きの斜面の傾きをαとする。又このとき物體と斜面の間の垂直壓力をPとすれば,このときの摩擦力は極限に達して居るから,その値はμPに等しい。そこで物體の重さをWとすれば,釣合の條件から,

斜面に平行な方向の分力,　$\mu P-W\sin\alpha=0$

〃　直角　〃　$P-W\cos\alpha=0$

故に　$\tan\alpha=\mu$　卽ち　$\alpha=\lambda$

かやうな場合のαの値卽ち摩擦極限に達したときの斜面の傾きを**靜止角**[1]といふ。

二物體が互に接觸して居るとき,接觸面に作用する垂直壓力は,一般には一様に分布されて居らぬ。この分布は接觸して居る兩方の表面が,どの位まで幾何學的に能く一致するかといふ程度に關係する。但し實際上の問題としては,接觸面の各部が,自然の狀態から多少壓縮されて居るから,この壓縮の程度の多い所ほど,壓力もまた大い。

今接觸面が平面である場合を考へるに,物體がこの面に沿うて,並進運動をするとき,又はしようとするときには,物體の各部に作用する摩擦力は凡て平行である。故に垂直壓力がどういふ分布になつて居ても,並進運動に對する全抵抗は,全垂直壓力のみによつて定まる。然るに接觸面に直角な軸の周りの廻轉運動に

1. Angle of repose; Ruhewinkel.

對する全抵抗は,各部分に於ける摩擦力の能率の和によつて定まるから,その値は垂直壓力の分布に關係する。

注意までに一言するが,機械類の廻轉部に於ける摩擦を減ずるために,心棒の所に油をさした場合に於ては,極めて薄い油の層が固體の面に固着し,油の層どうしの間に,滑りの相對運動が起る。さればこの場合,心棒の廻轉運動に對する抵抗は,固體面の摩擦からではなくして,油の粘性から生ずる(この事については,後に粘性の章で述べる)。

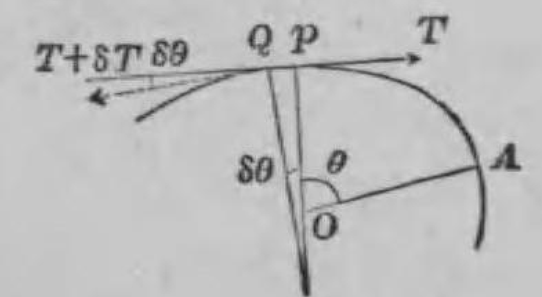
175. 廻轉運動に對する摩擦抵抗。 水平な心棒が固定して,その周りに車輪が廻轉する場合,或は軸承[1](ぢくうけ,ベアリング)が固定して,その中で水平な心棒が廻轉する場合等に於ては,廻轉に抵抗する摩擦力の作用線は,凡て廻轉の軸線から,心棒の半徑だけ離れて居る。所で廻轉運動に對する力の効果は,廻轉の軸線に對する力の能率によつて定まるから,この場合に於ける摩擦力の効果は,接觸面の各部に作用する摩擦力の總和(算術的の和の意)と,心棒の半徑との相乘積だけに關係し,摩擦力の分布には,關係せぬ。さればかやうな場合に,摩擦力の影響を少くするためには,他の事情が同じならば,なるべく心棒を細くするが宜しい。

1. Bearing; Lager.

鉛直な心棒の尖端の面が,軸承に接觸しながら廻轉する場合に於ては,接觸面の各部に於ける摩擦力は,廻轉の軸線から色々の距離にある。されば摩擦力の影響を少くするためには,摩擦力の大部分を,廻轉の軸線に近い所に作用させるやうにして,摩擦抵抗の能率をできるだけ減ずるが宜しい。そこで精密な測定器械などに於ては,寶石類のやうな剛度の大い物質を,接觸の部分に用ひ,これによつて摩擦力を減じ,且つ又尖端部の磨滅のために接觸面が廣くなり,その結果として,摩擦抵抗の能率の増すといふ不利益をも防ぐ。

176. 粗な面に接觸する綱の摩擦。 綱が滑かな面に接觸する場合に於ては,綱の張力は各部一樣であるが,

第百六十九圖



面が粗であるときには,張力は綱の各部分毎に違ふ。今この關係を吟味するために,綱の上に任意の小部分 PQ を取り,P 及び Q に於ける垂線が,綱の上の一定點 A に於ける垂線 AO と成す角を $\theta, \theta+\delta\theta$ とする。又 P, Q に於ける綱の張力を T, $T+\delta T$ とし,この張力を P に於ける垂線及び切線の方向に分解して考へるに,

$$\text{垂直分力} = (T+\delta T)\sin\delta\theta = T\delta\theta$$

$$\text{切線分力} = (T+\delta T)\cos\delta\theta - T = \delta T$$

この兩分力の中,垂直分力は綱が面から受ける垂直壓

力と釣合ひ,切線分力は面に沿うて作用する摩擦力と釣合ふ。そこで綱が滑り始めようとする極限の場合に於ては,

$$\frac{\delta T}{T\delta\theta} = \mu$$

從て

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{d\theta} = \mu$$

これを積分すれば,

$$\log T = \mu\theta + C$$

但し C は積分定數。今 A に於ける張力を T_0 とすれば,

$$[T]_{\theta=0} = T_0 \qquad \therefore \qquad C = \log T_0$$

この値を上式に入れれば,

$$\log\frac{T}{T_0} = \mu\theta$$

即ち

$$T = T_0 e^{\mu\theta}$$

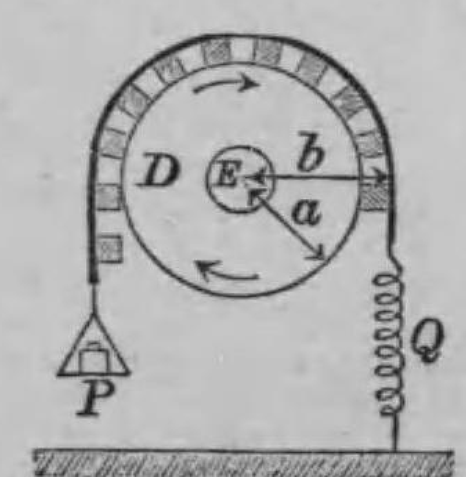
これによつて見れば,A と P との間に於て,綱の凡ての部分が面に接觸して居るならば,極限釣合のときの $\frac{T}{T_0}$ の値は,この二點に於ける垂線の間の角 θ のみによつて定まるもので,面の形には全く關係せぬ。尙ほ又この式から分る通り,θ の等しい增加に對して,$\frac{T}{T_0}$ の値は等比級數的に增すから,θ を相當の値に取れば $\frac{T}{T_0}$ を隨分大くすることができる。この事を利用して,船を繋ぐ場合のやうに,綱を柱の周りに卷き付け,その一端に加へた小い力によつて,他端に作用する大なる力を支へることができる。例へば $\mu=\frac{1}{2}$ とし,綱を

柱の周りに三重に卷いたとすれば,

$$\frac{T}{T_0}=e^{\frac{1}{2}\times 2\pi\times 3}=111$$

この關係は,綱が十分しなやかで,その各部が柱に接觸して居るならば,柱の太さや形が何であつても成り立つ。しかし若し接觸して居らぬ部分があれば,その部分に對する値を除いたものを,θの値として取らねばならぬ。

177. 動力計[1]。發動機蒸氣機關等の工率を測る裝置を**動力計**(ダイナモメーター)といふ。次に述べるのは,摩擦力を應用した動力計の一種である。この裝置に於ては,平らな緣を有する圓板Dを,吟味しようとする機關の心棒Eにはめて固定し,數多の小木片を內側に附けた帶を,この圓板の緣に掛ける。この帶の一端に小い皿を吊し,他端はゼンマイ秤を途中に挾んだまま,床に固定する。かやうに裝置して置いて,機關を運轉させ,その心棒と一所に圓板を矢の向きに廻轉させるときは,圓板が木片に及ぼす摩擦力は,帶をも同じ向きに廻はさうとする。そこで適當な分銅を皿に載せて,帶が張つたまま靜止するやうにする。このとき分銅と皿とを合せた重さをP,ゼンマ



第百七十圖

1. Dynamometer.

イ秤の示す張力をQ,木片に作用する摩擦力の總和をF,單位時間に於ける圓板の廻轉數をn,圓板の半徑をa,帶の成す圓弧の半徑をbとする。今機關がこの狀態で,定常廻轉をして居るとすれば,機關が外部へ出すエネルギーは,木片の摩擦力に打ち勝つために,全部悉く費される。故にこの摩擦力に對して,機關が單位時間中に爲す仕事の量,卽ちそのときの機關の工率をWとすれば,

$$W=2\pi anF$$

所で帶は靜止して居るから,廻轉軸に對するP,Q及びFの能率の代數和は零になる。卽ち

$$(P-Q)b-Fa=0 \qquad \therefore \qquad F=\frac{(P-Q)b}{a}$$

故に

$$W=2\pi nb(P-Q)$$

この式の右邊の諸量は,何れも皆測定から得られる。從てこれから工率Wの値を計算することができる。

178. 轉がりの摩擦力[1]。圓壔形の物體が,他の物體の面に沿うて轉がる場合に於ても,これに抵抗する力が働く。これを**轉がりの摩擦力**といひ,これに對して,これまで述べて來たやうな摩擦力を**滑りの摩擦力**[2]といふ。轉がりの摩擦力は滑りの摩擦力と,その原因が全く違ふ。今ゴム板のやうな軟かい面の上に,車輪を轉

1. Rolling friction; rollende Reibung; wälzende Reibung.
2 Sliding friction; gleitende Reibung.

がす場合を例に取つて見るに,輪が板面にただ乘つて居るだけのときには,接觸部の兩側に於て,同じやうに板面が多少高まる。然るに車輪に力を加へてこれを轉がすとき又は轉がさうとするときには,この小い高まりは,重に輪の進む方の側に生ずる。尙ほ又ゴム輪

第百七十一圖

の車輪のやうに,その面が軟いときには,接觸の部分が扁平になる。そして輪の面にも,また小い高まりが前方の側に生ずる。この例について述べたことは,程度の違ひはあるけれども,轉がりの運動の場合には,いつも一般に起ることである。從てその結果として,轉がりの運動に抵抗する廻轉能率が生ずる。これが卽ち轉がりの摩擦力に當る。されば若し接觸部が少しも凹まなければ,轉がりの摩擦力は起らぬ。

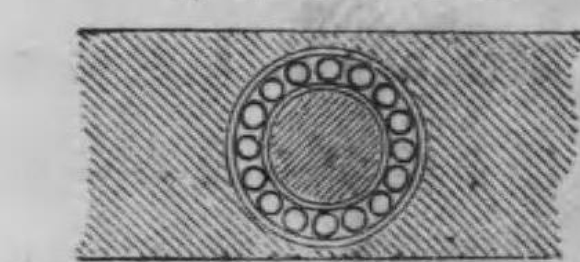
上記の例に於ける說明からすぐ分る通り,車輪の轉がりに對する抵抗は,接觸面が軟いほど大く,又その所に於ける壓力が大いほど大い。尙ほ又車輪の幅が增せば,壓力が廣い面積に分布されるから,板面の凹み方が少くなる。從て轉がりに對する抵抗が減る。されば自轉車自働車等の場合のやうに,車輪をゴム輪にすれば,それが地面に接する所で扁平になるために,堅い道路では却て抵抗を增すことになるが,軟い道路では

輪が土へくひこむのを少くするから,抵抗を減ずる。

179. 滑りの運動を轉がりの運動に變へる裝置。 重い物體を運ぶときには,普通の場合コロといふ裝置を用ひる。これは地面又は床面に圓柱を橫たへ,運ばうとする物體をその上に載せて,その物體を引き又は押す仕掛である。かやうにすれば,物體の運動に抵抗する力は,圓柱が地面及び物體に接する場所に於ける轉がりの摩擦力だけで,滑りの摩擦力は全く關係せぬ。從て物體を直接地面に沿うて滑らして運ぶ場合に比べて,抵抗が著しく減ずる。さればコロの役目は,滑りの運動を轉がりの運動に變へて,摩擦の影響を著しく減ずることである。

自轉車その他廻轉する車輪等に普く用ひられて居る球軸承[1](ボールベアリング)も,またコロと同じ原理で

第百七十二圖



ある。これは車輪に固着した小い輪の內側面,及び心棒に固着した小い輪の外側面に,それぞれ淺い溝を設け,その間に數多の鋼球を挾んだものである。かやうにしてあれば,車輪と心棒の間に置いた球は,コロの場合の圓柱と同じ役目をする。從て車輪が心棒の面に沿うて滑りながら,その周りに廻轉する場合に比べて,車輪の廻轉に

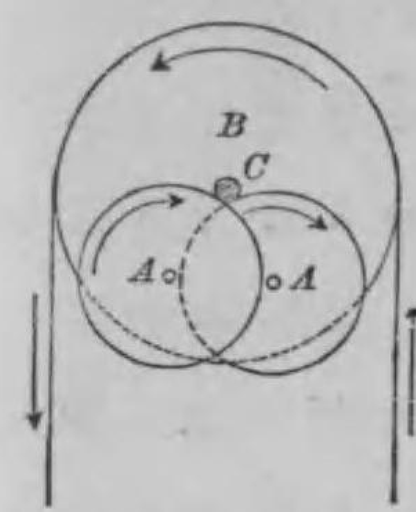
1. Ball bearing; Kugellager.

對する抵抗が著しく減ずる。

普通の車に於ける輪の効能は,地面又は床面の上で物體を運ぶとき,摩擦抵抗に對する仕事を減ずることである。その理由は次の通り。一體心棒は輪に比べて余程周圍が短いから,輪の廻轉に伴うて,心棒の所で或る距離だけ滑れば,その幾倍かの距離だけ,車體が前進する。且つ又輪と心棒との間に於ける滑りの運動に對する抵抗は,滑劑[1]の使用によつて,地面に沿うての滑りの運動の場合に比べて,餘程少くすることができる。故に或る與へられた距離だけ,物體を運ぶといふ目的に對しては,車を用ひる場合には,直接地面に沿うて滑らして行くのに比べて,抵抗力及び滑る距離共に減ずるから運送のために費さるべき仕事は著しく減ずる。若し又心棒の所に前述の球軸承を用ひれば,仕事は更らに一層減ずる。

摩擦輪[2]といふは,普通の滑車を用ひるよりも,廻轉運動に抵抗する摩擦力の能率を著しく減ずるための裝置である。例へば落體運動の條で述べたアトウッドの裝置に於ては,多くこれを用ひる。この裝置に於ては,圖のやうに,二個の滑車 A, A が一部分重なるやうに置いたものを,二組對立させ,糸を懸けるべき輪 B に,その心棒 C を固定したまま,この心棒を上記各組に屬す

1. Lubricant; Schmiermittel. 2. Friction wheels; Reibungsräder.



第百七十三圖

る兩輪の周邊の會合部で支へる。かやうに裝置して,B 輪に懸けた糸を引けば,この輪及びこれに固定した心棒が一所に廻轉して,四個の A 輪に廻轉を與へる。このとき廻轉運動に抵抗する力は,心棒 C と四個の A 輪との接觸部に於ける轉がりの摩擦を省畧するとすれば,四個の A 輪の心棒に於ける滑りの摩擦力だけである。今この摩擦力の廻轉能率の總和を M,A 輪の半徑を a とし,この摩擦力と釣合ふために,四個の A 輪の周邊に加へるべき切線力の總和を f' とすれば,

$$f'a = M \qquad \therefore \qquad f' = \frac{M}{a}$$

所で f' は反作用の法則によつて,B 輪の心棒の周邊に作用する切線力の總和に等しく,これが卽ち B 輪の廻轉に抵抗する力である。從てこれと釣合ふために,B 輪の糸に加へるべき力を f とし,B 輪及び心棒 C の半徑を b, c とすれば,

$$fb = f'c$$

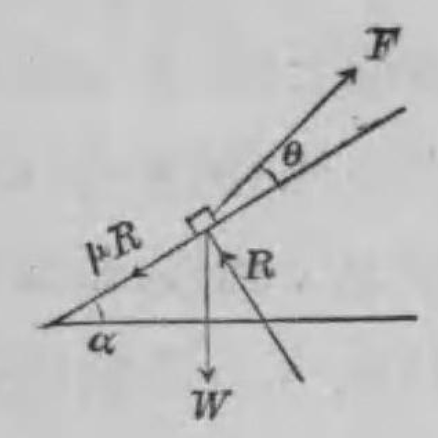
$$\therefore \qquad f = \frac{f'c}{b} = M\frac{c}{ab}$$

所で A 輪の心棒に於て滑りの摩擦力の作用する所は,廻轉の軸線から何れも近い距離にあるから,摩擦力の廻轉能率 M は小い値である。又 c は a 及び b の何れに

比べても小いから,fは極めて小い。かやうな譯で,この裝置に於て,B輪の廻轉運動に對する摩擦抵抗に打ち勝つために,糸に加へるべき力は,極めて小くてすむ。

180. 練習問題。

1. 水平面に對してαだけ傾いた斜面の上に,重さWの物體が置いてある。この物體に細い糸を附け,斜面の最大傾斜線に沿うて,これを引き上げようとするとき,これに要する最小の力はいくらか。但し糸と斜面の間の角をθとし,摩擦係數をμとする。



第百七十四圖

答。$W\dfrac{sin\alpha+\mu cos\alpha}{cos\theta+\mu sin\theta}$

解。 物體が引き上げられようとする極限釣合の場合に於ては,

斜面に平行……$Fcos\theta-\mu R-Wsin\alpha=0$

〃　直角……$Fsin\theta+R-Wcos\alpha=0$

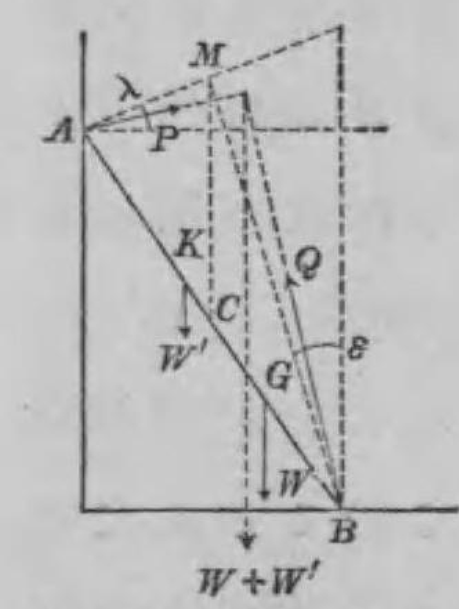
この兩式からRを消去してFを求めれば,上記の値を得る。

2. 水平板の上に在る重さWの物體を板面に沿うて滑らさうとするとき,これに要する最小の力はいくらか。又このとき力が板面と成す角度はいくらか。但し摩擦角をλとする。　答。$Wsin\lambda$; λ

3. 斜面の最大傾斜線上に在る,重さW及びW'といふ二物體を,細い棒で連結して置くに,それが滑らうとする極限の場合に於ては,斜面の傾角θ及び棒に沿うて作用する歪力Rの値はいくらか。但し物體と斜面の間の摩擦係數をμ及びμ'とする。

答。$tan\theta=\dfrac{\mu W+\mu' W'}{W+W'}$, $R=\dfrac{WW'}{W+W'}(\mu-\mu')cos\theta$

4. 鉛直な壁と水平な床の間に,重さWといふ棒を立て掛けて,棒の上の一點Kに重さW'の錘を吊すとき,W'がどれだけになるまでは,棒が滑らないで居るか。但し壁及び床と棒の間の摩擦角をλ及びεとする。



第百七十五圖

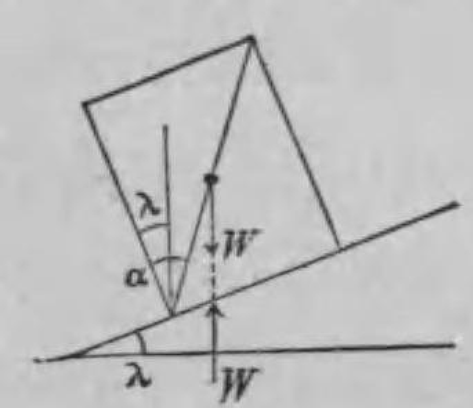
答。圖に示すやうに,棒の上端Aに於て,壁への垂線に對して角度λをなすやうに,上方へ直線AMを引き,又下端Bに於て,床への垂線に對して角度εをなすやうに,左方へ直線BMを引く。この二直線の交點Mを通る鉛直線が棒に會する點をCとし,棒の重心をGとするに,$W'<W\dfrac{GC}{KC}$なれば,棒は滑らぬ。

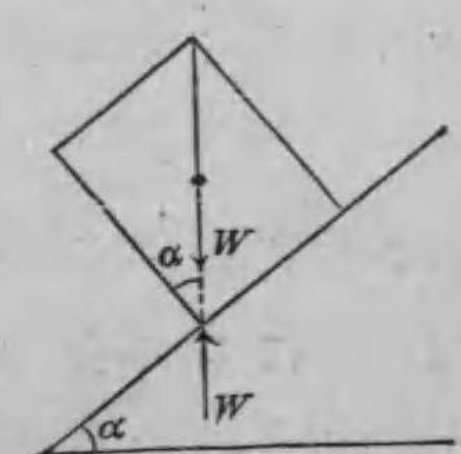
解。 棒の端A,Bに於ける合壓力をP,Qとするに,この二力はWとW'との合力と釣合ふ。故にこの合力はPとQとの交點を通らねばならぬ。所で摩擦の法則として,端A,Bに於ける垂線とP,Qとの間の角は,摩擦角λ,εを越えることはできぬ。これ等の條件が凡て

成り立つためには,WとW'との合力はC點よりも下を通らねばならぬ。從て$W'<W\dfrac{GC}{KC}$。

注意。若し錘を吊した點がC點よりも下にあれば,錘がどんな重さであらうとも,棒は滑らぬ。又若し鉛直線に對する棒の傾きがεよりも小ければ,どんな錘をどこに吊しても,棒は滑らぬ。

5. 直圓壔が斜面の上に立ててあるとき,この斜面の傾きを追々增して行けば,圓壔は先づ滑るか,或は先づ倒れるか。答。圓壔の軸と對角線の間の角αが,圓壔と斜面の間の摩擦角λよりも大なれば,圓壔は先づ滑り,小なれば先づ倒れる。





第百七十六圖

解。圓壔の底面に作用する壓力の合力が,圓壔の重さと釣合うて居るから,この合壓力の方向は鉛直である。そこで若し$\alpha>\lambda$なれば,接觸面への垂線と合壓力との間の角がλになつたとき,重心を通る鉛直線はまだ底面の外へは出ぬ。故に圓壔は摩擦の極限には達して居るが,倒れることの極限には達せぬ。從て圓壔は,倒れぬ中に先づ滑べる。然るに若し$\alpha<\lambda$なれば,重心を通る鉛直線が底面の境界線を通るやうになつたとき,接

觸面への垂線と合壓力との間の角はαとなるが,これは假定によつて,摩擦角λよりも小い。故に圓壔はまさに倒れようとする極限に達して居るが,摩擦の極限には達せぬ。從て圓壔は,滑らぬ中に先づ倒れる。

6. 半徑a,高さhの直圓壔が水平な板の上に立つて居る。この圓壔の上底面の中心に水平な力を加へ,その力を追々增して行けば,圓壔は先づ滑るか,或は先づ倒れるか。　答。摩擦係數が$\dfrac{a}{h}$よりも小なれば先づ滑り,大なれば先づ倒れる。

7. 鉛直軸の周りに廻轉する水平板の上で,軸から40糎の所に,物體が載せてある。摩擦係數を0.3とすれば,板の角速度がいくらになるまでは,物體が滑らないで居るか。　答。$2.7\dfrac{\text{ラヂアン}}{\text{秒}}$

8. 滑車に糸を懸け,その兩端に重さ$P,Q\,(P>Q)$の錘を吊したとき滑車がまさに廻らうとして居る。滑車及び心棒の半徑をa,bとし,その間の摩擦角をλとすれば,

$$\frac{P}{Q}=\frac{a+b\sin\lambda}{a-b\sin\lambda}$$

であることを證明せよ。

第十章　衝　突

181. 衝突。[1] 二つの物體が衝突するときは,一般にはねかへる。これは兩方共に接觸の部分に於て壓縮が起るので,この歪のために彈力が現はれるからである。この場合歪に伴うて現はれる力は,二物體の間の相互作用であるから,この二物體を一つの團體として見れば,衝突の前に於ても,後に於ても,或は衝突作用の繼續する時間中に於ても,全體としての運動量は變らぬ。

二物體が衝突した後,各々がどういふ運動をするかといふ問題を解くことは,簡單な場合の外は,困難である。そこでこの後我々は,廻轉運動の無い滑かな球が,衝突をする場合のみを考へる。

二つの球が同一直線上を動いて居て,衝突をする場合に於ては,衝突のとき各球に働く力の作用線は,その直線と一致する。從て衝突後に於ても,兩球は何れも前と同じ直線上に動く。かやうな衝突を**直衝突**[2]といひ,その他の場合を**斜衝突**[3]といふ。

二つの球が直衝突をする場合を考へて見るに,衝突前に於ては,二物體は互に相近づき,衝突後に於ては互に相遠ざかる。故に兩者の相對速度は,衝突の前と後とでは,向きが反對になる。又その相對速度の大さに

1. Impact, collision; Stoss.　2. Direct impact; zentraler Stoss.
3. Oblique impact; schiefer Stoss.

ついて實驗した結果によれば,衝突の後の値と前の値との比は,與へられた二物體について,それぞれ一定して居る。これを**反撥係數**[1]といふ。この値は何れの場合に於ても,必らず1よりも小い。所で反撥係數が丁度1に等しいやうな理想的の物體を想像して,これを**完全彈性體**[2]といふ。象牙の如きはこれに近い。

182. 直衝突。衝突をする二物體の質量をm, m',衝突前の速度をv_0, v_0',衝突後の速度をv, v',反撥係數をeとすれば,運動量不變の法則によつて,

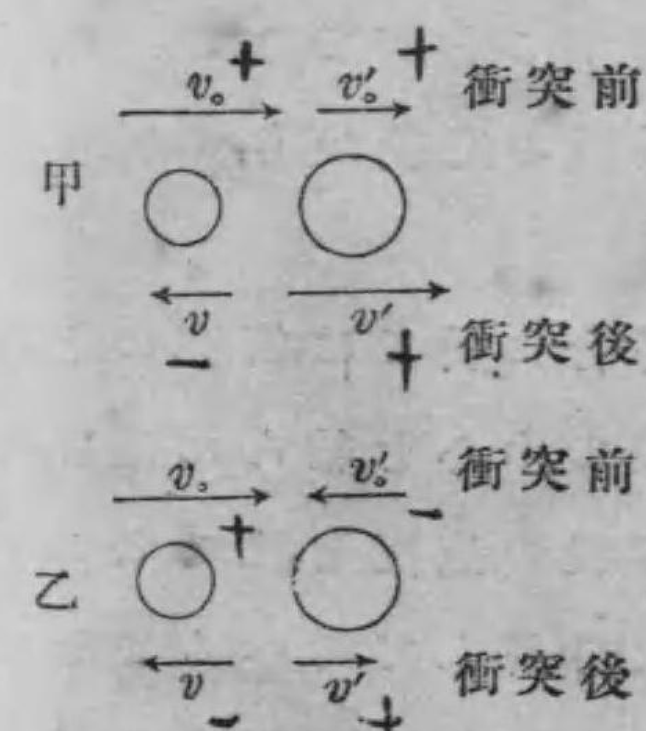
$mv - mv_0 = -(m'v' - m'v_0')$

$$mv+m'v'=mv_0+m'v_0'.$$

又衝突の前と後とで,相對速度の向きが逆になることと,反撥係數の定義とから,

$$-\frac{v-v'}{v_0-v_0'}=e$$

この二方程式は,衝突に關する問題を解くときの基礎になる。但しv_0, v_0', v, v'は運動の向きに應じて,それぞれ正又は負の符號を有すると定める。例へば左圖甲の場合には,v_0, v_0', v'は正で,vは負。又乙の場合にはv_0, v'は正で,v_0', vは負。



第百七十七圖

1. Coefficient of rebound, coefficient of restitution; Restitutionskoeffizient
2. Perfectly elastic body; vollkommen elastischer Körper.

次に特別な場合三つを考へて見る。

(1)　完全非彈性體の場合,即ち $e=0$ の場合。これは二物體が衝突した後,はねかへらないで,兩者が一所になつて動く場合である。この場合には,上式から直ちに,

$$v=v'=\frac{mv_0+m'v_0'}{m+m'}$$

(2)　質量の等しい完全彈性體の場合,即ち $m=m'$, $e=1$ の場合。前の式から直ちに,

$$v=v_0',\quad v'=v_0$$

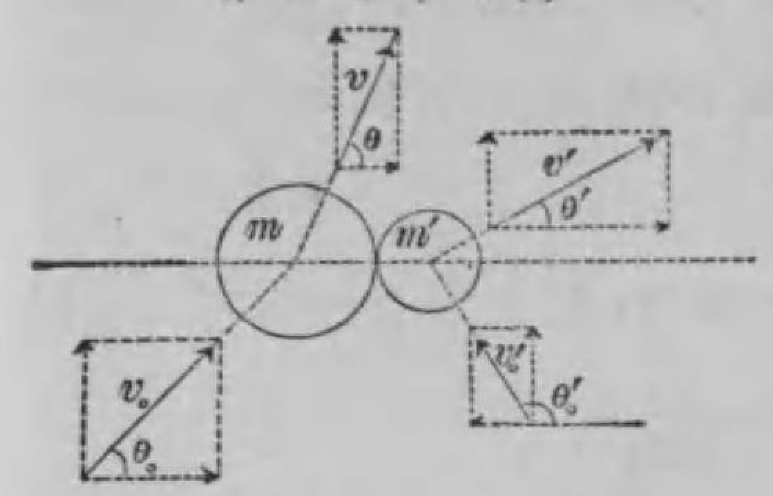
これによつて見れば,等質量の完全彈性體が衝突するときは,衝突の前と後とに於ける兩者の速度が,丁度互に交換する。

(3)　固定した壁に直角に球が衝突する場合。これは一方の球が初め靜止し,且つその質量が他に比べて,非常に大くなつた場合と見做すことができる。從て前の式から,或は直接に反撥係數の定義から,

$$v=-ev_0$$

183. 二球の斜衝突。 この場合に於ては,衝突のとき各球に働く力の作用線は,二球の中心を結んだ直線と一致する。故に衝突の前及び後の速度を,凡てこの中心線に平行及び直角な方向に分解して考へるときは,中心線の方向の速度に關しては,直衝突の場合の法則があてはまり,これに直角な方向の速度には,變化が起

第百七十八圖



らぬ。今兩球の質量及び速度に關しては,前條と同じ記號を用ひ,尙ほ又衝突の瞬間に於ける兩球の中心線が,衝突前の兩球の運動線と成す角を θ_0, θ_0',衝突後の運動線と成す角を θ, θ' とすれば,中心線に平行な方向については,

$$mv\cos\theta+m'v'\cos\theta'=mv_0\cos\theta_0+m'v_0'\cos\theta_0'$$

$$v\cos\theta-v'\cos\theta'=-e(v_0\cos\theta_0-v_0'\cos\theta_0')$$

又中心線に直角な方向については,

$$v\sin\theta=v_0\sin\theta_0$$

$$v'\sin\theta'=v_0'\sin\theta_0'$$

この四方程式で,斜衝突に關する問題を解くに十分である。

特別な一例として,固定した壁に球が衝突する場合を考へて見る。そこで衝突の前及び後に於ける球の速度を v_0, v とし,それが壁への垂線と成す角,即ち入射角及び反射角を φ_0, φ とするに,垂線の方向に關しては,反撥係數の定義から,

$$\frac{v\cos\varphi}{v_0\cos\varphi_0}=e$$

この場合には,φ_0 及び φ は何れも 0° と 90° の間の角としてあるから,上式左邊の分母子共に正。從て前條と違

つて,ここでは負號を附けるに及ばぬ。

次に壁面に平行な方向の速度は,衝突のために變化を受けぬから,

$$v\sin\varphi=v_0\sin\varphi_0$$

この兩式から,

$$v=v_0\sqrt{e^2\cos^2\varphi_0+\sin^2\varphi_0}$$

$$\tan\varphi=\frac{\tan\varphi_0}{e}$$

從て　　$v<v_0,\qquad \varphi>\varphi_0$

即ち衝突後の速度は,衝突前の速度に比べて,大さに於て減じ,方向に於ては垂線から遠ざかる。

完全彈性體の場合に於ては,$e=1$ と置いて,

$$v=v_0,\qquad \varphi=\varphi_0$$

即ち衝突後の速度は,衝突の前と同じ大さで,且つ垂線に對して同じ角を成す。

184. 衝突に基因する運動エネルギーの減り。 先づ直衝突の場合を考へるに,前に既に見た通り,

$$mv+m'v'=mv_0+m'v_0'$$

$$-\frac{v-v'}{v_0-v_0'}=e$$

これを解けば,

$$v=\frac{1}{m+m'}\{(mv_0+m'v_0')+em'(v_0'-v_0)\}$$

$$v'=\frac{1}{m+m'}\{(mv_0+m'v_0')+em(v_0-v_0')\}$$

二球を一つの團體と見て,衝突の前及び後の運動エネルギーを E_0, E とすれば,

$$E_0-E=\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}m'v_0'^2\right)-\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m'v'^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}m(v_0^2-v^2)+\frac{1}{2}m'(v_0'^2-v'^2)$$

$$=\frac{1}{2}m(v_0-v)(v_0+v)+\frac{1}{2}m'(v_0'-v')(v_0'+v')$$

然るに $m(v_0-v)$ 及び $m'(v_0'-v')$ は,兩球が衝突のために受けた運動量の減りを表はすもので,この兩者は大さ相等しく,符號が反對である。即ち

$$m'(v_0'-v')=-m(v_0-v)$$

$$\therefore\quad E_0-E=\frac{1}{2}m(v_0-v)\{(v_0+v)-(v_0'+v')\}$$

$$=\frac{1}{2}m(v_0-v)\{(v_0-v_0')+(v-v')\}$$

$$=\frac{1}{2}m(v_0-v)(v_0-v_0')(1-e)\qquad\because\quad v-v'=-e(v_0-v_0')$$

所で　$$v_0-v=v_0-\frac{1}{m+m'}\{(mv_0+m'v_0')+em'(v_0'-v_0)\}$$

$$=\frac{m'}{m+m'}(v_0-v_0')(1+e)$$

$(mv_0+m'v_0)-\{$
$m'(v_0-v_0')$

故に　$$E_0-E=\frac{mm'}{2(m+m')}(1-e^2)(v_0-v_0')^2$$

$$>0\qquad\because\qquad 0<e<1$$

以上は直衝突の場合について得たことであるが,斜衝突の場合に於ても,また全く同じ結果になる。何となれば,兩球が衝突したときの中心線に平行及び直角な方向に,凡ての速度を分解し,平行な分速度をば,上記の通りの記號で表はす。又直角な分速度は,兩球共に衝突のために變化なく,これを u, u' とする。さうすれ

ば,兩球全體としての運動エネルギーの減りE_0-Eは,

$$E_0-E=\left\{\frac{1}{2}m(v_0^2+u^2)+\frac{1}{2}m'(v_0'^2+u'^2)\right\}-\left\{\frac{1}{2}m(v^2+u^2)+\frac{1}{2}m'(v'^2+u'^2)\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}m'v_0'^2\right)-\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}m'v'^2\right)$$

卽ち直衝突のときと全く同じことになる。

上記の結果から見れば,二物體が衝突すれば,全體としての運動エネルギーが必らず減ずる。この減じただけのものは,普通の場合には,重に熱エネルギーに變る。特別な場合として,$e=1$のときには,運動エネルギーは衝突のために變化を受けぬ。

185. 質點群の連續衝突に基因する壓力。 多數の質點例へば水滴又は砂粒が連續して,物體の面に衝突するときは,その面は壓力を受ける。このとき質點群が單位時間毎に失ふ運動量は,物體が單位時間毎に得る運動量に等しい。從てこの値が物體に作用する壓力に等しい。水流又は風等が障碍物に當つたときの壓力もまた同樣である。

例題。 一樣な鎖を鉛直にして,その下端を机の面に觸れさせて置く。この鎖が自由に落ちて,机の上に積もるとき,時刻 t に於て,机面に作用する壓力はいくらか。但し鎖の質量は,單位の長さにつきρとする。

答。$\frac{3}{2}\rho g^2t^2$

解。 机面に作用する壓力Pは二つの原因から生ずる。卽ち第一は鎖の各部分が連續衝突をするために

生ずる壓力P_1,第二はその時までに机上に落ちて,そこに乘つて居る鎖のために生ずる壓力P_2である。時刻 t に於ける鎖の速度は gt に等しいから,その時單位時間毎に机に衝突すべき鎖の質量は ρgt である。故に時刻tに於ては,鎖が單位時間毎に $\rho gt.gt$ だけの運動量を失ふ。從て

$$P_1=\rho gt.gt=\rho g^2t^2$$

又時刻tまでに落ちた鎖の全長は $\frac{1}{2}gt^2$ に等しいから,その時机上に乘つて居る鎖の質量は $\frac{1}{2}gt^2.\rho$ である。從て

$$P_2=\frac{1}{2}gt^2.\rho g=\frac{1}{2}\rho g^2t^2$$

故に時刻tに於ける全壓力Pは,

$$P=P_1+P_2=\frac{3}{2}\rho g^2t^2$$

186. 練習問題。 次の問題に於ては,eは反撥係數。

1. 高さ h の所から,小球を水平板上に落すとき,その運動が全く止まるまでの時間はいくらか。

答。$\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

2. 滑かな水平板上の一點Aから斜めに投げた小球が,板に當つてはねかへり,更らに又當つてはねかへるとする。このとき球が板に當る點を B 及びC とすれば,$AB\times e=BC$ であることを證明せよ。

3. 二物體が直衝突をするとき,衝突の初めから兩者が共通の速度を有する時刻までと,その時刻から衝

突の終りまでの間に,各物體の受ける運動量の變化をI_1及びI_2とすれば,$\frac{I_2}{I_1}=e$であることを證明せよ。

解。直衝突の場合に於ては,兩者共に接觸の部分に於て歪を受けるから,その間の相對速度が追々減じ,歪が最大に達したとき零になる。この一瞬間だけは,兩者が共通の速度を有する。それから後は,歪に基因する彈力のために,兩者の間の相對速度が追々增し,遂に兩者が離れる。今二物體の質量をm, m'とし,衝突前に於ける兩者の速度を$v_\circ, v_\circ'$,衝突後に於ける速度をv, v',最大歪の時に於ける共通速度をVとすれば,物體mについては,

$$I_1=m(v_\circ-V)$$

$$I_2=m(V-v)$$

然るに兩者全體としての運動量はいつも同じいから,

$$mv_\circ+m'v_\circ'=mv+m'v'=(m+m')V$$

從て
$$V=\frac{mv_\circ+m'v_\circ'}{m+m'}=\frac{mv+m'v'}{m+m'}$$

この値を上記の二式に入れるときは,

$$I_1=m\left(v_\circ-\frac{mv_\circ+m'v_\circ'}{m+m'}\right)=\frac{mm'}{m+m'}(v_\circ-v_\circ')$$

$$I_2=m\left(\frac{mv+m'v'}{m+m'}-v\right)=\frac{mm'}{m+m'}(v'-v)$$

$$\therefore\quad \frac{I_2}{I_1}=\frac{v'-v}{v_\circ-v_\circ'}=e$$

4. 上端を固定した等長の平行な糸で,等質量の二個の小球を吊し,兩者を接觸させて置く。今その中の一球を,元の位置からの距離がaになるまで引き上げ,靜かにこれを放して,兩球を衝突させたとき,他の球は,元の位置からの距離がbになる所まで上つたといふ。この兩球間の反撥係數はいくらか。 答。$\frac{2b-a}{a}$

5. 質量Mといふ靜止した滑らかな球に,質量mといふ他の球が斜衝突をするとき,若し$m=eM$なれば,この兩球は衝突の後互に直角な方向に動くことを證明せよ。

6. 玉突盤上の球が引き續いて,隣接した二側面に當るときは,この兩衝突の前と後とに於て,球の動く徑路は平行であることを證明せよ。

7. 毎秒200瓩の割合で,高さ10米の所から,水が落ちて,地面に當るとすれば,衝突のために地面に及ぼす壓力はいくらか。但し水は地面に當つた後,少しもはねかへらぬものとする。 答。286瓩。

第十一章　流　　體

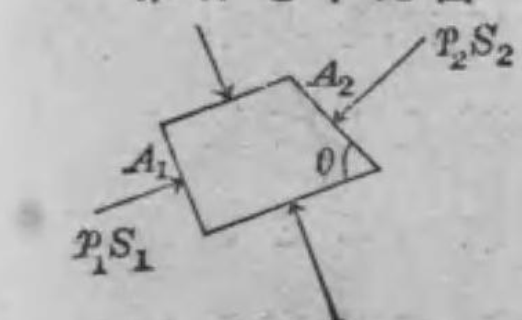
187. 靜止した流體中に於ける壓力。 流體が他の物體に接する境の面,又は流體の內部に於ける任意の面を考へて見るに,この面を境として,兩側の部分が互に押し合つて居る。即ちこの面には壓力が作用する。所で流體が靜止して居るときは(等速直線運動のときは,靜止の場合と凡て同樣),その中に何れの面を取るとしても,その面に作用する壓力は,それに直角である。何となれば,若し直角でないとすれば,この壓力を直角及び平行な分力に分解することができる。然るに流體は固體と違つて,その中のどういふ面に於ても,これに平行な力を受けたまま靜止して居ることはできぬ。即ち辷りの歪力を支へて居ることはできぬ。故に靜止した流體に於ては,何れの面をその中に取るとしても,それに平行な分力は零である。即ち壓力はその面に直角である。尙ほ又流體が他の物體に接する境界面に於ても,また同樣である。何となれば,この境界面を一つの面として有する,小い直平行六面體の流體を考へるに,この面を除いた殘りの五面に作用する壓力は,何れもそれに直角である。故にこの六面體が靜止するためには,他物體との境界面に作用する壓力も,またそれに直角でなければならぬ。

流體の壓力と單に言へば,單位面積に作用する壓力

卽ち**壓力の强さ**の意味に用ひる。これに對して,特に或る面積全體に作用する壓力を指すときは,これを**全壓力**[1]といふ。尙ほ又普通には,流體の壓力の强さを表はすに,それだけの力と重さを等しくする,溫度0°に於ける,單位斷面の水銀柱の高さを用ひる。例へば空氣の壓力60糎といへば,空氣中に想像した任意の面に於て,その單位面積に作用する壓力が,溫度0°に於ける,單位斷面の水銀柱60糎だけの重さに等しいとの意味である。

流體の中に微小な柱體(角柱でも圓柱でも宜しい)を想像し,これをA_1A_2とする。但しA_1の底面は柱軸に直角であるとして,その面積をS_1,壓力をp_1とし,又A_2の底面は柱軸に對してθといふ傾きを成すとして,その面積をS_2,壓力をp_2とする。

第百七十九圖



所で柱體を十分小く取れば,その表面積に比べて,體積が非常に小くなるから,各面に作用する全壓力に對して,流體柱の重さを省畧しても宜しい。故にこれだけの部分に釣合の條件を當てはめ,軸の方向の分力の代數和を零と置いて,

$$p_1S_1-p_2S_2\sin\theta=0$$

然るに幾何學的の關係として,

1. Total-pressure; Gesamtdruck.

$$\frac{S_1}{S_2}=\sin\theta \qquad p_1 = p_2 \sin\theta$$

故に $\quad p_1=p_2$

この關係はθの値に無關係である。故に同じ場所A_2に於ては,どういふ方向に面を取るとしても,その單位面積に對する壓力は凡て同じい。即ち靜止した流體中の同じ場所に於ては,何れの方向にも,壓力の強さは同じい。かやうな性質の壓力を**流體壓**[1]といふ。

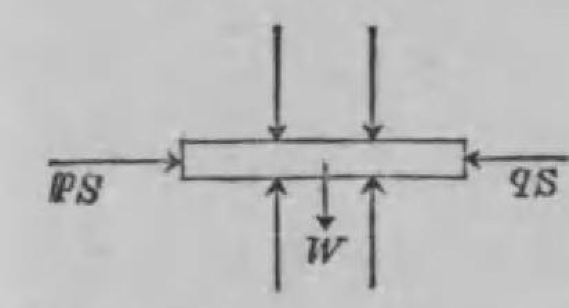
注意一。 固體の場合には,その中の同じ場所に於ても,壓力の強さは方向によつて違ふ。

注意二。 上記の所では剛體の場合の釣合の條件を流體柱に當てはめたのであるが,それで少しも差支ない。何となれば靜止した流體に於ては,その中の何れの部分も或る力に作用されたまま靜止して居る。從てこの部分に作用する力の關係を求めるといふだけの問題に於ては,これを剛體と見做しても宜しい。彈性體に力を加へると延長や撓みなどを生ずるが,それが延長するだけ延長した狀態撓むだけ撓んだ狀態に於ては,これを剛體と見做して,釣合の條件を當てはめても宜しいのと同樣である。

188. 靜止した流體中に於ける壓力の分布。 靜止した流體の中に,橫斷面の極めて小い水平柱を想像し,兩端の面は何れも柱軸に直角であるとして,その面積を

1. Hydrostatic pressure; hydrostatischer Druck.

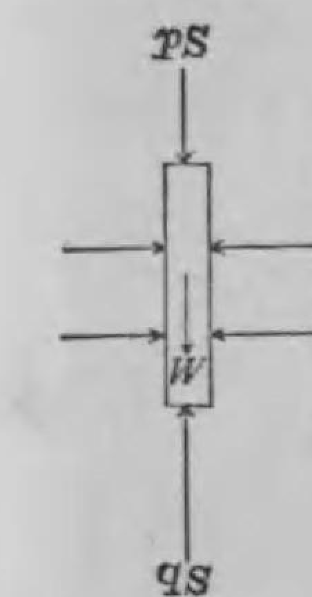
第百八十圖



S,兩端面に於ける壓力をp及びqとすれば,この流體柱の釣合から,

$$pS-qS=0 \qquad 從て \qquad p=q$$

されば流體中の同じ水平面の上に於ては,何れの場所でも,壓力は凡て同じい。



第百八十一圖

次に上記の流體柱を鉛直に取り,その重さをWとすれば,

$$W+pS-qS=0$$

從て $$q-p=\frac{W}{S}$$

これをすぐ前に得た結果と合せて見ると,次のやうになる。即ち靜止した流體中の任意の二點に於ける壓力の差は,その二點間の鉛直距離だけの高さを有する,單位斷面の流體柱の重さに等しい。從て靜止した流體中の壓力は,唯だその中に於ける高さだけに關係し,容器の大小形狀等には全く無關係である。

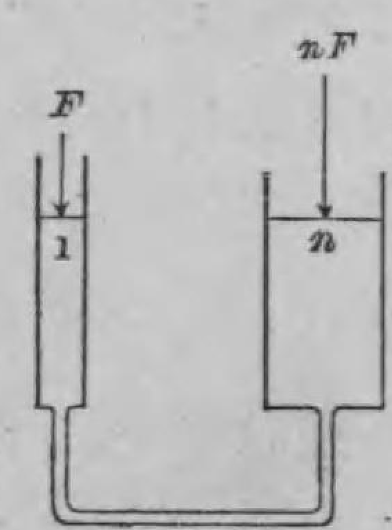
上記の結果から見れば,流體の或る部分に於て壓力を增せば,高さの違ひから生ずる壓力の差は別として,凡ての他の部分に於て,壓力が同じだけ增す。このことを**パスカルの原理**[1]といふ。かやうなことは固體には當てはまらぬ。

1. Pascal's principle; Pascalsches Prinzip.

液體の密度を ρ とするに,これは壓力によつて變らぬと見て宜しいから,液體中に於ける任意の二點間の鉛直距離を h とすれば,その壓力の差は $h\rho g$ に等しい。然るに氣體は壓力によつてその密度が變るから,このこと(壓力の差が $h\rho g$ に等しいこと)は h の餘り大くない場合についてのみ成り立つ。

氣體では密度が割合に小いから,せまい範圍内について考へて居る間は,高さの違ひから生ずる壓力の差は,通常は考へるに及ばぬ。故に或る容器內の氣體について,壓力を言ふときには,單に器內の壓力いくらと言へば宜しい。然るに液體の場合には,必らず何々の高さの所の壓力と言はねばならぬ。

活塞を備へた大小二個の圓筒の下端を,細い管で連絡し,この中には水を充たし,兩方の活塞の上に適當な

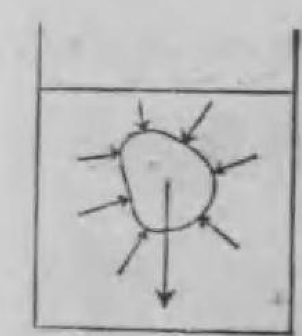


第百八十二圖

錘を載せて,丁度釣合が保たれたとする。今この兩活塞の面積の割合を $n:1 (n>1)$ とするに,小い方の活塞に更らに或る力 F を加へ,これを下方に押して,壓力を增したとすれば,水中の何れの部分にも,同じだけの壓力が增すことになるから(パスカルの原理),大い方の活塞をそのまま釣合に保つためには,下方へ向つて nF だけの力をこれに加へねばならぬ。換言すれば,小い

活塞に力を加へるときは,大い活塞の方で,n 倍の力を外部へ及ぼすことになる。力を利する裝置として,廣く用ひられて居る**ブラマ**[1]**の水壓機**[3]は,この原理の應用である。但しこの裝置も他の機械と同樣に,エネルギーを傳へる役目をするだけのことで,これを用ひれば,力に於ては利するけれども,エネルギーの點では,損益はない。

189. アルキメデスの原理。 靜止した流體中の或る一部分を考へて見るに,その境界面の各部分が,周圍の


第百八十三圖

流體から受ける壓力と,その部分の重さとが丁度相釣合ふ。故にこの壓力の合力は,それだけの部分の重心を通つて,上方に向ひ,その大さはその部分の重さに等しい。然るにこれだけの部分が他の物體で置き換へられたとしても,その周圍から受ける壓力は前と變らぬ。されば流體の中に在る物體は,周圍から壓力を受けることの結果として,それと同體積の流體の重さだけ,その見掛け上の重さが減じたと同樣になる。このことを**アルキメデスの原理**といふ。又上記壓力の合力を流體の**浮力**[4]といひ,この力の作用する點卽ち物體で置き換へられた流體部の重心を**浮力の**

1. Bramah. 2. Hydraulic press; hydraulische Presse. 3. Archimedes' principle; Archimedessches Prinzip. 4. Buoyancy; Auftrieb.

中心[1]といふ。

天秤で物體の質量を測るとき,精密な測定に於ては,空氣の浮力に對する修正を要する。即ち物體分銅及び空氣の比重を σ_1, σ_2 及び ρ とし,物體の質量を $M_\circ$,空氣中で物體と釣合ふべき分銅の質量を M とすれば,物體及び分銅に作用する空氣の浮力は $\frac{M_\circ}{\sigma_1}\cdot\rho$ 及び $\frac{M}{\sigma_2}\cdot\rho$ に等しいから,

$$M_\circ - \frac{M_\circ}{\sigma_1}\rho = M - \frac{M}{\sigma_2}\rho$$

$$\therefore \qquad M_\circ = M - M\frac{\rho}{\sigma_2} + M_\circ\frac{\rho}{\sigma_1}$$

然るに $\frac{\rho}{\sigma_1}$ は小く,且つ又 M と $M_\circ$ とは殆んど相等しいから,上式に於て, $M_\circ\frac{\rho}{\sigma_1}$ の代りに, $M\frac{\rho}{\sigma_1}$ を入れ換へても宜しい。故に

$$M_\circ = M\left(1 - \frac{\rho}{\sigma_2} + \frac{\rho}{\sigma_1}\right)$$

例。眞鍮製の分銅(比重8.4)を用ひて,比重2.5の物體を空氣中で秤つたとき,100瓦であつたとすれば,通常狀態の空氣に於ては,$\rho=0.0013$ であるから,

$$M_\circ = 100 \times \left(1 - \frac{0.0013}{8.4} + \frac{0.0013}{2.5}\right) = 100.036\text{瓦}$$

普通これを**眞空への換算**[2]と稱へる。

重さを無視し得べき流體の一部に壓力 p を加へたとすれば,何れの部分に於ても,壓力は p である。今か

1. Centre of buoyancy; Auftriebsmittelpunkt.
2. Reduction to vacuum; Reduktion auf den leeren Raum.

やうな流體の中に,任意の一部分を想像して見るに,その境界面には,それに直角に且つ各部一樣に,壓力 p が作用する。然るに流體には重さがないとしたのであるから,この壓力の合力は零になる。されば,一般に一樣な壓力又は張力が,任意の閉ぢた面に直角に作用するときは,その合力は零である。從て物體全體としての運動又は釣合に關する問題を取り扱ふとき,かやうな力は度外に置いて宜しい。但し物體の內部に現はれる歪力等に關しては,勿論別である。

圓形長方形等のやうな,簡單な平面閉線を周邊とする任意の面に,一樣な垂直壓力が作用するとき,その合力の大さ及び作用線は,上記の結果から容易く計算することができる。例へば半徑 r といふ半球面に,一樣な垂直壓力 p が作用するものとするに,その周邊を含む圓形の平面部を想像し,これがこの半球の底面を成すとし,この底面にもまた一樣な垂直壓力 p が作用すると考へる。さうすれば,半球體の全表面に,一樣な垂直壓力が作用することとなるから,その合力は零である。即ちこの半球體の曲面部に作用する壓力の合力は,底面部に作用する壓力の合力と丁度相釣合ふ。然るに底面部に於ける壓力の合力は

第百八十四圖

$\pi r^2 p$ で,その作用線は底面の中心を通つて,その面に直角である。故にこれと大さ等しく方向反對な力が,卽ち半球面に一樣に作用する垂直壓力の合力である。

大氣の壓力の割合に大いことを示すために,**マグデブルグ半球**[1]といふ裝置がある。これは二つの相等しい半球狀の,丈夫な中空の金屬器の緣を能く合せて球形とし,內部の空氣を排除したものである。これを引き離すために,どれだけの力を要するかは,上記の結果を使へば,極めて簡單に知れる。

尙ほ又上記の論法からすぐ分る通り,半徑 r といふ圓を周邊とする面ならば,その形狀が何であつても(例へば直圓錐の曲面でも,或は帽子狀の曲面でも),一樣な垂直壓力 p がその面に作用するときの合力は,上記半球面の場合と同樣 $\pi r^2 p$ に等しい。

190. 天秤で比重を測ること。 固體と液體との場合を區別して,測定の方法を次に述べる。何れにしても,アルキメデスの原理の應用に過ぎぬ。

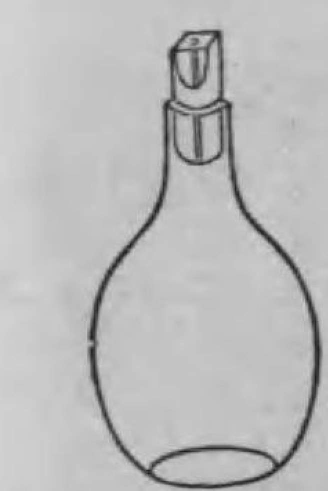
(1) 固體の場合。測らうとする固體を,天秤の桿の一端に吊して,空氣中での重さを測る。次にその固體を水中に浸して吊したまま,重さの見掛けの減りを測れば,これは固體と同體積の水の重さに等しい。從てこれからその固體の比重を計算することができる。

1. Magdeburg hemispheres; Magdeburger Halbkugeln.

若し固體を水に浸したとき,性質の變るやうなものであれば,さういふ恐れのない適當な液體を選み,上記のやうにすれば,その液體に對する固體の比重 ρ_1 が分る。そこで次に述べるやうな方法の何れかによつて,その液體の比重 ρ_2 を測れば,求めようとする固體の比重は $\rho_1\rho_2$ に等しい。

(2) 液體の場合。適當な大さのガラス片を天秤の桿の一端に吊し,その液體及び水の中に入れたときの,重さの見掛けの減りを測り,兩者の比を求めれば,それが卽ち液體の比重である。

191. 比重瓶。[1] これはガラス栓を備へた一つのガラス瓶で,この栓には細い孔があけてある。それは瓶に液體を充たして,栓をはめたとき,瓶の中に液體が一杯になつて,その殘りがこの孔を通して,外へ出ることのできるためである。この裝置は粉末狀の固體例へば砂のやうなもの,又は少量しか得られぬ液體の比重を測るに適する。



第百八十五圖

(1) 粉末狀固體の場合。例へば砂の或る分量を取り,その重さ W_1 を測る。次にこの砂を比重瓶に入れ,更らに水を加へて,これを充たしたときの全體の重さ W_2, 及び比重瓶を水だけで充

1. Pyknometer, specific gravity bottle; Pyknometer.

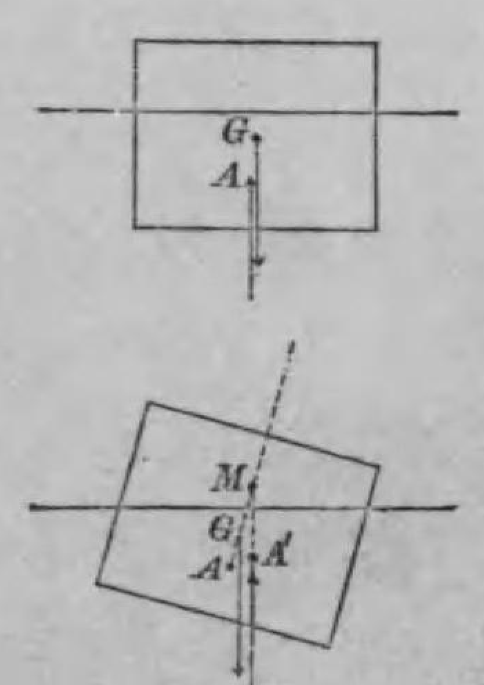
たしたときの全體の重さW_3を測る。さうすれば水の充ちて居る比重瓶と砂を合せたものは,砂と水とを入れた比重瓶よりも,砂と同體積の水だけ多い。故に$W_3+W_1-W_2$は砂と同體積の水の重さに等しい。從て

$$\text{砂の比重}=\frac{W_1}{W_3+W_1-W_2}$$

(2)　液體の場合。測らうとする液體を比重瓶に充たしたときと,水を充たしたときの全體の重さを別々に測り,比重瓶だけの重さを引き去り,兩者の比を取れば,液體の比重が得られる。

192. 浮體。 液體の面に浮んで居る物體に於ては,重力と浮力とが釣合つて居る。今この物體に少し廻轉を與へたとすれば,新しい位置に於ては,浮力の中心が變位するから,この物體にはトルクが作用する。そしてこのときのトルクで,浮體の安定度が定まる。

浮體の重心をGとし,釣合の位置にあつたときの浮力の中心をAとする。又この位置から,重心の周りに少し廻轉を與へたときの浮力の中心をA'とし,A'を通る鉛直線とAG線との交點をMとする。このM點がGよりも上方にあれば,浮力は浮體を元の位置へ戻すやうな向きに作用するから,この場合の釣合は安定



第百八十六圖

であるが,M點がGよりも下方にあれば不安定である。かやうな點Mを**メタセンター**[1]といふ。船の場合に於ては,安定度を增すために,重い荷を下積みにして,船全體としての重心を低くし,メタセンターがいつも重心よりも上方にあるやうにする。

193. 浮秤[2]。 密閉したガラス管の上部を一樣な太さにし,下部を膨らせて,その下端に錘を附け,これを液體に浮ませるときは,液體の比重が小いほど,管が多く沈む。從てそれがどこまで沈むかを見て,液體の比重を求めることができる。この裝置を**浮秤(又は比重計)**といふ。


第百八十七圖

ボーメ[3]の浮秤に於ては,水よりも重い液體に用ひるものと,輕い液體に用ひるものとを別々にしてある。但し兩者の違ふ點は唯だ度盛りの仕方だけで,次にこれを說明する。

(1)　水よりも重い液體に用ひるもの。このものに於ては,浮秤を水に浮ばせたとき,管が水面に接する線を0°,15%の食鹽溶液(比重1.114)に浮ばせたとき,液面に接する線を15°とし,この二線間を15に等分して度盛りし,これと同じ間隔で,15°のさきまで度盛りを續け

1. Metacentre; Metazentrum.　2. Hydrometer; Aräometer.
3. Beaumé.

る。今この浮秤を,比重 ρ の液體に浮ばせたときの讀みを n とするに,兩者の間の關係は,次のやうにして求められる。卽ち浮秤の度盛 0°から下方全部の體積を V_o,一目盛りに對應する體積を v とすれば,

$$浮秤の重さ=V_o=(V_o-15v)\times 1.114$$
$$=(V_o-nv)\rho$$

これ等の方程式から V_o と v を消去すれば,

$$\rho=\frac{147}{147-n}$$

(2) 水よりも輕い液體に用ひるもの。浮秤を10%の食鹽溶液(比重1.075)に浮ばせたとき,管が液面に接する線を0°,水に浮ばせたときのを10°とし,この二線間を10に等分して度盛りし,これと同じ間隔で,10°のさきまで度盛りを續ける。この場合に於て,浮秤の讀み n に對應する液體の比重を ρ とすれば,前と全く同様にして,

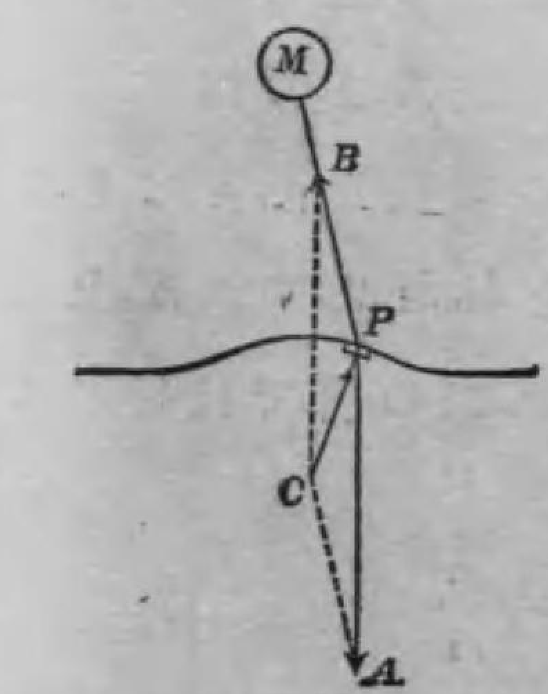
$$\rho=\frac{143}{133+n}$$

ボーメの浮秤に於ける度盛りの仕方は,何等理論上の根據があるのではないが,唯だ度盛りが等分であるために,普通の人に取つては,讀みが取り易いといふ位のことに過ぎぬ。しかし比重を求めるには,上記の公式によつて,一々計算しなければならぬといふ不便がある。そこで通常は n と ρ との關係を表に作るか,或はこの關係を曲線で表はして置いて,計算の代りにこ

れを利用する。

上記のやうな等分度盛りの浮秤の外に,管が液面に接する位置を見て,液體の比重がすぐ讀めるやうに,度盛りした浮秤もある。尙ほ又鹽類酸類等の溶液に於て,溶質の百分率をすぐ讀み得るやうに,度盛りしたのもある。

194. 靜止した液體の自由面。 靜止して居る液體の自由面の上に於て,極めて薄い任意の小い液層を考へて見るに,外部からこの液層に作用する力は,それに接する內部の液體から受ける壓力と,丁度相釣合ふ。然るにこの壓力はその液層に直角である。從て液體の自由面は,その面上の液層に外部から作用する力に直角になる。されば單に重力だけが液體に作用する場合には,自由面は重力に直角卽ち水平である。然るに若し液面に近い所に,電氣を帶びた物體でもあれば,その物體に面した近所では,液面は高まる。これは表面の液層が,それに作用する電氣的引力と重力との合力に直角になることの結果である。尙ほ又第十三章で見るやうに容器の壁に近い所の液體,又は少量の液體に於ては,重

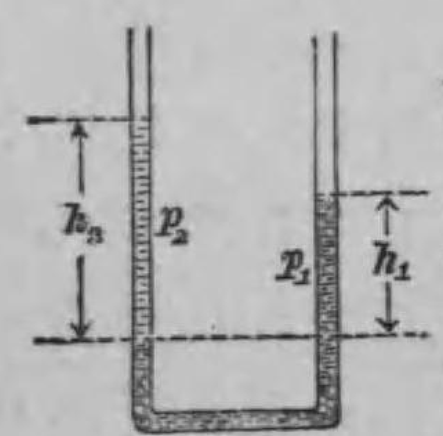


第百八十八圖

力の外に表面張力の影響が加はるから,液面は一般に水平ではない。

上記の所では,自由面の上方は眞空であるとして考へたのであるが,上部に空氣又は他の氣體が存在する場合でも,やはり同樣の結果になる。何となれば,このとき表面の薄い液層に作用する壓力以外の力は,この液層の上下兩側から受ける壓力(兩方共に液層に直角)の差と釣合つて居るから。尙ほ又同じ論法によつて,互に相混せぬ二種の液體が,同じ器に入れてあれば,その境の面が水平になることは,明かである。

底部で連通した管又は器の中に,互に相混せぬ二種の液體を入れるとき,兩液の境界面と同じ高さの所に於ては,兩管共に壓力が相等しい。且つ又自由面に於ける壓力も,兩液の高さに余り大い違ひがない限りは,兩管共に相等しいと見做して宜しい。從てこの兩壓力の差もまた相等しい。



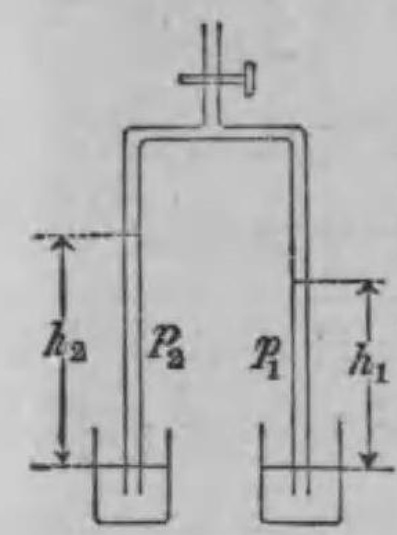
第百八十九圖

されば兩液の密度をρ_1, ρ_2とし,その境界面から自由面までの高さをh_1, h_2とすれば,上記兩壓力の差は,第一の管では$h_1\rho_1 g$,第二の管では$h_2\rho_2 g$に等しい。故に

$$h_1\rho_1 = h_2\rho_2 \qquad 即ち \qquad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

されば兩液の境界面から自由面までの高さの比は,兩液の密度の逆比に等しい。

液體の密度を比較するに用ひるヘーア[1]の裝置は,上記と全く同じ原理に歸する。即ちこの裝置に於ては,圖に示すやうに,二本の鉛直ガラス管を上部で連通させ,その下端をばそれぞれ,比較しようとする二種の液中に浸す。かやうにして置いて,管の上部から管內の空氣を少し吸ひ出したとき,液が管內に上つた高さをh_1, h_2とすれば,上記と全く同樣の理によつて,



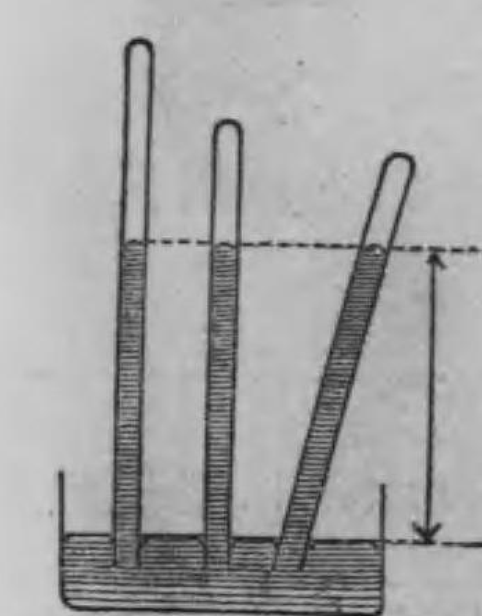
第百九十圖

$$h_1\rho_1 = h_2\rho_2 \qquad 即ち \qquad \frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

この實驗に於て,第一の液體として水を取れば,$\rho_1 = 1$であるから,

$$\rho_2 = \frac{h_1}{h_2}$$

195. 氣壓[2] 地球の周りには,空氣といふ氣體の海,即ち所謂**大氣**[3]がある。大氣中では,何れの所に於ても,その上部に在る空氣の重さのために,壓力が作用する。これを**大氣の壓力**又は單に**氣壓**といふ。今一端の



第九十一圖

1. Hare. 2. Atmospheric pressure; Atmosphärendruck.
3 Atmosphere; Atmosphäre.

閉ぢてあるガラス管に水銀を充たし,これを倒まにして,水銀を入れた別の器中に立てるときは,管内の水銀は凡そ76糎位(時により又場所によつて違ふ)の高さになる。そして管の上部に眞空が出來る(實は水銀蒸氣がいくらか存在する)。これを**トリチェリ眞空**[1]といふ。この實驗に於て,管内に上つた水銀柱のために生ずる壓力は,外の水銀面に於ける壓力卽ち氣壓に等しい。そこで通常この水銀柱の高さを鉛直に測つた値で,氣壓の大小を表はす。**水銀晴雨計**[2]といふは,この鉛直の高さを精密に測るための器械である。從て普通この高さをば,**晴雨計の高さ**[3]と稱へる。

上記トリチェリ眞空の實驗に於ける水銀柱の高さは,その當時の氣壓の値に關係することは勿論であるが,尙ほその外次の三つの事柄にも關係する。卽ち第一,實驗に用ひるガラス管の太さ,第二,水銀の溫度,第三,實驗の場所に於ける重力の强さ。この三つの中どれが變つても,水銀柱の高さは變る。次にその關係を說明する。

(1) ガラス管の太さと水銀柱の高さとの關係。第十三章で述べるやうに,ガラス管内の水銀は,毛管現象のために,單に氣壓だけに基因する高さよりも,いくら

1. Torricellian vacuum; Torricellische Leere. 2. Mercury barometer; Quecksilberbarometer. 3. Barometric height; Barometerstand.

か下つて居る。そして管が細いほど多く下る。そこで管の内徑に應じて,それぞれ相當の補正を加へて,本當の値に直さねばならぬ。但し管の内徑が2.5糎以上になれば,毛管現象の影響は極めて少いから,補正を要せぬ。

かやうにして毛管現象に對する補正を行つたとして,管内に於ける水銀柱の高さをb,水銀の密度をρとすれば,氣壓は質量$b\rho$の重さ卽ち$b\rho g$に等しい。

(2) 水銀の溫度と水銀柱の高さとの關係。上記の結果から分る通り,與へられた氣壓と釣合ふべき水銀柱の高さは,水銀の密度が大いほど,減ずべき理である。故に水銀柱の高さで氣壓の大小を精密に表はすためには,どういふ密度又はどういふ溫度の水銀を用ひて,どれだけの高さと言はねばならぬ。そこで我々は0°の水銀を用ひると定め,他の溫度の水銀を用ひたときの高さは,凡てこれを0°のときの値に換算したものを取ることにする。

(3) 重力の强さと水銀柱の高さとの關係。氣壓が$b\rho g$に等しいことから,直ちに分る通り,與へられた氣壓と釣合ふべき水銀柱の高さは,重力の强さの大い所ほど,減ずべき理である。故に水銀柱の高さで氣壓の大小を精密に表はすためには,どういふ强さの重力に作用されたときのどれだけの高さと言はねばならぬ。

そこで我々はこの高さをば,凡て緯度45°の海面での値に換算したものを取ることにする。

これまで述べて來たことを約言すれば,次の通りである。即ち氣壓をこれと釣合ふべき水銀柱の高さで表はすには,先づ毛管現象に對する補正を加へ,更らにこれを緯度45°の海面で,0°の水銀を用ひたとしての高さに換算した値を取ることと定める。そこでかやうな換算をした水銀柱の高さをBとし,0°に於ける水銀の密度をρ_0,緯度45°の海面に於ける重力の強さをg_{45}とすれば,

$$b\rho g = B\rho_0 g_{45}$$

$$\therefore \quad B = b\frac{\rho}{\rho_0}\frac{g}{g_{45}}$$

然るに第百四十六條によれば,

$$\frac{g}{g_{45}} = 1 - 0.0026\cos 2\varphi - 0.0002h$$

但しφは實驗の場所の緯度,hはその海拔を粁で表はした値である。又水銀の膨脹係數は0.000181であるから,實驗當時の温度(即ち密度ρに對應する温度)を$t°$とすれば,

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{1+0.000181t} = 1 - 0.000181t$$

故に$\frac{\rho}{\rho_0}$及び$\frac{g}{g_{45}}$の値をBの式中に入れれば,

$$B = b(1 - 0.000181t - 0.0026\cos 2\varphi - 0.0002h)$$

これは次條に述べるやうな水銀晴雨計で氣壓を測るとき,いつも用ひる式である。

上記のことは,水銀柱を測るに用ひる尺度の度盛りが正しいとしてのことであるが,温度が變れば,尺度一目盛りの間隔が變るから,このことをも考に入れて,水銀柱の高さbの値に補正を行はねばならぬ。今尺度を作る物質の線膨脹係數をβとし,尺度の度盛りが0°のときに正しいとするに,$t°$のとき讀み取つた値がbであるから,そのときの眞の高さは$b(1+\beta t)$である。水銀晴雨計などでは,普通は眞鍮製の尺度を用ひるから,さういふ場合には,$\beta=0.000019$。故にこの方の補正をも前記の補正の中に加へるとすれば,

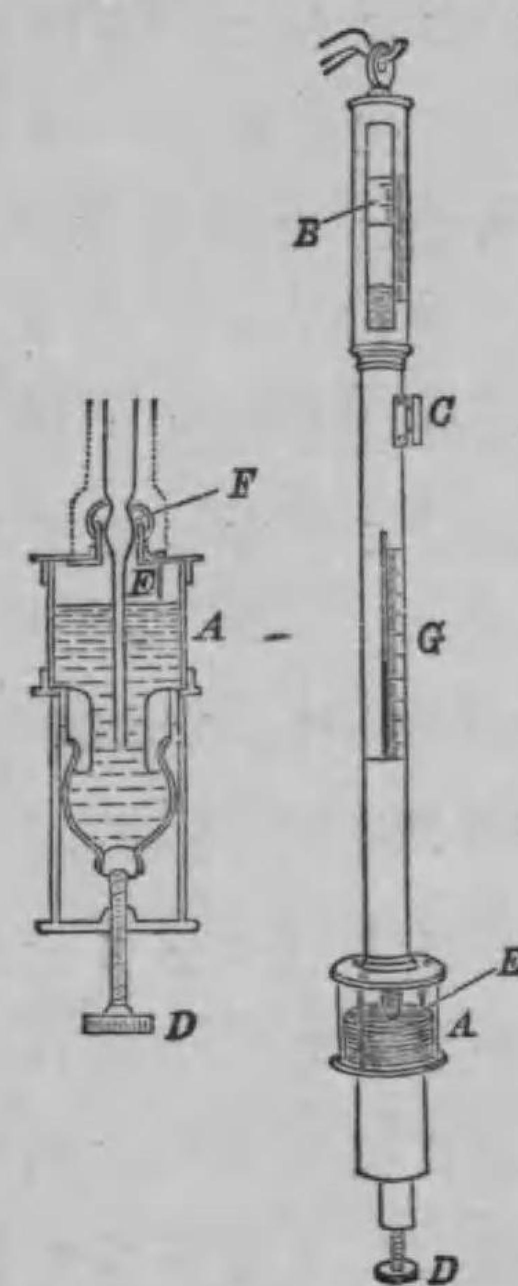
$$B = b(1+0.000019t)(1 - 0.000181t - 0.0026\cos 2\varphi - 0.0002h)$$
$$= b(1 - 0.000162t - 0.0026\cos 2\varphi - 0.0002h)$$

196. 水銀晴雨計。 最も普通に用ひられて居る水銀晴雨計の型は**フォルタン**[1]**の晴雨計**である。これは前條に述べたトリチェリ眞空の實驗裝置と,原理に於ては全く同じいが,ただ水銀柱の鉛直の高さを精密に測り得るやうに,工夫しただけのものである。即ち圖に示すやうに,水銀の壺Aにガラス管を立てて,管の上部に眞空の出來るやうにする。このガラス管を保護するために,水銀面の近邊を除く外は,凡てこれを眞鍮製の管で被ふ。又管內に於ける水銀面の高さを測るために,眞鍮管の一部に度盛りをして,尺度の役目をさせ

1. Fortin.

る。尙ほ又管に沿うて上下し得べき副尺Bを具へ,ネヂCを廻はして,これを動かす。

水銀壺の底は皮で作り,その下に在るネヂDを廻はして,底を上下し,從て壺中の水銀面を上下し得るやうにする。この壺の上壁に象牙の細い針を下向きに固定し,眞鍮管に刻んだ尺度は,針の尖端Eからの高さを示すやうに度盛りをして置く。又壺の口とガラス管の間の空隙Fは,皮を張つて塞ぎ,水銀の流出を防ぐと同時に,內外の空氣が皮の氣孔を通して,自由に交通の出來るやうにしてある。又別に測定のときの溫度を知るために,寒暖計Gが添へてある。



第百九十二圖

フォルタンの晴雨計の構造の要點は大體このやうなものであるが,これによつて氣壓を測るには,次のやうにする。卽ち先づ管を叉で自由に懸垂さした所で,下部に在る三個のネヂ(圖には書いてない)でこれを固定する。次に壺の下のネヂDを廻はして,その中の水銀面が,象牙針の尖端Eに丁度觸れるやうに調節した

後,副尺Bを上下して,その下端を管內の水銀面に合せ,その位置を眞鍮管に刻んだ尺度で讀み,副尺でハシタを讀む。尙ほ又溫度に對する補正をする必要があるから必らず附屬の寒暖計で,そのときの溫度を讀んで置く。

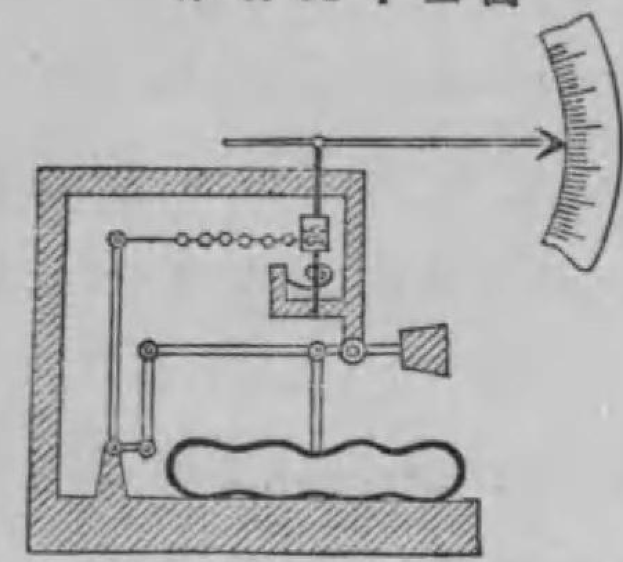
この種の晴雨計では,運送の必要上,餘り太い管を用ひることができぬから,必らず毛管現象に對する補正を要する。然るにこれを管の太さから計算するのは不精密であるから,さういふ補正を要せぬやうに,十分太い管を用ひた,標準の晴雨計と比較して,補正の値を調べて置くが宜しい。尙ほ又象牙針の尖端が,尺度の基點と精密に一致して居らぬことのために生ずる誤差もあるが,今述べたやうに,吟味しようとする晴雨計と,標準晴雨計との讀みを同時に取つて,これを比較すれば,この誤差と毛管現象のために起る誤差とを合せた値(代數的の和)が得られる。これを晴雨計の**器差**[1]と稱へ,氣壓測定のときに讀み取つた値に,この器差を補正として加へる。晴雨計の檢定といふは,この器差を求めることである。

197. アネロイド雨晴計[2] 水銀晴雨計に於ては,水銀柱の重さと氣壓とを釣合はせるのであるが,アネロイド晴雨計に於ては,金屬の彈力と氣壓とを釣合はせる。

1. Index error; Indexfehler. 2. Aneroid barometer; Aneroidbarometer.

即ち金屬製の箱の中を眞空にし,その蓋を波形のウネにして置くときは外の氣壓の變化に應じて,蓋が內方へ押し込まれ,或は外方へ押し出される。そこでこの運動を槓杆の裝置で廓大して指針に傳へ,その位置を見て,氣壓の値がすぐ讀めるやうに度盛りをして置く。但しかやうな度盛りは,標準晴雨計に比較して行ふ。

第百九十三圖



金屬箱の內部を眞空にする理由は,若し中に空氣があると,溫度の變化によつて,その壓力が變るので,丁度氣壓の變化と同樣な效果を蓋に與へるから,これを避けるためである。又蓋をウネ形にする理由は,棒の撓みの場合から推して分る通り,蓋が單純な面であるときに比べて,その直徑が增したと同樣な結果になるので,氣壓の同じだけの變化に對して,蓋の撓み方が多くなる。從て器械の感度が大くなるためである。

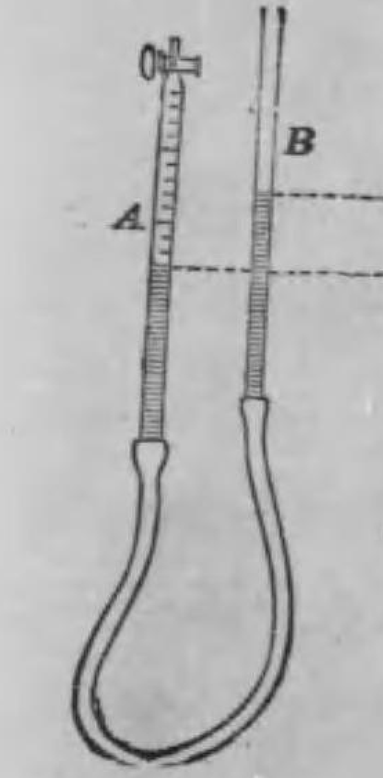
アネロイド晴雨計の指針にペン先きを附け,それが度盛りの紙に輕く觸れるやうにして,この紙を時計仕掛で一樣に動かせば,時々刻々の氣壓の値が,連續的に紙の上に記させる。かやうな裝置を**自記雨晴計**[1]とい

1. Barograph.

ふ。

198. **ボイルの法則**[1]。氣體の壓力は溫度と體積とに關係するものであるが,**一定溫度の下に於ては,一定量の氣體の與へる壓力は,その體積に逆比例する**。換言すれば,**一定の溫度に於ては,氣體の壓力はその密度に比例する**。このことを**ボイルの法則**又は**マリオットの法則**[2]といふ。

この法則は次のやうな方法で,實驗的に證明することができる。即ち上端の閉ぢてある,度盛したガラス管 A を,ゴム管で他のガラス管 B に連絡し,吟味しようとする氣體を,A 管の中に水銀で閉ぢ込める。そこで兩管に於ける水銀面の高さの差を測り,これを當時の晴雨計の高さに加へるか或は引くかすれば,A 管內に於ける氣體の壓力が知れる。かやうにして,B 管を適當に上下して,氣體の體積 v に色々の値を與へ,それに對應する壓力 p を,上記のやうにして一々測るときは,次の關係が成り立つことを知る。



第百九十四圖

$$pv = \text{定數}$$

1. Boyle's law; Boylesches Gesetz. 2. Mariotte's law; Mariottesches Gesetz.

但しこの定數の値は氣體の種類質量温度等に關係する。

氣體が液化狀態に近いとき,即ち高壓低溫のときには,ボイルの法則は嚴密には成り立たぬが,普通の狀態ならば,十分精密に當てはまる。尙ほ氣體の凡ての狀態を通じて,壓力と體積との關係を精密に表はす式が別にあるが,これは熱學の所で述べる。

199. 氣壓と高さとの關係。 大氣の溫度がどこも同じいと假定すれば,氣壓と高さの關係は,ボイルの法則から計算することができる。今高さ h の所に於ける大氣の密度を ρ,壓力を p とするに,高さが δh だけ增せば,單位面積の底面と δh の高さを有する空氣柱の重さだけ,壓力が減る。即ち

$$-\delta p=g\rho\delta h$$

但し δp の前に附けた負號は,h が增せば p の減ることを示す。然るにボイルの法則によれば,

$$\frac{p}{\rho}=k \quad (\text{定數})$$

$$\therefore \qquad -\delta p=\frac{gp}{k}\delta h$$

即ち
$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dh}=-\frac{g}{k}$$

これを積分すれば,

$$\log p=-\frac{g}{k}h+C$$

但し C は積分定數で,問題に與へられた條件から定まる。

る。今 $h=0$ の所に於ける壓力を p_0 とすれば,

$$C=\log p_0$$

$$\therefore \qquad \log\frac{p}{p_0}=-\frac{gh}{k}$$

即ち
$$p=p_0e^{-\frac{gh}{k}}$$

これによつて見れば,高さが等差級數で增せば,壓力は等比級數で減る。

定數 k の値は,C.G.S. 系統に於ては,次の通りである。實驗上の結果によれば,溫度 0° の空氣に於ては,壓力 76 糎のとき,

$$\rho=0.00129$$

故に溫度 0° に於ては,壓力の何たるに拘らず,

$$k=\frac{p}{\rho}=\frac{76\times13.6\times981}{0.00129}=7.85\times10^8$$

前式を書き直せば,

$$h=\frac{k}{g}\log\frac{p_0}{p}$$

若し常用對數を用ひるときは,

$$h=\frac{k}{g}\log_e 10\,\log_{10}\frac{p_0}{p}$$

大氣の溫度を 0° と見做せば,上記の k の値から,

$$\frac{k}{g}\log_e 10=1.84\times10^6$$

$$\therefore \qquad h=1.84\times10^6\log_{10}\frac{p_0}{p} \text{ 糎}$$

$$=18.4\log_{10}\frac{p_0}{p} \text{ 粁}$$

又若し大氣の溫度が t° なれば,

$$\rho=\frac{0.00129}{1+\frac{t}{273}}$$

$$\therefore \qquad k=7.85\times10^{5}\left(1+\frac{t}{273}\right)$$

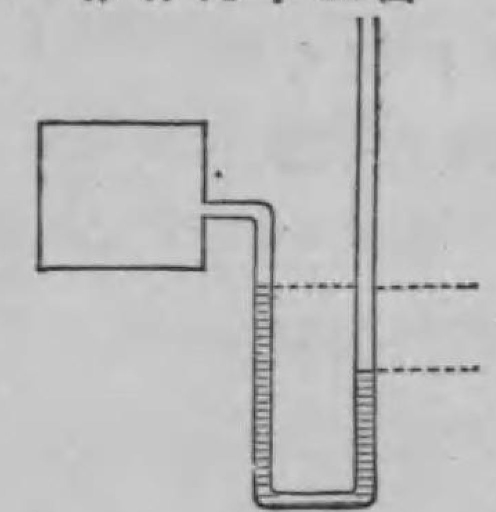
從て
$$h=18.4(1+0.004t)\log_{10}\frac{p_0}{p}\ \text{粁}$$

氣壓の測定から山の高さを計算するには,この式による。但し實際には,大氣中に於ける溫度の分布及び水蒸氣の存在を勘定に入れねばならぬから,この方法では精密な結果は得られぬ。

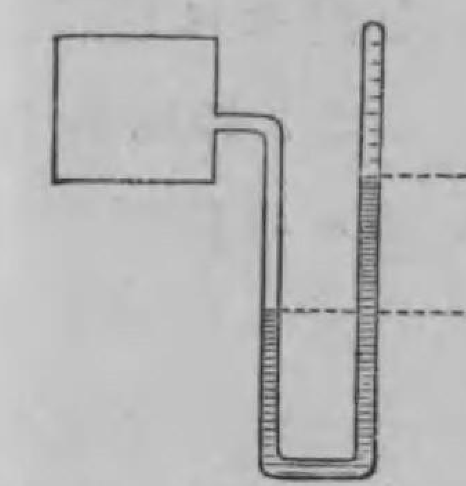
200. 壓力計[1]。氣體の壓力を測る裝置を**壓力計**といふ。次に普通用ひる壓力計について述べる。

(1) **開管壓力計**[2]。兩端の開いたU字形の管に,水銀又は他の液體を入れて,その一端を壓力を測らうとする場所と連絡する。さうすれば,兩管の液面の高さの差,及びその時の晴雨計の高さを測れば,それから求めようとする壓力を知ることができる。これは測らうとする壓力が餘り大くない場合に用ひる。若し壓力が大いときは,管を長くせねばならぬから,この裝置では不便である。

第百九十五圖

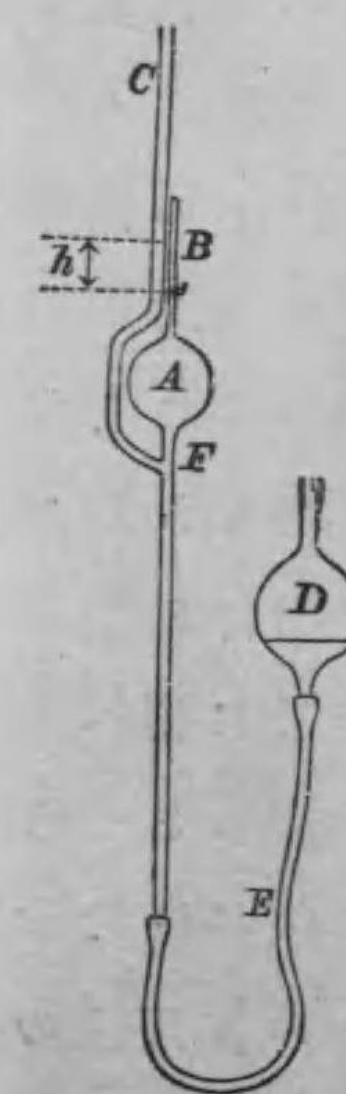


(2) **閉管壓力計**[3]。これは上記の場合よりも大い壓力を測るときに用ひる。一端を閉ぢたU字形の管の中に,水銀で空氣を閉ぢ込め,開いた端を壓力を測らうとする場所へ連絡する。さうすれば,閉ぢ込められた空氣の體積から,ボイルの法則によつて,その壓力を知ることができる。そこでこの値と,兩管の液面の高さの差から,求めようとする壓力が知れる。



第百九十六圖

(3) **眞空計**[1](マク・レオッド[2])。これは眞空管内に於ける氣體の壓力を測るに用ひるもので,一粍の數萬分の一程度の壓力をも測ることができる。その構造は圖に示すやうで,Aはガラス球,B(上端は閉ぢてある)及びCは度盛りした細い管,Dは水銀を入れた器,Eはゴム管。この裝置を用ひて實驗するには,壓力を測らうとする眞空管にC管を連絡し,D器を上げて,水銀をB管に上らせる。このときB管内の氣體の體積をv,B及びCの兩管に於ける水銀面の高さの差をhとする。又Fから上方,A球及びB管を合せた全體の内容積をV(普通500立方糎にしてある)とし測らうとする眞空管内の壓力をxと



第百九十七圖

1. Manometer.　2. Open manometer; offenes Manometer.
3. Closed manometer; geschlossenes Manometer.

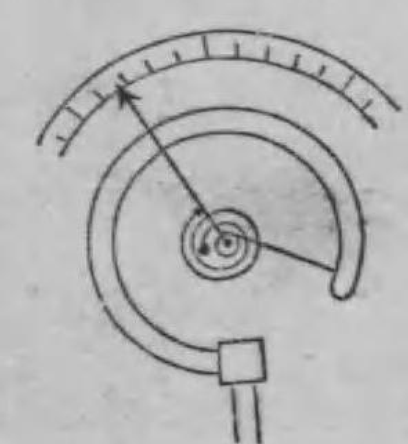
1. Vacuum gauge; Vakuummesser.　2. Mac Leod.

する。今水銀のために,Fの所で連絡を斷たれた氣體について考へるに,その壓力は體積Vのときにはx,體積vのときには$x+h$である。故にボイルの法則によつて,

$$xV=(x+h)v$$

$$\therefore \qquad x=\frac{hv}{V-v}$$

(4) **金屬壓力計**[1]。これはアネロイド晴雨計のやうに,金屬の彈力と氣體の壓力とを釣合はせるといふ原理に基く。卽ち金屬の管を曲げて,その一端は閉ぢ,他の端を壓力を測らうとする場所へ連絡する。さうすれば壓力が增せば,管の內容積が增すために,その曲率が減じ,壓力が減ずれば,彈力のために,曲率が增す。かやうにして,壓力の變化に應じて,閉ぢた端が動くから,この運動を槓杆の裝置によつて大くして,指針に傳へる。



第百九十八圖

そしてその位置を見て,壓力の値がすぐ讀めるやうに度盛りをする。この種類の壓力計は,蒸氣釜壓縮ポンプ等の場合に於て,大い壓力を測るための實用上の裝置として用ひられる。

201. 粘性[2]。流體中の部分どうしの間に相對運動が

1. Metallic manometer; Metallmanometer. 2. Viscosity; Zähigkeit, Viskosität.

あれば,兩者の境面に沿うて,その運動に抵抗する力が現はれる。これを**內部摩擦力**[1]といひ,流體に於けるかやうな性質を**粘性**といふ。器中の液體をかきまはしたり,空氣を動搖させたりした後,そのままにして置くと,その中の相對運動が追々減じて,遂に全體が靜止するのは,粘性のためである。而してこの場合,內部摩擦力に對して仕事が爲されることの結果として,流體が初め有して居た運動エネルギーは,熱エネルギーに變る。

實際の流體に於ては,必らず多少の粘性がある。故に流體中に相對運動が存在するとき,その中に或る面を想像するに,これを境として,兩側の部分どうしの間には,垂直な力の外に,粘性に基因する切線力が成り立つ。故にこの面に作用する壓力は,それに直角ではない。しかし流體が靜止して居るか,或はたとひ動いて居ても,その運動が全體として共通のものであれば,內部摩擦力は作用せぬ。故にかやうな流體中では,その中の任意の面に作用する壓力は,常にその面に直角である。從て靜止の流體について,これまで述べた事柄は,粘性の有無に拘らず,凡ての流體に當てはまる。

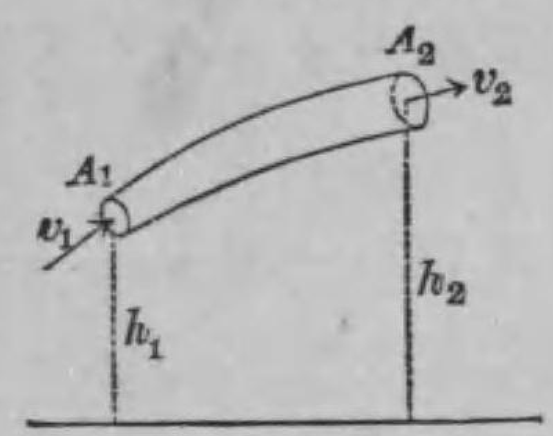
202. ベルヌイの定理[2]。流體が定常狀態で流れて居

1. Internal friction; innere Reibung. 2. Bernoulli's theorem; Bernoullischer Lehrsatz.

るときは,流れを示す線即ち**流線**[1]が定つて居る。従て又流線で圍まれた管即ち**流管**[2]が,それぞれ一定の位置を保つて居る。故に定常流の場合に於ては,流管を固定した管と考へ,その中を,定つた流線に沿うて,流體が流れるものと見做して宜しい。

密度 ρ といふ,粘性のない液體の中に,横斷面の極めて小い流管 A_1A_2 を考へ,兩端の垂直斷面積を S_1, S_2 とする。又液體が A_1 からこの管に入つて,A_2 から出るとし,入るときの速度と壓力を v_1, p_1 とし,出るときの値を v_2, p_2 とする。さうすれば極めて短い時間 δt の間に,この管に入る液體の質量は $\rho S_1 v_1 \delta t$, 管から出る質量は $\rho S_2 v_2 \delta t$ である。故に δt の間に,運動エネルギーとして,管の中に増したエネルギーを Δ_1 とすれば,

第百九十九圖



$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(\rho S_1 v_1 \delta t)v_1^2 - \frac{1}{2}(\rho S_2 v_2 \delta t)v_2^2$$

又時間 δt の間に,A_1 の所では,壓力 $p_1 S_1$ の下に,$v_1 \delta t$ の距離だけ,液體が管內へ押し込まれ,A_2 の所では,壓力 $p_2 S_2$ の下に,$v_2 \delta t$ の距離だけ,管外へ押し出される。そのために,A_1 に於ては,管外の壓力が仕事 $p_1 S_1 \cdot v_1 \delta t$ を爲し,A_2 に於ては,管內の壓力が仕事 $p_2 S_2 \cdot v_2 \delta t$ を爲す。故にこの

1. Stream line; Stromlinie. 2. Tube of flow; Stromfaden.

結果として,δt の間に管內に増したエネルギーを Δ_2 とすれば,

$$\Delta_2 = p_1 S_1 \cdot v_1 \delta t - p_2 S_2 \cdot v_2 \delta t$$

尙ほ又或る標準水平面から A_1, A_2 までの高さを h_1, h_2 とすれば,重力に關する位置エネルギーとして,δt の間に管の中に増したエネルギー Δ_3 は,

$$\Delta_3 = (\rho S_1 v_1 \delta t)gh_1 - (\rho S_2 v_2 \delta t)gh_2$$

所で定常流の場合に於ては,管の中に於けるエネルギーの量に變化はないから(入るだけ出る),

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = 0$$

即ち

$$\frac{1}{2}(\rho S_1 v_1 \delta t)v_1^2 + p_1 S_1 v_1 \delta t + (\rho S_1 v_1 \delta t)gh_1$$
$$= \frac{1}{2}(\rho S_2 v_2 \delta t)v_2^2 + p_2 S_2 v_2 \delta t + (\rho S_2 v_2 \delta t)gh_2$$

又定常流の結果として,或る時間中に,管に入る液體の質量は,出る質量に等しいから,

$$\rho S_1 v_1 \delta t = \rho S_2 v_2 \delta t$$

従て

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

これを上式に入れれば,

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 + \rho g h_2$$

上記の所では,液體が A_1 から管に入つて,A_2 から出るとしたのであるが,反對に A_2 から入つて,A_1 から出るとしても,やはり同じ結果になる。されば一般に横斷面の極めて小い,同一の流管上に於ては,何れの點に於ても,

$$\frac{1}{2}\rho v^2+p+\rho gh=\text{一定}$$

この結果を**ベルヌイの定理**といふ。これは流體動力學に於て,極めて應用の多い定理である。

注意。液體の粘性を考に入れるときは,粘性抵抗に對する仕事のために,熱の生ずることをも,勘定に加へねばならぬ。

上記の式から分る通り,液體中の壓力は高さ及び速度に關係する。即ち一般には,

$$p_2=p_1+\rho g(h_1-h_2)+\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_2^2)$$

從て靜止の場合には,

$$p_2=p_1+\rho g(h_1-h_2)$$

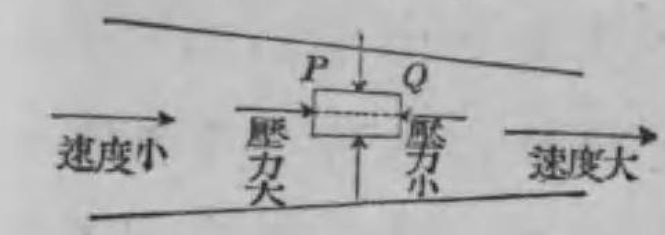
これは即ち既に第百八十八條に得た結果である。

特別な場合として,水平な細い管の中を液體が流れる場合を考へて見るに,上記の一般式に於て,$h_1=h_2$と置いて,

$$\begin{aligned}p_2&=p_1+\frac{1}{2}\rho(v_1^2-v_2^2)\\&=p_1+\frac{1}{2}\rho v_2^2\left\{\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2-1\right\}\\&=p_1+\frac{1}{2}\rho v_2^2\left\{\left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2-1\right\}\qquad\because\ S_1v_1=S_2v_2\end{aligned}$$

これによつて見れば管の太い所ほど壓力が大い。このことは又次のやうに考へればすぐ分る。即ち液體の中に,微小な横斷面を有する流管を取り,これに直角で,且つ極めて接近した二平面の間に含まれて居る液體の小部分 PQ について考へるに,若しその周圍から作用する壓力が,どこでも凡て等しければ,合力は零になるから,この部分は等速運動をなすべきである。

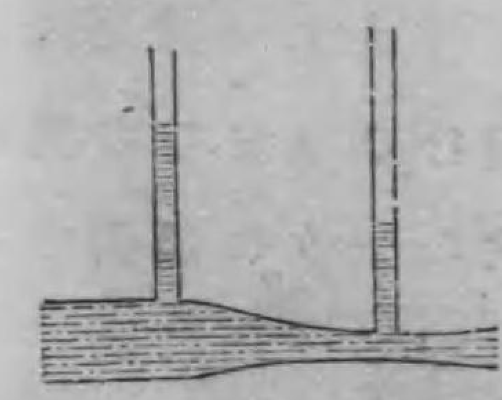
第二百圖



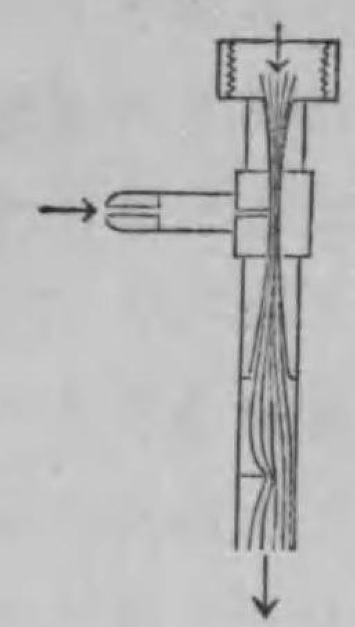
今 P が管の太い方に面するとするに,液體が太い方から細い方へ流れる場合に於ては,その速度は追々増すことになるから,上記の合壓力は,流れの方向に向はなければならぬ。又液體が管の細い方から太い方へ流れる場合に於ては,その速度は追々減ることになるから,合壓力は流れの方向と反對に向はなければならぬ。されば何れの場合に於ても,Pに於ける壓力は,Qに於ける壓力よりも大くなければならぬ。即ち管の太い所ほど壓力が大い。

このことは次のやうな裝置で,實驗的に證明することができる。即ち水平な管に於て,横斷面積の違ふ所に,鉛直な細いガラス管を取り附け,水平管に水を流す。さうすれば鉛直管に上る水柱は,斷面の大い所に立てた管の方が,小い所に立てた管よりも高い。これは即ち管の太い所ほど,壓力が大いことを示す。

第二百一圖



管の或る一部分を十分細くして,その中に水を流すときは,その細い部分に於ける壓力は小くなる。そこでその所へ別の管を附けて置けば,その管を通して,外の空氣が吸ひ込まれる。從てこの裝置は空氣ポンプの役目をする。これが卽ち**水流ポンプ**[1]の原理で,左圖はその一種を示す。



第二百二圖

洗面器の底の中央に設けた孔から,排出管の中へ水が流れ落ちるとき,中央部の壓力が減ずるために,水面が凹み,空氣が盛んに孔の中に吸ひ込まれることは,誰れもよく知つて居る。かやうな場合に,器内の水が廻轉運動をすることが,この現象を起す一原因でもあるが(第二百十條を見よ),重もな原因は,水が周邊部から中央部に向つて流れることである。卽ち中央部に近くに從つて,流管が細くなるから,水の速度が增し,從て壓力が減ずる。

二つの船が互に近く相並んで進むときは,その間に引き合ひの作用が起る。これは次のやうに說明することができる。船の近邊では,水は船と一所に動くが,少し離れた所では,水は動かぬ。所で運動は相對的であるから,船と水の間の力學的作用に關しては,二つの

1. Water jet pump; Wasserstrahlpumpe.

船が靜止し,水が船を廻つて,定常狀態で流れて居ると考へても宜しい。さうすれば,兩船の間では,各船の外側よりも流線が密集するから,速度が大い。從て壓力は小い。そのために,兩船の間の水面が低くなつて,兩者を近けようとする作用が起る。

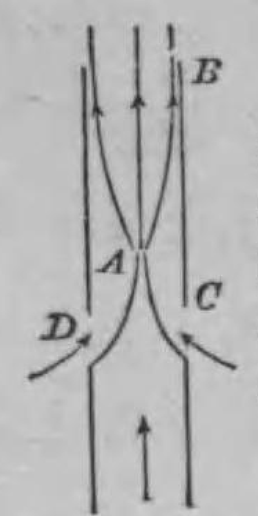
針金で吊した重い球を器內の水に浸し,針金を軸として,球を廻轉させたまゝ器壁をこれに近けるときは,球は壁の方へ引き寄せられる。この現象もまた上記の船の場合と同樣に說明することができる。

注意。前記の式から見ると,液體の流れの速度が十分に大くなれば,壓力の負になることもあるが,實際の場合にそのやうになるとの結論にはならぬ。つまりこの式は定常流の場合だけに當てはまるもので,速度が或る程度以上に大くなれば,液體はもはや定まつた流線に沿うて流れないで,不規則な流れ方をするからである。

203. 動いて居る氣體の中に於ける壓力。 氣體の場合には,壓力によつて體積が變り,且つ又體積の變化に伴つて,熱的變化が起るから,壓力と速度との關係は複雜になる。しかし壓力の變化が餘り大くないときには,液體の場合と同樣な事が成り立つ。卽ち詳しい議論は略するとして,一般に氣體の流れに於ては,速度の大い所ほど壓力が小い。今この考へに基いて,我々が

平生よく知つて居る二三の現象を説明して見る。

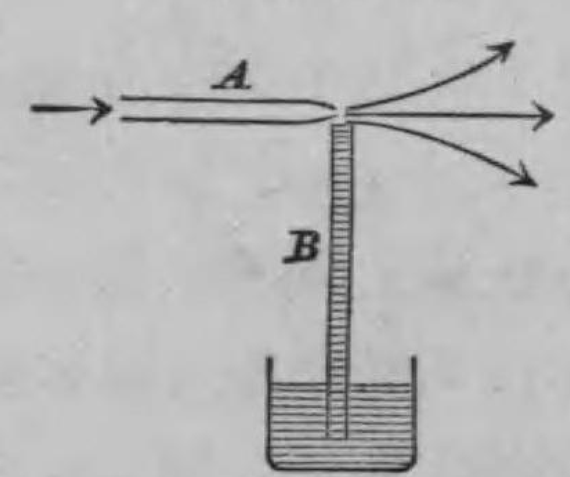
(1) ブンゼン燈[1]。左圖はブンゼン燈の要部を示すもので,Aは燃燒氣體の噴出する細い口,BCは出口を圍む管,Dは管壁に設けた窓である。かやうな裝置に於て氣體を噴出させるときは流線は大體圖のやうになるから,出口を遠ざかるに從つて氣體の速度が小くなり,從て壓力は大くなる。然るに出口から離れた所の壓力は氣壓に等しいから,出口に近い所の壓力は氣壓よりも小い。故に管壁の窓を通して,外の空氣が管內に吸ひ込まれ,これが氣體の燃燒を助ける。



第二百三圖

(2) 霧吹き。構造の要點は圖に示す通りで,Aは空氣又は水蒸氣を吹き送る細い管,Bは霧にしようとする液體の中に立てた細い管である。かやうな裝置に於て,Aの管口から空氣又は水蒸氣を噴出させるときは,圖のやうな流線が生じ,管口を遠ざかるに從つて,速度が小くなる。故にブンゼン燈の場合と同樣に,Aの管口に近い所では,壓力が氣壓よりも小くなるから,液體がB管に上る。そ

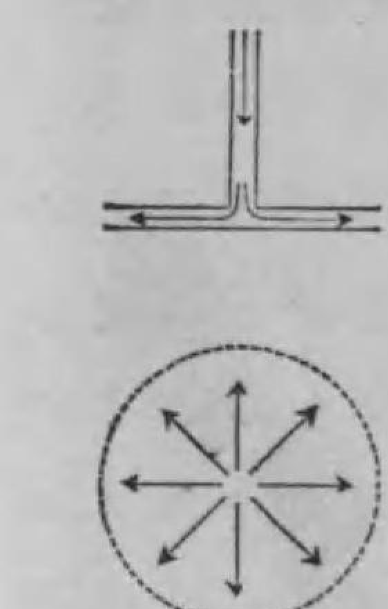
第二百四圖



1. Bunsen burner; Bunsenbrenner.

してそれがA管から出る氣流に吹かれて,細かい霧になる。

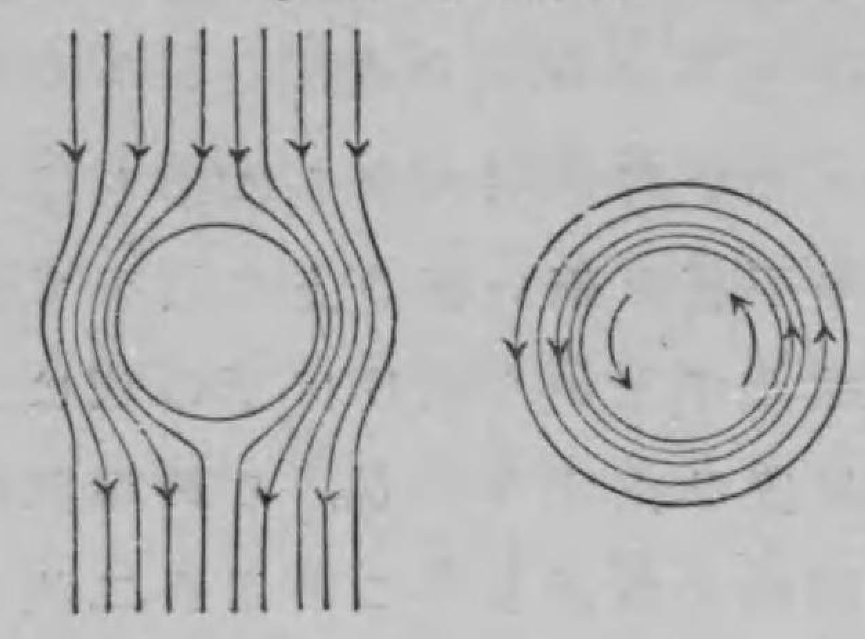
(3) 平板に直角に細い管を,圖のやうに挿し込み,この平板を輕い板の上に置いて,管を通して上から吹けば,下の板は上方に吸ひ上げられる。この現象の説明は次の通り。この場合二枚の板の間の氣流は,板の中央から周邊の方へ行くに從つて,速度が小くなり從て壓力は大くなる。故に兩板の間の中央部に於ては,壓力が氣壓よりも小いから,下の板は押し上げられる。


第二百五圖

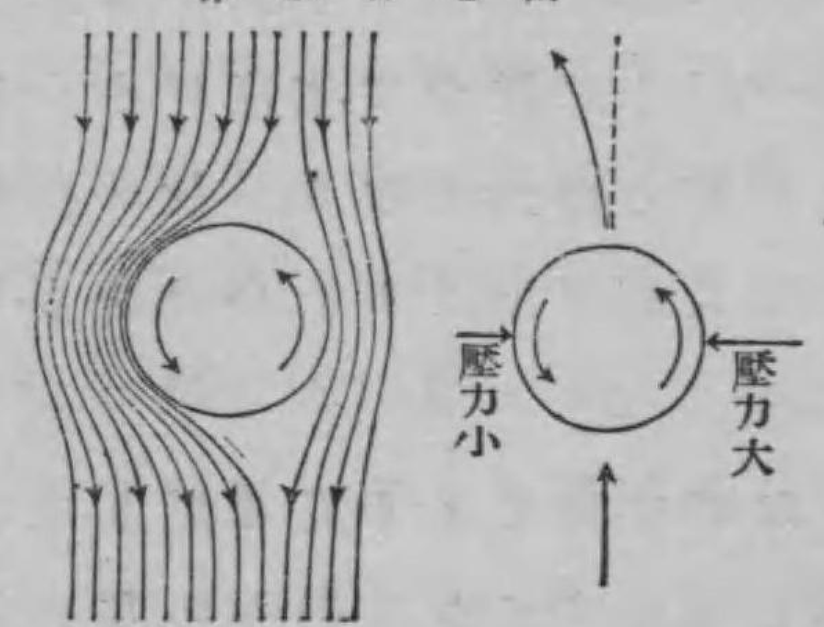
(4) テニスの場合などに於てよく見る通り,球に廻轉を與へながら,これを飛ばすときは,廻轉のないときの徑路から,著しく外れて動く。例へば紙面に直角な軸の周りに,時計の針と反對の向きの廻轉を球に與へながら,これを上方に投げるときは,球は左方へ曲る。

説明。運動は凡て相對的であるから,この場合球に對する空氣の影響を吟味するといふ問題に於ては,球が廻轉しながら,靜止した空氣中を上方へ動くと考へる代りに,同じ所で廻轉して居る球に,下方へ向ふ空氣の流れが當ると考へても,同じ結果になる。さうすれば球の近所の空氣の速度は,次の二通りの原因から起

第二百六圖



第二百七圖

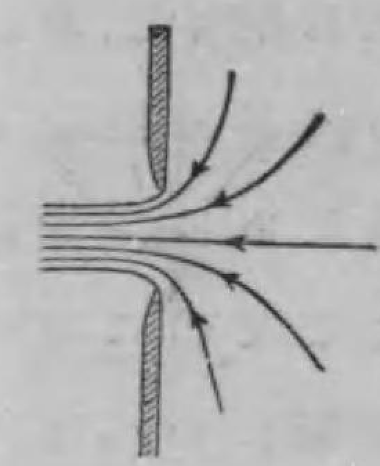


る。即ち第一は今假定した空氣の流れに基くもの,又第二は球の廻轉のために,近所の空氣が球と同じ向きの廻轉運動をすることに基くものである。所で球の左側では,この二つの原因のために起る速度が同じ向きになるから,合速度は大くなるが,右側では反對の向きになるから小くなる。故に球の右側に於ける壓力は,左側に於けるよりも大い。その結果として,球は左方へ押される。

(5) 斜めに上方に向けた細い管から噴出する氣流を,ピンポン球のやうな輕い球に斜めに吹きつけるとき,球が落ちないで,空中に支へられて居ること。二枚の紙の間を少し離して,その間に氣流を吹き込むとき,紙が互に近づかうとすること。汽車が通るとき,近所の木の葉等が引き寄せられること。これ等の現象も

また前記の場合と同様に説明することができる。

204. 小い孔から流出する液體の速度。 器壁に設けた小い孔から流れ出す液柱を見るに,孔から外へ少し離れた所までは,液柱が追々細くなり,それからさき或る部分の間は一様な太さを保ち,これを越えてそのさきは,膨れた所と縮んだ所とが交互になつて居る。液柱の太さが一様になつて居る部分即ち所謂縮脉[1]の横斷面積は,孔が薄い壁に設けてある場合に於ては,孔の横斷面積に比べて,凡そ $\frac{2}{3}$ である。かやうに縮脉の出來るわけは慣性のために,液體の動く徑路が急に曲ることができぬから,孔の所に於ける流線が,孔の面に直角でないためである。又縮脉からさきの液柱のことに關しては主として表面張力が關係して居るから,これは後に述べる。



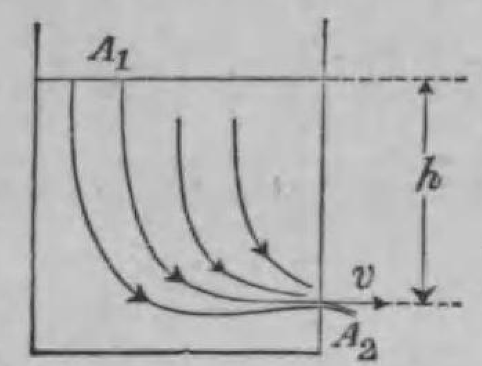
第二百八圖

器内から縮脉までの範圍内に於て,液體の運動を考へて見るに,流線は圖のやうになる。今斷面の小い任意の流管 A_1A_2 に於て,A_1 を液體の表面に,A_2 を縮脉の所に取るとするに,器の斷面積に比べて,孔が十分小ければ,A_1 に於ける液體の速度は零と見做しても宜しい。又 A_2 の近所では,液柱の太さが一様になつて居るから,

1. Vena contracta.

液柱の內部に於ける壓力は外部の壓力に等しい。何となれば,若し等しくないとすれば,液柱は內外の壓力の差のために,側面の方へ延長又は短縮を生ずることになつて,一様な太さを保つことはできぬから。但し第十三章に述べる通り,液柱の內外に於ける壓力は,表面張力のために多少違ふのであるが,今ここではこれを考へに入れぬことにする。

第二百九圖



そこで孔(嚴密にいへば縮脈上の一點)から液面までの高さを h,その所に於ける液體の速度を v とし,流管 A_1A_2 について,定常流の一般式を適用すれば,

$$h_1-h_2=h,\quad v_2=v,\quad v_1=0,\quad p_1=p_2$$

故に
$$v=\sqrt{2gh}$$

これによつて見れば,液面から孔までの鉛直距離を,自由に落ちたのと同じだけの速度で,液體が孔から流出する。このことを**トリチェリの定理**[1]といふ。

この定理は次のやうにして,直接に導き出すこともできる。今微小な質量 δm だけの液體が,孔から流れ出したとすれば,$\frac{1}{2}\delta m.v^2$ だけ運動エネルギーが增す。その代り表面の所で,δm だけ液體が減るから位置エネルギーが $\delta m.gh$ だけ減る。そして他には何等の變り

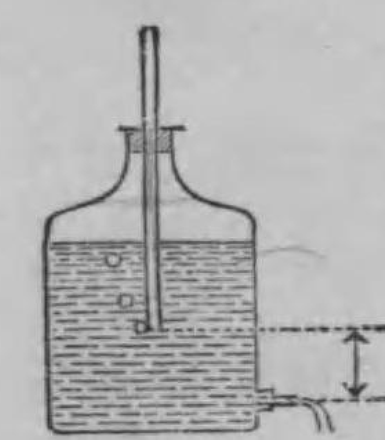
1. Torricelli's theorem; Torricellischer Lehrsatz.

もないから,一方の增しは他の減りに等しい。即ち

$$\frac{1}{2}\delta mv^2=\delta mgh$$

$$\therefore\quad v=\sqrt{2gh}$$

トリチェリの定理を應用して,液體の流出する速度を一定に保つために,**マリオットの瓶**[1]と稱する裝置がある。これは小い出口を備へた瓶に液體を入れた後,細い管を通した栓で瓶の口を密閉したものである。

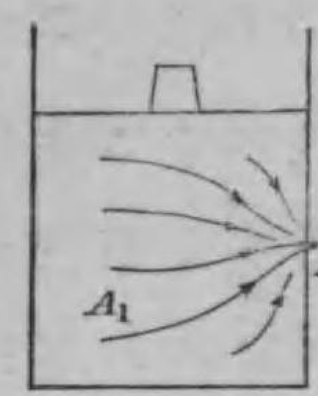


第二百十圖

かやうな裝置に於ては,初め瓶の出口が閉ぢてある間は瓶の上部の空處に存在する空氣の壓力と釣合ふだけの高さまで細管の內に液體が上る。然るに出口を開いて,液體を流出させれば,上部の空處が增すと同時に,その內の空氣の壓力が減るから,細管內の液體は,間もなくその下端まで下る。そしてその上更らに液體が流れ出せば,瓶內の液體は益々下るから,空處の壓力が愈々減る。從て外の空氣が細管の下端から,泡になつて液體中を上る。かやうな譯で,細管の下端は常に外の空氣に接して居るから,そこの壓力はいつも氣壓に等しい。從て瓶內の液體は,その液面が細管の下端と同じ高さになるまでの間は,出口から管の下端までの高さに對應する速度で,定常狀態の流出を續ける。

1. Mariotte's bottle; Mariottesche Flasche.

205. 小い孔から流れ出す氣體の速度。 氣體が小い孔から流れ出すとき,內外の壓力の差が小ければ,密度の變化は殆んど無いと見做しても宜しい。從て液體の定常流について得たベルヌイの定理を當てはめることができる。今內と外の壓力を p_1, p_2, 流出の速度を v とし,小い流管の一つ A_1A_2 について,定常流の公式を適用すれば,次のやうになる。卽ち



第二百十一圖

$$v_1=0,\quad v_2=v,\quad \rho g(h_1-h_2)=0$$

$$\therefore\qquad v=\sqrt{\frac{2(p_1-p_2)}{\rho}}$$

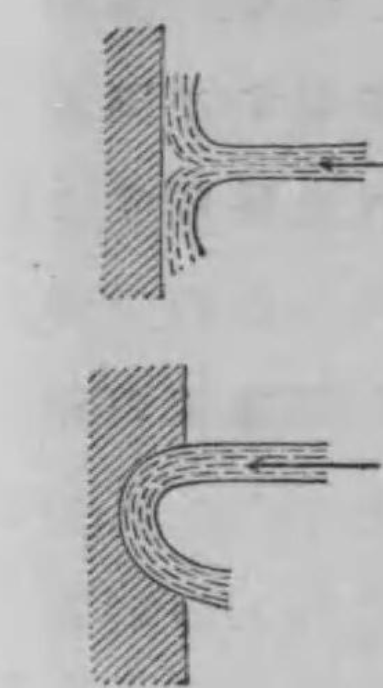
若し內外の壓力の差が小くないときには,密度の變化及びこれに伴ふ熱的變化のことをも考へねばならぬから,上記の結果はもはや成り立たぬ。

この結果を應用して,二種の氣體の密度の比を實驗的に求めることができる。卽ち內外の壓力の差を一定の小い値に保ちながら(例へば活塞の上に一定の錘を載せる),比較しようとする二種の氣體が,一定時間中に,同一の器から流れ出した體積 V, V' を測る。然るにこの體積は流出の速度に比例するから,

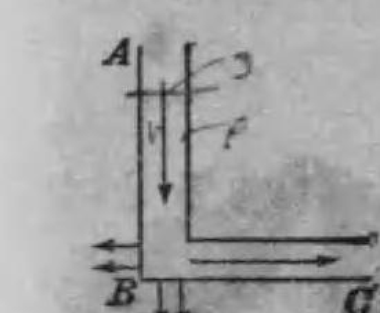
$$\frac{V'}{V}=\frac{v'}{v}=\sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}$$

$$\therefore\qquad \frac{\rho}{\rho'}=\left(\frac{V'}{V}\right)^2$$

206. 流體の流れの運動。 流體が流れて居るときは,その各質點が運動量を有する。故に障碍物のために,流體の運動が止まるか,或は運動の方向速度等に變化があれば,その物體は力に作用される。そして流體の運動量の變化を單位時間に割り當てた値がその物體に作用する力に等しい。されば障碍物のために,運動の方向が丁度逆になるやうに,その面が曲げてあるときには,運動が單に止つただけのときに比べて,運動量の變化が二倍になる。從て障碍物に作用する壓力もまた二倍になる。水車の或る種類に於ては,このことを利用してある。

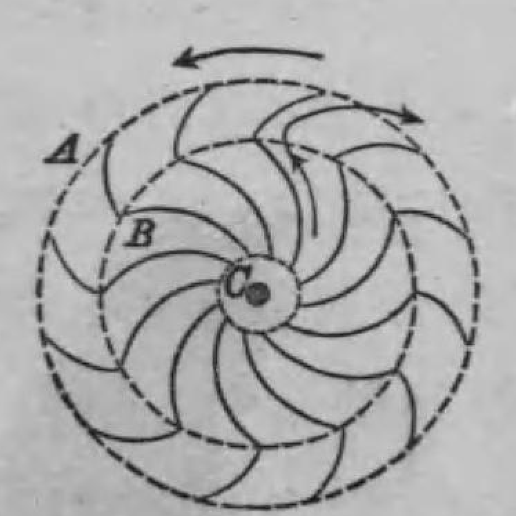

第二百十二圖

直角に曲つた,一樣な太さの管 ABC の中を,液體が流れるときには, AB の方向の運動量が BC の方向の運動量に變るのであるから,管の屈曲部に壓力を與へる。今管の橫斷面積を S, 液體の密度を ρ, 速度を v とすれば,單位時間每に管を通過する液體の質量は $Sv\rho$ である。從て單位時間每に, AB の方向の運動量が $Sv\rho.v$ 卽ち $Sv^2\rho$ だけづつ失はれ,その代りに BC の方向の運動量が同じ値だけづつ新たに生ずる。故に

第二百十三圖


AB 及び CB の方向に於て,管壁に作用する全壓力は何れも $Sv^2\rho$ に等しい。但しこの壓力は,液體の運動量の變化のために,管の屈曲部に作用するもので,普通これを流れの方向が變るための反働と稱へて居る。勿論これは靜止した液體中の,凡ての部分に作用する壓力とは,別のものである。尙ほ又今は說明を簡單にするために,液體の流れが直角に曲る場合を取つたのであるが,どういふ曲線に沿うて曲るとしても,運動量の變化に基因する壓力が,管の屈曲部に作用することは,同樣である。次に上記の原理を應用した實用上の裝置一二について述べる。

(1) **タービン水車**[1]。これは高い所に在る水の位置エネルギーを利用して,仕事をさせる裝置で,圖はその要部を示す。即ち A は鉛直又は水平軸の周りに廻轉する水車で,その內部をば,適當に曲つた壁で多くの室にしきる。Bは導水瓣[2]と稱する固定した輪狀の部分で,その內部を大體 A と同じやうに區劃したものである。今水管 C から,導水瓣を通して,廻轉車 A へ水を送るときは,水が廻轉車を通り拔ける間に,流れの方向が變るか

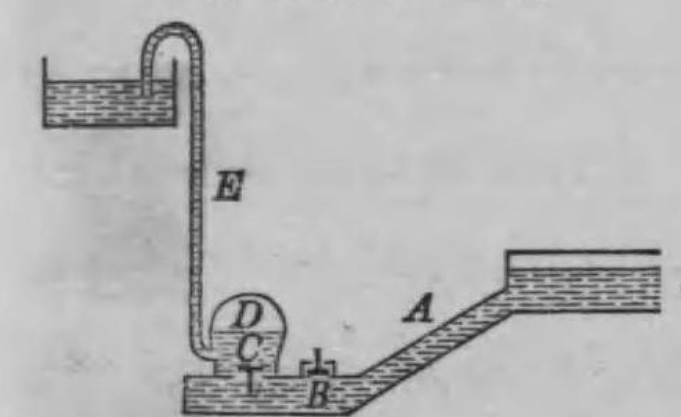


第二百十四圖

1. Turbine. 2. Guide vane; Leitrad.

ら,運動量の變化に基因する壓力のために,廻轉車は矢の向きに廻轉する。但しこれは水が內から外の方へ流れ出す型であるが,この外に水が外から內へ流れる型,又は上から下へ流れる型のものもある。

(2) **水力ラム**[1]。これは流水の運動を一時急に止め,その運動量の急速な變化に基因する大なる力を利用して,自働的に水を高い所に上げるための裝置である。圖はその要部を示するもので,A は流水を導き入れるための管,B は下方へ,又 C は上方へ向つてのみ開き得る瓣,D は空氣を密閉した室,E は水を高所へ送り上げるための管である。かやうな裝置に於て,A 管を通して水を器中へ流し込めば,瓣 B は上方に押し付けられて,一時水の流れが止まる。從てそのときに生ずる大なる壓力のために,器中の水は瓣 C を押し上げて,空氣室 D に入り,その中の空氣を壓縮する。所で大なる壓力の現はれるのは,水の流れが止まる一瞬間だけのことで,それが止まつてしまへば,さういふ大い壓力は作用せぬ。そこで瓣 C は閉ぢ,瓣 B は流れがないから,元の通りに開く。さうなれば,水は再び流れ始めるから,瓣 B が押し上げられ

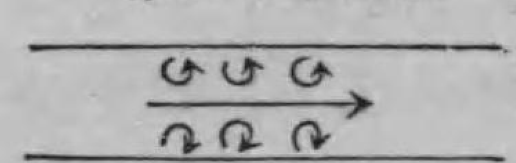
第二百十五圖


1. Hydraulic ram; hydraulischer Stossheber.

て,流れが一時止まると同時に,器中の水は瓣 C を押し上げて,空氣室に入る。かやうにして,同じことが自働的に繰り返されるから,D 室内の空氣は壓縮されて,その壓力が增す。そのために室内に入つた水は,E 管を通して高い所へ押し上げられる。この裝置は多量の水流があるとき(例へば川の流れのやうな場合),水量の一部分をば,水源よりも遙かに高い所へ上げるために用ひるものである。これをエネルギーの點から見れば,比較的低い所に在る多量の水が有する位置エネルギーをば,高い所に在る少量の水の位置エネルギーに變へたに過ぎぬ。

207. 流體の亂れた流れ[1]。流體の運動が定つた流線に沿うて起らぬときには,これを**亂れた流れ**といふ。流體が管の中を流れるとき,その速度が小ければ,流體は定つた流線に沿うて,定常性の運動をする。然るに速度が或る値(管が太いほど,この値が小い)を越えるときは,管の中央部では,流體は大體に於て管の軸に沿うて流れるが,管壁に近い所では,流體が澤山の小い渦流を作つて,自身に廻轉しながら,全體として流れの方向に動く。

第二百十六圖



靜止した流體の中に,流體の流れが生ずるときにも,動いて行く流體柱と靜止した流

1. Turbulent flow; turbulente Strömung.

體の間に,同樣な現象が起る。

この現象は,氣體の場合に於ては**感音炎**[1]の裝置によつて,よく見ることができる。今燃燒性の氣體例へば石炭ガスを,適當な管口から流出させて,これを燃すに,氣體の流出速度が小い間は,炎は長くなつて靜かに燃える。然るに速度が或る極限に達すれば,炎が急に短くなり,且つザワザワして,落ちつかぬやうになる。これは氣體の流れが定常狀態から,亂れの狀態に移つたからで,炎の役目は空氣中に噴出する氣體の流れを,目に見えるやうにするまでである。氣體の流れが,かやうな極限に丁度達しようとする狀態に於ては,炎は金屬音響のやうな,高い調子の音に對して,極めて鋭敏である。例へば數米以上も離れた所で,金屬を叩けば,その度每に炎が短くなる。そこでこの裝置を**感音炎**と稱し,音響學上の實驗に屢〻これを利用する。かやうに感音炎が鋭敏に音響に感ずるのは,この狀態に於ては,流出する氣體柱と周圍の靜止した空氣との境界層が,非常に不安定になるので,周圍の空氣中に極めて僅かの變動があつても,境界層の所に小い渦流が生じ,その數が急速に增すために,境界層に變

第二百十七圖

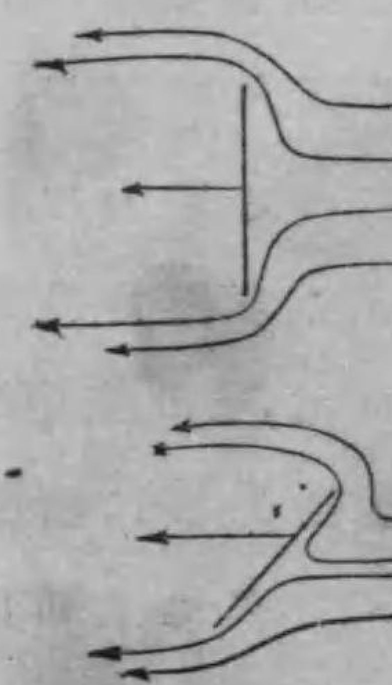
1. Sensitive flame; empfindliche Flamme.

化を及ぼすからである。

球狀の物體が廻轉しないで,空氣又は水の中を靜かに落ちる場合を考へて見るに,もし球に接する流體の運動が定常流であるならば(球に對して相對的に),球の運動の方向に對して,凡ての事柄が對稱であるから,球は鉛直線に沿うて動くべきで,右或は左へそれるべき理由がない。然るに事實上,球はあちらこちらへふれながら落ちる。これは球が動くとき,その背後の流體は球と一所に動くから,流體中に流體の流れが出來たと同じことになる。故に球の速度が或る極限の値に達すれば,感音炎の場合と同樣に,球と一所に動く流體と,周圍の靜止した流體との間の境界層が,不安定になる。從て極めて僅かの變動によつても,この境界層の所に急に多數の小い渦流が生じて,これが球に作用を及ぼすから,球はフラフラした運動をすることになる。靜止した球に,流體の流れが當るときもまた同樣で,流れの速度が或る値に達すれば,球をフラフラさせようとする作用が起る。水流の中に立てた杭,又は進行する船の舷側から水に浸した棒がフラフラと動くのも,また同じ理由による。

208. 流體の流れが物體の表面に及ぼす壓力。 流體の流れが固定した物體に當るときは流れに面する表面に壓力が作用する。これは衝突のために,運動量が

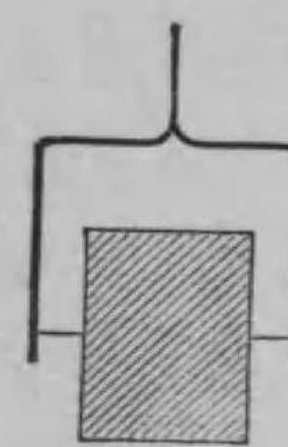
流體から物體に移ることの結果である。即ち物體の近くへ行つた流體は,速度の變化が最も大く,これを離れるに從つて變化が小い。そこで次の二つの原因から,物體に力が作用することになる。第一,流體の運動量が變化するために,慣性の結果として,力が現はれる。第二,流體中に相對運動が生ずるから,內部摩擦の結果として,力が現はれる。所で物體に及ぼす力は,流れの速度が大ければ,主として第一の原因から起り,小ければ主として第二の原因から起る(第二百十九條を見よ)。尙ほ又固定した物體に流體の流れが當る代りに,靜止した流體の中を物體が動くと考へても,物體に作用する壓力に關しては,全く同じことが成り立つ。物體が流體中を動くとき,これに反對する抵抗力といふは,この壓力のことである。



第二百十八圖

今一例として,長方形の板に流體の流れが當る場合を考へて見るに,板の背部に於ては,或る範圍內の空氣は板に固着して動かぬ。所で板が流れに直角なときには,板の面に沿うて流體の流れる速度は對稱な分布をなすから,板の各部分に作用する壓力の分布もまた對稱となり,合力は板の中心を通る。從て板を廻轉させようとす

る力は作用せぬ。然るに板が流れに直角でないときには,板の面に沿うて流れる速度が,對稱な分布をなさぬ。卽ち流れに向つて突き出して居る部分に於ては,流體の運動量の變化が大いから,壓力が大い。從て壓力の合力は板の中心を通らぬ。そして圖からすぐ分る通り,板面を流れに直角にするやうに,力が作用する。



第二百十九圖

水流に浮べてある小舟が,中央點の周りに自由に廻轉し得るときには,それが流れに略ぼ直角な位置を取ること,木の葉が空中を落ちるとき,又は板が水中に沈んで行くとき,その面が略ぼ水平になること等は,何れもこの理に基く。尙ほ又このことは,次のやうにして,容易にこれを實驗することもできる。卽ち長方形の厚紙の平分線に沿うて,糸を縫ひ付け,その兩端を引張つたまま針金の枠に固定し,この枠を空中で速かに動かすときは,厚紙の面は運動の方向に直角になる。

風が平板に直角に當るとき,これに與へる壓力は,風の速度の二乘に比例する。何となれば,この壓力は單位時間毎に板に突き當る空氣の質量 m と,風の速度 v の相乘積 mv に比例する(若し空氣の運動が板に衝突した後全く止まるならば, mv に等しい)。然るに m は v に比例するから,板に作用する全壓力 P は v^2 に比例

する。故に板の面積を S とすれば,

$$P=kSv^2$$

但し今ここでは,板を過ぎて行く流線の形が,速度に無關係と假定したのであるが,この假定は正しくない。しかし速度が餘り大くもなく,又餘り小くもない場合に於ては,上記の結果の正しいことは,實驗によつて慥められて居る。尙ほ比例の定數 k の値は,實驗上の結果によれば,次の通りである。卽ち面積を平方米,速度を毎秒米,壓力を瓩で表はすとすれば,

$$k=0.06 \text{ 乃至 } 0.08$$

されば $20\frac{\text{米}}{\text{秒}}$ の速度に對しては,一平方米の面積につき,凡そ28瓩の壓力が作用する。

上記の議論は空氣の場合のみならず,一般の流體にも當てはまる。卽ち密度 ρ といふ流體の流れが,板に直角に當るときは,これに與へる全壓力 P は,

$$P=k'Sv^2\rho$$

但し比例の定數 k' は,實驗から求められるべきものである。

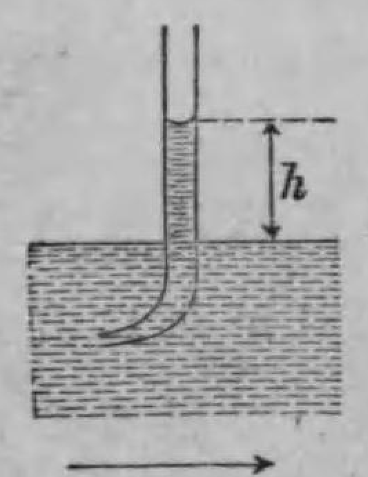
流體の流れが板に當るとき,若し假りに板に直角な方向の速度が全く無くなるとすれば,流れが板に直角なときの壓力 P_{90} と,それが角度 α だけ傾いて居るときの壓力 P_α との間には,

$$P_\alpha=P_{90}\sin\alpha$$

の關係が成り立つべきである。しかし實際に於ては，第二百十八圖から分る通り，板に直角な分速度が全く無くなるのではないから，この關係は單に近似的に止まる。

船及び飛行機に用ひる螺狀推進器が廻轉すれば，羽根の面に直角な壓力が作用する。そしてこの壓力は，推進器の軸の方向に分力を有するから，この分力のために，船又は飛行機が前進する。又モーター扇の場合には，扇はその廻轉軸の方向には，動くことのできぬやうにしてあるから，その方向に於ける壓力の分力のために，空氣の流れが生ずる。若し又逆に扇の廻轉軸の方向に來た風がこれに當れば，扇は廻轉する。動力用として利用して居る風車は，これと同じ原理のものである。

水流の速度と，それが與へる壓力との關係を應用して，水流の速度を測るために，**ピトーの流速管**[1]といふものがある。これは圖に示すやうに，直角に曲げた管の一臂を鉛直にし，他の臂を水平にして，その端を流れに向つて開かせたものである。この場合，若し水が靜止して居るならば，鉛直管內に於ける水面は，管外の



第二百二十圖

1. Pitot's tube; Pitotsche Röhre.

水面と同じ高さになるが，水が流れて居れば，流れに基因する壓力のために，鉛直管內の水面は，外よりも高くなる。今若し假りに管內水面の所で，微小な質量 ∂m だけの水を取り去つて，水面を少し下げたとすれば，それだけの水が下の口から入つて，水面の高さを常に一定に保つ。そこで管に上つた水の高さを h とし，水流の速度を v とすれば，このことのために，$\partial m.gh$ だけ位置エネルギーが增す。その代りに下の口に入るとき，水が有して居た運動エネルギー $\frac{1}{2}\partial m.v^2$ が失はれる。故に，

$$\frac{1}{2}\partial m.v^2=\partial m.gh$$

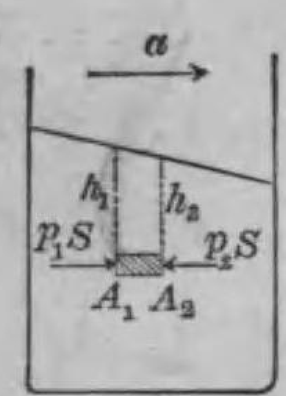
即ち
$$v=\sqrt{2gh}$$

但しこの場合管を水流の中に入れたために，流れに多少の變化を與へる。從て上記の式は單に近似的の關係を表はすに止まる。

209. 加速運動をする液體の自由面。 液體を器に入れたまま，一樣な速度で，この器を直線上に動かす場合に於ては，液體の各部に作用する力は凡て釣合つて居る。故に流體中の同じ水平面上では，壓力はどこも相等しい。從て液體の自由面は水平である。然るに或る加速度を以て，この器を水平な直線上に動かす場合に於ては，液體の各部が凡て加速運動をすることになるから，液體中の同一水平面上に於て，運動の方向に沿

うて,壓力の勾配を要する。そこで若し器中に液體を一杯に充たしたまゝ密閉したとすれば,かやうな壓力の勾配を生ずることに對して,器の上壁が十分な役目をする。然るに液體の上部が,直接に大氣に接するとすれば,同一水平面上に壓力の差を生ずるためには,自由面が水平面に對して,或る角度だけ傾かねばならぬ。

液體の密度を ρ とし,その中に於て,水平な柱狀の小部分 A_1A_2 を想像し,その長さを l,横斷面積を S とすれば,この液柱の質量は $Sl\rho$ に等しい。又加速度は A_1 から A_2 の方へ向ふとして,その大さを a, A_1 及び A_2 に於ける壓力を p_1, p_2 とすれば,小液柱に作用する水平力は $(p_1-p_2)S$ である。故に



第二百二十一圖

$$(p_1-p_2)S=Sl\rho.a$$

$$\therefore \quad \frac{p_1-p_2}{l}=\rho a$$

所で自由面から A_1, A_2 までの深さを h_1, h_2 とし,自由面の氣壓を P とすれば,

$$p_1=P+\rho gh_1, \quad p_2=P+\rho gh_2$$

$$\therefore \quad p_1-p_2=\rho g(h_1-h_2)$$

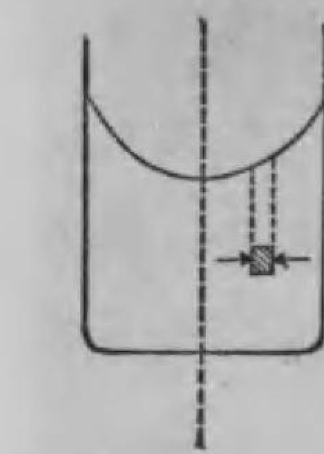
從て
$$\frac{h_1-h_2}{l}=\frac{a}{g}$$

自由面の傾きを θ とすれば,

$$\frac{h_1-h_2}{l}=\tan\theta=\frac{a}{g}$$

210. 鉛直軸の周りに廻轉する液體。 鉛直な圓壔狀

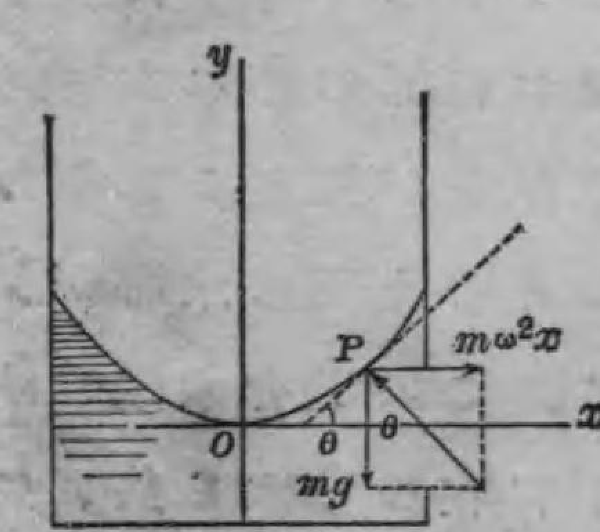
の器に液體を入れて,この器を軸の周りに廻轉すれば,暫くの後には液體は器と一所になつて廻轉する。そして軸から遠い所ほど,液面が高くなる。何となれば,液體中の各部分は,それぞれ圓運動をするから,中心の方へ向つて加速度を有する。從てこの加速度を生ずるためには,半徑に沿うて壓力の勾配が成り立たねばならぬ。そのためには,軸から遠い所ほど,液面が高まらねばならぬ。


第二百二十二圖

この問題は次のやうに考へても宜しい。卽ち液體が廻轉運動をして居ると考へる代りに,遠心力といふ假想的の力を加へて,釣合の問題として取扱つても宜しい。かやうな考へ方にすれば,液面上の何れの點に於ても,液面は重力と遠心力との合力に直角になるべきである。

自由面が廻轉軸に會する點 O を原點とし,水平及び鉛直の方向を坐標軸に取り,液面上の一點 $P(x,y)$ に於ける切線が,x 軸と成す角を θ とすれば,

第二百二十三圖



$$\tan\theta=\frac{dy}{dx}$$

P 點に於ける液體の小部分を考へ,その質量を m とし,廻轉の角速度を

ωとすれば,これに作用する遠心力 $m\omega^2x$ と重力 mg との合力は,その點に於ける液面に直角になる。故に

$$\tan\theta=\frac{\omega^2x}{g}$$

$$\therefore \qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\omega^2x}{g}$$

これを積分すれば,

$$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2+C$$

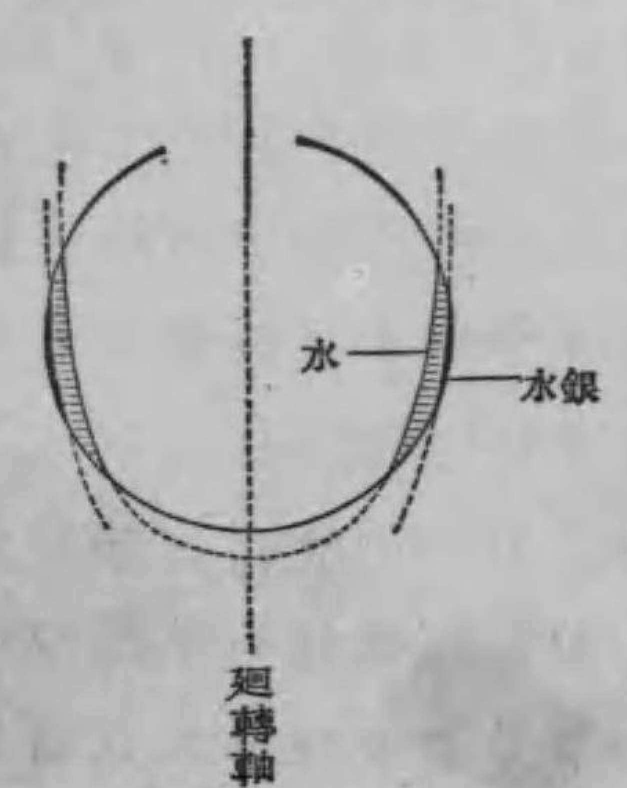
但しCは積分定數。然るに

$$[y]_{x=0}=0 \qquad \therefore \quad C=0$$

この値を上式に入れれば,液面の鉛直斷面の方程式が得られる。卽ち

$$y=\frac{\omega^2}{2g}x^2$$

これは原點を頂點とする拋物線を表はす。これによつて見れば,鉛直軸の周りに廻轉して居る液體の自由面は廻轉拋物面を成す。

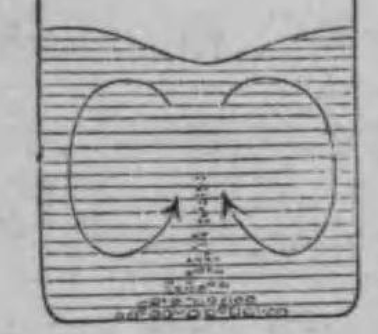


第二百二十四圖

球形の器に水及び少量の水銀を入れ,鉛直直徑を軸として,これを速かに廻轉するとき,器の外部から見れば,器の膨れた部分に水銀帶が見え,これを挾んでその上下に水帶が見える。この場合水銀は水の下に在つて水と共に廻轉し,水銀面は水面よりも外方に在るから,器に接する部分としては,水銀は膨れた所を占め,水はその上下の所を占める。

平らな底を有する圓筒狀の器に水を充たし,その中に水よりも重い物體と輕い物體とを入れたまま,平板で上端を塞ぎ,その軸の周りに,一定の角速度でこの器を廻轉すれば,重い物體はできるだけ軸から遠ざかり,輕い物體は近づく。なぜかといふに,若し器內に水ばかりあつたとすれば,水の各部分は凡てそれぞれ等速圓運動をして居るから,その周圍から受ける壓力の合力が,その部分をして圓運動をさせるだけの求心力の役目をつとめて居る。然るにその部分が水よりも重い物體で置き換へられたとすれば,周圍から作用する壓力は,それが水であつたときと全く同じであるから,この物體をして圓運動をさせるための求心力としては,不十分である。從て物體は軸から遠ざかる。又若し水の或る部分が,水よりも輕い物體で置き換へられたとすれば,周圍から作用する壓力は,その物體をして圓運動をさせるための求心力としては,大き過ぎる。從て物體は軸に近づく。水中に細かい粒體が浮遊して,容易に沈澱せぬとき,これを速かに廻轉して,沈澱を速めることは,第一の場合に當り,牛乳を速かに廻轉して,脂肪を分離することは,第二の場合に當る。

211. 靜止した器中で廻轉する液體。 靜止した圓壔狀の器の中で,液體が鉛直軸の周りに廻轉する場合に於ては(コップの中の水をかき廻はしたときのやうに),壁に接する液體は動かぬ。そして壁から離れるに從つて,連續的に速度が變る。故にこの場合,液體は全體として,廻轉運動を爲すのではなくして,その中に相對的の運動が成り立つ。卽ち器の底面に近い所は別として,器の側壁から遠ざかるに從つて,廻轉のための速度が追々に增し,或る所で極大に達し,それから追々減じて,廻轉軸の所で零になる。故に液面の形は圖に示すやうに,中央が低く,側壁の近所では幾んど水平になる。但し今は表面張力のために,器壁に接近した液面が變化を受けることは,考へないで置く。所で器底に近い所の液體は,その上方に在る液體のやうには,速い廻轉運動を爲すことができぬ。從て液面の凹形のために,液體中の同一水平面上に於て生ずる壓力の差(軸から遠ざかるほど壓力の增すこと)は,器底から離れて居る所では,液體に圓運動を與へるための求心力の役目をして居るが,器底に近い所では,廻轉運動が幾んど無いから,この壓力の差のために,側壁の方から中心の方へ向つて液體の流れが生ずる。そしてこの結果として,液體の上



第二百二十五圖

部では,中心から側壁の方へ,それから側壁に沿うて,下方への流れが生ずることになる。

茶碗に入れた水の中に,細かい沈澱物があるとき,この水をかき廻はせば,これ等の細片は,初めの間は水の廻轉運動に伴つて居るが,追々底面の中央部に集つて沈澱することは誰れも知つて居る。この現象は上記のことからすぐ說明ができる。

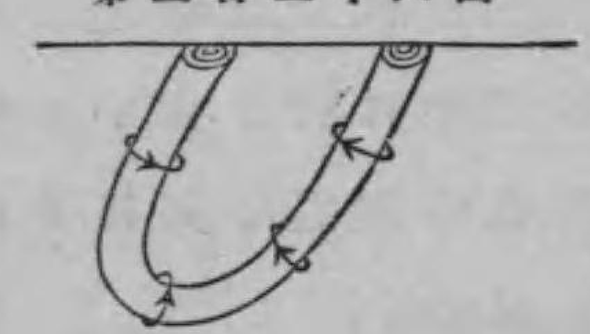
平地を流れる川が屈曲する重もな原因は,やはり上記の原理に歸する。卽ち川の或る部分に少し曲つた所が出來たとすれば,水がそこを通るとき,廻轉運動をするから,屈曲部の凹面側に於ける水面は,凸面側に於けるよりも多少高くなる。所で川の底に近い所では,水の運動は上部のやうには速くない。故に上記の原理に從つて,屈曲部の凹面側の岸に沿うて下方へ,それから水底に沿うて凸面側の方へ,水が絶え間なく流れる。この流れのために,凹面側の岸から土砂の細片が破壞され,それが凸面側の岸へ運ばれて,そこに沈澱する。されば屈曲部に於ける凹面側では水が深く,岸が追々破壞されて行くのに反して,凸面側では遠淺の地盤が生ずる。かやうな譯で,川の途中に於て,何かの機會で僅かの屈曲でも生ずれば,時代の經過と共に,それが益々著しくなる。

212. 渦動[1]。 孤立した流體柱が,その軸の周りに一樣

な廻轉を爲すためには,各部分に於て,求心力の役目をするやうな力が作用せねばならぬ。このためには,前に述べた通り,軸から遠い所ほど,液體中の壓力が大くならねばならぬ。されば廻轉して居る液體柱は,常に横の方へ向つて膨れ出し,同時に縦の方に縮まうとする傾きを有する。廻轉して居る液體の自由面が凹狀を成すのは,廻轉液柱が軸線に沿うて收縮しようとすることの結果である。かやうな收縮性は水中に生ずる渦動について,普通よく見ることで,それが水面に接する所では,水面が下方に引かれて凹狀を成す。渦狀氣流のために,往々地上の輕い物が空中に卷き上げられるのは,やはり同じ原理に歸する。尙ほ又流體中に存在する渦柱は,その兩端共に流體の境界面に在るときか,或は端の無い輪狀を成すときの外は,そのまゝいつまでも存在を續けることはできぬ。即ち若し渦柱の端が流體の中に終るとすれば,その端面は中へ吸ひ込まれるから,渦柱は收縮して遂に消滅する。

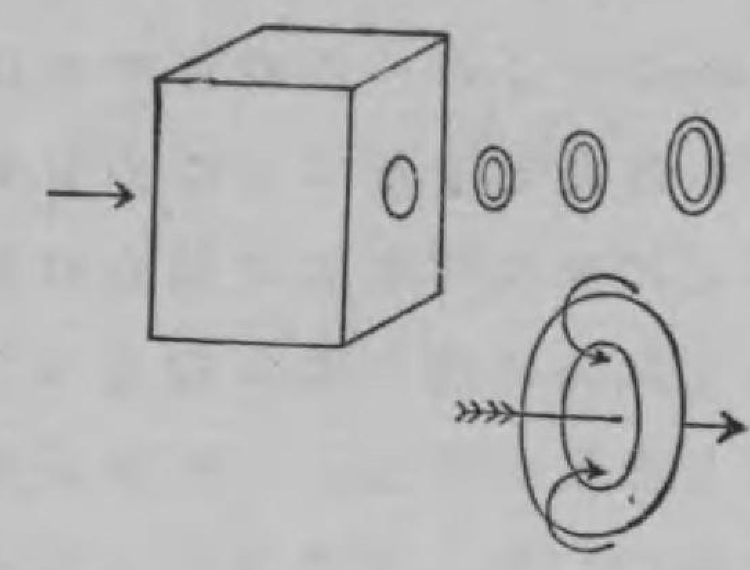
櫂で舟を漕ぐときのやうに,板又は棒を水中に入れて,これを横に速かに動かすときは,U字形の渦動管が生じ,その兩端は水面に在る。箱の側壁に圓形の孔を設け,

第二百二十六圖



1. Vortex motion; Wirbelbewegung.

第二百二十七圖



この孔に對向する後方の壁を,厚紙又は皮で張り,この箱の中をタバコ或は線香の煙で充たして置いて,後方の壁を強く叩くときは,孔から出る煙は圓形の渦動輪を作る。かやうな渦動管又は渦動輪が出來るのは,固體に接する流體は,內部摩擦のために,固體から離れた流體と一所に動くことができぬからであるが,一旦出來た渦動が追々消えるのも,またやはり內部摩擦のためである。內部摩擦の少しも無い流體中に於ては,渦動を新たに生ずることもできず,又一旦生じた渦動は永久消滅せぬ。

213. 空氣ポンプ[1]。これは密閉した容器[2](鐘)から空氣を取り去るための裝置である。次に普通用ひる空氣ポンプ數種について述べる。

(1) **活塞式空氣ポンプ**[3]。これは水を汲むに用ひる吸上げポンプと同樣の構造である。即ち活塞を嵌めた圓筒と排氣しようとする容器とを,瓣によつて連絡し,又活塞にも瓣を設ける。かやうにして,活塞を交互

1. Air-pump; Luftpumpe. 2. Receiver; Rezipient.
3. Piston air-pump; Kolbenluftpumpe.

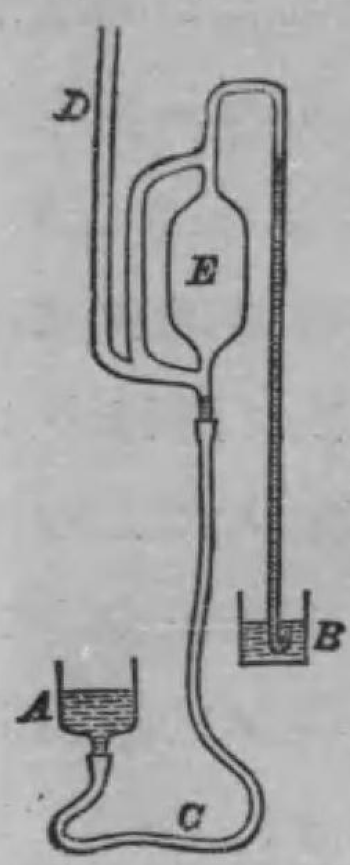
に上下すれば,その一往復毎に,容器內の空氣は等比級數の割合を以て排氣される。この種類のポンプに於ては,活塞を筒の底に押し付たとき,その間に必らず多少の空隙があつて,その所には筒外と同じ壓力の空氣が存在する。從て活塞及び瓣の所で,空氣の漏れることが少しも無いとしても排氣の程度には極限がある。

油ポンプ[1]に於ては,筒の中に油を適當な分量だけ入れて,上記の空隙を無くし,且つ又これによつて,活塞及び瓣の所で,空氣の漏れるのを防ぐ。

活塞式空氣ポンプに於て瓣の開き方を逆にすれば,或る場所の中へ,空氣又は他の氣體を詰め込む目的の裝置になる。これが即ち**壓縮ポンプ**[2]で,實用上色々の場合に用ひられる。

(2) **トリチェリ眞空の理を應用した空氣ポンプ。** 次圖は**ガイスレル,テプレル**[3]の**水銀空氣ポンプ**[4]の構造を示すもので,A及びBは水銀を入れた器,Cはゴム管,Dは排氣しようとする容器へ通ずる管である。今Aの器を上げるときは,E管の中の空氣は上昇水銀のために排除されて,B器の水銀中を通して外へ出る。次にA器を下げるときは,E管の中にトリチェリ眞空が生じ,容器內の空氣はD管を經て,そこへ入る。そこで

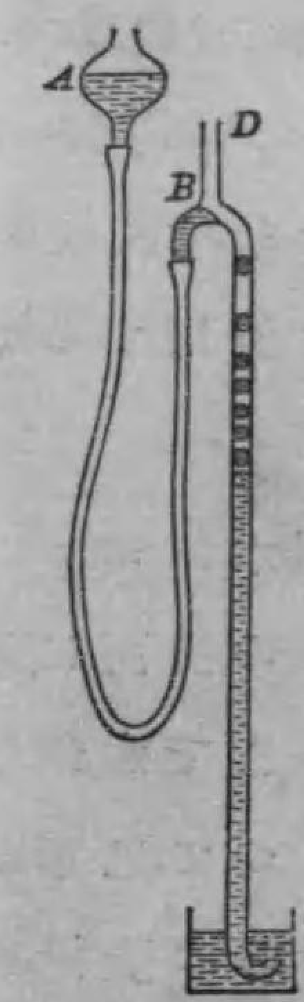
1. Oil air-pump; Oelluftpumpe. 2. Compression pump; Kompressionspumpe. 3. Geissler-Töpler. 4. Mercury air-pump; Quecksilberluftpumpe.



第二百二十八圖

かやうな事を長く繰り返せば,十分に排氣することができる。この空氣ポンプは活塞式空氣ポンプと,働作に於ては全く同じことで,E管が圓筒に當り,水銀が活塞及び瓣の役目をする。これは排氣のために長い時間を要するので,今日は幾んど用ひられては居らぬが,歷史的の興味を有する空氣ポンプである。

(3) **液體の流れを應用した空氣ポンプ。** 水が管の中を流れるとき,管の斷面を適當にすれば,水の壓力が減じて,空氣を外から吸ひ込む作用の起ること(第二百二條を見よ)を應用して,排氣の目的を達することができる。これが即ち既にその條で述べた**水流ポンプ**と稱するもので,水道の設備の存する所では,低度の排氣用として,便利なものである。又**スプレンゲル**[1]**の水銀空氣ポンプ**に於ては,左圖のやうに,排氣しようとする容器へD管を連絡し,A器から水銀を流す。さうすれば,Bの所で水銀が切れて落ちるとき,容器から來る空

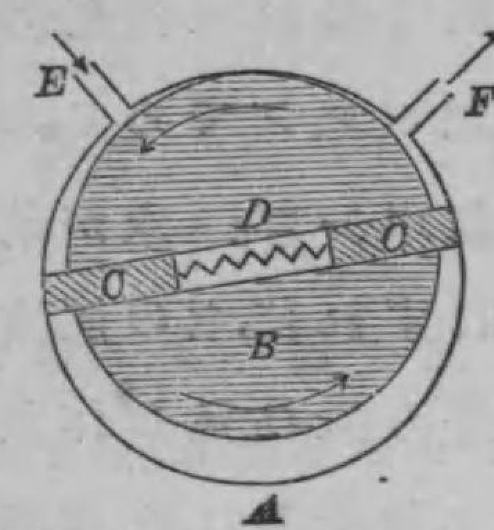


第二百二十九圖

1. Sprengel.

氣が,水銀滴の間に挾まつて,運び去られる。この空氣ポンプも歴史的のもので,今日は殆んど用ひられて居らぬ。

(4)　**廻轉式空氣ポンプ**[1]。左圖は**ゲーデ**[2]の**廻轉式空氣ポンプ**の要部を示す。圖中Aは固定した圓筒,Bは離心圓筒,CはBと共に廻轉する瓣で,螺線Dによつて,常に圓筒Aの內壁に押し着けられて居る。かやうにして離心圓筒Bを,電動機によつて,矢の方向に廻轉すれば,空氣はEの口から入つて,Fの口から出る。故にEの口を容器に連絡すれば,この裝置は空氣ポンプの用をなし,Fの口を連絡すれば,壓縮ポンプの用をなす。この空氣ポンプは,高度眞空用の空氣ポンプを使用するとき,補助ポンプとして屢,用ひられる。

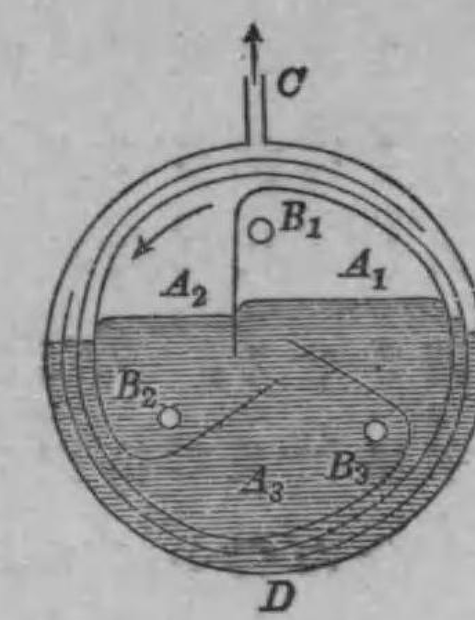


第二百三十圖

第二百三十一圖はゲーデの高度眞空用水銀ポンプの要部を示す。圖中Dは鐵製の圓筒で,その前面に厚いガラス板を嵌め,凡そ三分の二位の高さまで水銀を充たす。圓筒內は三重の磁器製圓筒によつて,巴形の三室A_1, A_2, A_3に分たれ,各室は小孔及び特殊の裝置によつて排氣しようとする容器に連絡する。今この磁

1. Rotary air-pump; rotierende Luftpumpe　　2. Gaede.

器製圓筒を,手又は電動機によつて,矢の方向に廻轉すれば,A_1室は追々廣くなるから,容器內の空氣は小孔B_1を通して,この室に入る。而してA_1がA_2の位置に達すれば,孔B_1は水銀中に沈んで,A_1は密閉せられ,同時に又空處を減ずるから,その中の空氣は壓縮される。次にこれがA_3の位置に來れば,壓縮された空氣はCの出口から外部へ出る。かやうにして,絶えず磁器製圓筒を廻轉すれば,各室が順次に同樣の作用を繰り返すから,容器內の空氣は追々に排除される。但しこのポンプを使用するには,補助ポンプを用ひて,絶えず出口Cの內の壓力を減せねばならぬ。若しさうしなければ,A_3がA_1の位置に來たとき,その上部に眞空を生ぜぬから,容器內から空氣を吸ひ込む作用が起らぬ。

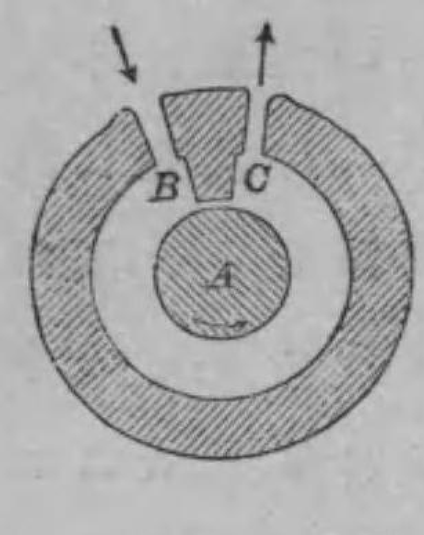


第二百三十一圖

(5)　**分子式空氣ポンプ**[1]。固體が速かに運動するときは,その表面に接觸する氣體の分子は運動の方向に引張られて行く。**ゲーデの分子式空氣ポンプ**の原理は,この事實に基く。圖に示すやうな固定した圓筒に,圓柱Aを嵌め,これを矢の向きに廻轉すれば,圓柱と外筒との間に在る氣體の分子は,Bの口からCの口へ運

1. Molecular air-pump; Molekularluftpumpe.

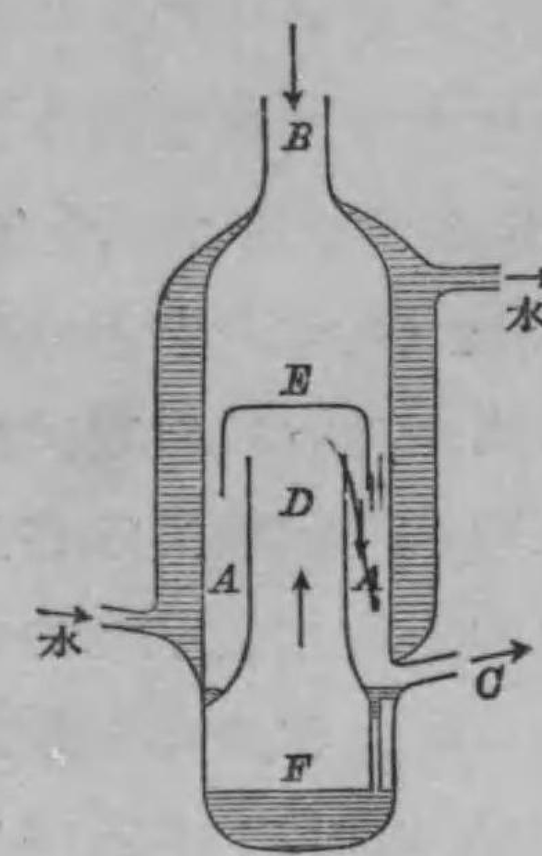
第二百三十二圖



ばれる。故にその間に壓力の差を生じ,氣體はB口から吸ひ込まれて,C口から排除される。このとき兩口の間に生ずる壓力の差は,圓柱の廻轉速度及び氣體の内部摩擦の增加するに從つて大くなる。從てこのポンプを有效に使ふためには,每秒約二百回の高速度を以て,圓柱Aを廻轉させる。又氣體の壓力が十分小くないときには,分子は相互の衝突のために,廻轉の方向に於ける速度を十分に得ることができぬから,排氣の效果が少い。故にこのポンプを使ふには,豫め補助ポンプを用ひて,相當の程度まで排氣して置くが宜しい。尙ほ又實際に於ては,ポンプの排氣率を高めるために,同一の圓柱上に,上記の裝置を數個並置し,第一の高壓口を第二の低壓口に,第二の高壓口を第三の低壓口に,以下追うてかくの如く,順々に連絡する。

(6)　**凝結式空氣ポンプ**[1]**(ラングミュアー**[2]**)**。このポンプの特徵は,構造が簡單,作用が確實で,補助ポンプを併用して,速かに高度の眞空が得られることである。圖はガラス製ポンプの構造を示す。圓筒Aはその外壁を流水冷却裝置で包み,排氣しようとする容器を上部

1. Condensation air-pump; Kondensationsluftpumpe.　　2. Lagmuuir.



第二百三十三圖

の口Bに連絡し,補助ポンプを下部の口Cに連絡する。A筒の内部には,煙突狀の管Dがあつて,下部はA筒に固着し,上端の口から少し上方に離れて,帽子狀の障壁Eが置いてある。

この裝置に於て,底部Fに水銀を入れ,これを熱して,徐々に蒸發させれば,水銀蒸氣の分子は高速度を以て上昇し,障壁Eに當つて下方に向ふ。そこで器内の氣體分子は水銀蒸氣の流れに沿うて,追々下方に運ばれ,C管から排除される。このとき水銀蒸氣はA筒の內壁面に凝結して流れ下り,F部の水銀と合して同一の作用を繰り返す。但しA筒の冷却が不十分なときには,その內面に凝結した水銀は再び蒸發して上昇し,D管から出る水銀蒸氣が,その外側を下降するのを妨げる。故にA筒の外側には,絕えず流水を通じて,これを冷却し,水銀蒸氣をして,速かに凝結させることが必要である。凝結式ポンプといふは,このためである。このポンプもまたこれを使ふとき,補助ポンプを要するもので,容器內の壓力を豫め水銀柱$\frac{1}{10}$粍以下に減じた後,このポンプを働かせれば,容易に一粍の百萬分の一程

度に排氣することができる。

214. 練習問題。

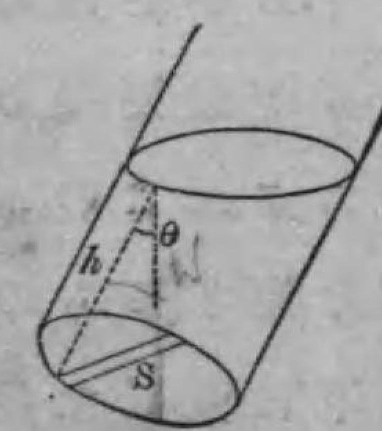
1. 內部に空所を有する銅塊の重さを測るに,空氣中では523瓦,水中では448瓦であるといふ。空所の體積はいくらか。但し銅の比重は8.8. 答。15.6立方糎。

2. 比重2.8,厚さ2.5糎のガラス板が水銀の上に浮いて居る。どれだけの深さまで,水を水銀の上に加へたならば,板が丁度沈むか。 答。2.14糎。

3. 重さ12瓦のコルク片に鉛塊を附け,兩者を合せて,これを水中で測つたときの重さが6瓦,又鉛塊だけを水中で測つたときの重さは44瓦であつたといふ。コルクの比重はいくらか。 答。0.24.

4. 任意形の斷面を有する,鉛直な壔狀の器に,重さWの水を入れ,この器をθだけ傾けたとき,底面が全部水で被はれて居るとすれば,水のために底面に作用する全壓力は$W\cos\theta$に等しいことを證明せよ。

解。傾いた壔の底面を,水平な直線によつて,多くの細長い小片に分けたとする。今その中の任意の一小片を取り,その面積をSとし,その小片から自由面まで,母線に平行に測つた距離をhとすれば,この兩者間の鉛直距離は$h\cos\theta$に等しい。故にこの小片に作用する壓力δPは,



第二百三十四圖

$$\delta P = gSh\cos\theta$$

從て底面全部に作用する全壓力Pは,

$$P = \Sigma gSh\cos\theta = g\cos\theta\Sigma Sh$$

然るにΣShは水の全體積に等しい。故に題言の通り。

5. 半徑7.5糎の半球狀の器に水を充たし,ガラス板で蓋した後,これを倒しまにして,水平板の上に置く。このとき器中の水の壓力のために,器が持ち上げられることのないためには,その重さがいくら以上なればよいか。 答。442瓦。

6. 二等邊直角三角形の板を鉛直にして,液體の中に沈め,斜邊を液面と一致させるときは,板面に作用する壓力の中心は,液面からどれだけの深さにあるか。又若し斜邊を鉛直にして,その上端を液面に置くときは,どうなるか。但し斜邊の長さをaとする。

答。$\dfrac{a}{4}$; $\dfrac{7a}{12}$

7. 大氣の溫度0°,壓力76糎の場所から,いくら上れば,氣壓が1粍だけ減るか。但しこの狀態に於ける空氣の密度は$0.00129\dfrac{瓦}{糎^3}$ 答。10.5米。

8. 外半徑6糎,內半徑5糎の中空半球を二つ合せて,中空球(マグデブルグ半球)を作り,內部の壓力が5糎になるまで,空氣を排除すれば,この半球を引き離すために,いくらの力を要するか。但しその時の氣壓は75糎。 答。110瓩。

9. 海上に氷山が浮いて居るとき,水面外に現はれた體積が 87.5 立方米であるとすれば,氷山の全體積はいくらか。但し氷の比重は 0.917, 海水の比重は 1.025.

答。830 立方米。

10. 外半徑 10 糎の鐵製中空球が水上に浮み得るためには,その厚さをいくら以下にすべきか。但し鐵の比重は 7.8.　答。0.45 糎。

11. 兩端の開いた U 字形管の中に水銀を入れ,その一脚内の水銀の上に,更らに水を加へたとき,管内の自由水面は自由水銀面よりも,60 糎だけ高くなつたといふ。水柱の高さはいくらか。　答。64.8 糎。

12. 重さ W といふ,一樣な厚さを有する長方形板の一隅を糸で吊し,これを水中に浸したとき,對角線が丁度水面と一致したといふ。板の比重及び糸の張力はいくらか。　答。$\frac{2}{3}$; $\frac{W}{4}$.

13. 鉛直な壔狀の器に,液體が入れてある。糸で吊した物體を,壁に觸れぬやうに,液體中に浸せば,器底に及ぼす全壓力は,物體を浸さなかつたときに比して,物體と同體積の液體の重さだけ大いことを證明せよ。

14. 器に入れた水の上に氷が浮いて居る。この氷が融解すれば,器中の水面の高さが變るか。

答。變らぬ。

15. 空氣に重さがあるかどうかを吟味する積りで,しなやかなゴムの袋に空氣を入れて,膨らましたときと,中の空氣を出して,すぼめたときの重さを空氣中で測つたが,變りがなかつたといふ。そこで空氣には重さがないと結論したとすれば,それは正しいか。

答。正しくない。

16. 比重 2.8 の石が,水中に沈み始めるときの加速度はいくらか。　答。$6.3\frac{\text{米}}{\text{秒}^2}$

17. 高さ 2.1 米の圓筒狀の潜水鐘を水に沈めたとき,鐘の上端が水面から 6 米だけ下にある。その時の氣壓が 75 糎であれば,鐘内に水がどれだけ上るか。

答。87.3 糎。

18. 一端を閉ぢた,長さ 50 糎の筒形の管を倒しまにして,海底に沈めたとき,管内に 40 糎だけ水が上つたといふ。その時の氣壓を 76 糎とし,海水の比重を 1.03 とすれば,海の深さはいくらか。〔ケルビン[1]の水深測定裝置はこの原理による〕。　答。40.5 米。

19. 1 平方糎の斷面を有する晴雨計管に於て,水銀柱の高さ 77 糎のとき,眞空部の長さが 8 糎ある。この管内に 1 立方糎の空氣を外から入れたとすれば,水銀柱はどれだけ下るか。　答。5.64 糎。

20. 正しい晴雨計が 75 糎を示すとき,いくらか空氣のはいつて居る晴雨計では,水銀柱の高さ 70 糎,上部の

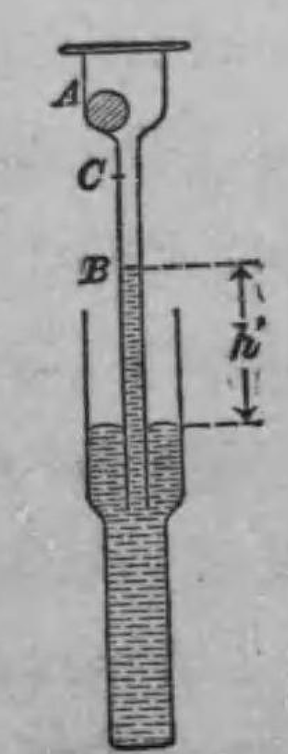
1. Kelvin.

空所の長さ15糎である。この晴雨計が67.7糎を示すとき,正しい晴雨計の示度はいくらか。　答。72.0糎。

21. 兩端の開いた,長さ1米の一様な管を鉛直にして,90糎だけ水銀の中に浸し,上端を指で塞いだまま,これを引き上げ,水銀中の部分が10糎になつたとすれば,管内の水銀柱はいくらの高さになるか。但しその時の氣壓は75糎。　答。54.1糎。

22. 一端の閉ぢたU字形管を鉛直にして,靜かに水銀を注ぎ込み,閉脚内の空氣を閉ぢ込めたとき,開脚に於ける水銀の高さ60糎である。閉脚の長さを24糎とし,その時の氣壓を76糎とすれば,閉脚に於ける水銀の高さはいくらか。　答。9.6糎。

23. 漏斗形の管ABを,圖のやうに水銀槽の中に挿し込み,内外の水銀面がCにあるとき,空氣の漏れぬやうに,上端に蓋をして,管を引き上げ,管内の水銀面がBにあるとき,水銀柱の高さをhとする。次に蓋を取り去つて管の上部に或る物體を入れ,内外の水銀面がCにあるとき,再び蓋をして,管内の水銀面がBに來るまで,管を引き上げ,そのときの水銀柱の高さをh'とする。蓋をしたとき,Bから上部の管の内容積をVとすれば,物體の體積は$V\left(1-\frac{h}{h'}\right)$に等



第二百三十五圖

しいことを證明せよ。〔かやうな裝置を體積計[1]と稱し,水又は他の液體に浸すとき,性質の變るやうな物體(例へば火藥)の體積を測るに用ひる〕。

解。氣壓をPとし,BC部の内容積をv,物體の體積をxとすれば,第一の實驗に於て,管内の水銀面がB及びCにあるときの,中の空氣の體積は$V, V-v$,又その壓力は$P-h, P$である。故にボイルの法則によつて,

$$(P-h)V=P(V-v)$$

第二の實驗に於ては,管内の空氣の體積は第一の場合に比べて,物體の體積xだけ少いから,

$$(P-h')(V-x)=P(V-x-v)$$

この二式から,　$x=V\left(1-\frac{h}{h'}\right)$

24. 重さのない,しなやかな膀胱に,500立方糎の空氣を入れ,これに100瓦の錘を附けて,海の中に沈めたとするに,どれだけの深さになれば,浮き上らぬやうになるか。但しその時の氣壓を76糎とし,海水の比重を1.02,錘の比重を8.5とする。　答。48米。

25. 水平な臺の上に器を載せ,その中に深さhだけの水が入れてある。器の側面に設けた小い孔から水が流れ出すとき,臺の上で,水の達する距離を最大にするためには,孔の高さをいくらにすべきか。

答。$\frac{h}{2}$

1. Volumenometer.

26. 水平な細い管に於て,途中の一部を細くして,その斷面積を他の部分の半分にする。この管の一端を,水桶の中で,水面から下方3米の所に挿込み,他端を大氣中に開放する。大氣の壓力を76糎とすれば,狹隘部に於ける水の壓力はいくらか。　　答。9.8糎。

27. 水桶の壁に管を挿し込み,この管から流出する水柱を平板に直角に當てたときの全壓力は,管を栓で閉ぢたとき,その栓に作用する全壓力の二倍に等しいことを證明せよ。但しこの管の內面から,桶の內壁面に移る所に於ては,曲率に急な變化はないとし,且つ水は管の內部に充ちて居るとする。

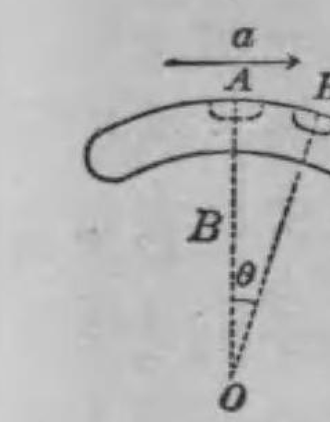
28. 汽車の內に設けた水桶に鉛直な管を附けて,この管の下端を,汽車の進行する方向に曲げたまま,軌道の間に在る水溜の中に浸す。汽車の速度を v とし,水溜の水面から管の上端までの高さを h とすれば,管口から流出する水の速度はいくらか。〔この方法によつて,進行中の汽車に水を汲み上げることができる〕。

答。$\sqrt{v^2-2gh}$.

解。管が固定して居て,水溜の水が速度 v を以て,管の水平部の口から入り,上端から出ると考へても,結果に於て同じい。そこで水溜の水面から,管の上端までの間の流管を考へ,これにベルヌイの定理をあてはめる。

29. 船が加速度 a を以て進むとき,進行の方向に平行に水準器を置けば,器內の氣泡はどういふ位置に於て靜止するか。

解。普通の水準器は曲率半徑の大い弧狀の管の中に,アルコール又はエーテルのやうな,粘性の小い液體と,僅かの氣泡とを封じ込んだものである。靜止した水平臺の上に水準器が在るときは,氣泡の中央點 A は管の中央點と一致し,且つ弧狀管の曲率中心 O から,液の自由面に引いた垂線 OA の上に在る。然るに若しこの臺に加速度 a を與へたとすれば,自由面は水平面に對して,或る角度 θ だけ前方へ傾く。從て氣泡の中央點 B は,そのときの自由面へ O から引いた垂線 OB の上に來る。所で第二百九條によつて,



第二百三十六圖

$$\tan\theta=\frac{a}{g}$$

今弧狀管の曲率半徑を R とすれば,θ は一般に小い値であるから,

$$\tan\theta=\frac{AB}{R}$$

故に　$$AB=\frac{aR}{g}$$

されば船の動搖が少しもないとすれば,水準器內の氣泡の位置を見て,船の加速度を知ることができる。

30. 地球が軌道の上を動くときの加速度を,前問題

のやうにして,水準器で知ることができるか。

答。できぬ。

解。 前問題に於て,加速度を生ずべき外力は,水準器の管に作用するので,管內の液體に直接作用するのではない。そこで液體に加速運動をさせるために,同一水平面上に壓力の勾配を生ずべき必要から,自由面の傾斜を生じ,その結果として,氣泡の變位を起したのである。然るに萬有引力は,管にも液體にも,凡て直接に作用する力であるから,それだけで管と一所に,液體をして加速運動をさせるのに十分である。故に液體中の同一水平面上に於て,壓力の勾配を要せぬ。從て又自由面の傾斜を要せぬから,氣泡もまた變位せぬ。

31. 半徑a,密度ρの液體圓壔が角速度ωを以て,その軸の周りに廻轉して居るときは,曲面に作用する壓力は,それが靜止して居るときに比べて,どれだけ增すか。

答。$\frac{1}{2}\rho\omega^2a^2$

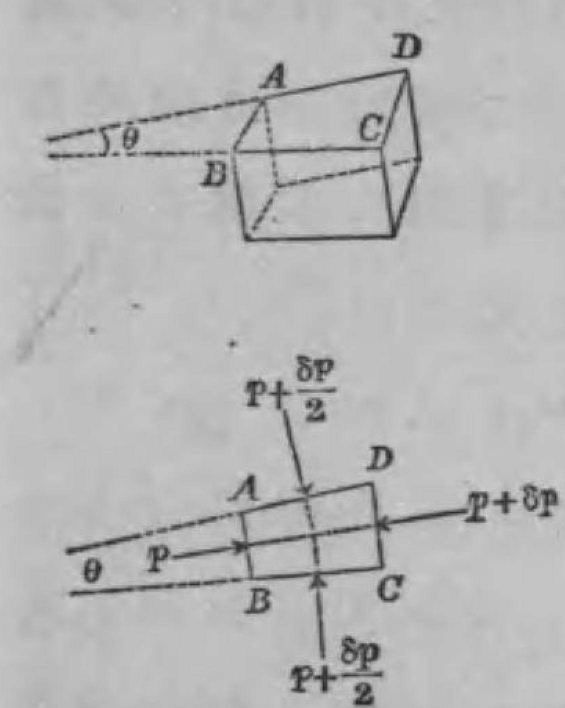
解。 液體圓壔の軸を含む二平面を,非常に接近して畫き,その間の角をθとする。又軸に直角な二平面を非常に接近して引き,その間の距離をbとする。この四つの平面で圍まれた,小い角の楔形の部分をば,與へられた圓壔と共通の軸を有する圓壔面によつて,澤山の小部分に分けたと考へ,その一つを$ABCD$とする。今軸からAB面までの距離をxとし,液體圓壔をして廻轉運動をさせるための必要上,AB面に作用すべき壓力をpとすれば,$ABCD$をして圓運動をさせために要する求心力δfは,

$\delta f=CD$面に作用する全壓力

$-AB$　　〃　　〃

$-BC$及びAD面に作用する全壓力の合力

$$=(p+\delta p).b(x+\delta x)\theta-p.bx\theta-2\left(p+\frac{\delta p}{2}\right).b\delta x.\sin\frac{\theta}{2}$$



第二百三十七圖

然るにθは小いから,$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\theta}{2}$と置き,又$\delta p\delta x$を含む項を省畧して,

$$\delta f=b\theta x\delta p$$

又　$ABCD$の質量$=\rho b\theta x\delta x$

〃　加速度$=\omega^2x$

故に　$b\theta x\delta p=\rho b\theta x\delta x.\omega^2x$

從て　$\frac{dp}{dx}=\rho\omega^2x$

これを積分すれば,

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2x^2+C$$

但しCは積分定數。然るに

$$[p]_{x=0}=0\qquad\therefore\qquad C=0$$

故に

$$p=\frac{1}{2}\rho\omega^2x^2$$

第十二章　粘　性

215. 内部摩擦係數。[1] 實際に存在する流體が,凡て多少の粘性を有することは,既に前章に述べたが,この章に於ては,これに關する重もな事項について述べる。

流體中に於て,流れに直角に距離を測るとして,距離 x の所に於ける流體の速度を v とすれば, $\frac{dv}{dx}$ は流れに直角な方向に於て,單位距離に對する速度の違ひ,即ち所謂**速度の勾配**[2]を表はす。今流線に平行な小い面を考へるに,實驗上の結果から間接に推知した結果によれば,この面を境として,兩側の部分間に作用する內部摩擦力 f は,この面に直角な方向の速度の勾配 $\frac{dv}{dx}$ に比例する。故にその面積を S とすれば,

$$f \propto S\frac{dv}{dx} \qquad \text{從て} \qquad f=\eta S\frac{dv}{dx}$$

但し η は比例の定數で,流體によつてそれぞれ一定したものである。これを**內部摩擦係數**又は**粘性係數**[3]といふ。內部摩擦係數の元は $[L^{-1}MT^{-1}]$ である。

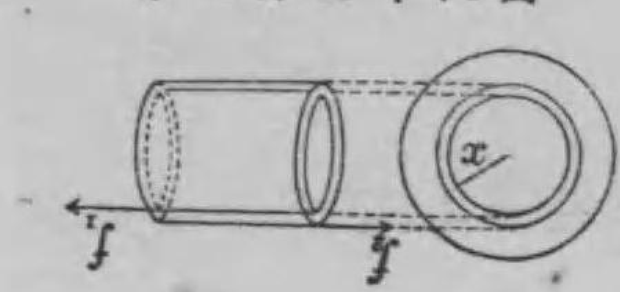
流體が管の中を流れる場合に於ては,管の壁に接する部分は壁に固着して動かぬ。そして壁から離れるに從つて速度が增す。即ち管の中に於ては,流體は全部一樣には流れぬから,粘性のために,流れに對する抵

1. Coefficient of internal friction; Koeffizient der inneren Reibung.
2. Velocity gradient; Geschwindigkeitsgefälle, Geschwindigkeitsgradient.
3. Coefficient of viscosity; Viskositätskoeffizient.

抗が起る。但し速度の勾配は重に壁に近い所にあるから管が細くなるに從つて,抵抗が著しく增す。故に管から流れ出す液體の量は,兩端に於ける壓力の差のみならず,管の長さに關係し,殊にその太さに著しく關係する。

216. 一樣な細管の中を流れる流體の定常流。 この場合管中の液體柱を管と同軸な圓筒狀の多くの薄層に分けたとすれば,各層はその內側に隣接する液體のために,流れの向きに引かれ,同時に又外側に隣接する液體のために反對の方向に引かれる。今この圓筒層の內半徑を x,層の厚さを δx とし,この層の速度を v,管の長さを l とすれば,圓筒の內側面及び外側面に作用する內部摩擦力 f_1 及び f_2 は,

第二百三十八圖



$$f_1=-\eta.2\pi xl\frac{dv}{dx}=-2\pi l\eta x\frac{dv}{dx} \qquad \text{流れの向きに,}$$

$$f_2=-2\pi l\eta x\frac{dv}{dx}+\frac{d}{dx}\left(-2\pi l\eta x\frac{dv}{dx}\right)\delta x \qquad \text{流れと反對の向きに。}$$

故に圓筒層に作用する內部摩擦力は,

$$f_2-f_1=-2\pi l\eta\frac{d}{dx}\left(x\frac{dv}{dx}\right)\delta x \qquad \text{流れと反對の向きに。}$$

管の兩端に於ける壓力の差を p とすれば,上記の圓筒層に作用する外力は $2\pi x\delta x.p$ である。所で液體は定常流であるから,この外力は內部摩擦力 f_2-f_1 と釣合ふべきである。即ち

$$2\pi x\delta x.p=-2\pi l\eta\frac{d}{dx}\left(x\frac{dv}{dx}\right)\delta x$$

從て
$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dv}{dx}\right)=-\frac{p}{l\eta}x$$

これを積分すれば,

$$x\frac{dv}{dx}=-\frac{px^2}{2l\eta}+C$$

この式は$x=0$のときにも成り立つべきものであるから,これから$C=0$を得る。これを上式に入れるときは,

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{px}{2l\eta}$$

更らにこれを積分すれば,

$$v=-\frac{px^2}{4l\eta}+C'$$

所で管壁に接する液體は動かぬから,管の半徑をaとすれば,

$$[v]_{x=a}=0 \qquad \therefore \qquad C'=\frac{pa^2}{4l\eta}$$

故に
$$v=\frac{p}{4l\eta}(a^2-x^2)$$

この式は軸からの距離 x の所に於ける液體の速度vを與へるものである。

單位時間中に上記の圓筒層を流れる液體の體積をδVとすれば,

$$\delta V=2\pi x\delta x.v=\frac{\pi p}{2l\eta}x(a^2-x^2)\delta x$$

故に單位時間中に管を流れる體積Vは,

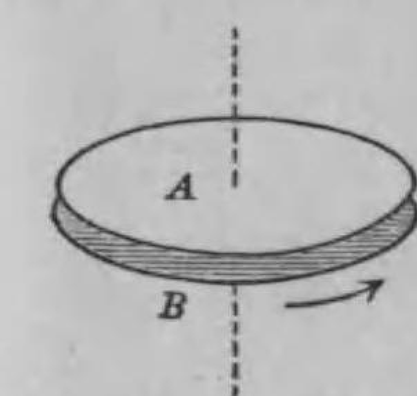
$$V=\frac{\pi p}{2l\eta}\int_0^a x(a^2-x^2)dx$$

$$=\frac{\pi p}{2l\eta}\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$=\frac{\pi pa^4}{8l\eta}$$

故に或る時間中に管を流れる液體の體積を測れば,この式によつて內部摩擦係數ηを求めることができる。

217. 廻轉板の裝置によつて流體の內部摩擦係數を測定すること。 二枚の相等しい圓板A,Bを平行に接近させ,且つ兩板の軸を一致させる。この兩板の間を流體で充たし,一方の板Aを固定し,他の板Bをその軸の周りに廻轉させるときは,B板に接する流體はB板と同じ速度を以て動くから,兩板の間の流體中に於て,速度の勾配が成り立つ。從てA板をその軸の周りに廻さうとするトルクが生ずる。このトルクの値は次のやうになる。



第二百三十九圖

兩板の半徑をa,その間の距離をd,B板の廻轉する角速度をωとする。さうすれば廻轉軸からxだけ離れた點に於ては,B板に接する流體の速度はωxに等しいから,この距離の所では,兩板間の流體中に於ける速度の勾配は$\frac{\omega x}{d}$に等しい。從て板の廻轉に對する粘性抵抗力のトルクは,單位面積について$\frac{\omega x}{d}\eta x$即ち$\frac{\omega x^2\eta}{d}$である。そこで板を多くの同心輪に分けたとし,その中の一輪の半徑をx,幅をδxとすれば,この輪だけの部分に作用するトルクδCは,

$$\delta C=2\pi x\delta x.\frac{\omega x^2\eta}{d}=\frac{2\pi\omega\eta}{d}x^3\delta x$$

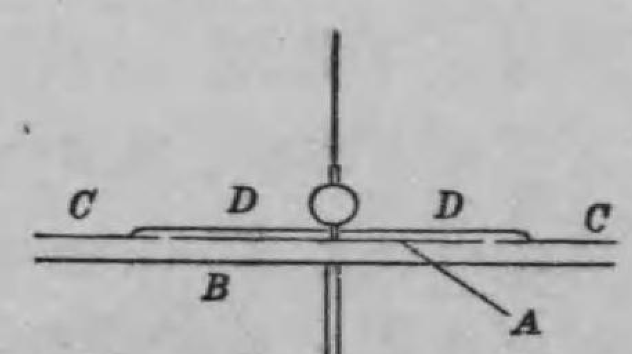
故に板の全部に作用する全トルクCは,

$$C=\int_0^a \frac{2\pi\omega\eta}{d}x^3dx=\frac{\pi\omega\eta a^4}{2d}$$

上記の所では,廻轉板Bに作用する粘性抵抗力のトルクとして,Cの値を求めたのであるが,これと等しいトルクが,B板の廻轉のために固定板Aに作用する。故にこれを固定して置くためには,丁度それだけのトルクを反對の向きに加へて置かねばならぬ。

この原理を應用して,流體の內部摩擦係數を求めることができる。このためには,A板を細い針金で水平に吊し,その下でB板を廻轉したとき,針金の捩れた角を測り,それからトルクCの値を計算する。尙ほ上記の計算に於ては,兩板の間に於ける速度の勾配が,板の周邊部までも凡て一樣に變化するものとし,且つ吊した板Aの上表面には,粘性的の力が作用せぬものと假定したのであるが,この條件を滿足させるために,次のやうな裝置にする。卽ち圖に示すやうに,吊した板Aよりも廻轉板Bを大くし,且つ固定した輪狀の板CでAを圍み,C板の孔をA板が殆んど塞ぐ位に作る。さうすれば,AとCとは連續した一枚の板と殆んど同樣であるから,速度の勾配は,A板の周邊部までも凡て一樣に變ると見做して

第二百四十圖



も宜しい。尙ほ又淺い蓋DをC板の上に載せて,A板の上表面に流體の流れが當らぬやうにする。

次に種々の流體について,內部摩擦係數の値を記す。

	$\eta(18^\circ)$		$\eta(18^\circ)$
エーテル	0.0026 $\frac{瓦}{糎秒}$	水素	0.000097 $\frac{瓦}{糎秒}$
二硫化炭素	0.0038	水蒸氣	0.000097
水	0.0106	窒素	0.000180
アルコール	0.0130	空氣	0.000191
水銀	0.0159	酸素	0.000206

218. 滑劑としての油の作用。 一例として,機械の心棒が軸承にはまつたまま廻轉する場合を考へて見るに,兩者の間に油をさすと,摩擦の著しく減ずることは,誰れもよく知つて居る。旣に摩擦力の章で述べたことから分る通り,かやうな場合に,もし油を用ひないで,心棒が直接軸承に接觸するときは,心棒の廻轉を續けるために要する力は,兩者の間の垂直壓力に比例する。又廻轉の速度が餘り大くもなく,又餘り小くもない範圍內に於ては,この力は廻轉の速度に關係せぬ。然るに心棒と軸承との間に油をさした場合に於ては,心棒の廻轉を續けるために要する力は,廻轉の速度,油の種類及び溫度に關係するが,心棒及び軸承をこしらへた物質の種類にも,又兩者間の垂直壓力にも關係せぬ。この事實から見れば,心棒が廻轉して居るときは,心棒

と軸承の表面は直接相接觸するのではなくして,その間に油の薄い層が挾まれて居る。從て心棒の廻轉運動に抵抗する力は,この油層中に於ける粘性のみから生ずると考へねばならぬ。

今油層によつて隔てられた固體表面の面積をS,その間の距離をd,油の內部摩擦係數をηとし,兩者間の滑りの相對速度をvとすれば,油層中に於ける速度の勾配は$\frac{v}{d}$である。故に滑りの運動を續けるために,一方の固體面に加へるべき力fは,

$$f=S\frac{v}{d}\eta$$

この式から見れば,ηが小いほどfは小い。然るに經驗上の結果として,滑りの運動に對する抵抗を少くするためには,內部摩擦係數の大い液體を滑劑として用ひねばならぬ。この事は一見奇妙に思はれる。しかし實はvが增すと共にdもまた增すのであるが,ηが小いときは,dの增し方が少い。從てfは減らぬのである。

一體心棒が軸承にはまつたまま靜止して居れば,その間の壓力のために油が押し出されて,兩者が互に接觸する。然るに心棒が廻轉して居れば,兩者間の最も狹い部分は,心棒のすぐ下ではなくして,それが

第二百四十一圖

廻轉する方へいくらか偏つた所である(圖のA)。この最狹部へ油が下部から絕えず運ばれて,心棒と軸承との間に挾まる。そして或る程度以上に兩者の接近することを妨げる。所でこの作用が著しく現はれるためには,內部摩擦係數の相當に大い油を用ひ,且つ廻轉の速度を相當に大くせねばならぬ。

219. 流體の抵抗。 流體の流れが物體の表面に當るとき,これに壓力を及ぼすことは,既に第二百八條に述べた通りである。さればまた物體が流體の中を動くときには,その運動に抵抗する力が物體に作用すべきである。**流體の抵抗**といふは,この力のことである。

相似形の物體について,流體の抵抗fを比較して見るに,fは對應線の長さlの何乘冪かに比例すると見做して宜しいから,

$$f\propto l^x$$

又fは流體の密度ρ,內部摩擦係數η,物體の速度Vと何等かの關係を有すべきであるから,

$$f\propto\rho^y$$

$$f\propto\eta^z$$

$$f\propto V^n$$

と假定して宜しい。但しx, y, z, nは單位の大さに關係のない,ただの數である。

流體の抵抗に影響を及ぼすものは上記の四量だけ

に止まるから，

$$f \propto l^x \rho^y \eta^z V^n$$

従て　$$f = kl^x \rho^y \eta^z V^n$$

但しkは比例の定數で，物體の形狀のみによつて定まる數である。

この方程式の諸量をば，それぞれ絕對單位で表はしたとすれば，兩邊は長さ質量及び時に對して，何れも同じ元でなければならぬ(第六十二條)。所で f, l, ρ, η, V, k の元はそれぞれ $\frac{ML}{T^2}, L, \frac{M}{L^3}, \frac{M}{LT}, \frac{L}{T}, 0$ であるから，

$$\frac{ML}{T^2} = L^x\left(\frac{M}{L^3}\right)^y\left(\frac{M}{LT}\right)^z\left(\frac{L}{T}\right)^n$$

この兩邊はLに對して同元であるから，

$$1 = x - 3y - z + n$$

同様にM及びTに對しても同元であるから，

$$1 = y + z$$

$$-2 = -z - n$$

この三方程式から，

$$x = n, \quad y = n - 1, \quad z = -n + 2$$

$$\therefore \qquad f = kl^n \rho^{n-1} \eta^{2-n} V^n$$

ここまでは元方程式の方法によつて得られるが，nの値を求めるには，別の方法によらねばならぬ。この問題を取り扱ふに當つて，次のやうにこれを三つの場合に分けて考へる。

(1)　物體の速度が小い場合。この場合について實

驗した結果によれば，物體の運動に抵抗する力はその速度に比例する。されば前式の中に$n=1$と置いて，

$$f = kl\eta V$$

これによつて見れば，fは流體の密度に無關係である。即ち物體の速度が小ければ，流體の抵抗はその粘性のみから起る(第二百八條)。

ストークス[1]が理論的に計算した結果によれば，半徑rの球狀物體に於ては，

$$f = 6\pi r\eta V$$

さればこの場合に於ける定數kは6πに等しい。

物體は眞空中では，凡て同じやうに落ちるが，空氣中ではその抵抗のために，凡てが同じやうには落ちぬ。所で落體の速度が增すに從つて，空氣の抵抗が增す。そこでこの抵抗と物體の重さ(浮力を引いた見掛けの重さ)が丁度相等しくなるやうな程度に速度が達したとすれば，もはやそれ以上に速度は增さぬ。されば物體は落ち初めの間は加速運動をするが，或る時間の後には，この極限の速度を以て等速運動をする。雨滴の如きはその一例である。尙ほ又物體が小くなるに從つて，抵抗は減ずるが，重さの減ずる割合の方が更らに一層大い。故に小い物體ほど極限の速度が小い。雲霧煤煙塵埃等が空中に浮遊して，急速に落ちぬのはこ

1. Stokes.

のためである。

半徑r,密度σの球狀物體が空氣中を落ちるときの極限の速度をV_1とし,空氣の密度をρとすれば,

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\sigma-\rho)g=6\pi r\eta V_1$$

$$\therefore \qquad V_1=\frac{2gr^2(\sigma-\rho)}{9\eta}$$

例へば半徑 0.001 糎の水滴については,

$$\sigma=1.000, \quad \rho=0.00129, \quad \eta=0.00018$$

と置いて,

$$V_1=1.21\frac{\text{糎}}{\text{秒}}$$

(2) 物體の速度が大い場合。この場合實驗上の結果によれば,抵抗力は速度の二乘に比例する。そこで前式の中に$n=2$と置けば,

$$f=kl^2\rho V^2$$

この結果は汽車に對する空氣の抵抗及び船に對する水の抵抗について,實驗的にためされたことである。但しl^2は汽車の場合には,對應表面の面積を表はすが,船の場合には,水で濡らされた部分の對應表面積に相當する。

上式から見れば,物體の速度が大い場合に於ては,流體の抵抗は密度のみに關係して,粘性には關係せぬ(第二百八條)。

(3) 物體の速度が餘り大くもなく,又餘り小くもない場合。この場合について實驗した結果によれば,抵抗力は$V^{\frac{3}{2}}$に比例する。そこで前式中に$n=\frac{3}{2}$と置いて,

$$f=k\sqrt{l^3\rho\eta}\,.V^{\frac{3}{2}}$$

220. 練習問題。

1. 100 平方糎の平面板を,非常に廣い固定平面板と平行に置き,その間がいつも油で充たされ,且つ 1 粍の距離に保たれるやうにして,$10\frac{\text{糎}}{\text{秒}}$の速度で第一の板を動かすには,いくらの力を要するか。但し油の內部摩擦係數を$3.0\frac{\text{瓦}}{\text{糎秒}}$とする。2 $\eta=0.003$ 答。30 瓦。

2. 水桶の水面から下方50糎の所に,長さ10糎,半徑 0.2 粍の毛管を水平に插せば,一分間にどれだけの水が流れ出すか。但し水の內部摩擦係數は$0.01\frac{\text{瓦}}{\text{糎秒}}$。

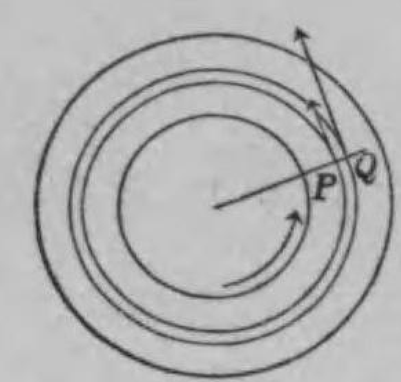
答。1.81 立方糎。

3. 二つの同心圓筒の間を,內部摩擦係數ηの流體で充たし,內筒を固定して,外筒を角速度ω_0で廻轉する。內筒及び外筒の半徑をa, bとすれば,內筒に及ぼす粘性抵抵のトルクは單位の長さについていくらか。

答。$4\pi\eta\omega_0\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$

解。 同一半徑上に於て,極めて接近した二點P,Qを取り,軸からの距離をx, $x+\delta x$とし,この二點に於ける流體の角速度をω, $\omega+\delta\omega$とすれば,その線速度はωx, $(\omega+\delta\omega)(x+\delta x)$である。故にこの二點に於ける速度の差を$\varDelta$とすれば,

$$\Delta=(\omega+\delta\omega)(x+\delta x)-\omega x$$
$$=\omega\delta x+x\delta\omega$$



第二百四十二圖

この式中第一項 $\omega\delta x$ は,流體が全體として角速度 ω で廻轉するときの,P と Q に於ける線速度の差で,これは粘性抵抗を生ずることに對して,何の効果もない。従て粘性抵抗を生ずることに對して有効な速度の勾配は第二項 $x\delta\omega$ のみから起る。そしてその値は $lim_{\delta x=0}\frac{x\delta\omega}{\delta x}$ 即ち $x\frac{d\omega}{dx}$ に等しい。そこで P を通る同心圓筒の單位の長さに作用する粘性抵抗のトルクを C とすれば,

$$C=2\pi x.x\frac{d\omega}{dx}\eta.x=2\pi\eta x^3\frac{d\omega}{dx}$$

所で P を通る圓筒と内圓筒との間に包まれた流體は,定常狀態の廻轉をして居るのであるから,この部分に作用するトルクは釣合つて居る。故にそれが内圓筒から受けるトルクは C に等しい。従て又 C は内圓筒に作用するトルクを表はす。

上式を書き直せば,

$$2\pi\eta\frac{d\omega}{dx}=\frac{C}{x^3}$$

これを積分すれば,

$$2\pi\eta\omega=-\frac{C}{2x^2}+k$$

但し k は積分定數。所で

$$[\omega]_{x=a}=0 \qquad \therefore \qquad 0=-\frac{C}{2a^2}+k$$

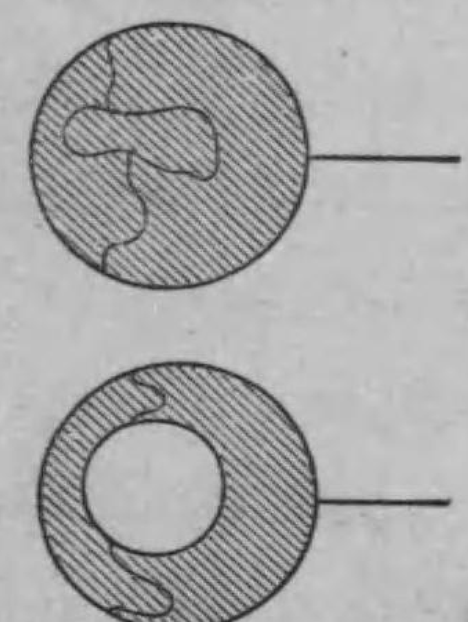
$$[\omega]_{x=b}=\omega_0 \qquad \therefore \qquad 2\pi\eta\omega_0=-\frac{C}{2b^2}+k$$

故に $$2\pi\eta\omega_0=\frac{C}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$$

従て $$C=4\pi\eta\omega_0\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$$

第十三章　表面張力

221. 表面張力[1]。液體は事情の許す限り,できるだけその表面を小くしようとする傾きを有する。從て恰かもそれが極めて薄い彈性膜で包まれてあるかのやうな現象を現はす。シャボン玉や露滴が球形を成すことは,誰れも知つて居る著しい例である。かやうな事實から見れば,液體の表面に於ては,これに沿うて張力が作用する。これを**表面張力**といふ。



第二百四十三圖

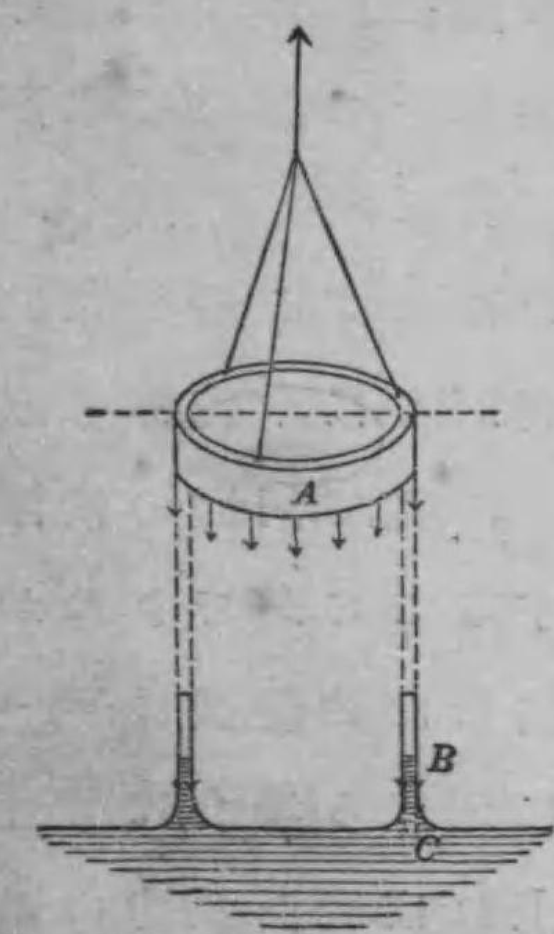
薄い膜に於ける表面張力の作用を示すために,次のやうな實驗がある。針金で作つた枠をシャボン液に浸して引き上げるときは,枠を周邊とするシャボン液の薄い膜が出來る。この膜の上に,細い糸の兩端を結んだものを載せ,その內部の膜を木片の尖端で突き破るときは,糸は忽ち廣がつて圓形の輪になる。これは糸と枠とを周邊とする薄い膜が收縮して,できるだけその面積を小くすることの結果である。

表面張力は次のやうにして表はす。即ち液面の上に單位の長さの線を考へ,この線を境として,兩側の部

1. Surface tension; Oberflächenspannung.

分が液面に沿うて互に引き合ふ力を以て,表面張力を表はす。この値は液體が極めて薄い層でない限りは,液層の厚さには關係せぬ。

表面張力を測定する一つの方法は次の如くである。



第二百四十四圖

即ち幅の狹い,薄い圓形の輪Aを金屬で作り,これをゼンマイ秤の下端に吊す。次に表面張力を測らうとする液體にこの輪を浸し,徐々に液面を下げるときは,或る所に至つて,輪は液面から離れて飛び上る。

この瞬間に於ては,液體が輪を下方に引く力Fは,延長のためにゼンマイに生ずる彈力に等しいから,この延長を測れば,それから力Fの値を求めることができる。所でこの場合液體が輪に附着して引き上げられて居るから,輪の內外兩面に作用する表面張力と,輪の上下兩端面に於ける壓力の違ひに基因する力との和がFに等しい。そこで液體の表面張力をH,密度をρ,輪の內外兩半徑をa_1, a_2とし,引き上げられた液柱の高さをhとすれば,

$$2\pi(a_1+a_2)H+\pi(a_2^2-a_1^2)h\rho g=F$$

そこでこの式から表面張力Hを求めることができる。若し輪を十分薄く作れば第二項は省畧しても宜しい。

注意。この方法は金屬製の輪が液體で濡らされる場合についてのみ當てはまる。

表面張力の値は液面の清淨の度に關係する。今清淨な水の上に石松子の粉末を浮かせて置いて水面の一部に指を觸れるときは粉末は急に四方へ開く。若し又水面にアルコールの一滴を落せば,この現象は一層著しい。これはその部の水面がもはや純粹な水でなくなるから,表面張力が減ずる。從て周圍の清淨な水面が縮まうとするのに抵抗することができぬからである。これと同樣な現象は熱した物體又はエーテルで濡らした布を上記の水面に近ける場合にもまた見られる。これは水の溫度が上れば表面張力の減ずること,水がエーテル蒸氣に接するときの表面張力は,空氣に接するときの表面張力よりも小いことを示す。但し上記の場合石松子の役目は,ただ水面の運動をよく見せるだけのことに過ぎぬ。

樟腦の小片を水に浮かせると,それが飛び廻はることは,誰れもよく知つて居るが,これは次のやうに說明することができる。即ち樟腦の溶けた所では,表面張力が減る。そこで上記の理由で,その部分の水が脇へ引張られて,樟腦もまた一所に動く。所で樟腦の溶け

方が各部一樣でないから,小片を脇の方へ引く力が平均せぬ。從てその合力が時々刻々變るから,小片は飛び廻はる。

後に述べる通り,水平板上に靜止する液滴の高さ,水平板と液體の間に存在する空氣泡の厚さ,液體の中に細い管を立てたとき管中に上る液柱の高さ等は,何れも液體の表面張力に關係する。そこでこれ等の現象を觀測して,それから表面張力の値を求めることもできる。次に數種の液體について,表面張力の値を記す。

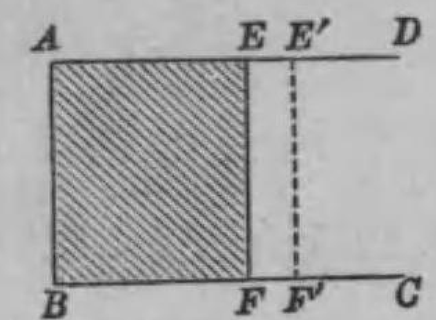
物質	表面張力(18°)	物質	表面張力(18°)
水銀	470 $\frac{\text{ダイン}}{\text{糎}}$	石油	30 $\frac{\text{ダイン}}{\text{糎}}$
水	77	アルコール	20
リスリン	66	エーテル	17

222. 表面張力に基因する潛狀エネルギー。 液體はその表面をできるだけ小くしようとするから,その表面積を增すためには仕事を要する(彈性膜を引き延ばすために仕事を要すると同じやうに)。然るにこの液體が元の表面積に戻れば,それだけの仕事を他に爲し得るのであるから,液面を增すために費した仕事に等しいだけのエネルギーは,潛狀の態として液體の中に貯へられる。かやうな潛狀エネルギーを通常は**表面エネルギー**[1]といふ。

1. Surface energy; Oberflächenenergie.

針金で$ABCD$といふ形の枠を作り,これに針金EFを附けて,その兩端は自由に滑り得るやうにする。今この枠にシャボン液の薄膜を張つたとすれば,針金EFは表面張力のために左方へ引かれる。所で薄膜は表と裏との兩面を有するから,針金EFに作用する表面張力の合力は,表面張力$H\times EF$の二倍に等しい。故に針金EFを$E'F'$の位置まで變位するために要する仕事をWとすれば,表面張力は液膜の厚さに關係せぬから,

第二百四十五圖



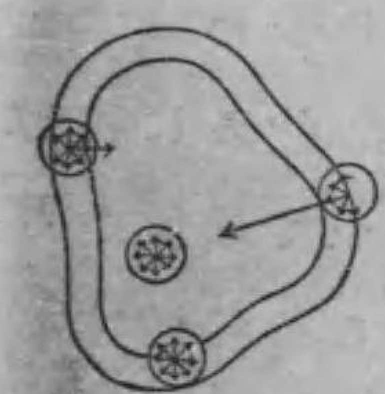
$$W=(\overset{T}{H}\times \overset{l}{EF}\times 2)\times \overset{d}{EE'}$$
$$=H\times(EF\times EE'\times 2)$$
$$=H\times(\text{面積}\,EFF'E'\times 2)$$
$$=H\times\text{薄膜表面積の增加}$$

この結果は液面の增加した部分が長方形である場合について得たものであるが,一般の場合(平面又は曲面)に於ても同樣に成り立つ。何となればこの場合には,液面の增加した部分をば澤山の小い長方形の集まりと見做すことができるから,その各々について上記の結果が適用される。そこでこの小い長方形の面積をδSとすれば,液體の表面積をS_1からS_2まで增すために要する全仕事Wは,

$$W=\Sigma H\delta S=H(S_2-S_1)$$

これによつて見れば,液體の表面を單位面積だけ增すために要する仕事,卽ち液體の單位表面積の有する潛狀エネルギーは表面張力の値に等しい。

前にも既に述べた通り,物體の分子間に作用する引力卽ち所謂分子力は,その間の距離が極めて小いときにのみ成り立つ。故に分子力の及ぶ最大距離をdとすれば,或る一つの分子Pに引力を及ぼす他の分子は,Pを中心とし,dを半徑とする極めて小い球面內に含まれたものだけである。從てこの球面外に在る分子は,中心の分子Pに對しては,全く何等の作用をも及ぼさぬ。かやうな考へ方にすれば,液體の內部に於ては,各分子の周圍には,他の分子が平均して一樣に分布されてあるから,各々の分子に作用する分子力の合力は零である。然るに表面に極めて近い所(表面からの距離がdよりも小い所),卽ち所謂表面層に在る分子は,分子力に關しての狀態が,內部の分子と違ふ。卽ちこれ等の分子は內部の方へ多く引かれて居る。從て事情の許す限り,內部へ引張り込まれようとする。その結果として,液體はできるだけ,その表面を小くしようとする。卽ち表面張力が現はれる。



第二百四十六圖

かやうに考へるときは,液面からの距離が,分子力の

達する最大距離 d 以内に在る分子だけが,表面張力を生ずることに與るので,それよりも内部に在る分子は何の關係もない。されぱシャボン膜のやうな薄い液層の厚さが$2d$よりも大い限りは,表面張力の値は液層の厚さには無關係であるが,層の厚さが$2d$よりも小くなれば,表面張力の値もまた減ずべきである。實驗上の結果によれば,シャボン膜の表面張力は,その厚さが追々減じて,一粍の凡そ一萬分の一に達するまでは一定して居るが,これよりも薄くなれば,急に減じ始める。この事實から見れば,シャボン液に於ける分子力の作用する最大距離は,一粍の凡そ五千分の一である。

又仕事の點から考へて見るに,液體の内部に於ては,分子力の合力はどこでも零であるから,内部の或る一點から,やはり内部に在る他の一點へ分子を移すためには,分子力に對しての仕事はいらぬ。然るに内部の分子を表面層に移すには,分子力に逆つて變位させるのであるから,そのために仕事を要する。換言すれば,液體の表面が增せば分子力に關する潛狀エネルギーが增す。

エネルギーの原理によれば,物體が安定な釣合にあるときは,それが有する潛狀エネルギーは極小になる。今この原理を液體の場合に適用して見るに,液體の有する潛狀エネルギーは,これを二つに分けることがで

きる。即ち第一は重力に基因するもの即ち重力的エネルギー第二は表面張力に基因するもの即ち表面エネルギー。今液體の一塊について考へて見るに,その形が變れば,一般に重心の位置及び表面積共に變るから,重力的エネルギーも表面エネルギーも變る。そこで液塊はこの兩者の和が極小になるやうな形を取ることになる。この特別な場合として,液量が餘程多ければ,表面エネルギーは重力的エネルギーに比べて少い。故に液塊のエネルギーを減ずるためには,重心の低くなる方が宜しい。そこで液塊は平らになつて薄く廣がる。このために表面エネルギーは增すけれども,重力的エネルギーの減る方が遙かに多いから。然るに液量が餘程少い場合に於ては,重力的エネルギーは表面エネルギーに比べて少いから,液塊のエネルギーを減ずるためには,表面積の小くなる方が宜しい。そこで液塊は球形になる。尙ほ又液體が自分と同じ密度の他の液體で圍まれて居るときには,重心の高下は重力的エネルギーの値に少しも影響を與へぬ。從てこの場合には,液量の多少に拘らず,液塊は常に眞の球形になる。この事は,水とアルコールとを適當な割合に混じて,オレーフ油と同じ密度の混合液を作つて,實驗することができる。

223. 液面の曲率と壓力の關係。 液體の自由面が平

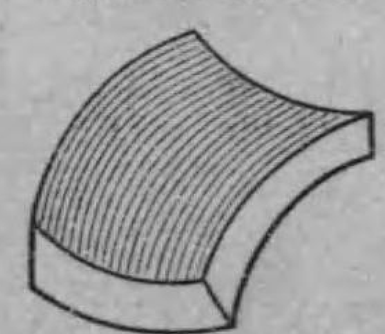
面なれば,液面のごく薄い層を隔てただけでは,内外の壓力に違ひはない。然るに液面が平面でないときには,液面のごく薄い層を隔てただけで,表面張力のために内外の壓力に違ひが起る。即ち壓力の値が液面の所で不連續な變化をする。何となれば液面上に極めて小い薄い層を取つて見るに,この層の周圍に作用する表面張力と,層の內外兩面に作用する壓力とが釣合つて居る。所で液面は曲つて居るから,この表面張力は液面に直角な方向の分力を有する。そしてこの分力は液面の曲つて居る方に向ふから,液面の凹側に於ける壓力は,凸側に於ける壓力よりも大い。即ち液面が甲圖のやうに外部へ向つて凸なれば,液面の內側に於ける壓力は外側に於ける壓力よりも大く,乙圖のやうに凹なれば小い。

第二百四十七圖

甲　乙

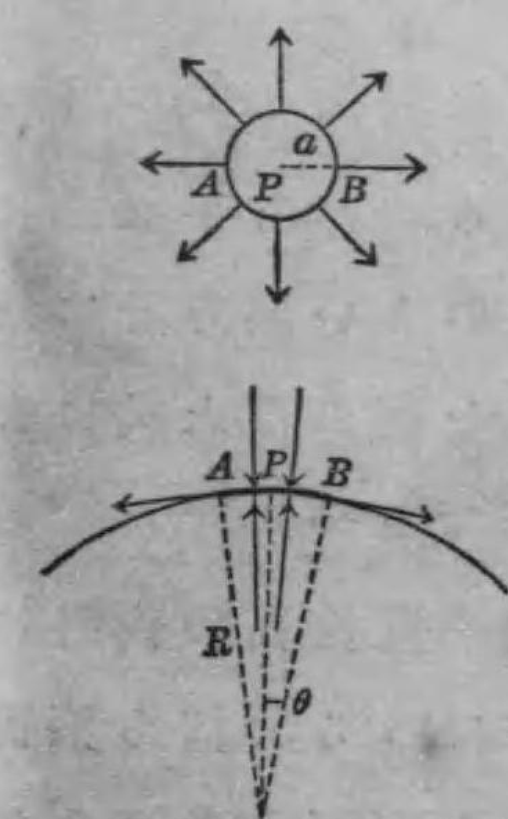
液面が第二百四十八圖のやうに鞍形を成すとき,即ち一つの方向には凸狀で,これに直角な方向には凹狀を成す場合に於ては,上記のやうな小い表面層を考へたとき,液面に直角な方向に於ける表面張力の分力は,一般には幾分か相消し,時には全く消し合ふ。從て液面の內外に於ける壓力の差は液

第二百四十八圖



面の曲り方が凡て同じ方へ向つて居る場合に比べて小く,時には零になることもある。されば液面の兩側に於ける壓力が相等しい場合に於ては,液面は平面であるか,或は鞍形でなければならぬ。色々の形の閉ぢた線(平面圖形に限らずに)を成すやうに針金を曲げて,これにシャボン膜を張るときは,膜の兩側に於ける壓力は何れも氣壓に等しいから,上記の條件に合ふやうな液面を實現することができる。但しこの場合に於ては,膜は表裏二面を有し,その間に液層が包まれては居るが,層が極めて薄いから膜の兩側に於ける壓力に關しては,曲率の影響が,單一な液面のときに比べて,二倍になるだけの違ひにしか過ぎぬ。

液面の一部を球面と見做し得る場合について,液面の內外兩側に於ける壓力の差 p を計算するために,液面上の一點 P を中心とする,極めて小い圓形の薄い表面層 AB を考へる。今 P に於ける液面の曲率半徑を R,小圓の半徑を a とし,この半徑が曲率中心に於て成す角を θ とすれば,θ は極めて小いから,$\sin\theta=\dfrac{a}{R}$ と置いて宜しい。そこで液面に直角な力を考へるときは,



第二百四十九圖

内外壓力の合力 $=\pi a^2 p$

表面張力の合力 $=2\pi a.H\sin\theta$

$$=\frac{2\pi a^2 H}{R} \qquad \because \ \sin\theta=\frac{a}{R}$$

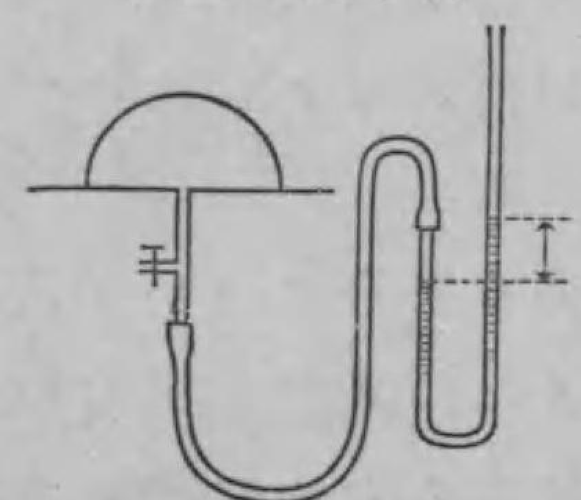
故に小圓層が釣合を保つためには,

$$\pi a^2 p=\frac{2\pi a^2 H}{R}$$

$$\therefore \qquad p=\frac{2H}{R}$$

この關係は,液體が小い滴として成り立つ場合,液體の中に小い氣泡が存在する場合等について適用される。

第二百五十圖

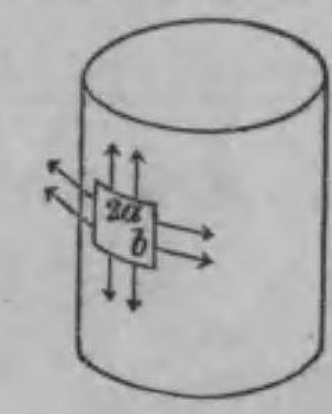


シャボン玉の場合に於ては,液體の膜は表裏兩面を有するから,膜の内外に於ける壓力の差pは,

$$p=\frac{4H}{R}$$

この關係を利用して,シャボン液の表面張力を測ることができる。即ち平板上に半球狀の泡を作り,その内部を感じのよい壓力計に連絡してpを測り,又別に泡の半徑Rを測れば,上式によつて表面張力Hを計算することができる。

上記球面の場合と同樣にして,圓壔狀液面の内外に於ける壓力の差を計算することができる。即ち液面上に於て,極めて小い長方形の薄い表面層を考へ,その一邊を母線に平行に取る。今この邊の長さをb,他邊



第二百五十一圖

の長さを$2a$,弧aが中心に於て作る角をθ,圓壔面の半徑をRとして,この液面層に働く力を考へるときは,

内外壓力の合力 $=2ab.p$

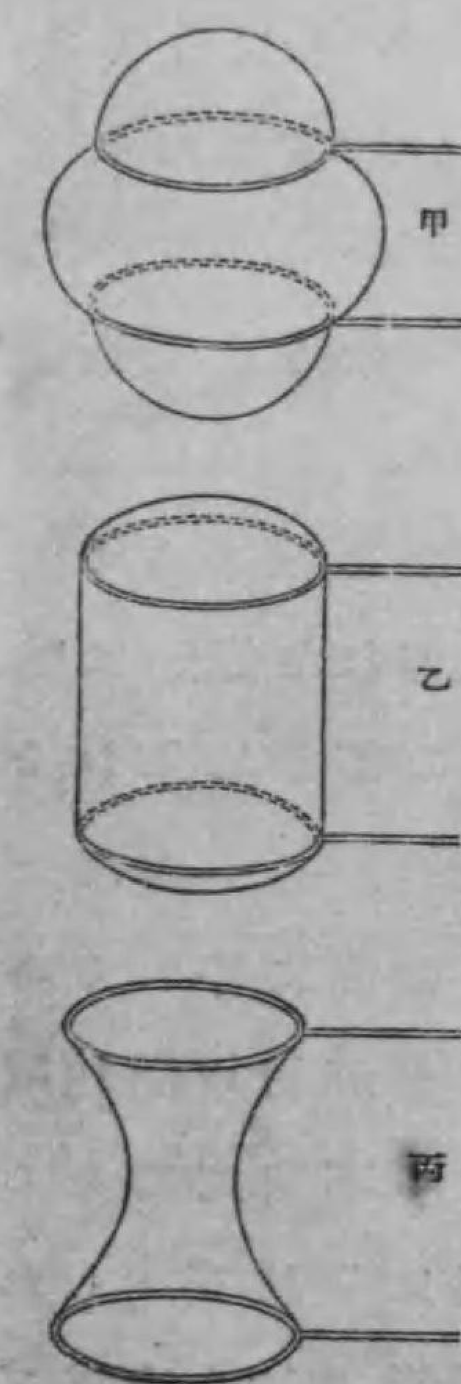
表面張力の合力 $=2b.H\sin\theta=\frac{2abH}{R}$

$$\because \ \sin\theta=\frac{a}{R}$$

故に釣合の條件から,

$$2abp=\frac{2abH}{R}$$

$$\therefore \qquad p=\frac{H}{R}$$



第二百五十二圖

液體が圓壔狀の膜として存在する場合には,膜の内外に於ける壓力の差pは,

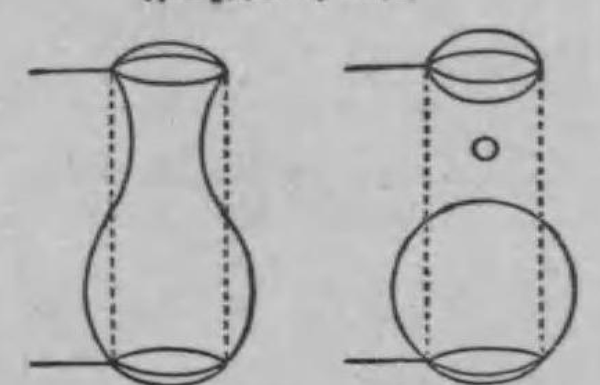
$$p=\frac{2H}{R}$$

同じ大さを有する二個の圓形の輪を相對立させ,その上にシャボン膜を圖のやうに附けるとき,内側の壓力が外側よりも相當に大ければ,泡の形は甲圖のやうになる。次に二つの輪を離して内側の壓力を追々減らして行けば,或る所に至つて兩輪の間で膜が圓壔狀になり,同時に輪の平面か

ら膨れ出した所では球狀になる(乙圖)。このとき內側の壓力はどこも同じいから球部の半徑は,上記の理によつて,圓壔部の半徑の丁度二倍に等しい。更らに兩輪を離して,內外の壓力が相等しくなれば,輪の所では膜は平面となり,兩輪の間では鞍形になる(丙圖)。

224. 圓壔狀液體膜の安定度。 上記のやうにして出來た圓壔狀の泡に於て,その長さが周圍よりも小い間は,泡は安定であるが,長さが周圍よりも大くなれば不安定である。卽ち第一の場合には,圓壔膜が少し變化してヒョウタン形になると,その表面積が增すことになる(證明は畧す)から,かやうな變化を妨げるやうに,表面張力が作用する。然るに第二の場合には,かやうな變化は却て表面積を減ずることになるから,くびれた部分は益くびれ,膨れた部分は益膨れる。そして遂には泡が大小二個の部分に切れ,その間に又ごく小い泡が生ずる。

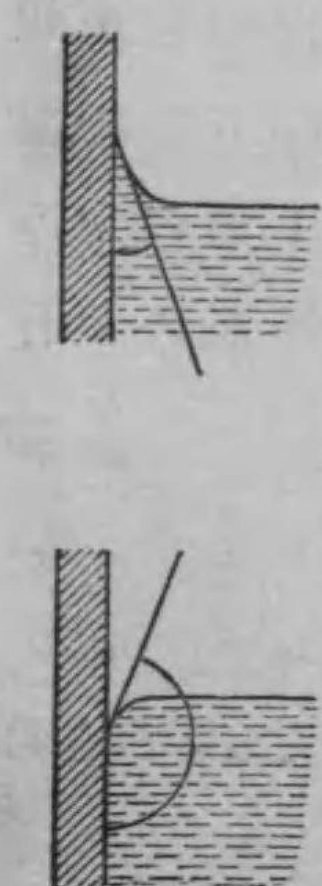
第二百五十三圖



水が小い孔から流れ出るとき,多くの滴に分れるのは,上記の理に基く。卽ち孔から出る水が初め圓柱狀を成すとするに,この水柱は細長いため不安定であるから,それが破れて大小の交互した滴に分れる。これ等の滴は,それが別々に離れるとき,球形にならうとするが,慣性のために球形の狀態を通り過ぎて,再び又戻る。そのために滴は球形に落ち付くまでの間に,一種の振動をしながら落下する。されば電氣の火花によつて,瞬時的の位置を見るときは,滴は第二百五十四圖のやうな規則正しい行列を成す。

第二百五十四圖

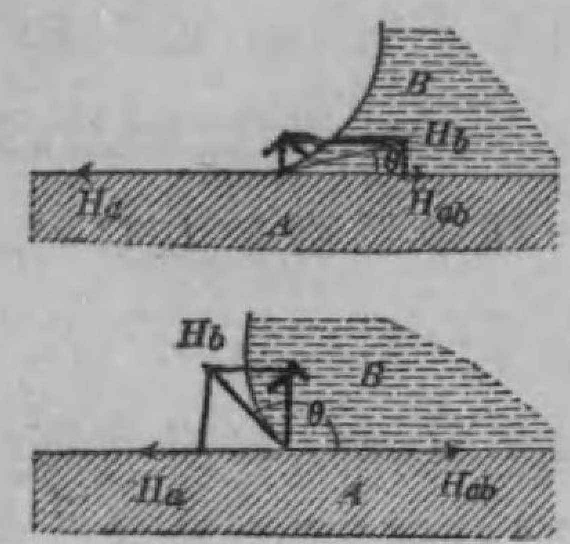
225. 接觸角[1]。 液體の表面が固體の表面に會する所に於て,各々の面に接する平面を書けば,その間の角度は,液體と固體の種類に應じて,それぞれ一定して居る。これを**接觸角**といふ。但しこの二平面が作る二つの角の中で,液體を包んで居る方の角を取ることが普通である。さうすれば,液體が固體を濡らす場合には,接觸角は銳角,濡らさぬ場合には鈍角である。例へば水とガラスの間では接觸角は凡そ9°,水銀とガラスの間では凡そ140°。尙ほ液體が固體を濡らす場合に於ては,接觸角は多くは零に近い。



第二百五十五圖

前に述べた通り,液體の表面に近い分子は,內部の分子と狀態が違ふことの結果として,表面張力が起るのであるから,この考を推し廣げれるときは,表面張力は

1. Angle of contact; Randwinkel.



第二百五十六圖

單に液體の自由面ばかりでなく,一般に二種の違つた物質が相接觸するときの境界面に於ても,また同樣に成り立つと考へて宜しい。されば固體の板 A の上に,液體 B の一滴を載せた場合に於ては,次のやうな三通りの表面張力がある。卽ち(1)固體 A と空氣との間の表面張力 H_a,(2) 液體 B と空氣との間の表面張力 H_b,(3)固體 A と液體 B との間の表面張力 H_{ab} がある。この三つは液面と板面との會する線に於て,圖のやうに作用する。そこで接觸角を θ とすれば,板面に平行な分力の釣合から,次の關係を得る。卽ち

$$H_{ab}+H_b\cos\theta-H_a=0$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{H_a-H_{ab}}{H_b}$$

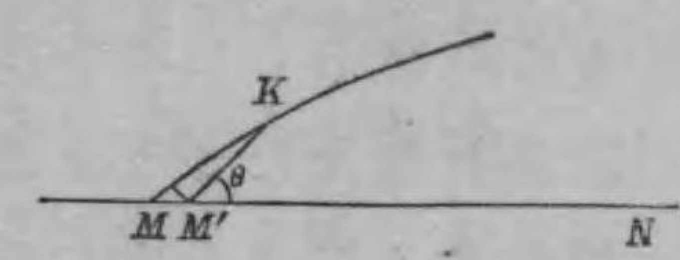
されば若し $H_a>H_{ab}$ なれば θ は鋭角,$H_a<H_{ab}$ なれば鈍角になる。

（注意。板面に直角な分力 $H_b\sin\theta$ は板の反抗力と釣合ふ。）

上記の結果は,次のやうにして,エネルギーの考へからも導き出すことができる。固體の上に液體の滴が靜止する場合に於て,MN を固體と液體との境界面とし,MK を液體と空氣の境界面の上での小い部分とす

る。今固體面と液面との會合線 M を δx (MK に比して小い)だけ變位して,MK が $M'K$ に移つたとすれば,このためにこの會合線の單位の長さに對して,固體と空氣との境界面積は δx だけ增し,固體と液體の境界面積は δx だけ減じ,液體と空氣の境界面積は $\delta x\cos\theta$ だけ減ずる。所で前記の表面張力 H_a, H_b, H_{ab} は固體と空氣,液體と空氣,固體と液體との接觸面が,單位面積毎に有する表面エネルギーである。故に上記の小變位のために生ずる表面エネルギーの增加 δE は,

第二百五十七圖



$$\delta E=(H_a-H_b\cos\theta-H_{ab})\delta x$$

滴の質量が餘り小くないとすれば,上記の小變位のために生ずる滴重心の變位は極めて小いから,重力的エネルギーの變化は起らぬと見做しても宜しい。從て δE は小變位のために液滴に生じた潛狀エネルギー(重力的及び表面エネルギーの和)の全變化を表はす。所で安定な釣合の場合に於ては,滴の有する潛狀エネルギーは極小である。從てどういふ小變位を滴に與へても潛狀エネルギーは變らぬ。故に

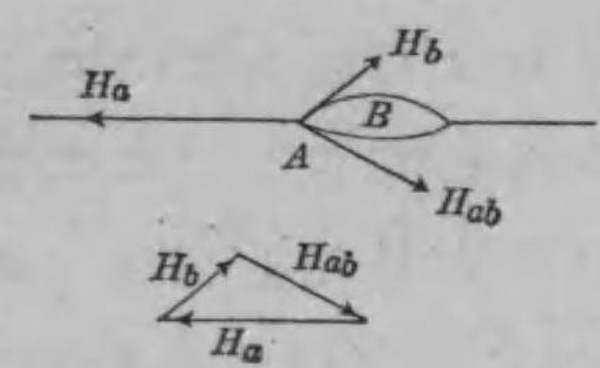
$$\delta E=0$$

卽ち
$$H_a-H_b\cos\theta-H_{ab}=0$$

$$\therefore \quad \cos\theta=\frac{H_a-H_{ab}}{H_b}$$

次にAといふ液體の面上に,これと混せぬ他の液體Bの一滴を載せた場合も,また同樣に考へることができる。但しこの場合には,液滴を載せたとき,兩液の接觸する面は,上方に向つて凹形を成し,兩液面の會する線に於て,三通りの表面張力が圖のやうに作用する。されば滴が玉になつたまま釣合を保つためには,この三力は三角形の三邊を成さねばならぬ。從てその中二力の和は第三力よりも大くなければならぬ。

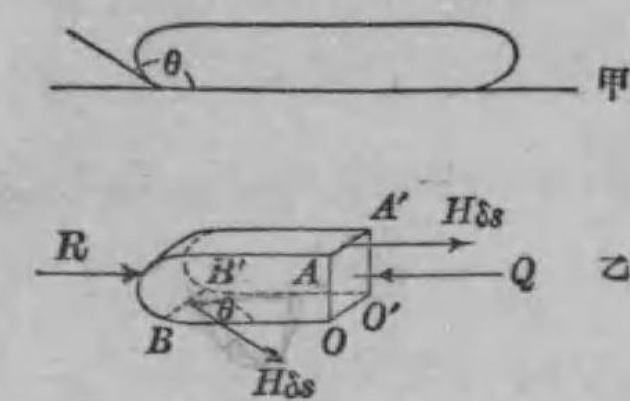
第二百五十八圖



實驗上の結果によれば,純粹な液體では,大抵の場合に於ては,$H_a>H_b+H_{ab}$となるので,上記のやうな三角形はできぬ。例へば清淨な水の上に油の一滴を落せば,油は玉にならないで,薄い膜となつて水面の上に廣がる。これは油滴の周圍に作用する水の大なる表面張力のために,滴が四方へ引き延ばされるからである。然るに水面が旣に油脂肪等で汚れて居るときには,表面張力が著しく減じて居るから,上記の三角形が作られることになつて,油は玉のまま釣合を保つことができる。水銀の上に水滴を落した場合もまた同樣で,水銀面が清淨なれば,水は薄い膜となつて廣がるが,汚れて居れば玉になる。

226. 水平板上に靜止する滴狀液體の高さ。 玆に一例として,水銀の大なる一滴を水平なガラス板の上に置いたとするに,滴は下圖甲に示すやうな形を成す。今滴の中心を挾み,極めて接近した二つの鉛直平行面によつて,この滴を切つたとすれば,カマボコ形の薄片が得られる。次にまたこの薄片をば,これに直角な鉛直面によつて二等分すれば,乙圖のやうな形になる。今この薄片の厚さをδsとすれば,この部分に作用する水平な方向の分力は,

第二百五十九圖



(1)　AA'に作用する表面張力$H\delta s$,

(2)　接觸角だけの傾きを以て,下方に向つてBB'に作用する表面張力の分力$H\delta s\cos\theta$,

(3)　平面部$AA'O'O$に作用する液體の全壓力Q,

(4)　曲面部$AA'B'B$に作用する全氣壓の分力R

である。故に釣合の條件によつて,

$$H\delta s-H\delta s\cos\theta-Q+R=0$$

所で滴が十分大くて,頂上の部分を平面と見做し得べき場合に於ては,その部分では,滴の表面層の內外兩側共に壓力は同じい。そこで滴の高さをhとし,氣壓をPとすれば,滴の內部に於ける壓力は,頂部Aに於けるPから,底部Oに於ける$P+\rho gh$に至るまで,一樣に增加す

る。故に

$$Q=\left(P+\frac{1}{2}\rho gh\right)h\delta s$$

又曲面部 $AA'B'B$ に壓力 P が一様に作用することは,その正射影 $AA'O'O$ に壓力 P が一様に作用するのと同じ結果になるから(第百八十九條を見よ),

$$R=Ph\delta s$$

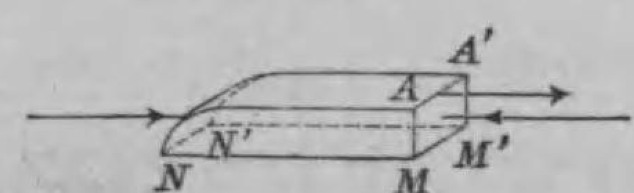
Q,R の値を上記の方程式に入れるときは,

$$H\delta s-H\delta s\cos\theta-\left(P+\frac{1}{2}\rho gh\right)h\delta s+Ph\delta s=0$$

$$\therefore\quad h=\sqrt{\frac{2H(1-\cos\theta)}{\rho g}}=2\sqrt{\frac{H}{\rho g}}\sin\frac{\theta}{2}$$

次に又上記の薄片を最大水平斷面によつて切つたとすれば,圖に示すやうに,$AMN-A'M'N'$ といふ部分が出來る。今 $AM=h'$ として,この部分に作用する水平分力の釣合を考へるときは,上記と同樣な方法によつて,次の結果を得る。

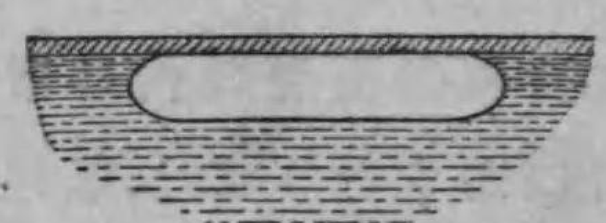
第二百六十圖



$$h'=\sqrt{\frac{2H}{\rho g}}$$

相當に大い空氣の泡が,水平板の下表面と液體との間に挾まれて居る場合に於ては,表面張力接觸角液體中の壓力等の間の關係は,上記液滴の場合を倒しまにしたときの關係と同じい。從て泡の厚さ及び最大水平斷面の位置に關しても,また同樣な結果が成り立つ。

第二百六十一圖

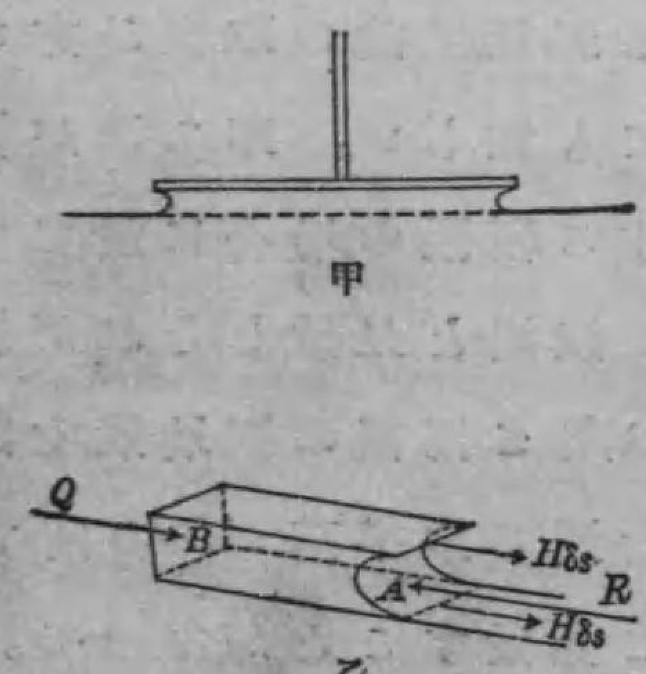


液滴及び空氣泡に關する上記の結果を應用し,h 又は h' を測つて接觸角又は表面張力を求めることができる。

227. 液面から平面板を引き離すために要する力。 板を水平にして,その下表面を液體に浸し,これを上方に引張るに,板が液面から離れようとする極限の場合に於ては,液面の鉛直斷面は下圖甲のやうになる。このとき板の下表面が,液面の水平部から h だけ高まつたとすれば,板の下表面に於ける壓力は,外部の壓力に比べて,ρgh だけ小い。從て板の面積を S とすれば,板を液面から引き離すために要する最小限の力 F は,

$$F=S\rho gh$$

板に附いて引き上げられた液體の部分をば極めて接近した二つの鉛直面で切つて薄片を作り,更にこれを直角に切つたとすれば,乙圖のやうな部分が出來る。今この薄片の幅を δs とし,これに作用する力の中,薄片に平行な水平力を考へると,次の通りである。但し茲では接觸角を零と見做す。



第二百六十二圖

(1) 薄片の曲面部 A の上下兩周邊に作用する表面

張力 $2H\delta s$,

(2)　薄片の曲面部 A に作用する全氣壓の分力 R,

(3)　薄片の平面部 B に作用する液體の全壓力 Q,

この三力は釣合をなすから,

$$2H\delta s - R + Q = 0$$

氣壓を P とすれば,前條と同じ理由で,

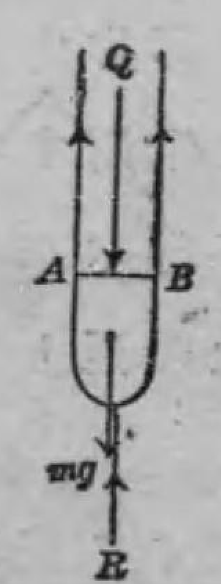
$$R = Ph\delta s, \qquad Q = \left(P - \frac{1}{2}\rho gh\right)h\delta s$$

この値を上記の式に入れれば,

$$h = 2\sqrt{\frac{H}{\rho g}}$$

從て　$$F = 2S\sqrt{\rho gH}$$

228. 細い管から落ちる滴。 細い管から,これを濡らす液體が滴となつて落ちるとき,この問題を精密に論ずることは非常に困難であるが,近似的の取扱ひ方としては,次のやうな假定をしても宜しい。即ち滴が管の下端から離れ落ちようとする極限の場合に於ては,管の外部に在る液體を釣合の狀態と見做し,それが管に接する部分は,管と同徑の圓壔狀を成し,又管の下端を通る水平面 AB の所で,液體が切れると見做すことができる。そこでこのとき AB 面の下方に在る液體即ち滴となつて落ちる部分の質量を m とし,管の半徑を r とすれば,この部分



第二百六十三圖

に作用する力は次の通りである。

(1)　重力 mg,

(2)　AB 面の周邊に作用する表面張力 $2\pi rH$,

(3)　外部から作用する全氣壓 R,

(4)　AB 面に作用する液體の全壓力 Q

故に釣合の條件によつて,

$$mg - 2\pi rH - R + Q = 0$$

所で AB 面の所に於ては,液中の壓力は,液面の曲率のために,外部の壓力よりも $\frac{H}{r}$ だけ大い。故に氣壓を P とすれば,

$$R = \pi r^2 P, \qquad Q = \pi r^2\left(P + \frac{H}{r}\right)$$

この値を上記の式中に入れれば,

$$m = \frac{\pi rH}{g}$$

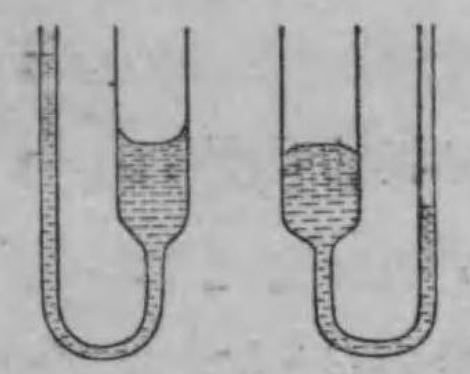
滴の落ちるのは全く動力學的の現象であるから,上記のやうな靜力學的の論法では,到底十分な結果は得られぬ。レーレー[1]の計算によれば,滴の質量は次の式で相當精密な程度まで與へられるといふ。

$$m = 3.8\frac{rH}{g}$$

229. 毛管現象[2]。液體が固體に接する所に於ては,液面は一般に水平ではなくして,曲面を成す。所で液體が固體を濡らす場合には,この曲面は液體の外部に向つて凹狀を成し,且つその部分は,固體から離れた所よ

1. Rayleigh.　　2. Capillary phenomena; Kapillarerscheinung.

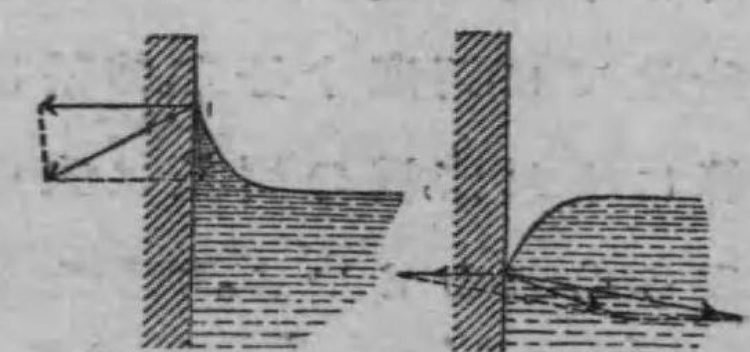
第二百六十四圖



りも高い。然るに液體が固體を濡らさぬ場合には,曲面は外部に向つて凸狀を成し,且つその部分は,固體から離れた所よりも低い。水とガラスとでは第一の場合,水銀とガラスとでは第二の場合になる。尚ほ又液體の高まり或は低くなることは,細い管の場合に於て,殊に著く現はれる。そこでこれ等の現象を總稱して毛管現象といふ。

抑も液體が固體を濡らすといふは,液體と固體の分子間に作用する引力卽ち附着力が,液體の分子どうしの間の引力卽ち凝集力よりも大いといふことである。故にこの場合には,固體に接近して居る液面の分子を

第二百六十五圖



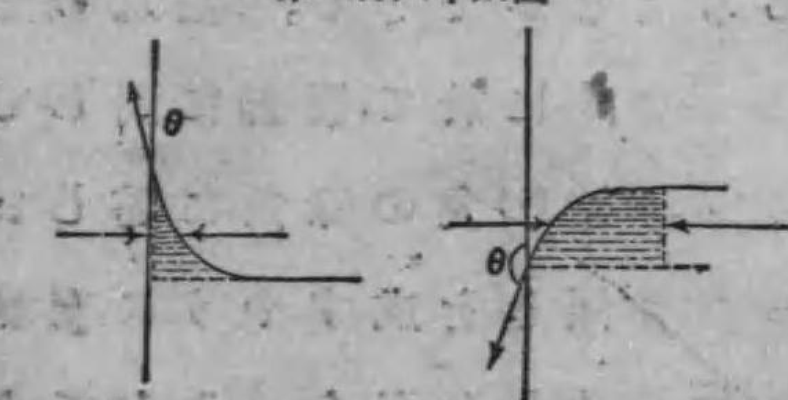
固體が引く力は,液體の殘りの部分が引く力よりも大い。從て兩者の合力は固體の實質內へ向ふ。所で液面はこの合力と直角を成すべきであるから,その部分の液面は高くなり,同時に又表面張力のために外部に向つて凹狀を成す。同樣に考へて,液體が固體を濡らさぬといふは,液體と固體の間の附着力が,液體の凝集力よりも小いといふことである。從て固體に接近

して居る液面の分子を,固體が引く力と,液體の殘りの部分が引く力との合力は,液體の實質內へ向ふ。故にその部分の液面は低くなり,且つ外部に向つて凸狀を成す。

固體に接する液面の高まる所では,外部に向つて凹狀を成し,低くなる所では凸狀を成すことは,次のやうな考へ方からでも分る。卽ち液面が曲面を成すときは,前に述べた通り,凹面側の壓力は常に凸面側の壓力よりも大い。又流體靜力學の原理から分る通り,高まつて居る液體內の壓力は,液面の水平な部分の壓力卽ち外部の壓力よりも小い。この二つの條件が同時に成り立つためには,液面が固體に接して高まつて居る部分は,外部に向つて凹狀を成さねばならぬ。同樣にして,液面が固體に接して低くなつて居る部分は,外部に向つて凸狀を成さねばならぬ。

液體が鉛直な平板に接するとき,板面の所でそれが

第二百六十六圖



上る高さ又は下る深さをhとし,接觸角をθとすれば,第二百二十六條に於て,液滴又は空氣泡の厚さを求めたと全く同樣の方法によつて,

$$h=\sqrt{\frac{2H(1-\sin\theta)}{\rho g}}$$

であることを容易に證明することができる。

この場合板面に近い所の液面の曲率は,次のやうにして求めることができる。今液體が板を濡らす場合を考へるとして,液面上の或る一點Gに於ける曲率半徑をRとし,これと同じ高さに在る液體中の壓力をp,氣壓をPとすれば,

$$p=P-\frac{H}{R}$$

又水平な液面部(板から離れた所の液面)からGまでの鉛直距離をxとすれば,

$$p=P-\rho gx$$

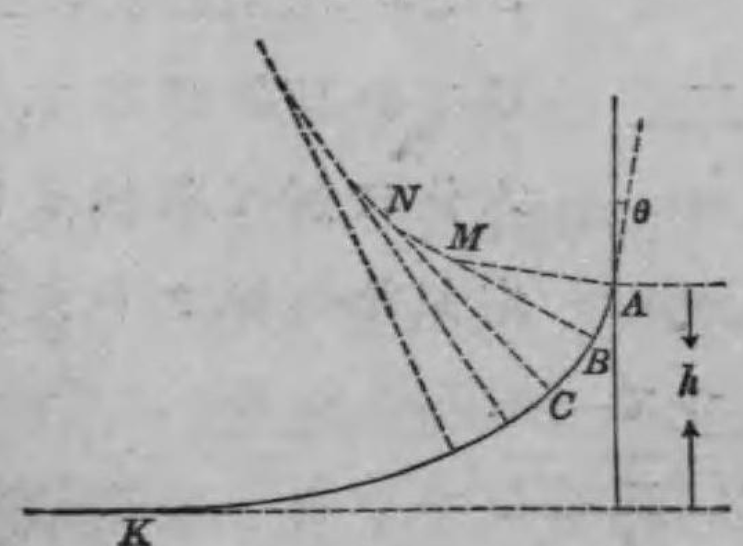
故に
$$R=\frac{H}{\rho g}\cdot\frac{1}{x}$$

されば液面の曲率半徑は,水平な液面部からの高さに逆比例する。

同様に液體が板を濡らさぬ場合に於ては,液面の曲率半徑は,水平な液面部からの深さに逆比例する。

上記の結果に基いて,板に近い所の液面の形を,次のやうにして,圖式的に求めることができる。任意の點Aに於て,板面に對して接觸角の餘角に等しい傾きを成すやうに,直線AMを引く。そして上記の式から求めた$x=h$に對應する曲率半徑R

第二百六十七圖

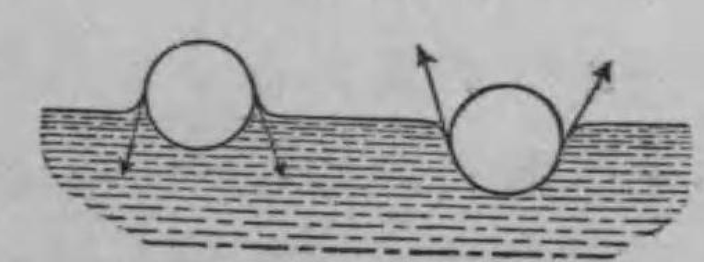


を求め,これに等しくAMを取り,Mを中心として,MAを半徑とする小い弧ABを畫く。次にBに對應する曲率半徑を求め(Bに對應するxの値から),これに等しくBNをBM線上に取り,Nを中心として,NBを半徑とする小弧BCを畫く。追てこのやうにして,遂に曲率半徑が無限大になり,從て上記のやうに畫いた弧が水平な直線になる所Kに至る。かやうにして得た曲線AKは板に直角な液面の鉛直斷面を示す。

液體が板を濡らさぬ場合に於ても,また同様な方法で,液面の形を作圖することができる。

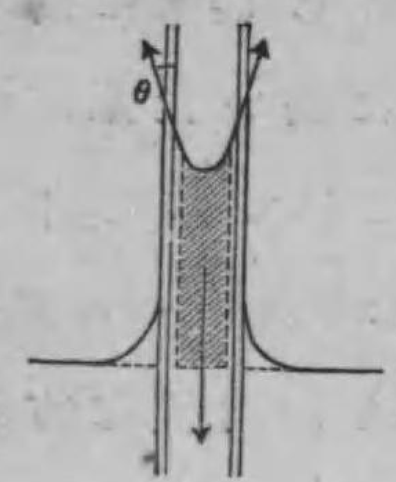
水に濡れる物體が水面に浮んで居るときには,物體に接する水面は凹狀を成して高まる。從てその周圍に作用する表面張力は,下方に向つて分力を有するから,物體を沈めることを助ける。然るに水に濡れぬ物體のときには,これに接する水面は凸狀を成して低くなる。從てその周圍に作用する表面張力は,上方に向つて分力を有するから,物體を浮かせることを助ける。されば物體の體積が表面に比べて割合に小いときには,その密度が水より大い場合でも,それが水に濡れぬやうにしてあれば,水上に浮んで居ることができる。例へば細い針金に蠟を塗つて,靜かに

第二百六十八圖



水の上に載せるときは,針金は沈まないで浮いて居る。

230. 毛管の中に於ける液體の上昇及び下降。 液體の中に細い管を立てるとき,それが濡らされる場合には,管の中に液體が上る。このとき管の内壁と液面とが會する境界線の所に於て,單位の長さにつき表面張力Hが,壁面とθだけ傾いた方向に作用する。されば管の半徑をrとすれば,この表面張力の合力は$H\cos\theta.2\pi r$に等しい。又液體の密度をρ,管の中に上つた液柱の高さをhとすれば,その重さは$\pi r^2h\rho g$に等しい(液柱の曲面部の體積は液柱の全體積に比して小いから,これを省畧する)。所でこの場合,液面の表面張力がこの液柱の重さを支へて居るから,



第二百六十九圖

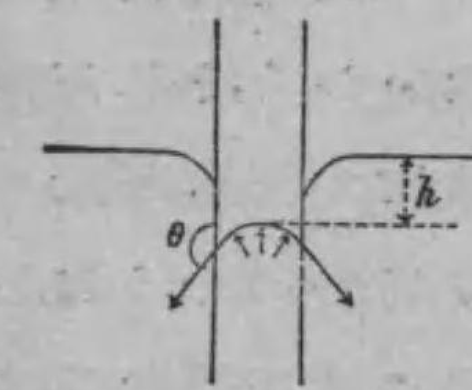
$$H\cos\theta.2\pi r=\pi r^2h\rho g$$

$$\therefore\quad h=\frac{2H\cos\theta}{\rho g}.\frac{1}{r}$$

これによつて見れば,管の物質及び液體が與へられて居れば,管中に上る液柱の高さは管の半徑に逆比例する。

上記のやうな場合に,液體が管を濡らさぬときには,管内の液面は下る。この場合には管内の液面に作用する表面張力のために,その中の液體が壓力に逆つて押し除けられて居ると考へて宜しい。そこで管内に

第二百七十圖



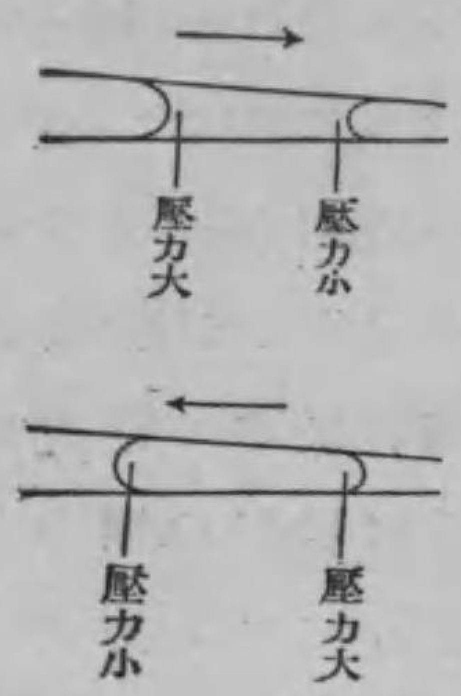
於て液體の下つた深さをhとするに,管の半徑はhに比して小いから,管内液體の曲面部に於ける高さの違ひを省畧すれば,曲面部の表面層の内側に於ける壓力は,外側の壓力よりも$h\rho g$だけ大い。故に内外の壓力差のために,表面層を上方へ押し上げようとする力は$\pi r^2h\rho g$に等しい。これが曲面部の周邊に作用する表面張力と釣合ふ。從て前と全く同じ形の式が成り立つ。即ち管の中で,液體の下る深さは管の半徑に逆比例する。

二枚の平行な板を接近して液體の中に立てるとき,それが濡れるならば,兩板の間では液體が上り,濡れぬならば下る。今板に直角で,單位距離だけ離れた二つの鉛直面で,板を切つたと假定し,その間に含まれた液體について考へるとするに,板の間の距離をd,液體の上り又は下つた距離をhとすれば,前と全く同様の論法によつて,

$$2H\cos\theta=dh\rho g$$

$$\therefore\quad h=\frac{2H\cos\theta}{\rho g}.\frac{1}{d}$$

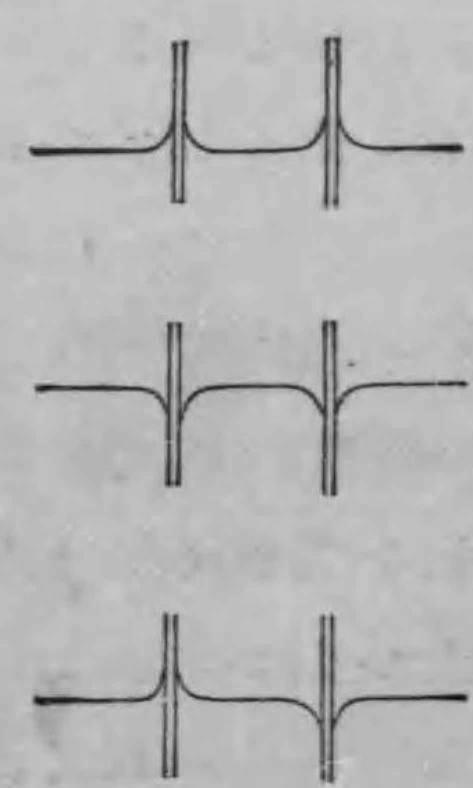
＊圓錐狀の細い管の中に液體の一滴を入れるとき,液體が管を濡らすときには,滴は管の太い方から細い方へ動き,濡らさぬときには,細い方から太い方へ動く。



第二百七十一圖

何となれば,管の細い所ほど,液面の曲率が大いから,それが液中の壓力に及ぼす影響が大い。されば濡らす場合のやうに,液面が外部に向つて凹狀を成すときには,液體中の壓力は,管の太い部分の方が細い部分よりも大い。從てこの壓力の差のために,管内の滴は太い部分から細い部分へ動く。濡らさぬ場合もまた同樣に説明することができる。

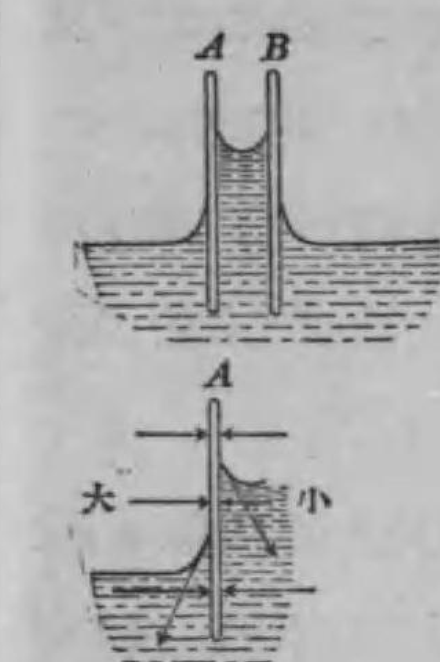
231. 毛管現象に基因する引力及び斥力。 液體の上に二物體が相接近して浮んで居るとき若し兩方共に濡れるか,或は兩方共に濡れぬならば,その間に引力がある。然るに一方が濡れて,他が濡れぬならば,その間に斥力がある。今事柄を簡單にして,この理を説明するために,二枚の平行な板を液體の中に立てた場合について考へて見る。



第二百七十二圖

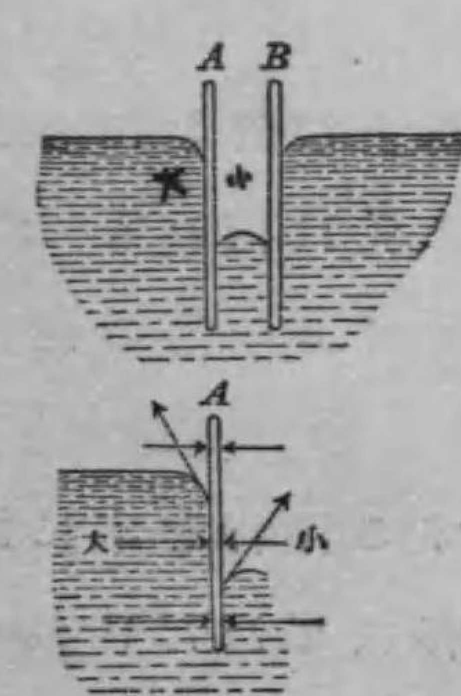
各板の兩側に於ける曲面が同じ高さになる位の程度に,兩板が離れて居れば,各板に作用する力は釣合をなすから,兩板の間には引力も斥力もない。

然るに第二百七十三圖のやうに,兩方共に濡れる板で,且つその間の液面が外側よりも高まる場合に於ては,各板に作用する力は釣合はぬ。即ちその一板について考へるに,兩側共に空氣に接する部分及び兩側共に液體に接する部分では,兩側に於ける壓力は相等しい。



第二百七十三圖

然るに外側が空氣,内側が液體に接する部分では,外側の壓力は内側の方よりも大いから,板は内側の方へ押される。從て兩板は互に相近く。但しこの場合,板の兩側に作用する表面張力は,その水平分力が大さ等しく,方向反對になるから,各板に廻轉運動を與へようとすることにはなるが,水平の運動に關しては,何の効果もない。

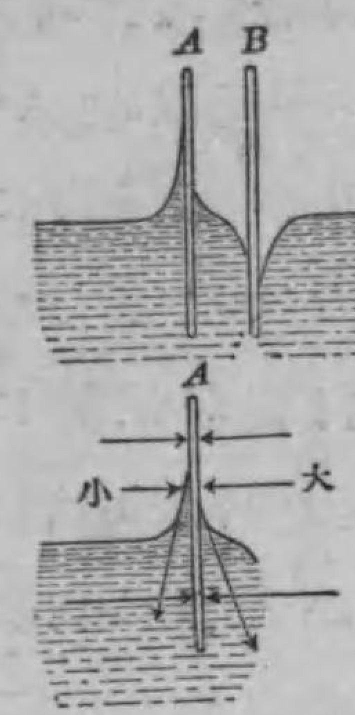


第二百七十四圖

次に第二百七十四圖のやうに,兩方共に濡れぬ板で,且つその間の液面が外側よりも低くなる場合に於ても,上記と同樣なことが成り立つ。即ち各板に於て,外側が液體,内側が空氣に接する部分では,外側の壓力が内側よりも大いから,兩板は互に相近く。

第二百七十五圖のやうに,兩板の中一方は濡れて他

は濡れぬとき,その間に平らな液面が出來ぬ位の程度に,兩板が接近して居る場合には,濡れる方の板では,內側の液面は外側ほどに上らぬし,濡れぬ方の板では,外側ほどには下らぬ。そこで何れの板に於ても,片側が液體他の側が空氣に接する部分では,外側の壓力は內側の方よりも小い。從て兩板は互に相遠ざかる。



第二百七十五圖

よく洗つたコルク球は水に濡れるが,蠟又は煤を塗つたコルク球は濡れぬ。そこでかやうな二種の球を水上に浮かせて,上記のことを實驗的に見ることができる。

232. 練習問題。

1. 同一液體の三薄膜が同一直線上に會したまま,安定な釣合を保つためには,その間の角は何れも 120° に等しいことを證明せよ。(ビール,サイダー等の泡について,かやうな場合が起る)。

2. 半徑 4 粍のガラス管部を有する浮秤を水に浮ばせるときは,毛管現象のために,浮秤はどれだけ多く沈むか。但し水の表面張力を $74\dfrac{\text{ダイン}}{\text{糎}}$ とし,接觸角は零と見做す。　答。0.38 糎。

3. 非常に接近した二枚の平行平板の間に,液體の薄い層が存在するときは,自由液面を層の周邊に直角に切つた斷面は圓と見做し得ることを證明せよ。

4. 液體が鉛直壁に沿うて高まり或は低まるとき,壁に作用する水平力は,液面が壁に直角に接すると假定したときの値に等しいことを證明せよ。

5. 半徑 r, 表面張力 H といふ,球狀液體の表面層の內側に於ける壓力は,外側の壓力よりも $\dfrac{2H}{r}$ だけ大いことを,假想仕事の原理によつて證明せよ。

解。 液面上に於て小面積 δS を取り,これを底面とし,球の中心を頂點とする細長い錐體を考へる。今假りに球の半徑が δr だけ增したとすれば,$\dfrac{\delta r}{r}$ の二乘を省畧して,

$$\text{錐體底面積の增加}=\delta S\left(\frac{r+\delta r}{r}\right)^2-\delta S=\frac{2\delta S\delta r}{r}$$

故に

$$\text{表面張力のした仕事}=-H.\frac{2\delta S\delta r}{r}$$

內外兩側に於ける壓力の差を p とすれば,底面層に作用する壓力の差は $p\delta S$ に等しいから,

$$\text{壓力の差}p\text{のした仕事}=p\delta S.\delta r$$

故に假想仕事の原理によつて,

$$p\delta S\delta r-H.\frac{2\delta S\delta r}{r}=0$$

$$\therefore\quad p=\frac{2H}{r}$$

6. 平板上に靜止する半球狀のシャボン泡は,どう

$\frac{4H}{r}$,

p.

いふ力で釣合に保たれて居るか。この泡の釣合から考へて,泡内の壓力は外部よりも $\frac{4H}{r}$ だけ大いことを證明せよ。但し r は泡の半徑,H は表面張力。

解。泡の內外に於ける壓力の差は半球を廣げようとし,半球の周邊部(泡が板に接觸する部分)に作用する表面張力は半球を縮めようとするために,泡が釣合に保たれる。そこで內外の壓力の差を p とすれば,半球に作用する壓力の合力は $\pi r^2 p$ に等しい。又上記の表面張力は泡の內外兩面共に作用するから,その合力は $2\pi rH\times 2$ に等しい。故に釣合の條件から,

horizontal components

$$\pi r^2 p-2\pi rH\times 2=0 \qquad \therefore \qquad p=\frac{4H}{r}$$

7. 二枚の水平な平行ガラス板の間に水の薄層を挾むときは,兩板の間に作用する引力はいくらか。但し水の表面張力を H,水層の厚さを d,その面積を S とし,水とガラスの間の接觸角は零と見做す。

答。$\frac{2HS}{d}$

解。水の薄層の周邊部に於て,小部分を取つて考へるときは,これを半徑 $\frac{d}{2}$ の圓壔の一部と見做しても宜しいから,水層中の壓力は外部の壓力よりも $\frac{2H}{d}$ だけ小い。故に兩板の間に作用する引力は $\frac{2HS}{d}$。

8. 二枚の水平な平行ガラス板の間に1瓦の水銀を挾み,この兩板を押しつけて水銀が半徑5糎の圓形

薄層をなすやうにするためには,どれだけの力を板に加へればよいか。但し水銀の表面張力を $450\frac{\text{ダイン}}{\text{糎}}$ とし,水銀とガラスの間の接觸角を 140° とする。

答。59瓩。

—物理學上卷 終り—

索　引

あ

い（ゐ）

う

え (ゑ)

お (を)

か (くゎ)

き

く

け

こ

さ

し

す

せ

そ

た

ち

つ

て

と

な

に

ね

の

は

み

む

め

も

や

ゆ

ら

り

れ

わ

(終り)

物理學上卷

（正誤表）

ページ	行	誤	正
40	下から 7	定て	て定
57	下 10	正形	正方形
244	上 9	$\cos = 0\,\theta$	$\cos\theta = 0$
256	下 5	は'	は,
296	上 8	$P\,\delta s,)$	$P)\,\delta s,$
同	同	$Q\,\delta s)$	$Q)\,\delta s$
333	下 3	粘着	附着
同	下 2	粘着	附着
441	上 11	わけは	わけは,
同	上 12	慣,性	慣性
同	下 9	關しては	關しては,
同	下 8	主,として	主として
443	上 8	かうやな	かやうな
445	上 1	運動	運動量
447	上 8	示する	示す
468	下欄外	Lagmuuir.	Langmuir.
481	上 6	流體	液體
509	下 7	重力	(重力
513	上 2	測つて接,	測つて,接

版權所有

編者	發行者

編者　川北　清

東京市日本橋區大傳馬町二丁目十六

發行兼印刷者　內田作藏

製版者　瀨下三郎

大正十四年六月十五日印刷
大正十四年七月三日發行

物理學上卷奧附
定價金六圓

發行所
內田老鶴圃
東京市日本橋區大傳馬町二丁目
振替東京一二一四六番
電話浪花一三三五番

（行政學會印刷所印刷）

終