h auf. Ist

$$g_\mu = (p-1)\, G_\mu, \quad h_\mu = (p-1)\, H_\mu,$$

so folgt

$$P_\mu(\varepsilon) = (G\,H)_\mu,$$

d. h. $P_1(\varepsilon)\, P_2(\varepsilon) \cdots P_p(\varepsilon)$ sind Simultanperioden, und zwar für jede Lage des Punktes ε, mithin sind $v_1(\varepsilon)\, v_2(\varepsilon) \cdots v_p(\varepsilon)$ für jede Lage von ε Simultanwerthe, wenn auch nicht mehr beschränkt auf die einfach zusammenhängende Fläche T'.

Wir haben demnach den folgenden Satz, welcher eine Ergänzung des 2. Fundamentalsatzes bildet:

XV. Für jedes Normalintegral u_μ werde über die in ihm enthaltene additive Constante ein für allemal verfügt, und aus irgend einem System von Simultanwerthen dieser Integrale seien auch die Riemann'schen Constanten $K_1\, K_2 \cdots K_p$ ein für allemal berechnet. Unter diesen Voraussetzungen darf man fordern, dass der Ausdruck

$$\vartheta(\!(-\, u_\mu(\varepsilon_1) - u_\mu(\varepsilon_2) - \cdots - u_\mu(\varepsilon_{p-1}) + K_\mu)\!)$$

für alle Lagen der $p-1$ Punkte $\varepsilon_1\, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{p-1}$ verschwinde, und hat dann die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass $u_1\, u_2 \cdots n_p$ stets Simultanwerthe sind.

Diese Bedingungen sind nothwendig, denn wenn $u_1\, u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind, darf man den Ausdruck nach dem 2. Fundamentalsatze nicht von Null verschieden voraussetzen, und nach dem, was soeben bewiesen wurde, reicht sie auch aus, damit $u_1\, u_2 \cdots u_p$ Simultanwerthe sind, was dann, durch Addition von Simultanperioden, zu Systemen von Simultanwerthen führt.

V.

Die Riemann'schen Constanten.

22. Die vollständige Herstellung des Ausdruckes einer (primären oder secundären) ϑ-Reihe bei vorgeschriebenen Nullpunkten ist nun auf die Ermittelung der Riemann'schen Constanten

$$K_\mu = \frac{1}{2}\,(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{\pi i} \sum_{\lambda \lessgtr \mu} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda^{+} u_\mu\, du_\lambda \quad (\mu = 1, 2, \cdots p)$$

zurückgeführt.

Es ist mir (1889) gelungen, die hier verlangten Integrationen für die ultraelliptischen Functionen aller Genera $p > 1$ direct auszuführen. Dadurch wurde es mir möglich, in der bereits oben (Einleitung, Convergenzbeweis) erwähnten Vorlesung vom Jahre 1890 die Theorie der ultraelliptischen Functionen aller Genera vollständig durchzuführen, ohne dafür irgend einen Satz aus der allgemeinen Theorie der Abel'schen Functionen heranziehen zu müssen.

Ich beginne mit diesem besondern Falle, und lasse dann erst die allgemeinen Hülfsmittel folgen, welche, an einen Riemann'schen Gedanken*) anknüpfend, es Herrn Prym möglich gemacht haben, schon vor 35 Jahren die gleiche Aufgabe für die ultraelliptischen Functionen $p > 1$ zu lösen. Ich kann diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne die unbeschreiblichen Verdienste in Erinnerung zu bringen, welche Herr Prym sich durch seine damaligen Publicationen um das Verständniss Riemann's erworben hat.

23. *Die Riemann'schen Constanten für die ultraelliptischen Functionen; Querschnittsystem Neumanns.***) Die Irrationalität dieser Theorie sei

$$S = \sqrt{f(z)}, \quad f(z) = z - \alpha \cdot z - \alpha_1 \cdot z - \alpha_2 \cdots z - \alpha_{2p+1},$$

$\alpha\, \alpha_1 \cdots \alpha_{2p+1}$ seien die $2p+2$ Verzweigungspunkte $\Delta\, \Delta_1 \cdots \Delta_p$ die Doppellinien der Fläche T, und zwar reiche Δ von α bis α_1, Δ_1 von α_2 bis $\alpha_3, \cdots \Delta_\lambda$ von $\alpha_{2\lambda}$ bis $\alpha_{2\lambda+1}, \cdots \Delta_p$ von α_{2p} bis α_{2p+1}. Die Fläche T

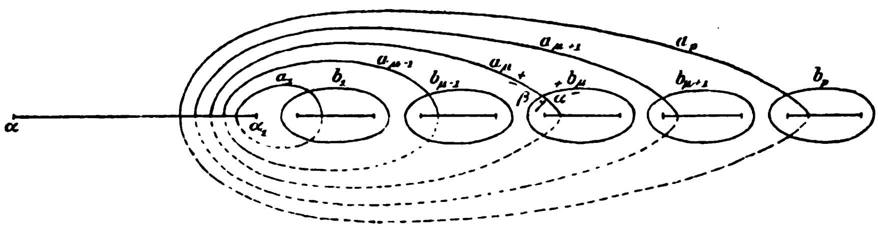


Fig. 2.

besteht aus zwei Blättern E_1 und E_2: sie sind in den Doppellinien über Kreuz aneinander geheftet.

Das Neumann'sche Querschnittsystem, an welches sich erhebliche Vereinfachungen knüpfen, entsteht wie folgt. Zuerst werden über E_1 Ringschnitte $b_1\, b_2 \cdots b_p$ um $\Delta_1\, \Delta_2 \cdots \Delta_p$ gelegt, dann einer nach dem andern, zu jedem ein Querschnitt $a_1\, a_2 \cdots a_p$ in der Weise, dass zunächst a_1, dann $a_2, \cdots$, dann $a_\lambda, \cdots$ und zuletzt a_p über E_1 hinweg von Δ durch $b_1\, b_2 \cdots b_\lambda \cdots b_p$ nach $\Delta_1\, \Delta_2 \cdots \Delta_\lambda \cdots \Delta_p$ führt, und dann auf E_2 übergehend, dort zum ringförmigen Abschluss gebracht wird.

Um eine einfach zusammenhängende Fläche zu erhalten, bedarf es

---

*) Theorie d. Ab. F. Art. 23.

**) Carl Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. Leipzig 1865. VIII. Vorlesung, 5. Abschnitt. Die vorstehende Skizze entspricht *im Wesentlichen* dem Schnittsystem Neumann's.

noch eines Schnittsystems c, welches sich aber für unsern augenblicklichen Zweck als überflüssig erweist.

Bei den Integralen I. G. nehme ich zur untern Grenze den Verzweigungspunkt α: in der durch das Schnittsystem a, b begrenzten Fläche T, ist dann jedes Integral I. G- eindeutig und stetig, und die Summe der Werthe, die es auf E_1 und E_2 im Unendlichen annimmt, gleich Null. Die Normalintegrale I. G. bezeichne ich wie folgt:

$$u_\mu(o) = \int_\alpha^z \frac{\Phi_\mu(z)\, dz}{s} \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

o ist der veränderliche Punkt z, s und $\Phi_\mu(z)$ eine ganze Function von z, deren Grad $\overline{\gtrless} p - 1$ ist. Was die Periodicitätsmoduln betrifft, braucht nicht wiederholt zu werden.

Dazu kommt nun die Function $R(o|\varepsilon)$, welche ich an Stelle des Riemann'schen Integrals III. G. in die allgemeine Theorie der Abel'schen Functionen eingeführt habe. Haben z, s im Punkte ε die Werthe ζ, σ, so ist für den Fall der ultraelliptischen Functionen

$$R(o|\varepsilon) = \int \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s},$$

und wenn $\mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon)$, $\mathfrak{B}_\lambda(\varepsilon)$ seine Periodicitätsmoduln an a_λ, b_λ sind,

$$\mathfrak{A}_\lambda(\varepsilon) = \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s}, \quad \mathfrak{B}_\lambda(\varepsilon) = \int \left| \begin{matrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{matrix} \right|_\lambda \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s}$$

mit der Beschränkung, dass kein Integrationsweg b_λ, a_λ durch den Punkt ε gehen darf. Das giebt, für $\mu = 1, 2, \cdots p$:

$$\mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) = 2u_\mu(\varepsilon) + \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} \mathfrak{A}_\nu(\varepsilon).$$

Dies benutze ich umgekehrt, um einen völlig ausgeführten Ausdruck für die Normalintegrale I. G. zu gewinnen:

$$2u_\mu(\varepsilon) = \mathfrak{B}_\mu(\varepsilon) - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} \mathfrak{A}_\nu(\varepsilon)$$

oder

$$2u_\mu(\varepsilon) = \int \left| \begin{matrix} \beta \\ a \\ \gamma \end{matrix} \right|_\mu \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s} - \frac{1}{\pi i} \sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu} \int \left| \begin{matrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{matrix} \right|_\nu \frac{s+\sigma}{z-\zeta} \cdot \frac{dz}{2s}.$$

Vergleicht man dies mit dem ursprünglichen Ausdrucke

$$u_\mu(\varepsilon) = \int_\alpha^\zeta \frac{\Phi_\mu(\zeta)\, dz}{\sigma},$$

so sieht man, dass die Variable ζ hier obere Grenze der Integration ist, während sie im neuen, völlig ausgeführten Ausdrucke, *Parameter unter dem Integralzeichen ist.*

Der neue Ausdruck für $u_\mu(\varepsilon)$ setzt aber voraus, dass kein Querschnitt a_μ, b_ν durch ε geht, oder dass der Punkt ε keinem Integrationswege a_μ, b_ν angehört: der Ausdruck für K_μ:

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda 2\overset{+}{u}_\mu\, du_\lambda$$

dagegen fordert, dass der variable Punkt dem + Rande von b_λ folgt. Beiden zugleich genügen wir, indem wir im Ausdrucke für K_μ jeden Integrationsweg b_λ $\left(\lambda \lessgtr \mu\right)$ zu einem *ihn einschliessenden* b_λ' erweitern, und ihn bei der Integration vom Punkte ε durchlaufen lassen.

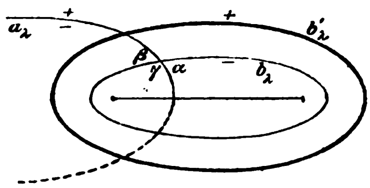


Fig. 3.

Das giebt dann

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\int \left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda 2u_\mu(\varepsilon)\, du_\lambda(\varepsilon)$$

d. i.

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\int \left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda$$

$$\left\{\int \left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s} - \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s}\right\} du_\lambda(\varepsilon),$$

wo die Reihenfolge der Integrationen umkehrbar ist, da beim Integranden jede Unstetigkeit ausgeschlossen ist. Dabei fällt ins Gewicht, dass b_μ' als Integrationsweg nicht vorkommt.

Da

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{z-\zeta} + \sigma\cdot\frac{1}{s(z-\zeta)} \quad \text{und} \quad du_\lambda(\varepsilon) = \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\sigma}$$

ist, so ist auch

$$\frac{s+\sigma}{z-\zeta}\cdot\frac{dz}{s}\,du_\lambda(\varepsilon) = du_\lambda(\varepsilon)\cdot\frac{dz}{z-\zeta} - \frac{dz}{s}\cdot\frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

und das giebt

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) + \frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda \lessgtr \mu}\int \left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{z-\zeta}$$

$$-\frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda\lessgtr\mu}\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{s}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

$$-\frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda\lessgtr\mu}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{dz}{z-\zeta}$$

$$+\frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda\lessgtr\mu}\sum_{\nu=1}^{p} a_{\mu\nu}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\nu \frac{dz}{s}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Neben der zweiblättrigen Fläche Π benutze ich noch eine einfache z-Ebene, die Hülfsebene H, in welcher oben der Plan des Querschnittsystems vorgezeichnet ist.

Dort erweist sich das

$$\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{z-\zeta} = -2\pi i \quad \text{oder} \quad = 0,$$

jenachdem ζ von a_μ ein- oder ausgeschlossen ist. Es ist aber ζ Punkt von b'_λ, d. h., weil b'_μ fehlt, von $b'_1 \cdots b'_{\mu-1}\, b'_{\mu+1} \cdots b'_p$. Von a_μ eingeschlossen ist ζ, also ε nur für $\lambda = 1, 2, \cdots \mu - 1$, es folgt

$$\frac{1}{4\pi i}\sum_{\lambda\lessgtr\mu}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda(\varepsilon)\int\left|\begin{matrix}\beta\\ a\\ \gamma\end{matrix}\right|_\mu \frac{dz}{z-\zeta} = -\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\mu-1}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda du_\lambda$$

$$= -\frac{\pi i}{2}(\mu - 1).$$

In der zweiten Summe ist z Punkt von a_μ, also, weil $\lambda \lessgtr \mu$ ist, niemals von b'_λ eingeschlossen. Die zweite Summe im Ausdrucke K_μ ist also $= 0$. Das nämliche folgt für die dritte Summe, da ζ als Punkt von b'_λ niemals von b_ν eingeschlossen sein kann. Es bleibt nur die vierte Summe. Dort ist z Punkt von b_ν, und von b'_λ nur eingeschlossen, wenn $\nu = \lambda$ ist. Die vierte Summe ist also

$$= \frac{1}{4\pi i\cdot\pi i}\sum_{\lambda\lessgtr\mu} a_{\mu\lambda}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \frac{dz}{s}\int\left|\begin{matrix}\alpha'\\ b'\\ \gamma'\end{matrix}\right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{\lambda\lessgtr\mu} a_{\mu\lambda}\int\left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda \frac{\Phi_\lambda(z)\,dz}{s} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lessgtr\mu} a_{\mu\lambda}.$$

Alles zusammengenommen haben wir

$$K_\mu = \frac{1}{2}(\pi i + a_{\mu\mu}) - \frac{\pi i}{2}(\mu - 1) + \frac{1}{2}\sum_{\lambda \lessgtr \mu} a_{\mu\lambda}$$

oder endlich

$$K_\mu = \pi i - \frac{1}{2}\mu\pi i + \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\mu\lambda},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$K_\mu = (1-\mu)\pi i + \frac{1}{2}(GH)_\mu,$$

wenn

$$G_\mu = \mu \quad \text{und} \quad H_1 = H_2 = \cdots = H_p = 1$$

gesetzt wird.

24. *Allgemeine Theorie der Riemann'schen Constanten.* Sei

$$\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$$

ein vollständiges Punktsystem I. G. Dasselbe lässt sich auf mindestens eine Art in zwei Gruppen, jede von $p-1$ Punkten so zerfällen, dass jede Gruppe für sich allein nur wesentliche Punkte enthält, und dann enthält jede von beiden Gruppen alle diejenigen Punkte, welche zur andern als nothwendige gehören. Sei $\varepsilon_1\,\varepsilon_2 \cdots \varepsilon_\alpha \cdots \varepsilon_{p-1}$ die eine, $\varepsilon_p \cdots \varepsilon_\beta \cdots \varepsilon_{2p-2}$ die andere Gruppe und

$$\vartheta = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) - \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) + K_\mu\right)\!\right)$$

eine Primärreihe, ω ebenso wie o ein variabler Punkt. Dieser Ausdruck ist als Function von z nicht identisch Null, er wird es aber, so oft ω mit einem Punkte ε_β der andern Gruppe zusammenfällt. Da ϑ ausserdem verschwindet, wenn ω und o zusammenfallen, so sind, wenn jetzt ω als variabler, o als fester Punkt betrachtet wird, $o\,\varepsilon_p \cdots \varepsilon_\beta \cdots \varepsilon_{2p-2}$ die Nullpunkte von

$$\vartheta = \vartheta\left(\!\left(u_\mu(\omega) - u_\mu(o) + \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) - K_\mu\right)\!\right),$$

und der μ^{te} Parameter $u_\mu(o) - \sum_\alpha u_\mu(\varepsilon_\alpha) + K_\mu$ drückt sich also aus $= u_\mu(o) + \sum_\beta u_\mu(\varepsilon_\beta) - K_\mu + (g'h')_\mu$. Das giebt die Riemann'sche Formel*)

$$(1) \qquad 2K_\mu = \sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) + (g'h')_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p).$$

*) Theorie der Abel'schen Functionen art. 23, wo die Formel als Congruenz geschrieben ist.

Nun sei w' derjenige Integrand I. G. dessen Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$ sind. Ausser diesen Punkten wird w' wie jeder Integrand I. G. $= 0$ nur noch in $\infty_1 \infty_2 \cdots \infty_n$, jedesmal zur Ordnung 2, und es wird $w' = \infty$, und zwar zur ersten Ordnung, in $2p - 2 + 2n$ (einfachen) Verzweigungspunkten der Fläche T. Werden diese durch

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2p-2+2n}$$

bezeichnet, so giebt das Abel'sche Theorem die p Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) + 2\sum_{\mu=1}^{n} u_\mu(\infty_k) - \sum_{\nu=1}^{2p-2+2n} u_\mu(\alpha_\nu) = -(gh)_\mu,$$

und hier sind die ganzen Zahlen g, h durch die Formeln

$$(2) \qquad g_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \begin{vmatrix} \gamma \\ a \\ \beta \end{vmatrix}_\lambda d\log w', \quad h_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \begin{vmatrix} \alpha \\ b \\ \gamma \end{vmatrix}_\lambda d\log w'$$

bestimmt: ich nenne sie *die zu w' associirten Zahlen.*

Aber nach unserer definitiven Bestimmung der Normalintegrale [(2) Nr. 8] ist

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{n} u_\mu(\infty_k) = 0,$$

es folgt

$$(4) \qquad \sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) - (gh)_\mu.$$

Dies in (1) eingeführt, gebe

$$(5) \qquad 2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\mathfrak{H})_\mu,$$

dann mögen die $2p$ ganzen, und von der Wahl des Integranden w' völlig unabhängigen Zahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *die Fundamentalzahlen* heissen.

Schafft man hier die Verzweigungspunkte mittels (4) weg, so kommt

$$(6) \qquad 2K_\mu = \sum_{k=1}^{2p-2} u_\mu(\varepsilon_k) + (\mathfrak{G} + g \,|\, \mathfrak{H} + h)_\mu;$$

hier sind also $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die Fundamentalzahlen, $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{2p-2}$ sind die Nullpunkte eines beliebigen Integranden I. G. w' und g, h die zu w' associirten Zahlen.

25. Die weitern Ausführungen setzen die Lösungen der Aufgabe voraus, w' so zu bestimmen, dass seine Nullpunkte $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdots$ zu zwei und zwei zusammenfallen.

A. Seien $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ die $p-1$ Punkte, in denen w' jetzt zur zweiten Ordnung Null wird und

B. wiederum seien g, h die zu w' associirten Zahlen.

Aus (6) folgt

$$\text{C.} \qquad K_\mu = \sum_1^{p-1} u_\mu(\delta_\lambda) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu,$$

während zugleich

$$\text{D.} \qquad 2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\,\mathfrak{H})_\mu$$

ist, wo $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ die von w' ganz unabhängigen Fundamentalzahlen bedeuten.

Zu o nehme man noch einen zweiten variablen Punkt ω, und führe diejenige ϑ-Function ein, deren Nullpunkte $\omega\,\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ sind. Ist

E. $\varrho \gtreqless 0$ die Anzahl der nothwendigen Punkte im System $\delta_1\,\delta_2 \cdots \delta_{p-1}$, so ist nach Lehrs. XIII, Nr. 17 eine Secundärreihe ϱ^{ter} Ordnung oder wenn $\varrho = 0$ ist eine Primärreihe

$$\vartheta_\varrho\Big(\!\!\Big(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) - \sum_1^{p-1} u_\mu(\delta_k) + K_\mu\Big)\!\!\Big)$$

zu bilden, und ihre Summe ist demnach 1) nicht identisch Null, aber sie wird 2) Null zur Ordnung Eins, wenn o und ω zusammenfallen. Mit Hülfe von C. wird das

$$= \vartheta_\varrho\Big(\!\!\Big(u_\mu(o) - u_\mu(\omega) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu\Big)\!\!\Big).$$

Hier kommen die Formeln (a), (b) am Schlusse der Nr. 4 zur Anwendung. Die erste giebt, wenn $e_1 \cdots e_p$ die Parameter einer ϑ_ϱ sind,

$$\vartheta_\varrho\big(\!\big(u_\mu - e_\mu - (g'h')_\mu\big)\!\big) = \vartheta_\varrho\big(\!\big(u_\mu - e_\mu\big)\!\big)\, e^{-\Phi((h')) + 2\sum h'_\mu (u_\mu - e_\mu)}.$$

Wir nehmen

$$u_\mu - e_\mu = u_\mu(o) - u_\mu(\omega) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu$$

$$(g'h')_\mu = (\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu \qquad .$$

und setzen zur Vereinfachung der Formeln

$$u_\mu(o) - u_\mu(\omega) = v_\mu \qquad\qquad (\mu = 1, 2, \cdots p);$$

eine kleine Reduction giebt dann

$$\vartheta_\varrho\big(\!\big(v_\mu - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu\big)\!\big) = \vartheta_\varrho\big(\!\big(v_\mu + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g\,|\,\mathfrak{H}+h)_\mu\big)\!\big)\cdot(-1)^M \cdot e^{2\sum(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu)v_\mu}$$

für

$$M = \sum_{\mu} (\mathfrak{G}_\mu + g_\mu)(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu).$$

Nun ist nach (6) Nr. 4

$$\vartheta_\varrho(\!(+w_\mu)\!) = (-1)^\varrho \vartheta_\varrho(\!(-w_\mu)\!).$$

Wenden wir dies auf der linken Seite der vorstehenden Formel an und setzen

$$e^{\Sigma(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu) v_\mu} \vartheta_\varrho(\!(v_\mu + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{G}+g \,|\, \mathfrak{H}+h)_\mu)\!) = F(\!(v_\mu)\!),$$

so folgt

$$(-1)^\varrho F(\!(-v_\mu)\!) = (-1)^M F(\!(v_\mu)\!).$$

Entwickelt man nun $F(\!(v_\mu)\!)$ nach ganzen homogenen Functionen $V_0, V_1, V_2, \cdots$ der Argumente $v_1 v_2 \cdots v_p$, so muss das constante Glied V_0 fehlen, da $F(\!(v_\mu)\!) = F(\!(u_\mu(o) - u_\mu(\omega))\!)$ verschwindet, wenn o mit ω zusammenfällt, aber der lineare Theil V_1 kann nicht fehlen, weil F im angegebenen Falle nur zur ersten Ordnung verschwindet. Die Entwicklung hat also die Form

$$F(\!(v_\mu)\!) = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots,$$

wo V_1 nicht fehlt, und nun folgt

$$(-1)^{\varrho+1} | V_1 - V_2 + V_3 - \cdots | = (-1)^M | V_1 + V_2 + V_3 + \cdots |.$$

Das giebt

$$(-1)^M = (-1)^{\varrho+1},$$

d. h. M ist mit $\varrho + 1$ zugleich gerade oder ungerade.

26. Damit ist das hier in Aussicht genommene Ziel erreicht; wir haben den folgenden Satz:

XVI. Jeder Integrand I. G. w', dessen $2p-2$ Nullpunkte zu zwei und zwei zusammenfallen, liefern zur Bestimmung der Fundamentalzahlen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ oder ihrer Reste modulo 2 eine Congruenz

$$\sum_{\mu=1}^{p} (\mathfrak{G}_\mu + g_\mu)(\mathfrak{H}_\mu + h_\mu) \equiv \varrho + 1 \pmod{2},$$

und hier sind

1) g, h die zu w' associirten Zahlen

$$g_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \left|\begin{matrix}\gamma\\ a\\ \beta\end{matrix}\right|_\lambda d\log w', \quad h_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \left|\begin{matrix}\alpha\\ b\\ \gamma\end{matrix}\right|_\lambda d\log w'.$$

2) Sind $\delta_1 \delta_2 \cdots \delta_{p-1}$ die $p-1$ Punkte, in denen — abgesehen von den unendlich fernen Nullpunkten zweiter Ordnung — die Nullpunkte von w' sich paarweise vereinigen, so giebt ϱ an, wie viel nothwendige sich unter jenen befinden.

3) Hat man aus einer genügenden Anzahl solcher Congruenzen die Reste gefunden, welche die Fundamentalzahlen bei der Division durch 2 lassen, so liefert die Formel

$$2K_\mu = \sum_\nu u_\mu(\alpha_\nu) + (\mathfrak{G}\mathfrak{H})_\mu,$$

wenn die Summation über alle $2p - 2 + 2n$ einfachen Verzweigungspunkte α_ν erstreckt wird, die Riemann'schen Constanten bis auf Simultanperioden, was für die Formation aller ϑ-Reihen ausreicht.

Grundlagen für eine Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter O.*)

Von

ERNST PASCAL in Pavia.

Wie man weiss, besteht ein interessantes Problem in der Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 1ter Ordnung darin, die Bedingungen aufzusuchen, unter welchen ein solches System *vollständig integrirbar* oder, wie A. Mayer sagt, *unbeschränkt integrabel* ist, d. h. unter welchen es sich durch so viele Relationen zwischen den Variabelen und mit so vielen Constanten integriren lässt, als Gleichungen vorhanden sind. Diese Bedingungen und die Methoden zur Integration des Systems untersuchte zuerst Deahna, Crelle, 20, später wurden sie gründlicher von vielen anderen Autoren studirt, von Natani, Crelle, 58; Mayer, Math. Ann., 5; Frobenius, Crelle, 82, etc. Die Theorie, welche sich auf diese Art herausgebildet hat, steht in enger Verbindung mit der Lehre von den Systemen linearer partieller Differentialgleichungen 1ter Ordnung mit derselben unbekannten Function, deren Integration, wie Clebsch, Crelle, 65 bewies, sich immer auf die eines sogenannten *vollständigen Systems* reduciren lässt, welchem man seinerseits stets die Form eines *Jacobi'schen Systems* geben kann; die Integration eines Jacobi'schen Systems aber und die eines unbeschränkt integrabelen Systems totaler Differentialgleichungen sind immer einander gleichwerthig.

Der Fall totaler Differentialgleichungen 2ter Ordnung ist bis jetzt von den Analytikern noch nicht untersucht worden, wenn man eine Arbeit von Guldberg, Compt. Rend., 1898; Akad. von Christiania, 1898 ausnimmt, welcher den Anfang mit ihrem Studium machte, sich dabei jedoch auf den Fall *einer einzigen* totalen Differentialgleichung 2ter Ordnung mit *drei* Variabelen beschränkte.

Der Verfasser hat nun in Folge von Vorlesungen über Analysis, die

---

*) Diesen vom Verfasser in italienischer Sprache geschriebenen Aufsatz hat Herr Oberl. Adolf Schepp in Wiesbaden in das Deutsche übersetzt. Der Verfasser stattet ihm hiermit öffentlich seinen besten Dank ab.

er in diesem Winter an der Universität zu Pavia gehalten hat, geglaubt, diese Frage von einem allgemeinen Gesichtspunkt aus wieder aufnehmen zu sollen, umsomehr, weil, wie ihm scheint, die Resultate, zu denen man gelangt, relativ einfach sind und eine bemerkenswerthe Ausdehnung der bekannten Resultate der gewöhnlichen Theorie der totalen Systeme 1ter Ordnung bilden.*)

§ 1.

Einleitendes.

Es mögen n Variabele $x_1, \cdots, x_n$ vorliegen, von welchen man m, und zwar $x_{n-m+1}, \cdots, x_n$, als Functionen der übrigen $n-m$ zu betrachten habe. Wir wollen uns m Gleichungen denken, welche die zweiten Differentiale der $x_{n-m+1}, \cdots, x_n$ und die ersten Differentiale aller Variabelen enthalten; diese Gleichungen seien auf die folgende normale Form reducirt:

$$(1)\qquad \begin{cases} d^2x_{n-m+1} - \sum\limits_{h,k=1}^{n}\sum X_{hk1}\, dx_h\, dx_k = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d^2x_n \qquad - \sum\limits_{h,k=1}^{n}\sum X_{hkm}\, dx_h\, dx_k = 0, \end{cases}$$

worin die X Functionen *aller* Variabelen sind, und

$$X_{hki} = X_{khi}$$

ist.

Das Problem, welches wir lösen wollen, besteht darin, *das System* (1) *durch m endliche Gleichungen $\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_m = 0$ zwischen den x zu integriren und die Bedingungen aufzufinden, unter welchen dieses möglich ist.*

Dabei zeigen sich nun viele Unterschiede, die in den verschiedenen Hypothesen begründet sind, welche wir über die grössere oder geringere Anzahl von willkürlichen Constanten machen können, die wir uns in den φ enthalten denken wollen.

Nehmen wir an, die φ enthalten m lineare Functionen:

$$\begin{aligned} \alpha' &= c_1' x_1 + \cdots + c'_{n-m} x_{n-m} + c', \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha^{(m)} &= c_1^{(m)} x_1 + \cdots + c^{(m)}_{n-m} x_{n-m} + c^{(m)} \end{aligned}$$

der $x_1, \cdots, x_{n-m}$ mit willkürlichen constanten Coefficienten, deren Anzahl also

$$m(n-m+1)$$

*) Eine kurze Uebersicht über die in dem vorliegenden Aufsatz enthaltenen Resultate ist in den Comptes Rendus der Pariser Akademie vom 5. März 1900 erschienen.

ist. Wir wollen die ersten und zweiten Differentiale der φ bilden, sie gleich Null setzen und aus den $3m$ Relationen

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = 0, \cdots, \quad \varphi_m = 0, \\ d\varphi_1 = 0, \cdots, \ d\varphi_m = 0, \\ d^2\varphi_1 = 0, \cdots, d^2\varphi_m = 0 \end{cases}$$

die $2m$ Ausdrücke

$$\alpha', \quad \alpha'', \cdots, \quad \alpha^{(m)},$$
$$d\alpha', \ d\alpha'', \cdots, d\alpha^{(m)}$$

eliminiren. Wir erhalten auf diese Art m totale Differentialgleichungen 2[ter] Ordnung, also ein System, welchem man bei geeigneter Auflösung die Form (1) geben kann.

Wenn das System (1) durch m Gleichungen, wie die vorstehenden, d. h. durch solche, die m willkürliche lineare Functionen der unabhängigen Variabelen und mithin $m(n-m+1)$ willkürliche Constanten enthalten, integrirbar ist, so sagen wir, es sei *ein unbeschränkt integrabeles System.*

Wir werden in einem der nächsten Paragraphen die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen aufsuchen, unter welchen das System (1) unbeschränkt integrabel ist, und werden beweisen, dass sich das System (1) alsdann mit der grössten Anzahl willkürlicher Constanten integriren lässt, und dass in diesem Fall die allgemeinsten Integrale des Systems (1) diese Constanten *nothwendiger Weise* in der Form von Coefficienten von m *linearen Functionen*, wie die α, enthalten müssen. *Die Hypothese, dass die Constanten in anderer Form auftreten, ist nicht zulässig.*

Wir wollen noch einen Augenblick bei dem eben angegebenen Fall verweilen und uns denken, die Gleichungen $\varphi = 0$ seien nach den α aufgelöst und man habe ihnen die Gestalt gegeben

$$(3) \qquad \begin{cases} \psi_1 - \alpha' = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \psi_m - \alpha^{(m)} = 0. \end{cases}$$

Differenzirt man diese Relationen *zwei* Mal, so verschwinden die α, und das System der zweiten Differentiale der Functionen ψ muss mit dem gegebenen System (1) zusammenfallen. Dieses Zusammenfallen muss ohne jede Rücksicht sowohl auf die Gleichungen (3) wie auf ihre ersten Differentiale stattfinden, durch deren Verschwinden diese zweiten Differentiale sich *in keiner Weise* ändern können, denn sowohl die Gleichungen (3), wie ihre *ersten* Differentiale enthalten noch willkürliche Constanten. Wir betonen diese allgemein bekannten Ueberlegungen, weil es gerade die Existenz der mit dieser Eigenschaft ausgestatteten m Functionen ψ ist, welche die unbeschränkt integrabelen Systeme *charakterisirt.*

Nehmen wir aber an, die φ enthalten eine Anzahl M willkürlicher Constanten, die *kleiner* als $m(n-m+1)$ ist.

Alsdann lässt sich leicht zeigen, dass, wenn diese M Constanten nur in m Functionen $f_1, f_2, \cdots, f_m$ auftreten, die ihrerseits in den φ enthalten sind, und nach welchen sich die Gleichungen $\varphi = 0$ auflösen lassen, es nicht möglich ist, dass die $f_1, f_2, \cdots, f_m$ *sämmtlich lineare* Functionen der unabhängigen Variabelen sind — vorausgesetzt, dass keine der Functionen f constant und $\mathsf{M} \gtreqless 2m$ ist. Denn, löst man die Gleichungen $\varphi = 0$ nach den f auf, so erhält man ein System wie (3), es würde sich mithin die Existenz der Functionen ψ ergeben, das System (1) wäre also unbeschränkt integrabel und es müsste gegen die Voraussetzung $\mathsf{M} = m(n-m+1)$ sein. Zu diesem Schluss kommt man jedoch nicht, wenn eine der Functionen f constant ist, weil sich alsdann eine totale Differentialgleichung *1ter Ordnung* ohne Constanten ergeben würde und durch sie das System von Differentialgleichungen 2ter Ordnung derart geändert werden könnte, dass es die Eigenschaft verliert, unbeschränkt integrabel zu sein. Da auf der anderen Seite $\mathsf{M} \geqq 2m$ vorausgesetzt wurde, so ist es nicht möglich, aus den m Integralgleichungen und ihren m ersten Differentialen die M Constanten zu eliminiren, und auf diese Art eine Relation zu erhalten, durch welche sich die zweiten Differentiale ändern können.

In dem obigen Fall dürfen daher die Functionen $f_1, f_2, \cdots, f_m$, wenn sie existiren, mit Ausnahme einer einzigen *keinesfalls linear* sein, und es müssen zwischen ihnen, ihren ersten und ihren zweiten Differentialen Relationen derart bestehen, dass sie sich gleichzeitig aus den $3m$ Gleichungen (2) eliminiren lassen. Insbesondere, wenn $m = 1$ und $1 < \mathsf{M} < n$ ist, und die Existenz einer Function f festgestellt ist, so kann diese nicht *linear* sein.

Unter allen Fällen, welche den verschiedenen Werthen von M entsprechen, und in welchen M den *grössten* oben angegebenen Werth nicht annimmt, wollen wir den beiden Fällen einen besonderen Namen geben, in welchem $\mathsf{M} \doteq m$ ist und *die Gleichungen $\varphi = 0$ sich nach den m Constanten, die daher als in ihnen enthalten angenommen werden, auflösen lassen*, und in welchem $\mathsf{M} = 0$ ist. Der erste dieser beiden Fälle möge der Fall des *partiell integrabelen Systems* und der zweite der des *singulär integrabelen Systems* heissen.

In dem Fall des partiell integrabelen Systems denken wir uns die Gleichungen $\varphi = 0$ nach den m Constanten aufgelöst und daher in die Form

$$\begin{aligned} \chi_1 - c_1 &= 0, \\ \cdots & \\ \chi_m - c_m &= 0 \end{aligned}$$

gebracht. Wenn wir von den χ die ersten und zweiten Differentiale bilden, so ist es unmöglich, dass das System dieser zweiten Differentiale, ohne irgend eine Aenderung mit ihm vorzunehmen, mit dem gegebenen System zusammenfalle; sonst würde dieses ein unbeschränkt integrabeles System sein; das Zusammenfallen kann nur dann stattfinden, wenn wir diese zweiten Differentiale abändern mit Hülfe der ersten Differentiale *aller* gleich Null gesetzten χ und keiner anderen, als dieser, weil wir sonst wieder die c einführen würden. Es ist auch offenbar nicht möglich, die ersten Differentiale nur einiger der χ und nicht aller, zu berücksichtigen; denn, nimmt man z. B. an, das erste Differential von χ_m sei nicht nöthig, so liesse sich an Stelle des Integrals $\chi_m - c_m = 0$ immer das allgemeinere Integral $\chi_m - \alpha^{(m)} = 0$ substituiren, worin $\alpha^{(m)}$ eine willkürliche lineare Function der unabhängigen Variabelen ist, und mithin wäre die Zahl M nicht gleich m, sondern gegen die Voraussetzung grösser als m.

Die Existenz der m Functionen χ, welche mit dieser Eigenschaft ausgestattet, d. h. derart sind, dass sich aus dem System der $2m$ Gleichungen

$$d\chi_1 = 0, \cdots, d\chi_m = 0,$$
$$d^2\chi_1 = 0, \cdots, d^2\chi_m = 0$$

unter Berücksichtigung *aller* Gleichungen der ersten Zeile das gegebene System (1) ableiten lässt, charakterisirt das *partiell* integrabele System.

Es leuchtet ein, dass man die Eigenschaft der Functionen χ präciser auch so aussprechen kann: jede Gleichung des Systems (1) lässt sich als eine lineare Combination vom Typus

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i d^2\chi_i + \sum_{i=1}^{m} L_i d\chi_i$$

zusammensetzen, worin die λ Functionen der x und die L lineare Differentialformen 1^ter Ordnung in $dx_1, \cdots, dx_n$ sind *und kein L gleich Null ist.*

Als letzter Fall schliesslich kann es vorkommen, dass die Gleichungen (1) sich nur durch ein System von m Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \cdots, \varphi_m = 0$$

befriedigen lassen, *welche keine willkürliche Constante enthalten.* Die Bedingungen, unter welchen dies vorkommen kann, werden wir später aufsuchen. Dieser Fall soll, wie schon gesagt wurde, 'der Fall der *singulär integrabelen* Systeme genannt werden, und ist durch die Existenz von m Functionen φ charakterisirt, deren System der zweiten Differentiale mit dem System (1) zusammenfällt, nachdem man das Verschwinden *aller* Functionen φ, *ohne eine einzige auszunehmen* und eventuell auch noch das Verschwinden ihrer ersten Differentiale in Rechnung gezogen hat.

Wir wollen jedoch bemerken, dass der so eingeführte Begriff von singulären Integralen nicht mit jenem anderen zu verwechseln ist, dem man denselben Namen beizulegen pflegt. Denn, während man sonst unter singulären Integralen diejenigen versteht, die man aus den allgemeinen Integralen nicht dadurch ableiten kann, dass man den Constanten specielle Werthe giebt, so nehmen wir hier dagegen an, dass es sich um ein System handelt, das weder unbeschränkt noch partiell noch auch mit einer beliebigen Anzahl von Constanten integrirt werden kann; es ist mithin selbstverständlich undenkbar, den singulären Integralen eine der gewöhnlichen analoge Bedeutung beizulegen, da nach unserer Voraussetzung allgemeinere Integrale, aus welchen man sich die singulären abgeleitet denken könnte, nicht existiren.

In dem Fall von unbeschränkt oder partiell integrabelen Systemen, wäre zwar die Existenz singulärer Integrale in dem gewöhnlichen Sinn möglich, doch wollen wir in diesem Aufsatz uns nicht mit ihnen beschäftigen. Für Systeme 1ter Ordnung hat einige Betrachtungen dieser Art auch Guldberg in einer anderen Arbeit, Akad. von Christiania, 1899 angestellt.

§ 2.

Unbeschränkt integrabele Systeme.

Wir wollen $(n-m)m$ neue Variabele

$$\begin{matrix} p_{11}, & p_{21}, & \cdots, & p_{n-m,1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{1m}, & p_{2m}, & \cdots, & p_{n-m,m} \end{matrix}$$

einführen und

$$(4) \qquad \begin{cases} dx_{n-m+1} = \sum_{h=1}^{n-m} p_{h1}\, dx_h, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dx_n \qquad = \sum_{h=1}^{n-m} p_{hm}\, dx_h \end{cases}$$

setzen. Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (1) so werden die letzteren

$$(5) \qquad \begin{cases} d^2x_{n-m+1} = \sum_{h,k=1}^{n-m}\sum X'_{hk1}\, dx_h\, dx_k, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ d^2x_n \qquad = \sum_{h,k=1}^{n-m}\sum X'_{hkm}\, dx_h\, dx_k, \end{cases}$$

worin allgemein

$$X'_{hki} = X_{hki} + \sum_{r=1}^{m} [X_{h,n-m+r,i} p_{kr} + X_{k,n-m+r,i} p_{hr}] +$$

$$+ \sum_{r,s=1}^{m} \sum X_{n-m+r,n-m+s,i} p_{hr} p_{ks}$$

und

$$X'_{hki} = X'_{khi}$$

ist.

Aus (4), (5) ergiebt sich unmittelbar

$$(6) \quad \begin{cases} dp_{11} = \sum_{h=1}^{n-m} X'_{h11} dx_h, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ dp_{n-m,m} = \sum_{h=1}^{n-m} X'_{h,n-m,m} dx_h. \end{cases}$$

Die beiden Probleme: das System (1) durch m Gleichungen und mit der grössten Anzahl von Constanten zu integriren, und das System (4), (6) durch eine ebenso grosse Anzahl von Gleichungen, als die Anzahl der Gleichungen dieses Systems beträgt, also durch

$$m + m(n-m) = m(n-m+1)$$

Gleichungen und mit der grössten Anzahl von Constanten zu integriren, sind gleichwerthig. Das aus (4), (6) gebildete System lässt sich, weil es ein System von $m(n-m+1)$ totalen Differentialgleichungen 1[ter] Ordnung ist, wenn gewisse Bedingungen erfüllt sind, mit der grössten Anzahl von Constanten integriren, die der Anzahl $m(n-m+1)$ der Gleichungen selbst gleich kommt; wenn sich dies ausführen lässt, so ist das System (4), (6) ein sogenanntes *unbeschränkt integrabeles* System.

Wir werden im nächsten Paragraphen zeigen und hier für den Augenblick als bewiesen annehmen, *dass, wenn das System* (4), (6) *unbeschränkt integrabel ist, auch nach der Definition in* § 1 *das System* (1) *unbeschränkt integrabel ist und umgekehrt.*

Um daher die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen aufzufinden, unter welchen (1) unbeschränkt integrabel ist, muss man diejenigen suchen, unter welchen das System (4), (6) es ist.

Es sei F_h das Symbol für die Operation

$$\frac{\partial}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{m} p_{hr} \frac{\partial}{\partial x_{n-m+r}} + \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n-m} X'_{hsr} \frac{\partial}{\partial p_{sr}},$$

worin h nur die Werthe $1, 2, \cdots, n-m$ hat. Die Bedingungen, unter welchen das System (4), (6) unbeschränkt integrabel ist, sind dann

$$F_h Y_j - F_j Y_h = 0,$$

wenn man allgemein mit Y_j, Y_h die Coefficienten an der Stelle j oder h auf einer der rechten Seiten der Gleichungen (4) oder (6) bezeichnet. Einige dieser Relationen sind identisch erfüllt und zwar alle diejenigen, in welchen die Y Coefficienten einer Gleichung (4) sind. Denn es ist

$$F_h p_{ji} = X'_{hji}, \quad F_j p_{hi} = X'_{jhi}.$$

Es bleiben daher nur die Relationen vom Typus

$$F_h X'_{jki} - F_j X'_{hki} = 0, \quad \begin{pmatrix} h, j, k = 1, 2, \cdots, n-m \\ i = 1, 2, \cdots, m \end{pmatrix} \tag{7}$$

übrig und diese sind in abgekürzter Form die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, unter welchen das System (1) unbeschränkt integrabel ist. Diese Bedingungen müssen jedoch transformirt und in eine passendere Form gebracht werden.

Wir beginnen mit der Bemerkung, dass die Gleichungen (7) *identisch* gelten müssen, d. h. unabhängig von den Werthen aller Variabelen, die in ihnen auftreten und mithin auch unabhängig von den p. Nun sind die linken Seiten der Gleichungen (7) ganze Functionen 3ten Grades in Bezug auf die p, mithin müssen die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der p Null sein. Auf diese Art ergeben sich die gesuchten Bedingungen in ihrer definitiven Form.

Ferner ist das folgende einfache Resultat zu beachten:

Setzt man symbolisch

$$[j, h, k, i] = \left(\frac{\partial X_{jki}}{\partial x_h} - \frac{\partial X_{hki}}{\partial x_j}\right) + \sum_{s=1}^{m} (X_{j, n-m+s, i} X_{hks} - X_{h, n-m+s, i} X_{jks}), \tag{8}$$

so sind die Coefficienten der verschiedenen Potenzen der p in (7) *sämmtlich Ausdrücke von diesem Typus und es variiren nur die Werthe, welche die Indices erhalten können, je nachdem es sich um den einen oder den anderen Coefficienten handelt.*

Und zwar sieht man leicht:

1. Die Gesammtheit der von den p unabhängigen Terme in (7) ist genau $[j, h, k, i]$, worin diese Indices dieselben Werthe wie in (7) haben.

2. Untersucht man ferner die Terme, welche die p in der ersten Potenz enthalten, so ergiebt sich vor allen Dingen, dass die Gleichung (7), wenn sie entwickelt wird, nur die p von *höchstens* drei Reihen, nämlich

$$p_{k1}, \; p_{k2}, \; \cdots, \; p_{km},$$
$$p_{h1}, \; p_{h2}, \; \cdots, \; p_{hm},$$
$$p_{j1}, \; p_{j2}, \; \cdots, \; p_{jm}$$

enthalten kann; berechnet man

$$F_h X'_{jki},$$

so folgt, dass die Coefficienten von

$$p_{kr},\ p_{jr},\ p_{hr}$$

bezüglich gleich

$$\frac{\partial}{\partial x_h} X_{j,n-m+r,i} + \sum_s X_{j,n-m+s,i} X_{h,n-m+r,i} + \\ + \sum_s X_{n-m+s,n-m+r,i} X_{hjs},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h} X_{k,n-m+r,i} + \sum_s X_{k,n-m+s,i} X_{h,n-m+r,s} + \\ + \sum_s X_{n-m+s,n-m+r,i} X_{hks},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_h} X_{jki} \qquad + \sum_s X_{j,n-m+s,i} X_{k,n-m+r,s} + \\ + \sum_s X_{k,n-m+s,i} X_{j,n-m+r,s}$$

sind; vertauscht man in dem ersten dieser Ausdrücke h mit j und subtrahirt, so verschwindet der letzte Term und es bleibt genau

$$[j, h, n - m + r, i];$$

vertauscht man ferner in dem dritten der vorstehenden Ausdrücke h mit j und subtrahirt dann von dem zweiten und nimmt dieselbe Vertauschung bei dem zweiten vor und subtrahirt von dem dritten, so sind die bezüglichen Resultate

$$[n - m + r,\ h,\ k,\ i],$$
$$[j,\ n - m + r,\ k,\ i].$$

3. Auf ähnliche Art können wir die Terme untersuchen, welche die Producte

$$p_{js}p_{kr},\ p_{hs}p_{kr},\ p_{hs}p_{jr}$$

enthalten und finden, dass die Coefficienten dieser Terme bezüglich

$$[n - m + s,\ h,\ n - m + r,\ i],$$
$$[j,\ n - m + s,\ n - m + r,\ i],$$
$$[n - m + r,\ n - m + s,\ k,\ i]$$

sind.

4. Schliesslich ergiebt sich der Coefficient von

$$p_{js}p_{hr}p_{kt}$$

gleich

$$[n - m + s,\ n - m + r,\ n - m + t,\ i].$$

Die Entwickelung der Gleichung (7) liefert daher, wenn wir der Kürze wegen $n-m+r=\bar r$, $n-m+s=\bar s$ und $n-m+t=\bar t$ setzen:

$$\begin{aligned}[jhki] &+ \sum_r \{[jh\bar r i]p_{kr} + [j\bar r k i]p_{hr} + [\bar r h k i]p_{jr}\} + \\ &+ \sum_r \sum_s \{[\bar r \bar s k i]p_{hs}p_{jr} + [\bar s h \bar r i]p_{js}p_{kr} + [j\bar s \bar r i]p_{kr}p_{hs}\} + \\ &+ \sum_r \sum_s \sum_t [\bar s \bar r \bar t i]p_{js}p_{hr}p_{kt} = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt:

Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen, damit das gegebene System unbeschränkt integrabel sei, werden durch alle Gleichungen

$$[jhki] = 0 \tag{10}$$

gegeben, worin jedoch die Indices jhk nicht nur die Werthe $1, 2, \cdots, n-m$, wie in (7), *sondern auch alle Werthe (bis zu dem Werth n) annehmen können, die grösser als $n-m$ sind.*

Zwischen den Symbolen (8) *bestehen die folgenden linearen Relationen*

$$[jhki] + [jkhi] = [khji],$$

wie man leicht nachweisen kann.

Daraus folgt weiter, dass die Gleichungen (10) nicht sämmtlich linear unabhängig sind; es bleiben als unabhängig nur

$$nm\,\frac{n(n-1)}{2} - m\,\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3} = \frac{m(n-1)n(n+1)}{3}$$

Gleichungen übrig.

Die Anzahl der linear unabhängigen nöthigen und ausreichenden Bedingungen, unter welchen das System (1) *unbeschränkt integrabel ist, beträgt demnach*

$$m\,\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Für $m=1$ und $n=3$ erhält man acht Bedingungen, wie Herr Guldberg in der That in seiner am Anfang citirten Arbeit direct gefunden hat.

§ 3.

Multiplicatorentheorie für die Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter Ordnung.

Für die Systeme 2ter Ordnung lässt sich eine ähnliche Multiplicatorentheorie aufstellen, wie für die 1ter Ordnung.

In § 2 sind wir von einer Definition des *unbeschränkt integrabelen*

Systems ausgegangen, die scheinbar von der in § 1 gegebenen verschieden ist; es wird jedoch bewiesen werden, dass die beiden Definitionen identisch sind.

Jetzt aber wollen wir die Definition von § 1 zu Grunde legen, nach welcher es erforderlich ist, dass die zweiten Differentiale der Functionen ψ der Formeln (3) mit einer linearen Combination der linken Seiten der Gleichungen (1) zusammenfallen. Bezeichnet man nun mit

$$\mu_{1i},\ \mu_{2i},\ \cdots,\ \mu_{mi}$$

ein System von Functionen, mit welchen die linken Seiten der Gleichungen (1) in dieser linearen Combination multiplicirt werden, so muss

$$(11)\qquad \begin{cases} \mu_{ri} = \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-m+r}}, \\ -\displaystyle\sum_{r=1}^{m} X_{hkr}\,\mu_{ri} = \dfrac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_h \partial x_k}, \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

sein, woraus

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{r=1}^{m} X_{hkr} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-m+r}} = 0,$$

$$(13)\qquad \frac{\partial \mu_{si}}{\partial x_h} + \sum_{r=1}^{m} X_{h,n-m+s,r}\,\mu_{ri} = 0, \qquad (h = 1, 2, \cdots, n)$$

folgt. Die Gleichungen (12) bilden ein System von $\frac{n(n+1)}{2}$ partiellen Differentialgleichungen 2ter Ordnung, *denen sämmtliche m Functionen ψ genügen müssen:* sie leisten bei dem Problem, das wir hier behandeln, ähnliche Dienste wie das Jacobi'sche System partieller Differentialgleichungen 1ter Ordnung in der gewöhnlichen Theorie der totalen Differentialgleichungen 1ter Ordnung.

Es lässt sich zeigen, *dass die Gleichungen* (12) *erfüllbar sind, wenn die Coefficienten X den Relationen* (10) *genügen.*

Bezeichnet man mit $F_{hk}(\psi_i)$ die linke Seite von (12), bildet die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} F_{hk}(\psi_i) - \frac{\partial}{\partial x_h} F_{jk}(\psi_i) = 0$$

und benutzt die nämlichen Gleichungen (12), so erhält man die Relationen

$$\sum_r [hjkr] \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{n-m+r}} = 0,$$

welche identisch bestehen, so oft dasselbe von den Gleichungen (10) gilt.

Uebrigens kann man zu dem nämlichen Resultat auch auf anderem ege indirect kommen; es lässt sich nämlich zeigen, *dass die nothwendigen d ausreichenden Bedingungen, damit die m^2 mit den angegebenen Eigen-aften ausgestatteten Functionen μ existiren, eben gerade die Relationen)) sind.*

In der That erhält man aus (13) durch Multiplication mit dx_h und mmirung nach h:

$$d\mu_{si} = -\sum_{h=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{m}\mu_{ri}\,X_{h,n-m+s,r}\right)dx_h\,,\quad (s=1,2,\cdots,m). \tag{14}$$

Für jeden bestimmten Index i bilden diese Gleichungen ein System n m totalen Differentialgleichungen zwischen den Variabelen

$$\mu_{1i},\cdots,\mu_{mi};\qquad x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n.$$

Damit m *unabhängige* Systeme der μ existiren, welche den Glei-ungen (14) genügen, die gleichwerthig mit den Gleichungen (13)*) ıd, ist es nothwendig und hinreichend, dass das System (14) sich r ein festes i durch m Gleichungen mit m willkürlichen Constanten egriren lasse, d. h., dass es ein unbeschränkt integrabeles System 1ter dnung sei.

Setzt man symbolisch

$$F_h = \frac{\partial}{\partial x_h} - \sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{r=1}^{m}\mu_r\,X_{h,n-m+s,r}\right)\frac{\partial}{\partial\mu_s},$$

sind diese Bedingungen bekanntlich

$$F_h\left(\sum_{r=1}^{m}\mu_r\,X_{j,n-m+t,r}\right) - F_j\left(\sum_{r=1}^{m}\mu_r\,X_{h,n-m+t,r}\right) = 0,$$

d sie nehmen, entwickelt, die einfache Gestalt an:

$$\sum_{r=1}^{m}\mu_r\,[j,\,h,\,n-m+t,\,r] = 0.$$

Diese Bedingungen müssen *identisch* erfüllt sein, d. h. auch unab-ngig von den μ; daher müssen alle Symbole

$$[j,\,h,\,n-m+t,\,r],$$

denen $j,\,h$ die Werthe $1,2,\cdots,n$ und $r,\,t$ die Werthe $1,2,\cdots,m$ ben können, Null sein.

*) Man beachte jedoch, dass die (13) nicht mit allen (11) gleichwerthig sind, ndern nur mit denen unter den (11), in welchen $k > n-m$ ist.

Für die Existenz der μ, die den Gleichungen (13) genügen, reichen mithin schon einige der Bedingungen (10) hin; sollen aber die so gefundenen μ, mit den linken Seiten der (1) multiplicirt, eine lineare Combination, welche ein genaues zweites Differential ist, liefern können, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass auch die übrigen Gleichungen (11) erfüllt werden, d. h. diejenigen, in welchen $k < n - m$ ist. Zu diesem Ende müssen die weiteren Relationen bestehen:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_r \mu_r X_{hkr} = \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_r \mu_r X_{jkr}.$$

Entwickelt man und nimmt Rücksicht auf die Gleichungen (13), welche schon erfüllt sind, so erhält man

$$\sum_{r=1}^{m} \mu_r [hjkr] = 0,$$

woraus sich alle Gleichungen (10) ergeben.

Werden aus den Gleichungen (14) die μ mit m willkürlichen Constanten entnommen und diese Constanten auf m verschiedene Arten specialisirt, so erhält man m unabhängige Systeme der μ und mithin m Functionen ψ.

Damit ist denn auch der Satz bewiesen, welcher für unsere Theorie von grundlegender Bedeutung ist, dass die beiden Definitionen der unbeschränkt integrabelen Systeme (1) 2ter Ordnung, die in den §§ 1 und 2 gegeben wurden, gleichwerthig sind, weil beide zu den Bedingungen (10) führen; d. h. also, *dass, wenn das aus* (4), (6) *gebildete System 1ter Ordnung unbeschränkt integrabel ist, dann auch in dem Sinn des* § 1 *das System 2ter Ordnung* (1) *unbeschränkt integrabel ist und umgekehrt.*

Offenbar erhält man die Integration des unbeschränkt integrabelen Systems (1) aus der Integration des Systems (4), (6).

Wir wollen *Multiplicator* des Systems (1) die Determinante der m^2 Functionen μ nennen.

Man findet leicht eine Formel, welche alle logarithmischen partiellen Derivirten des Multiplicators liefert.

Wir setzen

$$\mu = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-m+1}}, & \dots, & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \psi_m}{\partial x_{n-m+1}}, & \dots, & \frac{\partial \psi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

und schreiben an Stelle der Elemente der r^{ten} Columne die Elemente

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_{n-m+r}\, \partial x_h}, \ldots, \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x_{n-m+r}\, \partial x_h},$$

welche nach den Gleichungen (11) bezüglich gleich

$$-\sum_{s=1}^{m} X_{n-m+r,h,s} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_{n-m+s}}, \ldots, -\sum_{s=1}^{m} X_{n-m+r,h,s} \frac{\partial \psi_m}{\partial x_{n-m+s}}$$

sind, so dass also die so umgeänderte Determinante dem Ausdruck

$$-\mu \cdot X_{n-m+r,h,r}$$

gleichkommt. Wenn wir nun r von 1 bis m variiren lassen, und dann die Summe der m so modificirten Determinanten bilden, so erhalten wir offenbar die Derivirte von μ nach x_h, und mithin die Formel

$$(15) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial x_h} + \mu \sum_{r=1}^{m} X_{n-m+r,h,r} = 0, \qquad (h = 1, 2, \cdots, n)$$

welche die logarithmischen Derivirten von μ liefert.

Aus (15) ergeben sich die Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \sum_r X_{n-m+r,h,r} = \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_r X_{n-m+r,j,r},$$

welche, wie man leicht findet, eine Folge der Gleichungen (10) sind, weil sie sich auf

$$\sum_r [j, h, n-m+r, r] = 0$$

reduciren.

§ 4.

Nicht unbeschränkt integrabele Systeme.

Wenn die Gleichungen (9) nicht sämmtlich *identisch* erfüllt sind, d. h. also die Relationen (10) nicht bestehen, so ist das System nicht unbeschränkt integrabel.

Wir wollen einen speciellen Fall herausgreifen und annehmen, es seien einige der Gleichungen (9) identisch erfüllt und die übrigen stellen zwischen den p und den x *sich nicht widersprechende* ν Relationen her, aus denen man ν der Variabelen p und x als Functionen der übrigen bestimmen könne.

Man bilde dann die Differentiale dieser Variabelen und setze sie ebenso, wie die endlichen Werthe der Variabelen in die Gleichungen (4), (6) ein, deren Anzahl $m(n-m+1)$ beträgt.

Nun kann es vorkommen, dass die Gleichungen (4), (6) sich hierdurch auf

$$m(n-m+1)-\nu$$

reduciren, während die übrigen identisch erfüllt werden.

Alsdann bilden auf Grund eines leicht beweisbaren allgemeinen Princips *die $m(n-m+1)-\nu$ übrig bleibenden Gleichungen ein unbeschränkt integrabeles System 1^{ter} Ordnung.* Dieses Princip lautet: Wenn man in einem totalen System 1^{ter} Ordnung für eine der Variabelen eine Function aller übrigen setzt, und wenn hierdurch eine der gegebenen Gleichungen in Folge der übrigen identisch erfüllt, und zugleich auch den Integrabilitätsbedingungen durch diese Substitution oder auch unabhängig von ihr genügt wird, so erfüllt das reducirte System (d. h. das gegebene System, nachdem die bereits befriedigte Gleichung aus ihm ausgeschieden und die Variabele, die als Function der übrigen aufgestellt wurde, aus ihm eliminirt ist) identisch die Integrabilitätsbedingungen. Dieser Satz lässt sich leicht beweisen, indem man zeigt, dass die neuen Integrabilitätsbedingungen mit den früheren identisch sind, wenn man sich in den letzteren auf geeignete Art jene Variabele eliminirt denkt, welche als Function der anderen angenommen wurde. Dasselbe gilt auch dann, wenn man statt *einer* Relation zwischen den Variabelen *mehr als eine* voraussetzt.

Macht man nun die Anwendung auf den uns vorliegenden Fall, so ergiebt sich: Wenn die Gleichungen (9) sich auf ν Relationen zwischen den p und den x zurückführen lassen und diese die Anzahl der Gleichungen des Systems (4), (6) um ν reduciren und dabei die übrigen identisch befriedigen, *alsdann kann das gegebene System 2^{ter} Ordnung* (1) *durch m Gleichungen und mit*

$$m(n-m+1)-\nu$$

Constanten integrirt werden.

Wenn ferner auch die ν Relationen nur dadurch erfüllt werden können, dass man zwischen den übrig gebliebenen x und p neue Relationen einführt, so kann man auf ähnliche Art weiterschliessen und findet, dass diese neuen Relationen mit den übrigen Differentialbeziehungen (4), (6) entweder vereinbar sind — und alsdann lässt sich die Integration von (1) ausführen, jedoch mit einer geringeren Anzahl von Constanten, — oder dass sie mit diesen Beziehungen unvereinbar sind — und in diesem Falle lassen sich die Gleichungen (1) nicht durch m Gleichungen integriren.

Von allen Fällen, welche sich auf diese Art darbieten, ist besonders derjenige von Interesse, den wir in § 1 den Fall eines *partiell integrabelen Systems* genannt haben, und in welchem das System sich mit m und nicht mehr als m Constanten integriren lässt und *die Integrale nach den m Constanten aufgelöst werden können.*

In diesem Falle muss, da nothwendiger Weise die Functionen χ, von denen in § 1 gesprochen wurde, existiren, in Folge der Gleichungen (9) das System (4) mit dem System $d\chi = 0$ zusammenfallen und demnach selbst schon unbeschränkt integrabel werden. Es müssen daher die Gleichungen (9) die sämmtlichen Variabeln p bestimmen und zwar ein solches System Auflösungen zulassen, für welches die Gleichungen (6) blosse Folgen der Gleichungen (4) werden. Umgekehrt, wenn ein solches System Auflösungen der Gleichungen (9) nach den p existirt, so verwandelt dasselbe (4) in ein mit m Constanten integrirbares System.

Differenzirt man (9), substituirt darin die Werthe der aus (6) und (4) entnommenen Differentiale der p und der x_{n-m+r} und setzt dann die Coefficienten der Differentiale $dx_1, \cdots, dx_{n-m}$ gleich Null, so ergeben sich einige Relationen, die, im betrachteten Falle mit den (9) zusammen existiren müssen; eliminirt man aus allen diesen Relationen die $m(n-m)$ Variabelen p, so findet man die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit das System partiell integrabel sei.

Es wird sich empfehlen, zum Schluss einige Beispiele von Systemen anzuführen, die der einen oder anderen der aufgezählten Categorien angehören, besonders auch, um die wirkliche Existenz solcher Systeme ausser allen Zweifel zu setzen.

Nehmen wir an, es sei $m = 1$, $n = 3$ und es liege die Gleichung

$$d^2x_3 + \frac{2x_3}{x_1^2}dx_1^2 - x_1^2 dx_2^2 - \frac{1}{x_3}dx_3^2 = 0$$

vor, die zwar nicht unbeschränkt d. h. mit drei Constanten, aber doch mit *zwei* Constanten integrabel ist, da die eine der beiden Gleichungen (9) identisch erfüllt ist, während die andere

$$p_1 = \frac{2x_3}{x_1}$$

ergiebt und hierdurch eine der beiden Gleichungen (6) eine blosse Folge der Gleichung (4) wird. Mit diesem Werth ergiebt sich als allgemeinstes Integral der gegebenen Gleichung

$$x_3 = x_1^2 \frac{(1 + e^{cx_2+c_1})^2}{2c^2 e^{cx_2+c_1}} = x_1^2 f(x_2),$$

worin die c, c_1 *zwei* willkürliche Constanten bedeuten. Die Function f, welche die willkürlichen Constanten enthält, genügt der Differentialgleichung

$$\frac{d^2f}{dx_2^2} - \frac{1}{f}\left(\frac{df}{dx_2}\right)^2 = 1.$$

Die Gleichung

$$d^2x_3 + \frac{1}{x_1}\,dx_1\,dx_3 + \frac{1}{x_1\,x_3}\,dx_2\,dx_3 - \frac{1}{x_3}\,dx_3^2 = 0$$

genügt nicht den Bedingungen unbeschränkter Integrabilität; sie ist *partiell* integrabel, d. h. nur mit einer einzigen Constanten. Die Vergleichung der Beziehungen (6), (9) ergiebt

$$p_1 = -\frac{x_3}{x_1}, \quad p_2 = \frac{1}{x_1}$$

und das *allgemeinste* Integral der Gleichung ist $x_1\,x_3 - x_2 = \text{Const.}$

Die Gleichung

$$d^2x_3 - x_2^2 dx_1^2 - (2x_1\,x_2 + x_3 - 1)\,dx_1\,dx_2 - x_2\,dx_1\,dx_3 = 0$$

ist *singulär* integrabel, d. h. ohne jede Constante; die Gleichungen (9), (4), (6) lassen sich nur auf

$$p_1 = -\frac{1}{2}\,x_2 x_3 - \frac{3}{2}\,x_2 - \frac{1}{2}\,x_1\,x_2^2,$$
$$p_2 = -x_1,$$
$$x_3 + x_1\,x_2 + 1 = 0$$

vereinigen, und diese letztere Relation stellt das Integral dar.

Die Gleichung

$$d^2x_3 - \frac{x_3}{x_1^2}\,dx_1^2 - x_1^2\,dx_2^2 - \frac{1}{x_3}\,dx_3^2 = 0$$

endlich ist nicht durch *eine einzige* Gleichung zu integriren, weil sich die Gleichungen (9), (4), (6) widersprechen.

Pavia, im Januar 1900.

Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre.

Par

M. Michel Petrovitch à Belgrade (Serbie).

---

1. On connait les services que rend le *théorème* classique *de la moyenne* dans les démonstrations des diverses théorèmes relatifs aux intégrales définies réelles et dans le calcul pratique des ces intégrales.

Considerons l'équation différentielle simple

$$\frac{dy}{dx} = F(x) \tag{1}$$

et désignons par y son intégrale qui pour $x = x_0$ prend la valeur donée à l'avance $y = y_0$. Le théorème de la moyenne permet de choisir, et cela d'une infinité de manières, deux autres équations

$$\frac{du}{dx} = F_1(x), \tag{2}$$

$$\frac{dv}{dx} = F_2(x) \tag{3}$$

et un intervalle de part et d'autre de $x = x_0$ de telle sorte, que x variant dans cet intervalle, l'intégrale y soit constamment comprise entre les valeurs correspondantes des intégrales u et v de (2) et (3), qui pour $x = x_0$ prennent la valeur $u_0 = v_0 = y_0$ et cela quelles que soient les valeurs initiales (x_0, y_0), sauf pour certaines valeurs x_0 isolées et fixes, que l'on connaîtra d'avance. On peut ainsi étudier ou calculer approximativement les intégrales d'une équation donnée (1) en les comparant aux intégrales d'équations plus simples.

Je me propose d'étendre ces mêmes procédés à une équation quelconque

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{4}$$

algébrique ou transcendante en x, y, en montrant qu'étant donnée une équation (4) et le point initial (x_0, y_0) de l'intégrale réelle cherchée, on saura toujours choisir d'une infinité de manières deux autres équations

$$\frac{du}{dx} = F_1(x, u), \tag{5}$$

$$\frac{dv}{dx} = F_2(x, v) \tag{6}$$

et un intervalle de part et d'autre de $x = x_0$ de telle sorte, que pour toute valeur de x, comprise dans cet intervalle, la valeur de l'intégrale y soit comprise entre les valeurs correspondantes des intégrales u et v de (5) et (6), qui pour $x = x_0$ prennent la valeur $u_0 = v_0 = y_0$. Et cette détermination des limites inférieures et supérieures de l'intégrale y nous sera possible quelle que soit le point initial (x_0, y_0), pourvu qu'il ne se trouve sur certaines courbes *fixes* dans le plan (x, y), que l'on connaîtra d'avance pour une équation (4) donnée.

2. Soient (4), (5), (6) trois équations données. Traçons dans le plan (x, y) les courbes D limitant les *régions* de ce plan, où chacune des fonctions

$$F(x, y) - F_1(x, y), \tag{7}$$

$$F(x, y) - F_2(x, y), \tag{8}$$

considérée comme fonction de x et y, garde un signe constant et soient

Δ_1 et Δ_2 la région positive et négative du plan par rapport à la fonctiou (7).

Ω_1 et Ω_2 la région positive et négative du plan par rapport à la fonction (8).

Traçons également dans le plan (x, y) toutes les courbes, lieux géomètriques des singularités des fonctions F, F_1, F_2 et appellons E l'ensemble de ces courbes.

Soit (x_0, y_0) un point n'appartenant à aucune des courbes D, E et qui se trouve dans la partie Π du plan, commune à deux régions Δ_i, Ω_k de signes contraires. Supposons, pour fixer les idées, que ce soient les régions Δ_1, Ω_2. Désignons par y, u, v les intégrales respectives (ou les branches d'intégrales) de (4), (5), (6), qui pour $x = x_0$ prennent la valeur commune $u_0 = v_0 = y_0$.

Il existera toujours de part et d'autre de la valeur $x = x_0$ un intervalle d'étendue non nulle, p. ex. de $x = x_0 - h_1$ à $x = x_0 - h_2$, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° x variant de $x_0 - h_1$ à $x_0 + h_2$ les deux fonctions u et v et leurs dérivées premières sont déterminées, finies et continues;

2° aucune partie des courbes D, E ne se trouve dans l'interieur ni sur la périphérie du contour Γ, formé par les courbes u, v et les deux droites $x = x_0 - h_1$; $x = x_0 + h_2$ et ce contour se trouve tout entier dans la partie Π du plan (x, y).

On démontre alors le resultat suivant:

Lorsque x varie de $x_0 - h_1$ à $x_0 + h_2$, l'intégrale y sera constamment déterminée, finie, continue et comprise entre les valeurs correspondantes de u et v.

Car, comme le point (x_0, y_0) se trouve dans la partie commune aux régions Δ_1 et Ω_2, on a pour ce point à la fois

$$(9) \qquad \begin{aligned} F(x, y) - F_1(x, y) &> 0, \\ F(x, y) - F_2(x, y) &< 0 \end{aligned}$$

et par suite

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dx}(y - u) &> 0, \\ \frac{d}{dx}(y - v) &< 0; \end{aligned}$$

d'autre part on a pour $x = x_0$

$$(11) \qquad y - u = 0, \qquad y - v = 0$$

et par suite

$$(12) \qquad \begin{aligned} v < y < u \quad &\text{pour} \quad x = x_0 - \varepsilon, \\ u < y < v \quad &\text{pour} \quad x = x_0 + \varepsilon \end{aligned}$$

ε étant positiv et suffisamment petit.

La proposition est donc vraie pour un intervalle suffisamment petit de part et d'autre de $x = x_0$; mais elle le sera dans toute l'étendue de l'intervalle $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$. En effet, pour qu'elle cesse d'être vraie, il faudrait:

1° ou bien que la courbe y aille rencontrer l'une des courbes u et v en un point dont l'abscisse se trouve comprise dans l'intervalle $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$;

2° ou bien que pour une valeur $x = \alpha$, comprise dans ce même intervalle et une valeur $y = \beta$, comprise entre $u(\alpha)$ et $v(\alpha)$, la dérivée $\frac{dy}{dx}$ et par suite la fonction $F(x, y)$ devienne soit infinie, soit indéterminée ou encore qu'elle change de détermination.

La condition 1° est impossible, car si $x = \gamma$, $y = \delta$ ětaient les coordonnées d'un point commun p. ex. aux courbes y et u le plus rapproché du point (x_0, y_0), comme ce point (γ, δ) se trouve sur le contour Γ, on aurait pour $x = \gamma$, $y = \delta$

$$F(x, y) - F_1(x, y) > 0$$

et par suite

$$\frac{d}{dx}(y-u) > 0$$

et pour $x = \gamma$

$$y - u = 0.$$

On aurait donc

$$y < u \quad \text{pour} \quad x = \gamma - \varepsilon,$$
$$y > u \quad \text{pour} \quad x = \gamma + \varepsilon$$

ce qui serait en contradiction avec les inégalités (12).

La condition 2^0 est impossible, car aucune partie des courbes E ne se trouve à l'interieur ni sur la périphérie du contour Γ et par suite la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est déterminée, finie et continue pour tous les points tels que (α, β).

L'intégrale y est donc bien constamment comprise entre u et v et de plus

1^0 dans l'intervalle de $x_0 - h_1$ à x_0 on a $v < y < u$.

2^0 dans l'intervalle de x_0 à $x_0 + h_2$ on a $u < y < v$,

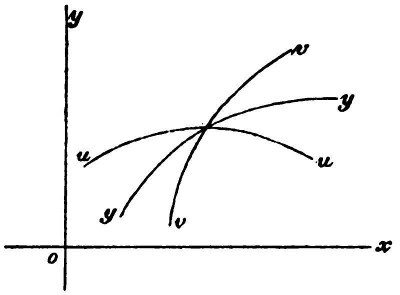


Fig. 1.

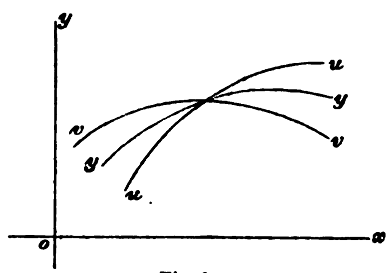


Fig. 2.

comme l'indique la Fig. 1.

Si le point (x_0, y_0) se trouvait dans la région Δ_2, Ω_1, les inégalités précédentes changeraient de sens et l'on aurait la disposition des courbes u, v, y indiquée dans la Fig. 2.

Par suite on a le resultat général suivant:

Toutes les fois que le point (x_0, y_0) appartient à la partie du plan (x, y), commune à deux régions (Δ_i, Ω_k) de signes contraires, l'intégrale y, pendant que x varie de $x_0 - h_1$ à $x_0 + h_2$, sera déterminée, finie, continue et comprise entre u et v.

La courbe y ne saurait couper ni la courbe u ni v en dehors du point $x = x_0$; mais il est facile à voir qu'il ne peut y avoir non plus de contact entre y et ces courbes. Car si p. ex. y et v se touchaient au point $x = \alpha$, on devrait avoir

$$\frac{d}{dx}(y-u)_\alpha = 0$$

ce qui est impossible d'après ce qui précéde.

Remarquons aussi que *si pour tous les points* (x, y), *compris dans l'interieur du contour* Γ, *la fonction* $F(x, y)$ *garde un signe invariable, l'intégrale y variera toujours dans un même sens* (en croissant si $F > 0$, en décroissant si $F < 0$) *lorsque x varie dans l'intervalle* $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$.

3. Etant donnée une équation

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{13}$$

on peut la mettre, d'une infinité de manières, sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, f) \tag{14}$$

où f est un coefficient en x, figurant dans F, sur lequel nous porterons particulièrement notre attention.

Appliquons ce qui précéde à l'équation (14). Supposons que pour le point initial (x_0, y_0) la fonction F et sa derivée partielle $\frac{\partial F}{\partial f}$ soient détérminées, finies, continues, ne changent pas de détermination et que pour ce point cette dérivée partielle ne s'annule pas. Les points ne remplissant pas ces conditions appartiennent à certaines courbes fixes dans le plan (x, y), que l'on connaîtra d'avance, ou bien sont isolés et fixes.

On peut choisir, et cela d'une infinité de manières, deux fonctions φ et ψ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° que ces fonctions soient déterminées, finies et continues dans un intervalle suffisamment petit, mais non nul, de $x = x_0 - a_1$ à $x = x_0 + a_2$;

2° qu'on ait dans cet intervalle

$$\varphi < f < \psi. \tag{15}$$

3° qu'en désignant par u et v les intégrales réspectives des équations

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \varphi), \tag{16}$$

$$\frac{dv}{dx} = F(x, v, \psi) \tag{17}$$

prenant pour $x = x_0$ la valeur commune $u_0 = v_0 = y_0$, les fonctions u et v soient déterminées, finies et continues dans un intervalle suffisamment petit, mais non nul, de $x = x_0 - b_1$ à $x = x_0 + b_2$.

En prenant alors les équations (16) et (17) pour les équations (5) et (6) du § 1, les fonctions (7) et (8) du paragraphe précédent deviennent

$$F(x, y, f) - F(x, y, \varphi) = (f - \varphi)\, H(x, y, R_1), \tag{18}$$

$$F(x, y, f) - F(x, y, \psi) = (f - \psi)\, H(x, y, R_2) \tag{19}$$

où l'on a posé pour abréger

$$H(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} F(x, y, t),$$
$$R_1 = \varphi + (f - \varphi)\theta_1,$$
$$R_2 = \psi + (f - \psi)\theta_2,$$

θ_1 et θ_2 étant deux nombres compris entre 0 et 1.

On peut montrer que *le point* (x_0, y_0) *se trouvera dans une partie du plan* (x, y) *commune à deux régions de signes contraires par rapport à deux fonctions* (18) *et* (19).

En effet, l'expression

$$H[x_0, y_0, f(x_0)]$$

étant différente de zéro, on peut en posant

$$f(x_0) = \varrho$$

déterminer deux valeurs constantes $\varkappa$ et μ telles qu'on ait

$$\lambda < \varrho < \mu$$

et que, t variant de $t = \lambda$ à $t = \mu$, la fonction $H(x_0, y_0, t)$ considérée comme fonction de t, reste déterminée, finie, continue et différente de zéro. Choisissons alors les fonctions précédentes $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de manière qu'on ait

$$\varphi(x_0) = \lambda, \qquad \psi(x_0) = \mu$$

ce qui est toujours possible en vertu des inégalités

$$\lambda < \varrho < \mu, \qquad \varphi < f < \psi,$$

et envisageons les deux fonctions

$$H(x, y, R_1) = G_1(x, \theta_1),$$
$$H(x, y, R_2) = G_2(x, \theta_2)$$

considérées comme fonctions de $x, \theta_1 . \theta_2$, après y avoir remplacé y, R_1, R_2 par leurs valeurs en x, θ_1, θ_2.

Ces deux fonctions sont déterminées, finies et continues pour $x = x_0$; de plus les équations

$$G_1(x_0, \theta_1) = 0, \qquad G_2(x_0, \theta_2) = 0$$

résolues par rapport à θ_1 et θ_2 n'ont aucune racine comprise entre 0 et 1. Ceci tient à ce que θ_1 et θ_2 variant entre 0 et 1, les expressions R_1 et R_2 varient entre λ et μ et que, d'autre part, la fonction $H(x, y_0, t)$, considerée comme fonction de t ne s'annule pas lorsque t varie entre λ et μ.

Les fonctions

$$G_2(x, \theta_1), \qquad G_2(x, \theta_2)$$

ne s'annulent donc pas pour $x = x_0$ et ont un signe constant et commun pour cette valeur de x, quelles que soient valeurs de θ_1 et θ_2 entre les limites 0 et 1. Et comme l'on a pour $x = x_0$

$$f(x) > \varphi(x), \qquad f(x) < \psi(x)$$

les expréssions (18) et (19) seront pour $x = x_0$ de signes contraires, comme il fallait démontrer.

Les propriétés précédentes des fonctions G_1 et G_2 se rapportant à la valeur $x = x_0$, subsisteront evidemment pour les valeurs de x comprises dans un certain intervalle suffisamment petit, mais non nul, de part et d'autre de la valeur x_0. Autrement dit, il existera toujours un intervalle, p. ex. de $x = x_0 - c_1$ à $x = x_0 + c_2$, tel que pour toute valeur de x, comprise dans cet intervalle et pour

$$0 < \theta_1 < 1, \qquad 0 < \theta_2 < 1$$

les fonctions

$$G_1(x, \theta_1), \qquad G_2(x, \theta_2)$$

soient déterminées, finies, continues, ne changent pas de détermination et ne s'annulent pas. On aura p. ex. une limite inférieure de l'étendue de cet intervalle en cherchant un intervalle de $x_0 - g_1$ à $x_0 + g_2$ tel qu'en désignant par (M_1, M_2) et (N_1, N_2) les limites respectives, entre lesquelles varient les fonctions (φ, ψ) et (u, v) pour x compris dans cet intervalle, la fonction $H(x, y, t)$ reste déterminée, finie, continue et différente de zéro, lorsque x varie de $x_0 - g_1$ à $x_0 + g_2$, y de N_1 à N_2 et t de M_1 à M_2.

Enfin, comme la fonction $F(x_1 y_1 f)$, où f est considérée comme fonction de x, est déterminée, finie et continue pour $x = x_0$, $y = y_0$, il existe un intervalle p. ex. de $x = x_0 - d_1$ à $x = x_0 + d_2$ tel, qu'en désignant par (N_1', N_2') les limites supérieure et inférieure entre lesquelles varient u et v; par (M_1', M_2') les limites supérieure et inférieure entre lesquelles varient φ et ψ pour

$$x_0 - d_1 < x < x_0 + d_2,$$

la fonction $F(x, y, f)$ ne cesse pas d'être déterminée, finie et continue lorsque x varie dans cet intervalle, y entre N_1' et N_2' et f entre M_1' et M_2'.

Les quatre intervalles

$$\begin{gathered}(x_0 - a_1,\ x_0 + a_2),\\ (x_0 - b_1,\ x_0 + b_2),\\ (x_0 - c_1,\ x_0 + c_2).\\ (x_0 - d_1,\ x_0 + d_2)\end{gathered}$$

ainsi définis, comprenant la valeur $x = x_0$, ont une partie commune de part et d'autre de cette valeur de x: *cette partie commune joue le rôle de l'intervalle précédent* $(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2)$.

Et en appliquant la proposition du paragraphe précédent, on voit que: *pour toute valeur de x, comprise dans l'intervalle* $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$, *l'intégrale y de* (13), *prenant pour $x = x_0$ la valeur donnée à l'avance $y = y_0$, est* *déterminée, finie, continue et comprise entre les valeurs correspondantes des intégrales u et v des équations* (16) *et* (17), *qui pour $x = x_0$ prennent la même valeur $u_0 = v_0 = y_0$.*

Remarquons *qu'à toute équation différentielle* (13) *et à chaque couple de valeur initiales* (x_0, y_0) (en mettant à part les couples appartenant à certaines courbes fixes dans le plan xoy, que nous avons défini précédemment) *correspond un tel intervalle* $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$, *dont l'étendue,* plus ou moins grande suivant le cas considéré, *n'est jamais nulle.*

4. On peut faire des propositions précédentes des applications analogues à celles du théorème classique de la moyenne. On cherchera pour le type donné d'équations, écrites par ex. sous la forme (13), deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, qui dans le voisinage de $x = x_0$ comprennent la fonction $f(x)$, en différent le moins possible et sont telles, que les deux équations (16) et (17), qui leur correspondent, soient intégrables ou, du moins, plus faciles à étudier que l'équation donnée. On remplacera p. ex. l'arc considéré de $f(x)$ par des droites, arcs de paraboles etc. qui le comprennent et les intégrales u et v des équations ainsi obtenues représenteront des limites, entre lesquelles variera l'intégrale y, lorsque x varie dans l'intervalle de $x_0 - h_1$ à $x_0 + h_2$. En désignant par μ la plus grande valeur absolue de la fonction

$$\frac{1}{2}(u - v)$$

dans cet intervalle des valeurs de x, on peut écrire

$$y = \frac{1}{2}(u + v) + \varepsilon$$

avec

$$|\varepsilon| < \mu.$$

Rappellons que les conditions, imposées à l'intervalle $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ par ce qui précéde, sont les suivantes: dans cet intervalle

1° les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont holomorphes et satisfont à la condition

$$\varphi(x) < f(x) < \psi(x);$$

2° les intégrales u et v des équations

$$\frac{du}{dx} = F(x, u, \varphi),$$

$$\frac{dv}{dx} = F(x, v, \psi)$$

qui pour $x = x_0$ prennent la valeur commune y_0, sont holomorphes;

3° les fonctions

$$G_1(x, \theta_1) \quad \text{et} \quad G_2(x, \theta_2)$$

sont holomorphes et ne s'annulent pas quelle que soient les valeurs de θ_1 et θ_2 entre 0 et 1.

4° la fonction $F(x, y, t)$ est holomorphe lorsque y varie entre N_1' et N_2', t entre M_1 et M_2, où (M_1', M_2') désignent la limite inférieure et supérieure entre lesquelles varient φ et ψ et (N_1', N_2') la limite inférieure et supérieure, entre lesquelles varient u et v, pendant que x varie entre $x_0 - h_1$ et $x_0 + h_2$.

L'étendue de cet intervalle $(x_0 - h_1,\ x_0 + h_2)$ variera avec le type d'équations que l'on considère; pour un type donné elle varie avec les valeurs initiales (x_0, y_0) et avec les fonctions auxiliaires $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ choisies. Dans certains cas généraux cette étendue pourra être prise aussi grande qu'on voudra.

5. Faisons, à titre d'exemples, quelques applications simples des propositions précédentes.

Premier exemple: envisageons l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + f(x). \tag{20}$$

Supposons que la valeur $x = x_0$ ne coïncide avec aucune singularité de la fonction $f(x)$, qui sera alors continue dans un certain intervalle (α_1, α_2) de part et d'autre de $x = x_0$. La fonction $H(x, y, t)$ se réduisant ici à 1, on a

$$G_1(x, \theta_1) = 1, \qquad G_2(x, \theta_2) = 1$$

et il ne reste qu'à déterminer un intervalle (β_1, β_2) avec

$$\alpha_1 \leq \beta_1 < x_0 < \beta_2 \leq \alpha_2$$

dans lequel les fonctions de comparaison n et v seraient holomorphes.

Pour avoir ces fonctions u et v le plus simples, nous supposerons que dans l'intervalle (α_1, α_2) la fonction $f(x)$ garde un signe invariable. Distinguons alors les deux cas suivants:

1er cas: $f(x) > 0$. Si l'on désigne alors par M_1 et M_2 (avec $M_1 < M_2$) deux nombres positifs, entre lesquels se trouve comprise la fonction $f(x)$, lorsque x varie dans l'intervalle (α_1, α_2), en prenant

$$\varphi(x) = M_1, \qquad \psi(x) = M_2$$

on trouverait

$$\begin{aligned} n &= \frac{y_0\sqrt{M_1} + M_1 \operatorname{tang}(x - x_0)\sqrt{M_1}}{\sqrt{M_1} + y_0 \operatorname{tang}(x - x_0)\sqrt{M_1}}, \\ v &= \frac{y_0\sqrt{M_2} + M_2 \operatorname{tang}(x - x_0)\sqrt{M_2}}{\sqrt{M_2} + y_0 \operatorname{tang}(x - x_0)\sqrt{M_2}} \end{aligned} \tag{21}$$

d'où l'on détermine facilement les limites de l'intervalle (β_1, β_2). Dans cet intervalle l'intégrale y sera holomorphe et comprise entre les valeurs correspondantes des fonctions u et v définies par (21).

2^{me} *cas:* $f(x) < 0$. Alors si $-M_1$ et $-M_2$ ont les significations précédentes, en prenant

$$\varphi(x) = -M_1, \qquad \psi(x) = -M_2$$

on aura

$$(22) \qquad \begin{aligned} u &= \sqrt{M_1}\,\frac{y_0 + \sqrt{M_1} + (y_0 - \sqrt{M_1})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_1}}}{y_0 + \sqrt{M_1} - (y_0 - \sqrt{M_1})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_1}}}, \\ v &= \sqrt{M_2}\,\frac{y_0 + \sqrt{M_2} + (y_0 - \sqrt{M_2})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_2}}}{y_0 + \sqrt{M_2} - (y_0 - \sqrt{M_2})\,e^{2(x-x_0)\sqrt{M_2}}}. \end{aligned}$$

Dans tout intervalle de part et d'autre de $x = x_0$, dans lesquel les fonctions u et v ainsi définies sont holomorphes, l'intégrale y est elle-même holomorphe et comprise entre les valeurs correspondantes de u et v. En particulier si la valeur initiale $y = y_0$ de l'intégrale est comprise entre $-\sqrt{M_1}$ et $+\sqrt{M_2}$ les fonctions u et v sont holomorphes pour toute valeur finie et réelle de x.

Deuxième exemple: envisageons l'équation

$$(23) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f(x)$$

dont il suffit d'étudier une des déterminations par rapport à la dérivée, p. ex.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{f(x) - y^2}.$$

Pour que l'intégrale soit réelle, il faut qu'on ait

$$y_0^2 < f(x_0)$$

et que la fonction $f(x)$ soit positive dans l'intervalle considéré. Envisageons un intervalle de $x = \alpha_1$ à $x = \alpha_2$ $(\alpha_1 < x_0 < \alpha_2)$ dans lequel la fonction $f(x)$ reste holomorphe et positive et désignons par M_1 et M_2 deux nombres positifs tels que pour $\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$ on ait

$$M_1 < f(x) < M_2.$$

En prenant

$$\varphi(x) = M_1, \qquad \psi(x) = M_2$$

les fonctions de comparaison u et v seront

$$(24) \qquad \begin{aligned} u &= \sqrt{M_1 - y_0^2}\,\sin(x - x_0) + y_0 \cos(x - x_0), \\ v &= \sqrt{M_2 - y_0^2}\,\sin(x - x_0) + y_0 \cos(x - x_0) \end{aligned}$$

et elles seront continues pour toute valeur de x. D'autre part on a ici

$$
(25) \qquad \begin{aligned} G_1(x, \theta_1) &= \frac{1}{2\sqrt{R_1(x, \theta_1) - u^2}}, \\ G_2(x, \theta_2) &= \frac{1}{2\sqrt{R_2(x, \theta_2) - v^2}} \end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned} R_1(x, \theta_1) &= M_1 + [f(x) - M_1]\,\theta_1, \\ R_2(x, \theta_2) &= M_2 + [f(x) - M_2]\,\theta_2 \end{aligned}
$$

et comme pour $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$ on a constamment

$$
R_1 \geq M_1, \qquad R_2 \geq f(x)
$$

les fonctions G_1 et G_2 restent holomorphes dans un intervalle de $x = \beta_1$ à $x = \beta_2$ $(\beta_1 < x_0 < \beta_2)$ tel qu'on ait dans cet intervalle

$$
(26) \qquad f(x) - v^2 > 0
$$

car on aura alors en même temps

$$
f(x) - u^2 > 0
$$

Or, comme l'on peut écrire

$$
v = \sqrt{M_2} \sin (x - x_0 + C)
$$

avec

$$
\sin C = -\frac{y_0}{\sqrt{M_2}}
$$

la condition (26) sera satisfaite si l'on a

$$
M_1 - M_2 \sin^2 (x - x_0 + C) > 0.
$$

On connaîtra aussi l'intervalle (β_1, β_2) et comme la fonction

$$
\sqrt{f(x) - y^2}
$$

reste holomorphe lorsque $f(x)$ varie entre M_1 et M_2 et y entre la plus petite et la plus grande valeur que peuvent avoir les fonctions u et v dans l'intervalle (β_1, β_2), pour toute valeur de x, comprise dans la partie commune aux intervalles (α_1, α_2) et (β_1, β_2) l'intégrale y sera holomorphe et comprise entre les valeurs (24).

La seconde détermination

$$
\frac{dy}{dx} = -\sqrt{f(x) - y^2}
$$

donnerait la courbe symétrique à la précédente par rapport à l'axe des x.

Troisième exemple: pour l'équation

$$
(27) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y^2 = f(x)
$$

on a également deux courbes symétriques par rapport à l'axe des x et l'on trouve facilement que dans tout intervalle des x autour de la valeur initiale $x = x_0$, dans lequel $f(x)$ est continue et positive, la valeur absolue de y sera comprise entre les valeurs absolues des fonctions

$$
(28)\qquad
\begin{aligned}
u &= \frac{\sqrt{M_1}}{2}\left(C_1 e^x - \frac{1}{C_1} e^{-x}\right),\\
v &= \frac{\sqrt{M_2}}{2}\left(C_2 e^x - \frac{1}{C_2} e^{-x}\right)
\end{aligned}
$$

les constantes C_1 et C_2 étant déterminées de manière que ces fonctions soient égales à y_0 pour $x = x_0$.

6. D'une manière générale, étant donnée une équation de la forme

$$
(29)\qquad \frac{dy}{dx} = F(y, f)
$$

où f est une fonction donnée de x, si M_1 et M_2 désignent deux nombres, entre lesquels varie la fonction f lorsque x varie dans un intervalle (α_1, α_2) avec $\alpha_1 < x_0 < \alpha_2$, en prenant

$$
\varphi(x) = M_1, \qquad \psi(x) = M_2
$$

on aura, comme fonctions de comparaison, les fonctions u et v définies par l'inversion des intégrales

$$
(30)\qquad
\begin{aligned}
x - x_0 &= \int_{y_0}^{u} \frac{du}{F(u, M_1)},\\
x - x_0 &= \int_{y_0}^{v} \frac{dv}{F(v, M_2)}.
\end{aligned}
$$

Les valeurs de x rendant infinies u et v seront

$$
x = x_0 + \int_{y_0}^{\pm\infty} \frac{dt}{F(t, M_1)},
$$

$$
x = x_0 + \int_{y_0}^{\pm\infty} \frac{dt}{F(t, M_2)}
$$

ces intégrales définies pouvant avoir plus d'une valeur réelle. Les autres singularites de u et v se déduisent directement des équations

$$
\frac{du}{dx} = F(u, M_1),
$$

$$
\frac{dv}{dx} = F(v, M_2)
$$

et l'on pourra assigner un intervalle de $x = x_0 - h_1$ à $x = x_0 + h_2$ satisfaisant aux conditions énoncées précédemment et tel que x variant dans cet intervalle, l'intégrale y soit constamment holomorphe et comprise entre u et v.

Posons

$$\xi_a = x_0 + \int_{y_0}^{a} \frac{dt}{F(t, M_1)},$$

$$\eta_a = x_0 + \int_{y_0}^{a} \frac{dt}{F(t, M_2)}$$

(les intégrales définies pouvant avoir plus d'une valeur réelle)*) où a est une valeur donnée d'avance et supposons ces valeurs ξ_a, η_a rangées par l'ordre de grandeurs croissantes de sorte qu'elles divisent l'intervalle $(x_0 - h_1, x_0 + h_2)$ en plusieurs autres intervalles partiels.

Chaque intervalle partiel, qui ne comprend pas la valeur x_0 et qui se trouve limité par une valeur ξ_a et une valeur η_a, contient au moins une valeur de x pour laquelle l'integrale y prend la valeur a.

Car si l'on envisage un tel intervalle, p. ex. de $x = \xi_a$ à $x = \eta_a$, les inégalités

$$u \lesseqgtr y \lesseqgtr v$$

conduisent par $x = \xi_a$ à

$$a \lesseqgtr y$$

et pour $x = \eta_a$ à

$$y \lesseqgtr a$$

et par suite y, qui est finie et continue pour $\xi_a < x < \eta_a$, deviendra nécessairement égale à a pour au moins une valeur de x comprise dans cet intervalle.

Et en faisant $a = 0$ on voit *qu'un intervalle, limité par une valeur ξ_0 et une valeur η_0 définies par*

$$\xi_0 = x_0 + \int_{y_0}^{0} \frac{dt}{F(t, M_1)},$$

$$\eta_0 = x_0 + \int_{y_0}^{0} \frac{dt}{F(t, M_2)}$$

contient au moins un zéro de l'intégrale y.

Dans ce qui précède nous avons remplacé la fonction f par des constantes. Mais dans des cas particuliers on aura des propositions plus précises en remplaçant f par d'autres fonctions de x entre lesquelles elle varie et choisies de manière qu'on sache intégrer les nouvelles équations

*) Il peut y avoir p. ex. des périodes réelles.

ainsi obtenues. Le choix de telles fonctions dépendra du type d'équations, que l'on a à considérer.

Remarquons que l'on peut appliquer aussi les propositions précédentes aux équations

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, r)$$

où r est un paramètre variable et étudier la variation de l'intégrale y lorsque ce paramètre varie.

7. Nous nous sommes bornés jusqu'à présent à ne porter attention que sur un seul coefficient de l'équation différentielle donnée. Mais il peut arriver que les équations de comparaison ne soient pas intégrables quand on se borne à remplacer un seul coefficient f par d'autres fonctions, de quelque manière qu'on choisisse celles-ci. On repetera alors la même opération successivement avec les autres coefficients jusqu'à ce que les équations obtenues deviennent intégrables.

Supposons l'équation écrite sous la forme

$$\frac{dv}{dx} = F(x, y, f_1, f_2, f_3 \cdots)$$

et remplaçons n coefficients $f_1, f_2, \cdots f_n$ d'abord par des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ et ensuite par des fonctions $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$ telles que dans l'intervalle, de x considéré on ait

$$\varphi_i < f_i < \psi_i.$$

Soient u_n et v_n les intégrales respectives des équations ainsi obtenues. Comme y au voisinage de $x = x_0$ sera comprise entre u_1 et v_1; celles-ci entre u_2 et v_2 etc., l'intégrale y sera comprise entre u_n et v_n. L'intervalle des x, pour lequel on sera certain que cela subsistera, se déterminerait de proche en proche, en le déterminant pour les équations en

$$(u_1, v_1), (u_2, v_2), \cdots (u_n, v_n).$$

On aurait une limite inférieure de son étendue d'une manière analogue à celle dans le cas où l'on remplace un seul coefficient par d'autres fonctions.

8. Envisageons maintenant l'équation donnée écrite sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, \varphi)$$

où φ est une fonction donnée de y. On peut y appliquer directement les résultats du § 1 et étudier la variation de l'intégrale y lorsqu'on remplace φ par d'autres fonctions de y. On peut, dans le même ordre d'idées, en faisant diverses hypothèses sur les fonctions F et φ, avoir des propositions plus précises sur la forme de la courbe intégrale.

Considérons p. ex. l'équation

$$\frac{dy}{dx} = F(x, \varphi) \tag{31}$$

où φ est fonction donnée de y et supposons que F et φ satisfassent aux conditions suivantes:

1° la fonction $\varphi(y)$ et sa dérivée première sont des fonctions réelles, continues et *limitées* de y, restant finies pour toute valeur réelle, finie ou infinie, de y. Nous désignerons par M et N la plus grande et la plus petite valeur de $\varphi(y)$ lorsque y varie de $-\infty$ à $+\infty$.

2° la fonction F et sa dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ sont réelles, finies et continues pour toute valeur de x comprise dans un certain intervalle (δ) et pour toute valeur de φ comprise entre M et N.

Dans ces conditions le module de F reste inférieur à une certaine quantité positive finie pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle (δ) et pour toute valeur finie ou infinie de y. Il en sera de même de la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial y}$, puisqu'elle est donnée par le produit

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

On en conclut, d'après un théorème connu, que l'intégrale, qui pour $x = x_0$ prend la valeur donnée à l'avance $y = y_0$ (x_0 et y_0 étant réels et assujettis à la seule condition que x_0 soit compris dans i'intervalle δ), restera finie et continue dans tout intervalle de $x = x_0 - h$ à $x = x_0 + h$, compris lui-même dans l'intervalle (δ).*)

Supposons maintenant remplies les conditions supplémentaires suivantes:

3° la fonction F et sa dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ garde un signe invariable pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle de $x_0 - h$ à $x_0 + h$ quelle que soit la valeur de φ comprise entre M et N.

4° en désignant par k une valeur constante quelconque, comprise entre M et N, l'intégrale

$$J = \int_a^b F(x, k)\,dx$$

n'a pour chaque valeur de x, comprise entre $x_0 - h$ et $x_0 + h$ qu'une seule valeur réelle, également finie et déterminée (tout en pouvant avoir plusieurs valeurs imaginaires).

Si l'on pose alors pour abréger

*) Conséquence du théorème énoncé dans la Note de M. Picard, dans le T. IV des *Leçons* de M. Darboux.

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx$$

l'intégrale y de (31), *qui pour $x = x_0$ prend la valeur $y = y_0$, tout en restant finie et continue pour toute valeur de x, comprise entre $x_0 - h$ et $x_0 + h$, varie dans un même sens et est comprise entre les deux fonctions $\lambda(x, x_0, y_0)$ et $\mu(x, x_0, y_0)$.*

Car la fonction $F(x, \varphi)$, après y avoir remplacé y par sa valeur en x, tirée de l'expression de l'intégrale, sera êlle même une fonction finie et continue pour

$$x_0 - h < x < x_0 + h$$

et gardera un signe invariable. De plus la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ garde aussi un signe invariable pour ces valeurs de x et pour $M < \varphi < N$. Supposons, pour fixer les idées, que ce signe soit positif. La fonction F est alors une fonction croissante de φ et l'on aura

$$F(x, M) < F(x, \varphi) < F(x, N)$$

et par suite l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x} F(x, \varphi)\, dx$$

après y avoir remplacé y par sa valeur en x, sera comprise entre les valeurs correspondantes de deux intégrales

$$J_1(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, M)\, dx,$$

$$J_2(x) = \int_{x_0}^{x} F(x, N)\, dx$$

lesquelles, en vertu de 4^{me} hypothèse, ont pour toute valeur de x, comprise entre $x_0 - h$ et $x_0 + h$, une seule valeur réelle, qui est finie et déterminée. La proposition est donc démontrée. Elle le serait de la même manière si l'on suppose la dérivée $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ négative.

Il peut arriver que l'intervalle (δ) s'étend à toutes les valeurs finies de x. *La proposition précédente s'applique alors quelles que soient les valeurs initiales x_0 et y_0 et s'étend à toutes valeurs réelles de x.*

Remarquons que, dans ce dernier cas, la valeur asymptotique de l'intégrale pour $x = +\infty$ ou pour $x = -\infty$ sera finie ou infini suivant que J_1 et J_2 tendent vers des limites finies ou infinies pour $x = \pm\infty$. Quand elle est finie, elle est comprise entre

$$y_0 + \lim J_1(x)$$

et

$$y_0 + \lim J_2(x).$$

Par exemple, l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^2 + \beta e^{-ky^2}$$

(où α et β sont des constantes positives), prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$, est comprise (pour toute valeur réelle de x) entre les fonctions

$$y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3) + \beta(x - x_0)$$

et

$$y_0 + \frac{\alpha}{3}(x^3 - x_0^3)$$

et ses valeurs asymptotiques sont infinies.

Pour l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2} - \beta e^{-kx^2 - py^2}}$$

(où α, β, k, p, z sont des constantes positives, avec $\alpha + \beta < 1$) l'intégrale y est comprise entre les fonctions

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - \alpha e^{-kx^2}}\, dx,$$

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-rx^2}}{1 - (\alpha+\beta) e^{-kx^2}}\, dx.$$

Les valeurs asymptotiques sont finies et déterminées: en désignant par a la valeur de y pour $x = 0$, sa valeur asymptotique pour $x = \infty$ sera comprise entre

$$a + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\theta(\alpha)$$

et

$$a + \frac{\sqrt{\pi}}{a}\,\theta(\alpha + \beta)$$

où $\theta(z)$ désigne la transcendante

$$\theta(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^n}{\sqrt{r + kn}};$$

de même, la valeur asymptotique pour $x = -\infty$ sera comprise entre

$$a - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\theta(\alpha)$$

et

$$a - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\theta(a+\beta).$$

Ceci résulte de ce qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rx^2}}{1-ze^{-kx^2}}\,dx = \sum_{n=0}^{n=\infty} u_n z^n$$

avec

$$u_n = \int_0^\infty e^{-(r+kn)x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{r+kn}}\,.$$

9. Ces raisonnements s'appliquent aussi á l'équation

$$\frac{dy}{dx} = F(x, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n) \tag{32}$$

où F est une fonction algébrique ou transcendante de x et les φ_i fonctions données de y, lorsque les conditions suivantes sont remplies:

1^0 toutes les fonctions φ_i et leurs dérivées premières sont réelles, continues et *limitées* de y;

2^0 en désignant par M_i, N_i la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $\varphi_i(y)$, lorsque y varie de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction F et ses dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_n} \tag{33}$$

sont réelles, finies et continues pour toute valeur de x comprise dans un certain intervalle (δ)*) et pour toute valeur de φ_i $(i = 1.2, \cdots n)$ comprise entre M_i et N_i.

3^0 la fonction F et ses dérivées partielles (33) gardent un signe invariable pour toute valeur de x, comprise dans l'intervalle (δ) quelles que soient les valeurs des φ_i comprises entre M_i et N_i.

4^0 en désignant par

$$k_1, k_2. \cdots k_n$$

des constantes quelconques telles qu'on ait

$$\begin{gathered} M_1 < k_1 < N_1, \\ M_2 < k_2 < N_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ M_n < k_n < N_n \end{gathered}$$

*) Symetrique par rapport à x_0.

l'intégrale

$$J = \int_{x_0}^{x} F(x, k_1, k_2, \cdots k_n)\, dx$$

n'a pour chaque valeur de x, comprise dans l'intervalle (δ) qu'une seule vateur réelle, également finie et déterminée (tout en pouvant avoir plusieurs valeurs imaginaires).

Ces conditions étant remplies, si

$$i = 1, 2, 3, \cdots h$$

sont les indices des dérivées $\frac{\partial F}{\partial \varphi_i}$ positives et

$$i = h + 1, h + 2, \cdots n$$

celles des dérivées négatives, en posant pour abréger

$$\lambda(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, M_1, \cdots, M_h;\ N_{h+1}, \cdots, N_n)\, dx,$$

$$\mu(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, N_1, \cdots, N_h;\ M_{h+1}, \cdots, M_n)\, dx$$

on démontre facilement le résultat suivant:

L'intégrale y de (32), qui pour $x = x_0$ prend la valeur $y = y_0$, est finie et continue pour toute valeur de x comprise dans l'intervalle (δ), varie constamment dans le même sens et est comprise entre

$$\lambda(x, x_0, y_0) \text{ et } \mu(x, x_0, y_0).$$

10. Remarquons, en terminant, que même dans les cas où l'intégration de l'équation donnée est possible, il arrive souvent qu'on se rend mieux compte de la forme de la courbe intégrale par l'emploi des remarques simples qui précédent, que par la construction directe, qui entrainerait des longs calculs. On calculera alors quelques points remarquables de la courbe et encore quelques autres points, s'il le faut, servant comme points de départ; on remplacera alors certains coefficients $f_1, f_2, \cdots$, figurant dans l'équation différentielle, par des fonctions plus simples, choisies de manière à avoir des fonctions de comparaison u et v plus simples que l'expréssion explicite de y. En faisant cela pour chaque intervalle, dont on a besoin, on se rendra bien compte des allures de la courbe y, des limites entre lesquelles elle varie dans des intervalles données de x etc.

Enfin il est souvent utile d'appliquer ces remarques aussi à des transformées de l'équation donnée. En les appliquant p. ex. à la transformés en coordonnées polaires, on aurait des intervalles de l'angle polaire, où la courbe reste constamment à l'intérieur d'une certaine circonférence; si cet intervalle est celui de $-\infty$ à $+\infty$, la courbe sera comprise tout entière à l'interieure d'une telle circonférence. On aurait aussi des renseignements sur les points d'intersection de la courbe intégrale avec un cercle donné etc.

Belgrade (Serbie), 26. Oct. 1899.

Zur Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der Abel'schen Integrale.

Von

K. Hensel in Berlin.

In dieser Abhandlung stelle ich die Theorie der algebraischen Functionen und der Abel'schen Integrale in der Form dar, welche mir nach mehrjähriger anhaltender Beschäftigung mit diesem Gegenstande als die einfachste erscheint, um diese Theorie in voller Strenge und in voller Allgemeinheit zu entwickeln.

Diese Arbeit setzt zwar die Entwickelbarkeit der algebraischen Functionen in Potenzreihen voraus, ich habe jedoch für diese Thatsache einen Beweis gefunden, welcher ausser dem einfachsten Convergenzcriterium für eine Reihe kein einziges Resultat der Analysis benutzt, und für den daher alle sonst sich darbietenden Schwierigkeiten bei dem Auftreten höherer Singularitäten überhaupt gar nicht erst in Frage kommen. Diesen Beweis, der in einem demnächst erscheinenden Lehrbuche über diesen Gegenstand ausführlich dargestellt werden wird, habe ich in der vorliegenden Abhandlung nicht auseinandergesetzt, um ihren Umfang nicht unnöthig zu vergrössern. Dies konnte um so leichter geschehen, als ich jene Methode in einer soeben in den Acta mathematica veröffentlichten Abhandlung*) auf die Theorie der algebraischen Flächen ausgedehnt habe; aus ihr kann die Lösung der hier vorliegenden einfacheren Aufgabe unschwer abstrahirt werden.

Ich nehme an, dass y mit x durch eine irreductible Gleichung verbunden ist, und betrachte dann die Gesammtheit aller rationalen Functionen von x und y, d. h. alle Individuen des Körpers $K(x, y)$, die dann sämmtlich auf der der Gleichung gehörigen Riemann'schen Fläche $\mathfrak{K}$ eindeutig ausgebreitet sind. Im Mittelpunkte dieser ganzen Theorie steht nun bei dem hier befolgten Wege die Lösung der folgenden Fundamentalaufgabe:

---

*) K. Hensel, Ueber eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen. Acta mathematica Bd. 23, S. 339—416.

> Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger rationaler Functionen von x und y gefunden werden, welche in h beliebig gegebenen Punkten
>
> $$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$$
>
> der Riemann'schen Fläche mindestens die Ordnungszahlen
>
> $$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$$
>
> besitzen und sich in allen anderen Punkten jener Fläche regulär verhalten.

Wir lösen diese Aufgabe für jeden Körper, der einer ganz beliebig gegebenen Grundcurve zugehört, vollständig in der Weise, dass wir ein stets anwendbares *endliches* Verfahren zur Aufsuchung eines solchen „Fundamentalsystemes" angeben. Dass diese Aufgabe hier ganz im Anfange der Theorie gelöst wird, während ihre Lösung sonst schon die Theorie der Abel'schen Integrale, die Zerschneidung der Riemann'schen Fläche, den Riemann-Roch'schen Satz, und, im Falle höherer Singularitäten, ihre Auflösung durch birationale Transformation erfordert, erscheint mir als ein wesentlicher Vorzug des hier eingeschlagenen Weges.

Nachdem dann gezeigt ist, dass die Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemann'schen Fläche und die Ordnungszahlen der Functionen von x und y in ihnen von der Wahl der unabhängigen Variablen x ganz unabhängig, dass sie vielmehr Invarianten des Körpers $K(x, y)$ sind, ordne ich nun jedem Punkte $\mathfrak{P}$ einen gleichbezeichneten Divisor zu, und sage, eine Function ξ des Körpers $K(x, y)$ enthält den Divisor $\mathfrak{P}^\varrho$, wenn sie in dem Punkte $\mathfrak{P}$ die (positive, negative oder verschwindende) Ordnungszahl ϱ besitzt. Entsprechend fasse ich die Producte der Potenzen verschiedener Primfactoren zu einem ganzen oder gebrochenen Divisor

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

zusammen. Dann kann die soeben erwähnte Fundamentalaufgabe einfacher folgendermassen ausgesprochen werden:

> Es soll ein Fundamentalsystem für alle linear unabhängigen Multipla eines beliebig gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb eines Körpers $K(x, y)$ gefunden werden.

Die hier in die Theorie eingeführten Divisoren $\mathfrak{Q}$ bilden einen grossen Bereich, von dem die Grössen des Körpers K ein Theilbereich sind, denn jeder solchen Grösse ξ entspricht eindeutig ein Divisor $\mathfrak{Q}_\xi$, welcher durch ihre Nullstellen und Pole bestimmt ist, aber es giebt unendlich viele Divisoren $\mathfrak{Q}$, denen keine Function des Körpers zugeordnet ist. Auf dieser Thatsache beruht nun die Eintheilung der Divisoren in *Classen*.

Zunächst rechnen wir alle und nur die Divisoren $\mathfrak{Q}_\xi$, welche den Functionen ξ des Körpers K entsprechen, in eine Classe, die s. g. *Haupt-*

oder *Einheitsclasse* E; dann aber werfen wir alle diejenigen Divisoren $\mathfrak{Q}$ in eine und dieselbe Classe Q, welche sich nur um einen Factor der Einheitsklasse E, d. h. um eine Grösse ξ des Körpers $K(x, y)$ von einander unterscheiden. Dann kann als die allgemeinste Aufgabe der Theorie der algebraischen Functionen das folgende Problem bezeichnet werden.

> Es soll ein vollständiges System aller unabhängigen Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer beliebigen Divisorenclasse R gefunden werden.

Ist R speciell die Hauptclasse E, so ist diese Aufgabe mit der vorher gelösten identisch und sie kann sonst leicht auf diesen Fall zurückgeführt werden. Ist Q die zu $\mathfrak{Q}$ gehörige Divisorenclasse, so hängt die Anzahl $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$ jener unabhängigen Multipla von Q nicht von diesem speciellen Divisor, sondern nur von den beiden Classen Q und R ab, sie ist die wichtigste und allgemeinste Invariante der algebraischen Körper.

Im zweiten Theile dieser Arbeit wende ich nun die bis jetzt gefundenen rein algebraischen Resultate auf die Untersuchung der Abel'schen Integrale an.

Es seien ξ und η zwei beliebige Grössen des Körpers K; beachtet man dann, dass der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ selbst eine rationale Function von x und y, also eine Grösse des Körpers ist, mithin als Divisor betrachtet der Hauptclasse angehört, so folgt leicht, dass jedes Abel'sche Differential $d\omega = \xi\, dx$ einem Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ äquivalent gesetzt werden kann, dessen einzelne Primfactoren genau ebenso, wie bei den Grössen des Körpers alle diejenigen Punkte der Riemann'schen Fläche bestimmen, in denen sich das zugehörige Integral nicht normal verhält. Ist nämlich ω jenes Integral, ω_0 die einem Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechende Integrationsconstante, so bestimmen die Primfactoren des Nenners von $\mathfrak{W}_\omega$ alle diejenigen Punkte $\mathfrak{P}$, in denen $\omega - \omega_0$ in bestimmter Ordnung unendlich wird, während die Factoren des Zählers alle und nur die Punkte ergeben, in denen $\omega - \omega_0$ von höherer als der ersten Ordnung verschwindet.

Allen und nur den zu $K(x, y)$ gehörigen Differentialen $d\omega$ entsprechen nun alle Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ einer bestimmten Divisorenclasse W, welche ich die *Differentialclasse* nenne, und die genau ebenso wie die Hauptclasse E der Functionen von $K(x, y)$ untersucht werden kann; und man erkennt jetzt, dass von diesem Standpunkte aus die Betrachtung der rationalen Functionen von x und y einerseits und die Theorie der Abel'schen Integrale andererseits nur zwei specielle Fälle eines und desselben Problemes sind, nämlich die Untersuchung aller Divisoren einer und derselben Classe.

Die allgemeinste Aufgabe in der Theorie der Abel'schen Integrale ist dann die Beantwortung der folgenden Frage: Es sollen alle linear unabhängigen Integrale gefunden werden, welche in beliebig vielen gegebenen Stellen $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_h$ in bestimmter Weise nicht normal sind, während sie sich in allen anderen Punkten normal verhalten. Diese Aufgabe fordert aber nichts Anderes als die folgende:

> Es sollen alle unabhängigen Divisoren der Differentialclasse W gefunden werden, welche Multipla eines gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ sind.

Diese Aufgabe ist bereits im ersten Theile dieser Arbeit vollständig und zwar so gelöst, dass jene Divisoren, und damit auch jene Integrale in jedem Falle rein algebraisch berechnet werden können. Aus der Betrachtung der Anzahl $\left\{\frac{W}{Q}\right\}$ jener Divisoren kann man unmittelbar den Riemann-Roch'schen Satz in seiner allgemeinsten Form ablesen. Wählt man den Divisor $\mathfrak{Q}$ speciell gleich 1 oder gleich $\frac{1}{\mathfrak{P}^m}$ oder gleich $\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$, so erhält man die Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung, und hieraus folgt ohne Weiteres die Darstellung jedes beliebigen Integrals durch jene einfachsten Integrale.

§ 1.

In der Theorie der algebraischen Functionen und der Abel'schen Integrale betrachtet man die Gesammtheit, den s. g. *Körper* $K(x, y)$, aller rationalen Functionen von x und y unter der Voraussetzung, dass y mit x durch eine beliebige irreductible Gleichung

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_1(x)y + a_0(x) = 0$$

verbunden ist, deren Coefficienten $a_n(x), \cdots, a_0(x)$ beliebige rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x sind.

In den Elementen der Functionentheorie wird gezeigt, dass jede Function

$$\eta = \varphi(x, y)$$

jenes Körpers auf einer gewissen n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{K}$ eindeutig ist, deren Blätter in einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten mit einander zusammenhängen, und zwar heisst ein Punkt $\mathfrak{P}$ jener Fläche ein α-blättriger Verzweigungspunkt oder ein Verzweigungspunkt der $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn in ihm α von den n Blättern von $\mathfrak{K}$ zusammenhängen. In der Umgebung eines solchen Punktes ist dann jede Function η des Körpers in eine Potenzreihe entwickelbar, welche nach steigenden Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ bzw. von $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, je nachdem die unabhängige Variable x in $\mathfrak{P}$ den endlichen Werth a annimmt oder dort unendlich gross wird.

In der Umgebung eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ der Fläche $\mathfrak{R}$ ist jede Function η des Körpers $K(x, y)$ in der folgenden Form dargestellt:

$$(1) \qquad \eta = (x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}}\left(a_0 + a_1(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots\right) = (x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}} E(x|a),$$

wo ϱ eine ganze Zahl und $E(x|a)$ eine in der Umgebung der Stelle $(x=a)$ gleichmässig convergirende Potenzreihe mit nichtverschwindendem Anfangsgliede, oder kürzer gesprochen *eine Einheitsfunction für die Stelle* a bedeutet; hier wie stets im Folgenden kann auch $a=\infty$ angenommen werden, alsdann ist nur der Linearfactor $x-a$ durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen. Ist η in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ in der Form (1) dargestellt, so sagt man, diese Function besitzt an jener Stelle die *Ordnung* ϱ. Ist $\varrho \geqq 0$, so heisst η *regulär* in $\mathfrak{P}$, ist dagegen $\varrho = -\bar{\varrho}$ eine negative ganze Zahl, so besitzt η dort einen *Pol der Ordnung* $\bar{\varrho}$.

Wir betrachten zuerst die algebraischen Functionen η in der Umgebung einer beliebig gegebenen endlichen oder unendlichen Stelle $(x=a)$ des Bereiches der unabhängigen Variabeln x. An dieser Stelle liegen im Allgemeinen n Punkte der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{R}$ über einander, jedoch ist diese Anzahl kleiner, wenn einer oder mehrere jener Punkte Verzweigungspunkte sind. Um die Untersuchung nicht unnöthig zu compliciren, werde ein für alle Mal angenommen, dass für $(x=a)$ drei Verzweigungspunkte V_α, V_β, V_γ übereinander liegen, in denen bzw. α, β, γ Blätter von $\mathfrak{R}$ zusammenhängen, so dass $\alpha+\beta+\gamma=n$ ist; und es sei ferner die Bezeichnung so gewählt, dass die α ersten Blätter in V_α, die β folgenden in V_β, die γ letzten in V_γ zusammenhängen. Alsdann schreiten die Entwicklungen der n conjugirten Zweige $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(n)}$ einer beliebigen algebraischen Function in der Umgebung der Stelle $(x=a)$ nach ganzen Potenzen bzw. von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$, $(x-a)^{\frac{1}{\beta}}$, $(x-a)^{\frac{1}{\gamma}}$ fort, und zwar ergeben sich die Entwicklungen von $\eta^{(1)}, \cdots \eta^{(\alpha)}$ aus der von $\eta^{(1)}$ dadurch, dass man die Potenz $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ durch ihre α conjugirten ersetzt, welche sich ja nur durch Einheitswurzeln von einander unterscheiden. Ist μ das kleinste gemeinsame Multiplum von α, β, γ, so kann man einfacher sagen, dass jene n Entwicklungen $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(n)}$ nach ganzen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreiten.

Es seien nun:

$$\eta^{(1)} = a_1(x-a)^{\frac{r}{\mu}} + b_1(x-a)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots,$$
$$\eta^{(2)} = a_2(x-a)^{\frac{r}{\mu}} + b_2(x-a)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta^{(n)} = a_n(x-a)^{\frac{r}{\mu}} + b_n(x-a)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots$$

jene n Entwicklungen in der Umgebung der Stelle a, wo eben $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ die niedrigste Potenz von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ ist, welche in mindestens einer dieser Entwicklungen vorkommt, so ist diese auch die höchste Potenz von $(x-a)$, für welche der Bruch $\dfrac{\eta}{(x-a)^{\frac{r}{\mu}}}$ an jener Stelle noch regulär ist; daher soll jene Potenz $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ *der Theiler von* η für jene Stelle a genannt werden. Ist $A(x)$ speciell eine rationale Function von x allein, so besitzt sie stets eine ganzzahlige Potenz von $x-a$ bzw. von $\frac{1}{x}$ als Theiler, und zwar ist jener Theiler im ersten Falle die in $A(x)$ enthaltene Potenz von $x-a$, im zweiten der negativ genommene Grad jener Function. Ist ferner $(x-a)^s$ der Theiler von $A(x)$, und $(x-a)^\varrho$ der Theiler der algebraischen Function η, so ist offenbar $(x-a)^{s+\varrho}$ der Theiler des Productes $A\eta$.

§ 2.

Alle algebraischen Functionen η des Körpers $K(x, y)$ können durch n rational unabhängige unter ihnen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ eindeutig in der Form

(1) $$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$

mit rationalen Functionen von x als Coefficienten dargestellt werden, und zwar bestimmen sich jene Coefficienten aus den n linearen Gleichungen:

$$\eta^{(\varkappa)} = u_1\eta_1^{(\varkappa)} + u_2\eta_2^{(\varkappa)} + \cdots + u_n\eta_n^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

welche aus (1) dadurch entstehen, dass man in den $(n+1)$ Functionen $\eta, \eta_1, \cdots, \eta_n$ von y und x y der Reihe nach durch seine n conjugirten Werthe $y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(n)}$ ersetzt. Die n linearen Functionen $\eta_1, \cdots, \eta_n$ sind demnach dann und nur dann rational unabhängig, wenn die Determinante

$$\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right| = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \cdots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Es sei $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ein beliebiges rational unabhängiges System n Functionen des Körpers $K(x, y)$. Betrachtet man dann die Gesammtit aller derjenigen Functionen:

$$\eta = u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots + u_n \eta_n,$$

ren Coefficienten $u_1, u_2, \cdots, u_n$ beliebige, aber *ganze* rationale Functionen n x sind, so bilden diese einen Theilbereich $(\mathfrak{A})$ des Körpers $K(x, y)$, ıen „Modul" in der Dedekind'schen Terminologie, und das System ı, $\eta_2, \cdots, \eta_n)$ soll eine *Basis* für den Bereich oder Modul $(\mathfrak{A})$ genannt ɪrden.

Sind $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ und $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ zwei Basen für denselben ɪreich $(\mathfrak{A})$, so bestehen zwischen ihren Elementen zwei Systeme von n Gleichungen

$$\zeta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa} \eta_\varkappa; \qquad \eta_\varkappa = \sum_{l=1}^{n} b_{\varkappa l} \zeta_l,$$

denen die Substitutionscoefficienten $a_{i\varkappa}$ und $b_{\varkappa l}$ ganze Functionen von sind, deren Determinanten $|a_{i\varkappa}|$ und $|b_{\varkappa l}|$, wie sich leicht ergiebt, von ıll verschiedene constante Werthe haben. Zwei Systeme, welche in ɘser Beziehung zu einander stehen, gehören auch umgekehrt zu demlben Bereiche $(\mathfrak{A})$ und sollen im Folgenden *äquivalente* Systeme gennt werden. Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich, wenn man zu n Determinanten übergeht, die Beziehung:

$$\left|\zeta_i^{(\varkappa)}\right| = \left|a_{i\varkappa}\right| \left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|,$$

h. die Determinanten äquivalenter Systeme unterscheiden sich nur durch ıe multiplicative Constante.

Es sei jetzt $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ irgend eine Basis, $(\mathfrak{A})$ der zugehörige ɪreich oder Modul, und es sollen nun alle Functionen η von $(\mathfrak{A})$ in r Umgebung der beliebigen Stelle $(x = a)$ untersucht werden, der wieder ɘ drei über einander liegenden Verzweigungspunkte $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ entrechen. Es seien:

$$(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}}, \quad (x-a)^{\frac{r_2}{\mu}}, \cdots, (x-a)^{\frac{r_n}{\mu}}$$

ɘ Theiler der n Elemente η_i für die Stelle a. Denkt man sich nun ɘ n^2 Elemente der Determinante $\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|$ sämmtlich nach Potenzen von $-a)$ entwickelt, so ergiebt sich eine Gleichung:

$$\left|{}_i^{(\varkappa)}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}} + \cdots, \cdots, a_{1n}(x-a)^{\frac{r_n}{\mu}} + \cdots \\ a_{21}(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}} + \cdots, \cdots, a_{2n}(x-a)^{\frac{r_n}{\mu}} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}} + \cdots, \cdots, a_{nn}(x-a)^{\frac{r_n}{\mu}} + \cdots \end{vmatrix} = |a_{i\varkappa}|(x-a)^{\frac{r_1 + \cdots + r_n}{\mu}} + \cdots.$$

Ist aber andererseits $(x-a)^{\frac{d}{\mu}}$ der Theiler der Determinante $|\eta_i^{(\varkappa)}|$, ist also die Entwicklung derselben von der Form:

$$|\eta_i^{(\varkappa)}| = \delta(x-a)^{\frac{d}{\mu}} + \varepsilon(x-a)^{\frac{d+1}{\mu}} + \cdots,$$

so ergiebt sich aus der Vergleichung jener beiden Darstellungen unmittelbar die Beziehung

$$\frac{r_1}{\mu} + \frac{r_2}{\mu} + \cdots + \frac{r_n}{\mu} \leqq \frac{d}{\mu},$$

und zwar ist die Summe der Exponenten links dann und nur dann gleich dem Exponenten $\frac{d}{\mu}$ des Theilers von $|\eta_i^{(\varkappa)}|$, wenn die aus den Coefficienten der Anfangsglieder gebildete Determinante $|a_{i\varkappa}|$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

In diesem Falle soll das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ *regulär* für die Stelle $(x = a)$ heissen, und auf solche Systeme beziehen sich die nachfolgenden Betrachtungen.

Es sei also $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ irgend ein reguläres System und allgemein $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ der Theiler von η_i für die Stelle a. Ist dann

$$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$

irgend eine Function des Körpers, so ist der Theiler von η für $(x = a)$ mindestens gleich dem niedrigsten unter den Theilern der n Producte $u_1\eta_1, u_2\eta_2, \cdots, u_n\eta_n$; dieser kann aber auch grösser sein, denn es können sich ja in der Entwicklung der n conjugirten Zweige von η die Anfangsglieder sämmtlich fortheben. Es gilt nun aber der Satz, dass dieser zweite Fall dann und nur dann eintritt, wenn jenes System nicht regulär ist.

In der That sei $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ der niedrigste unter den Theilern der n Producte $u_i\eta_i$; dann kann die Entwicklung aller Coefficienten $u_1, \cdots, u_n$ nach Potenzen von $(x-a)$ folgendermassen geschrieben werden:

$$u_i(x) = c_i(x-a)^{\frac{r-r_i}{\mu}} + d_i(x-a)^{\frac{r-r_i+1}{\mu}} + \cdots,$$

wo einige, aber nicht alle Anfangscoefficienten $c_1, c_2, \cdots, c_n$ gleich Null sein können, denn nur dann besitzen *alle* jene Producte $u_i\eta_i$ mindestens den Theiler $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ und keinen höheren. Bildet man aber jetzt die n Anfangscoefficienten $C_1, C_2, \cdots, C_n$ von $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ in den n conjugirten Entwicklungen von η in der Umgebung von a, so hängen diese mit den Anfangscoefficienten $c_1, \cdots, c_n$ durch die n Gleichungen zusammen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} C_1 &= c_1 a_{11} + \cdots + c_n a_{1n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= c_1 a_{n1} + \cdots + c_n a_{nn}, \end{aligned}$$

wo die Coefficienten $a_{i\varkappa}$ die Anfangscoefficienten der Elemente $\left(\eta_i^{(\varkappa)}\right)$ sind. Da aber $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ regulär, also $|a_{i\varkappa}| \gtrless 0$ ist, so können jene n Anfangsglieder nicht alle verschwinden, wenn auch nur eines der Anfangsglieder c_i der Coefficienten von Null verschieden ist.

§ 3.

Den im vorigen Abschnitte bewiesene Satz kann man in der folgenden Form aussprechen:

> Ist $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ein beliebiges rational unabhängiges System, welches für eine Stelle a regulär ist, so ist der Theiler einer beliebigen Function
>
> $$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$
>
> für jene Stelle gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der n Theiler von $u_1\eta_1$, $u_2\eta_2$, $\cdots$, $u_n\eta_n$, aus denen η besteht.

Ist das System aber kein reguläres, so gilt jener Satz nicht, denn, wie aus den obigen Gleichungen (2) sofort hervorgeht, kann man die Anfangsglieder $c_1, c_2, \cdots, c_n$ der Coefficienten $u_i(x)$ alsdann stets so bestimmen, dass die n Anfangscoefficienten $C_1, \cdots, C_n$ sämmtlich verschwinden. Aus diesem Grunde ist daher der folgende Satz von fundamentaler Bedeutung:

> Jedes algebraische System ist einem regulären Systeme äquivalent.

Zum Beweise dieses Satzes nehme ich zunächst an, dass die Stelle a im Endlichen liege; eine leichte Modification des Beweisganges zeigt, dass jener Satz auch für die Stelle $x = \infty$ richtig ist. Es mögen nun wie vorher die Theiler der Elemente des Systemes $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ der Reihe nach gleich $(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}}$, $(x-a)^{\frac{r_2}{\mu}}$, $\cdots$, $(x-a)^{\frac{r_n}{\mu}}$, und $(x-a)^{\frac{d}{\mu}}$ jener Theiler für die Determinante $\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|$ sein, so dass stets $\sum \frac{r_i}{\mu} \leqq \frac{d}{\mu}$ ist. Die Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ sind dann sämmtlich Brüche, deren Nenner bzw. α, β oder γ sind, je nachdem das Anfangsglied des betreffenden Elementes η zu der Entwicklung um einen der drei bei $x = a$ übereinander liegenden Verzweigungspunkte V_α, V_β oder V_γ gehört. Die Elemente $\eta_1, \cdots, \eta_n$ sollen so angeordnet sein, dass die Exponenten $\frac{r_1}{\mu} \leqq \frac{r_2}{\mu} \leqq \cdots \leqq \frac{r_n}{\mu}$ sind.

Zwei solche Brüche sollen *congruent* heissen, wenn sie sich nur um eine ganze Zahl von einander unterscheiden, wenn also z. B. $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$ ist, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Endlich seien die Blätter für den Augenblick so bezeichnet, dass das erste Blatt zu V_α, das zweite zu V_β, das dritte zu V_γ gehört, während die übrigen in irgend einer Reihenfolge auf diese folgen mögen.

Wir betrachten nun neben dem Systeme $\left(\eta_i^{(\varkappa)}\right)$ das System $(a_{i\varkappa})$ seiner Anfangscoefficienten, und auch von diesem nur seine drei ersten Horizontalreihen:

$$(1) \qquad (a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

denn alle folgenden unterscheiden sich ja von einer von diesen nur um α^{te}, β^{te} oder γ^{te} Wurzeln der Einheit, je nachdem das zugehörige Blatt zu V_α, V_β oder V_γ gehört, sie sind also durch diese mit bestimmt. Alsdann kann man, ohne jenes System im Sinne der Aequivalenz irgendwie zu ändern, irgend eine Colonne von (a) von einer *späteren* abziehen, falls nur die zugehörigen Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ congruent sind. Ist nämlich z. B. $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$, wo also $k \geqq 0$ ist, und ersetzt man in jener Basis η_2 durch

$$\eta_2' = \eta_2 - \lambda(x-a)^k \eta_1,$$

so erhält man ein äquivalentes System $(\eta_1, \eta_2', \cdots, \eta_n)$, für welches das System der Anfangsglieder offenbar ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - \lambda a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} - \lambda a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}.$$

Ebenso kann man jede Colonne von (a) durch eine beliebige Constante λ dividiren, denn dann wird ja nur z. B. η_1 durch $\frac{1}{\lambda}\eta_1$ ersetzt.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze kann nun die verlangte Ueberführung leicht bewerkstelligt werden: Von den drei Elementen der ersten Colonne von (a) in (1) muss mindestens eines von Null verschieden sein. Es sei a_{21} das *erste* von diesen; dann mache man es dadurch zu 1, dass man jene ganze Colonne durch a_{21} dividirt, und in dem so umgeformten Systeme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ 1 & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \end{pmatrix}$$

mache man nun alle diejenigen Elemente der zweiten Horizontalreihe, für welche die zugehörigen Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ zu $\frac{r_1}{\mu}$ congruent sind, dadurch zu Null, dass man von der betreffenden Colonne ein geeignetes Multiplum der ersten abzieht. In derselben Weise werde nun die zweite Colonne transformirt. Hier sei etwa $a_{12} \gtrless 0$; dann mache man dieses Element zu Eins und alsdann alle folgenden Elemente der *ersten* Zeile zu Null, für welche der zugehörige Exponent zu $\frac{r_2}{\mu}$ congruent ist.

In derselben Weise kann man bis zur letzten Colonne fortfahren, es sei denn, dass einmal, etwa für die i^{te} Colonne, alle Elemente a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} zu Null geworden sind. Alsdann sind aber in dem zugehörigen transformirten Elemente $\bar{\eta}_i$ *alle* n Coefficienten von $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ in den n conjugirten Entwicklungen gleich Null, d. h. $\bar{\eta}_i$ besitzt dann nicht den Theiler $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ sondern einen höheren, also mindestens $(x-a)^{\frac{r_i+1}{\mu}}$. Ist dies aber der Fall, so ordne man die letzten Elemente $\bar{\eta}_i, \cdots, \bar{\eta}_n$ wieder nach der Grösse ihrer Theiler, wobei eventuell $\bar{\eta}_i$ mit einem späteren Elemente zu vertauschen ist. Da aber unter der hier gemachten Voraussetzung die Summe der Exponenten $\sum \frac{r_i}{\mu}$ mindestens um $\frac{1}{\mu}$ gewachsen ist, und da sie andererseits nicht über $\frac{d}{\mu}$ hinaus zunehmen kann, so muss man bei Fortsetzung des Verfahrens zuletzt zu einem Systeme kommen, bei welchem niemals alle Elemente einer Colonne zugleich Null sind. Führt man jetzt die hier geschilderte Umformung bis zu Ende durch und ordnet dann die Colonnen so, dass zuerst diejenigen stehen, in welchen das erste der drei Colonnenelemente gleich Eins ist, dann alle die, für welche das zweite Element gleich Eins ist, so erhält man ein zu $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ äquivalentes System, dessen Anfangssystem jetzt die folgende Gestalt hat:

$$(1^a) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1; & 1 & 0 & \cdots & 0; & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_\alpha; & 1 & 1 & \cdots & 1; & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_\alpha; & c_1 & c_2 & \cdots & c_\beta; & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente der ersten Zeile muss dann genau gleich α sein; da nämlich diese Zeile zu V_α gehört, so müssen alle Exponenten $\frac{r_1}{\mu}, \cdots$ incongruente Brüche mit dem Nenner α sein, und ihre Anzahl kann daher nicht grösser als α sein, da es nicht mehr als α incongruente Brüche mit diesem Nenner giebt; genau ebenso folgt, dass die Anzahl der Elemente Eins in der zweiten bzw. dritten

Zeile höchstens β bzw. γ sein kann. Endlich kann aber auch keine jener drei Anzahlen kleiner sein als α, β oder γ; denn sonst würde man ja in mindestens einer Colonne lauter Nullen erhalten, das Verfahren wäre somit noch nicht bis zu Ende durchgeführt.

Die zu den α ersten Colonnen dieses Systemes gehörigen Exponenten $\frac{r}{\mu}$ besitzen nun alle den Nenner α; sie bilden somit ein vollständiges System incongruenter Brüche mit diesem Nenner und mögen daher jetzt durch

$$\frac{\varrho_1}{\alpha}, \frac{\varrho_2}{\alpha}, \ldots, \frac{\varrho_\alpha}{\alpha}$$

bezeichnet werden. Genau ebenso mögen die Brüche

$$\frac{\sigma_1}{\beta}, \frac{\sigma_2}{\beta}, \ldots, \frac{\sigma_\beta}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_1}{\gamma}, \frac{\tau_2}{\gamma}, \ldots, \frac{\tau_\gamma}{\gamma}$$

die Exponenten bezeichnen, welche bzw. zu den β folgenden und zu den γ letzten Colonnen gehören und welche ebenfalls vollständige Systeme incongruenter Brüche mit dem Nenner β und γ bilden.

Schreibt man jetzt die Anfangsglieder für alle α zu V_α gehörigen Blätter unter jene erste Zeile hinunter und beachtet dabei, dass diese sich von jener ersten nur um α^{te} Wurzeln der Einheit unterscheiden, so bilden die α ersten Colonnen ein Partialsystem:

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_\alpha \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_1^{\alpha-1} & \omega_2^{\alpha-1} & \cdots & \omega_\alpha^{\alpha-1} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

dessen Determinante den von Null verschiedenen Werth $\alpha^{\frac{\alpha}{2}}$ besitzt, denn sie ist die Quadratwurzel aus der Discriminante der Kreistheilungsgleichung $\omega^\alpha - 1 = 0$. Alle Elemente der $\beta + \gamma$ folgenden Colonnen aber sind gleich Null. Schreibt man in derselben Weise alle n^2 Anfangsglieder jenes transformirten Systemes unter die erste, zweite oder dritte Zeile unseres transformirten Systemes, so erhält man ein System, welches in leicht verständlicher Bezeichnung folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(S) = \begin{pmatrix} S_\alpha, & 0, & 0 \\ *, & S_\beta, & 0 \\ *, & *, & S_\gamma \end{pmatrix},$$

wo S_α das System (2) von α Zeilen ist und S_β und S_γ die entsprechenden aus den β^{ten} und γ^{ten} Einheitswurzeln gebildeten Systeme von β bzw. γ Zeilen bedeuten. Die Sterne bedeuten, dass dort verschwindende oder nicht verschwindende Elemente stehen, welche bzw. aus den Grössen a_i, b_i, c_i und den bezüglichen Einheitswurzeln gebildet sind. Da nun die Determinante $|S|$ jenes Systemes durch die Gleichung

$$|S| = |S_\alpha| \cdot |S_\beta| \cdot |S_\gamma| = \alpha^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \beta^{\frac{\beta}{2}} \cdot \gamma^{\frac{\gamma}{2}}$$

bestimmt, also von Null verschieden ist, so ist das so gefundene System regulär, also der Satz vollständig bewiesen.

Ist die Stelle $a = \infty$ der unendlich ferne Punkt, bei welchem die drei Verzweigungspunkte V_α, V_β, V_γ übereinander liegen, so ist der einzige Unterschied der, dass das System

$$(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

im Sinne der Aequivalenz ungeändert bleibt, wenn man irgend eine Verticalreihe von einer *früheren* abzieht, falls die bezüglichen Exponenten congruente Brüche sind. Ist nämlich wieder etwa $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$ und ersetzt man jetzt η_1 durch

$$\eta_1' = \eta_1 - \lambda x^k \eta_2,$$

so sind die Coefficienten von $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{r_1}{\mu}}$ jetzt bzw. gleich $a_{11} - \lambda a_{12}$, $a_{21} - \lambda a_{22}$, $a_{31} - \lambda a_{32}$. In diesem Falle muss man also die Transformation nicht von der ersten, sondern von der letzten Colonne aus beginnen, man erkennt aber ohne Weiteres, dass man zuletzt zu genau demselben Resultate gelangt, wie früher.

§ 4.

Die Fundamentalaufgabe der Theorie der algebraischen Functionen kann nunmehr folgendermassen formulirt werden:

> Es sollen alle Functionen des Körpers $K(x, y)$ gefunden werden, welche in h beliebig gegebenen Punkten
>
> $$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$$
>
> (I) der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ mindestens von den Ordnungen
>
> $$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$$
>
> sind und sich im Uebrigen auf der ganzen Kugelfläche regulär verhalten.

Diese Aufgabe lässt sich wesentlich einfacher aussprechen, wenn man jene Punkte zu einem Punktsysteme

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

vereinigt, in welchem jeder der h Punkte $\mathfrak{P}_i$ denjenigen Exponenten λ_i erhält, welcher durch die zugehörige positive oder negative Ordnungszahl λ_i bestimmt ist. Ohne jenes System $\mathfrak{Q}$ im Geringsten zu ändern, kann man ihm einen oder mehrere Punkte mit dem Exponenten Null hinzufügen, und ebenso kann man aus $\mathfrak{Q}$ alle diejenigen Punkte fortlassen, deren Exponent gleich Null ist.

Eine Function ξ *gehört* zu dem Punktsystem $\mathfrak{Q}$, wenn sie in einem jeden Punkte $\mathfrak{P}$ desselben mindestens die zugehörige Ordnungszahl λ_i besitzt und sich im Uebrigen regulär verhält; bei Benutzung dieser Definition kann die zu lösende Aufgabe folgendermassen ausgesprochen werden:

(I′) Es sollen alle Grössen des Körpers $K(x, y)$ gefunden werden, welche zu einem gegebenen Punktsystem $\mathfrak{Q}$ gehören.

Bei der Lösung dieser Aufgabe kann ohne jede Beeinträchtigung ihrer Allgemeinheit vorläufig angenommen werden, dass weder einer der Basispunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$, von $\mathfrak{Q}$ noch auch einer der Verzweigungspunkte V_α, $V_\beta, \cdots, V_\delta$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ an der Stelle $x = \infty$ sich befinden. Sollte dies nämlich nicht der Fall sein, so genügt es offenbar, von vornherein an Stelle von x die Grösse

$$x' = \frac{1}{x - a_0}$$

als unabhängige Variable einzuführen und a_0 irgendwie so zu wählen, dass an der Stelle $(x = a_0)$ keiner jener Punkte sich befindet. Im Folgenden kann und soll daher vorläufig angenommen werden, dass jene Voraussetzung bereits für die Variable x erfüllt ist.

Das Problem (I) kann nun leicht auf die Lösung der folgenden einfacheren Aufgabe zurückgeführt werden:

(I^a) Es sollen alle Functionen der Körpers $K(x, y)$ gefunden werden, welche in den h im Endlichen liegenden Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$ bzw. mindestens die gegebenen Ordnungszahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$ besitzen und sonst für alle *im Endlichen liegenden* Punkte regulär sind.

Alle diese Functionen bilden dann einen Bereich (J), ein „Ideal" in der Dedekind'schen Terminologie. Dieser Bereich ist durch das zugehörige Punktsystem $\mathfrak{Q}$ vollständig charakterisirt.

Für die einem Bereiche (J) angehörigen Functionen bestehen offenbar folgende Sätze:

1) Sind $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ irgendwelche Functionen des Bereiches (J), so gehört auch jede Function

$$\eta = u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots + u_r \eta_r$$

demselben Bereiche an, wenn die Coefficienten beliebige, aber *ganze* Functionen von x sind.

2) Jede Function ζ des Körpers $K(x,y)$ kann mit einer solchen *ganzen* Function $g(x)$ von x multiplicirt werden, dass das Product $\eta = g \cdot \zeta$ zu (J) gehört. Gehört nämlich die Function ζ nicht schon selbst zu (J), so ist sie nur in einer endlichen Anzahl von endlichen Stellen nicht regulär, bzw. von niedrigerer als der verlangten Ordnung, und man kann daher $g(x)$ stets so wählen, dass das Product $\eta = g(x)\zeta$ dem Bereiche (J) angehört.

3) Aus 2) folgt, dass man stets ein System von n rational unabhängigen Functionen $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ von $K(x,y)$ so wählen kann, dass sie sämmtlich zu (J) gehören; denn ist $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ irgend ein solches System, dessen Elemente nicht alle zu (J) gehören, so kann man dasselbe durch Multiplication seiner Elemente mit ganzen Functionen $g_1, g_2, \cdots, g_n$ in ein anderes, offenbar ebenfalls unabhängiges System $(g_1\zeta_1, g_2\zeta_2, \cdots, g_n\zeta_n)$ $= (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ verwandeln, dessen Elemente jenem Bereiche angehören. Alsdann gehört nach dem ersten Satze jede Function

$$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$

zu (J), wenn die Coefficienten $u_1, u_2, \cdots, u_n$ beliebige *ganze* Functionen von x sind. Bilden also $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ irgend ein rational unabhängiges System, dessen Elemente sämmtlich dem Bereiche (J) angehören, so gehört der ganze durch $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ constituirte Modul $(\mathfrak{A})$ ebenfalls zu (J).

Es sei nun $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ eine beliebige Basis, deren Elemente sämmtlich dem Bereiche (J) angehören, dann gehört der ganze durch sie constituirte Modul $(\mathfrak{A})$ ebenfalls zu (J) und bildet somit einen Theilbereich jenes Ideales, jedoch fallen im Allgemeinen jene beiden Bereiche nicht zusammen, sondern es giebt Functionen von (J), welche nicht zu $(\mathfrak{A})$ gehören, welche also, durch die Basis $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ausgedrückt, in gebrochener Form erscheinen. Man kann aber aus jener Basis stets eine andere $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ von der Art ableiten, dass dieselbe eine Basis für das *ganze* Ideal bildet, dass also der durch $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ repräsentirte Modul mit dem Bereiche (J) identisch ist; eine solche Basis soll *ein Fundamentalsystem für* (J) genannt werden.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ wieder in der Umgebung irgend einer endlichen Stelle a. Es mögen hier wieder die drei Verzweigungspunkte V_α, V_β und V_γ über einander liegen, und es seien ϱ, σ und τ die Ordnungszahlen, welche alle Functionen von (J) dort mindestens besitzen müssen; diese Zahlen sind dann entweder gewisse unter den Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$ des zu (J) gehörigen Systemes $\mathfrak{Q}$ oder aber sie sind gleich Null, je nachdem der betreffende von jenen Verzweigungspunkten V_α, V_β, V_γ zu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$ gehört oder nicht.

Dann kann man, wie jetzt gezeigt werden soll, von dem beliebig gegebenen Systeme $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ ausgehend zu einem anderen $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$ gelangen, welches als ein Fundamentalsystem für (J) in Bezug auf die Stelle $(x = a)$ bezeichnet werden kann. Dasselbe zerfällt nämlich, entsprechend den drei zu a gehörigen Verzweigungspunkten V_α, V_β, V_γ, in drei Partialsysteme:

$$\zeta_1, \cdots \zeta_\alpha; \quad \zeta_{\alpha+1}, \cdots \zeta_{\alpha+\beta}; \quad \zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n.$$

Betrachtet man das erste, zu V_α gehörige Partialsystem

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\alpha$$

für sich, so beginnen die Entwicklungen seiner α Elemente in der Umgebung von V_α mit

$$(x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}}, \ (x-a)^{\frac{\varrho+1}{\alpha}}, \cdots (x-a)^{\frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}},$$

besitzen also hier der Reihe nach die Ordnungszahlen

$$\varrho, \ \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1,$$

während in der Umgebung der anderen Punkte V_β und V_γ alle ihre Glieder bis zu einer beliebig hohen Potenz von $(x-a)$ hin fortfallen, so dass man in diesem Sinne behaupten kann, dass ihnen für V_β und V_γ die Ordnungszahl ∞ zukommt. Jenes Fundamentalsystem

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\alpha; \quad \zeta_{\alpha+1}, \zeta_{\alpha+2}, \cdots \zeta_{\alpha+\beta}; \quad \zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n$$

besitzt also der Reihe nach die Ordnungszahlen:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } V_\alpha: & \varrho, \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1; & \infty \quad \infty \cdots \infty & ; \infty \quad \infty \cdots \infty, \\
\text{für } V_\beta: & \infty \quad \infty \cdots \infty & ; \sigma, \sigma+1, \cdots \sigma+\beta-1; & \infty \quad \infty \cdots \infty, \\
\text{für } V_\gamma: & \infty \quad \infty \cdots \infty & ; \infty \quad \infty \cdots \infty & ; \tau, \tau+1, \cdots \tau+\gamma-1.
\end{array}$$

Ein solches System von α Elementen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\alpha$, welches in der Umgebung eines Punktes V_α die Ordnungszahlen $\varrho, \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1$, aber für alle darüber liegenden Punkte der Riemann'schen Fläche V_β, V_γ, die Ordnung ∞ besitzt, soll ein *Partialsystem von der Ordnung ϱ für den Punkt V_α* genannt werden. Mit Hülfe dieser Bezeichnung kann der zu beweisende Satz folgendermassen ausgesprochen werden:

> Jede zu (J) gehörige Basis $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ kann in eine andere transformirt werden, welche in lauter Partialsysteme, entsprechend den an der betrachteten Stelle über einander liegenden Punkten V_α, V_β, V_γ, zerfällt, und deren Ordnungen ϱ, σ, τ gleich denen sind, welche die zugehörigen Punkte in dem Bereiche (J) besitzen.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes braucht man nur zu zeigen, dass $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ in ein anderes System $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$ transformirt werden kann, welches nur in der Umgebung *eines* jener drei Verzweigungspunkte, etwa von V_γ, die verlangten Eigenschaften besitzt, dass nämlich seine ersten $\alpha+\beta$ Elemente $\zeta_1, \cdots \zeta_{\alpha+\beta}$ dort die Ordnungszahl ∞ besitzen, während die γ letzten $\zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n$ der Reihe nach die Ordnungszahlen $\tau, \tau+1, \cdots \tau+\gamma-1$ haben. Ist dieser Beweis nämlich geführt, so kann man das ganze System successive für V_γ, V_β, V_α so umformen, dass es ein Fundamentalsystem für (J) in Bezug auf die Stelle $(x=a)$ wird.

Wir nehmen zunächst an, dass die Punkte V_α, V_β, V_γ so bezeichnet sind, dass $\frac{\varrho}{\alpha} \leqq \frac{\sigma}{\beta} \leqq \frac{\tau}{\gamma}$ ist; ferner denken wir uns, das gegebene System von vornherein so gegeben, dass es für die Stelle a regulär ist, was nach den Resultaten des letzten Abschnittes stets möglich ist; es sei wieder das aus den Anfangscoefficienten gebildete dreizeilige System das folgende:

$$\begin{pmatrix} 1\ 1 \cdots 1; & 0\ 0 \cdots 0; & 0\ 0 \cdots 0 \\ a_1\ a_2 \cdots a_\alpha; & 1\ 1 \cdots 1; & 0\ 0 \cdots 0 \\ b_1\ b_2 \cdots b_\alpha; & c_1\ c_2 \cdots c_\beta; & 1\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}.$$

Die Exponenten der zugehörigen Theiler der letzten γ Elemente

$$\eta_{\alpha+\beta+1},\ \eta_{\alpha+\beta+2}, \cdots \eta_n,$$

auf welche es im Folgenden allein ankommt,

$$\frac{\tau_0}{\gamma}, \frac{\tau_1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau_{\gamma-1}}{\gamma},$$

bilden dann ein vollständiges System incongruenter Brüche mit dem Nenner γ, welche alle gleich oder grösser als $\frac{\tau}{\gamma}$ sind, und die von vornherein so geordnet vorausgesetzt werden können, dass sie der Reihe nach den γ aufeinander folgenden Brüchen

$$\frac{\tau}{\gamma}, \frac{\tau+1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau+\gamma-1}{\gamma}$$

congruent sind, so dass also allgemein

$$\frac{\tau_i}{\gamma} = \frac{\tau+i}{\gamma} + k_i \qquad (i=0,1,\cdots \gamma-1)$$

ist, wo k_i eine ganze nicht negative Zahl bezeichnet. Alsdann bleibt z. B. das zu dem Theiler

$$(x-a)^{\frac{\tau_0}{\gamma}} = (x-a)^{\frac{\tau}{\gamma}+k_0}$$

gehörige Element $\eta_{\alpha+\beta+1}$ in dem Bereiche (J), wenn man dasselbe durch die ganzzahlige Potenz $(x-a)^{k_0}$ dividirt; denn alsdann beginnt es in der Umgebung von V_γ genau mit der $\frac{\tau}{\gamma}^{\text{ten}}$, aber bei V_α und V_β mit einer höheren als der $\frac{\tau}{\gamma}^{\text{ten}}$ Potenz von $x - a$, also a fortiori mit einer höheren als der $\frac{\varrho}{\alpha}^{\text{ten}}$ bezw. $\frac{\sigma}{\beta}^{\text{ten}}$ Potenz, während ihr Verhalten für alle anderen endlichen Stellen durch die Division mit $(x-a)^{k_0}$ offenbar in keiner Weise geändert ist. Genau ebenso kann man weiter erreichen, dass für diese letzten γ Elemente die Exponenten der bezüglichen Theiler der Reihe nach die Brüche $\frac{\tau}{\gamma}, \frac{\tau+1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau+\gamma-1}{\gamma}$ sind, während sich das System der Anfangscoefficienten sonst in keiner Weise geändert hat.

Jetzt kann man endlich bewirken, dass die $\alpha+\beta$ ersten Elemente in der Umgebung von V_γ sämmtlich die Ordnungszahl ∞ besitzen. In der That sei etwa t die Ordnungszahl von η_1, also:

$$\eta_1 = e(x-a)^{\frac{t}{\gamma}} + \cdots$$

die Entwicklung von η_1 in V_γ, so ist $\frac{t}{\gamma} \geqq \frac{\tau}{\gamma}$ und einem Bruche der Reihe $\frac{\tau}{\gamma}, \frac{\tau+1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau+\gamma-1}{\gamma}$ congruent. Ist also z. B. $\frac{t}{\gamma} = \frac{\tau+i}{\gamma} + k$ und ersetzt man η_1 durch das neue Element

$$\eta_1' = \eta_1 - e(x-a)^k \eta_{\alpha+\beta+i-1},$$

so erhält man eine neue Basis $(\eta_1', \eta_2, \cdots \eta_n)$, aber η_1' ist von einer mindestens um Eins höheren Ordnung als η_1, da sich hier das Anfangsglied $e(x-a)^{\frac{t}{\gamma}}$ forthebt. Geht man in derselben Weise fort, so erhält man schliesslich ein neues System, dessen $\alpha+\beta$ erste Elemente in V_γ in der That von beliebig hoher Ordnung, also von der Ordnung ∞ sind.

Jetzt forme man die $\alpha+\beta$ ersten Elemente $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{\alpha+\beta}$ des neuen Systemes so um, dass dasselbe in der Umgebung der beiden ersten Verzweigungspunkte regulär wird. Hierdurch wird an dem Verhalten des ganzen Systemes in der Umgebung von V_γ gar nichts geändert, da seine $\alpha+\beta$ ersten Elemente vor und nach jener Umformung die Ordnung ∞ haben. Alsdann reducire man genau wie vorher die Exponenten $\frac{\sigma_0}{\beta}, \frac{\sigma_1}{\beta}, \cdots \frac{\sigma_{\beta-1}}{\beta}$ der Theiler von $\eta_{\alpha+1}, \cdots \eta_{\alpha+\beta}$ der Reihe nach auf $\frac{\sigma}{\beta}, \frac{\sigma+1}{\beta}, \cdots \frac{\sigma+\beta-1}{\beta}$ und bewirke dann wieder, dass sowohl die α ersten als auch die γ letzten Elemente die Ordnung ∞ erhalten; und endlich reducire man in gleicher Weise die Exponenten der Theiler von $\eta_1, \cdots \eta_\alpha$ auf $\frac{\varrho}{\alpha}, \frac{\varrho+1}{\alpha}, \cdots \frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}$ und die Ordnungszahlen der $\beta+\gamma$ folgenden Elemente in der Umgebung von V_α auf ∞. Man erkennt so, dass auf diesem Wege das ganze System in der verlangten Art umgeformt wird, da bei keiner jener Transformationen das Ergebniss eines früheren Schnittes vernichtet wird.

§ 5.

Das im vorigen Abschnitte gefundene System

$$\zeta_1, \cdots \zeta_\alpha;\ \zeta_{\alpha+1}, \cdots \zeta_{\alpha+\beta};\ \zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n$$

ist zwar noch kein absolutes Fundamentalsystem für das Ideal (J), dagegen kann es als ein solches für die Stelle $(x = a)$ bezeichnet werden. Es gilt nämlich der Satz:

Eine algebraische Function

$$\zeta = u_1 \zeta_1 + \cdots + u_n \zeta_n$$

kann nur dann dem Bereiche (J) angehören, wenn alle Coefficienten $u_1, u_2, \cdots u_n$ an der Stelle $(x=a)$ endlich sind, wenn also keiner derselben den Linearfactor $x - a$ im Nenner enthält.

In der That: Wäre dies nicht der Fall, so könnte man offenbar n nicht sämmtlich verschwindende Constanten $c_1, c_2, \cdots c_n$ so bestimmen, dass die Function

$$\zeta = \frac{c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \cdots + c_n \zeta_n}{x - a}$$

dem Ideale (J) angehörte. Ist aber c_i die erste nicht verschwindende dieser n Zahlen und ist z. B. $i \leqq \alpha$, so ist das erste Glied der Entwicklung von ζ in der Umgebung von V_α dasjenige, welches von $\dfrac{c_i \zeta_i}{x - a}$ herrührt, also gleich

$$c_i (x - a)^{\frac{\varrho + i - 1}{\alpha} - 1},$$

und dieses hebt sich nicht fort, da $\eta_{i+1}, \cdots \eta_\alpha$ von höherer Ordnung als η_i und alle folgenden von der Ordnung ∞ sind. Da somit die Function ζ unter dieser Voraussetzung von der Ordnung $\varrho - (\alpha - i + 1)$, also von niedrigerer als der ϱ^{ten} Ordnung wäre, so gehört sie nicht zu (J), und die soeben aufgestellte Behauptung ist bewiesen.

Durch die elementaren Betrachtungen der Determinantentheorie erschliesst man, dass jedes Fundamentalsystem $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ für die Stelle a aus einem von ihnen $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$ durch eine Substitution

$$\eta_i = \sum a_{i\varkappa}(x) \zeta_\varkappa$$

hervorgeht, deren Coefficienten $a_{i\varkappa}$ für jene Stelle ganz sind, also den Factor $(x - a)$ nicht im Nenner enthalten, und deren Determinante durch denselben nicht theilbar ist. Bildet man für zwei solche „für die Stelle a äquivalente Systeme" die Determinanten $|\eta_i^{(x)}|$ und $|\zeta_i^{(x)}|$, so besitzen diese also dieselbe Potenz von $(x-a)$ als Theiler.

Es ist jetzt leicht, die Potenz des Linearfactors $(x-a)$ zu ermitteln, welche in der Determinante $D=|\eta_i^{(x)}|$ dieses Fundamentalsystemes für die Stelle $(x=a)$ enthalten ist. Hierbei können nämlich alle diejenigen Elemente $\eta_i^{(x)}$ einfach durch Null ersetzt werden, deren Ordnung an den betrachteten Stellen V_α, V_β, V_γ unendlich gross ist. Thut man aber dieses, so reducirt sich D einfach auf das Product

$$D_\alpha \cdot D_\beta \cdot D_\gamma,$$

wo D_α, D_β, D_γ die Determinanten der zu den drei Verzweigungspunkten gehörigen Partialsysteme bedeuten. So ist z. B.

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_\alpha^{(1)} \\ \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \cdots & \eta_\alpha^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(\alpha)} & \eta_2^{(\alpha)} & \cdots & \eta_\alpha^{(\alpha)} \end{vmatrix}.$$

Beachtet man ferner, dass $\eta_1^{(1)}, \cdots \eta_\alpha^{(1)}$ nebst allen ihren Conjugirten bzw. mit $(x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}}, \cdots (x-a)^{\frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}}$ beginnen, so erkennt man, dass die Determinante D_α mit

$$(x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\varrho+1}{\alpha}+\cdots+\frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}} = (x-a)^{\varrho+\frac{\alpha-1}{2}}$$

beginnt, und dieses Glied hebt sich nicht fort, da sein Zahlencoefficient, die aus den Anfangsgliedern von D_α gebildete Determinante, wie in (2) S. 448 gezeigt wurde, von Null verschieden, nämlich gleich $\alpha^{\frac{\alpha}{2}}$ ist.

Nimmt man jetzt also allgemein an, dass an der Stelle a nicht bloss drei, sondern beliebig viele Verzweigungspunkte V_α, V_β, V_γ, $\cdots$ V_δ über einander liegen, so ergiebt sich, dass die Determinante $D=|\eta_i^{(x)}|$ genau durch die Potenz

$$(x-a)^{\varrho+\sigma+\tau+\cdots+\chi+\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}+\cdots+\frac{\delta-1}{2}} = (x-a)^{r+\frac{o}{2}}$$

theilbar ist, wo r die Summe der Ordnungszahlen bedeutet, welche den Punkten $V_\alpha, \cdots V_\delta$ für das Ideal (J) zukommt, und $o=\Sigma(\alpha-1)$ die Summe der Ordnungszahlen ist, welche jene Verzweigungspunkte auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ besitzen.

Formt man nun das so erhaltene System für eine andere Stelle $(x=b)$ ebenso um, so erhält man ein neues System, dessen Determinante den Linearfactor $x - b$ in der entsprechenden Potenz $r' + \frac{o'}{2}$ enthält, ohne dass sich ihre übrigen Linearfactoren geändert haben. Geht man nun von einem beliebigen Systeme $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ aus und formt dasselbe successive in der Umgebung aller derjenigen Stellen $a, b, \cdots$ in der hier geschilderten Weise um, für welche die Determinante die zugehörigen Linearfactoren $x - a$, $x - b, \cdots$ noch nicht in der niedrigsten Potenz $r + \frac{o}{2}$, $r' + \frac{o'}{2}, \cdots$ enthält, so gelangt man *nach einer endlichen Anzahl* von solchen Reductionen zu einem Systeme $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$, welches für *jede* endliche Stelle von $\mathfrak{R}$ ein Fundamentalsystem für den Bereich (J) ist; dieses System ist also ein absolutes Fundamentalsystem für (J).

§ 6.

Wir benutzen das soeben gefundene Resultat zunächst zur Ableitung eines für das Folgende wichtigen Satzes: Ist $(\xi_1 \cdots \xi_\alpha, \xi_{\alpha+1} \cdots \xi_{\alpha+\beta}, \xi_{\alpha+\beta+1}, \cdots \xi_n)$ wieder ein Fundamentalsystem für das Ideal J, welches entsprechend den bei der Stelle $(x = a)$ übereinander liegenden Verzweigungspunkten V_α, V_β, V_γ in die drei Partialsysteme bzw. von den Ordnungen ϱ, σ, τ zerfällt, so ist:

$$\xi_a = \xi_1 + \xi_{\alpha+1} + \xi_{\alpha+\beta+1}$$

eine Function des Bereiches (J), welche in den conjugirten Punkten V_α, V_β, V_γ, die der Stelle $(x = a)$ entsprechen, *genau die* Ordnungszahlen ϱ, σ, τ besitzt, welche den Punkten V_α, V_β, V_γ in dem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$ zukommt, wobei z. B. $\varrho = 0$ zu setzen ist, wenn V_α gar nicht in $\mathfrak{Q}$ auftritt u. s w. So kann man für eine jede Stelle $(x = a)$ der unabhängigen Variablen eine solche *zugehörige Function* ξ_a innerhalb (J) berechnen.

Es seien nun:

$$x = a, \quad x = b, \cdots x = c$$

alle und nur die Werthe der unabhängigen Variablen, denen überhaupt Punkte im Punktsysteme $\mathfrak{Q}$ entsprechen, und es bedeuten:

$$\xi_a, \ \xi_b, \ \cdots \ \xi_c$$

Functionen von (J), welche bzw. den Stellen $a, b, \cdots c$ in dem eben angegebenen Sinne zugehören. Es sei endlich:

$$T(x) = (x-a)^r (x-b)^s \cdots (x-c)^t$$

eine *ganze rationale* Function von x allein, welche dem Ideale (J) ebenfalls angehört, welche aber in jedem Punkte $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{Q}$ von höherer als der λ_i^{ten} Ordnung ist; offenbar können die positiven Exponenten $r, s, \cdots t$ stets so gross gewählt werden, dass diesen Bedingungen genügt wird.

Bilden wir dann die Summe:

$$\xi_{\mathfrak{Q}} = \xi_a \cdot \frac{T(x)}{(x-a)^r} + \xi_b \cdot \frac{T(x)}{(x-b)^s} + \cdots + \xi_c \cdot \frac{T(x)}{(x-c)^t},$$

so ist $\xi_{\mathfrak{Q}}$ eine Function von (J), welche an jedem Punkte $\mathfrak{P}_i$ des Punktsystemes $\mathfrak{Q}$ *genau* von der zugehörigen Ordnung λ_i und von keiner höheren Ordnung ist. In der That, gehört $\mathfrak{P}_1$ z. B. zu der Stelle $(x=a)$, so ist n. d. V. ξ_a in $\mathfrak{P}_1$ genau von der λ_1^{ten} Ordnung, während $\frac{T(x)}{(x-a)^r}$ hier von der nullten, alle folgenden Summanden von $\xi_{\mathfrak{Q}}$ aber von höherer als der λ_1^{ten} Ordnung sind, und das Entsprechende können wir für jeden anderen Punkt des Punktsystemes $\mathfrak{Q}$ beweisen.

(I) Eine Function $\xi_{\mathfrak{Q}}$, welche in jedem Punkte $\mathfrak{P}_i$ eines Punktsystemes $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$ *genau* von der Ordnung λ_i ist, soll eine zu $\mathfrak{Q}$ *zugeordnete* Function genannt werden. Zu einem beliebigen Punktsysteme $\mathfrak{Q}$, dessen Exponenten λ_i positiv negativ oder auch Null sein können, kann man also stets eine zugeordnete Function $\xi_{\mathfrak{Q}}$ berechnen.

Aus diesem Satze ziehen wir gleich einige Folgerungen. Es sei $(x = a)$ eine beliebige endliche oder die unendlich ferne Stelle der unabhängigen Variablen, und es mögen:

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_\nu$$

die sämmtlichen zugehörigen conjugirten Punkte der Riemann'schen Fläche sein, welche reguläre oder Verzweigungspunkte sein können. Wählen wir dann:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \cdots \mathfrak{P}_\nu,$$

so ist die zugeordnete Function $\xi_{\mathfrak{Q}}$ so beschaffen, dass sie in $\mathfrak{P}_1$ endlich und von Null verschieden ist, während sie in allen conjugirten Punkten verschwindet. Wählen wir ferner einfach

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}_1,$$

so verschwindet die zugeordnete Function $\xi_{\mathfrak{Q}'}$ in $\mathfrak{P}_1$, und zwar genau von der ersten Ordnung: Es bestehen also die beiden Sätze, welche im Folgenden gebraucht werden sollen:

(II) Innerhalb eines Körpers K existiren stets Functionen, welche in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}_1$ endlich und von Null verschieden sind, in allen conjugirten Punkten aber verschwinden, und ebenso existiren stets Functionen, welche in einem beliebigen Punkte von der ersten und von keiner höheren Ordnung sind.

Ebenso, wie durch ein Punktsystem $\mathfrak{Q}$ das zugehörige Fundamentalsystem, so ist auch durch das Fundamentalsystem das zugehörige Punktsystem $\mathfrak{Q}$ eindeutig bestimmt. In der That ergiebt sich nämlich offenbar aus den Resultaten des vorigen Abschnittes der folgende wichtige Satz:

(III) Ein System $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für ein Punktsystem, wenn es für jede endliche Stelle $(x = a)$ einem anderen äquivalent ist, welches entsprechend den jener Stelle zugehörigen Punkten $V_\alpha, V_\beta, \cdots V_\gamma$ der Riemann'schen Fläche in lauter Partialsysteme zerfällt. Ist dann für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ das zugehörige Partialsystem von der Ordnung λ, so enthält das Punktsystem $\mathfrak{Q}$ genau die λ^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$, d. h. es ist:

$$\mathfrak{Q} = \prod \mathfrak{P}^\lambda,$$

wo das Product offenbar nur über diejenigen Punkte $\mathfrak{P}$ erstreckt zu werden braucht, für welche die Ordnungszahlen λ von Null verschieden sind.

Endlich wollen wir diese Eigenschaft des Fundamentalsystemes für ein Punktsystem $\mathfrak{Q}$ dazu benutzen, um die Determinante

$$D(\mathfrak{Q}) = \left| \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \cdots \xi_n^{(i)} \right|$$

des zugehörigen algebraischen Systemes zu berechnen. Da ihr Quadrat eine rationale Function von x allein ist, so ist diese Aufgabe gelöst, wenn man angeben kann, wie oft ein beliebiger Linearfactor $x - a$ in $D(\mathfrak{Q})$ enthalten ist. Nun war aber für jede Stelle $(x = a)$

$$D(\mathfrak{Q}) = D_\alpha D_\beta \cdots D_\gamma$$

wenn $D_\alpha \cdots D_\gamma$ die Determinanten der einzelnen zu $(x = a)$ gehörigen Partialsysteme bedeuten, und da ferner für jedes Partialsystem z. B. die Determinante D_α genau durch $(x-a)^{\lambda + \frac{\alpha-1}{2}}$ theilbar war, etc., so ergiebt sich für $D(\mathfrak{Q})$ sofort die einfache Darstellung:

$$D(\mathfrak{Q}) = \prod_{(\mathfrak{P})} (x-a)^{\lambda + \frac{\alpha-1}{2}}, \tag{1}$$

wo sich das Product zunächst auf jeden endlichen Punkt $\mathfrak{P}$ erstreckt, und λ seine Ordnungszahl für $\mathfrak{Q}$, $\alpha - 1$ seine Verzweigungsordnung und $x - a$ den zugehörigen Linearfactor bedeutet.

Diese Gleichung kann man in einer sehr übersichtlichen Form schreiben. Zu diesem Zwecke betrachten wir statt $\mathfrak{Q}$ speciell das Punktsystem $\mathfrak{Q}_0 = 1$, welches also keinen einzigen Punkt in einer von Null verschiedenen Potenz enthält; dann sind die zu $\mathfrak{Q}_0$ gehörigen Functionen alle und nur die *ganzen* algebraischen Functionen von K, da sie allein sich für alle endlichen Punkte regulär verhalten. Ist dann $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ ein Fundamentalsystem, für $\mathfrak{Q}_0 = 1$, so ist seine Determinante, da hier alle Exponenten h_i Null sind, nach dem soeben bewiesenen Satze gleich:

$$(2) \qquad D(1) = \prod (x-a)^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

wo das Product nur auf alle Verzweigungspunkte ausgedehnt zu werden braucht, da für alle anderen Punkte die Exponenten $\alpha - 1$ verschwinden.

Sind ferner

$$x - a_1, \; x - a_2, \cdots x - a_h$$

die zu den h Basispunkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_h$ von $\mathfrak{Q}$ gehörigen Linearfactoren, von denen auch einzelne einander gleich sein könnten, und setzt man:

$$(3) \qquad N(\mathfrak{Q}) = (x-a_1)^{\lambda_1}(x-a_2)^{\lambda_2} \cdots (x-a_h)^{\lambda_h},$$

so kann unsere Gleichung (1) mit Benutzung von (2) und (3) in der eleganten Form geschrieben werden:

$$D(\mathfrak{Q}) = N(\mathfrak{Q}) \cdot D(1).$$

Da endlich der Grad l von $N(\mathfrak{Q})$ gleich

$$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_h$$

also gleich der Ordnung des Punktsystemes $\mathfrak{Q}$ und der Grad von $D(1)$ gleich:

$$\frac{w}{2} = \frac{1}{2} \sum (\alpha - 1),$$

d. h. gleich der halben Gesammtsumme der Verzweigungsordnungen für alle Verzweigungspunkte ist, so ist der Grad der Determinante $\left|\xi_i^{(x)}\right|$ gleich:

$$l + \frac{w}{2}.$$

Die Zahl w wird die *Verzweigungszahl* der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ genannt.

§ 7.

Zu jedem Systeme von n^2 Elementen:

$$(1) \qquad (\eta) = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(1)} \\ \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \cdots & \eta_n^{(2)} \\ \vdots & & & \\ \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \cdots & \eta_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

mit nicht verschwindender Determinante H gehört ein anderes, das s. g. *complementäre System:*

$$(1\mathrm{a})\qquad (\bar{\eta}) = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1^{(1)}, \bar{\eta}_2^{(1)}, \cdots \bar{\eta}_n^{(1)} \\ \bar{\eta}_1^{(2)}, \bar{\eta}_2^{(2)}, \cdots \bar{\eta}_n^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\eta}_1^{(n)}, \bar{\eta}_2^{(n)}, \cdots \bar{\eta}_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

welches aus dem zu (η) reciproken Systeme $(\eta)^{-1}$ einfach durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen hervorgeht. Für dieses complementäre System ist also z. B.

$$(1\mathrm{b})\qquad \bar{\eta}_1^{(1)} = \frac{H_1^{(1)}}{H} = \begin{vmatrix} \eta_2^{(2)}, \cdots \eta_n^{(2)} \\ \vdots \\ \eta_2^{(n)}, \cdots \eta_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(1)} \\ \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \cdots & \eta_n^{(2)} \\ \vdots \\ \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \cdots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Aus dieser Definition ergeben sich sofort die folgenden Fundamentaleigenschaften der complementären Systeme:

I) Ist (η), wie bisher angenommen wurde, ein algebraisches System von x und y, dessen Zeilen also durch Vertauschung von y_1 mit $y_2, \cdots y_n$ aus seiner ersten hervorgehen, so gilt dasselbe von dem complementären Systeme. In der That folgt zunächst aus der Gleichung (1b), dass z. B. $\bar{\eta}_1^{(1)}$ eine rationale Function von $y_1, y_2, \cdots y_n$ ist, welche aber in $y_2, y_3, \cdots y_n$ symmetrisch ist, mithin rational durch y_1 allein dargestellt werden kann. Vertauscht man nämlich z. B. y_{n-1} mit y_n, so vertauschen sich sowohl in $H_1^{(1)}$ als auch in H die beiden letzten Horizontalreihen, d. h. $\bar{\eta}_1^{(1)}$ bleibt bei dieser und ebenso auch bei jeder anderen Transposition von $y_2, y_3, \cdots y_n$ ungeändert, ist also wirklich rational von y_1 allein abhängig.

Vertauscht man aber etwa y_1 mit y_2, so vertauschen sich in dem ursprünglichen Systeme (η), also auch in dem complementären Systeme nur die erste uud die zweite Zeile, es geht also bei jener Vertauschung z. B. $\bar{\eta}_1^{(1)}$ in $\bar{\eta}_1^{(2)}$ über u. s. w., unsere Behauptung ist also in allen ihren Theilen bewiesen.

Ist also $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ irgend ein rational unabhängiges System des Rörpers $K(x, y)$, so existirt ein zu ihm complementäres System $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n)$ desselben Körpers, welcher auf dem soeben angegebenen Wege stets gefunden werden kann. Sind $|\eta|$ und $|\bar{\eta}|$ die Determinanten complementärer Systeme, so folgt aus den Grundeigenschaften der reciproken Systeme:

$$|\eta| \cdot |\bar{\eta}| = 1.$$

Ebenso leicht erkennt man, dass wenn $(\bar{\eta})$ complementär zu (η) ist, auch umgekehrt (η) das complementäre System zu $(\bar{\eta})$ ist.

II) Geht das System $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ durch eine beliebige Transformation (a_{ik}) von nicht verschwindender Determinante in ein anderes $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ über, so geht auch das complementäre System $(\bar{\eta}_1, \cdots \bar{\eta}_n)$ durch die complementäre Transformation $(\bar{a}_{ik})$ in das complementäre System $(\bar{\xi}_1, \cdots \bar{\xi}_n)$ über, d. h. von den beiden Compositionsgleichungen:

$$(\eta)(a_{ik}) = (\xi),$$
$$(\bar{\eta})(\bar{a}_{ik}) = (\bar{\xi}),$$

ist jede eine Folge der anderen. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung daraus, dass das System $(\bar{\eta})$ aus dem reciproken durch Vertauschung der Zeilen und Colonnen hervorgeht. Ist also speciell (η) äquivalent (ξ), so gilt das Gleiche von $(\bar{\eta})$ und $(\bar{\xi})$.

III) Ist das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ für irgend eine Stelle, z. B. für $(x = \infty)$ regulär, so gilt dasselbe von dem complementären $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n)$. Sind dann ferner $r_1, r_2, \cdots r_n$ die Ordnungszahlen seiner n Elemente, so sind die Ordnungszahlen von $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n)$ bezw. gleich $(-r_1, -r_2, \cdots -r_n)$. Ersetzt man nämlich z. B. in dem Ausdrucke (1b) von $\bar{\eta}_1^{(1)}$ die n^2 Elemente $\eta_i^{(k)}$ durch ihre Entwickelungen nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ und beachtet dabei, dass alle Elemente $\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \cdots \eta_i^{(n)}$ einer und derselben Colonne in der Form $\left(\frac{1}{x}\right)^{r_i} G\left(\frac{1}{x}\right)$ geschrieben werden können, weil η_i n. d. V. für die Stelle $(x = \infty)$ die Ordnungszahl r_i besitzt, so erkennt man, dass die Determinante $\mathsf{H}_1^{(1)}$ im Zähler von (1b) mindestens die Ordnung $(r_2 + r_3 + \cdots + r_n)$ hat, während die Determinante H im Nenner genau von der Ordnung $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ ist, weil das System $\left(\eta_i^{(\varkappa)}\right)$ n. d. V. für jene Stelle regulär ist. Also ist der Quotient: $\bar{\eta}_1^{(1)} = \frac{\mathsf{H}_1^{(1)}}{\mathsf{H}}$ mindestens von der Ordnung $-r_1$ und das Entsprechende beweist man von den conjugirten Elementen $\bar{\eta}_1^{(2)} \cdots \bar{\eta}_1^{(n)}$; es zeigt sich also, dass $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n$ mindestens die Ordnungszahlen $-r_1, -r_2, \cdots -r_n$ haben. Die Ordnungszahl der Determinante $|\bar{\eta}|$ des complementären Systems ist also mindestens gleich $-(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$ und könnte nur dann grösser als diese Zahl sein, wenn eins der Elemente $\bar{\eta}_i$ von höherer als der $(-r_i)^{\text{ten}}$ Ordnung wäre. Da aber $|\bar{\eta}| = \frac{1}{|\eta|}$ ist, so ist $|\bar{\eta}|$ genau von der $-(r_1 + \cdots + r_n)^{\text{ten}}$ und nicht von höherer Ordnung, unsere Behauptung ist daher vollständig bewiesen.

IV) Ist das System (η) so beschaffen, dass es für eine Stelle $(x = a)$ entsprechend den dort vorhandenen Verzweigungspunkten $V_\alpha, V_\beta, \cdots V_\gamma$

in Partialsysteme zerfällt, so gilt das Gleiche auch von dem complementären Systeme. Ist ferner z. B. das zu V_α gehörige Partialsystem von (η) von der Ordnung ϱ, so besitzt das complementäre Partialsystem die Ordnung $\bar{\varrho} = -(\varrho + \alpha - 1)$, d. h. es besteht die Gleichung:

$$(2) \qquad \varrho + \bar{\varrho} = -(\alpha - 1).$$

Der erste Theil unserer Behauptung folgt einfach aus dem bekannten Satz der Determinantentheorie, dass, wenn ein System von n^2 Elementen z. B. in drei Partialsysteme bezw. von α^2, β^2, γ^2 Elementen zerfällt, wenn es also die Form hat:

$$\begin{pmatrix} A, & 0, & 0 \\ 0, & B, & 0 \\ 0, & 0, & C \end{pmatrix}$$

dann das reciproke System in gleicher Weise zerfällt; und zwar so, dass jedes Partialsystem desselben einfach zu dem entsprechenden Partialsysteme des ersten Systemes reciprok ist.

Zweitens ist aber unter der oben gemachten Voraussetzung das System für die Stelle $(x = a)$ regulär und die Ordnungszahlen $(r_1, r_2, \cdots r_n)$ seiner Elemente $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\alpha; \eta_{\alpha+1}, \eta_{\alpha+2}, \cdots \eta_{\alpha+\beta}; \eta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \eta_n$ sind der Reihe nach:

$$(2) \quad \varrho, \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1; \ \sigma, \sigma+1, \cdots \sigma+\beta-1; \ \tau, \tau+1, \cdots \tau+\gamma-1.$$

Nach dem soeben bewiesenen Satze III) ist also auch das complementäre System

$$\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_\alpha; \ \bar{\eta}_{\alpha+1}, \bar{\eta}_{\alpha+2}, \cdots \bar{\eta}_{\alpha+\beta}; \ \bar{\eta}_{\alpha+\beta+1}, \cdots \bar{\eta}_n$$

regulär und die Ordnungszahlen seiner Elemente sind bezw.

$$(2\text{a}) \quad -\varrho, -(\varrho+1), \cdots -(\varrho+\alpha-1); \ -\sigma, -(\sigma+1), \cdots -(\sigma+\beta-1); \\ -\tau, \cdots -(\tau+\gamma-1).$$

Daher besitzen die drei Partialsysteme von $(\bar{\eta})$ bezw. die Ordnungszahlen $-(\varrho+\alpha-1)$, $-(\sigma+\beta-1)$ und $-(\tau+\gamma-1)$ da diese in den Reihen (2a) die kleinsten Zahlen sind; der obige Satz ist also vollständig bewiesen.

Um nun endlich den Fundamentalsatz über die complementären Systeme einfach aussprechen zu können, führen wir den folgenden neuen und für die ganze Theorie sehr wichtigen Begriff ein:

Unter dem *Verzweigungssystem* des Körpers $K(x, y)$ in Bezug auf x verstehen wir das Punktsystem

$$(3) \qquad \mathfrak{Z} = \prod \mathfrak{P}_\alpha^{\alpha-1},$$

in welchem jeder Punkt $\mathfrak{P}_\alpha$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ so oft vorkommt, als seine Verzweigungsordnung $\alpha - 1$ angiebt. Dasselbe enthält also alle und nur die Verzweigungspunkte, der zugehörigen Riemann'schen Fläche. Da wir die Stelle ($x=\infty$) als regulär vorausgesetzt hatten, so enthält $\mathfrak{Z}$ hier nur solche Divisoren, welche endlichen Stellen entsprechen.

Mit Benützung dieses Begriffes können wir jenen Hauptsatz nun folgendermassen aussprechen:

V) Ist $(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n)$ ein Fundamentalsystem für ein beliebiges Punktsystem $\mathfrak{Q}$, so ist das complementäre $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots \bar{\xi}_n)$ ein Fundamentalsystem für dasjenige Punktsystem $\bar{\mathfrak{Q}}$, welches mit $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{Q}\bar{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}}$$

verbunden ist.

Unserer Voraussetzung zufolge ist nämlich das System $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ für jede endliche Stelle $(x=a)$ einem anderen äquivalent, welches, entsprechend den dort über einander liegenden Punkten der Riemann'schen Fläche in Partialsysteme zerfällt. Das Gleiche gilt also nach Satz (II) und (IV) für das complementäre System $(\bar{\xi}_1, \cdots \bar{\xi}_n)$, nach dem a. S. 459 bewiesenen Satze ist also auch dieses ein Fundamentalsystem für einen anderen Divisor $\bar{\mathfrak{Q}}$. Sind ferner:

$$\mathfrak{Q} = \prod \mathfrak{P}^{\varrho}, \qquad \bar{\mathfrak{Q}} = \prod \mathfrak{P}^{\bar{\varrho}}$$

die zu (ξ) und $(\bar{\xi})$ gehörigen Punktsysteme, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (2) für ihr Product die Relation:

$$\mathfrak{Q}\bar{\mathfrak{Q}} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{\varrho+\bar{\varrho}} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{-(\alpha-1)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}}$$

und damit der vollständige Beweis unseres Fundamentalsatzes.

§ 8.

Bis jetzt hatten wir der Betrachtung des Körpers K die Grösse x als unabhängige Variable zu Grunde gelegt. Wir können aber aus jenem Körper irgend eine nicht constante Grösse ξ herausgreifen, diese als unabhängige Variable bestimmen, und sind dann stets im Stande, eine andere Grösse η desselben Körpers so zu wählen, dass der Körper $K(\xi, \eta)$ aller rationalen Functionen von ξ und η mit dem Körper $K(x, y)$ der Functionen von x und y identisch ist. Auf den Beweis dieser bekannten Thatsache will ich hier nicht eingehen.

Dann genügt η und jede andere Grösse ζ des Körpers $K(\xi\eta) = K(xy)$ einer Gleichung eines bestimmten ν^{ten} Grades mit in ξ rationalen Coefficienten, welche selbst irreductibel oder die Potenz einer irreductiblen

Function ist; und man zeigt genau ebenso wie vorher, dass nun der ganze Werthvorrath einer solchen Grösse ζ eindeutig auf einer ν-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{K}_\xi$ ausgebreitet werden kann, deren Blätter jetzt wieder in einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten zusammenhängen, und für die Entwickelung einer Function ζ nach Potenzen von $\xi - \alpha$ bezw. $\frac{1}{\xi}$ in der Umgebung eines Punktes dieser Fläche gelten jetzt wörtlich dieselben Sätze, wie sie im § 1 für die zur Variablen x zugehörige Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ angegeben wurden.

Eine Stelle $\mathfrak{P}$ der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{K}_x$ ist dadurch eindeutig und unabhängig von der zu Grunde gelegten unabhängigen Variablen definirt, dass alle Functionen z des Körpers $K(x\,y)$ dort bestimmte constante Werthe z_0 erhalten, welche auch Null oder unendlich gross sein können. Umgekehrt ist aber durch die unendlich vielen Gleichungen $z = z_0$ die zugehörige Stelle $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt, denn es giebt nicht zwei Stellen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, wo *jede* Function z des Körpers denselben Werth z_0 annimmt. Wäre dies nämlich der Fall, so müsste ja x in beiden Punkten denselben Werth a erhalten, d. h. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ müssten zwei von den bei $x = a$ über einander liegenden conjugirten Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_\nu$ sein. Andererseits folgt aber aus dem Satze (II) des § 6, dass man stets eine Function z finden kann, welche in einem jener conjugirten Punkte $\mathfrak{P}_1$ den Werth Eins, in allen anderen $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \cdots$ den Werth Null annimmt, und damit ist jene Behauptung vollständig bewiesen. Da aber die hier zu Grunde gelegte Definition der Stelle $\mathfrak{P}$ nur von dem Körper $K(x\,y) = K(\xi\,\eta)$ aber gar nicht von der unabhängigen Variablen x oder ξ abhängt, so entspricht jedem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}_x$ ein einziger Punkt von $\mathfrak{K}_\xi$ und beide können somit durch denselben Buchstaben bezeichnet werden.

Um nun auch die Ordnungszahl der Functionen z in einem Punkte $\mathfrak{P}$ unabhängig von der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ oder $\mathfrak{K}_\xi$ zu charakterisiren, greife ich in dem Körper $K(xy)$ irgend eine Function π heraus, welche hier von möglichst niedriger also von der ersten Ordnung ist; auch solche Functionen existiren in $K(xy)$, wie in dem soeben erwähnten Satze des § 6 bewiesen worden ist. Jede andere in $\mathfrak{P}$ verschwindende Function z ist dann so beschaffen, dass der Quotient $\frac{z}{\pi}$ in $\mathfrak{P}$ einen endlichen Werth besitzt. Dann sagen wir allgemein: Eine Function z ist in $\mathfrak{P}$ von der Ordnung ϱ, wenn ϱ derjenige Exponent von π ist, für welchen der Quotient $\frac{z}{\pi^\varrho}$ in $\mathfrak{P}$ endlich und von Null verschieden ist. Aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes folgt dann, dass diese Ordnungszahl für jede Grösse z von $K(x\,y) = K(\xi\,\eta)$ einen bestimmten *ganzzahligen* Werth hat, der positiv, Null, oder negativ sein kann und vollständig unabhängig von der Variablen x oder ξ ist; denn als Massstab wird die Function $\mathfrak{x}$ des Körpers gewählt, welche hier von möglichst niedriger Ordnung unendlich klein wird.

§ 9.

Durch die Ergebnisse der vorigen Abschnitte ist die mit (Ia) bezeichnete zweite Aufgabe, alle zu einem beliebigen Ideale (J) gehörigen algebraischen Functionen zu finden, vollständig gelöst. Es handelt sich jetzt zur Erledigung der Hauptaufgabe (I) nur noch darum, aus den Functionen von (J) alle und nur die Functionen auszuscheiden, welche das Punktsystem $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$ wirklich enthalten, d. h. die Functionen, welche sich auch für die Stelle $(x = \infty)$ regulär verhalten, welche also dort mindestens die Ordnung Null besitzen. Die Gesammtheit dieser Functionen bildet einen Theilbereich von (J), dessen Individuen durch folgenden Satz charakterisirt sind:

> Alle zu dem System $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$ gehörigen Functionen ξ sind dadurch charakterisirt, dass sie allgemein in $\mathfrak{P}_i$ mindestens von der Ordnung λ_i und für jeden anderen Punkt der *ganzen* Kugelfläche regulär sind.

Diese zu $\mathfrak{Q}$ gehörigen Functionen sind für die in der Theorie der algebraischen Functionen auftretenden Fragen allein wesentlich, während die Moduln und Ideale nur Hülfsbegriffe sind. Die Richtigkeit der letzteren Bemerkung erkennt man leicht daraus, dass schon bei einer einfachen gebrochenen Substitution $x' = \frac{1}{x - a_0}$ für die unabhängige Variable, also bei einfacher Verschiebung der Stelle $x = \infty$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, sowohl die Moduln als auch die Ideale sich vollständig ändern, während der Bereich aller Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ allein von diesem abhängt und bei jeder umkehrbaren Transformation *beider* Variabeln derselbe bleibt.

Es sei nun ein Fundamentalsystem $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$ für das Ideal (J) gegeben, welches für die Stelle $(x = \infty)$ regulär ist; da dort n. d. V. keine Verzweigungspunkte über einander liegen, so sind die Ordnungszahlen

$$r_1, r_2, \cdots r_n$$

jener n Elemente ganze Zahlen, welche wieder nach ihrer Grösse so geordnet sein mögen, dass $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n$ ist. Ist dann r_s die letzte nicht negative dieser Zahlen, so gehören von jenen n Elementen $\zeta_1, \cdots \zeta_s, \zeta_{s+1}, \cdots \zeta_n$ nur die s ersten zu dem Systeme $\mathfrak{Q}$ die $n - s$ letzten aber nicht mehr, da diese für $x = \infty$ nicht regulär sind. Aus der Grund-eigenschaft der für eine Stelle $(x = a)$ regulären Systeme folgt aber weiter der allgemeine Satz, durch welchen jetzt auch die Hauptfrage (I) in voller Allgemeinheit gelöst wird:

Alle zu einem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$ gehörigen Functionen, und nur sie, sind in der Form

$$\zeta = u_1 \zeta_1 + u_2 \zeta_2 + \cdots + u_s \zeta_s$$

enthalten, in welcher die Coefficienten $u_1, \cdots u_s$ beliebige *ganze* Functionen von x bezw. von den Graden $r_1, r_2, \cdots r_s$ sind.

In der That gehören ja alle jene Functionen offenbar zu dem System $\mathfrak{Q}$, da sie einmal Functionen von (J) sind, und da andererseits ihre Ordnung für die Stelle $(x = \infty)$ gleich oder grösser als Null ist. Wäre aber auch nur einer jener Coefficienten, etwa u_i, von höherem als dem angegebenen Grade in x, oder wäre auch nur einer der folgenden Coefficienten $u_{s+1}, \cdots u_n$ von Null verschieden, so wäre das bezügliche Glied $u_i \zeta_i$, also auch ζ selbst, für $x = \infty$ von negativer Ordnung, ζ gehörte also sicher nicht zu dem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$.

Bezeichnet man also die

$$N = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$$

algebraischen Functionen

$$\zeta_i, \, x\zeta_i, \, x^2 \zeta_i, \cdots x^{r_i} \zeta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots s)$$

in irgend einer Reihenfolge durch

$$z_1, \, z_2, \cdots z_N,$$

so bilden diese in der Weise ein vollständiges System linear unabhängiger zu $\mathfrak{Q}$ gehöriger Functionen, als alle Functionen z jenes Bereiches eindeutig in der Form

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_N z_N$$

mit constanten Coefficienten darstellbar sind. Die Anzahl N der linear unabhängigen zu $\mathfrak{Q}$ gehörigen Functionen ist durch die Ordnungszahlen $r_1, r_2, \cdots r_n$ der Elemente $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ für $x = \infty$ bestimmt und diese wiederum dadurch, dass ihre Summe gleich der Ordnung der Determinante $|\zeta_i^{(x)}|$, also ihrem negativen Grade in x gleich ist, welcher oben bestimmt wurde. Hieraus ergiebt sich die bemerkenswerthe Gleichung:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\left(l + \frac{w}{2}\right),$$

in der l die Ordnung des Systemes $\mathfrak{Q}$ und w die Verzweigungszahl der Riemann'schen Fläche bedeutet. Da in dieser Gleichung sowohl die Ordnungszahl l von $\mathfrak{Q}$, als auch die Ordnungszahlen r_i der Elemente ζ_i für

$(x = \infty)$ ganze Zahlen sind, so folgt, dass $\frac{w}{2}$ eine ganze, dass also die Verzweigungszahl

$$w = \sum (a-1)$$

der Riemann'schen Kugelfläche nothwendig eine gerade Zahl sein muss.

Das hier erlangte Resultat ist von der bisher gemachten Voraussetzung, dass sich an der Stelle $(x = \infty)$ keiner der Basispunkte $\mathfrak{P}_1, \cdots \mathfrak{P}_h$ von $\mathfrak{Q}$ und auch kein Verzweigungspunkt befindet, vollkommen unabhängig. Ist diese Annahme nämlich nicht erfüllt, so braucht man nur für x die unabhängige Variable

$$x' = \frac{1}{x - a_0}$$

einzuführen, wenn $(x = a_0)$ irgend eine Stelle ist, für die jene beiden Voraussetzungen erfüllt sind. Bildet man dann für diese Variable ein Fundamentalsystem $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$ des Ideales (J), welches für die Stelle $(x' = \infty)$ oder $(x = a_0)$ regulär ist und dessen Ordnungszahlen $r_1, \cdots r_s, \cdots r_n$ sind, und ersetzt man dann wieder x' durch x, so erhält man in den

$$N = (r_1 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$$

Elementen

$$\zeta_i, \; \frac{\zeta_i}{x - a_0}, \; \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^2}, \cdots \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^{r_i}} \qquad (i = 1, 2, \cdots s)$$

ein vollstäudiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$, $(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \cdots \bar{\zeta}_N)$, und jene Aufgabe ist somit ohne jede beschränkende Voraussetzung vollständig gelöst.

Wir stellen nun endlich die allgemeinere Aufgabe, alle diejenigen Multipla von $\mathfrak{Q}$ aufzusuchen, welche in den n zu $x = a_0$ gehörigen Punkten der Riemann'schen Fläche mindestens von der Ordnung λ sind, wo λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, während man für $\lambda = 0$ den soeben behandelten Fall wieder erhält. Sind dann in dem vorher betrachteten Systeme $(\zeta_1, \cdots \zeta_\sigma, \cdots \zeta_n)$ die σ ersten Elemente $\zeta_1, \cdots \zeta_\sigma$ diejenigen, deren Ordnungszahlen $r_1, \cdots r_\sigma$ gleich oder grösser als λ sind, so zeigt man genau ebenso wie früher, dass die

$$N_\lambda = (r_1 - \lambda + 1) + \cdots + (r_\sigma - \lambda + 1)$$

Elemente

$$\zeta_i, \; \frac{\zeta_i}{x - a_0}, \cdots \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^{r_i - \lambda}} \qquad (i = 1, 2, \cdots \sigma)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ der verlangten Art repräsentiren.

§ 10.

Auf die im § 8 gefundenen Eigenschaften der Punkte $\mathfrak{P}$ und der Ordnungszahlen der Functionen des Körpers $K(x, y)$ gründet sich nun die Einführung der algebraischen Divisoren, welche für das Folgende von grundlegender Bedeutung ist.

Jedem Punkte $\mathfrak{P}$ einer beliebigen Riemann'schen Fläche ordnen wir einen algebraischen Primtheiler zu, den wir ebenso durch $\mathfrak{P}$ bezeichnen, und wir sagen, eine Function $\mathfrak{x}$ ist durch die Potenz $\mathfrak{P}^\lambda$ von $\mathfrak{P}$ theilbar, wenn sie in dem entsprechenden Punkte die Ordnungszahl λ besitzt, (λ kann hier eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null bedeuten). Aus den Resultaten des vorigen Abschnittes folgt dann, dass diese Primtheiler völlig unabhängig von der Wahl der unabhängigen Variablen sind, und man erkennt ebenso leicht, dass ihnen die elementaren Eigenschaften der Primzahlen in der Zahlentheorie ebenfalls zukommen.

Das Product

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2}\cdots\mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

einer beliebigen Anzahl gleicher oder verschiedener Primfactoren soll *ein algebraischer Divisor* genannt werden, so dass also jedem Punktsysteme ein algebraischer Divisor eindeutig entspricht. Die Exponenten können ebenfalls positiv oder negativ oder auch Null sein. Wir wollen diese Divisoren selbstständig neben den Grössen des Körpers $K(xy)$ betrachten.

Die Summe

$$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_h$$

der Ordnungszahlen von $\mathfrak{Q}$ soll die *Ordnung* jenes Divisors genannt werden.

Sind

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2}\cdots\mathfrak{P}_h^{\lambda_h}, \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{\mu_1}\mathfrak{P}_2^{\mu_2}\cdots\mathfrak{P}_h^{\mu_h}$$

zwei beliebige Divisoren, deren Exponenten λ und μ auch zum Theil Null sein können, so soll ihr Product und ihr Quotient durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1+\mu_1}\cdots\mathfrak{P}_h^{\lambda_h+\mu_h}, \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1-\mu_1}\cdots\mathfrak{P}_h^{\lambda_h-\mu_h}$$

definirt sein. Ein Divisor $\mathfrak{Q}$ heisst *ganz*, wenn keiner seiner Exponenten λ_i negativ ist, im anderen Falle heisst er *gebrochen*. Jeder gebrochene Divisor kann als Quotient zweier ganzen Divisoren dargestellt werden. Ist

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}}$$

diese Darstellung, so heissen die ganzen Divisoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ der *Zähler* und der *Nenner* von $\mathfrak{Q}$ und die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ ist gleich der Differenz der Ordnungszahlen des Zählers und des Nenners.

Ein Divisor $\mathfrak{R}$ ist durch einen anderen $\mathfrak{Q}$ theilbar, wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist, wenn also $\mathfrak{R}$ jeden Primfactor mindestens ebenso oft enthält als $\mathfrak{Q}$. Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei beliebige ganze oder auch gebrochene Divisoren, so nennen wir *den* Divisor

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$$

ihren *grössten gemeinsamen Theiler*, welcher jeden einzelnen Primfactor $\mathfrak{P}$ so oft enthält als er mindestens in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ auftritt. Ist $\mathfrak{D}$ so bestimmt, so ist offenbar $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ durch $\mathfrak{D}$ theilbar, d. h. es ist:

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{D}\,\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{D}\,\mathfrak{G}_2,$$

wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ *ganze* theilerfremde Divisoren sind. In gleicher Weise können wir offenbar auch den grössten gemeinsamen Theiler mehrerer Divisoren $\mathfrak{D} \doteq (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu)$ definiren. Derselbe wird ein ganzer oder gebrochener Divisor sein, jenachdem alle Divisoren $\mathfrak{Q}_i$ ganz sind, oder auch nur ein einziger einen Nenner besitzt.

Jede algebraische Function ξ des Körpers $K(x, y)$ ist einem Divisor $\mathfrak{Q}_\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}$ äquivalent, welcher durch die Nullstellen und durch die Pole von ξ nebst den zugehörigen Ordnungszahlen vollständig bestimmt ist. Umgekehrt ist die algebraische Function ξ durch die Aequivalenz

$$\xi \sim \mathfrak{Q}_\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}$$

bekanntlich zwar nicht eindeutig, wohl aber bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Man kann aber jene Beziehung nöthigenfalls dadurch zu einer eindeutigen machen, dass man dem Divisor $\mathfrak{Q}_\xi$ speciell diejenige Function ξ zuordnet, deren Anfangsglied in der Umgebung einer beliebigen aber ein für alle Male fest angenommenen Stelle $\mathfrak{P}_0$ den Coefficienten Eins besitzt. Alsdann können wir das Zeichen der Aequivalenz durch das Gleichheitszeichen ersetzen. Alle anderen zu demselben Divisor gehörigen Functionen ξ' sind dann in der Form $c \cdot \mathfrak{Q}_\xi$ enthalten, wenn c eine beliebige Constante bedeutet.

Da jede algebraische Function ξ gleich viele Nullstellen und Pole besitzt, so sind in der Darstellung (1) von ξ der Zähler $\mathfrak{z}_\xi$ und der Nenner $\mathfrak{n}_\xi$ stets von gleicher Ordnung. Eine Function ξ heisst *vom Grade* ν, wenn ihr Zähler und ihr Nenner die Ordnung ν besitzen.

Ist speciell

$$x = \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x}$$

die bisher betrachtete unabhängige Variable, so erkennt man, dass sie vom Grade n ist, d. h. dass ihr Grad gleich der Ordnung des Körpers $K(x, y)$ ist, sobald man x als unabhängige Variable wählt; ihr Zähler $\mathfrak{z}_x$ besteht nämlich aus allen Primfactoren, welche den zu $x = 0$ gehörigen Punkten von $\mathfrak{K}_x$ entsprechen, der Nenner aus allen denjenigen, welcher den zu $x = \infty$ zugehörigen Stellen angehören, mit der Massgabe, dass ein solcher Primfactor in der α^{ten} Potenz im Zähler oder im Nenner auftritt, wenn der zugehörige Punkt $\mathfrak{P}$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt der Fläche $\mathfrak{K}_x$ ist.

Ist ferner a irgend eine endliche Constante, so ergiebt sich für den Linearfactor: $x - a$ die folgende Zerlegung:

$$x - a = \frac{\mathfrak{z}_{x-a}}{\mathfrak{n}_{x-a}} = \frac{\mathfrak{z}_{x-a}}{\mathfrak{n}_x},$$

wo der Nenner derselbe geblieben ist, weil der Linearfactor $x - a$ dieselben Pole besitzt, wie x selbst.

Genau ebenso zeigt sich jetzt, wenn ξ eine beliebige Function des Körpers vom ν^{ten} Grade ist, und man wählt ξ als unabhängige Variable, so gehört zu ihr eine ν-blättrige Riemann'sche Fläche, und für jeden constanten Werth ξ_0 ergiebt sich für den Linearfactor $\xi - \xi_0$ die Zerlegung:

$$\xi - \xi_0 = \frac{\mathfrak{z}_{\xi - \xi_0}}{\mathfrak{n}_\xi}, \qquad \frac{1}{\xi} = \frac{\mathfrak{n}_\xi}{\mathfrak{z}_\xi}.$$

Zu jedem Primtheiler $\mathfrak{P}$ gehört dann ein und nur ein Linearfactor $\xi - \xi_0$ in welchem derselbe aufgeht. Ist $\mathfrak{P}$ ein α-facher Theiler von $\xi - \xi_0$ so entspricht diesem Punkte ein α-blättriger Verzweigungspunkt der Kugelfläche $\mathfrak{K}_\xi$.

Mit Benutzung der Divisoren können wir nun die oben abgeleiteten Resultate über Punktsysteme und die zu ihnen gehörigen algebraischen Functionen in einfacherer Form aussprechen: Zu jedem Punktsystem

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

gehört ein algebraischer Divisor, der genau ebenso zu bezeichnen ist, und eine algebraische Function gehört einfach dann und nur dann zu dem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$, wenn sie ein ganzes Vielfaches des Divisors $\mathfrak{Q}$ ist. Wir haben somit im § 9 die Fundamentalaufgabe gelöst, alle und nur die linear unabhängigen Multipla eines beliebig gegebenen Divisors zu finden. Auch die dort gefundene Lösung ist vollständig unabhängig davon, welche Grösse des Bereiches $K(x, y)$ als unabhängige Variable zu Grunde gelegt wird.

Endlich hatten wir gesehen, dass man zu jedem Divisor $\mathfrak{Q}$ eine zugeordnete Grösse $\xi_{\mathfrak{Q}}$ von $K(x, y)$ so bestimmen kann, dass sie jeden Primfactor von $\mathfrak{Q}$ genau so oft enthält als $\mathfrak{Q}$ selbst, dass also

$$\xi_{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R},$$

ist, wo $\mathfrak{R}$ keinen Primfactor von $\mathfrak{Q}$ in einer positiven oder negativen Potenz enthält.

§ 11.

Wir gehen jetzt dazu über, den grossen Bereich aller ganzen und gebrochenen Divisoren in Classen einzutheilen, um dann die gemeinsamen Eigenschaften aller einer und derselben Classe angehörigen Divisoren zu untersuchen.

Zwei ganze oder gebrochene Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ heissen *äquivalent*, wenn sie sich nur um eine beliebige Grösse ξ des Körpers $K(x, y)$ unterscheiden, wenn also eine Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} = \xi \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'\xi$$

besteht. Ist also $\mathfrak{Q}_0$ irgend ein beliebiger Divisor, so giebt es unendlich viele äquivalente Divisoren zu $\mathfrak{Q}_0$ und zwar sind alle und nur diese in der Form

$$(2) \qquad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0\xi$$

enthalten, wenn ξ alle Grössen des Körpers $K(x, y)$ durchläuft.

Alle zu einem Divisor $\mathfrak{Q}_0$ und also auch unter einander äquivalenten Divisoren $\mathfrak{Q}$ rechnen wir in eine *Divisorenclasse*, welche durch Q bezeichnet werden soll. Aus der Gleichung (2) folgt zunächst, da jede Grösse ξ des Körpers K die Ordnung Null hat, dass äquivalente Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_0$ dieselbe Ordnungszahl q besitzen, welche daher die *Ordnung* der Classe R genannt werden soll.

Die einfachste Divisorenclasse ist die, welche von den Functionen ξ des Körpers selbst, und nur von diesen gebildet wird, wenn man sie als Divisoren betrachtet; sie bilden wirklich eine Classe für sich, da sie und sie allein unter einander äquivalent sind. Diese Classe heisse die *Haupt- oder Einheitsclasse;* sie werde durch E, oder wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, auch durch (1) bezeichnet; ihre Ordnung ist gleich Null.

Man erkennt ohne Weiteres, dass die bekannten Elementarsätze für die Aequivalenz auch für diese Definition der Aequivalenz bestehen bleiben. Insbesondere ergeben sich aus den beiden Aequivalenzen:

$$\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}', \quad \mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}'$$

unmittelbar die folgenden:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R} \sim \mathfrak{Q}'\mathfrak{R}', \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} \sim \frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{R}'}.$$

Sind also $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zwei beliebige Divisoren, Q und R ihre Classen, so bilden alle Producte $\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'$ je zweier bezw. zu $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ äquivalenter Divisoren eine neue Classe, welche durch QR bezeichnet werden möge, und umgekehrt kann jeder aus dieser Classe gehörige also zu $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ äquivalente Divisor offenbar in zwei Factoren $\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'$ zerlegt werden, welche bezw. zu $\mathfrak{Q}$ und zu $\mathfrak{R}$ äquivalent sind. Genau ebenso bilden alle Quotienten $\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{R}'}$ von je zwei Divisoren von Q und R die sämmtlichen Divisoren einer neuen Classe, welche wir $\frac{Q}{R}$ nennen wollen. Sind q und r die Ordnungszahlen der Classe Q und R, so besitzen QR und $\frac{Q}{R}$ offenbar bezw. die Ordnungszahlen $q+r$ und $q-r$. Die Hauptclasse E ist die einzige, durch deren Multiplication oder Division eine beliebige Classe Q nicht geändert wird, denn es ist ja:

$$QE = Q, \quad \frac{Q}{E} = Q.$$

Man kann also auf die Divisorenclassen ebenso wie auf die Divisoren selbst die Operationen der Multiplication und Division unbeschränkt anwenden. Insbesondere folgt aus einer Gleichung $QR = S$ sofort die andere

$$Q = \frac{S}{R}.$$

Die Elemente $\mathfrak{Q}$ einer beliebigen Classe Q gehen nach (2) aus den entsprechenden Elementen $\mathfrak{x}$ der Hauptclasse E durch Multiplication mit einem und demselben beliebig aber fest anzunehmenden Divisor $\mathfrak{Q}_0$ hervor, welcher daher *der zu Q gehörige Multiplicator* genannt werden möge. Jeder Grösse $\mathfrak{x}$ von E entspricht hiernach ein eindeutig bestimmter Divisor $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0\mathfrak{x}$ von Q; wir wollen daher die beiden sich so entsprechenden Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{x}$ *zugeordnete Divisoren* von E und Q nennen. Zwei solche zugeordneten Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{x}$ sind also dadurch charakterisirt, dass ihr Quotient $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{x}}$ gleich dem festen Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ ist. Welchen Divisor $\mathfrak{Q}_0$ aus der Classe Q wir als Multiplicator für deren Uebergange von E zu Q wählen, ist vollständig gleichgültig; bei einer Aenderung des Multiplicators ändern sich aber natürlich die Paare zugeordneter Divisoren. Ist nämlich $\mathfrak{Q}_0'$ ein anderer Multiplicator und sind $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ die einer und derselben Grösse $\mathfrak{x}$ der Hauptclasse das eine und das andere Mal zugeordneten Divisoren, so wird ja:

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}_0'\mathfrak{x} = \mathfrak{Q}_0 \cdot \left(\frac{\mathfrak{Q}_0'}{\mathfrak{Q}_0}\right) \mathfrak{x} = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{x}_0 \cdot \mathfrak{x}$$

worin $\mathfrak{x}_0 = \frac{\mathfrak{Q}_0'}{\mathfrak{Q}_0}$ den der Hauptclasse angehörigen Quotienten von $\mathfrak{Q}_0'$ und $\mathfrak{Q}_0$ bedeutet; man erhält also die Zuordnung der Divisoren von E und Q für den neuen Multiplicator $\mathfrak{Q}_0'$, indem man die zu den Elementen ξ, $\xi_1 \cdot \xi_2 \cdots$ von E zugeordneten Divisoren $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, $\cdots$ von Q alle mit ***einem und demselben*** Divisor ξ_0 von E multiplicirt.

Man kann den Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ innerhalb der Classe Q stets so wählen, dass er einen oder mehrere gegebene Primtheiler $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}' \cdots$ gar nicht, weder im Zähler noch im Nenner enthält. Sollte das nämlich für den ursprünglich gewählten Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ nicht der Fall sein, so kann man statt seiner einen anderen $\mathfrak{Q}_0' = \mathfrak{Q}_0 \cdot \frac{1}{\xi_0}$ nehmen und die Function ξ_0 des Körpers K nach S. 458 so wählen, dass der Quotient:

$$\mathfrak{Q}_0' = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\xi_0}$$

die Primfactoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \cdots$ gar nicht enthält.

Hat man den Multiplicator $\mathfrak{Q}_0'$ so gewählt, so sind je zwei zugeordnete Elemente ξ und $\mathfrak{Q}$ jener beiden Classen stets von derselben Ordnung in Bezug auf die gegebenen Primfactoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \cdots$ weil ja ihr Quotient jedesmal gleich $\mathfrak{Q}_0$ ist, jene Primfactoren also gar nicht enthält.

§ 12.

Es seien jetzt

$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\mu$$

μ beliebige Functionen des Körpers, welche also als Divisoren betrachtet der Hauptclasse (E) angehören; dann stellt jede homogene lineare Function

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_\mu \xi_\mu \tag{1}$$

für jedes Werthsystem $c_1 \cdots c_\mu$ ebenfalls einen Divisor der Hauptclasse dar, welcher durch jene Constanten eindeutig bestimmt ist, und leicht folgendermassen gefunden werden kann:

Es sei $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Theiler der μ Divisoren $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\mu$ so dass allgemein:

$$\xi_i = \mathfrak{D} \mathfrak{G}_i$$

ist, und die μ *ganzen* Divisoren $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu)$ theilerfremd sind. Dann ist die Function ξ ebenfalls ein Multiplum von $\mathfrak{G}$, d. h. es ist

$$\xi = \mathfrak{D} \mathfrak{G}.$$

Ist nämlich $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Riemann'schen Fläche, und ist δ die Ordnungszahl, welche alle Functionen ξ_i in $\mathfrak{P}$ mindestens besitzen, so ergeben sich für jene μ Elemente die folgenden Entwickelungen in der Umgebung von $\mathfrak{P}$:

$$\xi_i = e_i (x - a)^{\frac{\delta}{\alpha}} + \cdots, \qquad (i = 1, 2, \cdots \mu)$$

wo nicht alle μ Anfangscoefficienten e_i verschwinden. Also ergiebt sich für $\mathfrak{x}$ die Entwickelung

$$\mathfrak{x} = e(x-a)^{\frac{\delta}{\alpha}} + \cdots$$

wo

$$(2) \qquad e = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_\mu e_\mu$$

ist. Also ist $\mathfrak{x}$ in jedem Punkte der Riemann'schen Fläche mindestens von der gleichen Ordnung wie der gemeinsame Theiler $\mathfrak{D}$ von $(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_\mu)$ also in der Form $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$ darstellbar.

Aus der Form (2) des Anfangscoefficienten e in der Entwickelung von $\mathfrak{x}$ folgen aber noch weiter unmittelbar die Sätze:

> 1) Man kann die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ auf unendlich viele Arten so bestimmen, dass in der Function $\mathfrak{x} = \mathfrak{D}\mathfrak{G}$ die Function $\mathfrak{G}$ beliebig viele beliebig gegebene Primfactoren nicht enthält.
>
> 2) Man kann die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ stets so bestimmen, dass der Divisor $\mathfrak{G}$ einen gegebenen Primfactor $\mathfrak{P}$ enthält.

Da sich die Divisoren einer Classe Q von den zugeordneten Divisoren der Hauptclasse E nur um einen und denselben Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ unterscheiden, so gelten die soeben gefundenen Sätze auch ohne Weiteres für die Divisoren einer beliebigen Classe, wenn wir festsetzen:

> dass jede Gleichung zwischen beliebigen Grössen des Körpers oder der Hauptclasse E gültig bleibt, wenn man ihre linke Seite mit einem beliebigen von Null verschiedenen Divisor multiplicirt.

Sind dann nämlich:

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$$

die den μ Functionen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots \mathfrak{x}_\mu$ zugeordneten Divisoren der Classe Q, so ist allgemein:

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{Q}_0.$$

Multiplicirt man also die Gleichung (1) mit $\mathfrak{Q}_0$ und setzt den dann links sich ergebenden Divisor $\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{x} = \mathfrak{Q}$, so ist $\mathfrak{Q}$ ein und zwar ebenfalls eindeutig bestimmter Divisor derselben Classe Q, weil ja $\mathfrak{x}$ eindeutig bestimmt ist und der Hauptclasse angehört. Durch die so sich ergebende Gleichung:

$$(3) \qquad \mathfrak{Q} = c_1 \mathfrak{Q}_1 + c_2 \mathfrak{Q}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{Q}_\mu$$

ist also für jedes Werthsystem $c_1, \cdots c_\mu$ ein Divisor $\mathfrak{Q}$ von Q eindeutig bestimmt, nämlich $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 \mathfrak{x}$, wenn $\mathfrak{Q}_0$ der Multiplicator für Q und

$$\mathfrak{x} = \sum c_i \mathfrak{x}_i$$

ist. Diese Bestimmung von $\mathfrak{Q}$ ist ganz unabhängig von der Wahl des

Multiplicators $\mathfrak{Q}_0$; denn setzt man $\mathfrak{Q}_0'$ an die Stelle von $\mathfrak{Q}_0$ und sind $\xi', \xi_1', \cdots \xi_\mu'$ die zu $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \cdots$, zugeordneten Functionen der Hauptclasse, so ist

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0' \xi'$$

und

$$\xi' = c_1 \xi_1' + \cdots + c_\mu \xi_\mu'$$

und dies ergiebt genau denselben Divisor, weil ja allgemein $\xi_i' = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'} \xi_i$ also $\xi' = \xi \cdot \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'}$ ist.

Durch die Gleichung (3) ist also für jedes Werthsystem $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ ein Divisor $\mathfrak{Q}$ von Q eindeutig bestimmt. Wir können das Verhalten des so bestimmten Divisors $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf jeden einzelnen Primfactor $\mathfrak{P}$ leicht feststellen. Zu diesem Zwecke wählen wir den Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ einfach so, dass er $\mathfrak{P}$ weder im Zähler noch im Nenner enthält, was nach der oben gemachten Bemerkung stets möglich ist. Dann enthalten aber die Divisoren $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$ den Primtheiler $\mathfrak{P}$ genau so oft, wie die zugeordneten Functionen $\xi, \xi_1, \cdots \xi_\mu$, welche durch die Gleichung (1) zusammenhängen, und da dasselbe für jeden Divisor $\mathfrak{P}$ bewiesen werden kann, so können die soeben für die Hauptclasse gefundenen Resultate unmittelbar auf die beliebige Classe Q übertragen werden. Ist also wieder $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$, ist also allgemein:

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{D} \mathfrak{G}_i,$$

wo die ganzen Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ theilerfremd sind, so ist $\mathfrak{Q}$ ebenfalls durch $\mathfrak{D}$ theilbar, also gleich $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$, und man kann die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ stets so bestimmen, dass $\mathfrak{Q}$ entweder beliebig gegebene Divisoren nicht enthält, oder dass $\mathfrak{Q}$ einen gegebenen Primfactor $\mathfrak{P}$ als Theiler besitzt.

Wir sagen, μ Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$ sind *linear unabhängig*, wenn zwischen ihnen keine lineare Relation:

$$c_1 \mathfrak{Q}_1 + c_2 \mathfrak{Q}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{Q}_\mu = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht, oder, was dasselbe ist, wenn die μ zugeordneten Functionen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\mu$ der Hauptclasse linear unabhängig sind.

§ 13.

Unter den Divisoren einer Classe Q sind nun diejenigen von besonderer Bedeutung, welche ganz sind, also keinen Nenner haben. Sie bilden einen Theilbereich jener Classe, welchen ich ihren *Integritätsbereich* nennen und durch $[Q]$ bezeichnen will.

Ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_0 \xi$$

ein *ganzer* Divisor von Q', so ist für die zugeordnete Function $\mathfrak{x}$

$$\mathfrak{x} = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}_0},$$

d. h. $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann ein ganzer Divisor von Q, wenn die zugeordnete Function $\mathfrak{x}$ ein Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ ist, und $\mathfrak{Q}_0$ wieder den zur Classe Q gehörigen Multiplicator bedeutet.

Sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ irgend welche ganze Divisoren von Q, so ist nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes jeder Divisor:

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{G}_\mu$$

ebenfalls ein ganzer Divisor. Wir wollen nun zeigen, dass für jede Classe Q nur eine endliche Anzahl linear unabhängige ganze Divisoren existiren, durch welche alle anderen homogen und linear dargestellt werden können. Hierzu führen folgende Ueberlegungen:

Die Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ bilden dann und nur dann ein linear unabhängiges System ganzer Divisoren der Classe (Q), wenn die zugeordneten Functionen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots \mathfrak{x}_\mu$ der Hauptclasse ebenfalls linear unabhängig und sämmtlich Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ sind. Ist umgekehrt $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots \mathfrak{x}_N$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, so dass also allgemein

$$\mathfrak{x}_i = \frac{\mathfrak{G}_i}{\mathfrak{Q}_0}$$

ist, so bilden die zugeordneten Divisoren

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{Q}_0, \quad \mathfrak{x}_2\mathfrak{Q}_0, \cdots \quad \mathfrak{x}_N\mathfrak{Q}_0$$

offenbar ein vollständiges System linear unabhängiger ganzer Divisoren von Q.

Mit Benutzung der im § 9 auseinandergesetzten Methode können wir aber stets ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ aufstellen. Zu diesem Zwecke bilden wir ein Fundamentalsystem

$$\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots \mathfrak{x}_n$$

für den Körper K und den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, welches in Bezug auf die Stelle $(x = a_0)$ regulär ist. Sind dann wieder

$$r_1, r_1, \cdots r_n$$

die Ordnungszahlen jener Functionen in Bezug auf jene Stelle $(x = a_0)$, und sind ferner $r_1, \cdots r_s$ diejenigen unter ihnen, welche positiv sind, so bilden die

$$N = (r_1 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$$

Functionen:

$$\xi_i, \frac{\xi_i}{(x-a_0)}, \cdots \frac{\xi_i}{(x-a_0)^{r_i}} \qquad (i=1,2,\cdots s)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, und ihre zugeordneten Divisoren ein vollständiges System ganzer Divisoren von Q.

Ein jedes vollständige System $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_N)$ linear unabhängiger ganzer Divisoren von Q soll *ein Fundamentalsystem für den Bereich* $[Q]$ heissen, und die Anzahl N seiner Elemente wollen wir *die Dimension* von Q nennen, und durch $\{Q\}$ bezeichnen.

Für eine beliebige Divisorenclasse Q von negativer Ordnung ist offenbar $\{Q\} = 0$, da ein ganzer Divisor negativer Ordnung nicht existirt. Dasselbe ist für jede Classe von der Ordnung Null der Fall, welche nicht die Einheitsclasse ist, denn ein ganzer Divisor kann nur dann die Ordnung Null haben, wenn er gleich Eins ist; in diesem Falle ist aber $Q = E$, weil diese Classe allein die Constanten enthält. Also ist endlich

$$\{E\} = 1,$$

denn hier sind die Constanten die einzigen linear unabhängigen ganzen Elemente von E.

§ 14.

Wir verallgemeinern jetzt das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat, indem wir uns folgende Aufgabe stellen:

Es sollen alle Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer beliebigen Classe R gefunden werden.

Ist speciell $R = E$ die Hauptclasse, so ist diese Aufgabe bereits in I a. S. 449 aufgestellt und dann vollständig gelöst worden; sie wurde damals als das Hauptproblem in der Theorie der algebraischen Functionen bezeichnet. Wir zeigen jetzt dass und wie die hier vorgelegte allgemeinste Aufgabe unmittelbar auf jene zurückgeführt werden kann.

Ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q}\mathfrak{G}$ ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ innerhalb R, so ist $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor der Classe $\frac{R}{Q}$ und umgekehrt, da ja $R = Q \cdot \frac{R}{Q}$ ist; bilden also

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$$

ein Fundamentalsystem für die Classe $\frac{R}{Q}$, so ist $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q}\mathfrak{G}$ dann und nur dann ein Multiplum von $\mathfrak{G}$, wenn:

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2 + \cdots + c_\mu\mathfrak{G}_\mu$$

ist, d. h. die μ Divisoren:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{G}_1, \mathfrak{Q}\mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{Q}\mathfrak{G}_\mu$$

bilden ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$, und man erhält so den wichtigen Satz:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{Q}$, welche innerhalb einer beliebigen Divisorenclasse R existiren, ist stets gleich

$$\left\{\frac{R}{Q}\right\},$$

also gleich der Dimension der Classe $\frac{R}{Q}$, wenn Q die Classe des betrachteten Divisors ist; diese Anzahl ist also von der speciellen Wahl von $\mathfrak{Q}$ innerhalb der Classe Q ganz unabhängig. Man erhält ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ innerhalb R dadurch, dass man die Elemente eines Fundamentalsystemes für die Classe $\frac{R}{Q}$ mit $\mathfrak{Q}$ multiplicirt.

Ist speciell $R = E$ die Hauptclasse, so ist die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla von $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Körpers $K(x, y)$ gleich der Dimension $\left\{\frac{E}{Q}\right\} = \left\{\frac{1}{Q}\right\}$ der durch den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ bestimmten Classe, man erhält also für unsere frühere Aufgabe noch das beinahe selbstverständliche Resultat:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Körpers $K(x, y)$ bleibt ungeändert, wenn man $\mathfrak{Q}$ durch einen beliebigen äquivalenten Divisor ersetzt.

Es sei jetzt Q eine beliebige Classe, und

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$$

möge ein Fundamentalsystem für Q sein. Ist dann $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Theiler jener μ Divisoren, so ist $\mathfrak{D}$ ebenfalls ganz, und jeder andere ganze Divisor von G:

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2 + \cdots + c_\mu\mathfrak{G}_\mu.$$

ist ebenfalls ein Multiplum von $\mathfrak{D}$ also gleich $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}}$.

Es sei nun allgemein:

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}}_i;$$

ist dann D die zu $\mathfrak{D}$ gehörige Classe, so bilden die μ theilerfremden ganzen Divisoren

$$\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{G}}_2, \cdots \overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

ein Fundamentalsystem für die Classe:

$$\overline{Q} = \frac{Q}{D},$$

denn diese Divisoren gehören erstens offenbar alle zu dieser Classe, zweitens sind sie linear unabhängig, und drittens ist jeder ganze Divisor $\overline{\mathfrak{G}}$ von G in der Form

$$\overline{\mathfrak{G}} = c_1 \overline{\mathfrak{G}}_1 + \cdots + c_\mu \overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

darstellbar, weil das Product $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$ zu Q gehört, also in der Form $c_1 \mathfrak{G}_1 + \cdots + c_\mu \mathfrak{G}_\mu$ enthalten ist. Da die μ Divisoren $\overline{\mathfrak{G}}_1, \cdots \overline{\mathfrak{G}}_\mu$ theilerfremd sind, so kann man innerhalb $\bar{G}$ einen Divisor

$$\overline{\mathfrak{G}} = \sum c_i \overline{\mathfrak{G}}_i$$

so auswählen, dass er beliebige Primfactoren nicht enthält; wir denken uns einen Divisor $\overline{\mathfrak{G}}_0$ speciell so gewählt, dass er zu $\mathfrak{D}$ relativ prim ist.

Ist also Q eine beliebige Classe, $\mathfrak{D}$ der Theiler aller Divisoren des Integritätsbereiches $[Q]$, ist ferner D die Classe von $\mathfrak{D}$, und

$$Q = D\bar{Q},$$

so besitzen die beiden Classen dieselbe Dimension μ, d. h. es ist:

$$\{Q\} = \{\bar{Q}\};$$

ferner aber besteht der Satz, dass für die Classe D

$$\{D\} = 1$$

ist, dass nämlich jene Classe nur den einen ganzen Divisor $\mathfrak{D}$ enthält. In der That, existirte ausser $\mathfrak{D}$ auch nur noch ein anderer ganzer Divisor $\mathfrak{D}'$ innerhalb D, und ist $\overline{\mathfrak{G}}_0$ der oben bestimmte zu $\mathfrak{D}$ theilerfremde Divisor von $\bar{G}$, so würde ja das Product $\mathfrak{D}'\overline{\mathfrak{G}}_0$ ein ganzer Divisor von G, also als solcher nothwendig durch $\mathfrak{D}$ theilbar sein, und dies ist unmöglich, da $\overline{\mathfrak{G}}_0$ zu $\mathfrak{D}$ relativ prim, und $\mathfrak{D}'$ von $\mathfrak{D}$ verschieden ist, also nothwendig mindestens einen Primfactor $\mathfrak{P}$ weniger oft enthält als $\mathfrak{D}$.

Eine Classe Q soll nach dem Vorgange der Herren *Dedekind* und *Weber* eine *eigentliche* Classe genannt werden, wenn ihre ganzen Divisoren $\mathfrak{G}_1, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ relativ prim sind; haben dieselben dagegen den grössten gemeinsamen Theiler $\mathfrak{D}$, so soll G eine *uneigentliche Classe vom Theiler* $\mathfrak{D}$ genannt werden. Im letzteren Falle kann also vermittelst der Gleichung:

$$Q = D \cdot \bar{Q}$$

jede uneigentliche Classe als Product einer eigentlichen Classe $\bar{Q}$ und einer anderen D dargestellt werden, deren Dimension $\{D\}$ stets gleich Eins ist. Ist Q selbst eine eigentliche Classe, so ist speciell $\mathfrak{D} = 1$, $D = E$, und es ist also auch hier $\{D\} = \{E\} = 1$. Sind endlich q, $\bar{q}$ und δ die Ordnungszahlen von Q, $\bar{Q}$ und von $\mathfrak{D}$, so folgt aus dieser Gleichung:

$$q = \bar{q} + \delta, \qquad \{Q\} = \{\bar{Q}\}.$$

§ 15.

Wir wollen die in dem ersten Theile dieser Arbeit gefundenen rein arithmetischen Resultate jetzt auf die Theorie der algebraischen Differentiale und die zu ihnen gehörigen Integralfunctionen anwenden.

Es seien ξ und η zwei beliebige Grössen des Körpers $K(x, y)$ und es möge:

$$F(\xi, \eta) = 0$$

die zwischen ihnen bestehende irreductible algebraische Gleichung sein. Dann ergiebt sich aus ihr durch Differentiation die Gleichung:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\frac{\partial F}{\partial \eta}} = -\frac{F'_\xi}{F'_\eta}$$

d. h. das Verhältniss der beiden Differentiale $d\xi$ und $d\eta$ ist als rationale Function von ξ und η eine Grösse des Körpers $K(x, y)$, welche also durch den zu ihr gehörigen Divisor bis auf eine multiplicative Constante bestimmt ist. Wir stellen uns daher die für das Folgende fundamentale Aufgabe, diesen Divisor zu bestimmen.

Wegen der Gleichung:

$$\frac{d\eta}{\partial \xi} = \frac{d\eta}{dx} : \frac{d\xi}{dx}$$

genügt es offenbar, zu bestimmen, wie oft ein beliebiger Primdivisor $\mathfrak{P}$ in jedem der beiden Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dx}$ und $\frac{d\eta}{dx}$ enthalten ist, wenn x irgend eine Grösse des Körpers ist, die als unabhängige Variable angenommen wird. Der Einfachheit wegen wählen wir x so, dass der betrachtete Punkt $\mathfrak{P}$ einem endlichen Punkte $(x = a)$ der zugehörigen Riemann'schen Fläche entspricht, und es bestehe für die Function ξ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ die folgende Entwickelung:

$$\xi - \xi_0 = \xi_d (x - a)^{\frac{d}{\alpha}} + \xi_{d+1} (x - a)^{\frac{d+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo also ξ_0 das constante Glied in der Entwickelung von ξ bedeutet, und die Ordnungszahl d von $\xi - \xi_0$ positiv oder auch negativ sein kann; dann enthält also der Linearfactor $\xi - \xi_0$ genau die d^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$. Durch Differentiation dieser Gleichung nach x ergiebt sich aber:

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_d \cdot \frac{d}{\alpha} (x - a)^{\frac{d-\alpha}{\alpha}} + \cdots .$$

Enthält also $\xi - \xi_0$ die Potenz $\mathfrak{P}^d$, so ist $\frac{d\xi}{dx}$ genau durch $\mathfrak{P}^{d-\alpha}$ theilbar, wenn die Stelle $\mathfrak{P}$ für die Kugelfläche K_x ein α-blättriger Verzweigungspunkt ist, Da aber das Analoge auch für die Function η gilt, so ergiebt sich zunächst das folgende einfache Resultat:

Sind ξ_0 und η_0 die zu ξ und η gehörigen constanten Glieder in der Entwickelung jener Functionen in der Umgebung der beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$, und sind die Linearfactoren $\xi - \xi_0$ und $\eta - \eta_0$ also durch $\mathfrak{P}^d$ und $\mathfrak{P}^e$ theilbar, so ist der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ genau durch $\mathfrak{P}^{e-d}$ theilbar, es ist also

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{e-d},$$

wenn das Product über alle Stellen $\mathfrak{P}$ erstreckt wird.

Denselben Divisor können wir aber, und das ist das Wesentliche, auf andere Art und zwar in geschlossener Form darstellen. Wählt man ξ als unabhängige Variable, so gehört zu ihr eine Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{K}_\xi$ und ein bestimmter Verzweigungstheiler $\mathfrak{Z}_\xi$, welcher alle und nur die Verzweigungsfactoren $\mathfrak{P}$ für diese Fläche $\mathfrak{K}_\xi$ enthält, jeden zu der Potenz erhoben, welche seine Ordnungszahl angiebt; das Entsprechende gilt für die Function η. Es sei nun

$$\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}, \qquad \eta = \frac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta}$$

und es seien $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\eta$ bzw. die Verzweigungstheiler für die Functionen ξ und η. Dann gilt der folgende wichtige Satz:

Sind ξ und η zwei beliebige Grössen des Körpers K, so besteht immer die Gleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}. \tag{1}$$

Zum Beweise dieses Satzes brauchen wir nur zu zeigen, dass der rechts stehende Quotient jeden Primfactor $\mathfrak{P}$ in der $(e-d)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, und dies ist offenbar geschehen, sobald wir nachgewiesen haben, dass für ein beliebiges ξ der Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ genau durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar ist und das Analoge für η gilt.

Ist nun $\mathfrak{P}$ zunächst eine im Endlichen liegende Stelle der Fläche $\mathfrak{K}_\xi$ und enthält der zugehörige Linearfactor $\xi - \xi_0$ die Potenz $\mathfrak{P}^d$ von $\mathfrak{P}$, so ist, wie oben § 10 gezeigt wurde, $\mathfrak{P}$ eine endliche Verzweigungsstelle der $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, also ist $\mathfrak{Z}_\xi$ durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar, während in $\mathfrak{n}_\xi$ der Divisor $\mathfrak{P}$ gar nicht auftritt, weil $\mathfrak{P}$ im Endlichen liegt. Also ist $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ in diesem Falle wirklich genau durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar.

Ist dagegen $\mathfrak{P}$ eine unendlich ferne Stelle für $\mathfrak{K}_\xi$, ist also $d = -\delta$ negativ, so ist $\mathfrak{n}_\xi$ durch $\mathfrak{P}^\delta$ theilbar, und $\mathfrak{P}$ entspricht einem Verzweigungspunkte der $(\delta - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, der Verzweigungstheiler $\mathfrak{Z}_\xi$ enthält somit genau die Potenz $\mathfrak{P}^{\delta-1}$. Also ist der Quotient $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ durch $\mathfrak{P}^{\delta-1-2\delta} = \mathfrak{P}^{-\delta-1} = \mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar, die aufgestellte Behauptung ist also vollständig bewiesen. Ebenso zeigt man, dass der Quotient $\frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2}$ genau $\mathfrak{P}^{e-1}$ enthält, und damit ist die Richtigkeit der Gleichung (1) bewiesen.

Aus dieser Gleichung ziehen wir zunächst eine merkwürdige und für das Weitere sehr wichtige Folgerung. Da nämlich der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ eine Function des Körpers K ist, so sind die beiden Divisoren:

$$\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2}$$

auf der rechten Seite von (1) einander nothwendig äquivalent, und daher sind ihre Ordnungszahlen einander gleich, wie auch ξ und η innerhalb des Körpers angenommen sein mögen. Sind also ξ und η zwei beliebige Functionen des Körpers, sind n_ξ und n_η ihre Grade, und w_ξ und w_η die Ordnungen ihrer Verzweigungstheiler $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\eta$, so ist stets:

$$w_\xi - 2n_\xi = w_\eta - 2n_\eta$$

d. h. die Zahl $w - 2n$ ist eine Invariante des Körpers, denn sie ist unabhängig von der Wahl der zu Grunde gelegten Variablen. Nach § 9 ist w eine gerade, also die Zahl

$$p = \frac{1}{2}w - n + 1$$

eine ganze Zahl, welche für jede Grösse von K den gleichen Werth besitzt. Wir nennen dieselbe das *Geschlecht* von K. Diese Zahl ist eine der wichtigsten Invarianten des Körpers.

§ 16.

Jedes Differential, das zu dem Körper K gehört, kann je nach der Wahl der Integrationsvariablen in sehr verschiedener Form geschrieben werden. Ist ξ die Integrationsvariable, ζ_ξ der Integrand, so ist das zugehörige Differential

$$d\omega = \zeta_\xi \, d\xi,$$

und beim Uebergange zu einer anderen Integrationsvariablen η erhält man:

$$d\omega = \zeta_\xi \cdot d\xi = \zeta_\xi \cdot \frac{d\xi}{d\eta} \cdot d\eta = \zeta_\eta \, d\eta.$$

Sind also ζ_ξ und ζ_η die Integranden für ein und dasselbe Differential $d\omega$, wenn man das eine Mal ξ, das andere Mal η als Integrationsvariable zu Grunde legt, so sind diese beiden Grössen des Körpers K durch die Gleichung:

$$\frac{\zeta_\xi}{\zeta_\eta} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$$

mit einander verbunden, d. h. es besteht für jede Grösse von K die Gleichung:

$$\zeta_\xi \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} = \zeta_\eta \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} = \mathfrak{W}_\omega,$$

wo also $\mathfrak{W}_\omega$ ein algebraischer Divisor ist, welcher nur von dem Differential $d\omega$, aber in keiner Weise von der Wahl der Integrationsvariablen ξ oder η abhängt und *der dem Differentiale* $d\omega$ *zugehörige Divisor* genannt werden soll. Umgekehrt ist aber auch das Differential $d\omega$ durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ bis auf eine multiplicative Constante vollständig bestimmt; denn für eine beliebige Integrationsvariable ξ ist ja dann:

$$d\omega = \zeta_\xi d\xi \quad \text{und} \quad \zeta_\xi = \frac{\mathfrak{W}_\omega \cdot \mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{Z}_\xi}.$$

Alle Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ sind untereinander äquivalent, sie gehören also einer und derselben Divisorenclasse (W) an; denn ist:

$$d\omega = \zeta_\xi d\xi,$$

$$d\omega' = \zeta'_\xi d\xi,$$

so ist ja für die zugehörigen Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ und $\mathfrak{W}_{\omega'}$

$$\frac{\mathfrak{W}_\omega}{\mathfrak{W}_{\omega'}} = \frac{\zeta_\xi}{\zeta'_\xi},$$

d. h. jener Quotient ist eine Grösse von K, und da

$$\mathfrak{W}_\omega = \zeta_\xi \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} \sim \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$$

ist, so ist die Classe (W) mit der Classe aller Divisoren identisch, welche äquivalent dem Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ sind, wenn ξ irgend eine Grösse des Körpers bedeutet. Es kann demnach die Classe (W) aller Differentialtheiler auch als die Classe $\left(\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}\right)$ bezeichnet werden. Umgekehrt entspricht auch jeder Divisor $\mathfrak{W}$ dieser Classe einem Differentiale $d\omega$; denn ist $\mathfrak{W}$ äquivalent $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$, so ist ja

$$\mathfrak{W} = \zeta \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2},$$

wo ζ eine Grösse des Körpers K ist, d. h. $\mathfrak{W}$ entspricht dem Differentiale:

$$d\omega = \zeta\, d\xi.$$

Wie also alle und nur die Divisoren der Hauptclasse mit allen Grössen des Körpers $K(xy)$ zusammenfallen, so entsprechen alle und nur die Divisoren der Classe $(W) = \left(\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}\right)$ allen Differentialen $d\omega$, welche zu diesem Körper K gehören; daher soll (W) die zum Körper K gehörige *Differentialclasse* genannt werden. Die Ordnung der Differentialclasse $\left(\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}\right)$ ist $w - 2n = 2p - 2$, ist somit im Allgemeinen von Null verschieden. Die Untersuchung dieser Divisorenclasse fällt also vollständig mit der Betrachtung aller Abel'schen Differentiale zusammen. Als Multiplicator für die Differentialclasse kann man irgend einen Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$ wählen, wenn x eine Grösse des Körpers K bedeutet. Diesem Multiplicator entspricht dann die Darstellung der Differentiale $d\omega$ in der Form $\xi_x\, dx$ d. h. die Wahl von x als Integrationsvariable.

Wir fragen uns zunächst, wie sich das einem Abel'schen Differentiale $d\omega$ zugehörige Integral ω in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$ verhält, und wir zeigen, dass dasselbe an allen und nur denjenigen Stellen nicht regulär ist, für welche die zugehörigen Primfactoren in $\mathfrak{W}_\omega$ enthalten sind. Es werde die Integrationsvariable x so gewählt, dass der gerade betrachtete Primfactor $\mathfrak{P}$ weder in $\mathfrak{n}_x$ noch in $\mathfrak{Z}_x$ auftritt, dass also die Stelle $\mathfrak{P}$ eine reguläre im Endlichen liegende Stelle der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ ist. Beides ist offenbar möglich; denn man braucht nur für x eine Grösse zu wählen, welche in $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung verschwindet; dann entspricht ja $\mathfrak{P}$ eine reguläre Nullstelle für $x = 0$. Dann ist in dem Differentiale:

$$d\omega = \zeta_x\, dx \qquad \zeta_x = \frac{\mathfrak{W}_\omega \mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Z}_x}$$

ζ_x in Bezug auf $\mathfrak{P}$ von genau derselben Ordnung wie $\mathfrak{W}_\omega$. Ist also $\mathfrak{W}_\omega$ genau durch $\mathfrak{P}^d$ theilbar, wo d positiv, negativ oder Null sein kann, so besteht für $\zeta_x\, dx$ in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ die folgende Entwickelung nach Potenzen von x:

$$d\omega = \zeta_x\, dx = (\alpha_d x^d + \alpha_{d+1} x^{d+1} + \cdots)\, dx,$$

und durch gliedweise Integration dieser Reihe ergiebt sich also

$$\omega - \omega_0 = \frac{\alpha_d}{d+1} x^{d+1} + \cdots,$$

wo ω_0 die Integrationsconstante ist, oder für den speciellen Fall, dass $d = -1$ ist:

$$\omega - \omega_0 = \alpha_{-1} lx + \cdots,$$

d. h. es besteht der Satz:

> Ist $\mathfrak{P}$ ein d-facher Theiler des zu $d\omega$ gehörigen Divisors $\mathfrak{W}_\omega$, so ist das Integral $\omega - \omega_0$ entweder durch $\mathfrak{P}^{d+1}$ oder durch $l(\mathfrak{P})$ theilbar, je nachdem $d \gtrless -1$ oder $d = -1$ ist. Wir sagen hier, dass eine Integralfunction den Divisor $l\mathfrak{P}$ enthält, wenn ihre Entwickelung in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ mit dem Logarithmus des zugehörigen Linearfactors anfängt.

Wir sagen nun, ein Integral verhält sich an einer Stelle $\mathfrak{P}$ regulär, wenn $\omega - \omega_0$ in $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung ist, oder wenn in der Umgebung derselben die Entwickelung besteht:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 (x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \omega_2 (x-a)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots$$

und der Coefficient ω_1 von Null verschieden ist, d. h. wenn die Differenz $\omega - \omega_0$ in $\mathfrak{P}$ genau von der ersten Ordnung verschwindet. Dann folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dass ω für alle und nur die Primdivisoren nicht regulär ist, welche in $\mathfrak{W}_\omega$ enthalten sind, und zwar wird $\omega - \omega_0$ für alle und nur die Theiler des Nenners in $\mathfrak{P}$ unendlich gross. Wir brauchen daher im Folgenden nur die Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ zu betrachten, um die Natur der Abel'schen Integrale ω vollständig kennen zu lernen. Man erkennt somit, dass in der That das Integral ω an jeder Stelle $\mathfrak{P}$ durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ in durchaus einheitlicher Weise charakterisirt wird.

Jeden Differentialtheiler $\mathfrak{W}_\omega$ können wir als Quotienten zweier ganzen Divisoren d. h. in der Form schreiben:

$$\mathfrak{W}_\omega = \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega}.$$

Der Nenner enthält alle und nur die Punkte, welche den sämmtlichen Unendlichkeitsstellen des Integrales ω entsprechen, und zwar entspricht jedem einfachen Primfactor eine logarithmische Unstetigkeitsstelle, jedem Primfactor $\mathfrak{P}^m$ ein Pol der $(m-1)$ Ordnung in dem Integrale. Ebenso enthält der Zähler alle und nur die Stellen für welche $\omega - \omega_0$ von höherer als der ersten Ordnung verschwindet.

§ 17.

Die Fundamentalaufgabe in der Theorie der Abel'schen Integrale kann in ihrer allgemeinsten Form so ausgesprochen werden:

Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger Differentiale $d\omega$ gefunden werden, deren Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ ein Multiplum eines beliebig gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ ist, für welche also

$$\mathfrak{W}_\omega = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{Q}$$

ist, wenn $\mathfrak{G}_\omega$ irgend einen *ganzen* Divisor bedeutet.

Diese Aufgabe kann, und zwar für eine beliebig gegebene Integrationsvariable folgendermassen gelöst werden:

Wir bilden nach der im § 4 angegebenen Methode ein Fundamentalsystem:

$$(1) \qquad \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$$

für den Körper K und die unabhängige Variable x in Bezug auf alle Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$, und zwar möge es gleich so gewählt sein, dass es für eine beliebige reguläre Stelle $(x = a_0)$ regulär ist. Zu diesem Systeme bilden wir das complementäre:

$$(2) \qquad \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_n;$$

nach § 7 III ist dasselbe dann in Bezug auf $(x = a_0)$ ebenfalls regulär, und es kann von vornherein so geordnet vorausgesetzt werden, dass die Ordnungszahlen seiner Elemente

$$\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_n$$

in Bezug auf diese Stelle eine zunehmende Reihe bilden, dass also allgemein $\varrho_i \leqq \varrho_{i+1}$ ist. Ist dann $\bar{\xi}_s$ das erste Element, dessen Ordnungszahl $\bar{\varrho}_s \geqq 2$ ist, so bilden die folgenden Differentiale:

$$(3) \qquad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^2}\,dx, \quad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^3}\,dx, \quad \cdots, \quad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^{\bar{\varrho}_i}}\,dx \qquad (i = s, s+1, \cdots, n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Abel'scher Differentiale, $d\omega = \zeta_x\,dx$, für welche $\mathfrak{W}_\omega$ ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ ist.

Das System $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ ist nämlich n. d. V. ein Fundamentalsystem für die Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$, also das complementäre $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_n)$ ein Fundamentalsystem für die Multipla des complementären Divisors $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_x}$. Da dasselbe aber in Bezug auf die Stelle $(x = a_0)$ der unabhängigen Variablen x ausserdem regulär ist, so bilden die Elemente:

$$\bar{\xi}_i, \quad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)}, \quad \cdots, \quad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^{\bar{\varrho}_i - 2}} \qquad (i = s, s+1, \cdots, n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_x}$, welche ausserdem in allen n Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_n$, welche bei $x = a_0$ über einander liegen, mindestens die Ordnungszahl 2 besitzen, oder, was dasselbe ist, jene Elemente bilden ein vollständiges System aller Multipla des Divisors:

$$\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{z}^2_{x-a_0}}{\mathfrak{Z}_x}.$$

Dividirt man daher jedes dieser Elemente mit

$$(x-a_0)^2 = \frac{\mathfrak{z}^2_{x-a_0}}{\mathfrak{n}^2_x},$$

so erkennt man, dass in der That die Elemente (3) ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{n}^2_x}{\mathfrak{Z}_x}$ bilden, also den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Als Beispiel betrachten wir die s. g. *Integrale erster Gattung* ε, welche an keiner einzigen Stelle eine Unendlichkeitsstelle besitzen. Aus den Ergebnissen des § 16 folgt, dass dies dann und nur dann der Fall ist, wenn der dem Differentiale $d\varepsilon$ zugehörige Divisor $\mathfrak{W}_\varepsilon$ ganz ist, also keinen Nenner besitzt. Also entspricht den linear unabhängigen ganzen Divisoren der Classe (W) oder, was dasselbe ist, den Vielfachen des Divisors $\mathfrak{D} = 1$ ein vollständiges System linear unabhängiger Differentiale erster Gattung.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, was ja eventuell stets durch eine Substitution $x' = \frac{1}{x-a_0}$ erreicht werden kann, dass der Stelle $x = \infty$ n reguläre Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ entsprechen. Alsdann können wir die Stelle $(x = \infty)$ an Stelle der vorher eingeführten $(x = a_0)$ wählen, und daher den Linearfactor $x - a_0$ durch $\frac{1}{x}$ ersetzen. Nach der soeben angegebenen Methode bilden wir nun zuerst ein Fundamentalsystem

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$$

für die ganzen algebraischen Functionen von $K(x, y)$, welches für die Stelle $(x = \infty)$ regulär ist, und es bedeuten:

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$$

die Ordnungszahlen der n Elemente η_i für jene Stelle und zwar seien dieselben so bezeichnet, dass $\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_n$ ist. Dann ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n = -\frac{w}{2},$$

und man zeigt leicht, dass $\varrho_1 = 0$ ist und alle folgenden Ordnungszahlen negativ sind. In der That, eine ganze algebraische Function η besitzt im Endlichen gar keinen Pol; soll sie also keine Constante sein, so muss sie mindestens in einem der n unendlich fernen Punkte von negativer Ordnung sein, ihre Ordnungszahl ϱ für $(x = \infty)$ ist also stets negativ und nur dann Null, wenn η eine Constante ist. Da aber im Körper K sicher auch die Constanten auftreten, so muss $\eta_1 = c$, folglich $\varrho_1 = 0$ sein, aber ϱ_2 kann dann nicht mehr Null sein, da sonst auch η_2 constant wäre, also η_1 und η_2 rational abhängig wären.

Es sei nun

$$(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots, \bar{\eta}_n)$$

das complementäre System zu $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$. Sind dann

$$\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_n$$

die Ordnungszahlen seiner Elemente, so ist allgemein:

$$\bar{\varrho}_i = -\varrho_i,$$

d. h. es ist $\bar{\varrho}_1 = 0$, und alle folgenden Ordnungszahlen $\bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_n$ sind positiv. Ist also $\bar{\eta}_s$ das erste Element, dessen Ordnungszahl $\geqq 2$ ist, so bilden die Functionen:

$$\bar{\eta}_i,\ x\bar{\eta}_i,\ x^2\bar{\eta}_i, \cdots, x^{\bar{\varrho}_i - 2}\bar{\eta}_i \qquad (i = s, s+1, \cdots, n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Integranden erster Gattung, denn sie bilden ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{n_x^2}{\mathfrak{z}_x}$, da sie für $x = \infty$ alle mindestens die Ordnungszahl 2 besitzen. Da $\bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_{s-1}$ alle gleich Eins, also $\bar{\varrho}_2 - 1, \cdots, \bar{\varrho}_{s-1} - 1$ gleich Null sind, so kann ihre Anzahl auch so geschrieben werden:

$$\bar{\varrho}_1 + (\bar{\varrho}_2 - 1) + \cdots + (\bar{\varrho}_n - 1) = \sum_1^n \bar{\varrho}_k - n + 1$$

und da nach § 7 III

$$\sum \bar{\varrho}_i = -\sum \varrho_i = \sum (\alpha - 1) = \frac{w}{2}\ .$$

ist, so folgt für die obige Summe der Werth:

$$\frac{w}{2} - n + 1 = p.$$

Also die Anzahl aller linear unabhängigen Integrale erster Gattung ist stets dem Geschlecht des Körpers $K(x, y)$ gleich.

Es existiren also nur dann gar keine allenthalben endlichen Integrale ε, wenn $p = 0$ ist, und das ist wieder dann und nur dann der Fall, wenn in dem Fundamentalsysteme $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ alle Elemente, ausser dem ersten, die Ordnungszahl -1 besitzen. Da endlich die *Anzahl*

$$p = \frac{w}{2} - n + 1$$

ihrer Natur nach nie negativ sein kann, so ist stets

$$\frac{w}{2} \geqq n - 1.$$

§ 18.

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor, (Q) seine Classe, und q die Ordnung derselben; dann ist ein Differential $d\omega$ dann und nur dann ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn für den zugehörigen Theiler $\mathfrak{W}_\omega$ eine Gleichung

$$\mathfrak{W}_\omega \sim \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{G}_\omega$$

besteht, in der $\mathfrak{G}_\omega$ einen ganzen Divisor bedeutet; da dann umgekehrt

$$\mathfrak{G}_\omega \sim \frac{\mathfrak{W}_\omega}{\mathfrak{Q}}$$

ist, so ist $\mathfrak{G}_\omega$ ein ganzer Divisor der Classe $\left(\frac{W}{Q}\right)$. Zu jeder Classe (Q) gehört eine andere $(Q') = \left(\frac{W}{Q}\right)$, die *s. g. Ergänzungsclasse*, welche alle und nur die Divisoren $\frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{Q}_1}$ enthält, deren Zähler zu (W) und deren Nenner zu (Q) gehört. Ist q' die Ordnung der Classe (Q'), so folgt aus der Gleichung

$$(Q)\ (Q') = (W),$$
$$q + q' = 2p - 2.$$

Ein Differential $d\omega$ ist also dann und nur dann ein Multiplum eines Divisors $\mathfrak{Q}$, wenn $\mathfrak{W}_\omega = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{G}_\omega$ und $\mathfrak{G}_\omega$ ein ganzer Divisor der Ergänzungsclasse (Q') ist, und die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale, welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, ist demnach für alle zu $\mathfrak{Q}$ äquivalenten Divisoren dieselbe, nämlich gleich der Anzahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren der Ergänzungsclasse (Q'); es ergiebt sich also der Satz:

> Ist (Q) eine beliebige Divisorenclasse, und $\mathfrak{Q}$ irgend ein Divisor von (Q), so ist die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla $d\omega$ von $\mathfrak{Q}$ stets gleich der Dimension $\{Q'\}$ der Ergänzungsclasse von (Q).

Wir wollen jetzt eine Beziehung zwischen den Dimensionen von zwei beliebigen Ergänzungsclassen herleiten, welche *der Riemann-Roch'sche Satz* genannt wird. Zu diesem Zwecke wählen wir die unabhängige Variable x so, dass der Stelle $x = \infty$ n reguläre Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ entsprechen. Es seien dann $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1'$ zwei beliebige ganze oder gebrochene Divisoren, welche aber keinen Divisor $\mathfrak{P}_x$ enthalten, und deren Product:

$$\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_1' = \mathfrak{Z}_x$$

dem Verzweigungstheiler der Kugelfläche K_x gleich ist. Dann sind die zu den beiden Divisoren:

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{n}_x}, \quad \mathfrak{Q}' = \frac{\mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{n}_x}$$

gehörigen Classen (Q) und (Q') Ergänzungsclassen, da

$$\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}' = \frac{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{n}_x^2} = \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$$

also $(QQ') = (W)$ ist, und umgekehrt kann man in zwei beliebigen Ergänzungsclassen stets zwei solche Theiler $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ finden. Die Dimension $\{Q\}$ der Classe (Q) ist dann gleich der Anzahl aller linear unabhängigen ganzen Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1}$ innerhalb $K(xy)$ und ebenso ist $\{Q'\}$ gleich der Anzahl der unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1'}$.

Um nun diese Dimensionen $\{Q\}$ und $\{Q'\}$ zu finden, bestimmen wir zunächst ein Fundamentalsystem

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$$

des Körpers $K(x, y)$ für den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$, welches für die Stelle $(x = \infty)$ regulär ist, und es seien wieder

$$r_1, r_2, \cdots, r_n \qquad (r_i \geqq r_{i+1})$$

die Ordnungszahlen seiner Elemente für jene Stelle. Dann ist das complementäre System

$$\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_n$$

ein Fundamentalsystem für den complementären Theiler:

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{z}_x} = \frac{1}{\mathfrak{Q}_1'},$$

welches ebenfalls für $(x = \infty)$ regulär ist, und dessen Ordnungszahlen für jene Stelle bzw.

$$-r_1, -r_2, \cdots, -r_n$$

sind.

Dann sind alle und nur die linear unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1}$ in dem Systeme

$$\xi_i, x\xi_i, \cdots, x^{r_i - 1}\xi_i \qquad (r_i \geqq 1)$$

enthalten, für welche die Ordnungszahlen $r_i \geqq 1$ sind; denn alle diese sind Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$, weil das System (ξ_i) ein Fundamentalsystem für $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$ ist, aber sie sind auch Multipla von $\mathfrak{n}_x$, weil sie alle mindestens die Ordnungszahl $+1$ für $(z = \infty)$ besitzen. Ihre Anzahl, die Dimension $\{Q\}$, ist also durch die Gleichung

$$\{Q\} = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$$

gegeben, wenn r_s die letzte Ordnungszahl r ist, welche $\geqq 0$ ist. Hier können und sollen die Ordnungszahlen $r_i = 0$ mitgezählt werden, da sie ja an der Summe nichts ändern.

Dagegen sind alle und nur die unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1'}$ in dem Systeme:

$$\bar{\xi}_k,\ x\bar{\xi}_k,\ x^2\bar{\xi}_k,\ \cdots,\ x^{-r_k-1}\bar{\xi}_k \qquad (-r_k \geqq 1)$$

enthalten, für welche ihre Ordnungszahl $-r_k \geqq 1$ ist, denn alle diese sind Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1'}$, aber auch von $\mathfrak{n}_x$, weil auch sie mindestens die Ordnungszahl $+1$ für $(x = \infty)$ haben. Ihre Anzahl, die Dimension $\{Q'\}$ der Ergänzungsclasse (Q'), ist also gleich:

$$\{Q'\} = -(r_{s+1} + r_{s+2} + \cdots + r_n),$$

weil ja n. d. V. r_{s+1} die erste negative Ordnungszahl in dem Systeme (ξ_i), also $(-r_{s+1})$ die erste positive in dem complementären Systeme $(\bar{\xi}_i)$ ist. Durch Subtraction ergiebt sich also die wichtige Gleichung:

$$\{Q\} - \{Q'\} = (r_1 + r_2 + \cdots + r_n).$$

Nun war aber das System $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ein Fundamentalsystem für die Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1} = \frac{1}{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}_x}$, dessen Ordnung gleich $-(q+n)$ ist; also ist

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = q + n - \frac{w}{2} = q - p + 1,$$

wo w die Verzweigungszahl der zu x gehörigen Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ ist; die soeben gefundene Gleichung geht also über in:

$$\{Q\} = \{Q'\} + q - p + 1.$$

Wenn man aber jetzt Q mit Q' vertauscht, so ergiebt sich die correspondirende Gleichung

$$\{Q'\} = \{Q\} + q' - p + 1.$$

Subtrahirt man die zweite von der ersten Gleichung, so kann das Resultat folgendermassen geschrieben werden:

(I) $$\{Q\} - \frac{q}{2} = \{Q'\} - \frac{q'}{2}.$$

Ersetzt man endlich in der zweiten der soeben gefundenen Gleichungen die Ordnung Q' der Ergänzungsclasse (Q') durch $2p - 2 - q$, so erhält man die zweite Gleichung:

(II) $$\left\{\frac{W}{Q}\right\} = \{Q'\} = \{Q\} + p - 1 - q.$$

Beide Gleichungen geben uns die gesuchte Beziehung zwischen den Dimensionen von zwei beliebigen Ergänzungsclassen und können folgendermassen in Worten ausgesprochen werden:

I) Ist $QQ' = W$, so besitzt die Differenz zwischen der Dimension und der halben Ordnung für Q und Q' stets den gleichen Werth.

II) Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor der Ordnung q und (Q) seine Classe, so ist die Anzahl aller unabhängigen Differentiale $d\omega$, deren Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, stets gleich der Dimension der Classe (Q) vermehrt um die Zahl $p - 1 - q$,

Aus der zweiten Gleichung ziehen wir noch zwei einfache, aber für das Weitere sehr wichtige Folgerungen. Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor, dessen Ordnung $q = -b$ negativ ist, so ist die Dimension $\{Q\} = 0$, da es keinen ganzen Divisor von negativer Ordnung giebt. In diesem Falle ist also

III) $$\{Q'\} = \left\{\frac{W}{Q}\right\} = b + p - 1.$$

Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale, welche Multipla eines beliebigen Divisors von negativer Ordnung b sind, ist also stets gleich $b + p - 1$.

Ist zweitens $\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ ein beliebiger Divisor der Hauptclasse, so ist $(Q) = (E)$ also $q = 0$, $\{E\} = 1$, da die einzigen ganzen Divisoren dieser Classe die Constanten sind; in diesem Falle ist also die Ergänzungsclasse

$$(Q') = \left(\frac{W}{E}\right) = (W)$$

und es ergiebt sich also aus (II) die Gleichung:

(IV) $$\{W\} = p,$$

also wieder der Satz, dass die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung gleich p ist. Aber hier folgt allgemeiner, dass auch die Anzahl aller unabhängigen Differentiale deren Divisoren Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{E}$ der Hauptclasse ist, stets gleich p ist.

§ 19.

Wir benutzen zunächst den Riemann-Roch'schen Satz zum Beweise der Thatsache, dass die Differentialclasse (W) eines jeden Körpers K eine eigentliche ist, d. h. dass ihre ganzen Divisoren $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \cdots, \mathfrak{W}_p)$ nicht alle einen gemeinsamen Theiler $\mathfrak{M}$ besitzen. Ist nämlich μ der Grad jenes Divisors $\mathfrak{M}$ und (M) seine Classe, so ist

$$\mathfrak{W}_i = \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{W}}_i$$

und die p ganzen Divisoren $(\overline{\mathfrak{W}}_1, \overline{\mathfrak{W}}_2, \cdots, \overline{\mathfrak{W}}_p)$ gehören zu der *eigentlichen* Classe $\overline{W}$, welche durch die Gleichung

$$M\overline{W} = W$$

vollständig bestimmt ist. Für diese beiden Ergänzungsclassen M und $\overline{W}$ besteht aber nach Formel (I), § 18 die Beziehung:

$$(1) \qquad \{M\} - \frac{\mu}{2} = \{\overline{W}\} - \frac{\overline{w}}{2},$$

wenn $\overline{w}$ die Ordnung der Classe $\overline{W}$ bedeutet; nun bestehen aber nach den Sätzen des § 14 die Gleichungen:

$$\{\overline{W}\} = \{W\} = p, \qquad \{M\} = 1, \qquad \overline{w} = 2p - 2 - \mu.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (1) ein, so ergiebt sich zur Bestimmung der noch unbekannten Ordnungszahl μ von $\mathfrak{M}$ bzw. von (M):

$$1 - \frac{\mu}{2} = p - (p-1) + \frac{\mu}{2},$$

d. h. es muss nothwendig $\mu = 0$, also der Theiler aller ganzen Divisoren von (W) gleich Eins sein, w. z. B. w.

Wir benutzen den Riemann-Roch'schen Satz ferner zur Beantwortung der folgenden allgemeineren Frage. Wie viele unabhängige Integrale giebt es, welche sich nur in einer Anzahl gegebener Punkte nicht regulär verhalten, und in jedem von diesen höchstens in vorgegebener Ordnung unendlich werden? Offenbar kann diese Aufgabe jetzt auch so ausgesprochen werden:

> Es soll die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{B}}$ innerhalb der Differentialclasse (W) bestimmt werden, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1^{g_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{g_h}$ einen beliebigen aber *ganzen* Divisor bedeutet.

Alle diese Divisoren der Classe (W) besitzen dann nämlich die Form:

$$\mathfrak{W}_\omega = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

und ihre Integrale ω haben in $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_h$ entweder höchstens bzw. die Ordnungszahlen $g_1 - 1, \cdots, g_h - 1$ oder werden höchstens unendlich, wie $l\mathfrak{P}_i$, je nachdem $g_i > 1$ oder $g_i = 1$ ist, während sich ω in allen übrigen Punkten regulär verhält.

In diesem Falle ist also

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{\mathfrak{B}}, \quad (Q) = \left(\frac{1}{B}\right), \quad q = -b,$$

wenn B die Classe von $\mathfrak{B}$ ist, und $b = g_1 + \cdots + g_h$ die Ordnung von $\mathfrak{B}$ bedeutet. Ferner ist

$$\{Q\} = \left\{\frac{1}{B}\right\} = 0,$$

weil es keinen ganzen Divisor von der negativen Ordnung $-b$ geben kann. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (II) des vorigen Abschnittes ein, so ergiebt sich für die gesuchte Anzahl, oder für die Dimension $\{Q'\} = \{BW\}$ der Ergänzungsclasse von $\left(\frac{1}{B}\right)$ die Gleichung:

$$\{BW\} = b + p - 1.$$

Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale mit dem Nenner $\mathfrak{B}$ der Ordnung b ist stets gleich $b + p - 1$.

Es sei nun zunächst $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}$, also $b = 1$, dann lehrt unser Satz, dass die Anzahl aller unabhängigen Differentiale $d\omega$, deren Nenner höchstens $\mathfrak{P}$ ist, gleich p ist, oder dass die Dimension der Ergänzungsclasse $\{\mathfrak{P}W\}$ zu $\left(\frac{1}{\mathfrak{P}}\right)$ gleich p ist. Sind aber $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \cdots, \mathfrak{W}_p$, wie vorher, ein vollständiges System unabhängiger ganzer Divisoren der Classe (W), so bilden die p Divisoren

$$\mathfrak{P}\mathfrak{W}_1, \mathfrak{P}\mathfrak{W}_2, \cdots, \mathfrak{P}\mathfrak{W}_p$$

ein ebensolches System für die Classe $(\mathfrak{P}W)$; denn einmal sind sie unabhängig, zweitens gehören sie zu jener Classe und drittens giebt es nicht mehr unabhängige ganze Divisoren in dieser Classe. Jede Classe $(\mathfrak{P}W)$ ist also eine uneigentliche Classe, und ihr Theiler ist gleich $\mathfrak{P}$. Jedes Differential, dessen Nenner höchstens gleich $\mathfrak{P}$ ist, besitzt also die Form:

$$d\omega \sim \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}} \sim \mathfrak{W},$$

ist also ein Differential erster Gattung, es besteht daher der Satz:

Es giebt kein einziges Integral, welches nur an einer Stelle und zwar logarithmisch unendlich wird.

Alle folgenden Classen (BW), für welche der ganze Divisor $\mathfrak{B}$ mindestens zwei Primfactoren enthält, sind aber stets eigentliche Classen. Zum Beweise dieses wichtigen Satzes nehmen wir an, dass für einen beliebigen ganzen Divisor $\mathfrak{B}$, dessen Ordnung $b \geqq 2$ ist, die $b + p - 1$ Divisoren

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_{b+p-1} \tag{2}$$

ein vollständiges System unabhängiger ganzer Divisoren der Classe (BW) bilden, und dass diese keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Ist dann $\mathfrak{P}$ ein ganz beliebiger Primtheiler, so gehören die $b + p - 1$ linear unabhängigen ganzen Divisoren

$$\mathfrak{P}\mathfrak{G}_1, \mathfrak{P}\mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{P}\mathfrak{G}_{b+p-1} \tag{2^a}$$

sicher zu der Classe $(\mathfrak{P}BW)$; da aber die Ordnung von $\mathfrak{P}B$ gleich $b + 1$ ist, so ist die Dimension $\{\mathfrak{P}BW\}$ dieser Classe gleich $b + p$; es muss also in dieser Classe noch einen ganzen Divisor $\mathfrak{G}_0$ geben, welcher von den Divisoren (2^a) linear unabhängig ist. Derselbe ist durch $\mathfrak{P}$ nicht theilbar; denn wäre $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{G}}_0$, so gehörte $\overline{\mathfrak{G}}_0$ zur Classe (BW), wäre also durch die $(b+p-1)$ Divisoren (2) linear darstellbar, es müsste also $\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{G}}_0$ durch die Divisoren (2^a) mit den gleichen Coefficienten darstellbar sein.

Ist also $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_{b+p-1})$ ein vollständiges System linear unabhängiger ganzer Divisoren für den Nenner $\mathfrak{B}$, so giebt es ein System:

$$(2^b) \qquad \mathfrak{G}_0,\ \mathfrak{P}\mathfrak{G}_1,\ \cdots,\ \mathfrak{P}\mathfrak{G}_{b+p-1}$$

für den Nenner $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$, für welches $\mathfrak{G}_0$ den Primtheiler $\mathfrak{P}$ sicher nicht enthält. Daraus folgt, dass die Classe $(\mathfrak{P}BW)$ eine eigentliche ist, denn die $b+p$ ganzen Divisoren (2^b) enthalten weder den gemeinsamen Theiler $\mathfrak{P}$, noch auch irgend einen von $\mathfrak{P}$ verschiedenen Theiler $\mathfrak{P}'$, denn $\mathfrak{P}'$ müsste ja dann schon in $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_{b+p-1}$ enthalten sein, was mit der Voraussetzung, dass (BW) eine eigentliche Classe ist, im Widerspruch stehen würde.

Nun ist aber unser Satz für den ersten Fall, nämlich für $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ richtig, mögen nun $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ gleich oder verschieden sein. In der That ist dann die Dimension der Classe (BW) gleich $p+1$; ausser den p unabhängigen ganzen Divisoren dieser Classe:

$$(3) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{W}_1,\ \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{W}_2,\ \cdots,\ \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{W}_p$$

muss also noch ein weiterer $\mathfrak{G}_0$ vorhanden sein, welcher weder durch $\mathfrak{P}$ noch durch $\mathfrak{P}'$ theilbar ist. Enthielte nämlich $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}'\mathfrak{G}_0'$ etwa den Theiler $\mathfrak{P}'$, so gehörte $\mathfrak{G}_0'$ der uneigentlichen Classe $(\mathfrak{P}W)$ an, wäre also auch durch $\mathfrak{P}$ theilbar, und dann wäre $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\overline{\mathfrak{G}}_0$ durch die p ganzen Divisoren (3) linear darstellbar, also nicht von ihnen unabhängig. Hiermit ist also unsere Behauptung vollständig erwiesen.

Wenden wir diesen allgemeinen Satz auf diejenigen Differentiale an, deren Nenner $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}^m$ oder gleich $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ also entweder eine Potenz eines einzigen Primfactors oder das Product zweier verschiedener Primtheiler ist, so ergeben sich die beiden Folgerungen:

I) Ist m eine beliebige ganze Zahl > 1 und $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Primtheiler, so giebt es stets ein Differential

$$dt_{m-1} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}^m},$$

dessen Nenner in der reducirten Form gleich $\mathfrak{P}^m$ ist. Das zugehörige Integral t_{m-1} heisst ein *Elementarintegral zweiter Gattung*, es besitzt nur in $\mathfrak{P}$ einen Pol und zwar von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

II) Sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei beliebige von einander verschiedene Primtheiler, so giebt es stets ein Differential

$$dp_{12} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2},$$

dessen Nenner in der reducirten Form gleich $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ ist. Das zugehörige Integral p_{12} heisst ein *Elementarintegral dritter Gattung*, es wird nur in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und zwar logarithmisch unendlich.

Hieraus folgt endlich, dass man jedes Differential

$$d\omega \sim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}},$$

dessen Nenner

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1^{\varrho_1} \mathfrak{P}_2^{\varrho_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\varrho_h}$$

ein beliebiger ganzer Divisor ist, stets als eine Summe von Elementardifferentialen der ersten, zweiten und dritten Gattung darstellen kann; denn man erkennt leicht, dass man von $d\omega$ stets ein solches Elementardifferential $d\omega$ multiplicirt mit einer geeigneten Constanten abziehen kann, dass in der Differenz

$$d\omega - c_0\, d\omega_0 = d(\omega - c_0\, \omega_0) \sim \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$$

der Nenner $\mathfrak{B}'$ mindestens einen Primtheiler in einer mindestens um Eins niedrigeren Potenz enthält, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu einem Differentiale erster Gattung.

Zum Schluss möchte ich noch bemerken, dass die in dieser Abhandlung gegebenen Beweise, sowie alle von mir benutzten Methoden meines Wissens neu sind; mit ihrer Hilfe kann man alle in dieser Theorie sich darbietenden Aufgaben auf *ein* Grundproblem zurückführen, und dieses bei beliebig gegebener Grundcurve ohne jede vorgängige Vereinfachung derselben *mit rein arithmetischen Hülfsmitteln* lösen.

Von den Hauptresultaten dieser Arbeit sind die Sätze über die algebraischen Systeme oder Moduln, über ihre Transformation in reguläre Systeme, und der Satz über die charakteristischen Eigenschaften des Fundamentalsystemes für ein Ideal noch nicht gegeben worden; dasselbe gilt von der allgemeinen Theorie der (ganzen *und* gebrochenen) Divisoren, ihrer Eintheilung in Classen, und von der Aufstellung des Grundproblemes dieser Theorie und seiner Anwendung auf die der Abel'schen Integrale. Dagegen möchte ich ausdrücklich erwähnen, dass sich eine Theorie der *ganzen* Divisoren nebst ihren Anwendungen auf ganz anderer Grundlage und in ganz anderer Behandlung in der classischen Abhandlung der Herren *Dedekind* und *Weber* im 92. Bande des Crelle'schen Journales findet, deren sonstige Vorzüge hier nicht noch einmal hervorgehoben zu werden brauchen.

Ueber die sechzehn Doppelpunkte und sechzehn Doppelebenen einer Kummer'schen Fläche.

Von

H. E. Timerding in Strassburg.

Die zahlreichen Untersuchungen über die Gruppirungen der 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen einer Kummer'schen Fläche, die durch ihren Zusammenhang mit der Charakteristikentheorie der Thetafunctionen von zwei Veränderlichen noch eine besondere Bedeutung erhalten, basiren im Wesentlichen alle auf der Arbeit des Herrn Klein über die Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades im 2. Bande der Math. Annalen. In dieser Abhandlung wurde zum ersten Male auf die Bedeutung der 240 Ebenen aufmerksam gemacht, die nur drei Knotenpunkte enthalten und die Fläche in rationalen Curven vierter Ordnung schneiden. Später hat sie Caporali als Ebenen Π zur Grundlage seiner Untersuchungen über die Kummer'sche Configuration (Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, Anno CCLXXV, 1878; Memorie di Geometria, pag. 80) gemacht, weswegen wir sie schlechthin als Caporali'sche Ebenen bezeichnen wollen und ebenso als Caporali'sche Punkte die Punkte, in denen sich drei und nur drei Doppelebenen der Fläche schneiden.

In der genannten Arbeit entdeckte Herr Klein auch die 15 Collineationen, nämlich gescharte Involutionen, welche die Kummer'sche Fläche in sich überführen. Die Paare von Leitlinien dieser Involutionen, die wir der Kürze halber Klein'sche Linien nennen wollen, bilden die Gegenkantenpaare von 15 Tetraedern, sodass jedes Paar von Klein'schen Linien dreien dieser *„Haupttetraeder“* gemeinsam ist.

Ferner hat Herr Weber zuerst betont,*) dass unter den Tetraedern, die sich aus den Doppelpunkten oder Doppelebenen einer Kummer'schen Fläche bilden lassen, zwei Gattungen besonders hervorzuheben sind. Von den 80 Tetraedern der ersten Gattung bilden Doppelpunkte die Ecken und

*) Crelle's Journal, Band 84, S. 345

Doppelebenen die Seitenflächen. Sie lassen sich als *azygetische* Tetraeder charakterisiren, und ebenso als azygetische Quadrupel die Doppelpunkte und Doppelebenen, die ihre Ecken und Ebenen bilden. Von den Tetraedern der zweiten Gattung hingegen sind entweder Doppelpunkte die Ecken und lauter Caporali'sche Ebenen die Seitenflächen oder Doppelebenen die Seitenflächen und Caporali'sche Punkte die Ecken, und wir wollen von den vier Doppelpunkten oder Doppelebenen, die ihre Ecken oder Ebenen sind, jedesmal sagen, sie bilden ein *syzygetisches* Quadrupel. Es giebt dann unter den Doppelpunkten wie unter den Doppelebenen 60 solcher syzygetischer Quadrupel. Die Bezeichnung rechtfertigt sich dadurch, dass die Berührungscurven der Doppelebenen eines dieser Quadrupel immer auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen und die Tangentialkegel in den Doppelpunkten einer ebensolchen Gruppe immer aus Tangenten derselben Fläche zweiter Classe bestehen.

Man kann nun wünschen, die beiden Gattungen von Quadrupeln und überhaupt die Gruppirungen der Doppelpunkte und Doppelebenen, mehr als es bisher geschehen, aus einem einheitlichen Gesichtspunkte entwickelt zu sehen. Dazu sind vielleicht die folgenden Bemerkungen nicht ungeeignet.

Sie gründen sich darauf, dass man, ganz analog wie Steiner es für die 28 Doppeltangenten einer ebenen Curve vierter Ordnung gethan hat, aus den 16 Doppelpunkten oder 16 Doppelebenen alle möglichen Paare bildet und diese Paare dann gruppenweise zusammenfasst, nämlich zu vieren. Eine solche Gruppe von vier Paaren soll eine *Paarvier* heissen. Da es 120 Paare giebt, existiren 30 derartige Paarvier.*)

Wir wollen nun die sechs Doppelebenen, die durch einen Doppelpunkt gehen, kurz als eine Schaar bezeichnen, ebenso die sechs Doppelpunkte in einer Doppelebene. Dann entstehen die Ebenenpaarvier, indem *man von zwei Schaaren die beiden gemeinsamen Doppelebenen fortlässt.* Aber die Ebenenpaarvier wird nicht nur durch diese beiden Doppelebenen, sondern durch ein beliebiges Ebenenpaar aus einer bestimmten neuen Paarvier zu zwei Schaaren ergänzt. Zu dieser neuen steht die alte Paarvier in derselben Beziehung, wie jene umgekehrt zu dieser. Die beiden Paarvier sind *associirt* und enthalten zusammen alle 16 Doppelebenen.

Man findet nun vier Paare von Doppelpunkten, durch die je vier Ebenen einer Ebenenpaarvier gehen, sodass durch die Punkte eines Paares

*) Cayley hat die Charakteristiken derselben übersichtlich zusammengestellt in in *A Memoir on the single and double theta-functions*. Philos. Transactions, vol. 171, III. Gesammelte Abhandlungen, Band X, Seite 463. Mit Hülfe der Rosenhain'schen oder der von Herrn Weber a. a. O. adoptirten Bezeichnung ergeben sich die hier folgenden Resultate auf einfache Weise

zusammen alle acht Doppelebenen derselben gehen. Diese Punkte bilden eine Punktepaarvier, die so der Ebenenpaarvier zugeordnet ist. Associirten Ebenenpaarvier sind associirte Punktepaarvier zugeordnet. Durch jede der 15 Klein'schen Involutionen, welche die Kummer'sche Fläche in sich selbst überführen, gehen zwei bestimmte associirte Ebenenpaarvier, mitsammt ihren zugeordneten Punktepaarvier, in einander über.

Die 120 Verbindungslinien der 16 Doppelpunkte, die mit den 120 Schnittlinien der 16 Doppelebenen identisch sind, wollen wir als Kummer'sche Linien bezeichnen. Dann durchschneiden von einer Ebenenpaarvier die Ebenen der einzelnen Paare sich in vier Kummer'schen Linien, und dieselben vier Kummer'schen Linien erhalten wir, indem wir die Doppelpunkte der Punktepaarvier verbinden, die der associirten Ebenenpaarvier in der oben angegebenen Weise zugeordnet ist.

Die beiden Quadrupel von Kummer'schen Linien, die wir zu associirten Ebenen- oder Punktepaarvier erhalten, haben nun die Eigenschaft, dass sie von demselben Paar Klein'scher Linien getroffen werden. Weiter schneiden sie auf einer dieser Klein'schen Linien je ein Punktequadrupel aus. Zerfällt man jedes dieser beiden Quadrupel auf die drei möglichen Arten in zwei Punktepaare und sucht jedesmal zu den zwei Paaren die gemeinsamen harmonischen Punkte, so sind die drei Punktepaare, zu denen so jedes der beiden Punktequadrupel führt, *identisch*. Auf der zweiten Klein'schen Linie erhält man jedem dieser Paare entsprechend ein zweites Punktepaar, und zieht man jedesmal die vier Verbindungslinien der Punkte zusammengehöriger Paare auf beiden Linien, so bilden die dreimal vier Verbindungslinien, die man so bekommt, sechs neue Paare Klein'scher Linien und mit dem ersten Paare zusammen drei Haupttetraeder der Kummer'schen Fläche.

Beliebige zwei Paare aus derselben Paarvier bilden ein syzygetisches Quadrupel, beliebige zwei Paare aus associirten Paarvier ein azygetisches Quadrupel. Wie man aber auch ein syzygetisches oder azygetisches Quadrupel in Paare zerlegt, immer gehören dieselben der gleichen Paarvier an, wenn das Quadrupel syzygetisch, und der associirten Paarvier, wenn es azygetisch ist. So sieht man wieder, dass es 60 syzygetische und 80 azygetische Quadrupel giebt.

Die Doppelebenen, welche die Seitenflächen eines von einem azygetischen Punktequadrupel gebildeten Tetraeders sind, stellen immer auch ein azygetisches Ebenenquadrupel dar. Der Ebenenpaarvier, welche der durch zwei Ecken des Tetraeders — als ein Paar — bestimmten Punktepaarvier in der obigen Weise zugeordnet ist, gehört allemal auch ein Paar von Ebenen des Tetraeders an, und zwar schneiden diese sich in der Kante, welche jene zwei Ecken des Tetraeders *nicht* enthält. Die Paare von Ebenen des Tetraeders, die sich in zwei Gegenkanten schneiden, oder die Paare von Ecken, die auf zwei Gegenkanten liegen, gehören zu associirten Paarvier.

Zwei Paarvier haben entweder gar keine oder vier Elemente — Punkte oder Ebenen — gemein.

Mit einer Paarvier hat nur eine einzige andere kein Element gemein, nämlich die associirte Paarvier. Die Paarvier, die vier Elemente gemein haben, sind zu einander syzygetisch oder azygetisch, jenachdem ihre gemeinsamen Elemente ein syzygetisches oder azygetisches Quadrupel bilden. Zu jeder Paarvier sind 12 andere syzygetisch und 16 azygetisch. In der Paarvier sind nämlich 6 syzygetische und 8 azygetische Quadrupel enthalten. Die ersteren bestehen aus irgend zwei Paaren in ihr, und die letzteren greifen aus jedem der vier Paare, aber nicht auf jede mögliche Art, ein Element heraus. Die vier Paare lassen sich vielmehr auch so trennen, dass die Paarvier in die Elemente zweier Schaaren, mit Ausschluss von deren gemeinsamen Elementen, zerfällt. Jedes syzygetische und jedes azygetische Quadrupel der Paarvier gehört aber noch zu zwei anderen Paarvier, die mit der ersten zusammen jedesmal alle 16 Elemente erschöpfen.

Jedes syzygetische Quadrupel enthält von den drei Paarvier, denen es angehört, immer zwei Paare. Die jedesmal übrig bleibenden zwei Paare bilden zusammen drei neue syzygetische Quadrupel, von denen wieder je zwei einer neuen Paarvier angehören. Die Gesammtheit der vier Quadrupel soll eine syzygetische Quadrupelvier heissen. Es giebt deren 15. Je zwei Quadrupel einer Quadrupelvier bilden eine Paarvier und acht associirte Punkte oder Ebenen, je drei Quadrupel zwölf Punkte oder Tangentialebenen einer quadratischen Fläche. Sind es Punkte, so vertheilen sie sich auf vier singuläre Kegelschnitte, oder vier Doppelebenen, die ihrerseits ein syzygetisches Quadrupel bilden, und die vier Ebenenquadrupel, die man so im Ganzen erhält, stellen auch eine syzygetische Quadrupelvier dar.

Aus den Quadrupeln einer Quadrupelvier lassen sich auf drei Arten zwei associirte Paarvier bilden, und es giebt drei geschaarte Involutionen, durch welche dieselben in einander übergehen. Die drei Paare Klein'scher Linien, welche die Leitlinien dieser Involutionen sind, bilden aber die Paare von Gegenkanten eines Haupttetraeders der Kummer'schen Fläche, so dass zu jeder Zerlegung der 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen in Quadrupelvier ein Haupttetraeder gehört.

Jedes syzygetische Punktquadrupel bildet ein Tetraeder, durch dessen Kanten je zwei Doppelebenen gehen. Die vier noch übrigen Doppelebenen bilden dann ihrerseits ein syzygetisches Ebenenquadrupel, das dem syzygetischen Punktquadrupel zugeordnet ist. Ausserdem bilden die Ebenenpaare, die durch je zwei Gegenkanten des Tetraeders gehen, syzygetische Quadrupel, und die vier Ebenenquadrupel, die man so im Ganzen erhält, stellen eine Quadrupelvier dar. Umgekehrt, greift man aus einer Quadrupelvier von Doppelebenen beliebige drei Quadrupel heraus, so sondern dieselben sich derart in Paare, dass die Schnittlinien dieser Ebenenpaare die Kanten eines Tetraeders sind, dessen Ecken von den Doppelpunkten eines syzygetischen Quadrupels gebildet werden.

Jedes azygetische Quadrupel gehört zu drei Paarvier und wird zu jeder derselben durch ein neues azygetisches Quadrupel ergänzt. Aber diese drei neuen azygetischen Quadrupel bilden zu zweien auch immer eine Paarvier, so dass von den vier Quadrupeln, die man im Ganzen hat, beliebige zwei sich zu einer Paarvier zusammenfügen. Die Gesammtheit solcher vier azygetischer Quadrupel wollen wir eine Viervier nennen.

Jedes Element eines ihrer Quadrupel tritt mit einem bestimmten Elemente jedes anderen Quadrupels in der Paarvier, die beide Quadrupel bilden, als ein Paar zusammen. Von den drei Elementen, die so mit dem ersten Elemente zusammentreten, sind aber wieder beliebige zwei in einer Paarvier der Viervier als ein Paar einander zugeordnet. Wenn die vier Elemente also auf eine beliebige Art in Paare gesondert werden, so gehören diese Paare immer in zwei associirten Paarvier zusammen, die aus den Quadrupeln der Viervier gebildet sind. Die vier Elemente bilden wieder ein azygetisches Quadrupel, und wir erhalten mit jeder Zerfällung der 16 Elemente, Doppelpunkte oder Doppelebenen, in azygetische Quadrupel eine zugehörige zweite solche Zerfällung, derart dass aus jedem Quadrupel der einen Zerfällung immer ein Element in jedes Quadrupel der anderen Zerfällung eingeht, wie es schon lange bekannt ist.

Ueber eine Aufgabe der elementaren Arithmetik.

Von

Paul Wolfskehl in Darmstadt.

Im Novemberhefte 1899 des Intermédiaire des Mathématiciens wird unter No. 1656 die Frage gestellt, welche Zahlen N die Eigenschaft besitzen, dass die $\varphi(N)$ Zahlen, die relativ prim zu N und $< N$ sind, sämmtlich Primzahlen sind. Auf die Beantwortung dieser Frage bezieht sich das folgende.

1.

Wir denken uns alle Primzahlen der Grösse nach geordnet und durch $p_1, p_2, p_3, \cdots$ bezeichnet, also $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ u. s. w. Nun sei p_λ die kleinste Primzahl, die *nicht* in N aufgeht, dann ist p_λ^2 die kleinste zusammengesetzte Zahl, die relativ prim zu N ist. Denn jede zusammengesetzte Zahl besteht mindestens aus zwei gleichen oder ungleichen Primfactoren, welche, da die Zahl zu N relativ prim sein soll, in N nicht aufgehen dürfen, also $\geqq p_\lambda$ sein müssen. Die Zahl wird also $\geqq p_\lambda^2$ sein.

Je nachdem nun $p_\lambda^2 > N$ oder $< N$ ist, wird N die verlangte Eigenschaft besitzen oder nicht. Ist nämlich $p_\lambda^2 > N$, so ist jede Zahl, die $< N$ und relativ prim zu N ist, eine Primzahl. Denn wäre sie zusammengesetzt, so würde dies dem obigen widersprechen, weil sie $< p_\lambda^2$ ist, während dies doch die kleinste zu N relativ prime zusammengesetzte Zahl ist. Ist aber $p_\lambda^2 < N$, dann hat schon deshalb N nicht die verlangte Eigenschaft, weil eben die zu N relativ prime und zusammengesetzte Zahl $p_\lambda^2 < N$ ist.

2.

Tchebichef hat gezeigt*), dass wenn $a > \frac{7}{2}$ ist, immer zwischen a und $2a - 2$ mindestens eine Primzahl liegt. Also liegt erst recht zwischen

*) Journal de Mathématiques, T. XVII, Année 1852, p. 382.

p_λ und $2p_\lambda$ eine Primzahl, d. h. $p_{\lambda+1}$ ist $< 2p_\lambda$. Hieraus folgt aber $p_{\lambda+1}^2 < 4p_\lambda^2$. Wenn also $4 < p_\lambda$ ist, so ist

$$(1) \qquad p_{\lambda+1}^2 < p_\lambda^3.$$

Angenommen nun, es sei

$$(2) \qquad p_\lambda^2 < p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\lambda-1},$$

so folgt hieraus $p_\lambda^3 < p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\lambda-1} \cdot p_\lambda$ oder mit Rücksicht auf (1)

$$p_{\lambda+1}^2 < p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_\lambda .$$

Wenn also die Ungleichheit (2) für irgend einen Werth p_λ gilt, so gilt sie auch für jeden grössern. Da nun aber $11^2 < 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, so gilt die Ungleichheit (2) für jede Primzahl $p_\lambda > 7$.

3.

Da p_λ die kleinste in N nicht enthaltene Primzahl ist, so enthält N jede der Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \cdots p_{\lambda-1}$ mindestens einmal. Es ist also $N \geqq p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{\lambda-1}$ und wenn $p_\lambda > 7$ ist, nach dem unter No. 2 gesagten $N > p_\lambda^2$. Wir haben somit das Resultat:

Ist die kleinste nicht in N aufgehende Primzahl > 7, dann hat die Zahl N niemals die verlangte Eigenschaft.

4.

Um also die Zahlen N mit der verlangten Eigenschaft zu erhalten, haben wir nur die Werthe von $p_\lambda = 2, 3, 5, 7$ zu berücksichtigen. Bei jedem dieser Werthe von p_λ nehmen wir die Zahlen, welche $< p_\lambda^2$ und durch alle Primzahlen, die $< p_\lambda$ sind, theilbar sind. Diesen und nur diesen kommt die verlangte Eigenschaft zu. Es sind dies die Zahlen 3, 4, 6, 8, 12, 18, 24, 30.

Fricke, Dr. **Robert**, Prof. a. d. Techn. Hochschule zu Braunschweig, kurzgefaſste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Mit 102 in den Text gedruckten Figuren. [IV u. 520 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Gauſs, Carl Friedrich, Werke, herausg. v. d. Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften in Göttingen. 10 Bde. VIII. Band. [458 S.] 4. 1900. kart. n. ℳ 24.—

Genocchi, Angelo, Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung, herausgegeben von Giuseppe Peano. Autorisierte deutsche Übersetzung von G. Bohlmann und A. Schepp. Mit einem Vorwort von A. Mayer. [VIII u. 399 S.] gr. 8. 1899. In Leinw. geb. n. ℳ 12.—

Heun, Dr. **Karl**, die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Mit 18 Figuren im Text. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. IX. Bd. 2. Heft. [IV u. 123 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 4.—

Hilbert, Dr. **D.**, Prof. an der Universität Göttingen, Grundlagen der Geometrie. Mit 50 Textfiguren. A. u. d. T.: Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals. I. Teil. [92 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 3.20.

Hölder, Otto, o. Prof. d. Mathematik in Leipzig, Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung, gehalten am 22. Juli 1899. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. [75 S.] 1900. gr. 8. geh. n. ℳ 2.40.

Klein, F., und **E. Riecke**, über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an höheren Schulen. Vorträge, gehalten in Göttingen, Ostern 1900, bei Gelegenheit des Ferienkurses. Mit einem Wiederabdruck verschiedener einschlägiger Aufsätze von F. Klein. [VI u. 252 S.] Mit 84 Textfiguren. gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 6.—

Kronecker's, Leopold, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. (In 4 Bänden.) Dritter Band. I. Halbband. [VIII u. 474 S.] gr. 4. 1899. geh. n. ℳ 36.— [Der zweite Halbband befindet sich u. d. Pr.]

Lüroth, Dr. **J.**, Geheimer Hofrat, Professor an der Universität Freiburg i. B., Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 15 Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 8.—

Müller, Felix, mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Erste Hälfte: Französisch-deutsch. [IV u. 132 S.] Lex. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Muth, Dr. **P.**, Osthofen, Theorie und Anwendung der Elementarteiler. [XVI u. 236 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. **Eugen**, Professor der Mathematik a. d. Universität zu Gieſsen, Vorlesungen über Algebra. In 2 Bänden. II. Band. 2. (Schluſs-) Lieferung. [XI u. S. 193—527.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 10.—

Pascal, Ernst, o. Prof. a. d. Univ. zu Pavia, die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Deutsch von Dr. H. Leitzmann. [XVI u. 266 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 10.—

—— —— Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp, Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 10.—

Riemann, B., elliptische Funktionen. Vorlesungen herausg. von Prof. Dr. H. Stahl, Tübingen. Mit Figuren im Text. [VIII u. 144 S.] gr. 8. 1899. geh. n. ℳ 5.60.

INHALT.

Seite

Elwin Bruno Christoffel. Von C. F. Geiser in Zürich und L. Maurer in Tübingen . . . 329

Zum Gedächtniss Elwin Bruno Christoffel's. Von Windelband in Strassburg 341

Liste der von E. B. Christoffel veröffentlichten Abhandlungen 344

Vollständige Theorie der Riemann'schen θ-Function. Von E. B. Christoffel †. (Mit 5 Figuren im Text) . . . 347

Grundlagen für eine Theorie der Systeme totaler Differentialgleichungen 2ter O. Von Ernst Pascal in Pavia . . . 400

Sur une manière d'étendre le théorème de la moyenne aux équations différentielles du premier ordre. Von Michel Petrovitch in Belgrad (Serbien). (Mit 2 Figuren im Text) . . . 417

Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der Abel'schen Integrale. Von K. Hensel in Berlin . . . 437

Ueber die sechzehn Doppelebenen einer Kummer'schen Fläche. Von H. E. Timerding in Strassburg . . . 499

Ueber eine Aufgabe der elementaren Arithmetik. Von Paul Wolfskehl in Darmstadt . . . 503

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst genauer Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck,** München, Hildegardstr. 1½, **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer,** Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu 1 Beilage der Goeschen'schen Verlagsbuchhandlung in **Leipzig** und **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, DAVID HILBERT, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

54. Band. 4. Heft.

Ausgegeben am 30. April

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Neuer Beweis des Satzes, dass eine geschlossene convexe Fläche sich nicht verbiegen lässt.

Von

Heinrich Liebmann in Leipzig.

Seite

§ 1. Einleitung . . . . 505—506
1. Gedankengang des früheren Beweises.
2. Neue Beweismethode.

§ 2. Die Polfläche . . . . 506—511
1. Verbiegungen einer Fläche und eines mit ihr starr verbundenen Strahlensystems.
2. Die Polfläche einer infinitesimalen Verbiegung.
3. Formeln für die Coordinaten der Polfläche.

§ 3. Infinitesimale Bewegungen . . . . 511—516
1. Verhalten der Polfläche bei einer inf. Bewegung.
2. Ist die Polfläche ein Punkt, so ist die Verbiegung eine Bewegung.

§ 4. Die negative Krümmung der Polfläche. Folgerung . . . . 516—517
1. Die negative Krümmung der Polfläche.
2. Folgerung für die Verbiegung convexer Flächen.

§ 1.

Einleitung.

1. Gedankengang des früheren Beweises.

In meiner Habilitationsschrift*) habe ich einen Beweis gegeben für den zuerst von Minding ausgesprochenen Satz, dass es unmöglich ist, eine geschlosse convexe Fläche zu verbiegen. Der Beweis, welcher sich auf infinitesimale Verbiegungen**) beschränkte, und bei dem auch über die Natur der Fläche noch verschiedene Voraussetzungen gemacht wurden***),

*) Ueber die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Leipzig 1899 und Math. Annalen LIII. (Im Folgenden citirt mit V.)

**) Eine klare Auseinandersetzung über den Begriff „infinitesimale Verbiegung“ findet man bei Darboux, Theorie des surfaces IV, Paris 1896 p. 3:

***) V. § 1, Nr. 2—3.

die wir auch im Folgenden beibehalten werden, beruhte auf einer indirecten Schlussweise. Es wurde nämlich eine gewisse Hülfsfläche, die Verbiegungsfläche*) eingeführt und gezeigt, dass wenn die Verbiegung keine Bewegung war, die Verbiegungsfläche die beiden Eigenschaften in sich vereinigen musste, im allgemeinen negative Krümmung zu besitzen und dabei ganz im Endlichen zu bleiben.**) Hierin lag ein Widerspruch***), aus dem sich dann ergab, dass die Verbiegung nur eine Bewegung sein konnte.

Die als Hülfsmittel benützte Verbiegungsfläche bot indessen durch die auf ihr gelegenen Punkte „seminegativer Krümmung"†) besondere Schwierigkeiten und der Beweis, dass nur die Bewegung als infinitesimale Verbiegung übrig bleiben konnte, erforderte daher sehr complicirte Hülfsmittel.††)

2. Neue Beweismethode.

Im Folgenden wird nun ein Beweis erbracht, welcher die früheren Schwierigkeiten vermeidet, indem es jetzt gelingt, statt der früheren Verbiegungsfläche eine andere Hülfsfläche zu benützen, welche wir sogleich kennen lernen werden. Diese Fläche, die wir mit dem Namen „Polfläche der inf. Verbiegung" oder kurzweg „Polfläche" bezeichnen wollen, hat, wie wir sehen werden, die Eigenschaft, sich im Fall der Bewegung auf einen einzigen Punkt zu reduciren. Wenn dagegen die Verbiegung eine wirkliche Verbiegung, nicht nur eine Bewegung ist, so wird sich zeigen, dass die Polfläche in allen Punkten *ausnahmslos* den Charakter der negativen Krümmung besitzt, was sich mit ihrer anderen Eigenschaft, ganz im Endlichen zu bleiben, nicht vereinigen lässt. Wir werden also hier auf denselben Widerspruch geführt, wie bei dem früheren Beweis — nur mit der Vereinfachung, dass die lästigen Punkte seminegativer Krümmung ganz wegfallen.

§ 2.

Die Polfläche.

1. Verbiegung einer Fläche und eines damit starr verbundenen Strahlensystems.

Um die Entstehung der Polfläche zu beschreiben, müssen wir erst uns den dabei vorkommenden Begriff der *Verbiegung eines Strahlensystems* klar machen, welches an eine Fläche geheftet ist.

---

*) V. § 4 Nr. 1.

**) V. § 4, Nr. 2—3.

***) V. § 2, Nr. 3.

†) V. § 4, Nr. 5.

††) V. § 2, Nr. 4.

Erinnern wir uns zunächst an die charakteristischen Eigenthümlichkeiten einer Flächenverbiegung. Dabei ändern sich die geodätischen Entfernungen auf der Fläche nicht, wie überhaupt die Länge eines auf der Fläche gelegenen Curvenstückes ungeändert bleibt. Ein einzelner Flächenpunkt wird bewegt und die von ihm ausgehenden, in der Fläche gelegenen Richtungen ebenfalls, jedoch so dass ihre relative Lage ungeändert bleibt: Zieht man in einem Punkt der Fläche das Büschel der Tangenten, führt man sodann die Verbiegung aus und zieht nachher in den entsprechenden Richtungen die Tangenten, so geht das Tangentenbüschel aus dem ersten hervor durch einfache Bewegung*). — Wenn nun ein System von Strahlen vorliegt, welche von der Fläche ausgehen, so kann man die Fläche verbiegen und dabei dem einzelnen Strahl eine solche Bewegung vorschreiben, dass die Neigungen, welche er gegen die in der Tangentialebene seines Anfangspunktes auf der Fläche gelegenen Richtungen hat, *alle* ungeändert bleiben. Das ist möglich, weil eben die relativen Lagen d. h. die Winkel, welche diese verschiedenen Richtungen mit einander bilden, ungeändert bleiben. Es genügt zu fordern, dass seine Richtung gegen zwei Tangentenrichtungen ungeändert bleibt, dann ändern sich die übrigen von selbst nicht.

*Unter der Verbiegung eines von einer Fläche ausgehenden Strahlensystems wollen wir also eine Transformation verstehen, bei der der einzelne Strahl so bewegt wird, dass er seine Richtung gegen die der Fläche in seinem Ausgangspunkt zugehörigen durch die Verbiegung geänderten Tangentenrichtungen beibehält.***)

Wir wollen diese Bewegung auch bezeichnen als eine solche, wo *der einzelne Strahl mit der Fläche starr verbunden bleibt in seinem Ausgangspunkt.*

Als Beispiel einer solchen Verbiegung sei folgendes genannt: Die Normalen einer Fläche welche verbogen wird, bilden ein Strahlensystem, welches aus dem System der Normalen, welche die Fläche vorher besass, durch Verbiegung hervorgegangen ist.

2. Die Polfläche einer infinitesimalen Verbiegung.

Die Polfläche nun wird durch Verbiegung eines gewissen mit der zu verbiegenden Fläche zusammenhängenden Strahlensystems gewonnen. Wir betrachten die Fläche in der Anfangslage und verbinden die Punkte derselben durch gerade Linien mit einem im *Innern* der Fläche, aber sonst

---

*) Man kann sich dies anschaulich klar machen: Versehen wir das Tangentenbüschel vor und nach der Verbiegung mit den Farben des Spectrums, so lassen sich die beiden Spectra durch Bewegung zur Deckung bringen.

**) Von dieser Verbiegung eines Strahlensystems macht z. B. Bianchi Gebrauch in seiner Arbeit: Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura constanta. (Annali di Mat. Ser. III, T. 3, p. 199.)

beliebig angenommenen Pol P, dessen Coordinaten mit a, b, c bezeichnet werden mögen. Sodann denken wir uns die Verbindung der verschiedenen Strahlen in P aufgehoben und verbiegen die Fläche. Die einzelnen Strahlen mögen dabei mit der Fläche starr verbunden bleiben; es werden daher die Endpunkte der Strahlen, die vorher alle in P zusammenfielen, jetzt im allgemeinen nicht mehr zusammenfallen. Bei einer infinitesimalen Verbiegung speciell, welche durch die Formeln

$$x_1 = x + \varepsilon\xi,$$
$$y_1 = y + \varepsilon\eta,$$
$$z_1 = z + \varepsilon\zeta$$

gegeben ist, wird der Endpunkt abc des vom Punkt xyz ausgehenden Strahles übergehen in

$$a_1 = a + \varepsilon\alpha,$$
$$b_1 = b + \varepsilon\beta,$$
$$c_1 = c + \varepsilon\gamma$$

wo $\alpha\beta\gamma$ ebenso wie $\xi\eta\zeta$ analytische Functionen von x und y sind, welche sich mit Hülfe von $\xi\eta\zeta$ berechnen lassen (vgl. die nächste Nummer). Diese $\alpha\beta\gamma$ nun tragen wir als rechtwinklige Coordinaten in irgend einem rechtwinkligen Coordinatensystem auf und erhalten auf diese Weise die *Polfläche.* (Eigentlich dürfte man hier das Wort „Fläche" noch nicht gebrauchen, da ja erst die Rechnung zeigen wird, dass das Gebilde eine Fläche und nicht etwa eine Curve ist).

Die Polfläche giebt also die Werthe der infinitesimalen Verschiebungen $\alpha\beta\gamma$ an, welche die verschiedenen, vor der Verbiegung im Pol vereinigten Endpunkte der Strahlen des mit den Flächenpunkten starr verbundenen Systems erleiden.

3. Formeln für die Coordinaten der Polfläche.

Wenn wir jetzt die Formeln für die Polfläche aufstellen, so haben wir in diesen Formeln zweierlei Forderungen auszudrücken: *erstens*, dass die Länge eines jeden Strahles ungeändert bleibt und *zweitens*, dass er mit der Fläche starr verbunden bleibt, und dazu genügt es nach § 2, Nr. 1, dass seine Neigung gegen zwei in der Fläche gelegene Curvenrichtungen ungeändert bleibt. Wir nehmen hierfür am besten diejenigen Curven, welche durch die Ebenen $x =$ constans und $y =$ constans aus der Fläche vor der Verbiegung herausgeschnitten werden.

Die Forderung nun, dass die Entfernung

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

ungeändert bleibt, dass also

$$x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(x-a+\varepsilon(\xi-\alpha))^2+(y-b+\varepsilon(\eta-\beta))^2$$
$$+(z-c+\varepsilon(\zeta-\gamma))^2$$

in soll, führt auf die Gleichung

$$)\qquad (x-a)(\xi-\alpha)+(y-b)(\eta-\beta)+(z-c)(\zeta-\gamma)=0.$$

n die beiden anderen Forderungen auszudrücken, berechnen wir uns die sinus der beiden Winkel, welche der Strahl vor und nach der Verigung mit dem oben genannten beiden Richtungen einschliesst.

Der Strahl selbst hat vor der Verbiegung folgende drei Neigungssinus:

$$\frac{x-a}{r},\quad \frac{y-b}{r},\quad \frac{z-c}{r}$$

d nach der Verbiegung:

$$\frac{x-a+\varepsilon(\xi-\alpha)}{r},\quad \frac{y-b+\varepsilon(\eta-\beta)}{r},\quad \frac{z-c+\varepsilon(\zeta-\gamma)}{r}.$$

diesen letzteren Formeln ist schon davon Gebrauch gemacht, dass r geändert bleibt; sie würden ohne Benützung dieses Umstandes sich comicirter gestalten.

Die Neigungen der Curve $y=\text{const.}=y_0$, welche auf der Fläche gt, sind gegeben durch die Cosinus:

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}},\quad 0,\quad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

$p=\frac{\partial z}{\partial x}$ ist.

Nach der Verbiegung verwandelt sich diese Curve in die Curve mit n Gleichungen

$$\begin{aligned}\bar x &= x &&+\varepsilon\xi(x,y_0),\\ \bar y &= y_0 &&+\varepsilon\eta(x,y_0),\\ \bar z &= z(x,y_0) &&+\varepsilon\zeta(x,y_0)\end{aligned}$$

ren Neigungscosinus die Werthe haben

$$\frac{1+\varepsilon\xi_x}{W},\quad \frac{\varepsilon\eta_x}{W}$$

d

$$\frac{p+\varepsilon\zeta_x}{W},$$

$$W^2=(1+\varepsilon\xi_x)^2+(\varepsilon\eta_x)^2+(p+\varepsilon\zeta_x)^2$$

Entwickelt man nun die Werthe weiter, indem man nur die Glieder ter Ordnung in ε beibehält, so kommt

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(1+\frac{\varepsilon p(p\xi_x-\zeta_x)}{1+p^2}\right),\quad \frac{\varepsilon\eta_x}{\sqrt{1+p^2}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(p+\frac{\varepsilon(\zeta_x-p\xi_x)}{1+p^2}\right).$$

Ebenso sind die Neigungen der auf der Fläche gelegenen Curve $x = x_0$ (= constans) vor der Verbiegung gegeben durch:

$$0, \quad \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{1+q^2}},$$

und sie ändern sich durch die Verbiegung um in

$$\frac{\varepsilon \xi_y}{\sqrt{1+q^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(1 + \frac{\varepsilon q (q \eta_y - \zeta_y)}{1+q^2}\right),$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+q^2}}\left(q + \frac{\varepsilon (\zeta_y - \zeta_y)}{1+q^2}\right).$$

Mit Hülfe dieser Formeln berechnet man leicht die Cosinus der beiden Winkel, welche der Strahl mit den beiden Curven auf der Fläche bildet.

Sie ergeben sich zu

$$\frac{1}{r\sqrt{1+p^2}}\left((x-a) + p(z-c)\right),$$

und

$$\frac{1}{r\sqrt{1+q^2}}\left((y-b) + q(z-c)\right).$$

Berechnet man nun mit Hülfe der entwickelten Formeln die Aenderungen, welche diese Grössen durch die Verbiegung erleiden, indem man die Glieder von höheren als der ersten Ordnung in ε fortlässt, und verlangt, dass die Aenderungen verschwinden, so gelangt man zu den Relationen:

$$\text{(B)} \qquad \frac{p(x-a)(p\xi_x - \zeta_x)}{(1+p^2)} + \xi - \alpha + \eta_x(y-b)$$
$$+ p(\zeta - \gamma) + (z-c)\,\frac{(\zeta_x - p\xi_x)}{1+p^2} = 0$$

und

$$\text{(C)} \qquad (x-a)\,\xi_y + (\eta - \beta) + \frac{q(y-b)(q\eta_y - \zeta_y)}{1+q^2}$$
$$+ q(\zeta - \gamma) + \frac{(z-c)(\zeta_y - q\eta_y)}{1+q^2} = 0.$$

Hierzu treten noch diejenigen Formeln, welche besagen, dass die $\xi \eta \zeta$ eine infinitesimale Verbiegung definiren. Sie lauten*)

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} \xi_x + p\zeta_x &= 0, \\ \eta_y + q\zeta_y &= 0, \\ \xi_y + \eta_x + p\zeta_y + q\zeta_x &= 0. \end{aligned}$$

Die Formeln (A) bis (D) definiren zusammen eine *Polfläche;* es sind dabei durchaus auch die Formeln (D) nothwendig, weil sie erst besagen, dass

*) V. § 1, Nr. 2.

die $\xi\eta\zeta$ wirklich eine Verbiegung und nicht etwa irgend eine andere Transformation ergeben. Nur dann aber, wenn dies der Fall ist, definiren (A), (B), (C) eine Polfläche, die zu einer Verbiegung gehört.

Die Gleichungen (A), (B), (C) bestimmen übrigens $\alpha\beta\gamma$ wirklich; denn sie sind linear und ihre Determinante hat gerade den Werth

$$(z-c)-p(x-a)-q(y-b),$$

verschwindet also nur dann, wenn abc auf der Tangentialebene der Fläche liegt, welche zum Punkte xyz gehört. Da nun aber der Pol abc der Voraussetzung nach im Inneren der convexen Fläche liegt und demnach auf keiner Tangentialebene, so kann dieser Ausdruck niemals verschwinden.

§ 3.

Infinitesimale Bewegungen.

1. Verhalten der Polfläche bei einer inf. Bewegung.

Wir wollen zeigen, dass, wenn man zu einer gegebenen infinitesimalen Verbiegung eine inf. Bewegung hinzufügt, die zu der zusammengesetzten inf. Verbiegung gehörige Polfläche aus der zur ersten gehörigen durch Verschiebung entsteht. Der Satz, welcher sich übrigens schon durch eine geometrische Ueberlegung ergiebt, ist auch analytisch leicht zu beweisen.

Es seien etwa

$$\begin{aligned}\xi_1 &= ny - mz,\\ \eta_1 &= lz - nx,\\ \zeta_1 &= mx - ly\end{aligned}$$

diejenigen Gleichungen, welche die hinzukommende infinitesimale Bewegung definiren, so lauten die Formeln der Polfläche für die zusammengesetzte inf. Transformation so

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \alpha(x,y) + n\cdot b - m\cdot c = \alpha(x,y) + \alpha_0,\\ \bar{\beta} &= \beta(x,y) + l\cdot c - n\cdot a = \beta(x,y) + \beta_0,\\ \bar{\gamma} &= \gamma(x,y) + m\cdot a - l\cdot b = \gamma(x,y) + \gamma_0.\end{aligned}$$

Man erkennt die Richtigkeit dieser Formeln durch Substitution der berechneten Werthe in die Gleichungen (A), (B), (C), deren Lösungen ja eindeutig bestimmt sind. (Unter $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, $\gamma(x,y)$ sind natürlich die zu der ursprünglichen inf. Verbiegung gehörigen Werthe der Coordinaten der Polfläche verstanden).

Hiermit ist also der Satz bewiesen:

Fügt man zu einer inf. Verbiegung eine inf. Bewegung hinzu, so erhält man die zugehörige Polfläche durch Verschiebung der ersten Polfläche.

Hieraus folgt beispielsweise, dass wenn man das Verhalten der Polfläche in einem Punkt untersuchen will, es gestattet ist, zu der gegebenen inf. Verbiegung irgend eine inf. Bewegung hinzuzufügen; dadurch wird die Polfläche nur verschoben, und es ändert sich weder die Krümmung noch sonst eine bei Bewegungen invariante Eigenschaft.

Eine weitere Folgerung ist der folgende Satz:

Die zu einer inf. Bewegung gehörige Polfläche ist ein Punkt.

Ist nämlich die Bewegung etwa dargestellt durch

$$\begin{aligned} x_1 &= x + \varepsilon(ny - mz(x, y)), \\ y_1 &= y + \varepsilon(lz(x, y) - nx), \\ z_1 &= z + \varepsilon(mx - ly), \end{aligned}$$

so hat der betreffende Punkt die Coordinaten

$$\begin{aligned} \alpha &= nb - mc, \\ \beta &= lc - na, \\ \gamma &= ma - lb. \end{aligned}$$

2. Ist die Polfläche ein Punkt, so ist die Verbiegung eine Bewegung.

Es liegt nun sehr nahe zu vermuthen, dass auch die Umkehrung des soeben ausgesprochenen Satzes gilt: Man kann direct einen Fall angeben, wo ihre Gültigkeit evident ist. Wenn nämlich die zu verbiegende Fläche eine Kugel ist und als Pol der Mittelpunkt der Kugel gewählt wird; wenn ferner bei einer inf. Verbiegung dieser Pol wieder in einen Punkt übergeht, so ist klar, dass diese Verbiegung eine Bewegung sein muss.

Die Vermuthung bestätigt sich auch allgemein und es gilt der Satz:

Wenn die Polfläche eine inf. Verbiegung eines Ovaloïdes ein Punkt ist, so ist die Verbiegung eine Bewegung.

Der Beweis dieses Satzes selbst zerfällt wiederum in zwei Theile: wir weisen nämlich *erstens* nach, dass bei der gemachten Voraussetzung bei der inf. Verbiegung die Flächencalotte in jedem Punkte congruent bleibt, d. h. dass nicht nur (ausser dem Krümmungsmass) die mittlere Krümmung invariant bleibt, sondern auch der zu einem beliebigen Normalschnitt der Fläche gehörige Krümmungsradius. Benützt man den Begriff „Indicatrix" so kann man diese Beziehung so ausdrücken: Die Indicatrix bleibt nicht nur

*) Solche Verbiegungen, bei denen die mittlere Krümmung invariant ist, der zu einer bestimmten Richtung (zu einem Normalschnitt) gehörige Krümmungsradius sich aber doch ändert, sind sehr wohl bekannt (Bianchi, Flächentheorie. Deutsch von Lukat. Leipzig 1898, § 164, p. 309).

**) Bianchi, § 154, p, 103.

gleich (mit sich congruent), sondern sie dreht sich auch nicht auf der Fläche. Es ist dann *zweitens* nicht schwer hieraus zu schliessen, dass die Verbiegung nur eine Bewegung ist.

Beim Beweis des ersten Theiles unseres Satzes machen wir von einer Vereinfachung Gebrauch, welche ohne weiteres gestattet ist. Wir nehmen an, dass das Coordinatensystem zusammenfällt mit dem natürlichen Coordinatensystem*) in dem gerade betrachteten Punkt der Fläche, und wir denken uns ausserdem zu der betrachteten inf. Transformation eine solche Bewegung hinzugefügt, dass gerade der Coordinatenanfang, also der betrachtete Punkt fest bleibt. (Dies ist nach § 2, Nr. 3 erlaubt.)

Es sei nun etwa

$$z = \frac{\bar{a}x^2}{2} + \frac{\bar{b}y^2}{2} + \cdots$$

die Reihenentwickelung der Fläche in dem betrachteten Punkt, dann kann man zunächst bewirken, dass die Reihenentwickelung von ζ mit Gliedern zweiter Ordnung beginnt. (Würde ζ mit den Gliedern erster Ordnung beginnen $\zeta = \alpha x + \beta y + \cdots$, so würde man einfach die inf. Bewegung

$$\begin{aligned} x_1 &= x - \varepsilon\alpha\left(\frac{\bar{a}x^2 + \bar{b}y^2}{2}\right) + \cdots, \\ y_1 &= y - \varepsilon\beta\left(\frac{\bar{a}x^2 + \bar{b}y^2}{2}\right) + \cdots, \\ z_1 &= z - \varepsilon(\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

hinzufügen, wodurch die linearen Glieder fortfallen). Ebenso kann man bewirken, dass ξ und η mit Gliedern von nicht höherer als der zweiten Ordnung beginnen.**)

Die Gleichungen

$$(\mathrm{D}') \qquad \begin{aligned} &\xi_x + (\bar{a}x + \cdots)\zeta_x = 0, \\ &\eta_y + (\bar{b}y + \cdots)\zeta_y = 0, \\ &\xi_y + \eta_x + (\bar{a}x + \cdots)\zeta_y + (\bar{b}y + \cdots)\zeta_x = 0 \end{aligned}$$

lehren, dass dann ξ und η mit Gliedern dritter Ordnung beginnen.

Wenn also die Polfläche ein Punkt ist, so können wir — durch Hinzufügung einer geeigneten Bewegung, was nach § 3, Nr. 1 erlaubt ist — es erreichen, dass $\zeta = \zeta^{(2)} + \cdots$,

$$\xi = \xi^{(3)} + \cdots, \quad \eta = \eta^{(3)} + \cdots$$

wird, wo der obere Index die Glieder niedrigster Ordnung der betreffenden Reihenentwickelung bedeutet.

---

*) V. § 2, Nr. 1.

**) Vgl. die Anfänge der Reihenentwickelungen von ξ, η und ζ. (V. § 4, Nr. 3.)

Bei all diesen inf. Bewegungen, welche wir der gegebenen inf. Verbiegung hinzugefügt haben, hat sich der Punkt, welcher die Polfläche der Voraussetzung nach darstellt, nur verschoben (§ 3, Nr. 1) so dass $\alpha\beta\gamma$ neue *Constanten* werden, und wir wollen nun seine Lage berechnen, indem wir in (A), (B) und (C) für x und y die speciellen Werthe Null einsetzen. Dadurch bekommen wir

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma &= 0, \\ \alpha &= 0, \\ \beta &= 0. \end{aligned}$$

Also ist auch $\gamma = 0$; weil nämlich c von Null verschieden ist, es würde sonst gegen die Voraussetzung der Pol abc in der Tangentialebene des betrachteten Flächenpunktes liegen.

Daraus aber, dass $\alpha\beta\gamma$ alle drei verschwinden, folgt mit Hülfe von (B) und (C) wieder, dass

$$\zeta_x^{(2)} = 0 \quad \text{und} \quad \zeta_y^{(2)} = 0$$

ist. ζ beginnt also mit Gliedern von keiner niedrigeren als der dritten Ordnung, und demnach wegen (D′) ξ und η mit Gliedern von nicht niedrigerer als der vierten Ordnung.

Dieses Ergebniss nun, zu dem wir gelangt sind auf Grund der Annahme, dass die Polfläche ein Punkt ist, führt direct zum Ziel.

Wir können jetzt sofort zeigen, dass die einzelnen Krümmungsradien sich nicht geändert haben.

Es genügt, dies zu zeigen für zwei Normalschnitte, da wegen der Euler'schen Formel dann auch alle anderen Normalschnitte bei der Verbiegung ihre Krümmungsradien nicht ändern.

Dass nun in der That die Krümmungsradien sich nicht ändern, folgt eigentlich schon unmittelbar daraus, dass von den drei Functionen ξ, η und ζ keine mit Gliedern von niedrigerer als der dritten Ordnung beginnt. Immerhin wollen wir der Vollständigkeit halber den Werth des Krümmungsradius hinschreiben, welcher aus dem Krümmungsradius des Hauptschnittes $y = 0$ im Punkte $x = 0$ $y = 0$ bei der Verbiegung hervorgeht. Der Werth desselben ist

$$\frac{U^{\frac{3}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}},$$

wo

$$U = (p + \varepsilon\zeta_x)^2 + (1 + \varepsilon\xi_x)^2 + \varepsilon^2\eta_x^2$$

und

$$\begin{aligned} V = {} & ((1 + \varepsilon\xi_x)\,\varepsilon\eta_{xx} - \varepsilon\eta_x\,\varepsilon\xi_{xx})^2 \\ & + (\varepsilon\eta_x(r + \varepsilon\zeta_{xx}) - \varepsilon\eta_{xx}(p + \varepsilon\zeta_x))^2 \\ & + ((p + \varepsilon\zeta_x)\,\varepsilon\xi_{xx} - (1 + \varepsilon\xi_x)(r + \varepsilon\zeta_{xx}))^2. \end{aligned}$$

Hier bedeuten $pqrst$ in bekannter Weise die ersten und zweiten Differentialquotienten von z.

Für

$$x = y = 0$$

bleibt

$$U = 1,$$
$$V = \bar{a}^2$$

also

$$\frac{U^{\frac{3}{2}}}{V^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\bar{a}}.$$

Dies ist aber auch der Werth des Krümmungsradius vor der Verbiegung. Genau so kann man zeigen, dass auch der Werth des Krümmungsradius des anderen Hauptschnittes ungeändert bleibt, und damit alle andern.

Diese Betrachtung können wir mit demselben Ergebniss in jedem anderen Punkt der convexen Fläche anstellen, indem wir immer eine geeignete Bewegung zu der gegebenen Verbiegung hinzufügen, wodurch die Entscheidung, ob die gegebene Verbiegung eine Bewegung ist, ja nicht beeinflusst wird, sondern nur die Rechnung vereinfacht.

In der That also ist hiermit der Satz bewiesen:

Wenn die Polfläche sich auf einen Punkt reducirt, so bleiben die Krümmungsradien aller Normalschnitte ungeändert.

Hieraus folgt dann auch der zweite Theil des Satzes mit Leichtigkeit. Führen wir nämlich auf der Fläche ein bestimmtes krummliniges Coordinatensystem ein, wo das Quadrat des Bogenelementes bestimmt ist durch

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2, \text{*)}$$

verstehen wir ferner unter $D D' D''$ in bekannter Weise**) die *Gauss*'schen Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, so ist der Krümmungsradius desjenigen Normalschnittes, welcher die Fläche im Punkte uv in einer durch die Festsetzung $\frac{dv}{du} = v'$ bestimmten Richtung trifft, gegeben durch:

$$R = -\frac{E + 2Fv' + Gv'^2}{D + 2D v' + D'' v'^2}. \text{***)}$$

Da nun EFG bei der Verbiegung bekanntlich sich nicht ändern, da ferner R für dieselben Werthe von v' bei der verbogenen Fläche denselben Werth hat, so bleiben auch D, D', D'' ungeändert. Dann ist aber die Verbiegung nothwendig eine Bewegung†).

*) Bianchi § 33, p. 61.
**) Bianchi § 46, p. 87.
***) Bianchi § 53. p. 102.
†) Bianchi § 48, p. 92.

Also: Aus dem Umstand, dass die Polfläche ein Punkt ist, ergiebt sich mit Benützung des Satzes, dass man eine beliebige infinitesimale Bewegung hinzufügen darf, zunächst die Eigenschaft der Verbiegung, dass alle Normalschnitte ihre Krümmungsradien beibehalten und hieraus dann, dass die Verbiegung thatsächlich eine Bewegung ist.

Hiermit ist der zu Anfang ausgesprochene Satz bewiesen.

§ 4.

Die negative Krümmung der Polfläche. Folgerung.

1. Die negative Krümmung der Polfläche.

Wir wollen nun zeigen, dass die Polfläche, wenn sie sich nicht auf einen Punkt reducirt, überall negative Krümmung oder doch den Charakter der negativen Krümmung hat. Wir fügen nun wieder eine solche infinitesimale Bewegung hinzu (§ 3, 1), dass ζ mit Gliedern zweiter Ordnung, ξ und η mit Gliedern dritter Ordnung beginnen.

Dadurch erhalten wir für die Glieder niedrigster Ordnung von α, β und γ die Formeln

$$\alpha = c\zeta_x^{(m)} \text{ (aus } B),$$

$$\beta = c\zeta_y^{(m)} \text{ (aus } C),$$

$$\gamma = -\frac{1}{c}(a\alpha + b\beta).$$

Wenn also ζ mit Gliedern m^{ter} Ordnung beginnt, so wird die Polfläche dargestellt durch die obigen Reihenentwickelungen, von denen wir nur die Glieder niedrigster Ordnung hingeschrieben haben. Wenn $m = 2$ ist, so sehen wir, dass die Fläche eine bestimmte Tangentialebene hat

$$ax + by + cz = 0.$$

Diese Tangentialebene schneidet aber die Fläche, da die Form

$$a\alpha^{(2)} + b\beta^{(2)} + c\gamma^{(2)} = c\zeta^{(2)}$$

indefinit ist.*) Man erhält diese Relation für die Glieder zweiter Ordnung aus (A), wenn man berücksichtigt, dass $a\alpha^{(1)} + b\beta^{(1)} + c\gamma^{(1)} = 0$ angenommen ist. Aus dem Umstande, dass $\zeta^{(2)}$ bez. $a\alpha^{(2)} + b\beta^{(2)} + c\gamma^{(2)}$ indefinit ist, folgt aber eben, dass die Tangentialebene von der Polfläche geschnitten wird; d. h. dass dieselbe negative Krümmung hat.

Betrachten wir nun weiter die singulären Punkte, bei denen ζ mit Gliedern von dritter oder höherer Ordnung beginnt, so können wir in

*) V. § 4, Nr. 2.

diesen Punkten den Satz benützen, dass sowohl $\zeta_x^{(m)}$ wie $\zeta_y^{(m)}$ wie $\zeta^{(m)}$ immer eine indefinite Form ist.*)

Jede Form

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma = c\left(a_1\zeta_x^{(m)} + b_1\zeta_y^{(m)}\right) - \left(a a_1\zeta_x^{(m)} + b b_1\zeta_y^{(m)}\right)$$

ist daher ebenfalls indefinit,**) wenn nicht etwa $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ ist. Ist dies aber der Fall, so beginnt die Reihenentwickelung von

$$a\alpha + b\beta + c\gamma$$

mit dem Gliede

$$c\zeta^{(m)},$$

was indefinit ist.

Hieraus folgt, dass jede Ebene, welche durch den betrachteten Punkt der Polfläche hindurchgeht, die Polfläche schneidet.

Wir haben also, indem wir uns einer früher eingeführten***) Ausdrucksweise bedienen, den folgenden Satz erhalten:

Die Polfläche hat überall negative Krümmung oder doch den Charakter der negativen Krümmung.

2. Folgerung.

Der Voraussetzung nach sind $\xi\eta\zeta$ und daher auch $\alpha\beta\gamma$ analytische Functionen von x und y, die in dem betrachteten Bereich endlich bleiben. Die Polfläche ist also, wenn sie sich nicht auf einen Punkt reducirt, eine ganz im Endlichen gelegene Fläche negativer Krümmung. Eine solche Fläche giebt es aber nicht, die Polfläche muss sich also auf einen Punkt reduciren und demnach muss wegen § 3, Nr. 2 die Verbiegung eine Bewegung sein.

Damit ist der Beweis des aufgestellten Satzes vollendet:

Eine geschlossene convexe Fläche kann nicht verbogen werden. —

Der Beweis wurde hier unter denselben Voraussetzungen wie früher geführt, er ist indessen dadurch weit befriedigender, dass die Polfläche nur Punkte negativer Krümmung hat, und die Punkte seminegativer Krümmung überhaupt nicht auftreten.

Leipzig, im Januar 1900.

---

*) V. § 4, Nr. 3.

**) Da nämlich $\bar{a}\,\frac{\partial^2\zeta^{(m)}}{\partial x^2} + \bar{b}\,\frac{\partial^2\zeta^{(m)}}{\partial y^2} = 0$, so erfüllt auch $a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma$ diese Relation, ist also nach V. § 3, Nr. 4 indefinit.

***) V. § 2, Nr. 2.

Einiges über Functionen mit nicht-abzählbaren Unstetigkeitsstellen.

Von

T. Brodén in Lund.

Im Bande 51 der Math. Annalen, p. 299—320, habe ich durch eine gewisse Art unendlicher Producte reelle, punktirt unstetige Functionen dargestellt, welche an den Stetigkeitsstellen verschwinden, und deren Unstetigkeitsstellen überall dicht liegen, während die Mächtigkeit derselben entweder die erste oder diejenige des Continuums sein kann.

In den Göttinger Nachrichten 1899, p. 178, hat Herr Schoenflies (wie mir erst neulich bekannt wurde) behauptet, dass im letztgenannten Falle die Unstetigkeitsstellen zwar nicht abzählbar sind, aber nirgends dicht liegen. Wie ich nachher durch Herrn Schoenflies brieflich erfahren habe, beruht dieser Einwand auf einem Missverständnisse. Wenn es in meinem Aufsatze p. 302 heisst, x soll so gewählt werden, dass die dazu gehörenden ε_n unter einer endlichen Grenze bleiben, und nachher, dass man alle derartigen x-Werthe betrachten soll, so ist dies so zu verstehen, dass für jedes x der betrachteten Menge überhaupt eine (endliche) obere ε_n-Grenze angebbar sein soll (nicht aber dass man von vornherein eine *feste*, für alle Stellen der Menge geltende ε_n-Grenze bestimmen soll). Im Satze 2 (p. 304) und im Beweise desselben wird ebenso durch die Worte „von einem gewissen n an" kein fester n-Werth vorgeschrieben. Da die Sache so zu fassen ist, überzeugt man sich leicht, dass meine Beweisführung völlig richtig und bindend ist.

Hinsichtlich dieser Dinge kann übrigens folgendes bemerkt werden. Punktirt unstetige, endlich bleibende, eindeutige Functionen mit einer abzählbaren, überall dichten Menge von Unstetigkeiten (oder nach einer von mir benutzten Ausdrucksweise: eindeutige, endliche „limitäre" Functionen) überhaupt zu bilden, ist ein Leichtes: man setze z. B. fest, dass für alle rationalen x, welche in unverkürzbarer Form den Nenner n haben, die Function $f(x)=\frac{1}{n}$ sein soll $\left[\text{oder etwa } f(x)=\frac{(-1)^n}{n}\right]$, für alle irrationalen x dagegen $f(x)=0$. Dass es möglich sein sollte, derartige directe (nicht durch analytische Ausdrücke vermittelte) Constructionen auch für Functionen mit „überall nicht abzählbaren" Unstetigkeiten zu finden, war nicht zu bezweifeln. Indessen kommt, so viel ich weiss, ein Beispiel dieser Art in der Litteratur zum ersten Male eben in der obengenannten Note von Herrn Schoenflies vor. Sein Verfahren (l. c. p. 178) ist mit einiger Modification (s. gleich unten) das folgende: es bedeute G_n ($n \geqq 0$) die Menge aller Zahlen zwischen 0 und 1, bei deren Darstellung durch eine wirklich *unendliche* Reihe der Form

$$(1) \qquad \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_i}{3^i} + \cdots \qquad (a_i = 0, 1, 2)$$

von $i = n+1$ an a_i niemals $=2$ ist, während für $i \leqq n$ (mit Ausnahme für $n = 0$) a_n den Werth 2 hat; es sei ferner $g_0 > g_1 > g_2 > \cdots$ eine gegen Null convergirende Reihe positiver Grössen; für alle zu einer Menge G_n gehörenden x setze man $f(x) = g_n$; für diejenigen x, welche in keiner Menge G_n eingehen, sei dagegen $f(x) = 0$. Die so definirte Function $f(x)$ ist unstetig an allen G_n-Stellen, aber stetig an den Nullstellen, jedoch mit Ausnahme für diejenigen, deren entsprechende a_i-Reihen von einem gewissen (unbestimmten) i an *nur* Zweien enthalten, und welche daher auch durch *endliche* Reihen mit der Basis 3 darstellbar sind: jede solche Stelle ist nämlich Häufungsstelle für eine gewisse Menge G_n. In der That fügt Herr Schoenflies diese Stellen den Mengen G_n hinzu, und bewirkt dadurch, dass an allen Nullstellen Stetigkeit stattfindet.

In anderer Weise lassen sich Functionen der verlangten Art herstellen, wenn man, statt eine endliche Basis zu benutzen, von einer Darstellung ausgeht, bei welcher der Quotient successiver Nenner in infinitum wächst. Es sei also, wie in meinem obenerwähnten Aufsatze, p. 301, 302,

$$(2) \qquad \frac{\varepsilon_1}{k_1} + \frac{\varepsilon_2}{k_1 k_2} + \cdots + \frac{\varepsilon_n}{k_1 k_2 \cdots k_n} + \cdots$$

eine *unendliche* Reihe, wo die ganzen Zahlen k_n alle $\geqq 2$ sind, $\lim\limits_{n=\infty} k_n = \infty$, und die ganzen Zahlen ε_n der Bedingung $0 \leqq \varepsilon_n \leqq k_n - 1$ genügen. Wenn die Reihe $k_1, k_2, \cdots k_n \cdots$ gegeben ist, so lässt sich jede Zahl im Intervalle $0 \cdots 1$ (1 incl.) durch *eine* bestimmte Reihe dieser Art darstellen. Für alle x, bei denen die *grösste vorkommende Zahl* ε_n gleich p ist, sei $f(x) = \frac{1}{p}$ [oder allgemeiner $= g_p$, wo $\lim\limits_{p=\infty} g_p = 0$]; dagegen sei $f(x) = 0$, wenn in der zu x gehörenden ε-Reihe für die ε_n keine (endliche) obere Grenze existirt. Die Stellen der erstgenannten Art werden dann Unstetigkeitsstellen; an den Nullstellen findet dagegen Stetigkeit statt, mit Ausnahme für diejenigen, in deren ε-Reihe von irgend einem n an jedes $\varepsilon_n = k_n - 1$ ist, und welche daher auch durch *endliche* Reihen der Form (2) darstellbar sind. Wenn auch an diesen Stellen Stetigkeit erwünscht wird, setze man $f(x) = 1:p$ [bez. $f(x) = g_p$], wo p den grössten in der endlichen Reihe vorkommenden Werth von ε_n bedeutet. Unter dieser letzten Voraussetzung bilden die Stellen mit dem Functionenwerthe $1:p$ [bez. g_p] *perfecte* Mengen (wie auch bei der entsprechenden Form des Schoenflies'schen Beispieles).

In meinem erwähnten Aufsatze war das Hauptinteresse an eine gewisse Art analytischer Darstellung geknüpft. Hinsichtlich der Functionen mit abzählbaren Unstetigkeitsstellen war es hierbei durchaus nichts neues, dass sie überhaupt als Grenzfälle für analytische Functionen darstellbar sein sollten. Von Beispielen ähnlicher Art abgesehen, hatte ich (vgl. l. c. p. 299) sogar selbst vorher bewiesen, dass jede eindeutige, endliche „limitäre" Function in jener Weise darstellbar sein muss. Bei den Functionen mit nicht-abzählbaren Unstetigkeiten war es dagegen von grösserem Interesse zu sehen, dass überhaupt eine Annäherung der fraglichen Art möglich war (vgl. l. c. p. 300). Indessen hat vor Kurzem Herr R. Baire einen allgemeinen Satz aufgestellt, welcher diese Möglichkeit unmittelbar in sich schliesst. In einer Abhandlung*), welche wesentlich auf einer bemerkenswerthen functionentheoretischen Ausnutzung der Theorie der perfecten Mengen beruht, gelangt er nämlich nach einer ausführlichen Entwickelung zur folgenden einfachen Formulirung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Function durch eine wenigstens im Existenzbereiche der Function immer convergirende Reihe, deren Glieder stetige (bez. rationale) Functionen sind: die Function soll in Bezug auf jede perfecte Menge höchstens punktirt unstetig sein (l. c. p. 62; über die Bedeutung des Ausdruckes stetig bez. unstetig in Bezug auf eine perfecte Menge, s. p. 28).

Bei den oben ohne analytische Hilfsmittel definirten Functionen lässt es sich zeigen, dass diese Bedingung erfüllt ist, oder nicht, je nachdem die durch endliche Reihen der Form (1) bez. (2) darstellbaren x-Werthe zu den Mengen mit von Null verschiedenen Functionswerthen geführt werden, oder nicht. — Diese Beispiele sind übrigens nur Specialfälle eines weit allgemeineren Verfahrens, bei welchem successiv eingeführte perfecte Mengen benutzt werden**).

Lund, Januar 1900.

---

*) Sur les fonctions de variables réelles, Annali di Matematica, Ser. III, T. III (1899), p. 1—122.

**) Vgl. übrigens Schoenflies' inzwischen erschien. interessanten Bericht über Mengenlehre etc. (Anm. d. Verf. beim Corr.-Les., Okt. 1900).

Zur Theorie der algebraischen Körper.

Von

J. Wellstein aus Strassburg i. E.

Ist ξ irgend eine rationale Function zweier Veränderlicher x, y, die durch eine irreducible algebraische Gleichung mit einander verknüpft sind, so lässt sich stets eine rationale Function η von x, y so bestimmen, dass umgekehrt x und y sich als rationale Functionen von ξ, η darstellen lassen, während zwischen ξ und η eine algebraische irreducible Gleichung besteht.

Durch diesen bekannten Satz wird in dem von x, y erzeugten Körper Ω der Unterschied zwischen abhängigen und unabhängigen Veränderlichen völlig aufgehoben; denn wählt man irgend eine Function des Körpers als unabhängige Veränderliche, so sind alle anderen Grössen des Körpers davon algebraisch abhängig.

Ein ganz ähnlicher Satz gilt für die Körper Ω_d der algebraischen Functionen von d unabhängigen Veränderlichen; es ist daher der Versuch gerechtfertigt, den Körperbegriff so auszubilden, dass der Unterschied zwischen abhängigen und unabhängigen Veränderlichen insofern fortfällt, als alle veränderlichen Grössen des Körpers von vornherein als gleichberechtigt behandelt werden. Für Körper algebraischer Functionen einer unabhängigen Veränderlichen ist eine solche *„invariante"* Darstellung mittels der φ-Functionen seit langer Zeit bekannt,*) nur muss man den hyperelliptischen Fall ausschliessen. Die im Folgenden beabsichtigte Darstellung soll dagegen allgemein gültig sein und sich auch bewähren, wenn der Körper durch die φ-Relationen definirt ist.

Fügt man zu einer solchen „invarianten" Definition des Körperbegriffs die invariante Definition der Riemann'schen Fläche, wie sie im Falle

*) H. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin, Reimer, 1876. — J. f. Math. 88. — Ueber gewisse in der Th. der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle. Math. Ann. 13 — Vergl. M. Noether's Arbeiten in den Math. Ann. 7, 23, 26, 37, ferner für Ω_d, $d > 1$, Math. Ann. 2 und 8.

einer unabhängigen Veränderlichen — aber für beliebig viele gültig — von Dedekind und Weber*) angegeben worden ist, so wird der Wunsch nahe gelegt, den Punkten der invarianten Riemann'schen Fläche auch Primideale zuordnen zu können, die sich gegenüber allen birationalen Transformationen des Körpers als „invariant" verhalten, während die Dedekind-Weber'schen Ideale nur eine lineare Transformation der unabhängigen Variabeln vertragen.

Eine derartige „invariante" Definition des Idealbegriffs ist in der That möglich und vom Verfasser bereits im Sommer 1899 in einer Vorlesung verwerthet worden. Die „invarianten" Ideale lassen sich als algebraische Ausdrücke darstellen; sie entsprechen völlig den „Polygonen" der Herren Dedekind und Weber. Mit diesen Idealen beherrscht man vollkommen die Algebra des Riemann-Roch'schen Satzes und der Punktgruppen auf ebenen algebraischen Curven; auch die Wurzelformen werden zugänglich.

Es möge daher gestattet sein, die invariante Auffassung des Körperbegriffs hier in aller Kürze darzulegen. Die Zahlkörper werden mit umfasst, doch wird ihre Kenntniss, um Beispiele zu haben, vorausgesetzt. Die Hülfsmittel sind, wie in der erwähnten Idealtheorie, rein arithmetisch.**)

§ 1.

Der allgemeine Körperbegriff.

1. *Ein System von Grössen, die nicht sämmtlich Null sind, bildet einen Körper, wenn es so in sich abgeschlossen ist, dass durch die vier rationalen Reihenoperationen — mit Ausschluss der Divisionen durch Null — aus den Grössen des Systems nur Grössen des Systems hervorgehen****)

2. Ist α eine nicht identisch verschwindende Grösse eines Körpers Ω, so gehört nach dieser Begriffsbestimmung auch $1 = \alpha : \alpha$ zu Ω; aus der

*) J. f. Math. 92, § 14ff.

**) Daher könnten alle im Folgenden vorkommenden Gleichungen $f = 0$ durch Congruenzen Mod. f ersetzt werden, was nur wegen der Schwerfälligkeit des Ausdrucks vermieden worden ist. Indem wir uns auf rein rationale Begriffsbildungen beschränken, müssen wir insbesondere auch auf die Trennbarkeit der Wurzeln einer Gleichung $f(y) = 0$ verzichten, welche eine Veränderliche x enthält; wir müssen ferner den Differentialbegriff vermeiden, wodurch zwar manche Beweise etwas erschwert werden (vergl. unten XII und besonders XVI und XVIII), dafür aber eine grössere Einsicht in die Natur der auftretenden Probleme gewonnen wird.

***) Vergl. ausser den massgebenden Darstellungen des Köperbegriffs von Dedekind in Dirichlet's Vorlesungen über Zahlentheorie noch H. Weber, Algebra, 2. Aufl., 2. Band, IV. Buch, ferner den Bericht von Hilbert, ferner O. Pund, Algebra, Sammlung Schubert VI, § 98ff.; Kronecker, Festschrift, J. f. Math. 92.

ins lässt sich aber durch Addition und Subtraction, Multiplication und ivision der Körper $\mathfrak{R}(1)$ aller rationalen Zahlen ableiten. Dieser ist also : jedem anderen Körper als „Theiler" enthalten. Allgemein wird ein örper Θ ein *„Theiler"* eines Körpers Ω genannt, wenn alle Grössen des örpers Θ gleichzeitig dem Körper Ω angehören; Ω ist dann ein Körper *über"* Θ. Wenn ϑ ein Theiler von Θ, und Θ ein Theiler von Ω ist, so gen wir, Θ sei ein *„Theiler von Ω über ϑ"*. Umfassendere Theiler als :(1) eines Körpers Ω entstehen, wenn man aus Ω irgend welche Grössen , $\beta, \gamma, \cdots$ herausgreift und darauf die vier niederen Rechenoperationen ıwendet. Der so erzeugte Körper $\mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma, \cdots)$ der rationalen Verindungen der $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ ist dann offenbar ein Theiler von Ω.

3. *„Adjunction"* ist die Aufnahme irgend welcher Grössen in einen örper Ω, dem sie noch nicht angehörten.

4. Ein Körper, der nebst Zahlengrössen auch veränderliche, unbestimmt leibende Grössen enthält, wird ein *„Functionenkörper"* genannt; die verıderlichen Grösseu selber, gleichgültig, ob sie unabhängige Veränderliche der Functionen von solchen sind, heissen die *„Veränderlichen"* des Körpers; ie unveränderlichen*) Grössen des Körpers bilden für sich einen Körper, en wir mit $\mathfrak{Z}$ bezeichnen wollen. In Zahlenkörpern stehe das Zeichen $\mathfrak{Z}$ ir $\mathfrak{R}(1)$. *Von den Theilern der Functionenkörper sollen nur solche in etracht gezogen werden, die den Körper $\mathfrak{Z}$ enthalten*, wie ja auch jeder heiler eines Zahlenkörpers nach 2. den Körper $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}(1)$ enthält.

5. Wie in den Zahlenkörpern bietet sich auch in den Functionenörpern Veranlassung, *„Unbestimmten"*, d. h. dem Körper fremde, unbeimmt bleibende Parameter einzuführen und ganze rationale Functionen erselben zu bilden, deren Coefficienten dem Körper angehören. In einem unctionenkörper Ω dürfen diese ganzen Functionen nicht mit den zum örper gehörigen Functionen verwechselt werden, erstere nennen wir unctionen *„in"* Ω, letztere sind durch den Namen „Veränderliche" des örpers Ω davon unterschieden.

*Die ganzen Functionen in Ω heissen „reducibel" oder „irreducibel", jenachdem sie als Producte von mehreren ganzen Functionen in Ω darstellbar sind oder nicht. Die reducibeln lassen sich in eine endliche Zahl von irreducibeln Factoren zerlegen, die wiederum ganze Functionen und bis auf constante Factoren eindeutig bestimmt sind.***)

Die Zerlegbarkeit ganzer Functionen in einem Körper hängt von iesem völlig ab, kann also durch Adjunction neuer Grössen beeinflusst

*) Sie können aber selber unbestimmte Parameter sein, die nur bei den folgenen Betrachtungen wie bestimmte Zahlen behandelt werden sollen.

**) Vergl. etwa H. Weber, Algebra, 2. Aufl., 2. Bd., § 152.

werden. Da sich in den Functionenkörpern Ω zur Zeit das Interesse nur auf die *veränderlichen* Grössen richtet, durch deren Adjunction eine irreducible Function des Körpers reducibel werden könnte, *so denken wir uns den in Ω enthaltenen Zahlenkörper $\mathfrak{Z}$ von vornherein so umfangreich gewählt, dass durch Adjunction von Zahlen die Zerlegbarkeit nicht mehr beeinflusst werden kann.*

6. In Folge der unbeschränkten Ausführbarkeit der vier Species in Ω bestehen zwischen den Grössen von Ω unbegrenzt viele algebraische Gleichungen. Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ eines Körpers Ω, zwischen denen in $\mathfrak{Z}$ eine algebraische Gleichung mit nicht identisch verschwindenden Coefficienten besteht, nennen wir *„algebraisch abhängig von einander"*, im entgegengesetzten Falle algebraisch unabhängig, wobei unter Coefficienten die numerischen Factoren des nach Potenzenproducten der $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ *geordneten* Gleichungspolynoms verstanden sind.

Wir definiren*) jetzt:

*Ein Körper heisst ein „algebraischer" Körper, wenn zwischen Grössen desselben, die algebraisch von einander unabhängig sind, überhaupt keine Abhängigkeit besteht. In Functionenkörpern dürfen die Grössen des Körpers $\mathfrak{Z}$ als algebraisch von einander abhängig betrachtet werden***).

7. Eine Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \cdots, \gamma) = 0$$

zwischen Grössen des Körpers wird in diesem reducibel genannt, wenn die mit unbestimmten Parametern $u, v, \cdots, w$ gebildete ganze Function $F(u, v, \cdots, w)$ es ist.

Wenn in einem algebraischen Körper Ω zwischen allen Grössen, die eine reducible Gleichung erfüllen, auch eine irreducible Gleichung besteht, so gilt der Körper als irreducibel, sonst als reducibel.

Algebraische Zahlenkörper sind immer irreducibel, wenn die benutzten algebraischen Zahlen *bestimmte* Wurzeln algebraischer Gleichungen sind. Definirt man dagegen y als Function von x durch eine reducible algebraische Gleichung

$$A(x, y) \cdot B(x, y) = 0,$$

so sind die aus $A = 0$ hervorgehenden Zweige von y verschieden von den

*) Der hier gegebene Begriff des „algebraischen" Körpers ist also viel weiter als der sonst übliche, und geht erst in diesen über, wenn die weiter unten definirte Forderung der „Endlichkeit" erfüllt ist. Die Begriffe *algebraisch* und *endlich* sind also nicht, wie bei Dedekind, gleichbedeutend. Indem wir nicht-algebraische Abhängigkeiten ausschliessen, verhindern wir, dass in einem Körper neben einer Variabeln x etwa $\lg x$ oder e^x vorkommt.

**) Denn es hat keinen Zweck, transcendente Zahlen in $\mathfrak{Z}$ aufzunehmen.

aus B hervorgehenden. Da die Veränderlichen eines Körpers unbestimmt bleiben sollen (§ 1, 4.), und wir in einem Functionenkörper folglich nur dann sagen dürfen, zwischen x und y bestehe eine Gleichung $A = 0$, wenn diese vom unbestimmt bleibenden y, d. h. von *jedem* Zweige von y erfüllt wird, so würde im obigen Beispiel weder die Gleichung $A = 0$, noch die Gleichung $B = 0$ gelten. Der von x, y erzeugte Körper wäre also reducibel. Aus diesem Beispiel dürfte zugleich wohl hervorgehen, dass man in reducibeln Körpern schwerlich einfache Gesetze zu erwarten hat.*).

Es lassen sich auch für Functionenkörper ähnliche Verhältnisse wie in den Zahlenkörpern herbeiführen; man müsste dann aber die Trennbarkeit der Functionszweige voraussetzen, wobei eine Beeinträchtigung der Gleichwerthigkeit aller Veränderlichen wohl kaum zu vermeiden wäre. Es gilt jetzt der Satz:

Besteht zwischen Grössen eines irreducibeln Körpers eine reducible Gleichung, so muss einer der irreducibeln Factoren verschwinden.

8. Eine andere wichtige Eintheilung der Körper lässt sich auf die Theiler stützen. Ein Functionenkörper hat deren immer unendlich viele. Von besonderem Interesse sind nun solche Reihen

$$\Theta,\ \Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3, \cdots, \Omega$$

von Theilern eines Körpers, von denen jeder im folgenden enthalten ist; wir nennen sie „*Theilerketten*" über Θ. Eine Theilerkette**) ist „*lückenlos*", wenn sich zwischen ihre Glieder keine anderen mehr einschieben lassen. Wir definiren nun:

ein Körper ist „endlich", wenn er über jedem Theiler nur Theilerketten von endlicher Gliederzahl enthält.

Zur Untersuchung „*unendlicher*" Körper hat bis jetzt noch keine Veranlassung vorgelegen; ein Beispiel ist der Körper *aller* algebraischen Zahlen, der übrigens durchaus nicht ohne merkwürdige Eigenschaften ist, besonders, wenn man ihn mit transcendenten Zahlkörpern vergleicht. Aber jene

---

*) Das Verhältniss zwischen reducibeln und irreducibeln Zahlenkörpern ist besonders durch die Controverse zwischen Weierstrass und Dedekind über die aus n Haupteinheiten gebildeten höheren complexen Zahlen aufgeklärt worden (Gött. Nachr. 1884, 1885 und besonders 1887, S. 5). Das Wesen der reducibeln Körper kann demnach darin erblickt werden, dass in ihnen ein Product verschwinden kann, ohne dass ein Factor es thut; daher kann der Fall eintreten, dass eine algebraische Gleichung unendlich viele Wurzeln hat.

**) Ihnen entsprechen in der Gruppentheorie, deren Begriffsbildungen hier als Muster dienten, die „Compositionsreihen". Dem Jordan'schen Satze von der Invarianz der Indexreihe stellen wir den Satz VIII gegenüber.

vollendete Gesetzmässigkeit und Analogie mit dem natürlichen Zahlenbereich $\mathfrak{R}(1)$, die wir in den durch Adjunction einer oder mehrerer algebraischen Zahlen zu $\mathfrak{R}(1)$ erhaltenen Zahlenkörpern bewundern, findet sich ausschliesslich in den endlichen, algebraischen irreducibeln Körpern, zu denen auch jene Zahlenkörper gehören.

§ 2.

Algebraische Abhängigkeit.

1. Ist α eine Grösse eines endlichen, algebraischen Körpers Ω, so ist $\mathfrak{R}(\alpha)$ ein Theiler von Ω; kommt die Grösse β des Körpers Ω nicht in $\mathfrak{R}(\alpha)$ vor, so bildet $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ einen Theiler von Ω über $\mathfrak{R}(\alpha)$. Erschöpft $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ noch nicht den Körper Ω, so giebt es eine Grösse γ in Ω, die auch in $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$ nicht enthalten ist, und $\mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ ist ein Theiler von Ω über $\mathfrak{R}(\alpha, \beta)$, So fortfahrend erhält man eine Theilerkette

$$\mathfrak{R}(\alpha),\ \mathfrak{R}(\alpha, \beta),\ \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma), \cdots, \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma, \cdots, \omega)$$

über $\mathfrak{R}(\alpha)$, die wegen der Endlichkeit von Ω einmal mit einem Gliede $\mathfrak{R}(\alpha, \beta, \cdots, \omega)$ abbrechen muss, das mit Ω identisch ist. Der Körper Ω kann demnach aus einer endlichen Anzahl von Grössen $\alpha, \beta, \cdots, \omega$ abgeleitet werden, die aber nicht sämmtlich von einander algebraisch unabhängig sein werden. Wir definiren:

I. *Ein System von algebraisch unabhängigen Grössen eines algebraischen Körpers $\mathfrak{K}$ heisst „vollständig", wenn ihm keine Grösse des Körpers mehr hinzugefügt werden kann.*

Dann gilt also der Satz:

II. *Ein algebraischer, endlicher Körper Ω hat nur vollständige Systeme unabhängiger Grössen mit endlicher Gliederzahl.*

2. Wir werden daher zunächst solche algebraische Körper $\mathfrak{K}$ zu untersuchen haben, die mindestens ein vollständiges System

$$x_1, \cdots, x_r$$

algebraisch unabhängiger Grössen von endlicher Gliederzahl enthalten. Wie man mittels Elimination der $x_1, \cdots, x_r$ leicht beweist, hat dann jedes vollständige System nur eine endliche Zahl von Gliedern. Sind nämlich $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{r+1}$ durch die Gleichungen

$$\Phi_k(\xi_k, x_1, \cdots x_r) = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots, r+1)$$

als algebraische Functionen von $x_1, \cdots, x_r$ definirt, so eliminire man aus diesen $r+1$ Gleichungen die r Veränderlichen x. Ist die Eliminante nicht identisch Null, so liefert sie eine Gleichung zwischen den ξ, ist sie identisch Null, so müssen die ξ aus anderen Gründen von einander abhängig sein*). Zwischen $r+1$ algebraischen Functionen von r unabhängigen Veränderlichen besteht also immer mindestens eine Gleichung, und daraus folgt:

III. *enthält ein algebraischer Körper ein vollständiges System algebraisch unabhängiger Grössen von begrenzter Gliederzahl, so haben alle vollständigen Systeme endliche Gliederzahl, und zwar ist sie für alle Systeme die gleiche; sie bestimmt die „Dimension" des Körpers.*

IV. *Die endlichen algebraischen Körper haben demnach endliche Dimension.*

Dagegen sind algebraische Körper endlicher Dimension nicht nothwendig endliche Körper im Sinne des § 1, 8. So kommt z. B. dem Körper aller algebraischen Zahlen die Dimension Null zu, während er sicher unendliche Theilerketten enthält.

Wir werden uns daher die Aufgabe stellen müssen, zu ermitteln, unter welchen Bedingungen ein algebraischer Körper $\mathfrak{K}$ von endlicher Dimension endlich ist. Nach der in 1. gemachten Ueberlegung ist $\mathfrak{K}$ nur dann endlich, wenn es unmöglich ist, $\mathfrak{K}$ durch Adjunction von unendlich vielen Grössen über $\mathfrak{Z}$ aufzubauen. Es reicht jedoch, wie wir sehen werden, aus, wenn $\mathfrak{K}$ sich wenigstens auf eine Weise durch eine endliche Anzahl von Adjunctionen algebraischer Grössen aus $\mathfrak{Z}$ ableiten lässt. Zum Beweise sind noch einige Vorbereitungen nöthig.

§ 3.

Lineare Abhängigkeit.

1. Eine besondre Art algebraischer Unabhängigkeit ist die lineare.

V. *Beliebige Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ eines algebraischen Körpers $\mathfrak{K}$ heissen in einem Theiler Θ von $\mathfrak{K}$ „linear unabhängig von einander", wenn sie einer linearen und homogenen Gleichung*

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots = 0,$$

deren Coefficienten $a, b, c, \cdots$ dem Körper Θ angehören, nur so genügen können, dass $a, b, c, \cdots$, identisch verschwinden.

Ist ein System

$$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$$

in Θ linear unabhängiger Grössen von $\mathfrak{K}$ so vollständig, dass ihm keine mehr zugefügt werden kann, so wird es eine *Basis* von $\mathfrak{K}$ über Θ genannt. Ist k eine Grösse des Körpers $\mathfrak{K}$, so besteht demnach in Θ eine Gleichung

$$k = a\alpha + b\beta + \cdots + e\eta,$$

*) Das System $\Phi_k = 0$ ist nämlich von der Kronecker'schen „Stufe"
$(2r+1) - r = r+1$.

d. h. eine Gleichung, deren Coefficienten $a, b, \cdots, e$ dem Körper Θ angehören. Wir sagen, k sei durch die Basis in Θ darstellbar.

Diese Darstellung ist nur auf eine Art möglich.

Denn wäre in Θ auch

$$k = a'\alpha + b'\beta + \cdots + e'\eta,$$

so hätte man:

$$0 = (a-a')\alpha + (b-b')\beta + \cdots + (e-e')\eta,$$

also nach obiger Definition

$$a - a' = b - b' = \cdots = e - e' = 0.$$

2. Ein algebraischer Körper $\mathfrak{K}$ hat nicht über jedem Theiler eine „*endliche*", d. h. aus einer endlichen Zahl von Gliedern bestehende Basis. Ist aber Θ ein Theiler von $\mathfrak{K}$, über dem $\mathfrak{K}$ eine endliche Basis $k_1, k_2, \cdots, k_n$ hat, so gilt der Satz:

VI. *Die Anzahl der Glieder einer endlichen Basis eines algebraischen Körpers $\mathfrak{K}$ über einem Theiler Θ ist nur von $\mathfrak{K}$ und Θ abhängig, also für alle Basen von $\mathfrak{K}$ über Θ dieselbe, sie werde mit $(\mathfrak{K}/\Theta)$ bezeichnet und heisst die „Ordnung" von $\mathfrak{K}$ über Θ.*

Ist nämlich $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\nu$ eine zweite Basis, so würde man $k_1, \cdots, k_n$ durch sie in Θ darstellen können, und bekäme im Falle $\nu < n$ durch Elimination der λ lineare und homogene Beziehungen zwischen den k in Θ. Im Falle $n < \nu$ erhielte man in ähnlicher Weise lineare und homogene Gleichungen zwischen den λ in Θ. Also ist $\nu = n$. Wählt man n^2 Grössen $c_{\mu,\nu}$ in Θ so, dass ihre Determinante $|c_{\mu,\nu}|$ nicht identisch verschwindet, so bilden die n Grössen

$$\beta_\mu = c_{\mu,1} k_1 + c_{\mu,2} k_2 + \cdots + c_{\mu,n} k_n \qquad (\mu = 1, \cdots, n)$$

eine Basis von $\mathfrak{K}$ über Θ, denn es lassen sich umgekehrt die k in Θ durch die β darstellen. Aus einer Basis entspringen demnach unendlich viele.

§ 4.

Algebraische Körper von endlicher Dimension.

1. Um jetzt die in § 2 abgebrochene Untersuchung fortzuführen, nehmen wir an, der irreducible algebraische Körper $\mathfrak{K}$ gehe aus $\mathfrak{Z}$ hervor durch die endliche Theilerkette

$$\mathfrak{Z},\ \mathfrak{R}(\alpha; \mathfrak{Z}),\ \mathfrak{R}(\alpha, \beta; \mathfrak{Z}),\ \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \gamma; \mathfrak{Z}), \cdots, \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \cdots, \omega; \mathfrak{Z}) = \mathfrak{K}.$$

Von den Grössen $\alpha, \beta, \cdots, \omega$ seien r, die wir mit $x_1, x_2, \cdots, x_r$ bezeichnen, von einander algebraisch unabhängig, die übrigen, die wir $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\varrho$ nennen wollen, davon algebraisch abhängig. Dann genügt jedes ξ im

Körper $\mathfrak{R}(x) = \mathfrak{R}(x_1, \cdots, x_r)$ einer irreducibeln algebraischen Gleichung. Sei etwa

$$F_1(\overset{\varepsilon_1}{\xi_1}; x_1, \cdots, x_r) = 0$$

die Gleichung, der ξ_1 genügt, und ε_1 ihr Grad. Einer ähnlichen Gleichung genügt ξ_2; eliminirt man aus ihr und aus $F_1 = 0$ eines der x, so erhält man, je nach der Wahl des eliminirten x, verschiedene Gleichungen für ξ_2, die noch von ξ_1 abhängen, und es kann unter Umständen der Fall eintreten, dass der Grad dieser Gleichungen in ξ_2 niedriger ist als der der ursprünglichen. Sei also

$$F_2(\overset{\varepsilon_2}{\xi_2}; x_1, \cdots, x_r, \xi_1) = 0$$

die irreducible Gleichung, der ξ_2 in $\mathfrak{R}(x, \xi_1)$ genügt; und ebenso allgemein

$$F_\nu(\overset{\varepsilon_\nu}{\xi_\nu}; x_1, \cdots, x_r; \xi_1, \cdots, \xi_{\nu-1}) = 0 \qquad (\nu = 1, \cdots, \varrho)$$

die irreducible Gleichung von ξ_ν in $\mathfrak{R}(x, \xi_1, \cdots, \xi_{\nu-1})$. Jede Grösse φ des Körpers $\mathfrak{R}(x, \xi_1)$ ist dann darstellbar als Quotient $\varphi = \frac{A}{B}$ zweier rationaler ganzer Functionen von ξ_1 und $x_1, \cdots, x_r$, die wir von gemeinschaftlichen Factoren befreit denken. Da die Function B mit F_1 keinen von ξ_1 abhängigen Theiler gemeinsam haben kann, weil sie sonst verschwinden müsste, so lassen sich nach dem Euklid'schen Algorithmus des grössten gemeinschaftlichen Theilers zu B und F_1 zwei rationale ganze Functionen b und f_1 von ξ_1, deren Coefficienten von den x rational abhängen, so bestimmen, dass

$$Bb + F_1 f_1 = 1,$$

also, da $F_1 = 0$, dass

$$\varphi = Ab$$

wird. Dann geht also φ in eine ganze rationale Funktion von ξ_1 über, deren Grad in ξ_1 mittels der Gleichung $F_1 = 0$ mindestens auf $\varepsilon_1 - 1$ reducirt werden kann. Da aber $1, \xi_1, \cdots, \xi_1^{\varepsilon_1 - 1}$ wegen der Irreducibilität von $F_1 = 0$ im Körper $\mathfrak{R}(x)$ linear unabhängig sind, so folgt:

Die ε_1 Grössen $1, \xi_1, \xi_1^2, \cdots, \xi_1^{\varepsilon_1 - 1}$ bilden eine Basis von $\mathfrak{R}(x; \xi_1)$ über $\mathfrak{R}(x)$.

Ebenso ist dann

$1, \xi_\nu, \xi_\nu^2, \cdots, \xi_\nu^{\varepsilon_\nu - 1}$ eine Basis von $\mathfrak{R}(x; \xi_1, \cdots, \xi_{\nu-1}, \xi_\nu)$ über $\mathfrak{R}(x; \xi_1, \cdots, \xi_{\nu-1})$.

Ist also Φ eine Grösse des Körpers $\mathfrak{K} = \mathfrak{R}(x; \xi_1, \cdots, \xi_\varrho)$, so lässt sie sich in $\mathfrak{R}(x; \xi_1, \cdots, \xi_{\varrho-1})$ darstellen durch die Basis $1, \xi_\varrho, \xi_\varrho^2, \cdots, \xi_\varrho^{\varepsilon_\varrho - 1}$. Die Coefficienten lassen sich, als Grössen des Körpers $\mathfrak{R}(x; \xi_1, \cdots \xi_{\varrho-1})$, in $\mathfrak{R}(x; \xi_1, \cdots, \xi_{\varrho-2})$ darstellen durch die Basis $1, \xi_{\varrho-1}, \xi_{\varrho-1}^2, \cdots, \xi_{\varrho-1}^{\varepsilon_{\varrho-1} - 1}$;

die hierbei auftretenden Coefficienten kann man ebenso als Grössen des Körpers $\mathfrak{R}(x;\, \xi_1, \cdots, \xi_{\varrho-2})$, in $\mathfrak{R}(x;\, \xi_1, \cdots, \xi_{\varrho-3})$ darstellen durch die Basis $1, \xi_{\varrho-2}, \cdots, \xi_{\varrho-2}^{\varepsilon_{\varrho-2}-1}$, u. s. w. So erhält man Φ schliesslich als lineare homogene Function der

$$n = \varepsilon_1\, \varepsilon_2\, \varepsilon_3 \cdots \varepsilon_\varrho$$

Grössen

$$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) = \xi_1^{k_1}\, \xi_2^{k_2} \cdots \xi_\varrho^{k_\varrho} \qquad (k_\nu = 0, 1, \cdots, \varepsilon_{\nu-1};\ \nu = 1, \cdots, \varrho)$$

mit Coefficienten, die dem Körper $\mathfrak{R}(x)$ angehören. Bestände zwischen den $\omega_1, \cdots, \omega_n$ in $\mathfrak{R}(x)$ eine lineare, homogene Gleichung, so müsste sie durch F_ϱ theilbar sein, was unmöglich ist, da der Grad jener Gleichung in ξ_ϱ kleiner wäre als der von F_ϱ.

Folglich ist $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ eine Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{R}(x)$. Bedeutet $x_1', x_2', \cdots, x_r'$ ein anderes vollständiges System algebraisch unabhängiger Grössen des Körpers $\mathfrak{K}$, so giebt es sicher wenigstens eine endliche Theilerkette über $\mathfrak{R}(x') = \mathfrak{R}(x_1', \cdots, x_r')$; denn wenn man zu $\mathfrak{R}(x')$ nach einander $x_1, x_2, \cdots, x_r,\ \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\varrho$ fügt, erhält man sicher den Körper $\mathfrak{K}$, und wenn man in der Reihe

$$\mathfrak{R}(x'),\ \mathfrak{R}(x';\, x_1), \cdots, \mathfrak{R}(x';\, x_1, \cdots, x_r),\ \mathfrak{R}(x';\, x_1, \cdots, x_r, \xi_1), \cdots,$$
$$\mathfrak{R}(x';\, x_1, \cdots, x_r,\ \xi_1, \cdots, \xi_\varrho) = \mathfrak{K}$$

alle überflüssigen Glieder auslässt, bildet sie eine endliche Theilerkette über $\mathfrak{R}(x')$; folglich hat $\mathfrak{K}$ auch über $\mathfrak{R}(x')$ eine endliche Basis.

Bezeichnet man diejenigen Theiler eines algebraischen Körpers, die von je einem vollständigen System unabhängiger Variabeln erzeugt werden, als *„Einheitstheiler"*, so ergiebt sich aus unserer bisherigen Untersuchung das vorläufige Resultat:

VII. *Hat ein irreducibler algebraischer Körper $\mathfrak{K}$ von endlicher Dimension über einem Einheitstheiler eine endliche Theilerkette oder eine endliche Basis, so hat er über jedem Einheitstheiler eine endliche Basis.*

2. Jenachdem der irreducible algebraische Körper $\mathfrak{K}$ über einem Theiler Θ eine Basis hat oder nicht, nennen wir den Theiler einen *„vollkommenen"* oder *„unvollkommenen"*.*)

Dann folgt:

a) Alle Einheitstheiler von $\mathfrak{K}$ sind vollkommene Theiler.

Ist nun Θ ein Theiler von $\mathfrak{K}$, in dem kein Einheitstheiler enthalten ist, und $\alpha, \beta, \cdots, \zeta$ ein vollständiges System in Θ algebraisch unabhängiger

*) Nicht zu verwechseln sind damit die „echten" und „unechten" Theiler von $\mathfrak{K}$; ein echter Theiler von $\mathfrak{K}$ ist ein solcher, der nicht mit $\mathfrak{K}$ identisch ist.

Grössen, so ist dieses in $\mathfrak{K}$ nicht vollständig, kann aber durch eine endliche Zahl von Grössen $\eta, \theta, \cdots, \omega$ zu einem vollständigen ergänzt werden. Dann sind aber die Grössen $\eta, \eta^2, \cdots$ (ad inf.), $\theta, \theta^2, \cdots$ (ad inf.), $\cdots$ in Θ linear unabhängig, da sie von den Grössen des Körpers Θ algebraisch überhaupt nicht abhängen, d. h.:

b) Alle Theiler von $\mathfrak{K}$, die keinen Einheitstheiler enthalten, sind unvollkommene Theiler.

Da der Körper $\mathfrak{K}$ unter den Voraussetzungen des Satzes VII. über jedem Einheitstheiler E eine endliche Basis hat, so sind je $(\mathfrak{K}/E)+1$ Grössen des Körpers $\mathfrak{K}$ in E von einander linear abhängig, und der Körper $\mathfrak{K}$ hat über E überhaupt nur endliche Theilerketten Nehmen wir nun an, das System $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\varrho$ in 1. erzeuge eine lückenlose Theilerkette

$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}(E, \xi_1),\ \mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}(\mathfrak{R}_1, \xi_2),\ \mathfrak{R}_3 = \mathfrak{R}(\mathfrak{R}_2, \xi_3), \cdots, \mathfrak{R}_\varrho = \mathfrak{R}(\mathfrak{R}_{\varrho-1}, \xi_\varrho) = \mathfrak{K}$$

über E, so ist nicht nur

$$\xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} \cdots \xi_\alpha^{k_\alpha} \qquad (k_\nu = 0, 1, \cdots, \varepsilon_\nu - 1;\ \nu = 1, \cdots, \alpha)$$

eine Basis von $\mathfrak{R}_\alpha$ über E, sondern auch

$$\xi_{\alpha+1}^{k_{\alpha+1}} \xi_{\alpha+2}^{k_{\alpha+2}} \cdots \xi_\beta^{k_\beta} \qquad (1 < \alpha < \beta)$$

ein Basis von $\mathfrak{R}_\beta$ über $\mathfrak{R}_\alpha$, und

$$\xi_1^{k_1} \cdots \xi_\alpha^{k_\alpha} \xi_{\alpha+1}^{k_{\alpha+1}} \cdots \xi_\beta^{k_\beta}$$

eine Basis von $\mathfrak{R}_\beta$ über E, also:

$$(\mathfrak{R}_\beta/E) = k_{\alpha+1} \cdots k_\beta \cdot k_1 \cdots k_\alpha = (\mathfrak{R}_\beta/\mathfrak{R}_\alpha) \cdot (\mathfrak{R}_\alpha/E).$$

Es folgt:

c) Alle Theiler von $\mathfrak{K}$ über einem Einheitstheiler sind vollkommene Theiler,

sowie der Satz:

VIII. *Unter den Voraussetzungen des Satzes VII. hat der Körper $\mathfrak{K}$ über jedem vollkommenen Theiler nur endliche Theilerketten; ist*

$$\Theta, \Theta_1, \Theta_2, \cdots, \Theta_r, \mathfrak{K}$$

eine solche Kette, so ist:

$$(\mathfrak{K}/\Theta) = (\mathfrak{K}/\Theta_r)(\Theta_r/\Theta_{r-1}) \cdots (\Theta_2/\Theta_1)(\Theta_1/\Theta).$$

Aus a), b), c) entnehmen wir den Satz:

IX. *Unter den Voraussetzungen des Satzes VII sind alle Einheitstheiler und alle Theiler über ihnen vollkommene, alle Theiler unter ihnen aber unvollkommene Theiler.*

3. Wenn sich jetzt der Satz VIII dahin vervollständigen liesse, dass $\mathfrak{K}$ auch über jedem unvollkommenen Theiler nur endliche Theilerketten hat, so wäre $\mathfrak{K}$ ein endlicher Körper. Das ist in der That der Fall. Zum Beweise genügt es, wegen VIII., darzuthun, dass von jedem unvollkommenen Theiler Θ zu einem Einheitstheiler nur endliche Theilerketten führen. Ist $\alpha, \beta, \cdots, \zeta$ ein vollständiges System in Θ algebraisch unabhängiger Variabeln, so ist es in $\mathfrak{K}$ nicht vollständig, kann aber durch eine endliche Zahl von Grössen $\eta, \theta, \cdots, \omega$ zu einem vollständigen ergänzt werden. Der grösste Körper R, der über Θ in $\mathfrak{K}$ sich bilden lässt, ohne neue von $\alpha, \beta, \cdots, \zeta$ unabhängige Grössen aufzunehmen, umfasst alle Grössen des Körpers $\mathfrak{K}$, die sich als algebraische Functionen von $\alpha, \beta, \cdots, \zeta$ darstellen lassen. Sind $\varphi, \psi, \chi, \cdots$ derartige Functionen, und sind sie in Θ linear unabhängig, so sind sie es auch in $E = \mathfrak{R}(\alpha, \beta, \cdots, \zeta, \eta, \cdots, \omega)$. Da aber in E zwischen je $(\mathfrak{K}/E) + 1$ Grössen eine lineare und homogene Gleichung besteht, so können von den Grössen $\varphi, \psi, \chi, \cdots$ höchstens $(\mathfrak{K}/E)$ in Θ linear unabhängig sein. Also muss man von Θ aus höchstens nach $(\mathfrak{K}/E)$ Adjunctionen zu R gelangen und sieht sich dann, um weitere Theiler bilden zu können, genöthigt, eine Grösse η zu adjungiren, die von $\alpha, \cdots, \zeta$ algebraisch unabhängig ist. Nach höchstens $(\mathfrak{K}/E)$ Adjunctionen gelangt man von hier aus zum Körper aller algebraischen Functionen von $\alpha, \cdots, \zeta, \eta$ in $\mathfrak{K}$; u. s. w. Schliesslich muss man noch ω adjungiren, und dann tritt VIII. in Kraft. Damit ist der wichtige Satz bewiesen:

X. *Hat ein irreducibler algebraischer Körper von endlicher Dimension über einem Einheitstheiler eine endliche Basis oder eine endliche Theilerkette, so ist er ein endlicher Körper.*

4. Aus Satz VIII. ergiebt sich, inwiefern wir berechtigt waren, die von den vollständigen Systemen unabhängiger Grössen erzeugten Theiler als Einheitstheiler zu bezeichnen. Will man nämlich die in den Zahlenkörpern übliche Begriffsbildung der „*Primtheiler*“ auf die allgemeinen Körper übertragen, so muss man offenbar definiren: Ein Körper heisst ein „*Primkörper*“, wenn er nur sich selbst und Einheitskörper zu Theilern hat; bei Zahlenkörpern reduciren sich die Einheitskörper auf $\mathfrak{Z} = \mathfrak{R}(1)$; ein Primtheiler eines algebraischen Körpers $\mathfrak{K}$ ist dann ein solcher Theiler, der einen Primkörper bildet. Ist E ein Einheitskörper in einem algebraischen Körper $\mathfrak{K}$, und $(\mathfrak{K}/E)$ eine Primzahl, so ist $\mathfrak{K}$ nach VIII. sicher ein Primkörper.

§ 5.

Primitive Grössen.

1. Aus Satz X. geht hervor, dass ein endlicher irreducibler algebraischer Körper Ω unter Anderem bestimmt werden kann als Inbegriff aller rationalen Functionen gewisser Grössen $\xi, x_1, x_2, \cdots, x_r$, wenn ξ durch eine irreducible Gleichung

$$F(\xi, x_1, \cdots, x_r) = 0$$

als algebraische Function von $x_1, \cdots, x_r$ definirt wird. Wir können jetzt zeigen, dass auf diese Weise jeder endliche Körper bestimmt werden kann.

Sei Θ ein vollkommener Theiler eines irreducibeln endlichen algebraischen Körpers Ω, und $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ eine Basis von Ω über Θ. Dann sind je $n+1$ Grössen des Körpers Ω in Θ linear abhängig; eine Grösse η des Körpers Ω, von der n auf einander folgenden Potenzen in Θ linear unabhängig sind, heisst eine „*primitive*" Grösse des Körpers $\mathfrak{K}$ über Θ. Jene n Potenzen von η bilden dann eine Basis von Ω über Θ, woraus folgt, dass u. A. auch $1, \eta, \cdots, \eta^{n-1}$ eine Basis ist. Wir behaupten nun:

XI. *Ein endlicher, irreducibler, algebraischer Körper hat über jedem vollkommenen Theiler unendlich viele primitive Grössen.*

2. Bildet man nämlich mit unbestimmten Coefficienten $u_1, \cdots, u_n$ den Ausdruck

$$U = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n,$$

so kann man in Θ setzen:

$$U\omega_k = u_{k,1}\omega_1 + u_{k,2}\omega_2 + \cdots + u_{k,n}\omega_n, \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

wo die $u_{k,l}$ lineare homogene Functionen der u sind, deren Coefficienten dem Körper Θ angehören. Durch Elimination der ω ergiebt sich aus diesen Gleichungen eine Gleichung n^{ten} Grades für U. Ist sie reducibel, so sei

$$F(U) = aU^\nu + a_1 U^{\nu-1} + \cdots + a_\nu = 0$$

die irreducible Gleichung, der U in Ω genügt. Die Coefficienten dürfen wir als ganze (homogene) Functionen der u voraussetzen:

$$a_i = a_i(u_1, u_2, \cdots, u_n) = a_i(u).$$

Setzt man, ebenfalls mit unbestimmten Coefficienten,

$$V = v_1\omega_1 + v_2\omega_2 + \cdots + v_n\omega_n,$$

so ist:

$$F(V) = \sum_i a_i(v_1, \cdots, v_n) V^{\nu-i} = 0, \qquad (i = 0, 1, \cdots, \nu)$$

folglich:

$$\sum_i a_i(u_1, \cdots, u_n)(U^{\nu-i} - V^{\nu-i}) + \sum_i [a_i(u_1, \cdots, u_n) - a_i(v_1, \cdots, v_n)] V^{\nu-i} = 0.$$

Nun ist einerseits

$$\sum_i a_i(u_1, \cdots, u_n)\,(U^{\nu-i} - V^{\nu-i}) = (U-V)\Phi,$$

wo

$$\Phi = a_0(u)\,[U^{\nu-1} + U^{\nu-2}V + \cdots + V^{\nu-1}]$$
$$+ a_1(u)\,[U^{\nu-2} + U^{\nu-3}V + \cdots + V^{\nu-2}] + \cdots + a_{\nu-1}(u);$$

andererseits ist

$$a_i(u) - a_i(v) = [a_i(u_1, u_2, \cdots, u_n) - a_i(v_1, u_2, \cdots, u_n)]$$
$$+ [a_i(v_1, u_2, \cdots, u_n) - a_i(v_1, v_2, \cdots, u_n)] + \cdots$$
$$+ [a_i(v_1, v_2, \cdots, u_n) - a_i(v_1, v_2, \cdots, v_n)].$$

Hier sind die eckigen Klammern bez. durch die Differenzen

$$\delta_1 = u_1 - v_1,\ \delta_2 = u_2 - v_2, \cdots, \delta_n = u_n - v_n$$

theilbar, und man kann durch Ausführung dieser Divisionen $a_i(u) - a_i(v)$ auf die Form

$$a_i(u) - a_i(v) = c_{i,1}(u, v)\delta_1 + c_{i,2}(u, v)\delta_2 + \cdots + c_{i,n}(u, v)\delta_n$$

bringen, wo auch die c ganze Functionen der u, v sind. **Also hat man:**

$$[\omega_1\delta_1 + \cdots + \omega_n\delta_n]\Phi + \sum_i [c_{i,1}(u, v)\delta_1 + \cdots + c_{i,n}(u, v)\delta_n]\,V^{\nu-i} = 0.$$

Setzt man jetzt alle u gleich den entsprechenden v mit Ausnahme von u_k und v_k, also $\delta_k \neq 0$ und alle anderen δ gleich Null, so wird

$$\Phi\,\omega_k\delta_k + \delta_k \sum_i c_{i,k}(u, v)\,V^{\nu-i} = 0,$$

also:

$$\Phi\,\omega_k + \sum_i c_{i,k}(u, v)\,V^{\nu-i} = 0.$$

Lassen wir jetzt auch noch u_k mit v_k zusammenfallen, so geht Φ über in

$$F'(U) = \nu a_0(u)\,U^{\nu-1} + (\nu-1)a_1(u)\,U^{\nu-2} + \cdots + a_{\nu-1}(u),$$

und es wird

$$F'(U)\,\omega_k + \sum_i c_{i,k}(u, u)\,U^{\nu-i} = 0.$$

Hier bedeutet, wie man sieht, $F'(U)$ die partielle Derivirte von $F(U)$ nach U, und die vorangegangene Untersuchung hätte mit Hülfe der Differentialrechnung sich weit kürzer gestaltet.*) Es wäre dann aber die Thatsache nicht so deutlich hervorgetreten, dass es sich hier um rationale

*) Vergl. den Beweis bei O. Pund, l. c. S. 292, im Falle $n = 2$.

rein arithmetische Vorgänge handelt. Da $F(U) = 0$ irreducibel ist, so kann $F'(U)$ nicht identisch Null sein, weil sonst $F'(U)$ durch $F(U)$ theilbar sein müsste, was wegen des zu niedrigen Grades von $F'(U)$ in U nicht möglich ist. Mithin kann man zu $F(U)$, $F'(U)$ ganze Functionen $\varphi(U)$, $\psi(U)$ so bestimmen, dass

$$F(U)\,\varphi(U) - F'(U)\,\psi(U) = 1$$

also, da $F(U) = 0$ ist, dass:

$$\omega_k = -\frac{1}{F'(U)} \sum_i c_{i,k}(u, u)\, U^{\nu-i} = \psi(U) \sum_i c_{i,k}\, U^{\nu-i}$$

wird.

Das ist eine ganze Function von U, deren Coefficienten dem Körper Θ angehören. Da diese Function ihrem Reste Modulo $F(U)$ gleich ist, so lässt ω_k sich darstellen als lineare homogene Function von $1, U, \cdots, U^{\nu-1}$ in dem durch Aufnahme von $u_1, \cdots, u_n$ erweiterten Körper Θ. Dies gilt für $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$. Folglich ist $1, U, \cdots, U^{\nu-1}$ eine Basis von Ω über Θ, und daher $\nu = n$, d. h.

XII. *Ist $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ eine Basis eines irreducibeln endlichen algebraischen Körpers Ω über einen Theiler Θ, und nimmt man in $\mathfrak{Z}$ die unbestimmten Coefficienten $u_1, \cdots, u_n$ auf, so ist*

$$U = u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \cdots + u_n\omega_n$$

eine primitive Grösse von Ω über Θ.

Nun kann man aber auf unendlich viele Weisen den u solche bestimmte, einem vorgeschriebenen Körper angehörige Werthe beilegen, dass $F'(U)$ nicht identisch verschwindet, und die Gleichung

$$F'(U)\,\omega_k + \sum_i c_{i,k}(u, u)\, U^{\nu-i} = 0$$

für ω_k mithin nicht illusorisch wird. Dann geht U über in eine primitive Grösse von Ω über Θ, und damit ist der Satz XI. bewiesen.

3. Wir haben jetzt die Mittel zur Hand, den in der Einleitung erwähnten Satz über die birationalen Transformationen in Ω zu beweisen; er ist ein besonderer Fall des Satzes XI. und lässt sich so aussprechen:

XIII. *Ist y durch eine irreducible Gleichung als eine algebraische Function der unabhängigen Veränderlichen $x_1, \cdots, x_r$ definirt, und wählt man irgend welche algebraisch von einander unabhängige rationale Functionen*

$$\xi_\varrho = \varphi_\varrho(y;\, x_1, \cdots, x_r), \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$

von $y, x_1, \cdots, x_r$ aus, so lässt sich stets auf unendlich viele Weisen zu ihnen eine ebenfalls rationale Function

$$\eta = \varphi(y;\, x_1, \cdots x_r)$$

so bestimmen, dass sich umgekehrt $y, x_1, \cdots, x_r$ *als rationale Functionen*

$$x_\varrho = \psi_\varrho(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_r), \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r)$$
$$y = \psi\,(\eta, \xi_1, \cdots, \xi_r)$$

von $\eta, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$ *darstellen lassen. Auch ist* η *mit* $\xi_1, \cdots, \xi_r$ *durch eine algebraische Gleichung verknüpft.*

Es bestimmt nämlich $y, x_1, \cdots, x_r$ einen irreducibeln Körper, von dem sowohl $\mathfrak{R}(x_1, \cdots, x_r)$ als auch $\mathfrak{R}(\xi_1, \cdots, \xi_r)$ ein vollkommener Theiler ist, und nun tritt Satz XI. in Kraft.

§ 6.

Norm, Spur, Discriminante.*)

1. Bezeichne Ω einen irreducibeln algebraischen endlichen Körper, A einen vollkommenen Theiler von Ω, und B einen Theiler über A, ferner sei

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ eine Basis von B über A,

$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ „ „ „ Ω „ B.

Dann ist

$$(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = \alpha_\varrho \beta_\sigma \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r;\ \sigma = 1, 2, \cdots, s;\ rs = n)$$

eine Basis von Ω über A. Ist ω irgend eine Grösse des Körpers Ω, so kann man in A setzen:

$$\omega\gamma_\nu = c_{\nu,1}\gamma_1 + c_{\nu,2}\gamma_2 + \cdots + c_{\nu,n}\gamma_n \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Durch Elimination der γ ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$(-1)^n\varphi(\omega) = \begin{vmatrix} c_{1,1} - \omega, & c_{1,2}, & \cdots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2} - \omega, & \cdots, & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \cdots, & c_{n,n} - \omega \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$\varphi(\omega) = \omega^n - a_1\omega^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n = 0,$$

deren Coefficienten $a_1, \cdots, a_n$ dem Körper A angehören und, wie man leicht auf Grund des Multiplicationssatzes der Determinanten beweist, von der gewählten Basis über A nicht abhängen. Sie sind also für ω charakteristische Grössen in Ω über A. Von ihnen sind a_1 und a_n besonders wichtig. Man bezeichnet sie als „Spur" und „Norm" von ω in Ω über A, und schreibt:

*) Diese Begriffe sollen hier anhangsweise nur soweit entwickelt werden, dass die Beziehungen zu den Theilern ersichtlich werden; für das Uebrige kann die Darstellung bei Dedekind und Weber, Crelle 92, fast wörtlich herübergenommen werden

$$\mathfrak{S}_{\Omega/A}(\omega) = a_1 = c_{1,1} + c_{2,2} + \cdots + c_{n,n},$$
$$\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega) = a_n = |c_{\mu,\nu}| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n).$$

2. Sind ω, ω' irgend welche Grössen des Körpers Ω, und a, a' speciell Grössen von A, so beweist man leicht rein arithmetisch folgende Beziehungen:

$$\text{XIV.} \quad \mathfrak{S}_{\Omega/A}(0) = 0, \quad \mathfrak{S}_{\Omega/A}(1) = (\Omega/\mathsf{A}) = n,$$
$$\mathfrak{S}_{\Omega/A}(a\omega) = a\mathfrak{S}_{\Omega/A}(\omega), \quad \mathfrak{S}_{\Omega/A}(a\omega + a'\omega') = a\mathfrak{S}_{\Omega/A}(\omega) + a'\mathfrak{S}_{\Omega/A}(\omega').$$
$$\text{XV.} \quad \mathfrak{N}_{\Omega/A}(a) = a^{(\Omega/A)}, \quad \mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega\omega') = \mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega)\,\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega'),$$
$$\mathfrak{N}_{\Omega/A}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right) = \frac{\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega)}{\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega')}.$$

Die einzige Grösse, deren Norm identisch verschwindet, ist die Null.

3. Ist jetzt ω irgend eine Grösse des Körpers Ω, so können wir die s Producte $\omega\beta_\sigma$ in B mittels der Basis $\beta_1, \cdots, \beta_s$ darstellen:

$$\text{(1)} \qquad \omega\beta_\sigma = b_{\sigma,1}\beta_1 + b_{\sigma,2}\beta_2 + \cdots + b_{\sigma,s}b_s, \qquad (\sigma = 1, 2, \cdots, s).$$

Dann ist

$$|b_{\sigma,\sigma'} - \delta_{\sigma,\sigma'}\omega| = (-1)^s f(\omega) = (-1)^s(\omega^s - b_1\omega^{s-1} + \cdots + (-1)^s b_s) = 0,$$
$$(\sigma, \sigma' = 1, 2, \cdots, s; \ \delta_{\sigma,\sigma} = 1, \ \delta_{\sigma,\sigma'} = 0 \text{ für } \sigma' \gtrless \sigma)$$

und

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{N}_{\Omega/B}(\omega) = |b_{\sigma,\sigma'}| = b_s.$$

Die b_σ lassen sich als Grössen des Körpers B in A mittels der Basis $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ darstellen. Sei

$$\text{(3)} \qquad (-1)^\sigma b_\sigma \alpha_\varrho = a^{(\sigma)}_{\varrho,1}\alpha_1 + \cdots + a^{(\sigma)}_{\varrho,r}\alpha_r, \qquad (\varrho = 1, 2, \cdots, r).$$

Da

$$\omega(\omega^{s-1} - b_1\omega^{s-2} + \cdots + (-1)^{s-1}b_{s-1}) + (-1)^s b_s = 0,$$

so folgt, wenn man mit α_ϱ multiplicirt:

$$\left(\omega\varphi_{\varrho,1} + a^{(s)}_{\varrho,1}\right)\alpha_1 + \left(\omega\varphi_{\varrho,2} + a^{(s)}_{\varrho,2}\right)\alpha_2 + \cdots + \left(\omega\varphi_{\varrho,r} + a^{(s)}_{\varrho,r}\right)\alpha_r = 0,$$

wo

$$\varphi_{\varrho,\varrho'} = \omega^{s-1}\delta_{\varrho,\varrho'} + \sum_{\sigma=1}^{s-1} a^{(\sigma)}_{\varrho,\varrho'}\omega^{s-1-\sigma};$$

daher:

$$\left|\omega\varphi_{\varrho,\varrho'} + a^{(s)}_{\varrho,\varrho'}\right| = 0 \qquad (\varrho, \varrho' = 1, 2, \cdots, r),$$

oder entwickelt:

$$\text{(4)} \qquad \omega^n - \mathsf{A}_1\omega^{n-1} + \cdots + (-1)^n\mathsf{A}_n = 0, \qquad (n = sr),$$

wo

$$(-1)^n \mathsf{A}_n = \left| a^{(s)}_{\varrho,\varrho'} \right| = \mathfrak{N}_{B/A}\left((-1)^s b_s\right) = (-1)^{sr}\,\mathfrak{N}_{B/A}\left(b_s\right),$$

also

(5) $$\mathsf{A}_n = \mathfrak{N}_{B/A}(b_s) = \mathfrak{N}_{B/A}\,\mathfrak{N}_{\Omega/B}(\omega),$$

was aus (3) und (2) leicht zu ersehen ist. Wenn nun ω eine primitive Grösse über A ist, so ist die Gleichung (4) irreducibel, daher mit der in 1. abgeleiteten identisch, also $a_n = \mathsf{A}_n$ oder

(6) $$\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega) = \mathfrak{N}_{B/A}\,\mathfrak{N}_{\Omega/B}(\omega).$$

Gehört dagegen ω dem Körper B an, und ist in A:

$$\omega\alpha_\varrho = a_{\varrho,1}\alpha_1 + \cdots + a_{\varrho,r}\alpha_r,$$

so ist

$$\mathfrak{N}_{B/A}(\omega) = |a_{\varrho,\varrho'}|, \qquad (\varrho,\varrho' = 1,2,\cdots,r),$$

also

$$\omega\,\alpha_\varrho\beta_\sigma = a_{\varrho,1}\alpha_1\beta_\sigma + \cdots + a_{\varrho,r}\alpha_r\beta_\sigma,$$

oder wenn man

$$\alpha_\varrho\beta_\sigma = \gamma_{\varrho+r(\sigma-1)}$$

setzt:

$$\omega\cdot\gamma_{\varrho+r(\sigma-1)} = \sum_{\varrho'} a_{\varrho,\varrho'}\,\gamma_{\varrho'+r(\sigma-1)}.$$

Ausführlicher ist:

$$\begin{array}{lll}
\omega\gamma_\varrho & = \sum_{\varrho'} a_{\varrho,\varrho'}\gamma_{\varrho'} & \\
\omega\gamma_{r+\varrho} & = & \sum_{\varrho'} a_{\varrho,\varrho'}\gamma_{r+\varrho'} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\omega\gamma_{r(s-1)+\varrho} & = & \qquad\sum_{\varrho'} a_{\varrho,\varrho'}\gamma_{r(s-1)+\varrho'}
\end{array}$$

$$(\varrho = 1,2,\cdots,r).$$

Daher:

(7) $$\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega) = |a_{\varrho,\varrho'}|^s = (\mathfrak{N}_{B/A}(\omega))^s = \mathfrak{N}_{B/A}(\omega^s).$$

Nach XV. ist aber

$$\mathfrak{N}_{\Omega/B}(\omega) = \omega_{(\Omega/B)} = \omega^s,$$

also:

$$\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega) = \mathfrak{N}_{B/A}\,\mathfrak{N}_{\Omega/B}(\omega),$$

übereinstimmend mit (6). Ist die Theilerkette A, B, Ω lückenlos, so gilt demnach die Formel (6) für jede Grösse des Körpers Ω. Daraus folgt sofort allgemein:

XVI. *Ist ω eine Grösse des Körpers Ω, und*

$$A,\ B,\ C,\cdots,S,\ T,\ \Omega$$

eine Theilerkette über einem vollkommenen Theiler A, so ist:

$$\mathfrak{N}_{\Omega/A}(\omega) = \mathfrak{N}_{B/A}\,\mathfrak{N}_{C/B}\cdots\mathfrak{N}_{T/S}\,\mathfrak{N}_{\Omega/T}(\omega).$$

4. Geht man von den Formeln

$$\omega\,\gamma_\nu = c_{\nu,1}\gamma_1 + \cdots + c_{\nu,n}\gamma_n$$

in 1. aus, welche zu der Gleichung

$$(-1)^n\varphi(\omega) = |c_{\nu,\nu'} - \delta_{\nu,\nu'}\omega| = (-1)^n(\omega^n - a_1\omega^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_n) = 0$$

führen und ist t ein unbestimmter Parameter, so findet man leicht

$$\varphi(t) = \mathfrak{N}_{\Omega/A}(t-\omega).$$

Ist die Gleichung $\varphi(\omega) = 0$ reducibel, so ist ω eine primitive Grösse eines Körpers B über A, der ein Theiler von Ω, aber nicht mit Ω identisch ist. Nach XV. und XVI. ist dann

$$\varphi(t) = \mathfrak{N}_{\Omega/A}(t-\omega) = \mathfrak{N}_{B/A}\,\mathfrak{N}_{\Omega/B}(t-\omega) = \mathfrak{N}_{B/A}((t-\omega)^{(\Omega/B)}),$$

$$\varphi(t) = (\mathfrak{N}_{B/A}(t-\omega))^{(\Omega/B)} = \psi(t)^{(\Omega/B)},$$

wo

$$\psi(t) = \mathfrak{N}_{B/A}(t-\omega).$$

Daraus folgt:

XVII. *Ist t ein Parameter, ω eine Grösse von Ω und setzt man*

$$\mathfrak{N}_{\Omega/A}(t-\omega) = \varphi(t),$$

so genügt ω der Gleichung

$$\varphi(\omega) = 0,$$

$\varphi(t)$ ist entweder in A irreducibel oder eine ganze Potenz einer in A irreducibeln Function.

Es folgt weiter:

XVIII. *ist ω eine Grösse des Körpers Ω, und*

$$A, B, C, \cdots, S, T, \Omega$$

eine Theilerkette über einem echten Theiler A, so ist:

$$\mathfrak{S}_{\Omega/A}(\omega) = \mathfrak{S}_{B/A}\,\mathfrak{S}_{C/B}\cdots\mathfrak{S}_{T/S}\,\mathfrak{S}_{\Omega/T}(\omega).$$

Der Beweis kann leicht aus den Formeln des Art. 3 entnommen werden.

5. Ist $(B/A) = r$ und $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ ein System von r Grössen von B, gleichgültig, ob sie eine Basis von B über A bilden oder nicht, so ist

$$\Delta_{B/A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r) = |\mathfrak{S}_{B/A}(\alpha_\varrho\alpha_{\varrho'})|, \qquad (\varrho, \varrho' = 1, 2, \cdots, r)$$

ein Grösse in A, die wir als „*Discriminante*" des Systems $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ in B über A nennen. Ueber die Discriminante lassen sich die beiden fundamentalen Sätze XIX. und XX. aussagen, deren Beweis genau wie bei Dedekind u. Weber, Crelle's J. 92, S, 189—190 zu führen ist:

XIX. *Die Discriminante* $\Delta_{B/A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$ *ist dann und nur dann nicht identisch Null, wenn* $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ *eine Basis von* B *über* A *ist.*

XX. *Ist* $\alpha_1', \cdots \alpha_r'$ *ein System von Grössen des Körpers* B, *das mit den ebenfalls zu* B *gehörigen Grössen* $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ *durch eine lineare Substitution*

$$\alpha_\varrho' = a_{\varrho,1}\alpha_1 + \cdots + a_{\varrho,r}\alpha_r$$

verknüpft ist, deren Coefficienten Grössen des Körpers A *sind, so ist:*

$$\Delta_{B/A}(\alpha_1', \cdots, \alpha_r') = |a_{\varrho,\varrho'}|^2 \cdot \Delta(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), \quad \varrho, \varrho' = 1, 2, \cdots, r.$$

Hier wollen wir abbrechen. Die Lehre von den invarianten Idealen soll in einer späteren Abhandlung dargestellt werden.

Strassburg i. E., 19. Februar 1900.

Zur Theorie der Resultanten.

Von

L. Heffter in Bonn.

Die charakteristische Bedingung dafür, dass zwei ganze rationale Functionen

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \qquad (a_0 \neq 0),$$
$$g(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m \qquad (b_0 \neq 0)$$

einen gemeinsamen Theiler haben, besteht in dem Verschwinden der Resultante

$$(1) \qquad R = \left| \begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 \cdots & a_n & 0 & \cdots 0 \\ 0 & a_0 \cdots & a_{n-1} & a_n & \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ b_0 & b_1 \cdots b_m & 0 & & \cdots 0 \\ 0 & b_0 \cdots b_{m-1} & b_m & & \cdots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ Zeilen} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} n \text{ Zeilen.} \end{array}$$

Die charakteristischen Bedingungen dafür, dass $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen Theiler genau λ^{ten} Grades besitzen, sind

$$(2) \qquad R = 0,\ R_1 = 0,\ R_2 = 0, \cdots, R_{\lambda-1} = 0; \qquad R_\lambda \neq 0,$$

wo R_ν aus R entsteht, wenn die ν letzten Zeilen a, die ν letzten Zeilen b und die 2ν letzten Colonnen gestrichen werden. Auch dieser Satz ist seit Langem bekannt und auf verschiedene Art abgeleitet worden*). Er soll hier nach einer Methode bewiesen werden, die besonders einfach und durchsichtig erscheint und zugleich die eigentliche Bedeutung jener Determinanten R_ν erkennen lässt.

---

*) Vgl. Encyclopädie der math. Wiss. Bd. I, S. 247, Anm. 95; und die daselbst nicht angeführte Note von Herrn Noether in den Sitzungsber. der phys. med. Societät zu Erlangen, H. 27 (1895).

I.

Wir gehen von der Annahme aus, dass f und g einen gemeinsamen Theiler λ^{ten} Grades besitzen:

$$(3)\quad \begin{cases} f(x) = (a_0' x^{n-\lambda} + a_1' x^{n-\lambda-1} + \cdots + a_{n-\lambda}')\,(x^\lambda + c_1 x^{\lambda-1} + \cdots + c_\lambda), \\ g(x) = (b_0' x^{m-\lambda} + b_1' x^{m-\lambda-1} + \cdots + b_{m-\lambda}')\,(x^\lambda + c_1 x^{\lambda-1} + \cdots + c_\lambda). \end{cases}$$

Drückt man nach diesen Identitäten die a und b durch die a' und c bezw. b' und c aus, so ergiebt sich:

$$(4)\qquad \begin{cases} a_0 = a_0', & b_0 = b_0', \\ a_1 = a_0' c_1 + a_1', & b_1 = b_0' c_1 + b_1', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n = a_{n-\lambda}' \cdot c_\lambda, & b_m = b_{m-\lambda}' \cdot c_\lambda . \end{cases}$$

Diese Ausdrücke werden in (1) substituirt und R wird alsdann folgender Umformung unterworfen:

Die bezw. mit $c_1, c_2, \cdots, c_\lambda$ multiplicirte erste Colonne wird von der $2^{\text{ten}}, 3^{\text{ten}}, \cdots, (\lambda+1)^{\text{ten}}$ Colonne subtrahirt. Dann wird die mit $c_1, c_2, \cdots, c_\lambda$ multiplicirte zweite Colonne von der $3^{\text{ten}}, 4^{\text{ten}}, \cdots, (\lambda+2)^{\text{ten}}$ Colonne subtrahirt. U. s. w.

So gelangt man zu dem Resultat

$$(5)\qquad R = \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cccccccc} a_0' & a_1' \cdots a_{n-\lambda}' & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & a_0' \cdots & \cdots & a_{n-\lambda}' & \cdots & & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots & \cdots & \cdots & a_0' \cdots a_{n-\lambda}' & & 0 \cdots & 0 \\ b_0' & b_1' \cdots b_{m-\lambda}' & 0 & \cdots & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & b_0' \cdots & \cdots & b_{m-\lambda}' & \cdots & & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \cdots & \cdots & \cdots & b_0' \cdots b_{m-\lambda}' & & 0 \cdots & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} m \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\\a\end{array}}\right\} n \text{ Zeilen} \end{array} \\ \qquad \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}_{m+n-\lambda \text{ Colonnen}} \quad \underbrace{\hphantom{xxxx}}_{\lambda \text{ Colonnen}} \end{array}$$

Die umgeformte Determinante R werde mit R' bezeichnet.

Da diese Determinantenumformung lediglich durch Subtraction der einzelnen Colonnen von solchen, die weiter rechts stehen, zu Stande kommt, so ist es evident, dass man in gleicher Weise auch jede Subdeterminante von R umformen kann, die aus R durch Streichung *beliebiger* Zeilen und der gleichen Anzahl *letzter* Colonnen entsteht. Mit andern Worten: *der Werth jeder solchen Subdeterminante von R ist gleich dem der entsprechenden Subdeterminante von R'.* Insbesondere ergiebt sich:

$$(6) \qquad R_\lambda = \begin{vmatrix} a_0' \cdots & a_{n-\lambda}' & 0 \cdots 0 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \\ 0 \;\cdots a_0' & \cdot \quad \cdot & \cdots a_{n-\lambda}' \\ b_0' \cdots & b_{m-\lambda}' & 0 \cdots 0 \\ \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot & \cdot \;\cdot \;\cdot \\ 0 \;\cdots b_0' & \cdot \quad \cdot & \cdots b_{m-\lambda}' \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} m-\lambda \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n-\lambda \text{ Zeilen,} \end{matrix}$$

d. h. *R_λ ist, wenn f und g einen gemeinsamen Theiler λ^{ten} Grades haben, die Resultante der Functionen f' und g', die aus f und g durch Weglassung jenes Factors entstehen.*

Damit aber ist es evident, dass

$$(7) \qquad \begin{cases} R = 0, \; R_1 \neq 0; \\ R = 0, \; R_1 = 0, \; R_2 \neq 0; \\ \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \;\; \cdot \\ R = 0, \; R_1 = 0, \cdots, R_{\lambda-1} = 0, \; R_\lambda \neq 0 \end{cases}$$

bezw. die charakteristischen Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Theilers von f und g genau 1^{ten}, $2^{\text{ten}}, \cdots, \lambda^{\text{ten}}$ Grades darstellen.

Jede der Determinanten $R_1, R_2, \cdots$ kann im Sinne des Herrn Brill*) als eine *reducirte Resultante* von $f(x)$ und $g(x)$, bezw. der drei Functionen von x und y

$$f(x) - y, \quad g(x) - y, \quad y$$

bezeichnet werden. Denn das Verschwinden einer solchen Determinante sagt aus, dass, wenn $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ bereits eine gewisse Anzahl gemeinsamer Wurzeln haben, noch eine weitere solche existirt.

II.

Wir wollen aus Gleichung (5) noch einige Folgerungen ziehen, die ebenfalls ihrem Inhalt nach bekannt sind, aber sich hier besonders anschaulich ergeben.

Addirt man in R die bezw. mit $x^{m+n-1}, x^{m+n-2}, \cdots, x$ multiplicirte $1^{\text{te}}, 2^{\text{te}}, \cdots$, vorletzte Colonne zur letzten, so erhält man die bekannte Identität $R = f \cdot g_1 + g \cdot f_1$ oder ausführlich geschrieben

$$(8) \qquad \begin{aligned} R = f(x)\,[x^{m-1} \cdot R_{a1} + x^{m-2} \cdot R_{a2} + \cdots + R_{am}] \\ + g(x)\,[x^{n-1} \cdot R_{b1} + x^{n-2} \cdot R_{b2} + \cdots + R_{bn}], \end{aligned}$$

wenn

$$R_{a1}, R_{a2}, \cdots, R_{am}, \quad R_{b1}, R_{b2}, \cdots, R_{bn}$$

der Reihe nach die Adjuncten der letzten Colonne von R sind.

---

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 4 (1871), p. 510; Abhandlungen der Münch. Akad. Bd. 17 (1892), p. 89.

Da

$$(9) \qquad R_{a1} = \pm b_0 \cdot R_1, \quad R_{b1} = \pm a_0 \cdot R_1,$$

sind R_{a1} und R_{b1} Null, sobald f und g einen gemeinsamen Theiler höheren als ersten Grades haben. Aus Gleichung (5) ersieht man aber: *Sobald f und g einen gemeinsamen Theiler höheren als ersten Grades haben, sind alle R_a und alle R_b Null, d. h. die Gleichung* (8) *wird alsdann insofern illusorisch, als f_1 und g_1 identisch Null sind.*

Haben $f(x)$ und $g(x)$ einen gemeinsamen Theiler genau λ^{ten} Grades, so kann endlich die für Gleichung (5) vollzogene Determinantenumformung noch benutzt werden, um jenen Theiler in möglichst einfacher Weise zu gewinnen. Es ist nämlich dann $R_\lambda \neq 0$, und durch dieselbe Ueberlegung, die bei Herleitung von (8) angewandt wurde, hat man

$$(10) \qquad R_\lambda = \begin{vmatrix} a_0' & a_1' \cdots a_{n-\lambda}' & 0 \cdots x^{m-\lambda-1} \cdot f' \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & \cdot \quad \cdots a_0' \quad \cdot & \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad f' \\ b_0' & b_1' \cdots b_{m-\lambda}' & 0 \cdots x^{n-\lambda-1} \cdot g' \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & \cdot \quad \cdots b_0' \quad \cdot & \cdots \quad \cdot \quad \cdot \quad g' \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-\lambda \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-\lambda \text{ Zeilen.} \end{matrix}$$

Multiplicirt man beide Seiten mit dem (gesuchten) gemeinsamen Theiler $t(x)$ von $f(x)$ und $g(x)$, so tritt in (10) an Stelle von f' und g' überall f und g. Die übrigen Colonnen der Determinante können aber ersetzt werden durch die entsprechenden Colonnen der nicht transformirten Determinante R_λ, in der nur die gegebenen a und b vorkommen. Denn ginge man von der letzteren Determinante aus, so würde man sie, wie bei Gleichung (5) geschehen, in die der Gleichung (10) umwandeln. So haben wir das Resultat:

$$(11) \qquad R_\lambda \cdot t(x) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \cdots a_n, & 0, & \cdots, & x^{m-\lambda-1} \cdot f \\ 0 & a_0 \cdots \quad \cdot, & a_n, & \cdots, & x^{m-\lambda-2} \cdot f \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 \cdots b_m, & 0, & \cdots, & x^{n-\lambda-1} \cdot g \\ 0 & b_0 \cdots \quad \cdot, & b_m, & \cdots, & x^{n-\lambda-2} \cdot g \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} m-\lambda \text{ Zeilen} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n-\lambda \text{ Zeilen.} \end{matrix}$$

Bonn, 20. Januar 1900.

Ueber Striktionen.

Von

H. Kühne in Dortmund.

Unter Striktionslinie einer Curvenschaar, die auf einer Fläche verläuft, versteht man den Ort der Punkte auf den Curven der Schaar, für die der Abstand von der nächsten Curve ein Minimum wird. [Stahl und Kommerell, Grundformeln S. 104.]

Der Begriff der Striktion lässt sich in zweierlei Weise verallgemeinern, erstens indem man ihn auf Flächenschaaren und zweitens indem man ihn auf doppelt unendliche Curvenschaaren ausdehnt, die nun allerdings nicht mehr nur eine Fläche, sondern den ganzen Raum durchziehen. Dadurch treten die beiden Fragen auf:

Welches ist der Ort aller Punkte, in denen sich zwei benachbarte Flächen einer gegebenen Schaar möglichst nahe kommen? — Striktionslinie der Flächenschaar, und

Welches ist der Ort aller Punkte, in denen sich ein Bündel aus einer doppelt unendlichen Curvenschaar im Raume möglichst zusammenzieht? — Striktionsfläche der Linienschaar.

Der letzte Gedanke bedarf noch einer genauen Fassung. Aus der Curvenschaar seien eine Curve und zwei ihr benachbarte herausgegriffen, und auf jeder dann ein Punkt gewählt; dann ist dadurch ein Dreieck bestimmt. Die Bedingung, dass der Inhalt dieses Dreiecks ein Minimum werde, giebt eine Bestimmung für die Punkte; der Ort der auf diese Weise ermittelten Punkte ist die Striktionsfläche.

Da hier wie vielfach die Behandlung um so einfacher wird, je allgemeiner das Problem gefasst wird, behandle ich die bisher genannten drei Fälle der Striktion zusammen als besondere Fälle des allgemeinen Problems:

Eine ebene n-fache Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_n$ werde durch eine feste ν-fache Mannigfaltigkeit M_ν durchzogen; in dieser verläuft eine $\nu - \varrho = \sigma$-fach unendliche Schaar ϱ-facher Mannigfaltigkeiten M_ϱ. Auf einer beliebig herausgegriffenen M_ϱ und auf noch σ ihr benachbarten Mannigfaltigkeiten der Schaar werde je ein Punkt angenommen; diese Punkte bestimmen ein der Strecke und dem Dreieck analoges Grundgebilde. Es wird verlangt, dass der Inhalt dieses Grundgebildes ein Minimum sei. Dadurch ist der Punkt auf M_ϱ völlig bestimmt. Sämmtliche für die verschiedenen M_ϱ ermittelten Punkte ergeben die Striktionsmannigfaltigkeit M_σ der M_ϱ-Schaar. M_σ ist zu bestimmen.

Für den ersten der drei besonderen Fälle wird $\mathfrak{M}_n$ zum gewöhnlichen Raum, M_ν zur Fläche, M_ϱ zur Curve, M_σ zur Striktionslinie; für den zweiten werden $\mathfrak{M}_n$ und M_ν zum Raume, M_ϱ wird die Fläche im Raume, M_σ Striktionslinie; für den dritten werden $\mathfrak{M}_n$ und M_ν ebenfalls zum Raume, M_ϱ wird Curve im Raume, M_σ wird Striktionsfläche.

Ich schreite zur Behandlung des allgemeinen Problems und bemerke vorher, dass gewisse Zeiger an den Buchstaben stets dieselben Werthe durchlaufen sollen, und zwar soll sein:

$$h = 1, \cdots n;\ f, g, i, k = 1, \cdots \nu;\ m = 1, \cdots \varrho;\ p, q, r, s = \varrho + 1, \cdots \nu.$$

Es sei ein Punkt von $\mathfrak{M}_n$ durch die Coordinaten x_h gegeben. Wird jedes x_h als Function der ν unabhängigen Veränderlichen y_f bestimmt, also

$$x_h = x_h(\cdots y_f \cdots),$$

so ist dadurch M_ν gegeben. Die y_f seien Functionen von ν anderen Grössen z_f, die in zwei durch das Semicolon angedeutete Gruppen getheilt seien:

$$y_f = y_f(\cdots z_m \cdots;\ \cdots z_r \cdots).$$

Werden die z_r festgehalten, dagegen die z_m verändert, so durchläuft der Punkt eine M_ϱ. Die Constanz aller z_r bestimmt also ein Individuum M_ϱ, ihre Variabilität die σ-fach unendliche Schaar der M_ϱ.

Ein Werthsystem z_r bestimmt eine M_ϱ; durch $z_r + \zeta_{pr}$ sind noch σ andere M_ϱ bestimmt, die durch $M_\varrho^{(p)}$ bezeichnet werden sollen. Die ζ seien unendlich klein, so sind M_ϱ und $M_\varrho^{(p)}$ benachbart. P sei ein Punkt auf M_ϱ, bestimmt durch x_h oder y_f oder z_f; P_p ein Punkt auf $M_\varrho^{(p)}$, bestimmt durch $x_h + \xi_{ph}$ oder $y_f + \eta_{pf}$ oder $z_f + \zeta_{pf}$. Dann ist abgesehen von einem Zahlenfactor der Inhalt des durch sämmtliche Punkte P bestimmten Grundgebildes gleich der absoluten Determinante der Matrix

$$(\xi_{ph}).$$

Die Aufgabe verlangt also, dass

$$\|\xi_{ph}\|$$

und damit auch

$$V = \|\xi_{ph}\|^2$$

ein Minimum werde.

Setzen wir

$$\frac{\partial x_h}{\partial y_f} = x_{hf}, \quad \frac{\partial y_f}{\partial z_g} = y_{fg}, \quad \frac{\partial z_f}{\partial y_g} = z_{fg},$$

so folgt, wegen der unendlichen Kleinheit der ξ, η, ζ

$$\xi_{ph} = \sum_f x_{hf}\eta_{pf} = \sum_{fg} x_{hf} y_{fg} \zeta_{pg}$$

und

$$V = \|\xi_{ph}\|^2 = \left|\sum_h \xi_{rh}\xi_{sh}\right| = \left|\sum_{hfgik} x_{hf} x_{hg} y_{fi} y_{gk} \zeta_{ri}\zeta_{sk}\right|.$$

Wir setzen

$$\sum_h x_{hf} x_{hg} = a_{fg},$$

$$\sum_{fg} a_{fg} y_{fi} y_{gk} = b_{ik},$$

$$\sum_{ik} b_{ik}\zeta_{ri}\zeta_{sk} = v_{rs}$$

so kommt

$$V = |v_{rs}|.$$

Die Systeme (a_{fg}), (b_{fg}), (v_{rs}) sind symmetrisch.

V soll ein Minimum werden, d. h. wenn die Punkte P schon dieser Bedingung gemäss bestimmt sind, muss die Variation von V, die bei einer Variation des Punktes P_p sich ergiebt, verschwinden, und das gilt für alle p und ausserdem für den Punkt P. Eine Variation von P_p ist nur dadurch möglich, dass die ζ_{pm} (für alle m) sich ändern und die ζ_{pq} (für alle q) fest bleiben, da eine Veränderung dieser Grössen zur Folge haben würde, dass P_p die Mannigfaltigkeit $M_\varrho^{(p)}$ verlässt. Die Aenderung von ζ_{pm} sei $\Delta\zeta_{pm}$ und Δ_{pm} diene als Zeichen für die Aenderung, die andere von ζ_{pm} abhängige Grössen dadurch erfahren. Dann ist

$$\Delta_{pm} V = \sum_{rs} V_{sr}\Delta_{pm} v_{rs},$$

wobei V_{sr} die zu v_{rs} gehörige Subdeterminante des Systems (v_{rs}) ist. Ferner ist

$$\Delta_{pm} v_{rs} = \sum_{ik} b_{ik}(\zeta_{ri}\delta_{ps}\delta_{mk} + \zeta_{ks}\delta_{pr}\delta_{mi})\Delta\zeta_{pm};$$

dabei ist $\delta_{\lambda\mu}$ das Kronecker'sche Symbol, nämlich $= 1$, wenn $\lambda = \mu$, und $= 0$, wenn $\lambda \neq \mu$ ist. Also wird

$$\Delta_{pm} V = \sum_{rsik} V_{sr} b_{ik} (\zeta_{ri} \delta_{ps} \delta_{mk} + \zeta_{sk} \delta_{pr} \delta_{mi}) \Delta \zeta_{pm}$$
$$= 2 \Delta \zeta_{pm} \sum_{rsik} V_{sr} b_{ik} \zeta_{ri} \delta_{ps} \delta_{mk}$$
$$= 2 \Delta \zeta_{pm} \sum_{ri} V_{pr} b_{im} \zeta_{ri}.$$

Da die Variation von V verschwinden sollte, ergiebt sich

$$\sum_{ri} V_{pr} b_{im} \zeta_{ri} = 0;$$

und das gilt für alle p und alle m.

Diese Gleichungen bestimmen die ζ_{pm}; deren Werthe sind dann in V einzusetzen und schliesslich ist noch der Punkt P zu variiren. Zur Elimination der ζ_{pm} setzen wir

$$\sum_{ri} V_{pr} b_{if} \zeta_{ri} = \lambda_{pf},$$

so ist, wie vorher gezeigt

$$\lambda_{pm} = 0 \qquad \text{(für alle } p \text{ und } m).$$

Nun bilden wir

$$\sum_{f} \lambda_{pf} \zeta_{sf} = \sum_{rif} V_{pr} b_{if} \zeta_{ri} \zeta_{sf} = \sum_{r} V_{pr} v_{rs};$$

daraus folgt wegen $\lambda_{pm} = 0$ und weil (V_{pr}) das adjungirte System zu (v_{pr}) ist

$$\sum_{r} \lambda_{pr} \zeta_{sr} = \delta_{ps} V.$$

Durch Determinantenbildung ergiebt sich

$$\left| \sum_{r} \lambda_{pr} \zeta_{sr} \right| = |\delta_{ps} V| \cdot$$
$$|\lambda_{pr}| \, |\zeta_{sr}| = V^{\sigma}.$$

So kommen die ζ_{pm} nur in der aus den λ gebildeten Determinante vor; um eine andre gleichgeartete Beziehung zu erhalten, führen wir das dem System

$$(b_{ik}) \text{ reciproke System } (\beta_{ik})$$

ein, und bilden

$$\sum_{fg} \lambda_{pf} \lambda_{qg} \beta_{fg} = \sum_{rsikfg} V_{pr} V_{qs} b_{if} b_{kg} \zeta_{ri} \zeta_{sk} \beta_{fg}.$$

Daraus folgt

$$\sum_{rs} \lambda_{pr} \lambda_{qs} \beta_{rs} = \sum_{rsikg} V_{pr} V_{qs} b_{kg} \zeta_{ri} \zeta_{sk} \delta_{ig}$$
$$= \sum_{rs} V_{pr} V_{qs} v_{rs}$$
$$= \sum_{s} V_{qs} \delta_{ps} V$$
$$= V_{qp} V,$$

und hieraus durch Determinantenbildung

$$\left| \sum_{rs} \lambda_{pr} \lambda_{qs} \beta_{rs} \right| = |V_{pq} V|,$$
$$|\lambda_{pr}| \, |\lambda_{qs}| \, |\beta_{rs}| = |V_{pq}| V^{\sigma},$$
$$|\lambda_{pq}|^2 |\beta_{rs}| = V^{2\sigma-1}.$$

Durch Elimination der λ aus dieser und der vorher abgeleiteten Gleichung findet man schliesslich

$$V = \frac{|\zeta_{rs}|^2}{|\beta_{rs}|}.$$

In diese Gestalt lässt sich also V bringen durch Berücksichtigung, dass es bei der Variation aller P_p ein Minimum werden soll. Nun ist aber auch der Punkt P auf seiner M_ϱ beweglich, und zwar können die ihn bestimmenden Grössen z_m beliebig geändert werden. Demnach bestehen weiter die Beziehungen

$$\frac{\partial V}{\partial z_m} = 0 \qquad (\text{für alle } m).$$

Wegen der Constanz der ζ_{rs} für diese Differentiationen, folgt weiter

$$\frac{\partial |\beta_{rs}|}{\partial z_m} = 0 \qquad (\text{für alle } m). \tag{1}$$

Aus diesen ϱ Gleichungen lassen sich die z_m berechnen, und zwar werden sie ausgedrückt durch die z_r, Führt man diese Werthe in die y_f ein, so sind die y_f nur noch abhängig von den σ Veränderlichen z_r.

Dadurch wird auf M_ν die verlangte M_σ bestimmt.

Die Differentialgleichungen für M_σ lassen sich noch in eine andre Gestalt bringen. Es sei

$$(\alpha_{ki}) \text{ das reciproke System zu } (a_{ik}),$$

und es werde

$$\sum_{ik} \alpha_{ik} z_{fi} z_{gk} = \gamma_{fg}$$

gesetzt. Dann wird

$$\sum_g b_{fg}\gamma_{gi} = \sum_{i_1 k_1 i_2 k_2 g} a_{i_1 k_1} y_{i_1 f} y_{k_1 g} \alpha_{i_2 k_2} z_{g i_2} z_{i k_2}$$

und weil die Systeme (z_{fi}) und (y_{if}) reciprok sind,

$$\sum_g b_{fg}\gamma_{gi} = \sum_{i_1 i_2 k_2} a_{i_1 i_2} y_{i_1 f} \alpha_{i_2 k_2} z_{i k_2} = \sum_{i_1} y_{i_1 f} z_{i i_1} = \delta_{fi}$$

also

$$\sum_g b_{fg}\gamma_{gi} = \sum_g b_{fg}\beta_{gi}$$

und

$$\sum_g b_{fg}(\gamma_{gi} - \beta_{gi}) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\gamma_{gi} = \beta_{gi}.$$

Setzen wir noch

$$|\beta_{rs}| = \Pi,$$

so ist also

$$\Pi = \left| \sum_{ik} \alpha_{ik} z_{ri} z_{sk} \right|.$$

Betrachtet man ferner Π als Function aller z_m und z_r, so folgt aus

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z_m} = 0,$$

dass bei constantem z_r

$$d\Pi = 0$$

ist. Demnach haben wir:

Die Striktionsmannigfaltigkeit M_σ ist auch bestimmt durch:

$$d \left| \sum_{i,k} \alpha_{ik} z_{ri} z_{sk} \right| = 0, \tag{2}$$

sobald für alle r $dz_r = 0$ ist.

Diese allgemeinen Ergebnisse mögen nun an den drei anfangs angegebenen besonderen Fällen erläutert werden.

I. *Curve auf Fläche.* Man setze $n = 3$, $\nu = 2$, $\varrho = 1$, $\sigma = 1$ und ersetze

$$x_1\, x_2\, x_3 \quad y_1\, y_2 \quad z_1;\ z_2$$

durch

$$x\, y\, z \quad u\, v \quad \psi;\ \varphi,$$

so giebt $\varphi = \text{const.}$ die Curvenschaar, und es wird Π zum Differentialparameter $\sum_{ik} \alpha_{ik}\varphi_i\varphi_k$. Die Striktionslinie ist nach (2) bestimmt durch

$$d\Pi = 0 \quad \text{sobald} \quad d\varphi = 0. \quad \text{[Stahl-Komm. S. 104.]}$$

II. *Fläche im Raume.* Es ist $n = \nu = 3$, $\varrho = 2$, $\sigma = 1$; man ersetze

$$x_1\, x_2\, x_3 \quad y_1\, y_2\, y_3 \quad z_1\, z_2;\; z_3$$

durch

$$x\, y\, z \quad x\, y\, z \quad z_1\, z_2;\; \varphi,$$

so liefert $\varphi = \text{const}$ die Flächenschaar.

Wegen $x_{hf} = \delta_{hf}$ ist $a_{fg} = \alpha_{fg} = \delta_{fg}$, und es wird

$$\Pi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Die Striktionslinie ist bestimmt durch

$$d\Pi = 0 \quad \text{und} \quad d\varphi = 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

μ ist ein Proportionalitätsfactor. Bezeichnet n die Normale der Fläche $\varphi = \text{const.}$, so ist

$$\Pi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^2$$

und man erhält drei Gleichungen von der Art

$$\frac{\partial \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}}{\partial x} = \mu \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}},$$

d. h. geometrisch gedeutet: in dem Punkte in dem die Striktionslinie die Fläche $\varphi = \text{const.}$ durchstösst, berühren sich zwei Flächen $\varphi = \text{const.}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{const.}$

Deutet man φ als Flüssigkeitspotential einer wirbelfreien Flüssigkeit, so ist die Geschwindigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, und da $d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial n} dn$ ist, in einem Punkt der Striktionslinie aber dn ein Minimum wird, muss $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ein Maximum sein. D. h. Die Striktionslinie der Niveauflächen geht durch die Punkte, in denen auf einer Fläche die Geschwindigkeit ein Maximum ist.

III. *Curvenschaar im Raume.* Es ist $n = \nu = 3$, $\varrho = 1$, $\sigma = 2$. Man ersetze

$$x_1\, x_2\, x_3 \quad y_1\, y_2\, y_3 \quad z_1;\; z_2\, z_3$$

durch

$$x\, y\, z \quad x\, y\, z \quad z_1;\; \varphi\, \psi,$$

so stellen die Gleichungen $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ die Linienschaar dar. Wie im Fall II ist $\alpha_{fg} = \delta_{fg}$, und es wird demnach

$$\Pi = \begin{vmatrix} \sum_f \varphi_f^2, & \sum_f \varphi_f \psi_f \\ \sum_f \psi_f \varphi_f, & \sum_f \varphi_f^2 \end{vmatrix} \qquad (f = 1, 2, 3).$$

Die Striktionsfläche wird durch

$$d\Pi = 0, \quad d\varphi = 0, \quad d\psi = 0$$

gegeben; hieraus folgt als ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial x}, & \frac{\partial \Pi}{\partial y}, & \frac{\partial \Pi}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Auch hier ergiebt sich eine interessante Beziehung, wenn man als Curvenschaar die Schaar der Wirbellinien einer Flüssigkeit wählt. Bezeichnet [Kirchhoff, Vorlesungen 1877, S. 169] q den Querschnitt eines Wirbelfadens und k die an demselben Orte herrschende Drehgeschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen, so ist das Produkt qk längs eines Fadens constant. Die Striktionsfläche der Wirbelfäden geht durch die Punkte, in denen q ein Minimum ist; dort wird also k ein Maximum; d. h. die Striktionsfläche der Wirbellinien geht durch die Punkte, in denen längs einer Wirbellinie die Drehgeschwindigkeit ein Maximum ist.

Entsprechendes gilt auch von dem Stromlinien.

Dortmund, April 1900.

Ueber die überall oscillirenden differenzirbaren Functionen.

Von

A. Schoenflies in Königsberg.

Auf die merkwürdige Thatsache, dass es überall oscillirende stetige Functionen giebt, die in jedem Punkte eine bestimmte Ableitung besitzen, hat bekanntlich zuerst Herr Köpcke durch Construction eines speciellen Beispiels dieser Art hingewiesen.*) Mir persönlich ist kürzlich die Existenz solcher Functionen auch von Herrn Brodén bestätigt worden, der auf einem andern Wege zu ihnen gelangt sein dürfte, und seine Resultate voraussichtlich demnächst veröffentlichen wird.**) Als ich bei Gelegenheit meines demnächst erscheinenden Berichts über Mengenlehre selbst an das Studium dieser Functionsgattung heranging, bin ich zu Formeln gelangt, die die ganze Classe dieser Functionen kennzeichnen, so dass ich es für nützlich halte, sie hier mitzutheilen. Wie die Herren Brodén und Steinitz, die kürzlich über die überall oscillirenden Functionen gearbeitet haben,***) gehe ich davon aus, die Function dadurch zu bestimmen, dass ich ihre Werthe an einer überall dichten Menge gleichmässig stetig vorschreibe. Man kann so die Structur der Function in der mannigfachsten Weise so beeinflussen, dass sie überall differenzirbar ist.

Es sei $s = a \cdots b$ das Intervall, in dem die Function $f(x)$ definirt ist, so wähle ich als diejenige überall dichte Menge, an der ich die Werthe der Function vorschreibe, die Menge der Maxima und Minima selbst. Dabei bemerke ich noch, dass es sich nur um lauter eigentliche Maxima und Minima handeln soll. Um alle Functionen dieser Art zu erhalten, kann man folgendermassen verfahren.

---

*) Diese Annalen, Bd. 29, S. 123, Bd. 34, S. 161 und Bd. 35, S. 104. Die Construction, die zum Ziele führt, findet sich nur in Bd. 35. Eine dahingehende Vermuthung hatte bereits Herr U. Dini ausgesprochen.

**) (Nachträgliche Bemerkung.) Dies ist inzwischen geschehen; Stokholm Vet. Ak. Öfv. 1900, S. 423 u. 743. Auch der im folgenden erwähnte „Bericht" ist inzwischen erschienen.

***) Journ. f. Math. Bd. 118, S. 1 und diese Annalen, Bd. 52.

Das Intervall $s = a \cdots b$ theile man in irgend drei Theile s_0, s_1, s_2, jedes dieser Intervalle s_i in die drei Theile s_{i0}, s_{i1}, s_{i2} u. s. w.*) Es entstehen so die Theilintervalle

$$s_i,\ s_{ik},\ s_{ikl}, \cdots s_N,\ s_{Ni}, \cdots$$

wo N eine Gruppe von ν Indices andeuten soll, und alle diese Indices die Werthe 0, 1, 2 haben können. Sei ferner $t = f(b) - f(a)$ der Functionszuwachs, der dem Intervall s entspricht, und es mögen den Intervallen s_0, s_1, s_2 die Functionszuwachse t_0, t_1, t_2 entsprechen, ebenso allgemein dem Intervall s_N der Functionszuwachs t_N.

Falls nun wieder s_N in s_{N0}, s_{N1}, s_{N2} zerfällt, so setze man allgemein

$$(1)\quad s_{N0} = \frac{s_N}{2}(1 - \varepsilon_{N0}),\ s_{N2} = \frac{s_N}{2}(1 - \varepsilon_{N2}),\ s_{N1} = \frac{s_N}{2}(\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}),$$

$$(2)\quad t_{N0} = \frac{t_N}{2}(1 + \varphi_{N0}),\ t_{N2} = \frac{t_N}{2}(1 + \varphi_{N2}),\ t_{N1} = -\frac{t_N}{2}(\varphi_{N0} + \varphi_{N2}),$$

und zwar darf unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass t_{N0} und t_{N2} das gleiche Zeichen haben wie t_N, dagegen t_{N1} und t_N entgegengesetztes Zeichen, so dass $\varphi_{N0} + \varphi_{N2} > 0$ ist. Es entspricht dann, wenn $t_N > 0$ ist, der erste Theilpunkt von s_N einem Maximum, der zweite einem Minimum, umgekehrt der erste einem Minimum und der zweite einem Maximum, wenn $t_N < 0$ ist. Damit man auf diese Weise zu einer stetigen überall oscillirenden Function gelangt, ist nur noch die Bedingung zu erfüllen, dass für unbegrenzt wachsendes ν mit $\lim s_N = 0$ zugleich $\lim t_N = 0$ wird. Nebenbei ist klar, dass alle $s_N > 0$ sein müssen, so dass $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2} > 0$ ist.

Um die Werthe der Ableitungen zu discutiren, setze man zunächst

$$(3)\quad \frac{1 + \varphi_{N0}}{1 - \varepsilon_{N0}} = \alpha_{N0},\quad \frac{1 + \varphi_{N2}}{1 - \varepsilon_{N2}} = \alpha_{N2},\quad -\frac{\varphi_{N0} + \varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}} = \alpha_{N1},$$

so hat man, wie leicht ersichtlich, allgemein

$$(4)\quad \frac{t_N}{s_N} = \alpha_i\,\alpha_{ik}\,\alpha_{ikl} \cdots \alpha_N \frac{t}{s} = A_N \frac{t}{s},$$

wo die Indices $i, k, l, \cdots$ mit denjenigen, die in N eingehen, identisch sind. Setzt man ferner

$$(5)\quad \frac{t_{N0} + t_{N1}}{s_{N0} + s_{N1}} = \frac{1 - \varphi_{N2}}{1 + \varepsilon_{N2}} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N2} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N2} A_N \frac{t}{s},$$

$$(6)\quad \frac{t_{N1} + t_{N2}}{s_{N1} + s_{N2}} = \frac{1 - \varphi_{N0}}{1 + \varepsilon_{N0}} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N0} \frac{t_N}{s_N} = \beta_{N0} A_N \frac{t}{s},$$

*) Bei Brodén nimmt die Zahl der Theile mit wachsendem ν unbegrenzt zu (a. a. O. S. 441), ebenso bei Köpcke. Es ist aber klar, dass auch die fortgesetzte Dreitheilung zu *jeder* Function dieser Art führt.

so hat man damit diejenigen Quotienten, die die Werthe der Ableitungen beeinflussen, und die bei geeigneter Wahl der ε_N und φ_N der Function $f(x)$ alle möglichen Eigenschaften beizubringen gestatten.

Soll nun die Function in jedem Punkt eine eigentliche Ableitung besitzen, so muss diese Ableitung zunächst in allen Theilpunkten den Werth Null haben, da diese Punkte eigentliche Maxima oder Minima sind. Es ist daher erforderlich und ausreichend, dass in jedem linken Endpunkt ξ_l eines jeden Intervalls $s_N = \xi_l \cdots \xi_r$ die vordere und in jedem rechten Endpunkt ξ_r die hintere Ableitung den Werth Null hat. Für die andern Punkte dagegen ist nur zu verlangen, dass die Ableitung in ihnen bestimmt und endlich ist.

Nun sei x ein beliebiger Punkt von s, so giebt es für ihn stets eine Folge von Theilintervallen

$$(7) \qquad s_i,\ s_{ik},\ s_{ikl}, \cdots s_N, \cdots$$

mit *bestimmten* Indices $i, k, l, \cdots$ deren Endpunkte gegen x als ihren gemeinsamen Grenzpunkt convergiren und zwar ist x ein Endpunkt eines Intervalles s_N, falls die Indices zuletzt sämmtlich gleich 0 oder sämmtlich gleich 2 sind. Soll in x eine bestimmte Ableitung existiren, so muss jedenfalls die Reihe der Quotienten

$$(8) \qquad \frac{t_i}{s_i},\ \frac{t_{ik}}{s_{ik}},\ \frac{t_{ikl}}{s_{ikl}}, \cdots \frac{t_N}{s_N} \cdots$$

gegen einen festen Grenzwerth convergiren, und zwar für jede Indicesfolge. Das gleiche gilt daher gemäss (4) für jedes Product

$$A_N = \alpha_i \alpha_{ik} \alpha_{ikl} \cdots \alpha_N.$$

Hieraus ergiebt sich bereits eine Reihe wichtiger Folgerungen.

Da nämlich jedes $\alpha_{N1} < 0$ ist, so müssen alle diejenigen Producte, deren Indicesfolge den Index 1 unendlich oft enthält, gegen Null convergiren, und hierzu ist jedenfalls hinreichend, und wahrscheinlich auch nothwendig, dass jedes aus unendlich vielen Grössen α_{N1} bestehende Product selbst Null ist. Wir wählen $|\lim \alpha_{N1}| < 1$, und haben dieser Bedingung damit genügt. Die bezüglichen Punkte x kann man füglich als diejenigen betrachten, denen die Wendepunkte der Function entsprechen.

Zur Ableitung weiterer Bedingungen, die sich an die Reihe (8) knüpfen, können wir uns nunmehr auf solche Indicesfolgen beschränken, die vom ν-ten Index an nur noch die Ziffern 0 oder 2 enthalten. Falls zunächst vom ν-ten Index an entweder nur 0 oder nur 2 vorkommt, so convergirt die Reihe (8) gegen die Ableitung in einem Punkte ξ_l resp. ξ_r, und da diese Null sein müssen, so müssen auch die Producte

$$(9) \qquad A_N^0 = \alpha_N \alpha_{N0} \alpha_{N00} \cdots \quad \text{und} \quad A_N^2 = \alpha_N \alpha_{N2} \alpha_{N22} \cdots$$

den Werth Null haben, und zwar für jede Indicesgruppe N. Es müssen daher in jedem dieser Producte unendlich viele Factoren $\alpha < 1$ auftreten, die ihre Convergenz gegen Null bewirken. Sei nun für irgend ein N insbesondere α_{N2} einer dieser Factoren, so setze man für dieses N

$$(10) \qquad \frac{1+\varphi_{N0}}{1-\varepsilon_{N0}} = 1 + a_N, \quad \frac{1+\varphi_{N2}}{1-\varepsilon_{N2}} = 1 - b_N, \quad \frac{\varphi_{N0}+\varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0}+\varepsilon_{N2}} = 1 - c_N$$

wo nothwendig $b_N > 0$ und $c_N > 0$, überdies $\lim c_N < 1$ ist. Aus diesen Gleichungen folgt

$$\varepsilon_{N0}(2 + a_N - c_N) + \varepsilon_{N2}(2 - b_N - c_N) = a_N - b_N,$$

und diese Relation ist so zu befriedigen, dass $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2} > 0$, $\varphi_{N0} + \varphi_{N2} > 0$ ist, und im übrigen die den Producten eigenthümlichen Convergenzeigenschaften erfüllt werden. Setzen wir noch

$$(11) \qquad 1 - c_N = \gamma_N, \quad a_N - b_N = \varepsilon_{N2} + \varepsilon'_{N2},$$

so verwandelt sich die obige Relation in

$$\varepsilon_{N2}(b_N - \gamma_N) + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N + \gamma_N) = 0,$$

während sich aus $\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2} > 0$ und $\varphi_{N0} + \varphi_{N2} > 0$ die Bedingung

$$\varepsilon_{N2} b_N + \varepsilon'_{N2} - \varepsilon_{N0}(1 + a_N) > 0$$

ergiebt. Diesen Relationen, zu denen noch die Bedingung $\lim \gamma_N < 1$ hinzukommt, kann auf mannigfache Weise genügt werden. Man kann insbesondere, was die einfachsten Verhältnisse liefert,

$$(12) \qquad \varepsilon_{N0} > 0, \quad \varepsilon_{N2} > 0, \quad \varphi_{N2} < 0, \quad \varphi_{N0} > 0, \quad a_N > 0$$

annehmen. Wird dann noch

$$(13) \qquad \frac{\varepsilon'_{N2}}{b_N \varepsilon_{N2}} = G_N \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon_{N0}}{b_N \varepsilon_{N2}} = K_N$$

gesetzt, wo $K_N > 0$ ist, und G_N nebst K_N der Relation $G_N - K_N + 1 > 0$ genügen, so *liefert jedes Grössensystem dieser Art geeignete Werthe der* ε, a, b *resp. der* ε *und* φ. Man erhält

$$\varphi_{N0} + \varphi_{N2} = (G_N - K_N(1 + a_N) + 1)\, b_N \varepsilon_{N2}$$

und

$$\frac{\varphi_{N0}+\varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0}+\varepsilon_{N2}} = (G_N - K_N(1 + a_N) + 1)\, \frac{b_N}{1 + K_N b_N},$$

und ist in der Wahl von $\varepsilon_{N2} > 0$ nur insoweit beschränkt, dass jedes A_N convergirt, was auf vielerlei Art geschehen kann. Analoge Relationen sind zu befriedigen, wenn man bewirken will, dass $\alpha_{N0} < 1$ und $\alpha_{N2} > 1$ ist. Diesen Relationen kann auf mannigfache Weise genügt werden.

Um die Begriffe zu fixiren, gebe ich zunächst ein einfaches Beispiel, das dem Fall entspricht, dass stets $a_N > b_N$ und $\varepsilon'_{N2} = 0$ ist. Nimmt man nun insbesondere die Factoren $1 - b_N$ als gewisse Factoren des Productes $\prod\left(1 - \frac{1}{m}\right)$ an, so kann man setzen

$$b_N = \frac{1}{m}, \quad a_N = \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}, \quad \varepsilon_{N0} = \frac{1}{m^4}, \quad \varepsilon_{N2} = \frac{1}{m^2},$$

wo die Zahl m für jedes Intervall s_N sogleich bestimmt werden wird, und erhält

$$\varphi_{N0} + \varphi_{N2} = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{m^4} - \frac{1}{m^5} - \frac{1}{m^6},$$

$$\frac{\varphi_{N0} + \varphi_{N2}}{\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1 - \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2} - \frac{1}{m^3}}{1 + \frac{1}{m^2}}.$$

Man hat nun noch zu zeigen, dass sich die den einzelnen Intervallen s_N entsprechenden Zahlen m so wählen lassen, dass wirklich

$$\lim A_N^0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim A_N^2 = 0 \tag{14}$$

ist, und doch jedes A_N gegen einen endlichen Grenzwerth convergirt. Dies kann folgendermassen geschehen.

Man denke sich die bei fortgesetzter Theilung entstehenden Intervalle, resp. deren Indices in folgender Tabelle angeordnet

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & 0 & & & & & & & 2 & & \\
 & 00 & & & 02 & & & & 20 & & & 22 \\
000 & 002 & & 020 & 022 & & & 200 & 202 & & 220 & 222 \\
\cdots\cdots & & 0200 & 0202 & \cdots & & & 2000 & 2002 & \cdots\cdots & &
\end{array}$$

und setze zunächst die ihnen entsprechenden Werthe m, resp. die Brüche $1/m$ durch folgende Tabelle fest

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & -\frac{1}{2} & & & & & & & +\frac{1}{2} & & \\
 & -\frac{1}{3} & & & +\frac{1}{3} & & & & -\frac{1}{4} & & & +\frac{1}{4} \\
-\frac{1}{4} & +\frac{1}{4}, & & +\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & & & -\frac{1}{5} & +\frac{1}{5}, & & +\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\
\cdots\cdots & & -\frac{1}{12} & +\frac{1}{12} & \cdots & & & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{6} & \cdots\cdots & &
\end{array}$$

so dass allgemein das negative Zeichen einem b_N, das positive einem a_N entspricht, und sich jede Zeile nach folgendem Bildungsgesetz bestimmt. Aus jedem Intervall s_N entstehen zwei neue Intervalle s_{N0} und s_{N2}, deren eines ein positives, deren anderes ein negatives Zeichen bedingt. Falls nun zu s_N der Bruch $-1/m$ gehört, so ordne man den beiden daraus entstehenden Intervallen die Brüche $-1/m+1$ und $1/m+1$ zu, und zwar tritt das negative Zeichen immer bei dem Intervall s_{Ni} auf, dessen letzte Ziffer i

mit der letzten Ziffer der Gruppe N übereinstimmt, z. B. beim Uebergang von 200 zu 2000 und 2002 bei dem Intervall, das zum Index 2000 gehört. Falls dagegen zu s_N der Bruch $+1/m$ gehört, so erhalten die daraus neu entstehenden Intervalle die Brüche $-1/2m$ und $+1/2m$, und auch hier soll das negative Zeichen immer bei dem Intervall stehen, in dessen Index die letzte Ziffer der letzten Ziffer von N gleich ist. Dadurch wird erreicht, dass jede Diagonalreihe nach höchstens zwei positiven Brüchen einen negativen erhält und dass, sobald ein negativer Bruch in ihr auftritt, lauter negative Brüche erscheinen, und dies so, dass Gl. (14) erfüllt ist. Die positiven Brüche dagegen sind so gewählt, dass durch den von einer zur andern Zeile hinzutretenden Factor 1/2 die Convergenz aller A_N erreicht wird. Statt dieses Factors kann natürlich jeder andere constante oder variabele Factor benutzt werden, der die Convergenz der Producte A_N bewirkt. Auch ist klar dass die obige Werthvertheilung für jedes andere gegen Null convergirende Product vorgenommen werden kann, und dass sich auch dann die Grössen ε_{N0}, ε_{N2}, ε'_{N2} den bezüglichen Bedingungen gemäss wählen lassen.

Durch das vorstehende ist der Beweis geführt, dass für jedes N und jedes Product $\Pi(1-b_\varrho)$, das den Werth Null hat, immer die Gl. (14) so befriedigt werden kann, dass $\lim A_N$ stets endlich ist, und jedes aus unendlich vielen Factoren $1+a_N$ bestehende Product unbedingt convergirt. Freilich ist damit der Beweis der Differenzirbarkeit von $f(x)$ noch nicht vollständig erbracht, doch kann dies jetzt durch Einführung einer neuen Bedingung geleistet werden.

Sei x der durch die Folge (7) dargestellte Punkt, und $s_l = x \cdots x_l$ ein von ihm nach links laufendes Theilintervall, ebenso $x \cdots x_r = s_r$ ein solches, das nach rechts geht, alsdann ist noch zu zeigen, dass auch immer

$$\lim \frac{t_l}{s_l} = \lim \frac{t_r}{s_r} = \lim \frac{t_N}{s_N}$$

ist, wo der letzte Grenzwerth der Folge (8) entspricht. Hierzu bedarf es zunächst einer Hilfsbetrachtung. Wir wollen allgemein die Aufgabe lösen, die Entfernung eines innerhalb $s_N = \xi_l \cdots \xi_r$ gelegenen Punktes x' von den Endpunkten von s_N auszudrücken, vorausgesetzt, dass x' durch die Folge

$$s_{Ni},\ s_{Nik},\ s_{Nikl},\ \cdots$$

bestimmt ist. Wir setzen noch $\xi_l \cdots x' = s_l'$ und $x' \cdots \xi_r = s_r'$; alsdann gilt folgendes: Liegt x' in s_{N1}, so beginnt der für s_l' sich ergebende Summenausdruck mit dem Summand s_{N0}, ebenso derjenige für s_r' mit s_{N2}. Liegt x' in s_{N0}, so treten nur in dem Ausdruck für s_r' Glieder s_{Ni} auf, und zwar $s_{N1}+s_{N2}$, und liegt x' in s_{N2}, so treten nur in s_l' Glieder s_{Ni}

auf, und zwar $s_{N1} + s_{N2}$. Es trägt also nicht jedes Glied der obigen Folge Summanden zu s_l' resp. s_r' bei; es seien insbesondere

$$s_{N'},\ s_{N''},\ s_{N'''},\cdots$$

diejenigen Glieder für die dies mit Bezug auf s_l' der Fall ist, wo $N', N'', N''', \cdots$ Indicesgruppen von $\nu', \nu'', \nu''', \cdots$ Indices darstellen. Es stammt dann von einem solchen Glied $s_{N'}$ entweder der Summand $s_{N',0}$ oder $s_{N',0} + s_{N',1}$. Bezeichnen wir noch diese eventuellen Summanden gemeinsam durch $\sigma_{N',0}$, so folgt

$$s_l' = \sigma_{N',0} + \sigma_{N'',0} + \sigma_{N''',0} + \cdots \tag{15}$$

und analog, können wir setzen

$$s_r' = \sigma_{M',2} + \sigma_{M'',2} + \sigma_{M''',2} + \cdots \tag{16}$$

wo diese Grössen die entsprechende Bedeutung haben.

Nun sei x wieder der Punkt, in dem die Ableitung zu prüfen ist, und es sei zunächst x ein Endpunkt eines Intervalles s_N, insbesondere der linke Endpunkt ξ_l, und x' wieder irgend ein Punkt von s_N. Wie oben, werde dann $\xi_l \cdots x'$ durch s_r bezeichnet, so dass s_r mit der soeben eingeführten Grösse s_l' identisch ist. Alsdann folgt

$$\frac{t_r}{s_r} = \frac{\tau_{N',0} + \tau_{N'',0} + \cdots}{\sigma_{N',0} + \sigma_{N'',0} + \cdots} \tag{17}$$

und zwar ist gemäss den Gleichungen (4) und (5)

$$\frac{\tau_{N',0}}{\sigma_{N',0}} = A_{N'} \cdot \alpha_{N0}\,\frac{t}{s},$$

oder

$$\frac{\tau_{N',0}}{\sigma_{N',0}} = A_{N'} \cdot \beta_{N',2}\,\frac{t}{s}.$$

Falls wir nun noch ausdrücklich festsetzen, dass die Producte A_N *gleichmässig* gegen ihren Grenzwerth convergiren, und dass ebenso die Intervalle $s_{N',0}$ resp. $\sigma_{N',0}$ *gleichmässig* gegen Null convergiren, was für die oben abgeleiteten resp. angenommenen Bedingungen immer von selbst als erfüllt betrachtet wurde und auch für das Beispiel zutrifft, so folgt unmittelbar, dass

$$\lim \frac{t_r}{s_r} = \lim \frac{\tau_{N',0}}{\sigma_{N',0}} = \lim A_N^0 = 0$$

ist, und ebenso für $t_l : s_l$.

Nicht so selbstverständlich liegen die Dinge, falls die Folge (7) keinen Intervallendpunkt bestimmt. Bezeichnen wir den durch (7) bestimmten Punkt wieder durch x' und seine Abstände von ξ_l und ξ_r, wie oben, durch s_l' und s_r', so muss jedenfalls auch

$$\lim \frac{t_l'}{s_l'} = \lim \frac{t_r'}{s_r'} = \lim \frac{t_N}{s_N}$$

sein. Man hat nun wieder für s_l' und s_r' die Formeln (15) und (16), wo sich aber jetzt die Indicesgruppen $N', N'', N''', \cdots$ auf die Indicesfolge der Reihe (7) beziehen. Wenn nun zunächst diese Folge unendlich oft den Index 1 enthält, so ist $\lim A_{N'} = 0$, so dass demgemäss bei der vorausgesetzten gleichmässigen Convergenz auch

$$\lim \frac{t_l'}{s_l'} = \lim \frac{t_r'}{s_r'} = 0$$

ist. Dies gilt überhaupt immer, wenn für die Folge (7) $\lim A_N = 0$ ist.

Wenn jedoch $\lim A_N \gtrless 0$ ist, so hat man folgendermassen zu schliessen. Alsdann enthält die Folge (7) von einer bestimmten Stelle an nur noch den Index 0 oder 2, und es wird jetzt immer $\sigma_{N',0} = s_{N',0} + s_{N',1}$, also

$$\frac{t_l'}{s_l'} = \frac{t_{N',0} + t_{N',1} + t_{N'',0} + t_{N'',1} + \cdots}{s_{N',0} + s_{N',1} + s_{N'',0} + s_{N'',1} + \cdots}. \tag{18}$$

In diesem Fall ist aber x' der festzuhaltende Endpunkt, und es kommt daher, wenn x' dem Intervall s_{N2} angehört, auch der Quotient

$$\frac{t_l''}{s_l''} = \frac{t_{N,1} + t_{N',0} + t_{N',1} + \cdots}{s_{N,1} + s_{N',0} + s_{N',1} + \cdots} \tag{19}$$

resp. sein Grenzwerth in Frage. Da nun stets

$$\frac{t_{N1}}{s_{N1}} = \alpha_{N1} < 0, \quad \frac{t_{N0} + t_{N1}}{s_{N0} + s_{N1}} > 0$$

ist, so *wird dieser Quotient nur dann gegen* $\lim A_N$ *convergiren, falls immer das erste Glied von Zähler und Nenner gegen das zweite Glied nicht in Betracht kommt, welches auch die Werthe der in N, resp. N' auftretenden Indicesanzahlen ν und ν' sein mögen.* Dieser Bedingung ist daher noch Ausdruck zu geben.

Entspricht dem Punkte x' die Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ resp. die Intervallfolge

$$s_i, s_{ik}, s_{ikl}, \cdots s_N, \cdots s_{N'}, \cdots s_{N''}, \cdots$$

so dass vom ν-ten Index an die 1 nicht mehr auftritt, so bezeichnen gemäss der Definition von $\nu, \nu', \nu'', \cdots$ die Zahlen $\nu + 1, \nu' + 1, \nu'' + 1, \cdots$ diejenigen Stellen, an denen der Index 2 steht, während sonst alle Indices vom ν-ten an Null sind. Falls also z. B. die Indices 0 und 2 dauernd abwechseln, so ist $\nu' = \nu + 2$, $\nu'' = \nu' + 2, \cdots$ und die obengenannte Bedingung ist bereits dann erfüllt, wenn $\lim (s_{N1} : s_{N0}) = 0$ ist. Falls aber $\nu' - \nu$ sehr gross ist, oder gar mit ν über alle Grenzen wächst, was ja möglich sein kann, so liegen die Dinge weniger einfach. Unsere Indicesfolge enthält dann $\nu' - \nu - 1$ consecutive Nullen. Die nächste Nullenfolge reiche vom ν_1-ten bis zum ν_1'-ten Index, so dass also in der Indicesfolge je

$$\nu' - \nu - 1,\ \nu_1' - \nu_1 - 1,\ \nu_2' - \nu_2 - 1, \cdots$$

consecutive Nullen erscheinen. Diese Möglichkeit ist noch in Betracht zu ziehen. Setzt man nun noch

$$(20) \qquad A_{N'} = \dot{A}_N \cdot \alpha_{N2} \cdot \alpha_{N20} \cdot \alpha_{N200} \cdots \alpha_{N'} = A_N \cdot A'_{N'},$$

so muss

$$(21) \qquad \lim \frac{s_{N1}}{s_{N',0}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim \frac{t_{N1}}{t_{N',0}} = \lim \frac{\alpha_{N1}\, s_{N1}}{\alpha_{N'0} A'_{N'} s_{N',0}} = 0$$

sein, wobei die Indices ν_i und ν_i' der Bedingung genügen müssen, dass $\lim A_N \gtrless 0$ ist, also jedenfalls

$$A'_{N'} \cdot A'_{N_1'} \cdot A'_{N_2'} \cdots$$

gegen einen von Null verschiedenen Grenzwerth convergirt.

Nun folgt aus der oben (S. 557) angegebenen Constructionsvorschrift, dass die Factoren von $A'_{N'}$ immer consecutive Factoren des Products $\Pi(1 - b_\varrho)$ sind, insbesondere solche aus consecutiven Gliedern gebildete Theilproducte, dass deren Gesammtproduct endlich und von Null verschieden ist.*) Man fasse nun die zugehörigen Zahlenquotienten

$$\frac{\nu'}{\nu},\ \frac{\nu_1'}{\nu_1},\ \frac{\nu_2'}{\nu_2}, \cdots$$

ins Auge. Für sie kann es eine untere Grenze k so geben, dass für hinreichend grosses ν und ν' schliesslich nothwendig $\nu' < k\nu$ bleiben muss, damit $\lim A_N \lesseqgtr 0$ ist. Ist alsdann λ die nächstgrössere ganze Zahl, so dass $k\nu \leq \lambda$ ist, *so hat man die Bedingung zu erfüllen, dass gleichmässig*

$$\lim \frac{s_{N1}}{s_{L0}} = 0$$

ist, wo L die bezügliche Gruppe von λ Indices bedeutet. Die zweite der obigen Bedingungen ist damit, wie leicht zu sehen, von selbst erfüllt. Analoge Verhältnisse greifen Platz, wenn die Indicesfolge $i, k, l, \cdots$ den Index 2 in langen Folgen enthält, resp. beiderlei derartige Folgen.

Dass diese Bedingung durch Wahl von ε_{N0} und ε_{N2} erfüllbar ist, zeigt das oben angeführte Beispiel, in dem

$$\prod(1 - b_m) = \prod\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

*) Genauer ist noch von den ersten Factoren dieser Producte abzusehen, was jedoch ohne Belang ist. Solche Theilproducte hat Herr Pringsheim allgemein betrachtet; diese Ann. 22, S. 453.

ist. Falls hier in der zu x' gehörigen Indicesfolge (7) unendlich viele Folgen von Nullen oder Zweien auftreten, so werden durch *jede* derartige Folge gemäss dem obigen Bildungsgesetz lauter consecutive Factoren dieses Products bedingt. Wenn also z. B. eine Folge von $\nu' - \nu - 1$ Nullen vorhanden ist, so möge dem Intervall s_{N0} der Factor $1 - \frac{1}{m}$ entsprechen, wo m die oben (S. 557) bestimmte Zahl ist; für das Intervall $s_{N'0}$ dagegen sei er $1 - \frac{1}{m'}$, und es ist daher

$$A'_{N'} = \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m'}\right) = \frac{m}{m'}.$$

Nun ist klar, dass ein von Null verschiedener Grenzwerth des zu der betrachteten Indicesfolge zugehörigen Productes A_N nur dann existirt, wenn das Product

$$\frac{m'}{m} \cdot \frac{m_1'}{m_1} \cdot \frac{m_2'}{m_2} \cdots$$

endlich ist, so dass jedenfalls zuletzt immer

$$\frac{m'}{m} < 1 + e$$

bleibt, bei beliebigem $e > 0$. Andrerseits zeigt die obige Constructionsvorschrift, dass

$$m' > \nu', \qquad \nu + 1 < m < 2^{\nu+1}$$

ist*), woraus noch

$$\nu' < (1+e)2^{\nu+1}$$

folgt, und es genügt daher $\lambda = (1+e)2^{\nu+1}$ zu nehmen. Nun ist

$$\lim \frac{s_{N1}}{s_{L0}} = \lim\, (\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2})\, 2^{\lambda - \nu},$$

wie aus der Gl. (1) folgt und hieraus folgt weiter als hinreichende Bedingung

$$\lim\, (\varepsilon_{N0} + \varepsilon_{N2}) \cdot 2^{(1+e)2^{\nu}+1} = 0,$$

und dies lässt sich z. B. erfüllen, wenn wir jetzt die obenstehenden Werthe (S. 557) wie folgt abändern:

$$b_N = \frac{1}{m}, \; a_N = \frac{1}{m} + \frac{1}{2^{3^m}}, \; \varepsilon_{N0} = \frac{1}{2^{4^m}}, \; \varepsilon_{N2} = \frac{1}{2^{3^m}},$$

wo m dieselbe Bedeutung hat, wie oben.

Genau genommen hat man nun noch nachzuweisen, dass die vordere und hintere Ableitung in x' auch dann noch gegen den zu x' gehörigen

*) Statt 2 könnte jede Grösse $1 + f$ eintreten, wo $f > 0$ ist. Doch ist dies für das folgende ohne Belang.

Grenzwerth von A_N convergirt, falls man die Endpunkte der Intervalle s_l' und s_r' beliebig wählt; doch hat dies keinerlei Schwierigkeit und ergiebt sich leicht aus den oben gegebenen Ausführungen. Es folgt überdies auch aus einem allgemeinen von Herrn Brodén gegebenen Theorem*).

Damit ist gezeigt, dass man sich eine Function der genannten Art auf die mannigfachste Weise herstellen kann. Das nämliche wird sich für jedes unendliche Product erreichen lassen, das den Werth Null hat.

Königsberg, im Mai 1900.

*) Journ. f. Math. 118, S. 5.

The Alternating Group on Eight Letters and the Quaternary Linear Congruence Group Modulo Two.

By

LEONARD EUGENE DICKSON of Chicago.

Professor Moore has set up an abstract group which is holoedrically isomorphic with the alternating group on k letters*). A very elementary proof**) of this result is given in § 1. In an article in the *Annalen****), Prof. Moore applied his theorem to prove that the alternating group $G_{\frac{1}{2}8!}$ on 8 letters is holoedrically isomorphic with the group L of linear homogenous substitutions on 4 indices modulo 2. In § 2 of this paper is given a much simpler set of substitutions of L corresponding to the generators of $G_{\frac{1}{2}8!}$. In § 3 these relations are inverted, giving the substitutions of $G_{\frac{1}{2}8!}$ which correspond to the simplest generators of L. We therefore are able to pass readily from any substitution of either of the isomorphic groups to the corresponding substitution of the other.

§ 1.

Theorem. *The alternating substitution-group on k letters is holoedrically isomorphic with the abstract group $G\{k\}$ generated by the operators $E_1, E_2, \cdots, E_{k-2}$ subject to the generational relations:*

$$(1)\qquad E_1^3 = E_{i+1}^2 = (E_i E_{i+1})^3 = (E_i E_j)^2 = I$$
$$(i,\ i+1,\ j = 1, 2, \cdots, k-2;\quad i+1 < j)$$

where I denotes the identity-operator.

*) *Proc. Lond. Math. Soc.,* Vol. XXVIII, pp. 357—366.

**) The method of setting up the abstract form of a given concrete group by use of a rectangular table of the latter has been successfully employed by the writer in recent articles in the *Proc. Lond. Math. Soc.*, and *Trans. Amer. Math. Soc.*

***) Band 51, pp. 417—444; particularly pp. 435—6.

These relations are satisfied by the even substitutions

$$A_d = (l_{d+1}\, l_{d+2})\,(l_1\, l_2) \qquad (d = 1, \cdots, k-2)$$

which generate the alternating group on $l_1, l_2, \cdots, l_k$. The order $O\{k\}$ of the abstract group $G\{k\}$ is therefore $\overline{\gtrless} \frac{1}{2} k!$

The theorem being evident for $k = 3$, we suppose $k \overline{\gtrless} 4$. Denote by G the sub-group $G\{k-1\}$ generated by $E_1, E_2, \cdots, E_{k-3}$ and consider the following sets of operators of $G\{k\}$:

$$R_{k-1} = G, \quad R_{k-2} = GE_{k-2},$$
$$R_{k-3} = GE_{k-2}E_{k-3}, \cdots, R_2 = GE_{k-2}E_{k-3} \cdots E_2,$$
$$R_1 = GE_{k-2} \cdots E_2 E_1, \quad R_k = GE_{k-2} \cdots E_2 E_1^2.$$

To verify that these sets R_i are merely permuted upon applying as a right-hand multiplier any E_r, we give certain of the relations (1) the form

$$E_1E_2E_1 = E_2E_1^2E_2, \quad E_1E_i = E_iE_1^2, \quad E_1^2E_i = E_iE_1 \quad (i=3,\cdots,k-2),$$
$$E_jE_{j+1}E_j = E_{j+1}E_jE_{j+1}, \quad E_iE_j = E_jE_i \quad (i, j = 2,\cdots,k-2;\ i > j+1).$$

Then E_1 gives rise to the permutation $(R_1R_kR_2)$, to wit,

$$R_1E_1 = R_k, \quad R_kE_1 = R_2, \quad R_2E_1 = R_1, \quad R_tE_1 = R_t \quad (t=3,\cdots,k-1).$$

For $r > 2$, the right-hand multiplier E_r gives at once

$$R_{r+1}E_r = GE_{k-2} \cdots E_{r+1} \cdot E_r = R_r, \qquad R_rE_r = R_{r+1},$$
$$R_1E_r = GE_{k-2} \cdots E_2 \cdot E_rE_1^2 = GE_{k-2} \cdots E_rE_{r-1} \cdot E_r \cdot E_{r-2} \cdots E_2 \cdot E_1^2$$
$$= GE_{k-2} \cdots E_rE_{r-1}E_{r-2} \cdots E_2E_1^2 = R_k,$$

upon replacing $E_rE_{r-1}E_r$ by $E_{r-1}E_rE_{r-1}$ and moving the first E_{r-1} to the left of $E_{r+1}; \cdots, E_{k-2}$ and merging it into G. In a similar manner, $R_kE_r = R_1$. These results hold for $r = 2$, since

$$R_1E_2 = GE_{k-2} \cdots E_2E_1E_2 = GE_{k-2} \cdots E_3E_1^2E_2E_1^2 = R_k,$$

upon applying $E_3E_1^2 = E_1E_3$, $E_4E_1 = E_1^2E_4$, etc. Finally, E_r $(r > 1)$ leaves fixed the sets $R_i\,(i \neq 1,\ r,\ r+1,\ k)$. For $k > i > r+1$,

$$R_iE_r = GE_{k-2} \cdots E_iE_r = GE_rE_{k-2} \cdots E_i = GE_{k-2} \cdots E_i = R_i.$$

For $1 < i < r$, we find readily that

$$R_iE_r = GE_{k-2} \cdots E_rE_{r-1}E_rE_{r-2} \cdots E_i = GE_{k-2} \cdots E_rE_{r-1}E_{r-2} \cdots E_i,$$

upon replacing $E_rE_{r-1}E_r$ by $E_{r-1}E_rE_{r-1}$ and moving the first E_{r-1} to the left to merge into into G. Hence $E_r\,(r > 1)$ gives rise to the permutation $(R_rR_{r+1})\,(R_1R_k)$.

It follows that the product of any operator of these k sets by any generator E_i, and therefore by any operator of $G\{k\}$, is an operator belonging to the sets. Taking for the former the identity, we see that all the operators of $G\{k\}$ belong to these k sets. The number of operators of $G\{k\}$ is therefore at most k times the number in $G\{k-1\}$, whence

$$O\{k\} \overline{\gtrless} k\cdot O\{k-1\} \overline{\gtrless} \cdots \overline{\gtrless} k(k-1)\cdots 4\, O\{3\} = \frac{1}{2}k!$$

Combining this with the earlier result, it follows that $O\{k\} = \frac{1}{2}k!$ The proof of the holoedric isomorphism is therefore complete. In particular, the sets $R_1, \cdots, R_k$ give a rectangular array for the abstract group $G\{k\}$ with respect to its sub-group $G\{k-1\}$.

§ 2.

Theorem. *The group L of all linear homogeneous substitutions on 4 indices modulo 2 is holoedrically isomorphic with the alternating group on 8 letters**).

The relations (1), for $k = 8$, are satisfied by the substitutions of L,

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 0&0&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0&1&0&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&0&1&0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 0&1&0&1\\ 1&1&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix},$$

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&1 \end{pmatrix}, \quad E_5 = \begin{pmatrix} 0&0&1&0\\ 0&1&0&1\\ 1&0&0&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \quad E_6 = \begin{pmatrix} 0&1&1&1\\ 0&0&1&0\\ 0&1&0&0\\ 1&1&1&0 \end{pmatrix},$$

It follows that $E_1, \cdots, E_6$ generate a sub-group of L holoedrically isomorphic with the alternating group on 8 letters (holoedric since the latter group is simple). Since the order of L is $\frac{1}{2}8!$, the sub-group coincides with L.

The generators $E_1, \cdots, E_6$ were derived from the corresponding ones given by Moore**). The present ones contain 54 zero-elements, whereas those of Moore have only 39. This simplification made the calculations of § 3 much briefer.

*) For references to the literature on this theorem, see *Annalen*, Bd. 51, p. 419.

**) *Annalen*, Bd. 51, p. 435.

Transforming Moore's generators by the substitution of L,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

we obtain the simplified generators necessarily satisfying (1):

$$E_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_4' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_5' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_6' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Since E_2' and E_4' appear to be in as simple form as we can reach by transformation, we next transform the set $E_1', \cdots, E_6'$ by the most general substitution of L which leaves E_2' and E_4' unchanged. Such a substitution must have the form X or $X(\xi_1 \xi_4)(\xi_2 \xi_3)$, where

$$X \equiv \begin{pmatrix} 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Since the transformation of the set by $(\xi_1 \xi_4)(\xi_2 \xi_3)$ can not increase the number of zero-elements, but at most changes our notation for the indices, we consider only the transformer X, having period 2. It is commutative with E_6' and transforms E_1', E_3', E_5' into

$$E_1'' = \begin{pmatrix} a+1 & b & 1 & b \\ 0 & a & b+1 & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ b+1 & 1 & b+1 & a+1 \end{pmatrix}, \quad E_3'' = \begin{pmatrix} a & b & a+1 & b \\ 0 & a+1 & b+1 & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ b+1 & a & b+1 & a+1 \end{pmatrix},$$

$$E_5'' = \begin{pmatrix} a & b+1 & a+b & b+1 \\ 0 & a+1 & b+1 & 1 \\ 1 & b+1 & a & 0 \\ b+1 & a+b+1 & b+1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

Since E_3'' contains exactly three of each of the elements a, $a+1$, b, $b+1$, the same simplification occurs for each value 0, 1 of a or b.

A similar remark applies to E_1''. But E_5'' is simplest for $b \equiv 1 \pmod{2}$, the value of a being immaterial. Taking $a \equiv 0$, we obtain the set $E_1, \cdots, E_6$ upon dropping the primes on E_2', E_4', E_6' and the seconds on E_1'', E_3'', E_5''.

§ 3.

In virtue of the correspondence of generators

$$
(2) \qquad \begin{aligned} &E_1 \sim (23)(12), \quad E_2 \sim (34)(12), \quad E_3 \sim (45)(12), \\ &E_4 \sim (56)(12), \quad E_5 \sim (67)(12), \quad E_6 \sim (78)(12), \end{aligned}
$$

we are able to pass readily from any even substitution on the letters $1, 2, \cdots, 8$ to the corresponding linear substitution of the group L on 4 indices modulo 2. In order to pass inversely from a general substitution of L to the corresponding even substitution on $1, 2, \cdots, 8$, it is quite desirable to set up a correspondence of generators between the two groups such that the generators of L shall be as simple as possible. Now the group L is readily generated by the substitution of the type*)

$$
B_{ij}: \quad \xi_i' = \xi_i + \xi_j, \quad \xi_l' = \xi_l \quad (l = 1, \cdots, 4;\ l \neq i;\ i \neq j).
$$

It is convenient to have also the substitutions of $G_{\frac{1}{2}8!}$ which correspond to the permutations of the indices $\xi_1, \cdots, \xi_4$. We begin with the following simple identities: **)

$$
\begin{aligned} &(\xi_1 \xi_3) B_{24} = E_5, \qquad (\xi_2 \xi_4) B_{31} = E_5 E_4 E_5, \qquad (\xi_1 \xi_4)(\xi_2 \xi_3) = E_2 E_4, \\ &B_{12} B_{43} = E_2 E_6, \quad (\xi_3 \xi_4) B_{21} = E_1 E_6, \qquad (\xi_1 \xi_2)(\xi_3 \xi_4) B_{32} = E_2 E_3 E_1 E_5. \end{aligned}
$$

Since these relations can be solved in order for $E_5, E_4, E_2, E_6, E_1, E_3$, their left members may be chosen as generators of L. It is therefore possible to express in terms of them, and consequently in terms of the $E_1, \cdots, E_6$, any substitution B_{ij} and $(\xi_i \xi_j)$. In virtue of (2), we have the correspondences

$$
(3) \qquad \begin{aligned} &(\xi_1 \xi_3) B_{24} \sim (67)(12), \quad (\xi_2 \xi_4) B_{31} \sim (57)(12), \quad (\xi_1 \xi_4)(\xi_2 \xi_3) \sim (34)(56), \\ &B_{12} B_{43} \sim (34)(78), \quad (\xi_3 \xi_4) B_{21} \sim (23)(78), \quad \alpha = (\xi_1 \xi_2)(\xi_3 \xi_4) B_{32} \sim \\ &\qquad\qquad (2354)(67). \end{aligned}
$$

Forming the commutator relation

$$
\alpha^{-1} (\xi_1 \xi_4)(\xi_2 \xi_3) \alpha (\xi_1 \xi_4)(\xi_2 \xi_3) = B_{32} B_{23} = (\xi_2 \xi_3) B_{32},
$$

---

*) To multiply a substitution λ on the right by B_{ij}, we have only to add the j^{th} row to the i^{th} row of the matrix of λ. To multiply it on the left by B_{ij}, we add the i^{th} column to the j^{th} column. To express λ in terms of the B_{ij}, we therefore proceed as if simplifying the determinant of λ by the elementary rules.

**) $(\xi_i \xi_j)$ denotes the linear substitution $\xi_i' = \xi_j$, $\xi_j' = \xi_i$, etc.

and the commutator of the corresponding literal substitutions, we get

$$(\xi_2 \xi_3) B_{32} \sim (265)(347).$$

We obtain in succession the following substitutions:

$$(\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_3) = \alpha [(\xi_2 \xi_3) B_{32}]^{-1},$$
$$(\xi_3 \xi_4) B_{12} = (\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_3)(\xi_2 \xi_4) B_{31} (\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_3)^{-1},$$
$$(\xi_1 \xi_2) B_{12} = B_{12} B_{21} = (\xi_3 \xi_4) B_{12} \cdot (\xi_3 \xi_4) B_{21},$$
$$(\xi_1 \xi_2)(\xi_3 \xi_4) = (\xi_1 \xi_2) B_{12} \cdot (\xi_3 \xi_4) B_{12},$$
$$B_{34}(\xi_3 \xi_4) = (\xi_3 \xi_4) B_{43} = (\xi_3 \xi_4) B_{12} \cdot B_{12} B_{43},$$
$$(\xi_3 \xi_4) B_{34} = [B_{34}(\xi_3 \xi_4)]^{-1},$$
$$B_{42} = (\xi_3 \xi_4) B_{34} \cdot B_{32} \cdot B_{34}(\xi_3 \xi_4).$$

Forming the substitutions corresponding to the right members, we find in succession that

$$(\xi_1 \xi_2 \xi_4 \xi_3) \sim (27)(3645), \qquad (\xi_3 \xi_4) B_{12} \sim (24)(17),$$
$$(\xi_1 \xi_2) B_{12} \sim (187)(243), \qquad (\xi_1 \xi_2)(\xi_3 \xi_4) \sim (34)(18),$$
$$(\xi_3 \xi_4) B_{43} \sim (187)(234), \qquad B_{42} \sim (16)(25)(34)(78).$$

Combining these results with (3), we find that

$$B_{32} \sim (23)(45)(67)(18), \qquad (\xi_2 \xi_3) \sim (18)(27)(35)(46).$$

By simple transformations, we complete the proof of the

Theorem. *The correspondences* (2) *give reciprocally*

$$(\xi_1 \xi_2) \sim (13)(27)(48)(56), \qquad (\xi_1 \xi_3) \sim (16)(27)(34)(58),$$
$$(\xi_1 \xi_4) \sim (18)(27)(36)(45), \qquad (\xi_2 \xi_3) \sim (18)(27)(35)(46),$$
$$(\xi_2 \xi_4) \sim (15)(27)(34)(68), \qquad (\xi_3 \xi_4) \sim (14)(27)(38)(56),$$
$$B_{12} \sim (12)(38)(47)(56), \qquad B_{31} \sim (17)(25)(34)(68),$$
$$B_{14} \sim (18)(23)(46)(57), \qquad B_{32} \sim (23)(45)(67)(18),$$
$$B_{24} \sim (17)(26)(34)(58), \qquad B_{43} \sim (12)(37)(48)(56).$$

Given an arbitrary substitution of either of the isomorphic simple groups L *and* $G_{\frac{1}{2}8!}$, *these two sets of relations enable us to compute immediately the corresponding substitution of the other group*

April, 1900.

Ueber die asymptotischen Werthe einiger zahlentheoretischer Functionen.

Von

EDMUND LANDAU in Berlin.

Es bezeichne $\mu(k)$ diejenige zahlentheoretische Function, welche

1) für $k = 1$ gleich 1 ist,
2) wenn eine von 1 verschiedene Quadratzahl in k aufgeht, gleich 0 ist,
3) wenn k quadratfrei ist und aus ω Primfactoren besteht, gleich $(-1)^\omega$ ist.

Die Behauptung, dass die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$ convergire und die Summe 0 habe, das heisst, dass die Function

$$g(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k}$$

für $x = \infty$ den Grenzwerth 0 habe, ist ohne strengen Beweis schon von Euler*) ausgesprochen worden. Nachdem Herr Gram**) den Nachweis geführt hatte, dass die Function $g(x)$ jedenfalls nur zwischen zwei endlichen Unbestimmtheitsgrenzen oscilliren kann, hat Herr von Mangoldt***) die Convergenz der Reihe, also den Satz

$$\lim_{x=\infty} g(x) = 0 \tag{1}$$

bewiesen. Damit ergab sich auch das erste nicht triviale Resultat über eine andere Function

---

*) „Introductio in analysin infinitorum", T. 1, Cap. 15, Nr. 277, Ex. 1, p. 229, Lausanne, 1748.

**) Undersøgelser angaaende Maengden af Primtal under en given Graense", Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter, 6. Raekke, naturvidenskabelig og mathematisk Afdeling, II, 1884, S. 198 und 291.

***) „Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$", Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1897, S. 835—852.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k) \log k}{k},$$

von der Möbius*) ohne strengen Beweis behauptet hatte, dass sie sich für $x = \infty$ der Grenze -1 nähere. Da nämlich zwischen den Functionen $f(x)$ und $g(x)$ die von Herrn von Mangoldt**) aufgestellte Beziehung besteht:

$$(2) \qquad |\log x\, g(x) - f(x)| \leqq 3 + C,$$

wo C die Euler'sche Constante bezeichnet, so ergiebt sich aus (1)

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{\log x} = 0,$$

anders geschrieben:

$$(3) \qquad f(x) = \{\log x\},$$

wenn unter $\{F(x)\}$ eine Function verstanden wird, deren Quotient durch $F(x)$ für $x = \infty$ den Grenzwerth 0 hat. $O(F(x))$ bezeichne im Folgenden eine Function, deren Quotient durch $F(x)$ für grosse x nicht beliebig grosser Werthe fähig ist, also zwischen zwei endlichen Unbestimmtheitsgrenzen oscillirt, mögen dieselben verschieden sein oder in 0 oder einem anderen Werthe zusammenfallen.

In meiner Doctordissertation***), welche, wie die erwähnte Arbeit Herrn von Mangoldts, sich auf die von den Herren Hadamard†) und de la Vallée-Poussin††) gefundenen Ergebnisse aus der Theorie der Riemann'schen ζ-Function stützt, bin ich auf einem einfacheren Wege zu der Euler'schen Gleichung (1) gelangt, indem ich direct die asymptotische Gleichung (3) nachgewiesen habe, woraus (1) unter Anwendung der Ungleichheitsbedingung (2) folgt.

Die bedeutenden auf die Vertheilung der Nullstellen der Riemann'schen Function $\zeta(s)$ bezüglichen Resultate, zu denen Herr de la Vallée-Poussin†††) in neuester Zeit gelangt ist, gestatteten diesem, den Nachweis*†)

---

*) „Ueber eine besondere Art von Umkehrung der Reihen", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 9, 1832, S. 122.

**) l. c., S. 839.

***) „Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$", Berlin, 1899.

†) „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques", Bulletin de la société mathématique de France, t. 24, 1896.

††) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", Annales de la société scientifique de Bruxelles, t. 20, 2e partie, 1896.

†††) „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique, t. 59, 1899.

*†) l. c., 6tes Kapitel, S. 63—67.

zu führen, dass $g(x)$ höchstens von der Grössenordnung $\frac{1}{\log x}$ ist, das heisst. dass eine endliche Zahl h existirt, für welche identisch

$$\log x\,|g(x)| \leqq h \tag{4}$$

ist. Herr de la Vallée-Poussin hat also, wie sich aus einer Vergleichung der Relationen (2) und (4) ergiebt, den Nachweis geführt, dass $f(x)$ für alle x zwischen zwei endlichen Grenzen enthalten ist,

$$|f(x)| \leqq H. \tag{5}$$

Darauf habe ich*) unter Anwendung der neuen Sätze Herrn de la Vallée-Poussin's über die Vertheilung der Primzahlen den Nachweis der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} f(x) = -1, \tag{6}$$

also den Convergenzbeweis der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\log k}{k}$ erbracht; damit ist, wie sich aus (2) ergiebt, bewiesen, dass

$$\limsup_{x=\infty} (\log x\, g(x)) \leqq 4 + C$$

ist, während in der (allerdings für sämmtliche x giltigen) Ungleichheitsbedingung (4) die Constante h einen sehr grossen Werth hat.

Da die beiden für $\Re(s) > 1$ convergenten Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s}$ durch die Relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} = 1$$

verbunden sind und die Summe der ersten x Glieder der ersteren für $s = 1$ von der Ordnung $\log x$ ist, so könnte man vermuthen, dass die Summe $g(x)$ der ersten x Glieder der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$ von der Ordnung $\frac{1}{\log x}$ ist. Euler hatte — unerlaubterweise — die Folgerung

$$\lim_{x=\infty} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

daraus gezogen, dass das unendliche, auf alle Primzahlen erstreckte Product $\prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ wegen der Divergenz der Reihe $\sum_p \frac{1}{p}$ den Werth 0 hat, also daraus, dass

---

*) „Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, Paris, t. 129, 1899, S. 812—815.

$$\lim_{x=\infty} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \lim_{x=\infty} \sum_k \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

ist, wo k alle Zahlen durchläuft, deren Primfactoren sämmtlich $\leq x$ sind; der Euler'sche Satz selbst hat sich als richtig herausgestellt. Da nun Herr Mertens*) bewiesen hat, dass $\prod_{p \leq x}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ von der Ordnung $\frac{1}{\log x}$ ist, so könnte man erwarten, dass dies auch die Ordnung von $g(x)$ ist. Ich werde jedoch im ersten Paragraphen dieser Arbeit elementar nachweisen, dass also $\log x \, g(x)$ sich überhaupt keiner von 0 verschiedenen Grenze nähern kann, dass also $\log x \, g(x)$ sich entweder der Grenze 0 nähert oder — wenn $g(x)$ genau die Ordnung $\frac{1}{\log x}$ hat — zwischen zwei nicht zusammenfallenden und zufolge der Ungleichheitsbedingung (4) endlichen Unbestimmtheitsgrenzen oscillirt. Im § 2 werde ich unter Anwendung der Gleichung (6) zeigen, dass der erste dieser beiden denkbaren Fälle eintritt, dass also

$$\lim_{x=\infty} (\log x \, g(x)) = \lim_{x=\infty} \left(\log x \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k}\right) = 0 \tag{7}$$

ist. Im § 3 werden genauere Abschätzungen der beiden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben und im § 4 einige Folgerungen aus den gefundenen Sätzen gezogen werden.

§ 1.

Würde sich $\log x \, g(x)$ für $x = \infty$ einer positiven Grenze $2c$ nähern, so wäre für alle x oberhalb einer gewissen Zahl n

$$g(x) \geq \frac{c}{\log x};$$

es wäre also für $\nu \leq \frac{x}{n}$

$$g\left(\frac{x}{\nu}\right) \geq \frac{c}{\log x - \log \nu},$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \frac{1}{\nu} \, g\left(\frac{x}{\nu}\right) \geq \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \frac{1}{\nu} \, \frac{c}{\log x - \log \nu},$$

ein Ausdruck, der mit einem für $x = \infty$ zwischen endlichen Grenzen befindlichen Fehler durch das Integral

---

*) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1874, S. 53.

zu führen, dass $g(x)$ höchstens von der Grössenordnung $\frac{1}{\log x}$ ist, das heisst, dass eine endliche Zahl h existirt, für welche identisch

$$\log x\,|g(x)| \leqq h \tag{4}$$

ist. Herr de la Vallée-Poussin hat also, wie sich aus einer Vergleichung der Relationen (2) und (4) ergiebt, den Nachweis geführt, dass $f(x)$ für alle x zwischen zwei endlichen Grenzen enthalten ist,

$$|f(x)| \leqq H. \tag{5}$$

Darauf habe ich*) unter Anwendung der neuen Sätze Herrn de la Vallée-Poussin's über die Vertheilung der Primzahlen den Nachweis der Gleichung

$$\lim_{x=\infty} f(x) = -1, \tag{6}$$

also den Convergenzbeweis der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)\log k}{k}$ erbracht; damit ist, wie sich aus (2) ergiebt, bewiesen, dass

$$\lim_{x=\infty} \sup\,(\log x\, g(x)) \leqq 4 + C$$

ist, während in der (allerdings für sämmtliche x giltigen) Ungleichheitsbedingung (4) die Constante h einen sehr grossen Werth hat.

Da die beiden für $\Re(s) > 1$ convergenten Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s}$ durch die Relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} = 1$$

verbunden sind und die Summe der ersten x Glieder der ersteren für $s = 1$ von der Ordnung $\log x$ ist, so könnte man vermuthen, dass die Summe $g(x)$ der ersten x Glieder der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$ von der Ordnung $\frac{1}{\log x}$ ist. Euler hatte — unerlaubterweise — die Folgerung

$$\lim_{x=\infty} \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

daraus gezogen, dass das unendliche, auf alle Primzahlen erstreckte Product $\prod\limits_{p}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ wegen der Divergenz der Reihe $\sum\limits_{p} \frac{1}{p}$ den Werth 0 hat, also daraus, dass

*) „Contribution à la théorie de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, Paris, t. 129, 1899, S. 812—815.

$$\lim_{x=\infty} \prod_{p \leq x} \left(1-\frac{1}{p}\right) = \lim_{x=\infty} \sum_{k} \frac{\mu(k)}{k} = 0$$

ist, wo k alle Zahlen durchläuft, deren Primfactoren sämmtlich $\leq x$ sind; der Euler'sche Satz selbst hat sich als richtig herausgestellt. Da nun Herr Mertens*) bewiesen hat, dass $\prod\limits_{p \leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)$ von der Ordnung $\frac{1}{\log x}$ ist, so könnte man erwarten, dass dies auch die Ordnung von $g(x)$ ist. Ich werde jedoch im ersten Paragraphen dieser Arbeit elementar nachweisen, dass also $\log x \, g(x)$ sich überhaupt keiner von 0 verschiedenen Grenze nähern kann, dass also $\log x \, g(x)$ sich entweder der Grenze 0 nähert oder — wenn $g(x)$ genau die Ordnung $\frac{1}{\log x}$ hat — zwischen zwei nicht zusammenfallenden und zufolge der Ungleichheitsbedingung (4) endlichen Unbestimmtheitsgrenzen oscillirt. Im § 2 werde ich unter Anwendung der Gleichung (6) zeigen, dass der erste dieser beiden denkbaren Fälle eintritt, dass also

$$(7) \qquad \lim_{x=\infty} (\log x \, g(x)) = \lim_{x=\infty} \left(\log x \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k}\right) = 0$$

ist. Im § 3 werden genauere Abschätzungen der beiden Functionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben und im § 4 einige Folgerungen aus den gefundenen Sätzen gezogen werden.

§ 1.

Würde sich $\log x \, g(x)$ für $x = \infty$ einer positiven Grenze $2c$ nähern, so wäre für alle x oberhalb einer gewissen Zahl n

$$g(x) \geq \frac{c}{\log x};$$

es wäre also für $\nu \leq \frac{x}{n}$

$$g\left(\frac{x}{\nu}\right) \geq \frac{c}{\log x - \log \nu},$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \frac{1}{\nu} \, g\left(\frac{x}{\nu}\right) \geq \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \frac{1}{\nu} \, \frac{c}{\log x - \log \nu},$$

ein Ausdruck, der mit einem für $x = \infty$ zwischen endlichen Grenzen befindlichen Fehler durch das Integral

*) „Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1874, S. 53.

$$c\int_1^{\frac{x}{n}} \frac{1}{\nu}\,\frac{d\nu}{\log x - \log \nu} = c\int_1^{\frac{x}{n}} \frac{d\log \nu}{\log x - \log \nu} = c\left[-\log(\log x - \log \nu)\right]_1^{\frac{x}{n}}$$
$$= c\,(\log\log x - \log\log n)$$

ersetzt werden kann, also jede Grenze überschreitet. Dies steht jedoch mit der von Herrn Gram*) angegebenen Identität

$$1 = \sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right) = \sum_{1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \frac{1}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \sum_{\left[\frac{x}{n}\right]+1}^{x} \frac{1}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

in Widerspruch; denn wegen

$$|g(y)| \leqq 1^{**})$$

ist

$$\left|\sum_{\left[\frac{x}{n}\right]+1}^{x} \frac{1}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right)\right| \leqq \sum_{\left[\frac{x}{n}\right]+1}^{x} \frac{1}{\nu} \leqq \log x + 1 - \log\left[\frac{x}{n}\right] < \log n + 2,$$

also für alle x zwischen zwei endlichen Grenzen enthalten, so dass thatsächlich auch $\sum_{1}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \frac{1}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right)$ endlich bleiben muss.

Die Annahme, dass $\log x\, g(x)$ sich einer negativen Grenze nähert, führt ebenso zu einem Widerspruch.

$\log x\, g(x)$ nähert sich also entweder der Grenze 0 oder keiner Grenze.

§ 2.

Der Ausgangspunkt des im Folgenden zu erbringenden Nachweises der Behauptung

$$\lim\,(\log x\, g(x)) = 0$$

ist die von Herrn Cesàro***) aufgestellte Identität

$$(8) \qquad \sum_{t=1}^{x} \frac{1}{t} \sum_{\nu} \mu\left(\frac{t}{\nu}\right) \log \nu = \sum_{p,m} \frac{\log p}{p^m},$$

wo links ν alle Theiler von t durchläuft, rechts p alle Primzahlen und m

*) l. c., S. 197, Gleichung (43), wo $r = 1$ zu setzen ist.

**) S. Gram, l. c., S. 198 und 291, v. Mangoldt, l. c., S. 837.

***) „Sur diverses questions d'arithmétique", Mémoires de la société royale des sciences de Liège, 2e série, t. 10, 1883; es ist die Gleichung (12), S. 318 mit der Bemerkung auf S. 320, Z. 7—6 v. u. zu combiniren.

alle positiven ganzen Zahlen, für welche $p^m \leqq x$ ist. Die Quelle dieser Identität ist der Umstand, dass die Summe $\sum_\nu \mu\left(\frac{t}{\nu}\right)\log\nu$ verschwindet, wenn t keine Primzahlpotenz ist, dagegen gleich $\log p$ ist, wenn t eine Primzahlpotenz p^m ist. Wie man aus der Zerlegung $t = \frac{t}{\nu}\cdot\nu$ leicht sieht, ist die linke Seite von (8) mit der Summe*)

$$\sum_{\nu=2}^{x} \frac{\log\nu}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right) = \sum_{\nu=2}^{x} \frac{\log\nu}{\nu} \sum_{k=1}^{\frac{x}{\nu}} \frac{\mu(k)}{k}$$

identisch; denn ν und $\frac{t}{\nu} = k$ durchlaufen unabhängig alle Zahlen, für welche $\nu k \leqq x$ ist.

Im Folgenden werde ich eine dritte Form derselben benutzen, nämlich

$$\sum_{k=1}^{\frac{x}{2}} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{\nu=2}^{\frac{x}{k}} \frac{\log\nu}{\nu}, \tag{9}$$

und diese Summe werde ich in ähnlicher Weise behandeln wie Herr von Mangoldt**) die analoge Summe $\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} \sum_{\nu=1}^{\frac{x}{k}} \frac{1}{\nu}$, deren Betrachtung ihn zu der Ungleichheitsbedingung (2) geführt hat.

Es ist für ganzzahlige Werthe von y

$$\sum_{\nu=2}^{y} \frac{\log\nu}{\nu} = \int_1^y \frac{\log\nu}{\nu}\, d\nu + D + O\left(\frac{\log y}{y}\right) = \frac{1}{2}\log^2 y + D + O\left(\frac{\log y}{y}\right),$$

wo D eine Constante bezeichnet, auf deren Werth es im Folgenden nicht ankommt. Dies gilt auch für gebrochene y, da

$$\int_{[y]}^{y} \frac{\log\nu}{\nu}\, d\nu = O\left(\frac{\log y}{y}\right)$$

ist. Daher ergiebt sich

*) Die Summationsgrenzen brauchen im Folgenden durchweg keine ganzen Zahlen zu sein; der Summationsbuchstabe hat alle im Summationsintervall mit Einschluss der Grenzen enthaltenen ganzzahligen Werthe zu durchlaufen.

**) l. c. S. 838.

$$\left|\sum_{k=1}^{x}\frac{1+f(k)}{k}\right| \leqq \frac{\delta}{2}\log x + \frac{\delta}{2}\log x = \delta \log x,$$

$$\sum_{k=1}^{x}\left(\frac{1}{k}+\frac{f(k)}{k}\right) = \{\log x\},$$

$$\sum_{k=1}^{x}\frac{f(k)}{k} \quad = -\sum_{k=1}^{x}\frac{1}{k} + \{\log x\} = -\log x + \{\log x\},$$

$$\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)\log^2 k}{k} = \log x + \{\log x\} - \log x + \{\log x\} = \{\log x\},$$

was zu beweisen war.

Die Gleichung (10) ergiebt also

$$\frac{1}{2}\log^2 x\, g(x) + \log x + \{\log x\} = \log x + O(1),$$
$$\log^2 x\, g(x) = \{\log x\},$$
$$\log x\, g(x) = \{1\},$$

das heisst

$$\lim_{x=\infty}\left(\log x \sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)}{k}\right) = 0.$$

Man kann auch auf folgendem Wege, gleichfalls unter Benutzung des soeben bewiesenen Hilfssatzes (11), zu dieser Gleichung gelangen, indem man ihn statt mit (10) mit der von Herrn von Mangoldt*) aufgestellten Gleichung

$$\text{(12)} \qquad \log^2 x\, g(x) - \sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)\log^2 k}{k} = \{\log x\}$$

combinirt. Aus (11) und (12) folgt nämlich durch Elimination von $\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)\log^2 k}{k}$

$$\log^2 x\, g(x) - \{\log x\} = \{\log x\},$$
$$\log x\, g(x) = \{1\}.$$

Der zuerst gegebene Beweis verdient jedoch den Vorzug, weil die Gleichung (12) bisher im Gegensatz zu (10) nicht elementar bewiesen werden kann. Ihre Herleitung ist der einzige Theil des v. Mangoldt'schen Con-

*) l. c., S. 845.

vergenzbeweises der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$, in welchem von der Theorie der ζ-Function Gebrauch gemacht wird.

Eine dritte Beweisanordnung ergiebt sich durch Combination von (10) und (12). Die Elimination von $\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k) \log^2 k}{k}$ ergiebt hier

$$\log^2 x\, g(x) - \log x\, f(x) = \log x + \{\log x\},$$

$$\log x\, g(x) - f(x) = 1 + \{1\}. \tag{13}$$

Die Gleichung (13) sagt aus, dass die Function

$$\log x \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k) \log k}{k},$$

von der Herr v. Mangoldt*) zuerst bewiesen hat, dass sie zwischen endlichen Grenzen enthalten bleibt, sich für $x = \infty$ der Grenze 1 nähert, und es ist bemerkenswerth, dass sich dies ohne Zuhilfenahme anderer transcendenter Hilfsmittel ergeben hat als der in der v. Mangoldt'schen Arbeit enthaltenen.

Aus (13) folgt unter Benutzung von

$$f(x) = -1 + \{1\}$$

der behauptete Satz

$$\log x\, g(x) = \{1\}.$$

§ 3.

Am erwähnten Orte**) habe ich mich damit begnügt, den Nachweis der Convergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k) \log k}{k}$ zu führen. Die dort angestellten Betrachtungen will ich nunmehr in eine solche Form bringen, dass sie zugleich eine Abschätzung des Restes $-(1 + f(x))$ der Reihe liefern, der durch Weglassung der ersten x Glieder entsteht. Ersetzt man in $\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k) \log k}{k}$ für $k = \prod_p p^\alpha$ den Factor $\log k$ durch $\sum_p \alpha \log p$ und berücksichtigt, dass wegen des Factors $\mu(k)$ nur solche k vorkommen,

*) l. c., S. 839.

**) „Contribution etc."

in denen jeder Primfactor genau einmal aufgeht, so ist, da k alle Vielfachen von p durchläuft,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k) \log k}{k} = \sum_{p \leq x} \log p \sum_{m=1}^{\frac{x}{p}} \frac{\mu(mp)}{mp}\,{}^{*)},$$

woraus sich leicht

$$-f(x) = \sum_{p \leq x} \log p \left(\frac{1}{p} \sum_{1}^{\frac{x}{p}} \frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{p^2} \sum_{1}^{\frac{x}{p^2}} \frac{\mu(k)}{k} + \frac{1}{p^3} \sum_{1}^{\frac{x}{p^3}} \frac{\mu(k)}{k} + \cdots \right)$$

$$= \sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \cdots \right)$$

ergiebt.

In die erste Summe führe ich die durch die Gleichungen

$$\varepsilon(0) = 0,$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\sum_{p \leq x} \log p}{x} - 1 = \frac{\vartheta(x)}{x} - 1 \qquad (x > 0)$$

erklärte Function $\varepsilon(x)$ ein. Von derselben hat Herr Mertens**) bewiesen, dass für alle x

$$|\varepsilon(x)| \leq 1$$

ist und Herr de la Vallée-Poussin***), dass

$$\varepsilon(x) = O\left(e^{-b\sqrt{\log x}}\right) \tag{14}$$

ist, wo b eine positive Constante bezeichnet. Die Einführung der Function $\varepsilon(x)$ geschieht mit Hilfe der Identität

$$\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu - 1) = \nu + \nu\varepsilon(\nu) - (\nu - 1) - (\nu - 1)\varepsilon(\nu - 1)$$
$$= 1 + \nu\varepsilon(\nu) - (\nu - 1)\varepsilon(\nu - 1) = \log \nu \text{ oder } 0,$$

je nachdem ν prim oder zusammengesetzt ist; es ergiebt sich

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) = \sum_{\nu=1}^{x} \frac{1 + \nu\varepsilon(\nu) - (\nu - 1)\varepsilon(\nu - 1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) \tag{15}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) + \sum_{\nu=1}^{x} (\varepsilon(\nu) - \varepsilon(\nu - 1)) g\left(\frac{x}{\nu}\right)$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\varepsilon(\nu - 1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right),$$

*) Die Anwendung des Summationsbuchstaben p bezeichne, dass nur die Primzahlen des betreffenden Intervalles durchlaufen werden sollen.

**) l. c., S. 48.

***) „Sur la fonction etc.", S. 54.

also unter Anwendung der Gram'schen Identität

$$\sum_{\nu=1}^{x} \frac{1}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right) = 1$$

und durch partielle Summation der zweiten Summe auf der rechten Seite von (15)

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} g\left(\frac{x}{p}\right) = 1 + \sum_{\nu=1}^{x} \varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right) + \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\varepsilon(\nu-1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right),$$

$$(16) \quad -f(x) = 1 + \sum_{\nu=1}^{x} \varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right) + \sum_{\nu=1}^{x} \frac{\varepsilon(\nu-1)}{\nu} g\left(\frac{x}{\nu}\right)$$
$$+ \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \left(\frac{1}{p^2} g\left(\frac{x}{p^2}\right) + \frac{1}{p^3} g\left(\frac{x}{p^3}\right) + \cdots + \frac{1}{p^{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]}} g\left(\frac{x}{p^{\left[\frac{\log x}{\log p}\right]}}\right)\right).$$

1) Für die erste Summe der rechten Seite ergiebt sich unter Anwendung des von Herrn de la Vallée-Poussin*) bewiesenen Satzes

$$(17) \qquad g(x) = O\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

durch passende Zerlegung in drei Theile:

$$1\alpha) \quad \left|\sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right| \leqq \sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \left(\left|g\left(\frac{x}{\nu}\right)\right| + \left|g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right|\right)$$
$$= O\sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \left(\frac{1}{\log x - \log \nu} + \frac{1}{\log x - \log(\nu+1)}\right)$$
$$= O\sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \frac{1}{\log x - \log(\sqrt{\log x}+1)} = O\left(\frac{\sqrt{\log x}}{\log x}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right).$$

$$1\beta) \quad \left|\sum_{\sqrt{\log x}}^{\sqrt{x}} \varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right| = O\sum_{\sqrt{\log x}}^{\sqrt{x}} e^{-b\sqrt{\log \nu}} \left|\sum_{\frac{x}{\nu+1} < k \leq \frac{x}{\nu}} \frac{\mu(k)}{k}\right|$$
$$= O\sum_{\sqrt{\log x}}^{\sqrt{x}} e^{-b\sqrt{\log \nu}} \sum_{\frac{x}{\nu+1} < k \leq \frac{x}{\nu}} \frac{1}{k}.$$

---

*) „Sur la fonction etc.“, S. 67.

Wegen $\nu^2 \leqq x$, $\frac{\nu}{x} \leqq \frac{1}{\nu}$ ist

$$\sum_{\frac{x}{\nu+1}<k\leq\frac{x}{\nu}} \frac{1}{k} = \sum_{1}^{\frac{x}{\nu}} \frac{1}{k} - \sum_{1}^{\frac{x}{\nu+1}} \frac{1}{k} = \log\frac{x}{\nu} + C + O\left(\frac{\nu}{x}\right) - \log\frac{x}{\nu+1} - C + O\left(\frac{\nu+1}{x}\right)$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{\nu}\right) + O\left(\frac{\nu}{x}\right) \leqq \frac{1}{\nu} + O\left(\frac{\nu}{x}\right) = O\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

$$\left|\sum_{\sqrt{\log x}}^{\sqrt{x}} \varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right| = O\sum_{\sqrt{\log x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^{-b\sqrt{\log \nu}}}{\nu}$$

$$= O\int_{\sqrt{\log x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^{-b\sqrt{\log \nu}}}{\nu}\, d\nu + O\left(\frac{e^{-b\sqrt{\log\sqrt{\log x}}}}{\sqrt{\log x}}\right).$$

Es ist

$$\int_{\sqrt{\log x}}^{\sqrt{x}} \frac{e^{-b\sqrt{\log \nu}}}{\nu}\, d\nu < \int_{\sqrt{\log x}}^{\infty} \frac{e^{-b\sqrt{\log \nu}}}{\nu}\, d\nu = \int_{\frac{1}{2}\log\log x}^{\infty} e^{-b\sqrt{u}}\, du$$

$$= 2e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\log\log x}}\left(\frac{\sqrt{\log\log x}}{b\sqrt{2}} + \frac{1}{b^2}\right) = O\left(\sqrt{\log\log x}\, e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\log\log x}}\right)$$

$$= O\left(e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right),$$

wo c eine positive Constante bezeichnet.

$1\gamma)$
$$\left|\sum_{\sqrt{x}}^{x} \varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right)\right| = O\sum_{\sqrt{x}}^{x} e^{-b\sqrt{\log\nu}} \sum_{\frac{x}{\nu+1}<k\leq\frac{x}{\nu}} \frac{1}{k}$$

$$= O\sum_{\sqrt{x}}^{x} e^{-b\sqrt{\log\sqrt{x}}} \sum_{\frac{x}{\nu+1}<k\leq\frac{x}{\nu}} \frac{1}{k}$$

$$= e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\log x}}\, O\sum_{\nu=1}^{x} \sum_{\frac{x}{\nu+1}<k\leq\frac{x}{\nu}} \frac{1}{k} = e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\log x}}\, O\sum_{1}^{x}\frac{1}{k}\,{}^{*)} = O\left(\log x\, e^{-\frac{b}{\sqrt{2}}\sqrt{\log x}}\right).$$

Wenn man das Glied höchster Ordnung in den unter $1\alpha)$, $1\beta)$, $1\gamma)$ gefundenen Theilresultaten beibehält, ist also

$$\sum_{1}^{x} \varepsilon(\nu)\left(g\left(\frac{x}{\nu}\right) - g\left(\frac{x}{\nu+1}\right)\right) = O\left(e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right).$$

---

*) Denn die Intervalle $\frac{x}{2}\cdots x$, $\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{2}$, $\cdots$ ergeben zusammen $1\cdots x$.

2) Was die zweite Summe in (16) anbetrifft, so ist

$$2\alpha)\qquad \left|\sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \frac{\varepsilon(\nu-1)}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right)\right| = O\sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \frac{1}{\nu}\, \frac{1}{\log x - \log \nu}$$

$$= O\sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \frac{1}{\nu}\, \frac{1}{\log x - \log\sqrt{\log x}} = \frac{1}{\log x}\, O\sum_{1}^{\sqrt{\log x}} \frac{1}{\nu}$$

$$= \frac{1}{\log x}\, O\left(\log\sqrt{\log x}\right) = O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right).$$

2β) Aus (14) folgt leicht

$$|\varepsilon(\nu-1)| = O\left(e^{-b\sqrt{\log \nu}}\right),$$

also

$$\left|\sum_{\sqrt{\log x}}^{x} \frac{\varepsilon(\nu-1)}{\nu}\, g\left(\frac{x}{\nu}\right)\right| = O\sum_{\sqrt{\log x}}^{x} \frac{e^{-b\sqrt{\log \nu}}}{\nu}$$

$$= O\int_{\sqrt{\log x}}^{\infty} \frac{e^{-b\sqrt{\log \nu}}}{\nu}\, d\nu + O\left(\frac{e^{-b\sqrt{\log\sqrt{\log x}}}}{\sqrt{\log x}}\right) = O\left(e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right),$$

wie in 1β).

3) Die dritte Summe in (16) ist dem absoluten Werthe nach

$$\leqq \sum_{n} \frac{\log p}{n} \left|g\left(\frac{x}{n}\right)\right|,$$

wo n alle Primzahlpotenzen*) bis x oder auch bis ∞ durchläuft und p die zugehörige Basis bezeichnet; es ergiebt sich durch passende Zerlegung in zwei Theile

$$3\alpha)\qquad \sum_{n\leq\log x} \frac{\log p}{n} \left|g\left(\frac{x}{n}\right)\right| = O\sum_{n\leq\log x} \frac{\log p}{n}\, \frac{1}{\log x - \log n}$$

$$= O\sum_{n\leq\log x} \frac{\log p}{n}\, \frac{1}{\log x - \log\log x} = \frac{1}{\log x}\, O\sum_{n\leq\log x} \frac{\log p}{n}.$$

Die auf alle Primzahlpotenzen erstreckte Reihe

$$\sum_{n} \frac{\log p}{n} = \sum_{p} \log p\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \cdots\right) = \sum_{p} \frac{\log p}{p(p-1)}$$

convergirt; demnach ist

$$\sum_{n\leq\log x} \frac{\log p}{p} \left|g\left(\frac{x}{n}\right)\right| = \frac{1}{\log x}\, O(1) = O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

---

*) mit Exponenten $\geqq 2$.

$$3\beta)\qquad \sum_{\log x \leq n} \frac{\log p}{p} \left| g\left(\frac{x}{n}\right) \right| = O \sum_{\log x \leq n} \frac{\log p}{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\log x}}\right)$$

da der Rest der convergenten Reihe $\sum\limits_{n} \frac{\log p}{n}$

$$\sum_{y \leq n} \frac{\log p}{n} = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

ist, wie man leicht zeigen kann.

Alles in Allem erhalte ich also das Resultat

$$f(x) = -1 + O\left(e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right).$$

Daraus ergiebt sich mit Hilfe der beim Beweise des Hilfssatzes auf S. 577 angestellten Betrachtungen

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)\log^2 k}{k} = -\sum_{k=1}^{x} \frac{f(k)}{k} + O(1) + f(x)\log x + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\sum_{k=3}^{x} \frac{-1 + O\left(e^{-c\sqrt{\log\log k}}\right)}{k} - \log x + O\left(\log x\, e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right)^{*})$$

$$= \sum_{k=3}^{x} \frac{1}{k} + O\int_3^x \frac{1}{u}\, e^{-c\sqrt{\log\log u}}\, du - \log x + O\left(\log x\, e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right)$$

$$= \log x + O(1) + O\int_{\log 3}^{\log x} e^{-c\sqrt{\log y}}\, dy - \log x + O\left(\log x\, e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right)$$

$$= O\left(\log x\, e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right).$$

Die Gleichung (10) verwandelt sich demnach in

$$\frac{1}{2}\log^2 x\, g(x) + \log x + O\left(\log x\, e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right) = \log x + O(1),$$

$$\log^2 x\, g(x) = O\left(\log x\, e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right),$$

$$(18)\qquad g(x) = O\left(\frac{1}{\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right).$$

Bei passender Wahl zweier positiver Constanten c und γ ist also für alle $x \geqq e$**)

$$\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}} \left| \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} \right| \leqq \gamma.$$

*) Für $k = 1$ und $k = 2$ wäre $\sqrt{\log\log k}$ imaginär; durch Weglassung der beiden ersten Summenglieder entsteht aber nur ein endlicher Fehler, der gegen $\log x\; e^{-c\sqrt{\log\log x}}$ vernachlässigt werden kann.

**) Für $x < e$ wäre die linke Seite imaginär.

§ 4.

Daraus folgt, dass die von Herrn von Mangoldt*) mit $M(x)$ und von Herrn Mertens**) mit $\sigma(x)$ bezeichnete Function $\sum_{k=1}^{x} \mu(k)$ höchstens von der Grössenordnung

$$\frac{x}{\log x \, e^{c\sqrt{\log \log x}}}$$

ist; denn

$$M(x) = \sum_{k=1}^{x} \mu(k) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} \cdot k = \sum_{k=1}^{x} (g(k) - g(k-1))k$$

$$= \sum_{k=1}^{x} g(k)(k - (k+1)) + g(x)([x]+1)$$

$$= -\sum_{k=1}^{x} g(k) + g(x)([x]+1)$$

$$= O\int_{e}^{x} \frac{du}{\log u \, e^{c\sqrt{\log\log u}}} + O\left(\frac{x}{\log x \, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right) = O\left(\frac{x}{\log x \, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right).$$

Unter den unterhalb x gelegenen quadratfreien Zahlen, deren Anzahl bekanntlich

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n)\left[\frac{x}{n^2}\right] = \sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \mu(n)\left(\frac{x}{n^2} + O(1)\right) = x\sum_{n=1}^{\sqrt{x}} \frac{\mu(n)}{n^2} + O(\sqrt{x})$$

$$= x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} + x\,O\sum_{\sqrt{x}}^{\infty} \frac{1}{n^2} + O(\sqrt{x}) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x})$$

beträgt, giebt es also nicht nur asymptotisch ebensoviele, die aus einer geraden als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primfactoren zusammengesetzt sind***), sondern es lässt sich über die Differenz dieser beiden Anzahlen (deren jede asymptotisch gleich $\frac{3}{\pi^2}x$ ist) aussagen, dass sie höchstens von der Ordnung $\frac{x}{\log x \, e^{c\sqrt{\log\log x}}}$ unendlich wird.

*) l. c., S. 850.

**) „Ueber eine zahlentheoretische Function", Sitzungsberichte der Wiener Akademie, Bd. 106, Abt. 2ª, 1897, S. 761.

***) Dies folgt schon aus der Convergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k}$; s. v. Mangoldt, S. 849—851 und des Verf. „Neuer etc.", S. 15—16.

Wenn $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ und allgemeiner $\pi_\nu(x)$ die Anzahl aller Zahlen $\leqq x$ bezeichnet, welche quadratfrei und aus ν Primfactoren zusammengesetzt sind, so ist, wie ich a. a. O. gezeigt habe*),

$$\pi_\nu(x) = \frac{1}{(\nu-1)!}\,\frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{\log x} + O\left(\frac{x(\log\log x)^{\nu-2}}{\log x}\right).$$

Hier hat sich eine asymptotische Abschätzung von

$$1 - \pi_1(x) + \pi_2(x) - \cdots + (-1)^\nu \pi_\nu(x) + \cdots$$

ergeben, da dieser Ausdruck mit $\sum_{k=1}^{x} \mu(k)$ übereinstimmt, während

$$1 + \pi_1(x) + \pi_2(x) + \cdots + \pi_\nu(x) + \cdots = q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + O(\sqrt{x})$$

ist.

Es bezeichne $\lambda(k)$ im Anschluss an Liouville**) $+1$ oder -1, je nachdem k aus einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primfactoren besteht, mehrfache Primfactoren mehrmals gerechnet. Dann ist bekanntlich

$$\lambda(k) = \sum_m \mu\left(\frac{k}{m^2}\right),$$

wo m^2 alle quadratischen Theiler von k durchläuft; denn $\mu\left(\frac{k}{m^2}\right)$ ist für den grössten quadratischen Theiler m^2 von k gleich $(-1)^\omega$, wo ω die Anzahl der verschiedenen Primfactoren von k bezeichnet, und es ist stets

$$\lambda(m^2 n) = \lambda(n);$$

für die anderen quadratischen Theiler m^2 von k ist aber $\frac{k}{m^2}$ nicht quadratfrei, also

$$\mu\left(\frac{k}{m^2}\right) = 0.$$

Demnach ist

$$L(x) = \sum_{k=1}^{x} \lambda(k) = \sum_{k=1}^{x}\sum_m \mu\left(\frac{k}{m^2}\right) = \sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\sum_k \mu\left(\frac{k}{m^2}\right),$$

wo k alle Zahlen durchläuft, welche durch m^2 theilbar sind und unterhalb x liegen, d. h., wie auch direct ersichtlich ist,

---

*) „Sur quelques problèmes relatifs à la distribution des nombres premiers", Bulletin de la société mathématique de France, t. 28, 1900, p. 37.

**) „Sur quelques fonctions numériques", Journal de mathématiques pures et appliquées, 2e série, t. 2, 1857, p. 246.

$$L(x)=\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\frac{x}{m^2}}\mu(n)=\sum_{m=1}^{\sqrt{x}}M\left(\frac{x}{m^2}\right)=\sum_{m=1}^{\log^2 x}M\left(\frac{x}{m^2}\right)+\sum_{\log^2 x}^{\sqrt{x}}M\left(\frac{x}{m^2}\right)$$

$$=O\sum_{m=1}^{\log^2 x}\frac{x}{m^2(\log x-2\log m)e^{c\sqrt{\log(\log x-2\log m)}}}+O\sum_{\log^2 x}^{\sqrt{x}}\frac{x}{m^2}$$

$$=O\sum_{m=1}^{\log^2 x}\frac{x}{m^2(\log x-4\log\log x)e^{c\sqrt{\log(\log x-4\log\log x)}}}+x\,O\sum_{\log^2 x}^{\infty}\frac{1}{m^2}$$

$$=O\left(\frac{x}{\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\right)+O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$$

$$=O\left(\frac{x}{\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right),$$

so dass nicht nur, wie schon Herr von Mangoldt*) gefunden hat, es bis x asymptotisch ebensoviele Zahlen giebt, die aus einer geraden, als solche, die aus einer ungeraden Anzahl von Primfactoren zusammengesetzt sind, sondern sogar die Differenz beider Anzahlen von angebbar geringerer Grössenordnung unendlich wird. Bezeichnet $\sigma_\nu(x)$ die Anzahl aller Zahlen $\leq x$, welche aus ν Primfactoren zusammengesetzt sind, mehrfache mehrmals gerechnet, so ist

$$\sigma_\nu(x)=\frac{1}{(\nu-1)!}\frac{x(\log\log x)^{\nu-1}}{\log x}+O\left(\frac{x(\log\log x)^{\nu-2}}{\log x}\right)^{**)},$$

$$1-\sigma_1(x)+\sigma_2(x)-\cdots+(-1)^\nu\sigma_\nu(x)+\cdots=\sum_{k=1}^{x}\lambda(k)=O\left(\frac{x}{\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right),$$

$$1+\sigma_1(x)+\sigma_2(x)+\cdots+\sigma_\nu(x)+\cdots=[x]=x+O(1).$$

Mit Hilfe der erhaltenen Abschätzung für $g(x)$ lassen sich Ungleichungen für Ausdrücke der Form

$$\sum_{k=1}^{x}\frac{\mu(k)}{k}F(k)=\sum_{k=1}^{x}g(k)(F(k)-F(k+1))+g(x)F([x]+1)$$

aufstellen. Im Besonderen ergiebt sich die absolute Convergenz aller Reihen der Form

$$(19)\qquad\qquad \sum_{k=1}^{\infty}g(k)\,G(k),$$

---

*) l. c., S. 852.

**) „Sur quelques etc." p. 38.

wo $G(k)$ von einer gewissen Stelle a an positiv ist und monoton abnimmt, ferner der Bedingung genügt, dass das Integral

$$\int_a^\infty \frac{G(u)}{\log u\, e^{c\sqrt{\log\log u}}}\,du \tag{20}$$

einen Sinn hat. Dies ist für

$$G(u) = \frac{1}{u}$$

der Fall, da

$$e^{-c\sqrt{\log\log u}} = O\left(\frac{1}{(\log\log u)^2}\right),$$

also für $a > e$

$$\int_a^\infty \frac{du}{u\log u\, e^{c\sqrt{\log\log u}}} = O\int_a^\infty \frac{du}{u\log u\,(\log\log u)^2} = O\left(\frac{1}{\log\log a}\right) = O(1)$$

ist. Also convergirt die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(k)}{k}$$

absolut. Es ist jedoch zu bemerken, dass die bedingte Convergenz dieser Reihe schon aus (13) durch folgendes Verfahren hergeleitet werden kann. Es ist nach (13)

$$\begin{aligned}
1 + \{1\} &= \log x \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} - \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)\log k}{k} = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} \log\frac{x}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{x} \log\frac{x}{k}\,(g(k) - g(k-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{x} g(k)\left(\log\frac{x}{k} - \log\frac{x}{k+1}\right) + g(x)\log\frac{x}{[x]+1} \\
&= \sum_{k=1}^{x} g(k)\log\left(1+\frac{1}{k}\right) + \{1\} \\
&= \sum_{k=1}^{x} g(k)\left(\frac{1}{k} - \frac{\vartheta_k}{2k^2}\right) + \{1\} \qquad (0 \leq \vartheta_k \leq 1).
\end{aligned}$$

Da $|g(k)\vartheta_k| \leq 1$ ist, convergirt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{g(k)\vartheta_k}{2k^2}$ (ϑ_k ist für jedes k eine ganz bestimmte Zahl zwischen 0 und 1); also convergirt, wie behauptet, die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{g(k)}{k}$.

Analoge Sätze gelten über die mit Liouville'schen Coefficienten behafteten Reihen. Ich hebe besonders hervor, dass sich aus

$$g(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\mu(k)}{k} = O\left(\frac{1}{\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right)$$

mit Hilfe der Identität

$$G(x) = \sum_{m=1}^{\sqrt{x}} \frac{1}{m^2}\, g\left(\frac{x}{m^2}\right)$$

leicht ergiebt, dass

$$G(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{\lambda(k)}{k} = O\left(\frac{1}{\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right)^{*)}$$

ist. Daraus folgt weiter, dass

$$\sum_{k=1}^{x} \frac{\lambda(k)\log k}{k}$$

sich einer Grenze nähert, genauer, dass das Restglied von der Ordnung $e^{-a\sqrt{\log\log x}}$ ist. Der Werth dieser Grenze stimmt mit

$$\lim_{s=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(k)\log k}{k^s} = -\lim_{s=1} \frac{d}{ds} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k^s} = -\lim_{s=1} \frac{d}{ds} \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\,^{**)}$$

$$= -\lim_{s=1} \left(-\frac{\zeta(2s)\zeta'(s)}{\zeta^2(s)} + \frac{2\zeta'(2s)}{\zeta(s)}\right) = -\zeta(2) = -\frac{\pi^2}{6}$$

überein.

Noch zwei asymptotische Folgerungen mögen hier Platz finden, weil sie sich auf Summen beziehen, bei denen der absolute Betrag des Summanden sich nicht monoton ändert, bei deren Behandlung also das gewöhnliche, von Abel herrührende Hilfsmittel der partiellen Summation versagt.

Bezeichnet $\varrho(x)$ den in x enthaltenen echten Bruch, also die Function $x - [x]$, so ist erstens zufolge einer schon von Meissel***) mit ungenügendem Beweise ausgesprochenen und von Herrn Lipschitz†) bewiesenen Identität

---

*) Die Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(k)}{k} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \cdots = 0$ ist auch schon von Euler auf heuristischem Wege hergeleitet worden, l. c, S. 229.

**) S. Cantor, „zur Theorie der zahlentheoretischen Functionen", Mathematische Annalen Bd. 16, 1880, S. 586, aber auch schon Euler, l. c., S. 228.

***) „Observationes quaedam in theoria numerorum", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 48, 1854, S. 303.

†) „Sur des séries relatives à la théorie des nombres", Comptes rendus des séances de l'académie des sciences, Paris, t. 89, 1879, p. 949.

$$1=\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\left[\frac{x}{k}\right]=\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\left(\frac{x}{k}-\varrho\left(\frac{x}{k}\right)\right)=xg(x)-\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right)$$

$$(21)\qquad \sum_{k=1}^{x}\mu(k)\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right)=O\left(\frac{x}{\log x\, e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right).$$

Zweitens besteht, wenn $\psi(x)$ die von Tschebyschef*) eingeführte Bedeutung

$$\psi(x)=\vartheta(x)+\vartheta(\sqrt{x})+\vartheta(\sqrt[3]{x})+\cdots=\sum_{p\leq x}\log p\left[\frac{\log x}{\log p}\right]=\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\log\left(\left[\frac{x}{k}\right]!\right)$$

hat, die Identität**)

$$\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\left[\frac{x}{k}\right]\log k=-\psi(x).$$

Auf die Analogie der beiden damals noch unbewiesenen Sätze

$$\lim_{x=\infty}\frac{-\psi(x)}{x}=\lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\left[\frac{x}{k}\right]\log k=-1$$

und

$$\lim_{x=\infty}f(x)=\lim_{x=\infty}\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\frac{1}{k}\log k=\lim_{x=\infty}\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\frac{x}{k}\log k=-1$$

hat schon Herr Gram***) hingewiesen. Aus der von Herrn de la Vallée-Poussin bewiesenen Relation

$$\vartheta(x)=x+O\left(x\,e^{-b\sqrt{\log x}}\right)$$

folgt in Verbindung mit der schon von Tschebyschef†) gemachten Bemerkung, dass sich $\psi(x)$ und $\vartheta(x)$ nur um eine Grösse $O(\sqrt{x})$ unterscheiden,

$$\psi(x)=x+O\left(x\,e^{-b\sqrt{\log x}}\right).$$

Demnach ist

$$x+O\left(x\,e^{-b\sqrt{\log x}}\right)=-\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\left[\frac{x}{k}\right]\log k=-\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\log k\left(\frac{x}{k}-\varrho\left(\frac{x}{k}\right)\right)$$

$$=-xf(x)+\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\log k\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right)=x+O\left(x\,e^{-c\sqrt{\log\log x}}\right)+\sum_{k=1}^{x}\mu(k)\log k\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right),$$

$$(22)\qquad \sum_{k=1}^{x}\mu(k)\log k\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right)=O\left(\frac{x}{e^{c\sqrt{\log\log x}}}\right).$$

---

*) „Mémoire sur les nombres premiers", Journal de mathématiques pures et appliquées, 1ère série, t. 17, 1852, p. 371.

**) S. Gram, l. c., S. 238.

***) l. c., S. 238 und 299.

†) l. c., S. 378.

Die Summen (21) und (22) sind also von weit geringeren Grössenordnungen als man durch das primitivste Abschätzungsverfahren

$$\left|\mu(k)\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right)\right| \leqq 1$$

erhält (nämlich $O(x)$ bezw. $O(x \log x)$); dagegen weiss man von der Summe

$$\sum_{k=1}^{x} \mu(k)\,\frac{1}{k}\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right) \tag{23}$$

nichts ausser der selbstverständlichen Thatsache, dass sie höchstens von der Ordnung $\log x$ ist. Diese Summe spielt bei der Bestimmung des mittleren Werthes der Function $\varphi(n)$ eine Rolle. Herr Mertens*) ist bis zu der Gleichung

$$\sum_{n=1}^{x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}\,x^2 - x \sum_{k=1}^{x} \mu(k)\,\frac{1}{k}\,\varrho\left(\frac{x}{k}\right) + O(x)$$

gelangt, aus der er die Folgerung

$$\sum_{n=1}^{x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}\,x^2 + O(x \log x)$$

gezogen hat; eine genauere Abschätzung der Summe (23) würde einen Fortschritt in dieser Frage mit sich führen.

Juni 1900.

---

*) „Ueber einige asymptotische Gesetze in der Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 77, 1874, S. 290.

Ueber die mittlere Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen von 1 bis x in drei Factoren.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Es bezeichne $T(\nu)$ die Anzahl der Theiler der ganzen Zahl ν, also die Anzahl der Zerlegungen von ν in zwei Factoren und $\tau(x)$ die summatorische Function

$$\tau(x) = \sum_{\nu=1}^{x} T(\nu) \; ^{*)}.$$

Dann ist bekanntlich **)

---

*) x braucht keine ganze Zahl zu sein; in allen folgenden Summen hat der Summationsbuchstabe alle zwischen den angegebenen Grenzen enthaltenen ganzzahligen Werthe zu durchlaufen.

**) S. z. B. Bachmann, „die analytische Zahlentheorie", Leipzig 1894, S. 407—410, 413—414, 490—491; dort ist übrigens die einfachste Quelle der Identität

$$\sum_{\nu=1}^{[x]} \left[\frac{x}{\nu}\right] = 2\sum_{\nu=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{\nu}\right] - [\sqrt{x}]^2 \tag{1}$$

nicht deutlich genug hervorgehoben: die linke Seite giebt die Anzahl der Paare a, b an, für welche $ab \leqq x$ ist. Für jedes solche Paar ist aber entweder $a \leqq \sqrt{x}$ oder $b \leqq \sqrt{x}$ oder beides. Umgekehrt genügt jedes Paar, für das $a \leqq \sqrt{x}$ und $b \leqq \sqrt{x}$ ist, wirklich der Ungleichheitsbedingung $ab \leqq x$. Es giebt $\sum\limits_{a=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{a}\right]$ Paare, für welche $a \leqq \sqrt{x}$ ist, $\sum\limits_{b=1}^{[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{b}\right]$, für welche $b \leqq \sqrt{x}$ ist. Dabei sind aber diejenigen $[\sqrt{x}]^2$ Paare als zu beiden Categorien gehörig doppelt gezählt, für welche zugleich $a \leqq \sqrt{x}$, $b \leqq \sqrt{x}$ ist, so dass sich gerade die rechte Seite von (1) ergiebt. In dem Falle, dass x eine Quadratzahl bedeutet, ist dies genau der Cesàro'sche Beweis.

$$\tau(x) = \sum_{\nu=1}^{x} \left[\frac{x}{\nu}\right] = 2\sum_{\nu=1}^{\sqrt{x}} \left[\frac{x}{\nu}\right] - [\sqrt{x}]^2 = 2\sum_{\nu=1}^{\sqrt{x}} \left(\frac{x}{\nu} + O(1)\right) - (\sqrt{x} + O(1))^2$$

$$= 2\left(x\left(\log[\sqrt{x}] + C + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + O(\sqrt{x})\right) - x + O(\sqrt{x}) + O(1)$$

$$= 2x\left(\log(\sqrt{x} + O(1)) + C\right) - x + O(\sqrt{x})$$

$$= 2x\left(\frac{1}{2}\log x + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + (2C-1)x + O(\sqrt{x})$$

$$\tau(x) = x\log x + (2C-1)x + O(\sqrt{x}),$$

wo C die Euler'sche Constante bezeichnet.

Wenn analog $T_3(\nu)$ die Anzahl der Zerlegungen von ν in drei Factoren und

$$\tau_3(x) = \sum_{\nu=1}^{x} T_3(\nu)$$

die Anzahl aller Systeme dreier ganzer positiver Zahlen a, b, c bezeichnet, für welche

$$abc \leqq x$$

ist, so ist einerseits, wenn man zuerst c von 1 bis x laufen lässt,

$$\tau_3(x) = \sum_{c=1}^{x} \tau\left(\frac{x}{c}\right), \tag{2}$$

da für jedes c alle diejenigen Werthepaare a, b zulässig sind, die der Ungleichheitsbedingung

$$ab \leqq \frac{x}{c}$$

genügen; andererseits ist, wenn man zuerst nach a und b summirt,

$$\tau_3(x) = \sum_{ab \leqq x} \left[\frac{x}{ab}\right] = \sum_{\nu=1}^{x} T(\nu)\left[\frac{x}{\nu}\right]. \tag{3}$$

Die beiden Formeln (2) und (3) liefern jedoch keine sehr genaue Abschätzung der Function $\tau_3(x)$ für grosse x; eine bis zur Ordnung $x^{\frac{2}{3}}\log x$ reichende Berechnung ergiebt sich als Specialfall aus allgemeineren Untersuchungen von Herrn Piltz, von denen am Schlusse die Rede sein wird. Die erwähnte Rechnung ist neuerdings von Herrn Franel*) in

*) „Sur une formule utile dans la détermination de certaines valeurs asymptotiques", Mathematische Annalen Bd. 51, 1899, p. 369 ff.

sehr viel einfacherer Form ausgeführt worden, unter Benutzung einer Identität*)

$$(4)\quad 2\tau_3(x) = 3\sum_{a=1}^{\sqrt[3]{x}}\sum_{b=1}^{\sqrt[3]{x}}\left[\frac{x}{ab}\right] + 3\sum_{ab=1}^{\frac{x}{[\sqrt[3]{x}]}}\left[\frac{x}{ab}\right] - [\sqrt[3]{x}]^3 - 3[\sqrt[3]{x}]\,\tau\left(\frac{x}{[\sqrt[3]{x}]}\right),$$

welche der Mertens'schen Identität (1) entspricht; sie führt die erwähnte Genauigkeit $O(x^{\frac{2}{3}}\log x)$ bei der Abschätzung der Function $\tau_3(x)$ dadurch herbei, dass sie — geometrisch gesprochen — von der Symmetrie der Function abc zur Abzählung der zwischen der Fläche $abc = x$ und den Coordinatenebenen im positiven Octanten gelegenen Gitterpunkte Gebrauch macht.

Wenn ich im Folgenden die erwähnte Frage nochmals aufnehme, so geschieht es zunächst, weil es möglich ist, an Stelle der Identität (4) eine andere zu verwenden**), welche ohne jede Rechnung bewiesen werden kann, ferner, weil Herr Franel zur Lösung einer erforderlichen Hilfsaufgabe sich auf die Theorie der Dirichlet'schen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}$ stützt, so dass es wünschenswerth erscheint, auch dieses Hilfsmittel zu eliminiren und die Berechnung von $\tau_3(x)$ in ebenso elementarer Weise durchzuführen wie diejenige von $\tau(x)$, welche Anfangs erwähnt wurde.

Die erwähnte Hilfsbetrachtung bezieht sich auf die Function

$$t(x) = \sum_{ab=1}^{x}\frac{1}{ab} = \sum_{\nu=1}^{x}\frac{T(\nu)}{\nu}.$$

Die in der Anmerkung 2 auf Seite 592 erwähnte Schlussweise ergiebt:

$$\begin{aligned} t(x) &= 2\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\sum_{b=1}^{\frac{x}{a}}\frac{1}{b} - \left(\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\right)^2 \\ &= 2\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\left(\log\left[\frac{x}{a}\right] + C + O\left(\frac{a}{x}\right)\right) - \left(\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\right)^2 \\ &= 2\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\left(\log\left(\frac{x}{a} + O(1)\right) + C + O\left(\frac{a}{x}\right)\right) - \left(\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\right)^2 \end{aligned}$$

---

*) l. c., p. 385.

**) (9), s. S. 596 dieser Arbeit.

$$=2\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\left(\log\frac{x}{a}+C+O\left(\frac{a}{x}\right)\right)-\left(\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\right)^2$$

$$=2(\log x+C)\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}-2\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{\log a}{a}+O\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\cdot\frac{a}{x}-\left(\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\right)^2,$$

$$(5)\qquad t(x)=\left(2\log x+2C-\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}\right)\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}-2\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{\log a}{a}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Mit Hilfe der Euler'schen Summenformel sind die Summen $\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}$ und $\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{\log a}{a}$ mit so grosser Annäherung zu berechnen, dass alle Glieder der rechten Seite bis auf $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ genau sind, erstere Summe also bis auf $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}\log x}\right)$, letztere bis auf $O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ genau. Es ist, wenn

$$\sqrt{x}-[\sqrt{x}]=\vartheta$$

gesetzt wird,

$$\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}=\log[\sqrt{x}]+C+\frac{1}{2[\sqrt{x}]}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(\sqrt{x}-\vartheta)+C+\frac{1}{2(\sqrt{x}+O(1))}+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(6)\qquad \sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\log x+C+\frac{1-2\vartheta}{2\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{\log a}{a}=\frac{1}{2}\log^2[\sqrt{x}]-C_1+\frac{1}{2}\frac{\log[\sqrt{x}]}{[\sqrt{x}]}+O\left(\frac{\log x}{x}\right)^{*)}$$

$$=\frac{1}{2}\log^2(\sqrt{x}-\vartheta)-C_1+\frac{1}{2}\frac{\log\sqrt{x}+O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}+O(1)}+O\left(\frac{\log x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\log\sqrt{x}-\frac{\vartheta}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2-C_1+\frac{1}{4}\frac{\log x}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

$$(7)\qquad \sum_{a=1}^{\sqrt{x}}\frac{\log a}{a}=\frac{1}{8}\log^2 x-C_1+\frac{(1-2\vartheta)\log x}{4\sqrt{x}}+O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

*) C_1 bezeichnet eine Constante, die übrigens, wie bekannt, gleich dem Coefficienten von $(s-1)^2$ in der Entwickelung der ganzen transcendenten Function $(s-1)\zeta(s)$ nach Potenzen von $s-1$ ist.

Setzt man (6) und (7) in (5) ein, so ergiebt sich

$$t(x) = \left(\frac{3}{2}\log x + C - \frac{1-2\vartheta}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(\frac{1}{2}\log x + C + \frac{1-2\vartheta}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{4}\log^2 x + 2C_1 - \frac{(1-2\vartheta)\log x}{2\sqrt{x}} + O\left(\frac{\log x}{x}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log^2 x + 2C\log x + C^2 + 2C_1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{*)}.$$

Nach dieser Vorbereitung gehe ich zur eigentlichen Aufgabe über, den asymptotischen Werth der Anzahl der Systeme ganzer positiver Zahlen a, b, c zu berechnen, welche der Ungleichheitsbedingung

(8) $$abc \leqq x$$

genügen. Es mögen erstens alle Systeme gezählt werden, für welche ausserdem $c \leqq x^{\frac{1}{3}}$ ist; deren Anzahl beträgt für ein bestimmtes c $\tau\left(\frac{x}{c}\right)$; zweitens mögen diejenigen Systeme gezählt werden, für welche $ab \leqq x^{\frac{2}{3}}$ ist; für ein Werthepaar a, b giebt es $\left[\frac{x}{ab}\right]$ zulässige Werthe von c. Auf diese Weise erhält man jede Lösung von (8) mindestens einmal, da nicht zugleich $c > x^{\frac{1}{3}}$ und $ab > x^{\frac{2}{3}}$ sein kann, und zwar sind diejenigen Lösungen doppelt gezählt, für welche zugleich $c \leqq x^{\frac{1}{3}}$ und $ab \leqq x^{\frac{2}{3}}$ ist; deren Anzahl beträgt $\left[x^{\frac{1}{3}}\right]\tau\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$. Demnach ergiebt sich als Grundformel

(9) $$\tau_3(x) = \sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}} \tau\left(\frac{x}{c}\right) + \sum_{ab=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\left[\frac{x}{ab}\right] - \left[x^{\frac{1}{3}}\right]\tau\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{x}{c}\log\frac{x}{c} + (2C-1)\frac{x}{c} + O\left(\sqrt{\frac{x}{c}}\right)\right) + \sum_{ab=1}^{x^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{x}{ab} + O(1)\right)$$

$$-\left(x^{\frac{1}{3}} + O(1)\right)\left(\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}\log x + (2C-1)x^{\frac{2}{3}} + O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)\right)$$

$$= (x\log x + (2C-1)x)\sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{c} - x\sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{\log c}{c} + \sqrt{x}\,O\sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{\sqrt{c}}$$

$$+ xt\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + O\left(x^{\frac{2}{3}}\log x\right) - \frac{2}{3}x\log x - (2C-1)x.$$

---

*) Diese Formel hat Herr Franel ausser in der erwähnten Arbeit (S. 384) nochmals in „sur la théorie des séries", Mathematische Annalen, Bd. 52, 1899, S. 538, abgeleitet, gleichfalls von der ζ-Reihe ausgehend. Herr Berger („Recherches sur les valeurs moyennes dans la théorie des nombres", Upsala, Nova Acta, 1887, S. 63) hat die Summe $t(x)$ ähnlich wie im Texte behandelt, ohne jedoch die obige Genauigkeit der Abschätzung zu erreichen.

Hierin ist

$$\sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{c} = \log\left[x^{\frac{1}{3}}\right] + C + O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{3}\log x + C + O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right),$$

$$\sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{\log c}{c} = \frac{1}{2}\log^2\left[x^{\frac{1}{3}}\right] - C_1 + O\left(\frac{\log x}{x^{\frac{1}{3}}}\right) = \frac{1}{18}\log^2 x - C_1 + O\left(\frac{\log x}{x^{\frac{1}{3}}}\right),$$

$$t\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{9}\log^2 x + \frac{4}{3}C\log x + C^2 + 2C_1 + O\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right),$$

$$\sqrt{x}\, O\sum_{c=1}^{x^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\sqrt{c}} = \sqrt{x}\, O\left(x^{\frac{1}{6}}\right) = O\left(x^{\frac{2}{3}}\right)$$

einzusetzen, was in Uebereinstimmung mit Herrn Franel's*) Endresultat

$$(10) \qquad \tau_3(x) = \frac{1}{2}x\log^2 x + (3C-1)\,x\log x + (3C^2-3C+3C_1+1)\,x + O\left(x^{\frac{2}{3}}\log x\right)$$

ergiebt.

Allgemein bezeichne $\tau_k(x)$ die Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen $\leqq x$ in k Factoren und $t_k(x)$ die Summe

$$\sum_{a_1 a_2 \cdots a_k = 1}^{x} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k},$$

so dass also die oben betrachteten Functionen $\tau(x)$ und $t(x)$ mit $\tau_2(x)$ und $t_2(x)$ zu bezeichnen sind, während

$$\tau_1(x) = [x] = x + O(1),$$

$$t_1(x) = \sum_{a=1}^{x} \frac{1}{a} = \log[x] + C + O\left(\frac{1}{x}\right) = \log(x + O(1)) + C + O\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist.

Betrachtet man zuerst diejenigen Lösungen von

$$a_1 a_2 \cdots a_k \leqq x,$$

bei denen

$$(11) \qquad a_k \leqq x^{\frac{1}{k}}$$

ist, dann diejenigen, für welche

$$(12) \qquad a_1 a_2 \cdots a_{k-1} \leqq x^{\frac{k-1}{k}}$$

*) l. c. S. 386.

ist, und bringt dann die gemeinsamen Lösungen von (11) und (12) in Abrechnung, so ergiebt sich als Verallgemeinerung von (1) und (9)

$$(13)\qquad \tau_k(x) = \sum_{a=1}^{x^{\frac{1}{k}}} \tau_{k-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sum_{a_1 \cdots a_{k-1}=1}^{x^{\frac{k-1}{k}}} \left[\frac{x}{a_1\, a_2 \cdots a_{k-1}}\right] - \left[x^{\frac{1}{k}}\right] \tau_{k-1}\left(x^{\frac{k-1}{k}}\right),$$

ferner

$$(14)\qquad t_k(x) = \sum_{a=1}^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{a}\, t_{k-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \sum_{a_1 \cdots a_{k-1}=1}^{x^{\frac{k-1}{k}}} \frac{1}{a_1\, a_2 \cdots a_{k-1}} \sum_{a=1}^{\frac{x}{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}} \frac{1}{a}$$

$$- \sum_{a=1}^{x^{\frac{1}{k}}} \frac{1}{a}\, t_{k-1}\left(x^{\frac{k-1}{k}}\right).$$

Ist $T_k(\nu)$ die Anzahl der Zerlegungen von ν in k Factoren und bezeichnet $f(\nu)$ eine beliebige zahlentheoretische Function, so ergiebt sich analog

$$\sum_{\nu=1}^{x} T_k(\nu) f(\nu) = \sum_{a=1}^{x^{\frac{1}{k}}} \sum_{a_1 \cdots a_{k-1}=1}^{\frac{x}{a}} f(a_1 \cdots a_{k-1}\, a) + \sum_{a_1 \cdots a_{k-1}=1}^{x^{\frac{k-1}{k}}} \sum_{a=1}^{\frac{x}{a_1 \cdots a_{k-1}}} f(a_1 \cdots a_{k-1}\, a)$$

$$- \sum_{a=1}^{x^{\frac{1}{k}}} \sum_{a_1 \cdots a_{k-1}=1}^{x^{\frac{k-1}{k}}} f(a_1 \cdots a_{k-1}\, a).$$

Hierin sind (13) und (14) als Specialfälle enthalten.

So lassen sich successive $\tau_4(x)$, $\tau_5(x) \cdots$ berechnen. Die Ermittelung des asymptotischen Werthes von $\tau_k(x)$ bildet jedoch schon den Gegenstand der Doctordissertation von Herrn Piltz*), auf welche oben hingewiesen wurde. Da dieselbe wenig bekannt und zugänglich ist, benutze ich diese Gelegenheit, um deren Schlussresultat mitzutheilen. Was die dort angewendete, der Theorie der Dirichlet'schen Reihen angehörige Methode betrifft, so lässt sie sich kurz dahin charakterisiren, dass für den vorliegenden Fall die Richtigkeit des „Piltz'schen Princips"**) nachgewiesen wird, welches darin besteht, dass unter gewissen Voraussetzungen aus einer Gleichung

---

*) „Ueber das Gesetz, nach welchem die mittlere Darstellbarkeit der natürlichen Zahlen als Producte einer gegebenen Anzahl Factoren mit der Grösse dieser Zahlen wächst", Berlin, 1881.

**) S. Bachmann, l. c., S. 488.

$$\sum_{\nu=1}^{x} c_\nu \nu^{-s} = \sum_{m} \int_1^{\infty} f_m(x)\, x^{-s}\, dx$$

die asymptotische Folgerung

$$\sum_{\nu=1} c_\nu \nu^{-s} \sim \sum_{m} \int_1^{x} f_m(x)\, x^{-s}\, dx$$

gezogen werden darf. Das Piltz'sche Resultat lautet in etwas veränderter Bezeichnungsweise folgendermassen:

„Wird aus der Entwickelung der Riemann'schen ζ-Function in der Umgebung von $s = 1$

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{m=0}^{\infty} C_m (s-1)^m$$

durch Potenzirung die Reihe

$$\zeta^k(s) = \frac{C_{kk}}{(s-1)^k} + \frac{C_{k-1,k}}{(s-1)^{k-1}} + \cdots + \frac{C_{1k}}{s-1} + c_{0k} + c_{1k}(s-1)$$
$$+ c_{2k}(s-1)^2 + \cdots$$

gebildet, so ist für alle Werthe von s

$$(15) \quad \sum_{\nu=1}^{x} T_k(\nu)\, \nu^{-s} = \int_1^{x} u^{-s} \sum_{n=1}^{k} \frac{C_{nk}}{(n-1)!} \log^{n-1} u\, du$$
$$+ \sum_{m=0}^{\infty} c_{mk}(s-1)^m + O\left(x^{1-s-\frac{1}{k}}\right) + O\left(x^{1-s-\frac{1}{k}} \log^{k-2} x\right)\text{“}.$$

Durch eine leichte Umformung gewinnt dies Resultat eine übersichtlichere Form. Es ist für $s \neq 1$

$$\int_1^{x} u^{-s} \log^{n-1} u\, du = -\left[u^{1-s}\left(\frac{1}{s-1}\log^{n-1} u + \frac{n-1}{(s-1)^2}\log^{n-2} u + \frac{(n-1)(n-2)}{(s-1)^3}\log^{n-3} u\right.\right.$$
$$\left.\left. + \cdots + \frac{(n-1)\cdots 1}{(s-1)^n}\right)\right]_1^x$$
$$= -x^{1-s} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(\mu+1)}{(s-1)^{n-\mu}} \log^{\mu} x + \frac{(n-1)!}{(s-1)^n}.$$

Das Integral der rechten Seite von (15) hat also den Werth

$$-x^{1-s}\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{nk}}{(n-1)!}\sum_{\mu=0}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(\mu+1)}{(s-1)^{n-\mu}}\log^{\mu}x+\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{nk}}{(n-1)!}\frac{(n-1)!}{(s-1)^{n}}$$

$$=-x^{1-s}\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{\log^{\mu}x\cdot(s-1)^{\mu}}{\mu!}\sum_{n=\mu+1}^{k}\frac{C_{nk}}{(s-1)^{n}}+\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{nk}}{(s-1)^{n}}.$$

Die ferner in (15) vorkommende Reihe $\sum_{m=0}^{\infty}c_{mk}(s-1)^{m}$ convergirt für alle s, stellt also in Bezug auf x eine Constante dar. Mithin ist für $s\neq 1$

$$(16)\qquad \sum_{\nu=1}^{x}T_k(\nu)\,\nu^{-s}=\sum_{a_1a_2\cdots a_k=1}^{x}(a_1a_2\cdots a_k)^{-s}=x^{1-s}\sum_{\mu=0}^{k-1}b_{\mu}\log^{\mu}x+B$$
$$+O\left(x^{1-s-\frac{1}{k}}\right)+O\left(x^{1-s-\frac{1}{k}}\log^{k-2}x\right)$$

wo die Constanten

$$b_{\mu}=-\frac{(s-1)^{\mu}}{\mu!}\sum_{n=\mu+1}^{k}\frac{C_{nk}}{(s-1)^{n}},$$

$$B=\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{nk}}{(s-1)^{n}}+\sum_{m=0}^{\infty}c_{mk}(s-1)^{m}$$

sind. Für $k>2$ ist $O\left(x^{1-s-\frac{1}{k}}\right)$ gegen $O\left(x^{1-s-\frac{1}{k}}\log^{k-2}x\right)$ zu vernachlässigen, für $k=1$ dieser Ausdruck gegen jenen, für $s+\frac{1}{k}\leqq 1$ das constante Glied gegen den grösseren der beiden Ausdrücke.

Aus (16) ergiebt sich für $s=0$, dass

$$(17)\qquad \tau_k(x)=\sum_{\nu=1}^{x}T_k(\nu)=x\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{(-1)^{\mu+1}\log^{\mu}x}{\mu!}\sum_{n=\mu+1}^{k}(-1)^{n}C_{nk}+O\left(x^{1-\frac{1}{k}}\log^{k-2}x\right)$$
$$(k\geqq 2)$$

ist.

Für $s=1$ hat die obige Transformation der Piltz'schen Formel (15) keinen Sinn; vielmehr ist alsdann

$$\int_1^x u^{-s}\log^{n-1}u\,du=\int_1^x\frac{\log^{n-1}u}{u}\,du=\frac{1}{n}\log^{n}x,$$

also

$$(18)\qquad t_k(x)=\sum_{\nu=1}^{x}\frac{T_k(\nu)}{\nu}=\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{nk}}{n!}\log^{n}x+c_{0k}+O\left(x^{-\frac{1}{k}}\log^{k-2}x\right)\qquad(k\geqq 2).$$

Da aus

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + C_1(s-1) + \cdots,$$

$$\zeta^3(s) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{3C}{(s-1)^2} + \frac{3C^2+3C_1}{s-1} + \cdots,$$

also

$$C_{33} = 1, \quad C_{23} = 3C, \quad C_{13} = 3C^2 + 3C_1$$

folgt, ergiebt sich für $k = 3$ aus (17)

$$\tau_3(x) = x(b_2 \log^2 x + b_1 \log x + b_0) + O(x^{\frac{2}{3}} \log x),$$

wo

$$b_2 = \frac{1}{2} C_{33} = \frac{1}{2}, \quad b_1 = C_{23} - C_{33} = 3C - 1,$$

$$b_0 = -(-C_{13} + C_{23} - C_{33}) = 3C^2 - 3C + 3C_1 + 1$$

ist, in Uebereinstimmung mit (10).

Da ferner

$$\zeta^2(s) = \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2C}{s-1} + C^2 + 2C_1 + \cdots,$$

$$C_{22} = 1, \quad C_{12} = 2C, \quad c_{02} = C^2 + 2C_1$$

ist, folgt aus (18) für $k = 2$

$$t(x) = t_2(x) = \sum_{\nu=1}^{x} \frac{T_1(\nu)}{\nu} = \sum_{ab=1}^{x} \frac{1}{ab} = \beta_2 \log^2 x + \beta_1 \log x + \beta_0 + O\left(x^{-\frac{1}{2}}\right),$$

wo

$$\beta_2 = \frac{1}{2} C_{22} = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = + C_{12} = 2C, \quad \beta_0 = c_{02} = C^2 + 2C_1$$

ist, was mit dem auf S. 596 direct hergeleiteten Ausdruck von $t(x)$ identisch ist.

Juni 1900.

Sulla riduttibilità della funzione $x^n - A$ in un campo qualunque di razionalità.

Von

A. Capelli in Neapel.

(Auszug aus einem an Herrn F. Klein gerichteten Briefe.)

Il sign. Wendt, nel fascicolo testè comparso dei mathem. Annalen, tratta la questione della riduttibilità dell' equazione $x^n - A = 0$ per un campo di razionalità qualunque K. Questa questione era già stata risoluta dal sign. Vahlen*), nel 1895, per il campo naturale di razionalità e poi da me**), nel 1897, per un campo K qualunque.

La sua trattazione è basata sulla distinzione di due casi, secondochè, cioè, l'equazione di grado $\varphi(n)$ che ha per radici le radici primitive di $x^n - 1 = 0$, è irreduttibile ovvero riduttibile nel campo K. I criterii di riduttibilità da lui dati danno quindi luogo a due enunciati differenti, secondochè si verifichi l'uno o l'altro dei due casi.

Poichè il sign. Wendt cita solamente il lavoro del Vahlen, credo sia opportuno ricordare, in questi stessi Annali, i criterii da me ottenuti, che risolvono completamente il problema e danno luogo ad enunciati più semplici di quelli del sign. Wendt. Io ho trovato quanto segue:

I°. Se $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \cdots$ è il numero n decomposto nei suoi fattori primi distinti, affinchè l'equazione $x^n - A = 0$ sia riduttibile nel campo di razionalità K, è necessario e sufficiente che sia riduttibile in questo campo almeno una delle equazioni:

$$x^{p^\alpha} - A = 0,\ x^{q^\beta} - A = 0,\ x^{q^\gamma} - A = 0, \cdots$$

---

*) Acta Mathematica, 2° fascicolo del vol. XIX.

**) Rendiconto della R. Acc. della Scienze di Napoli, Nota I^a (Dicembre 1897). Cfr. anche la Nota II^a (Febbrajo 1898). I risultati sono ottenuti applicando alcuni teoremi di indole più generale (Cfr. Jahrbuch über die Fortschritte der Math., Jahrgang 1897 und 1898).

II°. Affinchè l'equazione $x^{p^\alpha} - A = 0$ (in cui p è numero primo) sia riduttibile nel campo K, è necessario e sufficiente che si verifichi uno dei due casi seguenti:

a) il numero A è la potenza p^{ma} di un numero del campo K;

b) $p = 2$, $\alpha > 1$, $-A$ è il quadruplo della quarta potenza di un numero del campo K.

È poi manifesto che questi risultati si possono anche riassumere così: *affinchè l'equazione $x^n - A = 0$ sia riduttibile nel campo K, è necessario e sufficiente che si verifichi uno dei due seguenti casi:*

1) *il numero A è la potenza h^{ma} di un numero del campo K, essendo h un divisore di n.*

2) *il grado n è un multiplo di 4, $-A$ è il quadruplo della quarta potenza di un numero del campo K.*

Napoli, Luglio 1900.

Note sur la sommation de la série de Lambert.

Par

Carl Hansen à Copenhague.

M. Ch.-J. de la Vallée Poussin a fait la somme de la série de Lambert au moyen des intégrales des fonctions θ_α de Jacobi en démontrant la formule suivante*)

$$2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\theta'(v,q)}{\theta(v,q)} - \pi \cot \pi v \right) \cot \pi v \, dv,$$

où

$$\theta(v,q) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin (2n+1)\pi v^{**}).$$

La fonction sous le signe $\int$ se présente sous une forme indeterminée pour la limite inférieure.

Nous nous permettons donc d'établir ici une autre expression pour la somme de la série $\sum \frac{q^m}{1-q^m}$, dans laquelle l'intégrant reste fini et déterminé dans tout l'intervalle d'intégration, les limites comprises.

Posons:

$$F(q) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1-q^m}$$

on a alors:

1) $$F(q) - 2F(q^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^m}.$$

Mais:

$$2F(q^2) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1-q^m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1+q^m}$$

*) Annales de la société scientifique de Bruxelles, t. XX, partie 1°, 1896 § 58.

**) Voir Jordan. Cours d'analyse de l'École polytechnique, 2. édition 1894 t. II § 409.

d'où:

$$F(q) - 2F(q^2) = \frac{q}{1-q} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1+q^m}.$$

Nous avons en outre:

$$\sum \frac{q^{2m}}{1+q^m} = \sum q^{2m} - \sum q^{3m} + \sum q^{4m} - \cdots = \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{q^3}{1-q^3} + \cdots$$

d'où enfin:

$$F(q) - 2F(q^2) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{q^m}{1-q^m}. \tag{2}$$

En comparant les formules (1) et (2) nous obtenons la formule remarquable

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{1+q^m} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \cdot \frac{q^m}{1-q^m}. \tag{3}$$

Considérons maintenant les expressions suivantes*)

$$\frac{\theta'(\nu, q)}{\theta(\nu, q)} = \pi \cot \pi\nu + 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi\nu$$

et

$$\frac{\theta_3'(\nu, q)}{\theta_3(\nu, q)} = 4\pi \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi\nu.$$

En multipliant ces deux équations avec $\operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu$, puis en intégrant de 0 à $\frac{1}{2}$ on aura

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta'(\nu, q)}{\theta(\nu, q)} \operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu - \frac{\pi}{2} = 4\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^{2m}}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi\nu \operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\theta_3'(\nu, q)}{\theta_3(\nu, q)} \operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu = 4\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{q^m}{1-q^{2m}} \sin 2m\pi\nu \operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu$$

Mais:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin 2m\pi\nu \operatorname{tg} \pi\nu\, d\nu = (-1)^{m+1} \cdot \frac{1}{2} \text{**)},$$

---

*) Voir Jordan, Cours d'analyse, t. II, § 454.

**) Voir le mémoire de M. Ch.-J. de la Vallée Poussin, loc. cit.

et les formules précédentes peuvent s'écrire:

$$(4)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{q^m}{1-q^m}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\theta'(v,q^{\frac{1}{2}})}{\theta(v,q^{\frac{1}{2}})}\operatorname{tg}\pi v\,dv-\frac{1}{4},$$

$$(5)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\theta_3'(v,q)}{\theta_3(v,q)}\operatorname{tg}\pi v\,dv.$$

On voit immediatement qu'on a la formule

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^m}=2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^{2m}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1+q^m}.$$

En y remplaçant les deux termes du membre de droite par leur valeur tirée des équations (3), (4) et (5) nous aurons la formule suivante

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^m}=\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\theta_3'(v,q)}{\theta_3(v,q)}\operatorname{tg}\pi v\,dv-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\theta'(v,q^{\frac{1}{2}})}{\theta(v,q^{\frac{1}{2}})}\operatorname{tg}\pi v\,dv.$$

Dans cette formule les fonctions sous les signes $\int$ restent finies et déterminées dans tout l'intervalle d'intégration, les limites comprises. C'est le résultat que nous nous proposions d'obténir.

Les recherches sur la série de Lambert nous ont fait connaitre quelques identités remarquables que nous allons établir.

Posons

$$f(q)=\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^m).$$

On a alors:

$$\log f(q)=\sum_{m=1}^{\infty}\log(1+q^m)=\sum q^m-\frac{1}{2}\sum q^{2m}+\cdots$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{1}{m}\,\frac{q^m}{1-q^m}.$$

En différentiant par rapport à q on a

$$(6)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1+q^m}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot\frac{q^m}{(1-q^m)^2}.$$

On voit immediatement qu'on a la relation:

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{q^m}{(1+q^m)^2}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{q^m}{1-q^m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{q^m}{1-q^m}\right)^2$$

et l'identité (6) peut s'écrire

$$(7)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1+q^m}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{q^m}{1-q^m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{q^m}{1-q^m}\right)^2.$$

En partant du produit

$$\varphi(q)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)$$

on obtiendra de la même manière l'identité suivante

$$(8)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1-q^m}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^m}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^m}{1-q^m}\right)^2.$$

Mais il est bien connu que les produits $f(q)$ et $\varphi(q)$ peuvent s'exprimer sous forme finie au moyen des fonctions θ_α de Jacobi, on a en effet*)

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1-q^m}{1+q^m}=\theta_2(0),$$

et

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^m q^{\frac{3m^2+m}{2}}.$$

Il résulte donc des formules (7) et (8) qu'une propriété semblable existe pour les expressions

$$\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{q^m}{1-q^m}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\left(\frac{q^m}{1-q^m}\right)^2$$

et

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^m}{1-q^m}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{q^m}{1-q^m}\right)^2.$$

Göttingen, le 2 mars 1900.

*) Voir Jordan, Cours d'analyse, t. II § 425 et 426.

Berichtigungen zum Aufsatz von G. Ricci und T. Levi Civita „Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications." Dieser Band 54 Seite 125ff.:

1°. Page 131 au lieu de

$$\frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{s_1}} \frac{\partial x_{r_2}}{\partial y_{s_2}} \cdots \frac{\partial x_{r_m}}{\partial y_{s_m}} \quad \text{il faut lire} \quad \frac{\partial x_{s_1}}{\partial y_{r_1}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial y_{r_2}} \cdots \frac{\partial x_{s_m}}{\partial y_{r_m}}.$$

2°. Page 174. La condition c énoncée aux lignes 4$^{\text{ième}}$ et 5$^{\text{ième}}$ doit être modifiée de la manière suivante:

c) qu'il existe une famille de surfaces σ orthogonale aux lignes de courbure de C et telle que le produit de la courbure géodésique de C pour la distance d'une surface σ de la surface infiniment voisine soit constante pour une même surface.

D'où il suit que:

Si la congruence C est normale, la famille ∞^1 des surfaces orthogonales est isotherme.

Lüroth, Dr. **J.**, Geheimer Hofrat, Professor an der Universität Freiburg i. B., Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 18 Figuren im Text. gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Müller, **Felix**, mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. Erste Hälfte: Französisch-deutsch [IV u. 132 S.] Lex. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. **Eugen**, Professor der Mathematik a. d. Universität zu Giefsen, Vorlesungen über Algebra. In 2 Bänden. II. Band. 2. (Schlufs-) Lieferung. [XI u. S. 193—327.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 10.—

Pascal, **Ernst**, o. Prof. a. d. Universität zu Pavia, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formen, Theoreme, Litteratur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp, Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 10.—

Schlömilch, Dr. **Oskar**, K. Sächs. Geheimer Rat, † Übungsbuch zum Studium der Höheren Analysis. Zweiter Teil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Vierte Auflage. Bearbeitet von Prof. Dr. R. Henke, Konrektor am Annen-Realgymnasium zu Dresden. Mit Holzschnitten im Texte. [VIII u. 448 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 9.—

Schoenflies, Prof. Dr. **A.**, die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Mit 8 Figuren im Text. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. VIII. Band. 2. Heft. [VI u. 251 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Serret, **J.-A.**, † Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes à Paris, Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. 2., durchges. Auflage mit Unterstützung der Herren H. Liebmann u. E. Zermelo herausgegeben von G. Bohlmann. In 3 Bänden. gr. 8. geh.

I.: Differentialrechnung. Mit 85 Fig. [X u. 570 S.] 1897. n. ℳ 10.—
II.: Integralrechnung. Mit 55 Fig. [XII u. 428 S.] 1899. n. ℳ 8.—
III.: Differentialgleichungen u. Variationsrechnung. [In Vorbereitung.]

Simon, Dr. **Max**, Strafsburg i. Els., Euclid und die sechs planimetrischen Bücher. Mit Benutzung der Textausgabe von Heiberg. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluſs ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor XI. Heft. Mit 192 Figuren im Text. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 5.—

Sturm, Dr. **Rud.**, Prof. a. d. Universität zu Breslau, Elemente der darstellenden Geometrie. 2., umgearb. und erweit. Auflage. Mit 61 Fig. im Text u. 7 lith. Tafeln. [V u. 157 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 5.60.

Suter, **H.**, Prof. am Gymnasium in Zürich, die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. [A. u. d. T.: Abhandlungen z. Geschichte d. mathem. Wissenschaften. 10. Heft.] [IX u. 278 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—

Volkmann, Dr. **P.**, o. ö. Professor der theoretischen Physik an der Universität Königsberg i. Pr., Einführung in das Studium der theoretischen Physik, insbesondere in das der analytischen Mechanik. Mit einer Einleitung in die Theorie der physikalischen Erkenntnis. Vorlesungen. [XVI u. 370 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 14.—

von Weber, Dr. **E.**, Privatdocent an der Universität München, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. A. u. d. T.: Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften. Band II. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwd. geb. n. ℳ 24.—

INHALT.

Seite

Neuer Beweis des Satzes, dass eine geschlossene convexe Fläche sich nicht verbiegen lässt. Von Heinrich Liebmann in Leipzig 505

Einiges über Functionen mit nicht-abzählbaren Unstetigkeitsstellen. Von T. Brodén in Lund 518

Zur Theorie der algebraischen Körper. Von J. Wellstein aus Strassburg i. E. 521

Zur Theorie der Resultanten. Von L. Heffter in Bonn 541

Ueber Striktionen. Von H. Kühne in Dortmund 545

Ueber die überall oscillirenden differenzirbaren Functionen. Von A. Schoenflies in Königsberg 553

The Alternating Group on Eight Letters and the Quaternary Linear Congruence Group Modulo Two. Von Leonard Eugene Dickson in Chicago 564

Ueber die asymptotischen Werthe einiger zahlentheoretischer Functionen. Von Edmund Landau in Berlin 570

Ueber die mittlere Anzahl der Zerlegungen aller Zahlen von 1 bis x in drei Factoren. Von Edmund Landau in Berlin 592

Sulla riduttibilità della funzione $x^n - A$ in un campo qualunque di razionalità. Von A. Capelli in Neapel 602

Note sur la sommation de la série de Lambert. Von Carl Hansen in Kopenhagen 604

Berichtigungen zum Aufsatz von G. Ricci und T. Levi Civita. (Diese Annalen Bd. 54. S. 125 ff.) 608

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck**, München, Hildegardstr. 1², **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **A. Mayer**, Leipzig, Königsstr. 1, II.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.