立信會計叢書

會計數學

[redacted] 莫啓歐 編譯

商務印書館發行

立信會計叢書

會計數學

[redacted] 莫啓歐編譯

商務印書館發行

初版原序

年來國內數學書籍，日有增加，而會計著述，亦正方興未艾，顧所謂會計數學者，則尚少見。夫會計數學一科，誠屬艱深而乾燥，但尚會計者，固不可不知之，銀行家及經營證券與人壽保險事業者，亦不可畏其煩難而不加研究也。比年以還，學校教師，因是科無國文教本，故於講授之際，不得不採用西書，而一般存款於銀行者，對於零存整取及整存零取二項，有知其然而不知其所以然者；投資於內國債券者，有祇知應用簡單之方法，而不知其是否準確與合理者矣；此無他，無適當之參考書而已。本所編輯立信會計叢書，三載以來，已出十有餘種，獨於會計數學尚未成書，潘主任序倫先生知鴻壽對於數學，略有研究，因囑擔任編纂之役，鴻壽以是商之同學莫君啓歐，莫君亦斐然有述作之意，乃取 Rietz Crathorne & Rietz 所著之 Mathematics of Finance 一書爲根據，復參以其他各有關書籍，與莫君重加編訂，刪繁補缺，由淺及深。大要在(一)吻合國情，切於實用，及(二)說明力求簡易，內容務使充實。前者如計算債券多以內國公債爲標準，計算利息多以普通銀行存款章程爲根據；後者如多舉饒有興趣之實例，詳列便於實習之習題，廣蒐足資參閱之表格等均是。書成之後，由吳宗燾先生細爲校訂，殊可感謝。然千慮一失，智者不免，此書謬誤之處，尚望海內宏達，有以教正之也。

二十四年五月鎮江[redacted]識於立信會計師事務所

增訂四版例言

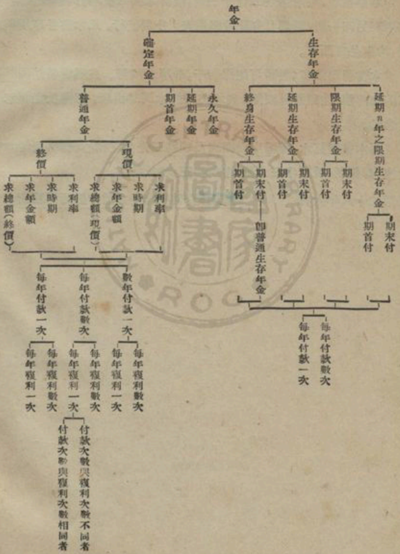
本書出版以來，業已三載，學校之採作教本，金融機關之用作參考者，為數不少。初版係根據 Rietz Crathorne & Rietz 所著之 Mathematics of Finance 一書而編。近著者閱讀 D. H. Mackeuzie 所著之 Mathematics of Finance (1937 First Edition)與 Lloyd L. Smail 所著之 Mathematics of Finance (1934 Second Edition) 二書，覺其編制說理等處，可供參考採擇者頗多，遂增訂舊作，使臻完備。

本書增訂版與前版不同之處，大別有二：

(一)初版最後兩章之對數與級數，在增訂版中予以擴充，列作起首兩章。查會計數學應用普通代數之處甚夥，初不僅對數與級數兩項。其他如代數之計算以及方程式之構成與演解等亦須應用。故編者特將代數之原理與方法，擇其較為重要，且為研究會計數學所必需預習者，依一貫之系統，寫成代數學概要兩章，置之卷首，俾讀者對於代數原理之不甚熟悉者，可先得一溫習之機會。若讀者對於代數原理，已經熟習，則可將此起首兩章節去不讀也。

(二)本書初版之中，所有確定年金一章，在增訂版中已擴充為三章。年金一項，在會計上及商業上應用極廣，變化亦繁。初版僅將其各項主要公式列出，至於各公式之演變，則僅加說明，而未曾列舉。增訂版對於原有確定年金一章，增改為三章，並將普通年金，期首年金之討論，分為終價與現價兩部份。而在終價與現價內，又各分為求總額(終價或現價)，求年金額，求時期，及求利率四項。每項之中，又分為每年付款一次，每年付款數次與數年付款一次三種。每種又分為每年復利一次與

每年復利數次。每年付款數次中又分為付款次數與複利次數相同者，與付款次數與複利次數不同者兩款。至於初版中生存年金一章，在增訂版中，亦多補充。茲將增訂版中所述年金種類列表示之於下：



本書此次增訂，僅就確定年金三章而論，所有公式，已多至一百數十，每式之後，均附例題，以資參考。讀者欲求任何情形之普通年金或期首年金，均不難尋得其公式及例題，作爲計算之準則也。

本書初版，原附用表二百十三頁，改訂本因本文增訂，卷帙太鉅，爰將用表另印一册，題爲"會計數學用表"分別發行，凡本書各章所稱用表，均指是書而言。

本書習題頗多，教師可選擇若干，令學者演習。玆編者特請陳楚胥君演成詳解，並經親自校閱，與本書增訂本同時出版，以備批閱課卷者之參考。

再本書增訂本，經潘序倫顧詢及瞿鈺三先生之精心校閱，對於本書之內容，編制，及文字三方面，多所指正，特此誌謝。

民國二十八年六月　　[redacted]奚啓歐作於立信會計師事務所

緒　論

1. 會計數學之定義　會計數學者，乃研究如何應用數學之原理與方法，以解決財務上或會計上諸問題之學術也。其主要目的在使會計上一切複雜困難之計算問題，可用簡捷之方法，以求得正確之解答。

2. 會計數學與會計學之關係　會計數學之定義，既如上述，則可知其目的，在解答會計學中有關數理諸問題。會計學中與數學有關之問題，首推估價。蓋吾人在估計各項資產、負債及損益之確數時，莫不賴數學方法，為之作精密之計算。如固定資產之折舊，應收未收利息，以及預收利益之計算及準備之提存等，其有賴於數學方法為之確計者，至為明顯。故凡從事於會計者，除須熟悉會計學上之原理與方法外，又須有數學上之相當根底，否則計算不精，估價不確，資產負債以及損益之真實狀況，既無從表示，而會計之目的，遂亦無由達到矣。此外如利益之分派問題，有時亦須應用數學之原理與方法，為精密之計算，如在房產放款合作社中所有之問題是。本書之目的，在將會計學中應用數學原理與方法各點，彙集一處，作有系統之敍述，使學者得有更精詳之研究也。

3. 會計數學與普通數學之關係　會計數學與普通數學兩者，在數理上本無多大區別，惟普通數學以數理之研究為主，以養成數的觀念，說明數之變化為其目的，而會計數學則僅為數學中之一部份，所謂應用數學之一科而已，與商業算術相類似。但商業算術所討論者，不出乎四則，速算，度量衡，匯兌及利息等項，其研究以計算之法則為主，以數理之說明為助，與會計數學之以數理之說明，應用於各種複雜問題為主者稍異。因此會計數學中常須應用代數學上之原理，如方程式之演算，以

及對數級數等，此所以研究會計數學者對於代數學不可不先有相當之熟練也。

4. 本書之內容　本書分十四章，第一二兩章略述代數學之概要，以爲下文討論之基礎。大概商科學生，對於代數學一科，多欠純熟，故須將其要點，先事温習，俾進而研究此後各章，不致發生困難。讀者若對於代數一科，已經熟習，則可將此兩章删去不讀也。第三章泛論利息，係會計數學中之基本知識，其應用之範圍最廣，舉凡借欠款項有價證券等之計算，均須應用之。以後各章之討論，亦均以此章所述之原理爲根據，第四、五、六、三章詳述確定年金，此係利息計算之演進，應用於有規則之多次付款者，如銀行中整存零付及零存整付各種存款利息之計息，均須應用及之。且此三章又爲下文第七、八、九、十、十二、十三、十四各章之基礎，其中尤以第七第八兩章討論償債基金與債券，及第十二、十三兩章討論生存年金與人壽保險費時，應用年金之理論最多。第七章與第八章敍述償債基金與債券之各種計算方法，乃會計上投資估價問題之研究。第九章折舊，則爲會計學上固定資產估價之中心問題。至第十章所研究者，其範圍亦廣，如房產放款合作社之實行分派利益於社員，以及銀行之派利於儲蓄存款等，皆可應用此章所述之原理而類推計算之。第十一章至第十四章則爲人壽保險公司會計上各項數學問題之討論，而第十四章所論之保險積存金，與其會計上之關係，尤爲重要焉。

再本書之編輯，原備學校採作課本之用，故所列習題較多，數節之後，卽設有習題數則，每章之後，復置有覆習題數十則，總計全書十四章，共有習題一千餘則，務使學者反覆演習，而達到計算純熟之境地也。

目　錄

第一章　代數學概要(一)

第二章 代數學概要(二)

第三章　利息

第四章 普通年金

第五章 期首年金

第六章 其他各種年金

第七章　償債基金

第八章　債券

第九章 折舊

第十章 房產放款合作社投資

第十一章　機率之原理及其在保險中之應用

第十二章 生存年金

第十三章 人壽保險純保險費

第十四章 人壽保險單估價

第一章　代數學概要(一)

第一節　代數學在會計數學中之應用

會計數學之意義，已如本書緒論所述，乃研究如何應用數學之原理與方法以解決財務上或會計上諸問題之學術。則凡研究會計數學者，對於普通數學之原理與方法，必需先有相當之基礎，而對於**代數學** (Algebra) 中幾項重要法則，尤非熟悉不可。例如代數學中之加減乘除四法以及解方程式法等，均爲會計數學中所必需應用者。此外如因數，指數，對數，級數，以及二項定理等，亦時有應用之處。玆爲便利讀者起見，特先將代數學中幾項重要原理與方法於一二兩章中摘要論述，使未習代數學者，逕能研究本書，而已習代數學者亦可得一覆習機會。

第二節　代數學與算術之區別

算術中許多繁雜片斷之算式，可依代數之方法化成較爲簡單之方程式。算術中許多繁雜之計算，在代數學中亦常能使之簡捷。代數學與算術在基本上有下列三點之區別:

(1)在代數學中，數字可正負二用。

(2)在代數學中，文字用以代替數字。

(3)在代數學中，方程式用以表示文字數字間之關係。

第三節　正數與負數

在算術中，一數字僅用以表示一方面之確定數量。如說 5 枝筆，即表示筆之數量爲 5。此 5 實爲正數，蓋在算術中初不作正負之設想。若

在代數學中,吾人可置正號(+)與負號(-)於一數字之前,而使同一數字成爲**正數**(Positive Number)或**負數**(Negative Number)以表示二種相反之數量。譬如就温度爲例,若以 +5 表示零度上之五度,則 -5 卽表示零度下之五度。再如就一人所有之金錢爲例,若以 +5 表示其所有之金錢爲五元,則 -5 卽表示其所欠之金錢爲五元。凡一數僅表量之大小,而不論其正負者,謂之一數之**絕對值**(Absolute Value)。如 +5 與 -5 之絕對值卽爲 5。

同一數字在代數學中旣可作正負二用,於是算術中所記錄之形式,在代數學中卽可變成簡單與統一。例如某公司四年內損益之狀況爲:(1)利益 $1,000;(2)損失 $500;(3)利益 $800;(4)損失 $300。在代數中卽可表示之爲:(1) +1000; (2) -500; (3) +800; (4) -300。

數字應用正負二號之後,不特表示時可以簡單,在計算上亦感便利。卽如求上例某公司四年內利益總數時,卽可將四年之利益額 +1000; -500; +800; -300 合計而求得之。

在代數學中+與-兩符號各有二種意義。例如(+10)-(-5)+(-3),圓括外之+號與-號表示數之加減,謂之加減號,圓括內之+號與-號表示數之正負,謂之正負號。加減號乃運算中所應用者,故稱爲運算符號;正負號乃表示數之性質者,故稱爲性質符號,正負號與加減號之關係當在加減法中詳論之。

第四節　文字與數字

表示數之記號,在算術中卽爲數字,卽現在世界各國所通用之阿拉伯數字:0,1,2,3,4,5,6,7,8,9。在代數學中,除用上述十個數字外,又應用英文字母,希臘字母等以表示數量,惟數字代表已知之確定數量,而文字代表尙未確定或任予一值之數量。例如當甲數量 a 爲乙數量 b 之二倍時,吾人可不論此二數爲何數,卽能列式表示其關係如下:

$$a = 2b$$

第五節 方程式

上節中所示之關係：$a=2b$，名曰**方程式** (Equation)。在此方程式中，a 之數量與二倍 b 之數量相等，故方程式前後必爲一等式，否則卽不能表示此二數量 a 與 b 之關係。所謂等式者，卽等號(=)左之總數量與等號右之總數量相等是也。

許多繁雜之演算，均可依代數方法，列成簡單之方程式，因而可得簡捷之解答。故方程式在數學中有極大之應用。關於方程式之詳細論述，見 23 至 27 各節內。

第六節 符號

算術中所用之符號，代數中均用之。然其中有若干符號，其意義另有擴充之處。如前所述＋及－兩符號除表明加減之演算外，又可用作正號與負號是也。

符號＋(加)，－(減)，×(乘)，÷(除)以及括號根號等，其用法一如算術，玆分述之如次：

(1)加號＋　例如 $6+3$ 卽謂 6 加 3。又如 $a+b$，卽謂 a 加 b。

(2)減號－　例如 $6-3$，卽謂從 6 中減去 3，又如 $a-b$，卽謂從 a 中減去 b。

(3)乘號×　例如 6×3，卽謂以 3 乘 6，又如 $a\times b$，卽謂以 b 乘 a。又如 $a\times b\times c$，卽謂以 b 乘 a，而於其所乘得之積，再以 c 乘之也。

但文字與文字或文字與數字之間，其乘號 × 可省，或以點・代之。例如 ab 或 $a\cdot b$ 卽爲 $a\times b$ 之意。又如 $a(b-c)$，卽爲 $a\times(b-c)$之意。

(4)除號÷　例如 $6\div3$，卽謂以 3 除 6，又如 $a\div b$ 卽謂以 b 除 a。又如 $a\div b\div c$，卽謂以 b 除 a，而於其所除得之商，再以 c 除之也。

除式與分數式可以通用，如 $a\div b$ 同於 $\frac{a}{b}$。

(5)括號　括號有括弧與括線之別。括弧又有圓括( )，曲括{ }，與

方括〔 〕三種，皆所以表示在括弧之內者當作一項計算之意。各種括弧之運用方法，當於第 15 節中另論之。括線——之意與括弧相同，但其所置之地位則異，括線置於所括諸數之上，而括弧則分置於所括諸數之前後。例如 $\overline{a+b}$ 卽爲 $(a+b)$ 之意。

(6)根號$\sqrt{\ }$ 根號表示求方根者，詳見第 32 節。

(7)等號＝ 等號置於兩數或兩式之間，以表示左右兩值相等。例如 $2+5=7$，$x+y=10$，其左右兩邊之數值相等是也。

(8)不等號 $\neq$讀作"不等於"。例如 $2+5\neq6$ $a+2a\neq a$ $(a\neq0)$

$>$讀作"大於"。 例如 $5>2$ $2a>a$ $(a\neq0)$

$<$讀作"小於"。 例如 $2<5$ $a<2a$ $(a\neq0)$

(9)連續號 連續號……讀作"等等"。例如 a_1，a_2，a_3……表示其後尙有 a_4，a_5 等各項。

(10)無限大 ∞用以表示無限大。例如 $1+2+3+4+\cdots\cdots=\infty$，其意卽表示 $1+2+3+4+$ 至無限項(每項均較前項大 1)，其總數爲無限大。又如 $\frac{a}{\infty}=0$，其意爲任何數被一無限大之數所除，其結果必爲無限小而其極限爲 0。

此外如$\because$讀作因(卽因爲)，$\therefore$讀作故(卽所以)，乃用以代替因與故二字者，在代數中亦常用之。

第七節 代數學中常用之名辭

若干名辭，書中常見應用，玆特提前加以說明。

(1)絕對值(Absolute Value) 如 $+4$ 或 -4 之絕對值爲 4；$+a$ 或 $-a$ 之絕對值爲 a。

(2)因數(Factors) 諸數連乘，其結果謂之連乘積，或單稱積(Product)，而其各數謂之積之因數。如 a 與 b 爲 ab 之二因數。

(3)係數(Coefficient) 將積之因數任意分爲二部，其中一部爲又一部之係數，例如 $3abx$，3 卽爲 abx 之係數，又 $3a$ 爲 bx 之係數，又

$3ab$ 爲 x 之係數。係數爲數字者則謂之**數字係數**。如僅有文字而無數字者，其數字係數卽爲 1。

(4)**冪**(Power)與**指數**(Exponent)　倘積爲相同之諸因數而成者，不拘其因數有幾，概稱其積爲其因數之**冪**，亦稱**乘方**。例如 $a \cdot a$ 稱爲 a 之二冪，$a \cdot a \cdot a$，稱爲 a 之三冪。普通二次冪謂之**平方**，三次冪謂之**立方**。

$a \cdot a$ 卽二個 a 相乘，常寫作 a^2，三個 a 相乘則寫作 a^3。a 字角上所記之小字，卽所以表示 a 自乘之次數者(二個 a 相乘曰自乘二次，三個 a 相乘曰自乘三次)，稱曰**指數**。如 a^n 爲 a 之 n 次冪，其中 n 卽爲指數。

(5)**根**(Roots)與**根指數**(Index)　某數自乘幾次之積曰該數之幾冪，該數卽爲其冪之幾次根。如 a 卽爲 a^2 之二次根，又 a 卽爲 a^3 之三次根。又如某數之二次冪爲 a，則某數卽爲 a 之二次根，某數之三次冪爲 a，則某數卽爲 a 之三次根。二次根亦謂之**平方根**，三次根亦謂之**立方根**。

從一數以求其根之法曰**開方**。求二次根者曰開二次方，亦曰**開平方**。求三次根者曰開三次方，亦曰**開立方**。

求一數之幾次根，常以根號$\sqrt{\ }$書於其數之左，並以所欲求之次數書於根號之左上角。如求 a 之二次根，卽可寫作 $\sqrt[2]{a}$，求 a 之三次根，卽可寫作 $\sqrt[3]{a}$，推至求 a 之 n 次根，卽可寫作 $\sqrt[n]{a}$。根號左上角所指之小字稱之曰**根指數**。二次根之根指數常略去不書，如 $\sqrt[2]{a}$ 可省作 $\sqrt{a}$。

(6)**式**(Expression)與**項**(Term)　集文字數字及符號編成一列，曰代數式或簡稱式。式中以符號＋或－爲界限，其間之各部份稱曰項。

例如 $2a-3bx+5cy^2$ 爲以 $2a$，$-3bx$，及 $+5cy^2$ 三項連成之代數式。

代數式祇有一項者曰**一項式**(Monomial)如 $2a$；有二項者曰**二項式**(Binomial)如 $2a-3bx$；有二項以上者統稱之曰**多項式**(Polynomial)如 $2a-3bx$，或 $2a-3bx+5cy^2$ 等均爲多項式。

式中之項，其文字相同，指數亦相同者曰**同類項**(Similar Terms)。

第八節 整式

凡代數式其中並無文字爲分母者，稱曰整式，如 $5x$，a^2-ab+b^2，$\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}$，等是。茲先就整式說明代數學中之加減乘除四法，再及其他。

第九節 加法

合併二個以上之數而求其總數，其法曰加法(Addition)，其總數曰和(Sum)。代數學中加法之運算，除因各項數量有正負號之關係外，其餘大致與算術中相同。

例如 $+3$ 與 $+4$ 二項正數相加，其和爲 $+7$，此與算術中之 $3+4=7$ 同。

今若將二項負數 -3 與 -4 相加，則其和當爲 -7。又如某公司之損益，第一年爲損失 \$1,000，即寫作 $-1,000$，第二年爲損失 \$500，即寫作 -500，則二年損失之總數當爲 \$1,500，故亦寫作 $-1,500$，即此 $-1,000$ 與 -500 相加，得和爲 $-1,500$ 也。

又若某公司之損益爲第一年利益 \$1,500，第二年損失 \$500，則二年損益合計當爲利益 \$1,000，若以正數表利益，則其代數式即當寫作：

$$+1,500-500=+1,000$$

根據上述之例，可得代數學中加法之規則如下：

(1)諸正數相加，其結果即爲各數之絕對值之和，其號爲正。

例：$+4$，$+2$，$+6$，$+3$ 四數相加，其和爲 $+15$。

$+3a$，$+4a$，$+2a$ 三數相加，其和爲 $+9a$。

(2)諸負數相加，其結果即爲各數之絕對值之和，其號爲負。

例：-4，-2，-6，-3 四數相加，其和爲 -15。

$-3a$，$-4a$，$-2a$ 三數相加，其和爲 $-9a$。

(3)一正數與一負數相加，其結果爲二數之絕對值之差，其號同於

前二絕對值中之較大者。

例：$+4$，-3 相加，其和為 $+1$（二數之絕對值之差為 1，而絕對值較大之數之符號為正），-4，$+3$ 相加，其和為 -1。

$+3a$，$-5a$ 相加，其和為 $-2a$。

(4)諸正負數相加，可不變其各數之符號，而連續寫出之，成為一多項式，然後依第一法加得諸正數，依第二法加得諸負數，再依第三法求其總和。

例：$+3$，-5，$+6$，$+8$，-7，-2 各數相加：

$$\begin{aligned}+3-5+6+8-7-2&=+3+6+8-5-7-2=+17-14\\&=+3\end{aligned}$$

$+3a$，$-2a$，$+6a$，$+5a$，$-7a$，$-9a$ 相加：

$$\begin{aligned}+3a-2a+6a+5a-7a-9a&=+3a+6a+5a-2a-7a-9a\\&=+14a-18a=-4a\end{aligned}$$

(5)代數式中之諸項相加，則加其同類項；同類項相加，則加其係數。

例：$-3+6a^2-3b-5a^2+4b+8=+a^2+b+5$

一項式或多項式中之第一項為正號者，其號可去之，如上式 $+a^2+b+5$ 可寫作 a^2+b+5。

第十節　減法

比較兩數(或兩式)以求其差，其法曰減法 (Substraction)。被減之數(或式)曰被減數(或被減式)，從被減數(或式)中減去之數(或式)曰減數(或減式)，而以減號(－)表示其關係。

例一：甲公司之資本為 \$50,000，乙公司之資本為 \$20,000，則甲公司之資本多於乙公司之資本之數為 \$30,000，其代數式即為：

$(+50,000)-(+20,000)=+30,000$ 或 $50,000-20,000=30,000$

例二：最熱時之溫度為 0 度上 100 度，最冷時之溫度為 0 度下 5 度，則最熱時之溫度較最冷時之溫度上升 105 度。其代數式即為：

$$(+100)-(-5)=+105 \quad \text{或} \quad 100+5=105$$

由上二例，可知一數減以正數，其結果等於一數加以負數，反之減以負數，其結果等於加以正數，故得減法之符號規則如下：

(1)減正等於加負　　$-(+)=+(-)=-$

(2)減負等於加正　　$-(-)=+(+)=+$

由上原理，即可得代數式之減法規則為：

以一式減於他式，當變減式各項之符號以加於被減式。

茲舉數例以示其概：

例一：以 $+4$ 減於 $+6$　　　解：$6-4=2$

例二：以 $+4a$ 減於 $+6a$　　　解：$6a-4a=2a$

例三：以 $+4a$ 減於 $-6a$　　　解：$-6a-4a=-10a$

例四：以 $-4a$ 減於 $-6a$　　　解：$-6a+4a=-2a$

例五：
$$\begin{array}{ll} \text{從} & 2a+3b+4c \\ \text{減} & \underline{+a+b-c} \\ & a+2b+5c \end{array}$$

例六：
$$\begin{array}{ll} \text{從} & 3a-6b+2c \\ \text{減} & \underline{a+2b-3c} \\ & 2a-8b+5c \end{array}$$

例七：
$$\begin{array}{ll} \text{從} & 2(a-b)-(a-c) \\ \text{減} & \underline{(a-b)+(a-c)} \\ & (a-b)-2(a-c) \end{array}$$

例八：
$$\begin{array}{ll} \text{從} & 2a-3(a-b)-4c \\ \text{減} & \underline{a \qquad\qquad\quad -c} \\ & a-3(a-b)-3c \end{array}$$

例九：從 $2a^2-ab+b^2$ 減 $a^2-2ab+2b^2-1$ 得：

$$2a^2-ab+b^2-a^2+2ab-2b^2+1=a^2+ab-b^2+1$$

例十：從 $3x^2-3y^2$ 減 $3x^2-3y^2-3xy$ 得：

$$3x^2-3y^2-3x^2+3y^2+3xy=3xy$$

第十一節　乘法

乘法(Multiplication)為加法之簡，於下列三例中可見其理。

(1)　3×5　即為　$5+5+5$　或　15

(2)　$3\times(-5)$　即為　$-5-5-5$　或　-15

(3)　$3\times ab$　即為　$ab+ab+ab$　或　$3ab$

由第(1)(3)二例中,可知二正數相乘,其所得之乘積亦爲正。

由第(2)例中,可知一正數與負數相乘,其所得之乘積爲負。

現在若以 -3 與 $+5$ 相乘,則其結果當與第(1)例中之 $(+3)\times(+5)=+15$ 相反,所以 $(-3)\times(+5)=-15$。

又若以 -3 與 -5 相乘,則其結果又當與 $(-3)\times(+5)=-15$ 相反,所以 $(-3)\times(-5)=+15$。

由上之說明,可得乘法之規則如下:

(1)同號之二數相乘,其積爲正。

例: $(-a)(-b)=+ab$; $(4a)(3b)=12ab$

(2)異號之二數相乘,其積爲負。

例: $(+a)(-b)=-ab$; $(-4a)(3b)=-12ab$

(3)諸數連乘,其負因數之個數爲奇數(卽單數如 1 個, 3 個, 5 個等者,其積爲負,爲偶數(卽雙數如 2 個, 4 個, 6 個等)者,其積爲正。

例: $(+3)(-4)(+2)=-24$

此因 $(+3)(-4)=-12$ 而 $(-12)(+2)=-24$

$(+3)(-4)(-5)=+60$

此因 $(+3)(-4)=-12$ 而 $(-12)(-5)=+60$

(4)正數自乘,其乘方亦爲正:

例: $(+3)^2=(+3)\cdot(+3)=+9$; $(+a)^3=(+a)\cdot(+a)\cdot(+a)=+a^3$

(5)負數自乘,其指數爲奇數者,其乘方爲負,其指數爲偶數者,其乘方爲正。

例: $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9$; $(-a)^3=(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)$

$=-(a\cdot a\cdot a)=-a^3$

(6)兩代數式相乘,以乘式中各項按次乘被乘式中各項,所得諸積之和,卽爲此兩代數式之乘積。

例一：一項式乘多項式：

被乘式：$a-2b-c$

$$\begin{array}{ll} \text{乘式：} & a \\ \hline \text{積} & a^2-2ab-ac \end{array}$$

例二：多項式乘多項式：

被乘數：$a-2b-c$

$$\begin{array}{rr} \text{乘數：} & a-b \\ \hline & a^2-2ab-ac \\ & -ab \qquad +2b^2+bc \\ \hline \text{積：} & a^2-3ab-ac+2b^2+bc \end{array}$$

第十二節 除法

除法(Division)爲乘法之反。如以 a 乘 b 得積爲 ab，則以 a 除 ab 得商當爲 b。乘法中稱 a 爲乘數，b 爲被乘數，ab 爲積。除法中則稱 a 爲除數(Divisor)，ab 爲被除數(Dividend)，b 爲商 (Quotient)。故除法中除數與商相乘之積等於被除數。茲舉數例示之如下：

$\because\ (+3)\times(+2)=+6 \qquad \therefore\ \dfrac{+6}{+2}=+3$

$\because\ (+3)\times(-2)=-6 \qquad \therefore\ \dfrac{-6}{-2}=+3$

$\because\ (-3)\times(-2)=+6 \qquad \therefore\ \dfrac{+6}{-2}=-3$

$\because\ (-3)\times(+2)=-6 \qquad \therefore\ \dfrac{-6}{+2}=-3$

根據上例，知除法中關於正負數之法則當與乘法中相同。即：

(1)同號之二數相除，其商爲正。

(2)異號之二數相除，其商爲負。

例：$\dfrac{+ab}{+a}=+b$；$\dfrac{-ab}{+a}=-b$；$\dfrac{+ab}{-a}=-b$；$\dfrac{-ab}{-a}=+b$。

以一項式除多項式，其所得之商，爲以一項式除多項式各項所得諸商之和。

例：$$\frac{6a-2ab-4ac}{2a}=3-b-2c$$

代數中除法多以分數之形式表示之。如 $2abc\div ac$ 常寫作 $\dfrac{2abc}{ac}$。用

分數式表示除法,可以比較分子及分母之因數,而消去其所公有者。消去分子分母之公因數後所剩餘之分數式或整式,即爲所得之商。例如上式 $\frac{2abc}{ac}$ 中,分子之因數爲 2, a, b, c, 分母之因數爲 a, c, 則 a, c 即爲公因數,消去 a, c 公因數之後,其所餘之整式 $2b$ 即爲所求之商。此種除法亦謂之因數消去法。熟悉之後,在算時便利不少,例如 $\frac{2abcd}{abd}$ 即可直接寫作 $2c$; $\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)}$ 即可直接寫作 $(a-c)$。

二多項式相除時,須先將其除式與被除式化爲因數式,然後消去其公因數(Common Factor)。

例如: $\frac{ab-c}{ab}$ 不能將分子之 ab 與分母之 ab 消去。

又如: $\frac{ab-bc}{bd}$ 可先化爲 $\frac{b(a-c)}{bd}$ 然後將 b 消去之得: $\frac{a-c}{d}$。

例中將 $ab-bc$ 化爲 $b(a-c)$ 之法謂之分析因數,詳見第 16 節。

第十三節 運算之次序

將繁式化爲簡式,爲解方程式之一重要步驟,諸如消去括弧,消去因數,歸併同類項,以及乘除等工作,均包括於此步驟中。以上四節已將加減乘除四法略述其大概,茲將此四法之運算,與代數式化簡之關係舉例以明之。至其他各種工作,如去括弧,消因數等容當另節討論。

加減乘除四法在一式中之運算應依一定之規則,其規則即爲先乘除而後加減。

例一:化簡右式: $4+8\times2-6\div3$ 應爲:

$$4+8\times2-6\div3=4+16-2=18$$

其中 8 與 2 乘, 6 被 3 除,應在加減前先行算出。

例二:化簡右式: $18\div3-3\times2+2+4\times8\div4$ 應爲:

$$18\div3-3\times2+2+4\times8\div4=6-6+2+8=0+2+8=10$$

第十四節 零之關係

在加減時，如發現式中有 0 項者，可將此 0 項不計，僅加減其餘各項卽得。如：

$$2+0+4-0+7=2+4+7=13$$

但在乘除時，0 之關係甚大。如 0 爲因數之一，則不論其餘之因數爲何數，其積當爲 0。

例如在下面方程式中以 $a=2$, $b=2$ 代入之後：

$$c=8(a-b)+4=8(2-2)+4=8(0)+4=0+4=4$$

（註：括弧內各項應先計算，詳見下節）

又當 0 爲被除數時，其商亦爲 0，如 $\frac{0}{a+b}=0$。

但切勿用 0 作除數，因以 0 爲除數，其商爲不定也。

第十五節 括弧

括弧( )，{ }，[ ]，所以包括式之全體於其內，使之自成一數。於演算時，須先處理括弧以內之數，然後處理括弧以外之數。

括弧之內又有括弧者，則異其括弧之形式以免混淆不清。如 $-[1-\{a-(b-c)\}]$。

代數式中含有括弧者，化簡之時，常須去其括弧。去括弧當依下列規則：

(1)於括弧之前置（+）號者，欲去括弧，可不變括弧內各項之符號而逕去之。

例： $a+(b-c)=a+b-c$

(2)於括弧之前置(－)號者，欲去括弧，則變其括弧內各項之符號而後去之。

例： $a-(b-c)=a-b+c$

(3)括弧內之式又被括於另一括弧中者，去括弧時，當先去其最內

部之括弧，同時完成其去括弧前後應有之工作，如乘除及歸併同類項等，然後依次及於外部之括弧，直至全體括弧去盡爲止。

例：
$$-[b-\{a-(b-c)\}]$$

先去最內部之括弧：
$$-[b-\{a-b+c\}]$$

再去內部括弧：
$$-[b-a+b-c]$$

歸併同類項：
$$-[2b-a-c]$$

再去其最後之括弧：
$$-2b+a+c$$

(4)括弧前如有係數，去括弧時，當以係數(連符號在內)分別乘括弧內之各項。

例一：$2b-3(a-b)+2(a+b)=2b-3a+3b+2a+2b=7b-a$

例二：$2a-3b[(a-b)-(a+b)]=2a-3b(a-b-a-b)$
$$=2a-3b(-2b)=2a+6b^2$$

例三：$4a-2a[b-\{a+(a-b)\}]=4a-2a[b-\{a+a-b\}]$
$$=4a-2a[b-\{2a-b\}]$$
$$=4a-2a[b-2a+b]$$
$$=4a-2a[2b-2a]$$
$$=4a-4ab+4a^2$$

第十六節　分析因數

諸數相乘而得積，其各數謂之積之因數。分析因數卽所以從積中尋出其各因數，其事自較乘各因數而得積者爲難。

例如求 $ab-ac$ 之因數。

檢視式中各項知前項爲 a 乘 b 而得，後項爲 a 乘 c 而得，卽前項

之 b 及後項之 c 皆經 a 相乘始有此式，故此式卽可寫爲：

$$a(b-c)$$

於是 a 與 $(b-c)$ 卽爲前式 $ab-ac$ 之二因數，而 $ab-ac$ 卽爲此二因數相乘所得之積。

從數項中尋出之因數，爲各項所公有者，謂之**公因數**（Common Factor）如上例 a 爲 ab 與 ac 二項之公因數。各項公因數之全體謂之各項之**最高公因數**（Highest Common Factor）。

代數學中關於分析因數之問題討論甚詳，但爲本書中所應用者，僅關於公因數之尋求一事，故讀者宜熟習之。

玆舉例以示其法：

$$ab-ac+ad=a(b-c+d)$$

$$6a+12b=6(a+2b)$$

$$b^2+b=b(b+1)$$

$$4ab+8abc=4ab(1+2c)$$

$$\begin{aligned} a(a+b)-a(c-d)&=a\{a+b-(c-d)\}\\ &=a(a+b-c+d)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a+c)-(a-b)(c-d)&=(a-b)\{a+c-(c-d)\}\\ &=(a-b)(a+c-c+d)\\ &=(a-b)(a+d)\end{aligned}$$

有時一因數表面上看不出其爲公因數，可先變其式爲一易於化簡或較爲合用者，再處理之。

例如從右式：$\left(a-\frac{ab}{2}\right)$ 中，可提出 $\frac{a}{2}$ 而將其式變爲：

$$\frac{a}{2}(2-b)$$

又如右式：$\dfrac{\left(a-\frac{ab}{2}\right)}{(2-b)}$，可提出 $\frac{a}{2}$ 而化簡之：

$$\frac{\frac{a}{2}(2-b)}{(2-b)}=\frac{a}{2}$$

本書以後討論時,有 $c+\left(\frac{c}{i}\times\frac{1}{s_{\overline{k}|}}\right)$ 一式,即將其中之 $\frac{c}{i}$ 提出,而得一較為合用之公式:

$$\frac{c}{i}\left(i+\frac{1}{s_{\overline{k}|}}\right)$$

習 題 一

求下列各式之和,並歸併其同類項而化簡之。

1. $2a-b-a+3b$
2. $4a,\ -2c,\ -5a,\ 3a,\ -2a$
3. $b,\ -2b,\ -3b,\ b$
4. $(a-b),\ 2(a-b),\ -(a-b)$
5. $2a-2b,\ a-b$ $=3a-3b$
6. $a-b,\ 3(a-b),\ -(a-b)$
7. $a^2-2ab+b^2,\ a^2+b^2,\ ab$
8. $5a+8b-4c,\ -2a-b-c,\ a-2b+2c$
9. $3a-4b+5c,\ -a-b+c,\ a-2c$

求下列各二式之差,以第二式減於第一式:

10. $5a$ 與 $2b$
11. $4b$ 與 b
12. $3a$ 與 $-a$
13. $5a$ 與 $-3a$
14. $-2a$ 與 $-a$
15. $-5a$ 與 a
16. $2a-3b$ 與 $a-b$
17. $5b-2c$ 與 $-b+c$
18. $4a+2b-3c$ 與 $2a-b+3c$
19. $5a^2-2b$ 與 $2a^2+2b$
20. a^4 與 $9a^4$
21. $7a-2b$ 與 $-3a+b+2c$
22. $2(a-b)$ 與 $-(a-b)$

求下列各式相乘之積:

23. $a-b$ 乘 a
24. $a+b$ 乘 a
25. $(a+b+c)$ 乘 ac
26. $(a-b-c)$ 乘 $-ab$
27. $a+b$ 乘 $a-c$
28. $2a+3b-c$ 乘 $a-2b$
29. $5a$ 乘 $2b$
30. $3a$ 乘 $-2c$
31. a 乘 a
32. a 乘 $2a$
33. $2a$ 乘 $3a$
34. $3(-a)(-b)$
35. $-2(-a)(-b)$
36. $-2(-a)b$

求下列各式之商:

37. $2a\div a$
38. $2ab\div a$
39. $-3a\div a$
40. $-3a\div(-a)$

41. $(-4ab-b-2bc)\div b$

42. $(2a-3ab-ac)\div c$

43. $\dfrac{-(1+i)}{-(1+i)}$

44. $\dfrac{ab-bc-b^2}{b}$

45. $\dfrac{4ab^2-8bc-bd}{2b}$

46. $\dfrac{(1+i)^2-(1+i)}{(1+i)}$

47. $3(1+i)+2(1+i)$

48. $\dfrac{8(1+i)-4(1+i)}{2(1+i)}$

49. $\dfrac{6(1+i)^3-3(1+i)^2}{3(1+i)}$

化簡下列各式:

50. $2\cdot4-3\cdot6$

51. $3\cdot5-4\div2$

52. $3\cdot3+4-2$

53. $6-5+6\div3-4$

54. $8\cdot4\div2-8+6\div3$

55. $2a+3b+a-4b-3a$

56. $2a\cdot b\div ab+cd$.

57. $6ab+0-2b+0$

58. $-2+4-1\cdot8\div2$

59. $ab\cdot2ab-ab\cdot ab$

60. $0\cdot6-4+9$

61. $5+0-6\cdot0+8$

62. $0(a-b-c)+2a-a$

去下列各式中之括弧而簡單之。

63. $2+(4-3)-8$

64. $5-(6+2)-4$

65. $5-(6-4)+(3-1)$

66. $2a-(a-b)+(a-2b)$

67. $3a-(a+b)-(c+b)$

68. $4(2a-2)-3$

69. $4(5a-3)-6(4a+2)$

70. $7a+2b-5(3b-6)$

71. $3(5x-2)-4$

72. $9-4(2y-3)$

73. $6(a-b)-4(a+b)$

74. $a-(b+c)-2a$

75. $a+4-(a+2b)-\{3(a+b-3)-2(3a-2)\}$

76. $4a-b-\{-(2c-a)-(3a-c)\}$

77. $7a+3(2a-4)-4\{a(2a-3)-5(a-2)\}$

78. $8a-6[3-2(a-b)+a\{4-(a+b)\}-4]$

79. $r-\{-(r-3)-(r-2)\}$

80. $6(2a-ab)+9(2a-a-a)+4$

分析下列各式之因數:

81. $2a+4$

82. $3a-6$

83. $ab+2abc$

84. a^2-a

85. b^2+b

86. $2a^2-4a$

87. a^3-a^2

88. $a+a^3$

89. $ab+2abc-2ab^2$

90. x^2-3x

91. $2a^2+4b^2-bc^2$

92. $5x+10x^2-15x^3$

93. $6a^3+9a^2-3a^4$

94. $4ab^2-2ab$

95. $3(a-b)+(a-b)$

96. $2(a+b)-4(a+b)$

97. $4b(a-b)-2b(a-b)$
98. $2a(c-d)-2b(c-d)$
99. $2b(a+b+c)-b(a+b+c)$
100. $3a(b+c)+(2a-b)(b+c)$

第十七節 分數通則

$\frac{3}{4}$ 與 $\frac{a}{b}$ 皆為**分數**(Fraction),其中 3 與 a 為**分子**(Numerator);4 與 b 為**分母**(Denominator)。以數字為分數者為算術分數,分數中含有文字者為代數分數。代數式中含有文字為分母之分數者稱為分數式。代數分數之加減乘除及一切計算,其法與算術同。

任何數以 1 乘之或除之其值皆不變。根據此事實,可得分數之通則如下:

(1)分數之分母分子以同數(零與無限大除外)乘之,其值不變。

(2)分數之分母分子以同數(零與無限大除外)除之,其值不變。

例如有分數 $\frac{6}{12}$,以 2 乘其分母分子,而變其分數為 $\frac{12}{24}$,但其值仍與原分數相同:

$$\frac{6}{12}\times\frac{2}{2}=\frac{12}{24}$$

此分數亦可以 3 除其分母分子,而變為 $\frac{2}{4}$,但其值則仍不變:

$$\frac{6}{12}\div\frac{3}{3}=\frac{2}{4}$$

因 $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$ 皆為 1 故也。

又如分數 $\frac{a}{b}$ 可以 $\frac{m}{m}$ 乘其分母分子而得 $\frac{am}{bm}$,其值亦不變:

$$\frac{a}{b}\times\frac{m}{m}=\frac{am}{bm}$$

又如分數 $\frac{9ab}{3ac}$ 可以 $3a$ 除其分母分子而得其簡式為 $\frac{3b}{c}$:

$$\frac{9ab}{3ac}\div\frac{3a}{3a}=\frac{3b}{c}$$

最後一例即分數化簡之法。最簡單之分數，其分母分子無公因數，謂之**最簡分數**(Fraction in Lowest Terms)。

第十八節 約分與通分

將一分數之分母分子去其最高公因數而變其分數為最簡分數之工作，謂之**約分**。

例如化 $\frac{3a^2xy}{6ax^2y}$ 為最低項，當去其分母分子之最高公因數 $3axy$:

$$\frac{3a^2xy}{6ax^2y}=\frac{3a^2xy\div 3axy}{6ax^2y\div 3axy}=\frac{a}{2x}$$

今設有若干分數，其分母各異，為便利計算起見，須將各異分母之分數變為同分母之分數，而不改其原值，其工作謂之**通分**。

例如有 $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$，三分數，欲化為同分母之分數，可以 df 乘第一分數之分母分子，以 af 乘第二分數之分母分子，以 ad 乘第三分數之分母分子，即得三同分母之分數為:

$$\frac{b}{a}\times\frac{df}{df}=\frac{bdf}{adf}$$

$$\frac{c}{d}\times\frac{af}{af}=\frac{acf}{adf}$$

$$\frac{e}{f}\times\frac{ad}{ad}=\frac{ade}{adf}$$

求諸各分數之公分母，常以各分數之分母連乘而得。但各分母中如有相同項，為簡單起見，當以各分母之**最低公倍數**(註)(Lowest Common Multiple)為公分母。

(註)最低公倍數之求法如下例：例如求 $24x^3y^2$, $36x^4yz$, 與 $54x^2y^2z^2$ 之最低公倍數:

(1)將各式分析因數

$$24x^3y^2=3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot x^3\cdot y^2=2^3\cdot3x^3y^2$$

$$36x^4yz=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot x^4\cdot y\cdot z=2^2\cdot3^2x^4yz$$

$$54x^2y^2z^2=2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot x^2\cdot y^2\cdot z^2=2\cdot3^3x^2y^2z^2$$

(2)以各式中之不同因數之最高乘方為最低公倍數之因數:

$$2^3\cdot3^3x^4y^2z^2=216x^4y^2z^2$$

(3)其連乘積 $216x^4y^2z^2$ 即為最低公倍數。

例如：$\frac{a}{bc}$，$\frac{c}{ab}$，$\frac{b}{ac}$ 三分數，其分母之最低公倍數爲 abc。故卽以 $\frac{a}{a}$ 乘第一分數，$\frac{c}{c}$ 乘第二分數，$\frac{b}{b}$ 乘第三分數，而得其公分母爲 abc，及其各分數爲：

$$\frac{a}{bc}\times\frac{a}{a}=\frac{a^2}{abc}$$

$$\frac{c}{ab}\times\frac{c}{c}=\frac{c^2}{abc}$$

$$\frac{b}{ac}\times\frac{b}{b}=\frac{b^2}{abc}$$

第十九節 分數之符號

分數之符號有三，卽分子之符號，分母之符號與分數前之符號。如分數 $-\frac{+a}{-b}$，其分子之符號爲正，分母之符號爲負，而分數前之符號亦爲負。

分數中三符號，同時改變其二，其值不變。

$$-\frac{+a}{-b}=-\frac{-a}{+b}=+\frac{-a}{-b}=+\frac{+a}{+b}=\frac{a}{b}$$

$$-\frac{+a}{+b}=+\frac{-a}{+b}=+\frac{+a}{-b}=-\frac{-a}{-b}=-\frac{a}{b}$$

第二十節 分數加減法

諸同分母之分數相加減，則以其諸分子相加減爲分子，而以其同分母爲分母。

如：
$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3+2-1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{x}-\frac{c}{x}=\frac{a+b-c}{x}$$

諸異分母之分數相加減，則先用通分法，化諸分數爲同分母之分數，然後如上法加減之。

如：$\frac{3}{6}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{3}{6}+\frac{2\times2}{3\times2}-\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{3}{6}$

$$=\frac{3+4-3}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{a-b}{c-d}+\frac{a-c}{m-n}=\frac{a-b}{c-d}\times\frac{m-n}{m-n}+\frac{a-c}{m-n}\times\frac{c-d}{c-d}$$

$$=\frac{(a-b)(m-n)+(a-c)(c-d)}{(c-d)(m-n)}$$

$$\frac{2(m-n)}{(c-d)}-\frac{(m-n)}{2(c-d)}=\frac{4(m-n)}{2(c-d)}-\frac{(m-n)}{2(c-d)}$$

$$=\frac{4(m-n)-(m-n)}{2(c-d)}=\frac{3(m-n)}{2(c-d)}$$

第二十一節　分數乘法

諸分數相乘則以諸分子之乘積爲分子，諸分母之乘積爲分母。

如：$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$；$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

$$4\times1\frac{1}{2}=\frac{4}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{12}{2}=6$$

第二十二節　分數除法

設 4 被除於 $\frac{1}{2}$，計算時其式可寫爲 $4\div\frac{1}{2}$ 或 $\frac{4}{\frac{1}{2}}$。於 $\frac{4}{\frac{1}{2}}$ 一式之分母分子各乘以 2，則其式可化簡爲：

$$\frac{4\times2}{\frac{1}{2}\times2}=\frac{4\times2}{1}=4\times2=8$$

由此可知 4 被除於 $\frac{1}{2}$，其結果爲 8，而此結果乃從 4×2 而得。依此類推，任何數被除於一分數，其結果亦均如此。如 $a\div\frac{1}{b}$，其結果爲 ab。上例中之 2 與 b 乃將分數 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{b}$ 倒轉而得，故謂之 $\frac{1}{2}$ 與 $\frac{1}{b}$ 之倒數，亦稱反商。

因此可知爲一分數所除，卽等於乘該分數之倒數。

如：

$$6\div\frac{1}{4}=6\times4=24$$

$$8\div\frac{2}{3}=8\times\frac{3}{2}=\frac{24}{2}=12$$

$$b\div\frac{c}{2}=b\times\frac{2}{c}=\frac{2b}{c}$$

$$\frac{b}{a}\div\frac{c}{a}=\frac{b}{a}\times\frac{a}{c}=\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$$

$$100\div\frac{1}{(1+i)}=100\,(1+i)$$

任何數皆可以 1 爲分母化成分數，如 $3=\frac{3}{1}$，$a=\frac{a}{1}$。

由此爲一數所除，卽等於與以該數爲分母以 1 爲分子之分數相乘。

如：

$$a\div b=a\times\frac{1}{b}=\frac{a}{b}$$

習題二

計算下列各式並簡單之；

1. $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$
2. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$
3. $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$
4. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$
5. $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}$
6. $1\frac{1}{4}+3\frac{1}{3}$
7. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$
8. $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}$
9. $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$
10. $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}$
11. $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$
12. $\frac{2a}{b}-\frac{c}{b}$
13. $\frac{2(a+b)}{(a+b)}-\frac{a}{b}$
14. $\frac{2(a-b)}{(a-b)}-\frac{(a-b)}{(a+b)}$
15. $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$
16. $\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}$
17. $\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}$
18. $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}$
19. $\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}$
20. $\frac{a}{b}\times\frac{a}{c}$

21. $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}$

22. $\frac{3ab}{cd}\times\frac{cd}{4ab}$

23. $\frac{5b}{c}\times\frac{cd}{10ab}$

24. $\frac{6}{30}\div 3$

25. $\frac{6a}{12}\div a$

26. $\frac{3(a+b)}{(a+b)}\div(a+b)$

27. $\frac{12a^2}{18a}$

28. $\frac{1}{4}\div\frac{1}{2}$

29. $\frac{1}{6}\div\frac{1}{4}$

30. $\frac{1}{8}\div\frac{1}{3}$

31. $\frac{a}{b}\div\frac{c}{b}$

32. $\frac{ab}{cd}\div\frac{1}{cd}$

將下列各分數之記號變成正號:

33. $+\frac{-1}{-2}$

34. $-\frac{-2}{3}$

35. $-\frac{+a}{-b}$

36. $-\frac{-(a-b)}{+(c-d)}$

37. $-\frac{-.12346}{.37038}$

化下列各式爲簡式:

38. $\frac{i}{(1+i)}\times\frac{(1+i)-1}{i}+\frac{2}{(1+i)}\div\frac{1}{(1+i)-1}$

39. $\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{12}\right)\times\frac{cd}{abx}+\frac{c}{ax}-\frac{c}{ab}\div\frac{c}{x}$

40. $\frac{3axy^3}{5b^2}\div\frac{6ay^3}{10b^2x}$

第二十三節　方程式之意義及其運算之定理

用代數記號表示二代數式相等者,曰**方程式**或稱**等式**。凡相等之二式,稱爲等式之邊或節。在等號左端之式稱左邊或前節,右端之式稱右邊或後節。

等式有兩種,一爲**恆等式**,一爲**條件等式**。不問其文字之值如何,其兩邊恆相等者,爲恆等式。如 $a+a=2a$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。必其文字有一定之值其兩邊始相等者稱條件等式。例如 $5a+2=12$。惟 a 之值爲 2,始能相等也。

方程式中之數有**已知數**與**未知數**之分。已知數可以用數字表之,亦

可用文字表之,而未知數則單用文字表之。與未知數相當之值(即以代未知數而能適合於方程式者)謂之方程式之根。從方程式以求其根,謂之解方程式。

例:已知下面方程式中之 $b=2$,求其 a 之值。

$a=5+b$, 將 b 代入得: $a=5+2=7$

解方程式時,常應用下列各項定理:

(1)方程式之兩邊,以同數或相等數加之,結果仍相等。

如 $a=b$ 則 $a+c=b+c$

$a=b$ $c=d$ 則 $a+c=b+d$

(2)方程式之兩邊以同數或相等數減之,結果仍相等。

如 $a=b$ 則 $a-c=b-c$

$a=b$ $c=d$ 則 $a-c=b-d$

(3)方程式之兩邊以同數或相等數乘之,結果仍相等。

如 $a=b$ 則 $ac=bc$

$a=b$ $c=d$ 則 $ac=bd$

(4)方程式之兩邊以同數或相等數(零與無限大除外)除之,結果仍相等。

如 $a=b$ 則 $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

$a=b$ $c=d$ 則 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

(5)兩方程式之一邊相同,其他兩邊互相等:

如 $a=b$ $c=b$ 則 $a=c$

第二十四節 移項

方程式之任何一項從此邊移至彼邊,而兩邊仍相等者,謂之移項 Transposition)。

例如：$a+b=c-d$ 兩邊同以 b 減之：

依定理二：$a+b-b=c-d-b$

併同類項得：$a=c-d-b$

由上知 b 之一項，消於左邊，即顯於右邊，而其符號乃由正變爲負。

倘在式之兩邊，以 d 加之。

則依定理一：$a+d=c-d-b+d$

併同類項得：$a+d=c-b$

如是 d 之一項，消於右邊，即顯於左邊，而其符號乃由負變爲正。

是故方程式之任何一項可反其符號，從此邊移於彼邊。此爲方程式之移項定律。

根據方程式之移項定律，方程式之各項可不必經過兩邊同時加減之手續而轉移之。

如：$a+b=c-d$

則：$a+b-c=-d$　　　$a+b+d=+c$

$b-c+d=-a$　　　$a-c+d=-b$

$a+b-c+d=0$　　　$0=c-d-a-b$

$a=c-d-b$　　　$b=c-d-a$

$-c=-d-a-b$　　　$d=c-a-b$

$-c+d=-a-b$

第二十五節　方程式之變號

依方程式定理 3. 方程式之兩邊，同以 -1 乘之，其兩邊之值仍相等，但其符號悉變，故變方程式兩邊之符號，其兩邊仍相等。

例如 $-a+b-2ac=-m+n$ 可變爲

$+a-b+2ac=m-n$

依移項法，將左邊各項全部移至右邊，將右邊各項全部移至左邊。因而其號全變之後，可依此理再將各項變爲未移項前之原來符號。是故

方程式之左邊與右邊各項全部更換時，其符號可以不變。

例如 $a-b=c$ 則 $c=a-b$

第二十六節　方程式之演化

應用以上所述之定理，可將方程式加以處理而成另一簡單之方程式，是謂之方程式之演化。此外又有一種方程式，乃自二方程式合併而得，但較原來之方程式縮短不少。此種例題在本書以後各章演化公式時，常常用之，希讀者留意。茲舉例以明之。

例如方程式：

$$x=1+ar+a^2r^2+a^3r^3+a^4r^4+a^5r^5+a^6r^6 \qquad (A)$$

用 ar 乘方程式兩邊，依定理(3)得：

$$arx=ar+a^2r^2+a^3r^3+a^4r^4+a^5r^5+a^6r^6+a^7r^7 \qquad (B)$$

從(B)式減去(A)式，依定理(2)得：

$$arx-x=a^7r^7-1 \qquad (C)$$

分析左邊因數得：

$$x(ar-1)=a^7r^7-1 \qquad (D)$$

兩邊同以 $ar-1$ 除之，依定理(4)得：

$$x=\frac{a^7r^7-1}{ar-1} \qquad (E)$$

此方程式(E)較原方程式(A)簡單不少。

第二十七節　解方程式之例

解方程式法，見下列諸例：

例一　求下面方程式中 b 之值：

$$3b-(2b+4)=8-2b$$

解：去括弧：　$3b-2b-4=8-2b$

歸併同類項：　$b-4=8-2b$

移項：　　$b+2b=8+4$

歸併同類項：　　$3b=12$

以 3 除兩邊：　　$b=\frac{12}{3}=4$

驗算：以求得之根 4 代入原方程式中而驗算之：

$$3b-(2b+4)=8-2b$$

$$3\times4-(8+4)=8-2\times4$$

$$12-12=8-8$$

$$0=0$$

例二　設已知下面方程式中之 $S=1{,}883.55$；$i=3\%$ 或 $.03$；$n=5$；$(1.03)^5=1.159274$，求其 R 之值。

$$S=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

解：代入各數：

$$1{,}883.55=R\times\frac{(1+.03)^5-1}{.03}$$

$$1{,}883.55=R\times\frac{1.159274-1}{.03}$$

兩邊以 .03 乘之：

$$1{,}883.55\times.03=R\times.159274$$

全部移項：

$$.159274\,R=1{,}883.55\times.03$$

兩邊以 .159274 除之：

$$R=\frac{1{,}883.55\times.03}{.159274}=\frac{56.5065}{.159274}=\$\,354.78$$

由上二例可得解方程式時之次序如下：

(1)去方程式中之分母或括弧。

(2)歸併同類項，使方程式簡單。

(3)用移項法將含有未知數之各項悉移於方程式之左邊，以已知數

各項悉移於方程式之右邊。

(4)將未知數歸併爲一項，而以未知數項之係數除方程式之兩邊。

習　題　三

求下列各式中 a 之值(1 至 23)

1. $a+3=2$
2. $a+2=0$
3. $a-2=0$
4. $2-a=4$
5. $2a=4$
6. $3a=11-2$
7. $3a=5$
8. $2(a-1)=3(a-2)$
9. $4(a+2)+a=4$
10. $2a=12+a-3$
11. $-a=2$
12. $-4=a$
13. $-a=-4+2$
14. $\dfrac{2ab}{b}=6$
15. $\dfrac{3ac}{c}=12$
16. $\dfrac{2ac}{c}=15-\dfrac{3ab}{b}$
17. $\dfrac{a(a+b)}{(a+b)}=5$
18. $(a+b)+(a-b)=7$
19. $2(a+b)=2b-4$
20. $a-b=3-b$
21. $a+b=b+7$
22. $-a+3+b=(a+b)$
23. $a+2b-(a+b)-(2a-b)+8$

24. 設已知下面方程式中之$(1.03)^2=1.0609$，求 P 之值。

$$1060.90=P(1.03)^2$$

25. 設已知下面方程式中之$(1.03)^5=1.159274$，求 S 之值：

$$431.30=\frac{S}{(1.03)^5}$$

26. 設已知下面方程式中之$(1.05)^4=1.215506$，求 S 之值。

$$S=100\cdot\frac{(1.05)^4-1}{.05}$$

第二十八節　指數

指示一數乘方之記號卽爲該數之指數，而該數卽爲其指數之底數(Base)，例如 2^3 其右角上之小字 3 所以表示 2 之三乘方者，卽爲 2 之指數。其意卽爲 2 自乘三次，卽 $2\cdot2\cdot2$ 是也，而 2 則爲指數 3 之底數。如 2 之指數爲 4，則其數當爲 2 之四乘方，卽 2^4 是也。凡底數相同之數，其乘，除，乘方，及開方之各種規則，名曰指數定律 (Law of Exponents)。下列各式之有同底數者，皆可應用指數定律計算之。

$$2^2\text{ 及 }2^3,\ a^2\text{ 及 }a^4,\ (a-b)^3\text{ 及 }(a-b)^4$$

凡一數之指數為 1 者，其指數常略去不書，如 a, b, 2, 各數，其指數皆為 1。

第二十九節　乘之指數定律

帶有正整指數之同底諸數相乘，其積之指數等於諸因數指數之和，而其底數不變。

例如：$$3^2\cdot 3^3=3^5$$

說明：$$3^2=3\cdot 3$$

$$3^3=3\cdot 3\cdot 3$$

$$3^2\cdot 3^3=3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=3^5$$

同樣：$$a^3\cdot a^2=a^5$$

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y} \qquad \text{(第 1 式)}$$

$$a\cdot a^2=a^3$$

$$(1+i)^2(1+i)^3=(1+i)^5$$

但 $a^2\cdot b^3$ 之積卽為 a^2b^3，因其底不同，故其指數不能相加。

第三十節　除之指數定律

帶有正整指數之同底二數相除，其商之指數等於被除數指數減除數指數之差，而其底數不變。

例如：$$3^4\div 3^2=\frac{3^4}{3^2}=3^{4-2}=3^2$$

說明：$$\frac{3^4}{3^2}=\frac{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3}=3\cdot 3=3^2$$

今若除數之指數大於被除數之指數，則其商當等於由反除所得之商之倒數。

例如：$$2^2\div 2^6=\frac{1}{2^6\div 2^2}=\frac{1}{2^{6-2}}=\frac{1}{2^4}$$

說明： $2^2 \div 2^6 = \dfrac{2^2}{2^6} = \dfrac{2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \dfrac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2} = \dfrac{1}{2^4}$

指數除法之例：

$$a^7 \div a^3 = a^{7-3} = a^4$$

$$a^4 \div a^6 = \frac{1}{a^{6-4}} = \frac{1}{a^2}$$

$$a^x \div a^y = a^{x-y} \quad (x>y) \qquad \text{（第 2 式）}$$

$$a^x \div a^y = \frac{1}{a^{y-x}} \quad (y>x) \qquad \text{（第 3 式）}$$

$$(1+i)^5 \div (1+i)^2 = (1+i)^3$$

$$\frac{a^2b^3c}{ab^2} = a^{2-1}b^{3-2}c = abc$$

但 $a^4 \div b^3 = \dfrac{a^4}{b^3}$，因其底數不同故其指數不能相減。

第三十一節 羃之指數定律

帶有正整指數之任何數，自乘若干次，其積之指數等於其原指數乘其羃指數之積，而其底數不變。

例如： $(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6$

說明： $(2^2)^3 = 2^2\cdot 2^2\cdot 2^2$

因： $2^2 = 2\cdot 2$

故： $(2^2)^3 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 2^6$

同樣： $(a^3)^4 = a^{12}$

$$(a^x)^y = a^{xy} \qquad \text{（第 4 式）}$$

$$(1+i)^{(2)3} = (1+i)^6$$

$$\left(\frac{2^2}{3^3}\right)^3 = \frac{2^6}{3^9}$$

由第 11 節中知負數之偶次羃爲正，負數之奇次羃爲負。

例如： $(-2)^2 = +4$

$(-2)^3 = -8$

同理：　$(-2^2)^2=-2^2\cdot-2^2=+2^4$

$(-2^2)^3=-2^2\cdot-2^2\cdot-2^2=-2^6$

第三十二節　開方之指數定律

在算術中，已有開平方(卽開二次方，亦卽求平方根)及開立方(卽開三次方，亦卽求立方根)之法。玆爲以後解釋便利起見，將開方之原理贅述於下。所謂開平方者，乃求一數之平方根(卽二次根)，所求出方根之自乘應等於該原數。例如 16 之平方根爲 4，因 4 之二次冪卽爲 $4^2=16$。同様所謂開立方者，乃求一數之立方根(卽三次根)，所求出之方根之三次冪，應等於該原數，例如 8 之立方根爲 2，因 2 之三次冪卽爲 $2^3=8$。

根號($\sqrt{\ }$)左上角之數字卽表求該數之幾次根。名曰**根指數**。例如 $\sqrt[2]{9}$，卽求 9 之二次根，$\sqrt[3]{8}$ 卽求 8 之三次根，$\sqrt[4]{16}$ 卽求 16 之四次根。有時根號常與括線連用如 $\sqrt[2]{9}$，$\sqrt[3]{8}$ 等，使括線下之數皆須開方。如在 $\sqrt[2]{6+3}$ 之中，其括線爲不可少。否則 $\sqrt[2]{}6+3$，卽成爲 $\sqrt[2]{}6$ 與 3 之二項，與原式之應爲 $\sqrt[2]{9}$ 者廻不相同。根指數爲 2 時可以略去。如 $\sqrt[2]{9}$ 可省書作 $\sqrt{9}$ 或 $\sqrt{}9$。

開方之指數定律如下：

帶有正整指數之任何數，其開若干次方所得方根之指數，等於其原指數被除於根指數之商，其底不變。

例如　8 之四次根：　$\sqrt[4]{8}=8^{\frac{1}{4}}$ (8 之原指數爲 1)

4^2 之四次根：　$\sqrt[4]{4^2}=4^{\frac{2}{4}}=4^{\frac{1}{2}}$

a^3 之六次根：　$\sqrt[6]{a^3}=a^{\frac{3}{6}}=a^{\frac{1}{2}}$

a^6 之三次根：　$\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2$

a^x 之 y 次根：　$\sqrt[y]{a^x}=a^{\frac{x}{y}}$

$(1+i)^8$ 之二方根：　$\sqrt[2]{(1+i)^8}=(1+i)^{\frac{8}{2}}=(1+i)^4$

其定律可證明之如下：

設以 $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2$ 爲例：

依乘方指數定律：

$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^{\frac{2}{2}}=2^1=2$$

又知
$$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

所以
$$2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}=2$$

此卽 $2^{\frac{1}{2}}$ 爲 2 之平方根是也，易言之，卽 $\sqrt[2]{2}=2^{\frac{1}{2}}$。2 之原指數爲 1，其根指數爲 2，故其根卽爲 $2^{\frac{1}{2}}$。

同樣：

$\because$ $\left(a^{\frac{x}{y}}\right)^y=a^x$ (乘方指數定律)

$\left(\sqrt[y]{a^x}\right)^y=a^x$ (方根自乘等於乘方)

$\left(\sqrt[y]{a^x}\right)^y=\left(a^{\frac{x}{y}}\right)^y$ (方程式定理 5)

$\therefore$ $\sqrt[y]{a^x}=a^{\frac{x}{y}}$ (乘方相等方根亦相等)　(第 5 式)

如：$2^{\frac{1}{2}}$；$a^{\frac{x}{y}}$，其指數爲分數，卽稱其指數爲**分指數**。

第三十三節　零指數

任何數(零除外)之指數爲零者，其值等於 1。

例如：　$2^0=1$，$a^0=1$，$(1+i)^0=1$

說明：　$\because$ $a^x\div a^x=a^{x-x}=a^0$

$$a^x\div a^x=\frac{a^x}{a^x}=1$$

$\therefore$ $a^0=1$　(第 6 式)

第三十四節　負指數

任何數之指數爲負者，其值等於以 1 被除於該數，而變其指數之號

爲正。

例如：　$2^{-3}=\frac{1}{2^3}$；　$a^{-2}=\frac{1}{a^2}$；　$(1+i)^{-5}=\frac{1}{(1+i)^5}$

說明：　$\because\ a^4\div a^6=a^{4-6}=a^{-2}$

$$a^4\div a^6=\frac{a^4}{a^6}=\frac{1}{a^2}$$

$$\therefore\ a^{-2}=\frac{1}{a^2}$$

同理任何數之指數爲正者，其值等於以 1 被除於該數而變其指數之號爲負。

例如：　$2^2=\frac{1}{2^{-2}}$；　$a^3=\frac{1}{a^{-3}}$；　$(1+i)^4=\frac{1}{(1+i)^{-4}}$

由是變任何數之指數符號可將其爲分母者，變爲分子，或將其爲分子者變爲分母。

例如：　$\frac{a^3b^2}{x^3y}=a^3b^2x^{-3}y^{-1}=\frac{1}{a^{-3}b^{-2}x^3y}$

$$\frac{1}{a^{-2}}+\frac{1}{b^{-2}}=a^2+b^2$$

但　$\frac{1}{a^{-2}+b^{-2}}$ 不能變爲 a^2+b^2 須注意之。

改變指數符號之法，本書中應用甚多，宜熟習之。例如求 $(1.03)^{-\frac{1}{2}}$ 之值時，可先求得 $(1.03)^{\frac{1}{2}}$ 之值，再求其倒數。此即 $(1.03)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(1.03)^{\frac{1}{2}}}$ 是也。

第三十五節　化簡方程式——冪與開方

方程式之未知數常有指數者曰多次方程式。解多次方程式時，須將方程式之兩邊自乘或開方。其應用之定理如下：

(1)**自乘定律**　方程式之兩邊同時自乘，結果仍相等。

例如：　$a=b$ 則 $a^2=b^2$；$a^3=b^3$；$a^5=b^5$；$a^n=b^n$

$$(a+b)=(c+d) \text{ 則 } (a+b)^2=(c+d)^2;$$

$$(a+b)^3=(c+d)^3;\ (a+b)^n=(c+d)^n$$

(2)**開方定律**　方程式之兩邊同時開方，結果仍相等。

例如：$a^5=b^5$ 則 $a^4=b^4$; $a^3=b^3$; $a^2=b^2$; $a=b$; $a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$。

$$(a+b)^5=(c+d)^5 \text{ 則 } (a+b)=(c+d);$$

$$(a+b)^2=(c+d)^2;\ (a+b)^{\frac{1}{n}}=(c+d)^{\frac{1}{n}}$$

玆舉數例以示多次方程式之解法：

例一：求下面方程式中 i 之值：

$$(1+i)^{\frac{1}{2}}=1.03$$

解：　兩邊各升至二次冪

$$(1+i)^{\frac{2}{2}}=(1.03)^2$$

$$(1+i)^1=1.0609$$

$$1+i=1.0609$$

移項得：$i=1.0609+1=.0609$

例二：求下面方程式中 a 之值

$$(a+3)^{\frac{1}{3}}=2$$

解：　兩邊各升至 3 次冪

$$(a+3)^{\frac{3}{3}}=2^3$$

$$(a+3)^1=8$$

$$a+3=8$$

移項得 $a=8-3=5$

例三：求下面方程式中 a 之值：

$$(a+1)^3=8$$

解：　兩邊各開三次方

$$(a+1)^{\frac{3}{3}}=8^{\frac{1}{3}}$$

$$(a+1)^1=2$$

$$a+1=2$$

移項得：$a=2-1=1$

例四：求下面方程式中 i 之值：

$$(1+i)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{j}{m}$$

解：　兩邊各升至 m 次冪

$$(1+i)^{\frac{m}{m}}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

$$(1+i)^{1}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

移項得　　$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1$$

例五：求下面方程式中 j 之值：

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

解：　兩邊各開 m 次方：

$$(1+i)^{\frac{1}{m}}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{m}}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{m}}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{1}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{m}}=1+\frac{j}{m}$$

移項：　$(1+i)^{\frac{1}{m}}-1=\frac{j}{m}$　　$\frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1$

兩邊各乘 m：

$$j=m\{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\}$$

習 題 四

1. 求下列各式之值：

a^0；　b^0；　$-a^0$；　-8^0；　$(1+i)^0$；　a^{2-2}；　$a^2\cdot a^{-2}$；

$(1+i)^n\cdot(1+i)^{-n}$；　$(1+i)^{-n}\cdot(1+i)^{n-1}$。

2. 下列各式改以正指數表示之:

a^{-2}; $a^{-\frac{1}{2}}$; $(1+i)^{-4}$; $(1+i)^{-n}$; $(1+i)^{-\frac{1}{2}}$;

$(1+i)^{-\frac{1}{4}}$; $2a^{-3}$; $\frac{4}{a^{-2}}$; $\frac{3}{a^{0}}$。

3. 求下列各式之積。

$a^2 \cdot a^2$; $a \cdot a^3$; $a^0 \cdot a^4$; $a^2 \cdot a^{-1}$; $a^3 \cdot a^{-2}$;

$a^{-2} \cdot a^{-3}$; $a^3 \cdot a^{-3}$; $6^2 \cdot 6^3$; $5^2 \cdot 5^{-1}$; $(a+b)^2 \cdot (a+b)^3$;

$(1+i)^2 \cdot (1+i)^3$; $(1+i)^4 \cdot (1+i)^{-2}$; $2ab \cdot ab$。

4. 求下列各式之積:

$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2$; $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}$; $a^4 \cdot a^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$;

$(1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+i)^{\frac{1}{2}}$; $(1+i)^2 \cdot (1+i)^{\frac{1}{2}}$; $(1.06)^{\frac{1}{2}} \cdot (1.06)^{\frac{1}{2}}$;

$(1.04)^{\frac{1}{4}} \cdot (1.04)^2$; $(1.03)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1.03)^{\frac{1}{2}}$; $(1.05)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1.05)^{-\frac{1}{2}}$

5. 求下列各式之商:

$a^3 \div a^2$; $a^5 \div a$; $a^a \div a^b$; $6^4 \div 6^2$; $a^2 \div a^{-1}$;

$a^4 \div a^{-2}$; $a^3 \div \frac{1}{a^2}$; $a^4 \div \frac{1}{a}$; $a^5 \div \frac{1}{a^{-1}}$; $a^{-3} \div \frac{1}{a^{-2}}$;

6. 求下列各式之商:

$(a+b)^4 \div \frac{1}{(a+b)^{-2}}$; $(a+b)^{-2} \div (a+b)^2$; $(a+b)^{-2} \div (a+b)^{-3}$;

$(a+b)^{-2} \div \frac{1}{(a+b)^{-2}}$; $a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{1}{2}}$;

$a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{1}{4}}$; $(1+i)^n \div (1+i)$;

$(1+i)^n \div (1+i)^{-1}$; $(1.06)^n \div 1.06$

7. 化下列各式之指數爲根指數:

$a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{\frac{1}{3}}$; $(a+b)^{\frac{1}{8}}$; $(1.06)^4$; $(1.06)^n$

8. 算出下列各式:

$\sqrt[4]{6^8}$; $\sqrt[3]{9^3}$; $\sqrt[2]{4^2}$

9. 化下列各式之根指數爲指數:

$\sqrt[3]{125}$; $\sqrt[5]{236}$; $\sqrt[4]{145^2}$; $\sqrt[3]{425^3}$; $\sqrt[2]{1+i}$; $\sqrt[2]{1.06}$

10. 求下列各式之三次冪:

2^2; 3^2; 2^2; $(1.06)^2$

11. 算出下列各式:

$2^{(3)2}$; $3^{(2)3}$; $(1.06)^{(2)3}$

12. 求下列各方程式中之未知數:

1. $(1+i)^{\frac{1}{2}}=6$ 2. $(a+2)^{\frac{1}{3}}=4$ 3. $(a+1)^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}$

4. $(1.03)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{4}}$　　5. $(1+i)^2=4$　　6. $(a+2)^4=16$

7. $(1+i)^3=5^3$

13. 算出下列各式:

1. $\sqrt{20}\times\sqrt{5}$　　2. $2\sqrt{5}\times\sqrt{5}$　　3. $\sqrt{3}\times\sqrt[4]{3}$

4. $\sqrt{3}\times\sqrt[3]{4}$

14. 算出下列各式:

1. $\sqrt[3]{2}\div\sqrt{6}$　　2. $\sqrt{63}\div\sqrt{252}$

15. 化下列各式爲簡式:

1. $\sqrt{2}+\sqrt{2}$　　2. $\sqrt{27}+\sqrt{48}$　　3. $2\sqrt{28}-\sqrt{63}$

復 習 題

解下列各方程式,求 x 之值:

1. $3x+4=x+10$　　2. $5x-12=6x-8$

3. $3(x-2)=2(x-3)$　　4. $2(x-2)+3(x-3)+4(x-4)-20=0$

5. $\frac{x}{5}-\frac{x}{4}=1$　　6. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+8=0$

7. $2x-[3-\{4x+(x-1)\}-5]=8$　　8. $(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$

9. $2x^2=(x+1)^2+(x+3)^2$　　10. $\frac{xa}{b}+\frac{xb}{a}=a^2+b^2$

11. $(a^2+x)(b^2+x)=(ab+x)^2$

12. $(x-a)^3+(x-b)^3+(x-c)^3=3(x+a)(x-b)(x-e)$

解下列方程式,求未知數:

13. $S=1500(1.05)^3$　　14. $1216.65=P(1.04)^5$

15. $2121.80=2000(1+i)^2$　　16. $1000=S(1.03)^{-2}$

化簡下列各式:

17. $A=(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+(1+i)^{-4}+(1+i)^{-5}+(1+i)^{-6}$

18. $A=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+(1+i)^5$

第二章　代數學概要(二)

第一節　對數之定義

甲數之某次冪等於乙數，則甲數之指數(Exponent)卽云乙數以甲數爲底(Base)之對數(Logarithm)。

如 $a^x=y\ (a>0,\ a\neq 1)$，則 x 卽謂 y 以 a 爲底之對數，以 $x=\log_a y$ 記之。

故方程式：

$$a^x=y$$

及

$$x=\log_a y$$

之意義完全相同，而對數與指數二名辭之意義亦實相同。指數上之各種定律，在對數中亦可完全適用。

例：　$10^2=100$　$\log_{10}100=2$，　$3^2=9$　$\log_3 9=2$

與對數相對稱之數曰眞數(Natural Number)。

如 $\log_a y=x$，其中 x 爲對數，y 爲眞數，而 a 爲底。

第二節　對數之性質

根據對數之定義與指數之定律，知對數有如下之性質：

(1) 1之對數爲0。

因　$$a^0=1$$

所以　$$\log_a 1=0 \qquad \text{(第1式)}$$

(2)一數之自底對數爲1。

因　$$a^1=a$$

所以 $\log_a a=1$ （第2式）

(3)一正數之倒數之對數，爲該正數之對數之負數。

設 $a^x=y$

則 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a^x}=a^{-x}$

所以 $\log_a\dfrac{1}{y}=-x=-\log_a y$ （第3式）

(4)乘積之對數等於各因數之對數之和。

設 $\log_a u=x,\quad \log_a v=y$

則 $a^x=u,\quad a^y=v$

及 $uv=a^x\cdot a^y=a^{x+y}$

所以 $\log_a uv=x+y$

卽 $\log_a uv=\log_a u+\log_a v$ （第4式）

同理 $\log_a(uvw)=\log_a u+\log_a v+\log_a w$

例： $\log_{10}(3\times5\times7)=\log_{10}3+\log_{10}5+\log_{10}7$

(5)商數之對數等於被除數之對數減去除數之對數之差。

設 $\log_a u=x,\quad \log_a v=y$

則 $a^x=u,\quad a^y=v$

及， $\dfrac{u}{v}=\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$（見第1章第30節指數定律）

於是， $\log_a\dfrac{u}{v}=x-y$

卽， $\log_a\dfrac{u}{v}=\log_a u-\log_a v$ （第5式）

例： $\log_{10}\dfrac{625}{133}=\log_{10}625-\log_{10}133$

(6)乘方之對數等於原數之對數乘其方指數之積。

設 $x=\log_a u$ 或 $a^x=u$

則 $u^v=(a^x)^v=a^{vx}$（見第1章第31節指數定律）

於是 $\log_a u^v=vx=v\log_a u$ （第6式）

例：　$\log_{10}(257)^3 = 3\log_{10}257$

$$\log_{10}(257)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_{10}257$$

使 $v=n$ 及 $v=\frac{1}{n}$ 各自代入之，卽得：

(a)某數之 n 次冪之對數等於以 n 乘其原數之對數。

$$\log_a x^n = n\log_a x \qquad \text{(第 7 式)}$$

(b)某數之 n 次根之對數等於以 n 除其原數之對數。

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \log_a x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a x \qquad \text{(第 8 式)}$$

例：　$\log_{10}\frac{8^2}{\sqrt[5]{7^2}} = \log_{10}8^2 - \log_{10}\sqrt[5]{7^2}$

$$= 2\log_{10}8 - \frac{2}{5}\log_{10}7$$

(7)某數之 b 底對數等於該數之 a 底對數乘 a 之 b 底對數之積。

設　$u=\log_a y,\quad v=\log_b y$

則　$a^u = y,\quad b^v = y$

於是　$a^u = b^v$

及　$a = b^{\frac{v}{u}}$（見第 1 章第 32 節指數定律）

$$\frac{v}{u} = \log_b a \text{（見第 1 節對數定義）}$$

兩邊同乘 u：　$v = u\log_b a$

以 v 與 u 之値代入之

卽得　$\log_b y = \log_a y \cdot \log_b a$　(第 9 式)

例：　$\log_8 64 = \log_4 64 \cdot \log_8 4$

$$\log_{10}128 = \log_2 128 \cdot \log_{10}2$$

(8) a 之 b 底對數等於 b 之 a 底對數之倒數。

設　$u=\log_a b$ 及 $v=\log_b a$

則　$a^u = b,\ b^v = a$ 或 $b = a^{\frac{1}{v}}$

於是　$a^u = a^{\frac{1}{v}}$

及
$$u=\frac{1}{v}$$

以 v 與 u 之值代入之

即得：
$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a} \qquad \text{（第 10 式）}$$

或：
$$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$$

例：
$$\log_8 2=\frac{1}{\log_2 8}$$

$$\log_{10} 2=\frac{1}{\log_2 10}$$

習 題 一

1. 填入下列各式中之 x 之值：

(1) $\log_2 8=x$ (2) $\log_2 4=x$ (3) $\log_4 2=x$ (4) $\log_4 256=x$ (5) $\log_{16} 4=x$

2. 求下列各式中之 x：

(1) $\log_x 81=4$ (2) $\log_{10} x=5$ (3) $\log_x 8=\frac{1}{3}$ (4) $\log_2 \frac{1}{32}=x$ (5) $\log_3 \frac{1}{27}=x$

(6) $\log_x 32=-5$

3. 將下列各對數以整數之對數表示之：

(1)* $\log\frac{\sqrt[4]{8}}{9^{\frac{1}{3}}\,6^{\frac{2}{3}}}$ (2) $\log\frac{2^2}{3^3}$ (3) $\log\frac{\sqrt{13}}{\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{48}}$ (4) $\log\frac{25^{\frac{1}{3}}}{11^{\frac{2}{3}}\,23^{\frac{3}{4}}}$

4. 將下列各對數以質數**之對數表之：

(1) $\log\frac{(35)^{\frac{1}{2}}}{(26)^2\,(72)^{\frac{1}{4}}}$ (2) $\log\frac{(84)^{-\frac{1}{2}}}{(75)^{\frac{3}{4}}\,(12)^2}$ (3) $\log\frac{(100)^{\frac{1}{2}}}{(20)^2(75)^{\frac{2}{3}}}$

(4) $\log(\sqrt{2}\,\sqrt[3]{7^2}\,\sqrt[5]{6})$ (5) $\log(\sqrt[3]{2}\,\sqrt{66}\,\sqrt[5]{25})$

5. 已知 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$, $\log_{10}7=0.8451$, $\log_{10}10=1$ 求下列各數以 10 爲底之對數：

(1) 12 (2) 30 (3) 42 (4) 420 (5) 189 (6) 900 (7) 343

(8) $\frac{343}{16}$ (9) $\frac{35}{48}$ (10) $\frac{1}{252}$ (11) $\frac{1}{1029}$ (12) $\sqrt{504}$ (13) $\sqrt[3]{294}$

(14) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ (15) $\sqrt[5]{1029}$ (16) $\sqrt[5]{43218}$

---

*如一題中各數所用之底數相同，則習慣上即可將底數略去不記。

**質數即數字之最低因數，如 20 之各質數即爲 2.2.5。

6. 已知 $\log_{10}2=0.3010$ 求 $\log_2 10$

7. 已知 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_8 2=\frac{1}{3}$ 求 $\log_{10}8$

第三節 常用對數

任何正數(除0與1外)皆可爲對數之底,底之不同卽各種對數分別之所在。普通應用之對數有**常用對數**(Common Logarithm)與**自然對數**(Natural Logarithm)兩種。常用對數亦曰布里格對數(Brigg's Logarithm)乃以10爲底之對數。自然對數亦曰納伯爾對數(Naperian Logarithm),乃以一未盡數 $e=2.71828\cdots\cdots$ 爲底之對數。納伯爾之對數凡高深數理學中俱用之;然平常之計算則以用10爲底之對數稱便,故稱之曰常用對數。

常用對數旣以10爲底數,故任何一數之常用對數,卽爲10應自乘幾次方能等於該原數之指數。

例如 $10^2=100$ 故100之常用對數卽爲2

$10^{2.4771}=300$ 故300之常用對數卽爲2.4771

$10^3=1,000$ 故1,000之常用對數卽爲3

任何數爲10之整數乘方者,其對數亦必爲整數。

任何數非10之整數乘方者,其對數則有整數與小數二部。

對數中之整數部份稱曰**首數**又曰**指標**(Characteristic),其小數部份稱曰**尾數**亦曰**假數**(Mantissa)。例如300之對數,其首數爲2,其尾數爲0.4771。對數中之尾數部份常爲正數,可自對數表中查得,其首數部份則可從其原數觀察而得。

常用對數旣以10爲底數,故其寫法當爲 $\log_{10}X$,但亦可簡寫爲 $\log X$。

第四節 首數

常用對數之首數部份可自原數觀察而得,玆列之如下:

$10^4=10,000$, 故 10,000 之對數當為 4

$10^3=1,000$, 故 1,000 之對數當為 3

$10^2=100$, 故 100 之對數當為 2

$10^1=10$, 故 10 之對數當為 1

$10^0=1$, 故 1 之對數當為 0

$10^{-1}=.1$, 故 .1 之對數當為 -1

$10^{-2}=.01$, 故 .01 之對數當為 -2

$10^{-3}=.001$, 故 .001 之對數當為 -3

凡自 .001 起至 10,000 止之各數，其對數之首數部份皆可依上表定之。例如 5,682 在 1,000 與 10,000 之間，其對數亦卽在 3 與 4 之間，當為 3 加小數而成，故其對數首數卽為 3。

又如 .036 在 .01 與 .1 之間，其對數亦卽在 -1 與 -2 之間，當為大於 -2 而小於 -1 者，故其對數之首數部份當為 -2，而其尾數部份則為一正小數。

由上表類推，凡大於 10,000 而小於 100,000 之諸數，其對數之首數部份當為 4，凡小於 .01 而大於 .001 諸數，其對數則小於 -2 而大於 -3 故其首數部份則為 -3。

根據上述之說明，可得決定對數首數之法則如下：

(1)大於 1 諸數之對數，以小數點以左之位數減 1 為首數，其號為正。

(2)小於 1 諸數之對數，以小數點右第一有效數字前之 0 數加 1 為首數，其號為負。

例如　300 之對數為 2.4771，其首數為 2

.03 之對數為 $\overline{2}.4771$，其首數為 -2

一數之對數首數為負時，為避免與其尾數之正號混雜起見，常先寫尾數而以負首數附於後，如 $\overline{2}.4771$ 可寫作 $.4771-2$，亦可寫作 $8.4771-10$。

凡二數之數字次序相同，但小數點之位置不同，則較大一數必爲較小一數之 10^n(n 爲一整數)倍數，故較大數之對數，亦必比較小數之對數多 n。

例如有 3,722 與 37.22 二數，前者爲後者之 10^2 倍，則此二數之對數卽有如下之關係：

$$\begin{aligned}\log 3,722 &= \log 37.22 + \log 10^2 \\ &= \log 37.22 + 2\end{aligned}$$

因此可知任何一數之常用對數，其尾數部份並不受小數點位置之影響；數字次序相同之各數，不論其小數點之位置如何不同，其對數之尾數部份則完全相同，所異者僅其首數而已。故在常用對數表中，僅列各數之對數尾數，至其對數首數，則可依前述二法則求之。

第五節 對數表

次頁四位對數表具載 1 至 1,000 各數之對數尾數，表中不書小數點及首數。其 1, 2, 3 等各單位數之對數尾數與 10, 20, 30 等數之對數尾數相同，僅其首數不同而已。

四位對數表所列之眞數與對數，均止於四位。尋常演算，已可應用。如用五位六位七位等表，則所演更爲精確。本書習題中，有數題須應用七位對數表，故本書用表，附有六位對數表(表XIII)及七位對數表(表XIV)。

對數表之用法有二：(一)從眞數求對數法；(二)從對數求眞數法。

第六節 由眞數求對數法

(1)設已知之眞數爲有效數字二位者，可查四位對數表，在 N 直行內求得其數，依 N 直行之眞數與 O 直行交叉之處得對數之尾數，再依前述法則加以首數，卽得對數之全部。

例：　$\log 25 = 1.3979$　　$\log 2,500 = 3.3979$

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

對數表

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	6459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	.8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	9854	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

log 37 = 1.5682　　log 3.7 = 0.5682

log 72 = 1.8573　　log 0.072 = 8.8573 − 10

(2)設已知之眞數爲有效數字三位者，可查四位對數表，其首二位之數在 N 直行之內，其第三位數則在頂上橫行內。依 N 行中之首二位數與第三位數之直行交叉之處得對數之尾數，再加首數，卽得對數之全部。

例：　log 453 = 2.6561　　log 4.53 = 0.6561

　　　log 768 = 2.8854　　log 76,800 = 4.8854

　　　log 935 = 2.9708　　log 0.935 = 9.9708 − 10

(3)設已知之眞數爲有效數字4位或多位者，則須用推値法(Interpolation)求之。蓋二繼續相連之數，其對數間之差數必與其眞數間之差數有一定比例，推値法卽以此種比例爲根據。例如欲求 6842 之對數，可先查四位對數表，求得 6840 之對數尾數爲 8351，及 6850 之對數尾數爲 8357。此二對數尾數之差爲 6，而眞數之差爲 10，其比例卽爲 $\frac{6}{10}$，今 6842 較 6840 多 2，其對數尾數當比例增加，卽以 2 乘 $\frac{6}{10}$ 得 1.2 加於 6840 之對數尾數 8351 之上，得 6842 之對數尾數爲 8352 強，其全部對數卽爲 3.8352。又如欲求 0.015764 之對數。可從四位對數表求得 157 之對數尾數爲 1959，及 158 之對數尾數爲 1987，其間相差 28。今 .015764 之對數尾數當與 157.64 之對數尾數相同，而 157.64 較 157 大 .64，故其對數尾數亦當較 157 之對數尾數大 28 × .64 = 17.92。於是 0.015764 之對數尾數爲 1959 + 17.92 或 1977 弱，其全部對數爲 $\bar{2}.1977 = 8.1977 - 10$。

第七節　由對數求眞數法

例一：求對數 2.4675 之眞數。

此對數之尾數 4675 不能自四位對數表內直接查得，但可查得其接近之二尾數爲 4669 及 4683，而 4675 卽在此二尾數之間。此二接近尾

數之差爲 14，而 4669 與 4675 二尾數間之差爲 6。則就 4669 與 4683 二尾數相當之二眞數間之差，取其 $\frac{6}{14}$ 加於 4669 相當之眞數上，卽得 4675 相當之眞數。

今與 4669 相當之眞數爲 2930，

與 4683 相當之眞數爲 2940，

二數之差爲 10。

於是依推值法求之，得尾數 4675 之眞數爲：

$$2930+\frac{6}{14}\times 10=2934^{+}.$$

今首數爲 2，故其眞數爲 293.4。

例二：已知對數爲 9.3025－10，求其眞數。

檢表

$$\begin{aligned} \log 0.2000&=9.3010-10\\ \log 0.2010&=9.3032-10\\ \hline \text{差數}&=0.0022 \end{aligned}$$

$$(9.3025-10)-(9.3010-10)=0.0015$$

依推值法求之，得其眞數爲

$$0.2000+\frac{15}{22}\times 0.0010=0.2007$$

習　題　二

按表，求下列各數之常用對數：

1. 163	2. 89	3. 999
4. 1.41	5. 0.00785	6. 6,563
7. 7.854	8. 3.142	9. 0.5236
10. 1.732	11. 0.8665	12. 0.0298

按表，求下列各常用對數之眞數：

13. 2.7182	14. 9.8532－10	15. 3.1416
16. 0.5236	17. 7.8321－10	18. 4.2631
19. 8.5432－10	20. 1.4142	21. 0.4343

第八節　用對數計算法

應用對數可以減省計算，當根據第 2 節中所列之對數性質而運算

之。平常須用乘法與除法者，依對數計算，可以加法與減法代替之；平常須用乘方與開方者，依對數計算，可以乘法與除法代替之。

(例 1)求 $N=\dfrac{6.320\times 8.674}{2.851}$之值至有效數字四位。

$$
\begin{aligned}
\log 6.320 &= 0.8007\\
\log 8.674 &= \underline{0.9382}\\
\log (6.320)(8.674) &= 1.7389\\
\log 2.851 &= \underline{0.4550}\\
\log N &= 1.2839\\
N &= 19.23
\end{aligned}
$$

用對數計算時，當預先將演算之算式完全列出，然後從對數表查得其數次第填入，如此可以節省時間，幷可減少錯誤之機會。

例如在上例中，其算式卽爲：

$$
\begin{aligned}
\log 6.320 &=\\
\log 8.674 &=\\
\log (6.320)(8.674) &=\\
\log 2.851 &=\\
\log N &=\\
N &=
\end{aligned}
$$

(例 2)列成對數算式以求 $N=\dfrac{(6.85)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{8.542}}{\sqrt{65.27}}$

$\log 6.85=$ (學者可以此演習)

$$
\begin{aligned}
\log (6.85)^{\frac{1}{2}} &=\\
\log 8.542 &=\\
\log \sqrt[3]{8.542} &=\\
\log (6.85)^{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{8.542} &=\\
\log 65.27 &=\\
\log \sqrt{65.27} &=
\end{aligned}
$$

$$\log N =$$

$$N =$$

(例 3)求 $N=\sqrt[3]{-58.61}$(註 1)之值

$$\log 58.61 = 1.7680_n$$

$$\log \sqrt[3]{58.61} = 0.5893_n$$

$$N = -3.885$$

習題三

用對數計算下列各題至有效數四位:(註 2)

1. $\dfrac{2,550\times 317.3}{731}$
2. $(0.9314)^4$
3. $\sqrt[3]{753}$
4. $\dfrac{\sqrt{5,609}}{(1.05)^3}$
5. $(3.456)^8$
6. $(0.9093)^{-4}$
7. $725(1.06)^{10}$
8. $1,800(1.035)^{25}$
9. $2,625(1.08)^{25}$
10. $\dfrac{1,254(1.045)^{\frac{1}{2}}}{941}$
11. $\dfrac{96(1.065)^{\frac{1}{3}}}{1,069}$
12. $\dfrac{428(1.07)^{\frac{1}{4}}}{0.07}$
13. $\dfrac{5,410(1.0375)^{\frac{3}{4}}}{0.0375}$
14. $9,000(1.085)^{\frac{1}{12}}$
15. $\dfrac{8,375(1.0425)^{\frac{7}{12}}}{8,300}$
16. $\dfrac{845(1.04)^{-5}}{0.04}$
17. $(1.055)^{-10}$
18. $\dfrac{(1.0[illegible]5)^{-10}}{(1.035)^{-10}}$
19. $(1.09)^{-\frac{1}{2}}$
20. $(1.075)^{-\frac{3}{2}}$
21. $\dfrac{(1.035)^9-1}{0.035}$ (註 3)
22. $\dfrac{(1.045)^7-1}{0.045}$
23. $\dfrac{1-(1.04)^{-6}}{0.04}$
24. $\dfrac{1-(1.045)^{-6}}{0.045}$

(註 1)當眞數爲一負數時，可先依其數字查得對數，不必問其符號如何，然後再書 n (卽負號)於所查得之對數後，以便決定最後所求得之數之符號。

(註 2)本習題中各題之計算，如未特別指明用他種對數表者，均用四位對數表。四位以後之數字爲 6 或 6 以上者進爲 1，小於 6 者，捨去之。

(註 3)在此種計算中，有效數字之位數常因減法之關係，消去一位或數位。於是答數中之有效數字亦因而減少，演習題 22—30 卽明。

25. $\dfrac{0.0425}{(1.0425)^{8}-1}$ 26. $\dfrac{0.07}{(1.07)^{11}-1}$

27. $\dfrac{0.065}{1-(1.065)^{-7}}$ 28. $\dfrac{(1.075)^{3}-1}{(1.075)^{4}-1}$

29. $10,000\times\dfrac{0.055}{0.045}\times\dfrac{1-(1.045)^{-10}}{1-(1.055)^{-10}}$ 30. $5,000\times\dfrac{0.04}{0.0375}\times\dfrac{1-(1.0375)^{-5}}{1-(1.04)^{-5}}$

31. $\dfrac{(1.06)^{\frac{79}{12}}-1}{(1.06)^{\frac{1}{12}}-1}$ 32. $\dfrac{1-(1.075)^{\frac{77}{12}}}{1-(1.075)^{\frac{1}{12}}}$

末題用七位對數表求之。再依四位對數表所得之數比較之。

第九節 指數方程式與對數方程式

方程式內之指數，含有未知數者，其方程式常稱曰指數方程式(Exponential Equation)。例如 $2^x=16$，即爲未知數 x 之指數方程式，在此例中，x 之值可由視察而得；但自一般情形言之，解指數方程式，以用對數表爲最便。

例一：求下式中 x 之值：

$$2,500(1.04)^x=10,000$$

解：應用對數定理。

先將上式化簡得： $1.04^x=4$

於是 $\log 1.04^x=\log 4$

$$x\log 1.04=\log 4$$

$$x=\frac{\log 4}{\log 1.04}=\frac{.6021}{.0170}=35.42$$

例二：已知下式中 $e=2.7182818$ 求 S 之值：

$$S=1,000\,e^{0.05}$$

解：應用對數：

$$\log S=\log 1,000+\log e^{0.05}$$

$$\log S=\log 1,000+0.05\log 2.7182818$$

$$\log S=3.+0.05\times 0.4342945$$

$$\log S=3.0217$$

$$S=1.051$$

例三：求下面方程式中之 n 之值：

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

兩邊以 R 除之：

$$\frac{S}{R}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

兩邊以 i 乘之：

$$\frac{Si}{R}=(1+i)^n-1$$

移項：

$$1+\frac{Si}{R}=(1+i)^n$$

求兩邊之對數：

$$\log\left(1+\frac{Si}{R}\right)=n\log(1+i)$$

兩邊以 $\log(1+i)$ 除之：

$$\frac{\log\left(1+\frac{Si}{R}\right)}{\log(1+i)}=n$$

所以即得：

$$n=\frac{\log\left(1+\frac{Si}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

方程式內之對數，含有未知數者，其方程式常稱曰對數方程式(Logarithmic Equation)。例如

$$\log_{10}2x=3$$

爲一對數方程式，解此式可依對數之定義，將式變化爲普通方程式，

$$2x=10^3$$

於是即得：

$$2x=1,000$$

$$x=500$$

習 題 四

解下列方程式，求 x 之值：

1. $5^x=10$　　2. $2^{3x}\,2^{x-1}=4^{5x}3^{x+1}$

3. $16=\log_{10}x^2$　　4. $11^x=7$

5. $(0.3)^x=0.8$　　6. $3^{x^2}=53$

7. $5^{(x^2-3x)}=\frac{1}{25}$　　8. $21^{(x^2-2x)}=9261$

9. $\log_{10}(x^2-21x)=2$　　10. $e^x+e^{-x}=2$

11. $\log_e(3x+1)=2$ (已知 $e=2.7182818$)

第十節　級數之定義

按照一定法則連續所成之諸數謂之**級數**(Series or Progression)。

如 1, 2, 3, 4……等,爲後項比前項多 1 之級數。

又 3, 6, 12, 24……等,爲後項 2 倍於前項之級數。

第十一節　等差級數

凡級數之後項,與其前項之差恆相等者,謂之**等差級數**或曰**算術級數**(Arithmetical Progression)其各項之差,謂之**公差**(Common Difference)。

例如 2, 4, 6, 8……爲公差 2 之等差級數。

又如 10, 8, 6, 4, 2……則爲公差 -2 之等差級數。

級數之各數稱曰級數之項(Terms),如 2, 4, 6, 8, 連四數所成之級數爲四項級數。其第一項(或稱首項)爲 2, 第四項(即末項)爲 8, 級數之和爲 20。

第十二節　等差級數之原素

設以 a 代表級數之第一項數, d 代表公差, n 代表項數, l 代表第 n 項數或末項數, 及 s 代表級數之和。則 a, d, n, l 及 s 卽稱爲等差級數中之五原素。

第十三節　等差級數各原素間之關係

今 a 既爲第一項之數,則依等差級數之定義,遂有:

$$a+d=\text{第二項},$$
$$a+2d=\text{第三項},$$
$$a+3d=\text{第四項},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a+(n-1)d=\text{第}\ n\ \text{項},$$

此卽爲　$l=a+(n-1)d$　(第 11 式)

有限等差級數(Finite Arithmetical Progression)因其項數有限,卽 n 之數有限,則其和 s 卽可依下二式中之任何一式列出之:

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l$$
$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

若將此二式相加,則有

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots$$
$$\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)=n(a+l)$$

於是卽得

$$s=\frac{n}{2}(a+l) \qquad (\text{第 12 式})$$

等差級數之五原素中,如有三原素爲已知數,則可用第 11 與 12 兩式,求得其餘之任何二未知原素。

習　題　五

1. 求下列級數中之 l 與 s。
   (1) 2, 11, 20……共計 10 項。
   (2) 3, 8, 13, 18……共計 10 項。
   (3) −2, −4, −6, −8……共計 12 項。
   (4) 66, 65, 64……共計 65 項。
   (5) 1, 3, 5, 7……共計 20 項。
2. 求下列級數中之 n 與 s:
   (1) 2, 6, 10……42。
   (2) 3, 6, 9……30。
   (3) −3, −5, −7, −9, −11……−31。

第十四節 等比級數

級數之後項與其前項之比恆相等,謂之**等比級數**或曰**幾何級數**(Geometrical Progression)。

如 $$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\cdots\cdots \text{則}$$

$a, b, c, d\cdots\cdots$成等比級數。

等比級數之後項對於前項之比稱曰**公比**(Common Ratio)。

如 $3, 6, 12, 24\cdots\cdots$

即為一公比 2 之等比級數。

第十五節 等比級數之原素

等比級數之原素與等差級數之原素同,亦為首項,公比,項數,末項,和五種。其中除公比另用 r 表示之外,其餘符號亦均與等差級數所用者相同,即 a, n, l, s 是也。

第十六節 等比級數各原素間之關係

設 a 代表第一項,則依等比級數之定義,可得

ar =第二項

ar^2=第三項

ar^3=第四項

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

ar^{n-1}=第 n 項

此即為 $$l=ar^{n-1} \qquad \text{(第 13 式)}$$

等比級數之和,依定義列出之當為:

$$s=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1} \qquad (A)$$

以 r 乘(A)式之兩端得

$$sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n \qquad (B)$$

從(B)中減(A)得:

$$sr-s=ar^n-a$$

於是得 $$s=\frac{ar^n-a}{r-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad \text{(第 14 式)}$$

今因 $l=ar^{n-1}$, 故第 14 式亦可列之如下:

$$s=\frac{rl-a}{r-1} \qquad \text{(第 15 式)}$$

此處與等差級數相同,當其五原素中已有任何三原素為已知數時,則其餘之二未知原素,均可用第 13 及第 15 兩式求得之。

習題六

1. 已知 $a=1$, $r=3$, $n=9$, 求 l 及 s。
2. 已知 $a=-2$, $r=3$, $n=8$, 求 l 及 s。
3. 已知 $a=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{2}$, $n=10$, 求 l 及 s。
4. 已知 $a=6$, $r=-2$, $n=8$, 求 l 及 s。
5. 求 $v+v^2+v^3+v^4+\cdots\cdots$至 10 項之等比級數,當其 $v=\frac{1}{1.05}$ 時之和。
6. 設題 5 中之 $v=\frac{1}{1.06}$ 求其級數之和。

第十七節　無限項等比級數

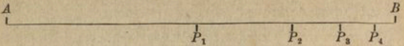
設有下列等比級數:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16}\cdots\cdots$$

此級數之和當隨項數之多寡而增減,如項數多,其和亦大,如項數少,則其和亦小。例如

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

如此驟視之,項數 n 增加至無限多時,其級數之和 s 亦可增加至無限大,而能超過一切之有限數量。但實則不然,此級數之和雖能因項數之加多而增大,但其加大之程度決不能毫無限制。不論其項數增多至任何程度,而其級數之和總不能超過於 1 。此可用圖說明之如下:



如上圖有一物 P 於 AB 線上自 A 點向前移進，第一秒鐘進得 AB 線之 $\frac{1}{2}$ 止於 P_1 點，第二秒鐘復移進餘下之 P_1B 段之 $\frac{1}{2}$ 止於 P_2 點，此 P_1P_2 之距離當為 AB 全線之 $\frac{1}{4}$，第三秒鐘復移進餘下之 P_2B 段之 $\frac{1}{2}$ 止於 P_3 點，則此 P_2P_3 之距離當為 AB 全線之 $\frac{1}{8}$，如此繼續前進，每秒鐘均移進餘程之 $\frac{1}{2}$，則於 n 秒之後其所移進之總距離當為：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots+\text{至 } n \text{ 項}$$

觀上圖之情形可知此物 P 之前進距離，不論其所經歷之時間如何久長，決不能達到 B 點而等於 AB 全線，更無從超過 B 點而大於 AB 全線，於是上列級數之和即不能大於 1，亦不能等於 1。但如將其項數增加至極多，則其和與 1 之相差可以減低至極微。正如圖中 P 之前進如其所歷之時間極久，則其距 B 之距離亦必極短。例如於 10 秒鐘之後，上圖 P 之前進距離即共為全線之 $\frac{1,023}{1,024}$：

$$s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\text{至 10 項}=\frac{1,023}{1,024}。$$

與全線 1 之相差僅 $\frac{1}{1,024}$ 而已。

由此可知此等比級數：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$$

之和當隨其項數 n 之增多而近於 1。此 1 即稱曰其級數之 n 項之和之**極限價值** (Limiting Value)。若以 s_n 代表此級數之 n 項之和，s 代表其無限項之和，吾人即可將其關係寫出之如下：

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=1, \qquad \text{(第 16 式)}$$

其讀法為：

"當 n 增加至為無限項時，s_n 之極限即為 1"。

任何等比級數，如其中之公比小於1，均可應用上述之理，求出其n項總和之極限價值。從第8節中，知n項等比級數之和爲

$$s_n=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-1}$$
$$=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

於是吾人可即將無限項等比級數之和寫爲：

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-r}-\lim_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}$$

但當此公比r小於1時，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{ar^n}{1-r}=0$

於是遂得：

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{a}{1-r} \qquad \text{(第 17 式)}$$

習題七

求下列級數之和

1. $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\cdots\cdots$至無限項。

2. $2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\cdots\cdots$至無限項。

第十八節　二項定理

二項式諸冪，不論其指數爲正爲負爲整數或爲分數，皆不必實乘，而可循一定之法則以演算之。此法則卽謂之**二項定理**(Binomial Theorem)。

玆先就二項式之指數爲正整數者說明之。

設有$a+b$二項逐次自乘，可得下列各等式：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

上列各式右邊亦可改書爲下式，以明定理之所由：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+\frac{2\cdot1}{1\cdot2}b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3\cdot2}{1\cdot2}ab^2+\frac{3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3}b^3$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+\frac{4\cdot3}{1\cdot2}a^2b^2+\frac{4\cdot3\cdot2}{1\cdot2\cdot3}ab^3+\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}b^4$$

由上列各式之例，可推至$(a+b)^n$之展開式爲：

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}a^{n-3}b^3$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}a^{n-4}b^4+\cdots\cdots+b^n \quad \text{(第 18 式)}$$

上式卽爲二項式自乘展開之一般公式。其右邊各數之列出則根據下列之定理：

(1)項數係 $n+1$ 如 $(a+b)^4$ 其展開後全式應共爲 $4+1=5$ 項。

(2)首項係 a^n，此後 a 之指數逐項少一。b 之一乘方現於第二項，此後 b 之指數逐項加一。其末項卽第 $n+1$ 項，則爲 b^n。

各項中 a b 二者指數之和爲 n。

如前例$(a+b)^4$展開之後，其第一項卽爲 a^4；其第二項中之 a 之指數爲 3，b 之指數爲 1，第三項中 a 之指數爲 2；b 之指數爲 2；第四項中 a 之指數爲 1，b 之指數爲 3；第五項卽爲 b^4。各項中 a b 二者指數之和皆爲 4。

(3)各項之係數，依其次序列之，則爲：

$$1,n,\frac{n(n-1)}{1\cdot2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\text{等等。}$$

例如前例 $(a+b)^4$ 展開之後，其第一項之係數爲 1；第二項之係數爲 4；其第三項之係數爲 $\frac{4\times3}{1\times2}=6$；第四項之係數爲$\frac{4\times3\times2}{1\times2\times3}=4$；第五項之係數爲 $\frac{4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4}=1$。

第十九節　二項定理之應用

二項定理在會計數學中之應用甚多，尤以應用於利息公式 $(1+i)^n$

之展開者爲最多見。但在實際上，因已有許多現成之表格如複利表，年金表，對數表等可資利用，故計算上應用二項定理時反甚少見。本書中除於若干公式之演算時須應用二項定理之外，他如在求更正確之利率（非表中所能直接查出者）時亦偶一用之。故讀者對此定理亦宜留意。

會計數學中所常有之公式 $(1+i)^n$，依二項定理展開之後，當如下式：

$$(1+i)^n=1+ni+\frac{n(n-1)i^2}{1\times2}+\frac{n(n-1)(n-2)i^3}{1\times2\times3}+\cdots$$
$$\cdots+i^n \qquad \text{（第 19 式）}$$

實際計算時，並不必將全式列出，僅算出其起首幾項，使所得位數，已足令計算之結果正確即可。

例如求 $(1.06)^8$ 之值至小數點以下五位爲止。

依 $(1+i)^n$ 之式，展開 $(1.06)^8$ 得：

$$(1.06)^8=1+8\times.06+\frac{8\times7\times(.06)^2}{1\times2}+\frac{8\times7\times6\times(.06)^3}{1\times2\times3}$$
$$+\frac{8\times7\times6\times5\times(.06)^4}{1\times2\times3\times4}+\frac{8\times7\times6\times5\times4\times(.06)^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\cdots$$
$$=1+.48+.1008+.012096+.0009072+.00004354+\cdots\cdots$$
$$=1.59384$$

第二十節 負數二項式

若二項式中之一項或二項其符號爲負時，其乘方之展開式仍可依第 18 節中之公式演算之。

例如 $(a-b)^n$ 可依 $\{a+(-b)\}^n$ 展開之：

$$(a-b)^n=\{a+(-b)\}^n=a^n+na^{n-1}(-b)+\frac{n(n-1)}{1\times2}a^{n-2}(-b)^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}a^{n-3}(-b)^3+\cdots\cdots+(-b)^n$$

但因其中之 $(-b)^2=b^2$，$(-b)^3=-b^3$ 以及 $(-b)^4=b^4$ 等等，故得：

$$(a-b)^n=a^n-na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\times2}a^{n-2}b^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\times2\times3}a^{n-3}b^3$$
$$+\cdots\cdots+(-b)^n \qquad (\text{第 20 式})$$

由此可知 $(a-b)^n$ 展開之後，其中凡 b 爲奇指數之各項爲負項，b 爲偶指數之各項爲正項。自第一項 a^n 爲正項起，其全式爲正負項相間之多項式。

第二十一節　負指數之二項式

二項式之指數爲負數時，亦可依第 18 節之公式(18)展開之，但其中之 n 當以 $-n$ 代之，而其全式則爲無限項式：

$$(a+b)^{-n}=a^{-n}+(-n)a^{-n-1}b+\frac{(-n)(-n-1)}{1\times2}a^{-n-2}b^2$$
$$+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{1\times2\times3}a^{-n-3}b^3$$
$$+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)(-n-3)}{1\times2\times3\times4}a^{-n-4}b^4+\cdots\cdots$$

卽

$$(a+b)^{-n}=a^{-n}-na^{-(n+1)}b+\frac{(n)(n+1)}{1\times2}a^{-(n+2)}b^2$$
$$-\frac{(n)(n+1)(n+2)}{1\times2\times3}a^{-(n+3)}b^3$$
$$+\frac{(n)(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3\times4}a^{-(n+4)}b^4-\cdots\cdots \quad (\text{第 21 式})$$

由此可知 $(a+b)^{-n}$ 展開之後，其式中之奇項爲正，偶項爲負，自第一項 a^{-n} 爲正項起，其全式爲一正負項相間之無限項式。

同理類推得：

$$(1+i)^{-n}=1-ni+\frac{n(n+1)i^2}{1\times2}-\frac{n(n+1)(n+2)i^3}{1\times2\times3}+\cdots\cdots$$
$$(\text{第 22 式})$$

例如求 $(1.03)^{-6}$ 之值正確至小數點以下五位：

$$(1.03)^{-6}=1-6\times(.03)+\frac{6\times7\times(.03)^2}{1\times2}-\frac{6\times7\times8\times(.03)^3}{1\times2\times3}$$

$$+\frac{6\times7\times8\times9\times(.03)^4}{1\times2\times3\times4}-\frac{6\times7\times8\times9\times10\times(.03)^5}{1\times2\times3\times4\times5}+\cdots\cdots$$

$$=1-.18+.0189-.001512+.00010206$$

$$-.0000031236+.000000336798-\cdots\cdots$$

$$=.837484$$

第二十二節　分指數之二項式

二項式之指數爲分數時，亦可依第 18 節中之公式 (18) 展開之，但其式亦爲無限項式：

$$(a+b)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}a^{\frac{1}{n}-1}b+\frac{\frac{1}{n}\times\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\times2}a^{\frac{1}{n}-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$=a^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}a^{-\frac{n-1}{n}}b+\frac{\left(\frac{1}{n}\right)\times\left(-\frac{n-1}{n}\right)}{1\times2}a^{-\frac{2n-1}{n}}b^2+\cdots\cdots$$

$$=a^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}a^{-\frac{n-1}{n}}b-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)}{1\times2}a^{-\frac{2n-1}{n}}b^2+\cdots\cdots \quad \text{(第 23 式)}$$

由此可知 $(a+b)^{\frac{1}{n}}$ 展開之後，其全式爲一自第二項起正負相間之無限項式。

同理類推得：

$$(1+i)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}\cdot i+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)i^2}{1\times2}+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)i^3}{1\times2\times3}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{n}i-\frac{\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)i^2}{1\times2}+\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{2n-1}{n}\right)i^3}{1\times2\times3}-\cdots\cdots$$

(第 24 式)

例如求 $(1.04)^{\frac{1}{6}}$ 之值：

$$(1.04)^{\frac{1}{6}}=1+\frac{1}{6}\times.04-\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)(.04)^2}{1\times2}+\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{11}{6}\right)(.04)^3}{1\times2\times3}$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{11}{6}\right)\left(\frac{17}{6}\right)(.04)^4}{1\times2\times3\times4}+\cdots\cdots$$

$$=1+.006666-.0001111+.000002715$$

$$-.0000000765+\cdots\cdots$$

$$=1.006558$$

習題八

1. 展開$(a-3b)^5$
2. 求$(1+2a)^8$展開式之第三項
3. 求$(1.04)^3$之值。

第二十三節 指數級數

由二項定理

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx\times\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1\cdot2}\times\frac{1}{n^2}$$

$$+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1\cdot2\cdot3}\times\frac{1}{n^3}+\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\cdots\cdots$$

當此方程式中之n大於1時，則$\frac{1}{n}$卽小於1，今設n爲一無限大之數，則$\frac{1}{n}$遂爲無限小而近於極限0。而其方程式遂爲：

$$\operatorname*{Limit}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots^{*}\qquad(第25式)$$

當上面方程式中之x爲1，則其中之x，x^2，x^3等皆爲1，故其方程式當爲

$$\operatorname*{Limit}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots\qquad(第26式)$$

* $r!$ 讀若(factorial r)代表$1\times2\times3\times\cdots\cdots\times r$之階乘數，如$3!=1\times2\times3=6$，又如$7!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7=5040$等是。

此$\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$即爲自然對數之底，以字母 e 表之，即得其值爲：

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\cdots=2.7182818\cdots\cdots \qquad (\text{第 27 式})$$

第 25 式亦可以 e 表之爲：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots \qquad (\text{第 28 式})$$

第 28 式之級數稱曰**指數級數**(Exponential Series)。

第二十四節 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$之極限

由二項定理得：

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+n\times\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}\times\frac{x^2}{n^2}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}\times\frac{x^3}{n^3}+\cdots\cdots$$

$$=1+x+\frac{1-\frac{1}{n}}{2!}x^2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

上面方程式中之 n 增至無限大時，則$\frac{1}{n}$遂爲無限小而近於極限 0 。其方程式遂爲：

$$\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\cdots \qquad (\text{第 29 式})$$

由(25)(28)(29)三式，得：

$$\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\cdots=e^x=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

(第 30 式)

第二十五節 對數級數

令 $$x=\log_e(1+y)$$

則 $$1+y=e^x=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

將上式 $\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+y$ 兩邊各開 n 次方:

$$\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left(1+\frac{x}{n}\right)=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\ (1+y)^{\frac{1}{n}}$$

移項: $$\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\frac{x}{n}=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left[(1+y)^{\frac{1}{n}}-1\right]$$

兩邊各乘 n: $$x=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left[n(1+y)^{\frac{1}{n}}-n\right]$$

將上式之右邊依二項定理展開之:

$$x=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left[n\left[1+\frac{1}{n}y+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{y^2}{2!}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\frac{y^3}{3!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cdots\cdots\right]-n\right]$$
$$=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left[n+y+\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{y^2}{2!}+\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots-n\right]$$
$$=\underset{n\to\infty}{\text{Limit}}\left[y+\left(\frac{1}{n}-1\right)\frac{y^2}{2!}+\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\frac{y^3}{3!}+\cdots\cdots\right]$$
$$=y-\frac{y^2}{2!}+\frac{2!\,y^3}{3!}-\frac{3!\,y^4}{4!}+\cdots\cdots$$
$$=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots$$

於是 $$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots \qquad \text{(第 31 式)}$$

第 31 式之級數卽謂之對數級數(Logarithmic Series)

第二十六節 自然對數之計算

以 e 爲底之對數稱爲自然對數，任何數之自然對數可應用上節所得對數級數計算之。

如以 $y=1$ 代入第 31 式中，則得:

$$\log_e 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots\cdots$$

如以 $y=\frac{1}{2}$ 代入之，則得:

$$\log_e\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$$

或 $$\log_e 3=\log_e 2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$$

如用 $y=\frac{1}{3}$ 代入之,則得:

$$\log_e\frac{4}{3}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$$

或 $$\log_e 4=\log_e 3+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots$$

將上列諸級數計算至相當項數,卽得 $\log_e 2$, $\log_e 3$, $\log_e 4$ 之相當近似值;同理可用 $y=\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\cdots\cdots$ 等代入(31)式中以求得 $\log_e 5$, $\log_e 6$, $\log_e 7\cdots\cdots$ 各數之近似值。

但依上法計算 e 底之對數,如欲求其正確,必須用項數極多之級數計算之方可。茲爲便利起見,可將(第 31 式)之對數級數,

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots$$

變化成一較便之級數。

變(第 31 式)中之 y 爲 $-y$,則

$$\log_e(1-y)=(-y)-\frac{(-y)^2}{2}+\frac{(-y)^3}{3}-\frac{(-y)^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots\cdots \qquad \text{(第 32 式)}$$

從第 31 式減第 32 式卽得:

$$\log_e(1+y)-\log_e(1-y)=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\frac{y^7}{7}+\cdots\cdots\right)$$

或 $$\log_e\frac{(1+y)}{(1-y)}=2\left(y+\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{5}y^5+\frac{1}{7}y^7+\cdots\cdots\right) \qquad \text{(第 33 式)}$$

設 $\frac{1+y}{1-y}=\frac{z+1}{z}$,得 $y=\frac{1}{2z+1}$,則第 33 式成爲:

$$\log_e\frac{(z+1)}{z}=2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2z+1)^5}+\cdots\cdots\right)$$

或 $$\log_e(z+1)=\log_e z+2\left(\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2z+1)^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2z+1)^5}+\cdots\cdots\right) \qquad \text{(第 34 式)}$$

依此級數可不費周折，算出 e 底之任何對數，茲舉一例如下：

設 $z=1$ 則得：

$$\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right)$$

由是 $\log_e 2=.693147\cdots$ 容易算出。

既求得 $\log_e 2$ 則由第 34 式，以 $z=2$ 代入之，可得：

$$\log_e 3=\log_e 2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5}+\cdots\cdots\right)$$

$$\log_e 3=.693147+.405465=1.09861\text{。}$$

依此方法累求之，可得任何數之 e 底對數之近似值。

習 題 九

1. 已知 $\log_e 3=1.09861$。

用第 34 式之對數級數求 $\log_e 4$, $\log_e 5$, $\log_e 6$ 諸值。

2. 已知 $\log_e 2,=.693147$ 求 $\log_e 16$。

3. 已知 $\log_e 2=.693147$ 求 $\log_{10} 32$。

第二十七節 常用對數之計算

根據對數之性質(7)與(8)可得自然對數與常用對數之關係如下：

$$\log_{10} e=\frac{1}{\log_e 10}$$

$$\log_{10} y=\log_e y\cdot\log_{10} e$$

依上節之計算得 $\log_e 10=2.3025851$

於是 $$\log_{10} e=\frac{1}{2.3025851}=0.4342945$$

此 $\log_{10} e=0.4342945$ 稱為常用對數對於自然對數之模(Modulus)任何數之常用對數，皆可以此模數乘其自然對數而得：

$$\log_{10} y=0.4342945\log_e y$$

例: $\log_{10}2=0.4342945\times .693147=.30103$

$\log_{10}3=0.4342945\times 1.09861=.47712$

反之，欲知各數之自然對數亦可以此模數 0.4342945 除其常用對數，或以自然對數對於常用對數之模 $\log_e 10=2.3025851$ 乘其常用對數而得。

$$\log_e y=2.3025851\log_{10}y$$

例: $\log_e 2=2.3025851\times .30103=.693147$

第二十八節 百分法

以100爲分母而表示一數之值者曰百分法，其數曰**百分數**(Percentage)。如$\frac{6}{100}$讀爲百分之六，$\frac{8}{100}$讀爲百分之八等。

爲便利起見，百分數常以%之符號表示之。如 6% 卽爲$\frac{6}{100}$，8% 卽爲百分之八等。

百分數可去其百分符號而化爲小數。如 6% 卽爲$\frac{6}{100}$亦卽爲 .06，8% 卽爲$\frac{8}{100}$亦卽爲 .08。

$\frac{1}{2}$% 卽爲 .5% 亦卽爲 .005，$\frac{1}{4}$% 卽爲 .25% 亦卽爲 .0025

$1\frac{1}{2}$% 卽爲 1.5% 亦卽爲 .015 等。

任何小數皆可依百分數表示之。如 .005 卽爲 .5% .25 卽爲 25% 等。

一數亦可表示爲他數之百分數，其法乃以他數除該數，而以 100 乘其所除得之商。如欲知 25 爲 50 之百分之幾時，可先以 50 除 25 得其商爲 .5，再以 100 乘其商得 50，卽知 25 爲 50 之百分之五十。以百分符號表示之卽爲 50%。又如欲知 115 爲 460 之百分之幾，計算之得 $115\div 460=.25=25\%$。反之，如某數爲 220 之 5%，則某數卽爲 $220\times 5\%=220\times .05=11$。

第二十九節　推値法

會計數學中各種問題如利息，年金，保險等，計算時應用之公式，常含有指數級數以及其他複雜之乘除。解此種公式時，固可應用對數，但在實際計算中，僅用對數，仍嫌其不便。遂有各種專用之計算表之發行。如複利終價表，複利現價表，年金終價表，年金現價表等，此種計算表經國外數學家之畢生研究與計算，至今已臻完善，本書所採用者，達十餘種之多，足供應用。但有時仍不免有若干數値不能自表中直接查出，則可用推値法(Interpolation)以求得其近似數値。

推値法之應用於第6節中論及查對數表時曾加說明。玆再舉例以明之。

例：已知 $\frac{(1+i)^4-1}{i}=4.32619$ 求 i。

此 $\frac{(1+i)^4-1}{i}$ 爲年金終價公式，其中時期 $n=4$，可查年金終價表（表V）以求其 i。玆卽在用表V中依 $n=4$ 橫行循次查視，但不能查得有4.32619之數。僅能在第86頁中查得其最相近之二數，一爲 $i=5\%$ 直行中之4.310125，又一爲 $i=5\frac{1}{2}\%$ 直行中之4.342266，故知所求之 i 在5%與 $5\frac{1}{2}\%$ 之間。

玆將查得之二數列出如下：

$n=4$，$i=5\frac{1}{2}\%$ 之年金終價爲 4.342266

$n=4$，$i=5\ \%$ 之年金終價爲 4.310125

相差爲 $i=\frac{1}{2}\ \%$ 及年金終價 $=.032141$

此卽當 i 增加 $\frac{1}{2}\%$，其年金終價應增加.032141之意。易言之，卽當年金終價增加.032141，其 i 應增加 $\frac{1}{2}\%$ 是也。

今已知之年金終價爲	4.32619
查得 $i=5\%$ 之年金終價爲	4.31012
相差爲	.01607

前旣查得 $i=5\frac{1}{2}\%$ 之年金終價較 $i=5\%$ 之年金終價大 .032141，今又知例題中之年金終價較 $i=5\%$ 之年金終價大 .01607，則其相當之 i，可依比例推算得之，其算式如下：$.01607\div.032141\times\frac{1}{2}\%$，即 .25%，故知所求之 i 爲 $5\%+.25\%=5.25\%$。

依推値法所求得之值，並非十分正確，因時期 n，利率 i 等與年金終價之變化，並不成直線之比例，但其差數，在實用上可以不計，故此法仍可應用。

覆習題

1. 用對數計算下列各數(應用七位對數表)

(1) $(1.03)^{25}$　(2) $(1.025)^{14}$　(3) $(1.04)^{-6}$　(4) $(1.05)^{.2}$

2. 用對數計算下面方程式中之 n (應用七位對數表)

(1) $(1.03)^n=2$　(2) $(1.04)^n=2$　(3) $(1.05)^n=2$　(4) $(1.06)^n=2$

(5) $(1.07)^n=2$　(6) $(1.08)^n=2$　(7) $(1.09)^n=2$　(8) $(1.10)^n=2$

(9) $(1.06)^n=3$　(10) $\$5,637.09=\$1000\times\frac{(1.06)^n-1}{.06}$

3. 有銀元若干元依單利算息存入銀行，作爲存本取息存款，第一次利息於 78 月後支取，第二次於再過 77 月後支取，第三次於再過 76 月後支取，第四次於再過 75 後月支取，如此每次息期減短一月，直至最後一次利息於 1 月後支取，同時將其本金提回，問此款存入銀行之期間，共爲若干月。

4. 某甲欠某乙債若干元，於每年底還本 \$ 500，及依每年五釐計算之利息。設第一年底應還之利息爲 \$ 400。求其債務之總額，還淸所需之年數，末次還本時應帶付之利息，及所付之利息總額。

5. 依二項定理求 $(1.0375)^8$

6. 求下面級數之和，并依對數法算出之(應用七位對數表)

$$1+(1.06)+(1.06)^2+(1.06)^3+(1.06)^4+(1.06)^5+(1.06)^6+(1.06)^7$$

7. 從本書用表求下列各式中 i 之值：

(1) $(1+i)^3=1.124864$　(2) $(1+i)^5=1.552969$　(3) $(1+i)^{41}=2.0366252$

(4) $(1+i)^{-4}=.888487$　(5) $(1+i)^{-12}=.8363874$　(6) $(1+i)^{-7}=.8658692$

8. 從本書用表求下列各式中 n 之值：

(1) $(1.05)^n=1.2762815$;　(2) $(1.06)^n=1.4185191$;

(3) $(1.03)^n=1.3439163$;　(4) $(1.025)^{-n}=.$[illegible]059506;

(5) $(1.015)^{-n}=.9010267$

9. 求下列各數之百分數：

(1) $\frac{75}{225}$ (2) $\frac{80}{160}$ (3) $\frac{125}{465}$ (4) $\frac{6}{100}$ (5) $\frac{1}{200}$

10. 以小數點表示下列各百分數：

(1) $\frac{1}{2}\%$ (2) $1\frac{1}{2}\%$ (3) $1\frac{1}{4}\%$ (4) $\frac{1}{4}\%$ (5) $\frac{1}{3}\%$

(6) $\frac{1}{8}\%$ (7) $1\frac{1}{5}\%$

第三章　利息

第一節　利息之意義

利息(Interest)者,放款人以金錢借與他人,經若干時間後,向借款人所取之報酬也。借款人於借款到期後,除償還本金外,尚須按借款之時期,加給相當之利息。計算利息之要素有三:曰**本金**(Principal),曰**利率** Rate of Interest),曰**時期**(Time)。本金乃借款人所借到之原數,如甲向乙借款 \$1,000.00, 此 \$1,000.00 即爲本金。利率乃本金經過一定時期後計算利息之比率,如本金 \$1,000.00, 經過一年後,得利息 \$60.00, 此 \$60.00 乃本金 \$1,000.00 之百分之六(6%),通稱年利率 6%,俗稱年息六釐。時期則爲借款成立後所經過之時間,如三個月一年或二年是也。

第二節　單利之計算法

計算利息之方法,有**單利** (Simple Interest) 與**複利** (Compound Interest)之別。單利之計算,較爲簡單,無論時期長短,均以本金乘利率再乘時期即得。其公式如下:

$$利息=本金\times利率\times時期$$

例——設本金 \$1,000.00 利率年息六釐 (6%),時期一年,其利息之計算,當如下式:

$$利息=1,000.00\times .06\times 1$$
$$=\$60.00$$

數學上公式之應用，若用文字表示，則殊嫌繁瑣，故普通均以符號代表文字，茲將本節中通用之符號，列之於下：

P＝本金

i＝利率

n＝時期

I＝利息

在上列四項之中，若知其任何三項，卽可求得其他一項之未知數，茲分述於下：

(甲)由本金，利率，時期以求利息，其公式如下：

$$I=Pin \qquad \text{(第1式)}$$

例——設本金 \$500.00，利率年息七釐，時期二年，求利息若干，應如下式：

$$I=500.00\times.07\times2$$
$$=\$70.00$$

(乙)由本金，利息，時期以求利率，其公式如下：

$$i=\frac{I}{Pn} \qquad \text{(第2式)}$$

例——設本金\$500.00，時期二年，利息\$70.00，求利率若干，應如下式：

$$i=\frac{70.00}{500.00\times2}$$
$$=.07=7\%$$

(丙)由利息，利率，時期以求本金，其公式如下：

$$P=\frac{I}{in} \qquad \text{(第3式)}$$

例——設利息 \$70.00，利率年息七釐，時期二年，求本金若干，應如下式：

$$P=\frac{70.00}{.07\times2}$$
$$=\$500.00$$

(丁)由本金,利率,利息以求時期,其公式如下:

$$n=\frac{I}{Pi} \qquad \text{(第4式)}$$

例——設本金 \$500.00,利率年息七釐,到期得利息 \$70.00,計算其時期若干,應如下式:

$$n=\frac{70.00}{500.00\times.07}$$
$$=2\text{年}$$

普通除求利息外,亦有須求**本利合計**(Sum of Principal and Interest)者,以求出之利息,加上本金卽得。但爲便利起見,亦可應用公式,一次算出之。設以 S 代表本利合計,其公式如下:

$$S=P+I \qquad \text{(第5式)}$$

以第1式 $I=Pin$ 代入之,卽得 $S=P+Pin$,

$$S=P(1+in) \qquad \text{(第6式)}$$

例——設本金 \$500.00,利率年息七釐,時期二年,其本利合計應如下式:

$$S=500.00\times(1+.07\times2)$$
$$=\$570.00$$

上示四例,均係先知其三項,而求其餘一項之未知數者,今旣有本利合計一項,則在此五項中,任知其三項,(其中必有一項爲利率或時期)亦可求得其他二項之未知數,玆略舉數例於下:

(甲)上例係由本金,利率,時期以求本利合計者,現改由利息,利率,時期以求本利合計,其公式如下:

$$S=I\left(1+\frac{1}{in}\right) \qquad \text{(第7式)}$$

例——設利率爲年息七釐,二年後得利息 \$70.00,求其本利合計,應如下式:

$$S=70.00\times\left(1+\frac{1}{.07\times 2}\right)$$
$$=\$570.00$$

(乙)由利率,時期及本利合計三項,以求本金,其公式如下:

$$P=\frac{S}{1+in} \qquad \text{(第 8 式)}$$

例——設利率爲年息七釐,二年後得本利合計 \$570.00,求本金若干,應如下式:

$$P=\frac{570.00}{1+.07\times 2}$$
$$=\$500.00$$

(丙)由利率,時期及本利合計三項以求利息,其公式如下:

$$I=\frac{Sin}{1+in} \qquad \text{(第 9 式)}$$

例——設利率爲年息七釐,二年後得本利合計 \$570.00,求利息若干,應如下式:

$$I=\frac{570.00\times .07\times 2}{1+.07\times 2}$$
$$=\$70.00$$

(丁)由本金,利率及本利合計三項,以求時期,其公式如下:

$$n=\frac{\frac{S}{P}-1}{i} \qquad \text{(第 10 式)}$$

例——設本金 \$500.00,利率年息七釐,到期後得本利合計 \$570.00,求其時期若干,應如下式:

$$n=\frac{\frac{570.00}{500.00}-1}{.07}$$
$$=2 \text{ 年}$$

(戊)由本金,時期及本利合計三項以求利率,其公式如下:

$$i=\frac{\frac{S}{P}-1}{n} \qquad \text{(第11式)}$$

例——設本金\$500.00，二年後得本利合計\$570.00，求其利率若干，應如下式：

$$i=\frac{\frac{570.00}{500.00}-1}{2}$$

$$=.07=7\%$$

以上所舉諸例，係在本金，利率，時期，及利息四項中，任知其三項而求其他一項之未知數，或由本金，利率，時期，利息及本利合計五項中，任知其三項（其中一項須為利率或時期）而求其他二項未知數中之一項者，學者遇見實例時，可按式演化之。

習題一

（依單利法計算）

1. 設按單利年息六釐，時期二年，可得本利合計\$1,400，試求其本金。
2. 設本金\$2,000，按單利年息五釐，得息\$250，試求其時期。
3. 設本金\$1,500，二年後得本利合計\$1,800，試求其單利率。
4. 按下列利率，單利計息，若干年後其利息等於本金。
   （甲）年息五釐
   （乙）年息八釐
5. 設本金\$5,000，利率年息七釐半，時期二年半，試計算其單利息。
6. 設單利息\$120，利率年息八釐，時期一年半，試求其本金。
7. 設本金\$3,575，利率年息七釐七毫半，時期六年半，試求其本利合計。
8. 設利率為年息八釐半，時期三年半，得本利合計\$4,541.25，試求其本金及單利息。
9. 設本金\$35,675，利率為年息九釐半，到期得本利合計\$50,925.0625，試求其時期。
10. 設本金\$20,000二年後得本利\$21,750，試求其利率。
11. 設按年息六釐，時期二年半，可得本利\$375，試求其本金。
12. 設\$1,245之票據，三個月後應付\$1,269.90，試求其利率。
13. 設按利率四釐半，時期三年半，可得本利合計\$1,025.60，試求其本金。

第三節　尋常單利與正確單利之計算法

以上所述，係以一年爲計息之單位者。但借款之時期無定，未必皆係整年，故有時須計算不滿一年之利息。其法先以本金乘利率(指年利率)，再乘借款之日數，然後以一年之日數除之，即得所求之利息。但所謂一年之日數，亦有二種算法：一爲三百六十日(即依一年爲十二月，每月三十日計算)。一爲三百六十五日或三百六十六日(閏年)。(即依一年之實在日數計算)是也。依一年爲三百六十日而計算之單利，稱曰**尋常單利**(Ordinary Simple Interest)依一年爲三百六十五日或三百六十六日而計算者，稱曰**正確單利**(Exact Simple Interest)。

設 I = 尋常單利

I' = 正確單利

d = 日數

則(甲)求尋常單利之公式如下：

$$I=\frac{Pid}{360} \qquad \text{(第12式)}$$

例——設本金 \$500.00，利率年息七釐，時期九十日，求利息若干，應如下式：

$$I=\frac{500.00\times .07\times 90}{360}$$

$$=\$8.75$$

(乙)求正確單利之公式如下：

$$I'=\frac{Pid}{365} \qquad \text{(第13式)}$$

例——同前

$$I'=\frac{500.00\times .07\times 90}{365}$$

$$=\$8.63$$

若已知尋常單利，而欲求其正確單利者，則可以 360 乘尋常單利，再以 365 除之卽得。最簡捷之方法，莫若先將 360 與 365 二數，各以五約之，得 72 與 73，然後卽以 $\frac{72}{73}$ 乘之。若欲由正確單利以求尋常單利，則可以 $\frac{73}{72}$ 乘之卽得。蓋尋常單利爲正確單利之 $\frac{73}{72}$ 倍，而正確單利又爲尋常單利之 $\frac{72}{73}$ 倍。此法乃由第 12 式及第 13 式演化而來者也。

因 $$\frac{I}{I'}=\frac{365}{360}=\frac{73}{72}$$

卽: $$I=\frac{73}{72}I' \qquad \text{(第 14 式)}$$

又因 $$\frac{I'}{I}=\frac{360}{365}=\frac{72}{73}$$

卽: $$I'=\frac{72}{73}I \qquad \text{(第 15 式)}$$

對於日數之計算，普通商業上有所謂算頭不算尾，或算尾不算頭之說。如由四月二十日至五月十八日，祇算二十八日，因四月二十日及五月十八日之兩日中，有一日不算利息之故。

若一年作爲三百六十日，則對於日數之計算，亦有兩種方法。一法算出由某日至某日之確數。然後以 360 除之，如由四月一日至十月十七日爲 199 日，卽以 $\frac{199}{360}$ 乘本金，再乘利率。一法因一年旣按三百六十日計算，則一個月當爲三十日，故足一個月者，無論其爲二十八日三十日或三十一日，均作三十日計算。如由四月一日至十月十七日，當照六個月又十六日（卽 196 日）計算。

計算某日至某日之日數，可查閱本書用表 I，其檢查方法如下:

例(1)——查本年四月五日至本年九月六日之確實日數。

按九月六日爲本年之第 249 日，而四月五日爲本年之第 95 日，以 249 減 95 等於 154 日。

例(2)——查本年四月五日至翌年六月十九日之確實日數。

按翌年六月十九日。爲第二年之第 170 日，亦卽由本年一月一日起

之535日(365+170=535)，而本年之四月五日則為本年之第95日，以535減95，等於440日。

第四節　六釐六十日法

六釐六十日法(The 6% 60 day method)係計算利息之簡捷方法，照尋常單利法，每年以 360 日計算，年息六釐，則一年之六分之一，即六十日，應得利息一釐，亦即一釐為一年之六分之一，即六十日之利息也。由此可知計算年息六釐六十日之利息，即將本金之小數點，由右向左移二位，若求六日，則移左三位，若求一日，則以6,000除本金，或將小數點由右向左移三位，再以六除之，如求若干日之利息，則可以日數乘之。

例——設本金 5,000.00，年息六釐，時期五十四日，求其單利息，應如下式:

$$I=54\times5,000.00\div6,000$$
$$=\$45$$

或: $$I=54\times5.00\div6$$
$$=\$45$$

依六釐六十日法求出利息之後，無論欲求何種利率之利息，均頗便利，即以六除依六釐六十日法算出之利息，再以欲求之利率乘之可也。

如上例，若係年息八釐，則先以 6 除 \$ 45.00，再以八乘之，結果為 \$ 60.00。

若欲求正確利息，則可以 $\frac{72}{73}$ 乘之。以 $\frac{72}{73}$ 乘 \$ 60.00，等於 \$ 59.18。易言之，即將求出之結果，減去 $\frac{1}{73}$。以 \$ 60.00 減 $\left(\$60.00\times\frac{1}{73}\right)$，即等於 59.18 也。

第五節　單利表之應用

單利之計算，已頗簡便，若再用六釐六十日法之捷徑，當更無困難

可言。惟對於日期之計算，以及逐日之正確單利與尋常單利，仍須費相當之手續，如有算就之表格，以供檢查，則尤形便利。玆將單利表列入本書用表之內(表 II)，以供查考。

例(1)——設本金 $85,600，利率年息五釐，時期九十六日，求其正確利息。

先於表 II 查出 $10,000，年息一釐，時期九十六日之正確利息爲 20+6.3014，由此可得下列結果：

$10,000 之利息爲 $26.3014，則 $80,000 之利息爲 $210.4112.

1,000 之利息爲 2.6301，則 5,000 之利息爲 13.1505.

100 之利息爲 .2630，則 600 之利息爲 1.5780.

則 $85,600 利率年息一釐，時期九十六日之利息爲 $225.1397.

$85,600 利率年息五釐，時期九十六日之利息爲 $1,125.70.

例(2)——設本金 $2,300，年息七釐，時期八十六日，求其尋常利息。

先於表 II 查出 $10,000 年息一釐，時期八十六日之尋常利息爲 20+3.8888889，由此可得下列結果：

$1,000 之利息爲 2.38888889，則 $2,000 之利息爲 $4.77778.

100 之利息爲 .23888889，則 300 之利息爲 .71667.

則 $2,300 利率年息一釐，時期八十六日之利息爲 $5.49445.

$2,300 利率年息七釐，時期八十六日之利息爲 $38.46.

第六節 日息月息之計算法

以上所述，均係年息。尚有日息月息，其計算方法亦大致相仿。卽以本金乘利率，再乘時期。所異者，年息時期之單位，係以一年爲標準〔如年息六釐(6%)，卽一元經過一年得息六分〕。而月息日息，則以每月或每日爲單位耳。〔如月息六釐(6‰)，卽一元經過一月得息六釐。但日息普通均以一千元爲計算標準，如日息二角，卽每千元每日得利息二角，卽合月息六釐，年息七釐三〕。

嚴格言之，月息千分之六，稱爲六釐，則年息百分之六，應稱六分。反之，年息百分之六，稱爲六釐，則月息千分之六，應稱六毫。但習慣上對於月息千分之六，年息百分之六，均稱爲六釐，故本書亦從相沿之習慣，不加改易。

例——設本金 \$8,000.00，月息九釐，時期二月，求其利息若干，應如下式：

$$I=8,000.00\times .009\times 2$$
$$=\$144$$

若一個月又幾日，或不足一個月時，其不足一個月之日數，當以30除之。

例——設本金 \$8,000.00，月息九釐，時期一個月又二十天，求其利息若干，應如下式：

$$I=8,000.00\times .009\times 1\frac{20}{30}$$
$$=\$120.00$$

若本金 \$1,000.00，時期一年，月息九釐，對於日期之計算，有將一年作爲十二個月者，亦有將一年作爲365日，而又有將一個月作爲三十日者，卽一年爲十二個月又五日。

例——同上例，求一年之利息：

(甲)一年作爲十二個月之算式：

$$I=8,000.00\times .009\times 12$$
$$=\$864$$

(乙)一年作爲十二個月又五日之算式：

$$I=8,000.00\times .009\times 12\frac{5}{30}$$
$$=\$876$$

玆再爲日息之算式，舉例如下：

例——設本金 \$8,000.00，每千元日息三角三分，時期四十二日，求利

息若干,應如下式:

$$I=8,000.00\times.33\times\frac{1}{1000}\times42$$
$$=\$110.88$$

第七節 單利現價與貼現之計算法

現價(Present Value)者,對於將來到期之款項,求其現在應支付之數額,卽將來到期可得本利合計若干,按某種利率與時期計算之,以求其現在應支付之本金也。換言之,卽由利率時期與本利合計三項,以求本金。按照單利法計算現價,其公式與求本金之公式相同。

例——設按年息五釐於三年後可得本利合計 \$1,150,試求其現價若干。

$$P=\frac{1,150}{1+.05\times3}$$
$$=\$1,000.00$$

貼現(Discount)者,在借款時,於本金內預先扣除利息之謂也。單利貼現(Simple Discount)之計算,與單利計算法相同。

例——設借款 \$1,000.00,年息九釐,時期二年,求其貼現息若干,應如下式:

設 D=貼現息,則

$$D=1,000.00\times.09\times2$$
$$=\$180.00$$

依上例借到之款爲 \$820.00 (卽 \$1,000.00−180.00),故名爲年息九釐,實際合年息一分零九釐七毫強,因 \$820.00 依九釐計算,其二年後之利息,僅爲 \$147.60。由是可知利息係照本金計算,而貼現息則係照到期之本利合計計算。故貼現率與利率,名雖相同,而實則貼現率較高於利率也。

現價與貼現,若照單利計算,無甚特點,且用途較少,故先略述其梗概,俟後文討論複利時,再詳述之。

習題二

（依單利法計算）

1. 設本金＄4,750，利率爲年息八釐半，時期八十七日，試求其尋常單利息與正確單利息。

2. 試計算本年八月二十一日至十二月二十七日之日數，並查表 I，以驗其是否相符。

3. 試查表 I 計算上年六月十五日至本年八月二十一日之日數。

4. 試用六釐六十日法，計算下列各項之尋常單利息：

（甲）按下列各項利率，計算＄27,500．時期 36 日之利息：

（一）四釐半（二）五釐（三）六釐（四）七釐（五）七釐半（六）八釐

（乙）按下列各項利率，計算＄352，時期 74 日之利息：

（一）五釐（二）六釐（三）七釐

5. 試將上題(4)求出之尋常單利息，再化爲正確單利息。

6. 設本金＄6,750，利率爲月息八釐半，時期六個半月，試計算其利息。

7. 設本金＄8,866，利率爲月息九釐半，時期一年，試計算其利息。

8. 設本金＄15,000，利率每千元日息二角七分，時期六十七日，試計算其利息。

9. 設本金＄2,300，利率爲年息七釐，時期八十六日，試求其尋常單利息與正確單利息。

10. 設有本年三月一日起息，＄1,250 期票一紙，同年九月四日到期，利率爲年息七釐，試求其正確日數與利息。

11. 設照上題(10)各項，每月作三十日計算，試求其日數與利息。

12. 設按年息七釐半，於五年半後，可得本利合計＄21,187.50，試計算其現價。

13. 設以＄5,000 之半年期票據，按年息八釐半，向銀行貼現，試先計算其貼現息若干，復求出其合實利率若干。

14. 設本年三月十六日以翌年五月十六日到期＄1,800 之票據。按年息七釐七毫半向銀行貼現，試計算其貼現息若干，並求其合實利率若干。

第八節　複利之計算法

複利者，每一時期應計之利息，須加入本金，俾此後再計利息之謂也。複利俗稱‘利上加利’。普通計算利息，多以一年爲標準，名曰年息。但複利之次數無定，有一年複利一次者，有數年複利一次者，有一年複利數次者。複利所用之符號，與單利略異。n 代表複利之期數（普通指年數而言），而 i 代表每期之利率（普通指年利率而言）。

在複利之情形下，第一期末之本利合計（卽期初本金加第一期之利

息)卽爲第二期初之本金,其式如下:

$$P(1+i)$$

第二期末之本利合計〔卽第二期初之本金 $P(1+i)$ 加第二期之利息 $P(1+i)i$〕爲第三期初之本金,其式如下:

$$P(1+i)+P(1+i)i=P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$$

故第三期末之本利合計,爲第四期初之本金,其式如下:

$$P(1+i)^3$$

依此類推,n 年末之本利合計,其公式如下:

$$S=P(1+i)^n \qquad \text{(第 16 式)}$$

例——設本金 $1,000.00,時期四年,利率年息五釐,每年復利一次,試求本利合計若干,當如下式:

$$\begin{aligned} S&=1,000.00\,(1.05)^4 & P&=1,000 \\ &=1,000.00\times 1.21551 & n&=4 \\ &=\$1,215.51 & i&=.05 \end{aligned}$$

按乘方之計算,次數少者,尙不繁難。若期數愈多,則計算愈繁,費時愈多,故製有複利終價表(簡稱複利表),以供檢査。本例根據表 III (複利表),可査出 $(1,05)^4=1.21551$。

上列公式,係求本利合計者,玆再將求利息,本金,利率與時期之各公式,列擧如下:

(甲)求利息　本金一元在 n 期末之本利合計爲 $(1+i)^n$,利息爲 $(1+i)^n-1$,故本金 P 元在 n 期末之利息如下式:

$$I=P\times[(1+i)^n-1] \qquad \text{(第 17 式)}$$

例——設本金 $1,000.00,利率年息五釐,時期四年,每年複利一次,求利息若干,當如下式:

$$\begin{aligned} I&=1,000.00\times[(1.05)^4-1] & P&=1,000 \\ &=1,000.00\times .21551 & i&=.05 \\ &=\$215.51 & n&=4 \end{aligned}$$

(乙)求本金

$$P=\frac{S}{(1+i)^n}=Sv^n \text{(註)} \qquad \text{(第 18 式)}$$

此式乃由第 16 式演化而成。

例——設按利率年息五釐，每年復利一次，時期四年，得本利合計 $1,215.51，求本金若干，當如下式：

$$\begin{aligned} P&=\frac{1,215.51}{(1+.05)^4} \\ &=\frac{1,215.51}{1.21551} \\ &=\$1,000.00 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S&=1,215.51 \\ n&=4 \\ i&=.05 \end{aligned}$$

若僅知利息，而不知本利合計，欲求本金若干者，可用下列公式：

$$P=\frac{I}{(1+i)^n-1} \qquad \text{(第 19 式)}$$

例——同上例，僅將本利合計改爲利息 $215.51。

$$\begin{aligned} P&=\frac{215.51}{(1+.05)^4-1} \\ &=\frac{215.51}{.21551} \\ &=\$1,000.00 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} I&=215.51 \\ n&=4 \\ i&=.05 \end{aligned}$$

(丙)求利率　以 P 除第 16 式，得下列公式：

$$(1+i)^n=\frac{S}{P}$$

再開 n 方爲：

$$1+i=\sqrt[n]{\frac{S}{P}}$$

雙方各減 1，則爲：

$$i=\sqrt[n]{\frac{S}{P}}-1 \qquad \text{(第 20 式)}$$

例——設本金 $1,000.00，每年複利一次，時期四年，本利合計 $1,215.51，

註：$\left(v=\frac{1}{1+i}\right)$ 普通稱爲貼現因數(Discount Factor)

求其利率若干，當如下式：

$$i=\sqrt[4]{\frac{1,215.51}{1,000.00}}-1 \qquad P=1,000$$
$$\qquad n=4$$
$$=\sqrt[4]{1.21551}-1 \qquad S=1,215.51$$
$$=1.05-1$$
$$=0.05=5\%$$

(丁)求時期　此項算法，先以本利合計除以本金，得 $(1+i)^n$ 之答數，再以答數於複利表中同一利率欄內，查出與此答數相同或相近之數。此欄之時期即爲所求之時期，或其相近之時期。

例——設本金 \$1,000.00，利率年息五釐，每年複利一次，到期得本利合計 \$1,215.51，求其時期若干，當如下式：

$$1,215.51=1,000.00\times(1+.05)^n \qquad P=1,000$$
$$(1+.05)^n=\frac{1,215.51}{1,000.00}=1.21551 \qquad S=1,215.51 \quad i=.05$$

簡捷之算式如下：

$$1,215.51\div1,000.00=1.21551$$

再於複利表(表 III)利率 5% 欄內查出第四期之數爲 \$1.21551，故知其時期爲四年。

上例適係四年整數，故可於複利表內查得，若時期並非整數，則不能於表內查出相同之金額。所可查得者僅其相近之兩數，一數較大，而一數較小。試以此二數之差額爲分母，又以已知之本利合計減較小數之差額爲分子，以求得百分數，然後以較小數所指之期數，加百分數，即得正確之時期。

例——設本金 \$1,000.00，利率年利五釐，每年複利一次，於若干時期後，可得本利合計 \$1,245.89，其算法如下：

$$1,245.89=1,000.00\times(1.05)^n \qquad P=1,000$$
$$(1.05)^n=\frac{1,245.89}{1,000.00}=1.24589 \qquad i=.05 \quad S=1,245.89$$

就複利表（表 III）利率 5% 欄內，查得第四期之本利合計爲 1.21550625，第五期之本利合計爲 \$ 1.27628156，當知其時期爲四年與五年之間。次求第四期本利合計與第五期本利合計之差額爲分母，而以第四期本利合計與所得本利合計之差額爲分子。與四年相加卽爲正確之時期，算式如下：

$$1.27628-1.21551=.06077$$

$$1.24589-1.21551=.03038$$

$$n=4+\frac{3.038}{6.077}=4.5\text{年}$$

第九節　複利表之應用

複利之計算頗繁，在期數少者猶可應付，倘期數多至數十或數百，則計算所耗費之時間過多，手續煩瑣，極感不便，於是複利表對數表之應用尙矣，複利表所列之期數，有多至一二百期者，但亦有祇列五十期者，若求八十七期之本利合計，爲表中所不載，則可以五十期之本利合計，與三十七期之本利合計相乘而得。玆設以 $m+n$ 代表時期，而列其公式如下；

$$(1+i)^{m+n}=(1+i)^m(1+i)^n$$

例——設求 \$1.00，利率年息五釐，時期八十七期之本利合計，複利表中祇列五十期，其算式如下：

$$(1.05)^{87}=(1.05)^{50}\times(1.05)^{37}$$

$$=11.4673997858\times6.0814069428$$

$$=69.7379246726$$

表中之小數，位數愈多，則所得之答數愈準確。

第十節　應用對數計算複利法

複利之計算，雖有複利表可査。有時仍覺費時太多。而計算時期，在

複利表上，亦祇能查得相近之數，須更依推值法推算其正確之時期，故用者仍感不便，此時可用對數計算之。

玆將應用對數法以計算複利中之本金，利率，時期及本利合計等公式，列舉如下：

（甲）求本利合計：

$$\log S=\log P+n\log(1+i) \qquad \text{（第 21 式）}$$

例——設本金 \$50.00，利率年息六釐，每年複利一次，時期四年半，求到期時之本利合計若干？

$$S=50.00\times(1.06)^{4.5} \qquad P=50$$

$$\log S=\log 50+4.5\log 1.06 \qquad n=4\tfrac{1}{2}$$

$$\log 1.06=0.025306 \qquad i=.06$$

$$\left.\begin{aligned}4.5\log 1.06&=0.113877\\ \log 50&=1.698970\end{aligned}\right\}$$

$$\log S=1.812847$$

$S=\$64.99$（卽 1.812847 之眞數）

（乙）求本金

$$\log P=\log S-n\log(1+i) \qquad \text{（第 22 式）}$$

例——設利率年息七釐，每年複利一次，七年後可得本利合計 \$200.00，求本金若干？

$$P=\frac{200.00}{(1+.07)^7} \qquad S=200 \qquad n=7$$

$$\log P=\log 200-7\log(1+.07) \qquad i=.07$$

$$\log 1.07=0.0293838$$

$$\left.\begin{aligned}7\log 1.07&=0.20569\\ \log 200&=2.30103\end{aligned}\right\}$$

$$\log P=2.09534$$

$P=\$124.55$（卽 2.09534 之眞數）

(丙)求利率

$$\log(1+i)=\frac{\log S-\log P}{n} \qquad \text{(第 23 式)}$$

例——設本金 \$100.00 十年後可得本利合計 \$150.00,每年複利一次,試求年利率若干?

$$\log(1+i)=\frac{\log 150-\log 100}{10} \qquad P=100$$

$$\log 150=2.176091 \qquad S=150$$

$$\log 100=\underline{2.000000} \qquad n=10$$

差額$=0.176091$

$$\log(1+i)=0.176091\div 10=0.017609$$

$1+i=1.041379$ (即 0.017609 之真數)

$$i=1.041379-1=.041379=4.1379\%$$

(丁)求時期

$$n=\frac{\log S-\log P}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 24 式)}$$

例——設本金 \$300.00,利率年息五釐,每年複利一次,到期可得本利合計 \$422.13,試求時期若干?

$$n=\frac{\log 422.13-\log 300}{\log 1.05} \qquad P=300$$

$$=\frac{2.62545-2.47712}{0.02119} \qquad S=422.13 \qquad i=.05$$

$=7$ 年

第十一節 複利息與本金相等時期之計算法

此項公式即照第 24 式,將本利合計改為本金之二倍 ($S=2P$),其公式如下:

$$n=\frac{\log 2P-\log P}{\log(1+i)}=\frac{\log 2}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 25 式)}$$

例——設本金 \$10.00，利率年息五釐，試計算當在何時本利合計可爲 \$20.00？

$$n=\frac{\log 20-\log 10}{\log(1+.05)} \qquad P=10$$

$$=\frac{\log 2}{\log(1.05)} \qquad i=.05 \qquad S=20$$

$$\log 2=0.3010$$

$$\log 1.05=0.02119$$

$$n=0.3010\div 0.02119=14.2+\text{ 年}$$

尙有一簡便之方法，可求得相近之時期，將 "$(1+i)^n=2$" 依上章第 25 節與第 26 節所述之自然對數，得下列公式：

$$n\log_e(1+i)=\log_e 2=0.69315$$

故
$$n=\frac{0.69315}{\log_e(1+i)}$$

玆將 $\log_e(1+i)$ 化爲無限級數如下：

$$\log_e(1+i)=i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\frac{i^4}{4}+\cdots\cdots$$

則

$$n=\frac{0.69315}{i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\cdots}=\frac{0.69315}{i\left(1-\frac{i}{2}+\frac{i^2}{3}-\cdots\right)}=\frac{0.69315}{i}\times\frac{1}{1-\frac{i}{2}+\frac{i^2}{3}-\cdots}$$

$$=\frac{0.69315}{i}\left(1+\frac{i}{2}-\frac{i^2}{12}+\cdots\right)$$

若求近似數，可僅取括弧中首二項，即 $n=\frac{0.693}{i}\times\left(1+\frac{i}{2}\right)$ 約數，$=\left(\frac{0.693}{i}+.35\right)$ 約數。

例同前，算式如下：

$$n=\left(\frac{.693}{.05}+.35\right)\text{約數}$$

$$=(13.86+.35)\text{約數}$$

$$=14.21\text{ 年}$$

故計算複利息與本金相等之時期之簡捷方法，當以利率除 .639，再加 .35 卽得。

第十二節　時期不滿一整個複利時期之計算

若複利爲每年一次，而所求終價之時期爲若干年及若干月；其計算之法有二：一爲先將整年之若干年按複利計算終價。再將求出之終價按單利計算若干月之利息。二者相加卽得。此法雖爲商界中所常用，但不十分精確。另一法則將不滿一個複利時期之部份。亦化爲分數，與整數之期數，一併作爲乘方計算。玆舉例於下：

例：設本金 \$100，利率年息五釐，每年複利一次，試求四年三個月時之終價。

第一法　先求第四年底之終價：

$$\begin{aligned} S&=P(1+i)^n \\ &=100(1.05)^4 \\ &=100\times1.2155062 \\ &=\$121.55 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P&=100 \\ i&=.05 \\ n&=4 \end{aligned}$$

次求三個月之單利：

$$\begin{aligned} I&=Pni \\ &=121.55\times\frac{3}{12}\times.05=\$1.52 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P&=\$121.55 \\ n&=\frac{3}{12} \\ i&=.05 \end{aligned}$$

終價爲 $\$121.55+1.52=\$123.07$

第二法

$$\begin{aligned} S&=P(1+i)^n \\ &=100(1.05)^{4\frac{1}{4}} \\ &=100(1.05)^4(1.05)^{\frac{1}{4}} \\ &=100\times1.2155062\times1.0122722 \\ &=\$123.04 \end{aligned}$$

$(1.05)^{\frac{1}{4}}$ 可查用表 IX. 如其利率或時期爲該表所無者。則可用對數法計算。由該表可察知如不滿一個複利時期。單利之利息較複利之利息爲大。

第十三節　單利與複利之圖線比較

單利與複利之差數，時期愈短，差額愈小，若一年複利一次，則無論

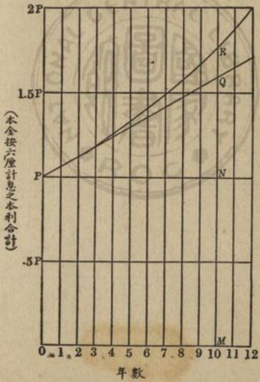
單利與複利第一年之利息完全相同，以後則時期愈遠，相差愈甚。茲列表以示其相差之程度：

設時期爲十二年，利率爲六釐。

年　數 (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
單利終價 (Q)	1.06	1.12	1.18	1.24	1.30	1.36	1.42	1.48	1.54	1.60	1.66	1.72
複利終價 (R)	1.06	1.124	1.191	1.262	1.338	1.418	1.504	1.594	1.689	1.791	1.898	2.012

茲再以圖線表示如下：

第一圖　單利與複利比較圖



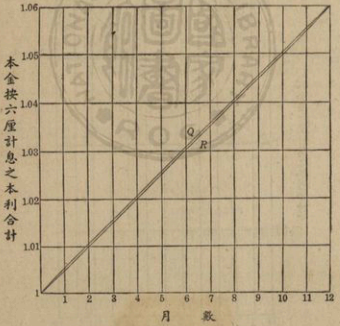
若時期不足一年，則單利之利息較大，而複利之利息較小，茲列表

於下：

月　數 (n)	1	2	3	4	5	6
單利終價 (Q)	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030
複利終價 (R)	1.0048674	1.0097586	1.0146738	1.0196129	1.024[illegible]757	1.0295627
月　數 (n)	7	8	9	10	11	12
單利終價 (Q)	1.035	1.040	1.045	1.050	1.055	1.060
複利終價 (R)	1.0345744	1.0396103	1.0446707	1.0497555	1.0548553	1.0600000

玆再以圖線表示如下：

第二圖　單利與複利比較圖



第一圖之橫坐標爲時期，縱坐標爲本利合計。MN 係本金，NQ 爲單利十年之利息，MQ 乃單利十年後之本利合計。NR 爲複利十年

之利息，MR 乃複利十年後之本利合計。第二圖乃表示不滿一年，複利之數小於單利，直至足一年，二者相同。

由是可知時期大於一個複利之時期，複利終價之數額大於單利終價之數額。時期爲一個複利之時期時，單利與複利之數額相同。時期小於一個複利之時期，複利終價之數額小於單利終價之數額。單利乃直線向上，複利則因利上生利之故，時期愈長，利息亦愈多，而成上仰之曲線。

習題三

1. 設本金 $1,000，時期十五年，每年復利一次，可得本利合計 $2,078.93，試求其利率(用對數法計算之)。

2. 設本金 $1,250，按年息六釐，每半年複利一次，試用對數法求出其可得本利合計 $9,897.28 之年數。

3. 試查複利表（表 III）中時期二十五年一釐至四釐各數，再以對數法證明其是否無誤。

4. 試用複利表（表 III）計算 $500，利率年息八釐，每年複利四次，期九年半之利息。

5. 試以下列二法求 $100,000，利率年息五釐，時期四年九個月之利息及本利合計，並比較其孰大：

(甲)完全按複利法計算。

(乙)計算第四年底之複利息數，再加第四年後之九個月單利息。

6. 試求 $10,000，時期五十年，利率年息三釐半，每年複利一次之本利合計。

7. 試按五、六、七、八釐，每年複利一次，計算其複利息等於本金之年數。

8. 按何種利率，每年複利一次，滿十年可得本利合計爲本金之二倍，試計算之。

9. 設本金 $100，按年息五釐，每年複利一次，試求本利合計爲 $1,000 之時期。

10. 設存款一元，按年息四釐計息，同時另存一元，按年息三釐計息，試計算前者成爲後者雙倍之時期。

11. 設本金 $64.85，時期三十六年，利率年息三釐，每年複利一次，試求其本利合計數。

12. 設本金 $100，利率年息四釐，每年複利一次，試求(甲)滿十年，(乙)滿二十年，(丙)滿四十年之本利合計數。

13. 試將上列第 10 題計算所得之結果，與按單利計算者互相比較，並注意其與時期是

否成比例。

14. 設購有房屋一所,計 $5,000, 按年息五釐,每年複利一次,試計算其二十年後之價值。

15. 設本金 $100, 利率年息五釐 試按單利與複利畫一圖線以比較之。

第十四節 單利之缺點

投資者以期末所取之利息,再依相同之利率存放,則其所得者卽爲複利。若依單利計算,借款人對於每期末應付之利息,留積不付,亦不再給息,則投資者失去其再行存放之利益矣。有人以爲複利之計算,對借款人似嫌苛刻,故主張長期之借款,應按單利計算者。其實不然,按普通商業習慣,借款之期間,多以一年或半年爲單位,而利率之訂定,亦多以一年爲單位。故於每年或每半年之末,投資人有提取其利息之權,借款人不應不給代價而扣留其利息。若按單利計算,至借款到期,本利一併付還,未免使投資人虧損太甚。如借款人嫌複利法太苛,儘可將借款之利率減低,無需更改其計算方法,故複利法乃合於按期付息之原則者也。

單利之計算,雖頗簡便,但祇適用於短期之借款,長期借款,無有不按複利計算者,以後所稱利息,均指複利而言。苟有專論單利之處,則當指明單利,以示區別。

第十五節 實利率與名利率及其計算法

利息有一年複利一次,亦有半年,三個月,一個月,甚至一星期或一日複利一次者。例如年息四釐,半年複利一次,則每期按二釐計算,三個月複利一次,則每期按一釐計算。此種計息方法,其實際利率,不止年息四釐,例如年息四釐,每半年複利一次,其算式如下:

$$(1.02)^2-1=.0404$$

例——設本金 $10,000, 按年息四釐計算,每半年複利一次,一年可得利息 $404。

由上式可知此項利率，名爲四釐，實際則合四釐零四絲（4.04%）。故年息四釐之利率，名曰**名利率**（Nominal Rate），而四釐零四絲之利率，名曰**實利率**（Effective Rate）。本書以 j 代表名利率，以 i 代表實利率，以 m 代表一年中複利之次數，以 $\frac{j}{m}$ 代表每期每元應得之利息。欲求每元每年之本利合計，其公式如下：

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

（甲）由名利率求實利率

每元每年之本利合計爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$，但年初之本金爲 1，故 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$，即爲一年之利息，由是可知求實利率之公式如下：

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1 \qquad \text{（第 26 式）}$$

例——設名利率爲年息四釐，每半年複利一次，時期一年，試求實利率若干？

$$i=\left(1+\frac{.04}{2}\right)^2-1$$
$$=(1.02)^2-1$$
$$=.0404$$

（乙）由實利率求名利率

求名利率，可由第 26 式雙方各加 1，得下式：

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

開 m 方，得下式：

$$1+\frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}$$

或

$$=\sqrt[m]{(1+i)}$$

求 j 則如下式：

$$j=m[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1]=m(\sqrt[m]{1+i}-1) \qquad \text{（第 27 式）}$$

例(1)——設實利率爲年息四釐，半年複利一次，即 $i=.04$，$m=2$，求折合名利率若干？

$$j=2(\sqrt{1+.04}-1)$$
$$=.039608$$

例(2)——設實利率爲年息四釐零四絲，半年複利一次，即 $i=.0404$，$m=2$，求折合名利率若干？

$$j=2(\sqrt{1.0404}-1)$$
$$=.04$$

茲將年息六釐，一年內複利數次之名利率與實利率之差額，列表於下：

名利率 %	複利時期 m=一年中複利次數		本利合計		每元所得利息	實利率 %
6	一　年	$m=1$	$(1.06)^1$	$=1.06$	0.06	6.
6	半　年	$m=2$	$(1.03)^2$	$=1.0609$	0.0609	6.09
6	三個月	$m=4$	$(1.015)^4$	$=1.06136$	0.06136	6.136
6	一個月	$m=12$	$(1.005)^{12}$	$=1.06168$	0.06168	6.168
6	一　日	$m=365$	$(1.000164)^{365}$	$=1.06183$	0.06183	6.183

第十六節　實利率之本利合計改爲名利率之本利合計法

實利率之本利合計爲 $1+i$，名利率之本利合計爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$。根據第 16 式，將 $1+i$ 改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$，得下列公式：

$$S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} \qquad \text{（第 28 式）}$$

例——設本金 \$10,000，利率年息四釐，時期二年，每半年複利一次，求本利合計若干，算式如下：

$$S=10,000\times\left(1+\frac{.04}{2}\right)^{2\times2}$$
$$=10,000\times(1.02)^4$$
$$=\$10,824.322$$

$P=\$10,000$
$j=.04$
$m=2$
$n=2$

根據第 18 式，將 $1+i$ 改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 得下列公式：

$$P=\frac{S}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}=Sv^n \qquad \text{(第 29 式)}$$

例——設利率年息四釐，每半年複利一次，時期二年，到期得本利合計 \$10,824.322，求其本金若干，算式如下：

$$P=\frac{10,824.322}{\left(1+\frac{.04}{2}\right)^{2\times 2}} \qquad S=\$\,10,824.322$$

$$j=.04$$

$$=\frac{10,824.322}{(1.02)^4} \qquad m=2 \qquad n=2$$

$$=\$\,10,000.00$$

貼現因數當改爲下式：

$$v=\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}$$

以上公式中，n 代表年數，m 代表每年中之複利次數，所謂第 28 式及第 29 式，乃由第 16 式及第 18 式將每期利率 i，改爲 $\frac{j}{m}$，同時將時期 n，改爲 mn 而得。

第十七節　複利現價之計算法

現價乃不待款項到期，而預先支付之數，已如前述。惟前所論者，係單利現價，本節所述，係複利現價。

複利現價之計算法，與複利法求本金之計算法相同。其公式如下：

前列第 18 式：　　$P=Sv^n$

其中　$$v=\frac{1}{1+i}$$

$$v^n=\frac{1}{(1+i)^n}=(1+i)^{-n}$$

年底之一元，在年初時之現價係 $\frac{1}{1+i}$，故 v 普通稱爲貼現因數。至

v 之乘方各數，則列於本書用表內之複利現價表(表 IV)(簡稱現價表)中，計算時可應用之。

例——設利率為年息五釐，每年複利一次，時期五年，到期得本利合計 \$2,000，試求其現價若干？

$$P=2{,}000\,v^5 \text{ 按五釐} \qquad S=\$\ 2{,}000$$

$$=2{,}000\times.783526166\ (\text{表 IV}) \qquad n=5$$

$$=\$1{,}567.052 \qquad i=.05$$

第十八節 複利貼現之計算法

貸款人預先在借出之本金中扣去其應計之利息者，謂之貼現。設以 P 代表本金，D 代表貼現息，則借款人所收到者為 $P-D$，亦即 P 之現價，而 P 為將來應行償還之數。茲設以 d 代表貼現率，而列公式如下：

$$1-d=v$$

因
$$v=\frac{1}{1+i}$$

故
$$1-d=\frac{1}{1+i}$$

則
$$d=1-\frac{1}{1+i}=\frac{i}{1+i}=iv \qquad (\text{第 30 式})$$

又
$$i=\frac{d}{1-d} \qquad (\text{第 31 式})$$

例(1)——設實利率為年息六釐，試求其貼現率若干？

$$d=\frac{.06}{1.06}=.0566+$$

即貼現率五釐六毫六絲，等於實利率六釐。

例(2)——設貼現率為年息六釐，試求實利率若干？

$$i=\frac{.06}{1-.06}$$

$$=\frac{.06}{.94}$$

$$=.06383$$

即貼現率六釐，等於實利率六釐三毫八絲以上。

貼現之時期不及一年者，按單利貼現，固無可非難。亦有不止一年者，若仍按單利貼現，殊不合理。設貼現率爲年息一分，時期十年，則所得者等於零，與其謂之貼現，無異以所持之票據，無條件送於他人也。若其期不止十年，則票據之價值成負數矣。總之 n 愈大，則 $1-nd$ 愈有成負數之可能。由此以言，貼現之合理的處置，舍按複利計算外，別無他法。

貼現按期複利者，謂之複利貼現(Compound Discount)。即貼現時預先扣除之貼現息，按複利計算是也。到期之本金或本利合計減去貼現息，即爲現價。按照同一理由，本利合計減去現價，即爲貼現息。如前例本利合計爲 \$ 2,000，則現價爲 \$ 1,567.052，貼現息爲 \$ 432.948，此即所謂複利貼現也。求貼現息之公式如下：

$$D=1-\frac{1}{(1+i)^n} \qquad \text{(第 32 式)}$$

例——設利率爲年息四釐，時期四年，試求一元之貼現息若干，當如下式：

$$1-\frac{1}{(1.04)^4}$$
$$=1-.8548$$
$$=.1452$$

(甲)由名貼現率求實貼現率

貼現息亦有一年複利數次者，設以 d' 代表名貼現率，m 代表一年中複利次數，d 代表一元一年之總貼現息，即所謂實貼現率也。茲列公式於下：

$$d=1-\left(1-\frac{d'}{m}\right)^m \qquad \text{(第 33 式)}$$

其中之 $\left(1-\frac{d'}{m}\right)^m$ 即依名貼現率 d'，一年中複利 m 次，一元在一年前之貼現價值也。

例——設名貼現率爲年息六釐,每年復利二次,試求一元一年之貼現息若干?

$$d=1-\left(1-\frac{.06}{2}\right)^2$$

$$=1-(.97)^2=1-.9409$$

$$=.0591$$

此即所謂實貼現率。

(乙)由名貼現率求名利率

若以 $\frac{1}{1+i}=v$ 公式中之 $\frac{1}{1+i}$,改爲 $\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}$,則由名貼現率求名利率之公式,應改如下式:

$$j=m\left[\frac{1}{\left(1-\frac{d}{m}\right)}-1\right] \qquad \text{(第 34 式)}$$

例——設名貼現率爲年息六釐,每年復利二次,試求名利率若干?

$$j=2\left[\frac{1}{\left(1-\frac{.06}{2}\right)}-1\right]$$

$$=2\times(1.03092783-1)$$

$$=.06185566$$

此項貼現,於銀行收受未到期之票據時常用之。收受票據之價値,低於票面價値所差之數,即爲貼現息。此種貼現,名爲按票面計算,而預先扣息,實等於按本利合計計算,故其結果貼現率較高於利率。貼現之法,旣屬簡便,且利率亦較高,此銀行之所以樂於採用也。

習題四

1. 設名利率六釐,每半年復利一次,試求其實利率。
2. 設實利率爲 .04060401,按三個月復利一次,試求其名利率。
3. 設本金一元,時期一年,名利率爲六釐,試計算(甲)半年復利一次,(乙)三個月復利一次,(丙)每月復利一次,(丁)每日復利一次之利息。
4. 設按利率年息四釐,每年復利二次,時期二十年,可得本利合計 $10,000,試求其現

價(用現價表)。

5. 設按利率年息四釐,每年復利四次,時期二十年,可得本利合計 $ 12,564,試求其現價

6. 設有票據票面 $ 2,c0, 時期二年,按年息六釐計息,每年復利一次,今若按年息七釐,每年復利一次貼現,則其現價應爲若干?

7. 設某種無利債券,時期十八年,票面 $ 1,050,試按年息八釐,每年復利一次,計算其現價

8. 甲商人售貨於乙,訂定二種付款辦法,由乙選定:(一)即時付款,當付 $ 80; (二)第二年底付款,當付 $ 96. 設是時市場利率年息一分,每年復利一次,以上二法,在乙孰爲合算?試計算之。

9. 設名利率七釐,試計算下列二項之實利率:

(甲)半年復利一次, (乙)三個月復利一次。

10. 設有學生某甲存款於乙丙二銀行,每行一百元。乙銀行名利率三釐半,丙銀行實利率四釐.試計算二銀行存款之累積孰快?並求出第五年底各行存款之本利合計。

11. 設於嬰孩產生之日,即爲之存款 $ 1,000 於銀行,年息一分,每年復利二次,二十年後之本利合計,應爲若干?

12. 設有田契押款,年息六釐二毫半,每年復利一次,又有六釐公司債,每年復利二次,試計算二種利率孰優?

13. 某甲向某乙借款,議定月息七釐,每月付息一次,既行數次後,甲乙二人均嫌其麻煩,遂改爲每年付息一次,但其實利率,須與每月付息一次者相同,試計算之。

14. 試依年息八釐,時期六年,每年復利二次,計算 $ 50,000 之現價。

15. 設年利率八釐,每年復利一次,時期八年,計算一元之貼現息若干?若半年復利一次,其貼現息又爲若干?

第十九節 繼續轉化之計算法

求一元於一年後本利合計之公式,則爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$,此以 j 代表名利率,m 代表一年中之複利次數。玆因複利可以每半年三個月一個月或一日計算一次,則 m 可爲 2,4,12 及 365 等數,如第 15 節附表所示。

一日複利一次倘嫌不足,則可爲無限次數複利,普通稱爲繼續轉化(Continuous Conversion)。蓋複利之次數愈多,則實利率亦愈高,投資者固希望無窮次數之複利以極度增高其所得之利息也。玆列式證明如下:

將 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 以二項式展開，則如下式：

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=1+m\cdot\frac{j}{m}+\frac{m(m-1)}{2!}\cdot\frac{j^2}{m^2}+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cdot\frac{j^3}{m^3}+\cdots$$

$$=1+j+\frac{1-\frac{1}{m}}{2!}j^2+\frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)}{3!}j^3+\cdots\cdots$$

若 m 增加，則 $1-\frac{1}{m}$，$1-\frac{2}{m}$，$1-\frac{3}{m}$ …… 亦隨之增加。若將 $\left(1+\frac{j}{m+1}\right)^{m+1}$ 展開，自較 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 展開之結果爲大。一則 $(m+1)$ 方較 m 方爲大，而 $\left(1+\frac{j}{m+1}\right)^{m+1}$ 之項數亦較多。因此

$$\left(1+\frac{j}{m+1}\right)^{m+1}>\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

或 $$(1+j)<\left(1+\frac{j}{2}\right)^2<\left(1+\frac{j}{3}\right)^3<\cdots<\left(1+\frac{j}{m}\right)^m<\cdots\cdots$$

但理想有時受事實之限制，如上式中之 m 雖無窮盡，而 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 之價值，終有相當之限制。換言之，卽複利之次數愈多，則其相當增加之利率，亦愈微也。

依本書第二章第 24 節之原理，m 無限制增加，$\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 成爲 e^j。此 $e=2.71828+$ 爲自然對數中之底數，玆將本金一元一年中複利無限次於一年底時之本利合計，列式如下：

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=1+j+\frac{j^2}{2!}+\frac{j^3}{3!}+\cdots\cdots$$

卽： $$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{j}}\right]^j=e^j \quad \text{(第 36 式)}$$

"$m\to\infty$" 係指 m 無窮增加所得之極限。

第二十節　繼續轉化之實利率計算法

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=1+j+\frac{j^2}{2!}+\frac{j^3}{3!}+\cdots\cdots=e^j$$

則 $$i=j+\frac{j^2}{2!}+\frac{j^3}{3!}+\cdots\cdots\text{(註)}$$

亦卽 $$i=\lim_{m\to\infty} i^{(m)}=\lim_{m\to\infty}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1\right]=e^j-1 \qquad \text{(第 37 式)}$$

爲計算之便利起見,應用下列公式:

$$\log_{10}(1+i)=j\log_{10}e \qquad \text{(第 38 式)}$$

又查 $\log_{10}e=0.434294$, 故

$$\log_{10}(1+i)=0.434294\,j$$

例——設繼續轉化之名利率爲五釐,計算其實利率。

$$1+i=e^j$$

$$\log_{10}(1+i)=j\log_{10}e$$

$$\log_{10}e=0.434294 \quad \text{(見第二章第 27 節)}$$

$$\log_{10}(1+i)=.05\times0.434294=0.0217147$$

$$1+i=1.0513$$

$$i=.0513$$

第二十一節 繼續轉化之名利率計算法

已知繼續轉化之實利率,卽可求名利率。

由上式 $i=e^j-1$, 在 m 無限制增加時,名利率之極限,稱爲利力(Force of Interest),習常用希臘字 δ 代表。

故 $$i=e^\delta-1 \qquad \text{(第 39 式)}$$

∴ $$\delta=\log_e(1+i)=2.302585\log_{10}(1+i) \qquad \text{(第 40 式)}$$

例——設繼續轉化之實利率爲四釐,試求其名利率,算式如下:

$$\delta=2.302585\log_{10}(1+i)$$
$$=2.302585\log_{10}(1+.04)$$
$$=2.302585\times0.017033$$
$$=.0392199$$

註: 繼續轉化之利率以 i 爲符號

第二十二節 按繼續轉化計算本利合計法

以第 37 式 $1+i=e^{\delta}$ 代入一年複利一次之本利合計公式 $S=P(1+i)^n$ 即得,一年中複利無限次數之本利合計公式爲:

$$S=Pe^{n\delta}=Pe^{n\delta} \qquad \text{(第 41 式)}$$

例——設本金 \$1,000,時期三年,利率年利五釐,按繼續轉化法求本利合計若干,其算式如下:

$$S=1,000\,e^{3\times.05}$$

$$=1,000\,e^{.15}$$

$$\log_{10}S=\log_{10}1000+.15\log_{10}e$$

$$\log_{10}1,000=3$$

$$\log_{10}e=.434294$$

$$.15\log_{10}e=.0651441$$

$$\log S=3+.065144=3.065144$$

$S=\$1,161.83$ (即 3.065144 之眞數)

第二十三節 繼續轉化貼現之計算法

根據第 33 式,可得由實貼現率求名貼現率之公式如下:

$$d'=m[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}]$$

若 d 不變,而 m 無限制,則 d' 亦有一極限,其符號爲 δ',將 $(1-d)^{\frac{1}{m}}$ 以二項定理展開代入上式,得

$$\delta'=\lim_{m\to\infty}\left[d-\frac{\frac{1}{m}-1}{2!}d^2+\frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)}{3!}d^3-\frac{\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\left(\frac{1}{m}-3\right)}{4!}d^4+\cdots\cdots\right]$$

$$=d+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\frac{d^4}{4}+\cdots\cdots$$

$$=-\log_e(1-d)$$

故
$$\delta' = -\log_e(1-d)$$
$$=d+\frac{d^2}{2}+\frac{d^3}{3}+\cdots\cdots$$

又
$$d=1-e^{-\delta'}$$
$$=\delta'-\frac{\delta'^2}{2!}+\frac{\delta'^3}{3!}-\frac{\delta'^4}{4!}\cdots\cdots$$

又
$$v=1-d \qquad v=e^{-\delta}$$

按繼續轉化，僅可供作學理之研究，至於實用之處，則甚爲稀少。

習題五

1. 設名利率六釐，按繼續轉化計算其實利率。
2. 設繼續轉化之實利率爲六釐，試計算其名利率。
3. 設本金 $ 1,000，時期三年，利率年息五釐，按繼續轉化，計算其本利合計。
4. 設本金 $ 12,525，時期五年，利率年息六釐，試按(甲)半年復利一次，(乙)繼續轉化，計算其本利合計。
5. 設有某商擬向銀行借款 $ 5,000，時期九十天，按貼現率年息六釐，試計算該商於票據上應填之數若干？若貼現率爲年息八釐，則應填若干？
6. 設本金 $ 60,000，時期五年，利率爲年息八釐，按繼續轉化，計算其本利合計。

第二十四節 平均付款期日之計算法

就各個到期日期不同，數目不等之款項，求一平均到期日，作一次支付，使其結果與逐筆按期付款之情形相同，而不致發生利息之差異者，謂之**平均期日法** (Equated Time)，或曰**平均到期日法** (Average Due Time)。

設以 $S_1, S_2, S_3, \cdots\cdots S_p$ 代表各期應付之數，而以 $n_1, n_2, n_3, \cdots\cdots n_p$ 代表各期應付款之時期，再以 x 代表平均付款期日，i 代表利率，其公式如下：

因
$$\frac{1}{1+i}=v$$

則
$$v^x(S_1+S_2+\cdots+S_p)=v^{n_1}S_1+v^{n_2}S_2+\cdots+v^{n_p}S_p$$

$$v^{x}=\frac{v^{n_1}S_1+v^{n_2}S_2+\cdots+v^{n_p}S_p}{S_1+S_2+\cdots+S_p} \qquad \text{(第 45 式)}$$

然後卽可自 v^{x} 解得 x 之值，解 x 時，以用對數爲便利，如此得：

$$x=\frac{\log(v^{n_1}S_1+v^{n_2}S_2+\cdots+v^{n_p}S_p)-\log(S_1+S_2+\cdots+S_p)}{\log v}$$

$$=\frac{\log(S_1+S_2+\cdots+S_p)-\log(v^{n_1}S_1+v^{n_2}S_2+\cdots+v^{n_p}S_p)}{\log(1+i)}$$

(第 46 式)

例——甲欠款 \$500，時期一年，又欠 \$300，時期二年，又欠 \$400，時期三年，若能按期付淸，則可不計利息。今甲擬於一平均期日，將此三項欠款一次還淸，按利率六釐計算。求其平均期日爲何日，算式如下

以 $n_1=1$, $n_2=2$, $n_3=3$, $S_1=500$, $S_2=300$, $S_3=400$, $i=.06$, 代入第 46 式中得：

$$x=\frac{\log 1,200-\log(500\,v+300\,v^2+400\,v^3)}{\log 1.06}$$

$$=\frac{3.07981-3.031224}{0.025306}$$

$$=\frac{0.47957}{0.25306}$$

$$=1.895$$

平均日期爲 1.895 年

第二十五節　計算平均付款期日之近似値法

上法用對數計算，固稱便利，但計算短時期之平均期日者，尙有一近似値法可用。卽以各時期乘各應付數，作爲分子，而以各期應付數之總和作爲分母卽得。此法雖不若前項對數法之準確，但相差尙不甚遠，玆列式以證明之如下：

就第 45 式，以 $\frac{1}{1+i}$ 代 v，得

$$\frac{1}{(1+i)^x}(S_1+S_2+\cdots+S_p)=\frac{1}{(1+i)^{n_1}}S_1+\frac{1}{(1+i)^{n_2}}S_2+\cdots$$

$$+\frac{1}{(1+i)^{n_p}}S_p \qquad \text{(第 47 式)}$$

或： $$(1+i)^{-x}(S_1+S_2+\cdots+S_p)=(1+i)^{-n_1}S_1+(1+i)^{-n_2}S_2+\cdots$$

$$+(1+i)^{-n_p}S_p \qquad \text{(第 48 式)}$$

將 $(1+i)^{-x}$, $(1+i)^{-n_1}$, $(1+i)^{-n_2}$, $\cdots(1+i)^{-n_p}$, 各式按二項式定理演化之得：

$$(1+i)^{-x}=1-xi+\frac{-x(-x-1)}{1\cdot 2}i^2-\cdots$$

$$(1+i)^{-n_1}=1-n_1i+\frac{-n_1(-n_1-1)}{1\cdot 2}i^2-\cdots$$

....

....

$$(1+i)^{-n_p}=1-n_pi+\frac{-n_p(-n_p-1)}{1\cdot 2}i^2-\cdots$$

上列各式中，其 i 乘方之關係頗小，故將各 i 之乘方，一律取消，於是可將第 48 式演化之如下：

$$(1-xi)(S_1+S_2+\cdots+S_p)=S_1(1-n_1i)+S_2(1-n_2i)+\cdots$$

$$+S_p(1-n_pi) \qquad \text{(第 49 式)}$$

由第 49 式求 x 如下：

$$x=\frac{n_1S_1+n_2S_2+\cdots+n_pS_p}{S_1+S_2+\cdots+S_p} \qquad \text{(第 50 式)}$$

試將前例各項代入之，即得：

$$x=\frac{1\times 500+2\times 300+3\times 400}{500+300+400}$$

$$=\frac{2,300}{1,200}$$

$$=1.9167 \text{ (平均日期為 1.9167 年)}$$

第二十六節 平均付款價値之計算法

就各個到期日期不同數目不等之款項，彙總於指定時期付款，而計算其付款數，謂之**平均付款價值法**(Equation of value)。

例——依第 24 節所舉之例，如某甲擬於第二年底一次還清，按利率年息六釐計算，試求其應還之平均付款價值若干，算式如下：

（設 S=平均付款價值）

$$\frac{S}{(1.06)^2}=\frac{500}{1.06}+\frac{300}{(1.06)^2}+\frac{400}{(1.06)^3}$$

以 $(1.06)^2$ 乘各項

$$S=500\times1.06+300+\frac{400}{1.06}$$

$$=530+300+377.36$$

$$=1,207.36 \qquad \text{（第二年底平均付款價值）}$$

其公式如下：

$$Sv^n=S_1v^{n_1}+S_2v^{n_2}+\cdots S_pv^{n_p}$$

或

$$S=\frac{S_1v^{n_1}+S_2v^{n_2}+\cdots S_pv^{n_p}}{v^n} \qquad \text{（第 51 式）}$$

習 題 六

1. 有應付之款 \$1,000，時期五年，又 \$2,000，時期十年，均不計息，設是時市場利率爲六釐，試計算其平均付款之日期。

2. 設欠款 \$1,000，時期十年，又欠款 \$2,000，時期四年，均不計息。若是時市場利率爲五釐，試計算其現在一次償還之數，及三年後一次償還之數若干？

3. 設有二項債券，一係 \$1,250，一係 \$700，均係二年八個月到期，不計利息。另有第三項 \$900，按七釐計息，時期一年。若是時市場利率爲六釐，試計算其六個月後一次償還之數若干？

4. 設有票據二紙，一紙 \$125，時期四個月，一紙 \$280，時期九個月，均不計息，若市場實利率爲八釐，試計算第六個月底一次償還之數若干？

5. 設有票據三紙，一紙 \$1,240，時期六十日，一紙 \$1,574，時期九十日，一紙 \$750，時期一百二十日，均不計息。若市場利率爲七釐，試計算其一次償還之平均付款期日爲何時？

覆習題

1. 試計算本金 $1,256.36, 時期八十七日,利率年息七釐之尋常單利與正確單利。

2. 設貼現率爲年息六釐,時期一年,試求出與其相等之半年複利一次之名利率。

3. 試問何種利率,按三個月複利一次,適與年息六釐,每半年複利一次相等。

4. 設利率五釐,每半年複利一次,期五年,到期金額爲 $1,000, 試求現價。

5. 設於三百二十五年前,曾貸出本金 $250, 利率爲年息六釐,每半年複利一次,試計算今日之本利合計。

6. 設有債券 $14,275, 時期四年三個月五日,利率爲年息六釐,試按(甲)半年複利一次,(乙)三個月複利一次,計算其利息。

7. 設有債務 $6,250, 時期五年,無息,若市場利率爲五釐,試計算其現價。

8. 設有債務 $3,235, 時期五年半,無息,若市場利率爲五釐,試計算其現價。

9. 設有下列四項債務:

(甲) $500, 時期三個月, (丙) $1,500, 時期九個月,

(乙) $1,000, 時期半年, (丁) $2,000, 時期一年。

若市場利率爲六釐,試以近似值法與正確法,計算其平均付款之期日。

10. 某銀行收受三個月期之票據,貼現率六釐,試計算其所得之實利率,並計算半年複利一次之名利率。

11. 上題(10)之時期爲三個月,試改按六個月計算。

12. 設有二項債務:(甲) $1,250,時期十二年,不計利息。(乙) $12,500,時期六年,按年息四釐計算,現擬於第八年底一次償還,若市場利率六釐,試計算其應行償還之數。

13. 設本金 $1,000, 按年息六釐,每半年複利一次,試計算其利息等於本金,即本利合計爲 $2,000 之時期。若另有 $1,000, 係按年息三釐,每半年複利一次計算,則前款本利合計爲 $2,000 之時,後款之本利合計應得若干?

14. 試按下列各轉化期計算 $1,000, 時期一年,名利率五釐之本利合計:

(甲)半年複利一次, (丁)每日複利一次,

(乙)三個月複利一次, (戊)繼續轉化。

(丙)每月複利一次,

15. 設有資本家撥出 $1,000,000 之五釐債券,每年付息二次,興辦學校。擬待該款達到 $1,500,000 時,方始開創,若所得利息,再按五釐存放(半年複利一次),試計算該校開創之時期。

16. 試按下列轉化期計算 $1,000, 名利率七釐,本利合計爲 $2,000 之時期:

(甲)每年複利一次, (丁)每月複利一次,

(乙)半年複利一次, (戊)每日複利一次,

(丙)三個月複利一次,

17. 二十三年八月二十日張某給李某 $1,000, 三個月期本票一紙,由出票日起,按年息八釐計算,試求:

(甲)到期之日期，　　　　(丙)按九十日計算之到期日。

(乙)到期應付之本利合計，

18. 設本金 \$ 608.75，時期六年八個月，若按年息八釐四毫，每月複利一次，試計算其本利合計若干？

19. 某銀行之利率規定年息八釐，每半年複利一次，若希望於七年中後得 \$ 4,500，試計算其現在應存儲之數。

20. 設本金 \$ 1,000，時期五年，試按下列各項利率，計算其利息，並比較之，

(甲)實利率四釐，　　　　(丙)名利率三釐六毫，每月複利一次.

(乙)名利率三釐八毫，每半年複利一次，

第四章　普通年金

第一節　年金之意義

年金(Annuities)原指一年支付一次之款項而言，其每次所付之款，普通均屬相同，但亦間有不同者。按之實際，則凡屬分期付款，無論其爲一年一次，半年一次，三個月一次，一個月一次，或兩年一次等等，均得稱爲年金。若每次付款之時期不滿一年(即一年付款數次)，則以一年所付之總數爲年金，如地產之租金，債券之利息，養老金，獎勵金等，均其例也。

第二節　確定年金之意義

年金之起訖時期，有確定者，有不確定者，有確定起訖時期之年金，稱曰**確定年金**(Annuity Certain)，無確定起訖時期之年金，稱曰**生存年金**或**或有年金**(Life Annuity or Contingent Annuity)。生存年金之計算，適用於人壽保險，在本書第十二章中，當詳爲論述。本章所討論者，祇爲確定年金，即有規定之起訖時期，繼續按期付款者是也。

確定年金又有期末付款與期首付款之分。期末付款者，稱曰**普通年金**(Ordinary Annuity)。期首付款者，稱曰**期首年金**(Annuity Due)。此外復有**延期年金**(Deferred Annuity)，**永久年金**(Perpetuities)及**繼續年金**(Continuous Annuity)等類。本章先討論普通年金，下章討論期首年金，再下一章討論其他各種年金。

計算年金之方法，有**年金終價**(Amount of an Annuity Certain)

與年金現價(The Present Value of an Annuity Certain)二類。年金終價卽世俗所謂零存整取之數,因其每期應繳之數,乃零存之數,而到期後之本利合計,則爲整取之數也。年金現價卽世俗所謂整存零取之數,因其整存之數,卽爲以後各期所付款項之現價總數也。無論年金之終價或現價,其零存之次數或零取之次數,有一年一次,有一年數次及數年一次三種。其中複利之次數,亦有一年一次與一年數次兩種。玆分類列述於下:

甲 每年付款一次之年金:

子、每年複利一次者,

丑、每年複利數次者。

乙 每年付款數次之年金:

子、每年複利一次者,

丑、每年複利數次者。

(1)付款次數與複利次數不同者,

(2)付款次數與複利次數相同者。

丙 數年付款一次之年金:

子、每年複利一次者,

丑、每年複利數次者。

第三節 計算普通年金終價之公式

玆將求年金終價之各種方法及公式,按照上列次序分述於後:

甲 每年付款一次之年金

子、每年複利一次者 由第一期起,每期之末,付相等之款,直至期滿爲止,所積之本利合計,謂之確定年金之本利合計,卽上節所述之年金終價也。普通計算年金之符號,以 $S_{\overline{n}|}$ 代表每年付款一次,每次付款 \$1.00 經過 n 年之終價,玆舉例以說明之。

例——設每年付年金 \$1.00,時期四年,實利率四釐。

則

第一期末所付之＄1，經過三年，按利率四釐計算之本利和

$$=1.124864=(1.04)^3=(1+i)^3$$

第二期末所付之＄1，經過二年，按利率四釐計算之本利和

$$=1.081600=(1.04)^2=(1+i)^2$$

第三期末所付之＄1，經過一年，按利率四釐計算之本利和

$$=1.040000=(1.04)\ =(1+i)$$

第四期末所付之＄1，無息

$$=1.000000=1\qquad =1$$

合計 $\$4.246464=1+1.04+(1.04)^2+(1.04)^3$

$$=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3$$

由此可知

$$s_{\overline{4}|}\ \text{按利率四釐}=1+1.04+(1.04)^2+(1.04)^3$$
$$=4.246464$$

若利率爲 i，則

$$s_{\overline{4}|}=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3$$

如時期爲五期，則如下式：

$$s_{\overline{5}|}=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4$$

故計算年金終價之普通公式如下：

$$s_{\overline{n}|}=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+\cdots\cdots+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-1}\qquad (A)$$

玆將 (A) 式兩邊均乘以 $(1+i)$，則得下式：

$$(1+i)s_{\overline{n}|}=(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+(1+i)^4+\cdots\cdots+(1+i)^{n-1}+(1+i)^n\qquad (B)$$

由 (B) 式減 (A) 式，則爲：

$$i\times s_{\overline{n}|}=(1+i)^n-1$$ 再除以 i，得

$$s_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{i}\qquad \text{(第1式)}$$

上式係假定每年付 \$1 者，若每年所付之數，不止或不滿 \$1，則應以其所付之數乘上式。茲以 R 代表每年所付之款，又稱**年賦金**(Annual Rent)。以 K 代表總價，列式如下：

$$K=Rs_{\overline{n}|}=R\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad \text{(第 2 式)}$$

例——設王某每年底存儲 \$200，以作其子之大學學費，利率年息四釐，求十年後之本利合計若干？

$$200\times s_{\overline{10}|}=200\frac{(1.04)^{10}-1}{.04}\text{[按}(1.04)^{10}\text{ 查複利終價表得 }1.4802442849]$$

$$=200\times\frac{1.4802442849-1}{.04}$$

$$=200\times\frac{.482442849}{.04}$$

$$=200\times 12.0061$$

$$=\$2,401.22$$

由年金終價表（表 V）可查出利率四釐之 $s_{\overline{10}|}$ 為 12.0061。

丑、每年複利數次者　上列公式，適用於每年付款一次每年複利一次之情形，故係最簡單者。設每年複利不止一次，則此項公式，即須改變。

前章對於名利率與實利率之計算，業已言之詳矣，其換算公式為：

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$$

即

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

茲將 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1=i$ 及 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m=1+i$ 代入第 1 式，得

$$s_{\overline{n}|}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1} \qquad \text{(第 3 式)}$$

代入第 2 式，得

$$K=Rs_{\overline{n}|}=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\qquad(第4式)$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者　設每年付款 p 次，每次付款 $\frac{1}{p}$ 元，但並非以複利計算，則第一次付款之終價爲 $\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$，第二期付款之終價則爲 $\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}$，以後各期，依此類推，直至末期所付，即爲現金，並無利息，即係 $\frac{1}{p}$。各期之終價相加，爲 $s_{\overline{n}|}^{(p)}$，此即在每年付款 p 次之情形下年金一元之終價也。

$$s_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{p}(1+i)^{\frac{2}{p}}+\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{2}{p}}+\frac{1}{p}(1+i)^{n-\frac{1}{p}}$$

np 項之幾何級數(關於幾何級數之意義及算法，已詳本書第二章)。以 $\frac{1}{p}$ 爲第一項，將上式歸納之，得下列公式：

$$s_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}\qquad(第5式)$$

若每年所付之數，不止或不滿一元，則以 R 代表每年所付之數，而以 K 爲終價，其式如下：

$$K=Rs_{\overline{n}|}^{(p)}=R\frac{(1+i)^{n}-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}\qquad(第6式)$$

今設　$j_{(p)}=p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]$

則　$s_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{i}{j_{(p)}}\times\frac{(1+i)^{n}-1}{i}=\frac{i}{j_{(p)}}\times s_{\overline{n}|}$

第5式中之 n，倘等於 1，則

$$s_{\overline{1}|}^{(p)}=\frac{i}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$$

$$=\frac{i}{j_{(p)}}$$

故
$$s_{\overline{n}|}^{(p)}=s_{\overline{1}|}^{p}\times s_{\overline{n}|} \qquad \text{(第 7 式)}$$

按 $s_{\overline{n}|}$ 之數，可查用表 V（年金終價表），$s_{\overline{1}|}^{(p)}$ 之數可查用表 XI，$j_{(p)}$ 之數亦可查用表 X，計算時頗爲便利。設每年所付之數，不止或不滿一元，則以 R 代表每年所付之數，而以 K 代表終價，其式如下：

$$K=Rs_{\overline{n}|}^{(p)}=R\frac{i}{j_{(p)}}\times s_{\overline{n}|}=Rs_{\overline{1}|}^{(p)}\times s_{\overline{n}|} \qquad \text{(第 8 式)}$$

丑、每年復利數次者

(1)付款次數與復利次數不同者　若每年付款數次復利數次，而付款與復利之次數不相同者，以 m 代表復利次數，j 爲名利率，則將 $(1+i)=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$ 代入第 5 式，得：

$$s_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]} \qquad \text{(第 9 式)}$$

若每年所付之款，不止或不滿一元，則其計算應如下式：

$$K=Rs_{\overline{n}|}^{(p)}=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right]} \qquad \text{(第 10 式)}$$

(2)付款次數與復利次數相同者　前項公式適用於每年付款次數與復利次數之不相同者，若二者之次數相同，卽 $m=p$，將前列第 9 式中之 m，以 p 代之，則得下式：

$$s_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{p}\right)^{\frac{p}{p}}-1\right]} \qquad \text{(第 11 式)}$$

又
$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1}{p\left[\left(1+\frac{j}{p}\right)^{\frac{p}{p}}-1\right]}\qquad\text{（第 12 式）}$$

按 $\frac{p}{p}=1$，故可將上式中之分母，化爲 $p\left(\frac{j}{p}\right)$，而得下式：

$$K=\frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1}{\frac{j}{p}}\qquad\text{（第 13 式）}$$

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者　前列各式，乃應用於每年付款數次或一次之年金終價，至數年付款一次之年金終價公式，亦可依照演化。設以 k 代表付款之時期，則第一次所付之款，經過 $n-k$ 年，第二期所付之款經過 $n-2k$ 年，最後一期付款則爲 1。故 A 式變爲

$$s_{\overline{\frac{n}{k}}|}=1+(1+i)^{k}+\cdots\cdots(1+i)^{n-2k}+(1+i)^{n-k}$$

註：$s_{\overline{\frac{n}{k}}|}$ 代表數年付款一次之年金一元之終價。

將上式依幾何級數之公式歸納之，得

$$s_{\overline{\frac{n}{k}}|}=\frac{(1+i)^{k}(1+i)^{n-k}-1}{(1+i)^{k}-1}$$
$$=\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{k}-1}\qquad\text{（第 14 式）}$$

又
$$K=R_{k}\times\frac{(1+i)^{n}-1}{(1+i)^{k}-1}\qquad\text{（第 15 式）}$$

上式中之 R_k，代表每次付款之數。

丑、每年複利數次者　若數年付款一次，每年複利數次，則上式中之 $(1+i)$ 應改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$，其式當爲：

$$s_{\overline{\frac{n}{k}}|m}=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}\qquad\text{（第 16 式）}$$

又 $$K=R_k\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}\qquad(第17式)$$

第四節　計算普通年金終價之實例

玆按上列分類,將求年金終價之計算方法,分別舉例如下:

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每年底投資 \$650,利率四釐,每年複利一次,計算其第二十二年底之年金終價。

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\qquad R=\$650$$

$$=650\times\frac{(1.04)^{22}-1}{.04}\qquad i=.04,\ n=22$$

$$=650\times34.2479698$$

$$=\$22,261.18$$

由表 V 可查出 $\frac{(1.04)^{22}-1}{.04}$ 爲 34.2479698。

丑、每年複利數次者

例——每年底投資 \$150,利率五釐,每半年複利一次,計算其第十年底之年金終價。

$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\qquad R=\$150,\ j=.05,\ n=10,\ m=2$$

$$=150\times\frac{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times10}-1}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}-1}$$

$$=150\times\frac{(1.025)^{20}-1}{(1.025)^{2}-1}$$

$$=150\times\frac{1.6386164-1}{1.050625-1}=\$1,892.20$$

若將第 4 式之分子分母,各乘以 $\left(\frac{j}{m}\right)$,其值不變,可得

$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(\frac{j}{m}\right)}\times\frac{\left(\frac{j}{m}\right)}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$

如此,可由用表 V 及用表 VII 分別查出 $s_{\overline{n}|}$ 及 $\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$ 之數額,以省計算時間。

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——每半年底投資 \$500,利率六釐,每年複利一次,計算其第十年底之年金終價。

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}\qquad R=\$1,000\quad i=.06\qquad p=2\quad n=10$$

為圖計算之便利起見,$p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}$ 即係 $j_{(p)}$,可查用表 X。

$$K=1,000\times\frac{(1.06)^{10}-1}{2\{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1\}}=1,000\times\frac{(1.06^{10}-1}{j_{(p)i}}$$

$$=1,000\times\frac{(1.06)^{10}-1}{j_{(2)6\%}}=1,000\times\frac{1.7908497-1}{.059126}$$

$$=1,000\times\frac{.7908477}{.059126}=\$13,375.62$$

若上式之分子分母,各乘以 i,則如下式:

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}\times\frac{i}{i}=R\frac{(1+i)^n-1}{i}\times\frac{i}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

如此可由用表 V 查出 $s_{\overline{n}|}$ 之數額,再由用表 XI 查出 $\frac{i}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$ 即 $\frac{i}{j_{(p)}}$ 之數額,相除即得。將前例照此法計算如下:

$$K=1,000\times\frac{(1.06)^{10}-1}{.06}\times\frac{.06}{j_{(2)@6\%}}$$

$$=1,000\times13.18079\times1.0147815\text{ (表V及表XI)}$$

$$=\$13,375.62$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

例——每月底存款 \$16.54，利率六釐，每半年複利一次，計算其第六年底之年金終價。

$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}\qquad\begin{aligned}R&=\$198.48\\j&=.06\\n&=6\\m&=2\\p&=12\end{aligned}$$

$$K=198.48\times\frac{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2\times6}-1}{12\left\{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{\frac{1}{6}}-1\right\}}$$

$$=\frac{198.48}{12}\times\frac{(1.03)^{12}-1}{(1.03)^{\frac{1}{6}}-1}=16.54\times\frac{.4257609}{.0049386}$$

$$=\$1,425.93$$

(2)付款次數與複利次數相同者

例——每半年底投資 \$300，利率六釐，每半年複利一次，計算其第十年底之年金終價。

$$K=\frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1}{\left(\frac{j}{p}\right)}\qquad\begin{aligned}R&=\$600\\j&=.06\\n&=10\\m&=2\\p&=2\end{aligned}$$

$$K=\frac{600}{2}\times\frac{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2\times10}-1}{\frac{.06}{2}}$$

$$=300\times\frac{(1.03)^{20}-1}{.03}=300\times26.870374$$

$$=\$8,061.11$$

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——若每二年底付款 \$1,000，利率六釐，每年複利一次，計算其第八年底之年金終價。

$$K=R_k\times\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^k-1} \qquad R_k=\$1,000$$

$$=1,000\times\frac{(1+.06)^8-1}{(1+.06)^2-1} \qquad i=.06$$

$$=1,000\times\frac{1.5938481-1}{1.1236-1} \qquad n=8$$

$$\qquad k=2$$

$$=1,000\times\frac{.5938481}{.1236}=1,000\times .4804596$$

$$=\$4,804.60$$

丑、每年複利數次者

例——若每三年底存款 \$400，利率五釐，每半年複利一次，計算其第九年底之年金終價。

$$K=R_k\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1} \qquad R_k=\$400$$

$$\qquad m=2 \qquad k=3 \qquad n=9 \qquad j=.05$$

$$=400\times\frac{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times 9}-1}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times 3}-1}$$

$$=400\times\frac{(1.025)^{18}-1}{(1.025)^6-1}=400\times\frac{1.5596587-1}{1.1596934-1}$$

$$=400\times\frac{.5596587}{.1596934}=\$1,401.83$$

此式亦可將分子分母各乘以$\frac{j}{m}$，即可用表 V 及表 VII，分別查出 $s_{\overline{n}|}$ 及 $\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$ 之數額，相乘即得答數。

習 題 一

1. 設每年底存款 \$300，利率五釐半，每年復利一次，試計算其十五年後之年金終價。
2. 若每年底所存之款為 \$100，利率五釐半，每年復利一次，時期二十年，則其年金終

價應爲若干?

3. 設每年底存款 $ 400, 利率四釐, 每半年付息一次, 試計算其十五年後之年金終價。

4. 設某甲每年底購乙公司之債券三紙, 每紙 $ 100, 每年發息六釐, 某甲將每年所得之利息, 復按年息六釐存儲, 試計算其第八年底之年金終價(假定該債券仍值票面 $ 100)。

5. 設某甲於每三個月底, 存 $ 100 於儲蓄銀行, 利率四釐, 每半年復利一次, 試計算其第六年底儲積之終價。

6. 設每年存儲 $ 100, 利率四釐, 時期十年, 試將下表所列各項算出填入之:

復利次數 / 付款次數	每年一次	每年二次	每年四次
每年一次			
每年二次			
每年四次			

7. 設某甲於每半年底, 購入四釐公債 $ 350, 每半年復利一次, 若所得利息, 仍按四釐存儲, 則四年半後之本利合計, 應爲若干?

8. 設某甲於十歲時以其所得遺產 $ 40,000, 購七釐公債, 每半年付息一次, 此項公債由遺產管理人保管, 每期所得利息, 仍按七釐存儲, 每年復利一次, 某君二十一歲時(計十一年), 遺產管理人擬將其交還, 試計算其應交還之數。

第五節 由終價求年金額之公式

由年金終價求每年之年金額, 其應用頗廣。習常所見者如償債基金之儲積, 欲決定每期存儲數, 即須應用此類算式。關於此類公式及實例, 當於第七章償債基金中詳細討論, 茲先述其最簡單者如下:

若知某一年金於滿期時之終價爲一元, 欲求此年金每年所付之金額 R, 則可以 $K=1$ 代入第 2 式而變化之, 得式如下:

$$R=\frac{i}{(1+i)^n-1}=\frac{1}{s_{\overline{n|}}} \qquad (\text{第 18 式})$$

上式稱曰終價爲 1 之年金公式, 由此公式可求得任何終價之年金數額, 即以終價乘此公式是也。如年金之終價爲 K, 則每年所付之年金額, 應如下式:

$$R=K\times\frac{1}{s_{\overline{n|}}}=K\times\frac{i}{(1+i)^n-1}=\frac{K}{s_{\overline{n|}}} \qquad (\text{第 19 式})$$

例——設某甲擬存儲年金五年，到期得款 \$1.00，儲息年率九釐，計算其每年應存之數如下：

$$R=K\times\frac{i}{(1+i)^n-1}\qquad K=\$1$$

$$=K\times\frac{1}{s_{\overline{n}|}}\qquad i=.09$$

$$n=5$$

$$R=1\times\frac{.09}{(1+.09)^5-1}$$

$$=1\times\frac{.09}{.53862395}$$

$$=0.167092457$$

（按此項答數，可由用表 VIII 中查出）

若儲積之終價爲 \$1,000，則其每年之年金額如下：

$$R=1,000\times\frac{.09}{(1+.09)^5-1}$$

$$=\$167.09$$

第六節　由年金終價求時期之公式

由年金終價求時期之方法，應用較少，而其計算則頗困難。若其年金之利率爲普通利率，時期爲以年爲單位之整數，則不難在用表內檢查而得，否則祇能用推值法，比例推算之。玆舉例以說明之如下：

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者　其年金終價之公式如下：

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

以 R 除上式之兩方，並以 i 乘之，則得下式：

$$\frac{Ki}{R}=(1+i)^n-1$$

將 1 移項，又得下式：

$$1+\frac{Ki}{R}=(1+i)^n$$

雙方用對數計算之，得式如下：

$$\log\left(1+\frac{Ki}{R}\right)=n\log(1+i)$$

除以 $\log(1+i)$，得式如下：

$$n=\frac{\log\left(1+\frac{Ki}{R}\right)}{\log(1+i)} \qquad \text{（第 20 式）}$$

丑、每年複利數次者　若年金每年複利數次，卽將上式中之 i 改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$，得式如下：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m} \qquad \text{（第 21 式）}$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者　年金每年付款數次，複利一次，求其終價之公式如下：

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

除以 R：

$$\frac{K}{R}=\frac{(1+i)^n-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

乘以 $p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}$：

$$\frac{K}{R}\times p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}=(1+i)^n-1$$

將 1 移項：

$$1+\frac{K}{R}\times p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}=(1+i)^n$$

雙方用對數計算：

$$\log\left[1+\frac{K}{R}\times p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}\right]=n\log(1+i)$$

除以 $\log(1+i)$：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R}\times p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}\right]}{\log(1+i)} \qquad (\text{第 22 式})$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者　若每年複利數次，卽將 $1+i$ 改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$，其式如下：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R}\times p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m} \qquad (\text{第 23 式})$$

(2)付款次數與複利次數相同者　上式中之 $m=p$，得式如下：

$$n=\frac{\log\left\{1+\frac{\frac{K}{R}}{p}\times\frac{j}{p}\right\}}{\log\left(1+\frac{j}{p}\right)^p} \qquad (\text{第 24 式})$$

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者　根據第 15 式，並用同法，得式如下：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R_k}\{(1+i)^k-1\}\right]}{\log(1+i)} \qquad (\text{第 25 式})$$

丑、每年複利數次者　在此項情形之下，卽照第 25 式將 $(1+i)$ 改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$，其式如下：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R_k}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m} \qquad (\text{第 26 式})$$

第七節　由年金終價求時期之實例

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每年存款 \$ 500，利率六釐，每年複利一次，年金終價 \$ 4,500，求其儲存年金之時期。

(1)用下列公式求之：

$$n=\frac{\log\left(1+\frac{Ki}{R}\right)}{\log(1+i)}\qquad K=\$4,500$$

$$=\frac{\log\left(1+\frac{4,500\times .06}{500}\right)}{\log 1.06}\qquad R=500$$

$$=\frac{\log 1.54}{\log 1.06}=\frac{.187521}{.025306}=7.41\text{ 年}\qquad i=.06$$

(2)用表及推值法求之：

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\qquad K=\$4,500$$

$$\$4,500=500\times\frac{(1.06)^n-1}{.06}\qquad R=500,\ i=.06$$

雙方以 \$ 500 除之，即為 \$ 1.00 之年金終價：

$$9.00=\frac{(1.06)^n-1}{.06}$$

由用表 V 查出：

\$ 1 按利率六釐期八年之年金終價為	\$ 9.89746
\$ 1 按利率六釐期七年之年金終價為	\$ 8.39383
時期增加一年，終價增加	\$ 1.50363

本例 \$ 1.00 之終價為 \$ 9.00，較時期七年之終價 \$ 8.39383，多 \$ 0.60617。即較七年之時期尚須加 $\frac{.60617}{1.50363}$ 年，或 .403 年。7 年加 .403 年，計 7.403 年。

丑．每年複利數次者

例——若每年底存款 \$ 1,000，利率六釐，每半年複利一次，求儲積至 \$ 15,000 之時期。

(1)用下列公式求之：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}\qquad K=\$15,000$$

$$R=1,000$$

$$m=2$$

$$j=.06$$

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{15,000}{1,000}\left\{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^2-1\right\}\right]}{2\log\left(1+\frac{.06}{2}\right)}$$

$$=\frac{\log[1+15\times.0609]}{2\log 1.03}=\frac{\log 1.9135}{2\log 1.03}$$

$$=\frac{.2818285}{.0256740}=10.977\text{ 年}$$

(2)用表及推值法求之：

$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1}$$

$$15,000=1,000\times\frac{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2n}-1}{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^2-1}$$

除以 \$1,000,

$$15.00=\frac{(1.03)^{2n}-1}{(1.03)^2-1}$$

$$=\frac{(1.03)^{2n}-1}{1.0609-1}$$

$$=\frac{(1.03)^{2n}-1}{.0609}$$

乘以 .0609，並將 1 移項：

$$1.9135=(1.03)^{2n}$$

由用表 IV 查出

\$1 按利率三釐時期二十二期之終價爲	\$1.9161
\$1 按利率三釐時期二十一期之終價爲	\$1.8602
時期增加一期，終價增加	\$ .0559

本例 \$1 之終價爲 \$1.9135，較時期二十一期之終價 \$1.8602，多 .0533。卽照二十一期之時期，尙須加 $\frac{.0533}{.0559}$ 期，或 .953 期。故 $(1.03)^{2n}=1.9135$

$$2n=21.953$$

$$n=10.976\text{ 年}$$

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——每半年底存款 \$1,000，利率六釐，每年複利一次，求儲積至 \$13,375 之時期。

(1)用下列公式求之：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R}\times p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}\right]}{\log(1+i)}$$

$p=2$
$i=.06$
$K=\$13,375$
$R=\$2,000$
$j_{(2)}.06=.059126$

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{13,375}{2,000}\times 2\{(1+.06)^{\frac{1}{2}}-1\}\right]}{\log(1+.06)}$$

$$=\frac{\log[1+6.6875\times .059126082]}{\log 1.06}$$

$$=\frac{\log 1.3954}{\log 1.06}=\frac{.1446984}{.0253060}=5.71\text{ 年}$$

(2)用表求之：

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

$$13,375=2,000\times\frac{(1+.06)^n-1}{2\{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1\}}$$

$$\frac{13,375}{2,000}=\frac{(1.06)^n-1}{.059126}$$

$$6.6875\times .059126=(1.06)^n-1$$

$$1.395404=(1.06)^n$$

$(1.06)^n$ 在六期中 $=\$1.4185$

$(1.06)^n$ 在五期中 $=\$1.3382$

時期增加一期，終價增加 $\$0.0803$

本例 \$1 之終價爲 \$1.3954，較時期五期之終價 \$1.3382，多 \$.0572。卽較五年尙須加 $\frac{.0572}{.0803}$ 年，或 .71 年，故 $(1.06)^n$ 儲積至 \$1.3954 之時期爲 5.71 年，卽 $n=5.71$ 年。

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

例——每月底存款 \$15，利率六釐，每半年複利一次，計算其儲積至 \$1,500 之時期。

1. 由下列公式求之：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R}\times p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}\qquad \begin{aligned}K&=\$1,500\\ R&=\$180\\ j&=.06\\ m&=2\\ p&=12\end{aligned}$$

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{1,500}{180}\times 12\left\{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{\frac{2}{12}}-1\right\}\right]}{2\log\left(1+\frac{.06}{2}\right)}$$

$$=\frac{\log\left[1+\frac{1,500}{180}\times 12\{.004938622\}\right]}{2\log 1.03}$$

$$=\frac{\log 1.4938622}{2\log 1.03}=\frac{.1742109}{.0256740}=6.786 \text{ 年}$$

2. 由表求之：

$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}$$

$$1,500=180\times\frac{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2n}-1}{12\left\{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{\frac{2}{12}}-1\right\}}$$

$$\frac{1{,}500}{180}=\frac{(1.03)^{2n}-1}{12\{(1.03)^{\frac{1}{6}}-1\}}$$

$$8.3333=\frac{(1.03)^{2n}-1}{12\times .0049386}$$

$$8.3333\times 12\times .0049386=(1.03)^{2n}-1$$

$$.4938580=(1.03)^{2n}-1$$

$$1.4938580=(1.03)^{2n}$$

$(1.03)^{2n}$ 在十四期中 $=\$1.5125897$

$(1.03)^{2n}$ 在十三期中 $=\$1.4685337$

時期增加一期，終價增加 $\$0.0440560$

本例 $1.00 之終價爲 $1.493858，較時期十三期之終價 $1.4685337，多 $0.0253。亦卽較十三期尚須加 $\frac{.0253}{.0440}$ 期，或 .575 期，故

$$(1.03)^{2n}=1.493858$$

$$2n=13.575$$

$$n=6.787\ 年$$

(2) 付款次數與複利次數相同者

例——此項計算，較前便利，可用下式：

$$n=\frac{\log\left\{1+\frac{\frac{K}{R}}{p}\times\frac{j}{p}\right\}}{\log\left(1+\frac{j}{p}\right)^{p}}$$

或查用表，與前例同。

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——設每二年底存款 $1,000，利率六釐，每年複利一次，計算其儲積至 $4,804.60 之時期。

1. 由下列公式求之：

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R_k}\{(1+i)^k-1\}\right]}{\log(1+i)}\qquad K=\$4,804.60$$

$$i=.06$$

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{4,804.60}{1,000}\{(1.06)^2-1\}\right]}{\log 1.06}\qquad R_k=\$1,000$$

$$k=2$$

$$=\frac{\log(1+4.8046\times .1236)}{\log 1.06}$$

$$=\frac{\log 1.59384856}{\log 1.06}=\frac{.202719}{.025306}=8\text{ 年}$$

2. 由用表求之:

$$K=R_k\times\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^k-1}$$

$$4,804.60=1,000\times\frac{(1.06)^n-1}{(1.06)^2-1}$$

$$4.8046=\frac{(1.06)^n-1}{.1236}$$

$$4.8046\times .1236=(1.06)^n-1$$

$$.593848=(1.06)^n-1$$

$$1.593848=(1.06)^n$$

由用表 III 查出其時期爲八年

丑、每年複利數次者

例——每三年底存款 \$400,利率五釐,每半年複利一次,計算其儲積至 \$1,401.83 之時期。

1. 由下列公式求之:

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{K}{R_k}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}\qquad K=\$1,401.83$$

$$m=2$$

$$R_k=\$400$$

$$n=\frac{\log\left[1+\frac{1,401.83}{400}\left\{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times 3}-1\right\}\right]}{2\log\left(1+\frac{.05}{2}\right)}\qquad k=3$$

$$j=.05$$

$$=\frac{\log[1+3.504575\times.1596934182]}{2\log(1.025)}$$

$$=\frac{\log 1.55965756}{2\log(1.025)}=\frac{.193029}{.021448}=9\text{ 年}$$

2. 由用表求之：

$$K=R_k\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}$$

$$1{,}401.83=400\times\frac{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2n}-1}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times3}-1}$$

$$\frac{1{,}401.83}{400}=\frac{(1.025)^{2n}-1}{(1.025)^{6}-1}$$

$$3.50457=\frac{(1.025)^{2n}-1}{.1596934}$$

$$3.50457\times.1596934=(1.025)^{2n}-1$$

$$1.559656=(1.025)^{2n}$$

由用表 III 查出 1.025 十八期可儲積至 1.559656

故 $2n=18 \qquad n=9$

習 題 二

1. 設利率三釐，每年復利一次，每年底存儲 \$ 300，儲至 \$ 6,000，試問應經過若干年？
2. 設每月底存儲 \$ 25，利率四釐，每年復利一次，試問若干年後可儲積至 \$ 2,500？
3. 設某甲每月存儲 \$ 25，利率六釐，每年復利四次 試計算其儲至 \$ 1,000 之年數。
4. 設某甲每月存儲 \$ 10.17 利率週息一分，每年復利二次，試計算其儲至 \$ 1,000 之年數。

第八節　由年金終價求利率之公式

求年金終價之利率，較求年金額及其時期，尤爲繁難，若已知 n 與 K，則可由年金終價表中尋出近似之利率，再用推值法推算其正確利率，玆舉例以說明之。

例——設每年底存\$1.00，每年複利一次，經過七年，共得\$8.00，求利率若干。

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i} \qquad K=8$$

$$n=7$$

$$8=\frac{(1+i)^7-1}{i}$$

$$(1+i)^7-8i-1=0$$

由用表V查出 $i=.04$， $n=7$，則 $K=7.8982945$

$i=.045$， $n=7$，則 $K=8.0191518$

利率增加 .005，年金終價增加 0.1208573

由是可知其利率在四釐與四釐半之間，本例終價\$8.00較四釐之7.8982945，多 .1017055，即 .04 尚須加 $\frac{1017055}{1208573}\times.005$，或 .0042。故 $.040+.0042=.0442$，此乃近似之結果，末尾尚有數目，常用 h 以表示之，如欲求 h，可代入上式：

$$(1.0442+h)^7-8(.0442+h)-1=0$$

若將 $(1.0442+h)^7$ 依二項式展開之，則為：

$$(1.0442)^7+7(1.0442)^6h+\frac{7\times6}{2}(1.0442)^5h^2+\cdots\cdots+h^7$$

h 之數既小，則 h^2, h^3,⋯⋯h^7 可取消之，而成為：

$$(1.0442)^7+7(1.0442)^6h-8h-1.3536=0$$

或 $$1.353586+9.074029h-8h-1.3536=0$$

或 $$1.074029h=.000014$$

$$h=.00001$$

故 $$i=.0442+.00001=.04421$$

求得實利率後，尚須依付款與複利之情形，求出其年金上所規定之利率，茲再分類述之如下：

甲 每年付款一次之年金

子、每年複利一次者 在此種情形下，所求得之實利率，即為年

金上所規定之利率。

丑、每年複利數次者　在此種情形下，尚須將求得之實利率 i 化爲名利率 j。

因
$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$$

故
$$\frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1$$

或
$$j=m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\right]$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者　凡一年付款數次者，其每期利率常用 i_p 爲符號，以示區別。

設一年付款 p 次，全年之實利率爲 i，則每期卽 $\frac{1}{p}$ 年之實利率 i_p 卽如下式

$$i_p=(1+i)^{\frac{1}{p}}-1$$

求得每期之實利率 i_p 之後，卽可根據上式演化，以求出其年金上所規定之利率 i。

將上式移項，得　$(1+i)^{\frac{1}{p}}=1+i_p$

雙方自乘 p 方，　$1+i=(1+i_p)^p$

移項，得　$i=(1+i_p)^p-1$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

每年付款 p 次，其每期之實利率爲 i_p 其全年之實利率爲 $i=(1+i_p)^p-1$。每年複利 m 次，其每期之名利率爲 $\frac{j}{m}$，其全年之實利率爲 $i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$

於是
$$(1+i_p)^p-1=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1$$

$$(1+i_p)^p=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

雙方開 p 方， $$1+i_p=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

移項，得 $$i_p=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1$$

反之，若雙方開 m 方，則 $(1+i_p)^{\frac{p}{m}}=1+\frac{j}{m}$

移項，得 $$\frac{j}{m}=(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1$$

於是求得每期之實利率 i_p 之後，即可計算其年金上所規定之全年名利率 j，

$$j=m[(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1]$$

(2)複利次數與付款次數相同者

每年付款 p 次，複利 p 次，則每期之實利率 i_p 即爲每期之名利率 $\frac{j}{p}$ 故

$$i_p=\frac{j}{p}$$

雙方同乘 p 卽得 $$j=pi_p$$

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者 數年付款一次之年金，其每期利率常用 i_k 爲符號，以示區別。

設 k 年付款一次，每年之實利率爲 i，則全期卽 k 年之實利率 i_k，卽爲

$$i_k=(1+i)^k-1$$

於是求得每期之實利率 i_k 後，卽可根據上式演化，以求出其年金上所規定之每年實利率 i：

將上式移項，得 $$(1+i)^k=1+i_k$$

雙方開 k 方，$$1+i=(1+i_k)^{\frac{1}{k}}$$

移項，得 $$i=(1+i_k)^{\frac{1}{k}}-1$$

丑、每年複利數次者　若每年之名利率爲 j，每年複利 m 次，則每期卽 k 年之實利率 i_k 爲：

$$i_k=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1$$

於是已知每期之實利率 i_k 之後，卽可根據上式演化，求出其年金上所規定之每年名利率 j：

將上式移項 $$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}=1+i_k$$

雙方開 mk 方 $$1+\frac{j}{m}=(1+i_k)^{\frac{1}{mk}}$$

移項得 $$\frac{j}{m}=(1+i_k)^{\frac{1}{mk}}-1$$

$$j=m[(1+i_k)^{\frac{1}{mk}}-1]$$

如應用上述之 i_p 及 i_k，則年金公式成爲

$$K=\frac{R}{p}\times\frac{(1+i_p)^{np}-1}{i_p}$$

$$K=R_k\times\frac{(1+i_k)^{nk}-1}{i_k}$$

第九節　由年金終價求利率之實例

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每年底存款 \$100，每年複利一次，八年儲積至 \$900，求利率。

根據本章第 2 式：

$$900=100\times\frac{(1+i)^8-1}{i} \qquad K=\$900$$

$$R=\$100$$

$$9=\frac{(1+i)^8-1}{i} \qquad n=8$$

由用表V查出\$1利率$3\frac{1}{2}\%$八年後之年金終價為9.05168，利率3%八年後之年金終價為8.89233，其差額為.15935。又9.00與8.89233之差額為.10767。按推值法推算。3%加.5%之$\frac{10767}{15935}$等於3.3378%。

試驗　$K=100\times\frac{(1.033378)^8-1}{.033378}=\$899.96$（用對數計算）

丑、每年複利數次者

例——每年底存款\$150，每半年複利一次，十年後可儲積至\$1,892.20求利率。

$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\qquad \begin{aligned}K&=\$1,892.20\\R&=\$150\\n&=10\\m&=2\end{aligned}$$

$$1,892.20=150\times\frac{\left(1+\frac{j}{2}\right)^{20}-1}{\left(1+\frac{j}{2}\right)^{2}-1}$$

若不用上列公式，而用下列公式計算亦可：

$$K=R\times\frac{(1+i_p)^{np}-1}{i_p}$$

$$1,892.20=150\times\frac{(1+i_p)^{np}-1}{i_p}$$

$$12.61466=\frac{(1+i_p)^{np}-1}{i_p}$$

查用表V

\$1按利率五釐半期十年之終價	=\$12.87535
\$1按利率五釐期七年之終價	=\$12.57789
利率減少半釐，終價減	\$ 0.29746

本例\$1期十年之終價為	\$12.61466
\$1按五釐期十年之終價為	\$12.57789
差額	\$ 0.03677

故其利率必在五釐與五釐半之間,照五釐尚須加$\frac{.03677}{.29746}\times.5\%$或$.12359\times.5\%=.06179\%$ 卽

$$\begin{array}{r} 5.00\% \\ +\ .06179\% \\ \hline 5.06179\% \end{array}$$

再化為名利率:

$$\frac{j}{m}=(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1 \qquad p=1 \qquad m=2$$

$$=(1.05032)^{\frac{1}{2}}-1$$

用對數表查 $(1.05062)^{\frac{1}{2}}$ 如下:

$$\log 1.05062=.0214457$$

$$\tfrac{1}{2}\log 1.05062=.0107228$$

.0107228 之真數為 1.025

$$\frac{j}{m}=1.025-1=.025 \qquad \therefore\ j=2\times0.025=0.05$$

一年之利率為5%,每年複利二次。

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——每六月底付款\$500,每年複利一次。十年後儲積至\$13,376.62,求利率。

$$K=\frac{R}{p}\times\frac{(1+i_p)^{np}-1}{i_p} \qquad K=\$13,376.62$$

$$13,376.62=500\times\frac{(1+i_p)^{20}-1}{i_p} \qquad n=10,\ R=\$1,000$$

$$26.75324=\frac{(1+i_p)^{20}-1}{i_p} \qquad p=2$$

由用表V查出

\$1按利率三釐二十期之年金終價	=\$26.87037
\$1按利率二釐七毫半二十期之年金終價	=\$26.19739
利率減少二毫半終價減少	\$ 0.67298

本例之終價爲	\$26.7532
\$1按二釐七毫半時期二十期之終價爲	\$26.1974
差額	\$ 0.5558

用推值法推算如下：

$$\frac{5558}{6729}\times .25\%=.2065\%$$

∴ 六個月之實利率爲 2.75%+.2065%=2.9565%

今六個月之實利率爲 2.9565%，故一年之實利率爲：

$$i=\{(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1\}$$

$$i=\{(1.029565)^{\frac{2}{1}}-1\}$$

用對數表查 $(1.029565)^2$ 如下：

$$\log 1.029565=.0126538$$

$$2\log 1.029565=.0253076$$

.0253076 之眞數爲 1.0600 故

$$i=1.06-1=.06 \text{ 或 } 6\%$$

丑、每年複利數次者

(1) 付款次數與複利次數不同者

例——每月底存款\$16.54，每半年複利一次，六年儲積至\$1,425.93，求利率。

$$K=\frac{R}{p}\times\frac{(1+i_p)^{np}-1}{i_p}$$

$$1{,}425.93=16.54\times\frac{(1+i_p)^{np}-1}{i_p}$$

$$\frac{1{,}425.93}{16.54}=\frac{(1+i_p)^{72}-1}{i_p}$$

$$86.211=\frac{(1+i_p)^{72}-1}{i_p}$$

$K=\$1{,}425.93$
$p=12$
$R=198.48$
$n=6$

由用表 V 查出

\$1 按利率半釐七十二期之年金終價爲	\$86.4088
\$1 按利率二毫半七十二期之年金終價爲	\$78.7794
利率減少二毫半，年金終價減少	\$ 7.6294

本例之年金終價爲	\$86.211
\$1 按利率二毫半計算年金終價爲	\$78.779
差額	\$ 7.432

玆按推值法推算，照二毫半尚須加 $\frac{7.432}{7.6294}\times.25\%$，或 .2435，卽 .4935%。

此卽實利率每月等於 .004935。今題中係半年複利一次，卽 $m=2$，

故 $$\frac{j}{m}=(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1=(1.004935)^{\frac{12}{2}}-1$$
$$=(1.004935)^6-1$$

用對數表計算 $(1.004935)^6$ 如下：

$$\log 1.004935=.0021379$$
$$6\log 1.004935=.0128274$$

.01281274 之眞數爲 1.0299，或 1.03。

$$j=m\times.03=2\times.03=.03=6\%$$

(2) 付款數次與複利次數相同者 $(m=p)$

例——本例與甲、子、例之解法相同，僅須將時期改爲 np，利率改爲 $\frac{j}{p}$，年金額爲 $\frac{R}{p}$，求出之利率，爲每期之利率，乘以 m 或 p，卽爲一年之利率。

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每二年底存款 \$1,000，每年複利一次，經過八年，儲積至 \$4,380.46，求利率。

$$K=R_k\times\frac{(1+i_k)^{\frac{n}{k}}-1}{i_k}$$ $K=\$4,380.46$

$$4,380.46=1,000\times\frac{(1+i_k)^4-1}{i_k}$$ $n=8$

$$4.38016=\frac{(1+i_k)^4-1}{i_k}$$ $R_k=\$1,000$

$k=2$

查用表V

$1按利率六釐半期四年之年金終價為	$4.407174
$1按利率六釐期四年之年金終價為	$4.374616
利率增加半釐終價增加	$0.0325

本例$1.00之終價為	$4.38016
$1按利率六釐計算之終價為	$4.37461
差額	$ .00585

故本例之利率為6% 加 $\frac{.00585}{.0325}\times .5\%$，卽 $6\%+.09\%=6.09\%$，

而一年之利率為

$$i=(1+i_k)^{\frac{1}{k}}-1=(1.0609)^{\frac{1}{2}}-1$$

用對數表算出 $(1.0609)^{\frac{1}{2}}$ 為1.03，

故 $i=1.03-1=.03$ 或 3%

丑、每年複利數次者

例——設每二年底存款$1,000，每半年複利一次，經過十年，儲積至終價$5,895.12，求利率。

$$K=R_k\times\frac{(1+i_k)^{\frac{n}{k}}-1}{i_k}$$

$$5,895.12=1,000\times\frac{(1+i_k)^5-1}{i_k}$$

$$5.89512=\frac{(1+i_k)^5-1}{i_k}$$

$K=\$5,895.12$
$R=\$1,000$
$k=2$
$n=10$
$m=2$

查用表V

$1按利率八釐半期五年之年金終價爲	$5.9253
$1按利率八釐期五年之年金終價爲	$5.8666
利率增加半釐，年金終價增加	$ .0587
本例$1終價爲	$5.8951
$1按利率八釐之終價爲	$5.8666
差額	$0.0285

即照利率8%尚須加$\frac{.0285}{.0587}\times .05$，或 .243%，故二年之利率爲8.243%。

求六個月之利率：

$$\frac{j}{m}=(1+i_k)^{\frac{1}{mk}}-1$$

$$\frac{j}{m}=(1.08243)^{\frac{1}{4}}-1$$

用對數表算出 $(1.08243)^{\frac{1}{4}}$ 爲1.02

$$\therefore \quad \frac{j}{m}=1.02-1=.02 \text{ 或 } 2\%$$

$$j=2\times .02=.04=4\%$$

習題三

1. 某甲每年底投資$150，每年復利一次，存至八年後，共得$1,357.75，試於年金終價表內尋出其相近之利率。
2. 設每年底投資$1,500，每年復利一次，二年後得$3,082.50，試求其利率。
3. 設每年底存儲$1,000，每年復利一次，三年後得$3,199.20 試求其利率。
4. 設每年存儲350，每年復利二次，十年後可積至$4,912.50，試求其利率。
5. 設每年存儲$1.00，每年復利一次，五年後可儲積至$5.50，試求其利率。
6. 設每半年存儲$300，每年復利二次，十年底可儲積至$9,411.43試求其利率。

第十節 計算普通年金現價之公式

年金現價卽世俗所謂整存零取法中整存之本金。質言之，卽確定以後各期所取款項之現價總額。年金現價之計算，因付款期間之長短，與

複利次數之多寡，而有多種不同之公式，此與年金終價之情形，完全相仿。玆將各種公式，分類列之於後：

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

以 $a_{\overline{n}|}$ 代表每年每元年金之現價，舉例如下：

例——設實利率為四釐，求每年底付 \$1，時期四年之年金現價，即 $R=1,\ n=4,\ i=.04$，玆先個別計算每期所付年金之現價如下：

第一期末所付之 \$1，經過一年，按利率四釐之現價

$$=.961539=(1.04)^{-1}=(1+i)^{-1}=v^1$$

第二期末所付之 \$1，經過二年，按利率四釐之現價

$$=.924556=(1.04)^{-2}=(1+i)^{-2}=v^2$$

第三期末所付之 \$1，經過三年，按利率四釐之現價

$$=.888996=(1.04)^{-3}=(1+i)^{-3}=v^3$$

第四期末所付之 \$1，經過四年，按利率四釐之現價

$$=.854804=(1.04)^{-4}=(1+i)^{-4}=v^4$$

合計 $\$3.629895=(1.04)^{-1}+(1.04)^{-2}+(1.04)^{-3}+(1.04)^{-4}$

由此可知 $a_{\overline{4}|}$ 按利率四釐 $=(1.04)^{-1}+(1.04)^{-2}+(1.04)^{-3}+(1.04)^{-4}=3.629895$

若利率為 i，則

$$a_{\overline{4}|}=(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+(1+i)^{-4}$$

若時期為五期，則為

$$a_{\overline{5}|}=(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+(1+i)^{-4}+(1+i)^{-5}$$

故計算年金現價之普通公式為：

$$a_{\overline{n}|}=(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots\cdots+(1+i)^{-n}$$

或

$$a_{\overline{n}|}=v^1+v^2+v^3+\cdots\cdots+v^n$$

上項公式，係幾何級數，可歸納為下式：

$$a_{\overline{n|}}=\frac{v-v^{n+1}}{1-v}$$

上式之分子分母,可各除以 v, 得

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-v^{n}}{\frac{1}{v}-1}$$

但

$$\frac{1}{v}=1+i$$

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-v^{n}}{i}$$

$$=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{(第 29 式)}$$

若每年所付之年金為 R, 則年金現價之總額 A 當如下式:

$$A=Ra_{\overline{n|}}=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad \text{(第 30 式)}$$

例——設某甲每年底付捐款$100,期四年,利率四釐,計算其所付捐款之年金現價,可用下式:

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad R=\$100$$

$$i=.04$$

$$=100\times\frac{1-(1.04)^{-4}}{.04} \qquad n=4$$

$$=100\times3.62989=\$362.99$$

關於$1之年金現價,即 $a_{\overline{n|}}$, 如應用普通利率計算,可於用表VII中查出之。

丑、每年複利數次者

若每年複利數次, 則須將 i 改為 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1$, 又 $(1+i)$ 改為 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$。其式如下:

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1} \qquad \text{(第 31 式)}$$

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

查每年付款數次複利一次之年金終價公式爲：

$$K=R\times\frac{(1+i)^n-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

求此年金現價之公式，應乘以 $(1+i)^{-n}$，即

$$A=R\times\frac{(1+i)^n-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}\times(1+i)^{-n}$$

$$=R\times\frac{(1+i)^n(1+i)^{-n}-(1+i)^{-n}}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

但　$$(1+i)^n(1+i)^{-n}=(1+i)^0=1$$

故　$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}=Ra_{\overline{n}|}^{(p)}$$　（第 32 式）

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

此式僅須將第 32 式之 $(1+i)$ 改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 即

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}$$　（第 33 式）

(2)付款次數與複利次數相同者

$\because m=p$ 故將上式之 m 代以 p，得

$$A=\frac{R}{p}\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-np}}{\frac{j}{p}}$$　（第 34 式）

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

此項公式亦可由年金終價之公式演化而來，今查其年金終價之公式爲：

$$K=R_k\times\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^k-1}$$

故此項年金現價之公式爲：

$$A=R_k\times\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^k-1}\times(1+i)^{-n}$$

$$=R_k\times\frac{(1+i)^n(1+i)^{-n}-(1+i)^{-n}}{(1+i)^k-1}$$

但 $(1+i)^n(1+i)^{-n}=(1+i)^0=1$

故 $$A=R_k\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^k-1}=R_k a_{\overline{\frac{n}{k}}|}$$ （第35式）

丑、每年複利數次者

此項僅須將第35式之 $(1+i)$ 改爲 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$。即

$$A=R_k\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}$$ （第36式）

第十一節　計算普通年金現價之實例

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每年底取 \$1,000，期五年，利率四釐半，每年複利一次，求年金現價：

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$=1{,}000\times\frac{1-(1+.045)^{-5}}{.045}$$

$$=1{,}000\times 4.3899767$$

$$=\$4{,}389.98$$

$R=\$1{,}000$
$i=.045$
$n=5$

4.3899767 可由用表 VI 查出。

丑、每年複利數次者

例——例同前，僅將利息改爲每年複利二次。

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\qquad\begin{array}{ll}R=\$1{,}000 & m=2\\ j=.045 & n=5\end{array}$$

$$=1{,}000\times\frac{1-\left(1+\frac{.045}{2}\right)^{-2\times5}}{\left(1+\frac{.045}{2}\right)^{2}-1}=1{,}000\times\frac{1-(1.0225)^{-10}}{(1.0225)^{2}-1}$$

$$=1{,}000\times\frac{1-.80051013}{1.04550625-1}=1{,}000\times\frac{.19948987}{.04550625}$$

$$=\$4{,}383.79$$

由是可知每年複利數次者，其現價之數額較每年複利一次者爲少。複利之次數愈多，則現價之數額愈少。同理，利率愈高，現價之數額亦愈少。若本例之利率改爲六釐，則其現價當爲＄4,212.36。

第 31 式可乘以$\dfrac{\frac{j}{m}}{\frac{j}{m}}$，變爲

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\times\frac{\frac{j}{m}}{\frac{j}{m}}$$

$$=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\frac{j}{m}}\times\frac{\frac{j}{m}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$

如是，可查用表 V 及用表 VI，得後二項之答數，再乘以 R 卽得。

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——每六個月底取＄4,000，期四年，利率五釐，每年複利一次，求年金現價。

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}\qquad\begin{array}{ll}R=\$8{,}000 & i=.05\\ p=2 & n=4\end{array}$$

上式乘以$\frac{i}{i}$，

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times\frac{i}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}$$

$$=R\times\frac{1-(1.05)^{-4}}{.05}\times\frac{.05}{2\{(1.05)^{\frac{1}{2}}-1\}}$$

$$=8,000\times3.54595\times1.0123475$$

$$=\$28,717.87$$

3.54595 及 1.012475 係由用表 VI 及用表 XI 所查出。

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

例──每三個月底取$500，期五年，利率五釐，每半年複利一次，求年金現價。

$$A=\frac{R}{p}\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\qquad\begin{array}{ll}R=\$2,000 & n=5\\ j=.05 & p=4\\ m=2 & \end{array}$$

$$=\frac{2,000}{4}\times\frac{1-(1.025)^{-10}}{(1.025)^{\frac{1}{2}}-1}=500\times\frac{1-.7811984}{1.0124228-1}$$

$$=500\times\frac{.2188016}{.0124228}=8,803.45$$

(2)付款次數與複利次數相同者

例──每三個月底取款$300，期二年，利率六釐，每年複利四次，求年金現價：

$$A=\frac{R}{p}\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-np}}{\frac{j}{p}}\qquad\begin{array}{ll}R=\$1,200 & p=4\\ j=.06 & m=4\\ n=2 & \end{array}$$

$$=\frac{1,200}{4}\times\frac{1-\left(1+\frac{.06}{4}\right)^{-2\times4}}{\frac{.06}{4}}=300\times\frac{1-(1.015)^{-8}}{.015}$$

$=300\times7.4859251=\$2,245.78$

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每二年底取 \$1,000，期八年，利率六釐，每年複利一次，求年金現價。

$$A=R_k\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^k-1}\qquad R_k=\$1,000\quad n=8\quad i=.06\quad k=2$$

$$=1,000\times\frac{1-(1.06)^{-8}}{(1.06)^2-1}=1,000\times\frac{1-.6274124}{1.1236-1}$$

$$=1,000\times\frac{.3725876}{.1236}=\$3,014.46$$

丑、每年複利數次者

例——每二年底取 \$1,000，期十年，利率五釐，每半年複利一次，求年金現價。

$$A=R_k\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}\qquad R_k=\$1,000\quad k=2\quad j=.05\quad n=10\quad m=2$$

$$=1,000\times\frac{1-\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{-2\times10}}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times2}-1}$$

$$=1,000\times\frac{1-(1.025)^{-20}}{(1.025)^4-1}$$

$$=1,000\times\frac{1-(1.025)^{-20}}{.025}\times\frac{.025}{(1.025)^4-1}$$

$$=1,000\times15.58916\times.2408179=\$3,754.15$$

習題四

1. 設每年付年金 \$1,000，時期五年，利率四釐，每年複利一次，試計算其年金現價。

2. 設有房屋一所出售，標價 \$10,000，後願減價，購者須先付現金 \$4,000，其餘 \$6,000 分六年支付，每年付 \$1,000，不加利息。若是時利率為六釐，每年複利一次，試計算房主所減之數。

3. 設每年付年金 \$1,000，時期五年，名利率8釐，每三個月複利一次，試計算年金現

價。

4. 設每年付年金 $1,200 時期二十年,試按下列各項計算其年金現價:

(甲)實利率六釐。

(乙)名利率六釐,每半年複利一次。

(丙)名利率六釐,每年複利四次。

(丁)名利率六釐,每月複利一次。

5. 設有房屋一所出售,標有下列價格:(甲)現金 $6,000,(乙)現金 $1,000,以後五年,每年付 $1,100,不計利息,設利率爲六釐,每年複利一次,試計算(乙)之年金現價並(甲)(乙)之差數。

6. 設有房屋一所,標定售價現金 $2,000,並每月付 $50,時期七年,不計利息。若實利率爲六釐,每年複利一次,試求年金現價。

7. 設每年可收 $860,分四次收,時期八年,名利率五釐,每三個月複利一次,試求其年金現價。

8. 若第 7 題係半年複利一次者,則年金現價應爲若干?

9. 設每年付年金 $1,200,時期七年,利率五釐,每年複利一次。試按下列各項計算其年金現價:

(甲)每年付款二次. (乙)每年付款一次。

10. 設有書一部,價值現金 $150,購者或一次付足,或先付 $12,然後每月底付 $12,再付十二次。若名利率爲六釐,每月複利一次時,試計算二法孰爲合算?

第十二節 由年金現價求年金額之公式

今若知某一年金之現價爲 $1.00,欲求其每年所付之年金額($R$),則可依第 30 式,以 $A=1$ 代入而變化之,即得:

$$R=\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{i}{1-v^n}=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}} \qquad (第\ 37\ 式)$$

此公式稱曰現價爲 $1 之年金公式,用表 VIII(年金額表)即根據此式作成者。於年金計算上,頗稱便利,欲求任何一數所能購得之年金,均可就用表 VIII 所查得之數,乘以該數即得。如有金額(A)欲購得一(n)年限依(i)利率計算之年金,則其每年可收之年金額,即爲:

$$R=\frac{1}{a_{\overline{n}|}}\times A$$

$$=\frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}} \qquad (第\ 38\ 式)$$

例——設現存\$5,000，利率六釐，以後每年取款一次，時期四年，求其每期所取之數額，玆計算之如下：

$$R=\frac{1}{a_{\overline{4}|.06}}\times 5{,}000 \qquad n=4$$

$$=.2885915\times 5{,}000 \qquad p=\$5{,}000$$

$$=\$1{,}442.96 \qquad i=.06$$

上例$\frac{1}{a_{\overline{4}|.06}}$之值，可先由年金現價表查得 $a_{\overline{4}|.06}=3.4651056$ 除 1 而得之。但查用表 VIII，即可直接查得，其值爲 .2885915，故又簡便不少。

關於其他各類之公式及實例，當於第七章再行詳述。

習題五

1．某君委託建築公司建屋一所，議定 \$35,000.00，當先付定洋 \$5,000.00，其餘按六釐計息，每年複利一次，本息分二十期支付。試計算每期應付之數。

2．設某地產公司有房屋一所，價 \$5,000.00，現以分期付款法出售，定期七年，每月付款一次，利率六釐，每月複利一次。試計算每月應付之數。

3．設某君欠債 \$2,000.00，利率四釐，每年分期平均償還，五年還清。試計算每年應還之數。

4．設某銀行章程規定每月存 \$6.00，六年到期，可得本息 \$571.38。試求其利率（每月複利一次）

5．設某君擬存零存整取儲金，每月存 \$9.00，時期八年，利率年息一分，每半年複利一次，試計算其到期時之終價。

6．設某銀行章程規定現存 \$1,000.00，以後十七年每月可取 \$8.42。試求其利率。

7．設某銀行建築新村，規定某種基地某種形式，計 \$15,000.00，先付三分之一，其餘之款按月息一分計算，本息每月平均分還，十年還清。試計算每月應付之數。

第十三節　由年金現價求時期之公式

由年金之現價求其時期，與由年金之終價求其時期之方法相仿，或用對數，或查用表，再用推值法推算之均可。玆先將應用對數之計算公式，列之於下，然後再爲推值法，各舉一例，並於每年付款次數每年複利次數不同者之每例中，將兩法並列，俾可易於明瞭。求年金現價之公式

如下:

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

除以 R, 乘以 i:

$$\frac{Ai}{R}=1-(1+i)^{-n}$$

將 1 移項:

$$-1+\frac{Ai}{R}=-(1+i)^{-n}$$

再行變號:

$$1-\frac{Ai}{R}=(1+i)^{-n}$$

用對數計算:

$$\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right)=-n\log(1+i)$$

除以 $\log(1+i)$:

$$-n=\frac{\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

再行變號:

$$n=-\frac{\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\log(1+i)}$$

玆將年金現價求時期之各種公式, 分類列之於下:

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

$$n=-\frac{\log\left(1-\frac{Ai}{R}\right)}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 39 式)}$$

丑、每年複利數次者

$$n=-\frac{\log\left[1-\frac{A}{R}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}} \qquad \text{(第 40 式)}$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

$$n=-\frac{\log\left[1-\frac{A}{R}\times p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}\right]}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 41 式)}$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

$$n=-\frac{\log\left[1-\frac{A}{R}\times p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}} \qquad \text{(第 42 式)}$$

(2)付款次數與複利次數相同者

$$n=-\frac{\log\left(1-\frac{A}{\frac{R}{p}}\times\frac{j}{p}\right)}{\log\left(1+\frac{j}{p}\right)^{p}} \qquad \text{(第 43 式)}$$

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

$$n=-\frac{\log\left[1-\frac{A}{R_k}\{(1+i)^{k}-1\}\right]}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 44 式)}$$

丑、每年複利數次者

$$n=-\frac{\log\left[1-\frac{A}{R_k}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}} \qquad \text{(第 45 式)}$$

第十四節　由年金現價求時期之實例

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——設某甲負債 \$5,000，利率五釐，每年複利一次，現擬每年底還 \$481.71。計算其還清之時期。

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad A=\$5,000$$

$$R=\$481.71$$

$$5,000=481.71\times\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05} \qquad i=.05$$

除以 $481.71：

$$\frac{5,000}{481.71}=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}$$

$$10.37968=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}$$

乘以 .05：

$$10.37968\times.05=1-(1.05)^{-n}$$

$$.5189840-1=-(1.05)^{-n}$$

$$1-.5189840=(1.05)^{-n}$$

$$.481016=(1.05)^{-n}$$

由用表 IV 查出五釐十五年 $1 之現價爲 .481016，故知

$$n=15$$

若其數額爲表上所無者，則擇其最相近之兩數額，用推值法推算之。

丑、每年復利數次者

例——某乙負債 $5,000，利率五釐，每半年復利一次，現擬每年償還 $1,156.86，計算何時可以還清。

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}$$

$A=\$5,000$

$R=\$1,156.86$

$j=.05$

$m=2$

$$5,000=1,156.86\times\frac{1-\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}-1}$$

$$\frac{5,000}{1,156.86}=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{(1.025)^{2}-1}$$

$$4.32204=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{1.050625-1}=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{.050625}$$

$$4.32204\times.050625=1-(1.025)^{-2n}$$

$$.218803=1-(1.025)^{-2n}$$

$$-1+.218803=-(1.025)^{-2n}$$

$$1-.218803=+(1.025)^{-2n}$$

$$.781197=(1.025)^{-2n}$$

由用表 IV 查出利率二釐半十期$1之現價爲 .781197。故

$$2n=10$$

$$n=5$$

乙 每年付款數次者

子、每年複利一次者

例——某丙負債$10,000，利率五釐，每年複利一次，現擬每六個月底償還$500，計算其還清之時期。

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}\qquad A=\$10,000$$

$$R=\$1,000$$

$$10,000=1,000\times\frac{1-(1.05)^{-n}}{2\{(1.05)^{\frac{1}{2}}-1\}}\qquad i=.05$$

$$p=2$$

$$10=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.0493901}\qquad j_{(2)\cdot 05}=.0493901$$

(表 X)

$$.493901=1-(1.05)^{-n}$$

$$1-.493901=(1.05)^{-n}$$

$$.506099=(1.05)^{-n}$$

由用表 IV 查出

$1按利率五釐十三期之現價爲	.53032
$1按利率五釐十四期之現價爲	.50506
增加一期則現價減少	.02526

本例之現價率爲.506099較十三期之.53032少.02423，卽十三期尙須增加$\frac{.02423}{.02526}$期或.9996期。

$$(1.05)^{-n}=13.9996\text{ 期}=14\text{ 期}$$

$$\therefore\ n=14\text{ 年}$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不相同者

例——某丁負債$1,000，利率六釐，每半年複利一次，現擬每月底償還$86.04，問何時可以還淸。

1. 用對數法求之:

$$n=-\frac{\log\left[1-\frac{A}{R}\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}$$

$A=\$1,000$　$\frac{R}{p}=\$86.04$　$j=.06$　$m=2$

$$=-\frac{\log\left[1-\frac{1,000}{86.04}\left\{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{\frac{2}{12}}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2}}$$

$$=-\frac{\log[1-11.6225\{(1.03)^{\frac{1}{6}}-1\}]}{\log(1.03)^{2}}$$

$$=-\frac{\log(1-11.6225\times .0049386)}{\log(1.03)^{2}}$$

$$=-\frac{\log(1-.05739887)}{\log(1.03)^{2}}$$

$$=-\frac{\log .94260113}{2\times .0128372}=-\frac{\bar{1}.974327}{.0256744}=-\frac{-.025673}{.025674}=1\text{ 年}$$

2. 由用表求之:

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}$$

$A=\$1,000$　$j=.06$　$R=\$1,032.48$*　$m=2$　$p=12$

$$1,000=1,032.48\times\frac{1-\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{-2n}}{12\left\{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{\frac{2}{12}}-1\right\}}$$

$$\frac{1,000}{1,032.48}=\frac{1-(1.03)^{-2n}}{12(1.0049386-1)}$$

$$.96854=\frac{1-(1.03)^{-2n}}{12\times .0049386}$$

$$.96854\times 12\times .0049386=1-(1.03)^{-2n}$$

$$.057398=1-(1.03)^{-2n}$$

$$-1+.057398=-(1.03)^{-2n}$$

$$1-.057398=(1.03)^{-2n}$$

$$.942602=(1.03)^{-2n}$$

由用表 IV 查出

$1 按利率三釐時期一期之現價爲 $ .9708

$1 按利率三釐時期二期之現價爲 $ .9425

時期增加一期現價減少 $ .0283

本例 $1 之現價爲 .9426，較 $1 一期之現價 $ .9708 少 $0.0282，故期數應較一期增加 $\frac{.0282}{.0283}$ 期，或 .9999 期，等於 1.9999 期。

$$(1.03)^{2n}=1.9999=2$$

卽

$$2n=2$$

$$n=1$$

(2) 付款次數與複利次數相同者 $(m=p)$

如以 p 除利率，以 p 乘時期，然後依照例一演算，所求出之時期爲 np 期，否則用求年金現價之第 33 式，亦可算出。

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——某戊負債 $3,014.46，利率六釐，每年複利一次，現擬每二年底償還 $1,000，計算其還清之時期。

$$A=R_k\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^k-1}\qquad A=\$3,014.46$$

$$i=.03$$

$$3,014.46=1,000\times\frac{1-(1.03)^{-n}}{(1.03)^2-1}\qquad R_k=1,000$$

$$k=2$$

$$3.01446=\frac{1-(1.03)^{-n}}{.1236}$$

$$3.01446\times.1236=1-(1.06)^{-n}$$

$$1-.372587=(1.06)^{-n}$$

$$.627413=(1.03)^{-n}$$

查用表 IV　$n=8$

丑、每年複利數次者

例——某甲負債 $3,754.15，利率五釐，每半年複利一次，現擬每二年

底價還 \$1,000，求其還清之時期。

$$A=R_k\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}$$

$A=\$3,754.15$
$R_k=\$1,000$
$j=.05$
$m=2$
$k=2$

$$3,754.15=1,000\times\frac{1-\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{-2n}}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{4}-1}$$

$$3,754.15=1,000\times\frac{1-(1.025)^{-2n}}{(1.025)^{4}-1}$$

乘以$\frac{.025}{.025}$，除以1,000：

$$3.75415=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{.025}\times\frac{.025}{(1.025)^{4}-1}$$

$$3.75415=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{.025}\times .2408178$$

$$\frac{3.75415}{.2408178}=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{.025}$$

$$15.5892=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{.025}$$

由用表VI $2\frac{1}{2}\%$ 欄內，查出15.5892之時期爲二十期，故

$$2n=20$$

$$n=10$$

第十五節　由年金現價求利率之公式

讀者對於名利率與實利率之換算，業已明瞭。求年金現價之利率，可用年金現價之公式求之。惟計算頗爲困難，故最好檢查用表。若其數額爲表中所無者，再以相近之數額比例推算之。

例——現存\$4,389.98，以後五年每年底可取\$1,000，求利率。

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$4,389.98=1,000\times\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

$A=\$4,389.98$
$R=\$1,000$
$n=5$

$$4.38998=\frac{1-(1+i)^{-5}}{i}$$

查用表 VI \$1 期五年之現價爲 4.38998 者，其利率爲 $4\frac{1}{2}\%$，故所求之利率爲 $4\frac{1}{2}\%$。

倘用表 VI 期五年之欄內，無 4.38998 之數額，則以最相近之數額比例推算之。

第十六節 由年金現價求利率之實例

甲 每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每年底取 \$1,000，期六年，其年金現價爲 \$5,554.48，求利率。

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad A=\$5,554.48$$

$$R=\$1,000$$

$$5,554.48=1,000\times\frac{1-(1+i)^{-6}}{i} \qquad n=6$$

$$5.55448=\frac{1-(1+i)^{-6}}{i}$$

由用表 VI 查出：

\$1 按利率二釐時期六年之年金現價爲	5.6014308
\$1 按利率二釐半時期六年之年金現價爲	5.5081253
利率增加半釐年金現價減少	.0933055
\$1 按 2% 時期六年之年金現價爲	5.60143
\$1 按 i% 時期六年之年金現價爲	5.55448
	.04695

即按 2% 尚須加 $\frac{.04695}{.0933055}\times.5\%$，或 .251%，故其利率爲 2% +.251%，即 $2\frac{1}{4}\%$。

試驗：

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$5,554.48=1,000\times\frac{1-(1.0225)^{-6}}{.0225}$$

$$5.55448=\frac{1-(1.0225)^{-6}}{.0225}$$

$$=\frac{1-.8750242}{.0225}$$

$$=\frac{.1249758}{.0225}$$

$$=5.55448$$

丑、每年複利數次者

先求一年之實利率，然後再由實利率求名利率。

今因 $p=1$, $\therefore\ i_p=i$。

故 $A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$

由此式求出 i，係一年之實利率，再由下式計算其名利率。

$$\frac{j}{m}=\{(1+i)^{\frac{1}{m}}-1\}$$

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——設以＄1,500購置汽車一輛，先付＄500，其餘＄1,000，加付利息8%，即＄1,000加＄80，共計＄1,080。今按十二個月分付，每月付＄90。

在上例中，事實上購車者所付之利率，不止八釐，因所付之利息，係＄1,000全數之8%。而實際上所欠之數額，因每月拔還而逐漸減少。直至最後一個月，所欠之數僅爲＄1,000之一極小部份。

茲計算該利率如下：

$$1,000=90\times\frac{1-(1+i_p)^{-np}}{i_p}$$

$$11.111=\frac{1-(1+i_p)^{-12}}{i_p}$$

由用表VI查出：

$1 按 $1\frac{1}{8}$% 時期十二期之年金現價爲 11.16669
$1 按 $1\frac{1}{4}$% 時期十二期之年金現價爲 11.07931
.08738

$1 按利率 $1\frac{1}{8}$% 十二期之年金現價爲 11.16669
本例 $1,000 十二期之年金現價爲 11.11111
差額 .05558

利率增加 $\frac{1}{8}$%，年金現價減少 .08738，現本例之年金現價率較利率 $1\frac{1}{8}$% 少 .05558，亦卽利率應增 $\frac{.05558}{.08738}\times .125\%$ 或 .0795%。

∴ 一個月之利率爲 1.125%＋.0795%＝1.2045%。

一個月利率 1.2045，合年利爲 15.45%，計算如下：

$$i=(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1$$

$$i=(1.012045)^{12}-1$$

$(1.012045)^{12}$ 用對數表檢查如下：

$$\log 1.012045 = .0051998$$

$$12\times .0051998 = .0623976$$

.0623976 之眞數爲 1.1545

$$i=1.1545-1$$

$$=.1545=15.45\%$$

上列計算可證明之如下：

$$A=\frac{\$1080}{12}\times\frac{1-(1.1545)^{-1}}{(1.1545)^{\frac{1}{12}}-1}$$

$$=\$90\times\frac{1-.866175}{1.01204-1}$$

$$=\$90\times\frac{.133825}{.01204}$$

$$=\$90\times 11.11503$$

$$=\$1,000.35$$

$(1.1545)^{\frac{1}{12}}$ 用對數表檢查

$\log 1.1545 = .0623976$

$\frac{1}{12}\log 1.1545 = .005199$

.005199 之眞數爲 1.01204

即每月底 \$90，按利率 15.45% 之年金現價為 \$1,000.35。

若用精密之計算，按利率八釐，每月祇應付 \$86.86，算式如下：

$$
\begin{aligned}
\$1,000 &= R\times\frac{1-(1.08)^{-1}}{12\{(1.08)^{\frac{1}{12}}-1\}}\\
&= R\times\frac{1-.9259259}{12(1.006434-1)}\\
&= \frac{R}{12}\times\frac{.0740741}{.006434}\\
\frac{R}{12} &= \$1,000\times\frac{.006434}{.0740741}\\
&= \$\ 86.86
\end{aligned}
$$

年利率八釐，每月之實利率為 .006434，茲編逐月攤還本息明細表於後，以資參考：

	付　　款	還　　本	利　　息	餘　　額
1	\$ 86.86	\$ 80.43	\$ 6.43	\$ 1,000.00
2	86.86	80.94	5.92	919.57
3	86.86	81.46	5.40	838.63
4	86.86	81.99	4.87	757.17
5	86.86	82.52	4.34	675.18
6	86.86	83.05	3.81	592.66
7	86.86	83.58	3.28	509.61
8	86.86	84.12	2.74	426.03
9	86.86	84.66	2.20	341.91
10	86.86	85.20	1.66	257.25
11	86.86	85.75	1.11	172.05
12	86.86	86.30	.56	86.30
				0
		\$ 1,000.00	\$ 42.32	

利息之總額為 \$42.32，而非 \$80。

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

例——現存 \$8,806.45，以後五年，每三個月底取 \$500，求利率，每年複利二次。

用前列 np 期之公式，

$$\$8,803.45=\$500\times\frac{1-(1+i_p)^{-20}}{i_p}$$

$$17.6129=\frac{1-(1+i_p)^{-20}}{i_p}$$

由用表 VI 查出：

\$1 按利率 $1\frac{1}{8}\%$ 時期二十期之年金現價爲 17.8204

\$1 按利率 $1\frac{1}{4}\%$ 時期二十期之年金現價爲 17.5993

利率增 $\frac{1}{8}\%$，則年金現價減少　　.2211

本例每 \$1 之年金現價爲 \$17.6129，較 \$1 按利率 $1\frac{1}{8}\%$ 之年金現價 17.8204 少 .2075，則利率應增加 $\frac{.2075}{.2211}\times.125\%$ 或 $.117\%$。

每期之利率爲 $1.125\%+.117$ 或 1.242%，每六個月之利率爲：

$$\frac{j}{m}=(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1$$

$$\frac{j}{m}=(1.01242)^{\frac{p}{m}}-1$$

$$=(1.01242)^2-1$$

$$\log 1.01242=.0053607$$

$$2\times.0053607=.0107214$$

.0107214 之真數爲 1.02499

利率爲 $1.02499-1$ 或 .02499，故六個月之利率爲 2.499% 或 2.5%，亦卽年息 5%，每半年複利一次。

(2)付款次數與複利次數相同者

此項與甲、子、例之算法相同。僅將時期改爲 np。所求出之利率爲一期之利率,若求一年之利率,則以 m 或 p 乘之卽得。

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——現投資 \$4,202.08, 以後十年,每二年底可取 \$1,000, 求其利率。

$$4,202.08=1,000\times\frac{1-(1+i_k)^{-\frac{10}{2}}}{i_k}$$

$$4.20208=\frac{1-(1+i_k)^{-5}}{i_k}$$

由用表 VI 查出:

\$1 按利率 6% 時期五期之年金現價爲 4.21236

\$1 按利率 $6\frac{1}{2}$% 時期五期之年金現價爲 4.15567

利率增加 $\frac{1}{2}$% 年金現價減少 .05669

本例每 \$1 之年金現價爲 \$4.20208, 較 \$1 按利率 6% 之年金現價 4.21236 少 .01028, 卽利率增加 $\frac{.01028}{.05669}\times.5\%$, $=.0906$

在二年期中利率爲 6.0906, 欲求一年之利率,應由下式求之:

$$i=(1+i_k)^{\frac{1}{k}}-1$$

$$=(1.0609)^{\frac{1}{2}}-1=1.03-1=3\%$$

丑、每年複利數次者

例——現投資 \$4,1 6.78, 每年複利二次, 以後十年, 每二年底可取 \$1,000 求其利率。

$$\$4,196.78=\$1,000\times\frac{1-(1+i_k)^{\frac{10}{2}}}{i_k}$$

$$4.19678=\frac{1-(1+i_k)^{-5}}{i_k}$$

由用表 VI 查出：

\$1 按利率 6% 時期五年之年金現價爲	4.2123637
\$1 按利率 $6\frac{1}{2}$% 時期五年之年金現價爲	4.1556794
利率增加 $\frac{1}{2}$%，則年金現價減少	.0566843

本例每 \$1 之年金現價爲 \$4.19678，較 \$1 按 6% 之年金現價 \$4.2123637 少 .01558，卽利率增加 $\frac{.01588}{.05668}\times .5$，或 .1374%。

故二年之利率爲 6.1374%，六個月之利率爲：

$$\frac{j}{m}=(1+i_k)^{\frac{1}{mk}}-1=(1.061374)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$\log 1.061374=.0258684$$

$$\tfrac{1}{4}\log 1.061374=.0064671$$

.0064671 之眞數爲 1.015

$$\frac{j}{m}=1.015-1$$

$$=.015 \text{ 或 } 1\tfrac{1}{2}\%$$

卽每半年之利率 $1\frac{1}{2}$%，每年之利率爲 $2\times1\frac{1}{2}$% 或 3%。

習　題　六

1. 設現存 \$9.00，以後每年底可取 \$1.00，每年復利一次，時期十一年，試計算其利率。
2. 設現存 \$850.00，以後每年底可取 \$100，每年復利二次，時期十年，試求其利率。
3. 設某甲欠某乙 \$5,000.00，商定分二十年還清，每年付 \$400.00，試計算其合利率若干？
4. 設某甲欠某乙 \$10,000.00，商定分二十年還清，每年付 \$1,000.00，試計算其利率若干？
5. 若每年付年金 \$875，時期三年，每年復利二次，其年金現價爲 \$2,475.03，試求其利率

6. 某君擬購房屋一所,價 \$ 6,000 擬先還 \$ 1,000, 其餘每年付 \$ 800,若利率為六釐,每年復利一次,試計算其還清之時期。

第五章　期首年金

第一節　計算期首年金終價之公式

前章所述之年金，均係指期末支付之年金，即普通年金（Ordinary Annuity）而言，惟年金亦有於每期開始時支付者，即所謂期首年金(Annuity Due)是也。茲將 \$1 按利率三釐期四年之期首年金與普通年金之終價，並列於下，以資比較：

	普通年金	期首年金
第一期付款之終價	$(1.03)^3 = \$1.092727$	$(1.03)^4 = \$1.125509$
第二期付款之終價	$(1.03)^2 = 1.060900$	$(1.03)^3 = 1.092727$
第三期付款之終價	$1.03 = 1.030000$	$(1.03)^2 = 1.060900$
第四期付款之終價	$1.00 = 1.000000$	$1.03 = 1.030000$
合計	\$4.183627	\$4.309136

觀於上例，可知時期雖屬相同，但因一在期首支付，一在期末支付，故其終價卽有區別，且知此四年中，每期所付之款，後者均須多算一期利息。易言之，若以$(1+i)$乘普通年金每期所付之款，即得期首年金。若以$(1+i)$乘其總額，卽得此期首年金之終價。

此項公式，可照幾何級數公式演化而得。第一期期首所付之款，經過 n 年，第二期經過 $n-1$ 年，最後一期經過一年，其式如下：

$$(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}\cdots\cdots+(1+i)$$

將各項首尾掉轉，其幾何級數之第一項爲 $(1+i)$，公比爲 $(1+i)$，末項爲 $(1+i)^n$。卽

$$a=(1+i),\ r=(1+i),\ l=(1+i)^n$$

幾何級數之和之公式爲:

$$S=\frac{rl-a}{r-1}$$

將上列各項代入上式,即得下式:

$$S=\frac{(1+i)(1+i)^n-(1+i)}{(1+i)-1}=\frac{(1+i)[(1+i)^n-1]}{i}$$

玆用 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$ 符號代表 \$1 之期首年金之終價。(有時亦用楷書 $\ddot{s}_{\overline{n}|}$)。若期首年金每期所付之款不止或不滿一元者,則用 $\ddot{K}$ 代表其年金之終價。

今 $\ddot{s}_{\overline{n}|}=(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$ 及 $\ddot{K}=R(1+i)\times\frac{(1+i)^n-1}{i}$

此式即將普通年金終價公式,乘以 $(1+i)$ 而得。同理,其他各項情形亦可照此推算。故期首年金終價之公式,係照普通年金終價之公式,按各情形,乘以下列各項而得:

甲 每年付款一次之年金

子、每年複利一次者 $(1+i)$ (第1式)

丑、每年複利數次者 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ (第2式)

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ (第3式)

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$ (第4式)

(2)付款次數與複利次數相同者 $\left(1+\frac{j}{p}\right)$ (第5式)

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者 $(1+i)^k$ (第6式)

丑、每年複利數次者 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}$ (第7式)

除此，尚有一法，可以計算期首年金之終價，即照普通年金加一期，再減一即得，其式如下：

$$\ddot{K}=R(s_{\overline{n+1|}}-1) \qquad \text{(第 8 式)}$$

若每年付款數次，則其公式如下：

$$\ddot{K}=R\left(s_{\overline{n+\frac{1}{p}|}}-\frac{1}{p}\right) \qquad \text{(第 9 式)}$$

普通以用第一法者爲多，第二法僅供吾人之參考而已。

第二節　計算期首年金終價之實例

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每年初存 \$1,000，期五年，利率五釐，每年複利一次，求此期首年金之終價。

解：1.
$$\begin{aligned}\ddot{K}&=Rs_{\overline{n|}}(1+i)\\&=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\times(1+i)\\&=1{,}000\times\frac{(1.05)^5-1}{.05}\times1.05\\&=1{,}000\times5.5256312\times1.05\\&=\$5{,}801.91\end{aligned}$$

$R=\$1{,}000$
$i=.05$
$n=5$

2.
$$\begin{aligned}\ddot{K}&=R(s_{\overline{n+1|}}-1)\\&=R(s_{\overline{6|}5\%}-1)\\&=1{,}000\times(6.8019128-1)\\&=1{,}000\times5.8019128\\&=\$5{,}801.91\end{aligned}$$

$R=\$1{,}000$
$s_{\overline{6|}5\%}=6.8019128$
(查用表 V)

丑、每年複利數次者

例——設每年初存 \$1,000，期十年，利率六釐，每半年複利一次，求此期首年金之終價。

解：
$$\ddot{K}=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

$$=1,000\times\frac{(1.03)^{2\times10}-1}{(1.03)^{2}-1}\times(1.03)^{2}$$

$R=\$1,000$
$j=.06$
$m=2$
$n=10$
$\frac{j}{m}=.03$

乘以 $\frac{.03}{.03}$

$$\ddot{K}=1,000\times\frac{(1.03)^{20}-1}{.03}\times\frac{.03}{(1.03)^{2}-1}\times(1.03)^{2}$$

$$=1,000\times26.8703745\times.4926108\times1.0609$$

$$=\$14,042.75$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——每半年初存 \$500，期五年，利率六釐，每年複利一次，求此期首年金之終價。

解：
$$\ddot{K}=R\times\frac{(1+i)^{n}-1}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}\times(1+i)^{\frac{1}{p}}$$

$$=1,000\times\frac{(1.06)^{5}-1}{2\{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1\}}\times(1.06)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1,000\times\frac{(1.06)^{5}-1}{.06}\times\frac{.06}{2\{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1\}}\times(1.06)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1,000\times5.637093\times1.0147815\times1.029563$$

$$=\$5,889.53$$

$R=500\times2$
$=1,000$
$j=.06$
$n=5$
$p=2$

上列 5.637093, 1.0147815 及 1.029563 等數，係查用表 V, IX 及 XI 而得。

丑、每年複利數次者

(1) 付款次數與複利次數不同者

例——設每三個月初存 \$1,000，期八年，利率五釐，每半年複利一次，

求此期首年金之終價。

解：

$$\ddot{K}=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$R=\$4,000$
$j=.05$
$m=2$
$p=4$
$n=8$

$$=4,000\times\frac{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times8}-1}{4\left\{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{\frac{2}{4}}-1\right\}}\times\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{\frac{2}{4}}$$

$$=4,000\times\frac{(1.025)^{16}-1}{4\{(1.025)^{\frac{1}{2}}-1\}}\times(1.025)^{\frac{1}{2}}$$

$$=4,000\times\frac{1.4845056-1}{4\times.0124228}\times1.0124228$$

$$=4,000\times\frac{.4845056}{.0496912}\times1.0124228$$

$$=4,000\times9.871456$$

$$=\$39,485.83$$

(2)付款次數與複利次數相同者

例——設每六個月初存 \$1,000，期五年，利率六釐，每半年複利一次，求此期首年金之終價。

解：

$$\ddot{K}=\frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1}{\frac{j}{p}}\times\left(1+\frac{j}{p}\right)$$

$R=\$2,000$
$p=2$
$j=.06$
$m=2$
$\frac{R}{p}=\$1,000$
$n=5$

$$\ddot{K}=1,000\times\frac{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{5\times2}-1}{\frac{.06}{2}}\times\left(1+\frac{.06}{2}\right)$$

$$=1,000\times\frac{(1.03)^{10}-1}{.03}\times(1.03)$$

$$=1,000\times11.4638793\times1.03$$

$$=\$11,807.80$$

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每二年初存 $100，期六年，利率六釐，每年複利一次，求此期首年金之終價。

解：

$$\ddot{K}=R_k\times\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^k-1}\times(1+i)^k \qquad R_k=\$100,\ i=.06,\ n=6,\ k=2$$

$$=100\times\frac{(1.06)^6-1}{(1.06)^2-1}\times(1.06)^2$$

$$=100\times\frac{(1.06)^6-1}{.06}\times\frac{.06}{(1.06)^2-1}\times(1.06)^2$$

$$=100\times6.975318\times.4854369\times1.1236$$

$$=\$380.46$$

丑、每年複利數次者

例——設每二年初存$100，期六年，利率六釐，每半年複利一次，求此期首年金之終價。

解：

$$\ddot{K}=R_k\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk} \qquad R_k=\$100,\ j=.06,\ m=2,\ k=2,\ n=6$$

$$=100\times\frac{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2\times6}-1}{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2\times2}-1}\times\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{2\times2}$$

$$=100\times\frac{(1.03)^{12}-1}{(1.03)^4-1}\times(1.03)^4$$

$$=100\times\frac{(1.03)^{12}-1}{.03}\times\frac{.03}{(1.03)^4-1}\times(1.03)^4$$

$$=100\times14.1920296\times.2390270\times1.1255088$$

$$=\$381.80$$

習　題　一

1. 每月初存 $6.00，期十年，利率一分，每半年複利一次，求此期首年金之終價。

2. 每月初存 \$6.00，期五年，利率九釐，每半年復利一次，求此期首年金之終價。

3. 設每月初存 \$1.00，期八年，利率八釐，每半年復利一次，求此期首年金之終價。

4. 設上題所述各項，改為每半年初存 \$6.00，求此期首年金之終價。

5. 設每月初存 \$2.438 於銀行，利率一分，每半年復利一次，期十五年，求此期首年金之終價。

第三節　由期首年金終價求年金額之公式

由期首年金終價求年金額，可將期首年金終價之公式演化而得之。如：

$$\ddot{K}=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\times(1+i)$$

乘以 i，除以 $(1+i)^n-1$：

$$\frac{\ddot{K}i}{(1+i)^n-1}=R(1+i)$$

除以$(1+i)$：

$$R=\ddot{K}\times\frac{i}{(1+i)^n-1}\times\frac{1}{(1+i)}\qquad\text{(第 10 式)}$$

上式之右方，除 $\frac{1}{(1+i)}$ 外，其餘均與求普通年金之年金額者相同。故求期首年金終價之年金額，祗須照求普通年金者，再除以$(1+i)$，或乘以$(1+i)^{-1}$。倘每年付款數次，每年複利一次者，則除以$(1+i)^{\frac{1}{p}}$。

用求期首年金終價之第二法，亦可用以求年金額。

第四節　由期首年金終價求年金額之實例

下列各題，以R代表普通年金之年金額，$\ddot{R}$代表期首年金之年金額。

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——利率五釐，每年複利一次，為期五年，期首年金終價為 \$5,801.91，求其每年初之年金額。

解：第一法
$$\ddot{R}=R\times\frac{1}{1+i}$$

$$R=5,801.91\times\frac{.05}{(1.05)^6-1}$$

$$=5,801.91\times.1809748$$

$$\ddot{R}=\frac{5,801.91\times.1809748}{1.05}$$

$$=\$999.999=\$1,000$$

第二法
$$\ddot{K}=\ddot{R}\times(s_{\overline{n+1}|}-1)$$

$$5,801.91=\ddot{R}\times\left[\frac{(1.05)^6-1}{.05}-1\right]$$

$$=\ddot{R}\times(6.80191-1)$$

$$=\ddot{R}\times5.8191$$

$$\ddot{R}=\frac{5,801.91}{5.8191}=\$1,000$$

丑、每年複利數次者

例——設期首年金終價爲 \$14,042.75，爲期十年，利率六釐，每半年複利一次，求其年金額。

解：
$$\ddot{R}=R\div\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

$$K=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1}$$

$$14,042.75=R\times\frac{(1.03)^{20}-1}{(1.03)^2-1}$$

$$=R\times\frac{(1.03)^{20}-1}{.03}\times\frac{.03}{(1.03)^2-1}$$

$$=R\times26.870374\times.4926108$$

$$R=\frac{14,042.75}{26.870374\times.4926108}$$

$$\ddot{R}=\frac{14,042.75}{26.870374\times.4926108}\times\frac{1}{(1.03)^2}$$

$$=1,060.90\times\frac{1}{1.0609}=\$1,000$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——設期首年金終價爲 \$5,889.53，爲期五年，利率六釐，每六個月初付款一次，每年複利一次，求其年金額。

解：

$$\ddot{R}=R\times\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}$$

$$R=K\times\frac{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}{(1+i)^n-1}$$

$$R=5,889.53\times\frac{2\{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1\}}{(1.06)^5-1}$$

$$=5,889.53\times\frac{.059126}{.338225}=\$1,029.56$$

$$\ddot{R}=1,029.56\times\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}=1,029.56\times\frac{1}{(1.06)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{1,029.56}{1.02956}=\$1,000$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

例——設期首年金終價爲 \$39,485.82，爲期八年，利率五釐，每半年複利一次，每三個月初付款一次，求其年金額。

解：

$$\ddot{R}=R\times\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}$$

$$R=K\times\frac{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$$

$$=39,485.82\times\frac{4\{(1.025)^{\frac{1}{2}}-1\}}{(1.025)^{16}-1}$$

$$=39,485.82\times\frac{4\times.0124228}{.4845056}$$

$$\ddot{R}=39,485.82\times\frac{.0496912}{.4845056}\times\frac{1}{1.0124228}$$

$$=39,485.82\times.10130217$$

$$=\$3,999.999=\$4,000$$

(2)付款次數與複利次數相同者

例——期首年金終價為 \$ 11,807.79，為期五年，利率六釐，每半年付款一次，複利一次，求其每半年所付之年金額。

解：

$$\frac{\ddot{R}}{p}=\frac{R}{p}\times\frac{1}{1+\frac{j}{p}}$$

$$\frac{R}{p}=K\times\frac{\frac{j}{p}}{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1}$$

$$=11,807.79\times\frac{.03}{(1.03)^{10}-1}$$

$$\frac{\ddot{R}}{p}=11,807.79\times\frac{.03}{(1.03)^{10}-1}\times\frac{1}{(1.03)}$$

$$=11,807.79\times.0872305\times.9708737$$

$$=11,807.79\times.0846898=\$999.999=\$1,000$$

即每半年初付 \$1,000，每年付 \$2,000。

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——期首年金終價為 \$380.46，為期六年，每二年初付款一次，利率六釐，每年複利一次，求其於每二年初所付之年金額。

解：

$$\ddot{R}_k=R_k\times\frac{1}{(1+i)^k}$$

$$R_k=K\times\frac{(1+i)^k-1}{(1+i)^n-1}$$

$$=380.46\times\frac{(1.06)^2-1}{(1.06)^6-1}$$

$$=380.46\times\frac{(1.06)^2-1}{.06}\times\frac{.06}{(1.06)^6-1}$$

$$(1+i)^k=(1.06)^2=1.1236$$

$$\ddot{R}_k=\frac{380.46\times2.06\times.1433626}{1.1236}=\$100$$

丑、每年複利數次者

例——設期首年金終價爲 $381.80，爲期六年，利率六釐，每半年複利一次，每二年初付款一次，求每次所付之款項。

解：

$$\ddot{R}_k=R_k\times\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}}$$

$$R_k=K\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}$$

$$=381.80\times\frac{(1.03)^4-1}{.03}\times\frac{.03}{(1.03)^{12}-1}$$

$$=381.80\times4.183627\times.0704621$$

$$\ddot{R}_k=\frac{381.80\times4.183627\times.0704621}{(1.03)^4}$$

$$=\frac{1,125.497}{1.2550}=\$99.999=\$100$$

第五節 由期首年金終價求時期之公式

由期首年金終價，以求其時期，可用對數以計算之，或查用表而得。如用對數，則其公式係由下式演化而得。

今因 $$\ddot{K}=R(s_{\overline{n+1}|}-1)$$

除以 R:

$$\frac{\ddot{K}}{R}=(s_{\overline{n+1}|}-1)$$

將1移項:

$$1+\frac{\ddot{K}}{R}=s_{\overline{n+1}|}$$

因

$$s_{\overline{n+1}|}=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

則:

$$\left(1+\frac{\ddot{K}}{R}\right)i=(1+i)^{n+1}-1$$

將1移項:

$$1+\left(1+\frac{\ddot{K}}{R}\right)i=(1+i)^{n+1}$$

用對數法計算之:

$$\log\left\{1+\left(1+\frac{\ddot{K}}{R}\right)i\right\}=(n+1)\log(1+i)$$

除以 $\log(1+i)$:

$$n+1=\frac{\log\left\{1+\left(1+\frac{\ddot{K}}{R}\right)i\right\}}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 11 式)}$$

請對照第四章第 20 式，可知如用 $1+\frac{\ddot{K}}{R}$ 以代 $\frac{K}{R}$，則求出之時期卽爲此章之 $n+1$。其他各類公式，亦有此項性質。

第六節　由期首年金終價求時期之實例

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每年初存 \$1,000，利率五釐，每年複利一次，試計算儲積至 \$5,801.91 之時期。

解: 1. $\ddot{K}=R\times\frac{(1+i)^n-1}{i}\times(1+i)$ 　　$\ddot{K}=5,801.91$

$$5{,}801.91=1{,}000\times\frac{(1.05)^n-1}{.05}\times 1.05 \qquad R=1{,}000$$

$$\frac{5{,}801.91\times .05}{1{,}000\times 1.05}+1=(1.05)^n \qquad i=.05$$

$$1.2762814=(1.05)^n$$

由用表 IV 查出：

$$1.2762814=(1.05)^5$$

$$\therefore\ n=5$$

2. 代入公式

$$n+1=\frac{\log\left\{1+\left(\frac{\ddot{K}}{R}+1\right)i\right\}}{\log(1+i)}$$

$$=\frac{\log\{1+(5.80191+1).05\}}{\log(1+.05)}$$

$$=\frac{\log(1+6.8019\times .05)}{\log 1.05}$$

$$=\frac{\log 1.3401}{\log 1.05}$$

$$=\frac{.127137}{.021189}=6$$

$$\therefore\ n=5$$

丑、每年複利數次者

例——每年初存 \$ 1,000，利率六釐，每半年複利一次，求其儲積至 \$ 14,042.75 之時期。

解：1.

$$\ddot{K}=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} \qquad \begin{aligned}\ddot{K}&=\$\,14{,}042.75\\ R&=\$\,1{,}000\\ j&=.06\\ m&=2\end{aligned}$$

$$14{,}042.75=1{,}000\times\frac{(1.03)^{2n}-1}{(1.03)^2-1}\times(1.03)^2$$

$$14.04275=\frac{(1.03)^{2n}-1}{(1.03)^2-1}\times(1.03)^2$$

$$=\frac{(1.03)^{2n}-1}{.0609}\times 1.0609$$

$$\frac{14.04275\times .0609}{1.0609}+1=(1.03)^{2n}$$

$$1.8061112=(1.03)^{2n}$$

$$2n=20$$

$$n=10$$

若在利率三釐欄內，無 1.8061112 之數額，則可取其最相近之二數用推值法推算之。

2. 用對數法計算，可將前章第 21 式中之 $\frac{K}{R}$ 代以 $\frac{\ddot{K}}{R}+1$，即得 $n+1$ 之數額。

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——每半年初存 \$ 1,000，利率六釐，每年複利一次，計算其儲積至 \$ 5,889.53 之時期。

解：1.

$j_{(2)}$ .06 = .059126

$K=\$5,889.53$

$R=\$1,000$

$p=2$

$i=.06$

$$\ddot{K}=R\times s_{\overline{n}|}^{(p)}\times(1+i)^{\frac{1}{p}}$$

$$5,889.53=\$1,000\times\frac{(1.06)^n-1}{2\{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1\}}\times(1.06)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{5,889.53}{1,000}=\frac{(1.06)^n-1}{.059126}\times 1.029563$$

$$\frac{5,889.53\times .059126}{1,000\times 1.029563}=(1.06)^n-1$$

$$1+.338225=(1.06)^n$$

$$1.338225=(1.06)^5$$

$$n=5$$

2. 用對數法計算，可將前章第 22 式之 $\frac{K}{R}$，代以 $\frac{\ddot{K}}{R}+\frac{1}{p}$，所求得之結果，為 $n+\frac{1}{p}$。

丑、每年複利數次之年金

(1)付款次數與複利次數不同者

例——每三個月初存 \$1,000，利率五釐，每半年複利一次，計算其儲積至 \$39,485.82 之時期。

解：1.

$$\ddot{K}=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$\ddot{K}=\$39,485.82$

$j=.05$

$m=2$

$p=4$

$R=1,000\times4=4,000$

$$39,485.82=\frac{4,000}{4}\times\frac{(1.025)^{2n}-1}{(1.025)^{\frac{1}{2}}-1}\times(1.025)^{\frac{1}{2}}$$

$$39.48582=\frac{(1.025)^{2n}-1}{(1.025)^{\frac{1}{2}}-1}\times(1.025)^{\frac{1}{2}}$$

$$39.48582=\frac{(1.025)^{2n}-1}{.01242284}\times1.01242284$$

$$\frac{39.48582\times.01242284}{1.01242284}+1=(1.025)^{2n}$$

$$(1.025)^{2n}=1.484507$$

$$2n=16$$

$$n=8$$

2. 用對數法計算，可將前章第 23 式之 $\frac{K}{R}$ 代以 $\frac{\ddot{K}}{R}+\frac{1}{p}$，所得之結果，爲 $n+\frac{1}{p}$。

(2)付款次數與複利次數相同者

例——每六個月存 \$1,000，利率六釐，每半年複利一次，計算其儲積至 \$11,807.79 之時期。

解：1.

$$\ddot{K}=\frac{R}{p}\times\frac{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1}{\frac{j}{p}}\times\left(1+\frac{j}{p}\right)$$

$\ddot{K}=11,807.79$

$R=1,000\times2$

$=2,000$

$$11{,}807.79=1{,}000\times\frac{(1.03)^{2n}-1}{.03}\times(1.03)$$ $p=2=m$

$j=.06$

$$\frac{11.80779\times.03}{1.03}+1=(1.03)^{2n}$$

$$(1.03)^{2n}=1.343916$$

在用表 III 利率三釐欄內,查出 $1.343916=1.03^{10}$

故 $2n=10$

$n=5$

2. 用對數法計算,可將前章第 24 式之 $\frac{\frac{K}{R}}{p}$ 代以 $\frac{\frac{\ddot{K}}{R}}{p}+1$,所得之結果,爲 $n+\frac{1}{p}$。

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每二年初存 \$ 100,利率六釐,每年複利一次,計算其儲積至 \$ 380.46 之時期。

解:1.

$$\ddot{K}=R_k\times\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^k-1}\times(1+i)^k$$

$$380.46=100\times\frac{(1.06)^n-1}{(1.03)^2-1}\times(1.06)^2$$

$$3.8046=\frac{(1.06)^n-1}{(1.06)^2-1}\times1.1236$$

$$3.8016=\frac{(1.06)^n-1}{1.1236-1}\times1.1236$$

$$\frac{3.8046\times.1236}{1.1233}=(1.06)^n-1$$

$$1+.4185195=(1.03)^n$$

$$(1.06)^n=1.4185195$$

$\ddot{K}=380.46$

$R_k=100$

$i=.06$

$k=2$

在用表 III 六釐欄內,查出 1.4185193 爲六期,故 $n=6$。

2. 用對數法計算,可將前章第 25 式之 $\frac{K}{R}$ 代以 $\frac{\ddot{K}}{R}+1$,所求出之

結果爲 $n+k$。

丑、每年複利數次者

1. 將下列公式移項，再由用表 III 內查出 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$ 之數額，然後可以求出其時期：

$$\ddot{K}=R\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}$$

2. 用對數法計算，可將前章第 26 式之 $\frac{K}{R}$，代以 $\frac{\ddot{K}}{R}+1$，求出之結果爲 $n+k$。

第七節　由期首年金終價求利率之公式

由期首年金終價求利率之方法，與普通年金之求利率者相同。若直接從公式中求 i，甚爲繁難；故可利用查表之一法。苟其利率爲表上所無者，則用推值法推算之。

實利率爲一期之利率，或爲一年，或不滿一年 $\left(\frac{1}{p}\text{年}\right)$，或在一年以上（$k$ 年），關於實利率化爲名利率之方法，已詳述於第三章矣。

應用下式，可求最簡單之實利率，如下節例一所示：

$$\ddot{K}=R\times\left\{\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1\right\}$$

雙方用 R 除之：

$$\frac{\ddot{K}}{R}=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}-1$$

將 1 移項：

$$\frac{\ddot{K}}{R}+1=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}\qquad\text{（第 12 式）}$$

上式中僅有 i 一項爲未知數，可由年金現價表中直接查出，或查出

其最相近之二數，再用推値法推算之。

如每年付款數次，則用同法得式如下：

$$\frac{\frac{\ddot{K}}{R}}{p}+1=\frac{(1+i_p)^{p(n+\frac{1}{p})}-1}{i_p} \qquad \text{(第 13 式)}$$

倘數年付款一次者，則其利率須用下式求之：

$$\frac{\ddot{K}}{R}+1=\frac{(1+i_k)^{(\frac{n}{k}+1)}-1}{i_k} \qquad \text{(第 14 式)}$$

應用前式，查用表 V 可得每期之實利率，再由實利率化爲所求之名利率。

第八節 由期首年金終價求利率之實例

甲 每年付款一次之年金

子、每年復利一次者

例——設每年初存 \$1,000，期五年，可得 \$5,801.91，求其利率。

解：

$$\frac{\ddot{K}}{R}+1=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

$$\frac{5,801.91}{1,000}+1=\frac{(1+i)^{n+1}-1}{i}$$

$$6.80191=\frac{(1+i)^{6}-1}{i}$$

在用表 V 第六期內，查出 6.80191 之利率爲五釐，故所求之利率爲五釐。

丑、每年複利數次者

例——每年初存 \$1,000，每年複利二次，十年後之終價爲 \$14,042.75，求其利率。

解：

$$\frac{\ddot{K}}{R}+1=\frac{(1+i_p)^{n+1}-1}{i_p} \qquad \ddot{K}=14,042.75$$

$$R=1,000$$

$$\frac{14,042.75}{1,000}+1=\frac{(1+i_p)^{10+1}-1}{i_p} \qquad n=10$$

$$15.04275=\frac{(1+i_p)^{11}-1}{i}$$

由用表 V 查出:

\$1 按利率 $6\frac{1}{2}\%$ 時期十一期之年金終價爲	\$15.37156
\$1 按利率 6% 時期十一期之年金終價爲	14.97164
利率增加 $\frac{1}{2}\%$ 年金終價增加	\$ 0.39992

本例 \$1 之年金終價 \$ 15.04275，較利率六釐之終價 14.97164，多 .07111，卽應增加利率 $\frac{.07111}{.39992}\times .5\%$ 或 .0889%。故實利率爲 6%+.0889%=6.0889%。

六個月之利率爲:

$$\frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1 \qquad \begin{matrix} p=2 \\ m=2 \end{matrix}$$

$$=(1,06089)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$\log 1.06089=.0256703$$

$$\tfrac{1}{2}\log 1.06089=.0128351$$

.0128351 之眞數爲 1.02999，或 1.03。

$$\frac{j}{m}=(1.03-1)$$

$$=.03=3\%$$

吾人於此可知本例之利率爲每年 6%，每半年復利一次。

乙　每年付款數次之年金

子、每年復利一次者

例——每六個月存 \$500，期五年，其年金終價爲 \$5,889.53，求其每年之利率。

解:

$$\frac{\ddot{K}}{\frac{R}{p}}+1=\frac{(1+i_p)^{p(n+\frac{1}{p})}-1}{i_p} \qquad \begin{matrix} \ddot{K}=5,889.53 \\ R=1,000 \end{matrix}$$

$$\frac{\frac{5,889.53}{1,000}}{2}+1=\frac{(1+i_p)^{2(5+\frac{1}{2})}-1}{i_p} \qquad \begin{array}{l} n=5 \\ p=2 \end{array}$$

$$12.77906=\frac{(1+i_p)^{11}-1}{i_p}$$

由用表 V 查出:

$1 按利率 3% 時期十一期之年金終價爲	$12.8077956
$1 按利率 $2\frac{3}{4}$% 時期十一期之年金終價爲	12.6444158
利率增加 $\frac{1}{4}$% 年金終價增加	$0.1633798

本例 $1 之年金終價爲 $12.77906，較利率 $2\frac{3}{4}$% 之終價 12.64441，多 .13465，卽利率應增加 $\frac{.134}{.163}\times .25$，或 .2055%。

每期之利率爲 2.75%+.2055%，或 2.955%。玆再將其化爲每年之利率。

$$i=(1+i_p)^p-1$$
$$=(1.02955)^2-1$$

用對數法求 $(1.02955)^2$

$$\log 1.02955=.0126475$$
$$2\log 1.02955=.0252950$$

.0252950 之眞數爲 1.0599，或 1.06

$$i=(1.06-1)=.06=6\%$$

丑、每年復利數次者

(1) 付款次數與複利次數不同者

例——每三個月初存 $1,000，期八年，每年複利二次。其期首年金終價爲 $39,485.82，求其利率。

解:

$$\frac{\frac{\ddot{K}}{R}}{p}+1=\frac{(1+i_p)^{p(n+\frac{1}{p})}-1}{i_p} \qquad \begin{array}{l} \ddot{K}=39,485.82 \\ R=4,000 \\ p=4 \end{array}$$

$$\frac{\dfrac{39,485.82}{4,000}}{4}+1=\frac{(1+i_p)^{p(n+\frac{1}{p})}-1}{i_p} \qquad n=8$$

$$39.48582+1=\frac{(1+i_p)^{4(8+\frac{1}{4})}-1}{i_p}$$

$$40.48582=\frac{(1+i_p)^{33}-1}{i_p}$$

\$1 按利率$1\frac{1}{4}\%$時期三十三期之年金終價爲	40.53857
\$1 按利率$1\frac{1}{8}\%$時期三十三期之年金終價爲	39.69279
利率增加$\frac{1}{8}$，期首年金終價增加	.84578

本例\$1之年金終價爲\$40.48582，較利率$1\frac{1}{8}\%$之終價\$39.69279多.79303，卽利率應增加$\frac{.793}{.845}\times .125\%$，或.1173%。故每期之實利率爲 1.125% + .1173% = 1.242%，每六個月之利率爲：

$$\frac{j}{m}=(1+i_p)^{\frac{p}{m}}-1$$

$$\frac{j}{m}=(1.01242)^2-1$$

$$\log 1.01242=.0053607$$

$$2\log 1.01242=.0107214$$

.0107214 之眞數爲 1.02499，或 1.025%。

$$\frac{j}{m}=(1.025-1)$$

$$=.025$$

六個月之利率$2\frac{1}{2}\%$，等於年息5%，每半年複利一次。

(2)付款次數與複利次數相同者

例——每六個月初存 \$ 1,000，期五年，每年複利二次，其期首年金終價爲 \$ 11,807.79，求其利率。

解：

$$\frac{\ddot{K}}{\frac{R}{p}}+1=\frac{(1+i_p)^{p(n+\frac{1}{p})}-1}{i_p} \qquad \ddot{K}=\$11,807.79$$

$$R=2,000$$

$$p=2$$

$$\frac{11,807.79}{\frac{2,000}{2}}+1=\frac{(1+i_p)^{2(5+\frac{1}{2})}-1}{i_p} \qquad n=5$$

$$12.80779=\frac{(1+i_p)^{11}-1}{i_p}$$

查用表 V 第十一期欄內之 12.80779 爲利率 3%，每六個月之利率 3%，等於每年利率 6%，每半年複利一次。

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每二年存 \$100，期六年，其期首年金終價爲 \$318.50，求利率。

解：

$$\frac{\ddot{K}}{R_k}+1=\frac{(1+i_k)^{(\frac{n}{k}+1)}-1}{i_k} \qquad \ddot{K}=\$318.50$$

$$R_k=100$$

$$\frac{318.50}{100}+1=\frac{(1+i_k)^{\frac{6}{2}+1}-1}{i_k} \qquad k=2$$

$$n=6$$

$$4.185=\frac{(1+i_k)^4-1}{i_k}$$

由用表 V 查出：

\$1 按利率 $3\frac{1}{2}$% 期四年之年金終價爲	4.21494
\$1 按利率 3% 期四年之年金終價爲	4.18362
利率增加 $\frac{1}{2}$%，期首年金終價增加	.03132

本例 \$1 之年金終價爲 \$4.1850，較利率 3% 之終價 4.18362，多 .00138，卽利率應增加 $\frac{.00138}{.03132}\times .5\%$，或 .022%。

每兩年之利率爲 3.022%，求每年之利率如下：

$$i=(1+i_k)^{\frac{1}{k}}-1$$

$$=(1+i_k)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$=(1.03022)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$\log 1.03022 = .0129299$$

$$\tfrac{1}{2}\log 1.03022 = .0064649$$

$$.0064649 \text{ 之眞數爲 } 1.015$$

$$i = (1.015 - 1)$$

$$= .015$$

每年之利率爲 $1\frac{1}{2}\%$

丑、每年複利數次者

例——每二年初存 \$100，期八年，每年複利二次，其期首年金終價爲 \$442.29，求其利率。

$$\ddot{K} = \$442.29 \qquad R_k = 100 \qquad n = 8 \qquad k = 2$$

$$\frac{\ddot{K}}{R_k} + 1 = \frac{(1+i_k)^{\left(\frac{n}{k}+1\right)} - 1}{i_k}$$

$$4.4229 + 1 = \frac{(1+i_k)^{\frac{8}{2}+1} - 1}{i_k}$$

$$5.4229 = \frac{(1+i_k)^{5} - 1}{i_k}$$

由用表 V 查出：

\$1 按利率 $4\frac{1}{2}\%$ 時期五期之年金終價爲	5.4707097
\$1 按利率 4% 時期五期之年金終價爲	5.4163225
利率增加 $\frac{1}{2}\%$ 期首年金終價增加	.0543872

本例 \$1 之年金終價較利率 4% 者多 .0066(卽 5.4229—5.4163)，卽利率應增 $\frac{.0066}{.05438} \times .5\%$，或 .060684。故每二年之實利率爲 4% + .060684% = 4.060684%。

每六個月之利率爲：

$$\frac{j}{m} = (1+i_k)^{\frac{1}{mk}} - 1 = (1.040606)^{\frac{1}{4}} - 1$$

用對數表求 $(1.040606)^{\frac{1}{4}}$：

$$\log 1.040606 = .0172863$$

$$\tfrac{1}{4}\log 1.040606 = .00432157$$

.00432157 之眞數爲 1.01，故

$\frac{j}{m}=1.01-1=.01$ 卽每六個月之利率爲 1%。

每年之利率爲 $2\times1\%=2\%$，每半年複利一次。

習 題 二

1. 設利率九釐，每半年複利一次，現擬於每月初存款一次，於第十一年底儲積至$1,000求每月存款數額。
2. 設上題爲每半年存款一次，求每半年初應存之數額。
3. 設每年存 $ 86.421，利率八釐，每半年複利一次，問須經若干年方可儲至 $ 1,000。
4. 設每三個月初存 $ 100，每半年複利一次，期十五年，得本息 $ 13,784，求其利率。

第九節 計算期首年金現價之公式

普通年金與期首年金之區別，在其逐次付款之時期。蓋一在期末，一在期首。期首年金第一期付款之現價，卽爲付款之數額，若第一期所付之款爲1，則該款之現價仍爲1。第二期付款在第二期之初，或第一期之末，故期首年金第二次所付之款，等於普通年金第一期所付之款，以後類推。由此可知計算期首年金之現價，祇須較普通年金少算一期，再加第一期之付款卽得。茲以 $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ 符號代表期首年金之現價，則計算 $1 之期首年金現價之公式如下：

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=1+a_{\overline{n-1}|} \qquad \text{(第 16 式)}$$

茲將普通年金現價與期首年金現價比較於下：(假定利率爲三釐，時期爲四年)。

	普通年金	期首年金
第一期付款之現價	$(1.03)^{-1}=.970874$	$1.00=1.000$
第二期付款之現價	$(1.03)^{-2}=.942596$	$(1.03)^{-1}=.970874$
第三期付款之現價	$(1.03)^{-3}=.915142$	$(1.03)^{-2}=.942596$
第四期付款之現價	$(1.03)^{-4}=.888487$	$(1.03)^{-3}=.915142$
	3.717099	3.828612

由上例觀之，期首年金現價之第一期爲 1，第二期付款之現價，確與普通年金第一期付款之現價相同。

若每年付款數次，則計算時可以應用下式：

$$\ddot{a}^{(p)}_{\overline{n}|}=\frac{1}{p}+a_{\overline{n-\frac{1}{p}}|} \qquad \text{(第 17 式)}$$

求期首年金現價所用之公式，概以 $(1+i)$ 或 $(1+i_p)$ 乘普通年金現價之公式卽得。如

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times(1+i) \qquad \text{(第 18 式)}$$

至於其他各類情形，亦可照此推算。卽照普通年金求現價之公式，乘本章第一節所引之七式(第 1 式至第 7 式)，見下節實例。

至於期首年金現價之符號，則以 $\ddot{A}$ 代之。

第十節 計算期首年金現價之實例

甲 每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——設每年初取 \$ 1,000，期五年，利率五釐，每年複利一次，求此期首年金現價。

$R=\$1,000$
$n=5$
$i=.05$

解：1. $\ddot{A}=R(1+a_{\overline{n-1}|})=1,000(1+a_{\overline{4}|5\%})$

$=1,000(1+3.5459505)=\$4,545.95$

2. $\ddot{A}=R\,a_{\overline{n}|}\times(1+i)=\$1,000\times a_{\overline{5}|5\%}\times 1.05$

$=\$4,545,95$

丑、每年複利數次者

例——設每年初取 \$1,000，期五年，利率五釐，每半年複利一次，求此期首年金現價。

$R=1,000$
$n=5$
$j=.05$
$m=2$

解：

$$\ddot{A}=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

$$\ddot{A}=1,000\times\frac{1-\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{-2\times5}}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}-1}\times\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}$$

$$=1,000\times\frac{1-(1.025)^{-10}}{(1.025)^{2}-1}\times(1.025)^{2}$$

$$=1,000\times\frac{1-(1.025)^{-10}}{.025}\times\frac{.025}{(1.025)^{2}-1}\times(1.025)^{2}$$

$$=1,000\times8.7520639\times.4938272\times1.050625$$

$$=\$4,540.81$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——設每六個月初取 \$4,000, 期四年,利率五釐,每年複利一次,求期首年金現價。

普通年金現價爲 \$28,717.87, 〔第四章第 11 節(乙)(子)〕現乘以 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$。

$$\ddot{A}=\text{普通年金現價}\times(1+i)^{\frac{1}{p}}$$

$$=28,717.87\times(1.05)^{\frac{1}{2}}=28,717.87\times1.024695$$

$$=\$29,427.06$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

例——設每三個月初取 \$500, 期五年,利率五釐,每半年複利一次,求期首年金現價。

$$\ddot{A}=\text{普通年金現價}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$$=8,806.45(\text{詳第四章})\times(1.025)^{\frac{1}{2}}=8,806.45\times1.0124228$$

$$=\$8,915.85$$

(2)付款次數與複利次數相同者

例——設每三個月可取款 \$300, 期二年,利率六釐,每三個月複利一

次，求期首年金現價。

$$\ddot{A}=\text{普通年金現價}\times\left(1+\frac{j}{p}\right)$$

$$=2{,}245.78\ (\text{詳第四章})\times(1.015)$$

$$=\$\,2{,}279.47$$

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——每二年初取 \$1,000，期八年，利率六釐，每年複利一次，求期首年金現價。

$$\ddot{A}=\text{普通年金現價}\times(1+i)^{k}$$

$$=3{,}014.46\ (\text{第四章})\times(1.06)^{2}=3014.46\times1.1236$$

$$=\$\,3{,}387.05$$

丑、每年複利數次者

例——設每二年取 \$1,000，期十年，利率五釐，每半年複利一次，求期首年金現價。

$$\ddot{A}=\text{普通年金現價}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}$$

$$=3{,}754.15\ (\text{第四章})\times(1.025)^{4}=3{,}754.15\times1.1038129$$

$$=\$\,4{,}143.88$$

第十一節 由期首年金現價求年金額之公式

應用求期首年金現價之公式，予以移項，可求其年金額；或由普通年金現價求年金額之公式，按照情形，除以$(1+i)$或$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$等。以求得之。玆證明之如下：

今擇一期首年金求現價之公式：

$$\ddot{A}=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times(1+i)$$

雙方以 i 除之：

$$\ddot{A}i=R\times\{1-(1+i)^{-n}\}\times(1+i)$$

雙方再以 $1-(1+i)^{-n}$ 除之：

$$\frac{\ddot{A}i}{1-(1+i)^{-n}}=R(1+i)$$

雙方再以 $(1+i)$ 除之：

$$R=\ddot{A}\times\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\times\frac{1}{(1+i)} \qquad (第19式)$$

上式除 $\frac{1}{(1+i)}$ 外，即爲由普通年金現價求年金額之公式。故求期首年金現價之年金額，即照普通年金現價求年金額之公式，按照各種情形除以 $(1+i)$ 或 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$ 等。

第十二節　由期首年金現價求年金額之實例

下列各題以 R 代表普通年金之年金額，$\ddot{R}$ 代表期首年金之年金額。

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——現存 \$ 4,545.95，期五年，利率五釐，每年複利一次，求其期首年金額。

解：　$\ddot{R}=R\div(1+i)$

$$R=A\times\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}=A\times\frac{1}{a_{\overline{5}|.05}}$$

$$=4,545.95\times.2309748=1,049.999=\$1,050$$

$$\ddot{R}=\frac{1.050}{1+i}=\frac{1,050}{1.05}=\$1,000$$

丑、每年複利數次者

例——現存 \$ 4,540.81，期五年，利率五釐，每年複利二次，求其期首年金額。

解：　$\ddot{R}=R\div\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$

求普通年金現價之年金額如下：

$$R=A\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}=4{,}540.81\times\frac{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}-1}{1-\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{-2\times5}}$$

$$=4{,}540.81\times\frac{(1.025)^{2}-1}{1-(1.025)^{-10}}$$

$$=4{,}540.81\times\frac{(1.025)^{2}-1}{.025}\times\frac{.025}{1-(1.025)^{-10}}$$

$$=4{,}540.81\times2.025\times.1142588$$

$$=\$1{,}050.625$$

求期首年金現價之年金額如下：

$$\ddot{R}=\frac{1{,}050.625}{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}}=\frac{1{,}050.625}{(1.025)^{2}}=\frac{1{,}050.625}{1.050625}=\$1{,}000$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——現存 \$ 29,427.03，期四年，利率五釐，每年複利一次，求每半年初可取之年金額。

解：　$\ddot{R}=R\div(1+i)^{\frac{1}{p}}$

先求普通年金現價之年金額如下：

$$R=A\times\frac{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}{1-(1+i)^{-n}}=29{,}427.03\times\frac{2\{(1.05)^{\frac{1}{2}}-1\}}{1-(1.05)^{-4}}$$

$$=29{,}427.03\times\frac{.0493902}{1-.8227025}$$

$$=29{,}427.03\times\frac{.0493902}{.1772975}=\$8{,}197.56$$

期首年金現價之年金額如下：

$$\ddot{R}=\frac{8,197.56}{(1+i)^{\frac{1}{p}}}=\frac{8,197.56}{(1.05)^{\frac{1}{2}}}=\frac{8,197.56}{1.0246951}$$

$$=\$7,999.999=\$8,000$$

$$\frac{\ddot{R}}{p}=\$4,000$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

照相似普通年金現價之年金額,除以 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$

例——期首年金現價計 \$8,915.85,期五年,利率五釐,每半年複利一次,求每三個月初之年金額。

解:

$$R=A\times\frac{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}$$

$$8,915.85\times\frac{4\{(1.025)^{\frac{2}{4}}-1\}}{1-(1.025)^{-2\times5}}=8,915.85\times\frac{4\{(1.025)^{\frac{1}{2}}-1\}}{1-(1.025)^{-10}}$$

$$8,915.85\times\frac{4(1.0124228-1)}{1-.781198}=8,915.85\times\frac{.0496912}{.2188012}$$

$$=\$2,024.8448$$

期首年金現價之年金額為:

$$\ddot{R}=\frac{2,024.8448}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}}=\frac{2,024.8448}{(1.025)^{\frac{2}{4}}}=\frac{2,024.8448}{(1.025)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2,024.8448}{1.0124228}$$

$$=1,999.999=\$2,000$$

$$\frac{\ddot{R}}{p}=\frac{2,000}{4}=\$500$$

(2)付款次數與複利次數相同者

例——期首年金現價為 \$2,279.47,期二年,利率六釐,每三個月複利一次,求每三個月初之年金額。

$$\ddot{R}=R\div\left(1+\frac{j}{p}\right)$$

先求普通年金現價之年金額如下:

$$\frac{R}{p}=A\times\frac{\frac{j}{p}}{1-\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-np}}=2,279.47\times\frac{.015}{1-(1.015)^{-8}}$$

$$=2,279.47\times.133584=\$\,304.50$$

期首年金現價之年金額為:

$$\frac{\ddot{R}}{p}=\frac{304.50}{\left(1+\frac{j}{p}\right)}=\frac{304.50}{1.015}=\$\,300$$

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——現存 \$ 3,387.05, 期八年,利率六釐,每年複利一次,求每二年初可取之數額。

解:

$$\ddot{R}_k=R_k\div(1+i)^k$$

先求普通年金之年金額如下:

$$R_k=A\times\frac{(1+i)^k-1}{1-(1+i)^{-n}}=3,387.05\times\frac{(1.06)^2-1}{1-(1.06)^{-8}}$$

$$=3,387.05\times\frac{(1.06)^2-1}{.06}\times\frac{.06}{1-(1.06)^{-8}}$$

$$=3,387.05\times2.060\times.1610359$$

$$=\$\,1,123.60$$

期首年金現價之年金額為:

$$\ddot{R}_k=\frac{1,123.60}{(1+i)^k}=\frac{1,123.60}{(1.06)^2}=\frac{1,123.60}{1.1236}=\$\,1,000$$

丑、每年複利數次者

例——現存 \$ 4,143.88, 期十年,利率五釐,每半年複利一次,求每二年可取之年金額:

$$\ddot{R}_k = R_k \div \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}$$

先求普通年金現價之年金額如下：

$$R_k = A \times \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}} = 4,143.88 \times \frac{(1.025)^4-1}{1-(1.025)^{-20}}$$

$$= 4,131.88 \times \frac{(1.025)^4-1}{.025} \times \frac{.025}{1-(1.025)^{-20}}$$

$$= 4,143.88 \times 4.1525156 \times .0641471$$

$$= \$1,103.81$$

求期首年金之年金額如下：

$$\ddot{R}_k = \frac{1,103.81}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}} = \frac{1,103.81}{(1.025)^4} = \frac{1,103.81}{1.10381} = \$1,000$$

第十三節　由期首年金現價求時期之公式

求期首年金現價之時期，可擇相當期首年金現價之公式，將已知數代入求 n。其演算方法或用對數，或用用表及推值法，茲將年金現價之公式之一，演化求時期之方程式如下：

$$\ddot{A} = R \times (1 + a_{\overline{n-1}|}) = R\left\{1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\right\}$$

除以 R：

$$\frac{\ddot{A}}{R} = 1 + \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

將 1 移項：

$$\frac{\ddot{A}}{R} - 1 = \frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}$$

乘以 i：

$$\left(\frac{\ddot{A}}{R} - 1\right)i = 1 - (1+i)^{-(n-1)}$$

移項：

$$-1+\left(\frac{\ddot{A}}{R}-1\right)i=-(1+i)^{-(n-1)}$$

變號：

$$1-\left(\frac{\ddot{A}}{R}-1\right)i=(1+i)^{-(n-1)}$$

用對數法計算：

$$\log\left\{1-\left(\frac{\ddot{A}}{R}-1\right)i\right\}=-(n-1)\log(1+i)$$

除以 $\log(1+i)$：

$$-(n-1)=\frac{\log\left\{1-\left(\frac{\ddot{A}}{R}-1\right)i\right\}}{\log(1+i)}$$

變號：

$$n-1=-\frac{\log\left\{1-\left(\frac{\ddot{A}}{R}-1\right)i\right\}}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 20 式)}$$

其他各種情形，均可照此演化，見後列各例。

第十四節 由期首年金現價求時期之實例

甲 每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——現存＄4,545.95，利率五釐，每年複利一次，每年初擬取＄1,000，求其提取之時期。

$$\ddot{A}=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times(1+i) \qquad \ddot{A}=\$4,545.95$$

$$4,545.95=1,000\times\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}\times(1.05) \qquad R=\$1,000$$

$$i=.05$$

$$4.54595=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}\times(1.05)$$

$$\frac{4.54595}{1.05}=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}$$

$$4.32947=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}$$

由用表 VI 利率五釐欄內，查出 4.32947 爲五期。倘五釐欄內無此確數，可取其最相近之二數，用推値法推算之。

如用對數法計算，代入公式如下：

$$n-1=-\frac{\log_{10}\left\{1-\left(\frac{\ddot{A}}{R}-1\right)i\right\}}{\log_{10}(1+i)}$$

例同上

$$n-1=-\frac{\log_{10}\left\{1-\left(\frac{4,545.95}{1,000}-1\right).05\right\}}{\log(1.05)}$$

$$=-\frac{\log_{10}\{1-.1772975\}}{\log 1.05}$$

$$=-\frac{\log_{10}.8227025}{\log_{10}1.05}$$

$$=-\frac{\bar{1}.915241}{.0211892991}=\frac{.084759}{.021189}=4$$

$\therefore \quad n=4+1=5$

丑、每年復利數次者

例——現存 \$4,540.81，利率五釐，每半年復利一次，茲擬每年初提取 \$1,000，求其可以提取之時期。

$$\ddot{A}=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

$\ddot{A}=\$4,540.81$
$R=\$1,000$
$j=.05$
$m=2$

$$4,540.81=1,000\times\frac{1-(1.025)^{-2n}}{(1.025)^{2}-1}\times(1.025)^{2}$$

$$4.54081=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{1.050625-1}\times1.050625$$

$$\frac{4.54081}{1.050625}=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{.050625}$$

$$\frac{4.54081\times .050625}{1.050625}=1-(1.025)^{-2n}$$

$$.2188016=1-(1.025)^{-2n}$$

將1移項並變號:

$$1-.2188016=(1.025)^{-2n}$$

$$.7811984=(1.025)^{-2n}$$

由用表 IV 利率 $2\frac{1}{2}\%$ 欄內查出 .7811984 爲十期。故

$$2n=10$$

$$n=5$$

用對數法計算之公式如下:

$$n-1=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{\ddot{A}}{R}-1\right)\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}} \qquad \text{(第 21 式)}$$

$$=\frac{\log\left[1-\left(\frac{4,540.81}{1,000}-1\right)\left\{(1.025)^{2}-1\right\}\right]}{2\log 1.025}$$

$$=\frac{\log[1-3.54081\times .050625]}{2\log 1.025}$$

$$=\frac{\bar{1}.914209}{2\times .010724}=\frac{\bar{1}.914209}{.021448}=\frac{.085791}{.021448}=4$$

$$\therefore\quad n=4+1=5$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——現存 \$29,427.03，利率五釐，每年複利一次，玆擬於每六個月初提取 \$4,000，求其可以提取之時期。

$$\ddot{A}=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}\times(1+i)^{\frac{1}{p}} \qquad \ddot{A}=\$29,427.03$$

$$R=\$8,000$$

$$29,427.03=\frac{8,000}{2}\times\frac{1-(1.05)^{-n}}{(1.05)^{\frac{1}{2}}-1}\times(1.05)^{\frac{1}{2}} \qquad i=.05$$

$$p=2$$

$$29,427.03=4,000\times\frac{1-(1.05)^{-n}}{1.024695-1}\times 1.024695$$

$$\frac{29,427.03\times.024695}{4,000\times1.024695}=1-(1.05)^{-n}$$

$$.17729=1-(1.05)^{-n}$$

移項並變號:

$$1-.17729=(1.05)^{-n}$$

$$.82271=(1.05)^{-n}$$

由用表 IV 利率五釐欄內查出 .82271 爲四期，故

$$n=4$$

用對數法計算之公式爲:

$$n-\frac{1}{p}=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{\frac{\ddot{A}}{R}}{p}-1\right)\left\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right\}\right]}{\log\,(1+i)} \qquad \text{(第 22 式)}$$

例同上

$$n-\frac{1}{p}=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{\frac{29427.03}{8\,000}}{2}-1\right)\left\{(1+.05)^{\frac{1}{2}}-1\right\}\right]}{\log 1.05}$$

$$=-\frac{\log\,[1-6.3567575\times.0246950766]}{\log 1.05}$$

$$=-\frac{\log .8430204}{\log 1.05}$$

$$=-\frac{\bar{1}.925838}{.0211892991}=\frac{.074162}{.0211892991}=3.5$$

或 $n-\frac{1}{2}=3.5$

$\therefore \quad n=3.5+.5=4$

丑、每年複利數次之年金

(1)付款次數與複利次數不同者

例——現存 \$8,915.85，利率五釐，每半年複利一次，現擬於每三個月初取 \$500，求其可以提取之時期。

$$\ddot{A}=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}$$

$\ddot{A}=\$\,8,915.85$
$R=\$\,2,000$
$j=.05$
$m=2$
$p=4$

$$8,915.85=\frac{2,000}{4}\times\frac{1-(1.025)^{-2n}}{(1.025)^{\frac{2}{4}}-1}\times(1.025)^{\frac{2}{4}}$$

$$\frac{8,915.85}{500}=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{(1.025)^{\frac{1}{2}}-1}\times(1.025)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{8,915.85}{500}=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{1.0124228-1}\times 1.0124228$$

$$\frac{8,915.85\times .0124228}{500\times 1.0124228}=1-(1.025)^{-2n}$$

$$.2188015=1-(1.025)^{-2n}$$

移項並變號:

$$(1.025)^{-2n}=.7811985$$

由用表 IV 利率 $2\frac{1}{2}\%$ 欄內查出 .7811985 爲十期,故

$$2n=10$$

$$n=5$$

用對數法計算之公式爲:

$$n-\frac{1}{p}=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{\ddot{A}}{\frac{R}{p}}-1\right)\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}} \qquad \text{(第 23 式)}$$

$$=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{8915.85}{500.00}-1\right)\left\{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{\frac{2}{4}}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}}$$

$$=-\frac{\log\,[1-16.8317\times .0124248366]}{\log 1.050625}$$

$$=-\frac{\log 1-.2090311}{\log 1.050625}$$

$$=-\frac{\log .7909689}{\log 1.050625}$$

$$=-\frac{\bar{1}.898159}{.021448}=\frac{.101841}{.021448}$$

$$=4.75$$

$$n=4\cdot 75+\cdot 25=5$$

(2)付款次數與複利次數相同者

例——現存 \$2,279·47，利率六釐，每三個月複利一次，現擬於每三個月初提取 \$300，求其可以提取之時期。

$$\ddot{A}=\frac{R}{p}\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-np}}{\frac{j}{p}}\times\left(1+\frac{j}{p}\right)$$

$\ddot{A}=\$2,279.47$

$\frac{R}{p}=\$300$

$j=.06$

$m=4$

$p=4$

$$2,279.47=300\times\frac{1-(1.015)^{-4n}}{.015}\times(1.015)$$

$$\frac{2,279.47\times .015}{1.015\times 300}=1-(1.015)^{-4n}$$

$$.112289=1-(1.015)^{-4n}$$

移項並變號：

$$.887711=(1.015)^{-4n}$$

由用表 IV $1\frac{1}{2}\%$ 欄內查出 .887711 爲八期，故

$$4n=8$$

$$n=2$$

用對數法計算之公式如下：

$$n-\frac{1}{p}=-\frac{\log\left\{1-\left(\frac{\ddot{A}}{\frac{R}{p}}-1\right)\frac{j}{p}\right\}}{\log\left(1+\frac{j}{p}\right)^{p}} \qquad \text{(第 24 式)}$$

例同上

$$n-\frac{1}{4}=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{2279.47}{300.00}-1\right)\frac{.06}{4}\right]}{\log\left(1+\frac{.06}{4}\right)^{4}}$$

$$= -\frac{\log\,[1-6.598231\times.015]}{\log\,(1.015)^4}$$

$$= -\frac{\log\,.901026535}{\log\,1.0613635}$$

$$= -\frac{\bar{1}.954738}{.025844} = \frac{.045262}{.025844}$$

$$= 1.75$$

$$n = 1.75 + .25 = 2$$

丙　數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——現存 \$3,387.05，利率六釐，每年複利一次，擬於每二年初提取 \$1,000，求其可以提取之時期。

$$\ddot{A} = R_k \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^k-1} \times (1+i)^k \qquad \ddot{A} = \$3,387.05$$

$$3,387.05 = 1,000 \times \frac{1-(1.06)^{-n}}{(1.06)^2-1} \times (1.06)^2 \qquad R_k = \$1,000$$

$$\qquad i = .06$$

$$3.38705 = \frac{1-(1.06)^{-n}}{1.1236-1} \times 1.1236 \qquad k = 2$$

$$\frac{3.38705 \times .1236}{1.1236} = 1-(1.06)^{-n}$$

$$.372587 = 1-(1.06)^{-n}$$

移項並變號：

$$1 - .372587 = (1.06)^{-n}$$

$$.627413 = (1.06)^{-n}$$

查用表 IV 利率六釐欄內 .627413 爲八期，故

$$n = 8$$

用對數法計算之公式如下：

$$n-k = -\frac{\log\left[1-\left(\frac{\ddot{A}}{R_k}-1\right)\left\{(1+i)^k-1\right\}\right]}{\log\,(1+i)} \qquad \text{(第 25 式)}$$

$$=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{3,337.05}{1,000}-1\right)\left\{(1.06)^2-1\right\}\right]}{\log 1.06}$$

$$=-\frac{\log[1-2.38705\times .1236]}{\log 1.06}$$

$$=-\frac{\log .704961}{\log 1.06}=-\frac{\bar{1}.848165}{.025306}$$

$$=\frac{.151835}{.025306}=6$$

$$n=6+2=8$$

丑、每年複利數次者

例——現存 \$4,143.87，利率五釐，每半年複利一次，擬於每二年初提取 \$1,000，求其可以提取之時期。

$$\ddot{A}=R_k\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}$$

$\ddot{A}=\$4,143.87$
$R_k=\$1,000$
$j=.05$
$m=2$
$k=2$

$$4,143.87=1,000\times\frac{1-(1.025)^{-2n}}{(1.025)^4-1}\times(1.025)^4$$

$$4.14387=\frac{1-(1.025)^{-2n}}{1.10381289-1}\times 1.10381289$$

$$\frac{4.14387\times .10381289}{1.10381289}=1-(1.025)^{-2n}$$

$$.38972829=1-(1.025)^{-2n}$$

移項並變號：

$$1-.38972829=(1.025)^{-2n}$$

$$.6102717=(1.025)^{-2n}$$

由用表IV利率 $2\frac{1}{2}\%$ 欄內查出 .6102717 一數之時期，爲二十期，故

$$2n=20$$

$$n=10$$

用對數法計算之公式爲：

$$n-k=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{\ddot{A}}{R_k}-1\right)\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1\right\}\right]}{\log\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}\quad(\text{第 26 式})$$

例同上

$$n-2=-\frac{\log\left[1-\left(\frac{4,143.87}{1,000}-1\right)\left\{(1.025)^4-1\right\}\right]}{\log\,(1.025)^2}$$

$$=-\frac{\log\,[1-3.14387\times.1038129]}{\log 1.050625}$$

$$=-\frac{\log\,.6736254}{\log 1.050625}$$

$$=-\frac{\bar{1}.828419}{.021448}=\frac{.171581}{.021448}$$

$$=8$$

$$n=8+2=10$$

第十五節　由期首年金現價求利率之公式

求利率之方法與以前所示者相同，亦可用複利現價表或年金現價表檢查。如該數為表中所無者，則再用推值法推算之。茲取年金現價中公式之一演化之，以求利率如下：

$$\ddot{A}=R(1+a_{\overline{n-1}|})$$

除以 R：

$$\frac{\ddot{A}}{R}=1+a_{\overline{n-1}|}$$

將 1 移項：

$$\frac{\ddot{A}}{R}-1=a_{\overline{n-1}|}$$

$$\frac{\ddot{A}}{R}-1=\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i}\quad(\text{第 27 式})$$

其他各類情形，亦可照此演化，其演化所得之公式，列於下節各例

內。

式中若僅有 i 為未知數，可將其餘各數代入式內。並可檢查年金現價表，即按照時期查出與 $\frac{\ddot{A}}{R}-1$ 之價值相同者，其利率爲何，如無相同者，即以最相近之數按推值法推算之。

第十六節　由期首年金現價求利率之實例

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——期首年金現價為 \$ 4,545.95，以後每年初可取 \$ 1,000，期五年，求其利率。

$$\frac{\ddot{A}}{R}-1=\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} \qquad \ddot{A}=\$4,545.95$$

$$\frac{4,545.95}{1,000}-1=\frac{1-(1+i)^{-(5-1)}}{i} \qquad R=\$1,000$$

$$3.54595=\frac{1-(1+i)^{-4}}{i} \qquad n=5$$

查用表 VI，第四期欄內，得 3.54595 一數之利率爲5%。

丑、每年複利數次者

例——現存 \$ 4,540.81，每半年複利一次，期五年，每年初取 \$ 1,000，求其利率。

$$\frac{\ddot{A}}{R}-1=\frac{1-(1+i)^{-(n-1)}}{i} \qquad (第 28 式)$$

$$\frac{4,540.81}{1,000}-1=\frac{1-(1+i)^{-4}}{i} \qquad \ddot{A}=\$4,540.81 \quad R=\$1,000$$

$$3.54081=\frac{1-(1+i)^{-4}}{i} \qquad n=5$$

由年金現價表四期欄內查出：

\$1 按利率 5% 之年金現價爲	3.5459505
\$1 按利率 $5\frac{1}{2}$% 之年金現價爲	3.5051501
利率減少 $\frac{1}{2}$% 年金現價增加	.0408004

本例 $1 之年金现價為 3.54081，較 3.5459505 少 .00514，其利率卽應較 5% 增加 $\frac{.00514}{.04080}\times .5\%$ 或 .0630%，故一年之實利率為 5.063%。

求每年複利二次之名利率：

$$\frac{j}{m}=(1+i)^{\frac{1}{m}}-1$$

$$=(1.05063)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$\log 1.05063=.0214498$$

$$\tfrac{1}{2}\log 1.05063=.0107249$$

.0107249 之眞數為 1.025%

$$\frac{j}{m}=1.025-1$$

$$\frac{j}{m}=.025$$

半年之利率為 .025，一年之利率為 5%，每半年複利一次。

乙 每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

例——現存 \$ 29,427.03，期四年，每年複利一次。每六個月初取 \$4,000 求其利率。

$$\frac{\ddot{A}}{\frac{R}{p}}-1=\frac{1-(1+i_p)^{-p\left(n-\frac{1}{p}\right)}}{i_p} \qquad \text{(第 29 式)}$$

$$\frac{29,427.03}{\frac{8,000}{2}}-1=\frac{1-(1+i_p)^{-2\left(4-\frac{1}{2}\right)}}{i_p}=\frac{1-(1+i_p)^{-7}}{i_p}$$

$$7.356757-1=\frac{1-(1+i_p)^{-7}}{i_p} \qquad \ddot{A}=\$29,427.03$$

$$R=\$8,000$$

$$6.356757=\frac{1-(1+i_p)^{-7}}{i_p} \qquad p=2$$

由用表 VI 第七期欄內查出與 6.356757 最相近之二數爲:

$1 按利率 2% 七期之年金現價爲	6.471991
$1 按利率 2½% 七期之年金現價爲	6.349390
利率增加 ½% 年金現價減少	.122601

本例 $1 之年金現價爲 6.356757，較利率 2% 之現價 6.471991，少 .115234。則利率應照 2% 加 $\frac{115234}{122601}\times .5\%$，或 .4699%。

每三個月之利率爲 2% + .4699% = 2.4699。

一年之利率如下:

$$i=(1+i_p)^p-1=(1.02469)^2-1$$

用對數求 $(1.02469)^2$ 如下:

$$\log 1.02469 = .0105925$$

$$2\log 1.02469 = .0211850$$

.0211850 之眞數爲 1.04999，或 1.05。

利率爲 1.05 − 1 = .05 = 5%

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

例——現存 $8,915.84，期五年，每年複利二次，每三個月初取 $500，求利率。

$$\frac{\ddot{A}}{\frac{R}{p}}-1=\frac{1-(1+i_p)^{-p\left(n-\frac{1}{p}\right)}}{i_p} \qquad \text{(第 30 式)}$$

$\ddot{A}=\$8,915.84$

$n=5$

$p=4$

$R=\$2,000$

$$\frac{8,915.84}{500}-1=\frac{1-(1+i_p)^{-4\left(5-\frac{1}{4}\right)}}{i_p}$$

$$17.83168-1=\frac{1-(1+i_p)^{-19}}{i_p}$$

$$16.83168=\frac{1-(1+i_p)^{-19}}{i_p}$$

由用表 VI 第十九期欄內查出與 16.83168 最相近之利率如下:

利率 1% 十九期之年金現價為	17.2260085
利率 $1\frac{1}{4}$% 十九期之年金現價為	16.8193076
利率增 $\frac{1}{4}$%，年金現價減少	.4067009

本例\$1之年金現價為\$16.83168,較利率1%之現價\$17.2260085少 .394328 卽利率較 1% 增加 $\frac{.394328}{.406701}\times .25\%$ 或 .242394%。

三個月之利率為 1% +.242394% =1.24239%。

每六個月之利率，應計算如下：

$$\frac{j}{m}=(1+i_p)^{\frac{p}{m}}=(1.0124239)^{\frac{4}{2}}=(1.0124239)^2$$

用對數計算 $(1.0124239)^2$ 如下：

$$\log 1.0124239=.0053606$$

$$2\log 1.0124239=.0107212$$

.0107212 之眞數為 1.025

六個月之利率為 1.025−1=$2\frac{1}{2}$%，或年利 5%，每半年複利一次。

(2)付款次數與複利次數相同者

例——現存 \$ 2,279.46，期二年，每三個月複利一次，每三個月初取 \$ 300，求利率。

$$\frac{\ddot{A}}{\frac{R}{p}}-1=\frac{1-(1+i_p)^{-p(n-\frac{1}{p})}}{i_p} \qquad \text{(第 31 式)}$$

$\ddot{A}=\$2,279.46$

$R=\$1,200$

$n=2$

$p=4$

$$\frac{2,279.46}{\frac{1,200}{4}}-1=\frac{1-(1+i_p)^{-4(2-\frac{1}{4})}}{i_p}$$

$$\frac{2,279.46}{300}-1=\frac{1-(1+i_p)^{-4(2-\frac{1}{4})}}{i_p}$$

$$6.5982=\frac{1-(1-i_p)^{-7}}{i_p}$$

由用表 VI 查出第七期欄內 6.5982 一數之利率為 $1\frac{1}{2}$%，三個月

之利率既為 $1\frac{1}{2}\%$，則一年之利率為 6%，每三個月複利一次。

丙 數年付款一次之年金

子、每年複利一次者

例——現存 \$3,668.57，期八年，現擬每二年初取 \$1,000，求其利率。

$$\frac{\ddot{A}}{R_k}-1=\frac{1-(1+i_k)^{-\left(\frac{n}{k}-1\right)}}{i_k} \qquad \text{(第 32 式)}$$

$$\frac{3,668.57}{1,000}-1=\frac{1-(1+i_k)^{-\left(\frac{8}{2}-1\right)}}{i_k}$$

$$2.66857=\frac{1-(1+i_k)^{-3}}{i_k}$$

$\ddot{A}=\$3,668.57$

$n=8$

$k=2$

$R_k=\$1,000$

由用表 VI 第三期欄內查出：

\$1 按利率 6% 之年金現價為	2.6730119
\$1 按利率 $6\frac{1}{2}\%$ 之年金現價為	2 648755
利率增 $\frac{1}{2}\%$，年金現價減少	.0245364

本例 \$1 之年金現價為 2.66857，較利率6% 之年金現價少 .00444，其利率應增加 $\frac{.00444}{.02453}\times .5\%$ 或 .09。即二年之利率為 6 09%。

求一年之利率如下：

$$i=(1+i_k)^{\frac{1}{k}}-1$$

$$i=(1.0609)^{\frac{1}{2}}-1$$

$$\log 1.0609=.0256744$$

$$\tfrac{1}{2}\log 1.0609=.0128372$$

.0128372 之真數為 1.03，故一年之利率為：

$$i=1.03-1$$

$$=.03 \text{ 或 } 3\%$$

丑、每年複利數次者

例——現存 \$ 4,454.31，期十年，每半年複利一次，現擬每二年取

\$1,000，求其利率。

$$\frac{\ddot{A}}{R_k}-1=\frac{1-(1+i_k)^{-\left(\frac{n}{k}-1\right)}}{i_k} \qquad \text{(第 33 式)}$$

$$\frac{\ddot{A}}{R_k}-1=\frac{1-(1+i_k)^{-\left(\frac{10}{2}-1\right)}}{i_k} \qquad \ddot{A}=\$4{,}454.31$$

$$n=10$$

$$\frac{\ddot{A}}{R_k}-1=\frac{1-(1+i_k)^{-4}}{i_k} \qquad R_k=\$1{,}000$$

$$k=2$$

$$\frac{4{,}454.31}{1{,}000}-1=\frac{1-(1+i_k)^{-4}}{i_k}$$

$$3.45431=\frac{1-(1+i_k)^{-4}}{i_k}$$

由用表 VI 第四期欄內查出：

\$1 按利率 6% 之年金現價爲	3.465105
\$1 按利率 7% 之年金現價爲	3.387211
利率增加 1%，年金現價減少	.077894

本例 \$1 之年金現價爲 3.45431 較利率 6% 之現價 \$3.465105，少 .01079，卽利率應增 $\frac{.01079}{.07789}\times 1\%$ 或 .138%，故二年之利率爲 6.138%。

求六個月之利率如下：

$$\frac{j}{m}=(1+i_k)^{\frac{1}{mk}}-1$$

$$\frac{j}{m}=(1+i_k)^{\frac{1}{4}}-1$$

$$=(1.06138)^{\frac{1}{4}}-1$$

$$\log 1.06138=.0258709$$

$$\tfrac{1}{4}\log .0258709=.0064677$$

.0064677 之眞數爲 1.015，故六個月之利率爲 1.015−1=.015，

或 .15%，亦卽年利三釐，每年複利二次。

習 題 三

1. 設某君購屋一所，議定先付 $500.00，以後每六個月付 $500.00，付至 $7,000.00 爲止，按利率六釐，試算其年金現價。

2. 設某君二十二歲向保險公司保人壽險 $1,000.00，分二十期交款。每年初交款一次，計 $43.27，至第十年底某君病故（僅交至第十次爲止）。若存於銀行，利率三釐半，試計算二者之差額。

3. 某地產公司新建之房屋，擬以房租每月 $80，茲擬將二十年房租收清，預收之款，按年息九釐，每月複利一次計息，求現在一次應收之數額。

4. 某君希望每月初向銀行取款 $100，期八年，利率八釐，每年複利二次，問現在應存款項若干。

5. 某君希望每月初取 $133.355，期十五年，利率一分，每半年複利一次，求其現在應存之數額。

6. 設期首年金現價爲 $1,092.025，每年初取 $148.356，利率九釐，每半年複利一次，計算可取至何時爲止。

7. 設某銀行擬創辦教育儲金，利率一分，每年複利二次，自初生起至十八歲止（計十八年），每月初存儲若干，自十九歲初起，每半年初可取 $250，以作大學學費計四年，至二十二歲爲止，試計算其每月初應儲之數額。

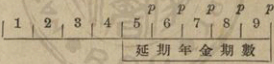
8. 若上題所述之銀行，規定兩種辦法，任儲戶選擇，第一法卽係第 7 題所述者。第二法係儲戶將以後所付之數額，於初生時一次存儲者，試計算其應存儲之數額。

第六章　其他各種年金

第一節　延期年金之意義

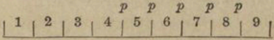
延期年金(Deferred Annuity)者，經過若干時期以後，始行按期支付之年金也，其終價之計算，與普通年金終價之計算相似，惟因支付年金開始之時期較遲，故其終價之時期亦較遲。如四年後每年支付年金若干，時期五年，卽自第五年起，每年支付年金若干，至第九年爲止。至於普通年金，則由第一年起始，玆以圖示之於下：

付　款



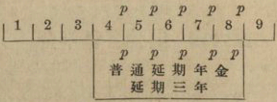
上圖係表示普通年金五年，延期四年。卽由第五年初開始，第五年底爲第一次之付款，與普通年金第一年底之付款相似。若係期首年金五年，延期四年，則如下圖所示：

期首延期年金付款



期首延期年金第一期所付之款，在第五年之初，不若普通延期年金之在第五年底。故實際起始之時期爲第五年初，與普通延期年金之延期三年者相同。

期首延期年金
延期四年



上圖表示延期三年之普通延期年金，確與延期四年之期首延期年金相同。故期首延期年金延期 n 年，等於普通延期年金延期 n－1 年。

第二節　延期年金終價之計算

延期年金終價與普通年金終價完全相同，僅付款起始之時期不同而已，至於終價則毫無影響。

期首延期年金終價，亦與期首年金終價相同，僅付款起始之時期不同耳。

第三節　延期年金現價之計算

計算延期年金之現價，必須注意此項年金所延之時期，計算所延時期之方法，無論其爲普通年金或期首年金，均須記明第一次付款在第幾年底。

例——設每年付 $ 100，爲期六年，第一次付款係自今日後之第五年底，利率五釐，每年複利一次，求此項年金之現價。

此例爲普通年金延期四年，或期首年金延期五年，但非普通年金延期五年。

計算此種延期年金之現價，有數種方法，玆分述於下：

第一法：照上例應先求普通年金利率五釐，爲時六期之年金現價。

$$A=100\times a_{\overline{6|}5\%}=100\times 5.07569206=\$507.57$$

再求四年前之現價：

$$507.57\times(1.05)^{-4}=507.57\times.82270247=\$417.58$$

對於1延期 m 年之年金現價，以 $d\,|a_{\overline{n}|}$ 為符號，代表延期年數，茲列其公式於下：

$$d\,|a_{\overline{n}|}=a_{\overline{n}|}\times(1+i)^{-d} \qquad \text{(第1式甲)}$$

第二法：照前圖所示之情形，列為下式：

$$d\,|a_{\overline{n}|}=a_{\overline{d+n}|}-a_{\overline{d}|} \qquad \text{(第1式乙)}$$

仍以前例用此法演算如下：

$$A=100(a_{\overline{10}|}-a_{\overline{4}|})_{5\%}=100(7.7217349-3.5459505)$$
$$=\$417.58$$

第三法：前曾述及期首年金延期 n 年，等於普通年金延期 $n-1$ 年。由是可知期首年金六年延期五年。等於普通年金六年延期四年。

期首年金期六年之現價：

$$\ddot{A}=R(1+a_{\overline{n-1}|})=100\ (1+a_{\overline{5}|\,5\%})$$
$$=100(1+4.3294767)=\$532.95$$

再求五年前之現價：

$$A=532.95\times(1.05)^{-5}=532.95\times.7835262$$
$$=\$417.58$$

另一計算法如下：

$$\ddot{A}=Ra_{\overline{n}|}(1+i)=100a_{\overline{6}|}\times1.05=100\times5.07569206\times1.05$$
$$=\$532.95$$
$$A=532.95\times(1.05)^{-5}$$
$$=532.95\times.7835262$$
$$=\$417.58$$

總之，計算延期年金之現價，應先計算延期之年數。計算延期年數最好之方法，即照第一次付款之時期，減去一年，如第一次付款係第九年底，則作為普通年金延期八年可也。

若每年付款數次，則照第一次付款之時期，減去$\frac{1}{p}$年，如每六個月付款一次，延期三年，卽第一次付款在三年半（卽第四年六月底），計算延期年數爲 $3\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$ 年或 3 年。若在第三年底付款，則爲 $3-\frac{1}{2}$ 年或 $2\frac{1}{2}$ 年。

玆將各類延期年金現價之計算公式列之於下：

甲　每年付款一次之年金

子、每年複利一次者

$$A=Ra_{\overline{n|}}\times(1+i)^{-d}=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times(1+i)^{-d} \quad (\text{第 2 式})$$

或　$A=R(a_{\overline{d+n|}}-a_{\overline{d|}})$

丑、每年複利數次者

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-dm} \quad (\text{第 3 式})$$

乙　每年付款數次之年金

子、每年複利一次者

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{p\left\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right\}}\times(1+i)^{-d} \quad (\text{第 4 式})$$

丑、每年複利數次者

(1)付款次數與複利次數不同者

$$A=R\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-dm} \quad (\text{第 5 式})$$

(2)付款次數與複利次數相同者

$$A=\frac{R}{p}\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-np}}{\frac{j}{p}}\times\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-dp} \quad (\text{第 6 式})$$

丙　數年付款一次之年金

子、每年復利一次者

$$A=R_k\times\frac{1-(1+i_k)^{-n}}{(1+i_k)^k-1}\times(1+i_k)^{-d}\qquad(\text{第 7 式})$$

丑、每年複利數次者

$$A=R_k\times\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}\times\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-dm}\qquad(\text{第 8 式})$$

第四節　延期年金年金額之計算

欲求延期年金之年金額，其最便捷之方法，爲照求普通年金額之方法，再除以 $(1+i)^{-d}$ 或其相當之式。

如普通年金現價之公式爲：

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

則求延期年金現價之公式爲：

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times(1+i)^{-d}$$

求 R：

以 i 乘上式而以 $1-(1+i)^{-n}$ 除之：

$$\frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}=R(1+i)^{-d}$$

除以 $(1+i)^{-d}$：

$$R=\frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}\times\frac{1}{(1+i)^{-d}}\qquad(\text{第 9 式})$$

今求普通年金現價之年金額，得式如下：

$$R=\frac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$$

故求延期年金現價之年金額，可先求普通年金現價之年金額，再除以 $(1+i)^{-d}$ 或其相當之式。

上示甲、乙、丙、之子、項，均應以 $(1+i)^{-d}$ 除之，至於"甲丑、""乙丑、(1)"，則應以 $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-dm}$ 除之，而乙丑、(2)則應以 $\left(1+\frac{j}{p}\right)^{dp}$ 除之。

例——現存 \$417.58，利率五釐，每年複利一次，延期四年，自第五年起擬分六年平均提取，求在每年底可取之數額。

先求六年之普通年金如下：

$$R=A\times\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}=417.58\times\frac{.05}{1-(1.05)^{-6}}$$

$$=417.58\times.197017$$

除以 $(1+i)^{-d}$ 或 $(1.05)^{-4}$，得延期年金之年金額：

$$=\frac{417.58\times.197017}{.82270247}=\$100$$

第五節　延期年金時期之計算

欲求延期年金之時期，可擇相當延期年金現值之公式以求 n，或檢查表格再用推值法計算之。

第一法：用公式及對數計算之——最簡單之延期年金現價公式如下：

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times(1+i)^{-d}$$

求 n：

乘以 i，除以 R，

$$\frac{A}{R}i=\{1-(1+i)^{-n}\}(1+i)^{-d}$$

除以 $(1+i)^{-d}$，並須知 $\frac{1}{(1+i)^{-d}}=(1+i)^{d}$：

$$\frac{Ai}{R}(1+i)^{d}=1-(1+i)^{-n}$$

移項並變號：

$$1-\frac{Ai}{R}(1+i)^{d}=(1+i)^{-n}$$

用對數法計算如下：

$$\log\left\{1-\frac{Ai}{R}(1+i)^{d}\right\}=-n\log(1+i)$$

除以 log (1+i)：

$$-n=\frac{\log\left\{1-\frac{Ai}{R}(1+i)^{d}\right\}}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 10 式)}$$

此係應用於每年付款一次，每年複利一次之公式，如每年付款數次或每年複利數次，亦可應用延期年金現價之公式，加以演化以求 n。

第二法：查表暨應用推値法——如時期與利率均在表之範圍以內者，則可查表並用推値法推算之。

例——現存 \$417.58，延期四年，四年後每年底提取 \$100，利率五釐，每年複利一次，求其可以提取之時期。

年金現價公式：

$$A=R\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\times(1+i)^{-d}$$

先將各已知數代入上式：

$$417.58=100\times\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}\times(1.05)^{-4}$$

除以 100 為：

$$4.1758=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}\times(1.05)^{-4}$$

求出 $(1.05)^{-4}$ 之數額：

$$4.1758=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}\times.8227024$$

除以 .8227024：

$$\frac{4.1758}{.8227024}=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}$$

$$5.07571=\frac{1-(1.05)^{-n}}{.05}$$

在用表 VI 之五釐欄內,查 5.07571 或與其最相近之數。現查出第六期爲 5.07569,此數與上列數額極近,故可不必再行推算,如相差之數較大,則用推値法推算之。

第六節 延期年金利率之計算

關於延期年金利率之計算,無完善之方法,祇有用假定之利率代入延期年金現價公式,以作試驗。普通常須經過幾次試驗,方能求出正確之結果。

例——現存 \$417.58,延期四年,四年後之六年內每年底可取 \$100,求利率。

假定利率六釐,代入下列公式:

$$A=R(a_{\overline{10|}}-a_{\overline{4|}})$$

$$417.58=100(a_{\overline{10|}}-a_{\overline{4|}})_{6\%}$$

$$4.1758=7.36008-3.4651=3.89498$$

因所用利率太高,故求出之現價爲 3.89498,而非 4.1758。

再按四釐求之:

$$417.58=100(a_{\overline{10|}}-a_{\overline{4|}})_{4\%}$$

$$4.1758=8.110895-3.629895=4.481$$

照此結果,利率又嫌太低,故求出之現價爲 4.481;而非 4.1758。

四釐之結果爲	4.48100
六釐之結果爲	3.89498
利率增高二釐,年金現價減少	.58602

現本例之現價爲 4.1758,較四釐之 4.481 少 .3052。卽利率應增加 $\frac{3052}{5860}\times 2\%$ 或 1.04%。故其利率,當爲五釐。

習 題 一

1. 某銀行擬爲學童舉辦教育儲金,規定利率一分,每半年復利一次,自十六歲起至十八

歲止,每半年取 $ 15) 以作高中學費,求學童在初生時應存之數額。

2. 若前題所述各項,將一次付款,改為逐月分期付款,即每月初付款一次,求每月初付款數額。

3. 設五年後每年底可取 $ 750.00,時期九年,利率四釐,每年復利一次,試求其延期年金現價 若延期十年,其現價若干?

4. 設四年後每年底可取 $600.00,三個月支取一次,期十二年,利率五釐,每年復利一次,試求其延期年金之現價。

5. 設甲公司與某乙約定每月底付乙 $ 25.00,時期十年,第六年一月開始付給,利率六釐,在付款期間,每月復利一次,延期期間,每年復利一次,試求其延期年金之現價。

6. 設某君每三個月之初,存儲 $ 300.00 於銀行,利率週年一分,每半年復利一次,期五年,試計算其到期時之終價。

第七節　永久年金之意義及其計算法

支付年金之時期無限者,謂之**永久年金** (Perpetuities)。例如存 $100.00 於銀行,利率四釐,每年付息 $4.00,時期無限,此種每年所得之利息,即係永久年金。

此種年金之終價,雖無限制,而其現價則有限制。茲以 a_∞ 代表此種年金之現價,即 $a_{\overline{n|}}$ 中之 n 無窮增大,使 v^n 接近極限為零,而得其公式如下:

$$a_\infty = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{i} = \frac{1-0}{i} = \frac{1}{i}$$

其結果即以訂定之利率,除每年所得之年金,即為此種年金之現價。

以上係以 $1.00 為標準,若不止此數,則以每年之年金數乘之。

例——設某機關擬設定一種基金,按利率六釐,每年得收益 $300.00,則此基金之全額當為:

$$\frac{300.00}{.06} = \$5,000.00$$

即現存 $5,000.00,按利率六釐,以後每年可得利息 $ 300.00,永無限期。

期首永久年金之現價,如下式:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|\infty}=1+a_\infty=1+\frac{1}{i}=\frac{1+i}{i}=\frac{1}{d} \qquad (第11式)$$

有時支付年金之時期，係數年一次者，則其公式卽應變更，若將其距離之年數，以 r 爲代表，則得其第一次應付年金之現價爲 v^r，第二次應付年金之現價爲 v^{2r}，……以至無窮，於是其總現價卽爲：

$$a_{\infty,r}=v^r+v^{2r}+v^{3r}+\cdots\cdots$$

此乃無窮幾何級數，其和爲：

$$\frac{v^r}{1-v^r}=\frac{1}{v^{-r}-1}=\frac{1}{(1+i)^r-1}=\frac{1}{i}\times\frac{i}{(1+i)^r-1}$$

$$=\frac{1}{i}\times\frac{1}{s_{\overline{r}|}}$$

$$a_{\infty,r}=\frac{1}{i}\times\frac{1}{s_{\overline{r}|}} \qquad (第12式)$$

若每次之年金不止一元或不滿一元，如每次付12元，則其年金現價爲：

$$R\times a_{\infty,r}=\frac{R}{i}\times\frac{1}{s_{\overline{r}|}} \qquad (第13式)$$

例——設某處建築須 $2,000.00，於五年後完成付款，以後每五年改建一次，現籌募基金，按利率六釐，計算其須籌足基金若干？依式得：

$$R\times a_{\infty,5}=2,000\times a_{\infty,5}$$

$$=2,000\times\frac{1}{.06}\times\frac{1}{s_{\overline{5}|}}$$

$$=2,000\times\frac{1}{.06}\times .1773964104$$

$$=\$5,913.21$$

第八節 繼續年金之意義及其計算法

繼續轉化者，乃時刻將利息計算，加入本金，再行複利之一種方法也（詳第三章）。每年所付之年金，若按繼續轉化法計算，則謂之**繼續年**

金(Continuous Annuity)。前列每年交款數次之終價公式如下:

$$s_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$$

若求繼續年金,則以 $\bar{s}_{\overline{n}|}$ 爲代表,其公式如下:

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\lim_{p\to\infty}\frac{(1+i)^n-1}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]} \qquad \text{(第 14 式)}$$

將 $(1+i)^{\frac{1}{p}}$ 用二項展開之:

$$(1+i)^{\frac{1}{p}}=1+\frac{1}{p}i+\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)}{2!}i^2+\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)}{3!}i^3+\cdots$$

以之代入上式,則得下式:

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]&=\lim_{p\to\infty}p\Bigg[\Bigg(1+\frac{1}{p}i+\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)}{2!}i^2\\&\quad+\frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)}{3!}i^3+\cdots\Bigg)-1\Bigg]\\&=\lim_{p\to\infty}\Bigg[i+\frac{\left(\frac{1}{p}-1\right)}{2!}i^2\\&\quad+\frac{\left(\frac{1}{p}-1\right)\left(\frac{1}{p}-2\right)}{3!}i^3+\cdots\Bigg]\\&=i-\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}-\cdots\\&=\log_e(1+i) \qquad \text{(第 15 式)}\\&=\delta \quad \text{(見第三章第 40 式)}\end{aligned}$$

由是而得下式:

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)^n-1}{\delta}=\frac{i}{\delta}s_{\overline{n}|} \qquad \text{(第 16 式)}$$

依同一理由,繼續年金現價之公式如下:

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\frac{1-(1+i)^{-n}}{\delta}=\frac{i}{\delta}a_{\overline{n}|} \qquad \text{(第 17 式)}$$

但

$$\delta=2.302585\times\log_{10}(1+i)=\frac{\log_{10}(1+i)}{0.434294}$$

故

$$\bar{s}_{\overline{n}|}=\frac{0.434294\, i\, s_{\overline{n}|}}{\log_{10}(1+i)} \qquad \text{(第 18 式)}$$

$$\bar{a}_{\overline{n}|}=\frac{.0434294\, i\, a_{\overline{n}|}}{\log_{10}(1+i)} \qquad \text{(第 19 式)}$$

此種繼續轉化與每星期複利一次者，相差頗微，茲證明如下：

例——設每年付 \$1.00，分五十二次(每星期一次)支付，利率五釐，算如下式：

$$a^{(52)}_{\overline{5}|}=\frac{1-(1.05)^{-5}}{52[(1.05)^{\frac{1}{52}}-1]}=4.435$$

若按第 19 式計算，則爲 4.437。此種繼續轉化，對於普通利率，若有製就之表檢查，則頗便利，茲列之於後：

i	δ	$\frac{i}{\delta}$
.025	0.0246926	1.01245
.03	0.0295588	1.01493
.035	0.0344014	1.01740
.04	0.0392207	1.01987
.045	0.0440169	1.02233
.05	0.0487902	1.02480
.06	0.0582689	1.02971
.07	0.0676587	1.03469
.08	0.0769611	1.03949

例——設每年存儲 \$120.00，時期五年，利率六釐，按繼續轉化計算其儲積之終價，並證明上表是否無誤。

$$\bar{s}_{\overline{5}|}=\frac{.06}{\log_e(1.06)}\times s_{\overline{5}|}$$

由用表 V 查出 $s_{\overline{5}|}=5.6370930$

$$\frac{.06}{\log_e 1.06}=1.02971$$

$$\bar{s}_{\overline{5}|}=1.02971\times5.6370930$$

$$=5.80457$$

$$\$120\times\bar{s}_{\overline{5}|}=\$120.00\times5.80457$$

$$=\$696.55$$

$$\log_e(1.06)=2.3025851\times\log_{10}(1.06)$$

$$=2.3025851\times0.02530587$$

$$=0.0582689=\delta$$

$$\frac{i}{\delta}=\frac{.06}{.0582689}=1.02971$$

第九節　變額年金之意義及其計算法

以前所討論之年金，每期付款之數額，均係相同，但亦有不相同者，概稱之曰**變額年金**(Varying Annuities)。

此種變額年金最普通之情形，一爲每次付款數額逐漸增加，名曰**遞增年金**(Increasing Annuity)。一爲每次付款數額逐漸減少，名曰**遞減年金**(Decreasing Annuity)。

遞增年金中大抵每年所付之年金均成比例，如1,2,3,……直至n倍爲止。今以$(Is)_{\overline{n}|}$代表遞增年金之終價，$(Ia)_{\overline{n}|}$代表遞增年金之現價。

若求$(Is)_{\overline{n}|}$，可將各期所付款項之複利終價相加即得。以i代表利率，應如下式：

$$(Is)_{\overline{n}|}=(1+i)^{n-1}+2(1+i)^{n-2}+3(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots$$
$$+(n-1)(1+i)+n$$

上式可書成

$$
\begin{aligned}
(Is)_{\overline{n}|}=(1+i)^{n-1}&+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots+(1+i)+1\\
&+(1+i)^{n-2}+(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots+(1+i)+1\\
&+(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots+(1+i)+1\\
&+\cdots\cdots+(1+i)+1\\
&+(1+i)+1\\
&+1
\end{aligned}
$$

第一行之和爲 $s_{\overline{n}|@i}$，第二行之和爲 $s_{\overline{n-1}|}$，第三行爲 $s_{\overline{n-2}|}$等，倒數第二行之和爲 $s_{\overline{2}|}$。故：

$$(Is)_{\overline{n}|}=s_{\overline{n}|}+s_{\overline{n-1}|}+s_{\overline{n-2}|}+\cdots\cdots+s_{\overline{2}|}+1_{(@i)}$$

將 $s_{\overline{n}|}$ 代爲 $\frac{(1+i)^n-1}{i}$ 如下：

$$
\begin{aligned}
(Is)_{\overline{n}|}&=\frac{1}{i}\{[(1+i)^n-1]+[(1+i)^{n-1}-1]+[(1+i)^{n-2}-1]+\cdots\\
&\qquad+[(1+i)^2-1]+[(1+i)-1]\}\\
&=\frac{1}{i}\{[(1+i)^n+(1+i)^{n-1}+(1+i)^{n-2}+\cdots\cdots\\
&\qquad+(1+i)^2+(1+i)]-n\}
\end{aligned}
$$

在括弧 [ ] 之內爲 $(1+i)\,s_{\overline{n}|}$ 故

$$(Is)_{\overline{n}|}=\frac{(1+i)\,s_{\overline{n}|}-n}{i} \qquad \text{(第 20 式)}$$

若求現價，將第 20 式乘以 $(1+i)^{-n}$ 卽得。倘逐次所付之年金額，並非 1, 2, 3, ……, 而係 R, $2R$, $3R$, ……則公式應以 R 乘之。

例——設第一年底存 \$50 於銀行，第二年底存 \$100，第三年底存 \$150，以後每年增加 \$ 50，共計六年。利率八釐，求年金終價。

解：

$$(Is)_{\overline{n}|}=R\frac{(1+i)\,s_{\overline{n}|}-n}{i} \qquad \text{(第 21 式)}$$

$$(Is)_{\overline{n}|}=50\times\frac{(1.08)\,s_{\overline{6}|.08}-6}{.08}$$

$$=50\times\frac{1.08\times7.335929-6}{.08}$$

$$=50\times\frac{7.92280332-6}{.08}$$

$$=50\times\frac{1.92280332}{.08}$$

$$=50\times24.0350415$$

$$=\$1,201.75$$

遞減年金係每期所付之款逐次減少。減少之數與期數成一定之比例。如 $n-1$, $n-2$,……3, 2, 1 等。今以 $(Ds)_{\overline{n}|}$，爲其終價之符號，以 $(Da)_{\overline{n}|}$，爲其現價之符號。則

$$(Da)_{\overline{n}|}=n(1+i)^{-1}+(n-1)(1+i)^{-2}+(n-2)(1+i)^{-3}+\cdots\cdots+2(1+i)^{-(n-1)}+(1+i)^{-n}$$

上式可書成

$$\begin{aligned}(Da)_{\overline{n}|}=&(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots\cdots+(1+i)^{-(n-2)}+(1+i)^{-(n-1)}+(1+i)^{-n}\\&+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots\cdots+(1+i)^{-(n-2)}+(1+i)^{-(n-1)}\\&+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-3}+\cdots\cdots+(1+i)^{(-n-2)}\\&+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+(1+i)^{-1}+(1+i)^{-2}\\&+(1+i)^{-1}\\=&a_{\overline{n}|}+a_{\overline{n-1}|}+a_{\overline{n-2}|}+\cdots\cdots+a_{\overline{2}|}+a_{\overline{1}|}\\=&\frac{1}{i}\{[1-(1+i)^{-n}]+[1-(1+i)^{-(n-1)}]+[1-(1+i)^{-(n-2)}]+\cdots+[1-(1+i)^{-2}]+[1-(1+i)^{-1}]\}\\=&\frac{1}{i}\{n-[(1+i)^{-n}+(1+i)^{-(n-1)}+(1+i)^{-(n-2)}+\cdots+(1+i)^{-2}+(1+i)^{-1}\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{i}\left\{n-a_{\overline{n}|}\right\}$$

故其公式爲

$$(Da)_{\overline{n}|}=\frac{n-a_{\overline{n}|}}{i} \qquad \text{(第 22 式)}$$

至於終價之公式,照上式乘以 $(1+i)^n$ 即得。若每期所付之數爲 nR, $(n-1)R\cdots\cdots 2R$, R, 則可照所求得之結果乘以 R。

例——今擬第一年底取 \$500, 第二年底取 \$400, 第三年底取 \$300, 每年遞減 \$100, 直至第五年爲止。利率八釐, 求現價。

解:

$$(Da)_{\overline{n}|}=R\frac{n-a_{\overline{n}|}}{i} \qquad \text{(第 23 式)}$$

$$=100\times\frac{5-a_{\overline{5}|.08}}{.08}$$

$$=100\times\frac{5-3.9927100371}{.08}$$

$$=100\times\frac{1.0072899629}{.08}$$

$$=100\times 12.5911245377$$

$$=\$1{,}259.11$$

若每期遞增或遞減之數額, 確成比例, 而第一期或末期所付之款, 並非即爲遞增或遞減數額, 如每期遞增數爲 \$ 100, 而第一次付款爲 \$3,000 等, 則可一面計算遞增數或遞減數之年金終價或現價, 一面再計算其餘數額之終價或現價, 二者相加, 即爲所求之結果。如第一期爲 \$500, 以後每期遞增 \$50, 直至第六年爲止, 求其終價, 可一面計算 \$50 之遞增年金終價, 一面求 \$450 (\$500— \$50) 之普通年金終價, 二者相加, 即爲所求之結果。至於遞減之情形, 亦復相同。如第一期爲 \$3,000, 第二期爲 \$2,500, 第三期爲 \$2,000, 直至第五期爲 \$1,000, 求其年金終價法。應一面求 \$500 之遞減年金終價, 一面求 \$500(1000

—500) 之普通年金終價，二者相加，即為所求之結果。

至於各期所付之款，旣不相同，而又非如本節所述之情形遞增遞減，則其應用較少，茲從略。

習題二

1. 某學校每四年需修理粉刷一次，計 $ 500.00，現擬留置一項固定基金，以備此用，按利率四釐，計算其須備基金若干?

2. 設某機關擬造房屋一所計 $ 100,000，可用三十五年，利率四釐，及至三十五年後再建一所，仍以 $ 100,000 為限，以後陸續建築，循環不已，試計算現須基金若干?

3. 設某君擬每四年購汽車一輛，原值 $ 3,200.00，四年後仍可售出 $ 1,000.00，若利率為五釐，試計算現須預備基金若干?

4. 設每年付 $ 600.00，期六年，利率五釐，試按繼續轉化計算其年金終價。

5. 若照第 4 題所述各項，每月付款一次計 $ 50.00，每年復利一次，試比較其結果。

6. 若照第 4 題所述各項，改為每星期復利一次，試計算其年金終價。

7. 設每年付年金 $ 1,000.00，時期五年，利率四釐，試按繼續轉化，計算其年金現價。

8. 設第一年底存 $ 200，第二年底存 $ 400，第三年底存 $ 600，以後每年增加 $ 200，共計五年，利率一分，每年復利一次，求年金終價。

9. 設擬第一年底取 $ 160，第二年底取 $ 120，以後每年底所取之款，逐漸減少 $ 40，共計四年，利率一分，每年復利一次，求年金現價。

覆習題

1. 設甲乙二人，每年各存 $ 300.00 於銀行，利率八釐，每年復利一次，甲於每年底存 $ 300.00，乙於每半年底存 $ 150.00，及至第十年底到期，乙較甲可多得國幣若干?

2. 設甲乙二人每年底各存 $ 300.00 於銀行，時期十年，甲係利率八釐，每年復利一次，乙係利率八釐，每半年復利一次，及至第十年底到期，乙較甲多得國幣若干?

3. 設每月存 $ 1.00，按利率三釐，每半年復利一次，試計算何時可積至 $ 100.00?

4. 設某君每年底可得收益 $ 1,000.00，時期十五年，現擬改為十年，若利率為九釐，每年復利一次，試計算每年可得收益若干?

5. 設某君購置財產現價 $ 4,000.00，現擬分期付款，每月初付 $ 50.00，若利率五釐，每年復利一次，試計算支付之時期若干?

6. 設某甲投資某公司 $ 1,000.00，每年得股息 $ 60.00，計十五年，第十五年後公司倒閉，本金分文無着。又某乙投資某公司 $ 1,000.00，十五年未發股息，第十六年起每年發股息 $ 60.00，計五年，乙於是年將股票以 $ 1,100.00 售出，若市場利率為五釐，試計算在第二十年底甲乙二君之投資，孰為合算?

7. 設某甲投資於橡皮事業，八年未發股息，自第九年起每年發股息五分(50%)，繼續不已，若市場利率為四釐，試計算投資者實際所得之利率若干？

8. 設某君為其子儲蓄大學教育基金，於其子產生起，每年初存儲 $ 12.50 於銀行，共存五年，第五年後不存不取，及至其子十九歲之第一個月起，由銀行按月底支付 40.00 若利率為八釐，每年復利一次，試計算付至何時為止。

9. 設每半年初支付 $ 500.00，時期十年，利率九釐，試計算現存之數。

10. 設現存 $ 14,500.00，以後每半年可付 $ 500.00，計二十年，試求其利率。

11. 設每月存款一次，一百個月得 $ 100.00，利率五釐，每年復利一次，試計算每月應存之數。

12. 設某機關託建築公司建房屋，公司索價以現金支付計 $ 300,000.00，若分期付款，則每半年付 $ 40,000.00，無息，共付十期。茲假定市場利率為六釐，每半年復利一次，試代該機關計算以現金支付與分期支付，二者孰為合算？

13. 設某醫院預算基金建築房屋，現須 $ 50,000.00，以後每年經常費 $ 10,000.00，該房屋每四十年底須重新翻造一次，仍係 $ 50,000.00，若市場利率為五釐，每年復利一次，試計算須備基金若干？

14. 設某君負債 $ 10,000.00，現商定分十年還清，前五年利率六釐，每半年復利一次，後五年利率五釐，每半年復利一次，本息每半年平均償還一次。試計算每次償還之數。

15. 設某君每星期一(期首)存 $1.00，利率四釐，每星期復利一次，試計算一年底儲積之終價。

16. 某君計劃存款於銀行，時期五年，存一年後，每半年可提取 $ 500.00，計四年，利率三釐半，每半年復利一次，某君現擬如法存儲，試計算應存若干？

17. 設某君於其子生日存 $ 1,000.00 於儲蓄銀行，以後每年生日存儲同樣之數，利率八釐，每半年復利一次，及至其子二十一歲之生日時，其儲積終價應為若干？

18. 設有田一方，每年可收穫 $ 6,000.00，各項耕種費用 $ 4,500.00；若市場利率為七釐，試計算該田之估計價值。

19. 設某君購汽車一輛，如以現金支付應為 $ 4,000.00，現擬先付 $ 1,000.00，其餘 $ 3,000.00 分三年還清，每六個月償還一次，利率六釐，每半年復利一次，試計算每六個月償還一次之數。

20. 設某君存 $ 20,000.00 於銀行，希望以後每六個月底支付 $ 800.00，計二十一年，利率係六個月復利一次。試計算其利率若干？

第七章　償債基金

第一節　償債基金之意義

償債基金(Sinking Fund)者，公司爲準備將來償還負債之本金，逐期提存一定之金額，用複利法計算所儲積之基金也。蓋負債到期，一次償還，勢難應付，即或有此力量，而一時提出巨款，財政上不無影響。爲解決此種困難起見，故每分期提存基金，以備將來清償債款之用。至其辦法，則有二種：

(甲)將應還金額，分期提存儲積，到期一次償付。至存儲之利率，與負債之利率，或同或不同。例如某甲負債$1,000.00，利率六釐，時期三年，每年底除支付利息$60.00外，並存儲$320.35於銀行，利率四釐，至第三年到期，適敷償還之數。若某甲每年存儲銀行之款，其利率爲六釐時，則每年底除付利息$60.00外，僅須存儲$314.11，到期即可積成$1,000.00。存儲利率旣有四釐與六釐之分，故其存儲之數，亦有$320.35與$314.11之別。此種計算，即係前四章所述之年金計算法也。

(乙)或將債款本金，分期攤還，利隨本減，各年償還本息之數相同，一方面利息之支付逐漸減少，一方面則本金之償還逐漸增加，此法名曰**分期還本法**(Amortization of Principal)。例如甲負債$1,000.00，利率六釐，時期三年，每年償還本息$374.11，其本息細數，詳下列**分期攤還本息明細表**(Amortization Schedule)。

年份	期首本金	利 息 6%	每年償還數	分還本金數
1	1,000.00	60.00	374.11	314.11
2	6-5.89	41.15	374.11	332.96
3	352.93	21.18	374.11	352.93
			合 計	$1,000.00

若存儲之款所獲利率，與負債之利率相同，則二法均可採用，因其名異實同。僅簿記之記錄上略有區別而已。蓋分期還本法，實無異於自行投資於自己之債務也。

第二節　逐年存儲基金計算法

關於逐年存儲基金以備償還債務之計算，因各種情形不同而有差別。玆假定三種不同之情形，備述於後：

(以 n 代表時期，P 代表債務之本金)。

(甲)負債無利存款有利者　查年金中之已知年金終價求每次應付年金額之公式爲：

$$R=K\times\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$$

今負債無利，負債之本金數額，等於到期應償還之數額，卽 $P=K$，故可將 P 代入上式：

$$R=P\times\frac{1}{s_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 1 式)}$$

例——設某甲負債 $1,000.00，時期三年，無息，現擬每年存儲基金若干於銀行，利率四釐，三年到期，足敷償還該項債務。其算式如下：

$$R=1,000\times\frac{1}{s_{\overline{3}|.04}}$$

由用表 VII 查出 $\frac{1}{s_{\overline{3}|.04}}=0.3203485$

則　$R=\$\,320.35$

(乙)負債與存款利率相同者　按此項乃照甲法加上負債之利息。二者之利率相同，其式如下：

$$R=P\times\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+iP$$

$$=P\times\left(\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i\right)=P\times\frac{1}{a_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 2 式)}$$

或

$$R=P\times\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

若係每年付款數次者，則應如下式：

$$R=P\times\frac{1}{a^{(p)}_{\overline{n}|}}$$

或

$$R=P\times\frac{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}{1-(1+i)^{-n}}$$

例——設某甲負債 \$1,000.00，時期三年，利率六釐，每年提存償債基金一次，其利率亦為六釐，應計算如下式：

$$R=1,000\times\frac{1}{a_{\overline{3}|.06}}$$

由用表 VIII 查出 $\frac{1}{a_{\overline{3}|.06}}=0.3741098$

則　$R=\$\,374.11$

(丙)負債與存款利率不同者　茲以 i 代表負債之利率，i' 代表基金存儲之利率。此乃計算照 i' 利率儲積至 P 之年金額，再加 P 之利息之總和是也。其式如下：

$$R=P\times\frac{1}{s_{\overline{n}|\,@i'}}+iP \qquad \text{(第 3 式)}$$

例——設某甲負債 $1,000.00,利率六釐,時期三年,每年提存之基金,其利率爲四釐,如欲計算每年提存之數,應如下式:

$$R=1{,}000\times\frac{1}{s_{\overline{3}|.04}}+.06\times1{,}000$$

$$=320.35+60$$

$$=\$380.35$$

第三節 償債基金之計算及實例

債務之利息,按期照付,另提償債基金存儲於銀行,以備到期償還;或債務無息,逐期分存償債基金於銀行,均應用前述負債無利存款有利之計算公式。即

$$R=P\times\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$$

茲分類舉例於下,以資參考。

甲 每年存儲一次之償債基金

子、每年複利一次者

例——設某公司負債 $50,000,期十年,擬每年提存償債基金,存於銀行,利率四釐,每年複利一次,試求每年應提存數。

$$R=P\times\frac{i}{(1+i)^n-1} \quad \text{(第4式)}$$

$$=50{,}000\times\frac{.04}{(1.04)^{10}-1}$$

$$=50{,}000\times.0832909$$

$$=\$4{,}164.55$$

丑、每年複利數次者

例——設擬於十五年內儲得基金 $100,000,利率四釐,每半年複利一次,求每年存儲數。

$$R=P\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1} \qquad \text{(第5式)}$$

$$=100,000\times\frac{\left(1+\frac{.04}{2}\right)^{2}-1}{\left(1+\frac{.04}{2}\right)^{2\times15}-1}$$

$$=100,000\times\frac{(1.02)^{2}-1}{(1.02)^{30}-1}$$

$$=100,000\times\frac{(1.02)^{2}-1}{.02}\times\frac{.02}{(1.02)^{30}-1}$$

$$=100,000\times2.02\times.0246499$$

$$=100,000\times.049792798$$

$$=\$4,979.28$$

乙 每年存儲數次之償債基金

子、每年複利一次者

例——設擬於十年內存儲基金 \$100,000，利率四釐半，每年複利一次，求每六個月應存之數額。

$$R=P\times\frac{p\{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\}}{(1+i)^{n}-1} \qquad \text{(第6式)}$$

$$=100,000\times\frac{2\{(1.045)^{\frac{1}{2}}-1\}}{(1.045)^{10}-1}$$

$$=100,000\times\frac{.0445048}{1.5529694-1}$$

$$=100,000\times\frac{.0445048}{.5529694}$$

$$=\$8,048.33$$

$$\frac{R}{2}=\$4,024.17$$

丑、每年複利數次者

(1)若存儲次數與複利次數不同者，其每年存儲數之算式如下：

$$R=P\times\frac{p\left\{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1\right\}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1} \qquad \text{(第 7 式)}$$

(2)存儲次數與複利次數相同者。

例——設擬於十五年內存儲 \$ 50,000，利率六釐，每年複利二次，每年存儲二次，求每次存儲數。

$$\frac{R}{p}=P\times\frac{\frac{j}{p}}{\left(1+\frac{j}{p}\right)^{np}-1} \qquad \text{(第 8 式)}$$

$$=50,000\times\frac{.03}{(1.03)^{30}-1}$$

$$=50,000\times .02101925$$

$$=\$\,1,050.96$$

丙 數年存儲一次之償債基金

子、每年複利一次者

$$R_k=K\times\frac{(1+i)^k-1}{(1+i)^n-1} \qquad \text{(第 9 式)}$$

丑、每年複利數次者

$$R_k=K\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1} \qquad \text{(第 10 式)}$$

在前列數種應用公式中，若將各已知數代入，即可求出其基金之應存數，甚爲簡便，故僅列公式，不另舉例。

第四節 各期償債基金儲積額之計算

計算各期償債基金之儲積額，頗爲簡便，與計算年金相同。

玆以 S_m 代表 m 年底償債基金之儲積額，P 代表本金，n 代表所儲之合計年數，i 代表利率。

照本章第二節甲項，負債無利存款有利之情形，計算每年所付之數，應爲：

$$\frac{P}{s_{\overline{n}|}}$$

故
$$S_m = P \times \frac{s_{\overline{m}|}}{s_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第11式)}$$

或
$$S_m = P \times \frac{(1+i)^m - 1}{(1+i)^n - 1}$$

例——設甲有負債 \$1,000.00，時期三年，無息，爲淸償此款計，擬每年存儲基金若干於銀行，依利率四釐生息，玆爲計算第二年底償債基金之本利合計如下：

$$S_2 = 1,000 \times \frac{s_{\overline{2}|.04}}{s_{\overline{3}|.04}}$$

$$= 1,000 \times \frac{2.0400}{3.1216}$$

$$= \$653.50$$

照第二節乙項，負債與存款利率相同之情形，計算每年所付之數，應爲：

$$\frac{P}{a_{\overline{n}|}}$$

則
$$S_m = P \times \frac{s_{\overline{m}|}}{a_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第12式)}$$

例——設某甲負債 \$1,000.00，期三年，利率六釐，爲淸償此項欠款計，每年提存基金一次，存儲之利率，亦爲六釐，玆爲計算第二年底之償債基金總額如下：

$$S_2 = 1{,}000 \times \frac{s_{\overline{2}|.06}}{a_{\overline{3}|.06}}$$

$$= 1{,}000 \times \frac{2.060}{2.673}$$

$$= \$770.67$$

此項計算，係將每年債務之利息，亦儲積於償債基金之內，若其利息，係每年支付一次，則其情形與前項債務無息者相同，不贅述其計算之例。

照第二節丙項，負債與存款利率不同之情形，計算每年所付之數，應爲：

$$\frac{P}{s_{\overline{n}|}}(按\ i') + iP$$

則
$$S_m = P\frac{s_{\overline{m}|}}{s_{\overline{n}|}}(按\ i') + iP\,s_{\overline{m}|}(按\ i') \qquad (第13式)$$

例——設某甲負債 \$1,000.00，利率六釐，時期三年，爲清償計，每年提存基金一次，利率四釐，茲爲計算其第二年底已提基金之儲積額如下：

$$S_2 = 1{,}000 \times \frac{s_{\overline{2}|.04}}{s_{\overline{3}|.04}} + .06 \times 1{,}000 \times s_{\overline{2}|.04}$$

$$= 1{,}000 \times \frac{2.040}{3.1216} + 60 \times 2.040$$

$$= 653.50 + 122.40$$

$$= \$775.90$$

此項計算，係將每年應付債務之利息，亦儲積於基金之內，至利息存儲之利率，則亦與償債基金相同。

第五節　分期償還債務之計算及實例

負債既可按期提存基金，以備到期償還之用，亦可分期償還，已如

前述。如係分期償還，其計算與前節債務與存款利率相同者之算法相同；即可應用本章第2式。玆分類舉例於下，以資參考。

甲 每年償還一次之債務

子、每年複利一次者

例——設有負債 \$5,000，利率五釐半，每年複利一次，擬分五年還清，求每期償還數。

解：
$$R=P\times\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=P\times\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$=5,000\times\frac{1}{a_{\overline{5}|5\frac{1}{2}\%}}$$

$$=5,000\times\frac{.055}{1-(1.055)^{-5}}$$

或由用表 VIII 查出 $\frac{1}{a_{\overline{5}|5\frac{1}{2}\%}}$ 為 .2341764，因之

$$R=5,000\times .2341764$$

$$=\$1,170.88$$

丑、每年複利數次者

例——設有負債 \$5,000，利率五釐，每年複利二次，擬分五年還清，求每年償還數額。

解：
$$R=P\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}} \qquad \text{(第 14 式)}$$

$$=5,000\times\frac{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2}-1}{1-\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{-10}}$$

$$=5,000\times\frac{(1.025)^{2}-1}{1-(1.025)^{-10}}$$

$$=5,000\times\frac{1.050625-1}{1-.7811984}$$

$$=5{,}000\times\frac{.050625}{.2188016}$$

$$=\$1{,}156.87$$

乙 每年償還數次之債務

子、每年複利一次者

例——設有負債 \$1,895，利率六釐，每年複利一次，擬分五年還清，求每年應還數額。

解：
$$\frac{R}{p}=P\times\frac{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1}{1-(1+i)^{-n}}\qquad\text{(第 15 式)}$$

$$=1{,}895\times\frac{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1}{1-(1.06)^{-5}}$$

$$=1{,}895\times\frac{1.029563-1}{1-.7472582}$$

$$=1{,}895\times\frac{.029563}{.2527418}$$

$$=\$221.66$$

丑、每年複利數次者

(1)償還次數與複利次數不同者

例——設有負債 \$1,000，利率六釐，每半年複利一次，現擬分八年按月還清，求每月償還之數額。

解：
$$\frac{R}{p}=P\times\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}\qquad\text{(第 16 式)}$$

$$=1{,}000\times\frac{(1.03)^{\frac{1}{6}}-1}{1-(1.03)^{-16}}$$

$$=1{,}000\times\frac{1.0049386-1}{1-.6231669}$$

$$=1{,}000\times\frac{.0049386}{.3768331}$$

$$=\$13.11$$

2. 償還次數與複利次數相同者

例——設有負債 \$1,000，利率六釐，每年複利二次，現擬分三年還清，每半年償還一次，求每次償還數額。

解：
$$\frac{R}{p}=P\times\frac{\frac{j}{p}}{1-\left(1+\frac{j}{p}\right)^{-np}} \qquad \text{（第 17 式）}$$

$$\frac{R}{p}=1,000\times\frac{\frac{.06}{2}}{1-\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{-2\times 3}}$$

$$=1,000\times\frac{.03}{1-(1.03)^{-6}} \qquad \text{即 } \$1,000\times\frac{1}{a_{\overline{6}|\cdot 03}}$$

$$=1,000\times .1845975$$

$$=\$184.60$$

丙 數年償還一次之債務

子、每年複利一次者

例——設有負債 \$3,014.46，利率六釐，每年複利一次，現擬分八年還清，每二年償還一次，求每次應償還之數額。

解：
$$R_k=P\times\frac{(1+i)^k-1}{1-(1+i)^{-n}} \qquad \text{（第 18 式）}$$

$$=3,014.46\times\frac{(1.06)^2-1}{1-(1.06)^{-8}}$$

$$=3,014.46\times\frac{1.1236-1}{1-.6274124}$$

$$=3,014.46\times\frac{.1236}{.3725876}$$

$$=3,014.46\times .331734$$

$$=\$1,000$$

丑、每年複利數次者

例——設有負債 \$3,671.09，利率五釐，每半年複利一次，現擬分十年償還，每二年償還一次，求每次應還之數額。

解：

$$R_k = P \times \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mk}-1}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}} \qquad \text{（第 19 式）}$$

$$= 3{,}671.09 \times \frac{\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{2\times 2}-1}{1-\left(1+\frac{.05}{2}\right)^{-2\times 10}}$$

$$= 3{,}671.09 \times \frac{(1.025)^{4}-1}{1-(1.025)^{-20}}$$

$$= 3{,}671.09 \times \frac{(1.025)^{4}-1}{.025} \times \frac{.025}{1-(1.025)^{-20}}$$

$$= 3{,}671.09 \times 4.1525156 \times .0641471$$

$$= \$977.87$$

習 題 一

1. 設某甲負債 $ 1,000.00，三年後償還，現擬每年底存儲基金，按利率六釐，試計算每年應提之數。

2. 設照第一題所述各項，改爲每年提存一次，利率改爲每半年復利一次，試計算每年應提之數。

3. 設某甲購屋一所，卽將其向銀行押 $ 5,000.00，利率六釐，時期六年，現某君擬每年提存基金，按利率六釐，存於銀行，到期適可償還此項押款，試計算每年應行提存之數。

4. 設某甲欠款 $ 1,250.00，利率五釐，現擬分爲八期，平均攤還，每年一次，第一次於議定後，卽須實行，試計算每期償還之數。

5. 設某甲欠款 $ 3,214.65，期五年，利率五釐，每年復利一次，試爲編一分期攤還本息明細表。

第六節　分期償還數次後債務餘額計算法

商業上每用分期攤還方法，以償還債務，但於償還數次之後，債務人往往欲預知其未還之數，以便確曉其所負之債務，而謀早日還淸。對此未還部份之計算，所以亦頗重要也。茲以 m 代表已經償還之期數，A_m 代表償還數次後之債務餘額，其計算公式如下：

$$A_m = Ra_{\overline{n-m}|}$$

例——設某甲欠某乙 \$1,000.00，議定分三年攤還，利率六釐，每年還 \$374.11，現已還過一次，計算尚欠餘額若干？

$$A_1=374.11\times a_{\overline{3-1}|\cdot 06}$$

$$=374.11\times a_{\overline{2}|\cdot 06}$$

由用表 VI 查出 $a_{\overline{2}|\cdot 06}=1.8333926664$

則 $$A_1=374.11\times 1.8333927$$

$$=\$685.89$$

第七節 分期償還本息明細表之編製

用分期攤還法借款，應編製一表，以表示各期所還之款，內中本金若干，利息若干。一方固可查閱各期所還本息之數，一方又可明瞭已還與尚欠之確數，此即上節所述之 A_m 也。若以 P 代表期首之本金，以求每期所還之數，則應如下式：

$$R=\frac{P}{a_{\overline{n}|}}$$

求出每期分付之數後，減去應付之利息，即為該期償還之本金。以原欠數減去已還數，即為未還餘額。茲舉例於下：

例——設某甲欠債 \$2,500.00，利率六釐，分七年攤還，其分期攤還本息數應如下式：

$$R=2{,}500\times\frac{1}{a_{\overline{7}|\cdot 06}}$$

$$=2{,}500\times 0.179135$$

$$=\$447.84$$

第一年利息應為 \$150.00，則所還之本金即為：

\$447.84－\$150.00＝\$297.84

第二年初之餘額為 \$2,500.00－\$297.84＝\$2,202.16，第二年之利息則為 \$132.13。以 \$447.84－\$132.13＝\$315.71，為第二年

還本之數。以 \$ 2,202.16－\$ 315.71＝\$ 1,886.45，為第二年底未還之債務，餘可類推，玆再列表如下：

期數	各期初之本金	每期分還數	每期所還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	\$ 2,500.00	\$ 447.84	\$ 150.00	\$ 297.84
2	2,202.16	447.84	132.13	315.71
3	1,886.45	447.84	113.19	334.65
4	1,551.80	447.84	93.11	354.73
5	1,197.07	447.84	71.82	376.02
6	821.05	447.84	49.26	398.58
7	422.47	447.84	25.35	422.49
	\$ 10,581.00	\$ 3,134.88	\$ 634.86	\$ 2,500.02

各欄總數，固可表示各欄直行相加之總數，亦可將各欄相互試驗，以觀其有無錯誤。如第二欄總數，以 .06 乘之，等於第四欄總數。第三欄總數減第四欄總數，等於第五欄總數等是。

第八節　編製分期償還本息明細表之實例

甲　每年付款一次之債務

子、每年複利一次者

例——設有負債 \$ 1,000，利率六釐，每年複利一次，分五年償還，每年償還本息 \$ 237.40，玆為編製分期償還本息明細表如下：

期數	各期初之本金	每期分還數	每期所還本息細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	\$ 1,000.00	\$ 237.40	\$ 60.00	\$ 177.40
2	822.60	237.40	49.35	188.05
3	634.55	237.40	38.07	199.33
4	435.22	237.40	26.11	211.29
5	223.93	237.40	13.43	223.97
	\$ 3,116.30	\$ 1,187.00	\$ 186.96	\$ 1,000.04

丑、每年複利數次者

例——設有負債 \$ 50,000，利率五釐，每年複利二次，分兩年還清。計算每年應還數如下：

$$R=50,000\times\frac{(1.025)^2-1}{1-(1.025)^{-2\times2}}$$

$$=50,000\times\frac{.050625}{1-(1.025)^{-4}}$$

$$=50,000\times\frac{.050625}{.0940494}$$

$$=\$\,26,914.05$$

每年還款一次，每年複利二次，實利率大於五釐。茲以 i 代表實利率，計算如下：

$$i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m-1=\left(1+\frac{.05}{2}\right)^2-1=(1.025)^2-1=.050625$$

茲爲列表於下：

期數	各期初之本金	每期分還數	每期所還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	\$50,000.00	\$26,914.05	\$2,531.25	\$24,382.80
2	25,617.20	26,914.05	1,296.87	25,617.18
	\$75,617.20	\$53,828.10	\$3,828.12	\$49,999.98

乙 每年償還數次之債務

子、每年複利一次者

例——設有負債 \$ 10,000，利率六釐，每年複利一次，現擬分二年償還，每六個月償還一次，茲爲計算每次應還數如下：

$$\frac{R}{p}=10,000\times\frac{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1}{1-(1.06)^{-2}}=\$\,2,687.45$$

若爲本例編製攤還本息明細表，所應用之利率可以計算如下：

$$
\begin{aligned}
i_p &= (1+i)^{\frac{1}{p}} - 1 \\
&= (1.06)^{\frac{1}{2}} - 1 \\
&= 1.029564 - 1 \\
&= .29564
\end{aligned}
$$

利率六釐，每年複利一次，半年並非利率三釐，而係 .029564。

茲爲列表於下：

期數	各期初之本金	每期分還數	每期所還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	\$ 10,000.00	\$ 2,687.45	\$ 295.64	\$ 2,391.81
2	7,608.19	2,687.45	224.93	2,462.52
3	5,145.67	2,687.45	152.13	2,535.32
4	2,610.35	2,687.45	77.17	2,610.28
	\$ 25,364.21	\$ 10,749.80	\$ 749.87	\$ 9,999.93

丑、每年複利數次者

(1)償還次數與複利次數不同者

(a)複利次數少於償還次數

例——設有負債 \$ 1,000，利率六釐，每半年複利一次，現擬一年還清，每月償還一次，茲計算其每次應還之數如下：

$$
\frac{R}{p} = 1,000 \times \frac{\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{\frac{2}{12}} - 1}{1-\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{-2\times1}} = 1,000 \times \frac{(1.03)^{\frac{1}{6}} - 1}{1-(1.03)^{-2}}
$$

$$
= 1,000 \times \frac{.0049386}{.0574041}
$$

$$
= \$ 86.04
$$

本例付款爲每月一次，複利爲每半年一次，編製攤還本息明細表

時，如用利率 $\frac{.06}{12}$ 實覺太大，應將利率計算如下：

$$i_p=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1$$

$$i_p=(1.03)^{\frac{1}{6}}-1$$

$$=1.0049386-1$$

$$=.0049386$$

茲列攤還本息明細表於後：

期數	每期初之本金	每期分還數	每期還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	$1,000.00	$86.04	$4.94	$81.10
2	918.90	86.04	4.54	81.50
3	837.40	86.04	4.14	81.90
4	755.50	86.04	3.73	82.31
5	673.19	86.04	3.33	82.71
6	590.48	86.04	2.92	83.12
7	507.36	86.04	2.51	83.53
8	423.83	86.04	2.09	83.95
9	339.88	86.04	1.68	84.36
10	255.52	86.04	1.26	84.78
11	170.74	86.04	.84	85.20
12	85.54	86.04	.42	85.62
	$6,558.34	$1,032.48	$32.40	$1,000.08

每月利率 .0049386，與利率 6% 每半年複利一次相同。按 $1,000 利率六釐，每半年複利一次，六個月之利息為 $30，再算回每月付出 $86.04 之利息，照利率六釐，每半年複利一次如下：

$1,000	利率六釐半年之利息	$30.00
$86.04	五個月之利息	
$86.04	四個月之利息	
$86.04	三個月之利息	
$86.04	二個月之利息	
$86.04	一個月之利息	
共計 $86.04	十五個月之利息	6.45
		$23.55

由此表可以看出前六個月之利息共為 $ 23.60 ($4.94+4.54+4.14+3.73+3.33+2.92=$ 23.60)，所有差額 .05，係因尾數進出關係所致。

(*b*)複利次數多於償還次數

例——設有負債 $50,000，利率六釐，每三個月複利一次，現擬於二年內還清，每年償還二次，每次應還數如下：

$$\frac{R}{p}=50,000\times\frac{\left(1+\frac{.06}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1}{1-\left(1+\frac{.06}{4}\right)^{-4\times2}}=50,000\times\frac{(1.015)^{2}-1}{1-(1.015)^{-8}}$$

$$=50,000\times\frac{.030225}{.1122889}$$

$$=\$13,458.59$$

本例每六個月付款一次，而每年複利四次，故六個月之實利率大於三釐。茲以 i_p 代表實利率，計算其數額如下：每三個月之利率為 1.015%，六個月之利率為

$$i_p=(1.015)^{\frac{m}{p}}-1=(1.015)^{2}-1=.030225$$

茲為列表於下：

期數	每期初之本金	每期分還數	每期所還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本息
1	$50,000.00	$13,458.59	$1,511.25	$11,947.31
2	38,052.66	13,458.59	1,150.14	12,308.45
3	25,744.21	13,458.59	778.12	12,680.47
4	13,063.74	13,458.59	394.85	13,063.74
	$126,860.61	$53,834.36	$3,834.36	$50,000.00

(2)償還次數與複利次數相同者

例——設有負債 \$ 4,500，利率六釐，每半年複利一次，現擬分三年還清，每年償還二次，每次應還數額如下：

$$\frac{R}{p}=4,500\times\frac{.03}{1-(1.03)^{-6}}=\$830.69$$

茲寫列表於下：

期數	每期初之本金	每期分還數	每期所還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	$4,500.00	$830.69	$135.00	$695.69
2	3,804.31	830.69	114.13	716.56
3	3,087.75	830.69	92.63	738.06
4	2,349.69	830.69	70.49	760.20
5	1,589.49	830.69	47.68	783.01
6	806.48	830.69	24.19	806.50
	$16,137.72	$4,984.14	$484.12	$4,500.02

丙 數年償還一次之債務

子、每年複利一次者

例——設有負債 \$ 3,014.46，利率六釐，每年複利一次，現擬分四次還清，每二年底償付 \$ 1,000，茲寫編製攤還本息明細表如下：

編表時所用之利率為：

$$i_k = (1.06)^k - 1 = (1.06)^2 - 1 = 1.1236 - 1$$
$$= 12.36\%$$

期數	每期初之本金	每期分還數	每期所還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	$3,014.46	$1,000	$372.59	$627.41
2	2,387.05	1,000	295.04	704.96
3	1,682.08	1,000	207.91	792.00
4	889.99	1,000	110.00	890.00
	$7,973.58	$4,000	$985.54	$3,014.46

丑、每年複利數次者

例——設有負債$3,754.13，利率五釐，每年複利二次，現擬分五次還清，每二年償還$1,000，爲編製攤還本息明細表如下：

$$i_k = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mk} - 1$$
$$= (1.025)^4 - 1 = (1.103812 - 1)$$
$$= 10.3812\%$$

期數	每期初之本金	每期分還數	每期所還本息之細數	
			每期應付之利息	攤還本金
1	$3,754.13	$1,000	$389.72	$610.28
2	3,143.85	1,000	326.37	673.63
3	2,470.22	1,000	256.43	743.57
4	1,726.65	1,000	179.25	820.75
5	905.90	1,000	94.04	905.96
	$12,000.75	$5,000	$1,245.81	$3,754.19

至於期首年金攤還本息明細表之編製，大致與上表相同。僅須將第

一次償還之款，由本金中減除。茲舉例於後，以資參考。

例——設有負債 \$8,107.82，利率五釐，每年複利一次，現擬分十年還清，每年初還 \$1,000，爲編製攤還本息明細表於下：

年數	每年初償還本息數	每年應付之利息	每年攤還本金數	負債餘額
1				\$8,107.82
1	\$1,000		\$1,000.00	7,107.82
2	1,000	\$355.39	644.61	6,463.21
3	1,000	323.16	676.84	5,786.37
4	1,000	289.32	710.68	5,075.69
5	1,000	253.78	746.22	4,329.47
6	1,000	216.47	783.53	3,545.94
7	1,000	177.30	822.70	2,723.24
8	1,000	136.16	863.84	1,859.40
9	1,000	92.97	907.03	952.37
10	1,000	47.62	952.38	———
	\$10,000	\$1,892.17	\$8,107.83	

至於每年複利數次，或每年償還數次，或數年償還一次等情形之計算方法，讀者當不難一隅三反，茲不贅述。

習 題 二

1. 某甲借款 \$2,600.00，利率六釐，本息分六年平均攤還，在償還第四次時，擬完全還清，試計算應還之數。

2. 照上題所述各項，依原定計劃，分六年還清，試編一分期攤還本息明細表。

3. 某甲借款 \$845.19，利率五釐，本息分十年平均攤還，至第六年底尚未償還第六次時，試計算未還之餘額。

4. 某甲欠債 \$5,000.00，實利率六釐，第一年底還 \$1,000.00，第二年底 \$2,000.00，第三年及第四年底各 \$1,000.00，第五年底擬還清此款，試計算應還之數。

5. 照第 4 題所述各項，編一分期攤還本息明細表。

6. 設某工廠借款 \$20,000.00，利率六釐，本息分十期(每年一次)平均攤還，第一次償

還由第二年底起，試計算攤還之數。

7. 設有一機器原價 $1,200.00，可以使用十五年，現擬每年平均提款存儲，以備至第十五年底換置之用。所提之款存於銀行，利率四釐，在第八年底（尚未提存時），其所提之數，已有若干？試計算之。

第九節　分期收回債券發生溢價及折價之計算法

借款人分期預提款項，另為存儲，以備償還，固屬償債之一法。惟存儲之利率，是否能與負債之利率相同，存儲之機關是否穩妥，均成問題，職是之故，於是有分期償還借款一部份之辦法，以資救濟。但每期償還時，須得債權人之同意。債權人是否即能同意，殊未可必。至償還之際，有時須按所欠之數，酌加相當數目，此種多付之數，名曰**溢價**(Premium)。反之，若因債權人需款，而預先償還，或可按所欠之數略減，此種少付之數，名曰**折價**(Discount)。分期償還時，既有溢價或折價之事實發生，則每期所提數額，自必不同，計算方法，亦必因而有異矣。

此種情事，發生於公司債券者為多。茲為易於明瞭起見，即述公司債券之辦法為代表。**公司債券**(Bond)者，股份有限公司因籌措資金，以債券之方式而發行之一種債務證券也。其形式與票據相似，多規定償還時期。債券在市場買賣之價格，高於券面時，其所高之數額，謂之溢價。低於券面時，其所低之數額，謂之折價。計算每期應提之數額時，此項提款，除付息外，即按照市價收買本公司債券，惟市價雖有高低，而計算時則不能不以一假定數為標準。

茲設 P 代表本金，i 代表利率，R 代表每年提存之數，b 代表債券每元之市價。

如以券面價格收買債券，則以 R' 代表每期所提之基金。

即
$$R'=\frac{P}{a_{\overline{n}|}(\text{按 } i)}$$

照上式 P，乃將來償還時之現價，若收買時債券每元之市價為 b，則

利率當由 i 改爲 $\frac{i}{b}$，而將來償還時之現價，卽當由 P 改爲 Pb，其公式如下：

$$Ra_{\overline{n}|}(\text{按}\frac{i}{b})=Pb$$

卽
$$R=\frac{Pb}{a_{\overline{n}|}(\text{按}\frac{i}{b})} \qquad \text{(第 20 式)}$$

按 $\frac{i}{b}$ 之利率，在用表上，未必卽能尋出，故祇有先尋其近似之數，然後加以推算。又債券券面之數，多係百元或千元，而每年所提之數，則常有零數，故祇得以足敷收買整券者，收買之。其餘零數，當另行存儲，待至湊足整券之數後，再行收買。

例——某公司發行公司債券 \$50,000.00，每券 \$1,000.00，時期十年，利率四釐。若向市場收買，市價爲百分之九十七，卽每券券面 \$1,000.00，祇須 \$970.00 卽可買到。玆爲計算如下，並編製一表，以表示每年可以收回債券之數目。

$$\frac{i}{b}=\frac{.04}{.97}=0.041237$$

由用表 VIII 查出 $\frac{1}{a_{\overline{10}|\cdot 04}}=0.1232909$

$$\frac{1}{a_{\overline{10}|\cdot 0425}}=0.1248301$$

用推算法算出：

$$\frac{1}{a_{\overline{10}|\cdot 041237}}=0.1240525$$

則
$$R=50,000\times .97\times .1240525$$
$$=\$6,016.55$$

第一年提存基金 \$6,016.55，除付利息 \$2,000 外，尚餘 \$4,016.55，可以 \$3,880.00 按 .97 收買券面 \$4,000.00，淨餘 \$136.55。

茲列表如下：

年數	每年初未還之本金數	利息(按四釐計算)	每期收買之券數	收買債券之券面價值	收買債券之實價	每年支付之數	每年提存數減去支付數後之餘額及其利息(利率 .041237)
1	\$ 50,000	\$ 2,000	4	\$ 4,000	\$ 3,880	\$ 5,880	\$ 136.55×.041237＝\$ 5.63
2	46,000	1,840	4	4,000	3,880	5,720	438.73×.041237＝ 18.09
3	42,000	1,680	4	4,000	3,880	5,560	913.37×.041237＝ 37.66
4	38,000	1,520	5	5,000	4,850	6,370	597.58×.041237＝ 24.64
5	33,000	1,320	5	5,000	4,850	6,170	468.77×.041237＝ 19.33
6	28,000	1,120	5	5,000	4,850	5,970	534.65×.041237＝ 22.05
7	23,000	920	5	5,000	4,850	5,770	803.25×.041237＝ 33.12
8	18,000	720	6	6,000	5,820	6,540	312.92×.041237＝ 12.90
9	12,000	480	6	6,000	5,820	6,300	42.37×.041237＝ 1.75
10	6,000	240	6	6,000	5,820	6,060	.67
合計	\$ 296,000	\$ 11,840	50	\$ 50,000	\$ 48,500	\$ 60,340	

按上表算出結果，至末期尚有餘額 \$ .67，故尚未十分精確，亦即每期所提基金尚可稍少，於是須有精確之算法矣。

若對於 R 尚須更求正確之數時，則將第 20 式之 $a_{\overline{n}|}$，用下列公式代表之：

$$a_{\overline{n|}}=\frac{1-\left(1+\frac{i}{b}\right)^{-n}}{\frac{i}{b}}=\frac{b}{i}\times\frac{(b+i)^n-b^n}{(b+i)^n}$$

則

$$R=iP\times\frac{(b+i)^n}{(b+i)^n-b^n}$$

將前例各數代入,則如下式:

$$R=.04\times50,000\left[\frac{(1.01)^{10}}{(1.01)^{10}-(.97)^{10}}\right]$$

$$=\$6,016.49$$

第十節 $\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$ 與 $\frac{1}{s_{\overline{n|}}}$ 之關係

償債基金之符號爲 $\frac{1}{s_{\overline{n|}}}$,年賦金之符號爲 $\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$,二者之關係殊爲密切。按照普通利率以求 R,根據用表 VII 之償債基金表可以查得,根據用表 VIII 之年賦金表亦可查悉,可由 $\frac{1}{s_{\overline{n|}}}+i$ 以求 $\frac{1}{a_{\overline{n|}}}$,亦可由 $\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-i$ 以求 $\frac{1}{s_{\overline{n|}}}$,更可由 $\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{s_{\overline{n|}}}$ 以求 i。其理如下:

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-\frac{1}{s_{\overline{n|}}}=\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}-\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

$$=i\left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n-1}-\frac{1}{(1+i)^n-1}\right]$$

$$=i\left[\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n-1}\right]=i$$

$$\frac{1}{s_{\overline{n|}}}=\frac{1}{a_{\overline{n|}}}-i \qquad \text{(第 21 式)}$$

上式亦可改爲下式:

$$\frac{1}{a_{\overline{n|}}}=\frac{1}{s_{\overline{n|}}}+i \qquad \text{(第 22 式)}$$

故年賦金$\left(\frac{1}{a_{\overline{n|}}}\right)$亦可稱爲分期償務本息之每期應還數,而償債基金

$\left(\frac{1}{s_{\overline{n}|}}\right)$ 僅爲還本數之每期應還數，並不包括債務利息在內。

$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}$ 爲償還債務本息數，$\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$ 則僅係償還債本數，並未包括利息在內，若加利息於 $\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$，則爲償還本息數，故 $\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i$。

查用表 VIII，\$1.00，按六釐五年，計算其 $\frac{1}{a_{\overline{5}|6\%}}$ 得 .2373964，若不包括利息，則爲 .1773964，亦可由用表 VII 查出 $\frac{1}{s_{\overline{5}|6\%}}$ 爲 .1773964，故

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}}=.1773964+.06$$
$$=.2373964$$

習題三

1. 設某君每年底存款若干於銀行，利率三釐，每年復利一次，時期十年，到期可取 \$1,000.00。现於第八年初，計算其已有存款本息若干？

2. 若上題所述各項，改爲每半年復利一次，試再計算之。

3. 某君借款 \$1,500.00，利率六釐，本息分八年平均攤還，投資者將每期收到之本息，仍按利率六釐存儲，試計算第五年底之本利合計若干？

4. 設某君欠款 \$2,500.00，利率六釐，现分七期提存償債基金，每年提存一次，按利率四釐，存於銀行，試計算第四年底之儲積額。

5. 將本章第九節所列之表，改爲每券 \$500.00，再改爲每券 \$100.00，試各編一表，以表示之。

6. 設某公司發行五釐公司債 \$100,000.00，每券 \$1,000.00，時期十五年，前八年向市場收買，每券 \$1,010.00，後七年向市場收買，每券 \$990.00，試計算之。

覆習題

1. 設某君擬購汽車一輛，計 \$2,765，現決定每半年底存款若干於銀行，利率九釐，每半年復利一次，擬於第三年底購買，試計算每半年應存之數。

2. 照上題所述各項，某君先向銀行借款，利率一分，每半年復利一次，分三年攤還，每半年付款一次，試計算每半年應還之數，

3. 設某君借款$1,000.00,利率五釐,每年分還利息之雙倍數,試編一表,以表示還清之時期及情形。

4. 設某君建屋一所$12,000.00,先付半數,其餘按六釐計息,每年償還本息$1,500.00,直至還清爲止。試計算還清之時期。

5. 照上題所述各項,試計算第二年底某君對於該屋之所有權若干?

6. 某市擬建一橋計$25,000.00,按利率六釐,分十五年攤還,試計算第十一年初未付之餘額。

7. 設有某種款項計$174.83,利率五釐,本息分五年平均支付,試編一表以表示之。

8. 設某公司發行公司債$20,000.00,每券$500.00,實利率五釐,時期六年,擬每年分別收回。至收買時之市價爲百分之一百零二,試計算其每年應提之償債基金若干?又每次收回須滿$500.00,方可收買一券,試編一表以表示之。

9. 設有汽車一輛,原價$2,000.00,可使用五年,其殘餘價值,預計$350.00,現擬每年提存基金,按利率四釐,存於銀行,執料第四年初,汽車忽然損壞,僅售出$50.00,試計算其另購新車一輛(價值仍爲$2,000.00)時,尚須添款若干?

10. 設某君借款$30,000.00,利率七釐,建屋一所,議定每年償還五分之一,以作本息,試計算其還清之時期。

第八章　債券

第一節　概說

債券(Bond)者,政府或企業因籌措資金,以債券之方式而發行之一種債務證券也。此項債券,卽爲發行者對於執券人於一定期內,付與一定款項之契約,故於券面上載明金額及還本付息之時期。易言之,債券乃代表執券人卽投資者對於政府或企業之債權。債券之性質有二:政府發行者,謂之公債。公司發行者謂之公司債。債券付息之時期,有一年一次者,有半年一次者,有三個月一次者,有一個月一次者,普通多爲半年一次。債券之金額,稱爲**券面價值**(Face Value)亦可稱爲**平價**(Par Value)。至到期付還時之價值,普通稱爲**償還價值**(Redemption Value)。

債券在市場上之價格,與其券面相同時,謂之**平價**(At Par),反之市價高於券面,謂之**溢價**(Premium)。低於券面,謂之**折價**(Discount)。債券在普通情形之下,當然以券面價格爲標準,但有時因特種情形,而生折價或溢價焉。

第二節　決定投資利率之要素

投資者購置債券時所望獲得之利率,謂之**投資利率**(Investment Rate)。投資利率與債券上所規定之利率,未必相同。決定投資利率高低之條件,爲債券之性質若何,償債基金之是否充實,基金保管之是否穩當,然後進而觀察債券發行數額之多寡,券面規定利率之大小,還本

時期之遠近，市面拆息之高低，未來拆息之趨勢等等。匯合上述各種情形，並加以精密之考衡，則投資者所欲得之利率，始有決定之標準焉。

投資者所望獲得之利率，既經決定，然後可按複利或年金法，計算債券須以何種價格購入，方為合算。

第三節 按指定利率計算債券之價格

計算時可以下列符號，表示算式中各項數額：

C＝債券償還價值

n＝由發行至償還之時期

g＝每年收到之利息與償還價值之比例

i＝實際投資利率

A＝債券購進價格

在投資者之立場觀之，債券之價值，不外包括下列二項：

(一)利息之支付，

(二)本金之償還。

若債券之利息每年支付數次，則以p代表次數，每次支付之利息，即為$\frac{Cg}{p}$。若干年之利息，則為$\frac{Cg}{p}$經過p次，再經過n年者。每年利息之支付，與每年分期支付年金相同。故計算各期利息現價之公式如下：

$$Cga_{\overline{n}|}^{(p)}$$

$a_{\overline{n}|}^{(p)}$乃按實際投資利率計算。

除各期利息外，尚有計算償還價值現價之公式如下：

$$Cv^n$$

按
$$v=\frac{1}{1+i}$$

若將上列二式合併，則債券購進之價格，應如下式：

$$A=Cv^n+gCa_{\overline{n}|}^{(p)}@i \qquad \text{(第1式)}$$

債券之付息時期，及投資利率，複利次數，各有不同，故其購進價格之計算方法，亦各有不同，玆分述於下：

(甲)債券每年付息一次者 在此項情形之下，$p=1$，故上示第一

公式,變成下式:

$$A=Cv^n+gCa_{\overline{n}|}$$

因$a_{\overline{n}|}=\frac{1-v^n}{i}$,則:

$$A=Cv^n+\frac{g}{i}(C-Cv^n)$$

若將 $Cv^n=K$,則:

$$A=K+\frac{g}{i}(C-K) \qquad \text{(第2式)}$$

按此處之 K,乃代表償還價値之現價者。

計算債券之購進價格,卽爲求其償還價値之現價與各期利息現價之總和。若債券之利率(g)與實際投資利率之(i)相同,則購進價格爲 C,而 $C-K$,卽爲各期利息之現價。否則須以$\frac{g}{i}$乘($C-K$)。二項合併,卽成爲上述之第2式。

例——設有某項債券,每券面値 \$100,利率四釐二毫半,每年付息一次,十八年到期,按照券面償還,投資利率爲六釐。玆爲計算其購進價格如下:

$$\begin{aligned}A&=100(1+.06)^{-18}+.0425\times100\times a_{\overline{18}|.06} & n&=18\\&=100\times.3503437911+.0425\times100\times10.8276 & g&=.0425\\&=35.03437911+46.0173 & i&=.06\\&=\$81.05 & C&=\$100\end{aligned}$$

債券之購進價格,若高於其償還價値時,其高出之部份,卽係溢價。吾人旣以 A 代表債券購進價格,以 C 代表償還價値,則 $A-C$ =溢價。計算溢價之公式,卽從第2式之雙方各減去 C,玆列示如下:

$$\begin{aligned}A-C&=K+\frac{g}{i}(C-K)-C\\&=\frac{g}{i}(C-K)-C+K\\&=\frac{g}{i}(C-K)-(C-K)\\&=\frac{g-i}{i}(C-K) \qquad \text{(第3式)}\end{aligned}$$

若債券之償還價值爲 1 時，則計算溢價之公式，應改如下式：

$$A-1=\frac{g-i}{i}(1-v^n)$$

$$=(g-i)a_{\overline{n}|} \qquad \text{(第 4 式)}$$

關於每單位之溢價或折價，常用 k 符號代表之。故上式 $(A-1)$ 可用 k 代表如下：

$$k=(g-i)a_{\overline{n}|} \qquad \text{(第 5 式)}$$

此項 $a_{\overline{n}|}$ 之利率仍爲 i。

觀於上式，可知 $g>i$ 則 k 爲正數，若 $g<i$，則 k 爲負數。若債券係按券面償還，$g>i$ 則 k 爲溢價，$g<i$ 則爲折價。

玆應用第 5 式以計算上例債券之溢價或折價及購進價格，則

$$k=(.0425-.06)a_{\overline{18}|@.06} \qquad n=18$$

$$=-.0175\times 10.8276 \qquad g=.0425$$

$$=-.189483 \qquad i=.06$$

按照上式計算之結果，購進價格每元應有折價約合一角九分之譜，亦卽購進者對於面價每元祇須付八角一分餘（\$1.00－\$0.189483＝\$0.810517）也。

上例債券之面值爲 \$100，故其購進價格爲 \$81.05。

（乙）債券每年付息數次，投資利率亦複利數次，二者之次數相同者

若投資利率每年複利數次，而債券付息每年亦分數次平均支付，二者之次數相同，則代表時期之 n，須以複利次數之 m 乘之，卽得 mn。至於每期所付之利息，卽爲 $\frac{g}{m}$。每期之投資利率爲 $\frac{j}{m}$。玆列式如下：

$$A=Cv^{mn}+\frac{g}{m}Ca_{\overline{mn}|@\frac{j}{m}} \qquad \text{(第 6 式)}$$

例——與甲項同，僅將每年付息一次改爲半年付息一次，投資利率六釐改爲每半年複利一次。玆爲計算其購進價格如下：

$$A=100\left(1+\frac{.06}{2}\right)^{-18\times 2}+\frac{.0425}{2}\times 100\times a_{\overline{18\times 2}|\frac{.06}{2}} \qquad j=.06$$

$$=100\times(1.03)^{-36}+.02125\times 100\times a_{\overline{36}|.03} \qquad g=.0425 \quad C=100$$

$=100\times.3450324251+.02125\times100\times21.832252$ $m=2$

$=34.5032425+46.393537$ $n=18$

$=\$80.90$

（丙）債券每年付息數次，投資利率亦複利數次，二者之次數不同者除 $m=1$ 外，其計算頗爲複繁，須將下列各項代入第1式右方各項。

$$a_{\overline{n}|}^{(p)}=\frac{1-v^n}{p[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1]}$$

$$v=\frac{1}{1+i}$$

$$1+i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^m$$

其式如下：

$$A=\frac{C}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}}+\frac{Cg}{p}\cdot\frac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mn}}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}\qquad\text{（第7式）}$$

若 $m=1$，則 $j=i$，其式爲：

$$A=\frac{C}{(1+i)^n}+Cg\times\frac{i}{j_{(p)}}\times a_{\overline{n}|}@i\qquad\text{（第8式）}$$

例——與甲項同，僅將付息次數改爲每年二次，則

$g=.0425,\quad i=.06,\quad m=1,\quad p=2,\quad n=18$

該項債券之購進價格，可依上式計算如下：

$$A=\frac{100}{(1.06)^{18}}+\frac{4.25}{2}\times\frac{1-(1.06)^{-18}}{(1.06)^{\frac{1}{2}}-1}$$

$$=\$35.034+4.25\times\frac{.06}{j_{(2)}}\times a_{\overline{18}|}@.06$$

$$=\$35.034+4.25\times1.01478\times10.8276$$

$$=\$81.73$$

若求該項債券之折價，應如下式：

$$k=(g-j_{(p)})\times\frac{1-(1+i)^{-n}}{j_{(p)}}$$

$$k=(.0425-j_{(2)})\times\frac{1-(1.06)^{-18}}{j_{(2)}}$$

$$=(.0425-.059126)\times\frac{1-.3503437911}{.0591260282}$$

$$=-.016626\times\frac{.6496562089}{0591260282}$$

$$=-.016626\times10.988$$

$$=-.1827$$

券面每元之購進價格當爲 \$1－\$0.1827＝.8173。今券面爲 \$100.00，則其購進價格當爲 \$81.73，與用第 8 式所算者適合。

第四節　債券價格表之應用

債券所定利率若與投資利率不同，則發生溢價或折價，其計算方式，已見前節。實際上爲圖計算者之便利起見，可按照普通利率編成債券價格檢查表，以供查閱。茲例示一四釐債券價格表於後，餘可依法計算編製(按美國 Spargue 氏編有 Complete Bond Table，可以參考)。至於檢查此表之手續，甚爲簡便。如四釐債券，期十五年，投資者希望得利率三釐，每半年複利一次，則在下表之中查得三釐與十五年二行之交叉數爲 \$11,200.79，卽該項債券面額 \$10,000.00 之購進價格也。若投資人希望獲得利率五釐，則由下表查悉五釐與十五年二行之交叉數爲 \$8,953.49。並可由該表看出投資利率小於債券規定利率者，必生溢價，大於債券規定利率者，必生折價，二者相同，則見平價。

四釐債券價格表

(券面 \$10,000.00)(每年付息二次)

償還時期／投資利率	十年	十五年	二十年	二十五年
3%	\$ 10,858.43	\$ 11,200.79	\$ 11,495.79	\$ 11,749.98
$3\frac{1}{4}$%	10,635.96	10,884.84	11,096.66	21,276.95
$3\frac{1}{2}$%	10,418.82	10,579.65	10,714.86	10,828.53
$3\frac{3}{4}$%	10,206.88	10,284.83	10,349.56	10,403.32
4%	10,000.00	10,000.00	10,000.00	10,000.00
$4\frac{1}{4}$%	9,798.05	9,724.80	9,665.43	9,617.33
$4\frac{1}{2}$%	9,600.91	9,458.87	9,345.16	9,254.14
$4\frac{3}{4}$%	9,408.44	9,201.87	9,038.52	8,909.34
5%	9,220.54	8,953.49	8,744.86	8,581.88

習 題 一

1. 設某甲擬購某種六釐公司債 $5,000.00,該券每半年付息一次,期二十年,某君希望實得利率五釐,每半年復利一次,試計算其債券每元之溢價,並計算(甲)按券面償還,及(乙)按 $105 償還兩種情形下之購進價格。

2. 設某甲擬購某項五釐公司債 $10,000.00,時期二十年,每年付息一次,某甲希望實得利率六釐,試計算其購進價格。

3. 設有某種公司債 $10,000.00,每半年付息 $300.00,時期二十五年,到期還本 $10,500.00,若投資者希望實得利率五釐,每半年復利一次,試計算其購進價格。

4. 某乙於十九年十一月十五日擬購某種公司債,其市價為每百元 $85.00,利率四釐半,每半年付息一次,民國四十二年十一月十五日到期,某乙希望實得利率五釐或五釐以上,試問該項公債,可否購買?

5. 設有某項公債 $1,000.00,利率三釐半,時期二十三年,每半年付息一次,投資者希望實得利率四釐,每半年復利一次,試計算其購進價格。

6. 設有四釐半公債,發行於民國二十年五月二十日,至三十八年五月二十日到期,每半年付息一次,投資者希望實得利率六釐,每半年復利一次,試問債券每百元之折價若干?若於三十年五月二十日購進,亦欲得利率六釐,每半年復利一次,試計算其購進價格。

7. 設有債券二紙,每券 $1,000.00,時期二十年,其時實際投資利率為六釐,每半年復利一次,該債券一係每半年付息 $25.00,一係每半年付息 $35.00,試計算二者購進價格之差額.

8. 設有某項債券,券面 $100.00,時期十二年,按券面償還,利率五釐,每半年付息一次,投資者希望實得利率五釐,每半年復利一次,試計算其購進價格。

9. 試用本章第 7 式,計算下列二項,並證明債券購進價格表中數字,有無錯誤:

(甲)投資利率五釐,時期十年,債券利率四釐,每年付息二次,券面百元。

(乙)投資利率三釐,時期十年,債券利率四釐,每年付息二次,券面百元。

第五節　債券溢價之攤提

公債或公司債發生溢價或折價之原因,除本章第二節所述決定投資利率之各項要素外,尚有若干可料與不可料之情事,如農村之經濟狀況,商業之隆替情形,財政之榮枯,時局之安擾等,皆足以影響債券之價值,而金融之緩急,投機之操縱,關係尤巨焉。職是之故,若債券之購進價值,大於券面或償還價值時,此項溢價,必須逐期攤提,至到期償還時適能攤完爲度。攤提之方法,卽於所得利息中,減除本期應得利息,所有餘額,卽爲應行攤提之數。此種手續,名曰**溢價之攤提**(Amortization of the Premium or Writing off the Premium)。

茲將各期收息時溢價攤提之計算,述之於下。設以 B 代表每期(如每半年)期初之帳面價值 (Book Value),j 代表每年名利率,g 代表償還價值與債券利息之比例。持券人每半年收到債券之利息為 $\frac{Cg}{2}$,而應得之利息為 $\frac{Bj}{2}$,二者相減,即為應攤提之數額,其式如下:

$$\frac{Cg}{2}-\frac{Bj}{2} \qquad \text{(第 9 式)}$$

債券每半年所發利息,減去按投資利率計算帳面價值所應得之利息,即為應攤提之數額。

例——設有七釐公司債 \$1,000.00,發行於民國二十二年一月一日,至二十七年一月一日到期,照券面償還,每半年付息一次,投資者希望實得利率五釐,每半年複利一次,茲計算其購進時之價值,並為編一溢價攤提表如下:

$$k=(.035-.025)a_{\overline{10}|.025} \qquad n=5$$
$$=.01\times 8.7520639 \qquad m=2$$
$$=.087520639 \qquad g=.07$$
$$j=.05$$

按每元之溢價為 \$ .087520639,則 \$1,000 之溢價為 \$87.521,其購進價格為 \$1,000.00+\$87.521=\$1,087.521。

第一期(半年)末之攤提數為:

$$(\$1,000.00\times .035)-(\$1,087.521\times .025)=\$7.81$$

此時之帳面價值為 \$1,087.52−\$7.81=\$1,079.71。第二期(一年)末之攤提數為:

$$(\$1000.00\times .035)-(\$1,079.71\times .025)=\$8.01$$

而帳面價值則為 \$1,079.71−\$8.01=\$1,071.70,餘可類推。直至末期之帳面價值為 \$999.99 而止。茲列表以明之:

債券溢價攤提表

時　　期	帳面價值或投資餘額	帳面價值按投資利率計算之利息（半　年）	債券每半年支付之利息	溢　價攤提數
二十二年一月一日	$ 1,087.52	$ 27.19	$ 35.00	$ 7.81
七月一日	1,079.71	26.99	35.00	8.01
二十三年一月一日	1,071.70	26.79	35.00	8.21
七月一日	1,063.49	26.59	35.00	8.41
二十四年一月一日	1,055.08	26.38	35.00	8.62
七月一日	1,046.46	26.16	35.00	8.84
二十五年一月一日	1,037.62	25.94	35.00	9.06
七月一日	1,028.56	25.71	35.00	9.29
二十六年一月一日	1,019.27	25.48	35.00	9.52
七月一日	1,009.75	25.24	35.00	9.76
二十七年一月一日	999.99			

（照理末期之帳面價值應爲$1,000.00，現僅$999.99，相差一分，此係尾數進出關係，若多用一位小數，即可脗合）。

第六節　債券折價之累積

債券之購進價值，若小於劵面或償還價值時，此項折價，亦須逐期累積之。其法以所收利息，不足於應得利息之數，加入原投資數計算，直至與償還價值相同爲止。此項手續，名曰**折價之累積**（Accumulation of Discount）。

玆仍以上節所用符號 B, j, C, g，列成一每半年期末折價累積之公式如下：

$$\frac{Bj}{2} - \frac{Cg}{2} \qquad \text{（第 10 式）}$$

以債券之帳面價值，按投資利率計算半年之利息，減去債券於每半年末所發之利息，即爲於該半年期末折價之累積數。

例——設有五蘊公司債$1,000.00，發行於二十年七月一日，於二十六年七月一日到期，照劵面償還，每半年付息一次。投資者希望實

得利率六釐，每半年複利一次，試計算其購進價格。並編一折價累積表，以示其投資數額之增加。

$$k=(.025-.03)a_{\overline{12|}.03} \qquad n=6$$
$$=-.005\times 9.9540040 \qquad m=2$$
$$=-.04977002 \qquad g=.05$$
$$j=.06$$

按每元之折價爲 \$.04977，則 \$1,000.00 之折價爲 \$49.77，其購進價格爲 \$950.23。

第一期（半年）末累積之數如下：

(\$1,000.00×.025)－(\$950.23×.03)＝－\$3.507

餘類推，玆列表示之於下：

債券折價累積表

時　期	帳面價值	帳面價值按投資利率計算之利息（半年）	債券每半年支付之利息	折價之累積數額
二十年七月一日	\$950.230	\$28.507	\$25.000	\$3.507
二十一年一月一日	953.737	28.612	25.000	3.612
七月一日	957.349	28.721	25.000	3.721
二十二年一月一日	931.070	28.832	25.000	3.832
七月一日	964.902	28.947	25.000	3.947
二十三年一月一日	968.849	29.065	25.000	4.065
七月一日	972.914	29.187	25.000	4.187
二十四年一月一日	977.101	29.313	25.000	4.313
七月一日	981.414	29.442	25.000	4.442
二十五年一月一日	985.856	29.576	25.000	4.576
七月一日	990.432	29.713	25.000	4.713
二十六年一月一日	995.145	29.855	25.000	4.855
七月一日	1,000.000			

第七節　購進債券日期與債券發息日期不同時之計算

購進債券之日期，未必適爲發行債券之日或發息之次日（卽起息之

日)，故購券者有時除須支付債券之價值外，尚須將購券日債券上已經發生之應收利息，算還發行或出售債券者。因債券之息票大多附於券上，到期照數全付，故在出售時，應將自上次發息日起至出售日止之利息，加算於債券之售價中，其算法有二：

(甲)就債券之價值，加上自上次發息日至債券購買日止期間內之債券利息，其和卽爲債券之購進價格。此項利息爲單利，卽依債券上所規定之利率，按發息後日數比例計算者，故其計算頗爲便利。

例——設有六釐公司債 \$1,000.00，每年一月一日及七月一日各發息一次，若於四月一日購進，無論溢價或折價，除照付購進價格外，再當加付應收息 \$15.00。

(乙)先算出債券在購買前發息期之次日之價值，然後根據此項價值，照發息後日數，按投資利率，計算其至購買日止之總價值，卽爲其購進價格。此種計算方法，有單利與複利之分，單利法計算之結果稍大，於售方較有利益。

茲先將複利法之計算公式列下：

以 A 代表購進價格。

A_0 代表截至上次發息日之債券價值。

p 代表上次發息日至購進日間之時期。

q 代表上次發息日至本次發息日間之時期

$$A = A_0(1+i)^{\frac{p}{q}} \qquad \text{(第 11 式)}$$

若用單利法計算之，則如下式：

$$A = A_0 + i \times \frac{p}{q} \times A_0 \qquad \text{(第 12 式)}$$

例——設某種六釐公司債 \$1,000.00，於三十二年十一月一日到期，每年五月一日及十一月一日各發息一次，現擬於二十二年八月一日購進，投資利率五釐，每半年複利一次，計算其購進價格時，當先計算二十二年五月一日之購進價格。

$$A_0 = 1{,}000 \times (1+.025)^{-21} + .03 \times \$1{,}000.00\, a_{\overline{21}|.025}$$
$$= 1{,}000 \times .5953863 + 30 \times 16.1845486$$
$$= \$1{,}080.92$$

然後計算其八月一日之購進價格。

照第 11 式計算如下:

$$A = 1{,}080.92 \times (1+.025)^{\frac{3}{6}}$$
$$= 1{,}080.92 \times 1.0124228$$
$$= \$1{,}094.35$$

照第 12 式計算如下:

$$A = 1{,}080.92 + .025 \times \tfrac{3}{6} \times 1{,}080.92$$
$$= 1{,}080.92 + 13.51$$
$$= \$1{,}094.43$$

按單利法計算此項債券於八月一日之購進價格，較按複利法計算者多 \$ .08。

習 題 二

1. 設有五釐半公司債，期限十年，到期每百元償還 \$ 110.00，每半年付息一次。若投資者希望實得利率四釐，每半年復利一次，試計算購進券面 \$ 1,000.00 之價值，並編一表以示其溢價攤提之情形.

2. 設有七釐公司債，券面 \$ 100.00，每年付息二次，時期六年，投資者希望實得利率六釐，每半年復利一次，試爲編一溢價攤提表。

3. 設有四釐七毫半公債 \$ 1,000.00，每年付息二次，時期五年。投資者希望實得利率六釐，每半年復利一次，試計算其購進價格，並編一表，以示其折價累積之情形。

4. 設有六釐公司債 \$ 100.00，時期五年，到期償還 \$ 120.00，每半年付息一次，投資者希望實得利率六釐，每半年復利一次，試爲編一折價累積表。

5. 設國泰公司擬購華東公司之七釐公司債券，面值 \$ 50,000.00，時期五年，每半年發息一次，如投資利率爲八釐，每半年復利一次，試計算其現價，並爲編一折價累積表.

6. 照第 5 題所述各項，若投資利率爲五釐，每半年復利一次，試計算其現價，並爲編一溢價攤提表以表示之。

7. 設某種債券 \$ 1,000.00，於十九年七月一日發行，利率七釐，每半年付息一次，現有人擬於二十年三月一日以 \$ 98 .0 買進，外加利息(複利)，試計算該債券之購進價格。

8. 設某債券 \$ 10,000.00，於二十五年一月一日發行，利率六釐，每半年付息一次，三十

五年一月一日到期，若於二十五年三月一日購進，投資利率五釐，試計算其購進價格。

第八節 由購進價格計算投資利率

由投資利率計算購進價格各法，已詳前節，茲請進而討論由購進價格計算投資利率之方法。此項方法，較前項尤爲重要，蓋前者係投資者已自決定其投資利率，欲算出其合算之購進價格爲若干，以便於市價相仿時，爲購進之標準。後者則係投資者已知市場價格，但不知折合投資利率若干，故用本法計算之，以決定其是否可購。至對於業已購進之債券，若欲決定其逐年之攤提數或累積數，更不得不先算出投資利率，以爲根據。

計算投資利率，若無債券溢價或折價檢查表作爲輔助，則頗困難，因由此表可查出其相近數，以作推算之初步也。但如無此表，則參考年金表亦可。茲分別述之於後：

（甲）應用債券價格表之計算法　設有四釐債券，券面 \$100.00，時期十五年，每半年付息一次，以 \$90.00 購進，計算其投資利率如下：

吾人由本章第 4 節所示四釐債券溢價或折價檢查表十五年期一欄中，查得投資利率爲 $4\frac{3}{4}\%$ 時，券面 \$100.00，合價 \$92.0187，又投資利率爲 5% 時，券面 \$100.00，合價 \$89.5349。茲用推値法算出券面 \$100.00，若以 \$90.00 購進，約合投資利率 .0495＋。若欲更求精確之數，可查 Sprague 氏所編之 Complete Bond Tables。因其投資利率之距離，僅 .0005，由此表可查出投資利率爲 .0495 時，券面 \$100.00，合價 \$90.02489。又投資利率爲 .0500 時，券面 \$100.00，合價 \$89.53485。再用推値法算出以 \$90.00 購進券面 \$100.00，約合投資利率 .049525，此數已甚精確，足爲根據。此係每年複利二次之每年利率，若合每年複利一次之利率則爲：

$$(1.024762)^2-1=.05014$$

（乙）應用年金終價表之計算法　仍以前例而言，該債券之購進價

格為 \$90.00，到期償還 \$100.00，購券人可得利益 \$10.00，是即表示購券人對於每半年所收債券規定之利息，尚嫌不足，故於每半年末，另有如下之差數（即折價 \$10.00，分 30 期，按每期投資利率 $\frac{j_{(2)}}{2}$ 分攤之數），以資補充。以此項折價分攤數加於債券利息 \$2.00 之上，其總計即為實際投資 \$90.00 上之利息。以債券之買價 \$90.00 除之，即得其每半年投資利率之數。

$$\frac{\$10.00}{s_{\overline{30|}}}@\frac{j_{(2)}}{2}$$

$j_{(2)}$ 乃代表每年複利二次之名義投資利率。

吾人於未知投資利率以前，須先由年金表尋出二項利率之數，一則較大於投資利率，一則較小於投資利率。

券面 \$100，利率四釐，每半年付息一次，時期十五年，到期照券面償還，現以 \$90.00 購進。茲按債券利率四釐連同折價 \$10 合併計算，其投資利率已超過 .045，故可假定投資利率在 .045 與 .05 之間。

茲按利率 .045 計算折價之 \$10，攤派每半年若干。

$$\frac{10}{s_{\overline{30|}}@.0225}=0.236993$$

茲再按利率 .05 計算折價之 \$10，攤派每半年若干。

$$\frac{10}{s_{\overline{30|}}@.025}=0.227776$$

今每半年之債券利息為 \$2.00，若將折價之數額按投資利率四釐半計算，每半年攤派之利益計 \$0.236993，二者合計 \$2.236993。按購進價格 \$90 計算，合每半年利率為 .0248555，或年利 .049711 每半年複利一次。同理，若將折價之數額按投資利率五釐計算，每半年攤派之利益計 \$0.227776，連同債券半年之利息 \$2.00，合計 \$2.227776。以購進價格 \$90 計算，約合每半年之利率為 .0247531，或年利 .0495062，每半年複利一次。

再用推值法，即可求出 $j_{(2)}$ 之正確數，算式如下：

$$\frac{j_{(2)}-.045}{.05-.045}=\frac{j_{(2)}-.0497110}{.0495062-.0497110}$$

或 $$\frac{j_{(2)}-.045}{.005}=\frac{.0497110-j_{(2)}}{.0002048}$$

則 $$.0052048j_{(2)}=.00025777$$

$$j_{(2)}=.049524$$

此項答數，與前述由債券價格表查算之結果，僅差 .000001。

(丙)不用債券價格表及年金終價表之計算法 照本章第3節乙項，到期按票面償還之債券，在購進時，計算其溢價數額之公式如下：

$$k_1=C\left(\frac{g}{2}-\frac{j}{2}\right)a_{\overline{2n}|}@\frac{j}{2} \qquad \text{(第 13 式)}$$

上式以$\frac{g}{2}$代表債券規定之半年利率，$\frac{j}{2}$代表投資之半年利率，j代表名利率，每半年復利一次。

因 $a_{\overline{2n}|}=\dfrac{1-\left(1+\frac{j}{2}\right)^{-2n}}{\frac{j}{2}}$，故上式可以演化如下：

$$\frac{2k_1}{C(g-j)}=\frac{1-\left(1+\frac{j}{2}\right)^{-2n}}{\frac{j}{2}}.$$

又因 $\frac{k_1}{C}=k$，故上式又可演化如下：

$$\frac{g-j}{k}=\frac{j}{1-\left(1+\frac{j}{2}\right)^{-2n}}$$

$\left(1+\frac{j}{2}\right)^{-2n}$ 用二項式演化，則爲：

$$\frac{g-j}{k}=\frac{j}{nj-n(2n+1)\frac{j^2}{4}} \quad \text{(近似數)}$$

$$=\frac{1}{n-n(2n+1)\frac{j}{4}} \quad \text{(近似數)}$$

(j^3 之數頗小,可不計算。)

雙方乘以 n,則如下式:

$$\frac{n(g-j)}{k}=\frac{1}{1-\frac{2n+1}{4}j}$$

或

$$\frac{n(g-j)}{k}=1+\frac{2n+1}{4}j \text{ (近似數)}$$

求 j 之價值,則如下式:

$$j=\frac{4(ng-k)}{2n(k+2)+k} \text{ (近似數)} \qquad \text{(第 14 式)}$$

玆仍以甲乙二項之例爲本項計算之例,以便比較。該例中之 $n=15$, $g=.04$, $k=-.1$,照第 14 式計算之,得數如下:

$$j=\frac{4(15\times.04)-(-.1)}{2\times15\times(-.1+2)+(-.1)}$$

$$=.0492$$

此與前列甲乙二項之結果,已相差無幾,但尙可再行推算更精確之數,即照第四章第八節求利率之方法,將 $j=.0492+h$,繼續計算即得。

第九節 各種分期還本之債券

債券之種類甚多,其償還之方法亦有種種之不同,有一次償還者,有分期償還者。其爲分期償還者,又有各期所還數額一律與不一律之分,以及前數年付息不還本,後數年還本付息之別,各期所還數一律者名曰分期平均償還債券(Serial Bonds)。至償還之時,有每期按券面一律攤還百分之幾者,亦有用抽籤法抽定某一部份予以償還者,此二法之計算,當以各券一律分期攤還法爲較有根據。若用抽籤法,則某號債券何時中籤,難於預測,或第一次抽籤即中,或直至末期方中,祇能以中籤之可能性爲比例,至抽籤之結果,並無一定之把握也,所中之籤數或多或少,此項多中少中各籤之規定利率與投資利率之差額,祇得轉入損益項下。玆分別述其計算方法於下:

(甲)每年所還數平均一律者 玆以債券償還數爲 1,分 r 年償還,

每年底所償還之一部份為$\frac{1}{r}$各期所還數之現價總計為：

$$K=\frac{a_{\overline{r}|}}{r}\text{（按投資利率計算）}$$

計算其溢價或折價之公式則如下示：

$$k=\left(1-\frac{a_{\overline{r}|}}{r}\right)\frac{g-i}{i} \qquad \text{（第15式）}$$

此項$a_{\overline{r}|}$係按投資利率計算。茲舉例證明之如下：

例——設於民國廿年一月一日擬購五釐分期償還債券券面\$5,000.00，每年還本付息一次，分十年平均還淸，投資者希望獲得之投資利率為六釐，茲依上式計算其購進價格如下：

$$k=\left(1-\frac{a_{\overline{10}|}}{10}\right)\frac{.05-.06}{.06} \qquad r=10$$

$$g=.05$$

$$a_{\overline{10}|}\text{ 按 }.06=7.360087 \qquad i=.06$$

$$k=-\tfrac{1}{6}\times .2639913=-.04399855$$

\$5,000.00之折價＝\$5,000.00×.04399855＝\$219.993

購進價格＝\$5,000.00－\$219.993＝\$4,780.007。

茲為編製折價累積表於下，以證明之：

債券折價累積表

日　　期	各期帳面價值	每年投資利息＝帳面價值×.06	規定利息＝券面×.05	折價之累積	分期償還數
二十年一月一日	\$ 4,780.007	\$ 286.800	\$ 250.00	\$ 36.800	\$ 500
二十一年一月一日	4,316.807	259.008	225.00	34.008	500
二十二年一月一日	3,850.815	231.049	200.00	31.049	500
二十三年一月一日	3,381.864	202.912	175.00	27.912	500
二十四年一月一日	2,909.776	174.587	150.00	24.587	500
二十五年一月一日	2,434.363	146.062	125.00	21.062	500
二十六年一月一日	1,955.425	117.326	100.00	17.326	500
二十七年一月一日	1,472.751	88.365	75.00	13.365	500
二十八年一月一日	986.116	59.167	50.00	9.167	500
二十九年一月一日	495.283	29.717	25.00	4.717	500
三十年一月一日	000.000				

按我國政府發行之內國公債，大別之可分爲二種：一曰公債，乃用抽籤方法爲分期償還之標準，規定於若干年內完全還清，每年抽籤一次，二次或四次。一曰庫券，則係用每券分期還本之方法，利隨本減。如用抽籤方法，投資者所得債券何期中籤，勢難預料，祇能以中籤之可能性爲比例，而計算之，已如上述。公債各期所抽籤數，又有一律與不一律之分，若係一律者，其計算可照本法。如海河公債在二十二年六月底，尙有國幣二百四十萬元未還，分十二期還清，每半年抽籤一次，計抽五支，利率年利六釐，每半年付息一次，假定擬購入票面＄6,000.00，均係百元票，各票號碼不同，每半年可中籤五支，計＄500.00，投資者希望實得利率一分二釐，每半年複利一次，茲計算其購進價格：

$$k=\left(1-\frac{a_{\overline{12}|}}{12}\right)\frac{.03-.06}{.06}a_{\overline{21}|}\text{ 按 }.06 \qquad r=12$$

$$=8.3838439 \qquad g=.03$$

$$\qquad i=.06$$

$$k=-\tfrac{1}{2}\times .30135$$

$$=-.150675$$

＄6,000.00 之折價爲＄6,000.00×.150675=＄904.05

購進價格=＄6,000.00−＄904.05=＄5,095.95

茲編一表，以供參證：

時期			各期所得本利數			帳面上照週年一分二釐每半年應得之利息	投資減少數	投資減少後之餘額
年	月	日	本金	利息	本利合計			
22	7	1						$5,095.95
	12	31	$ 500.00	$ 180.00	$ 680.00	$ 305.76	$ 374.24	4,721.71
23	6	30	500.00	165.00	665.00	283.30	381.70	4,340.01
	12	31	500.00	150.00	650.00	260.40	389.60	3,950.41
24	6	30	500.00	135.00	635.00	237.03	397.97	3,552.44
	12	31	500.00	120.00	620.00	213.14	406.86	3,145.58
25	6	30	500.00	105.00	605.00	188.74	416.26	2,729.32
	12	31	500.00	90.00	590.00	163.76	426.24	2,303.08
26	6	30	500.00	75.00	575.00	138.19	436.81	1,866.27
	12	31	500.00	60.00	560.00	111.98	448.02	1,418.25
27	6	30	500.00	45.00	545.00	85.10	459.90	958.35
	12	31	500.00	30.00	530.00	57.50	472.50	485.85
28	6	30	500.00	15.00	515.00	29.15	485.85	0
合計			$6,000.00	$1,170.00	$7,170.00	$ 2,074.05	$5,095.95	

(乙)每年還本數額不一律者　計算每年還本數額不一律之債券之購進價格，卽將各期所還數額之購進價格相加卽得。惟在下列各情形下，尙有簡捷方法。

(A)債券每年付息一次，投資利率亦每年複利一次者：

茲以 $C_1, C_2, \cdots\cdots C_r$ 代表每期所還本金之數。

$n_1, n_2, \cdots\cdots n_r$ 代表每次還本之時期。

$K_1, K_2, \cdots\cdots K_r$ 代表每期所還本金按投資利率算出之現價。

$A_1, A_2, \cdots\cdots A_r$ 代表每期所還數額之購進價格。

根據第 2 式，計算每期所還數額之購進價格，其式如下：

$$A_1 = K_1 + \frac{g}{i}(C_1 - K_1)$$

$$A_2 = K_2 + \frac{g}{i}(C_2 - K_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_r = K_r + \frac{g}{i}(C_r - K_r)$$

各項相加，則如下式：

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_r = K_1 + K_2 + \cdots + K_r + \frac{g}{i}[(C_1 + C_2 + \cdots C_r) - (K_1 + K_2 + \cdots + K_r)]$$

歸納上式，則得下式：

$$A = K + \frac{g}{i}(C - K) \qquad \text{(第 16 式)}$$

其中 C 爲全部償還價値，K 爲 $K_1, + K_2 + \cdots K_r$，卽 $C_1, C_2, C_3, \cdots C_r$，各現價之總和，而 A 卽爲總買價。

例——設某種五釐債券，時期二年，券面 \$2,000.00，分二年平均償還，投資者希望實得利率六釐，計算其購進價格如下：

$$K = \frac{1000}{(1.06)} + \frac{1000}{(1.06)^2} = 943.39623 + 889.99644$$

$$= \$1,833.39267$$

$$A = 1,833.39267 + \frac{.05}{.06} \times (2,000 - 1,833.39267)$$

$=1,833.39267+138.83944$

$=\$1,972.23311$

若求其溢價或折價數額，則可將第16式改變如下：

$$A-C=(C-K)\frac{g-i}{i} \tag{第17式}$$

代以上例各項數額，所得結果如下：

$$A-C=166.60733\times\frac{.05-.06}{.06}$$

$$=-27.767888$$

即折價\$27.767888是也。凡求出之數正爲溢價，負爲折價，若求每單位之折價數，則以$C=1$，其式如下：

$$k=(1-K)\frac{g-i}{i} \tag{第18式}$$

仍以上例計算之，其結果如下：

$$k=(1-.916696)\frac{.05-.06}{.06}$$

$$=.083304\times\frac{-.01}{.06}$$

$$=-.013884$$

即每元之折價爲\$.013884。

(B)債券每年付息數次，投資利率亦每年複利數次，二者之次數相同者　分期償還債券，每年還本m次，投資利率每年複利亦爲m次者，其算法可照第16式各項，將各期所還本金現價之K，以$\frac{j}{m}$求之。至債券規定利率則改以$\frac{g}{m}$爲代表，期數則以m乘之。玆仍以上例爲例，僅將債券規定利率與投資利率，改爲半年複利一次，列式如下：

$$K=\frac{1,000}{(1.03)^2}+\frac{1,000}{(1.03)^4}=942.59591+888.48705$$

$$=\$1,831.08296$$

$$A=1,831.08296+\frac{.025}{.03}\times(2,000.00-1,831.08296)$$

$$=\$1,971.84716$$

我國公債各期抽籤支數之不一律者，以及庫券各期所還數額之不一律者，均適用上項公式。茲分別舉例計算如下：

例一　查善後公債在民國二十三年九月底，尚有國幣四百萬元未還，規定於二十三年十二月底抽還八十萬元。二十四年三，六，九，十二各月底還六十萬元。二十五年三月底，還八十萬元。利率六釐，每三個月付息一次。假定有人擬購票面 \$2,000.00，均係百元票。所有號碼，均不相同，若投資利率為一分二釐，每三個月複利一次，則其購進價格之計算公式如下：

$$K=\frac{400}{(1.03)}+\frac{300}{(1.03)^2}+\frac{300}{(1.03)^3}+\frac{300}{(1.03)^4}+\frac{300}{(1.03)^5}+\frac{400}{(1.03)^6}$$

$$=388.34952+282.77877+274.54251+266.54610$$

$$+258.78264+334.99372$$

$$=\$1,805.99326$$

$$A=1,805.99326+\frac{.03}{.06}(2,000-1,805.99326)$$

$$=1,805.99326+97.00337$$

$$=\$1,903.00$$

茲再列表於下：

時期			各期所得本息數			帳面上照12%每三個月應得之利息	投資減少數	投資減少後之餘額
年	月	日	本金	利息	本利合計			
23	10	1						\$1,903.00
	12	31	\$ 400	\$ 30.00	\$ 430.00	\$ 57.09	\$ 372.91	1,530.09
24	3	31	300	24.00	324.00	45.90	278.10	1,251.99
	6	30	300	19.50	319.50	37.56	281.94	970.05
	9	30	300	15.00	315.00	29.10	285.90	684.15
	12	31	300	10.50	310.50	20.52	289.98	394.17
25	3	31	400	6.00	406.00	11.83	394.17	0
合計			\$ 2,000	\$ 105.00	\$2,105.00	\$ 202.00	\$1,903.00	

例二　設有某種庫券，利率週年六釐，每月還本付息，以前還過千分之四百八十六·六二五，尚有千分之五百十三·三七五，自本年起分三十三個月還清，第一月至第二十一月每月底還千分之十五·五四又六分之一，第二十二月至第三十三月每月底還千分之十五·五八又三分之一。若第一期購入券面 \$ 10,000.00，券面餘額為 \$ 5,133.75。合月息一分五釐，茲若須計算其以何種價格購入為適宜，當用下式：

$$
\begin{aligned}
K=&\frac{155.42}{(1.015)}+\frac{155.42}{(1.015)^2}+\frac{155.41}{(1.015)^3}+\frac{155.42}{(1.015)^4}\\
&+\frac{155.42}{(1.015)^5}+\frac{155.41}{(1.015)^6}+\frac{155.42}{(1.015)^7}+\frac{155.42}{(1.015)^8}\\
&+\frac{155.41}{(1.015)^9}+\frac{155.42}{(1.015)^{10}}+\frac{155.42}{(1.015)^{11}}+\frac{155.41}{(1.015)^{12}}\\
&+\frac{155.42}{(1.015)^{13}}+\frac{155.42}{(1.015)^{14}}+\frac{155.41}{(1.015)^{15}}+\frac{155.42}{(1.015)^{16}}\\
&+\frac{155.42}{(1.015)^{17}}+\frac{155.41}{(1.015)^{18}}+\frac{155.42}{(1.015)^{19}}+\frac{155.42}{(1.015)^{20}}\\
&+\frac{155.41}{(1.015)^{21}}+\frac{155.84}{(1.015)^{22}}+\frac{155.83}{(1.015)^{23}}+\frac{155.83}{(1.015)^{24}}\\
&+\frac{155.84}{(1.015)^{25}}+\frac{155.83}{(1.015)^{26}}+\frac{155.83}{(1.015)^{27}}+\frac{155.84}{(1.015)^{28}}\\
&+\frac{155.83}{(1.015)^{29}}+\frac{155.83}{(1.015)^{30}}+\frac{155.84}{(1.015)^{31}}+\frac{155.83}{(1.015)^{32}}\\
&+\frac{155.83}{(1.015)^{33}}=\$\,4{,}025.30
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A&=4{,}025.30+\frac{.005}{.015}\times(5{,}133.75-4{,}025.30)\\
&=4{,}025.30+(\tfrac{1}{3}\times1{,}108.45)\\
&=\$\,4{,}394.78
\end{aligned}
$$

茲並為列表以證明之：

時期	庫券各期所付之本息	購入金額照月息一分五釐應得之利息	本金減少之數額	本金減少後之餘額
第一月初				$ 4,394.78
第一月底	$ 181.09	$ 65.92	$ 115.17	4,279.61
第二月底	180.31	64.20	116.11	4,163.50
第三月底	179.52	62.45	117.07	4,046.43
第四月底	178.76	60.70	118.06	3,928.37
第五月底	177.98	58.93	119.05	3,809.32
第六月底	177.19	57.14	120.05	3,689.27
第七月底	176.43	55.34	121.09	3,568.18
第八月底	175.65	53.53	122.12	3,446.06
第九月底	174.87	51.69	123.18	3,322.88
第十月底	174.09	49.84	124.25	3,198.63
第十一月底	173.32	47.98	125.34	3,073.29
第十二月底	172.53	46.10	126.43	2,946.86
第十三月底	171.76	44.20	127.56	2,819.30
第十四月底	170.99	42.29	128.70	2,690.60
第十五月底	170.20	40.36	129.84	2,560.76
第十六月底	169.43	38.41	131.02	2,429.74
第十七月底	168.65	36.45	132.20	2,297.54
第十八月底	167.87	34.46	133.41	2,164.13
第十九月底	167.10	32.46	134.64	2,029.49
第二十月底	166.32	30.44	135.88	1,893.61
第二十一月底	165.54	28.41	137.13	1,756.48
第二十二月底	165.19	26.35	138.84	1,617.64
第二十三月底	164.40	24.27	140.13	1,477.51
第二十四月底	163.62	22.16	141.46	1,336.05
第二十五月底	162.85	20.04	142.81	1,193.24
第二十六月底	162.06	17.90	144.16	1,049.08
第二十七月底	161.28	15.74	145.54	903.54
第二十八月底	160.51	13.55	146.96	756.58
第二十九月底	159.73	11.35	148.38	608.20
第三十月底	158.95	9.12	149.83	458.37
第三十一月底	158.18	6.88	151.30	307.07
第三十二月底	157.39	4.61	152.78	154.29
第三十三月底	156.61	2.32	154.29	0
合計	$ 5,570.37	$ 1,175.59	$ 4,394.78	

(丙)前數年僅付息，後數年還本付息者　茲以 f 代表未還本前之年數，t 代表還本年數之距離，r 代表還本之次數，m 代表每年付息次數，g 代表利率。若債券償還數爲 1，則每次還本之現價應爲：

$$K=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mf}}+\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mf+mt}}+\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mf+2mt}}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mf+(r-1)mt}}\right] \qquad \text{(第 19 式)}$$

上項括弧內幾何級數之總數爲：

$$\frac{\dfrac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mf}}-\dfrac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mf+mrt}}}{1-\dfrac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}}}$$

上式之分子加 1 減 1，則爲：

$$\frac{1-\dfrac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m(f+rt)}}-\left\{1-\dfrac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mf}}\right\}}{1-\dfrac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}}}$$

$$=\frac{\left\{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m(f+rt)}\right\}-\left\{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mf}\right\}}{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mt}}$$

分子分母各除以 $\frac{j}{m}$，則爲：

$$\frac{\dfrac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-m(f+rt)}}{\frac{j}{m}}-\dfrac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mf}}{\frac{j}{m}}}{\dfrac{1-\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mt}}{\frac{j}{m}}}=\frac{a_{\overline{m(f+rt)}}-a_{\overline{mf}}}{a_{\overline{mt}}}$$

按上項年金之利率爲$\frac{j}{m}$，故

$$K=\frac{a_{\overline{m(f+rt)}|}-a_{\overline{mf}|}}{ra_{\overline{mt}|}}\text{按}\frac{j}{m}\qquad\text{（第 20 式）}$$

由第 17 式與第 19 式，可得求債劵每元溢價或折價數之公式

$$k=\left[1-\frac{a_{\overline{m(f+rt)}|}-a_{\overline{mf}|}}{ra_{\overline{mt}|}}\right]\frac{g-j}{j}\qquad\text{（第 21 式）}$$

上項年金之利率爲$\frac{j}{m}$。

（若 $f=1$，$t=1$，$m=1$，則其計算與甲法相同）。

按我國內國公債亦常有此項辦法，即前數年祇發息，經過數年後方抽籤還本，計算其購進價格時即須適用本法。

例——設有某種六釐公債，於二十年七月一日發行，現有人擬購劵面 \$100,000，每半年付息一次，於二十三年七月一日，二十五年七月一日，二十七年七月一日，二十九年七月一日，各分還\$25,000 若投資利率五釐，每半年複利一次時，則其購進價格之計算方法如下：

$$k=\left[1-\frac{a_{\overline{22}|}-a_{\overline{6}|}}{4a_{\overline{4}|}}\right]\frac{.06-.05}{.05}$$

$a_{\overline{4}|}$ 按 $.025=3.7619742$

$a_{\overline{6}|}$ 按 $.025=5.5081254$

$a_{\overline{22}|}$ 按 $.025=16.7654132$

$$k=\left[1-\frac{11.2572878}{15.0478968}\right]\times\frac{1}{5}$$

$=0.05038058$

$m=2$
$i_{(2)}=.05$
$r=4$
$t=2$
$f=3$
$g=.06$

上數爲該項債劵之溢價，因之該項債劵之購進價格爲 \$105,038.06。

茲再列表以證明之：

時期			各期所得本息數			帳面上照6%每半年應得之利息	投資減少數	投資減少後之餘額
年	月	日	本金	利息	本利合計			
20	7	1						$ 105,038.06
21	1	1	0.00	$ 3,000	$ 8,000	$ 2,625.95	$ 374.05	104,664.01
	7	1	0.00	3,000	3,000	2,616.60	383.40	104,280.61
22	1	1	0.00	3,000	3,000	2,607.02	392.98	103,887.63
	7	1	0.00	3,000	3,000	2,597.19	402.81	103,484.82
23	1	1	0.00	3,000	3,000	2,587.12	412.88	103,071.94
	7	1	$ 25,000.00	3,000	28,000	2,576.80	25,423.20	77,648.74
24	1	1	0.00	2,250	2,250	1,941.22	308.78	77,339.96
	7	1	0.00	2,250	2,250	1,933.50	316.50	77,023.46
25	1	1	0.00	2,250	2,250	1,925.59	324.41	76,699.05
	7	1	25,000.00	2,250	27,250	1,917.48	25,332.52	51,366.53
26	1	1	0.00	1,500	1,500	1,284.16	215.84	51,150.69
	7	1	0.00	1,500	1,500	1,278.77	221.23	50,929.46
27	1	1	0.00	1,500	1,500	1,273.24	226.76	50,702.70
	7	1	25,000.00	1,500	26,500	1,267.57	25,232.43	25,470.27
28	1	1	0.00	750	750	636.76	113.24	25,357.03
	7	1	0.00	750	750	633.92	116.08	25,240.95
29	1	1	0.00	750	750	631.02	118.98	25,121.97
	7	1	25,000.00	750	25,750	628.05	25,121.95	00,000.02
合計			$ 100,000.00	$ 36,000	$136,000	$30,961.96	$ 105,038.04	

第十節　年金債券

債券有將本息合併，分期平均償還者，此項辦法與年金相同，故曰年金債券(Annuity Bonds)。計算每期所應還之數，應用本書第七章第二節及第四節所述各法。

若以 C 代表券面價值，n 代表未完全還清前之時期，g 代表債券規定利率，計算債券本息各期平均分還數之公式為：

$$R=\frac{C}{a_{\overline{n}|}}@g \qquad \text{(第 22 式)}$$

若照券面價還，投資利率為 i，則購進價格 A，可計算如下：

$$A=Ra_{\overline{n}|}@i \qquad \text{(第 23 式)}$$

若債券每年付息數次，則以 m 代表次數，其每期所還本息數應爲：

$$R=\frac{C}{a_{\overline{mn}|}}@\frac{g}{m}$$

例——設某五釐債券 \$10,000.00，連本帶息，分十年還清，每半年還本付息一次，其每期應還數額之計算如下：

$$R=\frac{10,000}{a_{\overline{20}|.025}}$$

$$=\frac{10,000}{15.58916229}$$

$$=\$641.47$$

茲並列表以爲證明

時期	各期所得本息數	債面上照5%每半年應得之利息	投資減少數	投資減少後之餘額
第一年 一月一日				\$ 10,000.00
六月三十日	\$ 641.47	\$ 250.00	\$ 391.47	9,608.53
十二月卅一日	641.47	240.21	401.26	9,[illegible]07.[illegible]7
第二年 六月三十日	641.47	230.18	411.29	8,79[illegible].98
十二月卅一日	641.47	219.90	421.57	8,374.41
第三年 六月三十日	641.47	209.36	432.11	7,942.30
十二月卅一日	641.47	198.55	442.92	7,49[illegible].38
第四年 六月三十日	641.47	187.48	453.99	7,045.39
十二月卅一日	641.47	176.13	465.34	6,580.05
第五年 六月三十日	641.47	164.50	476.97	6,103.08
十二月卅一日	641.47	152.58	488.89	5,614.19
第六年 六月三十日	641.47	140.35	501.12	5,113.07
十二月卅一日	641.47	127.83	513.64	4,599.43
第七年 六月三十日	641.47	114.99	526.48	4,072.95
十二月卅一日	641.47	101.82	539.65	3,[illegible]33.30
第八年 六月三十日	641.47	88.33	553.14	2,980.16
十二月卅一日	641.47	74.50	566.97	2,413.19
第九年 六月三十日	641.47	60.33	581.14	1,832.05
十二月卅一日	641.47	45.80	595.67	1,236.38
第十年 六月三十日	641.47	30.91	610.56	625.82
十二月卅一日	641.47	15.65	625.82	0
合計	\$ 12,829.40	\$ 2,829.40	\$ 10,000.00	

若投資利率爲六釐，每半年複利一次，則其購進價格之計算方法如下：

$$A=641.47\times a_{\overline{20}|.03}$$
$$=641.47\times 14.87747486$$
$$=\$\,9,543.45$$

茲再列表以明之：

時　　期	各期所得本息數	帳面上照6%應得之利息	投資減少數	投資減少後之餘額
第一年 一月一日				$ 9,543.45
六月三十日	$ 641.47	$ 286.30	$ 355.17	9,188.28
十二月卅一日	641.47	275.65	365.82	8,822.46
第二年 六月三十日	641.44	264.67	376.80	8,445.66
十二月卅一日	641.47	253.37	388.10	8,057.56
第三年 六月三十日	641.47	241.73	399.74	7,567.82
十二月卅一日	641.47	229.73	411.74	7,246.08
第四年 六月三十日	641.47	217.38	424.09	6,821.99
十二月卅一日	641.47	204.66	436.81	6,385.18
第五年 六月三十日	641.47	191.56	449.91	5,935.27
十二月卅一日	641.47	178.06	463.41	5,741.86
第六年 六月三十日	641.47	164.16	477.31	4,994.55
十二月卅一日	641.47	149.84	491.63	4,502.92
第七年 六月三十日	641.47	135.09	506.38	3,996.54
十二月卅一日	641.47	119.90	521.57	3,474.97
第八年 六月三十日	641.47	104.25	537.22	2,937.75
十二月卅一日	641.47	88.13	553.34	2,384.41
第九年 六月三十日	641.47	71.53	569.94	1,814.47
十二月卅一日	641.47	54.43	587.04	1,227.43
第十年 六月三十日	641.47	36.82	604.65	622.78
十二月卅一日	641.47	18.69	622.78	0
合　　計	$ 12,829.40	$ 3,285.95	$ 9,543.45	

我國政府發行之庫券，亦間有按此種辦法者。

習題三

1. 某甲以 $ 1,090.00 購進六釐公司債，券面 $ 1,000.00，該債券規定每半年年付息一

次,時期十年,到期照券面價還,試計算其合投資利率若干(每半年復利一次)。

2. 試照第1題所述各項,編一溢價攤提表。

3. 某甲於二十三年七月一日以$9,000.00購六釐債券券面$10,000.00,時期五年,每半年付息一次,試計算其投資利率,並編一折價累積表。

4. 設有五釐債券券面$1,000.00,每半年付息一次,分兩次平均償還。第一次在第十年底,第二次在第十五年底,購券人若希望實得投資利率六釐,每半年復利一次,試為計算其購進價格。

5. 設有六釐債券券面$10,000,每半年付息一次,並還本$1,250,若購券人希望實得投資利率五釐,每半年復利一次,試為計算其購進價格。

6. 試照上題所述各項,編製一還本付息表,以證明其計算是否無誤。

7. 設有六釐債券券面$10,000,每半年付息一次,並還本$500,若投資利率為七釐,每半年復利一次,試計算其購進價格,並編一還本付息表。

8. 設有六釐債券券面$5,000,每半年付息一次,前五年僅付息,自第六年起每年底還本$1,000,前後共計十年,若投資利率為五釐,每半年復利一次,試計算其購進價格。

9. 設有五釐年金債券$10,000,分十年還清,每年還本付息一次,若投資者希望得利率六釐,試計算其購進價格,並編一還本付息表。

10. 設有五釐年金債券$10,000,分五年還清,每半年還本付息一次,投資利率為四釐,每半年復利一次,試計算其購進價格,並編一表以證明之。

11. 設有七釐年金債券$100,000,每券$100,分四年還清,每半年還本付息一次,投資利率為六釐,每半年付息一次,試編一還本付息表。

12. 設有某項六釐公債,券面$50,000,時期五年,每三個月付息一次,第一年每三個月還本$1,500,第二年每三個月還本$2,000,第三年每三個月還本$2,500,第四年每三個月還本$3,000,第五年每三個月還本$3,500,投資利率為一分,每三個月復利一次,試計算其購進價格,並編一表以證明之。

復習題

1. 設有四釐半公債$500,每半年付息一次,時期三年,投資利率六釐,每半年復利一次,試計算其購進價格。若投資利率六釐,每年復利一次,則其購進價格又為若干?

2. 設四釐半公債,時期三年,每半年付息一次,現以$96購進券面$100,試計算其合利率若干?

3. 試照第2題所述各項,編製折價累積表。

4. 某公司發行二十年期六釐公司債,每百元按$98售出,每年付息一次,到期須按券面償還,故將此折價數,按期攤提,照利率四釐存儲,以備到期償還之用。現該公司又發行二十年期同數之七釐公司債,按券面發行,每年付息一次,試計算發行之公司方面,二種孰為合算?

5. 某公司擬於二十年七月一日發行七釐公司債$100,000,每半年付息一次,於二十五年七月一日到期償還,每半年提存償債基金,按五釐存儲,每半年復利一次,試計算每半年

應行存儲之數額。

6. 設某保險公司買進七釐公債，券面 $ 10,000，時期四年，每半年付息一次，希望得投資利率六釐，每半年複利一次，試計算其購進價格，並編一表以示償還之情形。

7. 某學校於二十年七月一日發行六釐債券 $475,000，每半年付息一次，每券 $1,000，於第二十二年七月一日起分十年平均還清，每半年還本一次，投資利率五釐，每半年付息一次，試計算其購進價格若干？若投資利率七釐，每半年付息一次，則其購進價格又爲若干？

8. 某公司於二十年七月十五日發行七釐公司債，期十年，每半年付息一次，該券每百元按 $ 94.84 售出，可使投資者合利率七釐七毫五，試驗其有無訛誤。

9. 設某種六釐公債，券面 $ 2,000,000，每半年付息一次，前四年僅付息，第五第六兩年每半年還本 $ 300,000，第七年每半年還本 $ 400,000。若投資利率爲一分六釐，試計算其購進價格，並編一還本付息表以示其償還之情形。

10. 設某種六釐公債，券面 $ 237,000，每三個月還本付息一次，第一年至第三年每三個月還本 $ 15,000，第四年一月至九月每三個月還本 $ 19,000，投資利率一分一釐，試計算其購進價格並編一表以證明之。

第九章　折舊

第一節　折舊之意義

會計學上所謂折舊(Depreciation)，係指固定資產(如房屋機器設備用具等)因歲月之經過，自然之消耗，或使用之結果，致其價值逐漸折減，乃以其所折減之價額作爲費用，由其使用年限內，分期公平負擔之謂也。固定資產之種類甚多，性質亦各有不同，折舊之計算，有時頗爲複雜，須賴較高之數學爲之解答，此本章之所由設也。

第二節　折舊計算法

計算折舊之方法頗多，何種方法適宜於何種企業，乃工程師分內之事，無須數學家越俎代謀。故本篇僅就各種方法中最普通而須用公式計算者，述之於下：

(甲)平均法，一名直線法(Straight-line Method)。

(乙)工作時間法(Working Hour Method)。

(丙)生產量法(Production Method)。

(丁)定率遞減法(Constant Percentage of Book Value)。

(戊)使用期數比率法(The Sum of Year Digits Method)。

(己)基金法(The Sinking Fund Method)。

(庚)年金法(Annuity Method)。

(辛)單位成本法(The Unit Cost Method)。

第三節 平均法(一名直線法)

此法乃將資產之原價,減除不能使用時之殘價 (Scrap Value),得其差爲總折舊額。再按估計之使用時期,平均分攤,作爲各期之折舊。茲以 C 代表原價,S 代表殘價,n 代表估計之使用時期,D 代表每期折舊額,列式如下:

$$D=\frac{C-S}{n} \qquad \text{(第1式)}$$

茲若以 W 代表原價減除殘價後之餘額,即普通稱爲總折舊額 (Wearing Value)者,則其式可改之如下:

$$D=\frac{W}{n}$$

例——設有機器原價 \$1,000,可使用十年,十年後之殘價爲 \$100,則每年之折舊數應爲:

$$D=\frac{1,000-100}{10}=\$90$$

茲列表以供參證:

甲 表

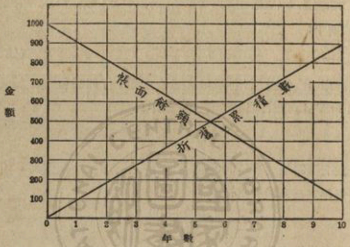
(1) 年數	(2) 每年底之帳面數	(3) 每年折舊數	(4) 折舊累積數
0	\$1,000		
1	910	\$90	\$ 90
2	820	90	180
3	730	90	270
4	640	90	360
5	550	90	450
6	460	90	540
7	370	90	630
8	280	90	720
9	190	90	810
10	100	90	900

照此法計算之結果,帳面價值之減少,與折舊數額之增加,在全時

期內成一直線，如下圖所示，故名直線法，又因各期折舊數額相同，故亦名平均法。

第三圖　折舊累積數與資產帳面餘額圖

（平均法）



第四節　工作時間法

此法以工作時間之單位，替代資產之使用期限，爲計算之根據。其計算方法，可先以估計之工作時間總額，除資產之總折舊額，算出每一單位時間所應負擔之折舊額，然後以各期所使用之工作時間乘之，而得各該期之折舊額。茲以 n 代表一資產所能工作之總時間，n' 代表各期所使用之工作時間，列式如下：

$$D=\frac{C-S}{n}\times n' \qquad \text{（第 2 式）}$$

例——設有機器原價 \$1,000，估計可用九千小時，第一年共用二千二百五十小時，第二年共用三千三百七十五小時，第三年共用一千八百七十五小時，第四年共用一千六百五十小時，當第五年用過八百五十小時後，其舊機器之殘餘價值尚有 \$100，茲將五年之

折舊額，用上列公式，計算如次：

$$\text{第一年折舊額}\ \frac{\$1,000-100}{9,000}\times 2,250=225.00$$

$$\text{第二年折舊額}\ \frac{\$1,000-100}{9,000}\times 3,375=337.50$$

$$\text{第三年折舊額}\ \frac{\$1,000-100}{9,000}\times 1,875=187.50$$

$$\text{第四年折舊額}\ \frac{\$1,000-100}{9,000}\times 1,650=165.00$$

$$\text{第五年折舊額}\ \frac{\$1,000-100}{9,000}\times 850=85.00$$

第五節 生產量法

此法以資產之生產量爲計算折舊之標準，其計算方法，卽以估計資產所能生產之總額，除其總折舊額。所得商數卽爲每單位出品應負擔之折舊額，然後以每期之生產量乘之，卽得各期之折舊額。其計算公式，與工作時間法相同，僅計算單位有異而已。

習題一

1. 設有一機器原價 $ 100，可以使用八年，其殘價爲 $ 20，試按平均法計算每年之折舊額，並列表繪圖以示之。

2. 設有一機器原價 $ 1,000，估計可用二十年，按平均法計算折舊，在第十年發現原估之使用年數錯誤，祗能再用五年，試重爲計算之。

3. 設有二機，一價值 $ 80，一價值 $ 120，前者可使用十二年，後者可以使用二十年，試按平均法計算折舊，並列表繪圖以示二者之情形。

4. 設某公司購入機器一部，原價 $ 60,000，估計可用五年，至使用五年後，可售出 $ 10,000，試按平均法計算折舊，並列表繪圖以示之。

5. 設第 4 題所述某公司購入之機器，可用一萬四千五百小時，第一年使用四千三百七十五小時，第二年使用三千七百五十小時，第三年使用三千七百五十小時，第四年使用二千六百二十五小時，用至此時，可售 $ 10,000，試計算各年之折舊額。

6. 設第 4 題所述某公司購入之機器，可以製造棉紗六十萬錠，其後仍可售出 $ 10,000，第一年製造棉紗十三萬錠，第二年十二萬錠，第三年十萬錠，第四年十四萬錠，第五年十一萬錠，試計算各年之折舊額。

第六節　定率遞減法

此法乃先求出一資產之固定折舊定率，然後於每期末用此定率乘該資產期初之帳面價值，即得該期之折舊額。設有一固定資產，價值爲 \$1,000，定率爲 10%，其第一期末之折舊爲 \$100，(即 \$1,000 之 10%)，則於第二期開始時，該資產之價值即變爲 \$900，於是其第二期末之折舊即爲 \$90 (即 \$900 之 10%)。至其第三期底之折舊，則因該資產之期初價值已減爲 \$810，故當爲 \$81 (即 \$810 之 10%)。以後各期之折舊及資產之價值，均可依此類推。但應注意者，即資產之最後價值，決不能爲零，因其各期折舊額爲一無窮項之等比級數故也。故必須有殘餘價值後，方能決定其折舊之定率。玆以 x 代表定率，而列其計算之公式如下：

$$C(1-x)^n=S$$

$$(1-x)^n=\frac{S}{C}$$

$$1-x=\sqrt[n]{\frac{S}{C}}$$

$$x=1-\sqrt[n]{\frac{S}{C}} \qquad \text{(第 3 式)}$$

各年底之帳面價值爲：（以 r 代表所計算之年數）

$$C(1-x)^r=C\sqrt[n]{\left(\frac{S}{C}\right)^r} \qquad \text{(第 4 式)}$$

例——與平均法同，算式爲：

$$x=1-\sqrt[10]{\frac{100}{1,000}}$$

$$=1-.79433$$

$$=.20567$$

計算第一年底之帳面價值如下：

$$C\ (1-x)^r=1,000\times .79433$$

$$=794.33$$

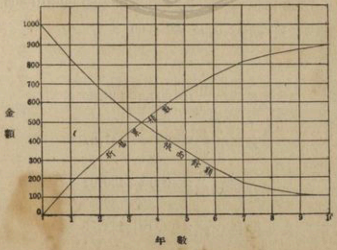
茲列表以備參證：

乙表

(1) 年 數	(2) 每年底之帳面數	(3) 每年折舊數	(4) 折舊累積數
0	$ 1,000.00		
1	794.33	$ 205.67	$ 205.67
2	630.96	163.37	369.04
3	501.19	129.77	498.81
4	398.11	103.08	601.89
5	316.23	81.88	683.77
6	251.19	65.04	748.81
7	199.53	51.66	800.47
8	158.49	41.04	841.51
9	125.89	32.60	874.11
10	100.00	25.89	900.00

按此法帳面價值逐漸減少，雖其折舊率逐年相同，但因帳面價值之減少而折舊數額亦逐年減少，第一年之折舊數最大，第二年次之，第三年又次之，末一年最小。茲列圖以示其趨勢：

第四圖　折舊累積數與資產帳面餘額圖（定率遞減法）



第七節　使用期數比率法

此法之理論與上法同，皆為每期遞減之折舊法。但其計算方法稍異。上法先算出一固定率，然後於每期末將此定率乘該資產期初之帳面價值，而得該期之折舊額。其折舊定率各年不變，但資產之帳面價值逐年減少，故所得之折舊額亦逐年遞減。此法每期之折舊率皆為分數，此項分數逐年不同，計算時將該資產可使用若干年之各數字依次相加，以其總和為分母，以每年之各個數字為分子，第一年用最後一年之數字為分子之分數乘總折舊額，第二年用最後前一年之數字為分子之分數乘總折舊額。以後各年，依次類推。例如一資產可用五年，則其分母為一二三四五各數字相加，計為十五。第一年之折舊為 $\frac{5}{15}$，第二年為 $\frac{4}{15}$，第三年為 $\frac{3}{15}$，第四年為 $\frac{2}{15}$，第五年為 $\frac{1}{15}$。

各年折舊之分數遞減，雖總折舊額不變，而所得之各期折舊額則依次遞減。

例——仍以平均法之例為例，計算如下：

使用期限之和 $=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$

總折舊額 $=1,000-100=900$

各年折舊額為：

第一年 $\frac{10}{55}\times\$900=\$163.64$

第二年 $\frac{9}{55}\times\ 900=\ 147.27$

第三年 $\frac{8}{55}\times\ 900=\ 130.91$

第四年 $\frac{7}{55}\times\ 900=\ 114.55$

$$第五年\ \frac{6}{55}\times 900= \quad 98.18$$

$$第六年\ \frac{5}{55}\times 900= \quad 81.82$$

$$第七年\ \frac{4}{55}\times 900= \quad 65.45$$

$$第八年\ \frac{3}{55}\times 900= \quad 49.09$$

$$第九年\ \frac{2}{55}\times 900= \quad 32.73$$

$$第十年\ \frac{1}{55}\times 900= \quad \underline{16.36}$$

$$\$900.00$$

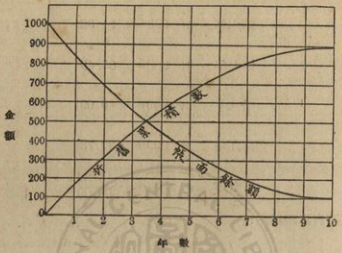
盍列表以證明之:

丙　表

(1) 年數	(2) 每年底之帳面數	(3) 每年折舊數	(4) 折舊累積數
0	$1,000.00		
1	836.36	$163.64	$163.64
2	689.09	147 27	310.91
3	558.18	130.91	441.82
4	443.63	114.55	556.37
5	345.45	98.18	654.55
6	263.63	81.82	736 37
7	198.18	65.45	801.82
8	149.09	49.09	850.91
9	116.36	32.73	883.64
10	100.00	16.36	900.00

按此法計算,其折舊數亦係按期遞減,但其遞減之程度與定率遞減法不同,觀下圖自見:

第五圖 折舊累積數與資產帳面餘額圖(使用期數比率法)



第八節 基金法

本法先算出每年平均折舊數額，將各期所提之折舊數，按複利存儲，至該資產使用年數終了時，其所存之數，即爲總折舊額。計算每年底應提折舊數之公式爲：

$$D=\frac{C-S}{s_{\overline{n}|}}=\frac{W}{s_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 5 式)}$$

$s_{\overline{n}|}$ 乃年金 \$1 經過 n 年，按照指定利率計算之本利合計數。使用本法者，普通均將所提之數，購置穩當之有價證券存儲之。各期之折舊累積數，乃各期折舊及其所生之利息。計算各期折舊累積數之公式爲：(以 r 代表所計算之年數)。

$$D_r=\frac{W s_{\overline{r}|}}{s_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 6 式)}$$

於 r 年之後，其尚未攤去之折舊總額，可以 W_r 爲代表，列式如下：

$$W_r = W - \frac{W s_{\overline{r|}}}{s_{\overline{n|}}} \qquad \text{(第 7 式)}$$

一資產之總折舊額，與其於 r 年後之待折舊額(卽總折舊額除去 r 年來所已攤去之折舊總計，亦卽爲於 r 年底時尙未攤去之折舊總額)。之比例，稱爲此資產於 r 年底時之新折舊情形。其式如下：

$$\frac{W_r}{W} = 1 - \frac{s_{\overline{r|}}}{s_{\overline{n|}}} \qquad \text{(第 8 式)}$$

例——仍以平均法之例爲例，利率五釐(5%)，計算每年之折舊額如下：

$$D = \frac{1,000-100}{12.5778925}$$

$$= \$71.554$$

若計算第三年底之折舊累積數則爲：

$$D_3 = \frac{900 \times 3.1525}{12.5778925}$$

$$= \$225.574$$

若求第三年底之待折舊額(卽尙未攤去之折舊總額)爲：

$$W_3 = 900 - 225.574$$

$$= \$674.426$$

若再求此資產於第三年底時之折舊情形，則可以其總折舊額，除其於第三年底時之待折舊額，而得其百分比如下：

$$\frac{W_3}{W} = 1 - \frac{3.1525}{12.5778925}$$

$$= .7493622$$

$$= 75\%$$

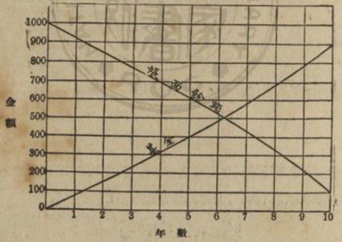
茲列表以明之：

丁表

(1) 年數	(2) 每年底帳面數	(3) 每年所提折舊數	(4) 提存折舊之利息	(5) 基金總額
0	$1,000.000			
1	928.446	$71.554		$71.554
2	853.314	71.554	$3.578	146.686
3	774.426	71.554	7.334	225.574
4	691.593	71.554	11.279	308.407
5	604.619	71.554	15.420	395.381
6	513.296	71.554	19.769	486.704
7	417.406	71.554	24.336	582.594
8	316.722	71.554	29.130	683.278
9	212.004	71.554	34.164	788.996
10	100.000	71.554	39.450	900.000

為求明瞭起見,再圖示其趨勢於下:

第六圖　折舊累積數與資產帳面餘額圖(基金法)



第九節　年金法

此法與基金法相似,所異者基金法祇將提存折舊數計算利息,此則不僅將折舊計算利息,並將資產之帳面餘額亦計算利息。二者之利率或

同或不同耳。茲以 C 代表資產原價，S 代表殘價，i 代表資產上所計之利率，i' 代表折舊累積額上所計之利率。依基金法得每年應提之折舊額為：

$$\frac{C-S}{s_{\overline{n}|}}(\text{依利率 } i' \text{ 計算})$$

依年金法計算其第一年之折舊額，亦即為此數。至以後各年之折舊額，則應將折舊累積額上之利息合併計算。基金法中之每年折舊額，除第一年外，較年金法中為低。蓋基金法中之每年折舊額為一定數，即每年所留之基金，不足之部份由利息補之。而年金法則將此定數與其利息合併計算。其理論為前者每年所留之基金係存於他處，可收利息，而後者之基金，本公司留以自用，故必需將基金上之利息合併計算，否則一旦資產廢棄，逐年所提之折舊，將不能達到總折舊額。例如其第 t 年之折舊應為：

$$(1+i')^{t-1}\frac{C-S}{s_{\overline{n}|}}(\text{依利率 } i' \text{ 計算})$$

既知第一年底資產利息為：

$$Ci$$

又其折舊額為：

$$\frac{C-S}{s_{\overline{n}|}}(\text{依利率 } i' \text{ 計算})$$

則將二者合併，即得第一年底所有折舊與利息之總數為：

$$Ci+\frac{C-S}{s_{\overline{n}|}}(\text{依利率 } i' \text{ 計算})$$

同理得第二年底之總數為：

$$\left(C-\frac{C-S}{s_{\overline{n}|}}(\text{依 } i' \text{ 計算})\right)i+\frac{C-S}{s_{\overline{n}|}}(1+i')(\text{依 } i' \text{ 計算})$$

例——設有一機器原價為 \$1,000，可使用十年，十年後即毫無殘價，其折舊額存儲之利率為五釐，依法計算，得第一年底之折舊額為：

$$\frac{1,000}{s_{\overline{10|}}\ @.05}=79.5046$$

若資產上所計算之利率，亦爲五釐，則第一年底資產之利息應爲：

$$1,000\times .05=50$$

將二者合併，得第一年底之總數爲：

$$(1,000\times .05)+\frac{1,000}{s_{\overline{10|}}\ @.05}=50+79.5046$$
$$=\$129.5046$$

又知第二年底之折舊額爲：

$$(1+.05)^{2-1}\times\frac{1,000}{s_{\overline{10|}}\ @.05}=\$83.47983$$

卽得第二年底之總數爲：

$$(1,000-79.5046)\times .05+(79.5046\times 1.05)$$
$$=920.4954\times .05+(79.5046\times 1.05)$$
$$=46.02477+83.47983$$
$$=\$129.5046$$

同法得第三年底之總數爲：

$$(1,000-162.98)\times .05+[79.5046\times(1.05)^2]$$
$$=837.02\times .05+87.6538$$
$$=\$129.5046$$

今若將資產上所計算之利率改爲八釐，則各年底之總數當爲：

第一年底：$(1,000\times .08)+79.5046=\$159.5046$

第二年底：$(1,000-79.5046)\times .08+(79.5046\times 1.05)$
$=73.6396+83.4798=\$157.1194$

第三年底：$(1,000-162.9844)\times .08+79.5046\times(1.05)^2$
$=66.9612+87.6538=\$154.6150$

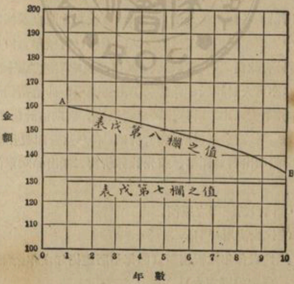
餘類推。

茲列表圖各一，以供參考。

戊表

(1) 年數	(2) 每年底帳面餘額	(3) 每年折舊額	(4) 各年折舊累積額	資產利息＝帳面餘額×資產利率 (5) 5%	(6) 8%	折舊與利息合併總額 (7) 按5% =(3)+(5)	(8) 按8% =(3)+(6)
0	$ 1,000.000						
1	920.495*	79.5046	$ 79.505*	$ 50.0000	$ 80.0000	$ 129.5046	$ 159.5046
2	837.016	83.4798	162.984	46.0248	73.6396	129.5046	157.1194
3	749.362	87.6538	250.638	41.8 08	66.9612	129.5046	154.6150
4	657.325	92.0365	342.675	37.4681	59.9489	129.5046	151.9854
5	560.687	96.6383	439.313	32.8663	52.5860	129.5046	149.2243
6	459.217	101.4702	540.783	28.0344	44.8550	129.5046	146.3252
7	352.673	106.5437	647.327	22.9608	36.7373	129.5045	143.2810
8	240.802	111.8709	759.198	17.6337	28.2138	129.5046	140.0847
9	123.338	117.4644	876.662	12.0401	19.2612	129.5045	136.7286
10	0.000	123.3376	1,000.000	6.1669	9.8670	129.5045	133.2046

第七圖　各年折舊與利息之和比較圖



*三位以下之小數不列。

習題二

1. 設有機器，原價 \$ 1,200，使用二十年後之殘價爲 \$ 200，試按定率遞減法計算各年之折舊額。並列表以證明之。

2. 設照上題所述各項，按使用期數遞減法計算各年之折舊額，並列表以示之。

3. 設有一機器原價爲 \$ 1,000，使用十年後之殘價爲 \$ 10，試按定率遞減法，計算各年之折舊額，並列表繪圖以示之。再根據算出之結果以批評此法之優劣。

4. 設有汽車一輛，原價 \$ 1,750，使用八年後可值 \$ 250，利率六釐，試按基金法計算第五年底之帳面餘額。

5. 設有機器原價 \$ 2,000，使用十年後可值 \$ 200，利率五釐，試按基金法計算第六年底之待折舊額，及待折舊額與總折舊額之比例。

6. 設有機器原價 \$ 1,200，可使用五年，五年後之殘價爲 \$ 100，利率六釐，試以基金法計算折舊額並各年之利息。

7. 試按第 6 題所述各項，編表繪圖以示其情形。

8. 設有機器原價 \$ 100，使用八年後，可有殘價 \$ 20，資產之利率爲一分，折舊額之利率爲五釐。試按年金法計算折舊，並列表繪圖以示之。

第十節　單位成本法

以上所討論各種折舊方法，均未涉及機器之改良及機器使用數年後效力減少等問題。設某工廠應用某種機器已有數年，尚可使用若干年，而市場另有改良之新機器發售，其出品速率遠過於原機，因此出品之單位成本亦可大爲減低，此時將仍用舊機乎？抑捨舊機而改用新機乎？此有待於單位成本之計算比較以資決定。再則估計舊機器之價值，應以其出品之單位成本（包括修理，折舊，利息及管理費各項費用），等於新機器所能產出者爲標準。玆先計算新舊二機出品之單位成本而比較之。

設以 C 代表新機器之原價。

N 代表使用時期。

F 代表每年之折舊額。（卽每年所應提起之年金額，得使 C 在 N 年內攤完者）。

O 代表每年新機器之管理費用。

R 代表每年修理費。

Y 代表每年出品數量。

而以小寫之 f, o, r, y 代表舊機器之各項，又以 c 代表舊機器於估價時之價值，n 代表舊機器尚可使用之時期，i 代表利率。

於是新機器每單位出品之成本為：

$$\frac{O+R+F+Ci}{Y}$$

舊機器每單位出品之成本則為：

$$\frac{o+r+f+ci}{y}$$

由上述新舊二機器之出品單位成本，當使其相等，故得：

$$\frac{O+R+F+Ci}{Y}=\frac{o+r+f+ci}{y} \qquad \text{(第 9 式)}$$

依基金法計算得每年之折舊額為：

$$F=\frac{C}{s_{\overline{N|}}}=CX \qquad \text{(第 10 式)}$$

按 $X=\frac{1}{s_{\overline{N|}}}$。

同理，

$$f=\frac{c}{s_{\overline{n|}}}=cx \qquad \text{(第 11 式)}$$

按 $x=\frac{1}{s_{\overline{n|}}}$。

以 $F=CX$ 與 $f=cx$，代入第 9 式，則

$$\frac{O+R+CX+Ci}{Y}=\frac{o+r+cx+ci}{y} \qquad \text{(第 12 式)}$$

若求 c，則如下式：

$$c=\frac{y}{x+i}\left(\frac{O+R+XC+iC}{Y}\right)-\frac{o+r}{x+i}$$

$$=\frac{y}{x+i}\left(\frac{O+R+XC+iC}{Y}-\frac{o+r}{y}\right)$$

因　$$z+i=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i=\frac{1}{a_{\overline{n}|}},$$

故　$$c=y\,a_{\overline{n}|}\left(\frac{O+R+XC+iC}{Y}-\frac{o+r}{y}\right)\qquad\text{(第 13 式)}$$

若新舊機器每年出品之數量相等，則

$$Y=y$$

於是第 13 式遂成爲：

$$c=a_{\overline{n}|}(O+R+XC+iC-o-r)\qquad\text{(第 14 式)}$$

但　$$X+i=\frac{1}{s_{\overline{N}|}}+i=\frac{1}{a_{\overline{N}|}}$$

故　$$c=a_{\overline{n}|}\left[\frac{C}{a_{\overline{N}|}}+O+R-o-r\right]\qquad\text{(第 15 式)}$$

若不僅 $Y=y$，而 O 亦等於 o，則

$$c=a_{\overline{n}|}\left[\frac{C}{a_{\overline{N}|}}+R-r\right]\qquad\text{(第 16 式)}$$

若 $Y=y$，而

$$O+R=o+r$$

則第 15 式爲

$$c=\frac{Ca_{\overline{n}|}}{a_{\overline{N}|}}\qquad\text{(第 17 式)}$$

例——設有機器可使用五年，每年可出品 20 單位，但每年須管理費用 \$250，修理費 \$200，另有一新機器，每年可出品 25 單位，該機原價爲 \$1,200，可使用十二年，每年管理費用 \$300，修理費 \$200，依利率五釐，計算舊機器之價值。

解：　已知 $C=\$1,200$, $N=12$, $O=\$300$, $R=200$,

$Y=25$, $n=5$, $o=\$250$, $r=\$200$, $y=20$,

$$X=\frac{1}{s_{\overline{12}|}}=.062825,\quad a_{\overline{n}|}=a_{\overline{5}|}=4.32948$$

將以上各項代入第 13 式，得

$$c=20(4.32948)\left[\frac{300+200+1,200(.062825)+1,200(.05)}{25}-\frac{250+200}{20}\right]$$

$$=86.5896(25.4156-22.50)$$

$$=\$252.46$$

第十一節 資產每年須重置一部份之折舊計算法

普通新資產之使用,多俟其完全造成以後,但亦有不待其全部造成而即於造成一部份時先行使用者。反之,資產之廢棄,普通雖多俟無法修理,不可再用時,始換置新資產,但在某種情形下,亦有不待舊資產之完全無用,而即更換新資產,以增加其生產之效能者,亦有每年必須重置一部份以保持或平均生產之效能者。關於普通情形下折舊之計算,已如上述,玆請進而言此種特殊情形之計算方法。例如一資產須 n 年完成,其每年所造者爲 $\frac{1}{n}$,則按基金法求其於某年底(如第 m 年底時)所積之折舊基金總額方法如下。

玆以 c 代表每年底提存之折舊基金,使至 n 年底,其基金總額等於該年所置資產之原價。設資產之原價爲 1,則按基金法計算,每年之折舊基金額如下:

$$c=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}$$

如第一年新置之資產額爲 1,則於第 m 年底之時($m\leqq n$),其折舊基金之總額,有如下式:

$$c\times s_{\overline{m}|}=\frac{1}{s_{\overline{n}|}}\times s_{\overline{m}|}$$

若第二年新置之資產仍爲 1,則其於第 m 年底時之折舊基金總額當爲:

$$c \times s_{\overline{m-1}|} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} \times s_{\overline{m-1}|}$$

同理，若第三年，第四年，第五年，以至第 m 年各年新置之資產，亦均爲 1，則其相對之折舊基金之總額當各爲：

$$c\, s_{\overline{m-2}|},\ c\, s_{\overline{m-3}|}, \cdots\cdots, c \text{ 或}$$

$$\frac{s_{\overline{m-2}|}}{s_{\overline{n}|}},\ \frac{s_{\overline{m-3}|}}{s_{\overline{n}|}}, \cdots\cdots, \frac{1}{s_{\overline{n}|}}$$

於是至第 m 年底止，其逐年所重置之資產上所積之折舊基金總額，當爲：

$$S_m = \frac{1}{s_{\overline{n}|}}(s_{\overline{m}|} + s_{\overline{m-1}|} + s_{\overline{m-2}|} + \cdots\cdots + s_{\overline{1}|}) \qquad \text{(第 18 式)}$$

茲將上列第 18 式括弧內各項，照本書第四章之第 1 式之法以 i 與 m 表示之得：

$$S_m = \frac{1}{s_{\overline{n}|}}\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} + \frac{(1+i)^{m-1} - 1}{i} + \frac{(1+i)^{m-2} - 1}{i} + \cdots\cdots + \frac{1+i-1}{i}\right]$$

$$= \frac{1}{i s_{\overline{n}|}}[(1+i)^m + (1+i)^{m-1} + \cdots\cdots + (1+i) - m]$$

$$= \frac{1}{i s_{\overline{n}|}}\left[\frac{(1+i)^{m+1} - (1+i)}{i} - m\right]$$

$$= \frac{1+i}{i s_{\overline{n}|}}\left[\frac{(1+i)^m - 1}{i} - \frac{m}{1+i}\right]$$

$$= \frac{1+i}{i s_{\overline{n}|}}\left(s_{\overline{m}|} - \frac{m}{1+i}\right) \qquad \text{(第 19 式)}$$

上式當應用於 $m<n$，或 $m=n$，而於 n 年末時，所應自基金中提出以換置其資產者，尙未減去之情形。至若第 n 年底所應重置之資產之價值 1，業已減除，則其餘下之基金總額，當以 S'_n 代表之，而成爲下式：

$$S'_n = \frac{1+i}{i s_{\overline{n}|}}\left(s_{\overline{n}|} - \frac{n}{1+i}\right) - 1 = \frac{1}{i} - \frac{n}{i s_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 20 式)}$$

在 n 年之後，設資產之全體，並不再擴充，而仍以原額分年換置者，則其各年底之基金總額，仍當與 n 年底時之數相同，故設 $m>n$，其於 m 年底之基金總額，均與 S'_n 無異。

例——設有一資產每年須建造費 \$10,000，十年完成，共計 \$100,000，十年後每年須重置十分之一，若其折舊仍依基金法利率五釐計算者，求其於第五年底之折舊基金總額。可依第 19 式得：

$$10{,}000\,S_5=\frac{1+.05}{.05\times s_{\overline{10|}}}\times\left(s_{\overline{6|}}-\frac{5}{1+.05}\right)\times 10{,}000$$

$$=\frac{1.05}{.05\times 12.5778925}\times\left(5.5256312-\frac{5}{1.05}\right)\times 10{,}000$$

$$=\frac{1.05}{.628894625}\times(5.5256312-4.7619476)\times 10{,}000$$

$$=1.6696\times .7637\times 10{,}000$$

$$=12{,}750.73$$

若求第十年底之折舊基金總額，則應為：

$$(A)\quad S'_{10}=\frac{1+.05}{.05\times 12.5778925}\times\left(12.5778925-\frac{10}{1.05}\right)$$

$$\times 10{,}000-10{,}000$$

$$=1.6696\times 3.05408\times 10{,}000-10{,}000$$

$$=\$\,40{,}990.82$$

$$(B)\quad S'_{10}=\left(\frac{1}{.05}-\frac{10}{.05\times 12.5778925}\right)\times 10{,}000$$

$$=(20-15.900915)\times 10{,}000$$

$$=\$\,40{,}990.85$$

上例說明有資產 \$10,000，每年應提存折舊基金 \$795.05，該數係照下式算出：

$$\frac{W}{s_{\overline{n|}}}=\frac{10{,}000}{s_{\overline{10|}\,.05}}=\frac{10{,}000}{.079505}=\$\,795.05$$

即第一年資產 \$10,000 中，應提存折舊基金 \$795.05，按利率五

釐存儲。第二年有資產 \$ 20,000，即應提 $2\times795.05=1,590.10$，至第五年底共計 \$ 12,750.73。第十年底爲 \$ 40,990.82。第十一年起，每年即可重置十分之一，計 \$ 10,000。是年計有資產 \$ 100,000，應提 \$ 7,950.50，而 \$ 40,990.82 按五釐計算之利息爲 \$ 2,049.54，以 \$ $7,950.50+2,049.54=$ \$ 10,000.04。卽作添購新資產$\left(\$\,100,000\times\frac{1}{10}\right)$之用。每年均係如此辦法。\$ 40,990.80 乃成爲固定之基金矣。

第十二節　礦產折舊計算法

礦產係遞耗資產，投資於礦產者，不僅希望獲得投資之利息，尚須獲得相當之利益，以備資產之遞耗。此項折舊，普通多用基金法計算。計算時須由採礦工程師計算每年淨收益之數(R)以及開採之年數(n)，然後方可計算其礦產之現價(P)。其公式如下：

$$P=Ra_{\overline{n}|}=R\times\frac{1-v^n}{i}\qquad\text{(第 21 式)}$$

若利率爲 i，則計算此項現價每年之利息，應如下式：

$$R(1-v^n)$$

每年收益超過利息之數爲：

$$R-R(1-v^n)=Rv^n$$

此項超過之數，應留積爲基金，仍依利率 i 積算，以抵償其原來之投資。

上述乃指資產投資利率與折舊基金存儲利率相同者而言，若資產投資利率與折舊基金存儲利率不同，(普通資產投資利率高於折舊基金存儲利率)，則其公式略爲複雜，茲以 i' 代表資產投資利率，則其每年留積於基金中之金額當爲：

$$R-Pi'$$

若欲計算此項超過數經過若干年，仍與原投資本相等，則其算式如下：

$$(R-Pi')s_{\overline{n}|}=P$$

故
$$P=\frac{Rs_{\overline{n}|}}{1+i's_{\overline{n}|}}=\frac{R}{\frac{1}{s_{\overline{n}|}}+i'} \qquad (\text{第 22 式})$$

$s_{\overline{n}|}$ 之利率爲 i。

例——設有一礦產,估計每年收益 \$25,000,可採二十年,利率五釐,計算其現價爲:

$$P=25,000\times a_{\overline{20}|}$$
$$=25,000\times 12.4622103$$
$$=\$331,555.26$$

若其資產投資利率爲一分,而折舊基金存儲利率爲五釐,則其現價應如下式:

$$P=\frac{\$25,000}{\frac{1}{s_{\overline{20}|\cdot 05}}+.10}$$
$$=\frac{\$25,000}{.130\text{-}425872}$$
$$=\$191,949.50$$

查 \$191,949.50 按利率一分,每年應得利息 \$19,194.95,現此項收益每年可有 \$25,000,其溢出之 \$5,805.05 卽爲本金之收回。每期收回 \$5,805.05,計二十年,利率五釐,其年金終價爲:

$$K=5,805.05\times s_{\overline{20}|\cdot 05}$$
$$=5,805.05\times 33.0659541$$
$$=\$191,949.50$$

第十三節 資產原價及永久重置價值現價之計算法

上述各種計算方法,爲估計資產之遞耗,而逐期攤提之方法。此外

尙有一種方法,計算原置資產之價值,及其損壞後再行重置,以至永久重置數之現價。如造屋一所,原價 \$100,000,可使用十五年,十五年後重造一所,其造屋費用與使用時期,仍無更變,如是每十五年重造一次,循環不已,求其現價,此本節所討論之問題也。玆以 C 代表一資產之原價,除計算 C 外,再加每隔 n 年重置一次價值之現價,得該資產之全部**資本化之成本**(Capitalized Cost)(以 A 爲代表)其式如下:

$$A=C+\frac{C}{is_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 23 式)}$$

其中之 $\frac{C}{is_{\overline{n}|}}$ 爲每隔 n 年重置一次之各次重置價值之現價,乃一永久年金之現價也(見第六章第七節)。

上項公式,可演化爲:

$$A=C+\frac{C}{is_{\overline{n}|}}=\frac{C}{i}\left(i+\frac{1}{s_{\overline{n}|}}\right)=\frac{C}{i}\times\frac{1}{a_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 24 式)}$$

例——設有汽車一輛,原値 \$2,000,可使用五年,五年後須重換新車,價值仍爲 \$2,000,以後五年重換一次,其數永不更動。玆按利率五釐,計算其現需籌備之數如下:

$$\frac{\$2,000}{.05}\times\frac{1}{a_{\overline{5}|}}=\$40,000\times.2309748$$

$$=\$9,238.99$$

按現存 \$9,238.99,除去購置第一輛汽車所需 \$2,000.00 外,餘數 \$7,238.99 按利率五釐,存儲五年,可得本利合計如下:

$$S=7,238.99\times(1+.05)^5$$

$$=7,238.99\times1.2762815625$$

$$=\$9,238.99$$

第五年再重換新車一輛如仍爲 \$2,000,則餘數仍爲 \$7,238.99,再行存儲,五年復得原數,如此可循環不已也。

習題三

1. 設某運輸公司擬每年購置運輸汽車十輛,每輛 $ 1,000, 以八年爲期, 估計該車每輛可以使用八年,按基金法提存折舊,利率五釐,試計算第五年底及第八年底儲積基金之數。

2. 設有油礦一處,每天可產油 1,000 桶,每桶可淨餘 $ 1.00, 估計可採五年(每年三百六十五天),若資產投資利率爲一分二釐,折舊存儲利率爲五釐, 投資者希望第五年底將原投資額如數收回,試計算其現在購進之價格。

3. 設有某礦每年盈餘 $ 1,000, 估計可經二十年,每年所得盈餘除付原投資額利息七釐外,餘按利率四釐存儲,到期適合投資原數,試計算其所投資本若干?

4. 某君置汽車一輛,原價 $ 2,000, 使用五年, 可售 $ 500, 以後每五年重換一輛,均爲 $ 2,000, 舊者亦均可售 $ 500。若利率五釐,試計算其現應儲款若干?

5. 設某處擬造橋一座,價值 $ 400,000, 每四十年須重造一次, 價值相同,若利率五釐,試計算其現應籌款若干?

6. 設有一機器可用五年,每年可出品三十單位,每年須管理費 $ 300, 修理費 $ 400, 另有一新機器原價 $ 1,750, 每年可出品四十單位, 可用十二年, 每年管理費 $ 450, 修理費 $ 300, 利率五釐,試計算舊機器之價值。

第十四節 增加資產使用時期及價值之計算法

資產建造時,價廉者多欠堅固,故使用時期較短。堅固者誠耐用矣,但建築價值又較昂。惟二者孰爲合算,則不經計算,無由得知。已造成之物,若須增加使用時期,自須增加建築費用,但所增之費用,與可增之使用時期比較,是否合算,亦須有精密之計算,方可決定。玆以 C 代表一資產可以使用 n 年之原價,則其全部資本化之成本卽爲:

$$K=\frac{C}{i}\times\frac{1}{a_{\overline{n}|}} \qquad \text{(第 25 式)}$$

今欲使此資產之使用時期增加 x 年,而加費 y, 則 $C+y$ 卽爲原價與增加使用時期所費價值之總和,而 $n+x$ 卽爲原可使用之時期與增加使用時期後之總使用時期,而其全部資本化之成本遂爲:

$$K=\frac{(C+y)}{i}\times\frac{1}{a_{\overline{n+x}|}} \qquad \text{(第 26 式)}$$

今若所加付之成本，與所能增加之使用時期，成正比例，則上列二式之全部資本價值，當能相等，於是得：

$$\frac{(C+y)}{i}\times\frac{1}{a_{\overline{n+z}|}}=\frac{C}{i}\times\frac{1}{a_{\overline{n}|}} \qquad \text{（第 27 式）}$$

解此式以求 y，則 y 之值如下：

$$y=C\frac{a_{\overline{n+z}|}-a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}}$$

$$=C\frac{v^n-v^{n+z}}{ia_{\overline{n}|}}$$

$$=\frac{Cv^n\left[\frac{1-v^z}{i}\right]}{a_{\overline{n}|}}$$

$$=\frac{Cv^n a_{\overline{z}|}}{a_{\overline{n}|}} \qquad \text{（第 28 式）}$$

因 $a_{\overline{n}|}=v^n s_{\overline{n}|}$，$s_{\overline{n}|}=\frac{a_{\overline{n}|}}{v^n}$，代入之得：

$$y=\frac{Ca_{\overline{z}|}}{s_{\overline{n}|}} \qquad \text{（第 29 式）}$$

例——設某公司購置一種器具，每件 \$10，可使用八年，另有一種，可使用十五年者，依利率七釐計，求此可用十五年者之價值，應爲若干，方可與使用八年者一樣合算，茲計算如下：

$$C+y=10+\frac{10\times a_{\overline{7}|\cdot 07}}{S_{\overline{8}|\cdot 07}}$$

$$=10+\frac{10\times 5.3892894}{10.2598024}$$

$$=\$15.25$$

第十五節 混合折舊法

混合折舊法或曰使用期限平均法（Composite Life Method），乃將

某類資產中之各項資產混合之,求得其平均之使用期限,以計算其全體折舊之方法也。其所根據之原理爲:"全體資產之每年平均折舊額,依假定利率計算,至其平均之使用期限滿時,即得等於其全體之總折舊額"。

設以 W_1, W_2, ……, W_t 代表各資產之總折舊額。

n_1, n_2, ……, n_t 爲各資產之各別使用期限。

則 $W=W_1+W_2+\cdots\cdots W_t$ 卽爲全體資產之全體總折舊額。

又設以 D_1, D_2, ……, D_t 代表各資產之每年平均折舊額。

則 $D=D_1+D_2+\cdots\cdots+D_t$ 卽爲全體資產之每年平均折舊額。

若所假定之利率爲零,則依直線法計算,其全體資產之平均使用期限 n 卽爲:

$$n=\frac{W}{D} \qquad \text{(第 30 式)}$$

但若所假定之利率非零,而爲 $i(i>0)$,則其全體資產之平均使用期限,應自下式求出之:

$$Ds_{\overline{n|}}=W \qquad \text{(第 31 式)}$$

解第 31 式,須以 $s_{\overline{n|}}=\frac{(1+i)^n-1}{i}$ 代入式中,並將兩端各用 D 除之,如此則得:

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{W}{D},$$

$$(1+i)^n-1=\frac{Wi}{D},$$

$$(1+i)^n=1+\frac{Wi}{D},$$

$$n\log(1+i)=\log\left(1+\frac{Wi}{D}\right)$$

$$n=\frac{\log\left(1+\frac{Wi}{D}\right)}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 32 式)}$$

n 之値亦可依近似法求得之:

從第 31 式及 D 與 W 之定義得:

$$(D_1+D_2+\cdots\cdots+D_t)s_{\overline{n}|}=W_1+W_2+\cdots\cdots+W_t$$

但

$$D_1=\frac{W_1}{s_{\overline{n_1}|}}$$

$$D_2=\frac{W_2}{s_{\overline{n_2}|}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_t=\frac{W_t}{s_{\overline{n_t}|}}$$

按

$$s_{\overline{n_1}|}=\frac{(1+i)^{n_1}-1}{i}=\frac{1+n_1i+\cdots-1}{i}\text{(註)}$$

$$=n_1 \text{ 為其近似值}$$

於是各資產每年折舊之近似值卽爲:

$$D_1=\frac{W_1}{n_1}$$

$$D_2=\frac{W_2}{n_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_t=\frac{W_t}{n_t}$$

將以上各近似値代入第 31 式得:

$$\left(\frac{W_1}{n_1}+\frac{W_2}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{W_t}{n_t}\right)n=W_1+W_2+\cdots\cdots+W_t$$

於是卽得,

$$n=\frac{W_1+W\quad+\cdots\cdots+W_t}{\frac{W_1}{n_1}+\frac{W_2}{n_2}+\cdots\cdots+\frac{W_t}{n_t}} \qquad \text{(第 33 式)}$$

玆舉一例,用上列第 32 式之正確公式,求下列資產之平均使用期限。

(a) 一部份原價爲 \$ 5,000, 使用 10 年後之殘價爲 \$ 200.00

(b) 一部份原價爲 \$ 3,000, 使用 15 年後之殘價爲 \$ 300.00

(c) 一部份原價爲 \$ 10,000, 使用 20 年後之殘價爲 \$ 500.00

(d) 一部份原價爲 \$ 12,000, 使用 12 年後之殘價爲 \$ 1,000.00

假定利率爲年息 5 釐。

(註) $(1+i)^{n_1}$ 依二項式展開,而略去其 i 之高次式,卽得 $1+n_1i$。

此題中之 $W_1=4,800,\ W_2=2,700,\ W_3=9,500,\ W_4=11,000$。

$$W=4,800+2,700+9,500+11,000=28,000_{\circ}$$

$$n_1=10,\ n_2=15,\ n_3=20,\ n_4=12_{\circ}$$

於是

$$D_1=\frac{4,800}{s_{\overline{10}|}}@.05=4,800\times0.0795046=381.62_{\circ}$$

$$D_2=\frac{2,700}{s_{\overline{15}|}}@.05=2,700\times0.0463423=125.12_{\circ}$$

$$D_3=\frac{9,000}{s_{\overline{10}|}}@.05=9,500\times0.0302426=287.30_{\circ}$$

$$D_4=\frac{11,000}{s_{\overline{12}|}}@.05=11,000\times0.0628254=691.08_{\circ}$$

$$D=381.62+125.12+287.30+691.08=1,485.12_{\circ}$$

以之代入 32 式中，卽得

$$n=\frac{\log\left(1+\dfrac{28,000\times.05}{1,485.12}\right)}{\log 1.05}=\frac{\log\dfrac{2,885.12}{1,485.12}}{\log 1.05}$$

$$=\frac{\log 2,885.12-\log 1,485.12}{\log 1.05}$$

$$=\frac{3.460167-3.171741}{.021189}=\frac{.2884}{.021189}=13.612\text{ 年}$$

覆習題

1. 設有資產原價 \$ 1,200，使用十五年後，僅值 \$ 200，試按定率遞減法計算其定率。

2. 設汽車原價 \$ 4,000，可使用五年，第五年底可售出 \$ 600，係按利率五釐提存基金，試計算第三年底之待折舊額，並計算與原價之比例。

3. 設有機器原價 \$ 4,000，可使用十二年，其殘價爲零，利率六釐，試照基金法計算之，並編一表，示各年攤提折舊及折舊基金存儲之情形。

4. 設有房屋一所，原價 \$ 300,000，估計可用四十年，殘價 \$ 10,000，利率五釐，試按基金法計算每年應攤之數。

5. 某君擬捐房屋一所，原價 \$ 200,000，每五十年重造一次，價值相同，利率四釐，試計算某君現捐之數。

6. 某公司購機器一部，原價 \$ 5,000，估計使用十二年後，尙值 \$ 1,000，利率五釐，試按基金法計算折舊額，並編一表以證明之。

7. 某公司建屋一所，原價 $ 30,000，估計可用十二年，利率四釐，試按基金法編製一表以表示之。

8. 設有某礦估計每年可有淨收益 $ 50,000，約計二十五年採盡，若利率四釐，試計算其現價。若計算資產之利率爲一分二釐，而提存基金之利率爲八釐，其現價當爲若干？

9. 某汽車公司擬每年置器具 $ 20,000，以十年爲期，該器具估計可使用十年，按基金法計算折舊，若利率爲四釐，試計算第八年底之折舊基金數。

10. 某處街道需重行修理計費 $ 3,000，以後估計每十年須修理一次，均爲 $ 3,000。若利率爲五釐，試計算現應籌募基金若干？

11. 將第 10 題所述各項，改爲每七年修理一次，計修理費 $ 3,000，現擬加工修理，希望可使用十五年，若利率五釐，試計算加費之限度。

12. 某公司置機器 $ 500,000，估計可用二十年，利率五釐，試按基金法計算其折舊，並編一表以示之。

13. 將第 12 題所述各項，按複利法計算之。折舊存儲利率爲五釐，資產投資利率爲八釐。並編一表以爲證。

14. 設某公司各項資產之種類，原價，使用時期及殘價如下：

種類	原價	使用時期	殘價
房屋	$ 100,000	50 年	$ 2,000
機器	45,000	20	4,500
生財	10,000	5	200
工具	15,000	4	300

若利率五釐，試按基金法計算其混合使用時期。

15. 設有二種桿子，一可用十二年，一可用二十年，前者價值 $ 6。若利率四釐半，試計算如欲改用後者，當以何價爲合算？

16. 設有機器原價 $ 16,000，使用八年後可售 $ 2,400。試以平均法，使用期數比率法及定率遞減法，分別計算各年折舊額。

17. 試將上題所列各項，各編一表以證明之。

18. 照上題所述各項，若利率爲七釐，試按基金法及年金法分別計算各年折舊額。

19. 試將上題所列各項，各編一表以示之。

20. 某公司購置一船，計價 $ 300,000，可用二十年。設當時市場利率爲六釐，則該公司倘欲購置另一可用三十年之船一艘，其理論上之限價爲若干？

21. 設有機件價值 $ 50，可用一年，若利率八釐，試計算可用二年者之理論價值應爲若干？

22. 設某公司以 $ 4,000 購置汽車一輛，可用五年，若利率七釐，則另購可用六年者，其可出之限價值應爲若干？

第十章　房產放款合作社投資

第一節　概說

房產放款合作社(Building and Loan Association)之組織，甚行於美國，其目的在集合資金，憑充足之擔保，以貸款與需款置備房產之社員。

此合作社中之社員，一部份爲投資之人，他部份則爲投資兼借款之人。借款之社員所以能同時兼爲投資之社員者，因其亦須投資於該社之股票以擔保其所借之款也。

此種合作社之集資及發行股票之方法，亦有多種。有規定須將所認股款一次付足者；亦有規定在一定限額之內須將所認之股款一次付足，而在此限額之外則可分期付入者。但在習慣上此種合作社大都實行分月付款之辦法，以其能鼓勵社員之儲蓄故也。

茲設例以說明分月付款之辦法如下：

例如有一投資人某甲，加入一房產放款合作社中爲社員，當即認購每股一百元之股票一份，定每月繳付一元於合作社，作爲投資。則於若干月後，其付入之總額，加其所應分派之利益，當能等於其所認股款之總數。屆時其所認之股票即成爲繳足股款之股票(或稱滿期股票)，自此某甲對於該合作社即有一百元之所有權。

又如有某乙需款置備房產，可向該合作社借款一百元，一方面認購其每股百元之股票一份，依分月付款方法，逐月繳付股款，至所認股票滿期時，借款人得以此股票淸償其借款。設該合作社之放款利息爲年息

七釐，則此借款人於每月初付入其股款時，應加付借款之利息如下：

$$\frac{\$100\times.07}{12}=\$0.583$$

若某乙所認之股票，亦依每月一元之數繳付，則每月初應繳付該社之數，合計爲$1.583。

借款人對於其所認每股百元之股票，每月所付之款，常有少於一元者。例如月付股款$.50，再加借款利息$0.583，共付$1.083，或連利息在內，每月共付一元之數。此法付款較少，而付款之期數則加多。於是清償借款所需之時期，遂亦較月付一元外加利息者爲長。依此辦法，借款人所認之股份，如其每月所付之股款數，與投資人所付者相同，則其滿期之期限，亦得與投資人所認股份相等；所異者，在滿期之後，借款人須以其股份清償其債務耳。

簡言之，房產放款合作社之營業原理，即係償債基金之原理，依合作之方法，而應用於置備房產之借款者也。但在此種合作事業中，並未另設償債基金。其借款人分期還債之數，得依投資方法投資於合作社中，因此所得之利息，常較另立償債基金所得之利息爲高也。

第二節　利益之來源

借款人所付之利息，爲此種合作社利益之最大來源。此外，尚有數種次要來源。茲卽將各種利益之來源，列示如下：

(1)借款人所付之利息。

(2)股份未滿期前提回股款時所扣除之利益。股份所有人，如在股份未滿期前提回其股款，常不得按股票帳面價値之全部收回，而須犧牲其股份所獲利益之一部份，以充社中之費用。

(3)因借款利息低於所收放款利息之利益。此種合作社，除社員所繳付之股款外，亦得在法律所允准之範圍內，依其資產總額之百分比，如百分之十或十五等爲限，向外界借款，此種借款之利息常低於本社放

款之利息。於是其差數遂成爲該社利率之一種。

(4)社員入社時之入社費。

(5)社員延期付款之罰款。

至於營業上之費用，僅書記薪工與記錄上之用品及房租電費等幾項而已。就各項利益之總數中，減去費用之後，其差額卽爲淨利益，當依公平之方法分派於各股東。

第三節　利益之分派

分派利益於各股東時，須先求得一分派之標準。所謂分派之標準者，卽某期之淨利益總額，與該期內實收股份帳面價值總額之比例，換言之，卽每元帳面價值所能分得之利率是也。但實際上因分期付款之關係，各股份之帳面價值，在期內未能一律，於是必須以各股份爲單位，分別計算其平均之帳面價值。故社章中常規定“股利之分派，須以各股東在各該期內實繳股份之平均帳面價值爲比例”云。

分派利益於各股份之時期，卽所謂股利時期 (Dividend Period) 者，通常多定爲六個月。玆舉例以說明其分派之方法如下：

設以 B，代表某一股東之股份在一期內之平均帳面價值。假定該股東於第四月初繳納股款二元，則此二元之股份，存入合作社，爲期僅有三個月，故在第六月底分派利益時，祇能分得半期之利益。如算出之利益分派率爲每元二分，則此股份所能分得之利益當爲：

$$\$2\times .02\div 2=\$ .02$$

此與第一月初繳納一元之股份所分派之數相同 ($\$1\times .02=\$ .02$)。故 B 之價值可由下式求得之：

$$\$2\times 3\div 6=\$1$$

上式可以算式表示之如下：

$$\text{各股份之平均帳面價值}=\frac{\text{該股份存於股利期內之各金額各乘其實存時期之總計}}{\text{股利時期}}$$

各股份之平均帳面價值，既依上式求得，則其總和卽成爲全體股份之總帳面價值。若以 $B_1\ B_2\ B_3 \cdots\cdots B_n$ 代表各股東股份之平均帳面價值，則全體股份之總帳面價值爲：

$$B=B_1+B_2+B_3+\cdots\cdots+B_n,$$

若以 G 代表某一期應分派之利益總額，以 g 代表此期股份帳面價值每元應分派利益之率，則

$$g=\frac{G}{B} \qquad \text{(第1式)}$$

玆舉例示其計算方法如下：

例——某房產放款合作社股份十股，每股每月繳納一元，其期初之帳面價值爲 \$379.20。每月繳款，均於月初按時繳入。問至第六月末分派利益時，此十股股份之平均面帳價值 B_1 當爲幾何？解如下式：

此十股股份於第一月初繳入 \$10.00 之實存時期，與該股份之期初帳面價值之 \$379.20 相同，爲六個月。

第二月初繳入之 \$10.00，其實存時期爲五個月。

第三月初繳入之 \$10.00，其實存時期爲四個月。

……………………………………………………

第六月初繳入之 \$10.00，其實存時期爲一個月。

因每月繳入之 \$10 之實存時期共爲二十一月（卽 6+5+4+3+2+1=21），故此十股股份之平均帳面價值當爲：

$$B_1=\$379.20+\frac{\$10\times 21}{6}=\$414.20\text{。}$$

習 題 一

1. 某人向一房產放款合作社認購每股百元之股份二十股，每股須於每月初繳入一元，但其第一次繳款之 \$20，乃在上次股利日期後之第三月初始付，故至下次股利日期爲止共僅繳足四次，問屆時此二十股股份之平均帳面價值共爲幾何？

2. 某社員有十股股份，在六個月期間開始時之帳面價值爲 \$250.00。在第一第二第三三個月初，均未將每月應付之 \$10.00 繳付，而至第四月初共繳 \$40.00。於第五第六兩月初，又各繳 \$10.00。問在六個月末分派利益時，此十股股份之平均帳面價值共爲幾何？若此

社員欠付之款已依罰款規則補足，至分派利益時當與按期繳款之社員受同等待遇，則此十股股份之帳面價值又為幾何？

3. 某房產放款合作社股份二十股在六個月期開始時之帳面價值為 \$583.41，在此期內，每月應繳之 \$20.00 均於每月初按期照繳。於期末分派利益時，該合作社全部股份之平均帳面價值 B 共為 \$126,178.36。而該期之淨利益 G 共為 \$4,037.71。求：(a)每元平均帳面價值應分派利益之率 g，(b)上述之二十股股份應分派之利益額，(c)此二十股股份於六個月期末利益分派後之帳面價值。

4. 某人以現金七十元向一房產放款合作社購得一於某半年期初所發行之一次付足之股份一份。至積至一百元時即行滿期。設此後最初五股利期(每期半年)內之各期利益分派率為 .032，.029，.030，.027 及 .032。試問第六期初該股份之帳面價值若干？

5. 某房產放款合作社於每月月初發行股份一次，在第六月初發行股份時，有人認購股份六十股，而繳入現金六十元作為當月應付之股款。問此六十股股份於當月末分派利益時，其平均之帳面價值若干？設此期之淨利益總額為 \$5,262.50，全部股份之總帳面價值為 \$170,321.45。問此六十股股份應分得之利益為若干？

第四節　分期發行之股份

房產放款合作社之股份，常按訂定之時期分次發行。每次發行相差之期間，通常為六個月，而其每次發行之日期，通常即為股利日期。每期發行之股份，稱為某期之股份，例如 A 期股份，B 期股份之類。此種辦法，能使計算各股份之平均帳面價值 $B_1\ B_2 \cdots\cdots B_n$ 之問題，易於解決；蓋除延期付款者外，因每期發行之各股份，在每六個月期內，均按月付款，故其帳面價值均相等也。

習題二

1. 設某甲有合作社第一，二兩期所發行每股百元之股份各二十股。第一期股份乃於第一個六月期開始時所發行；第二期股份則於第二個六月期開始時所發行。設此二期股份，每月初應付之股款二十元均按時於每月初繳入，而此二期末之利益分派率各為 .035。問至第二期末分派利益時，某甲所有之二期股份，其應分得之利益額各若干？

2. 如題 1 之某甲仍繼續於每月月初繳入股款，問於第三期末分派利益時，設其利益分派率仍為 .035，問該二期每期二十股之股份，其應分得之利益額各若干？

第五節　退股價值(Withdrawal Value)

房產放款合作社之股份所有人，在股份未滿期前提回股款時，如提

回時期距認購時期並不極近者，亦得支取一部份之利益。但所提回之金額，當較股份之全部帳面價值為少。合作社之必須向退股社員扣除其應分利益之一部者，一則可以防止社員之退股，以免防礙營業上之預定計劃，二則可以獲得少數利益，以作退股之手續費。至於其股份之退股價值，如何計算，以及與帳面價值之相差如何，則可舉例示之如下：

例——某人於每月初繳入某合作社現金四十元，作為認繳四十股之股款，共已繳過六十六次。在第六十六月底時，即將付第六十七次股款之前一日時，要求退股。依該合作社之規定，股份之退股價值，為繳入股款加年息六釐之單利息，而股份之帳面價值，則按年息七釐每月複利計算。問此人所得之退股價值，與其四十股股份之帳面價值，相差幾何？

解：先依期首付年金之公式，求得此四十股股份之帳面價如下：

$$\$40\,s'_{\overline{66}}\,(\text{利率 }7/12\%)=\$40\frac{(1.005833)^{66}-1}{.005833}(1.005833)$$
$$=\$3,227.62$$

至計算單利息時，其第一次繳入之股款實存六十六個月，第二次繳入之股款實存六十五個月，第三次繳入之股款實存六十四個月，至末次繳入之股款實存一個月。換言之，即其每月繳入之股款四十元實存於該社之時期，共為 $66+65+64+\cdots\cdots+1=2,211$ 月 $=184.25$ 年。於是其單利息為：

$$\$40\times184.25\times6\%=\$442.20$$

至其退股價值之總數，則為：

$$(66\times\$40)+\$442.20=\$3,082.20$$

帳面價值減退股價值，即得其差額如下：

$$\$3,227.62-\$3,082.20=\$145,42$$

習 題 三

1. 某人於每月初繳入某合作社現金四十元，作為認購四十股之股款，共已繳過六十六

次。在第六十六月底時卽將付第六十七次股款前一日時，要求退股，依該合作社之規定，股份之退股價値爲繳入股款加年息五釐之單利息，而股份之帳面價値，則按年息七釐每月複利一次計算。問此人所得之退股價値與其四十股股份之帳面價値相差幾何？

2. 設上題中股份之帳面價値係按年息六釐每月複利一次計算，其餘情形皆同，問該四十股股份之退股價値與帳面價値相差若干？

3. 某房產放款合作社之股款積至二百元時卽滿一股，今有一每月繳入股款十元之股東繳過股款九十六次，在應繳第九十七次股款前一日時，按退股價値退股。依該社規定，股份之退股價値當按繳入股款加以年息四釐之單利息，股份之帳面價値則按年息六釐半每月複利一次計算，問此股東所得之退股價値與帳面價値相差若干？

4. 某合作社之股票，於每股積至二百元時卽爲滿期。今有人以現金一百四十元購得該社所發行一次付足之股票一份。此股票以一定之利息積算，於滿四年時卽爲滿期。設該社之股份之退股價値，爲繳入股款加年息五釐，每半年複利一次之本利合計數。問於自購得日起之第三週年底，此股份之帳面價値與其退股價値相差若干？

第六節　由已知利率求股票滿期所需之時期

設 F 爲股票之面値，其每月之付款爲 M。今按實利率 i 計算，求股票滿期所需之時期 n。此問題卽爲求每年分 12 個月，月初支付確定年金，依實利率 i 積至總額 F 時所需之時期。故可應用期首年金之公式以計算之。

演算時須注意股票到期日之情形如何，玆分款述之如次：

(一)股票之滿期，適在月款繳入之後者，其由月款 M 積至總額 F 之方程式如下：

$$M(1+i)^n+M(1+i)^{n-\frac{1}{12}}+M(1+i)^{n-\frac{2}{12}}+\cdots\cdots$$

$$+M(1+i)^{\frac{1}{12}}+M=F \qquad \text{(第 2 式)}$$

或

$$(1+i)^n+(1+i)^{n-\frac{1}{12}}+(1+i)^{n-\frac{2}{12}}+\cdots\cdots$$

$$+(1+i)^{\frac{1}{12}}=\frac{F}{M}-1 \qquad \text{(第 3 式)}$$

將上式之左端，依等比級數總計之，卽得：

$$\frac{(1+i)^{n+\frac{1}{12}}-(1+i)^{\frac{1}{12}}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=\frac{F}{M}-1 \qquad \text{(第 4 式)}$$

或
$$\frac{(1+i)^{n+\frac{1}{12}}-1}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=\frac{F}{M} \qquad \text{(第5式)}$$

(二)股票之滿期,適在月款繳入之前者,則前列第2式可改爲:

$$M(1+i)^n+M(1+i)^{n-\frac{1}{12}}+M(1+i)^{n-\frac{2}{12}}+\cdots\cdots$$
$$+M(1+i)^{\frac{1}{12}}=F \qquad \text{(第6式)}$$

第4式亦可改爲:

$$\frac{(1+i)^{n+\frac{1}{12}}-(1+i)^{\frac{1}{12}}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=\frac{F}{M} \qquad \text{(第7式)}$$

(三)股票之滿期,須包括最後一次月款之一部分,如 fM(此處 f 爲一分數)者,則前列之第4式可改爲:

$$\frac{(1+i)^{n+\frac{1}{12}}-(1+i)^{\frac{1}{12}}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=\frac{F}{M}-f \qquad \text{(第8式)}$$

(四)股票之滿期,在兩期月款繳款日期之間者,可以 t 代表滿期所需時期 n 中之全部整月月數所等之年數(如滿期所需之時期共爲3年8月10日,其中之整月月數共爲44月,其所等之年數 t 即爲 $3\frac{8}{12}$)而將第2式改爲:

$$M(1+i)^n+M(1+i)^{n-\frac{1}{12}}+M(1+i)^{n-\frac{2}{12}}+\cdots\cdots$$
$$+M(1+i)^{n-t}=F \qquad \text{(第9式)}$$

或
$$(1+i)^n+(1+i)^{n-\frac{1}{12}}+(1+i)^{n-\frac{2}{12}}+\cdots\cdots$$
$$+(1+i)^{n-t}=\frac{F}{M} \qquad \text{(第10式)}$$

並將第4式改爲:

$$\frac{(1+i)^{n+\frac{1}{12}}-(1+i)^{n-t}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=\frac{F}{M} \qquad \text{(第11式)}$$

將上列方程式(4)(5)(7)(8)及(11)互相比較，因其中之$n-t<\frac{1}{12}$，於是當F，M及i爲已知數時，則凡能依(4)及(5)二式所直接解得之n，其值卽不能適合(7)(8)或(11)各式中之n，反之，如n之值能適合(7)(8)或(11)各式者，卽不能依(4)(5)二式直接求出。

今因f及t爲未知數，故實際上不能應用(8)或(11)二式以求n之值。須先由(4)或(5)二式求得一近似值。令$n=a$爲其近似值，然後以此n之近似值a中之整月月數所等年數t爲時期，反求其每月付款(假定爲一元)所積之年金總價：

$$S=(1+i)^t+(1+i)^{t-\frac{1}{12}}+(1+i)^{t-\frac{2}{12}}+\cdots\cdots+1 \qquad \text{(第 12 式)}$$

或

$$S=\frac{(1+i)^{t+\frac{1}{12}}-1}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1} \qquad \text{(第 13 式)}$$

然後再將年金總價S，與其股票面值相減，所得之差，爲不足於面值之數，再用整理方法，求得積足此差數所應增加之下月中一部份時期，或下月付款之一部份。其整理之法，觀下文所舉之例，自能明瞭。若a之值極近於若干整月月數，則吾人於反求每月付款所積之年金總價時，卽可應用一稍大於a之整月月數所等之年數而計算之(見習題四之第1題)。

於練習實數計算之前，試先說明第4式或5式中之n之解法。由第4式得：

$$(1+i)^{n+\frac{1}{12}}=\frac{F}{M}\left[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1\right]+1 \qquad \text{(第 14 式)}$$

則

$$\left(n+\frac{1}{12}\right)\log(1+i)=\log\left\{\frac{F}{M}\left[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1\right]+1\right\} \qquad \text{(第 15 式)}$$

卽得

$$n=-\frac{1}{12}+\frac{\log\left\{\frac{F}{M}\left[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1\right]+1\right\}}{\log(1+i)} \qquad \text{(第 16 式)}$$

若所定之利率爲一名利率j於一年中複利m次者，則第16式可改爲：

$$n=-\frac{1}{12}+\frac{\log\left\{\frac{F}{M}\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{12}}-1\right]+1\right\}}{m\log\left(1+\frac{j}{m}\right)} \qquad \text{(第 17 式)}$$

依第 16 與 17 二式所解得之 n，若以 12 乘之，成爲整數，則知股票之滿期，適在某次月款付入之後。否則當依下例所示之整理方法另行求之。

例一：某房產放款合作社給與其投資人之利率，爲一年息七釐之名利率，按月復利一次者，求票面 \$100.00 按月付款 \$1.00 之股票之滿期時期。在此例中，$j=.07$，$m=12$，用第 17 式求其近似之時期如下：

$$n=-\frac{1}{12}+\frac{\log\left[100\left(1+\frac{.07}{12}-1\right)+1\right]}{12\log\left(1+\frac{.07}{12}\right)}$$

$$=-\frac{1}{12}+\frac{\log 19-\log 12}{12\log\left(1+\frac{.07}{12}\right)}$$

$=6.501=6$ 年 6 月 0 日

因此知該股票滿期所需之時期爲 6 年 6 月，適在其 79 次月款付入之後。

此數可依普通年金之公式 $S_{\overline{79}|@\frac{7}{12}\%}=\dfrac{\left(1+\frac{.07}{12}\right)^{79}-1}{\frac{.07}{12}}$ 核對之

例二：例 (1) 之名利率如改爲六釐，試求其股票滿期所需之時期。用第 17 式求得其近似時期如下：

$$n=-\frac{1}{12}+\frac{\log 1.5}{12\log 1.005}$$

$=6.6912$

$=6$ 年 8.294 月。

故知滿期所需之時期爲 6 年 8 月零若干日。

今若依 6 年 8 月計算，則此股份於第 6 年 8 月底月款付入後之終

價,當爲:

$$S=\frac{(1.005)^{81}-1}{.005}=\$99.5602。$$

設以 x 爲使該股票滿期應加不足一月之日數,則

$$(99.5602)(1.005)^x=100$$

$$x=\frac{\log 100-\log 99.5602}{\log 1.005}=0.8837\text{ 月}=27\text{ 日}$$

但在不及一月之時期,可用單利息法求之,以免應用對數。故得:

$$(.005)(99.56)x=100-99.5602$$

$$.4978x=0.4398$$

$$x=.8835\text{ 月,卽 }27\text{ 日。}$$

故此股份滿期所需之時期,共爲 6 年 8 月又 27 日。

習 題 四

1. 某合作社給與投資人之報酬爲年息六釐之名利率,按月複利一次,試求票面 $100.00 每月付入 $0.50 之股票滿期所需之時期。(註)

2. 某合作社給與投資人之報酬爲實利率年息七釐,按年結算一次,試求票面 $ 100.00 按月付款 $ 0.50 之股票滿期所需之時期。

第七節 分期付款股份之實利率

股票之每月付款數爲 M,在 n 時期之後,能積至票面價值 F,以此三項已知數 MFn 爲根據,求投資人所得之實利率 i。此卽求年金利率之一實例。

上節已述股票之滿期,有在月款繳付之日期者,有在二個繳款日期之間者。若股票適於月款繳付之日滿期(或在月款繳入之後,或在月款繳入之前,或須包括月款之一部份)者,則其每月繳入之股款積至股票面值之情形,可以下式表示之:

(註) 此題中之近似時期極近於整月月數,可卽用較大於所求得之近似時期之整月月數以整理之。

$$M(1+i)^{n}+M(1+i)^{n-\frac{1}{12}}+M(1+i)^{n-\frac{2}{12}}+\cdots\cdots$$

$$+M(1+i)^{\frac{1}{12}}+fM=F \qquad \text{(第 18 式)}$$

此處之 f 爲一分數，而此分數亦可爲 1 或 0，故有如下之關係：

$$0 \leqq f \leqq 1$$

此第 18 式可依等比級數之理演化爲：

$$M\frac{(1+i)^{n+\frac{1}{12}}-(1+i)^{\frac{1}{12}}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=F-fM \qquad \text{(第 19 式)}$$

此式可分別應用於 $f=0$，即股票之滿期適在某次月款繳入之前，$f=1$。即股票之滿期適在某次月款全部繳入之後，及 $0<f<1$ 即股票之滿期須包括某次月款之一部份之三種情形。

若股票之滿期不在某次月款繳付之時，而在兩個繳款日期之間者，則第 18 式須改如下：

$$\{M(1+i)^{t}+M(1+i)^{t-\frac{1}{12}}+\cdots+M\}(1+i)^{\frac{f'}{12}}=F\cdots \qquad \text{(第 20 式)}$$

第 19 式則改如下：

$$M\frac{(1+i)^{t+\frac{1}{12}+\frac{f'}{12}}-(1+i)^{\frac{f'}{12}}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=F \qquad \text{(第 21 式)}$$

此式中之 t 即爲股票滿期所需之時期 n 中之全部整月月數所等之年數，而其 f' 則爲一月中之一部份時期，即自最後一期付款日至滿期日相距之時期是也。

玆設例說明計算利率之方法如下：

例——某房產放款合作社民國 22 年 8 月 15 日所發行之股票，在每月十五日繳入月款 \$1.00，積足 \$100.00 時爲滿期。今假定此股票於民國 29 年 2 月 15 日，第 79 次月款到期時，股東繳入月款 \$1.00 中之 \$.40 後即行滿期。問股東所得之實利率若干？

用第 19 式列如下之方程式以求 i 之值。

$$\frac{(1+i)^{\frac{79}{12}}-(1+i)^{\frac{1}{12}}}{(1+i)^{\frac{1}{12}}-1}=\$\,99.60 \qquad (A)$$

或
$$(1+i)^{\frac{79}{12}}-100.6(1+i)^{\frac{1}{12}}+99.60=0 \qquad (B)$$

此方程式可依連續近似值法解之。依上節之例一所得之結果，知上式中之實利率 i 較該例中之實利率(卽其名利率年息七釐，按月複利結算後所等之實利率)稍大。於是，

$$i>\left(1+\frac{.07}{12}\right)^{12}-1>0.072\text{。}$$

今若使(B)式中之 $i=.072+h$ 而求其 h。則(B)式成爲：

$$(1.072+h)^{\frac{79}{12}}-100.6(1.072+h)^{\frac{1}{12}}+99.6=0 \qquad (C)$$

將此(C)式依二項式定理展開之，僅留 h 一冪之各項，而略去其含有 h 二冪以上之各項(因 h 已爲一極小之數在小數點後三位以下，其二冪之積當在小數點六位以下，爲數更小，不必計及)，則得：

$$(1.072)^{\frac{79}{12}}+\frac{79}{12}(1.072)^{\frac{67}{12}}h-100.6(1.072)^{\frac{1}{12}}-\frac{100.6}{12}(1.072)^{-\frac{11}{12}}h$$
$$+99.6=0 \qquad (D)$$

或
$$1.58046+9.70584h-101.1845^{*}-7.86571h+99.6=0,$$
$$1.8401h-.0040=0,$$
$$h=.0022$$

於是 $i=.0742$，可以此代入(A)式中以核對之。

如欲求 i 之更近似數，可以 $i=.0742+h$ 代入(B)式中再依法求之。

如此連續計算，其結果所得 i 之近似值，將與 i 之正確數幾相等矣。

習 題 五

1. 某房產放款合作社民國 22 年 8 月 15 日發行之股票，在每月15日繳入月款 \$ 1.00 積足 \$ 100.00 時爲滿期。今假定此股票於民國 29 年 3 月 15 日第 80 次月款全數繳入之後卽

* 此項當用七位對數表計算之。

行滿期,問實利率若干?

2. 若題 1 之股票滿期在第 78.5 月之末者,問實利率若干?

3. 某房產放款合作社每股 $ 100.00 之股票,每月繳款 $ .50,設此股票滿期在第 11 年 6 月底第 139 次月款未曾繳入之時,問實利率若干?

第八節　借款人所付之利率

房產放款合作社之借款人,若將其每月所付之借款利息與每月所繳之股款,劃分清楚,則借款上所定之利率,即爲其所付利息之利率。但事實上,此借款人既同時爲投資人,則其每月所付之利息自不能與其所繳之股款分別計算。蓋借款人所投資之股份,殆與因清償其債務所設之償債基金無異,而此股份上之利息,又即爲其償債基金上所獲之利息也。

於是遂有利率高低比較之問題發生。所謂比較者,即向合作社依規定利率借款,而投資於該社股票以清償其債務,與向他處以較低之利率借款,而另外儲蓄於銀行中或投資於他種償債基金,以清償其債務相比較,孰爲合算之問題是也。茲設例說明其比較之情形如下。

例——某君欲建造房屋,需款 $ 100.00,可向房產放款合作社依年息七釐之名利率借得之,而認購該社所發行每股 $ 100.00,每月付款 $ 1.00,定於第 78 月後適當第79次月款繳入之後滿期之股票一股,作清償之用。若某君改自他處依名利率六釐,按月先付利息之辦法借款,而將其每月少付之數(即依合作社辦法每月所付之股款及利息總計減去依此辦法每月所付利息後之餘額),設立一償債基金,而獲得年息四釐每月複利之利息。問於 78 月之後,依合作社辦法較諸後一辦法能節省幾何?

解:依合作社辦法,某君每月所付之數爲 $ 1.5833。依後一辦法每月所付之利息爲 $ 0.50。故依後一辦法,每月可有 $ 1.0833 之餘款,依年息四釐每月複利之利息設一償債基金。至 78 月底第 79 次付款後,其償債基金之終價爲:

$$S=1.0833\frac{\left(1+\frac{.04}{12}\right)^{79}-1}{\frac{.04}{12}}=\$97.72$$

由此可知依後一辦法，某君須多付 \$2.28 以清償其借款，若依合作社辦法，則第 79 次月款繳入後，其借款卽已還清，故可較後一辦法節省 \$2.28。

以上所述，係向合作社借款與其他借款辦法相比較，孰爲合算之問題。設將借款人繳付合作社之股款及利息合併計算，以其每月付款總數作爲償還借款之本息，求此借款人借款上所實付之實利率若干。

假定：

F＝借款總額。

g＝借款上所規定之名利率。

M＝股票上每月應付之股款。

n＝股票滿期（卽借款還清）所需之年數。

i＝所欲求之借款人實付之實利率。

若股票之滿期適在某次月款繳入之後，則可依年金現價之公式得方程式如下：

$$\frac{Fg}{12}+M+12\left(\frac{Fg}{12}+M\right)a_{\overline{n}|}^{(12)}=F, \qquad \text{（第 22 式）}$$

或

$$a_{\overline{n}|}^{(12)}=\frac{12F-Fg-12M}{12(Fg+12M)}$$

以 $a_{\overline{n}|}^{(12)}$ 之值 $\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{12[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1]}$ 代入上式中，得：

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{12[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1]}=\frac{12F-Fg-12M}{12(Fg+12M)} \qquad \text{（第 23 式）}$$

用此方程式可依連續近似值法求得 i 之值。其連續近似值之求法，與上節所述者約略相仿。

若最後一期應付之款，並非平時所付月款之全部者，則上式亦當依上節方法稍加修改。

解第 23 式時，以應用七位對數表爲便，且較精確。

玆舉例示其計算法如下：

例一某人向一合作社依年息六釐之名利率及每月複利之辦法，借得現款 \$1,000.00，同時認購該社每股面額 \$100，月付 \$.50 之股票十股，於每月初繳入股款及借款利息各 \$5.00。此股票於 11 年 3 月，當第 136 次股款及利息全部付入後，卽行滿期。若每月全部付款，皆作爲付還其本息之辦法計算之，問實付之借款利率爲幾何？

解：依第 23 式列成方程式如下：

$$\frac{1-(1+i)^{-11\frac{1}{4}}}{12[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1]}=\frac{12,000-60-60}{12(60+60)}=8.25$$

或
$$1-(1+i)^{-11\frac{1}{4}}=99[(1+i)^{\frac{1}{12}}-1]$$

或
$$1-(1+i)^{-11\frac{1}{4}}-99(1+i)^{\frac{1}{12}}+99=0 \qquad (A)$$

觀習題四中第 1 題之結果，知本題所求之利率，當與 .06 相差無幾。故可假定

$i=.06+h$ 代入 (A) 式而得：

$$1-(1.06+h)^{-11\frac{1}{4}}-99(1.06+h)^{\frac{1}{12}}+99=0$$

再將此式依二項定理展開之，僅留其 h 之一冪各項，得：

$$1-(1.06)^{-11\frac{1}{4}}+11\frac{1}{4}(1.06)^{-12\frac{1}{4}}h-99(1.06)^{\frac{1}{12}}-\frac{99}{12}(1.06)^{-\frac{11}{12}}h$$
$$+99=0,$$
$$1-0.51917+5.51005\,h-99.48189-7.82090\,h+99=0,$$
$$-2.31085\,h-.00106=0,$$
$$h=-0.00046$$

於是得 $i=0.05954$。

習　題　六

1. 某甲需款 \$100.00，可向房產放款合作社依名利率年息七釐每月初付息一次之辦法借得之，同時認購該社所發行每股 \$100.00，每月初付款 \$1.00，定於第 78 月後適當第 79 次月款繳入之後滿期之股票一股，作淸償之用。若某甲改自他處依名利率年息六釐按月先付

利息之辦法借款，而將其每月少付之數、存入儲蓄銀行，依名利率年息四釐每半年複利計算，問於第 78 月之後，依合作社之辦法較諸後一辦法能節省幾何？

2. 若題 1 之存款改爲名利率年息四釐半每月複利計算，求依合作社辦法於 78 月底能節省幾何？

3. 某人向合作社依年息七釐每月複利之辦法借得現款 $ 1,200.00，而同時認購每股 $ 100.00，月付 $ 1.00 之股票 12 股，於每月初繳入股款 $ 12.00 及利息 $ 7.00，此股票於 78 月後第 79 次利息 $ 7.00 及第 79 次股款中之 $ 2.40 繳入後卽行滿期，若每月全部付款皆作爲付還本息之用計算之，問實付之借款利率爲幾何？

覆習題

1. 某人向合作社購股票 $ 2,000.00，於每月初繳入股款 $ 20.00，設此股票於 78 月底繳入第 79 次月款中之 $ 4.00 後，卽行滿期，問此人所獲得之利率幾何？

2. 某合作社在連續之幾期（每期爲半年）中之利益分派率，平均爲 .0324。問其利息之實利率約幾何？設其所發行每股 $ 100.00 之股票每月付款爲 $ 1.00，問此股票將於何時滿期？

3. 某一合作社之放款共計 $ 495,320，其放款利率爲名利率年息七釐每月複利計算，其放款中之 $ 45,000 係向銀行借來，所付之利息爲年息六釐每半年複利計算。設該社在某六個月期內付出營業費用共計 $ 725.00，於同期內收入退股利益 $ 462.00，入社費及罰款 $ 92.00。此期內之股票平均帳面價值爲 $ 452,235.00。今假定各項利息均於到期日付清，問本期之利益分派率應爲幾何？

4. 某人曾向合作社認購股票 $ 2,000.00，按月付款 $ 20，已繳款六十六次，今於股票之第 66 月底時，卽第 67 次付款到期之前一日，因有急用，欲提回其股款。若提回之數按逐月繳入之股款加年息六釐單利息後之本利合計，此項股票須於第 79 次月款繳入後滿期，問此時股票之退股價值與此股票之帳面價值相差幾何？今改按單利八釐之利息向他處借得現款以支付股票上以後應付之各期股款，至股票滿期日止；又設此人此時不復提回其股款而另向他處借得與退股價值相等之現款，俟股票滿期後償還之，則此時借款所能負擔之利率爲幾何？（註）

5. 某合作社規定股票之退股價值如下：退股社員得取得其所付股款之全部及此股款上依年息三釐計算至退股日止之單利息，再加此股份逐期分派所得利益之一部分。試依上列規定，解第 4 題所問之二點，並假定此股份乃依年息七釐每月複利之利率積算利益，而其退股社員所得分派者，爲其全部所積利益之 1/3。

6. 按第 4 題之情形，將股票之退股價值所計算之利率改爲單利五釐，試解此題。

7. 某人於每月初繳入合作社 $ 1，至 78 月後於第 79 次月款繳入後，可獲得一滿期股份 $ 100.00，問至滿期日止，此股份所得單利息之利率幾何？若此人所認票面 $ 100.00 之股票得於每月初繳入 $ .50 依年息七釐每月複利之名利率積算，則到期日止所得單利息之利率幾何？若後一辦法之單利率較前一辦法爲高，則後一辦法對於投資人是否較前一辦法爲優，並述理由。

（註）解此題時，可根據本章第 6 節例 1 之事實，例中之股票利息爲年息七釐，每月複利計算之名利率。

第十一章　機率之原理及其在保險中之應用

第一節　機率之意義

機率(Probability)者一事成敗機會之比率也。若將一事之成敗機會，分析爲 $r+s$ 個之可能方式，r 代表其成功方式之個數，s 代表其失敗方式之個數，而每一方式之機會，均屬同等，則其成功之機率爲 $\frac{r}{r+s}$，其失敗之機率爲 $\frac{s}{r+s}$。

茲以 p 代表一事之成功機率，q 代表一事之失敗機率，$t=r+s$ 代表一事成功失敗全體可能方式之總數，則依上述之定義，可以推演得下列各公式：

$$p=\frac{r}{r+s}=\frac{r}{t} \qquad \text{(第 1 式)}$$

$$q=\frac{s}{r+s}=\frac{s}{t} \qquad \text{(第 2 式)}$$

$$p+q=\frac{r}{r+s}+\frac{s}{r+s}=\frac{r+s}{r+s}=1 \qquad \text{(第 3 式)}$$

若上式中之 $S=0$，則 $t=r$，於是 $p=\frac{r}{r}=1$，$q=\frac{o}{r}=0$。反之若上式中之 $r=0$，則 $t=s$，於是 $p=\frac{o}{s}=0$，$q=\frac{s}{s}=1$。此其意義，卽謂事之必成者，其成功之機率爲 1，而其失敗之機率爲 0；事之必敗者，其成功之機率爲 0，而其失敗之機率爲 1。故 1 與 0 乃表示一事之必成必敗，或必不成必不敗，故含有確定之意義，而機率之分數，則表示一事成

敗可能性之程度,蓋含有或然之意義也。

上述定義中所謂成與敗者,卽指未來事件 (Future Events) 之出現,能否與希望相合之意。如望雨得雨,卽爲成功,望雨而不得雨,卽爲失敗。

又所謂每一方式之**機會同等** (Equally Likely) 者,其意卽謂各種**可能方式** (Possible Ways) 中之任何一式,皆有出現之**機會** (Chance) 且其機會相等,無所偏重。是故一事成敗之全體可能方式,必須分析至同一單位,然後始可計算其成敗之機率。

玆舉數例,以釋明機率成敗之意義。

例一: 投錢一枚求其陽面向上之機率。

一錢有陰陽二面,故其向上之一面,可爲陽面,亦可爲陰面,共有二種不同之方式,且陽面向上之方式與陰面向上之方式,皆爲其中之一。若此錢係任意投擲,而非故意放置,則其陰陽二面向上之機會相同,於是陽面向上之機率爲 $p=\frac{1}{2}$,而陰面向上 (卽陽面不向上) 之機率亦爲 $q=\frac{1}{2}$。

例二: 擲骰子一枚,求其擲得六點之機率,及其非爲六點之機率。

一骰子有同等之六面,每面出現之機會相等,而六點之一面,僅爲其六面中之一面,其他五面,皆非六點。故擲得六點之機率爲 $p=\frac{1}{6}$,擲得非六點之機率爲 $q=\frac{5}{6}$。

機率定義中之"機會同等"一詞,含有終久 (in the long run) 之意,卽一事須經過多次之長久試驗,使其成敗之各種方式,同有充分之出現機會,而機率所能表示者,卽經長久試驗後之最可靠的結果也。

例如投錢一枚,其陽面向上之機率爲 $\frac{1}{2}$,此非謂在二次試驗之中,必有一次陽面向上。但如經多次之長久試驗,則可發現陽面向上之次數,與陰面向上之次數,其比率約略相等。試驗之次數愈多,其比率之相

差愈小，卒至陽面向上之次數及陰面向上之次數，與試驗總次數之比例，各爲 $\frac{1}{2}$。

第二節 從大數觀察所得之機率

一錢連擲 n 次（n 假定爲一極大之數）與 n 個錢各擲一次，其結果大致相仿，卽陽面與陰面向上之機率，皆極近於 $\frac{1}{2}$。前法謂之多次試驗，後法謂之大數觀察。而兩法之性質，實相同也。凡事之可依多次試驗法，而定其機率者，固屬不少，但須用大數觀察法而始能定其機率者，確亦甚多。前節所舉投錢，擲骰諸事，固可以多次試驗而定其機率，但如人類之生死，人種之長度等事，則不能以同一人之生死長短作多次之試驗，而必需從大多數人中，加以觀察，然後始能求得一種機率，以表示其大概情形焉。

用大數觀察法以決定機率之方法如下：

"如有某一事件，在 n 起之情形中（n 爲一足以代表全體情形之大數）已有 m 起成功，則於未得更精確之統計資料以前，爲實際上之應用起見，不妨假定 $\frac{m}{n}$，爲該事件得以成功之最可靠的機率。若 n 之數更形增大，則此種機率之可靠性，亦必隨之而增高"。

用大數觀察法以決定機率，在統計及保險實務中，極有實用之價值。例如照美國經驗死亡表(American Experience Table of Mortality)上之統計，在生存至四十歲之 78106 人中，十年後，仍然生存者爲 69804 人，由此可知年屆四十歲之人，其得再生存十年之機率爲

$$p=\frac{69804}{78106}=.8937$$

第三節 對於金錢之期望

一人欲得某種價值，若其價值之金額爲 m，其可獲得之機率爲 p，則此人對於此價值之期望 (Expectation) 當爲 pm。易言之，以機率 p

乘金額 m，所得之積 pm 即表示一次試驗(one single trial)中所能得錢之期望。

例如有債券 100 張，每張 \$100，本期抽籤還本 10 張，則持有此種債券一張之人，所有對於本期抽籤還本之期望，即爲其債券能被抽中之機率 $\frac{10}{100}\left(\text{即}\ \frac{1}{10}\right)$ 乘其債券之價值 \$100 所得之積，即 $E=\frac{1}{10}\times 100$ $=\$10$ 是也。

習 題 一

1. 擲一骰子，求其得四點之機率。

2. 一囊中有白球十枚，黑球十五枚，任取一球，問其取出白球之機率爲若干？

3. 從一死亡表中查得年在十歲之 100,000 人中，其能生存至六十五歲者爲 49,341 人，今有一十歲之兒童，試問其能生存至六十五歲之機率幾何？

4. 根據卡爾皮爾孫 (Karl Pearson) 之統計，在某類成年人 1,078 人中，其長度在 66.5 英寸與 67.5 英寸之間者爲 148 人。試從此數字中估計任意指出一人，其長度在 66.5 英寸與 67.5 英寸間之最可靠的機率爲幾何？

5. 根據某年法國之生產統計，在所生之 787,446 嬰孩中，有 398,909 人爲男孩，388,537 人爲女孩。問從此數字中估計一將要出生之嬰孩，其爲男孩之最可靠的機率爲幾何？

6. 假如有一賭者，擲骰子以定勝負，彼若能於一粒骰子擲下時，擲出一點（以一次爲限），即可得 \$60.00，試問其未擲前之期望幾何？

7. 一身心健全之青年，在 21 歲前死亡之機率爲 $\frac{1}{2}$，試批評此項斷語。

第四節　二宗以上事件合做之方式總數

一事獨做，可分析其出現之方式中之成功與失敗之個數，而求得該事做成做敗之機率。諸事合做，其理亦然。玆分事件爲如下之三類，分別說明其合做而出現之方式之總數及其機率之計算方法。

(1)**互不相容事件**(Mutually Exclusive Events)　數事之不能同時成功者，稱曰互不相容事件。例如一囊中有紅球四枚，白球三枚，黑球二枚，任取一球，則取得紅球，取得白球，與取得黑球之三事即爲互不相容事件，因祇取出一球，故紅白黑三色之球，不能同時取出。

在互不相容諸事件中，其任何一事出現方式之總數，爲其中各事件數之和；而其中某幾事中任何一事出現之方式總數，爲該幾事之件數之和。如上例取出任何一球之方式總數，爲其中紅球4個，白球3個，及黑球2個之和，卽爲9。而取出一白球或黑球之方式總數，則爲其中白球3個與黑球2個之和，卽爲5。

今向該囊任取一球，求其爲白球或黑球之機率，則其可能方式之數爲9，而其成功方式之數爲5，故其機率卽爲 $p=\frac{5}{9}$。

(2)**獨立複合事件**(Independent Compound Events) 諸事之須聯合而成者，謂之複合事件。複合事件中各事之成敗，互不影響者，謂之獨立複合事件。例如甲囊中容紅球4枚，乙囊中容白球3枚，同時向二囊各取一球，則取得之二球，由甲囊之紅球與乙囊之白球相合而成，但向二囊取球之事，各不影響，故謂之曰獨立複合事件。

獨立諸事聯合出現之可能方式總數，爲其中各事之件數之乘積。如上例，甲囊中之紅球爲4，乙囊中之白球爲3，則向二囊同時各取一球，卽有 $4\times3=12$ 種之可能方式。其出現方式之全體情形如下：

聯合出現之方式	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
甲囊之紅球	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
乙囊之白球	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z

今如向該二囊同時各取一球，求其爲 B 紅球與 X 白球之機率，則其可能方式數爲12，其成功方式數爲1（卽上表中之第4式），故其機率卽爲 $p=\frac{1}{12}$。

(3)**相關複合事件**(Dependent Compound Events) 複合事件中諸事之成敗，互相關係者，謂之相關複合事件。例如置紅球四枚與白球三枚於同一囊中，則先後或同時取出二球之事，卽爲相關之複合事件，因紅白二種球既貯於同一囊中，則取出之二球，或皆爲紅球，或皆爲白

球;或爲一紅一白,與紅球白球分貯於二囊中之情形不同,故非爲獨立之複合事件,又因所取者爲二球,紅白兩種之球,可有聯合出囊之機會,與僅取一球之情形又不同,故亦非爲互相排斥之事件。

相關諸事聯合出現之方式總數可依其聯合之方式爲序列,或爲組合,分別計算之。

(甲)序列(Permutations) 將若干事物之全體或一部,更換其次序而排列之,其所成之方式,謂之序列。例如一囊中有 $A\,B\,C\,D$ 四球,先後取出二球,卽有如下12種之序列:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
第一球	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D
第二球	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C

若先後取出三球,有如下24種之序列:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
第一球	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B
第二球	B	B	C	C	D	D	A	A	C	C	D	D
第三球	C	D	B	D	B	C	C	D	A	D	A	C

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
第一球	C	C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D
第二球	A	A	B	B	D	D	A	A	B	B	C	C
第三球	B	D	A	D	A	B	B	C	A	C	A	B

若先後取出四球,則有如下24種之序列:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
第一球	A	A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	B
第二球	B	B	C	C	D	D	A	A	C	C	D	D
第三球	C	D	B	D	B	C	C	D	A	D	A	C
第四球	D	C	D	B	C	B	D	C	D	A	C	A

	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
第一球	C	C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D
第二球	A	A	B	B	D	D	A	A	B	B	C	C
第三球	B	D	A	D	A	B	B	C	A	C	A	B
第四球	D	B	D	A	B	A	C	B	C	A	B	A

上三圖所示之序列，其總數可依下法計算之：

(一)由四球中先後取出二球所成之序列：

取第一球可有 $ABCD$ 四種方式。

取第二球，因已有一球取出，故僅有三種方式。

以任何球為第一球時，其相隨而取出之第二球，皆可有三種不同之方式(如先取 A 球，再取出者可為 B 球 C 球或 D 球；先取 B 球，再取出者可為 A 球 C 球或 D 球等是)。

今取出第一球既有四種不同之方式，故先後取出二球，即有 $4\times3=12$ 種不同之方式。

(二)由四球中先後取出三球所成之序列：

取第一球，可有四種方式。

取第二球，因已有一球取出，尚有三種方式。

取第三球，因已有二球取出，僅有二種方式。

故先後取出三球共有 $4\times3\times2=24$ 種不同之方式。

(三)依上述原理由四球中先後取出四球所成之序列，共有 $4\times3\times2\times1=24$ 種。

茲以 ${}_nP_r$ 代表由 n 件不同事物中取出 r 件更換次序排列而成之序列數，則其第一次取出者，有 n 種方式，第二次取出者有 $n-1$ 種方式，至第 r 次取出者，有 $n-r+1$ 種方式，仿上例之理，得序列數之計算公式如下：

$${}_nP_r=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times(n-r+1) \quad (\text{第 4 式})$$

當 $r=n$ 時，上式卽成爲：

$$_nP_n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots2\times1 \qquad (第5式)$$

以 $n!$ 代表上式之右端，卽得：

$$_nP_n=n! \qquad (第6式)$$

$n!$ 爲 $n\times(n-1)\times\cdots\cdots\times2\times1$ 之簡寫，稱曰 1 至 n 之階乘數

例：囊中有紅球四枚，白球三枚，先後取出二球，求其皆爲紅球之機率。

解：囊中共有七球，由七球中先後取出二球之序列數，卽爲可能方式之數，其數爲 $_7P_2=7\times6=42$。

囊中共有紅球四枚，由四球中先後取出二球之序列數卽爲成功方式之數，其數爲 $_4P_2=4\times3=12$。

於是所求之機率，卽爲 $P=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$。

(乙)組合 (Combinations) 將若干事物之全體或一部結合成組，不計其組內各事物之次序者，謂之組合。例如一囊中有 $ABCD$ 四球，同時取出二球卽有如下 6 種之組合：

	1	2	3	4	5	6
組合內之二球	AB	AC	AD	BC	BD	CD

若同時取出三球，則有如下 4 種之組合：

	1	2	3	4
組合內之三球	ABC	ABD	ACD	BCD

若同時取出四球，則僅有一種組合，卽爲：

$$ABCD$$

以組合之圖式與序列之圖式相比較，可知將每一組合中所容各球再更換其次序而排列之，則其全式卽與序列之圖式相同。反之，若將序列中含有同樣之球各式，併爲一式，則其全式卽與組合之圖式相同。

茲以 ${}_nC_r$ 代表由 n 件不同事物中取出 r 件結合而成之組合數，則其計算公式卽可依計算序列之公式推得之如下：

$$ {}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{{}_rP_r} \qquad \text{(第 7 式)}$$

以 $${}_nP_r=n\times(n-1)(n-2)\times\cdots\cdots(n-r+1)$$

及 $${}_rP_r=r\times(r-1)(r-2)\times\cdots\cdots\times2\times1=r!$$

代入之得： $${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r!} \qquad \text{(第 8 式)}$$

將上式之分子分母同乘 $(n-r)!$

〔註：$(n-r)!=(n-r)\times(n-r-1)\cdots\cdots\times2\times1$〕

卽得 $${}_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad \text{(第 9 式)}$$

於是由四球中同時取出二球之組合數爲：

$${}_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

由四球中同時取出三球之組合數爲：

$${}_4C_3=\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4$$

由四球中同時取出四球之組合數爲：

$${}_4C_4=\frac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}=1$$

於此又知當 ${}_nC_r$ 中之 $r=n$ 時。

$${}_nC_n=1 \qquad \text{(第 10 式)}$$

且在 $r=1$ 時：

$${}_nC_1=n \qquad \text{(第 11 式)}$$

例：一囊中有紅球四枚，白球三枚，同時取出二球，求其皆爲紅球之機率：

解：囊中共有球七枚，由七球中同時取出二球所成之組合數，爲可能方式之數，其數爲

$${}_7C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

囊中共有紅球四枚，由四球中同時取二球所成之組合數，爲成功方式之數，其數爲

$$_4C_2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

於是所求之機率卽爲

$$P=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

（丙）類列（Permutations of Same and Different Things）　將 n 件事物（其中有相同者亦有不相同者），依其異同分爲若干類，其各類之件數爲 r_1, r_2, r_3 及 r_r 等 $(r_1+r_2+r_3+\cdots\cdots+r_r=n)$，再將其不同類者，更換次序所成之排列，謂之類列。例如 $AABC$ 四字可排成如下 12 種不同之類列：

（1）$AABC$　（2）$AACB$　（3）$ABAC$　（4）$ACAB$

（5）$ABCA$　（6）$ACBA$　（7）$BCAA$　（8）$CBAA$

（9）$BACA$　（10）$CABA$　（11）$BAAC$　（12）$CAAB$

類列與序列不同，蓋序列中所包含者爲各別之事物，而類列中所包含者，則有同類之事物也。$AABC$ 四字作類列時，其 A 與 A 相同，不再改換次序，但作序列時，其中之 A 與 A 當分別爲 A_1 與 A_2 更次排列之，於是上列各類列皆可化成二個序列。故類列之公式亦可自序列之公式化得之。

玆以 $_nK_{r_1\cdots r_r}$ 代表 n 件事物之類列數。

$r_1\,r_2\,r_3\cdots r_r$ 爲其中各類事物之件數，其總數等於 n。

基於上述原理，得計算類列之公式如下：

$$_nK_{r_1\cdots r_r}=\frac{_nP_n}{_{r_1}P_{r_1}\cdot{}_{r_2}P_{r_2}\cdots{}_{r_r}P_{r_r}}=\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_r!}\qquad(\text{第 12 式})$$

例如 $AABC$ 四字排成之類列數卽爲：

$$_4K_{2\cdot1\cdot1}=\frac{4!}{2!\;1!\;1!}=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times1\times1}=12_{\circ}$$

又如 $AABBCEEE$ 八字排成之類列數卽爲：

$$ {}_{8}K_{2\cdot 2\cdot 1\cdot 3}=\frac{8!}{2!2!1!3!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1\times1\times3\times2\times1}=1680 $$

習題二

1. 某甲有鞋三雙，襪五雙，帽二頂。欲每日更換穿法一次，問有幾種不同之穿法。

2. 置黑白球各一枚於甲囊中，置紅綠球各一枚於乙囊中，若同時向二囊中各取一球，問有幾種不同之取法?

3. 若黑白紅綠四球置於同一囊中，而同時取出二球，問有幾種不同之取法?

4. 一囊中有紅綠黑白之球各四枚，問取出任何一球之方式有幾種? 取出紅球之方式有幾種?取出紅球之機率幾何?

5. 擲骰子二粒得十二點之機率幾何?得七點之機率幾何?

6. 二骰子同時擲下，所得之點共有幾種不同之形式?(如甲骰子爲五點，乙骰子爲二點，與甲骰子爲二點，乙骰子爲五點，則爲同一形式，祇能算作一種。)

7. 將銅元三枚合擲之可得幾種不同之形式? 成二陰面與一陽面之形式共有幾種?得二陰一陽之機率幾何?

8. 從十二人中選出四人，組成一委員會，問有幾種不同之組織?

9. 某甲有友九人，常邀請四友開一聚餐會，欲使所邀之四友各次並不全同，問可開幾次聚餐會?

10. 試證明 ${}_{n}C_{r}={}_{n}C_{n-r}$

11. 從六英人，與三美人中選出五人組成一委員會，若其中至少有二美人爲會員，問可組織幾個委員會，會中人選不致完全相同。

12. 五人同時進入某一影戲院，適該院第一排座位全空，計有座位七張，問有幾種不同之入座方式?

13. 茲有 $ABCDE$ 五字，求其(1)三字一組之序列數，(2)四字一組之序列數，及(3)五字一組之序列數。

14. 有甲乙丙三搖號機，其中各容自 0 號至 9 號之號碼球十枚。今定自甲機搖出者爲首號，即百位數，乙機搖出者爲中號，即十位數，丙機搖出者爲末號即單位數，問可以搖出幾種不同之號碼?

15. 一囊中有白球五枚，黑球六枚，紅球三枚，若任意取出五球，求其爲二白球一黑球及二紅球之機率。

16. 一囊中有白球五枚，黑球六枚，紅球三枚，先後取出，求其爲先取五白球次取六黑球後取三紅球之機率。

第五節　二宗以上事件之機率

合做二宗以上事件，所有諸種方式之數目，經算出後，即可分析其

方式爲成爲敗，而計算其事之成敗機率，已如上節所述。但二宗以上事件之成敗機率，亦可由其各別事件之機率求得之。玆仍依事件之種類，分別說明之如下：

(1)互不相容事件　在互不相容之諸事中，其任何一事之成功機率，爲其中各事單獨成功之機率之和。

設 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 爲 n 宗互不相容事件中各事單獨成功之各個機率。p 爲其中任何一事成功之機率，則

$$p=p_1+p_2+\cdots+p_n \qquad \text{(第 13 式)}$$

例：一囊中有紅球四枚白球三枚黑球二枚，任取一球，求其爲白球或黑球之機率。

解：取出白球之機率爲 $p_1=\frac{3}{9}$

取出黑球之機率爲 $p_2=\frac{2}{9}$

取出白球或黑球之機率爲 $p=p_1+p_2=\frac{3}{9}+\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$。

(2)獨立複合事件　諸宗獨立事件同時成功之機率，等於其中各事單獨成功之機率之積。

設 $p_1\ p_2 \cdots\cdots p_n$ 爲 n 宗事件中各事單獨成功之各個機率。p 爲 n 宗事同時成功之機率，則

$$p=p_1\times p_2\times\cdots\cdots\times p_n \qquad \text{(第 14 式)}$$

例：甲囊中有 $ABCD$ 四紅球，乙囊中有 XYZ 三白球，今任意向二囊各取一球，求其爲 B 紅球與 X 白球之機率。

解：取出 B 紅球之機率爲 $p_1=\frac{1}{4}$

取出 X 白球之機率爲 $p_2=\frac{1}{3}$

同時取得 B 紅球與 X 白球之機率爲

$$p=p_1\times p_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$$

同理，n 件事同時俱敗之機率爲各事單獨失敗之機率之積，即

$$p=(1-p_1)\times(1-p_2)\times\cdots\cdots\times(1-p_n) \qquad (第15式)$$

例：甲囊中有 $ABCD$ 四紅球，乙囊中有 XYZ 三白球，若任意向二囊各取一球，求其不爲 B 紅球亦不爲 X 白球之機率。

解：由甲囊中取出之球不爲 B 紅球之機率爲

$$(1-p_1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

由乙囊中取出之球不爲 X 白球之機率爲

$$(1-p_2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

同時取出之二球不爲 B 紅球亦不爲 X 白球之機率爲

$$p=(1-p_1)\times(1-p_2)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{12}$$

同理，n 件事中前 r 事俱成而其他各事俱敗之機率爲：

$$p=p_1\times p_2\times\cdots\times p_r\times(1-p_{r+1})\times(1-p_{r+2})\times\cdots$$
$$\times(1-p_n) \qquad (第16式)$$

例：甲囊中有 $ABCD$ 四紅球，乙囊中有 XYZ 三白球，若任意向二囊中各取一球求其爲 B 紅球，但非爲 X 白球之機率。

解：由甲囊中取出 B 紅球之機率爲

$$p_1=\frac{1}{4}$$

由乙囊中取出非 X 白球之機率爲

$$(1-p_2)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

同時取出 B 紅球但非 X 白球之機率爲

$$p=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{12}$$

仿此：同時取出非 B 紅球但爲 X 白球之機率爲

$$p=(1-p_1)\times p_2=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{12}$$

(3) 相關複合事件　諸宗相關事件連續依次俱成之機率，等於其中

各事單獨依次成功之機率之積。

在一組相關之事件中，若其第一事成功之機率爲 p_1，於此事成功之後，其第二事成功之機率爲 p_2……以至第 n 事成功之機率爲 p_n，於是自第一至第 n 宗事依次連續而成之機率即爲：

$$p=p_1\times p_2\times\cdots\cdots\times p_n \qquad (\text{第 17 式})$$

例：囊中有紅球四枚，白球三枚，任意取出二球，求其皆爲紅球之機率。

解：取出第一個紅球之機率爲 $p_1=\frac{4}{7}$，但第一個紅球取出之後，囊中尚有紅球三個與白球三個，故取出第二個紅球之機率爲 $p_2=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

所以取出二個紅球之機率爲 $p=p_1\times p_2=\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$

同理，n 宗事依次俱敗之機率爲

$$p=(1-p_1)\times(1-p_2)\times\cdots\cdots\times(1-p_n) \qquad (\text{第 18 式})$$

又前 r 宗事俱成而其他各事俱敗之機率爲

$$p=p_1\times p_2\times\cdots\cdots\times p_r\times(1-p_{r+1})\times(1-p_{r+2})\times\cdots\cdots\times(1-p_n) \qquad (\text{第 19 式})$$

例：應用上例，求取出之二球皆非紅球之機率，及一爲紅球一爲白球之機率。

解(A)：取出第一個球非爲紅球之機率爲

$$1-p_1=1-\frac{4}{7}=\frac{3}{7}$$

取出第二個球又非紅球之機率爲

$$1-p_2=1-\frac{4}{6}=\frac{2}{6}$$

二球俱非紅球之機率爲

$$p=(1-p_1)\times(1-p_2)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{42}=\frac{1}{7}$$

(B)：取出一紅一白之機率爲先取紅球次取白球之機率與先取

白球次取紅球之機率之和：

先取紅球次取白球之機率爲

$$p=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

先取白球次取紅球之機率爲

$$p=\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$$

取出一紅球與一白球之機率爲

$$p=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$$

本節所舉之例可與上節之例互相參證。

習 題 三

1. 擲一骰子求得一點，或二點或三點之機率。

2. 擲二骰子求得三點之機率。

3. 擲三骰子求得三點之機率。

4. 在今後二十年中，甲能生存之機率爲 $\frac{3}{5}$，乙能生存之機率爲 $\frac{1}{3}$，求 (A) 甲乙二人在此二十年中皆能生存之機率，(B) 甲生存而乙死亡或甲死亡而乙生存之機率，及 (C) 甲乙二人俱死之機率。

5. 求投四錢得二陰二陽之機率。

6. 擲二骰子，求得七點之機率。

7. 一搖號機中有 3 字號球五個，2 字號球二個，1 字號球七個，先後搖出三球，求其爲 333 號之機率。

8. 一囊中有白球五個，黑球八個，紅球六個，任意取出三球，求其爲二黑球與一紅球之機率。

9. 從四美人五華人五英人中任選三人組織委員會，求其中之委員爲 (1) 美人華人英人各一，(2) 三英人，(3) 一美人與二華人之各機率。

第六節　由一次至 r 次之成功機率

已知某事件於一次試驗中所得成功之機率，則在 n 次試驗中，其得成功一次，二次或若干次之機率，即可直接求出。

今設 p 爲某事件於一次試驗中之成功機率，則 $1-p=q$ 即爲該事於

一次試驗中之失敗機率；設於 n 次試驗中，該事件成功 r 次，而失敗 $n-r$ 次，於是可得在 n 次試驗中，該事件依一定之次序先後成功 r 次與失敗 $n-r$ 次之機率爲 p^rq^{n-r}。若該事件成功 r 次與失敗 $n-r$，並不以一定之次序爲限，即在 n 次試驗中，任何 r 次之成功，皆可合格，則其成功之方式爲一組合數 ${}_nC_r$，即在 n 次試驗中有 ${}_nC_r$ 種之 r 次成功，故該事於 n 次試驗中，成功 r 次(亦即失敗 $n-r$ 次)之機率爲：

$$P={}_nC_rp^r(1-p)^{n-r}={}_nC_rp^rq^{n-r} \qquad \text{(第 20 式)}$$

例：一銅元連擲五次，求其三次陽面向上之機率。

解：一銅元陽面向上與陰面向上之機率，皆爲 $\frac{1}{2}$。

在五次試驗中，有三次陽面向上，其餘二次爲陰面向上，其依指定之次序(如前三次陽面向上，後二次陰面向上)而成之機率爲

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{32}$$

今五次試驗中陽面向上三次之方式有 ${}_5C_3=10$ 種。

故所求之機率當爲 $\frac{10}{32}$。

此即 $P={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$ 是也。

一件事作 n 次之試驗，其結果常與 n 件同樣之事合作一次之試驗相同，其公式亦能同樣應用。如五銅元合擲一次，其三枚陽面向上之機率亦爲

$$P={}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$$

若求一事在 n 次試驗中，至少成功 r 次　則其成功之機率當爲成功 n 次，成功 $n-1$ 次，成功 $n-2$ 次……以至成功 r 次之各機率之和其式爲：

$$P=p^n+{}_nC_{n-1}p^{n-1}q+{}_nC_{n-2}p^{n-2}q^2+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_rp^rq^{n-r} \qquad \text{(第 21 式)}\binom{\text{註一}}{\text{註二}}$$

若 $r=1$，卽至少成功一次，則其所求者除全體失敗之一次外，餘皆相合。於是

$$P=1-q^n \qquad (第22式)$$

反之，如在 n 次試驗中至少成功 n 次，卽每次皆得成功之機率，爲：

$$P=p^n \qquad (第23式)$$

例：三銅元同時擲下，求其至少有二陽面向上之機率。

解：向上之三面均爲陽面之機率爲

$$p^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}。$$

向上之三面，二面爲陽面一面爲陰面之機率爲：

$${}_3C_2p^2q=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$$

所以至少有二陽面向上之機率爲

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

此卽

$$P=p^3+{}_3C_2p^2q=\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

習　題　四

1. 一囊中有四白球，九黑球，任取四球，求其(A)爲四白球之機率，及其(B)爲二白球二

(註一)公式中之第一項應爲 ${}_nC_n\,p^n\,q^0$，因 ${}_nC_n=1$，$q^0=1$，故僅書 p^n。

(註二) 1，${}_nC_{n-1}$，${}_nC_{n-2}$，…各數爲二項式乘方係數，與 1，${}_nC_1\,{}_nC_2$…等相同。其任何一項之數可自左表中查得之。如 ${}_5C_3=10$ 卽爲左表中 $n=5$ 行中之第四數。又如 ${}_9C_8=9$ 卽爲左表中 $n=9$ 行中之第9數。故知 ${}_nC_r$ 爲二項式 n 乘方展開式中之第 $r+1$ 項之係數。

$n=0$	1
$n=1$	$1+1$
$n=2$	$1+2+1$
$n=3$	$1+3+3+1$
$n=4$	$1+4+6+4+1$
$n=5$	$1+5+10+10+5+1$
$n=6$	$1+6+15+20+15+6+1$
$n=7$	$1+7+21+35+35+21+7+1$
$n=8$	$1+8+28+56+70+56+28+8+1$
$n=9$	$1+9+36+84+126+126+84+36+9+1$

黑球之機率。

2. 七錢同時擲下,求其(A)三個陰面向上,四個陽面向上之機率;及(B)至少有一個陽面向上之機率。

3. 求擲三骰子得十點之機率。

4. 求擲二骰子得六點之機率。

5. 十錢同時擲下,求其皆爲陽面向上之機率。

6. 在五百張獎券之中,有千元獎三張,百元獎五張,五十元獎十張,二十元獎二十張,餘則無獎,問持有此種獎券一張之人其得獎之希望額幾何?

7. 有一問題,甲能解答之機率爲 $\frac{1}{2}$,乙能解答之機率爲 $\frac{2}{3}$。問二人皆能解答之機率幾何?二人皆不能解答之機率幾何。

第七節　保險之意義

一人之生命財產難免有不測之災。壽盡而亡,固無論矣,夭殤老殘水火竊盜以及其他種種危險,亦隨時有遭遇之可能。此種危險,若不先事預防,則一旦遭遇,必使其自身,其家庭,或其事業蒙受重大之影響與損失。保險(Insurance)者,卽所以預防此種危險者也。夫危險非因保險而全滅,亦非因保險而減少。保險以後與保險以前,其危險之程度猶是,所不同者,因危險所生之損害,可以平均分配於多數人之間,而有減輕其痛苦之效耳。故凡可以保險之危險,須爲多數人所同患者,亦須爲可以計算而平均分配者。此種危險之種類甚多,如死亡老殘水火竊盜等皆是。故保險有壽險(Life Insurance)、水險 (Marine Insurance)、火險 (Fire Insurance)等多種。至於危險之計算與分配,則須應用統計學與數學中之大數觀察及機率二種原理。考各種危險之中,以人生之死亡爲不可避免者,且其關係遍及各人,故本書此後各章,卽以壽險中之數學原理與計算方法,爲硏究之對象,至於其他各種保險,則不述焉。

第八節　生死機率與生存死亡表

人類生存與死亡之機會的比率,稱曰生死機率。此項機率,由大數觀察而得。譬如年二十歲者 92637 人中,在一年內若有 723 人死亡,則

二十歲者在一年內死亡之機率，即為

$$p=\frac{723}{92637}=.0078$$

而一年內猶得生存之機率，為

$$1-p=1-0.0078=0.9922$$

生死機率為實用機率之一種，舉凡生存年金，壽險保費，壽險準備金等之計算均須應用之。

依大數觀察所得各組年齡之生死機率，順序排列，並以最初年齡之生存人數（常為一極大之整數）為基數（Radix）按年列出其此後逐年死亡與生存之人數，由此編成之表，稱曰生存死亡表，或簡稱死亡表（Mortality Table）。

保險事業在我國尚屬幼稚，故死亡表尚未有人編製，現今我國保壽公司計算保費時所用之生死機率，均依外國之死亡表為根據，再加以相當之修正。美國經驗死亡表（American Expierance Table of Mortality）在美國保險業中，應用甚廣，本書中關於生死機率之計算，即以此表為標準。下式所示者，僅其中之一部份，至其全表則列入本書用表中（見用表 XV）。

美國經驗死亡表

年齡 x	年初生存人數 l_x	年內死亡人數 d_x	每年死亡機率 q_x	每年生存機率 p_x
10	100,000	749	.007490	.992510
11	99,251	746	.007516	.992484
12	98,505	743	.007543	.992457
13	97,762	740	.007569	.992431
14	97,022	737	.007596	.992404
15	96,285	735	.007634	.992366
	…………	……	…………	…………
88	2,146	744	.346692	.653308
89	1,402	555	.395863	.604137
90	847	385	.454545	.545455
91	462	246	.532466	.467534
92	216	137	.634259	.365741
93	79	58	.734177	.265823
94	21	18	.857143	.142857
95	3	3	1.000000	.000000

計算生死機率時，通常應用下列各符號：

x 年齡

(x) 年齡 x 歲之人

l 年初生存人數

l_x 活到 x 歲之生存人數

d 年內死亡人數

d_x 在 x 歲至 $x+1$ 歲一年內之死亡人數

p 生存機率

q 死亡機率

p_x (x)至少尚活一年之機率

q_x (x)在一年內死亡之機率

${}_np_x$ (x)至少尚活 n 年之機率

$/_nq_x$ (x)在 n 年內死亡之機率

${}_n/q_x$ (x)在 $x+n$ 歲至 $x+n+1$ 歲一年內死亡之機率。

(y) 年齡 y 歲之人

p_{xy} (x)與(y)兩人至少尚活一年之機率

${}_np_{xy}$ (x)與(y)兩人至少尚活 n 年之機率

${}_np_{x/y}$ (x)與(y)至少有一人尚活 n 年之機率

習　題　五

試根據本書用表 XV 美國經驗死亡表中之生死機率，用一萬個二十歲人為基數，編製一由二十歲至九十五歲之死亡表。

第九節　l_x, d_x, p_x 及 ${}_xq$ 間之關係

l_x 代表年齡為 x 歲之生存人數，d_x 代表自 x 歲至 $x+1$ 歲一年內之死亡人數，則 l_x 與 d_x 之間，即有下式之關係：

$$d_x=l_x-l_{x+1} \qquad \text{(第 24 式)}$$

或

$$l_{x+1}=l_x-d_x \qquad \text{(第 25 式)}$$

依此類推，任何連續數年內之死亡人數，即可自死亡表中，將期初之生存人數減去期末之生存人數而求得之。今若以 n 代表年數，則自 x 歲與 $x+n$ 歲間 n 年內之死亡人數當為：

$$l_x-l_{x+n}=d_x+d_{x+1}+d_{x+2}+\cdots\cdots+d_{x+n-1} \qquad \text{(第 26 式)}$$

當 $x+n$ 超過死亡表上之最高年齡時，則於其期末，當無一人生存，於是

$$l_{x+n}=0$$

而第 26 式亦即變為：

$$l_x=d_x+d_{x+1}+d_{x+2}+\cdots\cdots+\text{至表末} \qquad \text{(第 27 式)}$$

上式之意義，甚為簡明，因每人必有一死，故年齡為 x 歲之生存人數，最後必將全體死去。換言之，年齡為 x 歲之生存人數，必等於自該 x 歲起至表末無復有人生存時止，其間逐年所死人數之總和也。

又因 p_x 代表 (x) 至少能生存至 $x+1$ 歲之機率，q_x 代表 (x) 在 x 歲至 $x+1$ 歲一年內死亡之機率，於是

$$p_x=\frac{l_{x+1}}{l_x} \qquad \text{(第 28 式)}$$

$$q_x=\frac{d_x}{l_x} \qquad \text{(第 29 式)}$$

$$p_x+q_x=1 \qquad \text{(第 30 式)}$$

習 題 六

試根據美國經驗死亡表核對下列各式：

(1) $l_{10}-l_{15}=d_{10}+d_{11}+d_{12}+d_{13}+d_{14}$

(2) $l_{89}=d_{89}+d_{90}+d_{91}+\cdots\cdots+\text{至表末}$

(3) $p_{13}=\dfrac{l_{14}}{l_{13}}$

(4) $q_{13}=\dfrac{d_{13}}{l_{13}}$

(5) $p_{12}+q_{12}=1$

(6) $p_{90}+q_{90}=1$

第十節 ${}_np_x$，${}_{|n}q_x$ 及 ${}_{n|}q_x$ 之意義

符號 ${}_np_x$ 既用以代表 (x) 至少得再生存 n 年之機率，亦即代表 (x)

至少能活至 $x+n$ 歲之機率，故其公式當爲：

$$ {}_np_x=\frac{l_{x+n}}{l_x} \qquad \text{(第 31 式)}$$

此(x)得再生存 n 年之機率 ${}_np_x$，亦可視作一組合事件之機率，卽爲(x)生存一年，$(x+1)$生存一年，$(x+2)$生存一年……及$(x+n-1)$生存一年各事依次連續而成之機率是也。故依本章第 17 式之例亦可求得 ${}_np_x$ 之公式爲：

$$ {}_np_x=p_xp_{x+1}p_{x+2}\cdots\cdots p_{x+n}$$

$$=\frac{l_{x+1}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+2}}{l_{x+1}}\cdot\frac{l_{x+3}}{l_{x+2}}\cdots\cdots\frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}}=\frac{l_{x+n}}{l_x}$$

又符號 $|{}_nq_x$ 旣用以代表(x)將於 n 年內死亡之機率，故其公式當爲：

$$|{}_nq_x=\frac{d_x+d_{x+1}+d_{x+2}+\cdots\cdots+d_{x+n-1}}{l_x} \qquad \text{(第 32 式)}$$

再以第 26 式 $l_x-l_{x+n}=d_x+d_{x+1}+d_{x+2}+\cdots\cdots+d_{x+n-1}$ 代入上式，卽得：

$$|{}_nq_x=\frac{l_x-l_{x+n}}{l_x} \qquad \text{(第 33 式)}$$

又得 $$|{}_nq_x=1-\frac{l_{x+n}}{l_x}=1-{}_np_x \qquad \text{(第 34 式)}$$

及 $${}_np_x=1-|{}_nq_x \qquad \text{(第 35 式)}$$

至於符號 ${}_n|q_x$ 旣用以代表(x)於其生存到 $x+n$ 歲後，在 $x+n$ 歲至 $x+n+1$ 歲一年內死亡之機率，於是其公式當有三式如下：

$${}_n|q_x=\frac{d_{x+n}}{l_x} \qquad \text{(第 36 式)}$$

$${}_n|q_x=\frac{l_{x+n}-l_{x+n+1}}{l_x} \qquad \text{(第 37 式)}$$

$${}_n|q_x={}_np_x-{}_{n+1}p_x \qquad \text{(第 38 式)}$$

習　題　七

1. 問一十歲之小孩，將於自十三歲至十四歲之一年內死亡之機率爲幾何？
2. 問一十歲之小孩，將於三年內死亡之機率爲幾何？
3. 問一四十歲之人，將於三年內死亡之機率爲幾何？

4. 問一四十歲之人，將於四十三歲一年內死亡之機率爲幾何？

5. 求下列各機率：

(1) ${}_{15}p_{30}$ (2) ${}_{5}p_{40}$ (3) $|{}_{10}q_{35}$ (4) $|{}_{5}q_{40}$ (5) ${}_{5|}q_{30}$ (7) ${}_{10|}q_{25}$

6. 根據美國經驗死亡表核對下列公式：

$$ {}_{10|}q_{25} = {}_{10}p_{25} - {}_{11}p_{25} $$

第十一節　共同生存之機率

(x)（即一x年歲之人）與(y)（即一y年齡之人）二人，至少能共同生存一年之機率，可以 p_{xy} 代表之。此二人（或若干人）共同生存一年之機率（或共同死亡之機率），實爲一組獨立複合諸事同時俱成（或同時俱敗）之機率，因此可依本章第 14 式之例，得此種機率之公式如下：

$$ p_{xy} = p_x p_y = \frac{l_{x+1} l_{y+1}}{l_x l_y} \qquad \text{（第 39 式）} $$

此公式通常寫爲：

$$ p_{xy} = \frac{l_{x+1:y+1}}{l_{xy}} \qquad \text{（第 40 式）} $$

其中 l_{xy} 即爲年齡爲 x 歲者之生存人數與年齡爲 y 歲者之生存人數之乘積。

同理(x)與(y)二人之共同生存 n 年之機率當爲：

$$ {}_np_{xy} = {}_np_x \cdot {}_np_y \qquad \text{（第 41 式）} $$

若以生存之人數表示之，其式即爲：

$$ {}_np_{xy} = \frac{l_{x+n:y+n}}{l_{xy}} \qquad \text{（第 42 式）} $$

至於 ${}_np_{x/y}$，則爲(x)與(y)至少一人尙得生存 n 年之機率，爲(1)二人共同生存 n 年，(2)(x)生存 n 年而(y)在 n 年內死亡，及(3)(y)生存 n 年而(x)在 n 年內死亡之三機率之和，故其公式卽爲：

$$ {}_np_{x/y} = {}_np_{xy} + {}_np_x(1 - {}_np_y) + {}_np_y(1 - {}_np_x) $$

$$ = {}_np_{xy} + {}_np_x - {}_np_x \cdot {}_np_y + {}_np_y - {}_np_x \cdot {}_np_y $$

但

$$ {}_np_{xy} = {}_np_x \cdot {}_np_y $$

故

$$ {}_np_{x/y} = {}_np_x + {}_np_y - {}_np_x \cdot {}_np_y \qquad \text{（第 43 式）} $$

習　題　八

1. 根據美國經驗死亡表上之數字,計算: $p_{12\cdot13}$ 及 ${}_5p_{30\cdot40}$

2. 設有甲乙二人,甲年四十五歲,乙年四十歲,試根據美國經驗死亡表計算下列各種機率:

(*a*)二人在一年內共同生存之機率

(*b*)二人在十年內共同生存之機率

(*c*)二人在第一年內共同死亡之機率

(*d*)在第一年中,甲生存而乙死亡之機率

(*e*)在第一年中,乙生存而甲死亡之機率

複　習　題

(題中計算時所應用之生死機率,爲美國經驗死亡表中之數)

1. 有一年屆三十歲之人,試求其下列之生死機率(計算至有效小數三位爲止)。

(*a*)將於四十歲至四十一歲一年間死亡之機率

(*b*)將於四十歲至五十歲十年間死亡之機率

先以符號列成算式,然後計算其數字。

2. 證明 ${}_3p_x=p_x\cdot p_{x+1}\cdot p_{x+2}$

3. 求三十歲四十歲五十歲之三人將共同生存十年之機率。(計算至有效小數三位爲止)。

4 今有小孩五人,各人之年齡均爲十歲。問五人共同生存到二十一歲之機率幾何?其中四人得生存到二十一歲之機率幾何?

5. 今有夫婦二人,在結婚時夫年爲三十歲,妻年爲二十五歲,問二人自結婚時起,共同生存五十年(卽至夫年爲八十妻年爲七十五時)之機率幾何?問其中至少有一人得自結婚時起再生存五十年之機率幾何?

6. 設有二人,一年十八歲,一年二十二歲,求:

(*a*)二人將再共同生存十年之機率。

(*b*)至少有一人將再生存十年之機率。

7. 用 p_x 與 q_x 寫出下列二種機率之算式:

(*a*)在年齡爲 x 之一千人中,將有十人於一年內死亡之機率。

(*b*)在年齡爲 x 之一千人中,將有十人或不及十人於一年內死亡之機率。

8. 有甲乙丙丁戊五人,年齡皆同,問其將依甲,乙,丙,丁,戊之次序先後死亡之機率若何?

9. 根據某種房屋之火災損失所作之統計,得知此種房屋 1,000,000 幢中,每年約計有 1,000 幢於遭火時全部焚去,今有此種房屋一幢,問其將於一年內全部被火焚去之機率幾何?如此幢房屋之主人將此屋保險,一年保額爲 $ 10,000,規定於全部損失時始得由保險公司照數賠償,問此人之期望賠款額幾何?

10．根據某種房屋之火災損失所作之統計，得知此種房屋 1,000,000 幢中，每年約計有 1,000 幢於遭火時全部焚去，又有 3,000 幢遭受一部份損失。又知一部份損失時所損失之價值，約佔全部損失時所損失者之 $\frac{1}{3}$。問此種房屋於一年中遭受一部份損失之機率幾何？其全部損失之機率幾何？今有此種房屋一幢，保險一年，保額為 \$ 10,000，規定照損失之成數比例賠償，問此屋之主人之期望賠款額幾何？

11．一工程師在一年中工作 312 天。如任何一日可以遭遇危險之機率為 $\frac{1}{1200}$，問該工程師在全年工作期中完全不遭危險之機率幾何？（本題應用對數）

12．根據年久所得之經驗，在每次航行出口之一百隻船中，平均有一隻船遇險被毀，今有五船出口。問（一）全數安全到達，（二）四船安全到達之機率各為幾何？

第十二章　生存年金

第一節　計算之要素

日後支付之某一金額，按某項利率計算，所求得之現在價值，稱曰該項金額之現價 (Present Value)，其現價之大小，當隨所計利率之高低而定。

該項金額之支付亦有附以條件者，例如日後到期時，須其受款人仍舊生存，方可付給約定之金額者是。在此種例內，其金額之現價，當依其所計利率，及其受款人得生存至付款時之機率而定。例如有甲乙二人，甲年 20 歲乙年 90 歲，今如各人能於 5 年之後，卽甲至 25 歲乙至 95 歲時，仍然生存者，可各得現金一百元，則此百元之現價，在年輕之甲當較在年高之乙爲大，因在此五年之內，乙之死亡率較甲爲高，所以於五年之後，得此百元之希望，甲自較乙爲大也。

以受款人之生存爲條件，屆期所付之金額，稱曰生存資金 (Pure Endowment)。在受款人之生存期內，繼續分期付給之一定金額，稱曰生存年金 (Life Annuity)。故生存年金實爲一組逐期連續之同額生存資金，生存年金與確定年金之分別，在於前者既以受款人之生存爲付款之條件，則其付款期數之多寡難以預先確定，因受款人一經死亡，其付款卽行終止。故生存年金又可稱之曰或有年金(Contingent Annuity)。

如上所述，除利率外，生死機率亦爲計算生存年金價值之重要因素。

第二節　生存資金之現價

生存年金既爲一組逐期連續之同額生存資金，故在討論生存年金

現價計算之前，當先述明生存資金現價計算之方法。

一人年方 x 歲，於其生存至 $x+n$ 歲時，可得金額一元，此項金額稱爲"定額一元 x 歲起之 n 年期生存資金"(N Year Pure Endowment of One from Age X)。

據前章第三節所述，凡預期可得之某一金額，其期望之價值，即爲其可得之數，與其能得此款之機率，相乘之積。因此定額一元之 n 年期生存資金之現價，當等於 n 年後一元之現價 v^n 與其受款人能自 x 歲生存至 $x+n$ 歲之機率 ${}_np_x$ 相乘之積。今以 ${}_nE_x$ 代表定額一元 x 歲起之 n 年期生存資金之現價，則其公式即爲：

$$ {}_nE_x = v^n {}_np_x \qquad \text{（第 1 式）} $$

上式亦可以 l_x 與 l_{x+n} 表出之。今假定年齡爲 x 歲之全體 l_x 人，各人購買定額一元之 n 年期生存資金，於是 n 年後，即有 l_{x+n} 人可各得洋一元。屆時所付總數，共爲 l_{x+n} 元，此數在購買時之現價，則爲 v^nl_{x+n} 元。今共有 l_x 人購買此種生存資金，則每人當時實際購得之價值，即爲：

$$ {}_nE_x = \frac{v^nl_{x+n}}{l_x} = v^n {}_np_x \qquad \text{（第 2 式）} $$

例——某甲今年 20 歲，其父允於其生存至 25 歲時，給與 \$10,000.00 假定利率爲年利三釐半 ($3\frac{1}{2}\%$)，根據美國經驗死亡表，求此 \$10,000.00 之現價。

解：應用上列公式，得所求之現價如下：

$$ 10,000{}_5E_{20} = 10,000v^5{}_5p_{20} $$

查本書用表 XV，得某甲能得該款之機率，即其自 20 歲生存至 25 歲之機率如下：

$$ {}_5p_{20} = \frac{l_{25}}{l_{20}} = \frac{89032}{92637} = 0.9610846 $$

查本書用表 IV，得一元之五年期按年利三釐半計算之現價如下：

$$ v^5 = 0.8419732 $$

故某甲於 20 歲時，此 \$10,000.00 之現價，當爲

$$\$10,000\times0.8419732\times0.9610846=\$8,092.07$$

同理，如生存資金之現價爲一，卽可依所定利率及受款人之生死機率，求得其 n 年後之生存資金之終價。其公式卽爲：

$$\frac{1}{{}_nE_x}=\frac{1}{v^n{}_np_x}=\frac{l_x}{v^nl_{x+n}}=\frac{l_x(1+i)^n}{l_{x+n}} \qquad \text{(第 3 式)}$$

例——某甲年 50 歲，以 \$1,000.00 向某保險公司購得五年期之生存資金若干元（卽於五年後某甲仍然生存時，由保險公司照約付款），假定保險公司不取任何費用，試依美國經驗死亡表及年利三釐半之利率，計算其所購得之生存資金當爲幾何？

解：應用第 3 式得所求生存資金之終價如下：

$$1,000\times\frac{1}{{}_5E_{50}}=1,000\times\frac{l_{50}(1.035)^5}{l_{55}}$$

查本書用表 XV，得

$$l_{50}=69804, \quad l_{55}=64563$$

又查本書用表 III，得

$$(1.035)^5=1.1876863$$

將此二數代入公式，卽得某甲所能購得之生存資金之終價如下：

$$1,000\times\frac{69804\times1.1876863}{64563}=\$1,284.07$$

上例所示之生存資金，亦稱生存保險金，此種保險，謂之純粹生險，蓋被保人於保險期滿時，必須仍然生存，始得賠償，如在期滿前死亡，則保險公司卽無須賠償，而被保人所付之款卽爲其全部沒收。此種保險實含有投資與投機二種性質，與存款於銀行之純爲投資者顯有區別。如以 \$1,000 依年利三釐半存入銀行，五年後可得款 \$1,187.69，較向保險公司投保純粹生險所得之生存保險金少 \$96.38。此生存保險金多出之 \$96.38，卽爲被保人投機之報酬。但如被保人於期滿前死亡，則其所付之 \$1,000.00 卽全被沒收，不能取還，而成爲投機之損失。故純粹生險之契約，今日購者極少。卽有之，亦皆與人壽保險相合而成爲生死合險

之契約也(詳見下章)。

習 題 一

1. 一十齡小孩於年屆二十一歲時,可向其父取得 $12,000。假定利率爲年息六釐,試根據美國經驗死亡表求此權利之現價。

2. 某甲於其子方十歲時存 $ 1,000.00 於銀行中,定期十年,依年利八釐復利生息,此存款於到期時,如其子仍然生存者,即歸其子所有,問其子於方逾十五歲時,對於此存款 有之現價幾何?

第三節 生存年金之現價

生存年金既爲一組逐期連續之同額生存資金,故其現價,可將其所包含之各期生存資金之現價,併合計算之即得。生存年金之最簡單者,爲每年一元期末支付之終身生存年金 (Ordinary Life Annuity)。即爲自當年末起付,每年末付款一元於受款人(x)(即今爲 x 歲之人)直至其死亡爲止之生存年金是也。其第一年末所付之一元,即爲一元之一年期生存資金,其第二年末所付之一元,即爲一元之二年期生存資金,餘可仿此類推。今以 a_x 代表此種生存年金之現價,則其公式如下:

$$
\begin{aligned}
a_x &= {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots\cdots + {}_nE_x + \cdots\cdots \text{至死亡表末} \\
&= vp_x + v^2{}_2p_x + \cdots\cdots + v^n{}_np_x + \cdots\cdots \\
&= v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots\cdots + v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} + \cdots\cdots \\
&= \frac{vl_{x+1} + v^2l_{x+2} + \cdots\cdots + v^nl_{x+n}}{l_x} + \cdots\cdots \qquad \text{(第 4 式)}
\end{aligned}
$$

上述之期末付終身生存年金,通常即簡稱曰生存年金,而他種生存年金則另冠以各種形容詞,如期首付生存年金,延期生存年金,限期生存年金等,以示區別。

第 4 式之成立,亦可依 l_x 之理論說明之。今假定年齡爲 x 歲之全體 l_x 人,各人購買每年一元之生存年金,則至第一年底,即有 l_{x+1} 人各得一元,其總數爲 l_{x+1} 元,其現價爲 vl_{x+1} 元,至第二年底即將有 l_{x+1} 人各得一元,其總數當爲 l_{x+2} 元,其現價爲 v^2l_{x+2} 元,直至 n 年末,倘有

l_{x+n} 人各得一元，其總數爲 l_{x+n} 元，其現價爲 $v^n l_{x+n}$ 元。順此推算至死亡表末，得逐年所付年金之現價，共計如下：

$$vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+\cdots\cdots+v^nl_{x+n}+\cdots\cdots+\text{至死亡表末}$$

今共有 l_x 人購買此種年金，則每人所購此種年金之現價卽爲：

$$a_x=\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+\cdots\cdots+v^nl_{x+n}+\cdots\cdots+\text{至死亡表末}}{l_x} \qquad (\text{第 5 式})$$

若生存年金之每年付款額爲 R，則其現價卽爲：

$$Ra_x=R\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+\cdots\cdots+v^nl_{x+n}+\cdots\cdots+\text{至死亡表末}}{l_x} \qquad (\text{第 6 式})$$

習　題　二

1. 假定利率爲年利三釐半，試根據美國經驗死亡表，求一 90 歲之人每年可得一千元生存年金之現價。

2. 假定利率爲年利五釐，試根據美國經驗死亡表，求一 91 歲之人，每年可得一元生存年金之現價。

第四節　a_x 與 a_{x+1} 之關係

用上節之公式計算生存年金之現價，如受款人之年齡較幼時，其計算必甚麻繁，茲將第 5 式略加變化，使在任何年齡(註)之生存年金之現價 a_x 可自在較高一年之生存年金之現價 a_{x+1} 中直接求出。上節之第 5 式本爲：

$$a_x=\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots\cdots\text{至表末}}{l_x}$$

將此式之分子分母各以 l_{x+1} 乘之，並將其各項分子中所共有之因子 v 提出，則可得：

$$\begin{aligned}a_x&=\frac{vl_{x+1}}{l_x}\cdot\frac{l_{x+1}+vl_{x+2}+v^2l_{x+3}+\cdots\cdots\text{至表末}}{l_{x+1}}\\&=vp_x\left(1+\frac{vl_{x+2}+v^2l_{x+3}+\cdots\cdots\text{至表末}}{l_{x+1}}\right)\\&=vp_x(1+a_{x+1}) \qquad (\text{第 7 式})\end{aligned}$$

(註)卽自任何年齡一年之末起付之意。

應用上式，可將在 x 年齡之生存年金現價 a_x，由已知之在 $x+1$ 年齡之生存年金現價 a_{x+1} 中直接求出。此種 a_x 與 a_{x+1} 之關係，甚爲有用，因根據此種關係，極易將在各年齡之生存年金現價，由最高年齡推至最低年齡，一一算出，而完成一完全之生存年金現價表（本書用表 XVI 中 $1+a_x$ 欄之值，卽依此法逐年算出）。

習 題 三

1. 根據美國經驗死亡表，依年利三釐半之利息，求得一年在四十歲之每年一元之生存年金現價爲 \$ 16.446。試由此推求一年在三十九歲之同樣生存年金之現價。

2. 已知 $a_{30}=18.06$，根據美國經驗死亡表，依年利三釐半之利息，求 a_{29}，a_{28}，a_{27}，a_{26}，及 a_{25} 之值。

3. 已知 $a_{30}=18.605$，根據美國經驗死亡表及年利三釐半之利息，求 a_{31}，a_{32}，a_{33}，a_{34} 及 a_{35} 之值。

第五節　期首付生存年金之現價

生存年金於每期起首時，卽行支付者，稱曰期首付生存年金 (Life Annuity Due)。每年初付款一元於受款人(x)之期首付生存年金，可以 a_x 代表現價，俾與期末付生存年金之現價 a_x 有別。因期首付生存年金較期末付生存年金應多付款一期，而此所多付第一期之款，因在期初時支付，並無利息。故得 x 年齡每年一元之期首付生存年金之現價公式如下：

$$\mathrm{a}_x=1+a_x \qquad \text{(第 8 式)}$$

若每期初付款之金額爲 R，則其現價卽爲：

$$R\mathrm{a}_x=R(1+a_x)=R+Ra_x \qquad \text{(第 9 式)}$$

第六節　延期生存年金之現價

生存年金之第一期付款，常有延至若干年後，屆時其受款人(常稱爲年金收受人 Annuitant) 仍然生存時，始行付給者，稱曰延期生存年金(Deferred Life Annuity)。

如上文第 3 節所述，期末付生存年金之第一期付款，當於第一期之末付給；因此延期生存年金之第一期付款，如在第 n 年底始行付給者，應稱之曰延期 $n-1$ 年之生存年金。易言之，即此種生存年金，須俟 $n-1$ 年之後，始成爲每年底付款之期末付生存年金。依此類推，凡延期 n 年之生存年金，其第一期付款，當於第 $n+1$ 年底始行付給。

今設年齡爲 x 歲之全體 l_x 人，均各購買每年一元延期 n 年之生存年金。於此後之第 $n+1$ 年底，當支付第一期款時，其受款人之總數共爲 l_{x+n+1} 人，其應付之款共爲 l_{x+n+1} 元，其現價則爲 $v^{n+1}l_{x+n+1}$ 元。仿此，其第二期付款應共爲 l_{x+n+2} 元，其現價爲 $v^{n+2}l_{x+n+2}$ 元。依此推算至死亡表末，全體受款人完全死亡後止，其逐期所付之款，在當初契約成立時之現價總數當如下示：

$$v^{n+1}l_{x+n+1}+v^{n+2}l_{x+n+2}+v^{n+3}l_{x+n+3}+\cdots\cdots+\text{至表末}$$

將此現價總數，以當時購買之人數 l_x 除之，即得每人所購此種生存年金之現價。茲以 ${}_n|a_x$ 代表自 x 年齡起延期 n 年每年一元之生存年金之現價，其公式如下：

$$ {}_n|a_x=\frac{v^{n+1}l_{x+n+1}+v^{n+2}l_{x+n+2}+v^{n+3}l_{x+n+3}+\cdots\cdots\text{至表末}}{l_x} \quad (\text{第 10 式})$$

將上式之分子分母，各以 l_{x+n} 乘之，並將各項分子所共有之因子 v^n 分别提出，可得較簡之公式如下：

$$ {}_n|a_x=\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}\cdot\frac{vl_{x+n+1}+v^2l_{x+n+2}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{l_{x+n}}$$

$$=v^n{}_np_x\cdot a_{x+n} \quad (\text{第 11 式})$$

上式中之 $v^n{}_np_x$ 即爲定額一元自 x 歲起之 n 年期生存資金之現價，而 a_{x+n} 則爲在 $x+n$ 歲每年一元之期末付生存年金之現價。因自 x 歲起延期 n 年，每年一元之生存年金，即爲一自 $x+n$ 歲起每年一元之期末付生存年金，其在 $x+n$ 歲時之現價爲 a_{x+n}，而在 x 歲時之現價即爲 $v^n{}_np_x\cdot a_{x+n}$。

延期生存年金之第一期付款，於所延之年數滿期時，卽行支付者，

稱曰期首付延期生存年金(Deferred Annuity Due)，如延期 n 年之期首付生存年金，其第一期付款在第 $n+1$ 年之初卽須支付是也。但第 $n+1$ 年之初，實卽爲第 n 年之底，故延期 n 年之期首付生存年金，實卽爲延期 $n-1$ 年之期末付生存年金。玆以 ${}_{n|}\mathrm{a}_x$ 代表自 x 歲起延期 n 年每年一元之期首付生存年金之現價，其公式如下：

$$ {}_{n|}\mathrm{a}_x = {}_{n-1|}a_x = v^{n-1}{}_{n-1}p_x \cdot a_{x+n-1} \qquad \text{(第 12 式)} $$

或

$$ {}_{n|}\mathrm{a}_x = v^n{}_np_x \cdot \mathrm{a}_{x+n} = v^n{}_np_x \cdot (1+a_{x+n}) \text{ (註)} \qquad \text{(第 13 式)} $$

若每年所付之金額爲 R，則自 x 歲起延期 n 年之期末付生存年金，在 x 歲時之現價如下：

$$ R_{n|}a_x = Rv^n{}_np_x \cdot a_{x+n} \qquad \text{(第 14 式)} $$

而其延期 n 年之期首付生存年金之現價則爲

$$ R_{n|}\mathrm{a}_x = Rv^{n-1}{}_{n-1}p_x \cdot a_{x+n-1} = Rv^n{}_np_x(1+a_{x+n}) \qquad \text{(第 15 式)} $$

習　題　四

下列計算應用美國經驗死亡表及年利三釐半之利息。

1. 求 ${}_{10|}\mathrm{a}_{80}$ 之值。
2. 求 ${}_{10|}a_{81}$ 之值。
3. 應用本書用表 XVI 之 $1+a_x$ 縱行之數字，求 ${}_{5|}a_{36}$ 之值。
4. 已知 $a_{45}=\$ 15.087$ 求 ${}_{10|}a_{35}$ 之值。
5. 應用本書用表 XVI 之 $1+a_x$ 行之數字，求 ${}_{10|}a_{35}$, ${}_{15|}a_{20}$ 及 ${}_{5|}a_{.0}$ 之值。
6. 某甲自四十歲起在以後之生存期內，每年初可得 \$ 100.00，試依美國經驗死亡表及年利三釐半之利息，求某甲於三十五歲之初，對於此項進款之現價。

第七節　限期生存年金之現價

生存年金之付款，以若干年爲限，屆期雖收受年金之人仍然生存，

(註) (12)式與(13)相等其證明如下：

依公式 $a_x=vp_x(1+a_{x+1})$ 得 $a_{x+n-1}=vp_{x+n-1}(1+a_{x+n})$ 代入(12)式卽得

$$ {}_{n|}\mathrm{a}_x = v^{n-1} \times {}_{n-1}p_x \times vp_{x+n-1}(1+a_{x+n}) = v^n \times {}_{n-1}p_x \times p_{x+n-1} \times (1+a_{x+n}) $$

$$ \because {}_{n-1}p_x = \frac{l_{x+n-1}}{l_x} \quad p_{x+n-1} = \frac{l_{x+n}}{l_{x+n-1}} \quad \therefore {}_{n-1}p_x \; p_{x+n-1} = \frac{l_{x+n}}{l_x} = {}_np_x $$

代入卽得

$$ {}_{n|}\mathrm{a}_x = v^n{}_np_x(1+a_{x+n}) $$

其付款亦卽終止者，稱曰限期生存年金(Temporary Life Annuity)。每年末付款一元於受款人(x)，以n年為限，在限期內受款人死亡時，或至n年後限期已滿而受款人尙存時，其付款皆須終止者，稱曰自x歲起每年一元限期n年之生存年金。其在x歲時之現價，可以$a_{x\overline{n|}}$代表之。

假如年齡為x歲之全體l_x人，各購買每年末付款一元限期n年之生存年金，則出售此種年金之公司，此後逐年應付之款當為：l_{x+1}，l_{x+2}，l_{x+3}……l_{x+n}各數，其逐年所付各數，在契約成立時之現價共為：

$$vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots\cdots+v^nl_{x+n}$$

將此現價總數，以當時購買之人數l_x除之，卽得每人所購此種生存年金之現價如下：

$$a_{x\overline{n|}}=\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots\cdots+v^nl_{x+n}}{l_x}\qquad(\text{第 16 式})$$

限期n年之生存年金，不論其為期末付或為期首付，其付款之期數，最多皆不過n次。於第一年初卽行付給第一期付款，此後在受款人繼續生存期內於每年初繼續付款，直至其第n年初(卽第$n-1$年底)付給末期付款者，稱為限期n年之期首付生存年金，或統稱之為期首付限期生存年金(Temporary Annuity Due)。

每年一元限期n年之期首付生存年金，其第一期付款在當時之現價卽為一元，此後逐年所付之款，卽成為限期$n-1$年之期末付生存年金，其現價當為$a_{x\overline{n-1|}}$。玆以$\text{a}_{x\overline{n|}}$代表每年一元限期$n$年之期首付生存年金之現價，其公式卽為：

$$\text{a}_{x\overline{n|}}=1+a_{x\overline{n-1|}}=1+\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots+v^{n-1}l_{x+n-1}}{l_x}\qquad(\text{第 17 式})$$

如限期生存年金之每年付款為R，則其現價總數，卽可以R乘上列之(16)或(17)二式而得之：

每年付款R限期n年之期末付生存年金之現價為：

$$Ra_{x\overline{n|}}=R\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+\cdots\cdots+v^nl_{x+n}}{l_x}\qquad(\text{第 18 式})$$

每年付款 R 限期 n 年之期首付生存年金之現價爲：

$$R\mathrm{a}_{x\overline{n}|}=R(1+a_{x\overline{n-1}|})=R\left(1+\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+\cdots\cdots+v^{n-1}l_{x+n-1}}{l_x}\right)$$

（第 19 式）

習　題　五

1. 依美國經驗死亡表及年利三釐半之利息，求 $a_{20\overline{4}|}$ 與 $\mathrm{a}_{20\overline{5}|}$ 之值。

2. 依美國經驗死亡表及年利三釐半之利息，求自 30 歲起限期五年每年一百元之期末付生存年金及期首付生存年金之現價。

3. 某甲年 25 歲，向保險公司保得某種人壽保險，但知其應付之保險費，依美國經驗死亡表及年利三釐半計算，爲每年 \$ 62.48，自當年初付起，五年付清。若某甲欲將其應付之保費改於投保時卽第一年初一次付清，求其應付之保費共爲多少。

第八節　延期 n 年限期 r 年之生存年金之現價

限期 r 年之生存年金，其第一期付款在第 $n+1$ 年底起付者，稱曰延期 n 年限期 r 年之期末付生存年金。玆以 ${}_{n|}a_{x\overline{r}|}$ 代表每年一元之此種生存年金之現價，卽可根據上述延期生存年金與限期生存年金二節中所述之理由，得其公式如下：

$$\begin{aligned}{}_{n|}a_{x\overline{r}|}&=\frac{v^{n+1}l_{x+n+1}+v^{n+2}l_{x+n+2}+\cdots\cdots v^{n+r}l_{x+n+r}}{l_x}\\&=\frac{v^nl_{x+n}}{l_x}\cdot\frac{vl_{x+n+1}+v^2l_{x+n+2}+\cdots\cdots+v^rl_{x+n+r}}{l_{x+n}}\\&=v^n{}_np_x\cdot a_{x+n\overline{r}|}\end{aligned}$$

（第 20 式）

限期 r 年之生存年金，其第一期付款在第 $n+1$ 年初（卽第 n 年底）起付者，稱曰延期 n 年限期 r 年之期首付生存年金，玆以 ${}_{n|}\mathrm{a}_{x\overline{r}|}$ 代表每年一元之此種生存年金之現價，仿第(20)式之例，可得其公式如下：

$${}_{n|}\mathrm{a}_{x\overline{r}|}=v^n{}_np_x\cdot\mathrm{a}_{x+n\overline{r}|}$$

（第 21 式）

延期 n 年限期 r 年之期首付生存年金，實卽爲延期 $n-1$ 年限期 r 年之期末付生存年金，故每年一元之此種生存年金之現價亦爲：

$${}_{n|}\mathrm{a}_{x\overline{r}|}={}_{n-1|}a_{x\overline{r}|}=v^{n-1}{}_{n-1}p_x\cdot a_{x+n-1\overline{r}|}$$

（第 22 式）

如每年之付款爲 R，則此二種生存年金之現價，卽可以 $R{}_{n|}a_{x\overline{r}|}$ 與

$R_n\,|\,a_{x\,\overline{r|}}$ 爲代表，依式算出之。

習題六

（計算時應用美國經驗死亡表及年利三釐半之利息）

1. 某甲年方 50 歲，向一經營生存年金之公司購得每年 \$ 100 限期 5 年之生存年金，年款於某甲 60 歲一年之年底開始付給，求該生存年金在當初購得時之現價。

2. 如題 1 之生存年金，其年款於某甲 60 歲一年之年初開始付給，求其在當初購得時之現價。

3. 證明 $v^n\,{}_np_x \cdot a_{x+n\,\overline{r|}} = v^{n-1}\,{}_{n-1}p_x \cdot a_{x+n-1\,\overline{r|}}$

第九節　各種生存年金現價之相互關係

以上所述之生存年金，屬於期末付者，共有四種：

(1)普通生存年金（即期末付終身生存年金）符號爲 a_x

(2)延期生存年金（即延期 n 年期末付終身生存年金）符號爲 ${}_{n|}a_x$

(3)限期生存年金（即限期 n 年期末付生存年金）符號爲 $a_{x\,\overline{n|}}$

(4)延期 n 年限期 r 年之期末付生存年金符號爲 ${}_{n|}a_{x\,\overline{r|}}$

以上四種生存年金之現價各有互相關係，茲略述之如次：

終身生存年金可分爲二部份：一部份爲起初 n 年之限期生存年金，又一部份爲延期 n 年之生存年金。於是在同一 x 年齡之時，此三種生存年金之現價，即有如下之關係：

$$a_x = a_{x\,\overline{n|}} + {}_{n|}a_x \qquad \text{(第 23 式)}$$

或

$$a_{x\,\overline{n|}} = a_x - {}_{n|}a_x \qquad \text{(第 24 式)}$$

或

$$ {}_{n|}a_x = a_x - a_{x\,\overline{n|}} \qquad \text{(第 25 式)}$$

延期 n 年限期 r 年之生存年金，亦可視爲終身生存年金之一部份，即自終身生存年金中減去限期 n 年之生存年金及延期 $n+r$ 年之生存年金後所餘之一部份是也，故其公式可以其他三種生存年金之公式表示之：

$$ {}_{n|}a_{x\,\overline{r|}} = a_x - a_{x\,\overline{n|}} - {}_{n+r|}a_x \qquad \text{(第 26 式)}$$

延期 n 年限期 r 年之生存年金亦可視爲延期 n 年與延期 $n+r$ 年之二種生存年金之差。故其公式亦可用延期生存年金之公式表示之：

$$ {}_{n|}a_{x:\overline{r|}} = {}_{n|}a_x - {}_{n+r|}a_x \qquad \text{(第 27 式)} $$

延期 n 年限期 r 年之生存年金又可視爲限期 $n+r$ 年與限期 n 年之二種生存年金之差，故其公式又可用限期生存年金之公式表示之：

$$ {}_{n|}a_{x:\overline{r|}} = a_{x:\overline{n+r|}} - a_{x:\overline{n|}} \qquad \text{(第 28 式)} $$

依同一理由吾人可得以上各節所述四種期首付生存年金現價間之關係如下：

$$ \mathbf{a}_x = \mathbf{a}_{x:\overline{n|}} + {}_{n|}\mathbf{a}_x \qquad \text{(第 29 式)} $$

$$ \mathbf{a}_{x:\overline{n|}} = \mathbf{a}_x - {}_{n|}\mathbf{a}_x \qquad \text{(第 30 式)} $$

$$ {}_{n|}\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{x:\overline{n|}} \qquad \text{(第 31 式)} $$

$$ {}_{n|}\mathbf{a}_{x:\overline{r|}} = \mathbf{a}_x - \mathbf{a}_{x:\overline{n|}} - {}_{n+r|}\mathbf{a}_x \qquad \text{(第 32 式)} $$

$$ {}_{n|}\mathbf{a}_{x:\overline{r|}} = {}_{n|}\mathbf{a}_x - {}_{n+r|}\mathbf{a}_x \qquad \text{(第 33 式)} $$

$$ {}_{n|}\mathbf{a}_{x:\overline{r|}} = \mathbf{a}_{x:\overline{n+r|}} - \mathbf{a}_{x:\overline{n|}} \qquad \text{(第 34 式)} $$

習　題　七

1. 已知 $a_{35}=17.6138$，$a_{35:\overline{15|}}=10.7217$ 求 ${}_{15|}a_{35}$ 之值。
2. 已知 $a_{35:\overline{15|}}=10.7217$，$a_{35:\overline{10|}}=7.9184$ 求 ${}_{10|}a_{35:\overline{5|}}$ 之值。
3. 已知 $\mathbf{a}_{35}=18.6138$，$\mathbf{a}_{35:\overline{10|}}=8.2758$，${}_{15|}\mathbf{a}_{35}=7.4013$ 求 ${}_{10|}\mathbf{a}_{35:\overline{5|}}$ 之值。

第十節　換算符號 D_x 與 N_x

以上所述各種生存年金之公式，在應用時，計算甚繁，今有一種專門表格曰生存年金與人壽保險計算表（見用表 XVI），其中各欄數字係根據某種死亡表依所定之利率逐年算出（用表 XVI 係根據美國經驗死亡表及年利三釐半之利息算出），此表卽可替換死亡表以供各種生存年金及人壽保險計算時之應用，故又稱爲死亡表之換算欄（Commutation Columns），爲利用此表之故，前述之生存年金公式須以較簡之換算符

號(Commutation Symbols)代入之。茲述之如次：

普通生存年金之公式本爲：

$$a_x=\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{l_x}$$

將上式右端之分子分母皆以 v^x 乘之，得：

$$a_x=\frac{v^{x+1}l_{x+1}+v^{x+2}l_{x+2}+v^{x+3}l_{x+3}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{v^xl_x}$$

茲以換算符號 $D_x=v^xl_x$，即得 $D_{x+1}=v^{x+1}l_{x+1}$，$D_{x+2}=v^{x+2}l_{x+2}$ 等。以此等符號代入上式，得：

$$a_x=\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+D_{x+3}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{D_x}$$

再以換算符號 $N_x=D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots+$至表末，即得 $N_{x+1}=D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots+$至表末等，以 N_{x+1} 代入上式，即得普通生存年金之簡單公式爲：

$$a_x=\frac{N_{x+1}}{D_x} \qquad \text{(第 35 式)}$$

本書用表 XVI 中之 D_x 與 N_x 二欄，卽根據生存年金公式中原有之 v 與 l_x 計算而得。應用此二欄之數字及以換算符號表示之生存年金公式，其較便於應用死亡表現價表及原來之生存年金公式，自不待言。同理生存資金與其他生存年金之公式亦可以換算符號表示之，以簡便其應用時之計算。

生存資金之公式本爲：

$$_nE_x=\frac{v^nl_{x+n}}{l_x}$$

以 v^x 乘上式右端之分子與分母得：

$$_nE_x=\frac{v^{x+n}l_{x+n}}{v^xl_x}=\frac{D_{x+n}}{D_x} \qquad \text{(第 36 式)}$$

期首付生存年金之現價公式，亦可依此變化爲：

$$\text{a}_x=1+a_x=1+\frac{N_{x+1}}{D_x}=\frac{D_x+N_{x+1}}{D_x}$$

$$=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{D_x}$$

$$=\frac{N_x}{D_x} \qquad \text{(第 37 式)}$$

期末付延期生存年金之公式可化爲:

$$_{n|}a_x=\frac{v^{n+1}l_{x+n+1}+v^{n+2}l_{x+n+2}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{l_x}$$

$$=\frac{v^{x+n+1}l_{x+n+1}+v^{x+n+2}l_{x+n+2}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{v^x l_x}$$

$$=\frac{D_{x+n+1}+D_{x+n+2}+\cdots\cdots+\text{至表末}}{D_x}$$

$$=\frac{N_{x+n+1}}{D_x} \qquad \text{(第 38 式)}$$

期首付延期生存年金之公式可化爲:

$$_{n|}\text{a}_x={}_{n-1|}a_x=\frac{N_{x+n}}{D_x} \qquad \text{(第 39 式)}$$

期末付限期生存年金之公式可化爲:

$$a_{x\overline{n|}}=\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots\cdots v^n l_{x+n}}{l_x}$$

$$=\frac{v^{x+1}l_{x+1}+v^{x+2}l_{x+2}+v^{x+3}l_{x+3}+\cdots\cdots+v^{x+n}l_{x+n}}{v^x l_x}$$

$$=\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots+D_{x+n}}{D_x}$$

$$=\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x} \qquad \text{(第 40 式)}$$

期首付限期生存年金之公式可化爲:

$$\text{a}_{x\overline{n|}}=1+a_{x\overline{n-1|}}=1+\frac{D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots D_{x+n-1}}{D_x}$$

$$=\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots D_{x+n-1}}{D_x}$$

$$=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x} \qquad \text{(第 41 式)}$$

延期 n 年限期 r 年之期末付生存年金之公式可化爲:

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}a_{x\overline{r|}} &= \frac{v^{n+1}l_{x+n+1}+v^{n+2}l_{x+n+2}+\cdots\cdots+v^{n+r}l_{x+n+r}}{l_x} \\
&= \frac{v^{x+n+1}l_{x+n+1}+v^{x+n+2}l_{x+n+2}+\cdots\cdots v^{x+n+r}l_{x+n+r}}{v^x l_x} \\
&= \frac{D_{x+n+1}+D_{x+n+2}+\cdots\cdots D_{x+n+r}}{D_x} \\
&= \frac{N_{x+n+1}-N_{x+n+r+1}}{D_x} \qquad \text{(第 42 式)}
\end{aligned}
$$

延期 n 年限期 r 年之期首付生存年金之公式可化為:

$$
{}_{n|}\mathrm{a}_{x\overline{r|}} = {}_{n-1|}a_{x\overline{r|}} = \frac{N_{x+n}-N_{x+n+r}}{D_x} \qquad \text{(第 43 式)}
$$

以上各式,亦可根據 ${}_nE_x$ 之公式,或第 9 節中所述各種生存年金間之關係化出之。

習 題 八

(應用本書用表 XVI 中之 D_x 及 N_x)

1. 求 a_{25}, a_{35}, a_{40} 及 a_{60} 之值。
2. 求 $a_{25\overline{10|}}$, $a_{25\overline{12|}}$ 及 $a_{25\overline{20|}}$ 之值。
3. 求 $\mathrm{a}_{25\overline{10|}}$, $\mathrm{a}_{25\overline{12|}}$ 及 $\mathrm{a}_{25\overline{20|}}$ 之值。
4. 求 ${}_{5|}a_{27}$, ${}_{10|}a_{27}$ 及 ${}_{20|}a_{27}$ 之值。
5. 求 ${}_{5|}a_{27\overline{10|}}$, ${}_{10|}a_{27\overline{10|}}$ 及 ${}_{20|}a_{27\overline{10|}}$ 之值。
6. 求 ${}_{5|}\mathrm{a}_{27}$ 及 ${}_{10|}\mathrm{a}_{27\overline{10|}}$ 之值。
7. 求 a_{28}, a_{29} 及 a_{30} 之值(並與用表 XVI 之 $1+a_x$ 欄核對之)。

第十一節　每年付款數次之生存年金

生存年金常有規定每年付款數次者,如每年付款五十二次,即為每星期付款一次,如每年付款十二次,即為每月付款一次之類。此種年金,統稱之曰每年付款 m 次之生存年金。其計算方法,自當較每年付款一次者更為複雜。茲先述每年付款 m 次之期末付生存年金如下。

茲以符號 $a_x^{(m)}$ 代表每年付款一元,分 m 期平均付給,每期末付款 $\frac{1}{m}$ 之生存年金之現價。依第 4 式之理,可得此種年金之價值如下:

$$a_x^{(m)}=\frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}}\,{}_{\frac{1}{m}}p_x+v^{\frac{2}{m}}\,{}_{\frac{2}{m}}p_x+v^{\frac{3}{m}}\,{}_{\frac{3}{m}}p_x+\cdots\cdots\text{至表末}\right)$$

但此公式之應用甚難。非僅其計算極繁，且死亡表上所載數字，係按年之生死統計，至於一年中每一部份之死亡率如何，則無詳細之統計可查。因此為便利起見，吾人可依下述方法，求得此種年金之近似值。

今知期首付生存年金之公式為：

$$\mathrm{a}_x=1+a_x\text{。}$$

以延期年金之形式言之，可得延期 0 年之期首付生存年金之現價如下：

$${}_{0|}\mathrm{a}_x=(1+a_x)-0$$

又得延期 1 年之期首付生存年金(即普通生存年金)之現價如下：

$${}_{1|}\mathrm{a}_x=(1+a_x)-1$$

依推值法之原理，可推得延期 $\frac{1}{m}$ 年之期首付生存年金(即每年第一分期末付款之生存年金)之現價如下：

$${}_{\frac{1}{m}|}\mathrm{a}_x=(1+a_x)-\frac{1}{m}=a_x+\frac{m-1}{m};$$

延期 $\frac{2}{m}$ 年之期首付生存年金(即每年第二分期末付款之生存年金)之現價如下：

$${}_{\frac{2}{m}|}\mathrm{a}_x=(1+a_x)-\frac{2}{m}=a_x+\frac{m-2}{m};$$

及延期 $\frac{k}{m}$ 年之期首付生存年金(即每年第 k 分期末付款之生存年金)之現價如下：

$${}_{\frac{k}{m}|}\mathrm{a}_x=(1+a_x)-\frac{k}{m}=a_x+\frac{m-k}{m}\text{。}$$

今假定有每年付款一元之生存年金 m 種，其付款時期各不相同。第一種年金於每年之第 $\frac{1}{m}$ 年末付款，第二種於每年之第 $\frac{2}{m}$ 年末付款，第三種於每年之第 $\frac{3}{m}$ 年末付款，以至第 m 種於每年之第 $\frac{m}{m}$ 年末即每年之末付款。此 m 種每年付款一元之生存年金之現價總數，遂與每年付款 m 元，分 m 期平均付給，於每期末付款一元之生存年金之現價

$ma_x^{(m)}$ 相等。於是可得 $ma_x^{(m)}$ 之價值如下:

$$ma_x^{(m)}=\left[\left(a_x+\frac{m-1}{m}\right)+\left(a_x+\frac{m-2}{m}\right)+\cdots\cdots+\left(a_x\frac{m-m}{m}\right)\right]$$

上式之右端爲一公差 $\frac{1}{m}$ 之等差級數,將此級數總合之,可得:

$$ma_x^{(m)}=ma_x+\frac{m(m-1)}{2m}$$

及

$$a_x^{(m)}=a_x+\frac{m-1}{2m} \qquad \text{(第 44 式)}$$

用此公式,可得每半年末付款半元之生存年金之現價如下:

$$a_x^{(2)}=a_x+\tfrac{1}{4}$$

每三月末付款 $\frac{1}{4}$ 元之生存年金之現價如下:

$$a_x^{(4)}=a_x+\tfrac{3}{8}$$

若第一期付款,於期初時卽行付給,則此種生存年金卽改爲一年付款 m 次之期首付生存年金,其現價當爲:

$$\begin{aligned}\text{a}_x^{(m)}&=\frac{1}{m}+a_x^{(m)}\\&=a_x+\frac{m+1}{2m}\\&=\text{a}_x-1+\frac{m+1}{2m}\end{aligned}$$

其公式卽爲:

$$\text{a}_x^{(m)}=\text{a}_x-\frac{m-1}{2m} \qquad \text{(第 45 式)}$$

第十二節 每年付款 m 次之延期生存年金及限期生存年金

一年付款 m 次延期 n 年之生存年金之現價 $_{n|}a_x^{(m)}$,卽爲 n 年後每年付款 m 次之期末付生存年金之價值 $a_{x+n}^{(m)}$,與收受年金人 (x) 得再生存 n 年之機率 $_np_x$,及一元之 n 年現價 v^n 相乘之積。其式如下:

$$_{n|}a_x^{(m)}=v^n{}_np_xa_{x+n}^{(m)}$$

$$=\frac{v^n l_{x+n}}{l_x}a_{x+n}^{(m)}$$

$$=\frac{D_{x+n}}{D_x}a_{x+n}^{(m)} \qquad \text{(第 46 式)}$$

一年付款 m 次之期末付生存年金與延期生存年金之公式，旣經決定，可依第 9 節第 24 式之例，得每年付款 m 次之限期生存年金之現價如下：

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)}=a_x^{(m)}-{}_n|a_x^{(m)}$$

將上式中之 $a_x^{(m)}$ 與 ${}_n|a_x^{(m)}$ 依第 44 與第 46 式之等值代入之，得：

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)}=a_x+\frac{m-1}{2m}-\frac{D_{x+n}}{D_x}a_{x+n}^{(m)}$$

再將式中之 $a_{x+n}^{(m)}$ 依第 44 式之例，用其等值 $a_{x+n}+\frac{m-1}{2m}$ 代入之，得：

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)}=a_x+\frac{m-1}{2m}-\frac{D_{x+n}}{D_x}\left(a_{x+n}+\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$=a_x-\frac{D_{x+n}}{D_x}a_{x+n}+\frac{m-1}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)。$$

再以 $\frac{D_{x+n}}{D_x}={}_nE_x$（見第 36 式）及 $a_x-\frac{D_{x+n}}{D_x}a_{x+n}=a_x-{}_nE_xa_{x+n}$

$=a_x-v^n{}_np_xa_{x+n}=a_x-{}_n|a_x=a_{x:\overline{n|}}$ 代入上式，

遂得一每年付款 m 次之限期生存年金之公式如下：

$$a_{x:\overline{n|}}^{(m)}=a_{x:\overline{n|}}+\frac{m-1}{2m}(1-{}_nE_x)。 \qquad \text{(第 47 式)}$$

每年付款 m 次之期首付延期生存年金之現價，亦可依公式(46)之理求得之，其公式如下：

$${}_n|\text{a}_x^{(m)}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\text{a}_{x+n}^{(m)} \qquad \text{(第 48 式)}$$

同理，可得每年付款 m 次之期首付限期生存年金之現價如下：

$$\text{a}_{x:\overline{n|}}^{(m)}=\text{a}_x^{(m)}-{}_n|\text{a}_x^{(m)}$$

$$=\text{a}_x-\frac{m-1}{2m}-\frac{D_{x+n}}{D_x}\text{a}_{x+n}^{(m)}$$

$$=a_x-\frac{m-1}{2m}-\frac{D_{x+n}}{D_x}\left(a_{x+n}-\frac{m-1}{2m}\right)$$

$$=a_x-\frac{D_{x+n}}{D_x}a_{x+n}-\frac{m-1}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

$$=a_x-{}_n|a_x-\frac{m-1}{2m}\left(1-\frac{D_{x+n}}{D_x}\right)$$

其公式卽爲:

$$a_{x\overline{n}|}^{(m)}=a_{x\overline{n}|}-\frac{m-1}{2m}(1-{}_nE_x) \qquad \text{(第 49 式)}$$

茲舉例以示之:

例——設每年末付 \$120 於一 35 歲之人,以 15 年爲限。茲已知此項 15 年期生存年金之現價爲 \$1,286.60,若改爲每年付款 12 次,於每月末付款 \$10,問其現價應爲幾何?

解:今旣知 $120a_{35\overline{15}|}=\$1,286.60$

於是得 $a_{35\overline{15}|}=\$10.7217$

依第 47 式,得 $a_{35\overline{15}|}^{(12)}=a_{35\overline{15}|}+\frac{11}{24}(1-{}_{15}E_{35})$

但 ${}_{15}E_{35}=\frac{D_{50}}{D_{35}}=\frac{12,498.6}{24,544.7}=.5092$

代入之,卽得 $a_{35\overline{15}|}^{(12)}=10.7217+\frac{11}{24}(.4908)$

$$=10.7217+.2249=\$10.9466$$

再以 \$120 乘之,遂得所求生存年金之現價如下:

$$120a_{35\overline{15}|}^{(12)}=(120)(\$10.9466)=\$1,313.59。$$

習 題 九

(計算時應用美國經驗死亡表及年利三釐半之利息)

1. 已知每年末付款 \$300 於一現年 25 歲之人之限期 25 年之生存年金之現價爲 \$4,485.45。求限期 25 年年付 \$300 於今爲 25 歲之人之下列三種生存年金之現價 (a)每年分十二期均付,每月末付 \$25 (b)每年分四期均付,每三月末付 \$75 (c)每年分二期均付,每六月末付款 \$150。

2. 求 $a^{(2)}_{50}$， $a^{(4)}_{50}$ 及 $a^{(6)}_{50}$ 之值。

3. 求 $\text{a}^{(2)}_{50}$，$\text{a}^{(4)}_{50}$ 及 $\text{a}^{(6)}_{50}$ 之值。

4. 求 $\text{a}^{(2)}_{50:\overline{10|}}$ 之值，

5. 求 $_{10|}a^{(12)}_{50}$ 之值。

6. 今有一年方三十歲之公務員，自 55 歲起每月可向其服務之機關領得五十元之養老金。若其第一期領款，在 55 歲初即可收得，問此養老金在三十歲時之現價共爲幾何？

第十三節 由生存年金之現價求年金額

已知某種生存年金之現價及其計算所根據之死亡表及利率，即可應用前述每年一元之生存年金現價之公式，求出該種生存年金每年或每期之付款額。以已知之生存年金現價總數被除於每年一元之該種生存年金現價，其商即爲每年應付之款 R。如爲每年付款 m 次，即可以 m 除所求出之 R 而得每期應付之款。

例——有一自 35 歲起之期首付終身生存年金，其在 35 歲初之現價爲 \$3,722.76(根據美國經驗死亡表及年利三釐半計算)，求其每年應付之款。

解：應用本章公式(8)及用表 XVI 得

$$\text{a}_{35}=1+a_{35}=18.6138$$

已知

$$R\text{a}_{35}=3,722.76$$

於是

$$R=\frac{3,722.76}{\text{a}_{35}}=\frac{3,722.76}{18.6138}=\$200$$

習 題 十

(應用美國經驗死亡表及年利三釐半計算)

1. 有一自 35 歲起限期 15 年之期末付生存年金，其現價爲 \$ 2,144.34，求其每年付款之數。

2. 生存年金合同上規定當受款人達到 60 歲之年齡時，年金公司應即於每年初付受款人 \$ 600，至 25 年爲止。今若此受款人達到 60 歲時，向該公司請求將其年金改於每月初分期付給，其全部價値仍與原定之年金價値相等，問每月可得若干？

第十四節　生存年金折合生存資金之計算法

生存年金乃係許多期繼續相連之生存資金組合而成，其現價等於各期生存資金現價之總和。反之，一生存年金亦可依其現價等於生存資金之現價，而換算爲生存資金。其法如下：

(一)先計算原有生存年金在 x 年齡時之現價。

(二)次計算所求生存資金在 x 年齡之現價爲一元時之終價，即 $\frac{1}{{}_nE_x}$。

(三)以 $\frac{1}{{}_nE_x}$ 乘原有生存年金之現價，即得所求生存資金之終價。

依同理，生存資金亦可化爲生存年金，其法如下：

(一)先計算原有生存資金在 x 年齡時之現價。

(二)次計算所求生存年金每年付款一元者，在 x 年齡時之現價。

(三)以原有生存資金之現價被除於所求得之生存年金之現價，其商卽爲原有生存資金所能換得該種生存年金之年賦金額。

玆列示其算式如下：

甲、生存年金折合生存資金：

(1)每年一元之普通生存年金折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot a_x=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+1}}{D_x}=\frac{N_{x+1}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 50 式)}$$

(2)每年一元之期首付生存年金折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot a_x=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_x}{D_x}=\frac{N_x}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 51 式)}$$

(3)每年一元延期 n 年之期末付生存年金，折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot{}_{n|}a_x=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+n+1}}{D_x}=\frac{N_{x+n+1}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 52 式)}$$

(4)每年一元延期 n 年之期首付生存年金，折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot{}_{n|}\mathrm{a}_x=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+n}}{D_x}=\frac{N_{x+n}}{D_{x+n}}\qquad(第53式)$$

(5)每年一元限期 n 年之期末付生存年金折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot a_{x\overline{n|}}=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_x}=\frac{N_{x+1}-N_{x+n+1}}{D_{x+n}}\qquad(第54式)$$

(6)每年一元限期 n 年之期首付生存年金，折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot\mathrm{a}_{x\overline{n|}}=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+n}}\qquad(第55式)$$

(7)每年一元延期 n 年限期 r 年之期末付生存年金，折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot{}_{n|}a_{x\overline{r|}}=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+n+1}-N_{x+n+r+1}}{D_x}=\frac{N_{x+n+1}-N_{x+n+r+1}}{D_{x+n}}\qquad(第56式)$$

(8)每年一元延期 n 年限期 r 年之期首付生存年金，折合生存資金之公式如下：

$$\frac{1}{{}_nE_x}\cdot{}_{n|}\mathrm{a}_{x\overline{r|}}=\frac{D_x}{D_{x+n}}\cdot\frac{N_{x+n}-N_{x+n+r}}{D_x}=\frac{N_{x+n}-N_{x+n+r}}{D_{x+n}}\qquad(第57式)$$

每年付款 m 次之各種生存年金折合生存資金之公式，亦可依理求出之。

乙、生存資金折合生存年金

(1)定額一元之生存資金，折成普通生存年金，所得年金額之公式如下：

$${}_nE_x\cdot\frac{1}{a_x}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_{x+1}}=\frac{D_{x+n}}{N_{x+1}}\qquad(第58式)$$

(2)定額一元之生存資金，折成期首付生存年金，所得年金額之公式如下：

$${}_nE_x\cdot\frac{1}{\mathrm{a}_x}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_x}=\frac{D_{x+n}}{N_x}\qquad(第59式)$$

(3)定額一元之生存資金，折成延期 n 年期末付生存年金，所得

年金額之公式如下：

$$ {}_nE_x\cdot\frac{1}{{}_{n|}a_x}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_{x+n+1}}=\frac{D_{x+n}}{N_{x+n+1}} \qquad (\text{第 60 式}) $$

(4)定額一元之生存資金，折成延期 n 年期首付生存年金，所得年金額之公式如下：

$$ {}_nE_x\cdot\frac{1}{{}_{n|}\ddot{a}_x}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_{x+n}}=\frac{D_{x+n}}{N_{x+n}} \qquad (\text{第 61 式}) $$

(5)定額一元之生存資金，折成限期 n 年期末付生存年金，所得年金額之公式如下：

$$ {}_nE_x\cdot\frac{1}{a_{x:\overline{n|}}}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_{x+1}-N_{x+n+1}}=\frac{D_{x+n}}{N_{x+1}-N_{x+n+1}} \qquad (\text{第 62 式}) $$

(6)定額一元之生存資金，折成限期 n 年期首付生存年金，所得年金額之公式如下：

$$ {}_nE_x\cdot\frac{1}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_x-N_{x+n}}=\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}} \qquad (\text{第 63 式}) $$

(7)定額一元之生存資金，折成延期 n 年限期 r 年期末付生存年金，所得年金額之公式如下：

$$ {}_nE_x\cdot\frac{1}{{}_{n|}a_{x:\overline{r|}}}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_{x+n+1}-N_{x+n+r+1}}=\frac{D_{x+n}}{N_{x+n+1}-N_{x+n+r+1}} \qquad (\text{第 64 式}) $$

(8)定額一元之生存資金，折成延期 n 年限期 r 年期首付生存年金，所得年金額之公式如下：

$$ {}_nE_x\cdot\frac{1}{{}_{n|}\ddot{a}_{x:\overline{r|}}}=\frac{D_{x+n}}{D_x}\cdot\frac{D_x}{N_{x+n}-N_{x+n+r}}=\frac{D_{x+n}}{N_{x+n}-N_{x+n+r}} \qquad (\text{第 65 式}) $$

定額一元之生存資金，折成每年付款 m 次之各種生存年金，所得年金額之公式，亦可依同理求得之，茲不贅。

若生存資金之期限爲 n'，則上列第 (50) 式至第 (65) 式各式中之 D_{x+n}，應改爲 $D_{x+n'}$ 以免與生存年金上之期數 n 或 r 相混。

習題十一

(計算時應用美國經驗死亡表及年利三釐中之利率)

1. 求一年 30 歲之人之每年一元限期 40 年之期首付生存年金，換算爲至 70 歲時總領一次之生存賞金總額。

2. 今有一年 30 歲之人，向一保險公司購得一 20 年期之生存保險金，若每年初付入 \$ 100.00，問至 50 歲此生存保險金到期時，共可得款多少。

3. 某甲年 30 歲，向一保險公司購得一 20 年期金額 \$ 2,000.00 之生存保險金，將全部代價分 10 年平均繳付，即在 30 歲至 40 歲之 10 年內，於每年初繳付，問其每年應付之款幾何?

複 習 題

（計算時，應用美國經驗死亡表及年利三釐半之利率）

1. 用生存年金及人壽保險計算表中之 D_x 欄之數求：

$_{10}E_{35}$，$_{15}E_{35}$ 及 $_{20}E_{35}$ 之值。

2. 用生存年金及人壽保險計算表中之 D_x 欄之數求 a_{65} 之值，然後用 D_x 與 N_x 二欄之數覆核之。

3. 自 30 歲起每年初付款 \$ 24.60 之終身生存年金，求其在 30 歲時之現價。

4. 求 $_{35|}a_{30}$ 之值。

5. 某甲今爲 35 歲，向一保險公司購得自 65 歲起每年初付款一千元之終身生存年金，問此種生存年金在 35 歲時之現價幾何?

6. 求 $a_{25:\overline{20|}}$ 之值。

7. 在保額 \$ 10,000 之人壽保險單上規定其保額將分二十年平均付給，其第一期付款當於被保人死亡證實時即行支付，問每年應付之款幾何(依年利三釐半計算)?

8. 某甲年 25 歲，向一保險公司以 \$ 10,000 購得普通生存年金，問每年末可得年金若干?

9. 某甲保有保額 \$ 10,000 之人壽保險，規定其賠款當依限期 20 年之生存年金之辦法付給其妻。在賠款期內，如妻亦死亡，其賠款即行終止，又規定第一期賠款當在某甲死亡證實時即應支付。今某甲死亡證實時，其妻適爲 25 歲，問該保險公司每年應付甲妻之賠款幾何?

10. 某甲保有保額 10,000 之人壽保險，規定其賠款當自其死亡證實時起依如下之辦法按年付給其妻，其辦法爲先依確定年金支付 20 年，在此二十年內，不論其妻生存與否每年均須付給，再於此二十年之後，如其妻仍然生存者，則每年仍當付給同額之生存年金。今某甲死亡證實時，其妻適爲 25 歲，問該保險公司每年應付甲妻之賠款幾何?

11. 求 $a_{40}^{(4)}$，$a_{40}^{(12)}$，$s_{40}^{(4)}$ $s_{40}^{(12)}$ 之值。

12. 一妻能於其夫死亡後每月收進 \$ 100，其第一次進款在其夫死亡之時即可收得。此種進款至妻自身死亡時，始行停止。今若其夫死亡時，妻年適爲 50 歲，問此種進款，在當時之現價，共爲幾何?

13. 求 $a_{25:\overline{10|}}^{(12)}$ 及 $s_{25:\overline{10|}}^{(12)}$ 之值。

14. 在某一大學中，其教授自任助教起繼續服務 25 年後告老辭職，由學校當局於其退職一年之年底起，每年支給其最後年薪之半另加四百元之數，作爲養老之資。今有一年二十八歲之人，在該大學任助教，假定其至將來服務二十五年後改爲教授之時，即將依例辭退，若至辭退時之最後年薪將爲 \$ 5,000，問在二十八歲時對此養老金之現價若干？

15. 某大學對於教授之養老金辦法，本規定教授服務至 65 歲時，得告老辭退，由學校當局於每年年底，發給其最後年薪之半另加四百元之數，爲養老之資，今則將其年限改爲 70 歲。設有一年三十歲之教授，假定其最後年薪可得 \$ 5,000，問前後二種養老金辦法在三十歲時之現價相差幾何？

16. 某甲年 25 歲，繼承一每月五百元之終身收益，其第一期付款在繼承時即可收得。若政府向此種遺產依其當時之現價徵收百分之五之遺產稅。問某甲共應付稅若干？

17. 某甲至六十一週歲時起，每年可得一千元之終身生存年金，後擬使其年老時收款加增起見，將每年應得之款停取十年，至七十一週歲時起始行收受，問此後每年可得款若干？

18. 今有一 38 歲之鐵路職員，每年收入 \$ 1,500，因工作致死，後經其家屬起訴，判由鐵路局依此職員以後終身所得之每年 \$ 1,500 收入之現價總數三分之二賠償。問應賠之款若干？

19. 依照聖公會之養老金辦法，凡牧師於 68 歲時辭退者，得每年領得其平均年俸乘其服務年數之總值之 $\frac{1}{4}$%，爲養老之資。此款當自六十九歲時付起。某甲自二十七歲起入教堂爲牧師，今爲四十五歲。假定其平均年俸爲一千八百元，試計算其將來應得養老金在四十五歲時之現價若干？

20. 若第 19 題中所說之教堂，並無養老金辦法，某牧師欲於服務期內，每年存儲若干，依年息五釐生息，使其所積總數，在 68 歲告退時，可購得與上題養老金相等之生存年金。問其每年底應存儲之數若干？（生存年金之利息仍依三釐半之利息計算）。

第十三章　人壽保險純保險費

第一節　人壽保險純保險費之意義

人壽保險費之計算，亦可應用現價與期望率之計算原理。玆爲便於說明起見，先將人壽保險中之重要名辭說明如下。

人壽保險 (Life Insurance) 爲社會制度之一種，其作用在於集合多數個人於一經濟組織之下，依互助之原則，將各人所不能預定之死亡損失，公平分配於其全體人員，使各人員所負擔者，均爲一常態死亡下之損失。此種社會制度，經過長期之改良與發展，成爲今日人壽保險公司之形式。

人壽保險公司爲一獨立之經濟組織，乃分配人生死亡損失之中心機關，同時又爲一牟利之商事企業，凡欲將不能預定之死亡損失，改爲常態死亡之損失者，可向保險公司投保壽險，投保之人在保險法中稱爲**要保人**(Applicant)。經保險公司允准保險之人，稱爲**被保險人** (Insured)。要保人有時卽爲被保險人，有時則否。要保人當依指定方法付款於保險公司，保險公司則於所保之損失發生時，付給賠款。至於要保人所付之費，稱爲**保險費**(Premiums)亦稱**總保險費**(Gross or Office Premium)。賠款之數，卽所保損失之金額，則稱三**保險金額** (Amount of Insurance)。因被保險人之死亡而得收受保險公司所付之賠款者，稱曰**受益人**(Beneficiary)。

受益人所得之**利益** (Benefit) 通常卽指所可得之損失賠償而言，但自數學上之意義觀之，當指保險公司所付之賠款，依期望率所折合之金

額言之,較爲確當。

被保險人與保險公司之關係成立之後,當訂立一正式之書面契約,此契約卽稱曰**保險單**(Policy),舉凡保險種類,保險金額,保險期限,應付保費,受益人等各重要條款均應一一規定於保險單中。被保之人亦常稱爲**保險單持有人**(Policy Holder)。

保險單上之日期,通常卽爲保險費起算之日期,亦卽爲保險起效之日期。自此日期起之第一整年,稱曰**第一保險單年**(First Policy Year),其第二年卽爲**第二保險單年**等等。

至於**純保險費**(Net Premuim)者,則與通常所付之保險費卽總保險費有別,其現價之總計,係依指定之死亡表及利率計算,當與利益之現價相等。易言之,如被保險人之死亡率與所指定之死亡表完全相等,如所能獲得之利率與所指定之利率亦完全相等,如營業之經營並不含有任何之費用,如死亡之損失係於各保險單年末被保險人死亡之時付給者,則純保險費卽爲保險公司應收之數,適足以抵補因被保險人之死亡而支付之賠款數。

人壽保險之種類甚多,其最通行者,有終身保險,定期保險與儲蓄保險。(亦稱生死合險及資富保險)三種,本章先述此三種人壽保險純保險費之計算方法,次章則述此三種人壽保險單之估價。

第二節　終身保險之躉繳純保險費

終身保險(Whole Life Insurance)者,被保險人無論何時死亡,保險公司均給以賠款之保險也。而**躉繳純保險費**(Net Single Premium)則指須於保險單起效時一次繳清之數,等於所保之損失額在此時之現價者而言,故其金額係依指定之死亡表及利率所計算而得之利益現價。

終身保險純保險費之計算方法,可仿照期末付生存年金現價之計算原理,以逐年之死亡人數,代替每年末之生存人數而求得之。

茲假定有 x 年齡之 l_x 人,向一保險公司保得每人一元之終身保險。

則依死亡表觀之,在 x 至 $x+1$ 一年之內,即有 d_x 人死亡,公司即須於第一保險單年末,付出 d_x 之賠款。在第二保險單年末應付之賠款,當爲 d_{x+1}; 第三年末之賠款,應爲 d_{x+2}。依此計算,其逐年所付賠款之現價總數如下:

$$vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdots\text{至表末}$$

此項賠款總數,應由全體被保險人 l_x 分擔之。於是 l_x 人中每人所得之保險現價,即爲其投保時一次付足之純保費,當以 l_x 除上式總數而得之。今以 A_x 代表躉繳純保險費,得其公式如下:

$$A_x=\frac{vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdots\text{至表末}}{l_x} \qquad \text{(第 1 式)}$$

人壽保險中之計算,多根據美國經驗死亡表及三釐半之利率。此後各習題,即依此計算之。

習 題 一

1. 有一年齡九十二歲之人,向保險公司保得保額 \$1,000 之終身保險,求其躉繳純保險費幾何?
2. 求 91 歲,保額 \$1,000.00 終身保險之躉繳純保費。
3. 求 90 歲,保額 \$1,000.00 終身保險之躉繳純保費。
4. 求 89 歲,保額 \$1,000.00 終身保險之躉繳純保費。
5. 根據以上四題之情形,試列式表示 A_x 與 A_{x+1} 之關係.
6. 根據第 4 題所得 A_{89} 之值,求 A_{88} 之值。
7. 某 40 歲之人,保得保額 \$1,000 之終身保險,試列出求得躉繳純保費之算式。

第三節 生存年金與人壽保險計算表之 C_x 行與 M_x 行

若將上節第 1 式右端之分子與分母,各乘以 v^x,則其式變爲下式:

$$A_x=\frac{v^{x+1}d_x+v^{x+2}d_{x+1}+v^{x+3}d_{x+2}+\cdots\text{至表末}}{v^xl_x}$$

今引用下列換算符號,使

$$C_x=v^{x+1}d_x,\quad M_x=C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdots\text{至表末}$$

則上式當化爲下式：

$$A_x = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots \text{至表末}}{D_x}$$

$$= \frac{M_x}{D_x} \qquad \text{(第 2 式)}$$

本書用表 XVI 中 C_x 行與 M_x 行之數額，卽根據上式，依美國經驗死亡表及三釐半利率所計算而得者。應用之可減上節第 1 式計算之繁。玆舉例示其應用如下：

例——求二十五歲起保額 \$5,000 之終身保險單之躉繳純保險費。在此情形下，可依第 2 式計算之如下：

$$A_{25} = \frac{M_{25}}{D_{25}}$$

查用表 XVI，得 $M_{25} = 11,631.1$，$D_{25} = 37,673.6$

代入上式，卽得

$$A_{25} = \frac{11,631.1}{37,673.6} = .308733$$

今保額共爲 \$ 5,000，(註)於是躉繳純保險費應爲：$5,000\ A_{25} =$ \$1,543.66。用表 XVI 中 A_x 行之值，卽應用 M_x 與 D_x 二行之值計算而得者。上例中之 $A_{25} = .308733$ 卽可自該行中直接查得。

習　題　二

1. 應用用表 XVI 中 A_x 行之值，求 50 歲起保額 \$ 5,000 終身保險之躉繳純保險費。

2. 在保額 \$ 1,000 之終身保險，如保險年齡 (a) 20 歲改爲 21 歲，(b) 50 歲改爲 51 歲時，其一次繳足之純保險費應增加若干？

(註)純保險費之計算，在商業習慣上，常以保險金額 \$ 1,000 爲單位，先將保險金額 \$ 1,000 之純保險費算出，至小數分位爲止，然後欲求任何保險金額之純保險費，卽可以該項保險金額與 \$ 1,000 之比例，乘保險金額 \$ 1,000 之純保險費而得之。在本書習題中，亦從此習慣。

第四節 躉繳純保險費 A_x 與生存年金現價 a_x 之關係

純保險費之計算，與生存年金現價之計算，其關係至爲密切。終身保險中躉繳純保險費 A_x 之價值，得以期末付生存年金之現價 a_x 表示之。玆根據上文第1式，將 A_x 之價值，演化如下：

$$A_x=\frac{vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdots\text{至表末}}{l_x}$$

$$=\frac{v(l_x-l_{x+1})+v^2(l_{x+1}-l_{x+2})+v^3(l_{x+2}-l_{x+3})+\cdots\text{至表末}}{l_x}$$

$$=\frac{vl_x+v^2l_{x+1}+v^3l_{x+2}+\cdots}{l_x}-\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots}{l_x}$$

$$=v\left(1+\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+\cdots}{l_x}\right)-\frac{vl_{x+1}+v^2l_{x+2}+v^3l_{x+3}+\cdots}{l_x}$$

以前章第4式之 a_x 代入上式，卽得：

$$A_x=v(1+a_x)-a_x \qquad \text{（第3式）}$$

觀此公式，可知純保險費之計算，可利用生存年金之計算公式而變化之，此實爲計算上之一種重要關係。但仍可將此公式加以變化，而成一能直接用言辭說明之形式。如此當引用貼現率 d 之值

$$d=iv=\frac{i}{1+i}=\frac{1+i-1}{1+i}=1-v$$

代入第3式內，卽得：

$$A_x=\frac{1+a_x}{1+i}-a_x=\frac{1+a_x-a_x-ia_x}{1+i}=\frac{1-ia_x}{1+i},$$

$$=\frac{1}{1+i}-\frac{ia_x}{1+i},$$

$$=v-da_x,$$

$$=1-d-da_x,$$

$$A_x=1-d(1+a_x) \qquad \text{（第4式）}$$

第4式之意義，甚易明瞭。卽不用任何代數學上之演化，亦可根據

下述原理，直接列成此式。

設保險金額爲一元，如當時卽行付給，則被保險人所得之價值，卽係一元，於是應付給保險公司之純保險費亦當爲一元。但被保險人之死亡，乃假定與死亡表上之程序相同者，並非於投保時卽時死去，而其保險金額之支付，必須於被保險人死亡一年之末始行付給，故當從此一元中減去被保險人(x)生存期內每年利息之總價值。此一元之每年利息，卽爲 i，此利息在每年初之價值則爲 d，卽爲一元之貼現息。在被保險人(x)之生存期內，此一元之每年貼現息，成爲一期首付生存年金，故其在當時之現價總數卽爲：

$$d\text{a}_x = d(1+a_x)$$

以此現價自保險金額一元中減去之，卽得其保險金額一元在投保時之實際價值。於是保險金額一元之終身保險，其蠆繳純保險費應爲 $1-d(1+a_x)$。此卽第 4 式之右端是也。

習　題　三

1. 依美國經驗死亡表及三釐半之利率，得年 20 歲每年一元之生存年金之價值爲 \$20.144。問年 20 歲保額一元之終身保險之蠆繳純保險費若干？又年 20 歲保額一千元之終身保險之蠆繳純保險費若干？

2. 已知 $a_{25}=\$19.442$，求年 25 歲保額一元之終身保險之蠆繳純保險費，及年 25 歲保額一千元之終身保險之蠆繳純保險費。

3. 將 a_x 之公式以下列之符號表示之：

　一、v 及 A_x；

　二、d 及 A_x；

　三、i 及 A_x；

第五節　終身保險之年繳純保險費

人壽保險之保險費常分年平均繳納。分年繳納保險費，有規定在被保險人生存期內，每年繼續繳納者，亦有限定一定之年數者。且每年繳納之保險費，亦有改爲每半年，每季或每月繳納者；在工業保險中更有

每星期繳納之例。

終身保險單上之保險費，若規定在被保險人生存期內每年繼續繳納者，此種保險單卽稱曰**普通終身保險單**(Ordinary Life Policy)，若其保險費限定在一定之年限內分年付繳者，則稱曰**限期繳費終身保險單**(Limited Payment Life Policy)或曰**分 n 期繳費終身保險單**(N-Payment Life Policy)。

年繳純保險費(Net Annual Premium)，或稱**分年均等純保險費**(Net Annual Level Premium)，乃於每保險單年開始時，繳入定額之純保險費；其繳納之限期，或為被保險人生存之年限，或為一另行規定之年限；其在投保時之現價總數，當等於同一保險之躉繳純保險費。

普通終身保險之分年繳納純保險費，或為一由被保險人付與保險公司之期首付生存年金。今若以 P_x 代表在 x 年齡時保額一元之普通終身保險單之年繳純保險費，則此 P_x 之值，可依其與躉繳純保險費 A_x 之關係列式如下：

$$P_x(1+a_x)=A_x \qquad \text{(第 5 式)}$$

或為：

$$P_x=\frac{A_x}{1+a_x} \qquad \text{(第 6 式)}$$

今若以換算符號代入之，因 $A_x=\frac{M_x}{D_x}$，$1+a_x=\frac{N_x}{D_x}$，其公式遂改為：

$$P_x=\frac{M_x}{N_x} \qquad \text{(第 7 式)}$$

普通終身保險單之年繳純保險費 P_x，其公式可以生存年金與貼現息之符號表示之。以第 4 式中之 A_x 之等值，代入第 6 式中，卽得：

$$P_x=\frac{1-d(1+a_x)}{1+a_x}$$

將上式化簡，得：

$$P_x=\frac{1}{1+a_x}-d \qquad \text{(第 8 式)}$$

上式之意義，可以說明如下：

設保險金額爲一元，若在投保時卽行付給，被保險人(x)所得之價值爲一元，在生存期內每年初應繳之純保險費當爲 $\dfrac{1}{1+a_x}$ 元。假定被保險人之死亡與死亡表上之程序相同，而此一元之保險金額，必須於被保險人死亡之年末始行付給，故當由每年初應付之純保險費 $\dfrac{1}{1+a_x}$ 元中，減去保額一元之每年貼現息 d。乃得被保險人實際應付年繳純保險費如上式。

分 n 期繳費終身保險之分年繳納純保險費，可以 ${}_nP_x$ 代表之。此分年付費之 ${}_nP_x$，卽成爲限期 n 年之期首付生存年金。應用每年一元限期 n 年之期首付生存年金現價公式 $a_{x\overline{n|}}$，卽得此 ${}_nP_x$ 之公式如下：

$$ {}_nP_x a_{x\overline{n|}}=A_x \qquad (第 9 式)$$

或

$$ {}_nP_x=\frac{A_x}{a_{x\overline{n|}}} \qquad (第 10 式)$$

今若以換算符號代入之，因

$$a_{x\overline{n|}}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$$

又

$$A_x=\frac{M_x}{D_x}$$

卽得下示公式：

$$ {}_nP_x=\frac{M_x}{N_x-N_{x+n}} \qquad (第 11 式)$$

習　題　四

1. 年 25 歲保額 \$ 5,000 之普通終身保險之年繳純保險費若干？
2. 今有年 25 歲保額 \$ 5,000 限二十年繳費之終身保險單，問年繳純保險費若干？
3. 今有年 50 歲保額 \$ 5,000 限十年繳費之終身保險單，問年繳純保險費若干？
4. 應用用表 XVI 之 A_x 與 $1+a_x$ 兩行數額求下列各年繳純保險費：

   (a) 年 35 歲保額 \$ 1,000 普通終身保險之年繳純保險費；

   (b) 年 45 歲保額 \$ 5,000 普通終身保險之年繳純保險費；

   (c) 年 55 歲保額 \$ 5,000 普通終身保險之年繳純保險費。
5. 根據第 4 題(c)所得年繳純保險費之數，求同年同額限二十年繳費終身保險單之年繳純保險費。

6. 應用用表 XVI 中期首付生存年金 $1+a_x$ 之值，依本章公式(8)求得下列二種年繳純保險費。

(a) 年 30 歲保額 $ 1,000 普通終身保險之年繳純保險費；

(b) 年 40 歲保額 $ 1,000 普通終身保險之年繳純保險費。

第六節　定期保險之躉繳純保險費

定期保險 (Term Insurance) 者，乃訂定保險期間之保險，被保險人設在此訂定期間內死亡，保險公司付給賠款，若訂定之期間已滿，未曾續保，則此後被保險人死亡與否，保險公司概不負賠償之責。是故在定期保險，其保險公司未必一定賠款，此與終身保險之終須賠款者不同。至於訂定之保險期間，有長短之別，隨被保險人之選擇而定，有一年期，五年期，十年期，二十年期，三十年期諸種。

計算 n 年期定期保險之純保險費，可依下列方法，求其公式。

茲有一保險公司，發給保額一元 n 年期之定期保單於 x 歲之全體 l_x 人。依照死亡表之死亡程序，在此 n 年中之死亡人數如下：在第一年爲 d_x，在第二年爲 d_{x+1}，在第三年爲 d_{x+2}，…至第 n 年爲 d_{x+n-1}。於是每年底應付之賠款爲：

$$d_x,\ d_{x+1},\ d_{x+2},\ d_{x+3}\cdots d_{x+n-1}$$

而每年之賠款，在第一年投保時之現價總計，當爲：

$$vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdots+v^nd_{x+n-1}$$

此項賠款總數，自當從所保之 l_x 人中收回之，於是以 l_x 除此總數，即得每人投保時應付之純保險費。今若以符號 $A'_{x\overline{n}|}$ 代表此種 x 年齡時保額一元 n 年期定期保險之躉繳純保險費，則其計算公式如下：

$$A'_{x\overline{n}|}=\frac{vd_x+v^2d_{x+1}+v^3d_{x+2}+\cdots+v^nd_{x+n-1}}{l_x}\qquad\text{(第 12 式)}$$

若欲將此 $A'_{x\overline{n}|}$ 依換算符號表示之，則可將上式右端之分子分母，均以 v^x 乘之，得式如下：

$$A'_{x\overline{n}|}=\frac{v^{x+1}d_x+v^{x+2}d_{x+1}+v^{x+3}d_{x+2}+\cdots\cdots+v^{x+n}d_{x+n-1}}{v^x l_x}$$

$$=\frac{C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdots+C_{x+n-1}}{D_x} \qquad \text{(第 13 式)}$$

若欲將上式再行簡化，可用換算符號 M_x 代入之：

今按本章第 3 節所示，

$M_x=C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdots+C_{x+n-2}+C_{x+n-1}+C_{x+n}+\cdots$至表末，

依此理論推之可得下式：

$$M_{x+n}=C_{x+n}+C_{x+n+1}+\cdots\text{至表末}$$

12 與 13 兩式相減，即得下式：

$$M_x-M_{x+n}=C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdots+C_{x+n-1}$$

於是第 13 式成為：

$$A'_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x} \qquad \text{(第 14 式)}$$

上式中之 x, n, 甚便應用，如自二十五年歲起定期二年之保險單，其躉繳純保險費即為：

$$A'_{25\overline{2}|}=\frac{M_{25}-M_{27}}{D_{25}}$$

$$=\frac{11,631.1-11,054.0}{37,673.6}=\$0.01532$$

當定期保險單之期限定為一年時，其式中之 n 即當以 1 代之。由此計算而得之純保險費，稱曰自然保險費(Natural Premium)，其價值可以下列諸等式表示之：

$$A'_{x\overline{1}|}=\frac{vd_x}{l_x}=\frac{C_x}{D_x}=\frac{M_x-M_{x+1}}{D_x} \qquad \text{(第 15 式)}$$

自然保險費乃以一年為一期之定期保險費。不止一年之定期保險與夫終身保險，論其性質乃集合若干為期一年之定期保險而成；故其保險費亦可依自然保險費之方法，按年分付。依此方法所付之保險費，逐年有增高之現象。蓋因年齡愈大，死亡之比率愈高，保險費亦隨之而增，乃屬自然之趨勢，故謂之自然保險費。試觀下表，可以知其大略：

年齡	一年內死亡人數	年底應付賠款每人一元	依利率 $3\frac{1}{2}\%$ 計算在年初之現價	年初生存人數	每人應付保險費
25	718	$ 718	$ 693.72	89,032	$ 0.00779
26	718	$ 718	693.72	88,314	0.00786
27	718	$ 718	693.72	87,596	0.00792
28	718	$ 718	693.72	86,878	0.00798
29	719	$ 719	694.69	86,160	0.00806

茲設有自二十五歲起，定期五年保額一元之保險單一紙，若依自然法計算，則被保險人於每年初應繳之純保險費，即可照上表所列之數繳納。此種方法於被保險人甚屬不便，故有上述之躉繳及下節所述之年繳均等辦法以代替之。但於計算保險積存金(Reserve)時，則仍當依此自然保險費爲根據也。

習　題　五

1. 茲有自 22 歲起保，保額 $ 12,000 之 10 年期定期保險，求其躉繳純保險費。
2. 茲有 30 歲保額 $ 1,000 之 5 年期定期保險，求其躉繳純保險費。
3. 求保額 $ 1,000 在 30 歲，35 歲，40 歲，及 45 歲各年齡之自然保險費。
4. 茲有保額 $ 1,000 自 20 歲起保之 5 年期定期保險，求其投保時之躉繳純保險費。及其各年之自然保險費。
5. 將第 4 題之各年自然保險費相加，其總數較開始應付之躉繳數爲多，試述其理由。
6. 依第 5 題之理由，不應用躉繳純保險費公式，從第 4 題已知之自然保險費，推算其躉繳純保險費，並與依公式求得該種之躉繳純保險費互相核對。
7. 求下列各種定期保險之躉繳純保險費及自然保險費：

 (a) 年 30 歲保額 $ 1,000 定期十年之躉繳純保險費，

 (b) 年 25 歲保額 $ 5,000 定期十五年之躉繳純保險費，

 (c) 年 45 歲保額 $ 1,000 定期五年之每年自然保險費。

第七節　定期保險之年繳均等純保險費

定期保險之年繳均等純保險費，每年所繳之款，成爲一期首付之限期生存年金，或稱限期 n 年之期首付生存年金，與限期繳費之終身保險之繳費情形相同。

今若以 $P'_{x\overline{n}|}$ 之符號，代表面額一元自 x 歲起 n 年期之定期保險之年繳純保險費，則其價值卽可自同種保險中一次繳足之純保險費計算之。蓋此種年繳均等純保險費，旣成爲限期 n 年之期首付生存年金，則其投保時之總現價，當等於此種保險之躉繳純保險費。故得下式：

$$P'_{x\overline{n}|}\ddot{a}_{x\overline{n}|}=A'_{x\overline{n}|}$$

將上式移項，卽得此 $P'_{x\overline{n}|}$ 之式如下：

$$P'_{x\overline{n}|}=\frac{A'_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}} \qquad \text{(第 16 式)}$$

玆以換算符號表示之，因

$$A'_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}$$

及

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|}=\frac{N_x-N_{x+n}}{D_x}$$

代入第 16 式，卽得此 $P'_{x\overline{n}|}$ 之公式如下：

$$P'_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}} \qquad \text{(第 17 式)}$$

例如保額一元自二十五歲起定期五年之保險，其年繳均等純保險費當如下示：

$$P'_{25\overline{5}|}=\frac{M_{25}-M_{30}}{N_{25}-N_{30}}$$

$$=\frac{11,631.1-11,259.0}{770,113-596,804}=\frac{1,372.1}{173,309}=\$0.00792$$

若以此數與前節之自然保險費比較，可知其開始二年之保險費，實較自然保險費爲高，而末後二年之保險費，則較自然保險費爲低也。

習　題　六

1. 求保額 $5,000 自二十五歲起定期五年之保險應付之年繳均等純保險費。

2. 已知保額 $1,000 自二十五歲起定期二年之保險單之躉繳純保險費爲 $15.32，試依本章第 16 式求其年繳均等純保險費。

3. 有一保額 $10,000 之定期保險單,起保時被保險人之年齡爲 30 歲,至 65 歲時到期,求其年繳均等純保險費。

4. 求下列各定期保險單之年繳均等純保險費:

(a) 保額 $ 1,000, 自三十歲起,定期五年;

(b) 保額 $ 5,000, 自三十五歲起,定期十五年;

(c) 保額 $ 2,000, 自四十歲起,定期二十五年。

第八節 儲蓄保險之躉繳純保險費

儲蓄保險 (Endowment Insurance)者,乃一種生死兩保之定期保險,爲普通定期保險與生存保險金 (Pure Endowment) 混合之一種辦法。此種保險,被保險人若於所保期內死亡時,保險公司當付給死亡賠款。若被保險人於保險單期末仍然生存,保險公司則當付給生存保險金。此種保險,除預防死亡損失之外,又含有生存保險金之投資,故亦稱爲生死合險,又曰資富保險。例如二十五歲定期十年保額一千元之儲蓄保險,其一千元之保額,於發生下列情形之一時給付之:(一)被保險人在二十五歲至三十五歲間之十年內死亡者;(二)被保險人至三十五歲保險單滿期時仍然生存者。因第一種情形而賠款者,係一定期十年之定期保險;因第二種情形而付款者,係一十年期之生存保險。此種保險,實含有在定期內死亡之機率,與生存至定期末之機率二者,根據此項原理,卽可計算其躉繳純保險費焉。

假定前項保險單,係給予 25 歲之人之全體者,則可依照死亡表,計算保險公司在十年內應付死亡者賠款在 25 歲時之總現價,及十年後應付生存者之保險金在彼等 25 歲時之總現價,以全體 25 歲之人數,除兩項現價之和,卽得每人應付之躉繳純保險費。茲根據美國經驗死亡表及三釐半之利率,計算其保險費如下:

十年內應付之死亡賠款

年數	年齡	生存人數	死亡人數	死亡賠款	依利率 $3\frac{1}{2}$%計算 $1 之現價	死亡賠款在第一年初之現價
1	25	89,032	718	$718,000	.9661836	$693,719.82
2	26	88,314	718	718,000	.9335107	670,260.68
3	27	87,596	718	718,000	.9019427	647,594.86
4	28	86,878	718	718,000	.8714422	625,695.50
5	29	86,160	719	719,000	.8419732	605,378.73
6	30	85,441	720	720,000	.8135006	585,720.43
7	31	84,721	721	721,000	.7859910	566,699.51
8	32	84,000	723	723,000	.7594116	549,054,59
9	33	83,277	726	726,000	.7337310	532,688.71
10	34	82,551	729	729,000	.7089188	516,801.80
十年內死亡賠款之現價總計						$5,993,614.63

十年後應付之生存保險金

年齡	生存人數	生存保險金	依 $3\frac{1}{2}$% 計算 $1 之現價	生存保險金在第一年之現價
25	89,032			
35	81,822	$ 81,822,000	.7089188	$ 58,005,154.05

總　計

	現　　價	生存人數	一次繳足之純保險費
死亡賠款	$ 5,993,614.63	89,032	$ 67.320
生存保險金	58,005,154.05	89,032	651.510
總　計	$63,998,768.68	89,032	$718.830

由此可知依三釐半之利率計算，在保險金額一千元自二十五歲起

定期十年之儲蓄保險，其躉繳純保險費應爲 \$ 718.830。其中 \$ 67.320 爲一同額同年之定期保險純保險費； \$ 651.510 則爲一同額同年之生存保險金之現價。

上例之計算，乃爲使讀者易於明瞭儲蓄保險之意義而設者，玆按代數原理求得此種保險之躉繳純保險費之公式如下。

今以 $A_{x\overline{n}|}$ 符號，代表保額一元自 x 歲起定期 n 年之儲蓄保險之躉繳純保險費。從上所述，當知此 $A_{x\overline{n}|}$ 爲保額一元自 x 歲起 n 年期之定期保險之躉繳純保險費 $A'_{x\overline{n}|}$，及自 x 歲起 n 年期後可得一元之生存保險金之現價 ${}_nE_x$ 二者之和。故其公式當如下示：

$$A_{x\overline{n}|}=A'_{x\overline{n}|}+{}_nE_x \qquad \text{(第 18 式)}$$

若以換算符號表示之，因

$$A'_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}$$

及

$${}_nE_x=\frac{D_{x+n}}{D_x}$$

將上兩數代入第 18 式，卽得：

$$A_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x} \qquad \text{(第 19 式)}$$

上例所求之純保險費，可依此公式計算之如下：

$$\begin{aligned}1,000\,A_{25\overline{10}|}&=1,000\times\frac{M_{25}-M_{35}+D_{35}}{D_{25}}\\&=1,000\times\frac{11,631.1-9,094.96+24,544.7}{37,673.7}\\&=1,000\times\frac{2,708.84}{37,673.7}\\&=1,000\times.71883=\$\,718.83\end{aligned}$$

此其結果，與上相同，但其計算工作則可減省不少。

習 題 七

1. 求下列各種儲蓄保險之躉繳純保險費：

(a) 保額一千元自二十五歲起定期二十年；

(b) 保額五千元自三十歲起定期十五年;

(c) 保額五千元自四十歲起定期十年;

(d) 保額二千五百元自四十五歲起定期五年。

2. 依照美國經驗死亡表及年息四釐,計算保額一千元自三十歲起定期五年之儲蓄保險之躉繳純保險費。

第九節　儲蓄保險之年繳均等純保險費

定期 n 年之儲蓄保險之純保險費,如分 r 年期均等繳付,則其 r 次之付款,卽成爲 r 年期之期首付限期生存年金;其情形與定期保險之年繳均等保險費及終身保險之限期繳費者,亦復相同。此 r 年期期首付限期生存年金之現價,當等於同種儲蓄保險之躉繳純保險費。

今若以 ${}_rP_{x\overline{n}|}$ 代表保額一元自 x 歲起定期 n 年之儲蓄保險分 r 年均等繳納之年繳純保險費,則此 r 次分繳之 ${}_rP_{x\overline{n}|}$,卽爲每年付 ${}_rP_{x\overline{n}|}$ 之 r 年期期首付限期生存年金,其現價之總計,當等於儲蓄保險之躉繳純保險費。於是遂有:

$$
{}_rP_{x\overline{n}|}\cdot \ddot{a}_{x\overline{r}|}=A_{x\overline{n}|}
$$

之等式。將此式移項,卽得 ${}_rP_{x\overline{n}|}$ 公式如下:

$$
{}_rP_{x\overline{n}|}=\frac{A_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{r}|}} \qquad \text{(第 20 式)}
$$

若以換算符號表示之,因

$$
A_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{D_x}
$$

及

$$
\ddot{a}_{x\overline{r}|}=\frac{N_x-N_{x+r}}{D_x}
$$

代入第 20 式,卽得 ${}_rP_{x\overline{n}|}$ 之公式如下:

$$
{}_rP_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+r}} \qquad \text{(第 21 式)}
$$

如儲蓄保險之保險單期限,卽爲繳費之期限,易言之,卽其保險費依所保之期限每年均等付給者,則其式中之 r,卽等於 n,於是其保險費之公式,遂成爲:

$$P_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}} \qquad \text{(第 22 式)}$$

此公式亦可依定期保險之年繳均等純保險費公式，及生存保險金換算爲生存年金之公式求得之如下：

自本章第 7 節中第 17 式得保額一元之定期保險之年繳純保險費如下：

$$P'_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

自前章第 14 節第 62 式，生存保險金一元折合爲限期 n 年之期首付生存年金之年金額如下：

$${}_nE_x\cdot\frac{1}{\text{a}_{x\overline{n}|}}=\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

二者相加，即得定期 n 年儲蓄保險之年繳均等純保險費之 $P_{x\overline{n}|}$ 公式如下：

$$P_{x\overline{n}|}=\frac{M_x-M_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}+\frac{D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$
$$=\frac{M_x-M_{x+n}+D_{x+n}}{N_x-N_{x+n}}$$

例如前節所舉之保額 \$1,000 自 25 歲起定期十年之儲蓄保險，若其保險費分十年均等繳付，則其年繳純保險費如下：

$$1,000P_{25\overline{10}|}=1,000\times\frac{M_{25}-M_{35}+D_{35}}{N_{25}-N_{35}}$$
$$=1,000\times\frac{11,631.1-9,094.96+24,544.7}{770,113-456,871}$$
$$=1,000\times\frac{27,080.84}{313,242}$$
$$=1,000\times0.086453=\$86.453$$

習 題 八

1. 求保額一千元自二十五歲起，定期二十年之儲蓄保險，分二十年均等繳納之年繳純保險費。

2. 求上題中之年繳純保險費，若分十年均等繳納，爲數幾何？

3. 依美國經驗死亡表及年息四釐計算，求保額一千元自三十歲起定期五年之儲蓄保險之年繳均等純保險費。

4. 求保額一千元自二十五歲起至六十五歲止，定期四十年之儲蓄保險之年繳均等純保險費，如規定保險費應於最初二十年內分年繳訖，則每年應繳若干？

5. 一人現年四十五歲，向甲公司保得二十年期保額 $ 25,000 之定期保險，同時爲老年贍養計，向乙公司購得二十年期保額 $ 25,000 之生存保險金。若二處之繳費均爲每年平均計算，限二十年繳清者，則每年繳費（純額計算）各若干？如將此二種保險併合爲一同額同期之儲蓄保險，問每年應繳保險費共若干？

覆習題

1. 求自二十歲起保額 $ 1,000 普通終身保險之年繳均等純保險費。

2. 求自二十歲起保額 $ 1,000 至 85 歲到期之儲蓄保險之年繳均等純保險費。並問此項保險費與上題之保險費，每年相差若干？

3. 求自二十歲起保額 $ 1,000 十年後到期之儲蓄保險之年繳均等純保險費。試計算此項保險費與第 1 題之保險費，每年相差若干？

4. 上題之年繳保險費與第 1 題之年繳保險費之差數，較第 1 題與第 2 題之差數爲大，試說明其理由。

5. 一人於 25 歲時保得保額 $ 1,000 之終身保險，規定其第一年爲定期保險，此後則爲普通終身保險。問其第一年應繳之純保險費及以後各年應繳之純保險費，各爲若干？

6. 一人於 25 歲時保得　保額 $ 1,000 之終身保險，規定其第一年爲定期保險，此後則爲限期 19 年繳費之終身保險，使其全部保險費得於起始二十年內完全付清。問其第一年應繳之純保險費及以後各年應繳之純保險費各若干？

7. 一人於二十五歲時保得保額 $ 1,000 三十年期儲蓄保險，規定其第一年應繳之純保險費，僅爲定期一年保險之純保險費，而以後二十九年應繳之純保險費，則爲二十九年期儲蓄保險之年繳均等純保險費。問其第一年應繳之純保險費及以後各年應繳之純保險費各若干？

8. 已知保額 $ 1,000 自四十五歲起之終身保險之躉繳純保險費爲 $ 456.00。求自同年起保額 $ 544 限二十年期均等繳費之終身保險之年繳純保險費爲若干？

9. 證明 $M_x = vN_x - N_{x+1}$。

10. 證明 $A_x = \dfrac{P_x}{P_x + d}$

11. 今有自85歲起之終身保險，訂明其保險單之賠款，須於被保險人死亡之年底起，每年支付一千元，分十年付清。問當初投保時應躉繳純保險費若干？（註 1）

12. 求第 11 題之年繳均等純保險費。

13. 用下列三符號：A_x, a_x 及 P_x，列成三式，將其中之一符號以其他二符號表示之。

14. 今有保額一千元自 35 歲起之終身保險單一紙，規定當被保險人死亡時，其賠款應

註 1：此保險單之實際保險金額，當爲十年期每年一千元之期首付年金之總現值。

由保險公司存留十年，依年利五釐複利生息。求此保險單上之年繳純保險費。(註 2)

15. 已知保額一千元自四十五歲時起終身保險之躉繳純保險費爲 \$ 456.00。今如被保險人欲將保險費於十年內分四十期付清，每三月初繳費一次，問每期應繳純保險費若干？(註 3)

註 2：計算時所用之利率爲 $3\frac{1}{2}\%$。

註 3：應用前章第 46 式。

第十四章　人壽保險單估價

第一節　人壽保險積存金之意義

人壽保險積存金又稱準備金 (Reserves)，乃保險公司之**預收收益** (Prereceived Income)，爲保險公司之第一項主要負債。依照我國保險法之規定，保險公司解散清算時，保險積存金應予優先付還，其重要可見一斑。

考人壽保險公司所以需有此項積存金者，實爲保險費繳付方法之結果。試檢查死亡表，即能發現人類之死亡率，除最初幾年外，均有與年俱增之現象。凡年齡較高之人，在一年內之死亡機率亦必較高。於是以一年爲單位之定期保險，所應繳付之純保險費(卽自然保險費)。亦必按年齡之大小而遞加，年輕者費低，年大者費高。惟保險費之繳付，通常並不按照自然保險費之原則。保險公司爲圖要保人之便利起見，多另定二種繳費方法：一爲起保時躉繳者，一爲分年均等繳納者。因此二種繳費方法，與自然保險費之原則，不相一致，於是有積存金之發生。被保險人應繳之保險費，若於起保時一次繳足，則其當時繳入之純保險費，足充保險單期內各年之自然保險費；於是在保險單滿期前，所繳保險費較應繳之自然保險費，當有大額之餘數；此餘數卽由保險公司積存之，備充未來之死亡賠款。至在分年均等繳費辦法，其前幾年內繳入之純保險費，較其應繳之自然保險費爲高，而後幾年內繳入之數，則較應繳之自然保險費爲低。故前幾年多繳之保險費，卽由保險公司積存之，並加規定之利息，以抵補後幾年因死亡率增加而致保險費不足之數。此種由保

險公司積存之金額,在當時為公司對保險單持有人之負債,至將來則為公司對於保險單未失效期內較大死亡率(亦即較多之死亡賠款)之賠款準備,稱曰**保險積存金**或曰**保險單之價值**(Value of Policies)。

人壽保險之積存金,與普通公積金之由盈餘特別提存者不同。此處所謂之積存金,非因防備不可見與意外之損失而設置者,實為保險公司向保險單持有人暫時多收之保險費,在當時應為公司對其保險單持有人之負債,其性質與銀行對其存款人之負債相仿。但有一點應加注意,即人壽保險事業,須受大數法則之支配,所謂保險單上之積存金,為保險公司之負債一語,應自其全體保險單之立場而言。固不能指某一保險單上之積存金,即為公司對該保險單持有人之實際負債,且該保險單持有人亦不能將積存金之全數,照銀行存款之例任意提出也。此點於討論退保價值一節中,當再詳論之。

第二節 保險單估價之方法

所謂保險單之估價者,即計算其保險單於某一年末所有之積存金是也。各種保險單於其在第 n 保險單年 (Nth Policy Year) 末之積存金稱曰年末積存金(Terminal Reserve)。其常用之計算方法,有下列二種:

一、**預期估價法** (Prospective Method of Valuation) 此法以保險單之未來有效期間,為計算其積存金之根據,計算方法如下:

(1)求第 n 保險單年末之積存金,即當以第 n 保險單年之末,為其計算之起點,而以保險單滿期之時,為其計算之終點。

(2)預計此後各年內依照死亡表應付之死亡賠款在當時之現價總數。此現價總數,即為保險公司在當時為預抵此後被保險人之死亡損失,所應收取之躉繳純保險費。

(3)預計此後可收之純保險費在當時之現價總數。

(4)以(2)與(3)相較,得其差數,為此後可收之純保險費現價小於

當時應收足之純保險費之數，即爲保險公司在當時(即第 n 保險單年末時)所應積存以抵日後死亡賠款不足之數之積存金是也。

上述之計算方法，可列成公式如下：

'積存金＝未來之死亡賠款－未來之保險費收入'

茲依被保險人之年齡而言，若保險單起效時，被保險人爲 x 歲，則上述公式當改如下式：

'第 n 保險單年末之積存金＝$x+n$ 歲起保時所應躉繳之純保險費－未來可收依 x 歲起保之純保險費在 $x+n$ 歲時之現價'。

此項公式，在任何保險單上，均可適用。

二、**追溯估價法** (Retrospective Method of Valuation)　此法以過去之保險單期間，爲計算其積存金之根據。計算方法如下：

(1)求第 n 保險單年末之積存金，即當以第 n 保險單年之末，爲其計算之終點，而以保險契約成立之時，爲其計算之起點。

(2)計算過去之保險單期內所收之純保險費，按規定之利息，積至第 n 保險單年末之總價值。

(3)計算過去之保險單期內，依照死亡表所付之死亡賠款，按規定之利息，積至第 n 保險單年末之總價值。

(4)以(2)與(3)相較，得其差數，爲過去保險單期內多收之純保險費積至第 n 保險單年末之總價值，以抵補此後死亡賠款之不足者，即爲其保險公司在當時(即在第 n 保險單年末時)所應有之積存金也。

上述之計算方法，亦可列成公式如下：

'積存金＝過去之保險費加利息－過去之死亡賠款加利息'

茲依被保險人之年齡而言，若保險單起效時，被保險人爲 x 歲，則上述公式當改如下式：

'第 n 保險單年末之積存金＝自 x 歲起保至 $x+n$ 歲止，期內所收之純保險費，依規定之利息，積至 $x+n$ 歲時之總價值－自 x 歲起至 $x+n$ 歲止，期內所應收之自然保險費，依規定之利息，積至 $x+n$ 歲時

之總價值'。

此項公式,在任何保險單上,均可適用。

上列二種計算積存金之方法,其計算之程序,雖屬相反,然其所得之結果,則仍相等。蓋其所根據之死亡表,利率及計算原理,均屬相同故也。茲按保險單之種類,將此二種計算方法,先後分節述之如次。

第三節 普通終身保險單之積存金
(預期估價法)

依預期估價法計算普通終身保險單上之年末積存金,以發給於x歲者保額一元之終身保險單爲例,說明之如下:

如所求者爲此保險單在第n年末應有之積存金,則此時被保險人之年齡,已由x歲增進至$x+n$歲。保險公司對於此被保險人自$x+n$歲起所負死亡賠款之責任,等於發給一$x+n$歲者之終身保險單之全部責任,即等於此$x+n$歲之人所應蠆繳之純保險費A_{x+n}。但被保險人所繳之每年純保險費P_x,係依保險時之年齡x歲而計算者,雖此人之年齡已由x歲增至$x+n$歲,然以後逐年所繳之保險費數,則仍如故。故此後各年內保險公司所能收入之純保險費,在$x+n$歲時之現價,僅爲:

$$P_x(1+a_{x+n})$$

今以${}_nV_x$表示保額一元之普通終身保險單在第n保險單年末之積存金,則此${}_nV_x$之值,當等於此後所擔負之死亡賠款責任,超過可收之純保險費價值之差額。於是得式如下:

$$\begin{aligned}{}_nV_x&=A_{x+n}-P_x(1+a_{x+n})\\&=A_{x+n}-\frac{M_x}{N_x}(1+a_{x+n})\end{aligned}\qquad\text{(第 1 式)}$$

上式中各項之值,皆可自用表 XVI 中直接查出。

上述公式亦可完全用年繳均等純保險費表示之。由前章第 5 式中,查得蠆繳純保險費與年繳均等純保險費之關係如下:

$$A_x=P_x(1+a_x)$$

依此公式類推,可得

$$A_{x+n}=P_{x+n}(1+a_{x+n})$$

以此 A_{x+n} 之值。代入上示第 1 式中,使第 1 式成爲下式:

$${}_nV_x=P_{x+n}(1+a_{x+n})-P_x(1+a_{x+n})$$

將上式中之右端兩相似項歸併之,卽得:

$${}_nV_x=(P_{x+n}-P_x)(1+a_{x+n}) \qquad \text{(第 2 式)}$$

此公式之意義,可以說明如下:設有一普通終身保險單,當其發生效力之時,被保險人之年齡爲 $x+n$ 歲,則年繳純保險費當爲 P_{x+n}。但今所指之保險單,於被保險人在 x 歲時,卽已生效,其年繳純保險費卽定爲 P_x。於是此被保險人達到 $x+n$ 歲後,較之自 $x+n$ 歲起保者,每年可少繳 $(P_{x+n}-P_x)$ 之數。此每年少繳之數,在 $x+n$ 歲時之現價爲 $(P_{x+n}-P_x)(1+a_{x+n})$,卽代表該被保險人自 x 歲至 $x+n$ 歲幾年中所多繳之數,亦卽爲保險單上所應有之積存金也。

積存金價值之公式,亦可以生存年金價值之公式表示之。從前章第 4 及 8 兩式中,查得:

$$A_x=1-d(1+a_x)$$

及

$$P_x=\frac{1}{1+a_x}-d$$

以之代入第 1 式中,卽得:

$$\begin{aligned}{}_nV_x&=A_{x+n}-P_x(1+a_{x+n})\\&=1-d(1+a_{x+n})-\left(\frac{1}{1+a_x}-d\right)(1+a_{x+n})\\&=1-d(1+a_{x+n})-\frac{1+a_{x+n}}{1+a_x}+d(1+a_{x+n})\\&=1-\frac{1+a_{x+n}}{1+a_x} \qquad \text{(第 3 式)}\end{aligned}$$

此公式在應用時,甚爲簡便,讀者演習下列習題至第 5 題時,卽能覺其較第 1 及第 2 式便利不少。

茲舉例以示年末積存金之計算方法如下：

例——求一保額 $5,000 於 25 歲起保之普通終身保險單在第 10 保險單年末之積存金。

解法：依本章第 1 式得：

$${}_{10}V_{25}=A_{35}-P_{25}(1+a_{35})$$

查用表 XVI 得：

$$A_{35}=0.37055,\quad 1+a_{35}=18.6138$$

依前章之第 7 式解得：

$$P_{25}=\frac{M_{25}}{N_{25}}=0.00151031$$

將前列各項價值代入公式，即得：

$${}_{10}V_{25}=0.08942^{*}$$

於是得：

$$5{,}000\,{}_{10}V_{25}=\$\,447.10$$

習 題 一

1. 求保額 $5,000 於 30 歲起保之普通終身保險單在第 10 保險單年末之積存金。
2. 求保額 $8,000 於 35 歲起保之普通終身保險單在第 15 保險單年末之積存金。
3. 求保額 $5,000 於 35 歲起保之普通終身保險單在第 10 保險單年末之積存金。
4. 根據用表 XVI 之生存年金欄 $1+a_x$ 之值，及躉繳純保險費欄 A_x 之值，先計出所求之年繳均等純保險費；然後依第 2 式求保額 $1,000 於 30 歲時起保之普通終身保險單在第 8 保險單年末之積存金。
5. 根據用表 XVI 之生存年金欄 $1+a_x$ 之值，依第 3 式求第 4 題中之積存金。

第四節 限期繳費終身保險單之積存金（預期估價法）

上文第 2 節所述以預期估價法計算積存金之公式："第 n 保險單年

*在計算保險單積存金時，習慣上常以保額 $1,000 為計算單位，將保額 $1,000 之保險單上之積存金計算其正確小數至分位止，然後欲求任何保額之保險單積存金，均可以按其與 $1,000 之比例乘得之。在本書習題中，亦從此習慣。

末之積存金＝$x+n$ 歲起保時所應躉繳之純保險費－未來可收依 x 歲起保之純保險費在 $x+n$ 歲時之現價"，為一保險單估價之主要原則，不論保險單之種類如何，均可應用。前節所述普通終身保險單上積存金之公式(1)卽按照此種原則而設立者，讀者對之，當已領悟。茲卽依此同一原則，求得限期繳費終身保險單上之積存金之計算公式。

今若以 ${}_{n:m}V_x$ 代表保額一元限 m 年繳清保險費之終身保險單在第 n 保險單年末之積存金，於是根據上述公式中之原則，可得此積存金之計算公式如下：

$$ {}_{n:m}V_x = A_{x+n} - {}_mP_x(1+a_{x+n:\overline{m-n-1}|}) \qquad \text{(第 4 式)} $$

應用上式時，所當注意者，卽其中之 n，必小於 m。如 n 等於 m，或大於 m，則表示保險單上所限之繳費年數 m，在 n 年末時，已屆繳足，或早已過期，卽自 $x+n$ 歲起，無復有保險費可收。於是上式中之右端第二段卽等於 0。其式遂成為 ${}_{n:m}V_x = A_{x+n}$。

為便利應用起見，可依第十三章公式(11)及第十二章公式(41)將

$$ {}_mP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} $$

及

$$ 1 + a_{x+n:\overline{m-n-1}|} = \frac{N_{x+n} - N_{x+m}}{D_{x+n}}, $$

代入第 4 式中，得：

$$ {}_{n:m}V_x = A_{x+n} - \frac{M_x}{N_x - N_{x+m}} \cdot \frac{N_{x+n} - N_{x+m}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 5 式)} $$

上式中各項之值，皆可自用表 XVI 中直接查出。

躉繳保險費之終身保險單(Single Premium Whole Life Policy)，可視為限一年繳清保險費之終身保險單。計算其積存金時，公式中之 m，當等於 1，於是其積存金之價值，當如下示：

$$ {}_{n:1}V_x = A_{x+n} \qquad \text{(第 6 式)} $$

上述之第 4 式，亦可全部以年繳均等純保險費之價值表示之。式中之 A_{x+n} 以下式。

$$A_{x+n}=_{\overline{m-n}}P_{x+n}(1+a_{x+n:\overline{m-n-1}|})$$

之等值代入之，即得

$$_{n:m}V_x=(_{\overline{m-n}}P_{x+n}-{}_mP_x)(1+a_{x+n:\overline{m-n-1}|})\qquad\text{（第 7 式）}$$

此式即由前節第 2 式推算而來，其意義甚爲簡明。蓋因所指之保險單，係在被保險人年爲 x 歲時所訂立者，被保險人已將其限期 m 年之年繳保險費 $_mP_x$ 付過 n 年，於是在此後所剩餘之 $m-n$ 年中，其每年所付之純保險費，較之自 $x+n$ 歲時始行投保限 $m-n$ 年付清者，每年當可少付 $(_{\overline{m-n}}P_{x+n}-{}_mP_x)$ 之數。此每年之差數爲一定期 $m-n$ 年之期首付生存年金；其在 $x+n$ 歲時之現價，即等於該被保險人在當時所積存之積存金也。

茲舉例以示其計算方法如下：

例——求保額 \$1,000 自 25 歲起保限 20 年繳費之終身保險單第 10 年末之積存金。

解法：依第 4 式得：

$$_{10:20}V_{25}=A_{35}-{}_{20}P_{25}(1+a_{35\overline{9}|})$$

查用表 XVI 得：

$$A_{35}=0.37055$$

再依前章之第 11 式得：

$$_{20}P_{25}=\frac{M_{25}}{N_{25}-N_{45}}=0.02252$$

再依第十二章之第 41 式得：

$$1+a_{35\overline{9}|}=\frac{N_{35}-N_{45}}{D_{35}}=8.27576$$

將各數代入第 4 式解得：

$$_{10:20}V_{25}=0.18418$$

於是遂得：

$$1{,}000\,_{10:20}V_{25}=\$\,184.18$$

習　題　二

1. 求保額 \$ 1,000 自 25 歲起保限 15 年繳費之終身保險單之第 10 年末積存金。

2. 求保額 \$3,000 自 30 歲起保限 15 年繳費之終身保險單之第 6 年末積存金。
3. 求保額 \$1,000 自 25 歲起保限 20 年繳費之終身保險單之第 20 年末積存金。
4. 求保額 \$1,000 於 25 歲起保躉繳保險費之終身保險單之第 20 年末積存金。

第五節　定期保險單之積存金(預期估價法)

定期保險之積存金與終身保險之積存金不同。在終身保險,保險公司之賠款責任,必有履行一次之義務,蓋人必有一死,死則保險公司必須支付賠款,故被保險人生存之期間愈長,保險公司中所積之積存金亦愈多,直至九十五歲最後一年,被保險人仍然生存,則此時公司中之積存金,必等於保險單賠款之數,因此時死亡表之限制旣盡,被保險人雖生猶死故也。但在定期保險則不然。公司之責任旣以所定之期限爲限,到期如被保險人仍然生存,則保險公司之責任,亦卽無形終止,因此當定期保險單到期而被保險人仍然生存者,保險公司自無積存金之需要。至在保險單未滿期前,定期保險亦常有積存金之發生。此點可依定期保險之三種繳費方法分別討論之:

一、自然保險費法　自然保險費乃以一年爲一期之定期保險所應付之純保險費。此費適足以抵補當年依死亡表計算所應付之賠款數,不多亦不少,故無積存金之可言。

二、躉繳法　定期若干年之保險,如其保險費於起保當時卽全部付清者,則以後各年當無復有保險費之收入,於是必需有相當之積存金,以抵補未來各年之死亡賠款。仿前節所述一次繳費之終身保險單之例,可得自 x 歲起保定期 r 年一次繳費之定期保險單在第 n 年末之積存金,卽爲自 $x+n$ 歲起保定期 $r-n$ 年之保險單上之躉繳純保險費。故其公式如下:

$$ {}_{n:1}V'_{x\overline{r|}} = A'_{x+n:\overline{r-n|}} \qquad \text{(第 8 式)} $$

但此 ${}_{n:1}V'_{x\overline{r|}}$ 之値,當隨 n 之增高而逐漸減少,卒至於零爲止,與終身保險單中之 ${}_{n:1}V_x$ 之値,隨 n 之增加而逐年提高,卒等於保險單之面額者,恰屬相反,讀者不可不注意也。

三、年繳法　定期若干年之保險，如其保險費係分年均等繳納者，則其上半期各年所繳入者當多於自然保險費，下半期各年所繳入者，則少於自然保險費。於是其保險單之積存金，在首幾年有逐年增加之情形；至末幾年則反逐年減少，以至於零。仿前節所述限期 m 年繳費之終身保險單之例，可得自 x 歲起保定期 r 年分年均等繳費之定期保險單於第 n 年末之積存金，爲自 $x+n$ 歲起保定期 $r-n$ 年保險單上所應躉繳之純保險費 $A'_{x+n:\overline{r-n}|}$，減去未來 $r-n$ 幾年內可收之年繳保險費 $P'_{x\overline{r}|}$ 之年金現價後之差額。於是得其公式如下：

$${}_nV'_{x\overline{r}|}=A'_{x+n:\overline{r-n}|}-P'_{x\overline{r}|}(1+a_{x+n:\overline{r-n-1}|})\qquad(第\ 9\ 式)$$

若全依年繳保險費之值表示之，其公式如下：

$${}_nV'_{x\overline{r}|}=(P'_{x+n:\overline{r-n}|}-P'_{x\overline{r}|})(1+a_{x+n:\overline{r-n-1}|})\qquad(第\ 10\ 式)$$

爲圖應用之便利起見，上列三式亦可以換算符號列出之。

根據第 13 章第 14 式可將上列第 8 式改成下式：

$${}_{n:1}V'_{x\overline{r}|}=\frac{M_{x+n}-M_{x+r}}{D_{x+n}}\qquad(第\ 11\ 式)$$

根據第 13 章第 14 式及 17 式，可將上列第 9 式改成下式：

$${}_nV'_{x\overline{r}|}=\frac{M_{x+n}-M_{x+r}}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+r}}{N_x-N_{x+r}}\cdot\frac{N_{x+n}-N_{x+r}}{D_{x+n}}\qquad(第\ 12\ 式)$$

根據第 13 章第 17 式及第 12 章第 41 式，可將上列第 10 式改成下式：

$${}_nV'_{x\overline{r}|}=\left(\frac{M_{x+n}-M_{x+r}}{N_{x+n}-N_{x+r}}-\frac{M_x-M_{x+r}}{N_x-N_{x+r}}\right)\frac{N_{x+n}-N_{x+r}}{D_{x+n}}\qquad(第\ 13\ 式)$$

習 題 三

1. 求保額 $1,000 自 25 歲起保定期 5 年按年繳費之定期保險單在第 3 年末之積存金。
2. 求上題之積存金，如其保費係於入保時躉繳者。
3. 求第 1 題之定期保險單在第 5 年末之積存金。說明何故等於零。
4. 求保額 $1,000 自 22 歲起保定期 10 年按年繳費之定期保險單在第 5 保險單年末之積存金。
5. 求保額 $1,000 自 30 歲起保定期 5 年按年繳費之定期保險單在第 2 保險單年末之積存金。

第六節 儲蓄保險單之積存金(預期估價法)

定期 r 年分 m 年繳費之儲蓄保險單在第 n 年末之積存金，可用 ${}_{n:m}V_{x\overline{r}|}$ 之符號代表之。

根據第 2 節中公式：‘第 n 保險單年末之積存金 $=x+n$ 歲起保時所應藴繳之純保險費－未來可收依 x 歲起保之純保險費在 $x+n$ 歲時之現價’之原則，得此 ${}_{n:m}V_{x\overline{r}|}$ 之公式如下：

$$ {}_{n:m}V_{x\overline{r}|}=A_{x+n:\overline{r-n}|}-{}_{m}P_{x\overline{r}|}(1+a_{x+n:\overline{m-n-1}|}) \qquad (第 14 式)$$

儲蓄保險單之保險期限，常與繳費期限相等，如此則 $m=r$，而第 n 年末之積存金當爲 ${}_{n}V_{x\overline{r}|}$，依第 14 式之例得此 ${}_{n}V_{x\overline{r}|}$ 之公式如下：

$$ {}_{n}V_{x\overline{r}|}=A_{x+n:\overline{r-n}|}-P_{x\overline{r}|}(1+a_{x+n:\overline{r-n-1}|}) \qquad (第 15 式)$$

上式亦可完全用年繳保險費之値表示之。將下式

$$A_{x+n:\overline{r-n}|}=P_{x+n:\overline{r-n}|}(1+a_{x+n:\overline{r-n-1}|})$$

之等値，代入上式之中，遂得：

$$ {}_{n}V_{x\overline{r}|}=(P_{x+n:\overline{r-n}|}-P_{x\overline{r}|})(1+a_{x+n:\overline{r-n-1}|}) \qquad (第 16 式)$$

爲圖應用之便利起見，上列第 14 與 15 二式，均可依換算符號列出之。

依第 13 章第 19 式

$$A_{x+n:\overline{r-n}|}=\frac{M_{x+n}-M_{x+r}+D_{x+r}}{D_{x+n}}$$

依第 13 章第 21 式及 22 式

$$ {}_{m}P_{x\overline{r}|}=\frac{M_{x}-M_{x+r}+D_{x+r}}{N_{x}-N_{x+m}}$$

及

$$P_{x\overline{r}|}=\frac{M_{x}-M_{x+r}+D_{x+r}}{N_{x}-N_{x+r}}$$

依第 12 章第 41 式

$$1+a_{x+n:\overline{m-n-1}|}=\frac{N_{x+n}-N_{x+m}}{D_{x+n}}$$

$$1+a_{x+n:\overline{r-n-1}|}=\frac{N_{x+n}-N_{x+r}}{D_{x+n}}$$

將各項等值，分別代入上列第 14 及 15 式中，即得：

$$ {}_{n:m}V_{x\overline{r}|}=\frac{M_{x+n}-M_{x+r}+D_{x+r}}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+r}+D_{x+r}}{N_x-N_{x+m}}\cdot\frac{N_{x+n}-N_{x+m}}{D_{x+n}} $$

（第 17 式）

及 $$ {}_{n}V_{x\overline{r}|}=\frac{M_{x+n}-M_{x+r}+D_{x+r}}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+r}+D_{x+r}}{N_x-N_{x+r}}\cdot\frac{N_{x+n}-N_{x+r}}{D_{x+n}} $$

（第 18 式）

若保險費係起保時一次繳清者，則其積存金之公式如下：

$$ {}_{n:1}V_{x\overline{r}|}=A_{x+n:\overline{r-n}|}=\frac{M_{x+n}-M_{x+r}+D_{x+r}}{D_{x+n}} \qquad \text{（第 19 式）} $$

若第 14 式中之 $n=m$ 或 n 大於 m，則 14 式即與 19 式相同。

習 題 四

1. 茲有保額 $1,000 自 25 歲起保定期 20 年分年繳費之儲蓄保險單，求其第 5 年末之積存金。
2. 如上題繳費之期限，定為 10 年，求其積存金。
3. 第 1 題之保險費，如起保時一次繳足，求其積存金。
4. 茲有保額 $1,000 自 30 歲起定期 10 年分 8 年繳費之儲蓄保險單，求其第 6 年末之積存金。
5. 如上題之繳費期限，定為 5 年，求其積存金。

第七節　追溯估價法

依追溯估價法計算人壽保險單之積存金，所得結果，自然與依預期估價法計算而得者相同。其計算公式已列明於第 2 節中，即：“第 n 保險單年末之積存金＝自 x 歲起保起至 $x+n$ 歲止，期內所收之純保險費，依規定之利息，積至 $x+n$ 歲時之總價值－自 x 歲起至 $x+n$ 歲止，期內所應收之自然保險費，依規定之利息，積至 $x+n$ 歲時之總價值”。此公式在任何種保險單中均可適用。茲依繳費方法之不同，分述其計算公式如後：

一、保險費於起保時躉繳者，可用保額一元一次繳費之終身保險單為例說明之：

終身保險單中之薑繳純保險費爲 A_x，今假定在 x 年齡之 l_x 人，均爲同一公司之被保險人，則在保險單訂立時，卽當有 l_x 人同時繳費；於是該保險公司在當時所收得者，卽爲 $A_x l_x$。此 $A_x l_x$ 依規定之利息計算，至第 n 保險單年末，卽被保險人達到 $x+n$ 歲時，本利共爲：

$$A_x l_x(1+i)^n = A_x\frac{l_x}{v^n} = A_x\frac{v^x l_x}{v^{x+n}} = A_x\frac{D_x}{v^{x+n}}$$

至於自 x 歲起至 $x+n$ 歲止各年中所付之死亡賠款，如以全體之被保險人爲根據，依規定之利息計算，積至第 n 保險單年末時，當共爲：

$$d_x(1+i)^{n-1}+d_{x+1}(1+i)^{n-2}+d_{x+2}(1+i)^{n-3}+\cdots\cdots+d_{x+n-1}$$

$$=\frac{d_x}{v^{n-1}}+\frac{d_{x+1}}{v^{n-2}}+\frac{d_{x+2}}{v^{n-3}}+\cdots\cdots+d_{x+n-1}$$

$$=\frac{v^{x+1}d_x}{v^{x+n}}+\frac{v^{x+2}d_{x+1}}{v^{x+n}}+\frac{v^{x+3}d_{x+2}}{v^{x+n}}+\cdots\cdots+\frac{v^{x+n}d_{x+n-1}}{v^{x+n}}$$

$$=\frac{C_x+C_{x+1}+C_{x+2}+\cdots\cdots+C_{x+n-1}}{v^{x+n}}=\frac{M_x-M_{x+n}}{v^{x+n}}$$

此無異爲全體 l_x 人所繳之 n 年期定期保險單之薑繳純保險費 $A'_{x\overline{n|}}$，積至第 n 年末之總數。觀前章第 14 式卽可知之。依該公式得保額一元定期 n 年之定期保險之薑繳純保險費如下：

$$A'_{x\overline{n|}}=\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}$$

以當初全體被保險人人數 l_x，乘此項純保險費，再以複利計算，積至第 n 年末時，卽當成爲下式所示之數：

$$l_x A'_{x\overline{n|}}(1+i)^n=l_x\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}(1+i)^n=l_x\frac{M_x-M_{x+n}}{v^x l_x}(1+i)^n$$

$$=\frac{M_x-M_{x+n}}{v^{x+n}}$$

此卽上示自 x 歲起至 $x+n$ 歲止，期內所付之死亡賠款（亦卽逐年之自然保險費，積至第 n 年末之總值也。

於是自 n 保險單年內所收之全體薑繳純保險費之總值中，減去同期內應付全體死亡賠款之總值，卽得其全體被保險人之積存金，總計如

下:

$$A_x\frac{D_x}{v^{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{v^{x+n}}$$

今在第 n 年末時,其生存之被保險人共為 l_{x+n} 人,於是卽得每人或每一保險單之積存金如下:

$${}_{n:1}V_x=A_x\frac{D_x}{v^{x+n}l_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{v^{x+n}l_{x+n}}$$

$$=A_x\frac{D_x}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 20 式)}$$

將上述公式稍為更改,卽可使其結果,與預期估價法中之公式相同。因 $A_x=\frac{M_x}{D_x}$,於是:

$${}_{n:1}V_x=\frac{M_x}{D_x}\cdot\frac{D_x}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}}=\frac{M_x}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}}$$

$$=\frac{M_x-M_x+M_{x+n}}{D_{x+n}}=\frac{M_{x+n}}{D_{x+n}}=A_{x+n}$$

此卽上文第 4 節中之第 6 式也。

上述之第 20 式,可依保險之種類,任意更改之。如此得:

定期保險一次繳費者第 n 年末之積存金如下:

$${}_{n:1}V'_{x\overline{r}|}=A'_{x\overline{r}|}\frac{D_x}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 21 式)}$$

又得儲蓄保險一次繳費者第 n 年末之積存金如下:

$${}_{n:1}V_{x\overline{r}|}=A_{x\overline{r}|}\frac{D_x}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 22 式)}$$

二、保險費依保險單期限按年均等繳納者 可用保額一元之普通終身保險單爲例而說明之:

普通終身保險單中之每年純保險費爲 P_x。在 n 保險單年內,保險公司所收此項保險費,依規定之利息,積至第 n 保險單年末時,卽被保險人達到 $x+n$ 歲時,就全體被保險人言之,其總值當如下示:

$$P_x[l_x(1+i)^n+l_{x+1}(1+i)^{n-1}+l_{x+2}(1+i)^{n-2}+\cdots+l_{x+n-1}(1+i)]$$

$$=P_x\left[\frac{l_x}{v^n}+\frac{l_{x+1}}{v^{n-1}}+\frac{l_{x+2}}{v^{n-2}}+\cdots\cdots+\frac{l_{x+n-1}}{v}\right]$$

$$=P_x\left[\frac{v^x l_x}{v^{x+n}}+\frac{v^{x+1}l_{x+1}}{v^{x+n}}+\frac{v^{x+2}l_{x+2}}{v^{x+n}}+\cdots\cdots+\frac{v^{x+n-1}l_{x+n-1}}{v^{x+n}}\right]$$

$$=P_x\frac{D_x+D_{x+1}+D_{x+2}+\cdots\cdots+D_{x+n-1}}{v^{x+n}}=P_x\frac{N_x-N_{x+n}}{v^{x+n}}$$

至於在此 n 保險單年內，各年所付之死亡賠款，積至第 n 保險單年末之本利合計，就全體之被保險人言之，當如下示：

$$\frac{M_x-M_{x+n}}{v^{x+n}}$$

於是自 n 保險單年內所收全體按年分繳之純保險費總值中，減去同期內應付全體死亡賠款總值，卽得其全體被保險人之積存金，總計如下：

$$P_x\frac{N_x-N_{x+n}}{v^{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{v^{x+n}},$$

再以第 n 保險單年末時生存之被保險人數 l_{x+n} 除之，卽得每人或每一保險單之積存金如下：

$$_nV_x=P_x\frac{N_x-N_{x+n}}{v^{x+n}l_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{v^{x+n}l_{x+n}}$$

$$=P_x\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}}\qquad\text{(第 23 式)}$$

此公式可依保險之種類任意更改之，因得：

定期保險按年繳費者第 n 年末之積存金如下：

$$_nV'_{x\overline{r}|}=P'_{x\overline{r}|}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}}\qquad\text{(第 24 式)}$$

儲蓄保險按年繳費者第 n 年末之積存金如下：

$$_nV_{x\overline{r}|}=P_{x\overline{r}|}\frac{N_x-N_{x+n}}{D_{x+n}}-\frac{M_x-M_{x+n}}{D_{x+n}}\qquad\text{(第 25 式)}$$

三、保險費限 m 年繳淸者，可分二種情形討論之：

(1)當所求之積存金年份 n，大於或等於繳費年限 m 者，則在 n 年末時，其可收之保險費已全部收足。於是卽可與躉繳保險費之情形，同

樣處理，其第 n 年末之積存金，卽可依本節第一項下各公式計算之。

(2)當所求之積存金年份 n，小於繳費年限 m 者，則在 n 年之內，其所收之每年保險費，並不能抵蓋繳純保險費，於是當依按年繳費之例，計算其 n 年末之積存金。計算時可應用本節第二項中各公式，僅將式中之按年保險費，以限期繳清之年繳保險費代入之而已。如此得：

終身保險單之積存金公式如下：

$$_{n:m}V_x = {}_mP_x\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 26 式)}$$

又得儲蓄保險單之積存金公式如下：

$$_{n:m}V_{x\overline{r}|} = {}_mP_{x\overline{r}|}\frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}} - \frac{M_x - M_{x+n}}{D_{x+n}} \qquad \text{(第 27 式)}$$

茲舉例以示追溯估價法之計算方法如下：

例——依照追溯估價法，求保額 \$5,000 自 25 歲起保之普通終身保險單在第 10 保險單年末之積存金。

解法：依第 23 式得：

$$_{10}V_{25} = P_{25}\frac{N_{25} - N_{35}}{D_{35}} - \frac{M_{25} - M_{35}}{D_{35}}$$

查用表 XVI 得：

$N_{25} = 770,113$, $N_{35} = 456,871$, $M_{25} = 11,631.1$,

$M_{35} = 9,094.96$, $D_{35} = 24,544.7$

依前章之第 7 式解得：

$$P_{25} = \frac{M_{25}}{N_{25}} = 0.0151031$$

將上列各數代入第 23 式卽得：

$$_{10}V_{25} = 0.015103\frac{770,113 - 456,871}{24,544.7} - \frac{11,631.1 - 9,094.96}{24,544.7} = 0.08942$$

於是：

$$5,000\,_{10}V_{25} = 5,000 \times 0.08942 = \$447.10$$

(可與第三節末之例核對)

習　題　五

1. 依照追溯估價法，求保額 \$1,000 自 25 歲起保分 20 年繳費之終身保險單在第 10 年末之積存金。

2. 依照追溯估價法，求保額 \$1,000 自 25 歲起保定期 5 年躉繳保費之定期保險單在第 3 年末之積存金。

3. 依照追溯估價法，求保額 \$1,000 自 25 歲起保定期 20 年限 10 年繳費之儲蓄保險單在第 5 年末之積存金。

第八節　預期估價法與追溯估價法之比較

依照預期估價法與追溯估價法以計算人壽保險積存金，方法雖異，結果則同。故於計算積存金時，可先依一法算得一數，然後以他法覆核之，如彼此相等，卽係正確無疑。讀者如將習題五中各題，與以上各習題中同一問題之答數相較，卽能完全明瞭。

用追溯估價法以計算積存金，亦可依預期估價法算得之積存金爲根據。可先依預期估價法計出第 n 保險單年末之積存金，然後按追溯估價法之原理，算出其次年末之積存金。例如在普通終身保險，當保額爲一元時，其年繳純保險費卽爲 P_x，其第 n 年末之積存金則爲 ${}_nV_x$。於是 ${}_nV_x+P_x$ 卽爲第 $n+1$ 保險單年初之積存金及保險費總計，稱爲第 $n+1$ 年之年初積存金(Initial Reserve)；(註) 而 $l_{x+n}({}_nV_x+P_x)$ 卽爲第 $n+1$ 年初 l_{x+n} 被保險人所共有之聯合積存金 (Aggregate Reserve)。將此數按規定之利息計算，積至第 $n+1$ 年末之本利合計，當爲 $l_{x+n}({}_nV_x+P_x)(1+i)$。今在第 $n+1$ 年中，全體被保險人中之死亡者當爲 d_{x+n} 人，則該年底應付之死亡賠款卽爲 d_{x+n}。自該年底所積之本利合計中減去此數，卽得餘額如下：

(註)凡本書中單稱積存金者，係指年末積存金而言。

$$l_{x+n}({}_nV_x+P_x)(1+i)-d_{x+n}$$

此爲第 $n+1$ 保險單年末時所存在之 l_{x+n+1} 之被保險人所共有之聯合積存金。將此聯合積存金以 l_{x+n+1} 人分之，即得第 $n+1$ 保險單年末每人即每一保險單之**單獨積存金**(Individual Reserve)如下：

$$\begin{aligned}{}_{n+1}V_x&=\frac{l_{x+n}({}_nV_x+P_x)(1+i)-d_{x+n}}{l_{x+n+1}}\\&=\frac{l_{x+n}}{vl_{x+n+1}}({}_nV_x+P_x)-\frac{d_{x+n}}{l_{x+n+1}}\\&=\frac{v^{x+n}l_{x+n}}{v^{x+n+1}l_{x+n+1}}({}_nV_x+P_x)-\frac{v^{x+n+1}d_{x+n}}{v^{x+n+1}l_{x+n+1}}\\&=\frac{D_{x+n}}{D_{x+n+1}}({}_nV_x+P_x)-\frac{C_{x+n}}{D_{x+n+1}}\end{aligned}$$

如以用表 XVII 中之估價因素：

$$u_x=\frac{D_x}{D_{x+1}} \text{ 及 } k_x=\frac{C_x}{D_{x+1}}$$

代入上式，即得下面之計算公式：

$${}_{n+1}V_x=u_{x+n}({}_nV_x+P_x)-k_{x+n} \qquad \text{(第 28 式)}$$

上述公式，稱曰**費格爾氏積算公式**(Fackler's Accumulation Formula)，在編製完全之積存金表時，爲用甚大。因此公式中之 u_{x+n} 與 k_{x+n}，係獨立之估價因素，不受保險單種類不同之影響；而其中之 ${}_nV_x$ 與 P_x 二項，則又可隨保險單之種類而自由更換之也。如此得：

限期繳費終身保險單之積存金之積算公式如下：

$${}_{n+1:m}V_x=u_{x+n}({}_{n:m}V_x+{}_mP_x)-k_{x+n} \qquad \text{(第 29 式)}$$

躉繳保險費終身保險單之積存金之積算公式如下：

$${}_{n+1:1}V_x=u_{x+n}\cdot{}_{n:1}V_x-k_{x+n} \qquad \text{(第 30 式)}$$

按年繳費定期保險單之積存金之積算公式如下：

$$ {}_{n+1}V'_{x\overline{r}|}=u_{x+n}({}_{n}V'_{x\overline{r}|}+P'_{x\overline{r}|})-k_{x+n} \qquad (第\ 31\ 式)$$

限期繳費定期保險單之積存金之積算公式如下：

$$ {}_{n+1:m}V'_{x\overline{r}|}=u_{x+n}({}_{n:m}V'_{x\overline{r}|}+{}_{m}P'_{x\overline{r}|})-k_{x+n} \qquad (第\ 32\ 式)$$

躉繳保險費定期保險單之積存金之積算公式如下：

$$ {}_{n+1:1}V'_{x\overline{r}|}=u_{x+n}\cdot{}_{n:1}V'_{x\overline{r}|}-k_{x+n} \qquad (第\ 33\ 式)$$

按年繳費儲蓄保險單之積存金之積算公式如下：

$$ {}_{n+1}V_{x\overline{r}|}=u_{x+n}({}_{n}V_{x\overline{r}|}+P_{x\overline{r}|})-k_{x+n} \qquad (第\ 34\ 式)$$

限期繳費儲蓄保險單之積存金之積算公式如下：

$$ {}_{n+1:m}V_{x\overline{r}|}=u_{x+n}({}_{n:m}V_{x\overline{r}|}+{}_{m}P_{x\overline{r}|})-k_{x+n} \qquad (第\ 35\ 式)$$

躉繳保險費儲蓄保險單之積存金之積算公式如下：

$$ {}_{n+1:1}V_{x\overline{r}|}=u_{x+n}\cdot{}_{n:1}V_{x\overline{r}|}-k_{x+n} \qquad (第\ 36\ 式)$$

從上述之費格爾氏積算公式中，知 ${}_{n+1}V_x$ 之值，可以 ${}_{n}V_x$ 之值爲根據而計算之。可先依預期估價法之公式，求得 ${}_{n}V_x$ 之值，然後依此公式求得其 ${}_{n+1}V_x$ 之值，其結果與直接用預期估價法之公式所求得之 ${}_{n+1}V_x$ 之值，又必相同。

費格爾氏積算公式之主要功用，在於編製完全之積存金表，故其計算積存金時，常自第一年算起，直至保單滿期時爲止。如此得：

$$ {}_{1}V_x=u_x({}_{0}V_x+P_x)-k_x=u_xP_x-k_x, $$

$$ {}_{2}V_x=u_{x+1}({}_{1}V_x+P_x)-k_{x+1}, $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$

$$ {}_{n}V_x=u_{x+n-1}({}_{n-1}V_x+P_x)-k_{x+n-1} $$

根據此公式及用表 XVII 之數，編成一積存金表如下：

普通終身保險積存金表

保額 $1,000.00　起保年齡 25 歲　利息 $3\frac{1}{2}\%$

每年純保險費 $15.1031

(1) n 保險單年份	(2) x 被保險人年齡	(3) $_{n-1}V_x$ 上一保險單年末之積存金見(8)	(4) $_{n-1}V_x+P_x$ 各年年初積存金即(3)+$.0151031	(5) u_x 估價因素	(6) $u_x(_{n-1}V_x+P_x)$ 即(4)×(5)	(7) k_x 估價因素	(8) $_nV_x$ 保額一元之保險單在各年末之積存金即(6)−(7)	(9) $1,000\,_nV_x$ 本保險單在各年末之積存金
1	25	0	$ .0151031	1.043415	.0157588	.008130	.0076288	$ 7.63
2	26	.0076288	.0227319	1.043484	.0237205	.008197	.0155235	15.52
3	27	.0155235	.0306266	1.043554	.0319605	.008264	.0236965	23.70
4	28	.0236965	.0387996	1.043625	.0404922	.008333	.0321592	32.16
5	29	.0321592	.0472623	1.043710	.0493281	.008415	.0409131	40.91
6	30	.0409131	.0500162	1.043796	.0584695	.008498	.0499715	49.97
7	31	.0499715	.0650746	1.043884	.0679303	.008583	.0593473	59.35
8	32	.0593473	.0744504	1.043986	.0777252	.008682	.0690432	69.04
9	33	.0690432	.0841463	1.044102	.0878573	.008795	.0790623	79.06
10	34	.0790623	.0941654	1.044221	.0983295	.008910	.0894195	89.42
…	…	………	………	………	………	………	………	………
69	93	.9367823	.9518854	3.893571	3.7062333	2.761905	.9443283	944.33
70	94	.9443283	.9594314	7.245000	6.9510805	6.000000	.9510805	951.08
71	95	.9510805	.9661836	0	0	0	0	0

若不用費格爾氏積算公式中之估價因素，可根據追溯估價法之原理，直接作成一積存金表如下。其結果雖屬相同但其計算則較繁耳。

普通終身保險積存金表

保額 $ 1,000.00　　起保年齡 25 歲　　利息 3½%(美國經驗死亡表)　　每年純保險費 $ 15.1031

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)
保險單年份	被保險人年齡	各年初存在之被保險人數	上年末之積存金(見11)	各年初所收純保險費即 (3)×$15.1031	各年初所有之純保險費與積存金合計即 (4)+(5)	利息 (6)×3½%	各年末死亡賠款未付前之本利總計即 (6)+(7)	各年死亡人數	各年末應付死亡賠款	各年末全體保險單之聯合積存金即 (9)-(10)	各年末存在之被保險人數	各年末每一保險單之單獨積存金即 (11)÷(12)
1	25	89,032	....	$ 1,344,659.20	$ 1,344,659.20	47,063.07	$ 1,391,722.72	718	$718,000	$ 673,722.27	88,314	$ 7.63
2	26	88,314	$ 673,722.27	1,333,815.17	2,007,537.44	70,263.81	2,071,801.25	718	718,000	1,359,801.25	87,596	15.52
3	27	87,596	1,359,801.25	1,322,971.15	2,682,772.40	93,897.03	2,776,669.43	718	718,000	2,058,669.43	86,878	23.70
4	28	86,878	2,058,669.43	1,312,127.12	3,370,796.55	117,977.88	3,488,774.43	718	718,000	2,770,774.43	86,160	32.16
5	29	86,160	2,770,774.43	1,301,283.10	4,072,057.53	142,522.01	4,214,579.54	719	719,000	3,495,579.54	85,441	40.91
6	30	85,441	3,495,579.54	1,290,423.97	4,786,003.51	167,510.12	4,953,513.63	720	720,000	4,233,513.63	84,721	49.97
7	31	84,721	4,233,513.63	1,279,549.74	5,513,063.37	192,957.22	5,706,020.59	721	721,000	4,985,020.59	84,000	59.35
8	32	84,000	4,985,020.59	1,268,660.40	6,253,680.99	318,878.83	6,472,559.82	723	723,000	5,749,559.82	83,277	69.04
9	33	83,277	5,749,559.82	1,257,740.86	7,007,300.6[illegible]	245,255.52	7,252,556.20	726	726,000	6,526,556.20	82,551	79.06
10	34	82,551	6,526,556.20	1,246,776.01	7,773,332.21	272,066.63	8,045,398.84	729	729,000	7,316,398.84	81,822	89.42
...	...	......	....	....	....	....	....	...	......	....	......	......
69	93	79	74,005.80	1,193.14	75,198.94	2,631.96	77,830.90	58	58,000	19,830.90	21	944.33
70	94	21	19,830.90	317.16	20,148.06	705.18	20,853.24	18	18,000	2,853.24	3	951.08
71	95	3	2,853.24	45.31	2,898.55	101.45	3,000.00	8	3,000	0	0	0

茲卽以上示積存金表中之第10保險單年末之單獨積存金爲例，依三種公式覆核之如下：

先依預期估價法第1式，求得：

$$ {}_{10}V_{25}=A_{35}-P_{25}(1+a_{35})=0.37055-.0151031\times 18.6138 $$
$$ =.08942 $$

$1,000{}_{10}V_{25}=1,000\times .08942=\$\,89.42$

再依追溯估價法第23式求得：

$$ {}_{10}V_{25}=P_{25}\frac{N_{25}-N_{35}}{D_{35}}-\frac{M_{25}-M_{35}}{D_{35}} $$
$$ =.0151031\times\frac{770,113-456,871}{24,544.7}-\frac{11,631.1-9,094.96}{24,544.7} $$
$$ =.08942 $$

$1,000{}_{10}V_{25}=1,000\times .08942=\$\,89.42$

最後以第9年末之積存金 $.0790623 爲根據，依費格爾氏積算公式(28)求得：

$$ {}_{10}V_{25}=u_{34}({}_{9}V_{25}+P_{25})-k_{34} $$
$$ =1.044221(.0790623+.0151031)-.008910 $$
$$ =.0894195 $$

$1,000{}_{10}V_{25}=1,000\times .08942=\$\,89.42$

由此可知此三公式之結果，完全相同，得以互相覆核。在其他各種保險單上，亦可類推應用。

習 題 六

1. 已知保額 \$ 1,000 自 25 歲起保之終身保險單，第 10 年末之積存金爲 \$ 89.42，每年純保險費爲 \$ 15.10，求第 11, 12, 13, 14 及 15 各年末之積存金。

2. 有一自 30 歲時起保定期 20 年保額 \$ 1,000 按年繳費之儲蓄保險單。已知該保險單第 15 年末之積存金爲 \$ 664.91，求第 16 年末之積存金。

3. 計算第 2 題之保險單以下各年末之積存金，至保險單滿期爲止。

4. 依預期估價法，追溯估價法及費格爾氏積算公式，求保額 \$ 1,000 自三十歲起限 20 年繳費之終身保險單在第 10 年末之積存金。

第九節　退保金額

退保金額(Cash Surrender Value)者,保險公司付還於退保之保險單持有人之金額也。此項金額實爲積存金之一部份。依照普通繳費方法而言,被保險人在保險單前期各年所繳之保險費,恆多於所應付之自然保險費,故在中途取消保險契約之時,對於其多繳之保險費部份(卽積存金)自有請求退還之權。但有一點應予注意者,卽退保金額恆不能積存金之全部。如保險契約經過期間未滿二年或三年時,卽行中其按年繳費之保險單持有人,不能有請求退還積存金之權。至於已經二年或三年,始行解約者,其可以請求之退保金額,亦不及積存金之全數。因在理論上,積存金須以全體被保險人之平均狀態爲根據,而某一單獨被保險人之積存金,當隨其個人之健康程度爲轉移,不能與理論上之積存金相等。兼之保險公司之營業費用,大部份發生於保險契約成立之時,保險公司爲抵補此種初期之大宗費用,及預防康健之被保險人退保,而增加被保險人之平均死亡率起見,勢不得不在退還之積存金中,扣留一部份,此亦爲法律上所允許者也。

第十節　總保險費

保險營業與他種營業相同,經營時須有種種費用,如辦事人員之薪俸,經紀人之佣金,房租電費以及其他各種費用等是。故保險公司向被保險人收費之時,除純保費外,常加幾成之**附加費**(Loadings),以抵補營業上之日常費用及意外損失。純保險費與附加費之和,稱曰**總保險費**(Gross Premium),卽爲被保險人實際所出之保險費也。

增擬附加費之方法,各公司均有不同,有依純保險費爲根據,加上百分之幾,而其百分數爲一定不變者;有依純保險費爲根據,加上百分之幾,但其百分數隨起保年齡之高低而增減者;亦有依純保險費爲根據,加上百分之幾,再加一不變之數(Flat Sum)者。此種增擬附加費之

方法與理論，非本書範圍所當詳論。不過有一點可以說明者，卽各保險公司所用増攤附加費之公式，雖有不同，然爲營業競爭起見，同一種保險單之總保險費數額則大致相同也。

第十一節 定期一年估價法

總保險費爲純保險費與附加費之合計，已如上述。在年繳均等保險費之情形下，總保險費之數，必每年相等，其中所包含之純保險費及附加費之數，每年亦各相同。以前所述計算積存金之方法，完全以純保險費爲根據，對於附加費之關係，並未提及，今當進而討論之。

人壽保險公司之費用，大部份發生於訂立保險契約之第一年中，如經紀人之佣金，被保險人之體格檢驗費等，大都須於第一保險單年中付出，故第一保險單年之費用，恆較以後各年之費用爲大，然而依年繳均等純保險費之方法，増攤附加費，其所加之附加費數，則每年相同，第一年所附加之數，並不較以後各年附加之數爲多。於是第一年所收之附加費，不能抵補當年之實際費用，其結果遂成爲第一保險單年中之營業損失。此項損失，勢必用原有之盈餘爲之彌補。在新創之公司，或盈餘不足之公司，此種損失卽無法彌補。雖然，從保險單之全體言之，保險單下之一切費用，旣已平均算入於每年保險費中，則第一年之實際費用，雖超過所收之附加費，而以後各年所收之附加費，當較實際費用爲多，幾年之後，自能補足。但爲表示營業之眞實狀況起見，吾人不能以第一保險單年之營業爲損失，而此後各年之營業爲格外獲利也。就會計理論言之，可將第一保險單年中所付之佣金檢驗費等，不全作第一年之費用，而將其一部份，作爲預付費用，使依照保險單上之付費期限，平均分攤之。但此種方法，手續甚繁，不切實用，乃有變通估價之方法，以資補救。定期一年估價法 (Preliminary Term Valuation) 者，卽爲此種變通方法之一，茲約略述之如次。

所謂定期一年估價法者，卽於計算保險單積存金時，不問其保險單

之種類如何，其第一年之保險，一律作爲定期一年之保險，而原訂之保險及積存金，則自第二年起算之方法也。依此方法，所有保險單第一年所收之總保險費，除該年之自然保險費作爲其中之純保險費部份外，其餘均作爲附加費。第一年之自然保險費，旣較原保險費中之年繳純保險費爲少，則其附加費之部份，自可較原加者爲多，第一保險單年中之較大費用，遂可以此較多之附加費補足之。至於以後各年所收之總保險費，則因被保險人之年齡，加增一年之故，其中之純保險費部份，卽較原有之數爲高，於是其剩餘之附加費部份，自較原加之附加費爲低。但因以後各年之實際費用，本較第一年爲少，故仍可用此較低之附加費，爲之補足也。

例如自 25 歲起保保額 $1,000 之終身保險，其每年之總保險費爲 $19.50。若照原訂之保險計算，其中 $15.10 爲每年之純保險費，$4.40 爲所加之附加費。今依定期一年估價法計算，其第一年所收之 $19.50，除該年之自然保險費 $7.79 外，餘數 $11.71，卽可全部作爲附加費，以抵補當年特大之費用。至於以後各年，則當作爲一自 26 歲起保之終身保險，其每年之純保險費，遂當改爲 $15.48，從總保險費 $19.50 中減去此數，其餘剩之附加費，則減爲 $4.02，此 $4.02 之附加費，可用以抵補各年之費用，而根據此 $15.48 之純保險費，以計算其保險單之積存金焉。

由此可知定期一年估價法者，實不過將總保險費中之純保險費與附加費另行分配，使與實際費用略相吻合耳。

依定期一年估價法計算積存金，因第一年之保險費旣全部抵作當年之自然保險費及費用，該年底自無復有積存金之存在。其實際之積存金當自第二年起積算，每年底所積之積存金，在保險費未繳淸以前，自較均等純保險費之積存金(Level Net Terminal Reserves)爲少。

定期一年估價法之計算，應用於普通終身保險單，或繳費年數較長之限期繳費終身保險單及儲蓄保險單時，頗爲一般學者所贊許，視爲合

理之方法。但應用於繳費年數較短之限期繳費終身保險單及儲蓄保險單時，則常爲人所反對。其反對之理由，可舉例說明之如下：

例如有保額 \$1,000 自 25 歲起保之 10 年期儲蓄保險單，其每年之總保險費爲 \$ 101.75，其中 \$ 86.45 爲每年純保險費，\$ 15.30 爲附加費。今若依定期一年估價法計算，當得第一年之自然保險費爲 \$7.79，自總保險費減去此數，卽得 \$ 93.96，爲當年之附加費，較前法之附加費，加增六倍之多，實際費用決不能有如此之巨。因此情形，遂不能再應用定期一年之估價方法。故另有修正定期一年法(Modified Preliminary Term Method)及檢選終極法(Select & Ultimate Method)等可以應用，本書從略。

習 題 七

1. 依定期一年估價法，求保額 \$ 1,000 自 25 歲起保之普通終身保險單，在第 10 年末之積存金。

解法：依定期一年估價法計算，第一保險單年應作爲一年期之定期保險，其積存金當自第二年起算，故本題中所求第 10 年末積存金，實爲自 26 歲起保之保險單在第 9 年末之積存金。依第 1 式得：

$${}_9V_{26}=A_{35}-P_{26}(1+a_{35})=$$

$$1{,}000\,{}_9V_{26}=$$

2. 依定期一年估價法，用費格爾氏積算公式，求保額 \$ 1,000 自 30 歲起保之普通終身保險單，在最初十年內各年末之積存金。

第十二節 結論

本書對於有關人壽保險之各種數學方法，已略述梗概。計自第十一章起至本章爲止，前後共有四章。本書之目的，原係使讀者明瞭人壽保險計算上之一般基本原理，故以前所討論者，以幾種極普通之人壽保險爲範圍，對於專門問題，如聯合人壽保險 (Joint Life Insurance)，聯合生存年金 (Joint Life Annuity)，團體保險 (Group Insurance)，責任保險 (Compensation & Liability Insurance)，保險單借款 (Policy Loan ，盈餘之分派 (Distribution of Surplus) 以及損益計算等問題，

均未述及。對於增攤附加費，退保金額以及變通估價方法，亦未作詳細之論述。讀者如欲研究此種專門問題，可另閱專論人壽保險之書籍。本書所述，僅爲研究此種專門問題之基礎耳。

覆 習 題

1. 茲有保額 $ 1,000 自 21 歲起保之終身保險單，求其在第一，第二及第三保險單年末之均等純保險費積存金。

2. 如上題之保險單，爲一限期 20 年繳費之終身保險單，求其第一，第二及第三各年末之均等純保險費積存金。

3. 茲有保額 $ 1,000 自 21 歲起保定期 20 年之儲蓄保險單，求其在第一，第二及第三各年末之均等純保險費積存金。

4. 如上題之保險單，爲一限期 10 年繳費之儲蓄保險單，求其第 5 年末之均等純保險費積存金。

5. 茲有保額 $ 8,000 自 23 歲起保限期 20 年繳費之終身保險單，求其在第 19 年末之均等純保險費積存金。

6. 用費格爾氏積算公式，求第 4 題保險單第六，七，八，九，十各年末之積存金。

7. 茲有保額 $ 1,000 自 30 歲起保限 20 年繳費之終身保險單，試分別 (a) 依均等純保險費法及 (b) 依定期一年法，求其第十九保險單年末之積存金，並 (c) 比較二法之結果。

8. 茲有保額 $ 1,000 自 25 歲起保定期 20 年之儲蓄保險單，試依修正定期一年法，求其在起初五年內各年末之積存金。

說明：估價法中有所謂修正定期一年法者，卽以普通終身保險爲基礎之定期一年法是也。此法應用於普通終身保險單時，其計算卽與本來之定期一年法相同，但對於定期二十年之儲蓄保險等繳費年數較短之保險，則當先以普通終身保險爲根據，而計算其積存金，然後再用他法以補其積存金之缺額。

例如保額一元自 25 歲保起定期 20 年之儲蓄保險，照理，其於 20 年底之積存金當爲一元。今若先照普通終身保險之例，依定期一年法計算其積存金，則至 20 年末，其積存金數不過爲 ${}_{19}V_{25}$。以此數與一元相較，其差數爲 $(1-{}_{19}V_{26})$，此缺額當自每年之純保險費中加足之。若假定每年應加之數爲 c，則於 20 年之末，此 c 之總數，當與所缺之積存金數 $(1-{}_{19}V_{26})$ 相等。今照普通終身保險之例，依定期一年法計算，其第一年之純保險費當爲 $P'_{25\overline{1|}}$，其以後各年之純保險費則爲 P_{26}。再用修正定期一年法計算，可得此定期 20 年之儲蓄保險在第一年之純保險費爲 $(P'_{25\overline{1|}}+c)$，及其以後十九年之純保險費爲 $(P_{26}+c)$。所求任何一年末之積存金，卽可以此修正後之純保險費爲根據。

依修正定期一年法計算積存金，其須最先算出者，卽爲其每年純保險費中所加之 c。今既知 20 年後，此 c 之總值當等於 $(1-{}_{19}V_{26})$ 之值，可根據第十二章中之期首付限期生存年金，換算生存保險金之公式如下：

$$c\cdot\frac{N_{26}-N_{45}}{D_{45}}=1-{}_{19}V_{26}$$

將此式移項，得 c 之值如下：

$$c=(1-{}_{19}V_{25})\frac{D_{45}}{N_{25}-N_{45}}=$$

求得 c 值之後，可應用數格留氏積算公式，求得；

第一年末之積存金爲：${}_{1}V_{25\overline{20}}=u_{25}c=$

第二年末之積存金爲：${}_{2}V_{25\overline{20}}=u_{26}({}_{1}V_{25\overline{20}}+P_{25}+c)-k_{26}=$

第三年末之積存金爲：${}_{3}V_{25\overline{20}}=u_{27}({}_{2}V_{25\overline{20}}+P_{26}+c)-k_{27}=$

以後各年之積存金，可依此類推計算。

習題答案

第 一 章

習 題 一

1. $a+b$	2. $-2a$	3. $-3b$	4. $2a-2b$
5. $3a-3b$	6. $3a-3b$	7. $2a^2-ab+2b^2$	8. $3a+7b-5c$
9. $3a-5b+4c$	10. $3a$	11. $3b$	12. $4a$
13. $8a$	14. $-a$	15. $-6a$	16. $a-2b$
17. $6b-3c$	18. $2a+3b-6c$	19. $3a^2-4b$	20. $-8a^4$
21. $10a-3b-2c$	22. $3a-3b$	23. a^2-ab	24. $-a^2-ab$
25. $a^2c+abc+ac^2$	26. $-a^2b+ab^2+abc$		27. $a^2+ab-ac-bc$
28. $2a^2-ab-ac-6b^2+2bc$		29. $10ab$	30. $-6ac$
31. a^2	32. $2a^2$	33. $6a^2$	34. $3ab$
35. $-2ab$	36. $2ab$	37. a	38. $2b$
39. -3	40. 3	41. $-4a-1-2c$	42. $2-3b-c$
43. 1	44. $a-c-b$	45. $2ab-4c-\frac{1}{2}d$	46. i
47. 5	48. 2	49. $2(1+i)^2-(1+i)$	50. -10
51. 13	52. -10	53. -16	54. 26
55. $-b$	56. $2+cd$	57. $6ab-2b$	58. -2
59. a^2b^2	60. -1	61. 13	62. a
63. -5	64. -7	65. 5	66. $2a-b$
67. $a-2b$	68. $8a-11$	69. $-4a-24$	70. $7a-13b+30$
71. $15x-10$	72. $21-8y$	73. $2a-10b$	74. $-a-b-c$
75. $3a-5b+a$	76. $6a-b+c$	77. $-8a^2+45a-52$	
78. $6a^2-4a+6ab-12b+6$		79. $3r-5$	80. $12a-6ab+4$
81. $2(a+2)$	82. $3(a-2)$	83. $ab(1+2c)$	84. $a(a-1)$
85. $b(b+1)$	86. $2a(a-2)$	87. $a^2(a-1)$	88. $a(1+a^2)$
89. $b(a+2c-2ab)$	90. $x(x-3)$	91. $2(a^2-ab^2-3c)$	92. $5x(1+2x-3x^2)$
93. $3c^2(2a+3-a^2)$	94. $2ab(ab-1)$	95. $(a-b)(3+1)$	96. $-2(a+b)$
97. $2b(a-b)$	98. $2(c-d)(a-b)$	99. $b(a+b+c)$	100. $(b+c)(5a+b)$

習 題 二

1. $\frac{17}{12}$	2. $\frac{5}{6}$	3. $\frac{5}{8}$	4. $\frac{11}{15}$

5. $\frac{1+a}{2a}$	6. $\frac{55}{12}$	7. $\frac{1}{2}$	8. $\frac{1}{3}$
9. $\frac{5}{12}$	10. $\frac{1}{3}$	11. $\frac{2}{15}$	12. $\frac{2a-c}{b}$
13. $\frac{2b-a}{b}$	14. $\frac{2(a+b)-(a-b)}{(a+b)}$	15. $\frac{1}{8}$	16. $\frac{1}{24}$
17. $\frac{1}{20}$	18. $\frac{1}{12}$	19. $\frac{1}{48}$	20. $\frac{a^2}{bc}$
21. $\frac{8}{15}$	22. $\frac{3}{4}$	23. $\frac{d}{2a}$	24. $\frac{1}{15}$
25. $\frac{1}{2}$	26. $\frac{}{a+b}$	27. $\frac{2i}{3}$	28. $\frac{1}{2}$
29. $\frac{2}{3}$	30. $\frac{3}{8}$	31. $\frac{a}{c}$	32. ab
33. $+\frac{3}{2}$	34. $+\frac{2}{3}$	35. $+\frac{a}{b}$	36. $+\frac{a-b}{c-d}$
37. $+\frac{.12346}{.37038}$	38. $\frac{3(1+i)-3}{(1+i)}$	39. $\frac{11cd+12bc-12x^2}{12abx}$	40. x^2

習 題 三

1. -1	2. -2	3. 2	4. -2
5. 2	6. 3	7. $\frac{5}{3}$	8. 4
9. $-\frac{4}{5}$	10. 9	11. -2	12. -4
13. 2	14. 3	15. 4	16. 3
17. 5	18. $\frac{7}{2}$	19. -2	20. 3
21. 7	22. $\frac{3}{2}$	23. 4	24. 1000
25. 500	26. 431.012		

習 題 四

1. 1; 1; -1; -1; 1; 1; 1; 1; $\frac{1}{1+i}$

2. $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{1}{(1+i)^4}$; $\frac{1}{(1+i)^n}$; $\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{4}}}$; $\frac{2}{a^3}$; $4a^2$; 3

3. a^4; a^4; a^4; a; a; $\frac{1}{a^5}$; 1; 6^5; 5; $(a+b)^5$, $(1+i)^5$; $(1+i)^2$; $2a^2b^2$

4. $a^{\frac{5}{2}}$; a; $a^{\frac{9}{2}}$; $a^{\frac{3}{4}}$; $1+i$; $(1+i)^{\frac{5}{2}}$; 1.03; $(1.04)^{\frac{9}{2}}$; 1; $\frac{1}{1.05}$

5. a; a^4; a^{a-b}; 36; a^3; a^6; a^5; a^5; a^4; $\frac{1}{a}$

6. $(a+b)^2$; $\frac{1}{(a+b)^4}$; $a+b$; $\frac{1}{(a+b)^4}$; 1; a; $a^{\frac{1}{2}}$; $a^{\frac{3}{4}}$; $(1+i)^{n-1}$; $(1+i)^{n+1}$; $(1.06)^{n-1}$

7. $\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{a+b}$; $\sqrt[9]{1.06}$; $\sqrt[n]{1.06}$

8. 36; 9; 4

9. $125^{\frac{1}{3}}$; $236^{\frac{1}{5}}$; $145^{\frac{1}{2}}$; $425^{\frac{3}{5}}$; $(1+i)^{\frac{1}{2}}$; $(1.06)^{\frac{1}{2}}$

10. 2^6; 3^6; 2^9: $(1.06)^6$

11. 64; 81; 1.62247696

12. (1) 6 (2) 4 (3) $4^{\frac{1}{2}}$ (4) $a^{\frac{1}{4}}$ (5) 4 (6) 1^6 (7) 5^2;

(1) 35 (2) 62 (3) 3 (4) 1.03 (5) 1 (1) 0 (7) 4

13. (1) 10 (2) 10 (3) $\sqrt[4]{27}$ (4) $\sqrt[6]{432}$

14. (1) $\sqrt[6]{\frac{1}{54}}$ (2) $\frac{1}{2}$

15. (1) $2\sqrt{2}$ (2) $7\sqrt{3}$ (3) $\sqrt{7}$

覆習題

1. 3	2. -4	3. 0	4. $5\frac{4}{9}$
5. -20	6. $-9\frac{2}{13}$	7. 1	8. $2\frac{1}{2}$
9. $-1\frac{1}{4}$	10. ab	11. 0	
12. $\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$		13. 1736.44	14. 1000
15. .03	16. 1060.90	17. $\dfrac{1-(1+i)^{-6}}{i}$	18. $\dfrac{(1+i)^6-1}{i}$

第　二　章

習　題　一

1. (1) 3 (2) 2 (3) $\frac{1}{2}$ (4) 4 (5) $\frac{1}{2}$

2. (1) 3 (2) 100,000 (3) 12,167 (4) -5 (5) -4 (6) $\frac{1}{2}$

3. (1) $4\log 8-\frac{1}{5}\log 9-\frac{2}{3}\log 6$

(2) $2\log 2-3\log 3$

(3) $\frac{1}{2}\log 13-\frac{1}{5}\log 10-\frac{1}{3}\log 48$

(4) $\frac{1}{3}\log 25-\frac{2}{3}\log 11-\frac{3}{4}\log 23$

4. (1) $\frac{1}{2}\log 5+\frac{1}{2}\log 7-\frac{19}{4}\log 2-\frac{9}{2}\log 3$

(2) $-\frac{11}{-}\log 2-\frac{11}{4}\log 3-\frac{5}{2}\log 5-\frac{1}{2}\log 11$

(3) $-\frac{2}{3}\log 3-\frac{5}{6}\log 5$

(4) $\frac{7}{10}\log 2+\frac{1}{5}\log 3+\frac{2}{3}\log 7$

(5) $\frac{5}{6}\log 2+\frac{1}{2}\log 3+\frac{2}{5}\log 5+\frac{1}{2}\log 11$

5. (1) 1.0791 (2) 1.4771 (3) 1.6232 (4) 2.6232 (5) 2.2764 (6) 2.9542
(7) 2.5353 (8) 1.3313 (9) −.1370 (10) −2.4013 (11) −3.0124
(12) 1.35115 (13) .82277 (14) −0.1505 (15) 0.60248 (16) 0.7726

6. 3.3223

7. 0.9030

習題二

1. 2.2122	2. 1.9494	3. 2.9996	4. 0.1492
5. 7.8949−10	6. 3.8171	7. 0.8951	8. 0.4972
9. 9.7190−10	10. 0.2385	11. 9.9378−10	12. 8.4742−10
13. log 522.625	14. log .713167	15. log 1385.48	16. log 3.33923
17. log .00679333	18. log 18,326.09	19. log .0349308	20. log 25.9529
21. log 2.71813			

習題三

1. 1107	2. .7523	3. 9.098	4. 64.69
5. 20360	6. 1.463	7. 1298	8. 4244
9. 8320	10. 1.362	11. .0917	12. 6189
13. 148300	14. 9096	15. 1.034	16. 17370
17. 0.5861	18. 1.102	19. .9578	20. .8972
21. 10.34	22. 8.022	23. 5.231	24. 5.156
25. 0.1077	26. .0633	27. .1824	28. 0.7226
29. 10,490	30. 5029	31. 95.42	32. 94.56 或 93.72

習題四

1. 1.4306	2. .99115	3. 100,000,000	4. .8115
5. .1853	6. 2.39	7. 1 或 2	8. −1 或 3
9. 25 或 −4	10. 0	11. 2.13	

習題五

1. (1) $l=83$; $S=425$ (2) $l=48$; $S=255$ (3) $l=-24$; $S=-156$
(4) $l=1$; $S=2211$ (5) $l=39$; $S=400$

2. (1) $n=11$; $S=242$　(2) $n=10$; $S=165$　(3) $n=15$; $S=-255$

習 題 六

1. $l=6561$; $S=9841$　2. $l=-4374$; $S=-6560$　3. $l=\frac{1}{1024}$; $S=\frac{1023}{1024}$

4. $l=-768$; $S=-510$　5. 7.7217349292　6. 7.3600870514

習 題 七

1. $\frac{2}{3}$　2. $\frac{4}{3}$

習 題 八

1. $a^5-15a^4b+90a^3b^2-270a^2b^3+405ab^4-243b^5$　2. $224a^3$　3. 1.124864

習 題 九

1. 1.79175　2. 2.772588　3. 1.50515

覆 習 題

1. (1) 2.09375　(2) 1.41298　(3) .790319　(4) 1.004074
2. (1) 23.4502　(2) 17.6734　(3) 14.2069　(4) 11.8956
   (5) 10.2447　(6) 9.0064　(7) 8.0433　(8) 7.2725
   (9) 18.8541　(10) 5
3. 3081 月
4. \$ 3400
5. 1.11677148
6. 9.8975
7. (1) 4%　(2) 9.2%　(3) $1\frac{3}{4}$%　(4) 3%
   (5) $1\frac{1}{2}$%　(6) 2.43%
8. (1) 5　(2) 6　(3) 10　(4) 4
   (5) 7
9. (1) $33\frac{1}{3}$%　(2) 20%　(3) 26.88%　(4) 6%
   (5) $\frac{1}{2}$%
10. (1) .005　(2) .015　(3) .0125　(4) .025
   (5) $.0033\dot{3}$　(6) .00125　(7) .012

第三章

習題一

1. $12.50　2. 2.5年　3. 10%　4. (a) 20年 (b) 12.5年　5. $937.50　6. $1,000.00　7. $5,375.91
8. P=$3,500　I=$1,041.25　9. 4.5　10. 4.375%
11. $326.09　12. .08　13. $886.05

習題二

1. I=$97.57　I′=$96.24　2. 128日　3. 432日
4. (甲) $165.00　(1) $123.75; (2) $137.50; (3) $165.00; (4) $192.50; (5) $206.25; (6) $220.00
(乙) $4.3413　(1) $3.62; (2) $4.34; (3) $5.06
5. (甲) (1) $122.05; (2) $135.62; (3) $162.74; (4) $189.86; (5) $203.42; (6) $216.99
(乙) (1) $3.57; (2) $4.28; (3) $4.99
6. $372.94　7. $1,010.72　8. $271.35
9. I=$38.46; I′=$37.93; d=187日　10. $44.83
11. d=183日; I=$44.48　12. $15,000.00
13. D=$212.50; i=8.876%　14. D=$162.81; i=8.52%

習題三

1. 5%　2. 35年
3. (甲) 1.2823; (乙) 1.6406; (丙) 2.0937; (丁) 2.6658
4. $561.15
5. (甲) $26,108.77 (乙) $25,300.62　利息(甲)較(乙)多 $808.15
6. $55,849.27
7. (1) 14.2年; (2) 11.9年; (3) 10.21年; (4) 9.00年
8. 7.2%　9. 47.19年　10. 69.75年　11. $187.95
12. (甲) $148.02; (乙) $219.11; (丙) $480.10
13. (甲) $8.02; (乙) $39.11; (丙) $220.10
14. $13,266.49

習題四

1. 6.09%　2. 4%
3. (甲) .0609; (乙) .0613635506; (丙) .0616778119; (丁) .0618447433

4. $ 4,528.90　5. $ 5,668.62　6. $ 1,962.79　7. $ 262.76
8. $ 79.34　9. (甲) 7.122%; (乙) 7.186%
10. $ 118.94 存乙銀行; 121.66 存丙銀行　11. $ 7,039.99
12. 6.09%　13. 8.7%　14. $ 31,229.85　15. $ 0.46

習題五

1. 6.18%　2. 5.8%　3. $ 1,162.00
4. (甲) $ 16,832.55; (乙) $ 16,907.80
5. (甲) $ 5,076.14 或 $ 5,075.00; (乙) $ 5,102.04 或 $ 5,101.48
6. $ 8.9510

習題六

1. (甲) 8.166185 年; (乙) 8.333333 年
2. (甲) $ 2,259.32; (乙) $ 2,615.44
3. $ 2,653.57　4. $ 401.28　5. 89 日

覆習題

1. $ 21.25 或 $ 20.96　2. $i=.06383$; $j=6.28\%$
3. 5.95%　4. $ 783.53　5. $ 55,223,037,777.78
6. (甲) $ 4,094.39; (乙) $ 4,113.22　7. $ 4,670.36　8. $ 2,472.89
9. (甲) .762 年 (正確平均日期為九個月又四天)
(乙) .75 年 (近似日期為九個月)
10. $i=1.524\%$ 或年利 6.09%; $j=.628$
11. 3.093% 或年利 6.185%　12. $ 18,761.53
13. (甲) $n=11.725$ 年; (乙) $S=\$\ 1.415.88$
14. (甲) $ 1,050.62; (乙) $ 1,050.94; (丙) $ 1,051.16; (丁) $ 1,051.21;
(戊) $ 1,051.25
15. 8.2101 年
16. (甲) 10.244 年; (乙) 10.074 年; (丙) 9.9885 年; (丁) 9.9365 年;
(戊) 9.9095 年
17. (甲) 11 (二十三年十一月二十日到期); (乙) $ 1,020.00; (丙) 18 (二十三年十一月十八日到期)
18. $ 1,063.65　19. $ 2,498.69
20. (甲) $ 216.65; (乙) $ 207.10; (丙) $ 196.89

第四章

習題一

1. $6,722.60　2. $3,486.83　3. $8,033.28　4. $2,968.15
5. $2,695.57　7. $2,438.66　8. $79,351.24

習題二

1. 15.90 年（甲,乙兩法同）　2. 7.2208 年（甲法）　7.22（乙法）
3. 3.048 年（甲法）; 3.047 年（乙法）　4. 6.039 年（甲,乙兩法同）

習題三

1. 相近之利率爲 3.5%　2. 5.5%　3. 6.5%
4. 6.06%, 半年復利一次　5. 4.765%　6. 9%,半年復利一次

習題四

1. $4,451.82　2. $1,082.68　3. $4,444.28
4. (甲) $13,763.90; (乙) $13,663.90; (丙) $13,613.03; (丁) $13,578.38
5. $366.40　6. $5,440.57　7. $5,641.87　8. $5,648.54
9. (甲) $7,029.38; (乙) $6,943.65　10. $1.43

習題五

1. $2,615.54　2. $73.04　3. $449.25　4. 9%, 每月復利一次
5. $1,303.87　6. 7%,每月復利一次　7. $143.47

習題六

1. 3.503%　2. 3.0707%　3. 4.965%　4. 7.758%
5. 3%　6. 8.0679 期或 8.066 期

第五章

習題一

1. $1,224.86　2. $453.545　3. $133.986　4. $136.185
5. $1,000.05

習 題 二

1. $4.74　2. $26.36　3. 8年　4. 10%,每半年復利一次

習 題 三

1. $5,832.37　2. $494.62　3. $8,958.28　4. $7,153.61
5. $1,102.50　6. 11年　7. $2.87　8. $292.93

第 六 章

習 題 一

1. $184.97　2. $1.95　3. $3,767.28　4. $4,885.05
5. $1,682.70　6. $7,828.59

習 題 二

1. $2,943.625　2. $133,943.306　3. $13,408.52　4. $4,182.36
5. $4,167.85　6. $4,182.36　7. $4,540.28　8. $3,431.22
9. $332.05

覆 習 題

1. $86.00　2. $33.16　3. 7.451年　4. $1,256.50
5. 8.045期　6. 甲可多得 $220.88,較乙合算　7. 36.534%
8. 4.4期　9. $6,847.85　10. 3.372%　11. $0.78
12. 一次付清合算　13. $258,277.92　14. $1,364.48　15. $55.18
16. $3,576.26　17. $55,574.94　18. $21,428.5712　19. $553.79
20. 5.34%,每年復利四次

第 七 章

習 題 一

1. $314.11　2. $313.83　3. $1,016.81　4. $184.19
5. 742.50

習 題 二

1. 1,498.14　3. $497.58　4. $863.02　6. $2,880.40
7. $459.15

習題三

1. $ 668.40　　2. $ 668.16　　3. $ 1,361.66　　4. $ 1,981.07

覆習題

1. $ 411.65　　2. $ 638.64　　3. 14.2 年　　4. 4.7 年
5. $ 8,348.40　　6. $ 12,342.46　　9. $ 999.05　　10. 6.367 年

第八章

習題一

1. (甲) $ 5,627.57; (乙) $ 5,720.68　　2. $ 8,853.01　　3. $ 11,563.59
4. $ 98.12　　5. $ 925.27　　6. $ 90.58　　7. $ 231.14
8. $ 100.00　　9. (甲) $ 92.2054; (乙) $ 108.5843

習題二

1. $ 1,189.93　　2. $ 104.977　　3. $ 946.686　　4. $ 114.882
5. $ 47,972.276　　6. $ 54,376.034　　7. $ 996.54　　8. $ 10,917.82

習題三

1. 4.853%　　3. .0849638436　　4. −.0862045　　5. $ 10,207.47
7. $ 9,586.60　　8. $ 4,667.85　　9. $ 9,531.68　　10. $ 10,263.41
11. $ 102,120.13　　12. $ 44,975.85

覆習題

1. (甲) $ 479.69, 每年復利二次; (乙) $ 480.51, 每年復利一次
2. .05976159　　4. 每年付息一次為合算　　5. $ 12,425.88
6. $ 10,350.984
7. (甲) $ 501,238.58 投資利率五釐; (乙) $ 450,635.12 投資利率七釐
8. .0776126

第九章

習題一

1. $ 10　　2. $ 100　　3. $ 6　　4. $ 10,000
5. 第一年 $ 15,086.21; 第二年 $ 12,931.03; 第三年 $ 12,931.03; 第四年 $ 9,051.73

6. 第一年 $ 10,833.33 第二年 $ 10,000.00 第三年 $ 8,333.34 第四年 $ 11,666.67 第五年 $ 9,166.66

習 題 二

2. (1) $ 95.24 (2) $ 90.48 (3) 85.71 (4) 80.95
(5) 76.19 (6) 71.43 (7) 66.67 (8) 61.90
(9) 57.14 (10) 52.38 (11) 47.62 (12) 42.86
(13) 38.10 (14) 33.33 (15) 28.57 (16) 23.81
(17) 19.05 (18) 14.29 (19) 9.52 (20) 4.76

3. .369043 4. $ 637.59 5. .4592168, 待折舊額約合總折舊額 46%

6. $ 195.136 第一年利息 無 第二年利息 $ 11.708 第三年利息 $ 24.119 第四年利息 $ 37.274 第五年利息 $ 51.219

習 題 三

1. (甲) $ 16794.62; (乙) $ 42,445.13 2. $ 1,212,726.1568 3. $ 9,654.21
4. $ 5,429.24 5. $ 466,225.29 6. $ 45.85

覆 習 題

1. 11.25901% 2. 42.95% 3. $ 237.1081176 4. $ 2,400.67
5. $ 232,751.00 6. $ 251.302 7. $ 1,996.565181 8. $ 392,156.95
9. $ 35,477.89 10. $ 7,770.27 11. $ 2,381.43 12. $ 15,121.294
14. 24.2626 年 15. $ 8.56

16. (甲) $ 1,700 (平均法) (乙) $ 3,377.92 (定率遞減法)
(丙) (使用期數比率法) 第一年 $ 3,022.22 第二年 $ 2,644.44
第三年 2,266.67 第四年 1,888.89
第五年 1,511.11 第六年 1,133.33
第七年 755.56 第八年 377.78

18. (甲) 基金法 $ 1,325.56157; (乙) 年金法 $ 2,445.56

20. $ 360,024.21 21. $ 96.30 22. $ 4,650.06

第 十 章

習 題 一

1. $ 33.33 2. (a) $ 275.00; (b) $ 285.00
3. (a) 3.2%; (b) $ 20.91; (c) $ 724.32
4. $ 81.15 5. $ 0.31

習 題 二

1. \$6.74（第一期應分得之利益額）；\$2.45（第二期應分得之利益額）
2. \$11.17（第一期）；\$6.74（第二期）

習 題 三

1. \$219.12　　2. \$125.69　　3. \$146.36　　4. \$20.58

習 題 四

1. 11.5年　　2. 11年1月10日

習 題 五

1. .0676　　2. .0717 或 .0714　　3. .0626

習 題 六

1. \$2.39　　2. \$.60　　3. .0725357 或 .07254

覆 習 題

1. .07488　　2. 6年7.372月　　3. .0355346　　4. 12.23%
5. 13.16%　　6. 14.98%　　7. 9.18%

第 十 一 章

習 題 一

1. $\frac{1}{6}$　　2. $\frac{2}{5}$　　3. .49341　　4. .13729
5. .50659　　6. \$10　　7. 應少於 $\frac{1}{2}$

習 題 二

1. 30　　2. 4　　3. 6
4. 取出任何一球之方式有16種；取出紅球之方式有4種；取出紅球之機率爲 $\frac{1}{4}$
5. 十二點之機率爲 $\frac{1}{36}$；七點之機率爲 $\frac{1}{6}$
6. 21種

7. 合擲可得之不同形式有 8 種；成二陰面一陽面之形式有 3 種；得二陰一陽之機率爲 $\frac{3}{8}$

8. 495 種　　9. 126　　11. 75 種　　12. 2520

13. (1) 60; (2) 120; (3) 120　　14. 1,000 種　　15. $\frac{90}{1001}$

16. $\frac{1}{168168}$

習 題 三

1. $\frac{1}{2}$　　2. $\frac{1}{18}$　　3. $\frac{1}{216}$

4. (A) $\frac{1}{5}$; (B) $\frac{8}{15}$; (C) $\frac{4}{15}$

5. $\frac{3}{8}$　　6. $\frac{1}{6}$　　7. $\frac{5}{182}$　　8. $\frac{56}{323}$

9. (1) $\frac{25}{91}$; (2) $\frac{5}{182}$; (3) $\frac{10}{91}$

習 題 四

1. (A) $\frac{1}{715}$; (B) $\frac{216}{715}$　　2. (A) $\frac{35}{128}$; (B) $\frac{127}{128}$

3. $\frac{1}{8}$　　4. $\frac{5}{36}$　　5. $\frac{1}{1024}$　　6. $ 8.80

7. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{1}{6}$

習 題 七

1. 0.0074　　2. 0.02238　　3. 0.029754　　4. 0.010204

5. (1) .86812; (2) .94965; (3) .09348; (4) .05036; (5) .00857; (6) .00822

習 題 八

1. (1) .984945; (2) .909421

2. (a) .979152; (b) 0.777918; (c) 0.000109; (d) 0.009685; (e) 0.011654

復 習 題

1. (a) .00895; (b) .0972

3. 0.678

4. (*a*) 0.656; (*b*) 0.289
5. (*a*) 0.0499; (*b*) .414
6. (*a*) 0.851; (*b*) .994
7. (*a*) $1000\,C_{990}\,(Px)^{990}\,(qx)^{10}$
8. $\frac{1}{120}$
9. (*a*) $\frac{1}{1000}$; (*b*) $ 10
10. (*a*) $\frac{3}{1000}$; (*b*) $\frac{1}{1000}$; (*c*) $ 20
11. .771
12. (一) .951; (二) .048

第十二章

習題一

1. $ 5,810.29   2. $ 1,413.66

習題二

1. $ 0.8738   2. $ 644.97

習題三

1. $ 16.694
2. $a_{29}=18.784$ $a_{28}=18.957$ $a_{27}=19.124$ $a_{26}=19.285$ $a_{25}=19.441$
3. $c_{31}=18.420$ $a_{32}=18.228$ $a_{33}=18.030$ $a_{34}=17.825$ $a_{35}=17.613$

習題四

1. .03625   2. .04385   3. 13.0014   4. 9.6956
5. 9.4842; 9.2861; 16.808   6. $ 1402.21

習題五

1. 3.60274; 4.60274   2. (1) $ 440.32; (2) $ 459.69   3. $ 287.43

習題六

1. $ 243.32   2. $ 259 93

習 題 七

1. 6.8921　　2. 2.8033　　3. 2.9367

習 題 八

1. $a_{25}=19.441731$　$a_{35}=17.613823$　$a_{40}=16.446161$　$a_{60}=10.032401$
2. $a_{25\overline{10}|}=7.966162$　$a_{25\overline{12}|}=9.187256$　$a_{25\overline{20}|}=13.125053$
3. $\mathrm{a}_{25\overline{10}|}=8.314629$　$\mathrm{a}_{25\overline{12}|}=9.589978$　$\mathrm{a}_{25\overline{20}|}=13.706362$
4. ${}_{5|}a_{27}=14.717917$　${}_{10|}a_{27}=11.164921$　${}_{20|}a_{27}=6.026039$
5. ${}_{5|}a_{27\overline{10}|}=6.408653$　${}_{10|}a_{27\overline{10}|}=5.138882$　${}_{20|}a_{27\overline{10}|}=3.217704$
6. ${}_{5|}\mathrm{a}_{27}=15.525311$　${}_{10|}\mathrm{a}_{27\overline{10}|}=5.373235$
7. $\mathrm{a}_{28}=19.9573=1+a_{28}$　$\mathrm{a}_{29}=19.7848=1+a_{29}$　$\mathrm{a}_{30}=19.6054=1+a_{30}$

習 題 九

1. (*a*) \$4,577.34; (*b*) \$4,560.63; (*c*) \$4,535.57
2. $a^{(2)}_{50}=13.7846$; $a^{(4)}_{50}=13.9096$; $a^{(6)}_{50}=13.9513$
3. $\mathrm{a}^{(2)}_{50}=14.2846$; $\mathrm{a}^{(4)}_{50}=14.1596$; $\mathrm{a}^{(6)}_{50}=14.1179$
4. 7.94248　　5. 6.1706　　6. \$2,373.06

習 題 十

1. \$200　　2. \$52.10

習 題 十 一

1. \$164.47　　2. \$3,321.50　　3. \$98.94

覆 習 題

1. ${}_{10}E_{35}=.642648$; ${}_{15}E_{35}=.509218$; ${}_{20}E_{25}=.396558$
2. 2.081877　　3. \$482.29　　4 1.423849　　5. \$1,980.73
6. 13.125053　　7. \$679.82　　8. \$514.36　　9. \$729.59
10. \$466.31
11. $a^{(4)}_{40}=16.8211$; $a^{(12)}_{40}=16.9044$; $\mathrm{a}^{(4)}_{40}=17.0711$; $\mathrm{a}^{(12)}_{40}=16.9878$
12. \$16,891.56　　13. $a^{(12)}_{25\overline{10}|}=8.125875$; $\mathrm{a}^{(12)}_{25\overline{10}|}=8.154916$　14. \$11,818.52

15. $ 1,985.93　16. $ 5,995.02　17. $ 3,454.04　18. $ 16,935.40
19. $ 348.28　20. $ 10.3355

第十三章

習題一

1. $ 950.74　2. $ 943.93　3. $ 936.64　4. $ 929.20

5. $A_x = vp_x\left(\frac{d_x}{l_{x+1}} + A_{x+1}\right)$　6. .92149

習題二

1. $ 2,542.45　2. (*a*) $ 4.43; (*b*) $ 11 18

習題三

1. $ 284.99　2. $ 308.73

3. (一) $a_x = \frac{A_x - v}{v-1}$; (二) $a_x = \frac{1-d-A_x}{d}$; (三) $a_x = \frac{1-A_x(1+i)}{i}$

習題四

1. $ 75.50　2. $ 112.65　3. $ 316.00

4. (*a*) $ 19.91; (*b*) $ 141.75; (*c*) $ 220.65

5. $ 243.51　6. (*a*) $ 17.19; (*b*) $ 23.50

習題五

1. $ 787.08　2. $ 38.24

3. 1,000 $A'_{30:\overline{1}|}$ = $ 8.14; 1,000 $A'_{35:\overline{1}|}$ = $ 8.64; 1,000 $A'_{40:\overline{1}|}$ = $ 9.46;
1,000 $A'_{45:\overline{1}|}$ = $ 10.79

4. (*a*) $ 35.14
(*b*) 1,000 $A'_{20:\overline{1}|}$ = $ 7.54; 1,000 $A'_{21:\overline{1}|}$ = $ 7.59; 1,000 $A'_{22:\overline{1}|}$ = $ 7.64;
1,000 $A'_{23:\overline{1}|}$ = $ 7.69; 1,000 $A'_{24:\overline{1}|}$ = $ 7.74

5. 死亡率之關係及利息之關係

6. 以各年之自然保險費在起保時之現價相加,即得起保時之躉繳純保險費為:
7.54+7.28+7.02+6.77+6.53=$ 35.14

7. (*a*) \$ 71.29; (*b*) \$ 470.10

(*c*) 1,000 $A_{45\overline{1|}}$=\$ 10.79; 1,000 $A'_{46\overline{1|}}$=\$ 11.17; 1,000 $A_{47\overline{1|}}$=11.59;

1,000 $A'_{48\overline{1|}}$=\$ 12.09; 1,000 $A'_{49\overline{1|}}$=\$ 12.66

習題六

1. \$ 39.60　　2. \$ 7.82　　3. \$ 120.94

4. (*a*) \$ 8.32; (*b*) 49.77; (*c*) \$ 30.18

習題七

1. (*a*) \$ 536.50; (*b*) \$ 3,094.50; (*c*) \$ 3,607.20; (*d*) \$ 2,113.65

2. \$ 824.82

習題八

1. \$ 39.14　　2. \$ 64.53　　3. 181.09

4. 1,000 $P_{25\overline{40|}}$=\$ 18.40; 1,000 $_{20}P_{25\overline{40|}}$=\$ 25.71

5. (*a*) 定期保險之年繳純保險費爲　\$ 434.30

(*b*) 生存保險之年繳純保險費爲　\$ 642.69

(*c*) 儲蓄保險之年繳純保險費爲　\$ 1,076.99

覆習題

1. \$ 13.48　　2. \$ 13.52, 差 \$ .04　　3. \$ 86.30, 差 \$ 72.82

5. 第一年應繳純保險費 \$ 7.79, 以後各年應繳純保險費 \$ 15.48

6. 第一年應繳純保險費 \$ 7.79, 以後各年應繳純保險費 \$ 23.68

7. 第一年應繳純保險費 \$ 7.79, 以後各年應繳純保險費 \$ 25.61

8. \$ 19.08　　11. \$ 7,710.60　　12. \$ 2,501.91

13. (1) $A_x=P_x(1+a_x)$; (2) $P_x=\dfrac{A_x}{1+a_x}$; (3) $a_x=\dfrac{A_x-P_x}{P_x}$

14. \$ 22.99　　15. \$ 14.20

第十四章

習題一

1. \$ 365.05　　2. \$ 1,753.20　　3. \$ 678.80　　4. \$ 85.18

5. 85.18

習 題 二

1. \$245.16　　2. \$452.16　　3. \$456.00　　4. \$456.00

習 題 三

1. \$.21　　2. \$15.71　　4, \$.82　　5. \$.29

習 題 四

1. \$177.78　　2. \$322.29　　3. \$618.90　　4. \$669.51

5. \$873.15

習 題 五

1. \$184.14　　2. \$15.71　　3. \$322.29

習 題 六

1. ${}_{11}V_{25}=\$\,100.13$　　${}_{12}V_{25}=\$\,111.18$　　${}_{13}V_{25}=\$\,122.60$

   ${}_{14}V_{25}=\$\,134.38$　　${}_{15}V_{24}=\$\,146.53$

2. \$726.02

3. $1{,}000\,{}_{17}V_{30\,\overline{20}|}=\$\,789.89$　　$1{,}000\,{}_{18}V_{30\,\overline{20}|}=\$\,856.71$

   $1{,}000\,{}_{19}V_{30\,\overline{20}|}=\$\,926.67$　　$1{,}000\,{}_{20}V_{30\,\overline{20}|}=\$\,1{,}000.00$

4. ${}_{10:20}V_{30}=\$\,206.47$

習 題 七

1. \$82.42

2. 0; \$9.87; \$20.08; \$30.62; \$41.52; \$52.80; \$64.44; \$76.46; \$88.86; \$101.65

覆 習 題

1. $1{,}000\,{}_{1}V_{21}=\$\,6.45$; $1{,}000\,{}_{2}V_{21}=\$\,13.13$; $1{,}000\,{}_{3}V_{21}=\$\,20.04$

2. 第一年末積存金 \$14.05; 第二年末積存金 \$28.66; 第三年末積存金 \$43.84

3. 第一年末積存金 \$32.71; 第二年末積存金 \$66.78; 第三年末積存金 \$102.28

4. \$322.09

5. \$3,246.88

6. 第六年末積存金 \$395.00; 第七年末積存金 \$471.05; 第八年末積存金 \$550.37

   第九年末積存金 \$633.13; 第十年末積存金 \$719.48

7. (a) \$472.81　　(b) \$471.50　　(c) \$1.31

8. 第一年末積存金 \$25.28; 第二年末積存金 \$59.61; 第三年末積存金 \$95.37

   第四年末積存金 \$132.64; 第五年末積存金 \$171.46

中華民國二十四年八月初版
中華民國二十九年三月增訂四版

(58054)

立信會計叢書 會計數學 一冊

本書實價國幣叁元伍角
外埠酌加運費匯費

編譯者 莫啓歐

發行人 王雲五 長沙南正路

印刷所 商務印書館

發行所 商務印書館 各埠

G一九八六上