郝爾奈特高等代數學

漢　譯

郝爾　愛特

高等代數學

HIGHER ALGEBRA

BY

H. S. HALL, M.A., AND S. R. KNIGHT, B.A.,

李士奇譯

北平科學社印行

漢譯 郝爾 愛特 高等代數學

Higher Algebra By H. S. Hall, M.A., And S. R. Knight, B.A.

全一册　　實價 洋宣精裝二元 報紙精裝一元六角

譯者　李士奇

發行人　高佩玉

發行兼印刷者　北平科學社

社址　北平德勝門內菓子市十號

電話　東局二九九三

電報掛號　四四三零

中華民國二十四年一月初版

中華民國二十六年七月再版

原序大意

一. 本書爲前著初級代數之續，首數章於比，比例，變法及級數以更詳盡之研究，並加入若干不便初學之定理及例題.

二. 本書根據教學經驗，使正文與例題並重，皆求其精深詳盡，敘述透澈.

三. 吾人之目的爲於本書內討論所有重要部分，但爲事實所限，後數章僅能示其綱要，而指出重要專著，以備有志深究者之參考.

四. 排列與組合一章採用溫特渥玆教授選擇與機會書內之証法，以著者年來教授之經驗，此實較通常所用者便於初學.

五. 級數之收斂與放散之研究向爲初學者所苦，本書於此特增篇幅，力求詳盡，並增入極限值與消失分數兩章以使其有趣而易解.

六. 本書級數求和法一章，特重逐差法之重要應用，第 395，396 兩節有限逐差公式之証法著者自信爲獨創，由此可推出若干向爲他書忽略極饒興趣之各種級數.

七. 無行列式及其運用之知識於立體解析幾何之學習殊爲困難，故於本書第三十三章與以初步之討論，以爲學者應用及深造之準備.

八. 末章含方程式論一書內所有適於初學極有用之命題，第三十五章內之重要部分可提至較難之數節之前讀之.

九. 本書各章幾乎皆能獨立，故可依教者之指導變其順序. 其標以星號 * 者可於再讀時讀之.

十. 書後雜題三百爲三版時加入，大半選自英國獎學金考試用題及上議院公報，足以例釋各重要主題並代表英國各重要大學及高等文官考試之試題.

譯者叙

年來不重外文，而有志於數學之友好，多以完善之漢文本大代數見問，惟此種書極少，雖有數種類皆失之淺簡，不足以滿有志於此者之慾望，於是乃決定譯述本書以應急需．本書為英國劍橋大學名教授郝爾愛特二氏所著，其包羅之豐富，選材之精審，例證之週密，命題之切當，大非他書所及，定能滿足同好，斷無疑義．惜譯者學識淺陋，又成於疾病倉促之中，遺誤之處，自所難免，尚望明達不棄，有以教之，以備次版更正為幸．

安平李士奇廿三年冬於北平．

目　錄

第一章　比　　　　頁

第二章　比例

第三章　變數法

第 四 章 等差級數

第 五 章 等比級數

第 六 章 調和級數.與前諸級數有關之定理.

第七章　紀數法

第八章　根數及虛數

第九章 二次方程式論

第十章　雜方程式

第十一章　排列及組合

第十二章 數學歸納法

第十三章 二項式定理.指數爲正整數者

第十四章 二項式定理.指數爲任意數者

第十五章　多項式定理

第十六章　對數

第十七章 指數級數及對數級數

第十八章 利息及年金

第十九章 不等式

第二十章 極限值及消失分數

第二十一章 級數之收斂及發散

第二十二章　未定係數

第二十三章　部分分數

第二十四章　循環級數

第二十五章　連分數

第二十六章　一次不定方程式

第二十七章　循環輾轉分數

第二十八章　二次不定方程式

第二十九章　級數之和

第三十章　數　論

第三十一章　連分數通論

第三十二章　或能率

第三十三章 行列式

第三十四章 雜定理及雜例題

第三十五章 方程式論

高等代數學

第　一　章

比

1. 定義. 比為一量與他一同類量之關係，此關係由求一量為他量之幾倍或幾分之幾得之.

A 與 B 之比常寫為 $A:B$. A,B 二量稱為比之兩項. 首項稱為前項，次項稱為後項.

2. 求 A 為 B 之幾倍或幾分之幾之方法為以 B 除 A；故 $A:B$ 常以分數 $\frac{A}{B}$ 表之，此為最適當之表示法.

求二量之比，須先化二量為同單位. 如 £2 與 15s 之比乃分數 $\frac{2\times 20}{15}$ 或 $\frac{8}{3}$.

註. 凡比均表一量含他一量之倍數，故為不名量.

3. 由分數定律

$$\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb},$$

故 $a:b$ 等於 $ma:mb$；即以同量乘或除比之前後項，比之值不變.

4. 欲知二或二以上諸比之大小，可化爲同分母之同值分數而比較之．例如，設 $a:b$ 及 $x:y$ 爲二比．今$\frac{a}{b}=\frac{ay}{by}$，及$\frac{x}{y}=\frac{bx}{by}$；故 $a:b$ 之大於，等於，或小於 $x:y$，全視 ay 之大於，等於，或小於 bx 而定．

5. 二分數之比可以二整數之比表之．如$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$可以$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$，或$\frac{ad}{bc}$表之；故等於 $ad:bc$．

6. 若比之一項或二項爲不盡根，則不能求出二整數以恰表其比．如$\sqrt{2}:1$ 不能以任何二整數恰表之．

7. 定義． 設任二量之比能恰以二整數之比表之，則二量稱爲可通約量；反之則稱爲不可通約量．

二不可通約量之比，雖不能求出二整數以恰表之，但恒可求出二整數，使其比與所求者之差小至適意之程度．

如
$$\frac{\sqrt{5}}{4}=\frac{2.236067\cdots\cdots}{4}=.559016\cdots\cdots$$

故
$$\frac{\sqrt{5}}{4}>\frac{559016}{1000000}\text{而}<\frac{559017}{1000000};$$

由是 $559016:1000000$ 及$\sqrt{5}:4$ 二比間之差小於 $.000001$．若再多增小數位，則可得更近之近似值．

8. 定義． 若將諸比之同值分數相乘；或將諸前項相乘爲新前項，後項相乘爲新後項，則得諸比之複比．

例．　求下三比之複比：

$$2a:3b,\quad 6ab:5c^2,\quad c:a.$$

解．　所求比$=\dfrac{2a}{3b}\times\dfrac{6ab}{5c^2}\times\dfrac{c}{a}$

$$=\frac{4a}{5c}.$$

9．定義． $a:b$ 及其自身之複比爲 $a^2:b^2$，名曰 $a:b$ 之二乘比．仿此 $a^3:b^3$ 名曰 $a:b$ 之三乘比．又 $a^{\frac{1}{2}}:b^{\frac{1}{2}}$ 名曰 $a:b$ 之二次根比．

例．(1) $2a:3b$ 之二乘比爲 $4a^2:9b^2$．

(2) $49:25$ 之二次根比爲 $7:5$．

(3) $2x:1$ 之三乘比爲 $8x^3:1$．

10．定義． 視比之前項之大於，小於，或等於其後項，名之曰優比，劣比，或等比．

11．定理． 若加同量於比之兩項，則原比爲優比者，比值因之減小，爲劣比者，比值因之增大．

證．設原比爲$\dfrac{a}{b}$，而 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 爲兩項各加 x 後所成之新比．

$$因\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ax-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)};$$

而式內 $a-b$ 之爲正或負，全視 a 之大於，或小於 b 而定．

$\therefore$　若$a>b$，　　則 $\dfrac{a}{b}>\dfrac{a+x}{b+x}$；

若$a<b$，　　則 $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+x}{b+x}$；

本命題由此證明．

同法可證，若由比之兩項各減同一量，則原比爲優比者，比值增大，爲劣比者，比值減小．

12． 當二比或多比相等時，由以簡單符號表各比，可證明甚多有用之命題．

下列諸重要定理之證明，可說明進行之方法.

定理一. 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$,

則諸比各 $=\left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}$,

其 p, q, r, n 可為任何量.

證. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots=k$;

則 $a=bk$, $c=dk$, $e=fk$, $\cdots$;

而 $pa^n=pb^nk^n$, $qc^n=qd^nk^n$, $re^n=rf^nk^n$, $\cdots$;

$$\therefore \frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=\frac{pb^nk^n+qd^nk^n+rf^nk^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}=k^n;$$

$$\therefore \left(\frac{pa^n+qc^n+re^n+\cdots}{pb^n+qd^n+rf^n+\cdots}\right)^{\frac{1}{n}}=k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\cdots$$

由與 p, q, r, n 以不同之值，可推出此一般命題之若干特殊情形；此亦等特殊情形可用同法單獨證明之. 例如,

設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\cdots\cdots$

則諸比各 $=\frac{a+c+e+\cdots\cdots}{b+d+f+\cdots\cdots}$;

此結果時常用之，故應注意其下之口述形式:

若一串分式相等，則其中各分數皆等於所有分子之和除以所有分母之和.

例1. 設$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$, 試證

$$\frac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\frac{ace}{bdf}.$$

證. 設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$,

於是 $a=bk$, $c=dk$, $e=fk$;

$$\therefore \frac{a^3b+2c^2e-3ae^2f}{b^4+2d^2f-3bf^3}=\frac{b^4k^3+2d^2fk^3-3bf^3k^3}{b^4+2d^2f-3bf^3}$$

$$=k^3=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}$$

$$=\frac{ace}{bdf}.$$

例2. 設$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$,試證

$$\frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

證. 設$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$, 則 $x=ak$, $y=bk$, $z=ck$;

於是 $$\frac{x^2+a^2}{x+a}=\frac{a^2k^2+a^2}{ak+a}=\frac{(k^2+1)a}{k+1};$$

$$\therefore \frac{x^2+a^2}{x+a}+\frac{y^2+b^2}{y+b}+\frac{z^2+c^2}{z+c}=\frac{(k^2+1)a}{k+1}+\frac{(k^2+1)b}{k+1}+\frac{(k^2+1)c}{k+1}$$

$$=\frac{(k^2+1)(a+b+c)}{k+1}$$

$$=\frac{k^2(a+b+c)^2+(a+b+c)^2}{k(a+b+c)+a+b+c}$$

$$=\frac{(ka+kb+kc)^2+(a+b+c)^2}{(ka+kb+kc)+a+b+c}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}{x+y+z+a+b+c}.$$

13. 若方程式對於某數量爲齊次方程式,則此數量可以與之成比例之任何他數量代之. 例如,方程式

$$lx^3y+mxy^2z+ny^2z^2=0$$

爲 x, y, z 之齊次式. 設 α, β, γ 爲與之成比例之三量.

令 $k=\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$, 則 $x=\alpha k$, $y=\beta k$, $z=\gamma k$;

於是 $$l\alpha^3\beta k^4+m\alpha\beta^2\gamma k^4+n\beta^2\gamma^2k^4=0,$$

即 $$l\alpha^3\beta+m\alpha\beta^2\gamma+n\beta^2\gamma^2=0;$$

與原方程式形式相同,僅分別以 α, β, γ 代 x, y, z 而已.

14. 次定理甚屬重要.

設 $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$, ………$\frac{a_n}{b_n}$為不等分數，其分母均同號，則分數

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}$$

之值在諸分數中最大者及最小者之間.

證. 假定諸分數之分母皆為正數. 設 $\frac{a_r}{b_r}$ 為最小分數，以 k 表之，則

$$\frac{a_r}{b_r}=k;\quad \therefore\ a_r=kb_r;$$

$$\frac{a_1}{b_1}>k;\qquad \therefore\ a_1>kb_1;$$

$$\frac{a_2}{b_2}>k;\qquad \therefore\ a_2>kb_2;$$

依此類推;

由加法,

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n>(b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n)k;$$

$$\therefore \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}>k;\ 即 >\frac{a_r}{b_r},$$

同法可證

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n}<\frac{a_s}{b_s},$$

其 $\frac{a_s}{b_s}$ 為已知諸分數中之最大者.

諸分數之分母若皆為負數，亦可用同法證明之.

15. 12 節所述一般原則，在各門數學中皆有極大之用途，讀者應於任何特殊情形下，均能自由運用，而不待須引入輔助符號.

例1. 設 $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$,

試證
$$\frac{x+y+z}{a+b+c}=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}.$$

諸已知分數各$=\dfrac{\text{分子和}}{\text{分母和}}$

$$=\frac{x+y+z}{a+b+c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又，三已知分數若分別以 $y+z$，$z+x$，$x+y$ 乘之，

則各分數$=\dfrac{x(y+z)}{(y+z)(b+c-a)}=\dfrac{y(z+x)}{(z+x)(c+a-b)}$

$$=\frac{z(x+y)}{(x+y)(a+b-c)}=\frac{\text{分子和}}{\text{分母和}}$$

$$=\frac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2ax+2by+2cz}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$\therefore$由(1)，(2)，$\dfrac{x+y+z}{a+b+c}=\dfrac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{2(ax+by+cz)}$.

例2. 設$\dfrac{x}{l(mb+nc-la)}=\dfrac{y}{m(nc+la-mb)}=\dfrac{z}{n(la+mb-nc)}$，

試證 $\dfrac{l}{x(by+cz-ax)}=\dfrac{m}{y(cz+ax-by)}=\dfrac{n}{z(ax+by-cz)}$.

證. $$\frac{\frac{x}{l}}{mb+nc-la}=\frac{\frac{y}{m}}{nc+la-mb}=\frac{\frac{z}{n}}{la+mb-nc}$$

$$=\frac{\frac{y}{m}+\frac{z}{n}}{2la}$$

$=$兩相似式；

$$\therefore\frac{ny+mz}{a}=\frac{lz+nx}{b}=\frac{mx+ly}{c}.$$

將上分數中第一之上下各乘以 x，第二各乘以 y，第三各乘以 z；則得

$$\frac{nxy+mxz}{ax}=\frac{lyz+nxy}{by}=\frac{mxz+lyz}{cz}$$

$$=\frac{2lyz}{by+cz-ax}$$

$=$二相似式；

$$\therefore \frac{l}{x(by+cz-ax)}=\frac{m}{y(cz+ax-by)}=\frac{n}{z(ax+by-cz)}.$$

16. 設有含三未知量之兩一次方程式，如

$$a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

吾人不能將其完全解出，但若將其寫爲

$$a_1\left(\frac{x}{z}\right)+b_1\left(\frac{y}{z}\right)+c_1=0,$$

$$a_2\left(\frac{x}{z}\right)+b_2\left(\frac{y}{z}\right)+c_2=0,$$

之形式，則由以 $\frac{x}{z}$ 及 $\frac{y}{z}$ 爲未知量，可用通常法解之，而得

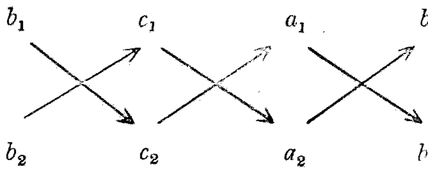
$$\frac{x}{z}=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad \frac{y}{z}=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

或寫爲更爲對稱之形式，

$$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{z}{a_1b_2-a_2b_1}\cdots\cdots\cdots(3)$$

故知凡遇類似 (1) 及 (2) 之兩方程式，吾人恆可按照下列法則，用上公式將 $x:y:z$ 之比用方程式之實係數寫出之.

從 y 起依次寫出 x，y，z 之係數，並照下圖重複之.



照箭之所示交叉乘各係數，切記下向箭兩端係數之積爲正，上向者爲負. 所得三結果

$$b_1c_2-b_2c_1,\quad c_1a_2-c_2a_1,\quad a_1b_2-a_2b_1$$

分別與 x，y，z 成比例.

此稱爲十字乘法之法則.

例1. 由下列兩方程式求 $x:y:z$ 之比.

$$7x=4y+8z,\ 3z=12x+11y.$$

解. 移項，得 $7x-4y-8z=0,$

$$12x+11y-3z=0.$$

寫出各係數，

$$\begin{array}{cccc} -4 & -8 & 7 & -4 \\ 11 & -3 & 12 & 11 \end{array}$$

由是得三積

$$(-4)\times(-3)-11\times(-8),\ (-8)\times12-(-3)\times7,$$
$$7\times11-12\times(-4),$$

即 $100,-75,125;$

$$\therefore \frac{x}{100}=\frac{y}{-75}=\frac{z}{125},$$

即 $$\frac{x}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{5}.$$

例2. 從下列三方程式消去 $x,\ y,\ z.$

$$a_1x+b_1y+c_1z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

解. 用十字乘法，由(2)及(3)得

$$\frac{x}{b_2c_3-b_3c_2}=\frac{y}{c_2a_3-c_3a_2}=\frac{z}{a_2b_3-a_3b_2};$$

將 k 表各比，依次乘諸分母，則得 $x,\ y,z$ 之値，代入(1)，消去 k，得

$$a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)=0.$$

此稱爲已知方程式之消去式.

例3. 解方程式

$$ax+by+cz=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$
$$x+y+z=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$
$$bcx+cay+abz=(b-c)(c-a)(a-b)\ \cdots\cdots(3).$$

解. 按照十字乘法，由(1)及(2)得

$$\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}=k,\ (設);$$

$\therefore\ x=k(b-c),\ y=k(c-a),\ z=k(a-b).$

代入(3),

$$k\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}=(b-c)(c-a)(a-b),$$

$$k\{-(b-c)(c-a)(a-b)\}=(b-c)(c-a)(a-b);$$

$$\therefore\ k=-1;$$

由是 $$x=c-b,\ y=a-c,\ z=b-a.$$

17. 設在§16內令 $z=1$,則(1),(2)兩方程式變爲

$$a_1x+b_1y+c_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0;$$

而(3)式變爲 $$\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1};$$

即 $$x=\frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

故任何兩二元一次聯立方程式,均可用十字乘法法則解之.

例.解 $5x-3y-1=0,\ x+2y=12.$

解.移項, $$5x-3y-1=0,$$
$$x+2y-12=0;$$

$$\therefore\ \frac{x}{36+2}=\frac{y}{-1+60}=\frac{1}{10+3};$$

$$x=\frac{38}{13},y=\frac{59}{13}.$$

習 題 一

1.求下列諸比之複比:

(1) $2a:3b$,與 $9b^2:ab$ 之二乘比.

(2) $64:9$ 之二次根比,與 $27:56$.

(3) $\frac{2a}{b}:\frac{\sqrt{6a^2}}{b^2}$ 之二乘比與 $3ax:2by$.

2.設 $x+7:2(x+14)$ 爲 $5:8$ 之二乘比,求 x.

3.二數之比爲 $7:12$,差爲 275,求二數.

4.加何數於 $5:37$ 之各項使其等於 $1:3$?

5.設 $x:y=3:4$,求 $7x-4y:3x+y$ 之比.

6.設 $15(2x^2-y^2)=7xy$,求 $x:y$ 之比.

7. 設
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f},$$
求證
$$\frac{2a^4b^2+3a^2e^2-5e^4f}{2b^6+3b^2f^2-5f^5}=\frac{a^4}{b^4}.$$

8. 設 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，求證 $\frac{a}{d}$ 等於
$$\sqrt{\frac{a^5+b^2c^2+a^3c^2}{b^4c+d^4+b^2cd^2}}.$$

9. 設
$$\frac{x}{q+r-p}=\frac{y}{r+p-q}=\frac{z}{p+q-r},$$
試證
$$(q-r)x+(r-p)y+(p-q)z=0.$$

10. 設 $\frac{y}{x-z}=\frac{y+x}{z}=\frac{x}{y}$，求 $x:y:z$ 之比．

11. 設
$$\frac{y+z}{pb+qc}=\frac{z+x}{pc+qa}=\frac{x+y}{pa+qb},$$
試證
$$\frac{2(x+y+z)}{a+b+c}=\frac{(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z}{bc+ca+ab}.$$

12. 設
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c},$$
試證
$$\frac{x^3+a^3}{x^2+a^2}+\frac{y^3+b^3}{y^2+b^2}+\frac{z^3+c^3}{z^2+c^2}=\frac{(x+y+z)^3+(a+b+c)^3}{(x+y+z)^2+(a+b+c)^2}.$$

13. 設
$$\frac{2y+2z-x}{a}=\frac{2z+2x-y}{b}=\frac{2x+2y-z}{c},$$
試證
$$\frac{x}{2b+2c-a}=\frac{y}{2c+2a-b}=\frac{z}{2a+2b-c}.$$

14. 設 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$，
試證
$$x:a=y:b=z:c.$$

15. 設 $l(my+nz-lx)=m(nz+lx-my)=n(lx+my-nz)$，
試證
$$\frac{y+z-x}{l}=\frac{z+x-y}{m}=\frac{x+y-z}{n}.$$

16. 試證
$$ax+cy+bz=0,\quad cx+by+az=0,\quad bx+ay+cz=0,$$
之消去式爲　$a^3+b^3+c^3-3abc=0$.

17. 從下列三方程式消去 x，y，z：
$$ax+hy+gz=0,\quad hx+by+fz=0,\quad gx+fy+cz=0.$$

18. 設　$x=cy+bz,\ y=az+cx,\ z=bx+ay,$

試證
$$\frac{x^2}{1-a^2}=\frac{y^2}{1-b^2}=\frac{z^2}{1-c^2}.$$

19. 已知　$a(y+z)=x,\ b(z+x)=y,\ c(x+y)=z,$

試證
$$bc+ca+ab+2abc=1.$$

解下列諸方程式:

20.
$$3x-4y+7z=0,$$
$$2x-y-2z=0,$$
$$3x^3-y^3+z^3=18.$$

21.
$$x+y=z,$$
$$3x-2y+17z=0,$$
$$x^3+3y^3+2z^3=167.$$

22.
$$7yz+3zx=4xy,$$
$$21yz-3zx=4xy,$$
$$x+2y+3z=19.$$

23.
$$3x^2-2y^2+5z^2=0,$$
$$7x^2-3y^2-15z^2=0,$$
$$5x-4y+7z=6.$$

24. 設
$$\frac{l}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{m}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{n}{\sqrt{c}-\sqrt{a}}=0,$$
$$\frac{l}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{m}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\frac{n}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}=0,$$

試證
$$\frac{l}{(a-b)(c-\sqrt{ab})}=\frac{m}{(b-c)(a-\sqrt{bc})}=\frac{n}{(c-a)(b-\sqrt{ac})}.$$

解下列諸方程式:

25.
$$ax+by+cz=0,$$
$$bcx+cay+abz=0,$$
$$xyz+abc(a^3x+b^3y+c^3z)=0.$$

26.
$$ax+by+cz=a^2x+b^2y+c^2z=0,$$
$$x+y+z+(b-c)(c-a)(a-b)=0.$$

27. 設　$a(y+z)=x,\ b(z+x)=y,\ c(x+y)=z,$

試證
$$\frac{x^2}{a(1-bc)}=\frac{y^2}{b(1-ca)}=\frac{z^2}{c(1-ab)}.$$

28. 設　$ax+hy+gz=0,\ hx+by+fz=0,\ gx+fy+cz=0,$

試證

(1) $\dfrac{x^2}{bc-f^2}=\dfrac{y^2}{ca-g^2}=\dfrac{z^2}{ab-h^2}.$

(2) $(bc-f^2)(ca-g^2)(ab-h^2)=(fg-ch)(gh-af)(hf-bg).$

第　二　章

比　例

18. 定義. 若兩比相等，則謂其所含之四量成比例. 例如，若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，則謂 a，b，c，d 四量成比例. 意即 a 比 b 等於 c 比 d，寫作

$$a:b::c:d;$$

或

$$a:b=c:d.$$

稱 a 與 d 爲外項，b 與 c 爲內項.

19. 定理. 若四量成比例，則兩外項之積等於兩內項之積.

證. 設 a，b，c，d 爲四比例項，

由定義，$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$

$\therefore$ $$ad=bc.$$

故若已知比例之任三項，則其第四項可以求得.

反之，若 a，b，c，d 四量，其 $ad=bc$，則 a，b，c，d 四量爲比例項；a 與 d 爲外項，b 與 c 爲內項；反之，亦可以 a，d 爲內項，b，c 爲外項.

20. 定義. 若諸量中，第一量比第二量，等於第二量比第三量，等於第三量比第四量，類推；則稱爲諸量成連比例；故若

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots\cdots\cdots$$

則謂 a，b，c，d，…成連比例.

設 a, b, c 三量成連比例，則

$$a:b=b:c;$$

$$\therefore\quad ac=b^2. \qquad \text{〔18 節〕}$$

此時稱 b 爲 a, c 之比例中項，而 c 爲 a, b 之第三比例項.

21. 定理. 若三量成連比例，則第一量與第三量之比，等於第一量與第二量之二乘比.

證. 設三量爲 a, b 及 c; 則 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$.

今
$$\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}$$
$$=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2};$$

即
$$a:c=a^2:b^2.$$

故知此命題與幾何原本卷 5 所下之二乘比之定義相同.

22. 若 $a:b=c:d$, $e:f=g:h$, 則 $ae:bf=cg:dh$.

證. 因
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\ \frac{e}{f}=\frac{g}{h};$$
$$\therefore\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh},$$

即
$$ae:bf=cg:dh.$$

推論. 若
$$a:b=c:d,$$
又
$$b:x=d:y,$$
則
$$a:x=c:y.$$

此在幾何中名曰省理 (*ex œquali*) 之定理.

23. 若 a, b, c, d 四量成比例，則由分數性質可推出若干其他命題. 此等結果甚爲有用，若干引用時常沿襲其幾何學上之附名.

(1) 若 $a:b=c:d$，則 $b:a=d:c$.　　反理 [*Invertendo*]

證. $\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$；$\therefore 1\div\dfrac{a}{b}=1\div\dfrac{c}{d}$；

即 $$\frac{b}{a}=\frac{d}{c};$$

或 $$b:a=d:c.$$

(2) 若 $a:b=c:d$，則 $a:c=b:d$.　　更理 [*alternando*]

證. $\because ad=bc$；　$\therefore \dfrac{ad}{cd}=\dfrac{bc}{cd}$；

即 $$\frac{a}{c}=\frac{b}{d};$$

或 $$a:c=b:d.$$

(3) 若 $a:b=c:d$，則 $a+b:b=c+d:d$.　　合理 [*Componendo*]

證. $\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$；　$\therefore \dfrac{a}{b}+1=\dfrac{c}{d}+1$；

即 $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};$$

或 $$a+b:b=c+d:d.$$

(4) 設 $a:b=c:d$，則 $a-b:b=c-d:d$.　　分理 [*Dividendo*]

證. $\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$；$\therefore \dfrac{a}{b}-1=\dfrac{c}{d}-1$；

即 $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};$$

或 $$a-b:b=c-d:d.$$

(5) 若 $a:b=c:d$，則 $a+b:a-b=c+d:c-d$.

證. 因由 (3) $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};$$

由 (4) $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d};$$

由除法， $$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d};$$

即 $$a+b:a-b=c+d:c-d.$$

此通常引用合分理 (*Componendo and Dividendo*)。

他數命題，可用同法證明之.

24. 前節諸結果爲歐氏幾何原本卷五中若干命題之代數形式．學者於其口述形式應加熟習，以便引用．例如分理可引述如下：

當四量成比例時，其第一項大於第二項之量比第二項等於第三項大於第四項之量比第四項．

25. 茲取比例之代數定義與歐氏所下者比較之．

歐氏定義如下：

設於四量中，取第一量及第三量之任何等倍數，又取第二量及第四量之任何等倍數；若第三量之倍量之大於，等於，或小於第四量之倍量視第一量之倍量之大於，等於，或小於第二量之倍量而定；則謂此四量爲比例量．

用代數符號表之，此定義可陳述如下：

若 $pc \gtreqless qd$ 視 $pa \gtreqless qb$ 而定，其 p，q 可爲任何正整數，則謂 a，b，c，d 四量爲比例量．

I．由比例之代數定義推出幾何定義．

證．因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，左右各以 $\frac{p}{q}$ 乘之，得

$$\frac{pa}{qb}=\frac{pc}{qd};$$

此命題由是證明．

II．從比例之幾何定義推出代數定義．

已知 $pc \gtreqless qd$ 視 $pa \gtreqless qb$ 而定，求證

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

證. 若 $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, 則其中之一必較大.

設 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$; 必能求出一分數 $\frac{q}{p}$, q, p 爲任何正整數, 其值在前兩分數之間.

故 $$\frac{a}{b} > \frac{q}{p} \qquad \cdots\cdots(1)$$

而 $$\frac{c}{d} < \frac{q}{p} \qquad \cdots\cdots(2)$$

由 (1) $$pa > qb;$$

由 (2) $$pc < qd;$$

此與題設矛盾; 故必 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; 本命題因此證明.

26. 有當注意者, 比例之幾何定義所論爲名數量如直線, 面積等, 但未嘗指出任何公度單位. 故歐氏定義於可通約量及不可通約量均能適用; 至於代數定義, 則因其默定 a 恰爲 b 之幾倍或幾分之幾, 猶 c 之於 d, 故僅能用於可通約量. 但因二不可通約量之比永可使其與二整數之比之差小於任何可名言之量, 故對於可通約量之證明, 亦可用於不可通約量. 此在第 7 節業已證明; 更可如下節爲更一般之證明.

27. 設 a 及 b 爲不可通約量; 分 b 爲 m 等分, 每分等於 β, 由是 $b = m\beta$, m 爲正整數. 又設 a 內所含 β 之倍數, 多於 n 而少於 $n+1$;

於是 $$\frac{a}{b} > \frac{n\beta}{m\beta} \text{而} < \frac{(n+1)\beta}{m\beta},$$

換言之, $$\frac{a}{b} \text{在} \frac{n}{m} \text{與} \frac{n+1}{m} \text{之間};$$

由是 $\frac{a}{b}$ 與 $\frac{n}{m}$ 之差小於 $\frac{1}{m}$. 更因 β (計量單位) 能取任意之小量, 因之能

使 m 爲任意之大量．故可使 $\frac{1}{m}$ 爲任意之小，求出兩整數 m，n，其比表 a，b 之比能至任意之精確程度．

28．第 23 節諸命題於解題時常爲有用．解某種方程式時，運用合分理更能化繁雜爲簡易．

例 1．

設 $$(2ma+6mb+3nc+9nd)(2ma-6mb-3nc+9nd)$$
$$=(2ma-6mb+3nc-9nd)(2ma+6mb-3nc-9nd),$$

求證 a，b，c，d 爲比例量．

證．$$\frac{2ma+6mb+3nc+9nd}{2ma-6mb+3nc-9nd}=\frac{2ma+6mb-3nc-9nd}{2ma-6mb-3nc+9nd},$$

由合分理，
$$\frac{2(2ma+3nc)}{2(6mb+9nd)}=\frac{2(2ma-3nc)}{2(6mb-9nd)}.$$

由更理，
$$\frac{2ma+3nc}{2ma-3nc}=\frac{6mb+9nd}{6mb-9nd}.$$

又依合分理，
$$\frac{4ma}{6nc}=\frac{12mb}{18nd};$$

由是
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d},$$

即
$$a:b=c:d.$$

例 2．解方程式
$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=\frac{4x-1}{2}.$$

由合分理，
$$\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\frac{4x+1}{4x-3},$$
$$\therefore\ \frac{x+1}{x-1}=\frac{16x^2+8x+1}{16x^2-24x+9}.$$

又由合分理，
$$\frac{2x}{2}=\frac{32x^2-16x+10}{32x-8},$$
$$\therefore\ x=\frac{16x^2-8x+5}{16x-4};$$

由是
$$16x^2-4x=16x^2-8x+5;$$
$$\therefore\ x=\frac{5}{4}.$$

習題二

1. 求 3，5，27 之第四比例項.
2. 求下兩數之比例中項:

   (1) 6 與 24，　　　　(2) $360a^4$ 與 $250a^2b^2$.

3. 求 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$ 及 $\frac{x}{y}$ 之第三比例項.

設 $a:b=c:d$，求證

4. $a^2c+ac^2:b^2d+bd^2=(a+c)^3:(b+d)^3$.
5. $pa^2+qb^2:pa^2-qb^2=pc^2+qd^2:pc^2-qd^2$.
6. $a-c:b-d=\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}$.
7. $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=\sqrt{ac+\frac{c^3}{a}}:\sqrt{bd+\frac{d^3}{b}}$.

設 a，b，c，d 成連比例，求證

8. $a:b+d=c^3:c^2d+d^3$.
9. $2a+3d:3a-4d=2a^3+3b^3:3a^3-4b^3$.
10. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.
11. 設 b 為 a，c 之比例中項，求證

$$\frac{a^2-b^2+c^2}{a^{-2}-b^{-2}+c^{-2}}=b^4.$$

12. 設 $a:b=c:d$，及 $e:f=g:h$，求證

$$ae+bf:ae-bf=cg+dh:cg-dh.$$

解下列各方程式:

13. $$\frac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-x-1}=\frac{3x^3-x^2+5x-13}{3x^3-x^2-5x+13}.$$
14. $$\frac{3x^4+x^2-2x-3}{3x^4-x^2+2x+3}=\frac{5x^4+2x^2-7x+3}{5x^4-2x^2+7x-3}.$$
15. $$\frac{(m+n)x-(a-b)}{(m-n)x-(a+b)}=\frac{(m+n)x+a+c}{(m-n)x+a-c}.$$
16. 設 a，b，c，d 為四比例量，求證

$$a+d=b+c+\frac{(a-b)(a-c)}{a}.$$

17. 設 a，b，c，d，e 成連比例，求證

$$(ab+bc+cd+de)^2=(a^2+b^2+c^2+a^2)(b^2+c^2+d^2+e^2).$$

18. 設 $x-1$ 人 $x+1$ 日完成之工作與 $x+2$ 人 $x-1$ 日完成之工作之比爲 9:10，求 x.

19. 設有四數成比例，其兩外項之和爲 21，兩內項之和爲 19，又四數各之平方和爲 442，求四數.

20. A, B 兩桶中盛兩種白葡萄酒，其混合比在 A 中爲 2:7，在 B 中爲 1:5. 問兩桶中各取若干，適能合成含第一種 2 加侖，含第二種 9 加侖之酒?

21. 由滿貯葡萄酒之桶中取出 9 加侖，然後滿之以水，又取出 9 加侖再滿之以水，今桶中酒與水之比爲 16:9. 問桶之容量若干?

22. 設四正量成連比例，試證首末二量之差至少爲其他二量之差之三倍.

23. 英國人口於 1871 至 1881 年中增加 15.9%. 設市民增加 18%，鄉民增加 4%，試求 1871 年市民及鄉民人口之比.

24. 某國茶之消耗量 5 倍於咖啡之消耗量. 若茶消費量增 $a\%$，咖啡消費量增 $b\%$；則共增 $7c\%$；但若茶消費量增 $b\%$，咖啡消費量增 $a\%$，則共增 $3c\%$. 求 a 對 b 之比.

25. 黃銅爲銅與鋅之合金；青銅之合金含銅 80%，鋅 4%，錫 16%. 某青銅及黃銅之鎔液中含銅 74%，鋅 16%，錫 10%；求黃銅中所含銅與鋅之比.

26. 某隊水手逆流航某路程需時 84 分鐘，順流較在靜水中少用 9 分鐘；問順水需時若干?

第　三　章

變　數　法

29. 定義. 設 A, B 二量，其關係爲當 B 變時，A 亦依同比而變，則謂 A 量依 B 量正變.

註. 用時常略去"正"字，而謂 A 依 B 而變.

例如，某火車以等速度前進，在 60 分鐘內行 40 哩，則此火車在 30 分鐘內應行 20 哩，120 分鐘內行 80 哩，…；所行各距離之增減之比同於其所用之時間. 可謂若速度一定，則行程與時間成比例，或謂行程依時間而變.

30. 變法常以符號 $\propto$ 表之；如 $A\propto B$ 即謂 A 依 B 而變.

31. 定理. 設 A 依 B 而變，則 A 等於 B 以某常量乘之.

證. 設 a, a_1, a_2, a_3,……, b, b_1, b_2, b_3,……爲 A, B 之諸相當值.

則由定義，$\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}$；$\dfrac{a}{a_2}=\dfrac{b}{b_2}$；$\dfrac{a}{a_3}=\dfrac{b}{b_3}$；類推.

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\cdots\cdots,\ \text{各等於}\ \frac{a}{b}.$$

故　$\dfrac{A\text{之任一量}}{B\text{之相當量}}$ 之值恆同；

換言之，　$\dfrac{A}{B}=m$，而 m 爲一常量.

$$\therefore\ A=mB.$$

若已知 A, B 之任一對相當值，則常數 m 之值可以求得．例如，若 $B=12$，$A=3$，

則
$$3=m\times 12;$$
$$\therefore\ m=\tfrac{1}{4},$$
$$A=\tfrac{1}{4}B.$$

32. 定義． 若 A 量依 B 量之倒數正變，則謂 A 依 B 反變．

例如，若 A 因 B 反變，則 $A=\dfrac{m}{B}$，而 m 為常數．

下為說明反變之一例：設有某工作，6 人作之 8 時可完，12 人 4 時可完，2 人用 24 時可完，類推．故知人數增，則所用之時間依比例減少；反之亦然．

例一．x 之立方根因 y 之平方反變；若 $y=3$，則 $x=8$，設 $y=1\frac{1}{2}$ 求 x．

解．由題設，$\sqrt[3]{x}=\dfrac{m}{y^2}$，其 m 為一常數．

令 $x=8$，$y=3$，得 $\quad 2=\dfrac{m}{9}$，
$$\therefore\ m=18,$$

而
$$\sqrt[3]{x}=\frac{18}{y^2};$$

令 $y=\dfrac{3}{2}$，則得 $x=512$．

例二．行星公轉一週所用時間之平方，因其至太陽之距離之立方而變；設地球與金星至太陽之距離為 $91\frac{1}{4}$ 及 66 百萬哩．求金星公轉一週所用之時間．

解．設 P 表一週期之日數，D 表距離之百萬哩數；則
$$P^2\propto D^3,$$

或
$$P^2=kD^3,\ \text{其 } k \text{ 為一常數}.$$

關於地球，
$$365\times 365=k\times 91\tfrac{1}{4}\times 91\tfrac{1}{4}\times 91\tfrac{1}{4},$$
$$k=\frac{4\times 4\times 4}{365};$$
$$\therefore\ P^2=\frac{4\times 4\times 4}{365}D^3.$$

關於金星，　$P^2=\dfrac{4\times4\times4}{365}\times66\times66\times66$;

$$P=4\times66\times\sqrt{\frac{264}{365}}$$

$$=264\times\sqrt{.7233}\ (約)$$
$$=264\times.85$$
$$=224.4.$$

故公轉一週之時間約爲 $224\frac{1}{2}$ 日.

33. 定義. 若一量與他數量之積正變，則稱此量與他數量合變.

例如，若 $A=mBC$，則謂 A 因 B 及 C 合變. 利息即因本銀及時期及利率合變.

34. 定義. 若 A 因 $\dfrac{B}{C}$ 正變，則謂 A 因 B 正變而因 C 反變.

35. 定理. 若 C 爲常量時，A 因 B 而變；B 爲常量時 A 因 C 而變；則 B 及 C 俱變時，A 因 BC 而變.

證. A 之變法，一部分因 B 而定，一部分因 C 而定. 設 B 及 C 依次變化，各影響於 A. 又設 a, b, c，表 A, B, C 之一組聯立之值.

1. 設 C 不變而 B 變爲 b，則 A 亦必經一部分之變化，而得某過渡值 a'，此時

$$\frac{A}{a'}=\frac{B}{b}\cdots\cdots(1)$$

2. 設 B 不變，即其值仍爲 b，而 C 變爲 c，則 A 必完成其變化，而由過渡值 a' 變爲其最後值 a，此時

$$\frac{a'}{a}=\frac{C}{c}\cdots\cdots(2)$$

由 (1) 及 (2)，　$\dfrac{A}{a'}\times\dfrac{a'}{a}=\dfrac{B}{b}\times\dfrac{C}{c}$;

即　$A=\dfrac{a}{bc}\cdot BC$,

或　A 因 BC 而變.

36. 下爲上述定理之例.

工作人數已定，則工作量因天數正變；工作天數已定，則工作量因人數正變；若天數及人數同爲變量，則工作量因人數及天數之積正變.

又在幾何學中，三角形之高一定時，其面積因其底正變，底一定時，其面積依其高正變；若底及高皆爲變量，則其面積依底高之積而變.

例. 正圓錐體之高不變時，其體積因其底半徑之平方而變；又其底不變時，其體積依其高而變. 若底半徑爲 7 呎，高爲 15 呎，則體積爲 770 立方呎；今一圓錐之體積爲 132 立方呎，底半徑爲 3 呎，試求其高.

解. 設 h 及 r 表高及底半徑之呎數，V 表體積之立方呎數.

則 $V=mr^2h$，其 m 爲常數.

由題設，
$$770=m\times 7^2\times 15;$$

由是
$$m=\frac{22}{21};$$

$$\therefore V=\frac{22}{21}r^2h.$$

代入 $V=132$ 及 $r=3$，得

$$132=\frac{22}{21}\times 9\times h;$$

$$\therefore h=14;$$

故所求高爲 14 呎.

37. 第 35 節之命題，不難推及於 A 因多個變量而變之情形. 且此變法爲正變或反變均可. 此原理頻見於自然科學中，頗耐尋味. 例如在氣體之理論中，由實驗氣體之體積 v 一定時其壓力 p 因絕對溫度 t 而變；又溫度一定時，因體積 v 而反變. 即

當 v 不變時，　　$p\propto t;$

又，t 不變時，
$$p\propto\frac{1}{v}.$$
由此等結果，可知，若 t 及 v 俱變，則得公式

$p\propto\frac{t}{v}$，或 $pv=kt$，k 爲常數.

此與由實驗所得者，恰相符合.

例. 火車行程所需之時間，因距離正變，因速度反變；火車速度則因每哩所用煤數之平方根正變，而因車之輛數反變. 設火車在半時，掛車 18 輛，行 25 哩，用煤 10 担 (cwt)；問在 28 分鐘內，帶車 16 輛，行 21 哩，需煤若干?

解. 設 t 表時間之時數.

d 表距離之哩數.

v 表每小時速度之哩數.

q 表每哩用煤之担數.

c 表掛車之輛數.

則
$$t\propto\frac{d}{v},$$
而
$$v\propto\frac{\sqrt{q}}{c},$$
由是
$$t\propto\frac{cd}{\sqrt{q}},$$
即
$$t=\frac{kcd}{\sqrt{q}}，\text{其 } k \text{ 爲常數}.$$
代入諸已知值，$\left(因q=\frac{10}{25}\right)$ 得
$$\frac{1}{2}=\frac{k\times18\times25\times5}{\sqrt{10}};$$
即
$$k=\frac{\sqrt{10}}{125\times36}.$$
故
$$t=\frac{\sqrt{10}\cdot cd}{125\times36\sqrt{q}}.$$
代入本問題第二部 t, c, d 之已知值，得
$$\frac{28}{60}=\frac{\sqrt{10}\times16\times21}{125\times36\sqrt{q}};$$
$$\sqrt{q}=\frac{\sqrt{10}\times16\times21}{75\times28}=\frac{4}{25}\sqrt{10};$$
$$q=\frac{32}{125}.$$
故所需煤量爲
$$\frac{21\times32}{125}=5\frac{47}{125}\text{担}.$$

習題三

1. 設 x 因 y 而變，$y=15$ 時 $x=8$，求 x 當 $y=10$ 時之值.

2. 設 P 因 Q 反變，$Q=3$ 時 $P=7$，求 P 當 $Q=2\frac{1}{3}$ 時之值.

3. 設 x 之平方因 y 之立方正變，且 $y=4$ 時 $x=3$，求 y 當 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 時之值.

4. 設 A 因 B, C 合變；又 $B=\frac{3}{5}$，$C=\frac{10}{27}$ 時 $A=2$，求 C 當 $A=54$，$B=3$ 時之值.

5. 設 A 及 B 同因 C 而變，試證 $A\pm B$ 及 $\sqrt{AB}$ 皆因 C 而變.

6. 設 A 因 BC 而變，則 B 因 $\frac{C}{A}$ 反變.

7. P 因 Q 正變而因 R 反變；又當 $Q=\frac{3}{7}$，$R=\frac{9}{14}$ 時，$P=\frac{2}{3}$；求 Q 當 $P=\sqrt{48}$，$R=\sqrt{75}$ 時之值.

8. 設 x 因 y 而變，試證 x^2+y^2 因 x^2-y^2 而變.

9. 設 y 因二量之和而變，二量中，一因 x 正變，一因 x 反變；又知 $x=4$ 時 $y=6$，$x=3$ 時 $y=3\frac{1}{3}$；求 x, y 之關係方程式.

10. 設 y 等於二量之和，其中一因 x 正變，他因 x 反變；又知 $x=2$ 時 $y=19$，或 3；求 y 用 x 表之值.

11. 設 A 因 B 之平方根正變，而因 C 之立方根反變；又當 $B=256$，$C=2$ 時 $A=3$，試求 B 當 $A=24$，及 $C=\frac{1}{2}$ 時之值.

12. 已知 $x+y$ 因 $z+\frac{1}{z}$ 而變，$x-y$ 因 $z-\frac{1}{z}$ 而變，設 $x=3$，$y=1$ 時 $z=2$，試求 x，z 間之關係.

13. 設 A 因 B 及 C 合變，同時 B 因 D^2 正變，而因 A 反變，試證 A 因 D 正變.

14. 設 y 因三量之和正變，此三量中，第一量爲常數，第二量因 x 正變，第三量因 x^2 正變；且 $x=1$ 時 $y=0$，$x=2$ 時 $y=1$，$x=3$ 時 $y=4$. 試求 y 當 $x=7$ 時之值.

15. 由靜止降落之物體，其距離因降落時間之平方正變. 設某物體在 5 秒鐘間，降落 $402\frac{1}{2}$ 呎，問 10 秒鐘間降落若干呎? 又第 $\frac{1}{10}$ 秒間降落若干呎?

16. 球體積因球半徑之立方正變；又知半徑為 $3\frac{1}{2}$ 呎時，體積為 $179\frac{2}{3}$ 立方呎；試求半徑為 1 呎 9 吋 時之體積.

17. 圓盤之厚一定時，其重量因半徑之平方正變；若半徑一定，則因其厚正變. 設兩圓盤之厚之比為 9:8，重量則前者為後者之二倍，試求兩盤之半徑之比.

18. 某競賽會每日競賽之次數，因距始末兩日之日數（始末兩日在內）合變. 設某三連續日競賽之次數為 6，5，3. 問此三日為何日？又此會延續若干日？

19. 鑽石之價格因其重量之平方正變. 今有嵌鑽石之金戒指三枚，其價値為 £a，£b，£c，各戒指中鑽石之重量為 3，4，5 卡辣（*carats*）. 設各戒指之工價相同，試證鑽石 1 卡辣之價値為

$$£\left(\frac{a+c}{2}-b\right).$$

20. 二人所得郵金與其服務年數之平方根成比例. 第一人多服務 9 年. 多得郵金 £50. 若第一人較第二人多服務 $4\frac{1}{4}$ 年，則二人所得郵金之比為 9:8. 問二人服務年數及所得郵金各若干？

21. 行星加於衛星之引力，因行星之質量 M 正變，而因相隔距離 D 之平方反變；又衛星公轉一週所需時間之平方，因距離正變，而因引力反變. 設 m_1，d_1，t_1，及 m_2，d_2，t_2 為 M，D，T 之兩組聯立値. 求證

$$\frac{m_1t_1^{\ 2}}{m_2t_2^{\ 2}}=\frac{d_1^{\ 3}}{d_2^{\ 3}}.$$

由此以求木星之衛星公轉之時間，設其距木星之距離與月球至地球之距離之比為 35:31，並知木星之質量 343 倍於地球之質量 及月球之週期為 7.32 天.

22. 機關車所用煤量因其速度之平方正變；當每時行 16 哩時，每時所用煤量為 2 噸；設每噸之煤價為 10s，機器之其他消費每小時 11s.3d. 求 100 哩路程之最低耗費.

第　四　章

等　差　級　數

38. 定義. 設諸量以公差遞增或遞減，則稱此諸量成等差級數.

如下列數串各成一等差級數.

$$3,\ 7,\ 11,\ 15\ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$8,\ 2,\ -4,\ -10,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

公差由將級數之任一項從其後一項減去求得之. 上例諸級數中，第一之公差爲 4，第二爲 -6，第三爲 d.

39. 觀察級數

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\cdots\cdots\cdots$$

可知其任一項內 d 之係數恆較其所在之項數少一.

如　　　　第 3 項爲 $a+2d$;

　　　　　第 6 項爲 $a+5d$;

　　　　　第 20 項爲 $a+19d$;

一般言之，　第 p 項爲 $a+(p-1)d$.

設 n 表項數，l 表末項，或第 n 項，則

$$l=a+(n-1)d.$$

40. 求等差級數之若干項之和.

設 a 表首項，d 表公差，n 表項數. 又設 l 表末項，s 表所求之和；於是

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l;$$

又照反順序寫之，

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a.$$

二級數相加，

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}$$

$$=n(a+l),$$

$$\therefore\ s=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$l=a+(n-1)d\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$\therefore\ s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

41. 上節求得 (1), (2), (3) 三重要公式；在每公式內設有三字母已知，則他一字母可表未知量．例如，在 (1) 內若代入 s, n, l 之已知值，則得一求 a 之方程式；在他公式內亦然．但切須避免過於機械．解簡單問題，與其呆套公式，反不及用心算爲佳也．

例1．求級數 $5\frac{1}{2}$，$6\frac{3}{4}$，$8\cdots\cdots$之 17 項之和．

此級數之公差爲 $1\frac{1}{4}$；故由 (3)，

所求和 $$=\frac{17}{2}\left\{2\times\frac{11}{2}+16\times1\tfrac{1}{4}\right\}$$

$$=\frac{17}{2}(11+20)$$

$$=\frac{17\times31}{2}$$

$$=263\tfrac{1}{2}.$$

例2．某級數之首項爲 5，末項爲 45，和爲 400；求項數及公差．

設 n 爲項數，於是由 (1)

$$400=\frac{n}{2}(5+45);$$

由是 $$n=16.$$

設 d 爲公差

$$45=\text{第 16 項}=5+15d;$$

由是 $$d=2\tfrac{2}{3}.$$

42. 若已知等差級數之任兩項，則此級數可以完全決定．因由此已知條件可得二聯立方程式，其解答即級數之首項及公差也．

例．某等差級數之第 54 項及第 4 項爲 -61 及 64；求第 23 項．

設 a 爲首項，d 爲公差，於是

$$-61=\text{第 54 項}=a+53d;$$

$$64=\text{第 4 項}=a+3d;$$

由是得 $$d=-\tfrac{5}{2},\quad a=71\tfrac{1}{2};$$

故其第 23 項 $=a+22d=16\tfrac{1}{2}$.

43. 定義． 若三量成等差級數，則中量稱爲他二量之等差中項．

如 a 爲 $a-d$ 及 $a+d$ 之等差中項．

44. 求二已知量之等差中項．

設 a，b 爲二量；A 爲其等差中項．

則因 a，A，b 爲 $A.P.$ 必得

$$b-A=A-a,$$

各等於公差；

故 $$A=\frac{a+b}{2}.$$

45. 在二已知量間恆可插入任若干項而全體成一等差級數．由上節定義之引伸，插入之諸項稱爲等差中項．

例．於 4 及 67 間插入 20 個等差中項．

合首項及末項此級數之項數爲 22；由是求一 $A.P.$ 其項數 22，首項爲 4，末項爲 67．

設 d 爲公差；

則 $$67=\text{第 22 項}=4+21d;$$

由是 $d=3$，而此級數爲 4，7，10，…………61，64，67；

所求中項爲 7，10，13，……………………58，61，64．

46. 於二已知量間，插入指定若干等差中項.

設 a 及 b 爲二已知量，n 爲插入之項數.

合首末二項其項數共爲 $n+2$；於是求一 $A.P.$ 其首項爲 a，末項爲 b，項數爲 $n+2$.

設 d 爲公差，

則 $$b=\text{第 } n+2 \text{ 項}$$
$$=a+(n+1)d;$$

故 $$d=\frac{b-a}{n+1};$$

而所求諸中項爲 $a+\dfrac{b-a}{n+1}$，$a+\dfrac{2(b-a)}{n+1}$，…………$a+\dfrac{n(b-a)}{n+1}$.

例1. 三數成 $A.P.$ 其和爲 27，其平方和爲 293；求三數.

設 a 爲中數，d 爲公差；則三數爲 $a-d$，a，$a+d$.

故 $$a-d+a+a+d=27;$$

由是 $a=9$，三數爲 $9-d$、9、$9+d$.

$$\therefore\ (9-d)^2+81+(9+d)^2=293;$$
$$d=\pm 5;$$

而所求三數爲 4，9，14.

例2. 某級數之第 n 項爲 $3n-1$，試求其首 p 項之和.

由令 $n=1$，及 $n=p$，得

首項$=2$，　末項$=3p-1$；

$\therefore$ 所求和$=\dfrac{p}{2}(2+3p-1)=\dfrac{p}{2}(3p+1)$.

習　題　四A

1. 求 2，$3\frac{1}{4}$，$4\frac{1}{2}$，………至 20 項之和.
2. 求 49，44，39………至 17 項之和.
3. 求 $\frac{3}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{7}{12}$，……至 19 項之和.

4. 求 $3, \frac{7}{3}, 1\frac{2}{3}, \cdots\cdots$ 至 n 項之和.

5. 求 $3.75, 3.5, 3.25, \cdots\cdots$ 至 16 項之和.

6. 求 $-7\frac{1}{2}, -7, -6\frac{1}{2}, \cdots$ 至 24 項之和.

7. 求 $1.3, -3.1, -7.5, \cdots\cdots$ 至 10 項之和.

8. 求 $\frac{6}{\sqrt{3}}, 3\sqrt{3}, \frac{12}{\sqrt{3}}, \cdots\cdots$ 至 50 項之和

9. 求 $\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}, \cdots\cdots$ 至 25 項之和.

10. 求 $a-3b, 2a-5b, 3a-7b, \cdots\cdots$ 至 40 項之和.

11. 求 $2a-b, 4a-3b, 6a-5b, \cdots\cdots$ 至 n 項之和.

12. $\frac{a+b}{2}, a, \frac{3a-b}{2}, \cdots\cdots\cdots$ 至 21 項之和.

13. 試於 $\frac{1}{4}$ 及 $-9\frac{3}{4}$ 間插入 19 個等差中項.

14. 試於 $3\frac{1}{2}$ 及 $-41\frac{1}{2}$ 間插入 17 個等差中項.

15. 試於 $-35x$ 及 $3x$ 間插入 18 個等差中項.

16. 試於 x^2 及 1 間插入 x 個等差中項.

17. 求首 n 個奇數之和.

18. $A.P.$ 之首項爲 2，末項爲 29，和爲 155；求公差.

19. $A.P.$ 之 15 項之和爲 600，公差爲 5，求首項.

20. $A.P.$ 之第三項爲 18，第七項爲 30；求 17 項之和.

21. 三數成 $A.P.$ 其和爲 27，其積爲 504；求三數.

22. 三數成 $A.P.$ 其和爲 12，其立方和爲 408；求三數.

23. 某級數之第 n 項爲 $4n+1$，求 15 項之和.

24. 某級數之第 p 項爲 $\frac{p}{7}+2$，求 35 項之和.

25. 某級數之第 n 項爲 $\frac{n}{a}+b$，求 p 項之和.

26. 求級數 $\frac{2a^2-1}{a}, 4a-\frac{3}{a}, \frac{6a^2-5}{a}, \cdots\cdots$ 之 n 項之和.

47. 已知 A.P. 之 s,a,d 而定 n 之值，則得一二次方程式

$$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)a\};$$

當二根皆爲正整數時，其相當結果自不難解釋．若 n 爲負數時，有時亦能得一適當之解釋．

例．級數 $-9,-6,-3,\cdots\cdots$ 之若干項之和爲 66?

於此 $$\frac{n}{2}\{-18+(n-1)3\}=66;$$

即 $$n^2-7n-44=0,$$

或 $$(n-11)(n+4)=0;$$

$$\therefore\ n=11 \quad 或 -4.$$

設取此級數之 11 項，則得

$$-9,-6,-3,0,3,6,9,12,15,18,21;$$

其和爲 66.

若從末項倒數四項，則其和亦爲 66；故由負數解答雖不能得此問題之直然答案，但亦能得一可解之意義．負數所解答者與正數所解答者正有密切相關也．

48. 玆用下法就一般情形證明此種解釋之正確．

求 n 之方程式爲

$$dn^2+(2a-d)n-2s=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

因在所論之情形下，此方程式之二根異號，玆以 n_1 及 $-n_2$ 表之．此級數之末項與 n_1 相當者爲

$$a+(n_1-1)d;$$

若從此項倒數，則其公差必以 $-d$ 表之，而 n_2 項之和爲

$$\frac{n_2}{2}\{2(a+\overline{n_1-1}\,d)+(n_2-1)(-d)\},$$

玆證其等於 s.

$$\text{因此式}=\frac{n_2}{2}\{2a+(2n_1-n_2-1)d\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{2an_2+2n_1n_2d-n_2(n_2+1)d\}$$

$$=\tfrac{1}{2}\{2n_1n_2d-(dn_2^2-\overline{2a-d}\cdot n_2)\}$$

$$=\tfrac{1}{2}(4s-2s)=s.$$

蓋 $-n$ 適合方程式 $dn^2+(2a-d)n-2s=0$，又 $-n_1n_2$ 爲此方程式之兩根之積也.

49. 若 n 之値爲分數，則無確切項數與此解答相當.

例. 級數 26，21，16，……若干項之和爲 74?

於此 $$\frac{n}{2}\{52+(n-1)(-5)\}=74,$$

即 $$5n^2-57n+148=0,$$

或 $$(n-4)(5n-37)=0;$$

$$\therefore\ n=4\ \text{或}\ 7\tfrac{2}{5}.$$

故項數爲 4. 可以看出 7 項之和大於 74，而 8 項之和小於 74.

50. 雜例.

例1. 二等差級數之 n 項和之比爲 $7n+1:4n+27$；求其第 11 項之比.

設此二級數之首項及公差爲 a_1,d_1，及 a_2,d_2.

則得 $$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{7n+1}{4n+27}.$$

茲求 $\frac{a_1+10d_1}{a_2+10d_2}$ 之値；故，由令 $n=21$，得

$$\frac{2a_1+20d_1}{2a_2+20d_2}=\frac{148}{111}=\frac{4}{3};$$

故所求之比爲 4 3.

例2. 設有若干等差級數，其首項爲 1,2,3,4,……公差爲 1,3,5,7,……，n 項和爲 S_1, S_2, S_3,……S_p,試求下式之値：

$$S_1+S_2+S_3+\cdots\cdots+S_p.$$

$$S_1=\frac{n}{2}\{2+(n-1)\}=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2=\frac{n}{2}\{4+(n-1)3\}=\frac{n(3n+1)}{2}$$

$$S_3=\frac{n}{2}\{6+(n-1)5\}=\frac{n(5n+1)}{2},$$

$$S_p=\frac{n}{2}\{2p+(n-1)(2p-1)\}=\frac{n}{2}\{(2p-1)n+1\};$$

∴所求和

$$=\frac{n}{2}\{(n+1)+(3n+1)+\cdots\cdots(\overline{2p-1}\cdot n+1)\}$$

$$=\frac{n}{2}\{(n+3n+5n+\cdots\overline{2p-1}\cdot n)+p\}$$

$$=\frac{n}{2}\{n(1+3+5+\cdots\overline{2p-1})+p\}$$

$$=\frac{n}{2}(np^2+p)$$

$$=\frac{np}{2}(np+1).$$

習　題　四

1. 已知 $a=-2, d=4$, $s=160$; 求 n.

2. 級數 12,16,20,………之若干項之和爲 208?

3. 某 $A.P.$ 之第三項爲其首項之四倍，其第六項爲 17; 試求此 $A.P.$

4. 某 $A.P.$ 之第 2 項，第 31 項，及末項爲 $7\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, 及 $-6\frac{1}{2}$; 求其首項及項數.

5. 某 $A.P.$ 之第 4 項，第 42 項，及末項爲 0, −95, 及 −125; 求其首項及項數，

6. 某人分四十年償清其所負債務 £3600，各期償還之數適成一等差級數. 已償還 30 年後此人故去，未償者尙有 $\frac{1}{3}$; 試求其第一年償還若干?

7. 兩數之和爲 $2\frac{1}{6}$ 其間插入偶數個等差中項; 設此等中項之和較其個數多一; 問插入中項若干?

8. 級數 2, 5, 8,……之 n 項和爲 950; 求 n.

9. 求級數$\frac{1}{1+\sqrt{x}}$, $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1-\sqrt{x}}$,……之 n 項之和.

10. 設級數之 7 項和爲 49, 其 17 項和爲 289; 求 n 項和.

11. 設 $A.P.$ 之第 p, q, r 項爲 a, b, 及 c; 求證

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0.$$

12. 設 $A.P.$ 之 p 項和爲 q, 其 q 項和爲 p; 求 $p+q$ 項之和.

13. 四整數成 $A.P.$, 其和爲 24, 積爲 945; 求此四數.

14. 試將 20 分成 $A.P.$ 之 4 數, 使其第一數及第四數之積與第二數及第三數之積之比爲 2:3.

15. 某 $A.P.$ 之第 p 項爲 q, 第 q 項爲 p; 求其第 m 項.

16. 級數 9,12,15……之若干項之和爲 306?

17. 某 $A.P.$ 之 n 項之和爲 $2n+3n^2$, 求第 r 項.

18. 某 $A.P.$ 之 m 項之和比 n 項之和爲 m^2 比 n^2; 求證其第 m 項比第 n 項等於 $2m-1$ 比 $2n-1$.

19. 試證 $A.P.$ 內諸奇數項之和等於項數及中項之積.

20. 設 $s=n(5n-3)$ 於 n 之任何值均能成立; 試求第 p 項.

21. 某 $A.P.$ 之項數爲偶數, 其奇數項和爲 24, 偶數項之和爲 30, 又末項較首項大 $10\frac{1}{2}$; 求項數.

22. 今有成 $A.P.$ 之數兩組, 每組三項, 其和皆爲 15. 第一組之公差較第二組之公差大 1, 第一組之積與第二組之積之比等於 7:8 求諸數.

23. 設欲於 x 與 $2y$, 及 $2x$ 與 y 間各插入 n 中項, 而二者之第 r 中項相同. 試求 x, y 之關係.

24. $A.P.$ 內之 p 項和與 q 項和相等, 試證 $p+q$ 項之和爲零.

第　五　章

等比級數

51. 定義. 若諸量以常因數遞增或遞減，則謂此諸量成等比級數．如下列數串各成一等比級數：

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1,-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此常因數又名曰公比，由任一項除以其前一項得之．上例級數中第一之公比爲 2；第二爲 $-\frac{1}{3}$，第三爲 r.

52. 觀察級數

$$a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

可知任一項 r 之指數較其所在之項數少一．

如　　　　第 3 項爲 ar^2；

　　　　　第 6 項爲 ar^5；

　　　　　第 20 項爲 ar^{19}；

一般言之，　第 p 項爲 ar^{p-1}.

設 n 表項數，l 表末項或第 n 項，則

$$l=ar^{n-1}.$$

53. 定義. 若三量成等比級數，則中量稱爲他二量之等比中項．

求二已知量之等比中項.

設 a,b 爲二已知量; G 爲其等比中項.

則因 a, G, b 成 $G.P.$, 是以

$$\frac{b}{G}=\frac{G}{a}\text{(各等於公比)};$$

$$\therefore G^2=ab,$$

而 $$G=\sqrt{ab}.$$

54. 在二已知量間插入若干等比中項.

設 a, b 爲已知量, n 爲插入中項之個數.

共爲 $n+2$ 項; 故應求首項爲 a 末項爲 b 之 $n+2$ 項之等比級數.

設 r 爲公比;

則 $$b=\text{第 }(n+2)\text{ 項}$$
$$=ar^{n+1};$$

$$\therefore r^{n+1}=\frac{b}{a};$$

$$\therefore r=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

故所求中項爲 ar, ar^2, ar^3, $\cdots\cdots ar^n$, 其 r 之值可由式 (1) 求得之.

例. 試在 160 及 5 間插入 6 個等比中項.

此即求首項爲 160, 第六項爲 5 之六項 $G.P.$

使 r 爲公比,

於是 $$5=\text{第六項}$$
$$=160r^5;$$

$$\therefore r^5=\frac{1}{32};$$

故 $$r=\frac{1}{2};$$

而所求中項爲 80, 40, 20, 10.

55. 求等比級數若干項之和．

設 a 爲首項，r 爲公比，n 爲項數，s 爲所求之和．於是

$$s=a+ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1};$$

以 r 乘各項，

$$rs=ar+ar^2+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}+ar^n.$$

由減法，

$$rs-s=ar^n-a;$$

$$\therefore (r-1)s=a(r^n-1);$$

$$\therefore\ s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

改變分子及分母之符號，得

$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

注意．以上求 s 之二公式，以均能記憶爲宜；(2) 式可用於 r 爲大於 1 之正整數外之任何情形．

因 $ar^{n-1}=l$，故公式 (1) 可寫爲

$$s=\frac{rl-a}{r-1};$$

此公式亦有時有用．

例．求級數$\frac{2}{3},-1,\frac{3}{2},\cdots\cdots$至 7 項之和．

其公比$=-\frac{3}{2}$；故從公式 (2)

其和

$$=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{3}{2}\right)^7\right\}}{1+\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}\left\{1+\frac{2187}{128}\right\}}{\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2315}{128}\times\frac{2}{5}$$

$$=\frac{463}{96}.$$

56. 觀察級數 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\cdots\cdots\cdots$

其 n 項之和 $$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

由此可知無論取若干項，此級數之和永小於 2. 且知若使 n 為充分大數可使分數$\frac{1}{2^{n-1}}$小至適意之小.

下節討論更為一般之情形.

57. 從 55 節知 $$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

設 r 為眞分數；於是 n 之值愈大則 r^n 之值愈小，結果 $\frac{ar^n}{1-r}$ 之值亦愈小. 故使 n 為充分之大數，可使此級數 n 項之和與 $\frac{a}{1-r}$ 之差小至所意欲之程度.

此結論常述曰：等比級數之無窮項之和為 $\frac{a}{1-r}$；或更簡之曰：無窮項之和為 $\frac{a}{1-r}$.

例1. 某三數成 $G.P.$ 其和為 19，積為 216，試求此三數.

設三數為 $\frac{a}{r}$, a ,ar；則 $\frac{a}{r}\times a\times ar=216$；故$a=6$，而三數為$\frac{6}{r}$, 6, $6r$.

$$\therefore \frac{6}{r}+6+6r=19;$$

$$\therefore 6-13r+6r^2=0;$$

由是 $$r=\frac{3}{2}\text{或}\frac{2}{3}.$$

故三數爲 4, 6, 9.

例2. 某 $G.P.$ 之無窮項之和爲 15, 其平方和爲 45; 求此級數.

設 a 表首項, r 表公比; 則無窮項之和爲 $\frac{a}{1-r}$; 其平方和爲 $\frac{a^2}{1-r^2}$.

故 $$\frac{a}{1-r}=15 \quad \cdots\cdots(1);$$

$$\frac{a^2}{1-r^2}=45 \quad \cdots\cdots(2);$$

以 (1) 除 (2), $$\frac{a}{1+r}=3. \quad \cdots\cdots(3).$$

又從 (1) 及 (3) $$\frac{1+r}{1-r}=5;$$

由是 $r=\frac{2}{3}$, 而 $a=5$.

故所求級數爲 $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \cdots$

習題 五.a.

1. 求 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \cdots\cdots$ 至 7 項之和.
2. 求 $-2, 2\frac{1}{2}, -3\frac{1}{8}, \cdots$ 至 6 項之和.
3. 求 $\frac{3}{4}, 1\frac{1}{2}, 3, \cdots\cdots$ 至 8 項之和.
4. 求 $2, -4, 8, \cdots\cdots$ 至 10 項之和.
5. 求 $16.2, 5.4, 1.8, \cdots$ 至 7 項之和.
6. 求 $1, 5, 25, \cdots\cdots$ 至 p 項之和.
7. 求 $3, -4, \frac{16}{3}, \cdots\cdots$ 至 $2n$ 項之和.
8. 求 $1, \sqrt{3}, 3, \cdots\cdots$ 至 12 項之和.
9. 求 $\frac{1}{\sqrt{2}}, 2, \frac{8}{\sqrt{2}}, \cdots\cdots$ 至 7 項之和.

10. 求 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \cdots$至 7 項之和.

11. 於 $2\frac{1}{4}$ 及 $\frac{4}{9}$ 間插入 3 等比中項.

12. 於 $3\frac{5}{9}$ 及 $40\frac{1}{2}$ 間插入 5 等比中項.

13. 於 14 及 $-\frac{7}{64}$ 間插入 6 等比中項.

求下列級數之無窮項之和:

14. $\frac{8}{5}, -1, \frac{5}{8}, \cdots$

15. $.45, .015, .0005, \cdots$

16. $1.665, -1.11, .74, \cdots$

17. $3^{-1}, 3^{-2}, 3^{-3}, \cdots$

18. $3, \sqrt{3}, 1, \cdots$

19. $7, \sqrt{42}, 6, \cdots$

20. 某 $G. P.$ 前 6 項之和爲前 3 項之和之 9 倍, 試求其公比.

21. 某 $G. P.$ 之第 5 項爲 81, 第 2 項爲 24; 試求此級數.

22. 某 $G. P.$ 之公比爲 3, 和爲 728, 末項爲 486; 求首項.

23. 某三數成 $G. P.$ 其首項爲 7, 末項爲 448, 和爲 889; 求公比.

24. 某三數成 $G. P.$ 其和爲 38, 積爲 1728; 求三數.

25. 某三數成 $G. P.$ 連乘積爲 216, 兩兩之積之和爲 156;, 求三數.

26. 設 S_p 表級數 $1+r^p+r^{2p}+\cdots\cdots$ 無窮項之和, s_p 表級數 $1-r^p+r^{2p}-\cdots$ 無窮項之和. 試證

$$S_p+s_p=2S_{2p}.$$

27. 設某 $G. P.$ 之第 p, q, r 項爲 a, b, c; 試證

$$a^{q-r}\, b^{r-p}\, c^{p-q}=1.$$

28. 某 $G. P.$ 之無窮項之和爲 4, 其立方和爲 192; 求此級數.

58. 循環小數可爲無窮等比級數之良好說明.

例. 求 $.4\dot{2}\dot{3}$ 之值.

$$.4\dot{2}\dot{3}=.4232323\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{1000}+\frac{23}{100000}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}+\frac{23}{10^5}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

即，
$$.4\dot{2}\dot{3}=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\cdots\right)$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10^2}}$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{10^3}\cdot\frac{100}{99}$$
$$=\frac{4}{10}+\frac{23}{990}$$
$$=\frac{419}{990},$$

此與用算術法則求出之值相同.

59. 上節方法可用以證明將任意循環小數化爲普通分數之一般法則；但用下法較易.

求循環小數之值.

設 P 表不循環之數字，其數爲 p 個；又設 Q 表循環節含 q 個數字；D 表此循環小數之值. 於是

$$D=\cdot PQQQ\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$\therefore\ 10^p\times D=P.QQQ\cdots\cdots;$$
$$10^{p+q}\times D=PQ.QQQ\cdots;$$

由減法，
$$(10^{p+q}-10^p)D=PQ-P;$$

即
$$10^p(10^q-1)D=PQ-P;$$
$$\therefore D=\frac{PQ-P}{(10^q-1)10^p}.$$

今 10^q-1 爲含 q 個 9 之數；其分母自爲 q 個 9 後邊有 p 個零. 故得化循環小數爲普通分數之法則如下:

從含不循環及循環數字之整數，減去含不循環數字之整數作爲分子，取一循環數字之個數之 9 隨以不循環數字之個數之零之數爲分母.

60. 求級數

$$a,\ (a+d)r,\ (a+2d)r^2,(a+3d)r^3,\cdots\cdots\cdots$$

之 n 項之和，此級數之各項，乃等差及等比兩級數之相當項之積.

設以 S 表其和；於是

$$S=a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots\cdots\cdots\cdots+(a+\overline{n-1}d)r^{n-1};$$

$$\therefore\ rS=\qquad ar+(a+d)r^2+\cdots\cdots+(a+\overline{n-2}d)r^{n-1}+(a+\overline{n-1}d)r^n.$$

由減法，

$$S(1-r)=a+(dr+dr^2+\cdots\cdots+dr^{n-1})-(a+\overline{n-1}d)r^n$$

$$=a+\frac{dr(1-r^{n-1})}{1-r}-(a+\overline{n-1}d)r^n;$$

$$\therefore\ S=\frac{a}{1-r}+\frac{dr(1-r^{n-1})}{(1-r)^2}-\frac{(a+\overline{n-1}d)r^n}{1-r}.$$

推論. 將 S 寫爲

$$\frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}-\frac{dr^n}{(1-r)^2}-\frac{(a+\overline{n-1}d)r^n}{1-r}$$

之形式；於是，若 $r<1$，則由使 n 爲充分大數，可令 r^n 小至適意之程度. 此時凡含 r^n 之項，皆可令其小至可以省略，而得$\dfrac{a}{1-r}+\dfrac{dr}{(1-r)^2}$ 爲無窮項之和. 此點將於第二十一章中再論之.

求此類無窮級數之和，通常用下例方法最佳.

例1. 設 $x<1$，試求級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\text{至無窮項之和.}$$

設 $$S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots;$$

$$\therefore\ xS=\qquad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots;$$

$$\therefore\ S(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x};$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

例2.　求級數 $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 至 n 項之和.

設
$$S=1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{5^{n-1}};$$

$$\therefore\ \frac{1}{5}S=\qquad\frac{1}{5}+\frac{4}{5^2}+\frac{7}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-5}{5^{n-1}}+\frac{3n-2}{5^n};$$

$$\therefore\ \frac{4}{5}S=1+\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\cdots\cdots+\frac{3}{5^{n-1}}\right)\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+\frac{3}{5}\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{5^{n-2}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+\frac{3}{5}\cdot\frac{1-\frac{1}{5^{n-1}}}{1-\frac{1}{5}}-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=1+\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{5^n}$$

$$=\frac{7}{4}-\frac{12n+7}{4.5^n};$$

$$\therefore\ S=\frac{35}{16}-\frac{12n+7}{16\cdot5^{n-1}}.$$

習　　題　五.b.

1.　求級數 $1+2a+3a^2+4a^3+\cdots$ 至 n 項之和.

2.　求級數 $1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+\frac{31}{256}+\cdots$ 無窮項之和.

3.　求級數 $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots$ 無窮項之和; 設 $x<1$.

4.　求級數 $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots$ 至 n 項之和.

5.　求級數 $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\cdots$ 無窮項之和.

6.　求級數 $1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$ 無窮項之和, 設 $x<1$.

7.　求證首項爲 a 第三項爲 b 之 $G.P.$ 之第 $(n+1)$ 項等於首項爲 a 第 5 項爲 b 之 $G.P.$ 之第 $(2n+1)$ 項.

8.　設首項爲 a 公比爲 r 之 $G.P.$ 之 $2n$ 項之和, 等於首項爲 b 公比爲 r^2 之 $G\ P.$ 之 n 項之和. 求證 b 等於第一級數之首兩項之和.

9. 求無窮級數

$1+(1+b)r+(1+b+b^2)r^2+(1+b+b^2+b^3)r^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$ 之和，其 r 及 b 爲眞分數.

10. 某成 $G.P.$ 之三數之和爲 70；設以 4 乘二外項，以 5 乘中項，則三積成 $A.P.$，試求此三數.

11. 某 $G.P.$ 之首二項之和爲 5，又每項爲其後一切項之和之三倍，試求此級數.

求以下各級數之和：

12. $x+a,\ x^2+2a,\ x^3+3a,\cdots\cdots$ 至 n 項.

13. $x(x+y)+x^2(x^2+y^2)+x^3(x^3+y^3)\cdots\cdots$ 至 n 項.

14. $a+\frac{1}{3},\ 3a-\frac{1}{6},\ 5a+\frac{1}{12}+\cdots\cdots$ 至 $2p$ 項.

15. $\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{2}{3^5}+\frac{3}{3^6}+\cdots\cdots$ 至無窮.

16. $\frac{4}{7}-\frac{5}{7^2}+\frac{4}{7^3}-\frac{5}{7^4}+\frac{4}{7^5}-\frac{5}{7^6}\cdots\cdots$ 至無窮.

17. 設 a,b,c,d 成 $G.P.$ 求證

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(d-b)^2=(a-d)^2.$$

18. 設 a,b 之等差中項爲其等比中項之二倍；試證

$$a:b=2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}.$$

19. 求第 r 項爲 $(2r+1)2^r$ 之級數之 n 項和.

20. 設某級數首項爲 1，其第偶數項爲前一項之 a 倍；奇數項爲前一項之 b 倍；試求此級數之 $2n$ 項之和.

21. 設 S_n 表首項 a，公比 r 之 $G.P.$ 之 n 項和，試求 S_1, S_3, S_5, $\cdots S_{2n-1}$.

22. 設 $S_1,S_2,S_3\cdots S_p$ 表首項爲 $1,2,3,\cdots p$，公比爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{p+1}$ 之無窮級數之和；求證 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_p=\frac{p}{2}(p+3)$.

23. 設 $r<1$，且爲正數，m 爲正整數，求證

$$(2m+1)r^m(1-r)<1-r^{2m+1}.$$

由是證明 n 爲無限大時 nr^n 爲無限小.

第六章

調和級數．關於調和級數之定理．

61．定義． a,b,c 三量，當$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c}$時，稱爲成調和級數．

設若干量中之任三量均成調和級數，則謂此若干量成調和級數．

62． 成調和級數之諸量之倒數成等差級數．

設 a,b,c 三數成調和級數，由定義，

$$\frac{a}{c}=\frac{a-b}{b-c};$$

$$\therefore\ a(b-c)=c(a-b),$$

以 abc 除各項，得

$$\frac{1}{c}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{a},$$

本命題由是證明．

63． 調和性質在幾何學及音學上甚爲重要，故頗令人注意，至於代數學中，則上命題爲惟一重要者．求調和級數之任若干項之和，至今尙無一般公式；關於調和級數之問題，通常均先將各項顚倒，再利用其與 $A.P.$ 相當之性質以解決之．

64. 求二已知量之調和中項.

設 a,b 爲二已知量，H 爲其調和中項；則 $\frac{1}{a}$，$\frac{1}{H}$，$\frac{1}{b}$ 成 $A.P.$；

$$\therefore \quad \frac{1}{H}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{H},$$

$$\frac{2}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}.$$

例. 於 7 及 $\frac{1}{6}$ 間插入 40 個調和中項.

此處 6 爲以 $\frac{1}{7}$ 爲首項之 $A.P.$ 之第 42 項；設 d 表公差，則

$$6=\frac{1}{7}+41d;\ 而\ d=\frac{1}{7}.$$

由是諸等差中項爲 $\frac{2}{7}$，$\frac{3}{7}$，$\cdots\cdots\cdots\frac{41}{7}$；故所求諸調和中項爲 $3\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{3}$，$\cdots\cdots\frac{7}{41}$.

65. 設 A,G,H 表 a 及 b 之等差，等比，及調和中項，前已證明

$$A=\frac{a+b}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$G=\sqrt{ab}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$H=\frac{2ab}{a+b}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

是以 $$AH=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2;$$

即，G 爲 A,H 間之等比中項.

由此可知

$$A-G=\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\right)^2;$$

當 a,b 爲正時，此亦爲正； 故知任二正量之等差中項，必大於其等比中項.

又由方程式 $G^2=AH$，知 G 爲 A 與 H 之間之值；且已證明 $A>G$，由是 $G>H$；故知任二正量間之等差等比及調和中項，成遞降之順序.

66. 級數雜題可與吾人以運用技巧及機智之機會，其解法常純粹受某種機智之影響. 學者將見下列諸提示之有用也.

1. $A.P.$ 之各項加或減同一量後，結果仍成 $A.P.$，其公差與前同. [§38.]

2. $A.P.$ 之各項乘或除以同一量後，結果仍成 $A.P.$，但公差與前不同.

3. $G.P.$ 之各項乘以或除以同一量後，結果仍爲 $G.P$，其公比同前. [§51.]

4. $a,b,c,d,\cdots$ 若成 $G.P.$，則亦成連比例，因由定義，

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\cdots\cdots=\frac{1}{r}\text{也}.$$

反之，成連比例之諸量亦可以 $x, xr, xr^2, \cdots\cdots\cdots\cdots$ 表之.

例1. 設 a^2, b^2, c^2 成 $A.P.$，試證 $b+c$，$c+a$，$a+b$ 成 $H.P.$

以 $ab+ac+bc$ 加於各項，可知

$$a^2+ab+ac+bc,\ b^2+ba+bc+ac,\ c^2+ca+cb+ab \text{ 成 } A.P.$$

即 $$(a+b)(a+c),\ (b+c)(b+a),\ (c+a)(c+b) \text{ 成 } A.P.$$

$\therefore$ 以 $(a+b)(b+c)(c+a)$ 除各項，得

$$\frac{1}{b+c},\ \frac{1}{c+a},\ \frac{1}{a+b} \text{ 成 } A.P.$$

即 $$b+c,\ c+a,\ a+b \text{ 成 } H.P.$$

例2. 設某 $A.P.$ 之末項為 l，公差為 d，n 項和為 s，三者之關係為 $8ds=(d+2l)^2$，試證 $d=2a$.

因已知關係於任若干項皆眞，使 $n=1$；於是

$$a=l=s.$$

代入，得 $$8ad=(d+2a)^2,$$

或 $$(d-2a)^2=0;$$

$$\therefore\ d=2a.$$

例3. 設某 $A.P.$ 之第 p, q, r, s 四項成 $G.P.$，試證 $p-q$, $q-r, r-s$ 亦成 $G.P.$

用常用法表示，得

$$\frac{a+(p-1)d}{a+(q-1)d}=\frac{a+(q-1)d}{a+(r-1)d}=\frac{a+(r-1)d}{a+(s-1)d} \qquad [\S 66,(4)];$$

$\therefore$ 每比

$$=\frac{\{a+(p-1)d\}-\{a+(q-1)d\}}{\{a+(q-1)d\}-\{a+(r-1)d\}}$$

$$=\frac{\{a+(q-1)d\}-\{a+(r-1)d\}}{\{a+(r-1)d\}-\{a+(s-1)d\}}$$

$$=\frac{p-q}{q-r}=\frac{q-r}{r-s}.$$

故 $p-q, q-r, r-s$ 成 $G.P.$

67. $1, 2, 3, \cdots\cdots$ 諸數常目為自然數，此級數之第 n 項為 n，其前 n 項之和為 $\frac{n}{2}(n+1)$.

68. 求首 n 自然數之平方和.

設以 S 表此和；於是

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2.$$

因 $$n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1;$$

以 $n-1$ 代 n,

$$(n-1)^3-(n-2)^3=3(n-1)^2-3(n-1)+1;$$

同法 $$(n-2)^3-(n-3)^3=3(n-2)^2-3(n-2)+1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1;$$

$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1;$$

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1.$$

由加法，

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3(1+2+3\cdots+n)+n$$

$$=3S-\frac{3n(n+1)}{2}+n.$$

$$\therefore\ 3S=n^3-n+\frac{3n(n+1)}{2}$$

$$=n(n+1)(n-1+\tfrac{3}{2});$$

$$\therefore\ S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

69. 求首 n 自然數之立方和.

設以 S 表此和；於是

$$S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3.$$

因

$$n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1;$$

$$(n-1)^4-(n-2)^4=4(n-1)^3-6(n-1)^2+4(n-1)-1;$$

$$(n-2)^4-(n-3)^4=4(n-2)^3-6(n-2)^2+4(n-2)-1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1;$$

$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1;$$

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1.$$

由加法，

$$n^4=4S-6(1^2+2^2+\cdots+n^2)+4(1+2+\cdots+n)-n;$$

$$\therefore\ 4S=n^4+n+6(1^2+2^2+\cdots+n^2)-4(1+2+\cdots+n)$$

$$=n^4+n+n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)$$

$$=n(n+1)(n^2-n+1+2n+1-2)$$

$$=n(n+1)(n^2+n);$$

$$\therefore\ S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

故首 n 自然數之立方和，等於首 n 自然數之和之平方.

用本節及前兩節之公式，可求級數

$$a,\ a+d,\ a+2d,\cdots\cdots$$

之平方和及立方和.

70. 爲便於援引上證諸結果計，常引用一新記號；此記號在高級數學中常見之．即以

$\sum n$　表級數　$1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n$,

$\sum n^2$　表級數　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2$,

$\sum n^3$　表級數　$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\cdots+n^3$.

以 $\sum$ 置於某項之前，表以此項爲範式之所有項之和．

例1．　求級數 $1.2+2.3+3.4\cdots\cdots$ 至 n 項之和．

其第 n 項 $=n(n+1)=n^2+n$；將各項寫爲相似之形式，則得兩列，一含首 n 個自然數，一個自然數含其平方．

$$\begin{aligned}\therefore\quad \text{其和}\ &=\sum n^2+\sum n\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\\ &=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1}{3}+1\right)\\ &=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.\end{aligned}$$

例2．　某級數之第 n 項爲 $2^{n-1}+8n^3-6n^2$，試求此級數之 n 項和．

以 S 表其和；於是

$$\begin{aligned}S&=\sum 2^{n-1}+8\sum n^3-6\sum n^2\\ &=\frac{2^n-1}{2-1}+\frac{8n^2(n+1)^2}{4}-\frac{6n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &=2^n-1+n(n+1)\{2n(n+1)-(2n+1)\}\\ &=2^n-1+n(n+1)(2n^2-1).\end{aligned}$$

習　　題　　六.a.

1．　求下列各級數之第四項：

(1)　2，$2\frac{1}{2}$，$3\frac{1}{3}$，……

(2)　2，$2\frac{1}{2}$，3，……

(3)　2，$2\frac{1}{2}$，$3\frac{1}{8}$，……

2．　於 5 及 11 間插入兩個調和中項．

3．　於$\frac{2}{3}$及$\frac{2}{13}$間插入四個調和中項．

4. 設 12 及 $9\frac{3}{5}$ 爲某二數間之等比中項及調和中項；求此二數．

5. 設二量間之調和中項比等比中項爲 12 比 13；試證此二量之比爲 4 比 9．

6. 設 a, b, c 成 $H.P.$ 試證

$$a:a-b=a+c:a-c.$$

7. 設某 $H.P.$ 之第 m 項爲 n，第 n 項爲 m；試證其第 $m+n$ 項等於 $\frac{mn}{m+n}$．

8. 設某 $H.P.$ 之第 p,q,r 項爲 a,b,c；試證

$$(q-r)bc+(r-p)ca+(p-q)ab=0$$

9. 設 b 爲 a,c 間之調和中項，試證

$$\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

設已知級數之第 n 項如下，試求其 n 項之和：

10. $3n^2-n$.　　11. $n^3+\frac{3}{2}n$.　　12. $n(n+2)$.

13. $n^2(2n+3)$.　　14. 3^n-2^n.　　15. $3(4^n-2n^2)-4n^3$.

16. 設某 $A.P.$ 之第 $(m+1)$，$(n+1)$，及 $(r+1)$ 成 $G.P.$，又 m, n, r 成 $H.P.$；試證此 $A.P.$ 之公差及首項之比爲 $-\frac{2}{n}$．

17. 設 l,m,n 三數成 $G.P.$，試證第 l,m,n 項成 $H.P.$ 之 $A.P.$ 之首項與公差之比等於 $m+1$ 比 1．

18. 設某級數之 n 項之和爲 $a+bn+cn^2$，試求第 n 項及此級數之性質．

19. 求級數之 n 項之和，設其第 n 項爲

$$4n(n^2+1)-(6n^2+1).$$

20. 設於任二量間，插入二等差中項 A_1, A_2；二等比中項 G_1, G_2；二調和中項 H_1, H_2；試證 $G_1G_2 : H_1H_2=A_1+A_2 : H_1+H_2$．

21. 設 p 爲二數之 n 個等差中項之第一中項，q 爲 n 個調和中項之第一中項；試證 q 之値不能在 p 及 $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2 p$ 之間．

22. 求 $A.P.$ 之諸項之立方和，並證其能爲諸項之和整除．

彈　積

71. 求正方形底之完全角錐體彈積之彈數.

設底之每邊含彈 n 粒；則底層之彈數爲 n^2，第二層爲 $(n-1)^2$，第三層爲 $(n-2)^2$；類推；其頂爲一粒.

$$\therefore\ S=n^2+(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad [\S 68.]$$

72. 求正三角形底之完全角錐體彈積之彈數.

設底之每邊含彈 n 粒；則底層之彈數爲

$$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1;$$

即

$$\frac{n(n+1)}{2} \text{或} \frac{1}{2}(n^2+n).$$

於上結果內，以 $n-1$，$n-2$，……代 n，則得第 2，3，……層之彈數.

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\left(\sum n^2+\sum n\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \qquad [\S 70.]$$

73. 求矩形底之完全角錐體彈積之彈數.

設 m 及 n 爲底之長邊及短邊之彈數.

其最上一層僅有一行，含子彈 $m-(n-1)$，或 $m-n+1$ 粒；

次一層之彈數爲 $2(m-n+2)$；

再次一層之彈數爲 $3(m-n+3)$；

類推；

最下一層之彈數爲 $n(m-n+n)$.

$$\therefore\ S=(m-n+1)+2(m-n+2)+3(m-n+3)+\cdots+n(m-n+n)$$
$$=(m-n)(1+2+3+\cdots+n)+(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$
$$=\frac{(m-n)n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{n(n+1)}{6}\{3(m-n)+2n+1\}$$
$$=\frac{n(n+1)(3m-n+1)}{6}.$$

74. 求矩形底之不完全角錐體之彈積之彈數.

設 a 及 b 表頂層之二邊之彈數，n 表層數. 則

頂層之彈數為 ab;

次一層之彈數為 $(a+1)(b+1)$;

再次層之彈數為 $(a+2)(b+2)$;

類推;

其底層之彈數為 $(a+\overline{n-1})(b+\overline{n-1})$,

或 $$ab+(a+b)(n-1)+(n-1)^2.$$

$$\therefore\ S=abn+(a+b)\sum(n-1)+\sum(n-1)^2$$
$$=abn+\frac{(n-1)n(a+b)}{2}+\frac{(n-1)n(2.\overline{n-1}+1)}{6}$$
$$=\frac{n}{6}\{6ab+3(a+b)(n-1)+(n-1)(2n-1)\}.$$

75. 在數字實例中，用下法較為簡易.

例. 設有一 16 層之不完全正方形彈積，其頂層每邊含 12 粒，試求此彈積之彈數.

若取一底邊 11 之正方形之彈積置於頂層，則得一 27 層之完全彈積.

此完全彈積之彈數 $=\dfrac{27\times28\times55}{6}=6930$;　　[71.]

後加彈積之彈數 $=\dfrac{11\times12\times23}{6}=506$;

$\therefore$ 不完全彈積之彈數 $=6424$.

習 題 六.h.

求下列各彈積之彈數:

1. 底層每邊含 15 彈之正方形彈積.

2. 底層每邊 18 彈之三角形彈積.

3. 底層長邊含 50 粒, 短邊含 28 粒之矩形彈積.

4. 底層每邊 25 粒, 上層每邊 14 粒之不完全正三角形彈積.

5. 底層每邊 40 粒之 27 層之不完全正方形彈積.

6. 一完全矩形彈積含彈 24395 粒; 其底之一邊爲 34 粒, 試求他一邊之彈數.

7. 一正方彈積, 頂層彈數爲 169, 底層彈數爲 1089; 試求此彈積之彈數.

8. 一完全矩形彈積之彈數爲 15, 底層之長邊爲 20 粒, 求彈數.

9. 一不完全之矩形彈積, 其上層長短邊之彈數爲 11 及 18, 底層短邊爲 30; 求彈數.

10. 設有一不完全矩形彈積, 其上層長短邊之彈數爲 15 及 6, 問將其補成完全矩形彈積, 須用彈若干?

11. 三角形彈積之彈數較同層數之正方形彈積彈數之半多 150; 求三角形彈積之底層之彈數.

12. 設有一不完全之正方形彈積, 其頂層彈數較底層少 1005 粒; 試求其彈數.

13. 設有正方形及三角形之兩彈積, 後者層數爲前者之二倍, 試證前者彈數爲後者四分之一.

14. 設有三角形及正方形之兩彈積, 其層數之比爲 1 與 2, 彈數之比爲 13 與 175, 試求二彈積之彈數各若干?

15. 由 16 磅彈丸積成之彈積, 價値 £51; 設每担 (*cwt*) 鐵之價値爲 10*s*. 6*d*., 試求最下層之彈數.

16. 設將 n 層完全正方形彈積改成一同層數之三角形彈積; 試證所餘子彈恰足堆成另一三角形彈積, 並求其一邊之彈數.

第　七　章

紀　數　法

76. 吾人在算術中習見之數，皆用 10 之乘方之倍數表之；例如

$$25=2\times10+5;$$

$$4705=4\times10^3+7\times10^2+0\times10+5.$$

此種紀數法稱爲常用或十進法．十稱爲此種進法之進率；其所用之符號爲九個數字及一個零．

同此，10 外之任何數皆用作進率；如以 7 爲進率，則 2453 所表之數爲 $2\times7^3+4\times7^2+5\times7+3$；在此種進法內，不能有大於 6 之數字．

又若進率爲 r，則 2453 表 $2\times r^3+4\times r^2+5\times r+3$．一般言之，若進率爲 r，而 $a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 爲由個位起之數字；則由此作成之數可表以

$$a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+a_{n-2}r^{n-2}+\cdots\cdots+a_2r^2+a_1r+a_0,$$

係數 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots\cdots\cdots a_0$ 均爲小於 r 之整數，第一數後之一數幾數可以爲零．

故此進位法中所用數字爲由 0 至 $r-1$ 之 r 個數字．

77. 二進，三進，四進，五進，六進，七進，八進，九進，十進，十一進，十二進諸名詞，表示以二，三，$\cdots\cdots\cdots$十二爲進率之進位法．

在十一，十二，……等進法中，必須用大於九之數字之符號．惟進率大於十二之進法爲用殊鮮，必需時可以 t, e 及 T 表十，十一，及十二．

10 在任何進位法中均表進率而非表十，此點必須注意．

78. 算術之基本四法在任何進法均能適用；但連續乘方不復爲十之乘方；故進位時亦當以所用進法之進率除而勿以十除．

例1．在八進法中，從 530225 減 371532，並以 27 乘其差．

$$\begin{array}{r} 530225 \\ \underline{371532} \\ 136473 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 136473 \\ \underline{27} \\ 1226235 \\ \underline{275166} \\ 4200115 \end{array}$$

說明．減法在個位以後，因 2 減 3 不足，故加 8；故由 10 減 3，餘 7；又由 10 減 6 餘 4；由 8 減 2 餘 6；餘類推．

其次以 7 乘之，

$$3\times 7 = \text{二十一} = 2\times 8+5;$$

故進 2 餘 5．

又　　$$7\times 7+2 = \text{五十一} = 6\times 8+3;$$

故進 6 餘 3；餘類推，迄乘法完成止．

在加法中，

$$3+6 = \text{九} = 1\times 8+1;$$

故進 1 餘 1．

同法，　$$2+6+1 = \text{九} = 1\times 8+1;$$

$$6+1+1 = \text{八} = 1\times 8+0;$$

餘類推．

例2．在 12 進法中，以 9 除 $15et20$．

$$\begin{array}{r} 9)\underline{15et20} \\ 1ee96\cdots 6. \end{array}$$

說明．　$15 = 1\times T+5 = \text{十七} = 1\times 9+8$，

故商 1 餘 8．

又　$8\times T+e = \text{一百零七} = e\times 9+8$；

故商 e 餘 8；餘類推．

例3. 在七進法中，求 442641 之平方根.

```
      442641(546
      34
134 | 1026
    |  602
1416| 12441
    | 12441
```

習 題 七. a.

1. 用五進法求 23241，4032，300421 之和.
2. 求九進數 303478，150732，264305 之和.
3. 用八進法由 3673124 減 1732765.
4. 用八進法由 $3te756$ 取去 $2e46t2$.
5. 用六進法以 4 除 1131315 及 235143 之差.
6. 用七進法以 35 乘 6431.
7. 求九進數 4685，3483 之積.
8. 用七進法以 36 除 102432.
9. 用三進法從 11022201 減 121012，並以 1201 除其差.
10. 用五進法求 300114 之平方根.
11. 用十一進法求 $tttt$ 之平方根.
12. 用七進法求 2541 及 3102 之 $G.C.M.$
13. 用七進法以 6541 除 14332216.
14. 用八進法從 103050301 減 20404020，並求其差之平方根.
15. 用十二進法求 $eet001$ 之平方根.
16. 以下爲六進數，試勿化爲十進數，用常法求：
    (1) 31141 及 3102 之 $G.C.M.$
    (2) 23,24,30,32,40,41,43,50 之 $L.C.M.$

79. 用任意進法表已知整數.

設 N 爲已知數，r 爲指定進法之進率.

設 a_0，a_1，a_2，$\cdots\cdots\cdots a_n$ 表從個位起之 N 之數字；於是

$$N=a_nr^n+a_{n-1}r^{n-1}+\cdots\cdots+a_2r^2+a_1r+a_0.$$

茲定 a_0, a_1, a_2, $\cdots a_n$ 之值.

以 r 除 N，則餘數爲 a_0，而商數爲

$$a_nr^{n-1}+a_{n-1}r^{n-2}+\cdots\cdots+a_2r+a_1.$$

再以 r 除之，則餘數爲 a_1；

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a_2$；

依此進行，至不能再有商時爲止.

故 a_0，a_1，$a_2\cdots\cdots\cdots a_n$ 之值，均可由陸續除以指定進法之進率決定之.

例1. 試用七進法表十進數 5213.

$$\begin{array}{r}
7\,)\underline{5213}\\
7\,)\underline{744}\cdots\cdots 5\\
7\,)\underline{106}\cdots\cdots 2\\
7\,)\underline{15}\cdots\cdots 1\\
2\cdots\cdots 1
\end{array}$$

故 $$5213=2\times7^4+1\times7^3+1\times7^2+2\times7+5;$$

而所求數爲 21125.

例2. 試將七進數 21125 化爲十一進數.

$$\begin{array}{r}
e\,)\underline{21125}\\
e\,)\underline{1244}\cdots\cdots t\\
e\,)\underline{61}\cdots\cdots 0\\
3\cdots\cdots t
\end{array}$$

故所求數爲 $3t0t$.

說明. 在演算之第一行中，

$$21=2\times7+1=\text{十五}=1\times e+4;$$

故以 e 除之，商 1 餘 4.

其次 $4\times7+1=$ 二十九 $=2\times e+7$；

故商 2 餘 7；依此類推.

例3. 用十進位法將十二進數 7215 化爲十進數；再以十二進法驗證其確否.

用十進法

$$\begin{array}{r}
7215\\
\underline{12}\\
86\\
\underline{12}\\
1033\\
\underline{12}\\
12401
\end{array}$$

用十二進法.

$$\begin{array}{r}
t\,)\underline{7215}\\
t\,)\underline{874}\cdots\cdots 1\\
t\,)\underline{t4}\cdots\cdots 0\\
t\,)\underline{10}\cdots\cdots 4\\
1\cdots\cdots 2
\end{array}$$

二法皆得 12401.

說明. 十二進數7215表十進數$7\times12^3+2\times12^2+1\times12+5$,將其寫爲 $[\{(7\times12+2)\}\times12+1]\times12+5$ 之形式. 最易計算；由是以12 乘 7,於其積加 2；又以 12 乘 86 於其積加 1；又以 12 乘1033 於其積加 5.

80. 此前討論僅限於整數，但分數亦可用任何進法表之，如

十進法之 .25 表 $\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2}$;

六進法之 .25 表 $\frac{2}{6}+\frac{5}{6^2}$;

r 進法之 .25 表 $\frac{2}{r}+\frac{5}{r^2}$.

如此表示之分數，與用十進分數之形式類似，名曰進率分數(*radix fraction*)，其點名曰進率點 (*radix point*). 以 r 爲進率之此種分數之一般形式爲

$$\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

b_1, b_2, b_3,……爲小於 r 之整數，其中之一個或數個可以爲零.

81. 用任意進法表已知進率分數.

設 F 爲已知分數，r 爲指定之進率.

設 b_1, b_2, b_3……爲由左方起之所求諸數字；於是

$$F=\frac{b_1}{r}+\frac{b_2}{r^2}+\frac{b_3}{r^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

茲求定 b_1, b_2, b_3………之值.

以 r 乘方程式之兩邊；得

$$rF=b_1+\frac{b_2}{r}+\frac{b_3}{r^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

故 b_1 等於 rF 之整數部分；若以 F_1 表其分數部份；則

$$F_1=\frac{b_2}{r}+\frac{b_3}{r^2}+\cdots\cdots\cdots$$

再以 r 乘之；則 b_2 應爲 F_1 之整數部份；同法連續以 r 乘之，則求得其餘各數字，由是已知分數可以指定之進法表之.

當連續乘以 r 時，若有一積爲一整數，則演算即止於此步，而已知分數可以有限數字表之，但若諸積均不爲整數，則此演算永無終結．此時數字循環，成一類似循環小數之進率分數．

例1．化$\frac{13}{16}$爲六進法之進率分數．

$$\frac{13}{16}\times 6=\frac{13\times 3}{8}=4+\frac{7}{8};$$
$$\frac{7}{8}\times 6=\frac{7\times 3}{4}=5+\frac{1}{4};$$
$$\frac{1}{4}\times 6=\frac{1\times 3}{2}=1+\frac{1}{2};$$
$$\frac{1}{2}\times 6=3.$$

$$\therefore \text{所求分數}=\frac{4}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{3}{6^4}$$
$$=.4513.$$

例2．試將 16064.24 由八進數化爲五進數．

整數部分及小數部分須分別處理之．

$$\begin{array}{r|l} 5 & 16064 \\ \hline 5 & 2644\cdots 0 \\ \hline 5 & 440\cdots 4 \\ \hline 5 & 71\cdots 3 \\ \hline 5 & 13\cdots 2 \\ \hline & 2\cdots 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} .24 \\ 5 \\ \hline 1.44 \\ 5 \\ \hline 2.64 \\ 5 \\ \hline 4.04 \\ 5 \\ \hline 0.24 \end{array}$$

小數部分於此後循環，故所求數爲 $212340.\dot{1}24\dot{0}$.

82. 在任何進率 r 進位法中，以 $r-1$ 除任一整數之數字和所得之餘數與以 $r-1$ 除該數所得之餘數相等．

設 N 表此數，$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 爲其由個位起之數字，S 表此諸數字之和，則

$$N=a_0+a_1r+a_2r^2+\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n;$$
$$S=a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n;$$
$$\therefore\ N-S=a_1(r-1)+a_2(r^2-1)+\cdots\cdots+a_{n-1}(r^{n-1}-1)+a_n(r^n-1).$$

今右邊各項均可以 $r-1$ 整除：

$$\therefore \quad \frac{N-S}{r-1}=\text{整數};$$

即
$$\frac{N}{r-1}=I+\frac{S}{r-1},$$

I 爲某整數；此即證明本命題.

故知 r 進法之數，若其數字和能爲 $r-1$ 整除，則亦能爲 $r-1$ 整除.

83. 由上節命題，若 $r=10$，則以 9 除某數所得之餘數，與以 9 除其數字和所得之餘數相等. 核算乘法確否之"棄 9 法"，即基於此種性質.

此法則可如下說明之：

設 $9a+b$ 及 $9c+d$ 表二數，P 表此二數之積；於是

$$P=81ac+9bc+9ad+bd.$$

故 $\frac{P}{9}$ 之餘數與 $\frac{bd}{9}$ 之餘數相等；由是以 9 除 P 之數字和所得之餘數，與以 9 除 bd 之數字和所得之餘數相等. 若試驗結果與此不合，則此乘法必有誤. 在施算時，bd 可由相乘之二數之數字和立即求得之.

例. 31256 及 8427 之積能否爲 263395312?

被乘數，乘數，及積之數字和爲 17, 21, 及 34；此三數之數字和爲 8, 3, 及 7，是以 $bd=8\times3=24$，其數字和爲 6；由是得 6 及 7 之二不同餘數，故此乘法有誤.

84. 若 N 表 r 進法中之任意數，D 表其奇位數字和與偶位數字和之差，假定爲正數；則 $N-D$ 或 $N+D$ 必爲 $r+1$ 之倍數.

設其從個位起之數字爲 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$；則

$$N = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3 + \cdots\cdots + a_{n-1} r^{n-1} + a_n r^n.$$

$$\therefore \quad N - a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots\cdots = a_1(r+1) + a_2(r^2-1) + a_3(r^3+1) + \cdots;$$

按照 n 爲奇數或偶數，其右邊末項必爲 $a_n(r^n+1)$ 或 $a_n(r^n-1)$. 故右邊各項皆可以 $r+1$ 除盡；是以

$$\frac{N-(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots\cdots\cdots)}{r+1} = \text{整數}.$$

但 $$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots\cdots\cdots = \pm D;$$

$$\therefore \quad \frac{N \mp D}{r+1}\text{爲整數};$$

此即證明本命題.

推論. 設奇位數字和等於偶位數字和，則 $D=0$，而 N 可爲 $r+1$ 除盡.

例1. 求證在進率大於 4 之任何進法中，4.41 爲完全平方數.

設 r 爲進率；於是

$$4.41 = 4 + \frac{4}{r} + \frac{1}{r^2} = \left(2 + \frac{1}{r}\right)^2;$$

故 4.41 爲 2.1 之平方.

例2. 在何種進法中，以 2.13 表十進數 2.4375?

設爲 r 進法；則

$$2 + \frac{1}{r} + \frac{3}{r^2} = 2.4375 = 2\frac{7}{16},$$

由是 $$7r^2 - 16r - 48 = 0;$$

$$(7r+12)(r-4) = 0.$$

故其進率爲 4.

有時用下法最佳.

例3. 在何種進法中以 101215 表九進數 25607?

新數外形既較原數大，其進率自必小於 9；又必大於 5；故所求進法必爲 6,7 或 8；由試驗知其爲 7.

例4. 設有一長方體，體積 364 立方呎 1048 立方吋，底面積 46 平方呎 8 平方吋，試用十二進法求其高度.

其體積爲 $364\frac{1048}{1728}$立方呎，在十一進法爲 264.734 立方呎.

其底面積爲 $46\frac{8}{144}$方吋，在十二進法爲 $3t.08$ 方吋.

故須用十二進位法以 $3t.08$ 除 264.734.

$$
\begin{array}{r}
3t08)\,26473.4\,(7.e \\
\underline{22t48} \\
36274 \\
\underline{36274}
\end{array}
$$

由是其高爲 7 呎 11 吋.

習　題　七b

1. 以七進法表 4954.
2. 以五進法表 624.
3. 以二進法表 206.
4. 以三進法表 1458.
5. 以九之乘方表 5381.
6. 化四進數 212231 爲五進數.
7. 以 10 之乘方表十二進數 $398e$.
8. 化十二進數 $6t12$ 爲十一進數.
9. 化六進數 213014 爲九進數.
10. 化九進數 23861 爲八進位數.
11. 化九進數 .00803 爲五進位數.
12. 以 12 之乘方表七進數 20665152.
13. 化十二進數 $ttteee$ 爲十進數.
14. 表$\frac{3}{10}$以七進法之基分數.
15. 化十進數 17.15625 爲十二進數.
16. 化三進數 200.211 爲九進數.
17. 化十二進數 71.03 爲八進數.
18. 化七進分數$\frac{1552}{2626}$爲十進最簡分數.
19. 求七進數 $.\dot{4}$ 及 $.\dot{4}\dot{2}$ 之十進法之值.
20. 十進數 182 在何種進法中爲 222?
21. 十進分數$\frac{25}{128}$在何種進法中爲 .0302?

22. 設 554 表 24 之平方，問此種進法之進率爲何?

23. 於何進法內以 1746335 表 5t11e7?

24. 求進法之進率，設其 479,698,907 三數成等差級數.

25. 在何種進位法中，進率分數 .16，.20，.28 成等比級數.

26. 六進數 212542 以何進法表之爲 17486?

27. 試證 148.84 在進率大於八之任何進法中皆爲完全平方數.

28. 試證 1234321 在進率大於 4 之任何進法中皆爲完全平方數；且其平方根永表以相同四數字.

29. 試證 1.331 在進率大於三之任何進法內皆爲完全立方.

30. 權一噸之重量，在 1，2，4，8，16，……磅等砝碼中，何者爲必需?

31. 權萬噸之重量，在 1，3，9，27，81，……磅等砝碼中，何者爲必需? 每種砝碼只准用一個，但必要時可置於秤之任一端.

32. 試證 1367631 在進率大於七之任何進法中，皆爲完全立方數.

33. 試證若十進數之末三數字所成之數可以爲 8 除盡，則此數亦可爲 8 除盡.

34. 試證 s 進數 $rrrr$ 之平方爲 $rrrq0001$；其 q，r，s 爲任意之三連續數.

35. 設 N 爲一 r 進數，N' 爲任意改變 N 之數字之次序所成之數. 試證 N 與 N' 之差能被 $r-1$ 除盡.

36. 設一數含有偶數個數字，試證若距兩端等遠之數字皆相等，則此數可以 $r+1$ 除盡.

37. 設在常進法中，S_1 爲數 N 之數字和，$3S_2$ 爲數 $3N$ 之數字和，試證 S_1 與 S_2 之差爲 3 之倍數.

38. 試證在常進法中任寫三數字，復依次重複之，則所成之數必均爲 7，11 及 13 之倍數.

39. 在進率爲奇數之進法中，奇數之數字和爲奇數，偶數之數字和爲偶數，試証明之.

40. 設 n 爲奇數，若任意寫 n 個數字，復依次重複作成一十進數，試証此數可以此 n 數字所成之數除盡；亦可以 9090……9091 等含 $n-1$ 個數字之數除盡.

第　八　章

不　盡　根　及　虛　量

85. 初等代數 §272 曾證凡類似$\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$之分式，均可以其分母之共軛式乘分子分母，將分母化爲有理式.

同此，凡類似$\dfrac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$之分式，其分母含三不盡根者，亦可由兩步演算將其化爲有理式.

蓋先以 $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$ 乘分子分母；則分母化爲$(\sqrt{b}+\sqrt{c^2})-(\sqrt{d})^2$或 $b+c-d+2\sqrt{bc}$. 再以 $(b+c-d)-2\sqrt{bc}$ 乘分母分子；則分母化爲有理式 $(b+c-d)^2-4bc$ 也.

例. 化簡 $\dfrac{12}{3+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}$.

原式
$$=\frac{12(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{(3+\sqrt{5})^2-(2\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{12(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})}{6+6\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2(3+\sqrt{5}+2\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$
$$=\frac{2+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-2\sqrt{2}}{2}$$
$$=1+\sqrt{5}+\sqrt{10}-\sqrt{2}.$$

86. 求將任意已知二項不盡根化爲有理式之因式.

情形I. 設已知不盡根爲 $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$.

設 $\sqrt[p]{a}=x$, $\sqrt[q]{b}=y$ 及 n 爲 p 及 q 之 $L.C.M.$ 則 x^n 及 y^n 皆爲有理；因不論 n 爲何值，x^n-y^n 皆可以 $x-y$ 除盡，且

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1}).$$

故所求有理化因式爲

$$x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1};$$

共有理積爲 x^n-y^n.

情形II. 設已知不盡根爲 $\sqrt[p]{a}+\sqrt[q]{b}$.

設 x, y 及 n 之意義如前；於是

(1) 設 n 爲偶數，則 x^n-y^n 可以 $x+y$ 除盡，而

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1}).$$

故共有理化因子爲

$$x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots+xy^{n-2}-y^{n-1};$$

共有理積爲 x^n-y^n.

(2) 設 n 爲奇數，則 x^n+y^n 可以 $x+y$ 除盡，而

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1}).$$

故共有理化因子爲

$$x^{n-1}-x^{n-2}y+\cdots\cdots-xy^{n-2}+y^{n-1};$$

共有理積爲 x^n+y^n.

例1. 求將 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ 化爲有理數之因子.

設 $x=3^{\frac{1}{2}}$, $y=5^{\frac{1}{3}}$；則 x^6 及 y^6 皆爲有理數，而

$$x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5);$$

以 $3^{\frac{1}{2}}$ 及 $5^{\frac{1}{3}}$ 代 x 及 y，則得所求因子爲

$$3^{\frac{5}{2}}-3^{\frac{4}{2}}\cdot5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{3}{2}}\cdot5^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{2}{2}}\cdot5^{\frac{3}{3}}+3^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{4}{3}}-5^{\frac{5}{3}},$$

或 $$3^{\frac{5}{2}}-9\cdot5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{3}{2}}\cdot5^{\frac{2}{3}}-15+3^{\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{4}{3}}-5^{\frac{5}{3}};$$

共有理積爲 $3^{\frac{6}{2}}-5^{\frac{6}{3}}=3^3-5^2=2$.

例2.　將$\left(5^{\frac{1}{2}}+9^{\frac{1}{8}}\right)\div\left(5^{\frac{1}{2}}-9^{\frac{1}{8}}\right)$化為有理分母之分數.

將分母化為有理數，分母等於 $5^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{1}{4}}$，設 $5^{\frac{1}{2}}=x$，$3^{\frac{1}{4}}=y$;於是，因

$$x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3),$$

故有理化因子為 $5^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{2}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{2}{4}}+3^{\frac{3}{4}}$;

而所求之有理分母為 $5^{\frac{4}{2}}-3^{\frac{4}{4}}=5^2-3=22$.

$$\therefore\quad 原式=\frac{\left(5^{\frac{1}{2}}+3^{\frac{1}{4}}\right)\left(5^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{2}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}+5^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{2}{4}}+3^{\frac{3}{4}}\right)}{22}$$

$$=\frac{5^{\frac{4}{2}}+2\cdot5^{\frac{3}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}+2\cdot5^{\frac{2}{2}}\cdot3^{\frac{2}{4}}+2\cdot5^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{3}{4}}+3^{\frac{4}{4}}}{22}$$

$$=\frac{14+5^{\frac{3}{2}}\cdot3^{\frac{1}{4}}+5\cdot3^{\frac{1}{2}}+5^{\frac{1}{2}}\cdot3^{\frac{3}{4}}}{11}$$

87. 初等代數§277 曾指出二項二次不盡根之平方根之求法.含兩個以上之二次不盡根之式，如 $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$，其平方根有時亦可求得.

假定　$\sqrt{a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$;

$\therefore\ a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{xz}+2\sqrt{yz}$.

故若 $2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$, $2\sqrt{xz}=\sqrt{c}$, $2\sqrt{yz}=\sqrt{d}$,

且由是求得之 x,y,z 之值能適合 $x+y+z=a$，則得所求之根.

例.　求 $21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$ 之平方根.

假定　$\sqrt{21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$;

$\therefore\ 21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{xz}-2\sqrt{yz}$.

$$2\sqrt{xy}=8\sqrt{3},\ 2\sqrt{xz}=4\sqrt{15},\ 2\sqrt{yz}=4\sqrt{5};$$

由乘法，　$xyz=240$; 即 $\sqrt{xyz}=4\sqrt{15}$;

故得　$\sqrt{x}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{y}=2$, $\sqrt{z}=\sqrt{5}$.

又此等值適合方程式 $x+y+z=21$，故所求之平方根為 $2\sqrt{3}+2-\sqrt{5}$.

88. 設 $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$，則 $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}$.

因兩邊乘立方則得

$$a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}.$$

等置有理部分及無理部分，得

$$a=x^3+3xy,\quad \sqrt{b}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y};$$

$$\therefore\ a-\sqrt{b}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y};$$

即 $$\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}.$$

同法，利用第十三章二項式定理，可證若

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}，則\ \sqrt[n]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y},$$

其 n 爲任意正整數.

89. 類似 $a\pm\sqrt{b}$ 之式之立方根，有時可用下法求得之.

設 $$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}.$$

則 $$\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}.$$

$$\therefore \sqrt[3]{a^2-b}=x^2-y \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又，如上節，

$$a=x^3+3xy \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

其 x 及 y 之值，由 (1) 及 (2) 定之.

在 (1) 內設 $\sqrt[3]{a^2-b}=c$；將 y 之值代人 (2)，得

$$a=x^3+3x(x^2-c);$$

即 $$4x^3-3cx=a.$$

設 x 之值可由此方程式試驗得之，則 y 之值可由 $y=x^2-c$ 得之.

注意. 求立方根與求平方根不同，不能假定立方根爲 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$，否則乘立方必得

$$a+\sqrt{b}=x\sqrt{x}+3x\sqrt{y}+3y\sqrt{x}+y\sqrt{y},$$

其右方皆爲無理項，吾人不能等置其有理部分及無理部分矣.

例. 求 $72-32\sqrt{5}$ 之立方根.

假定 $\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=x-\sqrt{y}$;

於是 $\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}=x+\sqrt{y}$.

由乘法, $\sqrt[3]{5184-1024\times 5}=x^2-y$;

即 $4=x^2-y \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$.

又 $72-32\sqrt{5}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$;

由是 $72=x^3+3xy \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$.

由 (1) 及 (2), $72=x^3+3x(x^2-4)$;

即 $x^3-3x=18$.

由試驗知 $x=3$; 故 $y=5$, 而所求立方根爲 $3-\sqrt{5}$.

90. 設二項式含有兩個二次不盡根, 則其立方根可如下求之:

例. 求 $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$ 之立方根.

$$\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}}=\sqrt[3]{3\sqrt{3}\left(3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)}$$

$$=\sqrt{3}\sqrt[3]{3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}.$$

用上節方法, 得

$$\sqrt[3]{3+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}=1+\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$\therefore \text{ 所求立方根 } =\sqrt{3}\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

91. 幾個較難之不盡根例題.

例1. 將 $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ 化爲有理分母之分數.

原式 $$=\frac{4}{3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1}$$

$$=\frac{4\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)}{\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)\left(3^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{1}{3}}+1\right)}$$

$$=\frac{4\left(3^{\frac{1}{3}}+1\right)}{3+1}=3^{\frac{1}{3}}+1$$

例2.　求$\frac{3}{2}(x-1)+\sqrt{2x^2-7x-4}$之平方根.

原式 $=\frac{1}{2}\{3x-3+2\sqrt{(2x+1)(x-4)}\}$

$=\frac{1}{2}\{(2x+1)+(x-4)+2\sqrt{(2x+1)(x-4)}\}$;

由觀察知其平方根為

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-4}).$$

例3.　已知$\sqrt{5}=2.23607$，試求下式之值:

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}.$$

以 $\sqrt{2}$ 乘分子及分母

原式 $=\frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

$=\frac{\sqrt{5}-1}{2+3-\sqrt{5}}$

$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}=.44721.$

習　題　八. a.

將下列各式化為有理分母之分數:

1. $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.　　2. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

3. $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a+b}}$.　4. $\frac{2\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}-\sqrt{2a+\sqrt{a+1}}}$.

5. $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5}}$.　6. $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

求下列各式之有理化因子:

7. $\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}$.　8. $\sqrt[6]{5}+\sqrt[3]{2}$.　9. $a^{\frac{1}{5}}+b^{\frac{1}{4}}$.

10. $\sqrt[3]{3}-1$.　11. $2+\sqrt[4]{7}$.　12. $\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{3}$.

將下列各式化爲有理分母之分數:

13. $\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$. 14. $\frac{\sqrt[6]{9}-\sqrt[6]{8}}{\sqrt[6]{9}+\sqrt[6]{8}}$. 15. $\frac{\sqrt{2}.\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}+\sqrt{2}}$.

16. $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}+\sqrt[6]{9}}$. 17. $\frac{\sqrt{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}-\sqrt[3]{4}}$. 18. $\frac{\sqrt[6]{27}}{3-\sqrt[6]{9}}$.

求下列各式之平方根:

19. $16-2\sqrt{20}-2\sqrt{28}+2\sqrt{35}$. 20. $24+4\sqrt{15}-4\sqrt{21}-2\sqrt{35}$.

21. $6+\sqrt{12}-\sqrt{24}-\sqrt{8}$. 22. $5-\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$.

23. $a+3b+4+4\sqrt{a}-4\sqrt{3b}-2\sqrt{3ab}$.

24. $21+3\sqrt{8}-6\sqrt{3}-6\sqrt{7}-\sqrt{24}-\sqrt{56}+2\sqrt{21}$.

求下列各式之立方根:

25. $10+6\sqrt{3}$. 26. $38+17\sqrt{5}$. 27. $99-70\sqrt{2}$.

28. $38\sqrt{14}-100\sqrt{2}$. 29. $54\sqrt{3}+41\sqrt{5}$. 30. $135\sqrt{3}-87\sqrt{6}$.

求下列各式之平方根:

31. $a+x+\sqrt{2ax+x^2}$. 32. $2a-\sqrt{3a^2-2ab-b^2}$.

33. $1+a^2+(1+a^2+a^4)^{\frac{1}{2}}$. 34. $1+(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}$.

35. 設 $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}, b=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, 試求 $7a^2+11ab-7b^2$ 之值.

36. 設 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$, 試求 $3x^2-5xy+3y^2$ 之值.

求下列各式之值:

37. $\frac{\sqrt{26-15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}-\sqrt{38+5\sqrt{3}}}$. 38. $\sqrt{\frac{6+2\sqrt{3}}{33-19\sqrt{3}}}$.

39. $(28-10\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}-(7+4\sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$.

40. $(26+15\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}-(26+15\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}$.

41. 已知 $\sqrt{5}=2.23607$, 試求以下各式之值:

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{8}+\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$$

42. 以 $x-1+\sqrt[3]{2}$ 除 $x^3+1+3x\sqrt[3]{2}$.

43. 求 $9ab^2+(b^2+24a^2)\sqrt{b^2-3a^2}$ 之立方根.

44. 設 $2x=\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$, 試求 $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ 之值.

虛 量

92. 由符號法則，負數顯然不能有實平方根，但類似 $\sqrt{-a}$，$\sqrt{-1}$ 等符號所表之虛量，時常發現於研究數學時，且用之可得極有價值之結果．故茲說明此種根之性質．

當根號下之數爲負時，$\sqrt{\ }$ 不可復視爲可能之算術施算符號，僅正如 $\sqrt{a}$ 視爲順從 $\sqrt{a}\times\sqrt{a}=a$ 之關係之符號，規定 $\sqrt{-a}$ 爲合於 $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$ 者，吾人所採納者乃由此假定所得之一切意義．

用此定義可將虛量歸入常用代數法則之下；且用之所得之結果，與用於實量所得者同一正確可靠．

93. 由定義 $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1$.

$$\therefore\ \sqrt{a}.\sqrt{-1}\times\sqrt{a}.\sqrt{-1}=a(-1);$$

即
$$(\sqrt{a}.\sqrt{-1})^2=-a.$$

故可謂 $\sqrt{a}.\sqrt{-1}$ 與虛量 $\sqrt{-a}$ 同值．

94. 一式之虛量性質，以 $\sqrt{-1}$ 表之，常稱便利；

例如
$$\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=2\sqrt{-1}.$$
$$\sqrt{-7a^2}=\sqrt{7a^2\times(-1)}=a\sqrt{7}\sqrt{-1}.$$

95. 根號前之符號，若無根反聲明，常取正號，但在虛量之應用中，有一最應注意之點．

因　　　　$(-a)\times(-b)=ab$,

取其平方根，得

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\pm\sqrt{ab}.$$

故求 $\sqrt{-a}$ 及 $\sqrt{-b}$ 之積時，似乎 $\sqrt{ab}$ 前之符號為 $+$ 為 $-$ 均可，其實不然，因

$$\begin{aligned}\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}&=\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\cdot\sqrt{-1}\\&=\sqrt{ab}(\sqrt{-1})^2\\&=-\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

96. "虛式"之名，凡非完全實數之式，均可用之，故 $a+b\sqrt{-1}$ 可作為一切虛式之範式，其 a 及 b 為實數，有理無理均可.

97. 討論虛量時，可用組合律，此律已證明能用於其他不盡根量.

例1.　$a+b\sqrt{-1}\pm(c+d\sqrt{-1})=a\pm c+(b\pm d)\sqrt{-1}$.

例2.　$a+b\sqrt{-1}$ 及 $c+d\sqrt{-1}$ 之積

$$\begin{aligned}&=(a+b\sqrt{-1})(c+d\sqrt{-1})\\&=ac-bd+(bc+ad)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

98. 設 $a+b\sqrt{-1}=0$，則 $a=0$，$b=0$.

因，若　　$a+b\sqrt{-1}=0$,

則　　$b\sqrt{-1}=-a$;

$\therefore\ -b^2=a^2$;

$\therefore\ a^2+b^2=0$.

茲 a^2 及 b^2 皆為正量，故非 a^2 及 b^2 皆為零，其和不能為零；故 $a=0$，$b=0$.

99. 設 $a+b\sqrt{-1}=c+d\sqrt{-1}$，則 $a=c$，$b=d$.

因，移項得 $a-c+(b-d)\sqrt{-1}=0$;

由上節，知　　$a-c=0$，$b-d=0$;

故　　$a=c$，$b=d$.

故知兩虛式相等之必需條件及充足條件為實數部分相等及虛數部分相等.

100. 定義. 兩虛式若僅虛數部分之符號不同,則稱此虛式為共軛式.

如 $a-b\sqrt{-1}$ 與 $a+b\sqrt{-1}$ 為共軛式.

同樣 $\sqrt{2}+3\sqrt{-1}$ 與 $\sqrt{2}-3\sqrt{-1}$ 為共軛式.

101. 二共軛虛式之和或積均為實量.

因 $a+b\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1}=2a.$

又 $(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})=a^2-(-b^2)$

$$=a^2+b^2.$$

102. 定義. a^2+b^2 之平方根之正數,稱為二共軛式 $a+b\sqrt{-1}$ 及 $a-b\sqrt{-1}$ 之模數.

103. 二虛式之積之模數等於二虛式之模數之積.

設此二虛式為 $a+b\sqrt{-1}$ 及 $c+d\sqrt{-1}.$

則其積 $=ac-bd+(ad+bc)\sqrt{-1}$ 仍一虛式. 其模數

$$=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$$

$$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2};$$

本命題由是證明.

104. 分數之分母若為 $a+b\sqrt{-1}$ 之形式,則可以分母之共軛式 $a-b\sqrt{-1}$ 乘分子分母將其化為有理分母之分式.

例如，

$$\frac{c+d\sqrt{-1}}{a+b\sqrt{-1}}=\frac{(c+d\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})}{(a+b\sqrt{-1})(a-b\sqrt{-1})}$$

$$=\frac{ac+bd+(ad-bc)\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}\sqrt{-1}.$$

故由參照§97，知二虛式之和，差，積，或商各爲一同形式之虛式.

105. 求 $a+b\sqrt{-1}$ 之平方根.

假定 $$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1},$$

其 x 及 y 爲實量.

乘平方，得，$a+b\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1}$;

乘等置實數部分及虛數部分，

$$x^2-y^2=a\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$2xy=b\cdots\cdots\cdots\cdots(2);$$

$$\therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$$

$$=a^2+b^2;$$

$$\therefore\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

由 (1) 及 (3)，得

$$x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\quad y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2};$$

$$x=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}},\quad y=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}.$$

由是得所求之平方根.

因 x 及 y 爲實量，x^2+y^2 必爲正量，故 (3) 之 $\sqrt{a^2+b^2}$ 之前必取正號.

又，由 (2) 知 xy 之積必與 b 同號；故 b 若爲正，則 x,y 同號，爲負，則 x,y 異號.

例1.　求 $-7-24\sqrt{-1}$ 之平方根.

假定　$$\sqrt{-7-24\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1};$$

於是　$$-7-24\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1};$$

$$\therefore\ x^2-y^2=-7\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$2xy=-24.$$

$$\therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2$$

$$=49+576$$

$$=625;$$

$$\therefore\ x^2+y^2=25\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由 (1) 及 (2),　$x^2=9$, $y^2=16$;

$$\therefore\ x=\pm3,\ y=\pm4.$$

因 xy 之積爲負，故必取

$$x=3,\ y=-4;\ 或\ x=-3,\ y=4.$$

故其根爲 $3-4\sqrt{-1}$ 及 $-3+4\sqrt{-1}$;

即　$$\sqrt{-7-24\sqrt{-1}}=\pm(3-4\sqrt{-1}).$$

例2.　求 $\sqrt[4]{-64a^4}$ 之值.

$$\sqrt[4]{-64a^4}=\sqrt{\pm8a^2\sqrt{-1}}$$

$$=2a\sqrt{2}\sqrt{\pm\sqrt{-1}}.$$

現須求　$\sqrt{\pm\sqrt{-1}}$ 之值.

假定　$$\sqrt{+\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1};$$

則　$$+\sqrt{-1}=x^2-y^2+2xy\sqrt{-1};$$

$$\therefore\ x^2-y^2=0\ 及\ 2xy=1;$$

由是　$$x=\frac{1}{\sqrt{2}},y=\frac{1}{\sqrt{2}};\ 或\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}},y=-\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\therefore\ \sqrt{+\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1}).$$

同理　$$\sqrt{-\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{-1})$$

$$\therefore\sqrt{\pm\sqrt{-1}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm\sqrt{-1});$$

最後　$$\sqrt[4]{-64a^4}=\pm2a(1\pm\sqrt{-1}).$$

106. 符號 $\sqrt{-1}$ 常以字母 i 表之；但在讀者對於虛量之運用尚未熟習時，仍以用符號 $\sqrt{-1}$ 爲宜，$\sqrt{-1}$ 或 i 之連續乘方甚爲有用，學者應注意之；如

$$(\sqrt{-1})^1=\sqrt{-1} \qquad i=i;$$
$$(\sqrt{-1})^2=-1, \qquad i^2=-1;$$
$$(\sqrt{-1})^3=-\sqrt{-1}, \qquad i^3=-i;$$
$$(\sqrt{-1})^4=1, \qquad i^4=1;$$

每一乘方皆由以 $\sqrt{-1}$ 或 i 乘其前一乘方得之，故知此後必循環無疑．

107. 幾種常見之虛數性質之研究．

設 $$x=\sqrt[3]{1}；\text{則 } x^3=1，\text{或 } x^3-1=0;$$

即 $$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

$$\therefore\quad x-1=0，\text{或 } x^2+x+1=0;$$

故 $$x=1，\text{或 } x=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2};$$

由實際乘方，知此三值之立方皆等於 1．故一有三立方根

$$1,\qquad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2},\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2};$$

其中之二爲虛式．

設以 α 及 β 表之；於是因其爲方程式

$$x^2+x+1=0$$

之根，故其積爲 1；即

$$\alpha\beta=1;$$
$$\therefore\quad \alpha^3\beta=\alpha^2;$$

即 $$\beta=\alpha^2，\quad\text{因 } \alpha^3=1 \text{ 也}.$$

同法可證 $$\alpha=\beta^2.$$

108. 因任一虛根爲他一虛根之平方，故常以 $1,\omega,\omega^2$ 表 1 之三立方根．

又因 ω 適合方程式 $x^2+x+1=0$;

$$\therefore\ 1+\omega+\omega^2=0;$$

即 1 之三立方根之和爲零.

又 $$\omega\cdot\omega^2=\omega^3=1;$$

故知 (1) 二虛根之積爲 1.

(2) ω^3 之任何整數次方爲 1.

109. 尙有値吾人注意者，即 ω 之連續正整數次方爲 $1,\omega$, 及 ω^2, 蓋 n 若爲 3 之倍數，必可寫爲 $3m$; 而 $\omega^n=\omega^{3m}=1$.

若 n 非 3 之倍數，必可寫爲 $3m+1$, 或 $3m+2$.

若 $n=3m+1$, 則 $\omega^n=\omega^{3m+1}=\omega^{3m}.\omega=\omega$.

若 $n=3m+2$, $\omega^n=\omega^{3m+2}=\omega^{3m}.\omega^2=\omega^2$.

110. 今知任何量皆有三個立方根，其中之二爲虛量. 因 a^3 之立方根即 $a^3\times1$ 之立方根，故爲 $a,a\omega,a\omega^2$. 同理 9 之立方根爲 $\sqrt[3]{9},\omega\sqrt[3]{9}$, $\omega^2\sqrt[3]{9}$, 其中 $\sqrt[3]{9}$ 一根可用算術法則求得之. 除有相反聲明外，$\sqrt[3]{a}$ 永表 a 之算術立方根

例1. 試將 $\dfrac{(2+3\sqrt{-1})^2}{2+\sqrt{-1}}$ 化爲 $A+B\sqrt{-1}$ 之形式.

原式
$$=\frac{4-9+12\sqrt{-1}}{2+\sqrt{-1}}$$
$$\frac{(-5+12\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})}{(2+\sqrt{-1})(2-\sqrt{-1})}$$
$$=\frac{-10+12+29\sqrt{-1}}{4+1}$$
$$=\frac{2}{5}+\frac{29}{5}\sqrt{-1};$$

此即所求之形式.

例2. 試將 x^3+y^3 分解成三個一次因式.

因 $$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2),$$

$$\therefore\ x^3+y^3=(x+y)(x-\omega y)(x+\omega^2 y);$$

因 $\omega+\omega^2=-1$, 及 $\omega^3=1$ 也.

例3. 試證

$$(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

在 $a+\omega b+\omega^2c$ 及 $a+\omega^2b+\omega c$ 之積內,

b^2 及 c^2 之係數爲 $\omega^3=1$;

bc 之係數 $=\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega=-1$;

ca 及 ab 之係數 $=\omega^2+\omega=-1$;

$$\therefore\ (a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

例4. 試證

$$(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3=0.$$

因 $1+\omega+\omega^2=0$, 故得

$$\begin{aligned}(1+\omega-\omega^2)^3-(1-\omega+\omega^2)^3&=(-2\omega^2)^3-(-2\omega)^3\\&=-8\omega^6+8\omega^3\\&=-8+8\\&=0.\end{aligned}$$

習　題 八b.

1. 以 $4\sqrt{-3}-5\sqrt{-2}$ 乘 $3\sqrt{-3}+3\sqrt{-2}$.
2. 以 $3\sqrt{-7}+5\sqrt{-2}$ 乘 $3\sqrt{-7}-5\sqrt{-2}$.
3. 以 $e^{\sqrt{-1}}-e^{-\sqrt{-1}}$ 乘 $e^{\sqrt{-1}}+e^{-\sqrt{-1}}$.
4. 以 $x-\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$ 乘 $x-\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

化爲有理分母之分式:

5. $\dfrac{1}{3-\sqrt{-2}}$.
6. $\dfrac{3\sqrt{-2}+2\sqrt{-5}}{3\sqrt{-2}-2\sqrt{-5}}$.
7. $\dfrac{3+2\sqrt{-1}}{2-5\sqrt{-1}}+\dfrac{3-2\sqrt{-1}}{2+5\sqrt{-1}}$.
8. $\dfrac{a+x\sqrt{-1}}{a-x\sqrt{-1}}-\dfrac{a-x\sqrt{-1}}{a+x\sqrt{-1}}$.
9. $\dfrac{(x+\sqrt{-1})^2}{x-\sqrt{-1}}-\dfrac{(x-\sqrt{-1})^2}{x+\sqrt{-1}}$.
10. $\dfrac{(a+\sqrt{-1})^3-(a-\sqrt{-1})^3}{(a+\sqrt{-1})^2-(a-\sqrt{-1})^2}$.
11. 設 n 爲正整數, 試求 $(-\sqrt{-1})^{4n+3}$ 之值.
12. 試求 $\sqrt{9+40\sqrt{-1}}+\sqrt{9-40\sqrt{-1}}$ 之平方.

求下列各式之平方根:

13. $-5+12\sqrt{-1}$.　14. $-11-60\sqrt{-1}$.　15. $-47+8\sqrt{-3}$.

16. $-8\sqrt{-1}$.　17. $a^2-1+2a\sqrt{-1}$.

18. $4ab-2(a^2-b^2)\sqrt{-1}$.

化下列各式爲 $A+iB$ 之形式:

19. $\dfrac{3+5i}{2-3i}$.　20. $\dfrac{\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-i\sqrt{2}}$.　21. $\dfrac{1+i}{1-i}$.

22. $\dfrac{(1+i)^2}{3-i}$.　23. $\dfrac{(a+ib)^2}{a-ib}-\dfrac{(a-ib)^2}{a+ib}$.

設 $1,\omega,\omega^2$ 爲一之三立方根，試證

24. $(1+\omega^2)^4=\omega$.　25. $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)=4$.

26. $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)=9$.

27. $(2+5\omega+2\omega^2)^6=(2+2\omega+5\omega^2)^6=729$.

28. $(1-\omega+\omega^2)(1-\omega^2+\omega^4)(1-\omega^4+\omega^8)\cdots$至 $2n$ 因子 $=2^{2n}$.

29. 試證

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega).$$

30. 設　$x=a+b$，$y=a\omega+b\omega^2$，$z=a\omega^2+b\omega$，

試證

(1) $xyz=a^3+b^3$.

(2) $x^2+y^2+z^2=6ab$.

(3) $x^3+y^3+z^3=3(a^3+b^3)$.

31. 設 $ax+cy+bz=X$，$cx+by+az=Y$，$bx+ay+cz=Z$，

試證 $(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

$$=X^2+Y^2+Z^2-YZ-XZ-XY.$$

第 九 章

二 次 方 程 式 論

111. 經適當之變形後，任何二次方程式均可寫爲

$$ax^2+bx+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

之形式，此方程式之解答爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

茲證明關於(1)所代表之一切二次方程式之根及係數之幾個重要命題.

112. 二次方程式之根不能多於兩個.

蓋方程式 $ax^2+bx+c=0$ 若有三個不同根 α,β 及 γ. 則三者必適能合此方程式，卽

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

由 (1) 減 (2),

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0;$$

由題設 $\alpha-\beta\neq 0$, 以 $\alpha-\beta$ 除之；得

$$a(\alpha+\beta)+b=0.$$

同法由 (2) 及 (3), 得

$$a(\beta+\gamma)+b=0;$$

∴ 由減法 $\quad a(\alpha-\gamma)=0;$

此決不可能，蓋由題設，a 不等於零，α 亦不等於 γ 也. 故一個二次方程式不能有三個不同之根.

113. 設以 α 及 β 表 111 節之兩根，

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

則得下之結果：

(1) 若 b^2-4ac（根號下之量）爲正，則 α 及 β 爲不相等之兩實根．

(2) 若 b^2-4ac 爲零，則 α 及 β 爲相等之兩實根，均爲 $-\dfrac{b}{2a}$．

(3) 若 b^2-4ac 爲負數，則 α 及 β 爲不相等之兩虛根．

(4) 若 b^2-4ac 爲完全平方，則 α 及 β 爲不相等之兩有理根．

應用此等試驗，則任何二次方程式之根，不待解出即可決定其性質．

例1．　指明 x 之任何實值不能適合方程式

$$2x^2-6x+7=0.$$

此處 $a=2$，$b=-6$，$c=7$；

$$\therefore\ b^2-4ac=(-6)^2-4.2.7=-20.$$

故二根皆爲虛根．

例2．　設方程式 $x^2+2(k+2)x+9k=0$ 有等根，試求 k 之值．

等根之條件爲
$$(k+2)^2=9k,$$
$$k^2-5k+4=0,$$
$$(k-4)(k-1)=0;$$
$$\therefore\ k=4,\ 或\ k=1.$$

例3．　指明方程式

$$x^2-2px+p^2-q^2+2qr-r^2=0$$

之根爲有理根．

若 $(-2p)^2-4(p^2-q^2+2qr-r^2)$ 爲完全平方，則二根爲有理根．今此式可化爲 $4(q^2-2qr+r^2)$，或 $4(q-r)^2$．故二根爲有理根．

114. 因　$\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，　$\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

故由加法，得

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

由乘法，得

$$\alpha\beta=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

$$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

若將二次方程式寫爲

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

則此結果亦可如下述之:

關於首項係數爲 1 之二次方程式:

(*i*) 二根之和等於 x 之係數之負數.

(*ii*) 二根之積等於第三項.

註. 方程式內不含未知數之項稱爲常數項.

115. 因 $-\frac{b}{a}=\alpha+\beta$, 及 $\frac{c}{a}=\alpha\beta$,

故方程式 $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ 可寫爲

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

故任何二次方程式，亦可以

$$x^2-(\text{根之和})x+\text{根之積}=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

之形式表之.

又從 (1) 得

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

故不難用已知根作成一方程式.

例1. 求根爲 3 及 -2 之方程式.

此方程式爲　$(x-3)(x+2)=0$,

即　$x^2-x-6=0$.

若爲無理根，則用下例方法較易.

例2.　求根爲$2+\sqrt{3}$ 及 $2-\sqrt{3}$ 之方程式.

因　　　　　　　　二根之和$=4$,

　　　　　　　　　二根之積$=1$;

$\therefore$ 此方程式爲　　$x^2-4x+1=0$.

116. 用類似上節例題 1 之方法，能用三個或多個根構成一方程式.

例1.　求根爲 $2, -3$, 及$\frac{7}{5}$之方程式.

所求方程式必能被下之三式所適合:

$$x-2=0,\quad x+3=0,\quad x-\frac{7}{5}=0;$$

故爲

$$(x-2)(x+3)\left(x-\frac{7}{5}\right)=0;$$

即

$$(x-2)(x+3)(5x-7)=0,$$

$$5x^3-2x^2-37x+42=0.$$

例2.　求根爲 $0, \pm a$, $\frac{c}{b}$ 之方程式.

此方程式必爲

$$x=0,\quad x=a,\quad x=-a,\quad x=\frac{c}{b},$$

所適合.

故爲　　$x(x+a)(x-a)\left(x-\frac{c}{b}\right)=0$;

即

$$x(x^2-a^2)(bx-c)=0,$$

$$bx^4-cx^3-a^2bx^2+a^2cx=0.$$

117. 第 114 節之 (1),(2) 兩結果甚爲重要，常足以解決關於二次方程式之根之問題. 在此類問題中，不必個別重視各根，但利用係數寫出之根之和與積之關係足矣.

例1.　設 α 及 β 爲方程式 $x^2-px+q=0$ 之根，試求 (1)$\alpha^2+\beta^2$, (2)$\alpha^3+\beta^3$ 之值.

已知

$$\alpha+\beta=p,$$

$$\alpha B=q.$$

$$\therefore\quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$

$$=p^2-2q.$$

又，$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$
$$=p\{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\}$$
$$=p(p^2-3q).$$

例2. 設 α,β 爲方程式 $lx^2+mx+n=0$ 之根，試求根爲$\frac{\alpha}{\beta}$及$\frac{\beta}{\alpha}$之方程式.

因　二根之和$=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$,

二根之積$=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$;

∴ 由 §115，所求之方程式爲
$$x^2-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\right)x+1=0,$$
$$\alpha\beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha\beta=0.$$

照上例，$\alpha^2+\beta^2=\frac{m^2-2nl}{l^2}$，$\alpha\beta=\frac{n}{l}$.

∴ 所求方程式爲$\frac{n}{l}x^2-\frac{m^2-2nl}{l^2}x+\frac{n}{l}=0$,

即
$$nlx^2-(m^2-2nl)x+nl=0.$$

例3. 設 $x=\frac{3+5\sqrt{-1}}{2}$，試求 $2x^3+2x^2-7x+72$ 之值. 並證以$\frac{3-5\sqrt{-1}}{2}$代 x 後其值仍不變.

求以$\frac{3\pm5\sqrt{-1}}{2}$爲根之方程式.

二根之和 $=3$;

二根之積 $=\frac{17}{2}$;

故此方程式爲 $2x^2-6x+17=0$;

∴ $2x^2-6x+17$ 爲一二次式，此式對於$\frac{3\pm5\sqrt{-1}}{2}$中之任一值皆爲零.

今
$$\begin{aligned}2x^3+2x^2-7x+72&=x(2x^2-6x+17)+4(2x^2-6x+17)+4\\&=x\times0+4\times0+4\\&=4;\end{aligned}$$

此爲已知式在各種假定下之數值.

118. 求方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根適合下兩情形之條件.

(1) 大小同而符號異; (2) 互爲倒數.

若二根之和爲零，則二根大小同而符號異，故所求之條件爲

$$-\frac{b}{a}=0,\ 或\ b=0.$$

若二根之積爲 1，則二根互爲倒數; 故必

$$\frac{c}{a}=1,\ 或\ c=a.$$

第一結果常見於解析幾何中，第二結果乃適用於任何次方程式之更一般之條件中之特例.

例. 求 $ax^2+bx+c=0$ 之根可爲 (1) 皆爲正根; (2) 異號而負者較大之條件.

已知 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}.$

(1) 若二根皆正，則 $\alpha\beta$ 爲正量，而 c 與 a 同號.

又因 $\alpha+\beta$ 爲正數，$\frac{b}{a}$ 必爲負數，故 b 與 a 異號.

故所求條件爲 a 與 c 同號，而與 b 異號.

(2) 設二根異號則 $\alpha\beta$ 爲負，故 c 與 a 異號.

又因 $\alpha+\beta$ 之符號同於較大根之符號負號，故$\frac{b}{a}$爲正; 而 b 與 a 同號.

故所求之條件爲 a 與 b 同號，而與 c 異號.

習 題 九a.

作具有下列各根之方程式:

1. $-\frac{4}{5}, \frac{3}{7}$.　　2. $\frac{m}{n}, -\frac{n}{m}$.　　3. $\frac{p-q}{p+q}, -\frac{p+q}{p-q}$.

4. $7\pm2\sqrt{5}$.　　5. $\pm2\sqrt{3}-5$.　　6. $-p\pm2\sqrt{2q}$.

7. $-3\pm 5i$.　　8. $-a\pm ib$.　　9. $\pm i(a-b)$.

10. $-3,\frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$.　　11. $\frac{a}{2},\ 0,-\frac{2}{a}$.　　12. $2\pm\sqrt{3},4$.

13. 試證下列各方程式之根爲實根:

(1) $x^2-2ax+a^2-b^2-c^2=0$,

(2) $(a-b+c)x^2+4(a-b)x+(a-b-c)=0$.

14. 設方程式 $x^2-15-m(2x-8)=0$ 之兩根相等，試求 m 之值.

15. 須 m 之值爲何方程式

$$x^2-2x(1+3m)+7(3+2m)=0$$

始能有等根?

16. 須 m 之值爲何方程式

$$\frac{x^2-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$$

之根始大小同而符號異?

17. 求證下列方程式之根爲有理根:

(1) $(a+c-b)x^2+2cx+(b+c-a)=0$,

(2) $abc^2x^2+3a^2cx+b^2cx-6a^2-ab+2b^2=0$.

設 α,β 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根，求下之各值:

18. $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$.　　19. $\alpha^4\beta^7+\alpha^7\beta^4$.　　20. $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$.

求下列各式之值:

21. x^3+x^2-x+22，設 $x=1+2i$.

22. $x^3-3x^2-8x+15$，設 $x=3+i$.

23. $x^3-ax^2+2a^2x+4a^3$，設$\frac{x}{a}=1-\sqrt{-3}$.

24. 設 α,β 爲方程式 $x^2+px+q=0$ 之根，求根爲 $(\alpha-\beta)^2$ 及 $(\alpha+\beta)^2$ 之方程式.

25. 求證 $(x-a)(x-b)=h^2$ 之根永爲實根.

26. 設 x_1,x_2 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根，求下式之值:

(1) $(ax_1+b)^{-2}+(ax_2+b)^{-2}$,

(2) $(ax_1+b)^{-3}+(ax_2+b)^{-3}$.

27. 求 $ax^2+bx+c=0$ 之一根爲他根 n 倍之條件.

28. 設 α,β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 之根，求根爲 $\alpha^2+\beta^2$ 及 $\alpha^{-2}+\beta^{-2}$ 之方程式.

29. 作一方程式，其根爲

$$2x^2+2(m+n)x+m^2+n^2=0$$

之二根和及二根差之平方.

30. 討論方程式 $px^2+qx+r=0$ 之根之符號.

119. 下例說明 §113 所證結果之應用.

例. 設 x 爲實量，試證，除介於 2 與 6 之間者外 $\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ 可爲任何值.

設以 y 表已知式，則

$$\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}=y;$$

消去分母移項，得

$$x^2+2x(1-y)+6y-11=0.$$

此爲一二次方程式，欲 x 爲實量，必須 $4(1-y)^2-4(6y-11)$ 之值爲正；或除以 4 而化簡之，必須 $y^2-8y+12$ 爲正；亦必須 $(y-6)(y-2)$ 爲正. 故此積之二因子，必同爲正或同爲負，同爲正則 y 大於 6，同爲負則 y 小於 2. 故 y 不能在 2 與 6 間，此外則可爲任何值.

在此例中，當注意二次式 $y^2-8y+12$ 之爲正值，僅限於當 y 之值不在 $y^2-8y+12=0$ 之二根之間時爲然.

此爲下節所研究之一般命題之特例.

120. 若非 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲不等之實根，而 x 爲二根間之一值，則 ax^2+bx+c 於 x 之一切實數值皆與 a 同號.

情形1. 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲實根；以 α 及 β 表之，並設 α 爲較大.

於是　　$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$

$$=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$$
$$=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

若 x 大於 α，則 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$ 皆爲正量；若 x 小於 β，則 $x-\alpha$ 及 $x-\beta$ 皆爲負量；在此二情形下，$(x-\alpha)(x-\beta)$ 皆爲正量，故 ax^2+bx+c 與 a 同號．但若 x 爲 α 及 β 間之一値，則 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 爲負，而 ax^2+bx+c 之符號必適與 a 之符號相反．

情形 II．設 α 與 β 相等，於是

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2,$$

而 $a(x-\alpha)^2$ 於 x 之任何實値皆爲正量；故 ax^2+bx+c 與 a 同號．

情形 III．設 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲虛根．於是

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}.$$

但因根爲虛數，b^2-4ac 必爲負數，故 $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ 爲正量，而

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

於 x 之一切實數値，均爲正量；故 ax^2+bx+c 與 a 同號．此即證明本命題．

121． 由上節可知，祇要 b^2-4ac 爲負數或零，則不拘 x 爲何實數値，ax^2+bx+c 之符號恒不變；適合此條件後，此式之爲正或負，全視 a 之爲正或負而定．

反之，欲 ax^2+bx+c 爲正量，必須 b^2-4ac 爲負量或零，而 a 必爲正量；又欲 ax^2+bx+c 恒爲負量，必 b^2-4ac 爲負量或零，而 a 必爲負量．

例．當

$$\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}$$

可爲一切值時，求 a 所在之兩極限值，在此 x 爲任何實量．

設
$$\frac{ax^2-7x+5}{5x^2-7x+a}=y;$$

消去分母，移項，得

$$(a-5y)x^2-7x(1-y)+(5-ay)=0.$$

欲由此求得之 x 之值爲實量，必須

$$49(1-y)^2-4(a-5y)(5-ay)\text{爲正量,}$$

即必須 $(49-20a)y^2+2(2a^2+1)y+(49-20a)$ 爲正量；

故 $(2a^2+1)^2-(49-20a)^2$ 必爲負量或零，而 $49-20a$ 必爲正量．

今 $(2a^2+1)^2-(49-20a)^2$ 之爲負或零，全視

$2(a^2-10a+25)\times 2(a^2+10a-24)$ 之爲負或零而定．

即全視 $4(a-5)^2(a+12)(a-2)$ 之爲負量或零而定．

此式之爲負，限於當 a 值在 2 及 -12 之間時，而於此等之值 $49-20a$ 之值爲正；當 $a=5$，-12 或 2 時，此式爲零，但當 $a=5$ 時 $49-20a$ 爲負．故所求之極限值爲 2 及 -12，而 a 爲其間之任一值．

習 題 九.B.

1．設方程式

$$2ax(ax+nc)+(n^2-2)c^2=0$$

之根爲實根，求 n 所在之兩極限值．

2．設 x 爲實量，求證 $\dfrac{x}{x^2-5x+9}$ 之值，必在 1 與 $-\dfrac{1}{11}$ 之間．

3．求證無論 x 爲何等實量，$\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ 之值恆介於 3 及 $\frac{1}{3}$ 之間．

4．設 x 爲實量，求證 $\dfrac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ 之值不在 5 與 9 之間．

5．求根爲 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\pm\sqrt{a-b}}$ 之方程式．

6．設 α 及 β 爲方程式 $x^2-px+q=0$ 之根，求下式之值：

(1) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$，

(2) $(\alpha-p)^{-4}+(\beta-p)^{-4}$．

7.　設 $lx^2+nx+n=0$ 之二根之比爲 $p:q$，求證

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0.$$

8.　設 x 爲實量，試證，除在 $2n$ 及 $2m$ 之間者外，$\dfrac{(x+m)^2-4mn}{2(x-n)}$ 可爲任何值.

9.　設方程式 $ax^2+2bx+c=0$ 之根爲 α 及 β，$Ax^2+2Bx+C=0$ 之根爲 $\alpha+\delta$ 及 $\beta+\delta$. 試證

$$\frac{b^2-ac}{a^2}=\frac{B^2-AC}{A^2}.$$

10.　設 x 爲實量，p 爲在 1 與 7 間之任一值，試證 $\dfrac{px^2+3x-4}{p+3x-4x^2}$ 可爲任何值.

11.　設 x 爲實量，試求 $\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$ 之最大值.

12.　設 x 爲實量，則 $(x^2-bc)(2x-b-c)^{-1}$ 之實數值無在 b 與 c 之間者，試證明之.

13.　設 $ax^2+2bx+c=0$ 之兩根而不等，則

$$(a+c)(ax^2+2bx+c)=2(ac-b^2)(x^2+1)$$

不能有實根，反之亦然.

14.　設 a^2-b^2 與 c^2-d^2 同號，試證，當 x 爲實數值時，$\dfrac{(ax-b)(dx-c)}{(bx-a)(cx-d)}$ 能爲任何值.

***122.**　茲舉出若干之定理及例題以結束本章. 今應先引入一術語及記號，此乃讀者習數學時所常見者.

定義.　凡含 x 且其值因 x 之值而定之式稱爲 x 之函數. x 之函數常以符號 $f(x)$，$F(x)$ 或 $\phi(x)$ 表之.

故方程式 $y=f(x)$ 可視一種陳述，即 x 之值之任何變化，均能使 y 生相應之變化，反之亦然. x 及 y 稱爲變量，再別之，則 x 爲自變量而 y 爲因變量.

自變量之值可任意選定，改選定後，其因變量之相當值亦因之而定矣.

***123.** 若 n 爲正整數，p_0，p_1，p_2，…………p_n 不含 x，則形同

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$

之式，稱爲 x 之有理整代數函數. 本章專論此種函數.

***124.** 若函數內之變量無高於一次者，則稱爲一次函數；如 $ax+b$ 爲 x 之一次函數. 若函數內之變量無高於二次者，則稱爲二次函數；如 ax^2+bx+c 爲 x 之二次函數. 函數中變量之最高次數爲三，四，………者，名曰三次，四次，………函數. 如上節之式爲 x 之 n 次函數.

***125.** 符號 $f(x,y)$ 表含二變數 x 及 y 之函數. 如 $ax+by+c$，及 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$，爲 x,y 之一次及二次函數.

方程式 $f(x)=0$，$f(x,y)=0$，按照 $f(x)$，$f(x,y)$ 之爲一次函數，二次函數，………稱爲一次方程式，二次方程式，………………

***126.** 在 §120，曾證明 ax^2+bx+c 可化爲 $a(x-\alpha)(x-\beta)$ 之形式，α 及 β 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根.

故當方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根爲有理根，即 b^2-4ac 爲完全平方時，ax^2+bx+c 可析爲兩個一次有理因子.

***127.** 求 x,y 之二次函數可析爲兩個一次因子之條件.

以 $f(x,y)$ 表此函數，

$$f(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c.$$

按照 x 之降冪排列，並使之等於零，得

$$ax^2+2x(hy+g)+by^2+2fy+c=0.$$

解出 x，得

$$x=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a},$$

或 $$ax+hy+g=\pm\sqrt{y^2(h^2-ab)+2y(hg-af)+(g^2-ac)}.$$

欲 $f(x,y)$ 能爲形同 $px+qy+r$ 之兩個一次因子之積，必須根號下之量爲完全平方方可；由是

$$(hg-af)^2=(h^2-ab)(g^2-ac).$$

移項且以 a 除之，得

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0;$$

此即所求之條件.

此命題在解析幾何中極爲重要.

***128.** 求方程式

$$ax^2+bx+c=0,\ 及\ a'x^2+b'x+c'=0$$

有一公共根之條件.

設此二方程式皆能爲 $x=\alpha$ 所適合，則

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0,$$

$$a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0;$$

$\therefore$ 由十字乘法

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}.$$

欲消去 α，將此等比中之第二比乘平方，令其等於他二比之積；如是

$$\frac{\alpha^2}{(ca'-c'a)^2}=\frac{\alpha^2}{(bc'-b'c)}\cdot\frac{1}{(ab'-a'b)};$$

$$\therefore\quad (ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b),$$

此即爲所求之條件.

上式即二次函數 $ax^2+bxy+cy^2$ 及 $a'x^2+b'xy+c'y^2$ 可有一公共一次因子之條件，其證明甚爲易易.

習 題 九.C.

1. 須 m 為何值，$y^2+2xy+2x+my-3$ 可析為兩個有理因子?

2. 設 $2x^2+mxy+3y^2-5y-2$ 為兩個一次因子之積，試求 m 之值.

3. $A(x^2-y^2)-xy(B-C)$ 恒可析為兩個實數一次因子.

4. 試證，若 $x^2+px+q=0$，及 $x^2+p'x+q'=0$ 有一公根，則此公根必為

$$\frac{pq'-p'q}{q-q'}, \text{或} \frac{q-q'}{p'-p}.$$

5. 求下兩式有一個一次公因子之條件

$$lx^2+mxy+ny^2,\ l'x^2+m'xy+n'y^2.$$

6. 設 $3x^2+2Pxy+2y^2+2ax-4y+1$ 能析為兩個一次因子，試證 P 必為方程式 $P^2+4aP+2a^2+6=0$ 之一根.

7. 求 $ax^2+2hxy+by^2$ 及 $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ 能為形如 $y-mx$，$my+x$ 之一次因式除盡之條件.

8. 試證在方程式 $x^2-3xy+2y^2-2x-3y-35=0$ 對於 x 之任一實值，y 均有一實值與之相當，又對於 y 之任一實值，x 亦均有一實值與之相當.

9. 設 x 及 y 為兩實值，其關係為

$$9x^2+2xy+y^2-92x-20y+244=0,$$

試證 x 在 3 與 6 之間，y 在 1 與 10 之間.

10. 設 $(ax^2+bx+c)y+a'x^2+b'x+c'=0$，試求 x 可為 y 之有理函數之條件.

第　十　章

雜　方　程　式

129. 本章討論幾種雜方程式，其中有者可用解二次方程式之方法解出，但有者則必另用特殊之解法.

例1. 解 $8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{-\frac{3}{2n}}=63$.

兩邊各乘以 $x^{\frac{3}{2n}}$，移項，則得

$$8x^{\frac{3}{n}}-63x^{\frac{3}{2n}}-8=0;$$

$$(x^{\frac{3}{2n}}-8)(8x^{\frac{3}{2n}}+1)=0;$$

$$x^{\frac{3}{2n}}=8,\text{ 或 }-\frac{1}{8};$$

$$x=(2^3)^{\frac{2n}{3}},\text{ 或}\left(-\frac{1}{2^3}\right)^{\frac{2n}{3}};$$

$$\therefore\ x=2^{2n},\text{ 或 }\frac{1}{2^{2n}}.$$

例2. 解 $2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$.

設 $$\sqrt{\frac{x}{a}}=y;\text{ 則 }\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{1}{y};$$

$$\therefore\ 2y+\frac{3}{y}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b};$$

$$2aby^2-6a^2y-b^2y+3ab=0;$$

$$(2ay-b)(by-3a)=0;$$

$$y=\frac{b}{2a},\text{ 或}\frac{3a}{b};$$

$$\therefore\ \frac{x}{a}=\frac{b^2}{4a^2},\text{ 或}\frac{9a^2}{b^2};$$

即 $$x=\frac{b^3}{4a},\text{ 或}\frac{9a^3}{b^2}.$$

例3. 解 $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504.$

將首尾兩因子及居中兩因子分別乘出，得

$$(x^2-x-20)(x^2-x-42)=504;$$

寫爲 x^2-x 之二次方程式，得

$$(x^2-x)^2-62(x^2-x)+336=0:$$

$$\therefore\quad (x^2-x-6)(x^2-x-56)=0;$$

$$\therefore\quad x^2-x-6=0,\ 或\ x^2-x-56=0;$$

由是 $x=3,\ -2,\ 8,\ -7.$

130. 若方程式之形式，能寫爲

$$ax^2+bx+c+p\sqrt{ax^2+bx+c}=q,$$

則可照下法解之. 設 $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$，得

$$y^2+py-q=0.$$

設 α 及 β 爲此方程式之根，於是

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\alpha,\qquad \sqrt{ax^2+bx+c}=\beta;$$

解此二方程式，即得 x 之四值.

根號前若未標明符號，通常即指正號；故若 α 及 β 皆爲正，則所有 x 之四值皆適合原方程式；但若 α 或 β 爲負，則由此求得之根不適合原方程式，而適合方程式

$$ax^2+bx+c-p\sqrt{ax^2+bx+c}=q.$$

例. 解 $x^2-5x+2\sqrt{x^2-5x+3}=12.$

兩邊各加 3，得

$$x^2-5x+3+2\sqrt{x^2-5x+3}=15.$$

設 $\sqrt{x^2-5x+3}=y$，得 $y^2+2y-15=0$；解之，得 $y=3$，或 -5.

故 $\sqrt{x^2-5x+3}=+3$，或 $\sqrt{x^2-5x+3}=-5.$

兩邊各乘平方而解之，由第一方程式得 $x=6$，或 -1；由第二方程式得 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{113}}{2}$. 第一對值適合已知方程式，第二對值適合方程式

$$x^2-5x-2\sqrt{x^2-5x+3}=12$$

131. 根號方程式在消根之前，應先看是否有公因子可用除法消去之.

例.　　解 $\sqrt{x^2-7ax+10a^2}-\sqrt{x^2+ax-6a^2}=x-2a$.

析因子，　得 $\sqrt{(x-2a)(x-5a)}-\sqrt{(x-2a)(x+3a)}=x-2a$.

因子　$\sqrt{x-2a}$ 可由各項消去之；

$$\therefore\ \sqrt{x-5a}-\sqrt{x+3a}=\sqrt{x-2a};$$

$$x-5a+x+3a-2\sqrt{(x-5a)(x+3a)}=x-2a;$$

$$x=2\sqrt{x^2-2ax-15a^2};$$

$$3x^2-8ax-60a^2=0;$$

$$(x-6a)(3x+10a)=0;$$

$$x=6a,\text{或}-\frac{10a}{3}.$$

令因子　　　$\sqrt{x-2a}=0$，得 $x=2a$.

由試驗，可知 $x=6a$ 不適合此方程式；故其根爲 $-\frac{10a}{3}$ 及 $2a$.

讀者可取初等代數§281之類似問題比較之.

132. 下例方法亦有時用之.

例.　解 $\sqrt{3x^2-4x+34}+\sqrt{3x^2-4x-11}=9$ ………………(1)

作恆等式 $(3x^2-4x+34)-(3x^2-4x-11)=45$ ……………(2)

以(1)之各項除(2)之相當項；得

$$\sqrt{3x^2-4x+34}-\sqrt{3x^2-4x-11}=5. \quad\text{………………(3)}$$

今(2)爲恒等式，於 x 之一切值皆眞，(1)爲方程式，故僅於 x 之某幾值爲眞；故方程式(3)亦僅於 x 之此幾值爲眞.

由(1)及(3)，用加法得

$$\sqrt{3x^2-4x+34}=7;$$

由是 $x=3$ 或 $-\frac{5}{3}$.

133. 若方程式之形式為

$$ax^4 \pm bx^3 \pm cx^2 \pm bx + a = 0,$$

其中距兩端等距各項之係數相同，則可按照解二次方程式之方法解之。此種方程式名曰倒數方程式，因以$\frac{1}{x}$代x後其形不變也。

關於倒數方程式之討論，學者可參考§§568－570.

例. 解 $12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0$.

除以x^2而整理之，得 $12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 56\left(x + \frac{1}{x}\right) + 89 = 0$.

設 $x + \frac{1}{x} = z$； 則 $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$；

$$\therefore 12(z^2 - 2) - 56z + 89 = 0;$$

解之，得 $z = \frac{5}{2}$，或$\frac{13}{6}$.

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}, \text{或} \frac{13}{6}.$$

解之，得$x = 2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$.

134. 下例雖非倒數方程式，但可用同法解之.

例. 解 $6x^4 - 25x^3 + 12x^2 + 25x + 6 = 0$.

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 12 = 0;$$

由是 $6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$;

$$\therefore 2\left(x - \frac{1}{x}\right) - 3 = 0, \text{或} 3\left(x - \frac{1}{x}\right) - 8 = 0;$$

解之，得 $x = 2, -\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{3}$.

135. 若二次方程式之一根已由觀察知之，則他一根不難由§114證明之二次方程式之根之性質得之.

例． 解方程式 $(1-a^2)(x+a)-2a(1-x^2)=0$.

此爲二次方程式，其一根顯然爲 a.

再者，此方程式可寫爲

$$2ax^2+(1-a^2)x-a(1+a^2)=0,$$

二根之積爲 $-\dfrac{1+a^2}{2}$；故他一根爲 $-\dfrac{1+a^2}{2a}$.

習　　題　十. A.

[當有一根適合此方程式之變形時，學生宜查驗各解答所用根式之符號之特殊排列.]

解下列方程式:

1． $x^{-2}-2x^{-1}=8$.

2． $9+x^{-4}=10x^{-2}$.

3． $2\sqrt{x}+2x^{-\frac{1}{2}}=5$.

4． $6x^{\frac{3}{4}}=7x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{4}}$.

5． $x^{\frac{2}{n}}+6=5x^{\frac{1}{n}}$.

6． $3x^{\frac{1}{2n}}-x^{\frac{1}{n}}-2=0$.

7． $5\sqrt{\dfrac{3}{x}}+7\sqrt{\dfrac{x}{3}}=22\frac{2}{3}$.

8． $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=2\frac{1}{3}$.

9． $6\sqrt{x}=5x^{-\frac{1}{2}}-13$.

10． $1+8x^{\frac{6}{5}}+9\sqrt[5]{x^3}=0$.

11． $3^{2x}+9=10\ 3^x$.

12． $5(5^x+5^{-x})=26$.

13． $2^{2x+8}+1=32.2^x$.

14． $2^{2x+3}-57=65(2^x-1)$.

15． $\sqrt{2^x}+\dfrac{1}{\sqrt{2^x}}=2$.

16． $\dfrac{3}{\sqrt{2x}}-\dfrac{\sqrt{2x}}{5}=5\frac{9}{10}$.

17． $(x-7)(x-3)(x+5)(x+1)=1680$.

18． $(x+9)(x-3)(x-7)(x+5)=385$.

19． $x(2x+1)(x-2)(2x-3)=63$.

20． $(2x-7)(x^2-9)(2x+5)=91$.

21． $x^2+2\sqrt{x^2+6x}=24-6x$.

22． $3x^2-4x+\sqrt{3x^2-4x-6}=18$.

23． $3x^2-7+3\sqrt{3x^2-16x+21}=16x$.

24． $8+9\sqrt{(3x-1)(x-2)}=3x^2-7x$.

25． $\dfrac{3x-2}{2}+\sqrt{2x^2-5x+3}=\dfrac{(x+1)^2}{3}$.

26. $7x-\dfrac{\sqrt{3x^2-8x+1}}{x}=\left(\dfrac{8}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^2$.

27. $\sqrt{4x^2-7x-15}-\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{x^2-9}$.

28. $\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}$.

29. $\sqrt{2x^2+5x-7}+\sqrt{3(x^2-7x+6)}-\sqrt{7x^2-6x-1}=0$.

30. $\sqrt{a^2+2ax-3x^2}-\sqrt{a^2+ax-6x^2}=\sqrt{2a^2+3ax-9x^2}$.

31. $\sqrt{2x^2+5x-2}-\sqrt{2x^2+5x-9}=1$.

32. $\sqrt{3x^2-2x+9}+\sqrt{3x^2-2x-4}=13$.

33. $\sqrt{2x^2-7x+1}-\sqrt{2x^2-9x+4}=1$.

34. $\sqrt{3x^2-7x-30}-\sqrt{2x^2-7x-5}=x-5$.

35. $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$.

36. $x^4+\dfrac{8}{9}x^2+1=3x^3+3x$. 37. $x^4+1-3(x^3+x)=2x^2$.

38. $10(x^4+1)-63x(x^2-1)+52x^2=0$.

39. $\dfrac{x+\sqrt{12a-x}}{x-\sqrt{12a-x}}=\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$. 40. $\dfrac{a+2x+\sqrt{a^2-4x^2}}{a+2x-\sqrt{a^2-4x^2}}=\dfrac{5x}{a}$.

41. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=8x\sqrt{x^2-3x+2}$.

42. $\sqrt{x^2+x}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3-x}}=\dfrac{5}{2}$. 43. $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}=x+\sqrt{\dfrac{6}{x}}$.

44. $2^{x^2}:2^{2x}=8:1$. 45. $a^{2x}(a^2+1)=(a^{2x}+a^x)a$.

46. $\dfrac{8\sqrt{x-5}}{3x-7}=\sqrt{\dfrac{3x-7}{x-5}}$. 47. $\dfrac{18(7x-3)}{2x+1}=\dfrac{250\sqrt{2x+1}}{3\sqrt{7x-3}}$.

48. $(a+x)^{\frac{2}{3}}+4(a-x)^{\frac{2}{3}}=5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}}$.

49. $\sqrt{x^2+ax-1}-\sqrt{x^2+bx-1}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

50. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=98$.

51. $x^4-2x^3+x=380$. 52. $27x^3+21x+8=0$.

136. 幾種二元聯立方程式之研究.

例1.　解　$x+2+y+3+\sqrt{(x+2)(y+3)}=39.$

$$(x+2)^2+(y+3)^2+(x+2)(y+3)=741.$$

設　$x+2=u, y+3=v$；得

$$u+v+\sqrt{uv}=39\cdots\cdots(1),$$

$$u^2+v^2+uv=741\cdots\cdots(2),$$

以 (1) 除 (2),得

$$u+v-\sqrt{uv}=19\cdots\cdots(3).$$

由 (1) 及 (3),　$u+v=29$；

$$\sqrt{uv}=10,$$

$$uv=100;$$

故　$u=25$, 或 4; $v=4$, 或 25;

由是　$x=23$, 或 2; $y=1$, 或 22.

例2.　解　$x^4+y^4=82\cdots\cdots(1),$

$$x-y=2\cdots\cdots(2).$$

設　$x=u+v$, 及 $y=u-v$;

代入 (2), 得　$v=1$.

代入 (1), 得　$(u+1)^4+(u-1)^4=82$;

$$\therefore\ 2(u^4+6u^2+1)=82;$$

$$u^4+6u^2-40=0;$$

由是　$u^2=4$, 或 -10;

$$u=\pm 2, \text{ 或 } \pm\sqrt{-10}.$$

故　$x=3, -1, 1\pm\sqrt{-10}$;

$$y=1, -3, -1\pm\sqrt{-10}.$$

例3.　解　$\dfrac{2x+y}{3x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}=2\frac{8}{15}\cdots\cdots(1),$

$$7x+5y=29\cdots\cdots(2).$$

由 (1), $15(2x^2+3xy+y^2-3x^2+4xy-y^2)=38(3x^2+2xy-y^2)$;

$$\therefore\ 129x^2-29xy-38y^2=0;$$

$$\therefore\ (3x-2y)(43x+19y)=0.$$

故　$3x=2y\cdots\cdots(3),$

或　$43x=-19y\cdots\cdots(4).$

由(3)，
$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{7x+5y}{29}$$
$$=1，\text{由方程式(2).}$$
$$\therefore\ x=2,y=3.$$

又由(4)，
$$\frac{x}{19}=\frac{y}{-43}=\frac{7x+5y}{-82}$$
$$=-\frac{29}{82}，\text{由方程式(2)，}$$
$$\therefore\ x=-\frac{551}{82}，\ y=\frac{1247}{82}.$$

故 $x=2，y=3；$ 或 $x=-\dfrac{551}{82}，y=\dfrac{1247}{82}.$

例4. 解
$$4x^3+3x^2y+y^3=8,$$
$$2x^3-2x^2y+xy^2=1.$$

設 $y=mx$，代入二方程式，得
$$x^3(4+3m+m^3)=8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$
$$x^3(2-2m+m^2)=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$
$$\therefore\ \frac{4+3m+m^3}{2-2m+m^2}=8;$$
$$m^3-8m^2+19m-12=0;$$

即
$$(m-1)(m-3)(m-4)=0;$$
$$\therefore\ m=1，\text{或 }3，\text{或 }4.$$

(i) 取 $m=1$，代入(1)或(2).

由(2)， $x^3=1；\ \therefore\ x=1；$

及 $y=mx=x=1.$

(ii) 取 $m=3$，代入(2)；

由是
$$5x^3=1;\quad\therefore\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{5}};$$
$$y=mx=3x=3\sqrt[3]{\frac{1}{5}}.$$

(iii) 取 $m=4$；得
$$10x^3=1;\quad\therefore\ x=\sqrt[3]{\frac{1}{10}};$$
$$y=mx=4x=4\sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

故其完全解答爲

$$x=1,\ \sqrt[3]{\frac{1}{5}},\ \sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

$$y=1,\ 3\sqrt[3]{\frac{1}{5}},\ 4\sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

注意. 以上解法，永可用於同次之二齊次方程式.

例5. 解 $31x^2y^2-7y^4-112xy+64=0 \cdots\cdots\cdots (1),$

$$x^2-7xy+4y^2+8=0 \cdots\cdots\cdots (2).$$

由(2)，$-8=x^2-7xy+4y^2$；代入(1)，

$$31x^2y^2-7y^4+14xy(x^2-7xy+4y^2)+(x^2-7xy+4y^2)^2=0,$$

$$\therefore\ 31x^2y^2-7y^4+(x^2-7xy+4y^2)(14xy+x^2-7xy+4y^2)=0;$$

$$\therefore\ 31x^2y^2-7y^4+(x^2+4y^2)^2-(7xy)^2=0;$$

即

$$x^4-10x^2y^2+9y^4=0 \cdots\cdots\cdots (3).$$

$$\therefore\ (x^2-y^2)(x^2-9y^2)=0;$$

故

$$x=\pm y,\ 或\ x=\pm 3y.$$

取各結果代入(2)，得

$$x=y=\pm 2;$$

$$x=-y=\pm\sqrt{-\frac{2}{3}};$$

$$x=\pm 3,\ y=\pm 1;$$

$$x=\pm 3\sqrt{-\frac{4}{17}},\ y=\mp\sqrt{-\frac{4}{17}}.$$

注意. 方程式(3)爲齊次方程式，爲將(1)及(2)經適當之結合得出. 此種方法極爲重要，在解析幾何中尤爲有用.

例6. 解 $(x+y)^{\frac{2}{3}}+2(x-y)^{\frac{2}{3}}=3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}} \cdots\cdots\cdots (1).$

$$3x-2y=13 \cdots\cdots\cdots (2).$$

以 $(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}$，即 $(x+y)^{\frac{1}{3}}(x-y)^{\frac{1}{3}}$ 除(1)之各項，

$$\therefore\ \left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}+2\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^{\frac{1}{3}}=3.$$

此為 $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}$ 之二次方程式，解之得

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^{\frac{1}{3}}=2 \text{ 或 } 1;\ \text{由是}\frac{x+y}{x-y}=8 \text{ 或 } 1;$$

$$\therefore\ 7x=9y,\ \text{或}\ y=0.$$

代入 (2)，得

$$x=9,\ y=7;\ \text{或}\ x=\frac{13}{3},\ y=0.$$

習 題 十.B.

解下列各方程式:

1. $3x-2y=7$, $xy=20$.
2. $5x-y=3$, $y^2-6x^2=25$.
3. $4x-3y=1$, $12xy+13y^2=25$.
4. $x^4+x^2y^2+y^4=931$, $x^2-xy+y^2=19$.
5. $x^2+xy+y^2=84$, $x-\sqrt{xy}+y=6$.
6. $x+\sqrt{xy}+y=65$, $x^2+xy+y^2=2275$.
7. $x+y=7+\sqrt{xy}$, $x^2+y^2=133-xy$.
8. $3x^2-5y^2=7$, $3xy-4y^2=2$.
9. $5y^2-7x^2=17$, $5xy-6x^2=6$.
10. $3x^2+165=16xy$, $7xy+3y^2=132$.
11. $3x^2+xy+y^2=15$, $31xy-3x^2-5y^2=45$.
12. $x^2+y^2-3=3xy$, $2x^2-6+y^2=0$.
13. $x^4+y^4=706$, $x+y=8$.
14. $x^4+y^4=272$, $x-y=2$.
15. $x^5-y^5=992$, $x-y=2$.
16. $x+\frac{4}{y}=1$, $y+\frac{4}{x}=25$.
17. $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{9}{2}$, $\frac{3}{x+y}=1$.
18. $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=5$. $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=\frac{5}{6}$.
19. $x+y=1072$, $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=16$.
20. $xy^{\frac{1}{2}}+yx^{\frac{1}{2}}=20$, $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=65$.
21. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=5$, $6(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})=5$.

22. $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=4$,
$x^2-y^2=9$.

23. $y+\sqrt{x^2-1}=2$.
$\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{y}$.

24. $\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3}$,
$x+y=10$.

25. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{17}{4}$,
$x^2+y^2=706$.

26. $x^2+4y^2-15x=10(3y-8)$, $xy=6$.

27. $x^2y^2+400=41xy$, $y^2=5xy-4x^2$.

28. $4x^2+5y=6+20xy-25y^2+2x$, $7x-11y=17$.

29. $9x^2+33x-12=12xy-4y^2+22y$, $x^2-xy=18$.

30. $(x^2-y^2)(x-y)=16xy$, $(x^4-y^4)(x^2-y^2)=640x^2y^2$.

31. $2x^2-xy+y^2=2y$, $2x^2+4xy=5y$.

32. $\dfrac{x^3+y^3}{(x+y)^2}+\dfrac{x^3-y^3}{(x-y)^2}=\dfrac{43x}{8}$, $5x-7y=4$.

33. $y(y^2-\ xy-x^2)+24=0$, $x(y^2-4xy+2x^2)+8=0$.

34. $3x^3-8xy^2+y^3+21=0$, $x^2(y-x)=1$.

35. $y^2(4x^2-108)=x(x^3-9y^3)$, $2x^2+9xy+y^2=108$.

36. $6x^4+x^2y^2+16=2x(12x+y^3)$, $x^2+xy-y^2=4$.

37. $x(a+x)=y(b+y)$, $ax+by=(x+y)^2$.

38. $xy+ab=2ax$, $x^2y^2+a^2b^2=2b^2y^2$.

39. $\dfrac{x-a}{a^2}+\dfrac{y-b}{b^2}=\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{y-a}-\dfrac{1}{a-b}=0$.

40. $bx^3=10a^2bx+3a^3y$, $ay^3=10ab^2y+3b^3x$.

41. $2a\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)+4a^2=4x^2+\dfrac{xy}{2a}-\dfrac{y^2}{a^2}=1$.

137. 含三個或三個以上之未知數之方程式，僅於特殊情形時能解出．茲舉幾種最有用之解法如下．

例1. 解
$$x+y+z=13\cdots\cdots(1),$$
$$x^2+y^2+z^2=65\cdots\cdots(2),$$
$$xy=10\cdots\cdots(3).$$

由 (2) 及 (3)，$(x+y)^2+z^2=85$.

以 u 代 $x+y$，則此方程式變爲
$$u^2+z^2=85.$$

又由 (1)，　　$u+z=13$；

解之，得 $u=7$ 或 6；$z=6$ 或 7.

由是
$$\left.\begin{aligned}x+y&=7,\\ xy&=10\end{aligned}\right\}\ \text{及}\ \left.\begin{aligned}x+y&=6,\\ xy&=10\end{aligned}\right\}$$

故所求解答爲

$$\left.\begin{aligned}x&=5,\ \text{或}\ 2,\\ y&=2,\ \text{或}\ 5,\\ z&=6;\end{aligned}\right\}\ \text{或}\ \left.\begin{aligned}x&=3\pm\sqrt{-1},\\ y&=3\mp\sqrt{-1},\\ z&=7.\end{aligned}\right\}$$

例2.　解
$$\begin{aligned}(x+y)(x+z)&=30,\\ (y+z)(y+x)&=15,\\ (z+x)(z+y)&=18.\end{aligned}$$

以 u，v，w 代 $y+z$，$z+x$，$x+y$，於是
$$vw=30,\ wu=15,\ uv=18 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1).$$

由乘法，
$$u^2v^2w^2=30\times15\times18=15^2\times6^2;$$
$$uvw=\pm90.$$

代入 (1) 之各値，得
$$u=3,\ v=6,\ w=5;\ \text{或}\ v=-3,\ v=-6,\ w=-5;$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}y+z&=3,\\ z+x&=6,\\ x+y&=5;\end{aligned}\right\}\ \text{或}\ \left.\begin{aligned}y+z&=-3,\\ z+x&=-6,\\ x+y&=-5,\end{aligned}\right\}$$

由是　$x=4$，$y=1$，$z=2$；或 $x=-4$，$y=-1$，$z=-2$.

例3.　解
$$y^2+yz+z^2=49 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1),$$
$$z^2+zx+x^2=19 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2),$$
$$x^2+xy+y^2=39 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3).$$

從 (1) 減 (2)，得
$$y^2-x^2+z(y-x)=30;$$

即
$$(y-x)(x+y+z)=30 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4).$$

從 (1) 減 (3)，得
$$(z-x)(x+y+z)=10 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5).$$

以 (5) 除 (4)，得
$$\frac{y-x}{z-x}=3;$$

由是
$$y=3z-2x.$$

代入 (3)，得

$$x^2-3xz+3z^2=13.$$

由 (2)，　$x^2+xz+z^2=19.$

照 136 節,例4，解此兩齊次式，得

$$x=\pm 2,\ z=\pm 3;\ 由是\ y=\pm 5;$$

或

$$x=\pm\frac{11}{\sqrt{7}},\ z=\pm\frac{1}{\sqrt{7}};\ 由是\ y=\mp\frac{19}{\sqrt{7}}.$$

例4．解　$x^2-yz=a^2,\ y^2-zx=b^2,\ z^2-xy=c^2.$

以 y, z, x 分乘三方程式而相加之，得

$$c^2x+a^2y+b^2z=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

以 z, x, y 分乘三方程式而相加之，得

$$b^2x+c^2y+a^2z=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由 (1) 及 (2)，由十字乘法，得

$$\frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}=k,\ 設.$$

代入任一已知方程式；則

$$k^2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)=1;$$

$$\therefore \frac{x}{a^4-b^2c^2}=\frac{y}{b^4-c^2a^2}=\frac{z}{c^4-a^2b^2}=\pm\frac{1}{\sqrt{a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2}}.$$

習　題　X.C.

解下列各方程式:

1．$9x+y-8z=0,$
$4x-8y+7z=0,$
$yz+zx+xy=47.$

2．$3x+y-2z=0,$
$4x-y-3z=0,$
$x^3+y^3+z^3=467.$

3．$x-y-z=2,$
$x^2+y^2-z^2=22,$
$xy=5.$

4．$x+2y-z=11,$
$x^2-4y^2+z^2=37,$
$xz=24.$

5．$x^2+y^2-z^2=21,$
$3xz+3yz-2xy=18,$
$x+y-z=5.$

6．$x^2+xy+xz=18,$
$y^2+yz+yx+12=0,$
$z^2+zx+zy=30.$

7．$x^2+3xy+3xz=50,$
$2y^2+3yz+yx=10,$
$3z^2+zx+2zy=10.$

8．$(y-z)(z+x)=22,$
$(z+x)(x-y)=33,$
$(x-y)(y-z)=6.$

9. $x^2y^2z^2u=12$，$x^2y^2zu^2=8$，$x^2yz^2u^2=1$，$3xy^2z^2u^2=4$.

10. $x^3y^2z=12$，$x^3yz^3=54$，$x^7y^3z^2=72$.

11. $xy+x+y=23$，
$xz+x+z=41$，
$yz+y+z=27$.

12. $2xy-4x+y=17$，
$3yz+y-6z=52$，
$6xz+3z+2x=29$.

13. $xz+y=7z$，$yz+x=8z$，$x+y+z=12$.

14. $x^3+y^3+z^3=a^3$，$x^2+y^2+z^2=a^2$，$x+y+z=a$.

15. $x^2+y^2+z^2=yz+zx+xy=a^2$，$3x-y+z=a\sqrt{3}$.

16. $x^2+y^2+z^2=21a^2$，$yz+zx-xy=6a^2$，$3x+y-2z=3a$.

不 定 方 程 式

138. 設下爲待解之問題.

某人以 £461 買牛馬；設馬每匹價 £23，牛每頭價 £16，問買牛馬各若干?

設 x 及 y 爲馬數及牛數，於是

$$23x+16y=461.$$

此處僅有一個二元一次方程式，顯然任予 x 一值，即能得出 y 之相當値. 故此方程式有無限個解答. 但就問題之性質言，x 及 y 必爲正整數. 有此限制，則解答之數又爲有限矣.

設未知量之個數多於獨立方程式之數，則其解答爲無限，而此方程式稱爲不定方程式. 本章僅討論極簡單之不定方程式，未知量之値亦僅限於正整數，有此種限制，其解答乃能以極簡單之形式表出.

不定方程式之一般理論，將於第二十六章中見之.

例1. 求 $7x+12y=220$ 之正整數解.

取最小之係數 7 除方程式之兩邊，得

$$x+y+\frac{5}{7}y=31+\frac{3}{7};$$

$$\therefore\ x+y+\frac{5y-3}{7}=31\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

欲 x 及 y 爲整數，必

$$\frac{5y-3}{7}=\text{整數};$$

由是 $$\frac{15y-9}{7}=\text{整數};$$

即， $$2y-1+\frac{y-2}{7}=\text{整數};$$

由是 $$\frac{y-2}{7}=\text{整數}=p\ (\text{設}).$$

$$\therefore\ y-2=7p,$$

或 $$y=7p+2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

將 y 之此值代入 (1)，得

$$x+7p+2+5p+1=31;$$

即 $$x=28-12p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

在 (3) 內令 p 爲任意整値，即得 x 及 y 之相當整値；但由 (3) 知 $p>2$ 時 x 爲負；又由 (2) p 爲負整數時 y 亦爲負數. 故僅當 $p=0,\ 1,\ 2$ 時，始能得 $x,\ y$ 之正整値.

其全解可列之如次：

$$\left.\begin{array}{llll} p=0, & 1, & 2, \\ x=28, & 16, & 4, \\ y=2, & 9, & 16. \end{array}\right\}$$

注意. 既得 $\frac{5y-3}{7}$ = 整數後，復以 3 乘之，以使 y 之係數與 7 之倍數差 1. 在未引入表整數之符號前，應常用此法.

例2. 求 $14x-11y=29$ 之正整數解.

以最小係數 11 除之；得

$$x+\frac{3x}{11}-y=2+\frac{7}{11};$$

$$\therefore\ \frac{3x-7}{11}=2-x+y=\text{整數};$$

故 $$\frac{12x-28}{11}=\text{整數};$$

即 $$x-2+\frac{x-6}{11}=\text{整數};$$

$$\therefore \frac{x-6}{11}=\text{整數}=p\ (\text{設});$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} x&=11p+6\\ y&=14p+5\end{aligned}\right\}.$$

又由 (1),

此稱爲已知方程式之通解，令 p 爲任一正整值或零，即得 x 及 y 之一班正整值；由是

$$\left.\begin{aligned} p&=0,\ \ 1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\\ x&=6,\ 17,28,39,\cdots\cdots\\ y&=5,\ 19,33,47,\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

其解之個數無限.

例3. 以半克郎 (*half-crown*) 及福勞音 (*florins*) 兩種銀幣付 £5 之款，問可有幾種付法？

設 x 爲半克郎數，y 爲福勞音數，於是

$$5x+4y=200;$$

$$\therefore x+y+\frac{x}{4}=50;$$

$$\therefore \frac{x}{4}=\text{整數}=p\ \ (\text{設});$$

$$\therefore x=4p,$$
$$y=50-5p.$$

令 p 爲 $1,2,3\cdots\cdots\cdots9$ 等值，即得所求之解．故付法有 9．亦可純以半克郎或福勞音付之，即 p 之值可爲 0 或 10也．$p=0$，則 $x=0$，所付者純爲半克勞音；$p=10$，則 $y=0$，所付者純爲福勞音．故若 x 及 y 之值均可爲零，則有 11 種付法．

例4. 某會會員 43 人，會費共爲 5 鎊 14 先令 6 待姆；設男子每人付 5 先令，女子每人付 2 先令 6 待姆，兒童每人付 1 先令，問男，女，兒童各幾人？

設 x，y，z 表男，女，及兒童之人數，於是

$$x+y+z=43\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$10x+5y+2z=229.$$

消去 z，得 $$8x+3y=143.$$

此方程式之通解爲

$$x=3p+1,$$
$$y=45-8p;$$

代入 (1)，得

$$z=5p-3.$$

此處 p 不能爲負數或零，但可爲 1 至 5 之任何正整值. 由是得

$$p=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5;$$
$$x=4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16;$$
$$y=37, 29,\ 21,\ 13,\ 5;$$
$$z=2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22.$$

習　題　十.D.

求正整數解:

1. $3x+8y=103$.　　2. $5x+2y=53$.　　3. $7x+12y=152$.

4. $13x+11y=414$.　　5. $23x+25y=915$.　　6. $41x+47y=2191$.

求正整數之通解，及 x, y 適合此方程式之最小值:

7. $5x-7y=3$.　　8. $6x-13y=1$.　　9. $8x-21y=33$.

10. $17y-13x=0$.　　11. $19y-23x=7$.　　12. $77y-30x=295$.

13. 某農夫以 £752 購買牛馬;設馬每匹價 £37，牛每頭價 £23，問牛馬各購若干?

14. 以先令及六辨士二種幣付5鎊之欵，問連零解共有幾種付法?

15. 試將81分爲二部，使一爲8之倍數，一爲5之倍數.

16. 甲僅有金泥(*guineas*)一種錢幣，乙僅有半克郎一種錢幣，設甲欲付乙10先令6待姆，試求最簡之付法.

17. 某數除以39則餘16，除以56則餘27，求某數. 此種數有幾個?

18. 以福勞音之幣付清 £1.6*s*.6*d*. 之債，如僅有半克郎之錢幣找回;問至少須付福勞音若干?

19. 分136爲二數，其一以5除之餘2，其他以8除之餘3.

20. 余買羊猪牛共40頭，羊每隻價£4，猪每隻價£2，牛每頭價£17;設共用£301，問三種各買若干?

21. 余袋內有薩瓦林，半克郎，或先令共27枚，共値 £5.0*s*.6*d*; 問余有每種錢幣各若干?

第十一章

排列與組合

139. 從一羣事物中取其一部或全部，可排成種種順序，每一順序稱爲一個排列.

不拘順序從一羣事物中取其一部或全部所成之每組，稱爲一個組合.

例如從a, b, c, d 四字母中每次取二字母所成之排列共有12個，即

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,$$

$$ba,\ ca,\ da,\ cb,\ db,\ dc.$$

從 a, b, c, d, 四字母中每次取二字母所成之組合共有6個，即

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd.$$

每組合均爲一個二字母之不同選擇.

故知組合之作成，僅注意所用事物之個數，排列之作成，則兼須注意所用事物之順序. 例如，從 a, b, c, d 四字母中選一三字母之組合，如 abc，此一組合可成下之幾種排列:

$$abc,\ acb,\ bca,\ bac,\ cab,\ cba,$$

即能作成六個不同之排列.

140. 在討論本章之一般命題之前，茲先說明一重要原則，並舉數字例題闡明之.

設甲事能由m法行之，此後(當其中任一法既行之後)乙事能由n法行之；則行此兩事之方法必有$m\times n$種.

設照任一法施行甲事後，吾人能以作成乙事之n法中之任一法與之聯合；如是僅就行甲事之一法而言，吾人可有n法行此兩事；同理對於行甲乙之m法中之每法，均有n法行此兩事，故行此兩種事之方法共有$m\times n$種.

例題 1. 有汽船10隻往來於利物浦及都伯林間，某人欲搭船從利物浦至都伯林，而返回時另搭他船，問可有幾種搭法？

去時可由10法；每去法各有9個返法(因返時不搭同船也)；故往返法之總數為10×9或90.

此原理甚易推廣至各有若干行法之多種事件.

例題 2. 三旅客止於有四旅館之鎮市；設在不同旅館住宿，問可有幾種住法？

第一旅客可有四旅館供其選擇，迨其既選定一處後，第二旅客有三旅館供其選擇；故首二人住法之數為4×3；至第三人則僅有二旅館供其選擇；故所求住法之數為$4\times 3\times 2$或24.

141. 求n個不同物之r元(即每次r個)之排列之數.

此與求以n個不同物件，置於r個位置之方法之數相同.

第一位置可有n種置法，因可取n物中之任一物置之也；迨既照任

一方法置之之後，第二位置可有$n-1$種置法；此中任一法均可與第一位置之每任一法聯合；故首二位置之置法共有$n(n-1)$種．第一，二位置照任一法安置之後，第三處可有$n-2$種置法．同理此首三位置之置法共有$n(n-1)(n-2)$種．

照此每安置一個位置即添一個因子，因子之個數恆同於已安置之位置之個數，故r位置之置法之總數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots \text{至 } r \text{ 個因子；}$$

其第r因子爲

$$n-(r-1)\text{，或 } n-r+1.$$

故n物r元之排列之數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1).$$

推論．n物n元之排列之數爲

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 因子．}$$

或 $$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots 3.2.1.$$

此積常以符號$\underline{|n}$表之，讀作"n之階乘"．亦有時以$n!$表之．

142. 此後以${}^nP_r$表n物r元之排列之數，是以

$${}^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1);$$

又 $${}^nP_n=\underline{|n}.$$

解數字問題時，${}^nP_r$右下角之數，恆表所用公式中之因子之個數．

143. n物r元之排列之數，亦可用下法求得之．

令${}^nP_r$表n物r元之排列之數．

設作成n物$r-1$元之排列；則排列之數爲${}^nP_{r-1}$.

若將每個$r-1$元排列，加入其餘$n-r+1$物中之一物，則必得一r元之排列；故n物r元之排列之總數爲${}^nP_{r-1}\times(n-r+1)$；即

$$ {}^nP_r={}^nP_{r-1}\times(n-r+1). $$

在此公式內，以$r-1$代r，得

$$ {}^nP_{r-1}={}^nP_{r-2}\times(n-r+2), $$

仿此

$$ {}^nP_{r-2}={}^nP_{r-3}\times(n-r+3), $$

$$ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots $$

$$ {}^nP_3={}^nP_2\times(n-2), $$

$$ {}^nP_2={}^nP_1\times(n-1), $$

$$ {}^nP_1=n. $$

將諸縱行相乘，消去兩邊之公因子，得

$$ {}^nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1). $$

例 1.　四人入一有六座位之車輛，問能有幾種坐法？

第一人之坐法有6；然後二人有5；第3人有4；第四人有3；一人之每種坐法均可與其他人之每坐法聯合，故所求答數爲 $6\times5\times4\times3=360$.

例 2.　用1，2，3，……9能作成若干六位數？

此爲求9物6元之排列之數；

$$ \therefore \text{所求結果}={}^9P_6 $$

$$ =9\times8\times7\times6\times5\times4 $$

$$ =60480. $$

144.　求n個不同物之r元之組合之數.

令${}^nC_r$表所求之組合之數.

每組合含有r個不同物，可由$\lfloor r$法排列之.［§142.］

故 ${}^nC_r\times\underline{|r}$ 等於 n 物 r 元之排列之數；

即
$$
\begin{aligned}
{}^nC_r\times\underline{|r} &= {}^nP_r.\\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1);
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ {}^nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

推論． 在 ${}^nC_r$ 之公式中，以 $\underline{|n-r}$ 乘分子分母則化爲下之形式：

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\underline{|n-r}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}.$$

此分子含有由1至n之一切自然數之積；

$$\therefore\ {}^nC_r=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

求 ${}^nC_r$ 之二公式，以皆能記憶爲佳，(1)用於求數字結果之問題，(2)用於求代數結果之問題．

注意． 在公式(2)內，令 $r=n$，則得

$${}^nC_n=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\ \underline{|0}}=\frac{1}{\underline{|0}};$$

但 ${}^nC_n=1$，故設此公式於 $r=n$ 時亦眞，則符號 $\underline{|0}$ 必視爲等於1．

例． 由12本書中選擇 5本，能有幾種選法，(1)每次必含指定之一本，(2)每次不准含此指定之一本．

(1)　每次必含指定之一本，是由11本中選取 4 本也．

故選法之數
$$
\begin{aligned}
&= {}^{11}C_4\\
&= \frac{11\times10\times9\times8}{1\times2\times3\times4}\\
&= 330.
\end{aligned}
$$

(2)　每次均不准含此指定之一本，是由11本中選取 5 本也.

故取法之數　$={}^{11}C_5$

$$=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4\times5}$$

$$=462.$$

145. n 物 r 元之組合之數等於 n 物 $n-r$ 元之組合之數.

在作成 n 物 r 元之組合時，每成一組，其餘 $n-r$ 物即自成一相當之組.換言之，即 n 物 r 元之組合之數等於 n 物 $n-r$ 元之組合之數.

$$\therefore {}^nC_r={}^nC_{n-r}.$$

此定理亦可證明如下:

$${}^nC_{n-r}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\ \underline{|n-(n-r)}}$$

$$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\ \underline{|r}}$$

$$={}^nC_r.$$

此種組合稱為餘組合(*Complementary*).

用此定理，可將算術之演算化簡.

例.　由14人中選11人，可有幾種選法?

所求數$={}^{14}C_{11}$

$$={}^{14}C_3$$

$$=\frac{14\times13\times12}{1\times2\times3}$$

$$=364.$$

若用公式${}^{14}C_{11}$，必至得出分子分母各含11個因數之式矣.

146. 設將 $m+n$ 物分爲含 m 物及 n 物之二組,試求可能分法之全數.

此顯然等於 $m+n$ 物 m 元之組合之數,因每取一含 m物之組,自餘一含 n 物之組也.

$$\text{故所求數}=\frac{\underline{|m+n}}{\underline{|m}\ \underline{|n}}.$$

注意. 設$n=m$,則二組中之件數相等,其不同分法之數爲$\frac{\underline{|2m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|2}}$;因在任一分法中,可將二組互換,而於物件之分配無異也.

147. 設將$m+n+p$物分爲含$m,n,$及p物之三組,試求可能分法之全數.

先分之爲含 m 及 $n+p$ 物之二組;其可能分法之全數爲

$$\frac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n+p}}.$$

再將$n+p$物分爲含n物及p物二組,其可能分法之全數爲

$$\frac{\underline{|n+p}}{\underline{|n}\ \underline{|p}}.$$

故將$m+n+p$物分爲含m,n,p物之三組之不同分法之全數爲

$$\frac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n+p}}\times\frac{\underline{|n+p}}{\underline{|n}\ \underline{|p}},\ \text{或}\frac{\underline{|m+n+p}}{\underline{|m}\ \underline{|n}\ \underline{|p}}.$$

注意. 若$m=n=p$,則$\frac{\underline{|3m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|m}}$; 但此公式乃將每種分法中三組出現之順序不同視爲不同.而在每種分法中此種順序之不同有 $\underline{|3}$, 故分爲三等組之可能不同方法之數爲$\frac{\underline{|3m}}{\underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|m}\ \underline{|3}}$.

例. 將15個新兵分成三個相等組之分法之數爲

$\frac{\underline{|15}}{\underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|3}}$;其補入三團之方法,每團補5人,則爲$\frac{\underline{|15}}{\underline{|5}\ \underline{|5}\ \underline{|5}}$.

148. 在下列諸例中，最堪注意者，乃在應用排列公式前，先完成問題所需之組合.

例 1. 今欲由 7英人 4美人中選六人，組一委員會，問有幾種組織法，設(1)會內恰含二美人，(2)會內至少有二美人？

(1)吾人須選 2 美人及 4 英人.

美人選法之數為${}^4C_2$；英人選法之數為${}^7C_4$.每美人組可與每英組結合，故所求之數為${}^4C_2\times{}^7C_4$

$$=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\frac{7!}{\underline{|4}\,\underline{|3}}$$

$$=\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|2}\,\underline{|3}}=210.$$

(2)此會可含 2，3，或 4 美人.

吾人須盡舉其一切適當之組合，初由二美人及 4 英人，再由 3 美人及 3 英人者，最後由 4 美人 2 英人.

此三結果之和即所求之答數；由是所求組織法之數

$$={}^4C_2\times{}^7C_4+{}^4C_3\times{}^7C_3+{}^4C_4\times{}^7C_2$$

$$=\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|4}\,\underline{|3}}+\frac{\underline{|4}}{\underline{|3}}\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|4}}+1\times\frac{\underline{|7}}{\underline{|2}\,\underline{|5}}$$

$$=210+140+21=371.$$

此例題中，僅用適當之組合公式，蓋會員之排列之次序與本無問題關也.

例 2. 由 7 子音 4 母音，能拚成 3 子音 2 母音之字若干？

選三個子音之方法有 ${}^7C_3$ 個，選兩個母音之方法有 ${}^4C_2$ 個；前者每組可與後者每組結合，故含 3 子音 2 母音之組合之數為 ${}^7C_3\times{}^4C_2$.

但每組含 5 字母，可由 $\underline{|5}$ 法排列之. 故

所求之字數 $={}^7C_3\times{}^4C_2\times\underline{|5}$

$$=\frac{\underline{|7}}{\underline{|3}\,\underline{|4}}\times\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\underline{|5}$$

$$=5\times\underline{|7}$$

$$=25200.$$

例 3. 用 *article* 之字母能作成母音居偶數位置之字若干?

此處須將母音置於三個指定位置,而將四子音置於四個所餘位置.前者有 $\underline{|3}$ 法, 後者有 $\underline{|4}$ 法. 故

所求數 $=\underline{|3}\times\underline{|4}$

$=144.$

在此例中,可立用排列公式, 因由題意母音及子音之選取,均只有一法也.

習　題　十一.A.

1. 設由 *courage* 所含字母選出一母音一子音,問有幾種選法?

2. 今有 8人候選一文學獎金, 7人候選一數學獎金, 4人候選一自然科學獎金;問此等獎金能有幾種給法?

3. 求 ${}^{8}P_{7}$, ${}^{25}P_{5}$, ${}^{24}C_{4}$, ${}^{19}C_{14}$ 之值.

4. *equation* 所含字母可成若干 5 字母之不同排列?

5. 設 n 物之 3 元排列之數之 4 倍等於 $n-1$ 物之 3 元排列之數之 5 倍, 求 n.

6. *triangle* 所含字母能成排列若干? 又能成首爲 t 末爲 e 之排列若干?

7. 於 3,4,7,5,8,1 中取 4 數字,能有若干取法?又用此中數字能成四倍數若干?

8. 設 ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_2 = 44 : 3$, 求 n.

9. 敲擊 5 鐘,能成音序若干?

10. 敲擊 7 鐘,次中音永居最後能成音序若干?

11. 由24人中派 4人守夜,各班不准完全相同,問可分配幾夜?又每人被選幾次?

12. 設母音字母永不分開, *draught* 之字母能成排列法若干?

13．市參議會有參事25人，議員10人；問能組成 5 參事 3 議員之會若干？

14．設(1)大字母居首，(2)首尾皆用大字母，問 A, B, C, p, q, r 六字母能成排列若干？

15．求 50 物之 46 元之組合之數．

16．設 ${}^nC_{12}={}^nC_8$，求 ${}^nC_{17}$，${}^{22}C_n$．

17．設 *oe* 永居奇數位置，問 *vowels* 之字母能成排列若干？

18．設於 4 官長 8 士兵中選取六人(1)恰有一官長，(2)至少有一官長，問能有幾種選法？

19．由10人成立 4 人或 4 人以上之會，問能方法若干？

20．設 ${}^{18}C_r={}^{18}C_{r+2}$，求 ${}^rC_5$．

21．用25子音，5 母音，能排成 2 子音 3 母音之字若干？

22．某圖書館有拉丁文書20本，希臘文書 6 本：如以拉丁文 3 本，希臘文 2 本同置一架上，問能有幾種置法？

23．四人等分12物有幾種分法？

24．用 3 大寫字母，5 子音，及 4 母音，能成若干含 3 子音，2 母音且以大寫字母爲首之字？

25．某次競選，須分派10，15，20人往三區遊說．設有45人願往，問有派法若干？

26．從拉丁書 7 本及英文書 3 本中，取拉丁書 4 本英文書一本置架上，英文書永居中間，問有幾種置法？

27．某船有水手八人，其中 2人僅能划前槳，1人僅能划後槳，問此八人有幾種配置法？

28．有每種 3 冊及每種 2冊之著作各兩種，設置此10冊於書架上，同著作之各冊不分開，問能有幾種置法？

29．設10份試卷中之最好及最壞者不並列，問有排列法若干？

30．一八槳之船，由11人選取水手駕駛，設11人中有三人能把舵不能划槳，其餘能划槳而不能把舵．又划槳之人中，只有二人能划前槳，問水手可有幾種配置法？

31．將p個正號及n個負號列為一行，不得有二負號相隣，試證其排列法之數為 ${}^{p+1}C_n$．

32．設 ${}^{56}P_{r+6}:{}^{54}P_{r+3}=30800:1$，求 r．

33．縱掛不同色之六旗表示信號，旗之數目不拘，問共可排成之不同信號若干？

34．設 ${}^{28}C_{2r}:{}^{24}C_{2r-4}=225:11$，求 r．

149． 此前所證之諸公式中，均視諸物為不同之物．在考究諸物中有數者相同之情形前，茲先指出所用“相同”“不同”二字之確切意義．當謂諸物為相異，不同，或不相似時，意指諸物顯然不相同，其間甚易區別．至於由視覺知其相同，彼此之間不能分別之諸物，則謂為不同之物．例如在 §148 例題2中，子音與母音可謂各具同性之兩組物，故就某種意義言，可謂之同類；但不可視為相同之物，因每物皆個別存在於其組之諸物中，彼此之間甚易區別也．故此例題之最後一步，視其每組含5個不同之物；是以其自身可成 $\lfloor 5$ 之排列．[§141推論．]

150． 設求以12本書置架上之一切排列方法，其中臘丁文5本，英文4本，餘均為不同文書籍．

其中同文書籍可視為具有共同性質之一類；但設其又互不相同，則其排列之數應為 $\lfloor 12$，蓋就其自為排列言，固各不相同也．

但若同文書均相同，其中之 5 爲相同之第一類，4 爲相同之第二類，而求此12本書能成之排列數；則爲不直接屬於以前考究之任何情形之問題矣．

151. 求 n 物之 n 元排列之數，此 n 物中有第一種相同物 p 個，第二種相同物 q 個，第三種相同物 r 個，此外各不相同．

設有 n 個字母，其中有 p 個 a，有 q 個 b，有 r 個 c，此外各字母均不相同．

設 x 爲所求之排列之數；於是若以彼此不同且與餘者不同之 p 個字母代替 p 個 a，可不更動其餘諸字母之位置，從 x 排列中之任一排列，得出 $\underline{|p}$ 個新排列．故若將 x 排列盡如此更換之，應得 $x\times\underline{|p}$ 個排列．

同理，若以 q 不同字母代替 q 個 b，應得

$$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\text{ 個排列．}$$

最後，以 r 個不同字母代替 r 個 c，應得

$$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}\text{ 個排列．}$$

今之諸物皆不相同，是以能成 $\underline{|n}$ 個排列．故

$$x\times\underline{|p}\times\underline{|q}\times\underline{|r}=\underline{|n};$$

即

$$x=\frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}};$$

此即所求之排列之數．

凡諸物非盡不相同之情形，均可照此法處理之．

例 1.　英文 *assassination* 所含之13個字母，能成13元之排列若干?

此13個字母中，有 4 個 s，3 個 a，2 個 i，2 個 n.

故排列之數

$$=\frac{\underline{|13}}{\underline{|4}\,\underline{|3}\,\underline{|2}\,\underline{|2}}$$

$$=13.11.10.9.8.7.3.5$$

$$=1001\times10800=10810800.$$

例 2.　用 1,2,3,4,3,2,1 七數字能寫成奇數位爲奇數字之數目若干?

四個奇數字 1,3,3,1 有

$$\frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

法排於其四個位置.

三個偶數字 2,4,2 有

$$\frac{\underline{|3}}{\underline{|2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

法排於其三個位置.

在(1)之每法可與(2)之每法聯合.

故所求數$=\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}\times\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|2}}=6\times3=18.$

152.　求 n 物 r 元之排列之數，每排列中各物可重複一次，二次，………至 r 次.

此處須考究以 n 物置於 r 個位置之置法之數. 在任一排列中 n 物中之每物可任意重複若干次.

第一處有 n 個置法. 既以任一法安置之後，第二處仍有 n 個置法，固禁再用同物也. 故首二處之置法之數爲 $n\times n$ 或 n^2. 第三處亦有 n 置法，故首三處置法之數爲 n^3.

如此進行，無論至何地步，n之指數恆同於已置之位置之數，故 r 處之置法之數等於 n^r.

例. 以5種獎品發給4個兒童，每兒童對各獎品皆有取得之資格，問能有幾種給法？

每獎可有4種給法；既發一獎後，餘獎亦皆有4種給法，因已得獎之兒童對此獎仍可取得也．故兩種獎品之發給法有 4^2 個，三種獎品有 4^3，類推．故5種獎品可由 4^5 或 1024 法發給．

153. 求 n 物之 n 元或 n 元以下之組合之全數．

處理每物不外取或留二法；又處理每物之各法，可與處理他每物之各法結合，故 n 物之處理法之數爲

$$2\times2\times2\times2\cdots\cdots\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 因子}.$$

但此包括各物全留之情形，除去此種情形，則方法之全數爲 2^n-1．此常稱爲 n 物之"組合之全數"．

例. 某人有朋友六人；問彼邀請一人或多人聚餐之方法共若干？

彼必須於其6友人之中邀請一部或全體；故請法之全數爲 2^6-1 或 63．

此結果可用下法證明之．

每次所請之客可爲一人，二人，三人……；故選法之數

$$={}^6C_1+{}^6C_2+{}^6C_3+{}^6C_4+{}^6C_5+{}^6C_6$$

$$=6+15+20+15+6+1=63.$$

154. 求 r 爲何值時，n 物之 r 元之組合之個數最多．

因 $${}^nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1)r},$$

$${}^nC_{r-1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{1.2.3\cdots\cdots(r-1)};$$

$$\therefore\quad {}^nC_r={}^nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}.$$

$\frac{n-r+1}{r}$ 可寫爲 $\frac{n+1}{r}-1$，可見當 r 之值增大時，其值減小．故當 r

連續為1,2,3,……等值時,此^nC_r之值續增,至$\frac{n+1}{r}-1$變至等於1,或小於1為止.

今如 $$\frac{n+1}{r}-1>1,$$

則 $$\frac{n+1}{r}>2;$$

即 $$\frac{n+1}{2}>r.$$

吾人須求能適合此不等式之r之最大值.

(1) 使n為偶數,而等於$2m$;於是

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+1}{2}=m+\tfrac{1}{2};$$

對於r等於m或小於m之一切值,此式之值均小於r.

故令　$r=m=\frac{n}{2}$,則求得組合之最大數為$^nC_{\frac{n}{2}}$.

(2) 使n為奇數,而等於$2m+1$;於是

$$\frac{n+1}{2}=\frac{2m+2}{2}=m+1.$$

對於r之等於或小於m之一切值,此式之值均小於r.但當$r=m+1$時,其乘式變為1,而

$$^nC_{m+1}={}^nC_m;\ 即,{}^nC_{\frac{n+1}{2}}={}^nC_{\frac{n-1}{2}};$$

是以知$\frac{n+1}{2}$元或$\frac{n-1}{2}$元之組合之數最大.此兩種所得之結果相同.

155. 求n物r元之組合數之公式,亦可不用排列數之公式求得之.

使^nC_r表n物r元之組合之數;又設n物以字母$a,b,c,d,$…等表之.

取去 a；則用所餘字母可作成 $n-1$ 物之 $r-1$ 元之組合 ${}^{n-1}C_{r-1}$ 個．於此等組合中添入 a，可知 n 物之 r 元之組合中，其含有 a 者有 ${}^{n-1}C_{r-1}$ 個．同理可知含有 b 者亦有 ${}^{n-1}C_{r-1}$ 個；n 字母中之各字母皆然．

故 $n\times{}^{n-1}C_{r-1}$ 等於含 a 者，含 b 者，含 c 者…………諸 r 元之組合之總數．

但用此法作成諸組合時，每組合皆重複 r 次．例如，當 $r=3$ 時，含 a，含 b，含 c 之諸組合中均有 abc 之組合．

故 $${}^{n}C_{r}={}^{n-1}C_{r-1}\times\frac{n}{r}.$$

以 $n-1$ 及 $r-1$ 代 n 及 r，

$${}^{n-1}C_{r-1}={}^{n-2}C_{r-2}\times\frac{n-1}{r-1}.$$

同理，$${}^{n-2}C_{r-2}={}^{n-3}C_{r-3}\times\frac{n-2}{r-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$${}^{n-r+2}C_{2}={}^{n-r+1}C_{1}\times\frac{n-r+2}{2};$$

最後，$${}^{n-r+1}C_{1}=n-r+1.$$

將諸縱線相乘，消去兩邊之公因子；得

$${}^{n}C_{r}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\ (r-2)\cdots1}.$$

156. 求由 $p+q+r+\cdots\cdots$ 物中取一部或全部所能成之組合之全數，其中有第一種相同物 p 個，第二種相同物 q 個，第三種相同物 r 個，類推．

此p物有$p+1$個處置法；因可取其中之$0,1,2,3,\cdots\cdots p$也．同理q物有$q+1$個處置法；r物有$r+1$個處置法；類推．

由是諸物全體有$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$個處法．

但此含有全不取之情形，故除此情形，其方法之全數為

$$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots-1.$$

157. 求n物之r元之排列及組合數之一般公式，當諸物非盡不同時，不免稍為複雜，但有一特殊情形，可以下法解之．

例．求於 *proportion* 取含之字母中，每次取4個所成之：(1)組合，(2)排列之數．

此字有字母10個，種類凡六，即o,o,o；p,p；r,r；t；i；n．求其4字母之組合時可分類如下：

(1) 三同一異．
(2) 兩兩相同．
(3) 兩同兩異．
(4) 四皆相異．

(1) 此類組合能由5法作成，因p,r,t,i,n中之每字，皆可取之與三相同字母o所成之一組組合而成．

(2) 此類組合能由${}^3C_2$法作成，因於o,o；p,p；r,r；三對中取其二．由此可得3組合．

(3) 此類組合可由3×10法作成，因於3對中取一對，再於其餘5字母中取2．由此可得30組合．

(4) 此類組合可由${}^6C_4$法作成，因於o,p,r,t,i,n中選取4不同字母．由此可得15組合．

故組合之全數為$5+3+30+15$；即53．

求4字母之不同排列，當將以上各組合用各種方法排列之．

由(1)可得　　$5\times\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|3}}$，或20排列．

由(2)可得　　$3\times\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}}$，或18排列．

由(3)可得　　$30\times\dfrac{\underline{|4}}{\underline{|2}}$，或360排列．

由(4)可得　　$15\times\underline{|4}$，或360排列．

故排列之全數為　$20+18+360+360=758$

習　題　十一.B.

1. 求由下各字之字母所能成之排列之個數:

(1) *independence*, (2) *superstitious*, (3) *institutions*.

2. 今有象牙球 17 枚,其中7者爲黑色,6 者爲紅色, 4 者爲白色,問可有若干排列法?

3. 以14面旗裝飾某室,其中 2 藍, 3 紅, 2 白, 3 綠, 2 黃, 2 紫;問能有幾種懸法?

4. 用數字 2,3,0,3,4,2,3 能作成大於百萬之數若干?

5. 設不變母音字母及子音字母之相對位置,試求 *algebra* 所含字母能成之排列之數.

6. 在某三日中,一人必須趕至車站,而有 5 種交通方法供其選擇,問此三行程之行法有幾?

7. 余有紅,白,藍,……等不同顏色之籌碼 n 個,設每色至少有 r,問能作成若干含 r 籌碼之排列?

8. 某汽船有裝運牲畜之倉12間.今有牛,馬,小牛(每種至少有 12 個)準備起運,問有裝法若干?

9. 設不限制每人所受之物數,問以n物給p人,能有幾種方法?

10. 二人分 5 物之分法有幾?

11. 設將 $a^3b^3c^4$ 式所含字母,均析爲一次,問能成不同之排列若干?

12. 某字母鎖有字母三圈,每圈有不同字母 15 個,求開鎖時之失敗之次數.

13. 聯十五邊形之三頂點,能成三角形若干?

14. 某圖書館一書有 a 本,二書各有 b 複本,三書各有 c 複本,d 書各有一本,問同時借出,可有幾種分配法?

15. 用數字 1,2,3,0,4,5,6,7, 能作成小於 10000之數若干?

16. 將下列獎品發給20個兒童,能有幾法: 第一第二之文學獎品,第一第二之數學獎品,第一之科學獎品,及第一之法文獎品?

17．某電報機有電鑰5個，靜止時在內，每電鑰能有4個不同位置；求此機所能發出之信號之全數？

18．7人能成一環形之方法有幾？7英人及7美人共圍一圓桌而坐，設美人均不相鄰，問有幾種坐法？

19．設錢袋內有撒遲林，半撒遲林，克郎，福勞音，先令，辨士，法星各一枚；問能有幾種取法？

20．設於3椰子，4蘋果，2橘子中，每種至少取一個，問有取法若干？

21．將mn物分爲n等分，有不同分法若干？

22．設用不同色之四旗上下懸起以表信號，旗數不拘，問能表信號若干？又5旗能表信號若干？

23．求 *series* 所含字母能成三字母之排列若干？

24．有p點在一平面內，除q點在一直線上外，無共線之三點；求連各點所成：(1)直線之數，(2)三角形之數．

25．有空間之p點，除q點共面外，無共面之四點，求各含三點之平面之數？

26．設有每種p本之書n種，問能成組合若干？

27．求 *expression* 所含字母能成之4字母之排列及組合之數．

28．求 *examination* 所含字母所能成4字母之排列之數．

29．設數字不得重用；試求用1,3,5,7,9，所能成之大於10000之數目之和．

30．設數字不得重用，試求用0,2,4,6,8，寫成之大於10000之數之和．

31．設$p+q+r$物中，p物相同，q物相同，餘物各異；試證其組合之全數爲

$$(p+1)(q+1)2^r-1.$$

32．試証在a及b之$2n$字母中，當a,b之個數相等時，所成之排列最多．

33．設$a,b,c,d,\cdots\cdots$等$n+1$數皆不相同，且均爲質數，試証$a^m bcd\cdots\cdots$式中之不同因子之數爲$(m+1)2^n-1$.

第十二章

數學歸納法

158. 數學公式，多有不易以直接方法證明者；於是乃用所謂數學歸納法證明之，此法即本章所欲闡明者.

例 1. 試證首n個自然數之立方和等於

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

在簡單情形下，如 $n=1$，或 2，或 3 時，不難由試驗知之；由此可推知此公式於一切情形皆能成立.假定取首 n 數時此公式能成立；則

$$1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2.$$

兩邊各加第 $n+1$ 數，即 $(n+1)^3$，得

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3\cdots\cdots\text{至 } n+1 \text{ 項}&=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2+(n+1)^3\\&=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+n+1\right)\\&=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}\\&=\left\{\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right\}^2;\end{aligned}$$

此與取 n 數時之形式相同，僅將 n 換為 $n+1$ 而已；換言之，若取若干數時，此公式能成立，則多取一數，此公式仍能成立；但已知取 3 數時，此公式能成立，故知取 4 數時亦能成立，因之取 5 數時亦能成立；類推.故此結果普通真確.

例 2. 求 n 個 $x+a$ 之形式之二項因子之積。

由乘法，

$$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc,$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=x^4&+(a+b+c+d)x^3\\&+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2\\&+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd.\end{aligned}$$

由此結果，可看出下之定律：

(1) 右方之項數較左方因子之數多一.

(2) 第一項之x之指數與左方之二項因子之個數相等；其他諸項之 x 之指數皆較前項者少一.

(3) 第一項之係數爲 1；第二項之係數爲 $a,b,c,\cdots\cdots$諸字母之和；第三項之係數爲諸字母之二元乘積之和；第四項係數爲諸字母之三元乘積之和；類推．末項爲諸字母之積.

假定此定律適用於$n-1$個因子；即假定

$$(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+h)=x^{n-1}+p_1x^{n-2}+p_2x^{n-3}+p_3x^{n-4}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1},$$

其

$$p_1=a+b+c+\cdots\cdots h;$$
$$p_2=ab+ac+\cdots\cdots\cdots+ah+bc+bd+\cdots\cdots\cdots;$$
$$P_3=abc+abd+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{n-1}=abc\cdots\cdots\cdots h.$$

以另一因子 $x+k$ 乘左右兩邊；得

$$(x+a)(x+b)\cdots\cdots\cdots(x+h)(x+k)$$
$$=x^n+(p_1+k)x^{n-1}+(p_2+p_1k)x^{n-2}+(p_3+p_2k)x^{n-3}+\cdots+p_{n-1}k.$$

茲 $p_1+k=(a+b+c+\cdots\cdots+h)+k=a,b,c,\cdots\cdots k$等 n個字母之和；

$p_2+p_1k=p_2+k(a+b+c+\cdots\cdots+h)=a,b,c,\cdots\cdots k$等 n 個字母之二元乘積之和；

$$p_3+p_2k=p_3+k(ab+ac+\cdots\cdots+ah+bc+\cdots\cdots)$$
$$=a,b,c,\cdots\cdots k\text{等}n\text{個字母之三元乘積之和；}$$

$$p_{n-1}k=a,b,c,\cdots\cdots k\text{ 等 }n\text{ 個字母之積.}$$

故知此定律若能適用於 $n-1$ 個因子，則亦能適用於 n 個因子；但確知其能適用於 4 個因子，故知能適用於 5 個因子；故知亦能適用於 6 個因子；類推．是以知其適用於任若干因子．故

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots(x+k)$$
$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+S_3x^{n-3}+\cdots\cdots+S_n$$

其 $S_1=a,b,c\cdots\cdots k$ 等 n 個字母之和；

$S_2=$此 n 個字母之二元乘積之和．

…………………………………

$S_n=$此 n 個字母之積．

159. 關於可除之定理，常用歸納法證明之．

例． 試證若 n 為正整數，則 x^n-1 可為 $x-1$ 除盡．

由除法，
$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+\frac{x^{n-1}-1}{x-1};$$

故若 $x^{n-1}-1$ 能為 $x-1$ 除盡，則 x^n-1 亦能為 $x-1$ 除盡．但 x^2-1 可為 $x-1$ 除盡；能知 x^3-1 能為 $x-1$ 除盡；故知 x^4-1 能為 $x-1$ 除盡，類推；此命題能成立．

與之同類之例題，將於數論章中見之．

160. 由上舉諸例，可知能用歸納法証明之定理，僅限於有與自然數 $1,2,3,\cdots\cdots n$ 之順序對應之連續情形者．

習 題 十二．

用歸納法證明：

1． $1+3+5+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2n-1)=n^2$.

2． $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3． $2+2^2+2^3+\cdots\cdots\cdots+2^n=2(2^n-1)$.

4． $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$至 n 項$=\frac{n}{n+1}$.

5． 當 n 為偶數時，x^n-y^n 能為 $x+y$ 除盡，試用歸納法證明之．

第 十 三 章

二項式定理・指數爲正整數者.

161. 由實際施乘,可知

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$

$$=x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$

$$+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但此結果亦可用心算法寫出;蓋此積等於若干個部分積之和,每部分積乃由四因子中各取一字母相乘得之也.觀察各部分積作成之方法,則知

(1) x^4 之項,乃於各因子中取 x 相乘而得者.

(2) 含 x^3 之項,乃盡可能法,於三因子中取 x,餘一因子中取 $a,b,c,d,$之一相乘而得者.

(3) 含 x^2 之項,乃盡可能法,於二因子中取 x,他二因子中取 a,b,c,d 中之二相乘而得者.

(4) 含 x 之項,乃從任一因子中取 x,餘三因子中取 a,b,c,d 中之三相乘而得者.

(5) 不含 x 之項,乃 a,b,c,d 等之全數字母之積.

例 1. $$(x-2)(x+3)(x-5)(x+9)$$

$$=x^4+(-2+3-5+9)x^3+(-6+10-18-15+27-45)x^2$$

$$+(30-54+90-135)x+270$$

$$=x^4+5x^3-47x^2-69x+270.$$

例 2.　求下積之x^3之係數

$$(x-3)(x+5)(x-1)(x+2)(x-8).$$

含 x^3 之項,乃由任三因子中取 x，餘二因子中取數字相乘而得者；故 x^3 之係數等於 $-3,5,-1,2,-8$ 五數中,諸二數之積之和.

故所求係數$=-15+3-6+24-5+10-40-2+8-16$

$=-39.$

162.　在上節之方程式(1)中，若 $b=c=d=a$,則

$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4.$$

此處所示之例，乃由一般結果推出特殊情形，此法在數學中常用之,因證一般命題,常較證特殊情形爲易也.

下節將用此法證明稱爲二項式定理之公式．$x+a$ 形式之二項式之任何正整數乘方,均可用此公式求得之.

163.　設 n 爲正整數,試求$(x+a)^n$之展開式.

考究連乘式

$$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots\cdots\cdots(x+k),$$

其因子之個數爲 n.

此展開式爲 $x+a,x+b,x+c,\cdots\cdots x+k$ 等 n 個因子之積；其各項皆爲 n 次,由 n 因子中各取一字母相乘得之.

x 之最高次冪爲 x^n,由從n因子中各取 x 相乘得之.其含 x^{n-1}之項爲由從任 $n-1$ 個因子中各取 x，餘一因子取 $a,b,c,d\cdots\cdots k$ 中之一相乘得之；故在最後乘積中 x^{n-1} 之係數當爲 $a,b,c,\cdots\cdots k$諸字母之和；以 S_1 表之.

含 x^{n-2} 之項，由從任 $n-2$ 個因子中取 x，餘 2 因子中取 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 中之二相乘得之；故在最後乘積中 x^{n-2} 之係數，當爲 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 諸字母之二元之積之和；以 S_2 表之.

一般言之，含 x^{n-r} 項爲於任 $n-r$ 因子中取 x，其餘因子中取 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 之 r 個相乘得之．故 x^{n-r} 之係數爲 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 諸字母之 r 元之諸積之和；以 S_r 表之．

末項爲 $abc\cdots\cdots k$ 諸字母之積．以 S_n 表之．

故 $$(x+a)(x+b)(x+c)\cdots\cdots\cdots\cdots(x+k)$$
$$=x^n+S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}+\cdots\cdots+S_rx^{n-r}+\cdots\cdots+S_{n-1}x+S_n.$$

S_1 中之項數爲 n；S_2 中之項數等於 n 物之二元組合之數，卽 ${}^nC_2$；S_3 中之項數爲 ${}^nC_3$；類推．

若 $b,c,\cdots\cdots k$ 皆等於 a，則 S_1 變爲 ${}^nC_1a$；S_2 變爲 ${}^nC_2a^2$；S_3 變爲 ${}^nC_3a^3$；類推；故

$$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1ax^{n-1}+{}^nC_2a^2x^{n-2}+{}^nC_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+{}^nC_na^n;$$

代入 ${}^nC_1$，${}^nC_2$，$\cdots\cdots$等之數值，得

$$(x+a)^n=x^n+nax^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a^2x^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}a^3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a^n,$$

此級數含有 $n+1$ 項．

此卽二項式定理，右方稱爲 $(x+a)^n$ 之展開式．

164. 二項式定理亦可如下證明之：

先照 §158，例2，用歸納法求出 $x+a,x+b,x+c,\cdots\cdots x+k$等 n個因子之積，再照 163 節，推出 $(x+a)^n$ 之展開式．

165. $(x+a)^n$之展開式中之係數，以 ${}^nC_1,{}^nC_2,{}^nC_3\cdots\cdots{}^nC_n$表之最宜．但有時略去$n$，寫爲更簡之 $C_1,C_2,C_3,\cdots\cdots C_n$．用此符號，得

$$(x+a)^n=x^n+C_1ax^{n-1}+C_2a^2x^{n-2}+C_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+C_na^n.$$

若以 $-a$ 代 a，則得

$$(x-a)^n=x^n+C_1(-a)x^{n-1}+C_2(-a)^2x^{n-2}+C_3(-a)^3x^{n-3}$$
$$+\cdots\cdots\cdots+C_n(-a)^n$$
$$=x^n-C_1ax^{n-1}+C_2a^2x^{n-2}-C_3a^3x^{n-3}+\cdots\cdots+(-1)^nC_na^n.$$

故$(x+a)^n$及$(x-a)^n$之展開式中，其諸項之絕對值相同，僅在$(x-a)^n$者正負項相間而已．至其末項之正負，則全視n之爲偶數或奇數而定．

例 1.　求 $(x+y)^6$ 之展開式.

由公式,

$$\begin{aligned}(x+y)^6 &= x^6+{}^6C_1x^5y+{}^6C_2x^4y^2+{}^6C_3x^3y^3+{}^6C_4x^2y^4\\ &\qquad +{}^6C_5xy^5+{}^6C_6y^6\\ &= x^6+6x^5y+15x^4y^2+20x^3y^3+15x^2y^4+5xy^5+y^6,\end{aligned}$$

算出 ${}^6C_1, {}^6C_2, {}^6C_3, \cdots\cdots$ 之值而代入之.

例 2.　求 $(a-2x)^7$ 之展開式.

$(a-2x)^7=a^7-{}^7C_1a^6(2x)+{}^7C_2a^5(ax)^2-{}^7C_3a^4(2x)^3+\cdots\cdots$ 至 8 項.

因 ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$, 故係數計算至 ${}^7C_3$ 後,其餘可知;此處 ${}^7C_4={}^7C_3$; ${}^7C_5={}^7C_2$; 類推. 故

$$\begin{aligned}(a-2x)^7 &= a^7-7a^6(2x)+\frac{7.6}{1.2}a^5(2x)^2-\frac{7.6.5}{1.2.3}a^4(2x)^3+\cdots\cdots\\ &= a^7-7a^6(2x)+21a^5(2x)^2-35a^4(2x)^3+35a^3(2x)^4\\ &\qquad -21a^2(2x)^5+7a(2x)^6-(2x)^7\\ &= a^7-14a^6x+84a^5x^2-280a^4x^3+560a^3x^4\\ &\qquad -672a^2x^5+448ax^6-128x^7.\end{aligned}$$

例 3.　求 $(a+\sqrt{a^2-1})^7+(a-\sqrt{a^2-1})^7$ 之值.

此處爲求兩展開式之和,此兩式諸項之絕對值相同;惟第二展開式之第 2,4,6,8 各項爲負數,故與第一展開式之相當項抵消.得所求和

$$\begin{aligned}&=2\{a^7+21a^5(a^2-1)+35a^3(a^2-1)^2+7a(a^2-1)^3\}\\ &=2a(64a^6-112a^4+56a^2-7).\end{aligned}$$

166.　在 $(x+a)^n$ 之展開式內,第二項之係數爲 ${}^nC_1$; 第三項之係數爲 ${}^nC_2$; 第四項之係數爲 ${}^nC_3$; 類推;每項內之尾數較其所在項數少一;故 ${}^nC_r$ 爲第 $r+1$ 項之係數.此名曰**通項**,因予 r 以各種數值,可從 ${}^nC_r$ 求得任何項之係數;再予 x 及 a 以適當之指數,則可求出任一指定之項.

如是其第 $r+1$ 項可寫爲

$$^nC_rx^{n-r}a^r,\ 或\ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^{n-r}a^r.$$

應用此公式於任何特殊情形時,當注意 a 之指數與 C 之尾數相同, x 及 a 之指數之和爲 n.

例 1. 求 $(a+2x^3)^{17}$ 展開式之第 5 項.

所求項 $={}^{17}C_4a^{13}(2x^3)^4$

$$=\frac{17.16.15.14}{1.2.3.4}\times 16a^{13}x^{12}$$

$$=38080a^{13}x^{12}.$$

例 2. 求 $(3-a)^{15}$ 之第十四項.

所求項 $={}^{15}C_{13}(3)^2(-a)^{13}$

$$={}^{15}C_2\times(-9a^{13})$$

$$=-945a^{13}.$$

167. 二項式定理之最簡式爲$(1+x)^n$之展開式.此乃在 §163之一般公式內以 1 代 x, 以 x 代 a 得之.故

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots\cdots+{}^nC_rx^r+\cdots\cdots+{}^nC_nx^n$$

$$=1+nx+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots\cdots+x^n;$$

其通項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r.$$

二項式之展開式可永照首項爲 1 之情形求出之;如

$$(x+y)^n=\left\{x\left(1+\frac{y}{x}\right)\right\}^n$$

$$=x^n(1+z)^n,\quad 於此\ z=\frac{y}{x}.$$

例 1. 求 $(x^2-2x)^{10}$ 展開式內 x^{16} 之係數.

已知 $(x^2-2x)^{10}=x^{20}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10};$

又因 x^{20} 乘$\left(1-\frac{2}{x}\right)^{10}$ 展開式內之各項.故於此展開式內求 $\frac{1}{x^4}$ 之係數.

所求係數$={}^{10}C_4(-2)^4$

$$=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}\times 16$$

$$=3360.$$

在某種情形內,下法較爲簡便.

例2.　求 $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^n$ 之展開式之 x^r 之係數.

假定 x^r 在第 $p+1$ 項.

$$第\ p+1\ 項 = {}^nC_p(x^2)^{n-p}\left(\frac{1}{x^3}\right)^p$$
$$= {}^nC_p x^{2n-5p}.$$

但此項含有 x^r，故 $2n-5p=r$；或 $p=\frac{2n-r}{5}$.

故所求係數 $={}^nC_p={}^nC_{\frac{2n-r}{5}}$

$$=\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{5}(2n-r)\ \lfloor \frac{1}{5}(3n+r)}.$$

若 $\frac{2n-r}{5}$ 非正整數，則此展開式無含 x^r 之項.

168.　在 §163 中，吾人由 $(x+a)(x+b)\cdots\cdots(x+k)$ 等 n 個因子之積推出 $(x+a)^n$ 之展開式. 此種證法所得之結論普遍性大極，故甚有價值. 但次舉二項式定理之簡短證法亦當加以注意.

在第十五章，吾人將用同法求

$$(a+b+c+\cdots\cdots\cdots)^n$$

展開式之公項.

169.　證明二項式定理.

$(x+a)^n$ 之展開式，乃 n 個等於 $x+a$ 之因子之積，其各項皆爲 n 次，由 n 因子中各取一字母相乘而得之. 故含 $x^{n-r}a^r$ 之項，乃由 r 因子內取 a，由其餘因子內取 x 相乘而得. 是以含 $x^{n-r}a^r$ 之項之個數，必等於 n 物 r 元之組合之數. 換言之，$x^{n-r}a^r$ 之係數，必爲 ${}^nC_r$. 連續予 r 以 $0, 1, 2, 3, \cdots\cdots\cdots n$ 等值，則一切項之係數，均可得出. 由是

$$(x+a)^n=x^n+{}^nC_1x^{n-1}a+{}^nC_2x^{n-2}a^2+\cdots\cdots\cdots$$
$$+{}^nC_rx^{n-r}a^r+\cdots\cdots+a^n,$$

因 ${}^nC_0$ 及 ${}^nC_n$ 均等於 1 也.

習 題 十三.A.

展開下列各二項式:

1. $(x-3)^5$.　　2. $(3x+2y)^4$.　　3. $(2x-y)^5$.

4. $(1-2a^2)^6$.　　5. $(x^2+x)^5$.　　6. $(1-xy)^7$.

7. $\left(2-\frac{3x^2}{2}\right)^4$.　　8. $\left(3a-\frac{2}{3}\right)^5$.　　9. $\left(1+\frac{x}{2}\right)^7$.

10. $\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2x}\right)^6$.　　11. $\left(\frac{1}{2}+a\right)^8$.　　12. $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}$.

求出並化簡:

13. $(x-5)^{13}$ 之第 4 項.　　14. $(1-2x)^{12}$ 之第 10 項.

15. $(2x-1)^{13}$ 之第 12 項.　　16. $(5x+8y)^{30}$ 之第 28 項.

17 $\left(\frac{a}{3}+9b\right)^{10}$ 之第 4 項.　　18. $\left(2a-\frac{b}{3}\right)^8$ 之第 5 項.

19 $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^9$ 之第 7 項.　　20. $\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}-\frac{y^{\frac{5}{2}}}{b^{\frac{3}{2}}}\right)^8$ 之第 5 項.

求下列各式之值:

21. $(x+\sqrt{2})^4+(x-\sqrt{2})^4$.

22. $(\sqrt{x^2-a^2}+x)^5-(\sqrt{x^2-a^2}-x)^5$.

23. $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$.

24. $(2-\sqrt{1-x})^6+(2+\sqrt{1-x})^6$.

25. 求 $\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)^{10}$ 之中項.　　26. 求 $\left(1-\frac{x^2}{2}\right)^{14}$ 之中項.

27. 求 $\left(x^2+\frac{3a}{x}\right)^{15}$ 之展開式中之 x^{18} 之係數.

28. 求 $(ax^4-bx)^9$ 之展開式中之 x^{18} 之係數.

29. 求 $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ 之展開式中之 x^{32} 及 x^{-17} 之係數.

30. 求 $\left(3a-\frac{a^3}{6}\right)^9$ 之展開式中之二中項.

31. 求 $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)$ 之展開式中之不含 x 之項.

32. 求 $\left(9x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 之展開式中之第 13 項.

33. 設 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 之展開式中有 x^r，試求其係數.

34. 求 $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ 之展開式中之不含 x 之項.

35. 設 $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ 之展開式中有 x^p，試證其係數爲

$$\frac{\underline{\lvert 2n}}{\underline{\lvert \frac{1}{3}(4n-p)}\ \underline{\lvert \frac{1}{3}(2n+p)}}.$$

170. 在 $(1+x)^n$ 之展開式中，距首尾等遠之項之係數相等.

正數第 $r+1$ 項之係數爲 ${}^nC_r$.

倒數第 $r+1$ 項之前有 $n+1-(r+1)$ 或 $n-r$ 項；故正數爲第 $n-r+1$ 項，其係數爲 ${}^nC_{n-r}$. 由第 145 節，${}^nC_{n-r}={}^nC_r$. 由是本命題證明矣.

171. 求 $(1+x)^n$ 之展開式中之最大係數.

$(1+x)^n$ 之展開式之通項之係數爲 ${}^nC_r$；故求 r 爲何値時此數爲最大足矣.

由 §154，知 n 爲偶數時，${}^nC_{\frac{n}{2}}$ 爲最大係數；n 爲奇數時，最大係數爲 ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$，或 ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$；此二係數相等.

172. 求 $(x+a)^n$ 之展開式中之最大項.

$$(x+a)^n=x^n\left(1+\frac{a}{x}\right)^n;$$

因 x^n 爲 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 之展開式中各項之公倍數，故求出 $\left(1+\frac{a}{x}\right)^n$ 之展開式中之最大項即可.

使第 r 項及第 $r+1$ 項爲任兩連續項．第 $r+1$ 項由以 $\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{a}{x}$，

即 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ 乘第 r 項得之． [§166]

當 r 增大時，因子 $\frac{n+1}{r}-1$ 減小；故第 $r+1$ 項非永大於第 r 項，

僅能至 $\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}$ 等於或小於 1 時而已．

今若 $$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)\frac{a}{x}>1,$$

則 $$\frac{n+1}{r}-1>\frac{x}{a};$$

即 $$\frac{n+1}{r}>\frac{x}{a}+1,$$

或 $$\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}>r \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ 爲整數，以 p 表之；於是，若 $r=p$，則乘式變爲 1，而第 $p+1$ 項等於第 p 項；故此二項大於其他任何項．

設 $\frac{n+1}{\frac{x}{a}+1}$ 非整數，以 q 表其整數部分；於是 r 適合 (1) 式之最大值爲 q；故第 $q+1$ 項爲最大．

因只論絕對值的最大項，故對於 $(x-a)^n$ 之研究與上正同；是以凡在數習題中，無須注意二項式之第二項之符號．又作題時，以不用一般公式爲最佳．

例1.　設 $x=\frac{1}{3}$，試求 $(1+4x)^9$ 之展開式之最大項.

以 T_r 及 T_{r+1} 表第 r 及 $r+1$ 項，於是

$$T_{r+1}=\frac{8-r+1}{r}.4x\times T_r$$

$$=\frac{9-r}{r}\times\frac{4}{3}\times T_r;$$

故
$$T_{r+1}>T_r,$$

迄
$$\frac{9-r}{r}\times\frac{4}{3}>1;$$

卽
$$36-4r>3r,$$

或
$$36>7r.$$

r 適合此不等式之最大值爲 5，故最大項爲第六項；其值

$$={}^8C_5\times\left(\frac{4}{3}\right)^5={}^8C_3\times\left(\frac{4}{3}\right)^5=\frac{57344}{243}.$$

例2.　設 $x=1$ 時，試求 $(3-2x)^9$ 之展開式之最大項.

$$(3-2x)^9=3^9\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9;$$

故考究$\left(1-\frac{2x}{3}\right)^9$ 之展開式足矣.

此處
$$T_{r+1}=\frac{9-r+1}{r}\cdot\frac{2x}{3}\times T_r$$

$$=\frac{10-r}{r}\times\frac{2}{3}\times T_r;$$

故
$$T_{r+1}>T_r,$$

迄
$$\frac{10-r}{r}\times\frac{2}{3}>1;$$

卽
$$20>5r.$$

故於 r 大於 3 之値，$T_{r+1}>T_r$；但若 $r=4$，則 $T_{r+1}=T_r$，此二項爲最大之項．故第 4 及第 5 兩項之絕對値相等，且大於其他任何項，其値

$$=3^9\times{}^9C_3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=3^6\times 84\times 8=489888.$$

173. 求 $(1+x)^n$ 之展開式中諸項之係數之和.

在恆等式 $(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots+C_nx^n$ 中，使 $x=1$；得

$$\begin{aligned}2^n&=1+C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_n\\&=\text{諸係數之和.}\end{aligned}$$

推論. $C_1+C_2+C_3+\cdots\cdots+C_n=2^n-1$；
即"n 物之組合之全數"爲 2^n-1.　　　　[§153]

174. 求證在 $(1+x)^n$ 之展開式中，奇數項係數之和等於偶數項係數之和.

在恒等式

$(1+x)^n=1+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots+C_nx^n$ 中，使 $x=-1$；得

$$0=1-C_1+C_2-C_3+C_4-C_5+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$\begin{aligned}\therefore\ 1+C_2+C_4+\cdots\cdots\cdots\cdots&=C_1+C_3+C_5+\cdots\cdots\cdots\cdots\\&=\tfrac{1}{2}(\text{所有係數之和})\\&=2^{n-1}.\end{aligned}$$

175. 多項式亦可用二項式定理展開之.

例. 求 $(x^2+2x-1)^3$ 之展開式.

將 $2x-1$ 看作一項，則此展開式

$$\begin{aligned}&=(x^2)^3+3(x^2)^2(2x-1)+3x^2(2x-1)^2+(2x-1)^3\\&=x^6+6x^5+9x^4-4x^3-9x^2+6x-1.\end{aligned}$$

176. 下例甚值注意.

例. 設 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n$，試求下兩式之値：

$$c_0+2c_1+3c_2+4c_3+\cdots\cdots+(n+1)c_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$c_1^2+2c_2^2+3c_3^2+\cdots\cdots+nc_n^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

級數 $(1)=(c_0+c_1+c_2+\cdots+c_n)+(c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots+nc_n)$

$$\begin{aligned}&=2^n+n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\cdots\cdots+1\right\}\\&=2^n+n(1+1)^{n-1}\\&=2^n+n.2^{n-1}.\end{aligned}$$

級數 (2) 之值，如下求得之：

$$c_1x+2c_2x^2+3c_3x^3+\cdots\cdots+nc_nx^n$$
$$=nx\left\{1+(n-1)x+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}\right\}$$
$$=nx(1+x)^{n-1};$$

故，以$\frac{1}{x}$代 x，得

$$\frac{c_1}{x}+\frac{2c_2}{x^2}+\frac{3c_3}{x^3}+\cdots\cdots+\frac{nc_n}{x^n}=\frac{n}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

又 $c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_nx^n=(1+x)^n$ $\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$.

若將級數 (3) 及 (4) 之左方相乘，則知積中不含 x 之項即級數 (1)；故

級數 (2) $=\frac{n}{x}(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}$ 中不含 x 之項

$=\frac{n}{x^n}(1+x)^{2n-1}$ 中不含 x 之項

$=n(1+x)^{2n-1}$ 中 x^n 之係數

$=n\times {}^{2n-1}C_n$

$=\frac{\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\ \lfloor n-1}.$

習　　題　十三、B.

求下列各式之展開式中何項最大：

1. $(x-y)^{30}$，當 $x=11, y=4$ 時.
2. $(2x-3y)^{28}$，當 $x=9$，$y=4$ 時.
3. $(2a+b)^{14}$，當 $a=4$，$b=5$ 時.
4. $(3+2x)^{15}$，當 $x=\frac{5}{2}$ 時.

求下列各式之展開式中最大項之值：

5. $(1+x)^n$，當 $x=\frac{2}{3}$，$n=6$ 時.
6. $(a+x)^n$，當 $a=\frac{1}{2}$，$x=\frac{1}{3}$，$n=9$ 時.

7．試證 $(1+x)^{2n}$ 之中項之係數等於 $(1+x)^{2n-1}$ 之二中項之係數之和．

8．設在 $(x+a)^n$ 之展開式中，奇數項之和爲 A，偶數項之和爲 B，試證 $A^2-B^2=(x^2-a^2)^n$．

9．設在 $(x+y)^n$ 之展開式中，第 2，3，4 項爲 240,720,1080；試求 x，y，n 之值．

10．求 $(1+2x-x^2)^4$ 之展開式．

11．求 $(3x^2-2ax+3a^2)^3$ 之展開式．

12．求 $(x+a)^n$ 之倒第 r 項．

13．求 $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$ 之倒第 $p+2$ 項．

14．設在 $(1+x)^{43}$ 展開式中，第 $2r+1$ 項之係數與第 $r+2$ 項之係數相等；求 r．

15．設在 $(1+x)^{2n}$ 之展開式中，第 $3r$ 項之係數等於第 $r+2$ 項之係數，試求 r 與 n 間之關係．

16．試證 $(1+x)^{2n}$ 之展開式之中項爲

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots\cdots(2n-1)}{\underline{|n}}2^n x^n.$$

設 $(1+x)^n$ 之展開式中之係數，以 $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots\cdots c_n$ 表之，試證

17．$c_1+2c_2+3c_3+\cdots\cdots\cdots+nc_n=n\cdot 2^{n-1}$．

18　$c_0+\frac{c_1}{2}+\frac{c_2}{3}+\cdots\cdots\cdots+\frac{c_n}{n+1}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$．

19．$\frac{c_1}{c_0}+\frac{2c_2}{c_1}+\frac{3c_3}{c_2}+\cdots\cdots\cdots+\frac{nc_n}{c_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$．

20．$(c_0+c_1)(c_1+c_2)\cdots\cdots(c_{n-1}+c_n)=\frac{c_1c_2\cdots\cdots c_n(n+1)^n}{\underline{|n}}$．

21．$2c_0+\frac{2^2c_1}{2}+\frac{2^3c_2}{3}+\frac{2^4c_3}{4}+\cdots\cdots+\frac{2^{n+1}c_n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$．

22．$c_0^2+c_1^2+c_2^2+\cdots\cdots+c_n^2=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$．

23．$c_0c_r+c_1c_{r+1}+c_2c_{r+2}+\cdots\cdots+c_{n-r}c_n=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|n+r}}$．

第十四章

二項式定理·指數爲任意數者.

177. 前章研究之二項式定理，僅限於當指數爲正整數時，茲考究由是所得之公式，是否能適用於當指數爲負數或分數時之情形.

由 §167，知凡二項式均可化爲一公共之形式，故吾人專論 $(1+x)^n$ 形式之二項式足矣.

由實際開方，得

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\cdots\cdots;$$

又由實際施除，

$$(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots;$$

[比較 §60，例1.]

二級數之項數皆無限制.

以上乃用各不相干之方法，分別求出 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 及 $(1+x)^{-2}$ 之展開式. 茲證此不過用一般公式展開 $(1+x)^n$，此處 n 爲任意有理量之特例而矣.

此公式爲牛頓氏 (*Newton*) 發明.

178. 設有依 x 之升冪排列之二式，如

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

及 $$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

此二展開式之積必乃爲 x 之升冪級數；以

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\cdots\cdots\cdots$$

表之，於是 $A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 顯然爲 m 及 n 之函數．故在任何特殊情形下，$A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 之值，必依其情形下之 m 及 n 之值而定．但 $A,B,C\cdots\cdots\cdots$ 由結合 (1) 及 (2) 之 x 之各次冪之係數而得，其結合方法，則與 m，n 之值全無關係．換言之，即無論 m 及 n 爲何值，$A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 永保同一不變之形式．故若 $A,B,C,\cdots\cdots\cdots$ 之形式已就 m 及 n 之任何值求得，則於 m 及 n 之一切值，$A,B,C,\cdots\cdots$ 亦必爲此同一之形式，可以斷言．

此原則爲"形式不變"之一例．吾人僅須認清此種事實，即在任何代數積中，無論所含之量爲整數或分數；正數，或負數；其結果之形式永遠相同．

下節利用此原則，對於指數爲任何數時之二項式定理，加以一般之證明．此種證法得自尤勒氏 (*Euler*)．

179. 當指數爲正分數時，證明二項式定理．

不論 m 爲何值，正數或負數；整數或分數；吾人以 $f(m)$ 代表級數

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots;$$

於是 $f(n)$ 代表級數

$$1+nx+\frac{n(n-)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots.$$

此二級數相乘，必仍得 x 之升冪之級數．不論 m 及 n 爲何值，其係數之形式不變．

定此積之不變形式，可予 m,n 以最適宜之值，因此設 m 及 n 爲正整數．如是則 $f(m)$ 爲 $(1+x)^m$ 之展開式，而 $f(n)$ 爲 $(1+x)^n$ 之展開式，故

$$f(m)\times f(n)=(1+x)^m\times(1+x)^n=(1+x)^{m+n},$$

但 m 及 n 爲正整量時，$(1+x)^{m+n}$ 之展開式爲

$$1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故此即 $f(m)\times f(n)$ 之積在一切情形下，不論 m 及 n 爲何值，用前法可以 $f(m+n)$ 表之；是以對於 m 及 n 之一切值

$$f(m)\times f(n)=f(m+n).$$

又 $$f(m)\times f(n)\times f(p)=f(m+n)\times f(p).$$
$$=f(m+n+p).$$

照此可証

$$f(m)\times f(n)\times f(p)\cdots\cdots\text{至 } k \text{ 因子}=f(m+n+p+\cdots\text{至 } k \text{ 項}).$$

令 $m, n, p,\cdots\cdots\cdots$等均爲$\frac{h}{k}$；其 h, k 爲正整量；則

$$\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^k=f(h);$$

但因 h 爲正整量，$f(h)=(1+x)^h$.

$$\therefore\ (1+x)^h=\left\{f\left(\frac{h}{k}\right)\right\}^k;$$

$$\therefore\ (1+x)^{\frac{h}{k}}=f\left(\frac{h}{k}\right);$$

但$f\left(\frac{h}{k}\right)$代表級數

$$1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

$$\therefore\ (1+x)^{\frac{h}{k}}=1+\frac{h}{k}x+\frac{\frac{h}{k}\left(\frac{h}{k}-1\right)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

此證明二項式定理，適用於任何正分指數.

180. 証明指數為任何負量時之二項式定理.

前已證明不論 m,n 為何值，均

$$f(m)\times f(n)=f(m+n);$$

以 $-n$ 代 m（n 為正量），得

$$\begin{aligned} f(-n)\times f(n)&=f(-n+n)\\ &=f(0)\\ &=1, \end{aligned}$$

因第一項外之各項皆為零也；

$$\therefore\ \frac{1}{f(n)}=f(-n);$$

但於 n 之任何正値 $f(n)=(1+x)^n$;

$$\therefore\ \frac{1}{(1+x)^n}=f(-n),$$

或

$$(1+x)^{-n}=f(-n).$$

但 $f(-n)$ 代表級數

$$1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots;$$

$$\therefore\ (1+x)^{-n}=1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

此證明二項式定理能適用於任何負指數. 故此定理已完全證明矣.

181. 前二節之證明未見完全滿意，甚或能與學生以某種困難. 今述其一端如次.

在 $f(m)$ 之式內，當 m 為正整數時項數有限，在其他情形時為項數無限. 參考 §182. 故對於 $f(m)\times f(n)=f(m+n)$ 之意義云何，

實有加以檢討之必要. 在第二十一章, 將知當 $x<1$ 時, $f(m)$ 及 $f(n)$, $f(m+n)$ 皆爲收斂級數, $f(m+n)$ 確爲 $f(m)\times f(n)$ 之算術同値式. 但當 $x>1$ 時, 皆爲放散級數, 故僅能謂如以 $f(m)$ 之級數乘表以 $f(n)$ 之級數, 則其積之首 r 項與 $f(m+n)$ 之首 r 項相等而矣, 此 r 可爲任何定值. [見 §308]

例1. 展開 $(1-x)^{\frac{3}{2}}$ 至四項.

$$(1-x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2}(-x)+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1.2}(-x)^2+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{1.2.3}(-x)^3+\cdots$$

$$=1-\frac{3}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+\cdots\cdots$$

例2. 展開 $(2+3x)^{-4}$ 至四項.

$$(2+3x)^{-4}=2^{-4}\left(1+\frac{3x}{2}\right)^{-4}$$

$$=\frac{1}{2^4}\left[1+(-4)\left(\frac{3x}{2}\right)+\frac{(-4)(-5)}{1.2}\left(\frac{3x}{2}\right)^2+\frac{(-4)(-5)(-6)}{1.2.3}\left(\frac{3x}{2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{16}\left(1-6x+\frac{45}{2}x^2-\frac{135}{2}x^3+\cdots\cdots\cdots\right).$$

182. 現今求通項, 必用公式將其

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x$$

完全寫出; 蓋當 n 爲分量或負量時, 不能再用符號 ${}^nC_r$ 也.

又必須分子之因子有一爲零, 通項之係數始能爲零; 故當 $n-r+1$ 爲零, 即 $r=n+1$ 時, 此級數於第 r 項終止. 但因 r 爲正整量, 故除當指數 n 爲正整量外, 此等式不能成立. 故當 n 爲正整數時, 可用二項式定理能展至 $n+1$ 項; 其他情形則可展至無限項.

例1． 求 $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 之展開式之通項．

$$第\ r+1\ 項=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-r+1)}{\underline{|r}}x^r$$

$$=\frac{1(-1)(-3)(-5)\cdots\cdots(-2r+3)}{2^r\underline{|r}}x^r.$$

分子含有 r 個因子，其中之 $r-1$ 個爲負，故由各負因子提出 -1，則上式可寫爲

$$(-1)^{r-1}\frac{1.3.5.\cdots\cdots\cdots\cdots(2r-3)}{2^r\underline{|r}}x^r.$$

例2． 求 $(1-nx)^{\frac{1}{n}}$ 之展開式之通項．

$$第\ r+1\ 項=\frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{n}-r+1\right)}{\underline{|r}}(-nx)^r$$

$$=\frac{1(1-n)(1-2n)\cdots\cdots(1-\overline{r-1}\,.n)}{n^r\underline{|r}}(-1)^r n^r x^r$$

$$=(-1)^r\frac{1(1-n)(1-2n)\cdots\cdots(1-\overline{r-1}\,.n)}{\underline{|r}}x^r$$

$$=(-1)^r(-1)^{r-1}\frac{(n-1)(2n-1)\cdots(\overline{r-1}\,.n-1)}{\underline{|r}}x^r$$

$$=-\frac{(n-1)(2n-1)\cdots\cdots(\overline{r-1}\,.n-1)}{\underline{|r}}x^r.$$

$$(-1)^r(-1)^{r-1}=(-1)^{2r-1}=-1.$$

例3． 求 $(1-x)^{-3}$ 之展開式之通項．

$$第\ r+1\ 項\quad=\frac{(-3)(-4)(-5)\cdots\cdots(-3-r+1)}{\underline{|r}}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{3.4.5\cdots\cdots(r+2)}{\underline{|r}}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{3.4.5\cdots\cdots(r+2)}{1.2.3.\cdots\cdots r}x^r$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)}{1.2}x^r,$$

由消去分子分母之公因子得之．

習 題 十四.A.

展開以下各式至四項:

1. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. 2. $(1+x)^{\frac{3}{2}}$. 3. $(1-x)^{\frac{2}{5}}$.

4. $(1+x^2)^{-2}$. 5. $(1-3x)^{\frac{1}{3}}$. 6. $(1-3x)^{-\frac{1}{3}}$.

7. $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$. 8. $\left(1+\frac{x}{3}\right)^{-3}$. 9. $\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$.

10. $\left(1+\frac{1}{2}a\right)^{-4}$. 11. $(2+x)^{-3}$. 12. $(9+2x)^{\frac{1}{2}}$.

13. $(8+12a)^{\frac{2}{3}}$. 14. $(9-6x)^{-\frac{3}{2}}$. 15. $(4a-8x)^{-\frac{1}{2}}$.

寫出並化簡:

16. $(1+2x)^{-\frac{1}{2}}$之第 8 項.

17. $(1-2x^3)^{\frac{11}{2}}$ 之第 11 項.

18. $(1+3a^2)^{\frac{16}{3}}$ 之第 10 項.

19. $(3a-2b)^{-1}$ 之第 5 項.

20. $(1-x)^{-2}$ 之第 $r+1$ 項.

21. $(1-x)^{-4}$ 之第 $r+1$ 項.

22. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ 之第 $r+1$ 項.

23. $(1+x)^{\frac{11}{3}}$ 之第 $r+1$ 項.

24. $(2^{10}-2^7x)^{\frac{13}{2}}$ 之第 14 項.

25. $(3^8+6^4x)^{\frac{11}{4}}$ 之第 7 項.

183. 設用二項式定理展開 $(1-x)^{-2}$, 則得

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots;$$

但由 § 60, 此結果僅於 x 小於 1 時爲眞. 此令吾人生出下之問題: 是否恒可假定

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots$$

之兩端眞實相等? 設其不能, 則於何種條件下, $(1+x)^n$ 之展開式,

始可視爲眞確等值式.

例如，設 $n=-1$；則得

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

在此方程式內，使 $x=2$，則得

$$(-1)^{-1}=1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots\cdots$$

此種矛盾結果，充分指示不能認

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲 $(1+x)^n$ 在一切情形下之眞確算術等值式.

據等比級數求和公式，知級數 (1) 之首 r 項之和

$$=\frac{1-x^r}{1-x}$$

$$=\frac{1}{1-x}-\frac{x^r}{1-x};$$

且當 x 之絕對値小於 1 時，令 r 爲充分大値，可使 $\frac{x^r}{1-x}$ 變爲任意之小量；即由取充分多之項數，可使其和與 $\frac{1}{1-x}$ 之差爲任意之小.但當 x 之絕對値大於 1 時，$\frac{x^r}{1-x}$ 之値與 r 俱增，是以無論取級數

$$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots$$

之若干項，皆不能得近於 $\frac{1}{1-x}$ 之値.

在級數之發散與收斂章內，將知當 x 小於 1 時，用二項式定理求得之 $(1+x)^n$ 之依 x 升冪之展開式，恆有算術之解釋.

但當 x 大於 1 時，級數

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots\cdots$$

之通項含有 x^r，由取 r 爲充分之大，能使之大於任何有限量；在此種情形下，上級數之值毫無限制．故 x 大於 1 時，$(1+x)^n$ 之按照 x 升冪之展開式，毫無算術之意義．

184. $(x+y)^n$ 恒可用二項式定理展開之；因此式可寫作下兩形式之一：

$$x^n\left(1+\frac{y}{x}\right)^n, \qquad y^n\left(1+\frac{x}{y}\right)^n;$$

用前式或用後式，視 x 之大於或小於 y 而定．

185. 求 $(1-x)^{-n}$ 之展開式之通項之最簡形式．

第 $r+1$ 項

$$=\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!}x^r.$$

故知 $(1-x)^{-n}$ 之展開式之各項皆爲正量．

任何二項式之展開式之通項，雖可照 §182 之方法求得，但在一切負指數之情形下，用上之通項之形式求之，尤爲便捷；僅在指數爲正數時用

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1)}{r!}x^r.$$

之形式．

例. 求 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}$ 之展開式之通項.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}}=(1-3x)^{-\frac{1}{3}}.$$

其第 $r+1$ 項

$$=\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}+1)(\frac{1}{3}+2)\cdots\cdots(\frac{1}{3}+r-1)}{\underline{|r}}(3x)^r$$

$$=\frac{1\cdot4\cdot7\cdots\cdots(3r-2)}{3^r\underline{|r}}3^rx^r.$$

$$=\frac{1\cdot4\cdot7\cdots\cdots(3r-2)}{\underline{|r}}x^r.$$

已知式若為 $(1+3x)^{-\frac{1}{3}}$，仍可用同公式求其通項，不過以 $-3x$ 代替 $3x$ 而已.

186. 當牢記下列各展開式:

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots+x^r+\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots+(r+1)x^r+\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\frac{(r+1)(r+2)}{1\cdot2}x^r+\cdots\cdots$$

187. 當 n 之值無限制時，對於 $(1+x)^n$ 之展開式內最大項之一般研究，將於 §189 見之；但學者應用 §172 方法解數字問題，當無若何困難.

例. 當 $x=\frac{2}{3}$ 及 $n=20$ 時，求 $(1+x)^{-n}$ 之展開式之最大項.

就絕對值言， $$T_{r+1}=\frac{n+r-1}{r}\cdot x\times T_r,$$

$$=\frac{19+r}{r}\times\frac{2}{3}\times T_r;$$

$$\therefore\ T_{r+1}>T_r,$$

之條件為 $$\frac{2(19+r)}{3r}>1;$$

即 $$38>r.$$

故對於 r 之 37 以下之一切值，37 在內，均得 $T_{r+1}>T_r$；但如 $r=38$，則 $T_{r+1}=T_r$，而此二者皆為最大項．故第 38 及 39 項之絕對值相等，且大於其任何項.

188. 下列諸例說明二項式定理之應用.

例1. 求

$$(1+3x)^{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{3}}$$

之展開式之首三項.

展開此兩二項式至含 x^2 之項，得

$$\left(1+\frac{3}{2}x-\frac{9}{8}x^2-\cdots\right)\left(1+\frac{2}{3}x+\frac{8}{9}x^2+\cdots\right)$$

$$=1+x\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)+x^2\left(\frac{8}{9}+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{9}{8}\right)\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{13}{6}x+\frac{55}{72}x^2+\cdots.$$

在此例中，若 $x=.002$，由是 $x^2=.000004$，而第三項爲以 5 零始之小數. 若求 5 位小數之答數，以 $x=.002$ 代入 $1+\frac{13}{6}$ 即可，將含 x^2 之項略去之.

例2. 設 x 之値甚小，其平方及以上之乘方均可略去，試求

$$\frac{(1+\frac{2}{3}x)^{-5}+\sqrt{4+2x}}{\sqrt{(4+x)^3}}$$ 之值.

因 x^2，及較高之乘方可以略去，故留各展開式之首二項. 由是

此式 $$=\frac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}+2\left(1+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{8\left(1+\frac{x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{10}{3}x\right)+2\left(1+\frac{1}{4}x\right)}{8\left(1+\frac{3}{8}x\right)}$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\frac{17}{6}x\right)\left(1-\frac{3}{8}x\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(3-\frac{95}{24}x\right).$$

例3. 求 $\dfrac{1}{\sqrt{47}}$ 之值至第四位小數.

$$\frac{1}{\sqrt{47}}=(47)^{-\frac{1}{2}}=(7^2-2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}\left(1-\frac{2}{7^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{7^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^4}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{7}+\frac{1}{7^3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{7^5}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7^7}+\cdots$$

共首項之值，如下求得之:

$$\begin{array}{l}
7)\underline{1} \\
7)\ \underline{.142857}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\dfrac{1}{7}, \\
7)\ \underline{.020408} \\
7)\ \underline{.002915}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\dfrac{1}{7^3}, \\
7)\ \underline{.000416} \\
\quad\ .000059\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\dfrac{1}{7^5};
\end{array}$$

$\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{7^7}$ 一項爲始以 5 零之小數，一觀便知.

$$\therefore\ \frac{1}{\sqrt{47}}=.142857+.002915+.000088=.14586,$$

故此結果至少對於四位小數爲正確.

例4. 求 126 之立方根至五位小數.

$$(126)^{\frac{1}{3}}=(5^3+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(1+\frac{1}{5^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=5\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^6}+\frac{5}{81}\cdot\frac{1}{5^9}-\cdots\right)$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{5^7}-\cdots$$

$$=5+\frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{10^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{2^5}{10^5}+\frac{1}{81}\cdot\frac{2^7}{10^7}-\cdots$$

$$=5+\frac{.04}{3}-\frac{.00032}{9}+\frac{.0000128}{81}-\cdots$$

$$=5+.013333\cdots-.000035\cdots+\cdots$$

$=5.01329$，至五位小數.

習題 十四.B.

求下列各展開式之第 $r+1$ 項:

1. $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$.　　2. $(1-x)^{-5}$　　3. $(1+3x)^{\frac{1}{3}}$.

4. $(1+x)^{-\frac{2}{3}}$.　　5. $(1+x^2)^{-3}$.　　6. $(1-2x)^{-\frac{3}{2}}$.

7. $(a+bx)^{-1}$.　　8. $(2-x)^{-2}$.　　9. $\sqrt[3]{(a^3-x^3)^2}$.

10. $\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$.　　11. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-3x)^2}}$.　　12. $\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^n-nx}}$.

求下列各展開式之最大項:

13. $(1+x)^{-7}$, 當 $x=\frac{4}{15}$時.

14. $(1+x)^{\frac{21}{2}}$, 當 $x=\frac{2}{3}$ 時.

15. $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$, 當 $x=\frac{1}{8}$ 時.

16. $(2x+5y)^{12}$, 當 $x=8$, $y=3$ 時.

17. $(5-4x)^{-7}$, 當 $x=\frac{1}{2}$ 時.

18. $(3x^2+4y^3)^{-n}$, 當 $x=9$, $y=2$, $n=15$ 時.

求下列各式之值至五位小數:

19. $\sqrt{98}$.　　20. $\sqrt[3]{998}$.　　21. $\sqrt[3]{1003}$.　　22. $\sqrt[4]{2400}$.

23. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{128}}$.　　24. $(1\frac{1}{250})^{\frac{1}{3}}$.　　25. $(630)^{-\frac{3}{4}}$.　　26. $\sqrt[5]{3128}$.

設 x 小至平方及以上乘方可以省略; 試求下列各式之值:

27. $(1-7x)^{\frac{1}{3}}(1+2x)^{-\frac{3}{4}}$.　　28. $\sqrt{4-x}\cdot\left(3-\dfrac{x}{2}\right)^{-1}$.

29. $\dfrac{(8+3x)^{\frac{2}{3}}}{(2+3x)\sqrt{4-5x}}$.　　30. $\dfrac{\left(1+\frac{2}{3}x\right)^{-5}\times(4+3x)^{\frac{1}{2}}}{(4+x)^{\frac{3}{2}}}$.

31. $\dfrac{\sqrt[4]{1-\frac{3}{5}x}+\left(1+\frac{5}{6}x\right)^{-6}}{\sqrt[3]{1+2x}+\sqrt[5]{1-\frac{x}{2}}}$.　　32. $\dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-\sqrt[5]{1-x}}{(1+5x)^{\frac{3}{5}}+\left(4+\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$.

33. 試證 $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式中 x^r 之係數為 $\dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$.

34. 試證 $(1+x)^n=2^n\left\{1-n\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{n(n+1)}{1.2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2\cdots\cdots\right\}$.

35. 求 $\dfrac{1}{(1+x)^2\sqrt{1+4x}}$ 之展開式之首三項.

36. 求 $\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{4}}+\sqrt{1+5x}}{(1-x)^2}$ 之展開式之首三項.

37. 試證在 $(1-x)^{-n}$ 之展開式中，第 n 項之係數為第 $n-1$ 項之係數之二倍.

189. 當 n 為任何有理量時，求 $(1+x)^n$ 之展開式中絕對值最大之項.

既只論其最大項之絕對值，故式內之 x，均可視為正量.

情形1. 設 n 為正整量.

其第 $r+1$ 項，乃以 $\dfrac{n-r+1}{r}x$，即以 $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)x$ 乘第 r 項得之；故當

$$\left(\frac{n+1}{r}-1\right)x>1,$$

即
$$\frac{(n+1)x}{r}>1+x,$$

或
$$\frac{(n+1)x}{1+x}>r$$

時，各項逐次增大.

若 $\dfrac{(n+1)x}{1+x}$ 爲整數，以 p 表之；則當 $r=p$ 時，施乘因子爲 1，而第 $p+1$ 項等於第 p 項，且此二項大於其他任何項.

若 $\dfrac{(n+1)x}{1+x}$ 非整數，以 q 表其整數部分；則 r 之最大值爲 q，第 $q+1$ 項即最大項.

情形II. 設 n 爲正分數.

同前，其第 $r+1$ 項由第 r 項乘以 $\left(\dfrac{n+1}{r}-1\right)x$ 得之.

(1). 若 x 大於 1，則由增大 r 之値可使以上乘式任意逼近 $-x$；因之在某項之後，各項之絕對値，均漸近於其前項之絕對値之 x 倍，由是各項皆逐次增大，故無最大之項.

(2). 若 x 小於 1，則施乘因子繼續爲正而漸次減小，至 $r>n+1$ 爲止，此後則變爲負數，但其數値永小於 1；故可有一最大項.

同前，當 $\dfrac{(n+1)x}{1+x}>r$ 時，施乘因子大於 1.

設 $\dfrac{(n+1)x}{1+x}$ 爲整數，以 p 表之；於是與情形 I 同，其第 $p+1$ 項等於第 p 項，此二項卽爲最大項.

設 $\dfrac{(n+1)x}{1+x}$ 非整數，以 q 表其整數部份；則第 $q+1$ 項爲最大項.

情形III. 設 n 爲負數.

使 $n=-m$，此 m 爲正數；則施乘因子之數値爲 $\dfrac{m+r-1}{r}x$；即

$$\left(\frac{m-1}{r}+1\right)x.$$

(1) 若 x 大於 1，可照情形II，證明其並無最大項.

(2) 若 x 小於 1，則當

$$\left(\frac{m-1}{r}+1\right)x>1;$$

即
$$\frac{(m-1)x}{r}>1-x,$$

或
$$\frac{(m-1)x}{1-x}>r$$

時，施乘因子之值大於 1.

設 $\frac{(m-1)x}{1-x}$ 爲正量，以 p 表之；於是第 $p+1$ 項等於第 p 項；且大於其他任何項.

設 $\frac{(m-1)x}{1-x}$ 爲正量，但非整量，以 q 表其整數部份；則其第 $q+1$ 項爲最大項.

設 $\frac{(m-1)x}{1-x}$ 爲負量，則必 m 小於 1；將施乘因子寫爲 $\left(1-\frac{1-m}{r}\right)x$ 之形式，可看出其永小於 1；故各項皆小於其前一項，結果其首項爲最大項.

190. 求 a, b, c……等 n 字母及其各次冪能構成 r 次之齊次積若干?

由除法，或由二項式定理，得

$$\frac{1}{1-ax}=1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{1-bx}=1+bx+b^2x^2+b^3x^3+\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{1-cx}=1+cx+c^2x^2+c^3x^3+\cdots\cdots,$$

……………………………

故由乘法,

$$\frac{1}{1-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}\cdot\frac{1}{1-cx}\cdots\cdots$$

$$=(1+ax+a^2x^2+\cdots)(1+bx+b^2x^2+\cdots)(1+cx+c^2x^2+\cdots)\cdots$$

$$=1+x(a+b+c+\cdots)+x^2(a^2+ab+ac+b^2+bc+c^2+\cdots)+\cdots$$

$$=1+S_1x+S_2x^2+S_3x^3+\cdots\cdots(\text{設});$$

其 S_1, S_2, S_3,………為 a, b, c,………及其各次冪所成一次,二次,三次,……齊次積之和.

令 a, b, c,………皆等於 1; 於是 S_1, S_2, S_3,………中諸項皆變為 1, 而由是求得之 S_1, S_2, S_3………之值,即為一次,二次,三次,………之齊次積之個數.

又 $$\frac{1}{1-ax}\cdot\frac{1}{1-bx}\cdot\frac{1}{1-cx}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

變為 $$\frac{1}{(1-x)^n},\text{ 即 } (1-x)^{-n}.$$

故 $S_r=(1-x)^{-n}$ 之展開式中之 x^r 之係數

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}$$

$$=\frac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r\ \lfloor n-1}.$$

191. 當指數為正整量時,求任意多項式之展開式之項數.

在多項式 $$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_r)^n$$

之展開式中, 各項皆為 n 次; 故其項數, 同於 a_1, a_2, a_3,………a_r 等 r 量及其各次冪所能構成之 n 次乘積之個數; 由上節, 知其等於

$$\frac{\lfloor r+n-1}{\lfloor n\ \lfloor r-1}.$$

192. 根據 § 190 之結果，可推出一關於 n 物之組合數之定理．

設有 a, b, c, d,………等 n 個字母；此 n 字母及其各次冪所構成之每個 r 次齊次積，必均爲一 n 物 r 元之組合，其中任一字母可重複一次，二次，三次，………至 r 次．

故可重複時之 n 物 r 元之組合之數，等於 n 字母所構成之 r 次之齊次積之個數，由是等於 $\dfrac{\lfloor n+r-1}{\lfloor r \lfloor n-1}$，或 ${}^{n+r-1}C_r$．

即 n 物准重複時之 r 元之組合之個數，等於 $n+r-1$ 物不准重複時之 r 元之組合之個數．

193. 茲舉雜例數則以結束本章．

例 1. 求 $\dfrac{(1-2x)^2}{(1+x)^3}$ 之展開式中 x^r 之係數．

設此式 $=(1-4x+4x^2)(1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_rx^r+\cdots\cdots)$．

其中 x^r 之係數乃以 $1,-4,4$ 分乘 p_r, p_{r-1}, p_{r-2} 所得之三積之和．故

所求係數 $=p_r-4p_{r-1}+4p_{r-2}$．

但 $\quad p_r=(-1)^r\dfrac{(r+1)(r+2)}{2}$ [§ 182 例 3.]

故所求係數

$$=(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{2}-4(-1)^{r-1}\frac{r(r+1)}{2}+4(-1)^{r-2}\frac{(r-1)r}{2}$$

$$=\frac{(-1)^r}{2}[(r+1)(r+2)+4r(r+1)+4r(r-1)]$$

$$=\frac{(-1)^r}{2}(9r^2+3r+2).$$

例 2. 求下級數之值.

$$2+\frac{5}{\underline{|2}\cdot 3}+\frac{5\cdot 7}{\underline{|3}\cdot 3^2}+\frac{5\cdot 7\cdot 9}{\underline{|4}\cdot 3^3}+\cdots\cdots$$

$$\text{此式}=2+\frac{3\cdot 5}{\underline{|2}}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{3\cdot 5\cdot 7}{\underline{|3}}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{\underline{|4}}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots$$

$$=2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\underline{|2}}\cdot\frac{2^2}{3^2}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\underline{|3}}\cdot\frac{2^3}{3^3}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}{\underline{|4}}\cdot\frac{2^4}{3^4}+\cdots$$

$$=1+\frac{\frac{3}{2}}{1}\cdot\frac{2}{3}+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{\underline{|3}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}.$$

例3. 設 n 爲任意正整量，試證 $(3+\sqrt{7})^n$ 之整數部分爲奇數.

設 I 表 $(3+\sqrt{7})^n$ 之整數部分，f 表其分數部分.

於是 $I+f=3^n+C_1 3^{n-1}\sqrt{7}+C_2 3^{n-2}\cdot 7+C_3 3^{n-3}(\sqrt{7})^3+\cdots\ (1).$

今$3-\sqrt{7}$爲正量且小於 1，是以$(3-\sqrt{7})^n$ 爲眞分數；以f'表之；

$\therefore f'=3^n-C_1 3^{n-1}\sqrt{7}+C_2 3^{n-2}\cdot 7-C_3 3^{n-3}(\sqrt{7})^3+\cdots\cdots(2).$

將(1)及(2) 相加；則消去無理項，而得

$$I+f+f'=2(3^n+C_2 3^{n-2}\cdot 7+\cdots)$$

$$=\text{一偶整數}.$$

但 f 及 f' 爲眞分數，其和必爲 1；

$$\therefore\ I=\text{一奇數整數}.$$

習　題　十四.C.

求下各項之係數.

1. $\dfrac{3-5x}{(1-x)^2}$之展開式中之 x^{100}.

2. $\dfrac{4+2a-a^2}{(1+a)^3}$之展開式中之 a^{12}.

3. $\dfrac{3x^2-2}{x+x^2}$之展開式中之 x^n.

4. 求 $\dfrac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$之展開式中 x^n 之係數.

5. 試證

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{2^4}-\cdots=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

6. 試證

$$\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$$

7. 試證

$$1+\frac{2n}{3}+\frac{2n(2n+2)}{3.6}+\frac{2n(2n+2)(2n+4)}{3.6.9.}+\cdots\cdots$$

$$=2^n\left\{1+\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{3.6}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3.6.9}+\cdots\cdots\right\}.$$

8. 試證

$$7^n\left\{1+\frac{n}{7}+\frac{n(n-1)}{7.14}+\frac{n(n-1)(n-2)}{7.14.21}+\cdots\cdots\right\}$$

$$=4^n\left\{1+\frac{n}{2}+\frac{n(n+1)}{2.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{2.4.6}+\cdots\cdots\right\}.$$

9. 當 x 甚小時，試證

$$\frac{3\left(x+\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{4}x^2\right)^{\frac{1}{3}}}{2\left(1+\frac{9}{16}x\right)^{x}}=1-\frac{307}{256}x^2(\text{約}).$$

10. 設 n 爲正整量，試證 $(5+2\sqrt{6})^n$之整數部分爲奇數.

11. 設 n 爲正整量，試證 $(8+3\sqrt{7})^n$之整數部分爲奇數.

12. 求 $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots\cdots)^{-n}$ 之展開式中 x^n 之係數.

13. 求證$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{4n}$ 之中項等於 $(1-4x)^{-(n+\frac{1}{2})}$之展開式中 x^n 之係數.

14. 試證$(1-x^3)^n$之展開式可寫爲

$$(1-x)^{3n}+3nx(1-x)^{3n-2}+\frac{3n(3n-3)}{1.2}x^2(1-x)^{3n-4}+\cdots\cdots$$

15. 在$\dfrac{1}{1+x+x^2}$之展開式中，x^n 之係數之為 1，或 0，或 -1，視 n 之形式為 $3m$，$3m-1$，或 $3m+1$ 而定，試證明之.

16. 試求 $(a+b+c)^8$之展開式之項數及各項之係數之和.

17. 設 n 為偶整數，試證

$$\frac{1}{\underline{|1}\ \underline{|n-1}}+\frac{1}{\underline{|3}\ \underline{|n-3}}+\frac{1}{\underline{|5}\ \underline{|n-5}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\underline{|n-1}\ \underline{|1}}=\frac{2^{n-1}}{\underline{|n}}.$$

18. 設 $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ 為 $(1+x)^n$ 之展開式中之係數，當 n 為正整數時，試證

(1) $c_0-c_1+c_2-c_3+\cdots\cdots+(-1)^r c_r=(-1)^r\dfrac{\underline{|n-1}}{\underline{|r}\ \underline{|n-r-1}}$.

(2) $c_0-2c_1+3c_2-4c_3+\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)c_n=0$.

(3) $c_0^2-c_1^2+c_2^2-c_3^2+\cdots\cdots+(-1)^n c_n^2=0$，或$(-1)^{\frac{n}{2}}c_{\frac{n}{2}}$，

視 n 之為奇數或偶數而定.

19. 設 s_n 表首 n 個自然數之和，試證

(1) $(1-x)^{-3}=s_1+s_2x+s_3x^2+\cdots\cdots+s_n x^{n-1}+\cdots\cdot$

(2) $2(s_1s_{2n}+s_2s_{2n-1}+\cdots\cdots+s_ns_{n+1})=\dfrac{\underline{|2n+4}}{\underline{|5}\ \underline{|2n-1}}$.

20. 設 $q_n=\dfrac{1.3.5.7\cdots\cdots(2n-1)}{2.4.6.8\cdots\cdots 2n}$，試證

(1) $q_{2n+1}+q_1q_{2n}+q_2q_{2n-1}+\cdots\cdots+q_{n-1}q_{n+2}+q_nq_{n+1}=\frac{1}{2}$.

(2) $2\{q_{2n}-q_1q_{2n-1}+q_2q_{2n-2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}q_{n-1}q_{n+1}\}$
$=q_n+(-1)^{n-1}q_n^2$.

21. 當 n 為正整量時，試求 $(1+x)^n$ 之展開式中諸係數之二元乘積之和.

22. 設 $(7+4\sqrt{3})^n=p+\beta$，而 n 及 p 為正整數，β 為真分數，試證 $(1-\beta)(p+\beta)=1$.

23. 設 $c_0, c_1, c_2, \cdots\cdots c_n$ 為 $(1+x)^n$ 之展開式中之係數，其 n 為正整數，試證

$$c_1-\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}c_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

第十五章

多項式定理

194. 用二項式定理求多項式之展開式之方法，§175 業已論及．本章之目的，非求多項式之完全展開式，乃求其任一指定項之係數．

例．求 $(a+b+c+d)^{14}$ 之展開式中 $a^4b^2c^3d^5$ 之係數．

此展開式爲 14 個因子之積，各因子均爲 $a+b+c+d$，其中各項皆爲14次，由在 14個因子中各取一字母相乘而得．故 $a^4b^2c^3d^5$ 項之作成，乃由 14 因子中之任四因子中取 a，餘十因子中之任二因子中取 b，餘八因子中任三因子取 c．其可能作法之數，顯然等於 14 字母之排列數，此 14 字母中有 4 個 a，2 個 b，3 個 c，5 個 d；即等於

$$\frac{\underline{|14}}{\underline{|4}\,\underline{|2}\,\underline{|3}\,\underline{|5}}. \qquad [\S 151]$$

是以此即 $a^4b^2c^3d^5$ 在最後積中出現之次數，故所求之係數爲 2522520.

195. 求 $(a+b+c+d+\cdots)^p$ 之展開式中之任一項之係數，此處 p 爲正整數．

此展開式爲 p 個因子之積，各因子均爲 $a+b+c+d+\cdots$ 積之每項均爲由 p 因子內各取一字母相乘得之；故其任一項 $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\cdots\cdots$ 在最後乘積中出現之次數，等於有 α 個爲 a，β 個爲 b，γ 個爲 c，δ 個爲 d，……之 p 個字母之排列法之數．即

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\cdots\cdots\cdots\cdots \text{之係數爲} \frac{\underline{|p}}{\underline{|\alpha}\,\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\,\underline{|\delta}\cdots\cdots},$$

此處 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots=p$.

推論．在$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p$之展開式中，其含$a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$……之項爲

$$\frac{\lfloor p}{\lfloor\alpha\ \lfloor\beta\ \lfloor\gamma\ \lfloor\delta\cdots\cdots}a^\alpha(bx)^\beta(cx^2)^\gamma(dx^3)^\delta\cdots\cdots$$

即 $$\frac{\lfloor p}{\lfloor\alpha\ \lfloor\beta\ \lfloor\gamma\ \lfloor\delta\cdots\cdots}a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots\cdots},$$

此處 $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots=p$.

此可稱爲此展開式之通項．

例．求$(a+bx+cx^2)^9$之展開式中之x^5之係數．

此展開式之通項爲

$$\frac{\lfloor 9}{\lfloor\alpha\ \lfloor\beta\ \lfloor\gamma}a^\alpha b^\beta c^\gamma x^{\beta+2\gamma}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

其 $\alpha+\beta+\gamma=9$.

先由試求出β及γ能適合$\beta+2\gamma=5$之一切正整值；若是α之值可由方程式$\alpha+\beta+\gamma=9$求得之．

令 $\gamma=2$，則 $\beta=1$，而 $\alpha=6$；

令 $\gamma=1$，則 $\beta=3$，而 $\alpha=5$；

令 $\gamma=0$，則 $\beta=5$，而 $\alpha=4$．

所求係數爲(1)式之諸相當值之和．

故所求係數

$$=\frac{\lfloor 9}{\lfloor 6\ \lfloor 2}a^6bc^2+\frac{\lfloor 9}{\lfloor 5\ \lfloor 3}a^5b^3c+\frac{\lfloor 9}{\lfloor 4\ \lfloor 5}a^4b^5$$

$$=252a^6bc^2+504a^5b^3c+126a^4b^5.$$

196. 求$(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots\cdots\cdots)^n$之展開式之通項，此處$n$爲任意有理數．

由二項式定理，其通項爲

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+1)}{\lfloor p}a^{n-p}(bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p,$$

其p爲正整數．

又由 §195，$(bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^p$ 之展開式之通項為

$$\frac{p}{\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\,\underline{|\delta}\cdots}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots},$$

其中 $\beta,\gamma,\delta,\cdots$為正整數，且其和為 p.

故所求之通項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\,\underline{|\delta}\cdots}a^{n-p}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots},$$

其中　$\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots=p$.

197. 因 $(a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$ 可寫為

$$a^n\left(1+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2+\frac{d}{a}x^3+\cdots\cdots\right)^n,$$

故考究首項為 1 之多項式足矣.

如是　$(1+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots)^n$ 之通項為

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-p+1)}{\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\,\underline{|\delta}}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\cdots\cdots x^{\beta+2\gamma+3\delta+\cdots\cdots},$$

其中　$\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots=p$.

例. 求 $(1-3x-2x^2+6x^3)^{\frac{2}{3}}$之展開式中之 x^3 之係數.

此式之展開式之通項為

$$\frac{\frac{2}{3}(\frac{2}{3}-1)(\frac{2}{3}-2)\cdots\cdots(\frac{2}{3}-p+1)}{\underline{|\beta}\,\underline{|\gamma}\,\underline{|\delta}}(-3)^{\beta}(-2)^{\gamma}(6)^{\delta}x^{\beta+2\gamma+3\delta}\cdots(1)$$

用試驗法求出 β,γ,δ 一切能適合 $\beta+2\gamma+3\delta=3$ 之正整值.因之可從方程式 $p=\beta+\gamma+\delta$ 求出 p. 所求係數即 (1)式中諸相當值之和.

求 β, γ, δ 之值時，最好從許可之最大值起，陸續與 δ 以整數值．在現下情形內，求得諸值為

$$\delta=1,\quad \gamma=0,\quad \beta=0,\quad p=1;$$
$$\delta=0,\quad \gamma=1,\quad \beta=1,\quad p=2;$$
$$\delta=0,\quad \gamma=0,\quad \beta=3,\quad p=3.$$

以此諸值代入(1)，則得所求係數

$$=(\tfrac{2}{3})(6)+(\tfrac{2}{3})(-\tfrac{1}{3})(-3)(-2)+\frac{\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{\lfloor 3}(-3)^3$$

$$=4-\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}.$$

198. 有時用二項式定理較為便捷．

例．求 $(1-2x+3x^2)^{-3}$ 之展開式中之 x^4 之係數．

用二項式定理，由 $(1-\overline{2x-3x^2})^{-3}$ 之展開式之首數項中取出 x^4 之係數，即得所求之係數．其首數項即

$$1+3(2x-3x^2)+6(2x-3x^2)^2+10(2x-3x^2)^3+15(2x-3x^2)^4;$$

此後各項之 x 均高於四次，故不取．

故所求係數 $=6\cdot9+10\cdot3(2)^2(-3)+15(2)^4$

$=-66.$

習　題　十五．

求下列各指定項之係數：

1. $(a-b-c+d)^{10}$ 之展開式中之 $a^2b^3c^4d$．
2. $(a+b-c-d)^8$ 之展開式中之 a^2b^5d．
3. $(2a+b+3c)^7$ 之展開式中之 a^3b^3c．
4. $(ax-by+cz)^9$ 之展開式中之 $x^2y^3z^4$．
5. $(1+3x-2x^2)^3$ 之展開式中之 x^3．
6. $(1+2x+3x^2)^{10}$ 之展開式中之 x^4．
7. $(1+2x-x^2)^5$ 之展開式中之 x^6．
8. $(1-2x+3x^2-5x^3)^4$ 之展開式中之 x^8．

求下列之方冪之係數:

9. $(1-2x+3x^2-x^4-x^5)^5$ 之展開式中之 x^{23}.

10. $(1-2x+3x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式中之 x^5.

11. $(1-2x+3x^2-4x^3)^{\frac{1}{2}}$ 之展開式中之 x^3.

12. $\left(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}\right)^{-2}$ 之展開式中之 x^8.

13. $(2-4x+3x^2)^{-2}$ 之展開式中之 x^4.

14. $(1+4x^2+10x^4+20x^6)^{-\frac{3}{4}}$ 之展開式中之 x^6.

15. $(3-15x^3+18x^6)^{-1}$ 之展開式中之 x^{12}.

16. 展開 $(1-2x-2x^2)^{\frac{1}{4}}$ 至 x^2.

17. 展開 $(1+3x^2-6x^3)^{-\frac{2}{3}}$ 至 x^5.

18. 展開 $(8-9x^3+18x^4)^{\frac{4}{3}}$ 至 x^8.

19. 設 $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^p)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots a_{np}x^{np}$,

試證

(1) $a_0+a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{np}=(p+1)^n$.

(2) $a_1+2a_2+3a_3+\cdots\cdots+np.\ a_{np}=\frac{1}{2}np(p+1)^n$.

20. 設$(1+x+x^2)^n$之展開式中,各項之係數依次爲

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\cdots\cdots,$$

試證

$$a_0^2-a_1^2+a_2^2-a_3^2+\cdots+(-1)^{n-1}a^2_{n-1}=\tfrac{1}{2}a_n\{1-(-1)^n a_n\}.$$

21. 設 $(1+x+x^2)^n$ 之展開式爲

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_rx^r+\cdots+a_{2n}x^{2n},$$

試證　$a_0+a_3+a_6+\cdots=a_1+a_4+a_7+\cdots=a_2+a_5+a_8+\cdots=3^{n-1}$,

第 十 六 章

對　　數

199. 定義． 例如，若$a^x=N$，則 x 稱爲 N 以 a 爲底之對數．

例． (1) 因 $3^4=81$， 故 81 以 3 爲底之對數爲 4．

(2) 因 $10^1=10$，$10^2=100$，$10^3=1000$，………

故自然數串 1，2，3，…爲 10，100，1000，…以 10 爲底之對數．

200. N 以 a 爲底之對數以 log_aN 表之，故式

$$a^x=N，及\ x=log_aN$$

所表之意義相同．

可推得恆等式 $N=a^{log_aN}$，

此恆等式間亦有用．

例． 求 $32\sqrt[5]{4}$ 以 $2\sqrt{2}$ 爲底之對數．

設 x 爲所求對數；由定義

$$(2\sqrt{2})^x=32\sqrt[5]{4}；$$

$$\therefore (2\cdot 2^{\frac{1}{2}})^x=2^5\cdot 2^{\frac{2}{5}}.$$

$$\therefore 2^{\frac{3}{2}x}=2^{5+\frac{2}{5}}；$$

等置兩邊之指數，得 $\dfrac{3}{2}x=\dfrac{27}{5}$；

$$\therefore x=\frac{18}{5}=3.6.$$

201. 若對數之底，不言可喻，表底之數恒略去之．如在算術計算中恒以 10 爲底，故不寫爲 $log_{10}2$，$log_{10}3$，…而寫爲 $log\ 2$，$log\ 3$…

任何數（譯者註：1 除外）皆可取爲對數之底．相當任一底，可求得一切數之一系對數．茲於討論常用對數之前，先證明若干適用於任何底之對數之一般命題．

202. 1 之對數爲 0．

因 $a^0=1$ 於 a 之任何值皆眞，故 1 以任何數爲底之對數均爲 0．即 $log\ 1=0$．

203. 底之本身之對數爲 1．

因 $a^1=a$，故 $log_a a=1$．

204. 求積之對數．

設積爲 MN，設 a 爲此系對數之底，又

$$x=log_aM,\quad y=log_aN;$$

由是，
$$a^x=M,\quad a^y=N.$$

故
$$MN=a^x\times a^y$$
$$=a^{x+y};$$

故，由定義，
$$log_aMN=x+y$$
$$=log_aM+log_aN.$$

同法，可證 $log_aMNP=log_aM+log_aN+log_aP$；照此可類推至任若干因子．

例．
$$log42=log(2\times3\times7)$$
$$=log\ 2+log3+log7.$$

205. 求分數之對數．

設分數爲 $\frac{M}{N}$，又設

$$x=log_aM,\qquad y=log_aN;$$

因此
$$a^x=M,\qquad a^y=N.$$

如是，分數 $\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$;

故，由定義， $\log_a\frac{M}{N}=x-y$

$$=\log_a M-\log_a N.$$

例. $\log\left(4\frac{2}{7}\right)=\log\frac{30}{7}$

$$=\log 30-\log 7$$
$$=\log(2\times3\times5)-\log 7.$$
$$=\log 2+\log 3+\log 5-\log 7.$$

206. 求一數之任何整數或分數次冪之對數.

設求 $\log_a(M^p)$，並設

$$x=\log_a M，\text{如是 } a^x=M;$$

因此 $M^p=(a^x)^p$

$$=a^{px};$$

故，由定義， $\log_a\left(M^p\right)=px$;

卽 $\log_a\left(M^p\right)=p\log_a M.$

同法可證，$\log_a\left(M^{\frac{1}{r}}\right)=\frac{1}{r}\log_a M.$

207. 由已證結果知

(1) 積之對數等其諸因子之對數之和.

(2) 分數之對數等於分子之對數減去分母之對數.

(3) 數之 p 次冪之對數等於其對數之 p 倍.

(4) 數之 r 次根之對數等於其對數之$\frac{1}{r}$.

且知由利用對數，乘除法之運算，可以加減法代之；乘方及開方之運算可以乘除法代之.

例 1. 試以 $log\ a$, $log\ b$, $log\ c$ 表 $\dfrac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}$ 之對數.

$$log\frac{\sqrt{a^3}}{c^5b^2}=log\ \frac{a^{\frac{3}{2}}}{c^5b^2}$$

$$=loga^{\frac{3}{2}}-log(c^5b^2)$$

$$=\frac{3}{2}loga-(logc^5+logb^2)$$

$$=\frac{3}{2}loga-5logc-2logb.$$

例2. 由方程式 $a^x.c^{-2x}=b^{3x+1}$ 求 x 之値.

取兩邊之對數, 得

$$xlog\ a-2x\ log\ c=(3x+1)\ logb;$$

$$\because\ x(loga-2\ logc-3log\ b)=log\ b.$$

$$\therefore\ x=\frac{logb}{log\ a-2\ log\ c-3\ log\ b}.$$

習 題 十六.A.

求下列各數對於已知底之對數:

1. 16, 以 $\sqrt{2}$ 爲底. 1728, 以 $2\sqrt{3}$ 爲底.
2. 125, 以 $5\sqrt{5}$ 爲底. .25, 以 4 爲底.
3. $\dfrac{1}{256}$, 以 $2\sqrt{2}$ 爲底. $.\dot{3}$ 以 9 爲底.
4. .0625, 以 2 爲底. 1000, 以 .01 爲底.
5. .0001, 以 .001 爲底. $.\dot{1}$ 以 $9\sqrt{3}$ 爲底.
6. $\sqrt[4]{a^{\frac{8}{5}}}$, $\dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$, $\sqrt[3]{a^{-\frac{15}{2}}}$, 以 a 爲底.
7. 求下列各對數之値.

   $log_8\ 128$, $log_6\dfrac{1}{216}$, $log_{27}\dfrac{1}{81}$, $log_{343}\ 49$.

以 $log\ a$, $log\ b$, $log\ c$, 表下列七對數.

8. $log(\sqrt{a^2b^3})^6$. 9. $log(\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[2]{b^3})$. 10. $log(\sqrt[3]{a^{-4}b^5})$.

11. $\log(\sqrt{a^{-2}b}\times\sqrt[3]{ab^{-3}})$.　12. $\log(\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt{3^3}}\div\sqrt{b^3\sqrt{a}})$.

13. $\log\dfrac{\sqrt[3]{ab^{-1}c^{-2}}}{(a^{-1}b^{-2}c^{-4})^{\frac{1}{6}}}$.　14. $\log\left\{\left(\dfrac{bc^{-2}}{b^{-4}c^{3}}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{b^{-1}c}{b^{2}c^{-3}}\right)^{5}\right\}$.

15. 試證　$\log\dfrac{\sqrt[4]{5}.\sqrt[10]{2}}{\sqrt[3]{18}.\sqrt{2}}=\dfrac{1}{4}\log5-\dfrac{2}{5}\log2-\dfrac{2}{3}\log3$.

16. 化簡　$\log\sqrt[4]{729\sqrt[3]{9^{-1}.27^{-\frac{4}{3}}}}$.

17 試證　$\log\dfrac{75}{16}-2\log\dfrac{5}{9}+\log\dfrac{32}{243}=\log2$.

解下列各方程式:

18. $a^x=cb^x$.　19. $a^{2x}.b^{3x}=c^5$.

20. $\dfrac{a^{x+1}}{b^{x-1}}=c^{2x}$.　21. $\left.\begin{array}{l}a^{2x}.b^{3y}=m^5\\a^{3x}.b^{2y}=m^{10}\end{array}\right\}$.

22 設 $\log(x^2y^3)=a$, 及 $\log\dfrac{x}{y}=b$, 求 $\log x$ 及 $\log y$.

23. 設 $a^{3-x}.b^{5x}=a^{x+5}.b^{3x}$, 試證 $x\log\left(\dfrac{b}{a}\right)=\log a$.

24. 解方程式

$$(a^4-2a^2b^2+b^4)^{x-1}=(a-b)^{2x}(a+b)^{-2}.$$

常用對數

208. 以 10 爲底之對數稱爲常用對數；此系對數乃布利哥斯氏於 1615 年公佈於世，布氏與對數發明者納伯爾氏同時.

由方程式 $10^x=N$，顯見常用對數多非整數，亦不恒爲正數.

例如　$3154>10^3$ 而 $<10^4$;

$\therefore\ \log 3154=3+$ 一分數.

又，　　　$.06 > 10^{-2}$ 而 $< 10^{-1}$；

$$\therefore\ \log .06 = -2 + \text{一分數}.$$

209. 定義. 對數之整數部分稱爲首數，小數部分稱爲尾數.

任何數以 10 爲底之對數之首數均可用心算法寫出之，今說明之如下：

210. 定任何大於 10 之數之對數之首數.

因
$$10^1 = 10,$$
$$10^2 = 100,$$
$$10^3 = 1000,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故知兩位整數在 10^1 及 10^2 之間；三位整數在 10^2 及 10^3 之間；依此類推. n 位整數在 10^{n-1} 及 10^n 之間.

設 N 爲一 n 位整數；於是

$$N = 10^{(n-1)} + \text{一分數};$$
$$\therefore\ \log N = (n-1) + \text{某分數}.$$

故其首數爲 $n-1$；即大於 1 之數之對數，其首數較其整數部分之位數小一，且爲正數.

211. 定小數之對數之首數.

因
$$10^0 = 1,$$
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = .1,$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = .01,$$
$$10^{-3} = \frac{1}{1000} = .001,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故知小數點後有一個零之小數，如 .0324，大於 .01 而小於 .1，即在 10^{-2} 及 10^{-1} 之間；小數點後有兩個零之數在 10^{-3} 及 10^{-2} 之間；依此類推，小數點後有 n 個零之小數在 $10^{-(n+1)}$ 及 10^{-n} 之間.

設 D 爲小數點後有 n 個零之小數；則

$$D=10^{-(n+1)+\text{某分數}};$$

$$\therefore \log D=-(n+1)+\text{某分數}.$$

故其首數爲 $-(n+1)$； 即小數之對數之首數，較小數點後之零數大1，且爲負數.

212. 從1至200000之諸整數，其以10爲底之對數均已由前人求得，並列成對數表，多數對數表均求至七位小數．此爲實用對數系，且有兩大利益：

(1) 由證得結果，顯然首數可用觀察法寫出；故僅將尾數列入表即可.

(2) 有效數字相同之數其對數之尾數皆相同；故僅列入整數對數之尾數即可.

茲證明此命題如次.

213. 設 N 爲任意數，因以10之方冪乘或除之，不過改變其小數點之位置，於其數字無所變更，故知若 p 及 q 爲任意整數，則 $N\times10^p$ 及 $N\div10^q$ 兩數之有效數字，與 N 者完全相同.

今
$$\log(N\times10^p)=\log N+p\log10$$
$$=\log N+p\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

又
$$\log(N\div10^q)=\log N-q\log10$$
$$=\log N-q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

(1) 爲 $\log N$ 加一整數，(2) $\log N$ 減一整數．即，對數之尾數或小數部分依舊.

本節及前三節皆假定尾數爲正數.爲欲獲得布氏系之便利,故運算時恒設法保持尾數爲正,因此既由表取任何對數之尾數時,必照已知法則於首數前冠以適當之符號.

214. 在負對數之情形內，負號須置於首數之上，萬勿置於其前,以表明僅首數爲負數而非全體爲負數. 如 .0002 之對數 $\bar{4}.30103$,等於 $-4+.30103$，與整數及小數部分皆爲負數之 -4.30103 不同.作負對數運算時,有時需要用算術方法變其尾數爲正數.例如全爲負數之對數 -3.69897，可由整數部分減1,小數部分加1,以使其尾數變爲正數.如

$$-3.69897=-4+(1-.69897)=\bar{4}.30103.$$

其他情形,可於下例題內見之.

例 1. 求.0002432之對數.

檢表,得 $log2432$ 之尾數爲 3859636,(首數及小數點略去);又由§211,知其首數爲-4;

$$\therefore\ log\ .0002432=\bar{4}.3859636.$$

例 2. 求 $\sqrt[5]{.00000165}$ 之値，已知 $log165=2.2174839$,

$$log697424=5.8434968.$$

設所求之值爲 x; 於是

$$log\ x=log(.00000165)^{\frac{1}{5}}=\frac{1}{5}\,log\,(.00000165)$$
$$=\frac{1}{5}(\bar{6}.2174839);$$

此 $log.00000165$之尾數與 $log165$ 之尾數相同,又依法則冠首數於尾數之前即得.

今 $$\frac{1}{5}(\bar{6}.2174839)=\frac{1}{5}(\overline{10}+4.2174839)$$
$$=\bar{2}.8434968.$$

而 .8434968 為 $log697424$ 之尾數；故 x 之有效數字與此相同，但於小數點後，加置一零而已．[§211]

故 $$x=.0697424.$$

215. 次章說明對數之計算法，於是可知數之 10 底對數非直接求得，乃先求得其他底之對數，再變之為10底之對數．

故變已知底之對數為他底對數之方法，實有研究之必要．

216. 設一切數以a為底之對數已知，且已次列成表，試求以b為底之對數．

設 N 為一數，今求其以 b 為底之對數．

設 $y=log_bN$，由是 $b^y=N$；

$$\therefore \quad log_a(b^y)=log_aN;$$

即 $$ylog_ab=log_aN;$$

$$\therefore \quad y=\frac{1}{log_ab}\times log_aN,$$

或 $$log_bN=\frac{1}{log_ab}\times log_aN \cdots\cdots\cdots(1)$$

因 N 及 b 為已知，log_aN 及 log_ab 可檢表得之，故可求出 log_bN．

故欲將以 a 為底之對數變為以 b 為底之對數，僅以 $\frac{1}{log_ab}$ 乘之足矣．$\frac{1}{log_ab}$乃可從表檢得之常數；名曰對數率．

217. 在上節方程式 (1)內，以 a 代 N，得

$$log_ba=\frac{1}{log_ab}\times log_aa=\frac{1}{log_ab};$$

$$\therefore log_ba\times log_ab=1.$$

此結果亦可直接證明之如下：

設　　　　$x=\log_a b$，則 $a^x=b$；

兩邊取以 b 爲底之對數，得

$$x\log_b a=\log_b b$$
$$=1;$$
$$\therefore\quad \log_a b\times\log_b a=1.$$

218. 下例說明算術計算，可利用對數化簡之對數表之用法之說明，讀者可於三角法中得之.

例 1. 已知 $\log 3=.4771213$，求 $\log\{(2\cdot7)^3\times(.81)^{\frac{4}{5}}\div(90)^{\frac{5}{4}}\}$.

$$\text{所求值}=3\log\frac{27}{10}+\frac{4}{5}\log\frac{81}{100}-\frac{5}{4}\log 90$$
$$=3(\log 3^3-1)+\frac{4}{5}(\log 3^4-2)-\frac{5}{4}(\log 3^2+1)$$
$$=\left(9+\frac{16}{5}-\frac{5}{2}\right)\log 3-\left(3+\frac{8}{5}+\frac{5}{4}\right)$$
$$=\frac{97}{10}\log 3-5\frac{17}{20}$$
$$=4.6280766-5.85$$
$$=\bar{2}.7780766.$$

注意 5 及其方冪之對數，恒能由 $\log 2$ 求得之；如

$$\log 5=\log\frac{10}{2}=\log 10-\log 2=1-\log 2.$$

例 2. 求875^{16}之數字之個數.

已知　　　$\log 2=.3010300,\ \log 7=.8450980.$

$$\log(875^{16})=16\ \log(7\times125)$$
$$=16(\log 7+3\log 5)$$
$$=16(\log 7+3-3\log 2)$$
$$=16\times2.9420080$$
$$=47.072128;$$

故其數字之個數爲 48. [§210]

例 3. 已知 $log2$ 及 $log3$，試由下方程式求 x 之值.

$$6^{3-4x}.4^{x+5}=8.$$

取兩邊對數，得

$$(3-4x)log6+(x+5)log4=log8;$$

$$\therefore\ (3-4x)(log2+log3)+(x+5)2log2=3log2;$$

$$\therefore\ x(-4log2-4log3+2log2)=3log2-3log2-3log3-10log2;$$

$$\therefore\ x=\frac{10log2+3log3}{2log2+4log3}$$

$$=\frac{4.4416639}{2.5105452}$$

$$=1.77\cdots$$

習　題　十六.B.

1. 用觀察法求 21735，23.8，350，.035，.2，.87，.875 之對數之首數.

2. $log7623$ 之尾數爲 .8821259；試求 7623，7.62.3，.007623，762300，.000007623 之對數.

3. 求諸數整數部分之位數，已知其對數爲
4.30103，1.4771213，3.69897，.56515.

4. 求諸數第一數字所居之位次，設已知其對數爲
$\overline{2}.7781513$，.6910815，$\overline{5}.4871384$.

已知　$log2=.3010300$，$log3=.4771213$，$log7=.8450980$，
求下列各對數之值：

5. $log64$.　　6. $log84$.　　7. $log.128$.

8. $log.0125$，　　9. $log14.4$.　　10. $log4\frac{2}{3}$.

11. $log\sqrt[3]{12}$.　　12. $log\sqrt{\frac{35}{27}}$.　　13 $log\sqrt[4]{.0105}$.

14. 已知 $log44092388=7.6443636$，求 .00324 之七次根.

15. 已知 $log194.8445=2.2896883$，求 $(39.2)^8$ 之十一次根.

16. 求 37.203, 3.7203, .0037203, 372030 之積；已知 $\log 37.203=1.5705780$ 及 $\log 1915631=6.2823120$.

17. 已知 $\log 2$ 及 $\log 3$，求 $\log \sqrt[3]{\left(\frac{3^2 5^4}{\sqrt{2}}\right)}$.

18. 已知 $\log 2$ 及 $\log 3$，求 $\log\left(\sqrt[3]{48}\times 108^{\frac{1}{4}}\div\sqrt[12]{6}\right)$.

19. 已知 $\log 2$, $\log 3$, $\log 7$, 及 $\log 9076.226=3.9579053$,

求
$$\sqrt[3]{\left(\frac{294\times 125}{42\times 32}\right)^2}$$
之值至六位小數.

20. 已知 $\log 2$, $\log 3$, $\log 7$; 及 $\log 11=1.0413927$,

$$\log 17814.1516=4.2507651;$$

試計算
$$(330\div 49)^4\div\sqrt[3]{22\times 70}$$
之值至六位小數.

21. 求 $3^{12}\times 2^8$ 之位數.

22. 試證 $\left(\frac{21}{20}\right)^{100}$ 大於 100.

23. 求 $(\frac{1}{2})^{1000}$ 之小數點及第一有效數字間之零數.

已知 $\log 2$, $\log 3$, 及 $\log 7$，解下列各方程式：

24. $3^{x-2}=5$.　　25. $5^x=10^3$.　　26. $5^{5-3x}=2^{x+2}$.

27. $21^x=2^{2x+1}.5^x$.　　28. $2^x.6^{x-2}=5^{2x}.7^{1-x}$.

29. $\left.\begin{aligned}2^{x+y}&=6^y\\ 3^x&=3.2^{y+1}\end{aligned}\right\}$.　　30. $\left.\begin{aligned}3^{1-x-y}&=4^{-y}\\ 2^{2x-1}&=3^{3y-x}\end{aligned}\right\}$.

31. 已知 $\log_{10}2=.30103$，求 $\log_{25}200$.

32. 已知 $\log_{10}2=.30103$, $\log_{10}7=.84509$, 求 $\log_7\sqrt{2}$ 及 $\log_{\sqrt{2}}7$.

第十七章

指數級數及對數級數

219. 常用對數並非直接求得，乃先求出以他數爲底之對數，再變之爲以 10 爲底之對數，此在第十六章業已提及.

本章證名爲指數級數及對數級數之公式，並對於用之作成對數表之方法，加以簡要之說明.

220. 依 x 之升冪展開 a^x.

設 n 大於 1，用二項式定理，得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$$

$$=1+nx.\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{\lfloor 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{\lfloor 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

令 $x=1$，得

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots(2)$$

但 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}^x$,

故級數 (1) 爲級數 (2) 之 x 次冪；即

$$1+x+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{\lfloor 2}+\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\left\{1+1+\frac{1-\frac{1}{n}}{\lfloor 2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{\lfloor 3}+\cdots\right\}^{x},$$

不論 n 爲若何大值，此式永遠眞實．設 n 無限增大，則得

$$1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots=\left(1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\cdots\right)^{x},$$

此級數 $1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

通常以 e 表之；故

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

以 cx 代 x，於是

$$e^{cx}=1+cx+\frac{c^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{c^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

今令 $e^c=a$，於是 $c=\log_e a$，代入 c 之值，得

$$a^x=1+x\log_e a+\frac{x^2(\log_e a)^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3(\log_e a)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此爲指數定理．

推論．當 n 爲無限大時，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 之極限$=e$．[見 § 266]．

又由前節研究，可知當 n 無限增大時，

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

亦即當 n 爲無限大時，$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 之極限 $=e^x$.

令　　$\frac{x}{n}=-\frac{1}{m}$，得

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-mx}=\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^{-x}.$$

今當 n 爲無限大時，m 爲無限大；是以

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{之極限} =e^{-x}.$$

故　　$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \text{之極限} =e^{-1}.$$

221. 前節對於 x 之值無所限制；又因 $\frac{1}{n}$ 小於 1，故用前展開式求得之結果，有算術的解釋 [§183].

但前證明中尙有一點，吾人當予以注意．前曾假定當 n 爲無限大時，不論 r 爲何値，

$$\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r}$$

之極限均爲 $x^r/\lfloor r$.

設以 u_r 表　　$$\frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)}{\lfloor r}\text{之値}.$$

於是　　$$\frac{u_r}{u_{r-1}}=\frac{1}{r}\left(x-\frac{r-1}{n}\right)=\frac{x}{r}-\frac{1}{n}+\frac{1}{nr}.$$

因 n 爲無限大，故得

$$\frac{u_r}{u_{r-1}}=\frac{x}{r};\quad \text{即} u_r=\frac{x}{r}u_{r-1}.$$

u_2 之極限顯爲 $\frac{x^2}{\lfloor 2}$；故 u_3 之極限爲 $\frac{x^3}{\lfloor 3}$；u_4 之極限爲 $\frac{x^4}{\lfloor 4}$；一般言之 u_r 之極限爲 $\frac{x^r}{\lfloor r}$.

222. 級數

$$1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

前曾以 e 表之，此級數甚爲重要，因此爲最初計算之對數之底也．以 e 爲底之對數，乃納伯爾氏所發明，納氏死後，稱爲納氏對數．又因其爲於代數研究中最初之對數，故亦稱爲自然對數．

在理論研究中，對數之底恆爲 e，與算術演算中之恒以10爲底正同．

用此級數定 e 之近似值，可求至任何精確程度；其十位小數之近似值爲 2.7182818284.

例 1． 求下無窮級數之和．

$$1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

因　　　$e=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots\cdots\cdots\cdots;$

又在 e^x 之級數內，令$x=-1$，得

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\ e+e^{-1}=2\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right);$$

故所求之級數和 $=\frac{1}{2}(e+e^{-1})$.

例 2． 求$\dfrac{1-ax-x^2}{e^x}$之展開式之 x^r 之係數．

$$\frac{1-ax-x^2}{e^x}=(1-ax-x^2)e^{-x}$$

$$=(1-ax-x^2)\left\{1-x+\frac{x^2}{\underline{|2}}-\frac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^r x^r}{\underline{|r}}+\cdots\cdots\right\}.$$

所求係數 $=\dfrac{(-1)^r}{\lfloor r}-\dfrac{(-1)^{r-1}a}{\lfloor r-1}-\dfrac{(-1)^{r-2}}{\lfloor r-2}$

$=\dfrac{(-1)^r}{\lfloor r}\{1+ar-r(r-1)\}.$

223. 按照 x 之升羃展開 $log_e(1+x)$.

由 §220,

$$a^y=1+ylog_ea+\frac{y^2(log_ea)^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3(log_ea)^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\cdots$$

在此級數內,以 $1+x$ 代 a; 則得

$$(1+x)^y=1+ylog_e(1+x)+\frac{y^2}{\lfloor 2}\{log_e(1+x)\}^2$$
$$+\frac{y^3}{\lfloor 3}\{log_e(1+x)\}^3+\cdots\cdots\cdots(1)$$

又由二項式定理,當 $x<1$ 時,得

$$(1+y)^y=1+yx+\frac{y(y-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots\cdots\cdots(2).$$

今 (2) 內 y 之係數爲

$$x+\frac{(-1)}{1.2}x^2+\frac{(-1)(-2)}{1.2.3}x^3+\frac{(-1)(-2)(-3)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots;$$

即
$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

與 (1) 內 y 之係數等置, 得

$$log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots\cdots$$

此稱爲對數級數.

例. 設 $x<1$, 試按照 x 之升羃展開 $\{log_e(1+x)\}^2$.

等置 (1) 及 (2) 內 y^2 之係數,可知所求展開式爲

$$\frac{y(y-1)}{1.2}x^2+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}x^3$$
$$+\frac{y(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots\cdots;$$

內之 y^2 之係數之二倍, 即

$$\frac{y-1}{1.2}x^2+\frac{(y-1)(y-2)}{1.2.3}x^3+\frac{(y-1)(y-2)(y-3)}{1.2.3.4}x^4+\cdots\cdots$$

內之 y 之係數之二倍.

故$\{log_e(1+x)\}^2=2\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{2})x^3+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^4-\cdots\cdots\}.$

224. 除非當x之值甚小時，$\log_e(1+x)$之級數於數計算之用極鮮，但由之可推出其他之級數，藉此等級數之數，可作成各種對數表.

以$\frac{1}{n}$代x，則得$\log_e\frac{n+1}{n}$；於是

$$\log_e(n+1)-\log_e n=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

以 $-\frac{1}{n}$代 x，則得 $\log_e\frac{n-1}{n}$；於是，改變方程式兩方之符號，

$$\log_e n-\log_e(n-1)=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)及(2)相加，得

$$\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{5n^5}+\cdots\right)\cdots\cdots(3)$$

在此公式內，令 $n=3$，得 $\log_e 4-\log_e 2$，即 $\log_e 2$；由實際計算，得 $\log_e 2=.69314718\cdots\cdots\cdots$；由是 $\log_e 8$ 可知矣.

又令 $n=9$，得 $\log_e 10-\log_e 8$；由是求得

$$\log_e 10=2.30258509\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

將納氏對數變為 10 底對數，吾人以$\frac{1}{\log_e 10}$乘之即得．$\frac{1}{\log_e 10}$為常用對數之對數率［§216］．其值為$\frac{1}{2.30258509}$，即 43429448……；此後以μ表之.

在倫敦皇家學會之前進雜誌第 XXVII 卷第 88 頁中，亞當教授將 e，μ，$\log_e 2$，$\log_e 3$，$\log_e 5$ 之值求至 260 多位小數.

225. 如上之級數自首至尾以μ乘之，則得計算常用對數之公式.

如是由 (1)，$\mu\log_e(n+1)-\mu\log_e n=\frac{\mu}{n}-\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}-\cdots\cdots$；

即，$$log_{10}(n+1)-log_{10}n=\frac{\mu}{n}-\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同法由 (2)，

$$log_{10}n-log_{10}(n-1)=\frac{\mu}{n}+\frac{\mu}{2n^2}+\frac{\mu}{3n^3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

由上之任一結果，可知若已知二連續數中任一數之對數，則他一數之對數可以求得，由是可以造成對數表矣.

須注意上公式僅用之以求質數之對數，因複數之對數可由求其諸質因數之對數之和得之也.

計算任何小質數之對數，通常並不即以此數代入公式(1)或(2)，但設法求得相當之 n 值使除法易行，且使 $n+1$ 或 $n-1$ 含已知數之因數. 然後求得 $log(n+1)$ 或 $log(n-1)$，而由是推出已知數之對數.

例. 求 $log2$ 及 $log3$，已知 $\mu=.43429448$.

令 (2) 內 $n=10$，得 $log10-log9$ 之值；如是

$$1-2log3=.043429448+.002171472+.000144765+.000010857$$
$$+.000000868+.000000072+.000000006;$$

$$1-2log3=.045757488,$$

$$log3=.477121256.$$

令 (1) 內 $n=80$，得 $log81-log80$；如是

$$4\ log\ 3-3\ log2-1=.005428681-.000033929+.000000283$$
$$-.000000003;$$

$$3log2=.908485024-.005395032,$$

$$log2=.301029997.$$

下節示 $log_e(n+1)-log_en$ 之另一級數，此級數在作對數表時常用之. 關於此問題之高深研究，讀者可參考大英百科全書中葛來希氏 (*Mr Glaisher*) 對數篇.

226. 在 §223 已證得

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

將 x 換爲 $-x$，得

$$\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由減法，

$$\log_e\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right).$$

今 $\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{n+1}{n}$，於是 $x=\dfrac{1}{2n+1}$；因此得

$$\log_e(n+1)-\log_e n=2\left\{\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{1}{5(2n+1)^5}+\cdots\right\}.$$

註． 此級數收斂甚速，但在實用上，並不恒似§224之級數之便利．

227. 下例說明本章之主題．

例 1． 設 $\alpha\beta$ 爲方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之根．求證

$$\log(a-bx+cx^2)=\log a+(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots$$

因　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$，故得

$$a-bx+cx^2=a\{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\}$$
$$=a(1+\alpha x)(1+\beta x).$$

$$\therefore\ \log(a-bx+cx^2)=\log a+\log(1+\alpha x)+\log(1+\beta x)$$
$$=\log a+\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\cdots+\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\cdots\cdots$$
$$=\log a+(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots\cdots,$$

例 2． 求證在 $\log(1+x+x^2)$ 之展開式中，x^n 之係數爲 $-\dfrac{2}{n}$ 或爲 $\dfrac{1}{n}$，全視 n 之是否爲 3 之倍數而定．

$$\log(1+x+x^2)=\log\frac{1-x^3}{1-x}=\log(1-x^3)-\log(1-x)$$
$$=-x^3-\frac{x^6}{2}-\frac{x^9}{3}-\cdots-\frac{x^{3r}}{r}-\cdots+\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^r}{r}+\cdots\right).$$

設 n 爲 3 之倍數，以 $3r$ 表之，於是 x^n 之係數由第一級數得 $-\frac{1}{r}$；由第二級數得 $\frac{1}{3r}$；卽此係數爲 $-\frac{3}{n}+\frac{1}{n}$ 或 $-\frac{2}{n}$.

設 n 非 3 之倍數，則第一級數中無 x^n 之項，因此所求之係數爲 $\frac{1}{n}$.

228. 求證 e 爲不可通約量.

設其不然，使 $e=\frac{m}{n}$，m 及 n 爲正整數.

於是
$$\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}++\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\frac{1}{\underline{|n+1}}+\cdots\cdots\cdots$$

以 $\underline{|n}$ 乘兩邊，得

$$m\underline{|n-1}=\text{整數}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$$

但 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots\cdots$

爲眞分數，因其大於 $\frac{1}{n+1}$，而小於等比級數

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots\cdots;$$

卽，小於 $\frac{1}{n}$ 也；如此則一整數等於一整數加一分數，絕無是理；故 e 爲不可通約量.

習　題　十七.

求 1，2，兩級數之值.

1. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}-\frac{1}{4.2^4}+\frac{1}{5.2^5}-\cdots\cdots\cdots\cdots$

3. 試證

$$log_e(n+a)-log_e(n-a)=2\left(\frac{a}{n}+\frac{a^3}{3n^3}+\frac{a^5}{5n^5}+\cdots\right).$$

4. 設 $$y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots,$$

試證 $$x=y+\frac{y^2}{\underline{|2}}+\frac{y^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

5. 試證

$$\frac{a-b}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a}\right)^3+\cdots=log_e a-log_e b$$

6. 求 1001/999 之納氏對數至六位小數.

7. 試證 $$e^{-1}=2\left(\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{2}{\underline{|5}}+\frac{3}{\underline{|7}}+\cdots\right).$$

8. 試證

$$log_e(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}=2\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\cdots\right).$$

9. 求次級數之值.

$$x^2-y^2+\frac{1}{\underline{|2}}(x^4-y^4)+\frac{1}{\underline{|3}}(x^6-y^6)+\cdots$$

10. 已知 $\mu=.43429448$, $log\ 2=.30103000$; 求 7, 11, 及 13 之常用對數.

11. 設 ax^2 及 a/x^2 皆小於 1, 試證

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{a^2}{2}\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\frac{a^3}{3}\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)-\cdots$$

$$=log_e\left(1+ax^2+a^2+\frac{a}{x^2}\right).$$

12. 試證 $log_e\ (1+3x+2x^2)=3x-\dfrac{5x^2}{2}+\dfrac{9x^3}{3}-\dfrac{17x^4}{4}+\cdots$; 並求此級數之通項.

13. 試證 $log_e\dfrac{1+3x}{1-2x}=5x-\dfrac{5x^2}{2}+\dfrac{35x^3}{3}-\dfrac{65x^4}{4}+\cdots$; 並求此級數之通項.

14. 按照 x 之升冪展開 $\dfrac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}}$.

15. 依照 x 之升冪表 $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$，式內 $i=\sqrt{-1}$.

16 試證

$$\log_e(x+2h)=2\log_e(x+h)-\log_e x$$
$$-\left\{\frac{h^2}{(x+h)^2}+\frac{h^4}{2(x+h)^4}+\frac{h^6}{3(x+h)^6}+\cdots\right\}.$$

17. 設 α 及 β 爲 $x^2-px+q=0$ 之根；試證

$$\log_e(1+px+qx^2)=(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}x^3-\cdots\cdots$$

18. 設 $x<1$，求下級數之和

$$\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4+\frac{4}{5}x^5+\cdots\cdots$$

19. 試證

$$\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{1}{2\cdot 3(n+1)^2}-\frac{1}{3\cdot 4(n+1)^3}-\cdots$$

20. 設依 x 之升冪展開 $\log_e\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$，試證若 n 爲奇數或 $4m+2$ 之形式，則其中 x^n 之係數爲 $-\dfrac{1}{n}$，若 n 爲 $4m$ 之形式，則其中 x^n 之係數爲 $\dfrac{3}{n}$.

21. 試證

$$1+\frac{2^3}{\underline{|2}}+\frac{3^3}{\underline{|3}}+\frac{4^3}{\underline{|4}}+\cdots=5e.$$

22. 試證

$$2\log_e n-\log_e(n+1)-\log_e(n-1)=\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^4}+\frac{1}{3n^6}+\cdots$$

23. 試證 $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{2(n+1)^2}+\dfrac{1}{3(n+1)^3}+\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\cdots$$

24. 設 $\log_e\dfrac{9}{10}=-a$，$\log_e\dfrac{24}{25}=-b$，$\log_e\dfrac{81}{80}=c$，試證

$\log_e 2=7a-2b+3c$，$\log_e 3=11a-3b+5c$，$\log_e 5=16a-4b+7c$；並計算 $\log_e 2$，$\log_e 3$，$\log_e 5$ 至八位小數.

第十八章

利息與年金

229. 本章用代數公式化簡關於利息及貼現問題之解法.

此處所用利息，貼現，現值等名詞，其意義與通常算術中所用者同. 但爲方便起見，不以 £100 之一年之利息爲利率，而以 £1 之一年之利息爲利率.

230. 已知本金及時期，求按單利計算之利息及本利和.

設 P 爲本金之磅數，r 爲一磅一年之利息，n 爲年數，I 爲利息，M 爲本利和.

P 之一年之利息爲 Pr，故 n 年爲 Pnr；即

$$I=Pnr \qquad \cdots\cdots(1)$$

又 $$M=P+I;$$

即 $$M=P(1+nr) \qquad \cdots\cdots(2)$$

由 (1) 及 (2)，可見若已知 P,n,r,I 或 P,n,r,M 之任三量，則可求得第四量.

231. 已知若干時後屆期之金額，按照單利計算，求其現值及貼現.

設 P 爲金額，V 爲現值，D 爲貼現，r 爲 £1 一年之利息，n 爲年數.

因 V 爲自今行息 n 年得本利和 P 之金額，故

$$P=V(1+nr);$$

$$\therefore\quad V=\frac{P}{1+nr}.$$

又
$$D=P-V=P-\frac{P}{1+nr};$$

$$\therefore\quad D=\frac{Pnr}{1+nr}.$$

注意．由此方程式所得 D 之值，稱爲正貼現．但於實用上某欵額於定期前預付時，慣例爲按到期之金額扣除利息，而非正貼現，如此扣除之欵稱爲銀行貼現；由是

$$\text{銀行貼現}=Pnr.$$

$$\text{正貼現}=\frac{Pnr}{1+nr}.$$

例．早付四月之欵 £ 1900，共正貼現及銀行貼現之差爲 6s.8d.；設照單利計算，試求其利率．

設 r 表 £1 一年之利息；於是其銀行貼現爲 $\frac{1900r}{3}$，正貼現爲 $\dfrac{\frac{1900r}{3}}{1+\frac{1}{3}r}$.

$$\therefore\ \frac{1900r}{3}-\frac{\frac{1900r}{3}}{1+\frac{1}{3}r}=\frac{1}{3};$$

由是
$$1900r^2=3+r;$$

$$\therefore\ r=\frac{1\pm\sqrt{1+22800}}{3800}=\frac{1\pm151}{3800}.$$

棄其負值，得
$$r=\frac{152}{3800}=\frac{1}{25};$$

$$\therefore\ \text{利率}=100r=4.$$

232． 已知金額及時期，按照複利計算，求其利息及本利和．

設 P 表本金，R 表 £1 一年之本利和，n 表年數，I 表利息，M 表本利和．

P 在第一年終之本利和爲 PR；又因此爲第二年之本金，故第二年終之本利和爲 $PR\times R$ 或 PR^2. 同理第三年終之本利和爲 PR^3，類推；故 n 年之本利和爲 PR^n；即

$$M=PR^n;$$

$$\therefore\ I=P(R^n-1).$$

注意. 若 r 表 £1 一年之利息，則

$$R=1+r.$$

233. 在商業交易中，不足一年之時期，均照單利計算. 如 £1 之 $\frac{1}{2}$ 年之本利和爲 $1+\frac{r}{2}$；又 P 之 $4\frac{2}{3}$ 年之本利和爲 $PR^4\left(1+\frac{2}{3}r\right)$. 同理 P 之 $n+\frac{1}{m}$ 年之本利和爲 $PR^n\left(1+\frac{r}{m}\right)$.

若每年付息不只一次，則名義上之利率與實得之利率有別；例如，一年付息兩次，其名義上之利率爲 r，則 £ 1 半年之本利和爲 $1+\frac{r}{2}$，其全年之本利和爲 $\left(1+\frac{r}{2}\right)^2$，或 $1+r+\frac{r^2}{4}$；因之其實得利率爲 $r+\frac{r^2}{4}$.

234. 若每年付息 q 次，r 爲名義上之利率，則 £1 每期之利息爲 $\frac{r}{q}$. 是以 P 之 n 年即 qn 期之本利和爲 $P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}$.

在此種情形內，謂利息每年 q 次化爲本金.

若利息每剎那皆化爲本金，則 q 變爲無限大．欲求其本利和，令$\frac{r}{q}=\frac{1}{x}$，由是 $q=rx$；故

$$本利和=P\left(1+\frac{r}{q}\right)^{qn}=P\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xnr}=P\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^{nr}$$
$$=Pe^{nr}[\S 220，推論]$$

因當 q 爲無限大時 x 爲無限大也．

235． 求若干時後屆期之已知金額之現值及貼現，照複利計算．

設 P 爲已知金額，V 爲現值，D 爲貼現，R 爲 £1 一年之本利和，n 爲年數．

因 V 爲從現時起行息 n 年得本利和 P 之本金，故

$$P=VR^n;$$
$$\therefore\ V=\frac{P}{R^n}=PR^{-n},$$
$$D=P(1-R^{-n}).$$

例．若干時後到期之 £672 之現值爲 £126；設照複利率 $4\frac{1}{6}\%$ 計息，試求其時期；已知 $log2=.30103$，$log3=.47712$．

此處 $$r=\frac{4\frac{1}{6}}{100}=\frac{1}{24}，而\ R=\frac{25}{24}.$$

設 n 爲年數；於是

$$672=126\left(\frac{25}{24}\right)^n;$$

$$\therefore\ n\log\frac{25}{24}=\log\frac{672}{126},$$

即 $$n\log\frac{100}{96}=\log\frac{16}{3};$$

$$\therefore\ n(\log100-\log96)=\log16-\log3,$$

$$n=\frac{4\log2-\log3}{2-5\log2-\log3}$$

$$n=\frac{.72700}{.01773}=41，最近值.$$

故時期約爲 41 年．

習題 十八.A.

需要時可用下列諸對數.

$\log 2=.3010300$, $\log 3=.4771213$,

$\log 7=.8450980$, $\log 11=1.0413927$.

1. 求 £100 照複利率 5% 行息之 50 年之本利和.

2. 某欵額照單利計算之利息爲 £90, 而其同時間同利率之貼現爲 £80, 求此欵額.

3. 設照複利率 5% 行息, 問若干年之本利和始爲本金之二倍.

4. 求八年後屆期之欵 £10000 之現値, 照複利率 5% 計算, 求至法尾 (*farthing*) 爲止. 已知 $\log 67683.94=4.8304856$.

5. 照複利率 10% 計算, £1000 經若干年之本利和爲 £2500.

6. 照單利計算, 貼現恰爲期欵及利息之調和中項之半, 試證明之.

7. 試證, 照複利率5%計算之欵, 百年將增大至本金之百倍以上.

8. 照複利率 6% 行息 12 年得本利和 £1000 之欵爲若干? 已知

$\log 106=2.0253059$, $\log 49697=4.6963292$.

9. 某人借欵 £600, 每半年結算一次, 利率爲 18%, 問若干年之本利和爲 £6000? 已知 $\log 118=2.071882$.

10. 照複利率 6% 行息, 1 法星之 200 年之本利和爲何? 已知 $\log 106=2.0253059$, $\log 115.1270=2.0611800$.

年金

236. 年金爲在某種訂定條件下按期繳付之定欵; 付款之期一年一次, 或多次均可, 或除另有聲明外, 吾人假定付期爲一年一次.

定期年金爲不問有無變故, 必須照期繳付之年金. 終身年金爲當某人, 或某數人中之後死者在世時必須付欵之年金.

緩付年金爲若干年後始能開始繳付之年金；若爲 n 年之緩付年金，則於 n 年後始開始繳付，其第一次繳付應在第 $n+1$ 年終.

若年金永續不斷，則稱爲永續年金；此種年金若非立即開始，則名之爲緩付永續年金.

年金停付若干年者此暫停支付此若干年之款.

237. 求年金停付若干年間之本利和，照單利計算.

設 A 爲年金，r 爲 £1 一年之利息，n 爲年數，M 爲本利和.

第一年之末應付 A，此款在其餘之 $n-1$ 年間之本利和爲 $A+(n-1)rA$；第二年末應再 A，此款在其餘之 $n-2$ 年間之本利和爲 $A+(n-2)rA$；類推. 今 M 爲此等本利和之總和；

$$\therefore\ M=\{A+(n-1)rA\}+\{A+(n-2)rA\}$$
$$+\cdots\cdots+(A+rA)+A,$$

此級數含有 n 項；

$$\therefore\ M=nA+(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{n-1})rA$$
$$=nA+\frac{n(n-1)}{2}rA.$$

238. 求年金停付若干年間之本利和，照複利計算.

設 A 爲年金，R 爲 £1 一年之本利和，n 爲年數，M 爲本利和.

第一年之末應付 A，此款在其餘 $n-1$ 年間之本利和爲 AR^{n-1}；第二年之末應再付 A，此款在其餘 $n-2$ 年間之本利和爲 AR^{n-2}；類推.

$$\therefore\ M=AR^{n-1}+AR^{n-2}+\cdots\cdots+AR^2+AR+A$$
$$=A(1+R+R^2+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項})$$
$$=A\frac{R^n-1}{R-1}.$$

239. 求年金之現值，俗例恆照複利計算；其照單利算得之結果將不合乎實際．關於此點及對於年金之更詳說明，讀者可參考英國保險計算學院之教科書第 I，II 兩部 (*Text-book of the Institute of Actuaries, Parts I. II*)，及大英百科全書之年金篇．

240. 求繼續若干年之年金之現值，照複利計算．

設 A 爲年金，R 爲 £1 一年之本利和，n 爲年數，V 爲所求之現值．

一年到期之 A 之現值爲 AR^{-1}；

二年到期之 A 之現值爲 AR^{-2}；

三年到期之 A 之現值爲 AR^{-3}；

類推 [235 節]．

今 V 爲各次付款之現值之總和；

$$\therefore V = AR^{-1} + AR^{-2} + AR^{-3} + \cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項}$$

$$= AR^{-1}\frac{1-R^{-n}}{1-R^{-1}}$$

$$= A\frac{1-R^{-n}}{R-1}.$$

注意．以 R^n 除 §238 中 M 之值，亦可得此結果．

推論．若 n 爲無限大，則得永續年金之現值

$$V = \frac{A}{R-1} = \frac{A}{r}.$$

241. 若 mA 爲年金 A 之現值，則謂此年金之購買年限爲m．

若爲永續年金，則 $mA = \frac{A}{r}$；故

$$m = \frac{1}{r} = \frac{100}{\text{利率}\%};$$

即永續年金之購買年限以利率%除之即得.

不能收回之投資之入息，可作爲永續年金之例，如政府之公債票，公司之股票，及鐵路公債券等．政府之信用如何，可由其所發公債之購買年限見之；如英國九折發行之2分5厘整理公債之購年限爲36年；埃及九六折發行2分5厘公債之購買年限爲24年；而澳大利八折發行之5分公債之購買年限僅爲16年.

242. 求 p 年末開始支付，且繼續 n 年之年金之現值，照複利計算.

設 A 爲年金，R 爲 £1 一年之本利和，V 爲現值.

第一次付欵在 $p+1$ 年之末 [§236].

故第一次，二次，三次，……支付之現值爲

$$AR^{-(p+1)},\ AR^{-(p+2)},\ AR^{-(p+3)},\cdots\cdots$$

$$\therefore\ V=AR^{-(p+1)}+AR^{-(p+2)}+AR^{-(p+3)}+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項}$$

$$=AR^{-(p+1)}\frac{1-R^{-n}}{1-R^{-1}}$$

$$=\frac{AR^{-p}}{R-1}-\frac{AR^{-p-n}}{R-1}.$$

推論. p年後開始之緩付年金之現值，可由下公式求得之.

$$V=\frac{AR^{-p}}{R-1}.$$

243. 自由執管不動產爲能產生永續年金名曰租金者之產業；故此種財產之價值等於與租金相等之永續年金之現值.

由 241 節可知，若已知租戶所付以購得土地之欵，相當於若干購買年限之金額，則以購買年限除100，即得其利率.

例. 某產業六年後始能收租,以 £20000 購得之;設按複利率 5% 計算,問購者應得租金若干? 已知 $log1.05=.0211893$, $log1.34009$ $=.1271358$.

其租金不啻一緩付六年之永續年金. 設 £A 爲此年金之值;於是因 $R=1.05$, 得

$$20000=\frac{A\times(1.05)^{-6}}{.05};$$

$$\therefore\quad A\times(1.05)^{-6}=1000;$$

$$logA-6log1.05=3,$$

$$logA=3.1271358=log1340.096.$$

$\therefore\quad A=1340.096$, 其租金爲 £1340.1$s$.11$d$.

244. 設某租戶用欵若干,獲得某產業 $p+q$ 年之租約,迨滿 q 年後,欲續訂 $p+n$ 年之租約,則其必須再付之欵稱爲 n 年之續約金.

設 A 爲此產業每年之租價;於是因租戶已付 $p+n$ 年中 p 年之欵,其當再付之欵,必等於緩付年金 A 從 p 年後開始而繼續 n 年之現值;則

$$續約金=\frac{AR^{-p}}{R-1}-\frac{AR^{-p-n}}{R-1}. \qquad [§242].$$

習 題 十八. B.

除有相反聲明者外,下之利息統照複利計算.

1. 每年 £120 之年金,其停付 5 年間之本利和爲 £672;求單利率.

2. 求 £100 之年金之20年之本利和,照複利率 $4\frac{1}{2}\%$ 計算. 已知

$$log1.045=.0191163, log24.117=1.3823260.$$

3. 以 £2750 購得之產業,須租價若干,購者始能得 4% 之利息?

4. 某產業每年可得租金 £120,今以 £4000 售出,試求其利率.

5. 設照$3\frac{1}{2}\%$計息,試求自由執管之產業,應予以若干年之購買年限.

6. 某永續年金之購買年限爲 25年,試求£625之年金連續 2 年之本利和.

7. 某永續年金之購買年限爲20年,試能以 £2522 購得連續 3 年之年金.

8. 當利率 4%時,須付款若干,始能得10年後每年生利£400之產業?已知

$$\log 104=2.0170333,\ \log 6.75565=.8296670.$$

9. 照利率 2% 每剎那計利,若干款50年能得本利和 £500?已知

$$e^{-1}=.3678.$$

10. 設欲得連續 n 年之年金須付25年之年金額,欲得連續$2n$年之年金須付30年之年金額,試求利率.

11. 某人借款£5000,照複利率4%計算,設本利均分十年償還;試求每次償還之數.已知

$$\log 1.04=.0170333\text{及}\log 675565=5.829667.$$

12. 某人有存款£20000,照利率5%生息;設此人每年耗用£1800,試證其必於17年終破產;已知

$$\log 2=.3010300,\ \log 3=.4771213,\ \log 7=.8450980.$$

13. 某產業每年之租金爲 £500,租約爲 20年一期;試求 7 年後續滿一期之續約金;照利率6%計算.已知

$$\log 106=2.0253059,\ \log 4.688385=.6710233,$$

$$\log 3.118042=.4938820.$$

14. 設欲年金連續 n, $2n$, $3n$ 年之久,須付 a,b,c 年之年金額,試證

$$a^2-ab+b^2=ac.$$

15. 某永續年金第一年終付 £10, 第二年終付 £20, 第三年終付 £30, 類推, 每年增 £10; 其照年息 5% 計算之現值爲何?

第十九章

不等式

245. 設 a 及 b 爲任意二量，當 $a-b$ 爲正量時，謂 a 大於 b；如 2 大於 -3，因 $2-(-3)=5$ 爲正量也．當 $b-a$ 爲負量時，謂 b 小於 a；如 -5 即小於 -2，因 $-5-(-2)=-3$ 爲負量也．

照此定義而言，零必大於任何負量．

除有相反說明外，本章所用字母，均表正實量．

246. 若 $a>b$，則顯然

$$a+c>b+c;$$
$$a-c>b-c;$$
$$ac>bc;$$
$$\frac{a}{c}>\frac{b}{c};$$

即不等式之兩邊於加，減，乘，或除以同正量後，仍能成立．

247. 設 $$a-c>b,$$

兩邊各加 c，得 $$a>b+c;$$

可知不等式之任一項，可變其符號而從一邊移至他邊．

若 $a>b$，則 $b<a$ 甚爲顯然；

即若不等式之兩邊互換，則其不等符號亦必反轉．

設 $a>b$，則 $a-b$ 爲正，而 $b-a$ 爲負；即 $-a-(-b)$ 爲負，是以

$$-a<-b;$$

故若不等式之各項之符號改變，則其不等符號亦必反轉。

248. 若 $a_1>b_1$，$a_2>b_2$，$a_3>b_3\cdots\cdots\cdots a_m>b_m$，則顯然

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots\cdots+a_m>b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots\cdots\cdots b_m;$$

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots a_m>b_1b_2b_3\cdots\cdots b_m.$$

249. 若 $a>b$，又 p 及 q 爲正整數，則 $\sqrt[q]{a}>\sqrt[q]{b}$，即 $a^{\frac{1}{q}}>b^{\frac{1}{q}}$；由是 $a^{\frac{p}{q}}>b^{\frac{p}{q}}$；即 $a^n>b^n$，其 n 爲任意正整數．

又，$\frac{1}{a^n}<\frac{1}{b^n}$；即 $a^{-n}<b^{-n}$．

250. 凡實量之平方均爲正，故大於零．如 $(a-b)^2$ 爲正；

$$\therefore\ a^2-2ab+b^2>0,$$

$$\therefore\ a^2+b^2>2ab.$$

同此
$$\frac{x+y}{2}>\sqrt{xy};$$

即二正量之等差中項大於其等比中項．

當二數相等時，此不等式變爲等式．

251. 前節所證結果甚爲有用，對於含對稱文字之不等式，其用尤廣．

例 1. 設 a,b,c 表三正量，求證

$$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab,$$

及 $$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

因 $$b^2+c^2>2bc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

$$c^2+a^2>2ca;$$

$$a^2+b^2>2ab;$$

故由加法， $$a^2+b^2+c^2>bc+ca+ab.$$

此結果對於 a,b,c 之任何實值皆眞.

又，從 (1)， $$b^2-bc+c^2>bc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2);$$

$$\therefore b^3+c^3>bc(b+c) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

寫出他二相似不等式而相加之；則得

$$2(a^3+b^3+c^3)>bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b).$$

式 (3) 乃以 $(b+c)$ 乘 2 之兩邊得之，故若此因子爲負，則 (3) 不能成立，此點應加注意.

例 2. 設 x 可爲任何實值，求 x^3+1 及 x^2+x 何者較大.

$$\begin{aligned} x^3+1-(x^2+x) &= x^3-x^2-(x-1) \\ &= (x^2-1)(x-1) \\ &= (x-1)^2(x+1). \end{aligned}$$

今 $(x-1)^2$ 爲正，故

$$x^3+1>\text{或}<x^2+x,$$

視 $x+1$ 之爲正或負而定；即視 $x>$ 或 <-1 而定.

若 $x=-1$，則此不等式變爲等式.

252. 設 a 及 b 爲兩正量，其和爲 S，其積爲 P，則由恒等式

$$4ab=(a+b)^2-(a-b)^2,$$

得 $$4P=S^2-(a-b)^2, \text{ 及 } S^2=4P+(a-b)^2.$$

故若 S 之值已知，則 P 當 $a=b$ 時最大；若 P 之值已知，則 S 當 $a=b$ 時爲最小.

即，若二正量之和已知，則二量相等時其積最大，若二正量之積已知，則二量相等時其和最小.

253. 已知諸因子之和而求其積之最大值.

設有 n 因子 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots k$,又設其和爲常量等於 s.

設 a 及 b 爲任二不等因子,而考究 $abc\cdots\cdots\cdots k$ 之積.

若以$\frac{a+b}{2}$及$\frac{a+b}{2}$易二不等因子 a 及 b,則其積加大而其和依舊;故當積含有二不等因子時,可不變其因子之和而使之增大;是以當所有因子皆相等時其積最大.此處 n 因子中各因子之值爲$\frac{s}{n}$,其積之最大值爲$\left(\frac{s}{n}\right)^n$,即

$$\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k}{n}\right)^n.$$

推論.　設 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots\cdots k$ 不等,則

$$\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots+k}{n}\right)^n > abc\cdots k;$$

即

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots+k}{n} > (abc\cdots\cdots k)^{\frac{1}{n}}.$$

由等差中項及等比中項之意義之引伸,此結果常述之如下:任若干正量之等差中項大於其等比中項.

例.　指明　$(1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r)^n > n^n(\lfloor n)^r$;其 r 爲任意實量.

因　$$\frac{1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r}{n} > (1^r.2^r.3^r\cdots\cdots n^r)^{\frac{1}{n}};$$

$$\therefore\ \left(\frac{1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r}{n}\right)^n > 1^r.2^r.3^r.\cdots\cdots n^r,\ \text{即} > (\lfloor n)^r;$$

故得所求之結果.

254. 當 $a+b+c+\cdots$ 爲常數時，求 $a^m b^n c^p$ 之最大值；其 m，n，p，$\cdots$ 均爲正整數．

因 $m,n,p,\cdots$ 爲常量，故當 $\left(\frac{a}{m}\right)^m\left(\frac{b}{n}\right)^n\left(\frac{c}{p}\right)^p\cdots\cdots\cdots$ 之積最大時，$a^m b^n c^p\cdots$ 之積最大．但前者爲 $m+n+p+\cdots$ 個因子之積，諸因子之和爲 $m\left(\frac{a}{m}\right)+n\left(\frac{b}{n}\right)+p\left(\frac{c}{p}\right)+\cdots$ 或 $a+b+c\cdots$ 故爲常數，故當

$$\frac{a}{m},\ \frac{b}{n},\ \frac{c}{p},\cdots$$

諸因子皆等，即

$$\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\cdots\cdots=\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{m+n+p+\cdots}\text{時，}a^m b^n c^p\text{ 之積最大．}$$

故其最大值爲

$$m^m n^n p^p\cdots\left(\frac{a+b+c+\cdots}{m+n+p+\cdots}\right)^{m+n+p+\cdots}$$

例． 當 x 爲絕對值小於 a 之實值時，求 $(a+x)^3(a-x)^4$ 之最大值．

當 $\left(\frac{a+x}{3}\right)^3\left(\frac{a-x}{4}\right)^4$ 最大時，已知式之值最大；此式之諸因子之和爲 $3\left(\frac{a+x}{3}\right)+4\left(\frac{a-x}{4}\right)=2a$．故當 $\frac{a+x}{3}=\frac{a-x}{4}$，或 $x=-\frac{a}{7}$ 時，$(a+x)^3(a-x)^4$ 之值最大．

故其最大值爲 $\frac{6^3 8^4}{7^7}a^7$．

255. 用解二次方程式法，決定最大值與最小值，常較用前法簡便．此種證例已見於第九章；茲再舉例以明之．

例． 分一奇整數爲兩整數，令其積爲最大．

以 $2n+1$ 表此整數，以 x 及 $2n+1-x$ 表分成之兩數，以 y 表其積．於是

$$(2n+1)x-x^2=y;$$

$$\therefore\quad 2x=(2n+1)\pm\sqrt{(2n+1)^2-4y};$$

但根號下之量必爲正，故 y 不能大於 $\frac{1}{4}(2n+1)^2$，即不能大於 $n^2+n+\frac{1}{4}$；又因 y 爲整數，其最大值必爲 n^2+n；在此情形內 $x=n+1$ 或 n；故此二數爲 n 及 $n+1$.

256. 有時可用下法.

例．求 $\dfrac{(a+x)(b+x)}{c+x}$ 之最小值.

設 $c+x=y$；於是

$$\text{原式}=\frac{(a-c+y)(b-c+y)}{y}$$
$$=\frac{(a-c)(b-c)}{y}+y+a-c+b-c$$
$$=\left(\frac{\sqrt{(a-c)(b-c)}}{\sqrt{y}}-\sqrt{y}\right)^2+a-c+b-c+2\sqrt{(a-c)(b-c)}.$$

故當平方項爲零時，即當 $y=\sqrt{(a-c)(b-c)}$ 時，原式之值最小．故最小值爲

$$a-c+b-c+2\sqrt{(a-c)(b-c)};$$

而 x 之相當值爲 $\sqrt{(a-c)(b-c)}-c$.

習 題 十九.A.

1. 求證 $(ab+xy)(ax+by)>4abxy$.
2. 求證 $(b+c)(c+a)(a+b)>8abc$.
3. 試證任何實數與其倒數之和，永不小於 2.
4. 設 $a^2+b^2=1$，及 $x^2+y^2=1$；試證 $ax+by<1$.
5. 設 $a^2+b^2+c^2=1$，及 $x^2+y^2+z^2=1$；試證
$$ax+by+cz<1.$$
6. 設 $a>b$，試證 $a^ab^b>a^bb^a$，$\log\frac{b}{a}<\log\frac{1+b}{1+a}$.
7. 試證 $(x^2y+y^2z+z^2x)(xy^2+yz^2+zx^2)>9x^2y^2z^2$.
8. 求 $3ab^2$ 及 a^3+2b^3 何者爲較大.
9. 試證 $a^3b+ab^3<a^4+b^4$.
10. 試證 $6abc<bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$.
11. 試證 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$.

12. 當 x 為正數時，x^3 及 x^3+x+2 何者較大？

13. 設 $x>a$，試證 $x^3+13a^2x>5ax^2+9a^3$.

14. 設 $7x^2+11>x^3+17x$，求 x 之最大值.

15. 求 $x^2-12x+40$ 之最小值及 $24x-8-9x^2$ 之最大值.

16. 試證 $(\underline{|n})^2>n^n$，及 $2.4.6\cdots\cdots\cdots 2n<(n+1)^n$.

17. 試證 $(x+y+z)^3>27xyz$.

18. 試證 $n^n>1.3.5.\cdots\cdots\cdots(2n-1)$.

19. 設 n 為大於 2 之正整數，試證 $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}$.

20. 試證 $(\underline{|n})^3<n^n\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^{2n}$.

21. 試證

(1) $(x+y+z)^3>27(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

(2) $xyz>(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

22. 設 x 之值在 7 與 -2 之間，求 $(7-x)^4(2+x)^5$ 之最大值.

23. 求 $\dfrac{(5+x)(2+x)}{1+x}$ 之最小值.

***257.** 設 a 及 b 為二不等正量，試證 m 若非正眞分數，則 $\dfrac{a^m+b^m}{2}>\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^m$.

$$a^m+b^m=\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)^m+\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^m;$$ 因 $\dfrac{a-b}{2}$ 小於 $\dfrac{a+b}{2}$，故二者均可照 $\dfrac{a-b}{2}$ 之升冪展開之. [§184].

$$\therefore\quad \frac{a^m+b^m}{2}=\left(\frac{a+b}{2}\right)^m+\frac{m(m-1)}{1.2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{m-4}\left(\frac{a-b}{2}\right)^4+\cdots$$

(1) 若 m 爲正整數，或任意負數，則右方諸項皆爲正，故

$$\frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

(2) 若 m 爲小於 1 之正數，則右方首項後之諸項皆爲負，故

$$\frac{a^m+b^m}{2}<\left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

(3) 若 m 爲大於 1 之正數，設 $m=\frac{1}{n}$，而 $n<1$；則

$$\left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n;$$

$$\therefore \text{由 (2)，} \left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}>\frac{(a^{\frac{1}{n}})^n+(b^{\frac{1}{n}})^n}{2};$$

$$\therefore \left(\frac{a^m+b^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}>\frac{a+b}{2}.$$

$$\therefore \frac{a^m+b^m}{2}>\left(\frac{a+b}{2}\right)^m.$$

本命題成立．若 $m=0$ 或 1，則此不等式變爲等式．

***258.** 設有 n 正量 $a,b,c,\cdots\cdots k$，則除 m 爲正眞分數外，必

$$\frac{a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m}{n}>\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k}{n}\right)^m.$$

設 m 爲 0 及 1 間外之任何值．

玆設 a 及 b 不相等而考究多項式 $a^m+b^m+c^m+\cdots+k^m$；若以二等量$\frac{a+b}{2}$，$\frac{a+b}{2}$ 易 a 及 b，則 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k$ 之值不變，而 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m$ 之值，則因

$$a^m+b^m>2\left(\frac{a+b}{2}\right)^m$$

而減小．

故 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 中只要有二量不等，則能不變 $a+b+c+\cdots\cdots\cdots\cdots+k$ 之值，而使 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m$ 之值變小，故當 $a,b,c,\cdots k$ 諸量均等時，$a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots k^m$ 之值最小．此時各值皆等於

$$\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k}{n};$$

而 $a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots\cdots+k^m$ 之值變為

$$n\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots\cdots+k}{n}\right)^m.$$

故當 $a,b,c,\cdots\cdots k$ 不等時，

$$\frac{a^m+b^m+c^m+\cdots\cdots+k^m}{n}>\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots+k}{n}\right)^m.$$

若 m 之值在 0 與 1 之間，則此不等式之符號必反轉，可用同法證明之．

本命題可口述之如下：

除 m 之值在 0 與 1 之間外，n 正量之 m 次冪之等差中項大於其等差中項之 m 次冪．

***259.** 若 a 及 b 為正整數，而 $a>b$，又 x 為正量，則

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^a>\left(1+\frac{x}{b}\right)^b.$$

因 $$\left(1+\frac{x}{a}\right)^a=1+x+\left(1-\frac{1}{a}\right)\frac{x^2}{\lfloor 2}+\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{2}{a}\right)\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots(1),$$

此級數含有 $a+1$ 項．

$$\left(1+\frac{x}{b}\right)^b=1+x+\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{x^2}{\lfloor 2}+\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{2}{b}\right)\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots(2),$$

此級數含有 $b+1$ 項．

在第二項之後，(1) 之每項大於 (2) 之相當項；又 (1) 之項數多於 (2) 之項數；故本命題成立．

*260. 設 x 及 y 爲正眞分數，而 $x>y$；求證

$$\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}>\sqrt[y]{\frac{1+y}{1-y}}.$$

因 $\sqrt[x]{\frac{1+x}{1-x}}$之大或小於$\sqrt[y]{\frac{1+y}{1-y}}$，

視 $\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}$之大或小於$\frac{1}{y}\log\frac{1+y}{1-y}$而定.

但 $$\frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}=2\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\right), \text{[§226]};$$

$$\frac{1}{y}\log\frac{1+y}{1-y}=2\left(1+\frac{y^2}{3}+\frac{y^4}{5}+\cdots\right).$$

$$\therefore\quad \frac{1}{x}\log\frac{1+x}{1-x}>\frac{1}{y}\log\frac{1+y}{1-y},$$

本命題由是證明.

*261. 設 $x<1$，求證 $(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}>1$，並推出

$$a^ab^b>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$$

以 P 表 $(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}$；於是

$$\begin{aligned}\log P&=(1+x)\log(1+x)+(1-x)\log(1-x)\\&=x\{\log(1+x)-\log(1-x)\}+\log(1+x)+\log(1-x)\\&=2x\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)-2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+\cdots\right).\\&=2\left(\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{3.4}+\frac{x^6}{5.6}+\cdots\right).\end{aligned}$$

故 $\log P$ 爲正數，由是 $P>1$；

即 $$(1+x)^{1+x}(1-x)^{1-x}>1.$$

在此結果內令 $x=\frac{z}{u}$, $u>z$: 於是

$$\left(1+\frac{z}{u}\right)^{1+\frac{z}{u}}\left(1-\frac{z}{u}\right)^{1-\frac{z}{u}}>1;$$

$$\therefore\quad \left(\frac{u+z}{u}\right)^{u+z}\left(\frac{u-z}{u}\right)^{u-z}>1^u,\ \text{或}\ 1;$$

$$\therefore\quad (u+z)^{u+z}(u-z)^{u-z}>u^{2u}.$$

茲令 $u+z=a$, $u-z=b$, 由是 $u=\frac{a+b}{2}$;

$$\therefore\ a^a b^b>\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}.$$

習　題　十九.B.

1. 試證 $27(a^4+b^4+c^4)>(a+b+c)^4$.

2. 試證 $n(n+1)^3<8(1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3)$.

3. 設 $m>1$, 試證首 n 個偶數之 m 次冪之和大於 $n(n+1)^m$.

4. 設 α 及 β 爲正量而 $\alpha>\beta$, 試證

$$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}>\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^{\beta}.$$

據此證明, 若 $n>1$, 則 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 之值在 2 及 2.718……之間.

5. 設 $a>b>c$, 試證

$$\left(\frac{a+c}{a-c}\right)^a<\left(\frac{b+c}{b-c}\right)^b.$$

6. 試證 $\left(\frac{a+b+c+\cdots\cdots+k}{n}\right)^{a+b+c+\cdots+k}<a^a b^b c^c\cdots\cdots k^k$.

7. 設 $m>n$, 試證 $\frac{1}{m}\log(1+a^m)<\frac{1}{n}\log(1+a^n)$.

8. 設 n 爲正整數而 $x<1$, 試證

$$\frac{1-x^{n+1}}{n+1}<\frac{1-x^n}{n}.$$

9. 設 a,b,c 成 $H.P.$ 又 $n>1$，試證 $a^n+c^n>2b^n$.

10. 設 x 爲小於 $4a$ 之正數，試求 $x^3(4a-x)^5$ 之極大值；又設 x 爲眞分數，試求 $x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{3}}$之極小值.

11. 設 x 爲正數，試證 $\log(1+x)$ 小於 x 而大於$\dfrac{x}{1+x}$.

12. 設 $x+y+z=1$，試證$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ 之最小值爲 9；又 $(1-x)(1-y)(1-z)>8xyz$.

13. 試證 $(a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)>(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

14. 試證下二式爲正：

(1) $a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$,

(2) $a^2(a-b)(a-c)+b^2(b-c)(b-a)+c^2(c-a)(c-b)$.

15. 設 $m>n$，試證 $(x^m+y^m)^n<(x^n+y^n)^m$.

16. 試證 $a^b b^a<\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^{a+b}$.

17. 設 a,b,c 表三角形之三邊，試證

(1) $a^2(p-q)(p-r)+b^2(q-r)(q-p)+c^2(r-p)(r-q)$ 不能爲負；p,q,r 爲任何實數；

(2) 若 $x+y+z=0$，則 $a^2yz+b^2zx+c^2xy$ 不能爲正.

18. 試證 $\lfloor\underline{1}\ \lfloor\underline{3}\ \lfloor\underline{5}\cdots\lfloor\underline{2n-1}>(\lfloor\underline{n})^n$.

19. 設有 p 個正整數 $a,b,c,d,\cdots$ 其和等於 n，試證

$\lfloor\underline{a}\ \lfloor\underline{b}\ \lfloor\underline{c}\ \lfloor\underline{d}\cdots$之最小值爲 $(\lfloor\underline{q})^{p-r}(\lfloor\underline{q+1})^r$，式內 q 爲 n 除以 p 之商，r 爲其餘數.

第二十章

極限值與消失分數

262. 設 a 爲一定常量，則由將 x 充分增大，可使分數 $\frac{a}{x}$ 之值變爲任意之小量；即由取 x 爲充分大量，可使分數 $\frac{a}{x}$ 逼近於零至吾人適意之程度；此常簡述爲‘‘當 x 爲無限大時，$\frac{a}{x}$ 之極限爲零’’.

又，分數 $\frac{a}{x}$ 當 x 減小時增大，因此若使 x 爲適意之小，必能使 $\frac{a}{x}$ 爲適意之大，故當 x 爲零時 $\frac{a}{x}$ 無一定之極限；此常簡述爲“當 x 等於零時，$\frac{a}{x}$ 之極限爲無限大”.

263. 凡謂某量無限增大或爲無限大時，意指此量能大於任何能名之量.

類此，凡謂某量無限減小時，意指此量能小於任何能名之量.

符號 ∞ 表無限增大任何量之值，0 表無限減小之任何量之值.

264. §262 之兩種陳述，可以符號表之如下：

若 x 爲 ∞，則 $\frac{a}{x}$ 爲 0.

若 x 爲 0，則 $\frac{a}{x}$ 爲 ∞.

但利用此簡單表示法時，須牢記此不過爲完全陳述之縮寫而已.

265. 此處"極限"一詞之用法，學者當不難領會；但在高等數學之各部門中，對於"極限"或"極限值"之概念必須十分清晰，故於此處詳確說明其用法及意義.

266. 定義. 設 $y=f(x)$，又設當 x 逼近某值 a 時，函數 $f(x)$ 與某定數 b 之差小至任意之小，則 b 稱爲當 $x=a$ 時之 y 之極限.

例如，設 S 表級數

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots$ 之 n 項之和，則 $S=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

[§56].

此處 S 爲 n 之函數，由 n 之增大，可令 $\frac{1}{2^{n-1}}$ 變爲任意之小；即當 n 爲無限大時，S 之極限爲 2.

267. 此後常涉及一類多項式，其中諸項乃依照某公共字母方積而排列者，如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots$$

其中 a_0，a_1，a_2，a_3，…諸係數均不含 x，項數有限或無限均可.

關於此種多項式在某條件下之極限之命題，實有提出若干而加以討論之必要.

268. 當 x 無限減小時，級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

之極限爲 a_0.

設此級數含有無限項.

設 b 爲 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ 諸係數中之最大者；又設以 a_0+S 表已知級數；則

$$S<bx+bx^2+bx^3+\cdots\cdots;$$

若 $x<1$，則得 $\qquad S<\dfrac{bx}{1-x}.$

是以 S 之值可因 x 之無限減小而變爲任意之小，故已知級數之極限爲 a_0.

若此級數之項數有限，則 S 之值較上情形者尤小，故本命題成立.

269. 在級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

之中，吾人可由取 x 爲充分之小，使任一項任意大於其後之一切項之和；亦可由取 x 爲充分之大，使任一項任意大於其前之一切項之和.

任意項 a_nx^n 與其後之一切項之和之比爲

$$\frac{a_nx^n}{a_{n+1}x^{n+1}+a_{n+2}x^{n+2}+\cdots\cdots},\ 或\frac{a_n}{a_{n+1}x+a_{n+2}x^2+\cdots\cdots}$$

當 x 無限減小時，分母可變爲任意之小；即此分數可變爲任意之大.

又 a_nx^n 項與其前之一切項之和之比爲

$$\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots},\ 或\frac{a_n}{a_{n-1}y+a_{n-2}y^2+\cdots\cdots};$$

此處 $y=\dfrac{1}{x}$.

當 x 爲無限大時，y 爲無限小；故，同前例，可使此分數變爲任意之大.

270. 下爲前命題之特殊形式，甚爲有用.

依照 x 之降羃排列之有限項式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+a_1x+a_0,$$

由令 x 爲充分之小，可使末項 a_0 任意大於其以前之一切項之和，又令 x 爲充分之大，可使首項 a_nx^n 任意大於其以後之一切項之和.

例 1. 由 n 之充分增大，可使 n^4-5n^3-7n+9 之首項 n^4 任意大於其餘之一切項之和，即取 x^4 爲全式之等值式，由 n 之充分增大，其錯誤可小至任意之程度.

例 2. 求 $\dfrac{3x^3-2x^2-4}{5x^3-4x+8}$ 之極根；(1) 當 x 爲無限大時，(2) 當 x 爲零時.

(1) 當 x 爲無限大時，分子分母之首項外之各項均可略去，故其極限爲 $\dfrac{3x^3}{5x^3}$，或 $\dfrac{3}{5}$.

(2) 當 x 爲無限小，分子分母之末項外之諸項均可略去，故其極限爲 $-\dfrac{4}{8}$，或 $-\dfrac{1}{2}$.

例 3. 當 x 爲無限小時，求 $\sqrt[x]{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 之極限.

設 P 表已知式之值；由取對數得

$$logP=\frac{1}{x}\{log(1+x)-log(1-x)\}$$

$$=2\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots\cdots\cdots\right)\qquad[\S\ 226].$$

故 $logP$ 之極限爲 2，而所求極限值爲 e^2.

消 失 分 數

271. 當 $x=a$ 時，求

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$$

之極限．

令 $x=a+h$，則當 x 漸近於 a 時，h 之値漸近於零．

以 $a+h$ 代 x，則

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}=\frac{3ah+h^2}{2ah+h^2}=\frac{3a+h}{2a+h};$$

當 h 爲無限小時，此式之極限爲$\frac{3}{2}$．

但此問題有另一看法，因

$$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}=\frac{(x-a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)}=\frac{x+2a}{x+a},$$

今若令 $x=a$，則此式之極限爲 $\frac{3}{2}$，與前同．

若在此式化簡前令 $x=a$，則其形式變爲 $\frac{0}{0}$，其値無定；蓋其分子分母皆有 $x-a$ 之因子也．零固不能爲除數，但當 x 未絕對等於 a 時，$x-a$ 之因子可以消去，且 x 之値愈近於 a，此分式之値愈近於$\frac{3}{2}$，或照 § 266之定義，

當 $x=a$ 時，$\frac{x^2+ax-2a^2}{x^2-a^2}$ 之極限爲$\frac{3}{2}$．

272. 若 $f(x)$ 及 $\phi(x)$ 爲 x 之函數，當 x 爲某特値 a 時皆等於零，則分式 $\dfrac{f(a)}{\phi(a)}$ 變爲 $\dfrac{0}{0}$ 之形式，名曰消失分數。

例1. 當 $x=3$ 時，求

$$\frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$$

之極限.

當 $x=3$ 時此式變爲不定式 $\dfrac{0}{0}$；若先消去分子分母之因子 $x-3$，則此分式變爲 $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$. 當 $x=3$ 時，其值爲 $\dfrac{1}{4}$，是即所求之極限.

例2. 當 $x=a$ 時，分式 $\dfrac{\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}}{x-a}$ 變爲 $\dfrac{0}{0}$，試求其極限.

以 $\sqrt{3x-a}-\sqrt{x+a}$ 乘分子分母，此分數變爲

$$\frac{(3x-a)-(x+a)}{(x-a)(\sqrt{3x-a}+\sqrt{(x+a)})}, \text{ 即 } \frac{1}{\sqrt{3x-a}+\sqrt{x+a}};$$

令 $x=a$，則求得其極限爲 $\dfrac{1}{\sqrt{2a}}$.

例3. 當 $x=1$ 時，分式 $\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$ 變爲 $\dfrac{0}{0}$，試求其極限.

令 $x=1+h$，並用二項式定理展開之，則此分數

$$=\frac{1-(1+h)^{\frac{1}{3}}}{1-(1+h)^{\frac{1}{5}}}=\frac{1-\left(1+\frac{1}{3}h-\frac{1}{9}h^2+\cdots\right)}{1-\left(1+\frac{1}{5}h-\frac{2}{25}h^2+\cdots\right)}.$$

$$=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}h-\cdots\cdots}{-\frac{1}{5}+\frac{2}{25}h-\cdots\cdots}.$$

當 $x=1$ 時 $h=0$；故所求極限爲 $\dfrac{5}{3}$.

273. 因方程式之係數間之某種關係，其根有時成不定形式.

例如，設　　$ax+b=cx+d,$

則　　$(a-c)x=d-b,$

$$x=\frac{d-b}{a-c}.$$

若 $c=a$，則 x 等於 $\frac{d-b}{0}$，或 ∞；即在一次方程式內若 x 之係數爲無限小，則其根爲無限大.

274. 聯立一次方程式

$$ax+by+c=0,\ 及\ a'x+b'y+c'=0$$

之解爲　　$x=\frac{bc'-b'c}{ab'-a'b},\ y=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}.$

若 $ab'-a'b=0$，則 x 及 y 皆爲無限大．設此時 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=m$；代入消去 a' 及 b'，則第二方程變爲 $ax+by+\frac{c'}{m}=0$.

若$\frac{c'}{m}$不等於 c，則 $ax+by+c=0$ 及 $ax+by+\frac{c'}{m}=0$ 僅有常數項不同，乃矛盾方程式，不能爲 x 及 y 之任何有限值所適合.

若$\frac{c'}{m}=c$，則 $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$，是二者爲恒等式矣.

此時 $bc'-b'c=0$，$ca'-c'a=0$，因此 x 及 y 之値均成$\frac{0}{0}$之形式，故其解爲無定.

在此種情形下，實際僅有一個二元一次方程式，而此種方程式可爲無限個數値所適合也.

學者若熟悉解析幾何，不難利用直線幾何以解釋以上之結果.

275. 玆研究解二次方程式時可發生之幾種特殊情形.

令此方程式爲 $ax^2+bx+c=0$.

若 $c=0$，則 $ax^2+lx=0$，

由是 $$x=0，或 -\frac{b}{a};$$

即二根中之一根爲零，他一根爲有限值.

若 $b=0$，則二根絕對值同而符號相反.［§118］.

若 $a=0$，則此方程式變爲 $bx+c=0$；在此種情形下，此二次方程式僅有一根，即 $-\frac{c}{b}$. 但凡二次方程式皆有二根，玆討論其他一根之值如下：

在原方程式內以 $\frac{1}{y}$ 代 x，並消去分母，則得

$$cy^2+by+a=0.$$

設 $a=0$，得

$$cy^2+by=0,$$

其解爲 $y=0$，或 $-\frac{b}{c}$；即 $x=\infty$，或 $-\frac{c}{b}$.

故在任何二次方程式內，若 x^2 之係數爲零，則其一根爲無限大.

此爲在高等數學中常見之形式，仍須切記此不過以上完全陳述之縮寫而已.

在方程式 $ax^2+bx+c=0$ 內，若 a 甚小，則一根甚大，當 a 減至無限小時，此根增至無限大. 其有限根漸近 $-\frac{c}{b}$ 爲其極限.

非只一個係數消失之情形，可用同法研究之.

習　題　二十.

求下列各式之極限.

(1) 當 $x=\infty$ 時,　　　　(2) 當 $x=0$ 時.

1. $\dfrac{(2x-3)(3-5x)}{7x^2-6x+4}$.　　　2. $\dfrac{(3x^2-1)^2}{x^4+9}$.

3. $\dfrac{(3+2x^3)(x-5)}{(4x^3-9)(1+x)}$.　　　4. $\dfrac{(x-3)(2-5x)(3x+1)}{(2x-1)^3}$.

5. $\dfrac{1-x^2}{2x^3-1}\div\dfrac{1-x}{2x^2}$.　　　6. $\dfrac{(3-x)(x+5)(2-7x)}{(7x-1)(x+1)^3}$.

求下列各式之極限.

7. $\dfrac{x^3+1}{x^2-1}$, 當 $x=-1$ 時.　　8. $\dfrac{a^x-b^x}{x}$, 當 $x=0$ 時.

9. $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\log(1+x)}$, 當 $x=0$ 時.　10. $\dfrac{e^{mx}-e^{ma}}{x-a}$, 當 $x=a$ 時.

11. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2a}+\sqrt{x-2a}}{\sqrt{x^2-4a^2}}$, 當 $x=2a$ 時.

12. $\dfrac{\log(1+x^2+x^4)}{3x^2(1-2x)}$, 當 $x=0$ 時.

13. $\dfrac{1-x+\log x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$, 當 $x=1$ 時.

14. $\dfrac{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{3}{2}}}{(a^3-x^3)^{\frac{1}{2}}+(a-x)^{\frac{1}{2}}}$, 當 $x=a$ 時.

15. $\dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, 當 $x=0$時.

16. $\left\{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n-\dfrac{n+1}{n}\right\}^{-n}$, 當 $n=\infty$ 時.

17. $n\log\dfrac{e}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n-1}}$, 當 $n=\infty$ 時.

18. $\sqrt[x]{\dfrac{a+x}{a-x}}$, 當 $x=0$ 時.

第 二 十 一 章

級數之收斂與發散

276. 其連續各項由一定法則作成之式名曰級數：級數之止於某指定項者，名曰有限級數；級數之項數無窮盡者，名曰無窮級數．

本章此後常以

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之形式表一級數．

277. 設一級數含有 n 項，則此級數之和爲 n 之函數；若 n 無限變大，則此和必逼近一有限之極限，或變爲無限大．

無窮級數，不論 n 若何增大，其首 n 項和之絕對值終不能大於某有限量數者，名曰收斂級數．

無窮級數，由取 n 爲充分大數，能使其首 n 項和之絕對值大於任何有限數者，名曰發散級數．

278. 若吾人能求某級數之首 n 項之和，則由考驗當 n 無限增大時，此級數仍爲有限抑變爲無窮大，可決定其爲收斂級數抑爲發散級數．

例如，級數

$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$之首 n 項之和爲$\dfrac{1-x^n}{1-x}$．

若 x 之絕對值小於 1，則其首 n 項之和逼近有限數極限 $\frac{1}{1-x}$，而此級數爲收斂級數.

若 x 之絕對值大於 1，則其首 n 項之和爲 $\frac{x^n-1}{x-1}$，取 n 爲充分大數，能使之大於任何有限數；因之此級數爲發散級數.

若 $x=1$，則其首 n 項之和爲 n，此級數仍爲發散級數.

若 $x=-1$，則此級數變爲

$$1-1+1-1+1-1+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其偶數項之和爲零，而奇數項之和爲 1；其和跳躍於 0,1 二值之間. 此類級數名曰跳躍或週期收斂級數.

279. 級數之首 n 項之和，多不易求. 玆研究一不求級數和而判定其爲收斂或發散級數之法則.

280. 正負量互見之無窮級數，若任一項之絕對值小於其前一項之絕對值，則爲收斂級數.

設以

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\cdots\cdots$$

表此級數，其中 $u_1>u_2>u_3>u_4>u_5\cdots\cdots$

此級數可寫爲下兩形式:

$$(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-(u_6-u_7)-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

由 (1) 知任若干項之和皆爲正數；由 (2) 知任若干項之和皆小於 u_1；故知此級數爲收斂級數.

281. 例如，級數

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數．在 § 223 內，令 $x=1$，則知其和爲 $\log_e 2$．

又在級數

$$\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{6}{5}-\frac{7}{6}+\cdots\cdots\cdots$$

內，每項之絕對值小於其前一項之絕對值，故亦爲收斂級數．但此級數爲

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

及 $$1-1+1-1+1-1+1-\cdots\cdots\cdots,\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

兩級數之和．

今（1）之和爲 $\log_e 2$，（2）之和則視項數之偶或奇爲 0 或 1．故此級數爲收斂級數．其偶數項之和漸近於 $\log_e 2$，奇數項之和漸近於 $1+\log_e 2$．

282. 各項皆同號之無窮級數，若每項皆大於某有限數，則不論此數如何小，此級數終爲發散級數．

蓋若每項大於有限量 a，則其首 n 項之和大於 na；如是則取 n 爲充分之大數，可使之大於任何有限數也．

283. 驗定級數之收斂或發散，有兩重要原則可以公理視之，茲述之如次：

I. 級數加入或取出有限數項後，原爲收斂者仍爲收斂，原爲發散者仍爲發散，因其加減諸項之和爲有限數也．

II. 所有項皆正之收斂級數，其某幾項或所有項爲負時，仍爲收斂級數，因此級數之和顯然當所有項皆同號時爲最大也．

此後除有相反聲明外，級數之所有項，皆假定爲正項．

284. 若無窮級數自某固定項後，每項與其前項之比之絕對值均小於某數，而此數之本身小於 1，則此無窮級數為收斂級數.

設此級數由某固定項始以

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots$$

表之，又設 $\frac{u_2}{u_1}<r, \frac{u_3}{u_2}<r, \frac{u_4}{u_3}<r, \cdots\cdots,$

此處 $r<1$.

於是 $u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots$

$$=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_4}{u_3}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\right)$$

$$<u_1(1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots);$$

即 $<\frac{u_1}{1-r}$，因 $r<1$ 也.

故已知級數為收斂級數.

285. 在上節說明內，對於"由某固定項以後"一語所表之意義，當特別注意.

試觀級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此處 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{nx}{n-1}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)x;$

取 n 為充分大數，可使此比值任意逼近 x，因此每項與其前項之比，終極皆等於 x. 故若 $x<1$ 則此級數為收斂級數.

但在 $\frac{nx}{n-1}<1$，即 $n>\frac{1}{1-x}$ 以前 $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ 之比值不小於 1.

於此可得一種收斂級數，其諸項由首項起遞增，至某項而後復遞減.例如，設 $x=\frac{99}{100}$，則 $\frac{1}{1-x}=100$，而此中各項非至 100 項之後不能遞減.

286. 若諸項同號之無窮級數，自某固定項之後，每項與其前項之比皆大於 1 或等於 1，則此無窮級數爲發散級數.

設此固定項爲 u_1，其比等於 1，則以後各項皆等於 u_1，而 n 項之和等於 nu_1，故此級數爲發散級數.

設其比大於 1，則其每項皆大於 u_1，其 n 項和大於 nu_1，故此級數亦爲發散級數.

287. 在實用此等驗定法時，爲免去考核某特項，其後每項皆大於或小於其前項之煩．可逕求$\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$當 n 無限增大時之極限；設以 λ 表此極限．則

當 $\lambda<1$ 時，爲收斂級數． [§ 284.]

當 $\lambda>1$ 時，爲發散級數． [§ 286.]

當 $\lambda=1$ 時，可爲收斂，可爲發散，尙需另行驗定；蓋或許$\dfrac{u_n}{u_{n-1}}<1$，但當 n 無限增大時，則漸近於 1 爲其極限也．此時不能指定一本身小於 1 而大於 λ 之任何有限數 r，故 §284 之驗定法失效．惟若$\dfrac{u_n}{u_{n-1}}>1$ 但漸近於 1 爲其極限，則由 §286 可斷定此級數爲發散級數.

此後以"$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}$"表"$\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$當 n 變爲無窮大時之極限"一語.

例1. 第 n 項爲$\dfrac{(n+1)x^n}{n^2}$之級數爲收斂抑爲發散?

此處 $$\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{(n+1)x^n}{n^2}\div\frac{nx^{n-1}}{(n-1)^2}=\frac{(n+1)(n-1)^2}{n^3}.x,$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=x;$$

故　　　　當 $x<1$ 時，該級數收歛.

　　　　　當 $x>1$ 時，該級數發散.

當 $x=1$ 時，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=1$，則需另外驗定.

例2. 級數

$$1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots\cdots\cdots$$

爲收歛抑爲發散？

此處 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2x^{n-1}}{(n-1)^2x^{n-2}}=x.$

故　　當 $x<1$ 時，該級數收歛.

　　　當 $x>1$ 時，該級數發散.

當 $x=1$ 時，則此級數變爲 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$，顯然爲發散級數.

例3. 在級數

$a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots+(a+\overline{n-1}.d)r^{n-1}+\cdots$內，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+(n-1)d}{a+(n-2)d}.r=r;$$

故若 $r<1$ 則此級數其和爲有限數.［§60，推論］

288. 設在諸項皆正之二無窮級數內，諸相當項之比永爲有限數，則此二級數必同爲收歛級數或同爲發散級數.

設此二無窮級數以

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

及

$$v_1+v_2+v_3+v_4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

表之.

分式 $\frac{u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots+u_n}{v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots+v_n}$

之值在

$$\frac{u_1}{v_1},\ \frac{u_2}{v_2},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\frac{u_n}{v_n},$$

諸分數中之最大者與最小者之間，故爲有限數，以 L 表之；

$$\therefore\ u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n=L(v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots v_n).$$

故二級數之值必同爲有限數，或同爲無限大. 此即證明本命題.

289. 此原理之應用甚爲重要，用此可取驗定級數與性質已知之輔助級數比較，而定其收斂或發散．下節所論乃常用之輔助級數．

290. 無窮級數

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots\cdots$$

除 p 爲大於 1 之正數外，恒爲發散級數．

情形 I. 設 $p>1$.

首項爲 1；次二項之和小於$\frac{2}{2^p}$；再次四項之和小於$\frac{4}{4^p}$；又次八項之和小於$\frac{8}{8^p}$；類推．故此級數小於 $1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\frac{8}{8^p}+\cdots\cdots$；

但 $p>1$，其公比$\frac{2}{2^p}$小於 1，故此級數爲收斂級數．

情形 II. 設 $p=1$.

此級數變爲 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots$

其第三，四兩項之和大於$\frac{2}{4}$或$\frac{1}{2}$；後四項之和大於$\frac{4}{8}$或$\frac{1}{2}$；又後八項之和大於$\frac{8}{16}$或$\frac{1}{2}$；類推．故此級數大於

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots,$$

故爲發散級數．　　　　[§ 286]

情形 III. 設 $p<1$，或爲負數．

此時每項大於情形 II 內之相當項，故爲發散級數．

故除 p 爲大於 1 之正數外，此級數恒爲發散級數．

例． 證下級數爲發散級數．

$$\frac{2}{1}+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots\cdots+\frac{n+1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots$$

取題設級數與 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\cdots\cdots$ 比較之．

以 u_n 及 v_n 分表二級數之第 n 項，則於是

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{n+1}{n^2}\div\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}; \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1.$$

故二級數必同爲收歛級數或同爲發散級數．但後者已知爲發散級數，故題設級數爲發散級數．

此完成 § 287 例 1 之解．

291． 應用 § 288 之驗定法時，$\frac{u_n}{v_n}$ 之極限須爲有限數．設照下法求輔助級數，則可如願矣．

取已知級數之第 n 項 u_n，而僅留 n 之最高次羃．以 v_n 表此結果，於是據 § 270，知 $\frac{u_n}{v_n}$ 之極限爲有限數，而 v_n 可取作輔助級數之第 n 項．

例 1． 試證第 n 項爲 $\dfrac{\sqrt[3]{2n^2-1}}{\sqrt[4]{3n^3+2n+5}}$ 之級數爲發散級數．

當 n 漸大時，u_n 之值漸近於

$$\frac{\sqrt[3]{2n^2}}{\sqrt[4]{3n^3}}, \text{或} \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{12}}}.$$

故若 $v_n=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{12}}}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{3}}$，爲有限數；故可取第 n 項爲 $\dfrac{1}{n^{\frac{1}{12}}}$ 之級數爲輔助級數．但此爲發散級數 [§ 290]；故驗定級數亦爲發散級數．

例2．　一級數之

$$u_n=\sqrt[3]{n^3+1}-n,$$

試驗定其爲收斂級數抑爲發散級數．

此處

$$u_n=n\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}-1\right)$$

$$=n\left(1+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{9n^6}+\cdots\cdots-1\right)$$

$$=\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{9n^5}+\cdots$$

取 $v_n=\frac{1}{n^2}$，則得

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9n^3}+\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{1}{3}.$$

但補助級數

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數，故已知級數亦爲收斂級數．

292． 試證 $(1+x)^n$ 用二項式定理展開之式當 $x<1$ 時爲收斂級數．

設 u_r 及 u_{r+1} 表此展開式之第 r 項及 $r+1$ 項；則

$$\frac{u_{r+1}}{u_r}=\frac{n-r+1}{r}x.$$

當 $r>n+1$ 時此比爲負；即由此時起，當 x 爲正時，諸項正負相間，當 x 爲負時，諸項永爲同號．

今就數值言，當 r 爲無限大時，$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{r+1}}{u_r}=x$；因 $x<1$，故所有項同號時，此級數爲收斂級數．當其中有幾項爲正與幾項爲負時自更爲收斂級數．　[§283.]

293． 試證 a^x 依 x 升冪之展開式，於 x 之任何值，皆爲收斂級數．

此處 $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{x\log_e a}{n-1}$；故無論 x 爲何值，均 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n-1}}<1$；是以此級數爲收斂級數．

294. 試證 $\log(1+x)$ 依 x 升冪之展開式，當 x 之絕對小於 1 時，爲收歛級數.

此處$\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$之絕對值$=\dfrac{n-1}{n}x$，在極限時此值等於 x；故當 x 小於 1 時，此級數爲收歛級數.

當 $x=1$ 時，此級數變爲 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$，爲收歛級數. [§280.]

當 $x=-1$ 時，此級數變爲 $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\cdots\cdots\cdots$ 爲發散級數. [§290.] 此證明零之對數爲負無窮大，此由方程式 $e^{-\infty}=0$ 亦顯然易見也.

295. 下舉二例之結果，甚爲重要，且爲本章所必需者.

例1. 求$\dfrac{\log x}{x}$當 x 爲無限大時之極限.

使 $x=e^y$；於是

$$\frac{\log x}{x}=\frac{y}{e^y}=\frac{y}{1+y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{y}+1+\frac{y}{\lfloor 2}+\frac{y^2}{\lfloor 3}+\cdots};$$

當 x 爲無限大時，y 亦爲無限大；故此分數之值爲零.

例2. 當 $x<1$時，試證 nx^n 當 n 爲無限大時之極限爲 0.

設 $x=\dfrac{1}{y}$，由是 $y>1$；

又設 $y^n=z$，由是 $n\log y=\log z$；於是

$$nx^n=\frac{n}{y^n}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\log z}{\log y}=\frac{1}{\log y}\cdot\frac{\log z}{z}.$$

今 n 爲無限大時 z 亦爲無限大，而$\dfrac{\log z}{z}=0$；又 $\log y$ 爲有限數.

故
$$\lim_{n\to\infty} nx^n=0.$$

296. 無窮個因子之積是否爲有限數，有時須加以判斷.

設此積含 n 因子，且表以

$$u_1u_2u_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots u_n;$$

於是，若 n 無限增大時 $u_n<1$，則此積最後等於零；又若 n 無限增大時 $u_n>1$，則此積爲無限大；故欲此積爲有限數，必須 u_n 傾向於極限 1.

以 $1+v_n$ 代 u_n，則此積變爲

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\cdots\cdots(1+v_n).$$

以 P 表此積，取其對數；於是

$$\log P=\log(1+v_1)+\log(1+v_2)+\cdots\cdots+\log(1+v_n)\cdots\cdots(1)$$

欲此積爲有限量數，必須此級數爲收歛級數.

選取一輔助級數 $v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

今 $$Lim\frac{\log(1+v_n)}{v_n}=Lim\left(\frac{v_n-\frac{1}{2}v^2{}_n+\cdots\cdots}{v_n}\right)=1,$$

因 u_n 之極限爲 1 時，v_n 之極限爲 0 也.

故若 (2) 爲收歛級數，則 (1) 亦爲收歛級數，而已知積爲有限數.

例. 當 n 爲無窮大時，試證

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdots\cdots\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}$$

之極限爲有限數.

此積含 $2n$ 個因子；設以 $u_1,u_2,u_3\cdots\cdots$表連續之各對因子，而以 P 表其積，則

$$P=u_1u_2u_3\cdots\cdots u_n,$$

其 $$u_n=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}=1-\frac{1}{4n^2};$$

但 $$\log P=\log u_1+\log u_2+\log_3+\cdots\cdots+\log u_n\cdots\cdots(1)$$

吾人須證明此級數爲收歛級數.

今 $$\log u_n=\log\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=-\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{32n^4}-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

故依照 § 291，例 2，知此爲收歛級數，而已知積爲有限數.

297. 在數學研究中，常遇無窮級數，故決定其爲發散或收歛至爲重要. 且若非注意所用級數確爲收歛，則每引至錯誤之結論.

[見 § 183.]

例如，用二項式定理展開 $(1-x)^{-2}$，則得

$$(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

但若照 § 60 所示，求此級數 n 項之和，則知

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+nx^{n-1}=\frac{1-x^n}{(1-x)^2}-\frac{nx^n}{1-x};$$

因此

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots\cdots+nx^{n-1}+\frac{x^n}{(1-x)^2}+\frac{nx^n}{1-x}.$$

令 n 爲無限大，可知僅當 $\frac{x^n}{(1-x)^2}+\frac{nx^n}{1-x}$ 爲零時，始能以 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 爲無窮級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之眞正等值．

若 n 爲無限大，則當 $x=1$ 或 $x>1$ 時，$\frac{x^n}{(1-x)^2}+\frac{nx^n}{1-x}$ 變爲無限大，當 $x<1$ 時，變爲無限減小 [§295.]，故知僅當 $x<1$ 時，始可斷言

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots\text{至無窮項};$$

若認 $(1-x)^{-2}$ 用二項式定理求得之展開式，於 x 之一切值皆眞，則必得錯誤之結論．換言之，若無窮級數 $1+2x+3x^2+\cdots$ 爲收斂級數，則可引入推理而無錯誤，若爲發散級數則不可．

因發散級數之難點，吾人不得不將一級數與其代數等值之間劃一區別．例如，以 $(1-x)^2$ 除 1，不論 x 爲何值，恒得級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\cdots$$

至任意若干項，如是在某種意義下，可稱 $\frac{1}{(1-x)^2}$ 爲其代數等值；但除此級數爲收斂級數外，此等值不能確實存在．故不如稱 $\frac{1}{(1-x)^2}$

爲級數

$$1+2x+3x^2+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之母函數較爲適當．即用普通代數法則展開此函數，即得所論級數．

母函數一詞之用法，於循環級數一章中，將爲更詳盡之說明．

習　題　二十一.A.

驗定下列級數爲收斂級數，仰爲發散級數？

1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}-\frac{1}{x+3a}+\cdots\cdots\cdots,$

其 x 及 a 爲正數．

2. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\cdots\cdots\cdots.$

3. $\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x+1)(y+1)}+\frac{1}{(x+2)(y+2)}-\frac{1}{(x+3)(y+3)}+\cdots\cdots,$

其 x 及 y 爲正數．

4. $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

5. $\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{3.4}+\frac{x^3}{5.6}+\frac{x^4}{7.8}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

6. $1+\frac{2^2}{\underline{|2}}+\frac{3^2}{\underline{|3}}+\frac{4^2}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$

7. $\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\cdots\cdots$

8. $1+3x+5x^2+7x^3+9x^4+\cdots\cdots$

9. $\frac{2}{1^p}+\frac{3}{2^p}+\frac{4}{3^p}+\frac{5}{4^p}+\cdots\cdots$

10. $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{5}+\frac{x^3}{10}+\cdots+\frac{x^n}{n^2+1}+\cdots\cdots$

11. $x+\frac{3}{5}x^2+\frac{8}{10}x^3+\frac{15}{17}x^4+\cdots+\frac{n^2-1}{n^2+1}x^n+\cdots\cdots$

12. $1+\frac{2}{5}x+\frac{6}{9}x^2+\frac{14}{17}x^3+\cdots+\frac{2^n-2}{2^n+1}x^{n-1}+\cdots\cdots$

13. $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\cdots\cdots\cdots$

14. $2x+\frac{3x^2}{8}+\frac{4x^3}{27}+\cdots+\frac{(n+1)x^n}{n^3}+\cdots\cdots$

15. $\left(\frac{2^2}{1^2}-\frac{2}{1}\right)^{-1}+\left(\frac{3^3}{2^3}-\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{4^4}{3^4}-\frac{4}{3}\right)^{-3}+\cdots\cdots\cdots$

16. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}+\frac{3^3}{4^4}+\frac{4^4}{5^5}+\cdots\cdots$

17. 驗定級數之性質，設其通項爲

(1) $\sqrt{n^2+1}-n$.　　(2) $\sqrt{n^4+1}-\sqrt{n^4-1}$.

18. 設 x 爲正分數，試驗定級數

(1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots,$

(2) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}+\cdots\cdots\cdots\cdots.$

19. 試證級數

$$1+\frac{2^p}{\lfloor 2}+\frac{3^p}{\lfloor 3}+\frac{4^p}{\lfloor 4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

於 p 之一切值皆爲收斂級數.

20. 試證無窮級數

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之爲收斂或發散，視 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$ 之小於 1 或大於 1 而定.

21. 當 n 無限大時，試證

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdots\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}$$

之積爲有限數.

22. 當 $x=1$ 時，試證，除 n 爲絕對值大於 1 之負數外，$(1+x)^n$ 之展開式不含無限大之項.

***298.** 吾人於 287,291 兩節所示收斂或發散之驗定法，普通已可足用．下節所證定理，乃藉輔助級數

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots\cdots\cdots$$

之助，推出其他驗定法，此等驗定法，有時甚爲有用．

***299.** 設 u_n，v_n 爲二正項無窮級數之通項，於是若於某特項後 $\frac{u_n}{u_{n-1}}<\frac{v_n}{v_{n-1}}$，則 v 級數爲收斂級數時，u 級數亦爲收斂級數；若 $\frac{u_n}{u_{n-1}}>\frac{v_n}{v_{n-1}}$，則 v 級數爲發散級數時，u 級數亦爲發散級數．

設此特項爲 u_1 及 v_1．

情形 *I*．設 $\frac{u_2}{u_1}<\frac{v_2}{v_1}$，$\frac{u_3}{u_2}<\frac{v_3}{v_2}$，……；於是

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{n_1}+\cdots\right)$$

$$<u_1\left(1+\frac{v_2}{v_1}+\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\cdots\right);$$

即
$$<\frac{u_1}{v_1}(v_1+v_2+v_3+\cdots).$$

故若 v 級數爲收斂級數，則 u 級數亦爲收斂級數．

情形 *II*．設 $\frac{u_2}{u_1}>\frac{v_2}{v_1}$，$\frac{u_3}{u_2}>\frac{v_3}{v_2}$，………；於是

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$$

$$=u_1\left(1+\frac{u_2}{u_1}+\frac{u_3}{u_2}\cdot\frac{u_2}{u_1}+\cdots\right)$$

$$>u_1\left(1+\frac{v_2}{v_1}+\frac{v_3}{v_2}\cdot\frac{v_2}{v_1}+\cdots\right);$$

即 $$>\frac{u_1}{v_1}(v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots\cdots).$$

故若 v 級數爲發散級數，則 u 級數亦爲發散級數.

***300.** 吾人於 § 287 已知級數之爲收斂或發散，視其第 n 項與其前項之比之極限之小於 1 或大於 1 而定. 本章之末將此法改爲另一形式用之尤覺便利.

級數之爲收斂或發散，視其第 n 項與其後項之比之極限之大於 1 或小於 1 而定，即視 $\underset{n\to\infty}{Lim}\ \frac{u_n}{u_{n+1}}>1$ 或 <1而定.

類此，前節定理可述爲：

若 $\underset{n\to\infty}{Lim}\ \frac{u_n}{u_{n+1}}>\underset{n\to\infty}{Lim}\ \frac{v_n}{v_{n+1}}$，則 v 級數爲收斂級數時 u 級數亦爲收斂級數. 若 $\underset{n\to\infty}{Lim}\ \frac{u_n}{u_{n+1}}<\underset{n\to\infty}{Lim}\ \frac{v_n}{v_{n+1}}$，則 v 級數爲發散級數時 u 級數亦爲發散級數.

***301.** 通項爲 u_n 之級數，其爲收斂或發散視

$$Lim\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}>1,\ \text{或}<1\ \text{而定}.$$

以之與通項 v_n 爲 $\frac{1}{n^p}$之輔助級數比較之.

當 $p>1$ 時，輔助級數爲收斂級數，此時所論級數爲收斂級數之條件乃

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{(n+1)^p}{n^p},\ \text{或}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p;$$

即 $$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{p}{n}+\frac{p(p-1)}{2n^2}+\cdots\cdots;$$

或 $$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>p+\frac{p(p-1)}{2n}+\cdots\cdots;$$

亦即 $$\underset{n\to\infty}{Lim}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}>p.$$

但 p 較 1 大時，無論大一若何小之有限數，此輔助級數爲收斂級數；故此命題之第一部成立．

當 $p<1$ 時，此輔助級數爲發散級數，由前法可證明此命題第二部．

例．　驗定級數

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數抑爲發散級數．

此處 $\underset{n\to\infty}{Lim}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{1}{x^2}$；故 $x<1$ 時，此級數爲收斂級數；$x>1$ 時，此級數爲發散級數．

若 $x=1$，則 $Lim\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=1$．此時

$$u_n=\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-3)}{2.4.6\cdots\cdots(2n-2)}\cdot\frac{1}{2n-1}.$$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{2n(2n+1)}{(2n-1)(2n-1)};$$

$$\therefore\ n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\frac{n(6n-1)}{(2n-1)^2};$$

$$\therefore Lim\left\{n\left(\frac{n_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=\frac{3}{2};$$

故 $x=1$ 時，此級數爲收斂級數．

***302.** 通項爲 u_n 之級數，其爲收斂級數抑爲發散級數視 $\underset{n\to\infty}{Lim}\left(n\log\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)>1$，或 <1 而定．

以之與通項爲 $\dfrac{1}{n^p}$ 之級數比較之．

當 $p>1$ 時，輔助級數爲收斂級數，此時所論級數爲收斂級數之條件乃

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^p; \qquad [§\ 300.]$$

即 $$\log\frac{u_n}{u_{n+1}}>p\log\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

即 $$\log\frac{u_n}{u_{n+1}}>\frac{p}{n}-\frac{p}{2n^2}+\cdots\cdots;$$

亦即，
$$Lim\left(n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)>p.$$

故本命題之第一部成立.

當 $p<1$ 時，可以同法證明之，此時輔助級數為發散級數.

例. 驗定級數
$$x+\frac{2^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{3^3x^3}{\lfloor 3}+\frac{4^4x^4}{\lfloor 4}+\frac{5^5x^5}{\lfloor 5}+\cdots\cdots$$
為收歛級數抑為發散級數.

此處
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^nx^n}{\lfloor n}\div\frac{(n+1)^{n+1}x^{n+1}}{\lfloor n+1}=\frac{n^n}{(n+1)^nx}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^nx};$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{ex}.\qquad [\text{§ 220 推論.}]$$

故 $x<\frac{1}{e}$ 時為收歛級數， $x>\frac{1}{e}$ 時為發散級數.

當 $x=\frac{1}{e}$ 時，
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n};$$

$$\therefore \log\frac{u_n}{u_{n+1}}=\log e-n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\right)$$
$$=\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2}+\cdots;$$

$$\therefore n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3n}+\cdots;$$

$$\therefore Lim\left[n\log\frac{u_n}{u_{n+1}}\right]=\frac{1}{2};$$

故當 $x=\frac{1}{e}$ 時，此級數為發散級數.

***303.** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{u_{n+1}}=1$ 及 $Lim\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=1$，則 §§ 300, 301 所示之驗定法不適用.

求一另外驗定法，須用通項為 $\frac{1}{n(\log n)^p}$ 之輔助級數. 為判定此級數之性質，須用下節所證之定理.

***304.** 設 $\phi(n)$ 之值於 n 之所有正整數值皆為正，且當 n 遞增時其值遞減，又設 a 為任何正整數，則二無窮級數

$$\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\cdots\cdots+\phi(n)+\cdots\cdots,$$

及
$$a\phi(a)+a^2\phi(a^2)+a^3\phi(a^3)+\cdots\cdots+a^n\phi(a^n)+\cdots\cdots,$$

必同為收斂級數或同為發散級數.

試在第一級數內，觀察 $\phi(a^k)$ 後之諸項.

此等項之項數為 $a^{k+1}-a^k$，即 $a^k(a-1)$，且各大於 $\phi(a^{k+1})$；故其和大於 $a^k(a-1)\phi(a^{k+1})$；即大於 $\frac{a-1}{a}\times a^{k+1}\phi(a^{k+1})$.

依次予 k 以 0，1，2，3，……等值，得

$$\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)+\cdots\cdots+\phi(a)>\frac{a-1}{a}\times a\phi(a);$$

$$\phi(a+1)+\phi(a+2)+\phi(a+3)+\cdots\cdots+\phi(a^2)>\frac{a-1}{a}\times a^2\phi(a^2);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以 S_1，S_2 表二級數之和，由加法，$S_1-\phi(1)>\frac{a-1}{a}S_2$，故若第二級數為發散級數，則第一亦為發散級數.

又 (1) 之各項皆小於 $\phi(a^k)$，由是此級數之和小於

$$(a-1)\times a^k\phi(a^k).$$

由陸續與 k 以 0，1，2，3，……之值得

$$\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)+\cdots\cdots+\phi(a)<(a-1)\times\phi(1);$$

$$\phi(a+1)+\phi(a+2)+\phi(a+3)+\cdots\cdots+\phi(a^2)<(a-1)\times a\phi(a);$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故由加法得

$$S_1-\phi(1)<(a-1)\{S_2+\phi(1)\};$$

故設第二級數為收斂級數，則第一級數亦然.

註. 欲求第二級數之通項，在第一級數之通項 $\phi(n)$ 內以 a^n 代 n，再以 a^n 乘之即得.

***305.** 級數

$$1+\frac{1}{2(log2)^{p}}+\frac{1}{3(log3)^{p}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(logn)^{p}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

當 $p>1$ 時，爲收歛級數，當 $p=1$ 或 $p<1$ 時爲發散級數.

由前節，於 p 之同值，此級數與通項爲

$$a^{n}\times\frac{1}{a^{n}(loga^{n})^{p}},\ 即\ \frac{1}{(nlog\ a)^{p}},\ 即\ \frac{1}{(log\ a)^{p}}\times\frac{1}{n_{p}}$$

之級數同爲收歛級數或同爲發散級數.

常數因子 $\frac{1}{(log\ a)^{p}}$ 爲各項所公有；故所論級數，於 p 之同值，與通項爲 $\frac{1}{n^{p}}$ 之級數同爲收歛級數或同爲發散級數. 故得所求之結果. [§ 290.]

***306.** 通項爲 u_n 之級數，其爲收歛級數或發散級數視

$$Lim\left[\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}log\ n\right]$$

之大於 1 或小於 1 而定. 以之與級數

$$1+\frac{1}{2(log\ 2)^{p}}+\frac{1}{3(log\ 3)^{p}}+\cdots\cdots\cdots\frac{1}{n(log\ n)^{p}}+\cdots\cdots\cdots$$

比較之，當 $p>1$ 時，此輔助級數爲收歛級數，由 § 299，若

$$\frac{n_n}{u_{n+1}}>\frac{(n+1)\{log(n+1)\}^{p}}{n(log\ n)^{p}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

則由所論級數爲收歛級數.

今當 n 甚大時，

$$log(n+1)=logn+\ log\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ logn+\frac{1}{n},\ (約),\ 故$$

(1) 變爲

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{nlog\ n}\right)^{p};$$

即
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{p}{nlog\ n}\right);$$

即
$$\frac{u_n}{u_{n+1}}>1+\frac{1}{n}+\frac{p}{nlog\ n};$$

或　　$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1+\frac{p}{\log n};$$

或　　$$\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n>p.$$

故命題之第一部成立．第二部分可用 §301 方法証明之．

例． 驗定級數

$$1+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^2.4^2}{3^2.5^2}+\frac{2^2.4^2.6^2}{3^2.5^2.7^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

爲收斂級數抑爲發散級數?

此處$\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{(2n+1)^2}{(2n)^2}=1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{4n^2}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=1$，進而行次之驗定法．

由(1)，　　$n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=1+\dfrac{1}{4n}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$.

$\therefore\ \lim\left\{n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=1$，進而行次之驗定法．

由 (2)，　$\left\{n\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n=\dfrac{\log n}{4n}$;

$$\therefore\ \lim\left[\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right\}\log n\right]=0,$$

因 $\lim\dfrac{\log n}{n}=0$ [§295] 也；故已知級數爲發散級數．

***307.** 在數學推理中，若引用發散級數，則引出錯誤之結論，此在 §183 業已提及，但即引用收斂級數時，亦須十分謹慎．

例如，級數

$$1-x+\frac{x^2}{\sqrt[4]{2}}-\frac{x^3}{\sqrt[4]{3}}+\frac{x^4}{\sqrt[4]{4}}-\frac{x^5}{\sqrt[4]{5}}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

當 $x=1$ 時爲收斂級數．[§280.] 但設此級數自乘，則積內 x^{2n} 之係數爲

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{2n-2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{r}.\sqrt[4]{2n-r}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[4]{2n}}.$$

以 a_{2n} 表之；於是，因

$$\frac{1}{\sqrt[4]{r}\cdot\sqrt[4]{2n-r}}>\frac{1}{(\sqrt[4]{n})^2}，\text{或}>\frac{1}{\sqrt{n}},$$

$a_{2n}>\dfrac{2n+1}{\sqrt{n}}$，故當 n 爲無窮大時，此亦爲無窮大．

設 $x=1$，則此積變爲

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots\cdots+a_{2n}-a_{2n+1}+a_{2n+2}-\cdots\cdots\cdots,$$

因 a_{2n}，a_{2n+1}，a_{2n+2}，……等項爲無限大，故此級數無算術意義．

因此吾人須考究在何種條件下，二收斂無窮級數之積亦爲收斂級數．

***308．** 設二無窮級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots+a_{2n}x^{2n}+\cdots\cdots\cdots,$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots\cdots+b_{2n}x^{2n}+\cdots\cdots\cdots,$$

以 A 及 B 表之．

設此二級數乘得之結果之形式爲

$$a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)x+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2+\cdots\cdots$$

假定此級數連續至無窮，並以 C 表之；今須考究在何種條件下，C 可視爲 AB 乘積之眞正算術等值．

先假定 A,B 之一切項皆爲正．

令 A_{2n},B_{2n},C_{2n} 表取 A,B,C 之首 $2n+1$ 項所成之級數．

若將 A_{2n} 及 B_{2n} 相乘，則 x 各次乘冪之係數同於 C 內之同次冪之係數直至 x^{2n} 之項爲止．但 A_{2n},B_{2n} 內有含高於 x^{2n} 之項，而 x^{2n} 則爲 C_{2n} 內之最高次項；故

$$A_{2n}B_{2n}>C_{2n}.$$

設作成 A_nB_n 之積，其末項爲 $a_nb_nx^{2n}$：但 C_{2n} 含有此積內之一切項及另外若干項；故

$$C_{2n}>A_nB_n.$$

故不問 n 爲何值，C_{2n} 之值介乎 A_nB_n 及 $A_{2n}B_{2n}$ 之間.

設 A 及 B 爲收斂級數；令

$$A_n=A-X,\quad B_n=B-Y,$$

此處 X 及 Y 爲級數取出 $n+1$ 項後所餘之項；於是當 n 爲無窮大時 X 及 Y 爲無限小.

$$\therefore\ A_nB_n=(A-X)(B-Y)=AB-BX-AY+XY.$$

因 A 及 B 俱爲有限值，故 A_nB_n 之極限爲 AB.

同理，$A_{2n}B_{2n}$ 之極限亦爲 AB.

故 C_{2n} 之極限 C 必等於 AB，因其介乎 A_nB_n 及 $A_{2n}B_{2n}$ 之間也.

其次，設 A 及 B 之諸項非全同號.

此時不等式 $A_{2n}B_{2n}>C_{2n}>A_nB_n$ 未必正確，故不能照前情形理論之.

設以 P,P' 表二級數之諸正項之和，以 N,N' 表二級數之諸負項之和. 由是

$$A=P-N,\quad B=P'-N'.$$

如 P,P',N,N' 各表一收斂級數，則方程式

$$AB=PP'-NP'-PN'+NN'$$

之意義極易通曉，因由命題之前部，PP'，NP'，PN'，NN' 各爲一收斂級數，故二級數 A,B 之積爲收斂級數.

故若各級數之諸同號項之和爲收斂級數，則二級數之積爲收斂級數.

但若 P,N,P',N' 各爲一發散級數（如前節，又彼處 $P'=P$，$N'=N$），於是所有 PP',NP',PN',NN' 諸式皆爲發散級數. 凡遇此種情形時，爲決定此積之是否收斂級數，對於每一特例，皆須細心研究之.

*習 題 二十一.B.

驗定下列級數爲收斂級數抑爲發散級數:

1. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^4}{8}+\frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\cdot\frac{x^6}{12}+\cdots\cdots$

2. $1+\frac{3}{7}x+\frac{3.6}{7.10}x^2+\frac{3.6.9}{7.10.13}x^3+\frac{3.6.9.12}{7.10.13.16}x^4+\cdots\cdots$

3. $x^2+\frac{2^2}{3.4}x^4+\frac{2^2.4^2}{3.4.5.6}x^6+\frac{2^2.4^2.6^2}{3.4.5.6.7.8}x^8+\cdots\cdots$

4. $1+\frac{2x}{\underline{|2}}+\frac{3^2x^2}{\underline{|3}}+\frac{4^3x^3}{\underline{|4}}+\frac{5^4x^4}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$

5. $1+\frac{1}{2}x+\frac{\underline{|2}}{3^2}x^2+\frac{\underline{|3}}{4^3}x^3+\frac{\underline{|4}}{5^4}x^4+\cdots\cdots$

6. $\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}x+\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}x^2+\cdots\cdots$

7. $$1+\frac{a(1-a)}{1^2}+\frac{(1+a)a(1-a)(2-a)}{1^2.2^2}+\frac{(2+a)(1+a)a(1-a)(2-a)(3-a)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots$$

此處 a 爲一眞分數.

8. $\frac{a+x}{1}+\frac{(a+2x)^2}{\underline{|2}}+\frac{(a+3x)^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$

9. $$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots\cdots$$

10. $x^2(\log 2)^q+x^3(\log 3)^q+x^4(\log 4)^q+\cdots\cdots$

11. $1+a+\frac{a(a+1)}{1.2}+\frac{a(a+1)(a+2)}{1.2.3}+\cdots\cdots$

12. 設 $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{n^k+An^{k-1}+Bn^{k-2}+Cn^{k-3}+\cdots\cdots}{n^k+an^{k-1}+bn^{k-2}+cn^{k-3}+\cdots\cdots}$，其 k 爲正整數，試證，若 $A-a-1$ 爲正，則級數 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots$ 爲收斂級數，若 $A-a-1$ 爲負或零，則爲發散級數.

第二十二章

不定係數法

309. 在初級代數 § 230，曾證明若 x 之有理函數當 $x=a$ 時之值爲零，則此函數可爲 $x-a$ 除盡. [又見 § 514，推論].

設 $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n$

爲 x 之 n 次有理函數，當 x 等於

$$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots\cdots a_n$$

等不等值時爲零.

以 $f(x)$ 表此函數，因 $f(x)$ 能爲 $x-a_1$ 除盡，故得

$$f(x)=(x-a_1)(p_0x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots),$$

商式爲 $n-1$ 次式.

同理，因 $f(x)$ 能爲 $x-a_2$ 除盡，得

$$p_0x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots=(x-a_2)(p_0x^{n-2}+\cdots\cdots),$$

此商式爲 $n-2$ 次式；又

$$p_0x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots=(x-a_3)(p_0x^{n-3}+\cdots\cdots),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

仿此進行，經過 n 次施除後，得

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots(x-a_n).$$

310. n 次之有理整函數，若其變數有 n 個以上之值能使之爲

零,則其變數之各次冪之係數必均爲零.

設以 $f(x)$ 表此函數,於是

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots p_n;$$

設 $f(x)$ 當 x 等於 $a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots\cdots a_n$ 各不等值時爲零;則

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots\cdots\cdots(x-a_n).$$

設有另一值 c, 亦能使 $f(x)$ 爲零,於是 $f(c)=0$, 而

$$p_0(c-a_1)(c-a_2)(c-a_3)\cdots\cdots\cdots(c-a_n)=0;$$

由假設, p_0 外之因子均不爲零,故 $p_0=0$. 而 $f(x)$ 變爲

$$p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+p_n.$$

由假設, x 有 n 個以上之値能使此式爲零,故 $p_1=0$.

同法可證 $p_2,p_3,\cdots\cdots p_n$ 各係數必均等於零.

此結果亦可述之如下:

n 次之有理整函數,其變量若有 n 個以上之値使之爲零,則其必於變量之任何値均爲零.

推論. 若函數 $f(x)$ 於 x 之 n 個以上之値爲零,則方程式 $f(x)=0$ 有 n 個以上之根.

如是,若 n 次方程式有 n 個以上之根,則此方程式爲恒等式.

例. 求証

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

此爲二次方程式,顯然爲 a,b,c 三値所適合,故爲恒等式.

311. 若二 n 次有理整函數於其變數之 n 個以上之値相等,則於其變數之任何値均相等.

設二函數

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n,$$

$$q_0x^n+q_1x^{n-1}+q_2x^{n-2}+\cdots\cdots+q_n,$$

於 x 之 n 個以上之値相等; 則 x 有 n 個以上之値能使

$$(p_0-q_0)x^n+(p_1-q_1)x^{n-1}+(p_2-q_2)x^{n-2}+\cdots\cdots+(p_n-p_n)$$

爲零；故由前節

$$p_0-q_0=0,\ p_1-q_1=0,\ p_2-q_2=0,\cdots\cdots p_n-q_n=0;$$

即，$p_0=q_0,\ p_1=q_1,\ p_2=q_2,\cdots\cdots p_n=q_n$.

故此二式恆等，由是於變數之任何值均等．故

若二有理整函數恆等，則可等置其變數之同次冪之係數．

此爲在初級代數 §227 假定之原則．

推論．一函數之次數低於他函數之次時，此命題仍然適用．例如，若

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots+p_n$$
$$=q_2x^{n-2}+q_3x^{n-3}+\cdots\cdots\cdots+q_n,$$

則僅假定 $q_0=0,\ q_1=0$，即得

$$p_0=0,\ p_1=0,\ p_2=q_2,\ p_3=q_3,\cdots\cdots p_n=q_n.$$

312. 前節定理即通常所謂未定係數原則．此原則之應用以下例說明之．

例 1．　求下級數之和．

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots+n(n+1).$$

設

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)=A+Bn+Cn^2+Dn^3+En^4+\cdots\cdots$$

其中 A,B,C,D,E 均不含 n，其値爲待決定者．

以 $n+1$ 代 n 於是

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots+n(n+1)+(n+1)(n+2)$$
$$=A+B(n+1)+C(n+1)^2+D(n+1)^3+E(n+1)^4+\cdots$$

由減法，

$$(n+1)(n+2)=B+C(2n+1)+D(3n^2+3n+1)+E(4n^3+6n^2+4n+1)+\cdots\cdots$$

此方程式於 n 之一切整數値皆眞，其兩邊之 n 之各同次冪之係數相等；故 E 及其後之一切係數必等於零，且

$$3D=1;\ 3D+2C=3;\ D+C+B=2;$$

因此　　$D=\frac{1}{3},\ C=1,\ B=\frac{2}{3}.$

故其和 $=A+\frac{2n}{3}+n^2+\frac{1}{3}n^3.$

求 A，令 $n=1$；於是此級數即爲其首項，而

$$2=A+2,\ 或\ A=0.$$

故 $1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

註. 由此例可知，若第 n 項爲 n 之有理整函數，則假定級數和爲較其第 n 項高一次之有理整函數即可.

例 2. 求 x^3+px^2+qx+r 可爲 x^2+ax+b 除盡之條件.

設 $x^3+px^2+qx+r=(x+k)(x^2+ax+b)$.

等置 x 之同次冪之係數，得

$$k+a=p,ak+b=q,\quad kb=r.$$

由第三方程式得 $k=\frac{r}{b}$；代入第一二兩方程式，得

$\frac{r}{b}+a=p$，及 $\frac{ar}{b}+b=q$；

即 $r=b(p-a)$，及 $ar=b(q-b)$；

此即所求之條件.

習 題 二十二. A.

用不定係數法求下列各級數之和.

1. $1^2+3^2+5^2+7^2+\cdots\cdots$ 至 n 項.
2. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots$ 至 n 項.
3. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+4.5^2+\cdots\cdots$ 至 n 項.
4. $1^3+3^3+5^3+7^3+\cdots\cdots$ 至 n 項.
5. $1^4+2^4+3^4+4^4+\cdots\cdots$ 至 n 項.
6. 求 $x^3-3px+2q$ 能被 $x^2+2ax+a^2$ 形式之因子除盡之條件.
7. 求 ax^3+bx^2+cx+d 爲完全立方之條件.
8. 求 $a^2x^4+bx^3+cx^2+dx+f^2$ 爲完全平方之條件.
9. 設 $b^2=ac,d^2=af,e^2=cf$，求證 $ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$ 爲完全平方.

10. 設 ax^3+bx^2+cx+d 能被 x^2+h^2 除盡，試證 $ad=bc$.

11. 設 $x^5-5qx+4r$ 能被 $(x-c)^2$ 除盡，試證 $q^5=r^4$.

12. 試證恆等式

(1) $$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

(2) $$\frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(x-c)(x-d)(x-a)}{(b-c)(b-d)(b-a)}$$
$$+\frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1.$$

13. 求 $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ 爲形如
$$px+qy+r,\ 及\ p'x+q'y+r'$$
二因子之積之條件.

14. 設 $\xi=lx+my+nz$，$\eta=nx+ly+mz$，$\zeta=mx+ny+lz$，又設 ξ、η，ζ 與 x,y,z 互換後，此等方程式於 x,y,z 之一切值皆能成立，試證
$$l^2+2mn=1,\ m^2+2ln=0,\ n^2+2lm=0.$$

15. 設有 n 量 $a,a^2,a^3,\cdots\cdots\cdots a^n$，試證其 $n-r$ 元之積之和爲
$$\frac{(a^{r+1}-1)(a^{r+2}-1)\cdots\cdots(a^n-1)}{(a-1)(a^2-1)\cdots\cdots(a^{n-r}-1)}a^{\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)}.$$

313. 設無窮級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$，於 x 使之爲斂級數之一切有限值均等於零，則其各項係數必恆等於零.

設以 S 表此級數，以 S_1 表 $a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots$ 則 $S=a_0+xS_1$，由是，由假設，於 x 之一切有限值，$a_0+xS_1=0$. S 既爲收斂級數，S_1 自不能大過某有限值，故取 x 爲充分小量，可使 xS_1 小至適意之程度. 此時 S 之極限爲 a_0；但 S 永遠爲零，故 a_0 必恆等於零.

取消 a_0 項，得於 x 之一切有限值，$xS_1=0$，即 x 之一切有限值，皆能使 $a_1+a_2x+a_3x^2+\cdots\cdots\cdots$ 等於零.

同法，可依次證明 $a_1,a_2,a_3\cdots\cdots$ 等係數恆等於零.

314. 設兩無窮級數於變數使二者收斂之一切有限值互等，則兩級數之變數之同次冪之係數必相等.

設此兩級數為

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

及
$$A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots\cdots\cdots;$$

則

$$a_0-A_0+(a_1-A_1)x+(a_2-A_2)x^2+(a_3-A_3)x^3+\cdots\cdots\cdots$$

於 x 在指定限內之一切值均等於零；是以由上節

$$a_0-A_0=0,\ a_1-A_1=0,\ a_2-A_2=0,\ a_3-A_3=0,\cdots\cdots$$

即
$$a_0=A_0,\ a_1=A_1,\ a_2=A_2,\ a_3=A_3,\cdots\cdots\cdots$$

此即證明本命題.

例 1. 試將 $\dfrac{2+x^2}{1+x-x^2}$ 展開為 x 之升冪級數至 x^5 之項止.

設
$$\frac{2+x^2}{1+x-x^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots$$

其 $a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots$ 為待定值之常數；則

$$2+x^2=(1+x-x^2)(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots).$$

此方程式可等置兩邊各同次冪之係數. 右邊 x^n 之係數為 $a_n+a_{n-1}-a_{n-2}$，左邊 x 之最高次冪既為 x^2，故凡於 $n>2$ 之值，均得

$$a_n+a_{n-1}-a_{n-2}=0.$$

既得首三係數後，一切其他係數，均可用此方程求得之. 決定此等係數，得方程式

$$a_0=2,\ a_1+a_0=0,\ a_2+a_1-a_0=1;$$

由是
$$a_0=2,\ a_1=-2,\ a_2=5.$$

又
$$a_3+a_2-a_1=0,\ 得\ a_3=-7;$$

$$a_4+a_3-a_2=0,\ 得\ a_4=12;$$

$$a_5+a_4-a_3=0,\ 得\ a_5=-19;$$

故
$$\frac{2+x^2}{1+x-x^2}=2-2x+5x^2-7x^3+12x^4-19x^5+\cdots$$

例 2. 設 n 及 r 爲正整數,試證

$$n^r-n(n-1)^r+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}(n-2)^r-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}(n-3)^r+\cdots$$

當 $r<n$ 時等於 0,當 $r=n$ 時,等於 $\lfloor\underline{n}$.

已知 $(e^x-1)^n=\left(x+\frac{x^2}{\lfloor\underline{2}}+\frac{x^3}{\lfloor\underline{3}}+\frac{x^4}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\cdots\right)^n$

$=x^n+$ 含 x 較高次冪之項…………………(1).

又,由二項式定理,

$$(e^x-1)^n=e^{nx}-ne^{(n-1)x}+\frac{n(n-1)}{1.2}e^{(n-1)x}-\cdots\cdots\cdots \quad (2).$$

展開 $e^{nx}, e^{(n-1)x},\cdots\cdots$ 各項,求得 (2) 內 x^r 之係數爲

$$\frac{n^r}{\lfloor\underline{r}}-n.\frac{(n-1)^r}{\lfloor\underline{r}}+\frac{n(n-1)}{\lfloor\underline{2}}.\frac{(n-2)^r}{\lfloor\underline{r}}-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor\underline{3}}.\frac{(n-3)^r}{\lfloor\underline{r}}+\cdots\cdots$$

等置 (1),(2) 內 x^r 之係數即得所求之結果.

例 3. 設 $y=ax+bx^2+cx^3+\cdots\cdots\cdots$

試以 y 之升冪函數表 x 至含 y^3 之項.

設 $x=py+qy^2+ry^3+\cdots\cdots,$

代入已知級數; 得

$$y=a(py+qy^2+ry^3+\cdots)+b(py+qy^2+\cdots)^2$$
$$+c(py+qy^2+\cdots)^3+\cdots\cdots$$

等置 y 之同次冪之係數,得

$$ap=1;\ 由是\ p=\frac{1}{a}.$$

$$aq+bp^2=0;\ 由是\ q=-\frac{b}{a^3}.$$

$$ar+2bpq+cp^3=0;\ 由是\ r=\frac{2b^2}{a^5}-\frac{c}{a^4}.$$

故 $$x=\frac{y}{a}-\frac{by^2}{a^3}+\frac{(2b^2-ac)y^3}{a^5}+\cdots\cdots\cdots$$

此爲反示級數法 (*Reversion of Series*) 之一例.

推論. 設 y 之級數之形式爲

$$y=k+ax+bx^2+cx^3+\cdots\cdots$$

令 $$y-k=z;$$

於是 $$z=ax+bx^2+cx^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此 x 可依 z 之升冪,即 $y-k$ 之升冪展開之.

習 題 二十二. B.

按照 x 之升冪展開下式至含 x^3 之項.

1. $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$.   2. $\dfrac{1-8x}{1-x-6x^2}$.   3. $\dfrac{1+x}{2+x+x^2}$.

4. $\dfrac{3+x}{2-x-x^2}$.   5. $\dfrac{1}{1+ax-ax^2-x^3}$.

6. 設欲$\dfrac{a+bx}{(1-x)^2}$之展開式之第 n 項爲 $(3n-2)x^{n-1}$. 試求 a 及 b 之值當爲何.

7. 設欲$\dfrac{a+bx+cx^2}{(1-x)^3}$之展開式內 x^n 之係數爲 n^2+1, 試求 a, b,c, 之值當爲何?

8. 設 $y^2+2y=x(y+1)$, 試證 y 之一値爲

$$\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{128}x^4+\cdots\cdots$$

9. 設 $cx^3+ax-y=0$, 試證 x 之一値爲

$$\frac{y}{a}-\frac{cy^3}{a^4}+\frac{3c^2y^5}{a^7}-\frac{12c^3y^7}{a^{10}}\cdots\cdots\cdots$$

據此證 $x=.00999999$ 爲方程式 $x^3+100\ x-1=0$ 之近似根.此根正確至幾位小數?

10. 設$(1+x)(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)\cdots\cdots$之展開式有無限個因子,且 $a<1$, 試證 x^2 之係數爲

$$\frac{1}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)\cdots\cdots(1-a^r)}a^{\frac{1}{2}r(r-1)}.$$

11. 設 $a<1$, 求

$$\frac{1}{(1-ax)(1-a^2x)(1-a^3x)\cdots\cdots\text{至無窮}}$$

之展開式內之 x^n 之係數.

12. 設 n 爲正整數,試證級數展至 n 項時

(1) $n^{n+1}-n(n-1)^{n+1}+\dfrac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^{n+1}-\cdots\cdots=\frac{1}{2}n\,\underline{|n+1}$;

(2) $n^n-(n+1)(n-1)^n+\dfrac{(n+1)n}{\underline{|2}}(n-2)^n-\cdots\cdots=1$;

又級數展至 $n+1$ 項時;

(3) $1^n-n2^n\dfrac{n(n-1)}{1.2}3^n-\cdots\cdots=(-1)^n\underline{|n}$;

(4) $(n+p)^n-n(n+p-1)^n+\dfrac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n+p-2)^n-\cdots=\underline{|n}$.

第二十三章

部分分數

315. 在初等代數內，用加減號連合之諸分數，可合爲一個分數，此分數之分母爲諸已知分數之最低公分母．其反運算，即將一分數析爲若干較簡，或部分分數之運算，亦時常需要；例如，設欲將$\frac{3-5x}{1-4x+3x^2}$展爲 x 之升冪級數，用 §314 例 1 之方法，可求得任若干項．但若求此級數之通項，則此法不能適用，其最簡之方法，乃將已知分數化爲等值式$\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-3x}$．今 $(1-x)^{-1}$ 及 $(1-3x)^{-1}$ 均可用二項式定理展開，而通項由是可得矣．

316. 本章將舉數例，以說明將一有理分數析爲若干部分分數之方法．至於詳細討論，讀者可參考雪氏高等代數學 (*Serret's Cours d'Algebre Superieure*)，或積分學．其中證明任一有理分數可析爲若干部分分數；分母每有一個一次因子 $x-a$，即有一個形如$\frac{A}{x-a}$之部分分數與之相當；分母中每有兩個一次因子 $x-b$，即有兩個部分分數$\frac{B_1}{x-b}$ 及 $\frac{B_2}{(x-b)^2}$與之相當．若分母有三個$x-b$之因子，必又多一部分分數$\frac{B_3}{(x-b)^3}$；類推．對於任一二次因子x^2+Px+Q，有一形爲$\frac{Px+Q}{x^2+Px+Q}$之部分分數與之相當；若因子 x^2+Px+Q 有兩個，則又有一第二部分分數$\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+Px+Q)^2}$與之相當；類推．

此處 $A_1, B_1, B_2, B_3, \cdots$; P, Q, P_1, Q_1 皆不含 x.

下列諸例，即利用此等結果.

例1. 將$\dfrac{5x-11}{2x^2+x-6}$析爲部分分數.

今分母 $2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$，假定

$$\frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{2x-3},$$

其 A 及 B 均不含 x，其值爲待決定者.

消去分母，

$$5x-11=A(2x-3)+B(x+2).$$

此爲恒等式，可等置 x 之同次冪之係數；因是

$$2A+B=5, -3A+2B=-11;$$

由是 $$A=3,\ B=-1.$$

$$\therefore\quad \frac{5x-11}{2x^2+x-6}=\frac{3}{x+2}-\frac{1}{2x-3}.$$

例2. 將$\dfrac{mx+n}{(x-a)(x+b)}$析爲部分分數.

假定 $$\frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x+b}.$$

$$\therefore mx+n=A(x+b)+B(x-a) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

A, B 之值，可等置係數以求得之，但不及下法簡便.

因 A 及 B 不含 x，故 x 可爲任意之值.

令 (1) 內 $x-a=0$，或 $x=a$；得

$$A=\frac{ma+n}{a+b},$$

令 $x+b=0$，或 $x=-b$，得

$$B=\frac{mb-n}{a+b}.$$

$$\therefore\quad \frac{mx+n}{(x-a)(x+b)}=\frac{1}{a+b}\left(\frac{ma+n}{x-a}+\frac{mb-n}{x+b}\right).$$

例 3. 將 $\dfrac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}$ 析爲部分分數.

假定 $$\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(3+x)(3-x)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{3+x}+\frac{C}{3-x}\cdots\cdots(1);$$

$\because\ 23x-11x^2=A(3+x)(3-x)+B(2x-1)(3-x)+C(2x-1)(3+x).$

依次令 $2x-1=0,\ 3+x=0,\ 3-x=0$, 得

$$A=1,\ B=4,\ C=-1.$$

$$\therefore\frac{23x-11x^2}{(2x-1)(9-x^2)}=\frac{1}{2x-1}+\frac{4}{3+x}-\frac{1}{3-x}.$$

例 4. 將 $\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$ 析爲部分分數.

假定 $$\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=\frac{A}{1-2x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2^2)};$$

$\therefore\ 3x^2+x-2=A(x-2)^2+B(1-2x)(x-2)+C(1-2x).$

令 $1-2x=0$, 得 $\quad A=-\dfrac{1}{3};$

令 $x-2=0$, 得 $\quad C=-4.$

等置 x^2 之係數; 得

$$3=A-2B;\ \text{因之}\ B=-\frac{5}{3}.$$

$$\therefore\ \frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=-\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}.$$

例 5. 將 $\dfrac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}$ 析爲部分分數.

假定 $$\frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-4};$$

$$\therefore\ 42-19x=(Ax+B)(x-4)+C(x^2+1).$$

令 $x=4$, 得 $\quad C=-2;$

等置 x^2 之係數, 得 $\quad 0=A+C,\ A=2;$

等置絕對項, 得 $\quad 42=-4B+C,\ B=-11,$

$$\therefore\ \frac{42-19x}{(x^2+1)(x-4)}=\frac{2x-11}{x^2+1}-\frac{2}{x-4}.$$

317. 有時須用下例之方法.

例．將 $\frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}$ 析爲部分分數．

假定 $\frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{f(x)}{(x-2)^4}$,

其中 A 爲常量，$f(x)$ 爲 x 之待定值之函數．

$$\therefore\quad 9x^3-24x^2+48x=A(x-2)^4+(x+1)f(x).$$

令 $x=-1$，得　　$A=-1$.

以 -1 代 A，移項，得

$$(x+1)f(x)=(x-2)^4+9x^3-24x^2+48x=x^4+x^3+16x+16;$$

$$\therefore\quad f(x)=x^3+16.$$

令 $x-2=z$，求與 $\frac{x^3+16}{(x-2)^4}$ 相當之部分分數，得

$$\frac{x^3+16}{(x-2)^4}=\frac{(z+2)^3+16}{z^4}=\frac{z^3+6z^2+12z+24}{z^4}$$

$$=\frac{1}{z}+\frac{6}{z^2}+\frac{12}{z^3}+\frac{24}{z^4}$$

$$=\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

$$\therefore\quad \frac{9x^3-24x^2+48x}{(x-2)^4(x+1)}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}+\frac{12}{(x-2)^3}+\frac{24}{(x-2)^4}.$$

318. 前舉諸例，分子之次數皆低於分母，若高於分母，可以分母除分子，除至餘式之次數低於分母止．

例．將 $\frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}$ 析爲部分分數．

由除法，

$$\frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}=2x+3+\frac{8x-4}{3x^2-2x-1};$$

$$\frac{8x-4}{3x^2-2x-1}=\frac{5}{3x+1}+\frac{1}{x-1};$$

$$\therefore\quad \frac{6x^3+5x^2-7}{3x^2-2x-1}=2x+3+\frac{5}{3x+1}+\frac{1}{x-1}.$$

319. 茲說明何以析爲部分分數，可將有理分數依 x 升冪之展開化簡．

例1.　求$\dfrac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}$當展開爲 x 之升冪級數時之通項.

由 §316 例4，得

$$\frac{3x^2+x-2}{(x-2)^2(1-2x)}=-\frac{1}{3(1-2x)}-\frac{5}{3(x-2)}-\frac{4}{(x-2)^2}$$
$$=-\frac{1}{3(1-2x)}+\frac{5}{3(2-x)}-\frac{4}{(x-2)^2}$$
$$=-\frac{1}{3}(1-2x)^{-1}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}.$$

故此展開式之通項爲

$$\left(-\frac{2^r}{3}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2^r}-\frac{r+1}{2^r}\right)x^r.$$

例2.　按照 x 之升冪展開$\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$，並求其通項.

假定　$$\frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2};$$

$$\therefore\quad 7+x=A(1+x^2)+(Bx+C)(1+x).$$

令 $1+x=0$，　　得 $A=3$；

等置絕對項，得 $7=A+C$，　　由是 $C=4$；

等置 x^2 之係數，得 $0=A+B$，　由是 $B=-3$，

$$\therefore\quad \frac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{3}{1+x}+\frac{4-3x}{1+x^2}$$
$$=3(1+x)^{-1}+(4-3x)(1+x^2)^{-1}$$
$$=3\{1-x+x^2-\cdots\cdots\cdots+(-1)^px^p+\cdots\}$$
$$+(4+3x)\{1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^px^{2p}+\cdots\}.$$

求 x^r 之係數：

(1)　若 r 爲偶數，則第二級數內 x^r 之係數爲 $4(-1)^{\frac{r}{2}}$；因是此展開式內 x^r 之係數爲 $3+4(-1)^{\frac{r}{2}}$.

(2)　若 r 爲奇數，則第二級數內 x^r 之係數爲 $-3(-1)^{\frac{r-1}{2}}$；而所求係數爲 $3(-1)^{\frac{r+1}{2}}-3$.

習　題　二十三.

將下列各分數析爲部分分數：

1.　$\dfrac{7x-1}{1-5x+6x^2}$.　2.　$\dfrac{46+13x}{12x^2-11x-15}$.　3.　$\dfrac{1+3x+2x^2}{(1-2x)(1-x^2)}$.

4. $\dfrac{x^2-10x+13}{(x-1)(x^2-5x+6)}$.　　5. $\dfrac{2x^3+x^2-x-3}{x(x-1)(2x+3)}$.

6. $\dfrac{9}{(x-1)(x+2)^2}$.　　7. $\dfrac{x^4-3x^3-3x^2+10}{(x+1)^2(x-3)}$.

8. $\dfrac{26x^2+208x}{(x^2+1)(x+5)}$.　　9. $\dfrac{2x^2-11x+5}{(x-3)(x^2+2x-5)}$.

10. $\dfrac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$.　　11. $\dfrac{5x^3+6x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^3}$.

求下列各式當依 x 之升冪展開時之通項.

12. $\dfrac{1+3x}{1+11x+28x^2}$.　　13. $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$.　　14. $\dfrac{x^2+7x+3}{x^2+7x+10}$.

15. $\dfrac{2x-4}{(1-x^2)(1-2x)}$.　　16. $\dfrac{4+3x+2x^2}{(1-x)(1+x-2x^2)}$.

17. $\dfrac{3+2x-x^2}{(1+x)(1-4x)^2}$.　　18. $\dfrac{4+7x}{(2+3x)(1+x)^2}$.

19. $\dfrac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$.　　20. $\dfrac{1-x+2x^2}{(1-x)^3}$.

21. $\dfrac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)}$.　　22. $\dfrac{3-2x^2}{(2-3x+x^2)^2}$.

23. 求下列各級數之 n 項之和

(1) $\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)}+\dfrac{x}{(1+x^2)(1+x^3)}+\dfrac{x^2}{(1+x^3)(1+x^4)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{x(1-ax)}{(1+x)(1+ax)(1+a^2x)}+\dfrac{ax(1-a^2x)}{(1+ax)(1+a^2x)(1+a^3x)}+\cdots$

24. 求下列各無窮級數當 $x<1$ 時之和.

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)}+\frac{x^2}{(1-x^3)(1-x^5)}+\frac{x^4}{(1-x^5)(1-x^7)}+\cdots\cdots$$

25. 求級數之 n 項之和，設其第 p 項爲

$$\frac{x^p(1+x^{p+1})}{(1-x^p)(1-x^{p+1})(1-x^{p+2})}.$$

26. 求證 a,b,c 三字母及其乘冪所成 n 次齊次積之和爲

$$\frac{a^{n+2}(b-c)+b^{n+2}(c-a)+c^{n+2}(a-b)}{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}.$$

第二十四章

循環級數

320. 設有級數 $u_0+u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots$,

從某項起以後,每項均等於其前定數項分別乘以定常數之積之和,則名此級數曰循環級數.

321. 級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

在第二項以後每項均等於其前兩項分別乘以常數 $2x$ 及 $-x^2$ 之積之和;所以稱 $2x$ 及 $-x^2$ 爲常量者,因其不論 n 爲何值永遠相同也.如

$$5x^4=2x.4x^3+(-x^2).3x^2;$$

即
$$u_4=2xu_3-x^2u_2;$$

總之當 n 大於 1 時,每項與其前二項之關係爲

$$u_n=2xu_{n-1}-x^2u_{n-2},$$

或
$$u_n-2xu_{n-1}+x^2u_{n-2}=0.$$

在此方程式內,u_n, u_{n-1}, u_{n-2} 之係數連同符號,構成所謂關係式 (*Scale of relation*).

如級數

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots\cdots$$

爲循環級數,其關係式爲

$$1-2x+x^2.$$

322. 若已知循環級數之關係式,則當任一項前足用項數已知時,即可求得該項.因不論關係式含若干項,其方法恆同,故下例足以說

明一切.

設
$$1-px-qx^2-rx^3$$
爲級數
$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
之關係式,則
$$a_nx^n=px\cdot a_{n-1}x^{n-1}+qx^2\cdot a_{n-2}x^{n-2}+rx^3\cdot a_{n-3}x^{n-3},$$
即
$$a_n=pa_{n-1}+qa_{n-2}+ra_{n-3}.$$

故若已知任一數係前數項之係數時,則該係數可以求得.

323. 反之,級數之充分項數已知時,其關係式亦可求得.

例. 求循環級數 $2+5x+13x^2+35x^3+\cdots\cdots$之關係式.

設其關係式爲 $1-px-qx^2$; 定 p 及 q, 得方程式 $13-5p-2q=0$, 及 $35-13p-5q=0$, 解之得 $p=5$, $q=-6$, 故所求關係式爲
$$1-5x+6x^2.$$

324. 三項關係式,含有二常數 p 及 q,定 p 及 q 必須有兩方程式. 求第一方程式至少須知級數之三項, 求第二方程式則須再多知一項.故求含二常數之關係式,至少須知級數之四項.

關係式若爲 $1-px-qx^2-rx^3$, 則定三常量,必須有三個方程式. 求第一方程式至少須知級數之 4 項,求其他二者,必須再多知兩項; 故求含三常數之關係式,至少須知級數之六項.

一般言之,求含 m 常數之關係式,至少須知 $2m$ 個連續項.

反之,設已知 $2m$ 個連續項,則其關係式可假定爲
$$1-p_1x-p_2x^2-p_3x^3-\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots-p_mx^m.$$

325. 求循環級數 n 項之和．

不論關係式爲何，求和之方法皆同；爲簡便計，假定關係式含二常數．

設此級數爲

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又設其和爲 S；設其關係式爲 $1-px-qx^2$；因此對於 n 之大於 1 之各値，得

$$a_n-pa_{n-1}-qa_{n-2}=0.$$

$$\begin{aligned}
\text{今}\ S&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1},\\
-px\ S&=\quad -pa_0x-pa_1x^2-\cdots-pa_{n-2}x^{n-1}-pa_{n-1}x^n,\\
-qx^2\ S&=\qquad\qquad -qa_0x^2-\cdots-qa_{n-3}x^{n-1}-qa_{n-2}x^n-qa_{n-1}x^{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\therefore(1-px-qx^2)S=a_0+(a_1-pa_0)x-(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n-pa_{n-1}x^{n+1},$$

蓋因 $a_n-pa_{n-1}-qa_{n-2}=0$ 之關係，x 之他次冪之係數爲零也．

$$\therefore S=\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}-\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2}.$$

故循環級數之和爲以關係式爲分母之分數．

326. 若上節結果內之第二分數，當 n 無限增大時而無限減小，則級數之無窮項之和變爲 $\dfrac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$．

照 § 314 所示，依 x 之升冪展開此分數，可求得原級數之任若干項；因此，稱

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$$

爲此級數之母函數．

327. 由 § 325 之結果可得

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$
$$+\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2};$$

故知雖用母函數

$$\frac{a_0+(a_1-pa_0)x}{1-px-qx^2}$$

可求得級數之任若干項，但非當 n 無限增大時而餘式

$$\frac{(pa_{n-1}+qa_{n-2})x^n+qa_{n-1}x^{n+1}}{1-px-qx^2}$$

變零時，不能以此母函數爲無窮級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$ 之眞正等值.

328. 若母函數能析爲部分分數，則此循環級數之通項甚易求得. 例如，設母函數能析爲部分分數

$$\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1+bx}+\frac{C}{(1-cx)^2}.$$

則其通項爲

$$\{Aa^r+(-1)^rBb^r+(r+1)Cc^r\}x^r.$$

此時可不用 § 325 方法，而求得 n 項之和.

例. 求循環級數

$$1-7x-x^2-43x^3-\cdots\cdots$$

之母函數，通項，及 n 項之和.

設其關係式爲 $1-px-qx^2$；於是

$$-1+7p-q=0,\quad -43+p+7q=0;$$

由是 $p=1$，$q=6$；而其關係式爲

$$1-x-6x^2.$$

以 S 表此級數之和；則

$$\begin{aligned} S&=1-7x-x^2-43x^3-\cdots\cdots\\ -xS&=\quad\; -x+7x^2+x^3+\cdots\cdots\\ -6x^2S&=\qquad\qquad -6x^2+42x^3+\cdots\cdots\end{aligned}$$

$$\therefore\ (1-x-6x^2)\,S=1-8x,$$

$$S=\frac{1-8x}{1-x-6x^2};$$

此即所求之母函數.

析　$\dfrac{1-8x}{1-x-6x^2}$爲部分分數，得$\dfrac{2}{1+2x}-\dfrac{1}{1-3x}$；由是其第 $r+1$ 項或通項爲

$$\{(-1)^r 2^{r+1}-3^r\}x^r.$$

令　$$r=0,1,2\cdots\cdots n-1,$$

其 n 項和

$$=\{2-2^2x+2^3x^2-\cdots+(-1)^{n-1}2^n x^{n-1}\}-(1+3x+3^2x^2+\cdots$$
$$\cdots+3^{n-1}x^{n-1})$$
$$=\frac{2+(-1)^{n-1}2^{n+1}x^n}{1+2x}-\frac{1-3^n x^n}{1-3x}.$$

329. 欲求循環級數 $a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots$之通項及 n 項和，僅須求級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$之通項及 n 項，再令結果內之 $x=1$ 即得.

例.　求級數

$$1+6+24+84+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之通項及 n 項和.

級數 $1+6x+24x^2+84x^3+\cdots\cdots$之關係式爲 $1-5x+6x^2$，其母函數爲$\dfrac{1+x}{1-5x+6x^2}$.

將此式析爲部分分數，得

$$\frac{4}{1-3x}-\frac{3}{1-2x}.$$

按照 x 之升冪展開此式，其通項爲

$$(4\cdot3^r-3\cdot2^r)x^r.$$

故題設級數之通項爲 $4\cdot3^r-3\cdot2^r$；其 n 項和爲

$$2(3^n-1)-3(2^n-1).$$

330. 吾人於此重新喚起學者之注意，上節級數 $1+6x+24x^2+84x^3+\cdots\cdots$之母函數，除 x 有使此級數爲收歛級數之值外，不能取爲此級數之和.故當 $x=1$ 時（此時此級數顯然爲發散級數）其母函數並非此級數之眞正等值. 但 $1+6+24+84+\cdots\cdots$之通項不含 x，不論 x 爲何值此恒爲 $1+6x+24x^2+84x^3+\cdots\cdots$內 x^n 之係數.

故吾人以收歛級數處理之，而用常法求得其通項，然後令 $x=1$.

習　題　二十四

求下列各級數之母函數及其通項:

1. $1+5x+9x^2+13x^3+\cdots\cdots$　　2. $2-x+5x^2-7x^3+\cdots\cdots$

3. $2+3x+5x^2+9x^3+\cdots\cdots$　　4. $7-6x+9x^3+27x^4+\cdots$

5. $3+6x+14x^2+36x^3+98x^4+276x^5+\cdots\cdots$

求下列各級數之第 n 項及 n 項之和:

6. $2+5+13+35+\cdots\cdots$　　7. $-1+6x^2+30x^3+\cdots\cdots$

8. $2+7x+25x^2+91x^3+\cdots\cdots$

9. $1+2x+6x^2+20x^3+66x^4+212x^5+\cdots\cdots$

10. $-\dfrac{3}{2}+2+0+8+\cdots\cdots$

11. 指明下列各級數爲循環級數,並求其關係式:

(1) $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2$,

(2) $1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots\cdots+n^3$.

12. 指出如何從循環級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

之無窮項之和推出首 n 項之和.

13. 求級數

$$3-1+13-9+41-53+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之 $2n+1$ 項之和.

14. 循環級數

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots\cdots$$

及

$$b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots\cdots$$

之關係式爲 $1+px+qx^2$ 及 $1+rx+sx^2$; 試證通項爲 $(a_n+b_n)x^n$ 之級數爲循環級數,其關係式爲

$$1+(p+r)x+(q+s+pr)x^2+(qr+ps)x^3+qsx^4.$$

15. 設作成一級數,其第 n 項爲已知級數之 n 項和.試證此級數亦爲一循環級數,其關係式之項數較已知級數者多一.

第二十五章

連分數

331. 形如 $a+\cfrac{b}{c+\cfrac{d}{e+\cdots}}$ 之分式稱為連分數;其中字母 $a, b, c\cdots$ 可表任何數．今僅討論簡單之連分數 $a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}$ 其中 $a_1, a_2, a_3\cdots$ 僅表正整數．通常將此寫為較簡縮之形式

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots$$

332. 當 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\cdots$ 諸商之個數為有限時,稱此連分數為有限連分數；當諸商之個數為無限時，稱為無窮連分數．

凡有限連分數，均可從最下層起依次化簡，將其化為普通分數．

333. 將已知分數化為連分數．

設 $\frac{m}{n}$ 為已知分數；以 n 除 m，設 a_1 為商，p 為餘數；由是

$$\frac{m}{n}=a_1+\frac{p}{n}=a_1+\frac{1}{\frac{n}{p}};$$

以 p 除 n，設商爲 a_2，餘數爲 q；由是

$$\frac{n}{p}=a_2+\frac{q}{p}=a_2+\frac{1}{\frac{p}{q}};$$

以 q 除 p，設商爲 a_3，餘數爲 r；類推．由是

$$\frac{m}{n}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}=a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

若 m 小於 n，則初商爲零，令

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{\frac{n}{m}}$$

再照前法進行之．

上法與求 m 及 n 之最大公約數之方法相同；故 m 及 n 若爲可通約量，則最後必有除盡之一步，演算亦於是終止．是以凡分子分母爲正整數之分數，皆能化爲有限連分數．

例． 變$\frac{251}{802}$爲連分數．

用常法求 251 及 802 之最大公約數，

5	251	802	3
6	6	49	8
		1	

其各連續商數爲 3,5,8,6；故

$$\frac{251}{802}=\frac{1}{3+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{8+}\,\frac{1}{6}.$$

334. 連分數止於第一次，第二次，第三次，商所得之分數名曰一次，二次，三次，……近值，因 §339 將證明各連續近值較其前之任一近值均較近於此連分數之眞値也．

335. 證明諸近値更迭的小於及大於此連分數之値.

設此連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}$…………

其一次近値爲 a_1，因 $\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}$……部分被略去*，故太小．其二次近値爲 $a_1+\frac{1}{a_2}$，因分母 a_2 過小，故太大．三次近値爲 $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3}$，因 $a_2+\frac{1}{a_3}$過大，故太小；類推.

當已知分數爲眞分數時 $a_1=0$； 此時可視其一次近値爲零，上結果可述之如下:

奇次近値皆小於其連分數，偶次近値皆大於其連分數.

336. 求連續各次近値之構成律.

設此連分數以

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\cdots\cdots$$

表之；則其首三次近値爲

$$\frac{a_1}{1},\quad \frac{a_1a_2+1}{a_2},\quad \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_3\cdot a_2+1};$$

可見以第三次商乘二次近値之分子，再加以一次近値之分子，即得三次近値之分子；三次近値之分母，亦照同法構成之.

設各次近値用同法構成之；並設以 p_1，p_2，p_3，…… 表諸分子，以 q_1，q_2，q_3，………表諸分母.

假定此構成律適用於 n 次近値，即設

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\quad q_n=a_n\,q_{n-1}+q_{n-2}.$$

其 $n+1$ 次近值與 n 次近值之別，不過以商 $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}$ 代 a_n 而已；故其 $n+1$ 次近值

$$=\frac{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}(a_np_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}$$

$$=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}\text{（由假設）}.$$

故，若命

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+p_{n-1},\quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1},$$

則知假定能用於 n 次近值之分子分母構成律，亦能用於 $n+1$ 次近值．但此法則能用於三次近值，故知亦能用於四次近值，依此類推；故可用於任何次近值．

337. 吾人應稱 a_n 爲 n 次部分商，此時之全商爲 $a_n+\frac{1}{a_{n+1}+}\frac{1}{a_{n+2}+}\cdots\cdots\cdots\cdots$，通常以 k 表之．

已知

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{a_np_{n-1}+p_{n-2}}{a_nq_{n-1}+q_{n-2}}.$$

設 x 表此連分數；則 x 與 $\frac{p_n}{q_n}$ 之別，不過以全商 k 代部分商 a_n 而已；故

$$x=\frac{kp_{n-1}+p_{n-2}}{kq_{n-1}+q_{n-2}}.$$

338. 若 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲一連分數之 n 次近值，則

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

設此連分數以

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_4+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

表之，於是

$$\begin{aligned} p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n &= (a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-1}-p_{n-1}(a_nq_{n-1}+q_{n-2}) \\ &= (-1)(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}) \\ &= (-1)^2(p_{n-2}q_{n-3}-p_{n-3}q_{n-2}), \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (-1)^{n-2}(p_2q_1-p_1q_2). \end{aligned}$$

但 $p_2q_1-p_1q_2=(a_1a_2+1)-a_1\cdot a_2=1=(-1)^2$;

故 $$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

當連分數小於 1 時，若設 $a_1=0$，則此結果依然適用，其一次近値爲零.

註. 計算各次近値之絕對値時，用上定理核驗其精確程度最爲簡便.

推論 1. 凡近値皆爲最簡分數，因 p_n 及 q_n 若有公約數，則必能除盡 $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$，或 1，此爲不可能.

推論 2. 二連續近値之差爲分子爲一之分數，因

$$\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_nq_{n-1}\sim p_{n-1}q_n}{q_nq_{n-1}}=\frac{1}{q_nq_{n-1}}\text{也}.$$

習　　題　　二十五. A.

計算下列各連分數之各次近値：

1. $2+\frac{1}{6+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{11+}\,\frac{1}{2}.$

2. $\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{6}.$

3. $3+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{9}.$

化下列各分數爲連分數，並求其四次近値.

4. $\frac{253}{179}$.　　5. $\frac{832}{159}$.　　6. $\frac{1189}{3927}$.　　7. $\frac{729}{2318}$.

8. .37.　　9. 1.139.　　10. .3029.　　11. 4.316.

12. 1 公尺等於 39.37079 吋，試用連分數理論證明 32 公尺約等於 35 碼.

13. 求近值爲 .24226 之一串分數,此處 .24226 爲眞正太陽年超過 365 日之日數.

14. 1 公里甚近於 .62138 哩;試證 $\frac{5}{8}$, $\frac{18}{29}$. $\frac{23}{37}$, $\frac{64}{103}$, 等分數爲 1 公里與 1 哩之比之連續近值.

15. 設將等長兩尺分別劃分爲 162 及 209 等分，而重合其零點，試證一尺之第 31 分點約與他尺之第 40 分點相重合.

16. 若將 $\frac{n^4+n^2-1}{n^3+n^2+n+1}$ 化爲連分數,試證其各次商更迭爲 $n-1$ 及 $n+1$，並求其連續各次近值.

17. 試證

(1) $\frac{p_{n+1}-p_{n-1}}{q_{n+1}-q_{n-1}}=\frac{p_n}{q_n}$.

(2) $\left(\frac{p_{n+2}}{p_n}-1\right)\left(1-\frac{p_{n-1}}{p_{n+1}}\right)=\left(\frac{q_{n+2}}{q_n}-1\right)\left(1-\frac{q_{n-1}}{q_{n+1}}\right)$.

18. 若 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲某連分數之 n 次近值，a_n 爲其相當商,試證

$$p_{n+2}q_{n-2}\sim p_{n-2}q_{n+2}=a_{n+2}\cdot a_{n+1}\cdot a_n+a_{n+2}+a_n.$$

339. 每近值較其前之任何近值皆近於此連分數.

設以 x 表此連分數，以 $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 表三個連續近值；則 x 與 $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$ 之不同,不過以第 $n+2$ 次全商代 a_{n+2} 而已；以 k 表之；因是

$$x=\frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n};$$

$$\therefore\ x\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{k(p_{n+1}q_n\sim p_nq_{n+1})}{q_n(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)},$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\sim x=\frac{p_{n+1}q_n\sim p_nq_{n+1}}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)}+\frac{1}{q_{n+1}(kq_{n+1}+q_n)}.$$

今 k 大於 1，而 q_n 小於 q_{n+1}；就此兩點言之$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$與 x 之差小於$\frac{p_n}{q_n}$與 x 之差；即各近值較其前近值近於此連分數，故較其前之任一近值近於此連分數.

綜合此節與 §335 之結果，知

奇次近值繼續增大，但永小於此連分數.

偶次近值繼續減小，但永大於此連分數.

340. 求以任何近值代替連分數所生之誤差之極限.

令 $\frac{p_n}{q_n}$, $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$表三個連續近值，而以 k 表其 $n+2$ 次全商；

於是
$$x=\frac{kp_{n+1}+p_n}{kq_{n+1}+q_n},$$

$$\therefore\ x\sim\frac{p_n}{q_n}=\frac{k}{q_n(kq_{n+1}+q_n)}=\frac{1}{q_n\left(q_{n+1}+\frac{q_n}{k}\right)}.$$

今 $k>1$，故 x 與$\frac{p_n}{q_n}$之差小於$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$，而大於$\frac{1}{q_n(q_{n+1}+q_n)}$.

再者，因 $q_{n+1}>q_n$，故以$\frac{p_n}{q_n}$代 x 所生之誤差小於 $\frac{1}{q_n^2}$而大於$\frac{1}{2q^2_{n+1}}$.

341. 由上節可知，若以$\frac{p_n}{q_n}$代此連分數，則其所生之誤差小於$\frac{1}{q_nq_{n+1}}$，即小於$\frac{1}{q_n(a_{n+1}q_n+q_{n-1})}$；亦即小於$\frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$；故 a_{n+1} 愈大，$\frac{p_n}{q_n}$愈近於此連分數. 是以，任一切近大商前之近值爲較近於此連分數

之近似值.

又，因此誤差小於$\frac{1}{q_n^2}$，故欲求與連分數之差小於已知值$\frac{1}{a}$之近值，僅須算至$\frac{p_n}{q_n}$已足，其q_n^2大於a.

342. 利用連分數之性質，吾人能求出兩小整數，其比甚近於兩不可通約量之比，或僅能用兩大整數表出之比.

例. 求漸近於 3.14159 之一串分數.

在求 14159 及 100000 之最大公約數時，其依次各次商為 7，15，1，25，1，7，4. 由是

$$3.14159=3+\frac{1}{7+}\,\frac{1}{15+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{25+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{7+}\,\frac{1}{4}.$$

其各次近值為

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

此最後近值，即位於最大商 25 之前者為最一極近之近似值，其誤差小於$\frac{1}{25\times(113)^2}$，因是小於$\frac{1}{25\times(100)^2}$，或.000004.

343. 凡近值均較分母較其分母為小之任何分數近於連分數.

設x為連分數，$\frac{p_n}{q_n}$，$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$為兩個連續近值，$\frac{r}{s}$為一分數，其分母s小於q_n.

設其可能，姑令$\frac{r}{s}$較$\frac{p_n}{q_n}$近於x，則$\frac{r}{s}$必較$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$近於x [§ 339]；因x在$\frac{p_n}{q_n}$及$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之間，$\frac{r}{s}$必在$\frac{p_n}{q_n}$與$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$之間.

故

$$\frac{r}{s}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}<\frac{p_n}{q_n}\sim\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}，即<\frac{1}{q_nq_{n-1}}；$$

$$\therefore\quad rq_{n-1}\sim sp_{n-1}<\frac{s}{q_n}；$$

即整數小於分數；此爲不可能．故$\frac{p_n}{q_n}$必較$\frac{r}{s}$近於連分數．

344. 若$\frac{p}{q}$及$\frac{p'}{q'}$爲連分數 x 之兩個連續近值，則$\frac{pp'}{qq'}$之大於或小於 x^2，視$\frac{p}{q}$之大於或小於$\frac{p'}{q'}$而定．

設 k 爲相當$\frac{p'}{q'}$之次一近值之全商；於是

$$x=\frac{kp'+p}{kq'+q},$$

$$\therefore\quad \frac{pp'}{qq'}-x^2=\frac{1}{qq'(kq'+q)^2}\{pp'(kq'+q)^2-qq'(kp'+p)^2\}$$

$$=\frac{(k^2p'q'-pq)(pq'-p'q)}{qq'(kq'+q)^2}.$$

因 $p'>p$，$q'>q$，及 $k>1$，故 $k^2p'q'-pq$ 爲正，故$\frac{pp'}{qq'}$之大於或小於 x^2，視 $pq'-p'q$ 之爲正或負而定；即視$\frac{p}{q}$之大於或小於$\frac{p'}{q'}$而定．

推論．由上可知 $pq'-p'q$，$pp'-qq'x^2$，$p^2-q^2x^2$，$q'^2x^2-p'^2$ 等式同號．

習　　題　　二十五．B．

1．已知一公尺等於 1.0936 碼，求以$\frac{222}{203}$碼爲一公尺時所生之誤差之極限．

2. 求 $1+\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{7+}\frac{1}{9+}\frac{1}{11+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

較眞値小 .0001 之近似値.

3. 用連分數理論證明$\frac{99}{70}$與 1.41421 之差小於$\frac{1}{11830}$.

4. 將$\frac{a^3+6a^2+13a+10}{a^4+6a^3+14a^2+13a+7}$化爲連分數，並求其三次近値.

5. 試證一次及 n 次近値之差之絕對値等於

$$\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}.$$

6. 設 a_n 爲相當$\frac{p_n}{q_n}$之商，試證

(1) $\frac{p_n}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\frac{1}{a_{n-3}+}\cdots\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_1}$,

(2) $\frac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\frac{1}{a_{n-2}+}\frac{1}{a_{n-3}+}\cdots\frac{1}{a_3+}\frac{1}{a_2}$.

7. 在連分數$\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\frac{1}{a+}\cdots\cdots\cdots$內，試證

(1) $p_n^2+p^2_{n+1}=p_{n-1}p_{n+1}+p_np_{n+2}$,

(2) $p_n=q_{n-1}$.

8. 設$\frac{p_n}{q_n}$爲連分數 $\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots\cdots$之 n 次近値. 試證 $q_{2n}=p_{2n+1}$ $q_{2n-1}=\frac{a}{b}p_{2n}$.

9. 在連分數

$$\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\cdots\cdots\cdots$$

內，試證

$p_{n+2}-(ab+2)p_n+p_{n-2}=0$. $q_{n+2}-(ab+2)q_n+q_{n-2}=0$.

10. 試證

$$a\left(x_1+\frac{1}{ax_2+}\ \frac{1}{x_3+}\ \frac{1}{ax_4+}\cdots\cdots\text{至 }2n\text{商}\right)$$

$$=ax_1+\frac{1}{x_2+}\ \frac{1}{ax_3+}\ \frac{1}{x_4+}\cdots\cdots\text{至 }2n\text{商}.$$

11. 設$\frac{M}{N}$, $\frac{P}{Q}$, $\frac{R}{S}$爲連分數

$$\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+},\cdots\cdots,\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+},\cdots\cdots,\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\ \frac{1}{a_5+}\cdots\cdots$$

$\cdots\cdots$之 n 次, $(n-1)$ 次, $(n-2)$次近値, 試證

$$M=a_2P+R,\ N=(a_1a_2+1)P+a_1R.$$

12. 設$\frac{p_n}{q_n}$爲$\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\cdots\cdots$之 n 次近値. 試證 p_n 及 q_n 爲

$$\frac{x}{1-ax-x^2}\ \text{及}\ \frac{ax+x^2}{1-ax-x^2}$$

之展開式內 x^n 之係數. 並據此證明 $p_n=q_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$, 式內 α 及 β 爲方程式 $t^2-at-1=0$ 之根.

13. 設$\frac{p_n}{q_n}$爲$\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\cdots\cdots$之 n 次近値, 試證 p_n 及 q_n 爲

$$\frac{x+bx^2-x^3}{1-(ab+2)x^2+x^4}\ \text{及}\ \frac{ax+(ab+1)x^2-x^4}{1-(ab+2)x^2+x^4}$$

之展開式內 x^n 之係數. 由是證明

$$ap_{2n}=bq_{2n-1}=ab\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},$$

$$p_{2n+1}=q_{2n}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}-(\alpha^n-\beta^n)}{\alpha-\beta},$$

其 α 及 β 爲解方程式 $1-(ab+2)x^2+x^4=0$ 所得之 x^2 之値.

第二十六章

一次不定方程式

345. 數字係數不定方程式之正整數解之求法，第十章業已論及；玆利用連分數之性質求一次不定方程式之通解．

346. 凡含二未知數 x 及 y 之一次方程式，均可寫爲 $ax \pm by = \pm c$ 之形式，式內 a，b，c，爲正整數．此方程式有無數解；但若僅限定 x 及 y 之正整數解，則其解之數有限矣．

方程式 $ax+by=-c$ 顯然無正整數解；又方程式 $ax-by=-c$，同於 $by-ax=c$，故考究方程式 $ax \pm by=c$ 足矣．

若 a 及 b 有不能除盡 c 之公因子 m，則二方程式 $ax \pm by=c$ 皆不能爲 x 及 y 之整數值所適合，因 $ax \pm by$ 能以 m 除盡，而 c 不能也．

設 a，b，c 有公因子，則可用除法消去之，因此吾人將設 a，b，c 無公因子，而 a 及 b 互爲質數．

347. 求方程式 $ax-by=c$ 之正整數通解．

設將 $\frac{a}{b}$ 化爲連分數，而 $\frac{p}{q}$ 表 $\frac{a}{b}$ 之前一近值；於是

$$aq-bp=\pm 1. \qquad [\S 338.]$$

一. 若 $aq-bp=1$，則已知方程式可寫爲

$$ax-by=c(aq-bp);$$

$$\therefore\ a(x-cq)=b(y-cp).$$

令 a 及 b 既無公因子，$x-cq$ 必能被 b 除盡；故 $x-cq=bt$，其 t 爲整數，

$$\therefore\quad \frac{x-cq}{b}=t=\frac{y-cp}{a};$$

即

$$x=bt+cq,\quad y=at+cp;$$

令 t 爲任意正整值，或絕對值小於 $\frac{cq}{b}$ 及 $\frac{cp}{a}$ 中較小者之任意負整值，均可得方程式正整數解，t 亦可以爲零；故解之數無限.

二. 若 $aq-bp=-1$，則

$$ax-by=-c(aq-bp);$$

$$\therefore\ a(x+cq)=b(y+cp);$$

$$\therefore\ \frac{x+cq}{b}=\frac{y+cp}{a}=t,\ \text{整數};$$

故

$$x=bt-cq,\quad y=at-cp;$$

令 t 爲大於 $\frac{cq}{b}$ 及 $\frac{cp}{a}$ 中之較大者之任意正整值，均可得方程式之正整數解，故解答之數無限.

三. 若 a 或 b 爲 1，則分數 $\frac{a}{b}$ 不能化爲以 1 爲分子之連分數而此方法失效.但此時之解，可由觀察寫出之；如，若 b 爲 1，則方程式變爲 $ax-y=c$；由是 $y=ax-c$，令 x 爲大於 $\frac{c}{a}$ 之任意正整值，即得所求之解矣.

註. 注意 x 及 y 之値串成二等差級數，其公差爲 b 及 a.

例．　求 $29x-42y=5$ 之正整數通解．

將 $\frac{42}{29}$ 化爲連分數，其 $\frac{42}{29}$ 之前一近值爲 $\frac{13}{9}$；故得

$$29\times13-42\times9=-1;$$

$$\therefore 29\times65-42\times45=-5;$$

與原方程式合併，得

$$29(x+65)=42(y+45);$$

$$\therefore \frac{x+65}{42}=\frac{y+45}{29}=t,\ \text{整數};$$

故其通解爲

$$x=42t-65,\quad y=29t-45.$$

348.　已知方程式 $ax-by=c$ 之一正整數解，求其通解．

設 h,k 爲 $ax-by=c$ 之一解；則 $ah-bk=c$．

$$\therefore ax-by=ah-bk;$$

$$\therefore a(x-h)=b(y-k);$$

$$\therefore \frac{x-h}{b}=\frac{y-k}{a}=t,\ \text{整數};$$

$$\therefore x=h+bt,\quad y=k+at;$$

此即其通解．

349.　求方程式 $ax+by=c$ 之正整數通解．

設將 $\frac{a}{b}$ 化爲連分數 $\frac{a}{b}$ 之前一近值爲 $\frac{p}{q}$，於是 $aq-bp=\pm1$．

一．　若 $aq-bp=1$，則

$$ax+by=c(aq-bp);$$

$$\therefore a(cq-x)=b(y+cp);$$

$$\therefore \frac{cq-x}{b}=\frac{y+cp}{a}=t,\ \text{整數};$$

$$\therefore x=cq-bt,\quad y=at-cp;$$

令 t 爲大於 $\frac{cp}{a}$ 而小於 $\frac{cq}{b}$ 之正整值，即得方程式之正整數解．故解之數有限，若無能滿足此條件之整數，即爲無解．

二．若 $aq-bp=-1$，則

$$ax+by=-c(aq-bp);$$

$$\therefore\ a(x+cq)=b(cp-y);$$

$$\therefore\ \frac{x+cq}{b}=\frac{cp-y}{a}=t,\ \text{整數};$$

$$\therefore\ x=bt-cq,\quad y=cp-at;$$

令 t 爲大於 $\frac{cq}{b}$ 而小於 $\frac{cp}{a}$ 之正整值，即得方程式之正整數解．同上，解之數有限，亦可無解．

三．若 a 或 b 等於 1．其解可照 § 347 用觀察法求得之．

350. 已知方程式 $ax+by=c$ 之一正整數解，求其通解．

設 h,k 爲 $ax+by=c$ 之一解，於是 $ah+bk=c$．

$$\therefore\ ax+by=ah+bk;$$

$$\therefore\ a(x-h)=b(k-y);$$

$$\therefore\ \frac{x-h}{b}=\frac{k-y}{a}=t,\ \text{整數};$$

$$\therefore\ x=h+bt,\quad y=k-at;$$

此即其通解．

351. 求方程式 $ax+by=c$ 之正整數解之個數．

設將 $\frac{a}{b}$ 化爲連分數，而 $\frac{p}{q}$ 爲 $\frac{a}{b}$ 之前一近值；於是 $aq-bp=\pm1$．

一. 若 $aq-bp=1$，則通解爲

$$x=cq-bt,\quad y=at-cp. \qquad [\S\ 349.]$$

令 t 爲不大於 $\frac{cq}{b}$ 而不小於 $\frac{cp}{a}$ 之正整值，即得其正整數解.

(1) 若 $\frac{c}{a}$ 及 $\frac{c}{b}$ 非整數.

設 $$\frac{cp}{a}=m+f,\ \frac{cq}{b}=n+g,$$

其 m 及 n 爲正整數，而 f 及 g 爲眞分數；於是 t 之能有之最小值爲 $m+1$，最大值爲 n；故解之數爲

$$n-m=\frac{cq}{b}-\frac{cp}{a}+f-g=\frac{c}{ab}+f-g.$$

今此爲整數，視 f 之大於或小於 g，可寫之爲 $\frac{c}{ab}$ + 一分數或 $\frac{c}{ab}$ 一分數. 因此解之個數爲近於 $\frac{c}{ab}$ 之整數，其爲較大或較小，視 f 或 g 孰爲較大而定.

(2) 若 $\frac{c}{b}$ 爲整數.

此時 $g=0$，故 x 之一值爲零. 今此解之數爲 $\frac{c}{ab}+f$，此必爲整數. 故解之個數爲 $\frac{c}{ab}+1$ 抑或 $\frac{c}{ab}$ 內之最大整數，視零解是否在內而定.

(3) 若 $\frac{c}{a}$ 爲整數.

此時 $f=0$，故 y 之一值爲零. 今此，則 t 之最小值爲 m，而最大值爲 n；故解之個數爲 $n-m+1$ 或 $\frac{c}{ab}-g+1$. 是以解之個數，爲

$\frac{c}{ab}+1$ 抑或 $\frac{c}{ab}$ 內之最大整數，視零解是否在內而定．

(4) 若 $\frac{c}{a}$ 及 $\frac{c}{b}$ 皆爲整數．

此時 $f=0$，$g=0$，故 x,y 皆有一零解．合此，則 t 能有之最小值爲 m，而最大值爲 n；故解之個數爲 $n-m+1$，或 $\frac{c}{ab}+1$．若零解除外，則解之個數爲 $\frac{c}{ab}-1$．

二．若 $aq-bp=-1$，則其通解爲

$$x=bt-cq;\quad y=cp-at,$$

而其類似結果可得矣．

352. 欲求方程式 $ax+by+cz=d$ 之正整數解，可進行如下：

又移項，$ax+by=d-cz$；依次令 z 爲 $0,1,2,3,$…………等值，得 $ax+by=c'$ 型之方程式，此可照已示方法解之．

353. 設有二聯立方程式

$$ax+by+cz=d,\quad a'x+b'y+c'z=d',$$

消去一未知數，如 z，得 $Ax+By=C$ 型之方程式．若 $x=f$，$y=g$ 爲一解，則其通解可寫爲

$$x=f+Bs,\quad y=g-As,$$

其 s 爲整數．

將 x,y 之此值代入任一已知方程式，得 $Fs+Gz=H$ 型之方程式，設其通解爲

$$s=h+Gt,\quad z=k-Ft.$$

代入 s 之值，得 $x=f+Bh+BGt$，$y=g-Ah-AGt$；令 t 爲適當之整數值，即得 x，y，z 之值．

354. 若能求得二方程式

$$ax+by+cz=d,\ 及\ a'x+b'y+c'z=d'$$

之一正整數解，則其通解可如下求得之.

設此特解爲 f, g, h；則

$$af+bg+ch=d,\ a'f+b'g+c'h=d'.$$

由減法，

$$a(x-f)+b(y-g)+c(z-h)=0,$$
$$a'(x-f)+b'(y-g)+c'(z-h)=0;$$

由是
$$\frac{x-f}{bc'-b'c}=\frac{y-g}{ca'-c'a}=\frac{z-h}{ab'-a'b}=\frac{t}{k},$$

式內 t 爲整數，k 爲 $bc'-b'c$, $ca'-c'a$, $ab'-a'b$ 之 $H.C.F.$

故其通解爲

$$x=f+(bc'-b'c)\frac{t}{k},\ y=g+(ca'-c'a)\frac{t}{k},\ z=h+(ab'-a'b)\frac{t}{k}.$$

習題 二十六.

求下列各方程式之通解及最小正整數解：

1. $775x-711y=1$.　2. $455x-519y=1$.　3. $436x-393y=5$.

4. 以福勞音(*florins*)及半克郎(*half-crowns*)付 £1.19*s*.6*d*. 之欵，問能有幾種付法？

5. 求 $11x+15y=1031$ 之正整數解之個數.

6. 求兩分數，其分母爲 7 與 9，其和爲 $1\frac{10}{63}$.

7. 求兩最簡眞分數其差爲 $\frac{1}{24}$，其分母爲 12 及 8.

8. 某欵爲 x 磅 y 先令，亦爲 y 磅 x 先令之半；求此欵額.

求正整數解：

9. $\left.\begin{array}{r}6x+7y+4z=122\\11x+8y-6z=145\end{array}\right\}$.　10. $\left.\begin{array}{r}12x-11y+4z=22\\-4x+5y+z=17\end{array}\right\}$.

11. $\left.\begin{aligned}20x-21y&=38\\3y+4z&=34\end{aligned}\right\}.$　　12. $\left.\begin{aligned}13x+11z&=103\\7z-5y&=4\end{aligned}\right\}.$

13. $7x+4y+19z=84.$　　14. $23x+17y+11z=130.$

15. 求以 5,7,8 除之餘 3,2,5 之一切正整數之一般形式.

16. 求以 3,7,11 除之餘 1,6,5 之二最小整數.

17. 某七進法中三位數，在九進法中亦爲此三數字，但反其順序；設中間數字均爲零，試求此數在十進法中之值.

18. 設 $6,a,b$ 成調和級數，試求 a,b 之一切可能值.

19. 將等長二杆分爲 250 及 243 等分而重合其兩端，試求二者相距最近之分點.

20. 三鈴同時開始搖動，而各間 23,29,34 秒搖動一次. 第二，第三鈴振動之時間，較第一鈴長 39 秒及 40 秒；若均在 20 分鐘內停止，求各鈴搖動之次數.

21. 設方程式 $7x+9y=c$ 洽有六個正整數解，試求 c 之最大值.

22. 設方程式 $14x+11y=c$ 洽有五個正整數解，試求 c 之最大值.

23. 設方程式 $19x+14y=c$ 除零外尚有六解，求 c 所必處之範圍.

24. 設方程式 $ax+by=c$ 除零解外，恰有 n 正整數解，試証 c 之最大值爲 $(n+1)ab-a-b$，最小值爲

$$(n-1)ab+a+b.$$

第 二 十 七 章

循 環 連 分 數

355. 吾人在第二十五章中，已知有理商之有限連分數能化爲整數分子分母之普通分數，故不能等於不盡根；以下証明二次不盡根能化爲循環商之無窮連分數．今先考究一數字實例．

例． 將 $\sqrt{19}$ 化爲連分數，並求漸近其值之分數串．

$$\sqrt{19}=4+(\sqrt{19}-4)=4+\frac{3}{\sqrt{19}+4};$$

$$\frac{\sqrt{19}+4}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-2}{3}=2+\frac{5}{\sqrt{19}+2};$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-3}{5}=1+\frac{2}{\sqrt{19}+3};$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{2}=3+\frac{\sqrt{19}-3}{2}=3+\frac{5}{\sqrt{19}+3};$$

$$\frac{\sqrt{19}+3}{5}=1+\frac{\sqrt{19}-2}{5}=1+\frac{3}{\sqrt{19}+2};$$

$$\frac{\sqrt{19}+2}{3}=2+\frac{\sqrt{19}-4}{3}=2+\frac{1}{\sqrt{19}+4};$$

$$\sqrt{19}+4=8+(\sqrt{19}-4)=8+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此後 2，1，3，1，2，8 等商循環；故

$$\sqrt{19}=4+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{8+}\cdots\cdots$$

在此例中有當注意者，爲演至其商爲第一商之二倍時，以後諸商即開始循環．在 §361 將証明其永遠如此．

[說明.在上列各行中,吾人循一律之方法演算.例如,第二行：先求出$\frac{\sqrt{19}+4}{3}$內之最大整數；此爲 2,其餘數爲$\frac{\sqrt{19}+4}{3}-2$,即$\frac{\sqrt{19}-2}{3}$.再以 $\sqrt{19}-2$ 之共軛根數乘分子分母，將其結果$\frac{5}{\sqrt{19}+2}$反轉後，吾人又起始從一有理分母之行演算下去].

按照 §336 說明,其前七近値爲

$$\frac{4}{1},\ \frac{9}{2},\ \frac{13}{3},\ \frac{48}{11},\ \frac{61}{14},\ \frac{170}{39},\ \frac{1421}{326}.$$

取最末者所生之誤差小於$\frac{1}{(326)^2}$，故小於$\frac{1}{(320)^2}$或$\frac{1}{102400}$，而更小於 .00001. 故其第七次近値,至少精確至四小數位.

356. 凡循環連分數皆爲有理係數二次方程式之一根.

設 x 表此連分數，y 表其循環部分,並設

$$x=a+\frac{1}{b+}\ \frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{1}{h+}\ \frac{1}{k+}\ \frac{1}{y},$$

及

$$y=m+\frac{1}{n+}\cdots\cdots\frac{1}{u+}\ \frac{1}{v+}\ \frac{1}{y},$$

其 $a,b,c,\cdots\cdots\cdots h,k,m,n,\cdots\cdots u,v$ 爲正整數.

設$\frac{p}{q}$，$\frac{p'}{q'}$爲與 h,k 相當商之 x 之近値；於是因 y 爲全商,故得

$$x=\frac{p'y+p}{q'y+q};\quad 由是\ y=\frac{p-qx}{q'x-p'}.$$

設$\frac{r}{s}$，$\frac{r'}{s'}$爲與 u，v 二商相當之 y 之近値；則

$$y=\frac{r'y+r}{s'y+s}.$$

代入 y 以 x 表示之値而化簡之,即得一有理係數之二次方程式.

求 y 值之方程式爲 $s'y^2+(s-r')y-r=0$，此方程式有二實根，其符號相反；若以 y 之正值代入 $x=\dfrac{p'y+p}{q'y+q}$ 有理化其分母，則 x 之值之形式爲 $\dfrac{A+\sqrt{B}}{C}$，其 A,B,C 爲整數，B 爲正數，因 y 之值爲實數也．

例．將 $1\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+}\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+}\cdots\cdots$ 化爲根數．

設此連分數之值爲 x；於是 $x-1=\dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+(x-1)}$；故

$$2x^2+2x-7=0.$$

此連分數等於此方程式之正根，故等於 $\dfrac{\sqrt{15}-1}{2}$．

習 題 二十七．A

將下列連分數化爲根數，並求其六次近值：

1．$\sqrt{3}$． 2．$\sqrt{5}$． 3．$\sqrt{6}$． 4．$\sqrt{8}$．

5．$\sqrt{11}$． 6．$\sqrt{13}$． 7．$\sqrt{14}$． 8．$\sqrt{22}$．

9．$2\sqrt{3}$． 10．$4\sqrt{2}$． 11．$3\sqrt{5}$． 12．$4\sqrt{10}$．

13．$\dfrac{1}{\sqrt{21}}$． 14．$\dfrac{1}{\sqrt{33}}$． 15．$\sqrt{\dfrac{6}{5}}$． 16．$\sqrt{\dfrac{7}{11}}$．

17．求以 $\dfrac{268}{65}$ 爲 $\sqrt{17}$ 時所生誤差之極限．

18．求以 $\dfrac{916}{191}$ 爲 $\sqrt{23}$ 時所生誤差之極限．

19．求 $\sqrt{101}$ 之一次近值，至五位小數．

20．求 $\sqrt{15}$ 之一次近值，至五位小數．

用連分數表下列各方程式之正根：

21．$x^2+2x-1=0$． 22．$x^2-4x-3=0$． 23．$7x^2-8x-3=0$．

24．用連分數表方程式 $x^2-5x+3=0$ 之各根．

求下列各連分數：

25．$3+\dfrac{1}{6+}\ \dfrac{1}{6+}\ \dfrac{1}{6+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

26．$\dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{3+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{3+}\cdots\cdots\cdots$

27. $3\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{2+}\ \dfrac{1}{3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

28. $5+\dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{10+}\cdots\cdots\cdots\cdots$

29. 試證

$$3+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{6+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{6+}\cdots\cdots=3\left(1+\frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\cdots\cdots\right).$$

30. 求下列二連分數之差.

$$\frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{5+}\cdots\cdots,$$

$$\frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{5+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{5+}\cdots\cdots$$

***357.** 將二次根數化爲連分數.

設 N 爲非完全平方之正整數，a_1 爲 $\sqrt{N}$ 內之最大整數；於是

$$\sqrt{N}=a_1+(\sqrt{N}-a_1)=a_1+\frac{r_1}{\sqrt{N}+a_1}，\text{其 } r_1=N-a_1^2.$$

設 b_1 爲 $\dfrac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ 內之最大整數；於是

$$\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}-b_1r_1+a_1}{r_1}$$

$$=b_1+\frac{\sqrt{N}-a_2}{r_1}=b_1+\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2};$$

$$a_2=b_1r_1-a_1 \text{ 及 } r_1r_2=N-a_2^2.$$

同理，$\dfrac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}=b_2+\dfrac{\sqrt{N}-a_3}{r_2}=b_2+\dfrac{r_3}{\sqrt{N}+a_3}$；

其中 $a_3=b_2r_2-a_2$，$r_2r_3=N-a_3^2$；

餘類推；一般言之，

$$\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{\sqrt{N}-a_n}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\frac{r_n}{\sqrt{N}+a_n};$$

$$a_n=b_{n-1}r_{n-1}-a_{n-1} \text{ 及 } r_{n-1}r_n=N-a_n^2.$$

$$\therefore\quad \sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\ \frac{1}{b_2+}\ \frac{1}{b_3+}\ \frac{1}{b_4+}\cdots\cdots;$$

因此 $\sqrt{N}$ 能化爲無窮連分式.

茲証明此分數爲循環節所組成；其顯而易算者，乃任一全商首次重見時，循環節即行開始.

吾人將稱此諸商

$$\sqrt{N},\ \frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1},\ \frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2},\ \frac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}\cdots\cdots,$$

爲第一，二，三，四，………全商.

***358.** 由上節顯見 a_1，r_1，b_1，b_2，b_3，……等數均爲正整數；今証明 a_2，a_3，a_4，……r_2，r_3，r_4，……等數亦爲正整數.

設 $\frac{p}{q'}$，$\frac{p'}{q'}$，$\frac{p''}{q''}$ 爲 $\sqrt{N}$ 之三個連續近値，又設 $\frac{p''}{q''}$ 爲與部分商 b_n 相當之近値.

此步之全商爲 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$；故

$$\sqrt{N}=\frac{\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}p'+p}{\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}q'+q}=\frac{p'\sqrt{N}+a_np'+r_np}{q'\sqrt{N}+a_nq'+r_nq}.$$

消去分母，等置有理及無理部分，得

$$a_np'+r_np=Nq',\ a_nq'+r_nq=p';$$

由是 $a_n(pq'-p'q)=pp'-qq'N$，$r_n(pq'-p'q)=Nq'^2-p'^2$.

但 $pq'-p'q=\pm1$，而 $pq'-p'q$，$pp'-qq'N$，$Nq'^2-p'^2$ 等同號 [§344.]；故 a_n 及 r_n 爲正整數. 因兩近値在全商 $\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$ 之前，故此研究可適用於 n 大於 1 之一切値.

***359.** 求證其全商及部分商均循環.

§ 357 已證明 $r_nr_{n-1}=N-a_n^2$. 又 r_n 及 r_{n-1} 爲正整數；故 a_n 必小於 $\sqrt{N}$，如是 a_n 不能大於 a_1，且不能有 1，2，3，……… a_1 以外之任何值；即 a_n 之不同值不能多於 a_1 個.

又 $a_{n+1}=r_nb_n-a_n$，即 $r_nb_n=a_n+a_{n+1}$，故 r_nb_n 不能大於 $2a_1$. 故 r_n 不能有 1，2，3，……… $2a_1$ 以外之任何値；即 r_n 之不同値不能過 $2a_1$ 個.

故全商$\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$不能有多於 $2a_1^2$ 之不同值；即某全商以及其後一切全商必循環.

又 b_n 爲$\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$內之最大整數；故部分商亦必循環，且每循環節內之部分商不能過 $2a_1^2$ 個.

***360.** 求證 $a_1<a_n+r_n$.

因 $$a_{n-1}+a_n=b_{n-1}r_{n-1};$$
$$\therefore\ a_{n-1}+a_n=\text{或}>r_{n-1};$$
因 b_{n-1} 爲正整數也；
$$\therefore\ \sqrt{N}+a_n>r_{n-1}.$$
但 $$N-a_n^2=r_nr_{n-1};$$
$$\therefore\ \sqrt{N}-a_n<r_n;$$
$$\therefore\ a_1-a_n<r_n,$$
此即證明本命題.

***361.** 試證循環節從第二部分商開始，而止於二倍第一部分商之部分商.

據 §359 所見，必然發生循環．設其第 $n+1$ 次全商在 $s+1$ 商時循環；於是
$$a_s=a_n,\ r_s=r_n,\ b_s=b_n;$$
今將證明 $$a_{s-1}=a_{n-1},\ r_{s-1}=r_{n-1},\ b_{s-1}=b_{n-1}.$$
因 $$r_{s-1}r_s=N-a_s^2=N-a_n^2=r_{n-1}r_n=r_{n-1}r_s;$$
$$\therefore\ r_{s-1}=r_{n-1}.$$
又 $a_{n-1}+a_n=b_{n-1}r_{n-1}$，$a_{s-1}+a_s=b_{s-1}r_{s-1}=b_{s-1}r_{n-1}$；
$$\therefore\ a_{n-1}-a_{s-1}=r_{n-1}(b_{n-1}-b_{s-1});$$
$$\therefore\ \frac{a_{n-1}-a_{s-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}-b_{s-1}=\text{零，或整數}.$$

但，據 §360，$a_1-a_{n-1}<r_{n-1}$，$a_1-a_{s-1}<r_{s-1}$；即 $a_1-a_{s-1}<r_{n-1}$；是以 $a_{n-1}-a_{s-1}<r_{n-1}$； 因此$\frac{a_{n-1}-a_{s-1}}{r_{n-1}}$小於 1，故必為零.

故 $a_{s-1}=a_{n-1}$， 而 $b_{s-1}=b_{n-1}$.

因之，若第 $n+1$ 全商循環，則第 n 全商亦必循環；第 $n-1$ 商亦必循環，類推.

此證明適用於 n 之不小於 2 之一切值 [§358]，故全商從第二商$\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$起開始循環. 故知循環節從第二部分商 b_1 開始；今再證其終於部分商 $2a_1$.

設 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 為全商，適在 $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ 循環時二次出現之前；則 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 及 $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$為兩個連續之全商；故

$$a_n+a_1=r_nb_n, \quad r_nr_1=N-a_1^2;$$

但 $\quad N-a_1^2=r_1$；故 $r_n=1$.

又 $a_1-a_n<r_n$，即 <1；故 $a_1-a_n=0$，即是

$$a_n=a_1.$$

又 $a_n+a_1=r_nb_n=b_n$；故 $b_n=2a_1$；此即證明本命題.

***362.** 試證在任一循環節中，除去最後之部分外，距首尾兩端等遠之部分商相等.

設其最後之全商為$\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$；則

$$r_n=1, \qquad a_n=a_1, \qquad b_n=2a_1.$$

吾人將證

$$r_{n-1}=r_1, \qquad a_{n-1}=a_2, \qquad b_{n-1}=b_1;$$

$$r_{n-2}=r_2, \qquad a_{n-2}=a_3, \qquad b_{n-2}=b_2;$$

....

因 $r_{n-1}=r_n r_{n-1}=N-a_n^2=N-a_1^2=r_1$.

又 $a_{n-1}+a_1=a_{n-1}+a_n=r_{n-1}b_{n-1}=r_1 b_{n-1}$;

$$a_1+a_2=r_1 b_1;$$

$\therefore$ $a_2-a_{n-1}=r_1(b_1-b_{n-1})$;

$\therefore$ $\dfrac{a_2-a_{n-1}}{r_1}=b_1-b_{n-1}=0$，或整數.

但 $\dfrac{a_2-a_{n-1}}{r_1}<\dfrac{a_1-a_{n-1}}{r_1}$，即$<\dfrac{a_1-a_{n-1}}{r_{n-1}}$，此小於1；由是 $a_2-a_{n-1}=0$；故 $a_{n-1}=a_2$，$b_{n-1}=b_1$.

同理，$r_{n-2}=r_2$，$a_{n-2}=a_3$，$b_{n-2}=b_2$；類推.

***363.** 由 §§ 361，362 之結果知當二次不盡根 $\sqrt{N}$ 變爲連分數時，必爲以下之形式

$$a_1+\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{b_2+}\,\frac{1}{b_3+}\cdots\cdots\frac{1}{b_3+}\,\frac{1}{b_2+}\,\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{2a_1+}\cdots\cdots$$

***364.** 求循環節之倒第二近值.

設循環節有 n 個部分商，則諸循環節之倒第二近值爲第 n 次，第 $2n$ 次，第 $3n$ 次，……近值；設分別以

$$\frac{p_n}{q_n},\ \frac{p_{2n}}{q_{2n}},\ \frac{p_{3n}}{q_{3n}},\ \cdots\cdots\text{表之.}$$

今 $\sqrt{N}=a_1+\dfrac{1}{b_1+}\,\dfrac{1}{b_2+}\,\dfrac{1}{b_3+}\cdots\cdots\dfrac{1}{b_{n-1}+}\,\dfrac{1}{2a_1+}\cdots\cdots$

是以與$\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$相當之部分商爲 $2a_1$；故

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{2a_1p_n+p_{n-1}}{2a_1q_n+q_{n-1}}.$$

此步之完全商即循環節

$$2a_1+\frac{1}{b_1+}\,\frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\frac{1}{b_{n-1}+}\cdots\cdots,$$

是故等於 $a_1+\sqrt{N}$；故

$$\sqrt{N}=\frac{(a_1+\sqrt{N})p_n+p_{n-1}}{(a_1+\sqrt{N})q_n+q_{n-1}}.$$

消去分母并且等置有理及無理部分，得

$$a_1p_n+p_{n-1}=Nq_n,\ a_1q_n+q_{n-1}=p_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

又 $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}}$ 由 $\dfrac{p_n}{p_n}$ 及 $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 以

$$2a_1+\frac{1}{b_1+}\ \frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\frac{1}{b_{n-1}}$$

爲商得來，此商等於 $a_1+\dfrac{p_n}{q_n}$. 如是

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{\left(a_1+\dfrac{p_n}{q_n}\right)p_n+p_{n-1}}{\left(a_1+\dfrac{p_n}{q_n}\right)q_n+q_{n-1}}=\frac{Nq_n+\dfrac{p_n}{q_n}\cdot p_n}{p_n+\dfrac{p_n}{q_n}\cdot q_n}\ [\text{由 } (1)];$$

$$\therefore \frac{p_{2n}}{q_{2n}}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_n}{q_n}+\frac{Nq_n}{p_n}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2).$$

同法可証，若 $\dfrac{p_{cn}}{q_{cn}}$ 爲第 c 循環節之倒第二近値，則

$$a_1p_{cn}+p_{cn-1}=Nq_{cn},\ a_1q_{cn}+q_{cn-1}=p_{cn},$$

用此等方程式可依次求得 $\dfrac{p_{3n}}{q_{3n}}$, $\dfrac{p_{4n}}{q_{4n}}$, ………

須注意方程式 (2) 能適用於 n 之一切倍數，如是

$$\frac{p_{2cn}}{q_{2cn}}=\frac{1}{2}\left(\frac{p_{cn}}{q_{cn}}+\frac{Nq_{cn}}{p_{cn}}\right);$$

其証明與上者類似.

***365.** 在 § 356 中，吾人已知循環連分數可以有理係數二次方程式之根表之.

反之,用 §357 之方法,亦可証明類似$\frac{A+\sqrt{B}}{C}$之式,其 A, B, C 爲正整數,而 B 非完全平方,能化爲循環連分數.在此情形下,循環節不常以第二部分商始,最後部分商亦不盡二倍於第一部分商.

對於循環連分數之高深研究,學者可參考雪氏高等代數,及湯姆斯繆耳(*Thomas Muir*)氏化二次根爲連分數之小冊子.

*習　題　二十七. B.

將下列各根式化爲連分數,并求其四次近値.

1. $\sqrt{a^2+1}$.　　2. $\sqrt{a^2-a}$.　　3. $\sqrt{a^4-1}$.

4. $\sqrt{1+\frac{1}{a}}$.　　5. $\sqrt{a^2+\frac{2a}{b}}$.　　6. $\sqrt{a^2-\frac{a}{n}}$.

7. 証明

$$\sqrt{9a^2+3}=3a+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{6a+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{6a+}\cdots\cdots,$$

又求其五次近値.

8. 試証

$$p+\frac{2}{1+}\,\frac{1}{p+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{p+}\,\frac{1}{1+}\cdots\cdots=\sqrt{p^2+4p}.$$

9. 試證

$$p\left(a_1+\frac{1}{pqa_2}+\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{pqa_4}+\cdots\cdots\right)=pa_1+\frac{1}{qa_2+}\,\frac{1}{pa_3+}\,\frac{1}{qa_4+}\cdots$$

10. 若將$\sqrt{a^2+1}$ 化爲連分數,試證

$$2(a^2+1)q_n=p_{n-1}+p_{n+1},\quad 2p_n=q_{n-1}+q_{n+1}.$$

11. 設

$$x=\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\cdots,$$

$$y=\frac{1}{2a_1+}\,\frac{1}{2a_2+}\,\frac{1}{2a_1+}\,\frac{1}{2a_2+}\cdots,$$

$$z=\frac{1}{3a_1+}\,\frac{1}{3a_2+}\,\frac{1}{3a_1+}\,\frac{1}{3a_2+}\cdots,$$

試證　$$x(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+3z(x^2-y^2)=0.$$

12. 試證

$$\left(a+\frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\cdots\right)\left(\frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\cdots\right)=\frac{a}{b}.$$

13. 設
$$x=a+\frac{1}{b+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\cdots,$$

$$y=b+\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{b+}\cdots,$$

試証
$$(ab^2+a+b)x-(a^2b+a+b)y=a^2-b^2.$$

14. 設 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲 $\sqrt{a^2+1}$ 之 n 次近值,試證

$$\frac{p_2^2+p_3^2+\cdots\cdots+p^2_{n+1}}{q_2^2+q_3^2+\cdots\cdots+q^2_{n+1}}=\frac{p_{n+1}+p_{n+2}-p_1p_2}{q_{n+1}q_{n+2}-q_1q_2}.$$

15. 試證
$$\left(\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{c+}\cdots\right)\left(c+\frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{c+}\right)=\frac{1+bc}{1+ab}.$$

16. 設 $\frac{p_r}{q_r}$ 爲 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 之 r 次近值,試證

$$p_3+p_5+\cdots+p_{2n-1}=p_{2n}-p_2,\quad q_3+q_5+\cdots+q_{2n-1}=q_{2n}-q_2.$$

17. 試証二連分數

$$\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{c+}\cdots\cdots,\quad \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{c+}\cdots\cdots,$$

之差等於$\frac{a-b}{1+ab}$.

18. 設將 $\sqrt{N}$ 化爲連分數,又設 n 爲循環節內商之個數,試証

$$q_{2n}=2p_nq_n,\qquad p_{2n}=2p_n^2+(-1)^{n+1}.$$

19. 設將 $\sqrt{N}$ 化爲連分數,又設其第一,第二,……第 k 循環節之倒第二近值爲 n_1, n_2,…………n_k,試證

$$\frac{n_k+\sqrt{N}}{n_k-\sqrt{N}}=\left(\frac{n_1+\sqrt{N}}{n_1-\sqrt{N}}\right)^k.$$

第二十八章

二次不定方程式

*366. 高於一次之不定方程式之正整數解,於實用雖不甚重要,但因其與數論有關,亦甚値吾人之注意.本章專論含二變數之二次不定方程式.

*367. 求 x, y 能適合方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

之正整數值之方法,式內 a, b, c, f, g, h 爲整數.

如 §127, 照 x 之二次方程式解之,得

$$ax+hy+g=\pm\sqrt{(h^2-ab)y^2+2(hg-af)y+(g^2-ac)}\cdots\cdots\cdots(1)$$

欲 x, y 爲正整數, 必根底式爲完全平方,若以 $py^2+2qy+r$ 表根底式,即須

$$py^2+2qy+r=z^2,\ (設).$$

照 y 之二次方程式解之,得

$$py+q=\pm\sqrt{q^2-pr+pz^2};$$

如前,必須根底式爲完全平方;設等於 t^2; 於是

$$t^2-pz^2=q^2-pr,$$

此處 t 與 z 爲變數, p, q, r 爲常數.

必須此方程式有正整數解，原方程式始能有正整數解．此點將於§374 再論之．

若 a，b，h 皆為正，則解之個數顯然有限，蓋對於 x，y 之大值，左式之符號視 $ax^2+2hxy+by^2$ 而定 [§269]，故對於 x，y 之大正整數值不能為零．

又，若 h^2-ab 為負，則 (1) 內 y^2 之係數為負，據相似之理論，可知其解之個數亦有限．

例．求方程式

$$x^2-4xy+6y^2-2x-20y=29$$

之正整數解．

按照 x 之二次方程式解之，得

$$x=2y+1\pm\sqrt{30+24y-2y^2}.$$

今 $30+24y-2y^2=102-2(x-6)^2$；故 $(y-6)^2$ 不能大於 51．由試驗知 $(y-6)^2=1$ 或 49 時，根底式為完全平方；故 y 之正整數解為 5，7，13．

當 $y=5$ 時，$x=21$ 或 1；當 $y=7$ 時，$x=25$ 或 5；當 $y=13$ 時，$x=29$ 或 25．

***368.** 吾人已知方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$$

之正整數解，可由解形如

$$x^2\pm Ny^2=\pm a$$

之方程式求得之，其 N 及 a 為正整數．

方程式 $x^2+Ny^2=-a$ 無實根，而方程式 $x^2+Ny^2=a$ 之解之個數有限，可由試驗求得之；故吾人專論形如 $x^2-Ny^2=\pm a$ 之方程式．

***369.** 證明方程式 $x^2-Ny^2=1$ 永有正整數解．

設將 $\sqrt{N}$ 化為連分數，又設 $\frac{p}{q}$，$\frac{p'}{q'}$，$\frac{p''}{q''}$ 為任意三個連續近值；設 $\frac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ 為與 $\frac{p''}{q''}$ 相當之全商；於是

$$r_n(pq'-p'q)=Nq'^2-p'^2 \quad [\S\ 358];$$

但在任一循環節之末，$r_n=1$ [§ 361]；

$$\therefore\ p'^2-Nq'^2=p'q-pq';$$

$\frac{p'}{q'}$爲任一循環節之倒第二近值.

若循環節內有偶數個商，則 $\frac{p'}{q'}$ 爲偶數次近值，因之大於 $\sqrt{N}$，故大於$\frac{p}{q}$；故 $p'q-pq'=1$. 在此例中，$p'^2-Nq'^2=1$，故 $x=p'$，$y=q'$ 爲方程式 $x^2-Ny^2=1$ 之一解.

因$\frac{p'}{q'}$爲任一循環節之倒第二近值，故解之個數無限.

若循環節內有奇數個商，則第一循環內之倒第二近值爲奇次近值，但第二循環節內之倒第二近值爲偶次近值. 故令 $x=p'$，$y=q'$，即得其正整數解，$\frac{p'}{q'}$爲第二，第四，第六，………循環節內之倒第二近值. 故此例之解之個數無限.

***370.** 求方程式 $x^2-Ny^2=-1$ 之正整數解.

如前節，得

$$p'^2-Nq'^2=p'q-pq'.$$

設循環節內商之個數爲奇數，又設 $\frac{p'}{q'}$ 爲任一循環節內之倒數第二之奇近値，則$\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}$，故 $p'q-pq'=-1$.

此時 $p'^2-Nq'^2=-1$，令 $x=p'$，$y=q'$，即得方程式 $x^2-Ny^2=-1$ 之正整數解. 此處$\frac{p'}{q'}$爲第一，三，五，……循環節內之倒第二近值.

例．求 $x^2-13y^2=\pm 1$ 之正整數解．

吾人能證明

$$\sqrt{13}=3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

此處循環節內之商之個數爲奇數；第一循環節內之倒第二近值爲 $\frac{18}{5}$；故 $x=18$，$y=5$ 爲 $x^2-13y^2=-1$ 之一解．

據 § 364，知第二循環節之倒第二近值爲

$$\frac{1}{2}\left(\frac{18}{5}+\frac{5}{18}\times 13\right),\text{即 }\frac{649}{180};$$

故 $x=649$，$y=180$ 爲 $x^2-13y^2=1$ 之一解．

依次構成諸循環節內之倒第二收歛值，可得方程式

$$x^2-13y^2=-1 \text{ 及 } x^2-13y^2=1$$

之任若干解．

***371．** 當 $x^2-Ny^2=1$ 之正整數解之一既求得時，其他任若干均可用下法求得之．

設 $x=h$，$y=k$ 爲一解，而 h 及 k 爲正整數；則 $(h^2-Nk^2)^n=1$，此處 n 爲任意正整數．由是

$$x^2-Ny^2=(h^2-Nk^2)^n.$$

$$\therefore\ (x+y\sqrt{N})(x-y\sqrt{N})=(h+k\sqrt{N})^n(h-k\sqrt{N})^n;$$

令 $\quad x+y\sqrt{N}=(h+k\sqrt{N})^n,\ x-y\sqrt{N}=(h-k\sqrt{N})^n;$

$$\therefore\ 2x=(h+k\sqrt{N})^n+(h-k\sqrt{N})^n;$$

$$2y\sqrt{N}=(h+k\sqrt{N})^n-(h-k\sqrt{N})^n.$$

如此求得之 x,y 之值爲正整數，令 n 之值爲 $1,2,3,\cdots\cdots$等，可得任若干之解．

同理，若 $x=h$，$y=k$ 爲方程式 $x^2-Ny^2=-1$ 之一解，又若 n 爲任一奇正整數，則

$$x^2-Ny^2=(h^2-Nk^2)^n.$$

如是 x 及 y 之諸值均與已求得者同，但 n 爲限於 $1,3,5,\cdots\cdots$等值．

***372．** 令 $x=ax'$，$y=ay'$，則方程式 $x^2-Ny^2=\pm a^2$ 變爲 $x'^2-Ny'^2=\pm 1$，其解法業經指出．

***373.** 在 §369，吾人已知

$$p'^2-Nq'^2=-r_n(pq'-p'q)=\pm r_n.$$

故將 $\sqrt{N}$ 爲連分數時，若 a 爲任全商之分母，而$\frac{p'}{q'}$爲止於此全商所得之近值，則方程式 $x^2-Ny^2=\pm a$ 中之一必爲 $x=p'$，$y=q'$ 所適合.

再者，奇次近值皆小於 $\sqrt{N}$，偶次近值皆大於 $\sqrt{N}$；故若$\frac{p'}{q'}$爲偶次近值，則 $x=p'$，$y=q'$ 爲 $x^2-Ny^2=a$ 之一解；若$\frac{p'}{q'}$爲奇次近值，則 $x=p'$，$y=q'$ 爲 $x^2-Ny^2=-a$ 之一解.

***374.** 用前節所示方法，僅當將 $\sqrt{N}$ 化爲連分數之過程中 a 爲其中分母之一時，能求得方程式 $x^2-Ny^2=\pm a$ 中一式之解. 例如，將 $\sqrt{7}$ 化爲連分數，得

$$\sqrt{7}=2+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其全商之分母爲 3,2,3,1.

其連續各次近值爲

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{2},\ \frac{8}{3},\ \frac{37}{14},\ \frac{45}{17},\ \frac{82}{31},\ \frac{127}{48},\ \cdots\cdots\cdots$$

如取方程式

$x^2-7y^2=-3$，$x^2-7y^2=2$，$x^2-7y^2=-3$，$x^2-7y^2=1$，將見此等方程式可令 x 爲 2,3,5,8,37,45,82,127,……等值，y 爲 1,1,2,3,14,17,31,48,……等值適合之.

***375.** 故知 $x^2-Ny^2=\pm a$ 能確得正整數解之情形，甚爲有限. 但在數字問題中，即 a 非上示之分母時，亦有時由試驗求得其一正整

數解. 如是方程式 $x^2-7y^2=53$ 能爲 $y=2$, $x=9$ 所適合，不難看出. 既得一正整數解時，任若干之正整數解，均可照下節求得之.

***376.** 設 $x=f$, $y=g$ 爲方程 $x^2-Ny^2=a$ 之一解；又設 $x=h$, $y=k$ 爲方程式 $x^2-Ny^2=1$ 之任一解；於是

$$x^2-Ny^2=(f^2-Ng^2)(h^2-Nk^2)$$

$$=(fh\pm Ngk)^2-N(fk\pm gh)^2.$$

令 $\qquad x=fh\pm Ngk,\quad y=fh\pm gh,$

又指定 h, k 爲 §371 所示求得之諸値，可得任若干之解.

***377.** 此前皆假定 N 非完全平方；若 N 爲完全平方，則此方程式之形式爲 $x^2-n^2y^2=a$, 其解可立即求得如下.

設 $a=bc$, 其 b,c 爲二正整數，而 b 較大；於是

$$(x+ny)(x-ny)=bc.$$

令 $x+ny=b$, $x-ny=c$; 若從二方程式求得 x,y 之値爲正整數，則得此方程式之一解；其餘解可予 b, c 以一切可能之値求得之.

例. 求二正整數，設其平方差爲 60.

設 x,y 爲所求二數；則 $x^2-y^2=60$; 即 $(x+y)(x-y)=60$.

今 60 爲

1, 60; 2, 30; 3, 20; 4, 15; 5, 12; 6, 10

中任一對因子之積，故所求諸數由方程式

$$x+y=30,\qquad\qquad x+y=10,$$

$$x-y=2;\qquad\qquad x-y=6;$$

求得之. 由其他方程式僅能得 x,y 之分數値.

故所求數爲 16, 14; 或 8, 2.

推論. 若方程式

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=k$$

之左邊能析爲兩個一次有理因子，則其正整數解亦可用同法求得之.

*378. 若一般方程式內 a 或 b 爲零，或同爲零，照下例解之，較用 § 367 之法簡便.

例. 求 $2xy-4x^2+12x-5y=11$ 之正整數解.

以 x 表 y,

$$y=\frac{4x^2-12x+11}{2x-5}=2x-1+\frac{6}{2x-5}.$$

欲 y 爲整數，必須 $\frac{6}{2x-5}$ 爲整數；故必須 $2x-5$ 等於 ±1，或 ±2，或 ±3，或 ±6.

此中 $\pm2, \pm6$ 等値顯不可用；故 x 之可能値爲從 $2x-5=\pm1$. 及 $2x-5=\pm3$ 所求得者；故 x 之値爲 $3,2,4,1$.

依次取諸値，得

$$x=3,\ y=11;\ x=2,\ y=-3;\ x=4,\ y=6;\ x=1,\ y=-1;$$

故可能之解爲

$$x=3,\ y=11;\ x=4,\ y=9.$$

*379. 根據上述諸原理，可求知 x,y 之一次或二次 x,y 之函數，對於變數之何値爲完全平方. 此類問題於四世紀中葉首爲希臘數學家戴氏 (*Diophantine*) 所研究，故有時稱爲戴氏問題.

例 1. 求二正整數之通式，設其平方和減其積之差爲完全平方.

以 x 及 y 表二整數，於是

$$x^2-xy+y^2=z \text{ 設};$$

$$\therefore x(x-y)=z^2-y^2.$$

此方程式合於假定

$$mx=n(z+y),\ 及\ n(x-y)=m(z-y),$$

其 m 及 n 爲正整數.

故　$mx-ny-nz=0$，$nx+(m-n)y-mz=0$.

用十字乘法，由此二方程式得

$$\frac{x}{2mn-n^2}=\frac{y}{m^2-n^2}=\frac{z}{m^2-mn+n^2};$$

因已知方程式爲齊次式，故可以

$$x=2mn-n^2,\ y=m^2-n^2,\ z=m^2-mn+n^2.$$

爲其通解．此處 m 及 n 爲任二正整數，而 m 較大；設 $m=7$，$n=4$，得

$$x=40,\ y=33,\ z=37.$$

例 2．設三數成等差級數，且任二數之和爲完全平方，求三數之通式．

以 $x-y$，x，$x+y$ 表三數；又令

$$2x-y=p^2,\ 2x=q^2,\ 2x+y=r^2$$

於是　$$p^2+r^2=2q^2,$$

或　$$r^2-q^2=q^2-p^2.$$

此方程式合於二假定

$$m(r-q)=n(q-p),n(r+q)=m(q+p),$$

其 m 及 n 爲正整數．

用十字乘法，由二方程式得

$$\frac{p}{n^2+2mn-m^2}=\frac{q}{m^2+n^2}=\frac{r}{m^2+2mn-n^2}.$$

故可以

$$p=n^2+2mn-m^2,\ q=m^2+n^2,\ r=m^2+2mn-n^2$$

爲其通解；由是　$$x=\frac{1}{2}(m^2+n^2)^2,\ y=4mn(m^2-n^2),$$

而此三整數可求得矣．

由 x 之值，顯然 m 及 n 必同爲偶數或同爲奇數；又 x 之值必大於 y 之值，即是

$$(m^2+n^2)^2>8mn(m^2-n^2),$$

即　$$m^3(m-8n)+2m^2n^2+8mn^3+n^4>0;$$

若 $m>8n$，則此條件能適和．

若 $m=9$，$n=1$，則 $x=3362$，$y=2880$，而三數爲 482，3362，9242；其每二者之和爲 3844，6724，9604，各爲 62，82，98 之平方．

*習題 二十八.

求正整數解.

1. $5x^2-10xy+7y^2=77$.　　2. $7x^2-2xy+3y^2=27$.

3. $y^2-4xy+5x^2-10x=4$.　　4. $xy-2x-y=8$.

5. $3x+3xy-4y=14$.　　6. $4x^2-y^2=315$.

求最小正整數解：

7. $x^2-14y^2=1$.　　8. $x^2-19y^2=1$.　　9. $x^2=41y^2-1$.

10. $x^2-61y^2+5=0$.　　11. $x^2-7y^2-9=0$.

求正整數通解.

12. $x^2-3y^2=1$.　　13. $x^2-5y^2=1$.　　14. $x^2-17y^2=-1$.

求 x,y 使下式爲完全平方之通值.

15. $x^2-3xy+3y^2$.　　16. $x^2+2xy+2y^2$.　　17. $5x^2+y^2$.

18. 求二正整數,其平方差爲 105.

19. 求三正整數之通式,設此三數可表直三角形之三邊.

20. 求二正整數之通式,設共積加其平方和爲完全平方.

21. "設余有結婚未久之三德友,各携其夫人來訪,三友之名爲亨得利,克拉司,康內略;友婦之名爲機耳楚,戛特林,及安娜:但孰爲孰之妻,則忘之矣.彼等告余彼等在市場買猪,各人所買之猪之個數同於每猪所值之先令之數;亨得利較戛特林多買 23 隻,克拉司較機耳楚多買 11 隻;又每人皆較其妻多出三金泥 (*guineas*).願聞各人之妻名."(1743,英國數學問題雜誌).

22. 設 n 等於 k^2 或 k'^2-1,而 k 及 k' 爲 $\sqrt{2}$ 之奇次近值及偶次近值之分子,試證首 n 個自然數之和爲完全平方.

第二十九章

級數之和

380. 若干級數求和之例題，已於前數章中見之；今將業已說明之級數求和法作一綱要，以便覆閱.

(一) 等差級數，第四章.

(二) 等比級數，第五章.

(三) 一部等差一部等比之級數，§ 60.

(四) 自然數之平方和及其有關之級數，§ 68 至 § 75.

(五) 用不定係數法求和，§ 312.

(六) 循環級數，第二十四章.

今着手研究更為一般之方法；但在本章中，前述諸法亦不少仍資應用者.

381. 若級數之第 r 項能以 r 及 $r-1$ 之同一函數之差表之.則此級數之和甚易求得.

蓋設以

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n,$$

表此級數，以 S_n 表其和，又設其任意項 u_r 可寫為 v_r-v_{r-1} 之形式；

於是 $$S_n=(v_1-v_0)+(v_2-v_1)+(v_3-v_2)+\cdots\cdots$$
$$+(v_{n-1}-v_{n-2})+(v_n-v_{n-1})=v_n-v_0.$$

例. 求級數

$$\frac{1}{(1+x)(1+2x)}+\frac{1}{(1+2x)(1+3x)}+\frac{1}{(1+3x)(1+4x)}+\cdots\cdots$$

至 n 項之和.

設以 $u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$,

表此級數，則

$$u_1=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+2x}\right),$$

$$u_2=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+2x}-\frac{1}{1+3x}\right),$$

$$u_3=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+3x}-\frac{1}{1+4x}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+nx}-\frac{1}{1+\overline{n+1}.x}\right),$$

$\therefore$ 由加法，$S_n=\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1+\overline{n+1}.x}\right)$

$$=\frac{n}{(1+x)(1+\overline{n+1}.x)}.$$

382. 有時用第二十三章方法將 u_n 析爲部分分數，可得一適宜之變形.

例. 求下級數至 n 項之和.

$$\frac{1}{(1+x)(1+ax)}+\frac{a}{(1+ax)(1+a^2x)}+\frac{a^2}{(1+a^2x)(1+a^3x)}+\cdots$$

設其第 n 項$=\dfrac{a^{n-1}}{(1+a^{n-1}x)(1+a^nx)}=\dfrac{A}{1+a^{n-1}x}+\dfrac{B}{1+a^nx}$;

$$\therefore\ a^{n-1}=A(1+a^nx)+B(1+a^{n-1}x).$$

依次令 $1+a^{n-1}x$, $1+a^nx$ 等於零，得

$$A=\frac{a^{n-1}}{1-a},\quad B=-\frac{a^n}{1-a}.$$

故 $u_1=\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{a}{1+ax}\right),$

同法，得 $u_2=\dfrac{1}{1-a}\left(\dfrac{a}{1+ax}-\dfrac{a^2}{1+a^2x}\right),$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=\frac{1}{1-a}\left(\frac{a^{n-1}}{1+a^{n-1}x}-\frac{a^n}{1+a^nx}\right),$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1+x}-\frac{a^n}{1+a^nx}\right).$$

383. 求級數之 n 項之和，此級數之每項爲 r 個成等差級數之因子之積，又每項中之第一因子亦成同一之等差級數.

設以

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n,$$

表此級數，其

$$u_n=(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)(a+\overline{n+2}.b)\cdots(a+\overline{n+r-1}.b).$$

以 $n-1$ 代 n,

$$u_{n-1}=(a+\overline{n-1}.b)(a+nb)(a+\overline{n+1}.b)\cdots(a+\overline{n+r-2}.b);$$

$$\therefore\ (a+\overline{n-1}.b)u_n=(a+\overline{n+r-1}.b)u_{n-1}=v_n.$$

以 $n+1$ 代 n,

$$(a+\overline{n+r}.b)u_n=v_{n+1};$$

故，由減法，

$$(r+1)b.u_n=v_{n+1}-v_n.$$

同法，得

$$(r+1)b.u_{n-1}=v_n-v_{n-1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(r+1)b.u_2=v_3-v_2,$$

$$(r+1)b.u_1=v_2-v_1.$$

由加法，

$$(r+1)b.S_n=v_{n+1}-v_1;$$

即

$$S_n=\frac{v_{n+1}-v_1}{(r+1)b}$$

$$=\frac{(a+\overline{n+r}.b)u_n}{(r+1)b}+C.$$

此處 C 爲不含 n 之量，可由予 n 以某特値得之.

由上之結果，吾人得以下之法則:

寫出第 n 項，復添寫次一因子於其後，以添寫後之因子之個數及公差之積除之，最後加一常數.

注意 $C=-\dfrac{v_1}{(r+1)b}=-\dfrac{a}{(r+1)b}u_1$；但仍以不引用此結果，而用上示方法求 C 爲佳.

例．求級數

$$1.3.5.+3.5.7+5.7.9.+\cdots\cdots$$

至 n 項之和．

其第 n 項爲 $(2n-1)(2n+1)(2n+3)$；由上述法則

$$S_n=\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{4.2}+C.$$

令 $n=1$ 以定 C 之値；於是 S_n 即首項，得

$$15=\frac{1.3.5.7}{8}+C;\quad \therefore C=\frac{15}{8};$$

$$\therefore S_n=\frac{(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)}{8}+\frac{15}{8}.$$

$$=n(2n^3+8n^2+7n-2).$$

384. 上節級數之和，亦可用未定係數法［§312］或下法求得之．

因 $u_n=(2n-1)(2n+1)(2n+3)=8n^3+12n^2-2n-3$；

$\therefore S_n=8\Sigma n^3+12\Sigma n^2-2\Sigma n-3n$，（§70記法）；

$$\therefore S_n=2n^2(n+1)^2+2n(n+1)(2n+1)-n(n+1)-3n$$

$$=n(2n^3+8n^2+7n-2).$$

385. 注意 § 383 之法則，僅當級數每項因子成一等差級數，而各項之第一因子又成此同一等差級數時始能應用．

故級數

$$1.3.5+2.4.6+3.5.7+\cdots 至\ n\ 項之和,$$

可用前節提示之一法求之，而不可直接引用 § 383 之法則．此處

$$u_n=n(n+2)(n+4)=n(\overline{n+1}+1)(\overline{n+2}+2)$$

$$=n(n+1)(n+2)+2n(n+1)+n(n+2)+2n$$

$$=n(n+1)(n+2)+3n(n+1)+3n.$$

今可將此法則用於各項；由是

$$S_n=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)+n(n+1)(n+2)+\tfrac{3}{2}n(n+1)+C$$

$$=\tfrac{1}{4}n(n+1)(n+4)(n+5)$$，其常數爲零．

386. 求級數之 n 項之和，此級數之每項爲 r 個成等差級數之因子之積之倒數，且各項之第一因子又成此同一等差級數.

設以
$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n$$
表此級數，其
$$\frac{1}{u_n}=(a+nb)(a+\overline{n+1}\cdot b)(a+\overline{n+2}\cdot b)\cdots\cdots(a+\overline{n+r-1}\cdot b).$$
以 $n-1$ 代 n，得
$$\frac{1}{u_{n-1}}=(a+\overline{n-1}\cdot b)(a+nb)(a+\overline{n+1}\cdot b)\cdots(a+\overline{n+r-2}\cdot b);$$
$$\therefore\ (a+\overline{n+r-1}\cdot b)u_n=(a+\overline{n-1}\cdot b)u_{n-1}=v_n,$$
以 $n+1$ 代 n，得
$$(a+nb)u_n=v_{n+1};$$
故由減法，
$$(r-1)b\cdot u_n=v_n-v_{n+1}.$$
同法，得
$$(r-1)b\cdot u_{n-1}=v_{n-1}-v_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(r-1)b\cdot u_2=v_2-v_3,$$
$$(r-1)b\cdot u_1=v_1-v_2.$$
由加法，
$$(r-1)b\cdot S_n=v_1-v_{n+1};$$
即
$$S_n=\frac{v_1-v_{n+1}}{(r-1)b}=C-\frac{(a+nb)u_n}{(r-1)b},$$
其 C 爲不含 n 之量，可予 n 以某特值得之.

由是 $S_n=C-\dfrac{1}{(r-1)b}\cdot\dfrac{1}{a+\overline{n-1}\cdot b\cdots(a+\overline{n+r-1}\cdot b}.$

故此和可用下法則求得之：

寫出第 n 項而去其第一因子，以所餘因子之個數與公差之積除之，再變號而加一常數.

C 之值 $=\dfrac{v_1}{(r-1)b}=\dfrac{a+rb}{(r-1)b}u_1$；但在各項內予 n 以某特值以決定 C 之值.

例 1. 求級數

$$\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}+\frac{1}{3.4.5.6}+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項之和.}$$

其第 n 項爲$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$;

由上法則,

$$S_n=C-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

令 $n=1$, 得 $\dfrac{1}{1.2.3.4}=C-\dfrac{1}{3.2.3.4}$; 故 $C=\dfrac{1}{18}$;

$$\therefore S_n=\frac{1}{18}-\frac{1}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

令 n 爲無窮大,得 $S_\infty=\dfrac{1}{18}$.

例 2. 求級數

$$\frac{3}{1.2.4}+\frac{4}{2.3.5}+\frac{5}{3.4.6}+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項之和.}$$

此級數各項分母之第一因子 1, 2, 3,……雖成等差級數,但每分母之因子則否,故不能直接引用上述法則.此例可解之如下:

$$u_n=\frac{n+2}{n(n+1)(n+3)}=\frac{(n+2)^2}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+1)+3n+4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\frac{3}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

$$+\frac{4}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

此中每式,皆可取作一級數之第 n 項,而能運用上述法則.

$$\therefore S_n=C-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)};$$

令 $n=1$, 得

$$\frac{3}{1.2.4}=C-\frac{1}{4}-\frac{3}{2.3.4}-\frac{4}{3.2.3.4}; \text{ 故 } C=\frac{29}{36};$$

$$\therefore S_n=\frac{29}{36}-\frac{1}{n+3}-\frac{3}{2(n+2)(n+3)}-\frac{4}{3(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

387. 凡能直接運用 §§383,386 等法求得之級數和,恒可用下法求得之,此法有時稱爲求差法 (*Method of Substraction*).

例. 求級數

$$2.5+5.8+8.11+11.14+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項之和}.$$

此中之等差級數爲

$$2,5,8,11,14,\cdots\cdots$$

在級數之每項各引入其等差級數之次項爲一新因子;以 S' 表此級數,以 S 表已知級數;於是

$$S'=2.5.8+5.8.11+8.11.14.+\cdots+(3n-1)(3n+2)(3n+5);$$

$$\therefore\quad S'-2.5.8=5.8.11+8.11.14+11.14.17+\cdots\text{至}(n-1)\text{項}.$$

由減法,

$$-2.5.8=9[5.8+8.11+11.14+\cdots\text{至}(n-1)\text{項}]$$
$$-(3n-1)(3n+2)(3n+5),$$
$$-2.5.8=9[S-2.5]-(3n-1)(3n+2)(3n+5),$$
$$9S=(3n-1)(3n+2)(3n+5)-2.5.8+2.5.9,$$
$$S=n(3n^2+6n+1).$$

388. 若級數之第 n 項爲 n 之有理整函數,則可以便於運用 §383 之方法之形式表之.

因設 $\phi(n)$ 爲 n 之 p 次有理整函數,又設

$$\phi(n)=A+Bn+Cn(n+1)+Dn(n+1)(n+2)+\cdots\cdots,$$

其 $A,B,C,D,\cdots\cdots$爲 $p+1$ 個未定常量.

例. 一級數之通項爲 $n^4+6n^3+5n^2$, 求其 n 項之和.

設

$$n^4+6n^3+5n^2=A+Bn+Cn(n+1)+Dn(n+1)(n+2)$$
$$+En(n+1)(n+2)(n+3).$$

一觀便知 $A=0$, $B=0$, $E=1$; 依次令 $n=-2$, $n=-3$,得$C=-6$, $D=0$. 由是

$$n^4+6n^3+5n^2=n(n+1)(n+2)(n+3)-6n(n+1).$$

故　$$S_n=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-2n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n^2+7n+2).$$

多角數及擬形數.

389. 首項 1，公差 b 之等差級數，其 n 項和爲 $n+\frac{1}{2}n(n-1)b$，若於此式內，令 b 爲 0，1，2，3，…等值，則得

$$n,\ \tfrac{1}{2}n(n+1),\ n^2,\ \tfrac{1}{2}n(3n-1),\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

此爲二級，三級，四級，五級，…多角數之第 n 項；一級多角數之各項皆爲 1．二級，三級，四級，五級，…多角數有時稱爲直線數，三角數，四角數，五角數，………

390. 求 r 級多角數首 n 項之和.

r 級多角數之第 n 項爲 $n+\frac{1}{2}n(n-1)(r-2)$；

$$\therefore\ S_n=\Sigma n+\tfrac{1}{2}(r-2)\Sigma(n-1)n$$

$$=\tfrac{1}{2}n(n+1)+\tfrac{1}{6}(r-2)(n-1)n(n+1)\qquad[§383]$$

$$=\tfrac{1}{6}n(n+1)\{(r-2)(n-1)+3\}.$$

391. 若一級數之第 n 項爲級數

$$1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之 n 項和，則此級數爲

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

若又一級數之第 n 項復爲此級數之 n 項和 $\frac{n(n+1)}{2}$，則該級數爲

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

如此進行可得一串級數，串中任一級數之第 n 項爲其前級數 n 項之和．如此作成之級數串稱爲一級，二級，三級……之擬形數.

392. 求 r 級擬形數之第 n 項及 n 項之和.

一級擬形數之第 n 項爲 1；二級擬形數之第 n 項爲 n，三級擬形數之第 n 項爲 Σn，即 $\frac{1}{2}n(n+1)$；四級擬形數之第 n 項爲 $\Sigma\frac{n(n+1)}{1.2}$，即$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$； 五級擬形數之第 n 項爲 $\Sigma\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$，即 $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{\lfloor 4}$；類推.

故知 r 級擬形數之第 n 項爲

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+r-2)}{\lfloor r-1}，即\frac{\lfloor n+r-2}{\lfloor n-1\ \lfloor r-1}.$$

又 r 級擬形數之 n 項和爲

$$\frac{n(n+1)(n+2)\cdots\cdots\cdots(n+r-1)}{\lfloor r},$$

此爲 $r+1$ 級擬形數之第 n 項.

註. 任何級擬形數之 n 項和，若用 §383 之法則求之，其常數 C 恒爲零.

393. 擬形數之性質，巴斯加氏 (*Pascal*) 曾於 1665 年發表之三角擬形數論 (*Traité du triangle arithmétique*) 中用之，故深剏歷史之興趣.

下表爲最簡形式之算術三角形.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1⋯
1	2	3	4	5	6	7	8	9⋯	
1	3	6	10	15	21	28	36⋯		
1	4	10	20	35	56	84⋯			
1	5	15	35	70	126⋯				
1	6	21	56	126⋯					
1	7	28	84⋯						
1	8	36⋯							
1	9⋯								
1⋯									

巴斯加氏構成此三角形中諸數之法則如下：

任一數為上一數及左一數之和；

如 $15=5+10$， $28=7+21$， $126=56+70$.

由諸數構成之方法，可知諸連續之橫列或縱行依次為一級，二級，三級，……之擬形數.

引一線俾由頂列算起之列數與由左行算起之行數相同者，名曰基線，而此基線由左頂角起以數碼記之. 如第 6 基線為過 1,5,10,10,5,1 所作之直線，此等之數共有 6 個，且為 $(1+x)^5$ 之展開式中各項之係數.

此種數之性質，巴斯加氏研究極精，尤其運用其算術三角形發明組合原理，而証明若干適遇法之有興趣命題. 此點在屠德亨滔之適遇法中 (*Todhunter's History of Probability*) 第二章中論之甚詳.

394. 當確知級數之項數時，吾人用符號 Σ 表其總和. 否則用下符號表之最宜，該號指出所求和之上下兩限.

設 $\phi(x)$ 表 x 之任意函數，於是 $\sum\limits_{x=l}^{x=m}$ 表一級數之總和，此級數之諸項，由依次在 $\phi(x)$ 內，令 x 為 l 至 m (l, m 在內) 之所有正整數得之.

例如，求級數之所有項之和，其諸項由在

$$\frac{(p-1)(p-2)\cdots\cdots\cdots(p-r)}{\underline{|r}}$$

內，令 p 為從 $r+1$ 至 p (迄此數在內) 之所有整數得之.

將分子之諸因子，依遞昇次序寫之，

$$所求和=\sum_{p=r+1}^{p=P}\frac{(p-r)(p-r+1)\cdots(p-1)}{\underline{|r}}$$

$$=\frac{1}{\underline{|r}}\{1.2.3\cdots\cdots r+2.3.4\cdots\cdots(r+1)+\cdots+(p-r)(p-r+1)$$
$$\cdots\cdots(p-1)\}$$

$$=\frac{1}{\underline{|r}}\cdot\frac{(p-r)(p-r+1)\cdots(p-1)p}{r+1},\qquad [\S\ 383.]$$

$$=\frac{p(-1)(p-2)\cdots(p-r)}{\underline{|r+1}}.$$

當 p 爲從 1 至 r（迄止數在內）諸值時，已知式爲零，故此結果可寫爲

$$\sum_{p=r+1}^{p=P}\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-r)}{\underline{|r}}=\frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-r)}{\underline{|r+1}}.$$

習　　題　　二十九.A.

求下列級數之 n 項之和.

1.　$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots$

2.　$1.2.3.4+2.3.4.5+3.4.5.6+\cdots\cdots$

3.　$1.4.7+4.7.10.+7.10.13+\cdots\cdots$

4.　$1.4.7+2.5.8+3.6.9+\cdots\cdots$

5.　$1.5.9+2.6.10+3.7.11+\cdots\cdots$

求下列級數之 n 項和及無窮項之和:

6.　$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots$

7.　$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\cdots\cdots$

8.　$\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+\cdots\cdots$

9.　$\frac{1}{1.4.7}+\frac{1}{4.7.10}+\frac{1}{7.10.13}+\cdots\cdots$

10.　$\frac{4}{1.2.3}+\frac{5}{2.3.4}+\frac{6}{3.4.5}+\cdots\cdots$

11.　$\frac{1}{3.4.5}+\frac{2}{4.5.6}+\frac{3}{5.6.7}+\cdots\cdots$

12.　$\frac{1}{1.2.3}+\frac{3}{2.3.4}+\frac{5}{3.4.5}+\frac{7}{4.5.6}+\cdots\cdots$

求下列各級數之 n 項和：

13. $1.3.2^2+2.4.3^2+3.5.4^2+\cdots\cdots$

14. $(n^2-1^2)+2(n^2-2^2)+3(n^2-3^2)+\cdots\cdots$

求級數之 n 項和，設其第 n 項爲

15. $n^2(n^2-1)$.

16. $(n^2+5n+4)(n^2+5n+8)$.

17. $\dfrac{n^2(n^2-1)}{4n^2-1}$.

18. $\dfrac{n^4+2n^3+n^2-1}{n^2+n}$.

19. $\dfrac{n^3+3n^2+2n+2}{n^2+2n}$.

20. $\dfrac{n^4+n^2+1}{n^4+n}$.

21. 試證 r 級擬形數之第 n 項等於 n 級擬形數之第 r 項.

22. 設 r 級擬形數之第 n 項等於 $r-2$ 級擬形數之第 $n+2$ 項，試證 $r=n+2$.

23. 試證由一級至 r 級（迄止數在內）之一切多角數中首 n 項之和爲

$$\frac{(r-1)n(n+1)}{12}(rn-2n-r+8).$$

用逐差法求和

395. 設 u_n 表 n 之某有理整函數，又設當 n 之值依次爲 $1,2,3,4,\cdots\cdots$ 時，u_n 之值爲 u_1，u_2，u_3，u_4，$\cdots\cdots$.

茲研究已知 u_1，u_2，u_3，u_4，$\cdots\cdots$ 中之數項而求 u_n 之方法.

在級數 u_1，u_2，u_3，u_4，$\cdots\cdots$ 內，將每項從其緊接之後項減去，則得一第二級數.

如此求得之級數

$$u_2-u_1,\ u_3-u_2,\ u_4-u_3,\ u_5-u_4,\cdots\cdots$$

稱爲一級逐差級數，爲便利表之以

$$\triangle u_1,\ \triangle u_2,\ \triangle u_3,\ \triangle u_4,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

將此級數之每項從其緊接之後項減去，得

$$\triangle u_2-\triangle u_1,\triangle u_3-\triangle_2,\triangle u_4-\triangle u_3,\cdots\cdots\cdots$$

此稱爲二級逐差級數，表之以

$$\triangle_2 u_1,\ \triangle_2 u_2,\ \triangle_2 u_3,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由此級數可作成三級，四級，五級，………之逐差級數，各級數之通項爲 $\triangle_3 u_r$，$\triangle_4 u_r$，$\triangle_5 u_r$，………

就各次諸逐差級數

$$
\begin{array}{cccccc}
u_1, & u_2, & u_3, & u_4, & u_5, & u_6,\cdots\cdots \\
\triangle u_1, & \triangle u_2, & \triangle u_3, & \triangle u_4, & \triangle u_5,\cdots\cdots & \\
\triangle_2 u_1, & \triangle_2 u_2, & \triangle_2 u_3, & \triangle_2 u_4,\cdots\cdots & & \\
\triangle_3 u_1, & \triangle_3 u_2, & \triangle_3 u_3,\cdots\cdots & & & \\
\cdots\cdots & & & & &
\end{array}
$$

等之構成法則觀之，可知任一級數之任一項均等於其緊接之一項加其左邊之下一項.

如 $u_2=u_1+\triangle u_1$，及 $\triangle u_2=\triangle u_1+\triangle_2 u_1$.

因 $u_2+\triangle u_2=u_3$，故由加法，得

$$u_3=u_1+2\triangle u_1+\triangle_2 u_1.$$

用同一法則，以二級，三級，四級逐差級數代替一級，二級，三級逐差級數，得 $\triangle u_3=\triangle u_1+2\triangle_2 u_1+\triangle_3 u_1$.

因 $u_3+\triangle u_3=u_4$，由加法，得

$$u_4=u_1+3\triangle u_1+3\triangle_2 u_1+\triangle_3 u_1.$$

迄今爲止，其數字係數與二項式定理者遵從同一定律．茲用數學歸納法證明其永遠如此．設

$$u_{n+1}=u_1+n\triangle u_1+\frac{n(n-1)}{1.2}\triangle_2 u_1+\cdots\cdots+{}^nC_r\triangle_r u_1+\cdots+\triangle_n u_1;$$

以二級至 $n+2$ 級逐差級數代替一級至 $n+1$ 級逐差級數，得

$$\triangle u_{n+1}=\triangle u_1+n\triangle_2 u_1+\frac{n(n-1)}{1.2}\triangle_3 u_1+\cdots\cdots$$
$$+{}^nC_{r-1}\triangle_r u_1+\cdots+\triangle_{n+1}u_1.$$

因 $u_{n+1}+\triangle u_{n+1}=u_{n+2}$，由加法得

$$u_{n+2}=u_1+(n+1)\triangle u_1+\cdots+({}^nC_r+{}^nC_{r-1})\triangle_r u_1+\cdots+\triangle_{n+1}u_1.$$

但 $^nC_r+{}^nC_{r-1}=\left(\frac{n-r+1}{r}+1\right)\times{}^nC_{r-1}=\frac{n+1}{r}\times{}^nC_{r-1}$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(\overline{n+1}-r+1)}{1.2.3\cdots(r-1)r}={}^{n+1}C_r.$$

故構成法若適用於 u_{n+1}，亦必適用於 u_{n+2}，但此法則能適用於 u_4，故亦能適用於 u_5，故可適用於任何情形。因此

$$u_n=u_1+(n-1)\triangle u_1+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\triangle_2u_1+\cdots\cdots\cdots+\triangle_{n-1}u_1.$$

396. 以 u_1 之逐差表出下級數之 n 項和

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

設級數 $u_1,\ u_2,\ u_3,\cdots\cdots\cdots$為級數

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之一級逐差級數，於是 v_{n+1} 恆等於

$$(v_{n+1}-v_n)+(v_n-v_{n-1})+\cdots\cdots\cdots+(v_2-v_1)+v_1;$$

$$\therefore\ v_{n+1}=u_n+u_{n-1}+\cdots\cdots\cdots+u_2+u_1+v_1.$$

故在級數

$$\begin{array}{ccccc} 0, & v_2, & v_3, & v_4, & v_5,\cdots\cdots\cdots \\ & u_1, & u_2, & u_3, & u_4,\cdots\cdots\cdots \\ & & \triangle u_1, & \triangle u_2, & \triangle u_3,\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

中，其構成法則與前節者同；

$$\therefore\ v_{n+1}=0+nu_1+\frac{n(n-1)}{1.2}\triangle u_1+\cdots+\triangle_nu_1;$$

即 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$

$$=nu_1+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\triangle u_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\triangle_2u_1+\cdots+\triangle_nu_1.$$

本節與前節之公式，可以小異之形式表之如下：設 a 為原級數之首項，d_1，d_2，d_3，$\cdots\cdots\cdots$為連續各級逐差之首項，則求原級數之第 n 項之公式為

$$a+(n-1)d_1+\frac{(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}d_2+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|3}}d_3+\cdots;$$

求其 n 項和之公式爲

$$na+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}d_1+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}d_2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}$$
$$d_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例． 求級數

$$12,\ 40,\ 90,\ 168,\ 280,\ 432,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之通項及其 n 項和．

其各級逐差級數依次爲

$$\begin{array}{l} 28,\ 50,\ 78,\ 112,\ 152,\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \quad 22,\ 28,\ 34,\ 40,\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad 6,\ \ 6,\ \ 6,\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\ \ 0,\ \ 0,\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

故其第 n 項 $=12+28(n-1)+\dfrac{22(n-1)(n-2)}{\underline{|2}}$

$$+\frac{6(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|3}}$$
$$=n^3+5n^2+6n.$$

其 n 項之和今可寫出 $\Sigma n^3+5\Sigma n^2+6\Sigma n$ 之值以得之．或用本節公式，得

$$S_n=12n+\frac{28n(n-1)}{\underline{|2}}+\frac{22n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}$$
$$+\frac{6n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}$$
$$=\frac{n}{12}(3n^2+26n+69n+46),$$
$$=\frac{1}{12}n(n+1)(3n^2+23n+46).$$

397． 能用此法求和之級數，僅限於求各級逐差時最後能得一各項相等之級數者．若級數之第 n 項爲 n 之有理整函數，則此條件恆能滿足．

爲簡便計，今舉一三次函數爲例，但其證法則甚爲一般．

設此級數爲

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+u_n+u_{n+1}+u_{n+2}+u_{n+3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其中 $\qquad u_n=An^3+Bn^2+Cn+D,$

又設 v_n，w_n，z_n 表一級，二級，三級逐差級數之第 n 項；

於是 $v_n=u_{n+1}-u_n=A(3n^2+3n+1)+B(2n+1)+C$;

即 $$v_n=3An^2+(3A+2B)n+A+B+C;$$

同理 $$w_n=v_{n+1}-v_n=3A(2n+1)+3A+2B$$

$$z_n=w_{n+1}-w_n=6A.$$

故其三級逐差級數之諸項相等；一般言之，若原級數之第 n 項爲 p 次，則其 p 級逐差級數之諸項相等.

反之，若 p 級逐差級數之諸項相等，則此級數之第 n 項爲 n 之 p 次有理整函數.

例. 求級數 $-1,-3,3,23,63,129,\cdots\cdots$ 之第 n 項.

其各級逐差級數依次爲

$$-2,\ 6,\ 20,\ 40,\ 66,\cdots\cdots\cdots$$

$$8,\ 14,\ 20,\ 26,\cdots\cdots\cdots$$

$$6,\ 6,\ 6,\cdots\cdots\cdots$$

故其三級逐差級數之諸項相等，因此，設

$$u_n=A+Bn+Cn^2+Dn^3,$$

其 A,B,C,D 爲待定常數.

令 n 依次爲 $1,2,3,4$ 等值，則得四個聯立方程式，解之，得 $A=3$, $B=-3$, $C=-2$, $D=1$.

故此級數之通項爲 $3-3n-2n^2+n^3$.

398. 若 a_n 爲 n 之 p 次有理整函數，則級數 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 爲循環級數，其關係式爲 $(1-x)^{p+1}$.

設 S 表此級數之和；於是

$$S(1-x)=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1)x^2+\cdots+(a_n-a_{n-1})x^n-a_nx^{n+1}$$
$$=a_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n-a_nx^{n+1},(設);$$

此處 $b_n=a_n-a_{n-1}$，故 b_n 爲 n 之 $p-1$ 次函數.

以 $x-1$ 乘上級數，得

$$S(1-x)^2$$
$$=a_0+(b_1-a_0)x+(b_2-b_1)x^2+\cdots+(b_n-b_{n-1})x^n-(a_n+b_n)x^{n+1}$$
$$+a_nx^{n+2}$$
$$=a_0+(b_1-a_0)x+c_2x^2+c_3x^3\cdots+c_nx^n-(a_n+b_n)\ x^{n+1}+a_nx^{n+2},$$

此處 $c_n=b_n-b_{n-1}$，因此 c_n 爲 n 之 $p-2$ 次函數.

故經連續乘以 $1-x$ 之後．其第一，第二，第三，………乘積內 x^n 之係數爲係數之一級，二級，三級逐差級數……之通項．

由假設，a_n 爲 n 之 p 次有理整函數；故以 $1-x$ 施乘 p 次後，必得一級數，此級數，除首 p 項及末 p 項之外，成一各項係數相同之等比級數．[§397].

如是 $S(1-x)^p=k(x^p+x^{p+1}+\cdots\cdots+x^n)+f(x)$，此處 k 爲常數，$f(x)$ 代表此乘積之首 p 項及末 p 項．

$$\therefore\ S(1-x)^p=\frac{k(x^p-x^{n+1})}{1-x}+f(x);$$

即
$$S=\frac{kx^p(1-x^{n-p+1})+(1-x)f(x)}{(1-x)^{p+1}};$$

故此級數爲循環級數，關係式爲 $(1-x)^{p+1}$．[§325.]

如不知通項，則 a_n 之乘方可用 § 397 方法求得之．

例．求級數 $3+5x+9x^2+15x^3+23x^4+33x^5+\cdots\cdots$ 之母函數．

構成諸係數之各級逐差級數，得

$$2,4,6,8,10,\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2,2,2,2,\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

其二級逐差級數之諸項相同，故 a_n 爲 n 之二次有理整函數；其關係式爲 $(1-x)^3$．於是

$$\begin{aligned}
S&=3+5x+9x^2+15x^3+23x^4+33x^5+\cdots\cdots\\
-3xS&=\quad-9x-15x^2-27x^3-45x^4-69x^5-\cdots\cdots\\
3x^2S&=\qquad\quad 9x^2+15x^3+27x^4+45x^5+\cdots\cdots\\
-x^3S&=\qquad\qquad\quad-3x^3-5x^4-9x^5-\cdots\cdots
\end{aligned}$$

由加法，
$$(1-x)^3S=3-4x+3x^2;$$

$$\therefore S=\frac{3-4x+3x^2}{(1-x)^3}.$$

399. 在第二十四章中，已知循環級數之母函數爲一有理分數，其分母爲關係式．其分母能析爲因子 $(1-ax)(1-bx)(1-cx)\cdots\cdots$，則此母函數析爲部分分數，其形式爲

$$\frac{A}{1-ax}+\frac{B}{1-bx}+\frac{C}{1-cx}+\cdots\cdots\cdots$$

其中之每分數，皆能用二項式定理展開爲等比級數之形式；故在此情形下，循環級數可以若干等比級數之和表之．

但若關係式含任一因子 $1-ax$ 多於一次，則與此重因子相當之部分分數之形式爲 $\frac{A_2}{(1-ax)^2}$，$\frac{A_3}{(1-ax)^3}$，$\cdots\cdots\cdots$，用二項式定理展開時不成等比級數，故此時循環級數不能以若干等比級數之和表之．

400. 等比級數 a，ar，ar^2，ar^3，ar^4，ar^5，$\cdots\cdots\cdots$之連續各級逐差級數爲

$$a(r-1),\ a(r-1)r,\ a(r-1)r^2,\ a(r-1)r^3,\cdots\cdots$$

$$a(r-1)^2,a(r-1)^2r,a(r-1)^2r^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

各自成一等比級數，其公比爲 r，與原級數同．

401. 今考究一級數，其中

$$u_n=ar^{n-1}+\phi(n),$$

此處 $\phi(n)$ 爲 n 之 p 次有理整函數，並由此級數構成連續各級逐差級數．任意逐差之每項，不外爲兩部之和，其一由形如 ar^{n-1} 之項所產生，其他由原級數內形如 $\phi(n)$ 之項所產生．今 $\phi(n)$ 爲 $p+1$ 次，其由 $\phi(n)$ 所生之部分在 $p+1$ 級及其後之逐差級數中爲零，故此級數將爲等比級數，其公比爲 r．[§400.]

故若級數之首數項已知，又若此數項之 p 級逐差成一等比級數，其公差為 r，則此級數之通項，可假定為 $ar^{n-1}+f(n)$，此處 $f(n)$ 為 n 之 $p-1$ 次有理整函數.

例. 求級數 10, 23, 60, 169, 494, ………
之第 n 項.

其連續各級逐差為

$$13,\ 37,\ 109,\ 335,\ \cdots\cdots\cdots$$

$$24,\ 72,\ 216,\ \cdots\cdots\cdots$$

如是其二級逐差為等比級數，其公比為 3，其通項可假定為

$$u_n=a.3^{n-1}+bn+c.$$

依此令 n 為 1, 2, 3, 等值以定常數 a, b, c. 得

$$a+b+c=10,\ 3a+2b+c=23,\ 9a+3b+c=60;$$

由是　　$a=6,\quad b=1,\quad c=3.$

故　　$u_n=6.3^{n-1}+n+3=2.3^n+n+3.$

402. 在上舉循環級數之諸例中，當構成連續各級逐差時，吾人得一級數，其法則不難由觀察得之，因之能求得一通式，以為原級數之第 n 項.

但若此循環級數為若干等比級數之和，各級數之公比為$a,b,c\cdots\cdots$，其通項之形式為 $Aa^{n-1}+Bb^{n-1}+Cc^{n-1}$，由是其連續各級逐差級數之通項之形式相同；即所有逐差級數均與原級數遵從同一法則. 此時求級數之通項，必須重循第二十四章所示之更一般之方法. 但當係數龐大時，非經計算之勞，不能求出其關係式；故須先寫出若干連續各級之逐差級數，以觀其是否能達到一級數，其各項間之法則為顯而易知者.

403. 今再舉數例，以為前此諸原則更進一步之說明.

例．　求級數

$$\frac{5}{1.2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{7}{2.3}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{9}{3.4}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{11}{4.5}\cdot\frac{1}{3^4}+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項之和.}$$

此處　$u_n=\dfrac{2n+3}{n(n+1)}\cdot\dfrac{1}{3^n}.$

設　$\dfrac{2n+3}{n(n+1)}=\dfrac{A}{n}+\dfrac{B}{n+1},$

得　$A=3,\quad B=-1.$

故　$u_n=\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\dfrac{1}{3^n}=\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{3^{n-1}}-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{3^n},$

由是　$S_n=1-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{3^n}.$

例2．　求級數

$$\frac{1}{3}+\frac{3}{3.7}+\frac{5}{3.7.11}+\frac{7}{3.7.11.15}+\cdots\cdots\text{至 } n \text{ 項之和.}$$

其第 n 項爲$\dfrac{2n-1}{3.7.11\cdots\cdots(4n-5)(4n-1)}.$

設
$$\frac{2n-1}{3.7\cdots\cdots(4n-5)(4n-1)}=\frac{A(n+1)+B}{3.7\cdots\cdots\cdots4n-1}-\frac{An+B}{3.7\cdots\cdots(4n-5)}.$$

$$\therefore\ 2n-1=An+(A+B)-(An+B)(4n-1).$$

等置係數，得三個方程式，各含二未知數 A及B，如能求得 A,B 之值適合所有此三方程式，則吾人之假定無誤矣．

等置 n^2 之係數，得 $A=0$．

等置常數項，得 $-1=2B$；即 $B=-\frac{1}{2}$；此 A, B 之值能適合第三方程式．

$$\therefore\ u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.7\cdots\cdots(4n-5)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3.7\cdots\cdots(4n-5)(4n-1)};$$

故　$S_n=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3.7.11\cdots\cdots(4n-1)}.$

例3．　求級數

$$6.9+12.21+20.37+30.57+42.81+\cdots\text{至 } n \text{ 項之和.}$$

用 §396 或 §397 之方法，求得級數

$$6,\ 12,\ 20,\ 30,\ 42,\cdots\cdots\cdots$$

之第 n 項爲 n^2+3n+2，又級數

$$9,\ 21,\ 37,\ 57,\ 81,\cdots\cdots\cdots$$

之第 n 項爲 $2n^2+6n+1$．

故 $u_n=(n+1)(n+2)\{2n(n+3)+1\}$
$=2n(n+1)(n+2)(n+3)+(n+1)(n+2)$;

$\therefore\quad S_n=\frac{2}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)+\frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)-2.$

例4. 求級數

$$2.2+6.4+12.8+20.16+30.32+\cdots\cdots$$

之 n 項之和.

級數 2, 6, 12, 20, 30,………之第 n 項爲 n^2+n;

故
$$u_n=(n^2+n)2^n.$$

假定

$(n^2+n)2^n=(An^2+Bn+C)2^n-\{A(n-1)^2+B(n-1)+C\}2^{n-1}$;

消去 2^{n-1}, 並等置 n 同次冪之係數, 得

$$2=A,\ 2=2A+B,\ 0=C-A+B;$$

由是
$$A=2,\ B=-2,\ C=4.$$

$\therefore\quad u_n=(2n^2-2n+4)2^n-\{2(n-1)^2-2(n-1)+4\}2^{n-1}$;

$S_n=(2n^2-2n+4)2^n-4=(n^2-n+2)2^{n+1}-4.$

習 題 二十九.B.

求下列各級數之第 n 項及 n 項之和:

1. 4, 14, 30, 52, 80, 114,……
2. 8, 26, 54, 92, 140, 198,……
3. 2, 12, 36, 80, 150, 252,……
4. 8, 16, 0, −64, −200, −432,……
5. 30, 144, 420, 960, 1890, 3360,……

求下列各級數之母函數:

6. $1+3x+7x^2+13x^3+21x^4+31x^5+\cdots\cdots$
7. $1+2x+9x^2+20x^3+35x^4+54x^5+\cdots\cdots$
8. $2+5x+10x^2+17x^3+26x^4+37x^5+\cdots\cdots$
9. $1-3x+5x^2-7x^3+9x^4-11x^5+\cdots\cdots$
10. $1^4+2^4x+3^4x^2+4^4x^3+5^4x^4+\cdots\cdots$

求下列各無窮級數之和:

11. $\frac{1.2}{3}+\frac{2.3}{3^2}+\frac{3.4}{3^3}+\frac{4.5}{3^4}+\cdots\cdots$

12. $1^2-\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{5^2}-\frac{4^2}{5^3}+\frac{5^2}{5^4}-\frac{6^2}{5^5}+\cdots\cdots$

求下列各級數之通項及 n 項之和:

13. 9, 16, 29, 54, 103,……

14. -3, -1, 11, 39, 89, 167,……

15. 2, 5, 12, 31, 86,……

16. 1, 0, 1, 8, 29, 80, 193,……

17. 4, 13, 35, 94, 262, 755……

求下列各級數之 n 項之和.

18. $1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\cdots\cdots$

19. $1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+\cdots\cdots$

20. $\frac{3}{1.2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{2.3}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{5}{3.4}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{6}{4.5}\cdot\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots$

21. $\frac{1^2}{2.3}\cdot 4+\frac{2^2}{3.4}\cdot 4^2+\frac{3^2}{4.5}\cdot 4^3+\frac{4^2}{5.6}\cdot 4^4+\cdots\cdots$

22. $3.4+8.11+15.20+24.31+35.44+\cdots\cdots$

23. $1.3+4.7+9.13+16.21+25.31+\cdots\cdots$

24. $1.5+2.15+3.31+4.53+5.81+\cdots\cdots$

25. $\frac{1}{1.3}+\frac{2}{1.3.5}+\frac{3}{1.3.5.7}+\frac{4}{1.3.5.7.9}+\cdots\cdots$

26. $\frac{1.2}{\underline{|3}}+\frac{2.2^2}{\underline{|4}}+\frac{3.2^3}{\underline{|5}}+\frac{4.2^4}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$

27. $2.2+4.4+7.8+11.16+16.32+\cdots\cdots$

28. $1.3+3.3^2+5.3^3+7.3^4+9.3^5+\cdots\cdots$

29. $\frac{1}{2.4}+\frac{1.3}{2.4.6}+\frac{1.3.5}{2.4.6.8}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}+\cdots\cdots$

30. $\frac{2}{1.2}+\frac{5}{2.3}\cdot 2+\frac{10}{3.4}\cdot 2^2+\frac{17}{4.5}\cdot 2^3+\cdots\cdots$

31. $\frac{4}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5}{2.3.4}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{6}{3.4.5}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots\cdots$

32. $\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{5}{\underline{|4}}+\frac{11}{\underline{|5}}+\frac{19}{\underline{|6}}+\cdots\cdots$

33. $\frac{19}{1.2.3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{28}{2.3.4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{39}{3.4.5}\cdot\frac{1}{16}+\frac{52}{4.5.6}\cdot\frac{1}{32}+\cdots\cdots$

404. 尙有若干級數，其和無一般之求法．在某種情形下，前之方法容有需要改變之處；在其他之情形下，則求和之方法，視某已知展開式之性質而定．如由二項式定理，對數定理，及指數定理所得之展開式是．

例1． 求下無窮級數之和．

$$\frac{2}{1!}+\frac{12}{2!}+\frac{28}{3!}+\frac{50}{4!}+\frac{78}{5!}+\cdots\cdots$$

級數 2,12,28,50,78……之第 n 項爲 $3n^2+n-2$；故

$$u_n=\frac{3n^2+n-2}{n!}=\frac{3n(n-1)+4n-2}{n!}$$

$$=\frac{3}{(n-2)!}+\frac{4}{(n-1)!}-\frac{2}{n!}.$$

令 n 之值依次爲 1,2,3,4,……等，得

$$u_1=4-\frac{2}{1!};\quad u_2=3+\frac{4}{1!}-\frac{2}{2!};\quad u_3=\frac{3}{1!}+\frac{4}{2!}-\frac{2}{3!};$$

餘類推．

由是 $S_\infty=3e+4e-2(e-1)=5e+2.$

例2． 設 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots\cdots+c_nx^n$，試求

$$1^2c_1+2^2c_2+3^2c_3+\cdots\cdots\cdots n^2c_n \text{ 之值．}$$

按照 §398，不難證明

$$1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\cdots+n^2x^{n-1}+\cdots=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

又 $c_n+c_{n-1}x+\cdots c_2x^{n-2}+c_1x^{n-1}+c_0x^n=(1+x)^n.$

將此兩式相乘；則所求級數等於 $\dfrac{(1+x)^{n+1}}{(1-x)^3}$ 中 x^{n-1} 之係數，即

$\dfrac{(2-\overline{1-x})^{n+1}}{(1-x)^3}$ 中 x^{n-1} 之係數．

在此展開式中，其含 x^{n-1} 項，僅能由

$$2^{n+1}(1-x)^{-3}-(n+1)2^n(1-x)^{-2}+\frac{(n+1)n}{2!}2^{n-1}(1-x)^{-1}$$

中得之．

$$\therefore\ \text{所求級數}=\frac{n(n+1)}{2!}2^{n+1}-n(+1)2^n+\frac{n(n+1)}{2!}2^{n-1}$$

$$=n(n+1)2^{n-2}.$$

例 3. 設 $b=a+1$，而 n 爲正整數，試求下級數之值.

$$b^n-(n-1)ab^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}a^2b^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}a^3b^{n-6}+\cdots\cdots$$

由二項式定理，可知

$1,\quad n-1,\quad \dfrac{(n-3)(n-2)}{\underline{|2}},\quad \dfrac{(n-5)(n-4)(n-3)}{\underline{|3}},\cdots\cdots\cdots\cdots$ 各爲 $(1-x)^{-1}$，$(1-x)^{-2}$，$(1-x)^{-3}$，$(1-x)^{-4}$，$\cdots\cdots\cdots$之展開式中 x^n，$x^{n-2},x^{n-4},x^{n-6},\cdots\cdots\cdots$之係數. 故所求和等於級數

$$\frac{1}{1-bx}-\frac{ax^2}{(1-bx)^2}+\frac{a^2x^4}{(1-bx)^3}-\frac{a^3x^6}{(1-bx)^4}+\cdots\cdots\cdots$$

之展開式中 x^n 之係數. 此所設級數之項數雖屬有限，但可推及於無窮項.

$$\text{但此級數之和}=\frac{1}{1-bx}\div\left(1+\frac{ax^2}{1-bx}\right)=\frac{1}{1-bx+ax^2}.$$
$$=\frac{1}{1-(a+1)x+ax^2}\text{，因 } b=a+1.$$
$$\text{故所求級數}=\frac{1}{(1-x)(1-ax)}\text{中 } x^n \text{ 之係數}$$
$$=\frac{1}{a-1}\left(\frac{a}{1-ax}-\frac{1}{1-x}\right)\text{ 中 } x^n \text{ 之係數}$$
$$=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}.$$

例4. 設以 a，b，c 表級數

$$1+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^6}{\underline{|6}}+\cdots\cdots,\quad x+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\frac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots,\quad \frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}+\frac{x^8}{\underline{|8}}+\cdots\cdots,$$

試證 $a^3+b^3+c^3-3abc=1$.

設 ω 爲 1 之虛立方根，則

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).$$

今 $$a+b+c=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\frac{x^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$$
$$=e^x;$$

又 $$a+\omega b+\omega^2c=1+\omega x+\frac{\omega^2x^2}{\underline{|2}}+\frac{\omega^3x^3}{\underline{|3}}+\frac{\omega^4x^4}{\underline{|4}}+\frac{\omega^5x^5}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$$
$$=e^{\omega x};$$

同理 $a+\omega^2b+\omega c=e^{\omega^2x}$.

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc=e^x\cdot e^{\omega x}\cdot e^{\omega^2x}=e^{(1+\omega+\omega^2)x}$$
$$=1\text{，因 } 1+\omega+\omega^2=0\text{ 也.}$$

405. 求首 n 個自然數之 r 次冪之和.

設以 S_n 表此和，則

$$S_n=1^r+2^r+3^r+\cdots\cdots+n^r.$$

假定

$$S_n=A_0n^{r+1}+A_1n^r+A_2n^{r-1}+A_3n^{r-2}+\cdots\cdots+A_rn+A_{r+1}\cdots(1),$$

此處 $A_0,A_1,A_2,A_3,\cdots\cdots$爲待定常數.

以 $n+1$ 代 n 後，相減；如是

$$(n+1)^r=A_0\{(n+1)^{r+1}-n^{r+1}\}+A_1\{(n+1)^r-n^r\}$$
$$+A_2\{(n+1)^{r-1}-n^{r-1}\}+A_3\{(n+1)^{r-2}-n^{r-2}\}+\cdots+A_r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

展開 $(n+1)^{r+1}$, $(n+1)^r$, $(n+1)^{r-1}$, $\cdots\cdots\cdots$並等置 n 之同次冪之係數. 等置 n^r 之係數，得

$$1=A_0(r+1)，由是\ A_0=\frac{1}{r+1}.$$

等置 n^{r-1} 之係數，得

$$r=\frac{A_0(r+1)r}{2}+A_1r；由是\ A_1=\frac{1}{2}.$$

等置 n^{r-p} 之係數，代入 A_0 及 A_1 之值，再以

$$\frac{\underline{|p}}{r(r-1)(r-2)\cdots(r-p+1)}$$

乘兩邊；如是

$$1=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{2}+A_2\frac{p}{r}+A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}+\cdots\cdots\cdots(3)$$

在 (1) 中以 $n-1$ 代 n 後相減；由是

$$n^r=A_0\{n^{r+1}-(n-1)^{r+1}\}+A_1\{n^r-(n-1)^r\}+A_2\{n^{r-1}-(n-1)^{r-1}\}+\cdots$$

等置 n^{r-p} 之係數，並代入 A_0,A_1 之值；由是

$$0=\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2}+A_2\frac{p}{r}-A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}-\cdots\cdots(4)$$

從 (3) 及 (4)，用加減法，得

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}=A_2\frac{p}{r}+A_4\frac{p(p-1)(p-2)}{r(r-1)(r-2)}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5).$$

$$0=A_3\frac{p(p-1)}{r(r-1)}+A_5\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{r(r-1)(r-2)(r-3)}+\cdots\cdots(6).$$

依次令 p 爲 2, 4, 6,……等值，從 (6) 可知 A_3, A_5, A_7,……各係數均爲零；而從 (5)，得

$$A_2=\frac{1}{6};\ \frac{r}{\lfloor 2};\quad A_4=-\frac{1}{30}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)}{\lfloor 4};$$

$$A_6=\frac{1}{42}\cdot\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{\lfloor 6};\ \cdots$$

等置 (2) 之常數項，得

$$1=A_0+A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots\cdots+A_r;$$

又在方程式 (1) 中，令 $n=1$，得

$$1=A_0+A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots+A_r+A_{r+1};$$

由是　$A_{r+1}=0.$

406. 前節結果最便爲表之以公式

$$S_n=\frac{n^{r+1}}{r+1}+\frac{1}{2}n^r+B_1\frac{r}{\lfloor 2}n^{r-1}-B_3\frac{r(r-1)(r-2)}{\lfloor 4}n^{r-3}$$
$$+B_5\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{\lfloor 6}n^{r-5}+\cdots,$$

式內　$B_1=\frac{1}{6}$, $B_3=\frac{1}{30}$, $B_5=\frac{1}{42}$, $B_7=\frac{1}{30}$, $B_9=\frac{5}{66}$, …

B_1, B_3, B_5,………等數名曰柏腦禮數 (*Bernoulli's Numbers*)；至於用之求其他級數之和之例，學者可參考波爾氏之有限差專書 (*Boole's Finite Differences*).

例. 求 $1^5+2^5+3^5+\cdots\cdots\cdots\cdots+n^5$ 之值.

$$S_n=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+B_1\frac{5}{\lfloor 2}n^4-B_3\frac{5.4.3}{\lfloor 4}n^2+C$$

$$=\frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12},$$

其常數爲零.

習 題 二十九.C

求下列各級數之和:

1. $\dfrac{x^3}{\underline{|3}}+\dfrac{x^5}{\underline{|5}}+\dfrac{x^7}{\underline{|7}}+\cdots\cdots$

2. $\dfrac{x}{1.2}+\dfrac{x^2}{2.3}+\dfrac{x^3}{3.4}+\cdots\cdots$

3. $x+\dfrac{x^5}{\underline{|5}}+\dfrac{x^9}{\underline{|9}}+\cdots\cdots$

4. $\dfrac{1}{\underline{|r}}+\dfrac{\underline{|2}}{\underline{|r+1}}+\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|r+2}}+\cdots\cdots$

5. $1+2x+\dfrac{2^2-1}{\underline{|2}}\cdot\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{3^2-1}{\underline{|3}}\cdot\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{4^2-1}{\underline{|4}}\cdot\dfrac{x^4}{3}+\cdots\cdots$

6. $\dfrac{p^r}{\underline{|r}}+\dfrac{p^{r-1}}{\underline{|r-1}}\cdot\dfrac{q}{1}+\dfrac{p^{r-2}}{\underline{|r-2}}\cdot\dfrac{q^2}{\underline{|2}}+\dfrac{p^{r-3}}{\underline{|r-3}}+\dfrac{q^3}{\underline{|3}}+\cdots\cdots$至 $r+1$ 項.

7. $\dfrac{n(1+x)}{1+nx}-\dfrac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\dfrac{1+2x}{(1+nx)^2}$

$+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot\dfrac{1+3x}{(1+nx)^3}-\cdots\cdots$至$n$項.

8. $1+3\dfrac{2n+1}{2n-1}+5\left(\dfrac{2n+1}{2n-1}\right)^2+\cdots\cdots$至$n$項.

9. $1-\dfrac{n^2}{1^2}+\dfrac{n^2(n^2-1^2)}{1^2.2^2}-\dfrac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)}{1^2.2^2.3^2}+\cdots\cdots$至 $n+1$ 項.

10. $(1+2)\log_e 2+\dfrac{1+2^2}{\underline{|2}}(\log_e 2)^2+\dfrac{1+2^3}{\underline{|3}}(\log_e 2)^3+\cdots\cdots$

11. $\dfrac{1}{1.2.3}+\dfrac{1}{3.4.5}+\dfrac{1}{5.6.7}+\cdots\cdots$

12. $\dfrac{2}{\underline{|1}}+\dfrac{3}{\underline{|2}}+\dfrac{6}{\underline{|3}}+\dfrac{11}{\underline{|4}}+\dfrac{18}{\underline{|5}}+\cdots\cdots$

13. $1+\dfrac{2x^2}{\underline{|2}}-\dfrac{x^3}{\underline{|3}}+\dfrac{7x^4}{\underline{|4}}-\dfrac{23x^5}{\underline{|5}}+\dfrac{121x^6}{\underline{|6}}-\cdots\cdots$

14. 試不應用公式，求下級數之和:

(1) $1^6+2^6+3^6+\cdots\cdots+n^6$.　　(2) $1^7+2^7+3^7+\cdots\cdots+n^7$.

15. 求 $1^3+2^3+\frac{3^3}{\underline{|2}}+\frac{4^3}{\underline{|3}}+\frac{5^3}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$之和.

16. 試證$\frac{x}{(1-x)^2-cx}$之展開式中 x^n 之係數為

$$x\left\{1+\frac{n^2-1}{\underline{|3}}c+\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{\underline{|5}}c^2\right.$$
$$\left.+\frac{(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)}{\underline{|7}}c^3+\cdots\cdots\right\}.$$

17. 設 n 為正整數,試求

$$2^n-(n-1)2^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}2^{n-4}$$
$$-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}2^{n-6}+\cdots\cdots\text{之值};$$

又設 n 為 3 之倍數,試證

$$1-(n-1)+\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}+\cdots\cdots=(-1)^n.$$

18. 設 n 為大於 3 之正整數, 試證

$$n^3+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-2)^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\underline{|4}}(n-4)^3+\cdots$$
$$=n^2(n+3)2^{n-4}.$$

19. 求下兩級數 n 項之和:

(1) $\frac{1}{1+1^2+1^4}+\frac{2}{1+2^2+2^4}+\frac{3}{1+3^2+3^4}+\cdots\cdots$

(2) $\frac{5}{1.2}-\frac{3}{2.3}+\frac{9}{3.4}-\frac{7}{4.5}+\frac{13}{5.6}-\frac{11}{6.7}+\frac{17}{7.8}-\cdots\cdots$

20. 求無窮級數和, 設其第 n 項為$\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n(n+1)(n+2)}$.

21. 設 $(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots\cdots+c_nx^n$, 其$n$為正整數,
試求　$(n-1)^2c_1+(n-3)^2c_3+(n-5)^2c_5+\cdots\cdots$之值.

22. 求下級數 n 項之和:

(1) $\frac{2}{1.5}-\frac{4}{5.7}+\frac{8}{7.17}-\frac{16}{17.31}+\frac{32}{31.65}-\cdots\cdots$

(2) $\frac{7}{1.2.3}-\frac{17}{2.3.4}+\frac{31}{3.4.5}-\frac{49}{4.5.6}+\frac{71}{5.6.7}-\cdots\cdots$

23. 設 $a<1$, 試證 $(1+ax)(1+a^3x)(1+a^5x)\cdots\cdots$

$$=1+\frac{ax}{1-a^2}+\frac{a^4x^2}{(1-a^2)(1-a^4)}+\frac{a^9x^3}{(1-a^2)(1-a^4)(1-a^6)}+\cdots$$

24. 設 A_r 爲

$$(1+x)^2\left(1+\frac{x}{2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^2}\right)^2\left(1+\frac{x}{2^3}\right)^2\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之展開式中 x^r 之係數，試證

$$A_r=\frac{2^2}{2^r-1}(A_{r-1}+A_{r-2}) \text{ 及 } A_4=\frac{1072}{315}.$$

25. 設 n 爲 6 之倍數，試證下兩級數皆等於零：

$$n-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot 3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\underline{|5}}\cdot 3^2-\cdots$$

$$n-\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\underline{|5}}\cdot\frac{1}{3^2}-\cdots,$$

26. 設 n 爲正整數，試證

$$(p+q)^n-(n-1)pq(p+q)^{n-2}+\frac{(n-2)(n-3)}{\underline{|2}}p^2q^2(p+q)^{n-4}-\cdots\cdots$$

$$=\frac{p^{n+1}-q^{n+1}}{p-q}.$$

27. 設 $P_r=(n-r)(n-r+1)(n-r+2)\cdots\cdots(n-r+p-1)$,

$Q_r=r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+q-1)$,

試證

$$P_1Q_1+P_2Q_2+P_3Q_3+\cdots\cdots+P_{n-1}Q_{n-1}=\frac{\underline{|p}\;\underline{|q}\;\underline{|n-1+p+q}}{\underline{|p+q+1}\;\underline{|n-2}}.$$

28. 設 n 爲 3 之倍數，試證

$$1-\frac{n-3}{2}+\frac{(n-4)(n-5)}{\underline{|3}}-\frac{(n-5)(n-6)(n-7)}{\underline{|4}}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{r-1}\frac{(n-r-1)(n-r-2)\cdots(n-2r+1)}{\underline{|r}}+\cdots$$

等於$\frac{3}{n}$或$-\frac{1}{n}$，視 n 爲奇或偶而定.

29. 設 x 爲眞分數，試證

$$\frac{x}{1-x^2}-\frac{x^3}{1-x^6}+\frac{x^5}{1-x^{10}}-\cdots\cdots=\frac{x}{1+x^2}+\frac{x^3}{1+x^6}+\frac{x^5}{1+x^{10}}+\cdots\cdots$$

第三十章

數論

407. 本章所用"數"字均表正整數.

凡除其本身及 1 外不能爲任何數整除之數，名曰質數 (*Prime number*)；凡除其本身及 1 外可爲他數整除之數，名曰複數(*composite number*)；如 53 爲質數而 35 爲複數. 若二數除 1 外無公因子，則名此二數曰互質數，如 24 與 77 爲互質數.

408. 下之基本定理，此後常引用之，其中有若干由質數定義自然推出，故可以公理視之.

(*i*) 若一數 a 能除盡 bc 之積，且與其中之因數 b 爲互質數，則 a 必亦能除盡因數 c.

蓋 a 既能除盡 bc，則 bc 內必含有 a 之一切因數，但 a 與 b爲互質數，故 b 內無 a 之因數，因此 a 之因數必皆在 c 內；即 a 能除盡 c.

(*ii*) 若一質數 a 能除盡 $bcd\cdots\cdots$之積，則必能除盡其一因數；因此若質數 a 能除盡 b^n，其 n 爲任意正整數，則必亦能除盡 b.

(*iii*) 若一數 a 對於 b 及 c 爲互質數，則 a 對於 bc 之積必亦爲互質數. 因 a 之因數既均不能除盡 b 及 c，自亦均不能除盡 bc 之積，故 a 與 bc 爲互質數. 反之，若 a 與 bc 爲互質數，則 a 與 b 及 c 亦爲互質數.

又若 a 與 $b, c, d, \cdots\cdots$ 中之每一數爲互質數，則必亦與 $bcd\cdots\cdots$ 之積爲互質數；反之，若 a 與任一數爲互質數，則必亦與此數之每一因數互爲質數.

(iv). 若 a 及 b 爲互質數，則 a 之任意正整數羃與 b 之任意正整數羃必亦爲互質數. 此可由 (iii) 推得之.

(v) 設 a 與 b 爲互質數，則 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{a^n}{b^m}$ 爲最簡分數，其 n 及 m 爲任意正整數. 又，若 $\frac{a}{b}$ 及 $\frac{c}{d}$ 爲兩相等分數，而 $\frac{a}{b}$ 爲最簡分數，則 c 及 d 必分別爲 a 及 b 之等倍數.

409. 質數之個數無窮.

蓋設其不然，令 p 爲最大質數；則 $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdots\cdots p$ 之積必能爲 2，3，5，7，11，$\cdots\cdots p$ 中之每一因數除盡之，各因子皆爲質數，故加 1 於其積所成之數不能爲其中之任一因數除盡之；故必其本身爲一質數，或能爲大於 p 之質數除盡之；在任一情形內，p 皆非最大質數，故質數之個數無窮.

410. 有理代數式無僅能表質數者.

設其不然，令此式爲 $a+bx+cx^2+dx^3+\cdots\cdots$，僅表質數，而假當 $x=m$ 時，此式之値爲 p，由是

$$p=a+bm+cm^2+dm^3+\cdots\cdots\cdots;$$

當 $x=m+np$ 時，此式變爲

$$a+b(m+np)+c(m+np)^2+d(m+np)^3+\cdots\cdots,$$

即 $$a+bm+cm^2+dm^3+\cdots\cdots+p \text{ 之倍數},$$

或 $$p+p \text{ 之倍數},$$

故此式能爲 p 除盡，故非質數.

411. 將一數析爲質因數之方法，僅有一種.

以 N 表此數；設 $N=abcd\cdots\cdots$，其中 $a, b, c, d, \cdots\cdots$ 俱爲質數. 復設 $N=\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots$，其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \cdots\cdots$ 爲其他質數. 於是

$$abcd\cdots\cdots=\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots;$$

因此 α 必能除盡 $abcd\cdots\cdots\cdots$；但此積中之各因數皆爲質數，故 α 必能除盡其中之一因數，設能除盡 a. 但 α 及 a 皆爲質數；故 α 必等於 a. 因此 $bcd\cdots\cdots\cdots=\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$；同理，$\beta$ 必等於 $bcd\cdots\cdots\cdots$中諸因子之一因數；類推. 故 $\alpha\beta\gamma\delta\cdots\cdots\cdots$中之因數等於 $abcd\cdots\cdots\cdots$中之因數，是以將析 N 爲質因數之方法，僅有一種.

412. 求一複數中約數之個數.

以 N 表此數，設 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots\cdots$，其 a，b，c，$\cdots\cdots$爲不同之質數，p，q，r 爲正整數. 則乘積

$$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)\cdots\cdots$$

中之各項顯然爲已知數之約數，且此外無其他約數；故約數之個數即此積中之項數，即連其本身及 1 在內，其約數之個數爲

$$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots\cdots$$

413. 求將一複數析爲兩因數之分法之數.

以 N 表此數，設 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots\cdots$，其 a，b，c，$\cdots\cdots\cdots$爲不同之質數，p，q，r 爲正整數. 於是積

$$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)\cdots$$

之每項爲 N 之一約數；但對於將 N 析爲二因數之每一法有二約數；故所求之方法之數爲

$$\tfrac{1}{2}(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$$

此設 N 爲非完全平方，由是至少 p，q，$r\cdots$中有一數爲奇數.

若 N 爲完全平方，則一析法爲 $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$，與此法相當者僅有約數 $\sqrt{N}$. 如將除外，則析法之數爲

$$\tfrac{1}{2}\{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots-1\},$$

而於此必加 $\sqrt{N}\times\sqrt{N}$ 之一法，故所求析法之數爲

$$\tfrac{1}{2}\{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots+1\}.$$

414. 求將一複數析爲兩互質因數之方法之數.

如前，設此數 $N=a^p b^q c^r\cdots\cdots$，則兩質因數中，必有一數含 a^p. 否則此因數含 a 之乘羃，他因數亦含 a 之乘羃，是二因數非互質數矣. 同理，b^q 亦只能含於一因數中；餘類推. 故所求數等於將 $abc\cdots$ 析爲二因子之方法之數，即 $\frac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1)\cdots$ 或 2^{n-1}，此處 n 爲 N 中不同質因數之個數.

415. 求一數之約數和.

如前，設此數以 $a^p b^q c^r\cdots$ 表之. 於是乘積

$$(1+a+a^2+\cdots+a^p)(1+b+b^2+\cdots+b^q)(1+c+c^2+\cdots+c^r)\cdots$$

中之每一項爲一約數，故約數之和等於此積；即

$$\text{所求和}=\frac{a^{p+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{q+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{r+1}-1}{c-1}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例 1. 考究 21600.

因　$21600=6^3\cdot10^2=2^3\cdot3^3\cdot2^2\cdot5^2=2^5\cdot3^3\cdot5^2$,

約數之數$=(5+1)(3+1)(2+1)=72$;

$$\text{約數之和}=\frac{2^6-1}{2-1}\cdot\frac{3^4-1}{3-1}\cdot\frac{5^3-1}{5-1}$$

$$=63\times40\times31$$

$$=78120.$$

又 21600 能用 2^{3-1} 或 4 法析爲兩互質因數.

例 2. 設 n 爲奇數，試證 $n(n^2-1)$ 能被 24 除盡.

已知　$n(n^2-1)=n(n-1)(n+1)$.

因 n 爲奇數，故 $n-1$ 及 $(n+1)$ 爲二連續偶數；故二數必有一能被 2 除盡，有一能被 4 除盡.

又　$n-1$，n，$n+1$ 爲三連續數，其中必有一數能被 3 除盡. 故上式能被 2，3，4 之積，即 24 除盡.

例 3.　求 $\underline{|100}$ 中所含 3 之最高次冪.

在首 100 個整數中，其能被 3 除盡者之個數同於 100 中所含之 3 之次數，即有 33 個；此等整數爲 3，6，9，……99. 其中有含 3 之二次冪者，即 9，18，27，……99 等，其個數爲以 9 除 100 所得之商；其中亦有含 3 之三次冪者，即 27，54，81，其個數爲以 37 除 100 所得之商. 惟 81 一數含有 3 之四次冪.

故所求 3 之最高次冪 $=33+11+3+1=48$.

此例爲下節定理之特例.

416.　求 $\underline{|n}$ 中所含之質數 a 之最高次冪.

設 $\frac{n}{a}$，$\frac{n}{a^2}$，$\frac{n}{a^3}$，……中所含之最大整數，各以 $I\left(\frac{n}{a}\right)$，$I\left(\frac{n}{a^2}\right)$，$I\left(\frac{n}{a^3}\right)$，……表之. 則在 1，2，3，……$n$ 諸數中，有 $I\left(\frac{n}{a}\right)$ 個至少含 a 一次者即 a，$2a$，$3a$，$4a$，……等. 同理，有 $I\left(\frac{n}{a^2}\right)$ 個至少含 a^2 二次者，有 $I\left(\frac{n}{a^3}\right)$ 個至少含 x^3 一次者；類推. 故 $\underline{|n}$ 中所含 a 之最高次冪爲

$$I\left(\frac{n}{a}\right)+I\left(\frac{n}{a^2}\right)+I\left(\frac{n}{a^3}\right)+\cdots\cdots$$

417.　本章此後以符號 $M(n)$ 表 n 之倍數.

418.　求証 r 連續整數之積可約以 $\underline{|r}$.

令 P_n 表此 r 連續整數之積，n 表此 r 個連續數中之最小者；於是

$$P_n=n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1),$$

$$P_{n+1}=(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+r);$$

$$\therefore\ nP_{n+1}=(n+r)P_n=nP_n+rP_n;$$

$$\therefore\ P_{n+1}-P_n=\frac{P_n}{n}\times r$$

$=r$ 乘 $(r-1)$ 個連續整數之積.

故若$(r-1)$個連續數之積能被 $\underline{|r-1}$ 除盡，則得

$$P_{n+1}-P_n=rM(\underline{|r-1})$$
$$=M(\underline{|r}).$$

今 $P_1=\underline{|r}$，故 P_2 爲 $\underline{|r}$ 之倍數；故 P_3，P_4，……亦爲 $\underline{|r}$ 之倍數．由是證明若$(r-1)$個連續整數之積能被 $\underline{|r-1}$ 除盡，則 r 個連續整數之積，能被 $\underline{|r}$ 除盡；但任二連續整數之積能被 $\underline{|2}$ 除盡；故任三連續整數之積能被 $\underline{|3}$ 除盡；依此類推至一般．

此定理又可如下說明之：

用 §416，可証明 $\underline{|n+r}$ 中每質因數之次數至少同於 $\underline{|n}\,\underline{|r}$ 中所含者．

此留學生自証之．

419. 若 p 爲質數，則在 $(a+b)^p$ 之展開式中，除首末二項之外，各項之係數皆可以 p 除盡之．

除首末二項外，其各項係數之形式爲

$$\frac{p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-r+1)}{\underline{|r}},$$

此處 r 可爲不大於 $p-1$ 之任何整數．今此式爲整數；又因 p 爲質數，不能被 $\underline{|r}$ 中之任何因數除盡，復因 p 大於 r，不能除盡 $\underline{|r}$ 中之任何因數；即 $(p-1)(p-2)\cdots(p-r+1)$ 必能以 $\underline{|r}$ 除盡之．故首末二項之外，每項係數皆能以 p 除盡之。

420. 設 p 爲質數，求證

$$(a+b+c+d+\cdots\cdots\cdots)^p=a^p+b^p+c^p+d^p+\cdots\cdots\cdots+M(p).$$

以 β 代 $b+c+\cdots\cdots$；於是由前節

$$(a+\beta)^p=a^p+\beta^p+M(p).$$

再者 $\beta^p=(b+c+d+\cdots\cdots\cdots)^p=(b+\gamma)^p$
$$=b^p+\gamma^p+M(p).$$

照此法進行，即證明所求之結果．

421. [忽馬氏定理 *Fermat's Theorem*]. 若 p 爲質數，而 N 與 p 爲互質數，則 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數.

吾人已經證明

$(a+b+c+d+\cdots\cdots)^p=a^p+b^p+c^p+d^p+\cdots\cdots+M(p)$;

設 a, b, c, d,……諸數各等於 1，又設諸數共有 n 個；則

$$N^p=N+M(p);$$

即 $$N(N^{p-1}-1)=M(p).$$

但 N 與 p 爲互質數，故 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數.

推論. 因 p 爲質數，故除 $p=2$ 外，$p-1$ 必爲偶數. 故

$$\left(N^{\frac{p-1}{2}}+1\right)\left(N^{\frac{p-1}{2}}-1\right)=M(p).$$

因此 $N^{\frac{p-1}{2}}+1$ 或$N^{\frac{p-1}{2}}-1$ 爲 p 之倍數.

即 $N^{\frac{p-1}{2}}=Kp\pm1$，此處 K 爲某正整數.

422. 在 §421 曾証明 $N^p-N=M(p)$，無論 N 與 p 是否互質數皆然. 此定理有時較忽馬氏定理爲用尤廣，應加注意.

例 1. 試證 n^7-n 能以 42 除盡之.

因 7 爲質數，故 $n^7-n=M(7)$;

又 $$n^7-n=n(n^6-1)=n(n+1)(n-1)(n^4+n^2+1).$$

今 $(n-1)n(n+1)$ 能被 6 除盡，故 n^7-n 能被 6×7 除盡，即能被 42 除盡.

例 2. 設 p 爲質數，試証任二數之 p 次冪之差較該二數之差大一 p 之倍數.

令 x, y 表二數；於是

$$x^p-x=M(p) \text{ 及 } y^p-y=M(p),$$

即 $$x^p-y^p-(x-y)=M(p);$$

故得所求之結果.

例 3. 試證凡平方數之形式不外 $5n$ 或 $5n\pm1$.

若 N 與 5 非互質數，則 $N^2=5n$，而 n 爲某正整數. 若 N 與 5 爲互質數，則據忽馬氏定理，N^4-1 爲 5 之倍數. 由是 N^2-1 或 N^2+1 爲 5 之倍數；即 $N^2=5n\pm1$.

習題 三十.A.

1. 求下列各積之最小乘數，俾其積爲一完全平方：

(*i*) 3675，(*ii*) 4374，(*iii*) 18375，(*iv*) 74088.

2. 求下各列各數之最小乘數，俾其積爲一完全立方：

(*i*) 7623，(*ii*) 109350，(*iii*) 539539..

3. 設 x 及 y 爲正整數，又設 $x-y$ 爲偶數，試證 x^2-y^2 能以 4 除盡之.

4. 試證任何數與其平方之差爲偶數.

5. 設 $4x-y$ 爲 3 之倍數，試證 $4x^2+7xy-2y^2$ 能被 9 除盡.

6. 求 8064 之約數之個數.

7. 將 7056 析爲二因數之方法有幾?

8. 試證 $2^{4n}-1$ 能以 15 除盡之.

9. 試證 $n(n+1)(n+5)$ 爲 6 之倍數.

10. 試證任一數及其立方用 6 除時，所得餘數相同.

11. 設 n 爲偶數，試證 $n(n^2+20)$ 能被 48 除盡.

12. 試證 $n(n^2-1)(3n+2)$ 能被 24 除盡.

13. 設 n 大於 2，試證 n^5-5n^3+4n 能被 120 除盡.

14. 試證$3^{2n}+7$ 爲 8 之倍數.

15. 設 n 爲大於 3 之質數，試證 n^2-1 爲 24 之倍數.

16. 試證無論 n 之值爲何，n^5-n 恒能被 30 除盡，若 n 爲奇數，則能被 240 除盡.

17. 試證大於 6 之任意二質數之平方差能被 24 除盡之.

18. 試證平方數之形無爲 $3n-1$ 者.

19. 試證立方數之形式不外 $9n$ 或 $9n\pm1$.

20．試證若以 7 除一立方數，則其餘數不外 0，1，或 6.

21．設某數兼爲平方數及立方數，試證其形式不外 $7n$ 或 $7n+1$.

22．試證三角數之形式無爲 $3n-1$ 者.

23．設 $2n+1$ 爲質數，試證以 $2n+1$ 除 1^2，2^2，3^2，……n^2 時，所得餘數各不相同.

24．試證無論 a 及 x 爲何值，a^x+a 及 a^x-a 恒爲偶數.

25．試證奇數之偶次冪之形式爲 $8r+1$.

26．試證任何數之 12 次冪之形式爲 $13n$ 或 $13n+1$.

27．試證任何數之 8 次冪之形式爲 $17n$ 或 $17n\pm1$.

28．設 n 爲大於 5 之質數，試證 n^4-1 可以 240 除盡之.

29．設 n 爲大於 3 之任何質數，7 除外，試證 n^6-1 可以 168 除盡之.

30．設 n 與 2，3，19，及 37 爲互質數，試證 $n^{36}-1$ 可以 33744 除盡之.

31．設 x 與 2，$p+1$，及 $2p+1$ 爲互質數，試證當 $p+1$ 及 $2p+1$ 皆爲質數時，$x^{2p}-1$ 可以 $8(p+1)(2p+1)$ 除盡之。

32．設 p 爲質數，又 x 與 p 爲互質數，試證 $x^{p^r-p^{r-1}}-1$ 可以 p^r 除盡之.

33．設 m 爲質數，又 a 及 b 爲小於 m 之二數，試證

$$a^{m-2}+a^{m-3}b+a^{m-4}b^2+\cdots\cdots+b^{m-2}$$

爲 m 之倍數.

423. 設 a 爲任一數，則任一他數 N 可以 $N=aq+r$ 之形式表之，此處 q 爲以 a 除 N 所得之整數，r 爲小於 a 之餘數. 此他數所借資討論之數 a 有時稱爲數率 (*modulus*)；任一數 N 對於任何已知數率 a 有 a 種不同之形式，每種形式相當於 r 之一不同之值. 例如對於數率 3 而言之，凡數不外三種不同形式 $3q$，$3q+1$，

$3q+2$ 之一；因 $3q+2$ 等於 $3(q+1)-1$，故或更簡之爲不外 $3q$，$3q\pm1$ 三形式中之一．同理，任一數對數率 5 而言，不外 $5q$，$5q\pm1$，$5q\pm2$ 五形式中之一．

424. 設 b，c 二整數除以 a 時所得餘數相同，則就數率 a 而言，b，c 稱爲同形數．此時 $b-c$ 爲 a 之倍數，有時可用高斯氏 (*Gauss*) 記法表之如下：

$$b\equiv c(\text{數率 } a)\text{，或 } b-c\equiv0\ (\text{數率 } a).$$

二公式皆稱爲同形式 (*congruence*)．

425. 若就數率 a 而言，b,c 爲同形數，則 pb 及 pc 亦爲同形數，此處 p 爲任意整數．

蓋由假設，$b-c=na$，此 n 爲一整數；故 $pb-pc=pna$；此即證明本命題．

426. 設 a 與 b 爲互質數，又設以 b 除

$$a,\ 2a,\ 3a,\cdots\cdots\cdots\cdots\ (b-1)a$$

等數，則所得之餘數各不相同．

蓋若不然，設以 b 除 ma 及 $m'a$ 時所得餘數同爲 r，如是

$$ma=qb+r,\qquad m'a=q'b+r;$$

因此 $$(m-m')a=(q-q')b;$$

故 b 能除盡 $(m-m')a$，因 b 與 a 爲互質數也，故 b 能除盡 $m-m'$；但 m 及 m' 皆小於 b，故此爲不可能．

是以諸餘數各不相同，又各數均不能被 b 除盡，故諸餘數必爲級數 $1,2,3,\cdots\cdots\cdots b-1$ 中之諸項，但不必定同此順序耳．

推論．若 a 與 b 爲互質數，又 c 爲任一數，則以 b 除 *A. P.*

$$c,c+a,c+2a,\cdots\cdots\cdots\cdots c+(b-1)a,$$

之 b 項，與以 b 除級數

$$c,\ c+1,\ c+2,\cdots\cdots\cdots c+(b-1)$$

之諸項得相同餘數，雖則其順序不必相同；故其餘數爲 $0,1,2,\cdots,b-1$.

427. 若就數率 a 而言，b_1，b_2，b_3，⋯⋯分別與 c_1，c_2，c_3，⋯爲同形數，則乘積 $b_1b_2b_3\cdots\cdots$ 與乘積 $c_1c_2c_3\cdots\cdots$ 亦爲同形數.

蓋由假設，

$$b_1-c_1=n_1a,\quad b_2-c_2=n_2a,\quad b_3-c_3=n_3a,\cdots\cdots$$

此處 n_1，n_2，n_3，⋯⋯爲整數；

$$\therefore\ b_1b_2b_3\cdots=(c_1+n_1a)(c_2+n_2a)(c_3+n_3a)\cdots\cdots$$
$$=c_1c_2c_3\cdots+M(a),$$

此證明本命題.

428. 玆舉出忽馬氏定理之另一證法.

設 p 爲質數，又 N 與 p 爲互質數，則 $N^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數.

因 N 與 p 爲互質數，故以 p 除

$$N,\ 2N,\ 3N,\ \cdots\cdots\cdots(p-1)\ N\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

等數時得餘數

$$1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots,(p-1)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2),$$

雖則順序或有不同. 故 (1) 之諸項之積與 (2) 之諸項之積爲同形數，而 p 爲其數率.

即以 p 除 $|\underline{p-1}N^{p-1}$ 及 $|\underline{p-1}$ 時得相同餘數；故

$$|\underline{p-1}(N^{p-1}-1)=M(p);$$

但 $|\underline{p-1}$ 與 p 爲互質數；故得

$$N^{p-1}-1=M(p).$$

429. 吾人用 $\phi(a)$ 表小於 a 且與 a 爲互質數之整數之個數，如 $\phi(2)=1$；$\phi(13)=12$；$\phi(18)=6$；小於 18 且與之互爲質數之整數爲 1，5，7，11，13，17. 吾人於此視 1 爲一切之互質數.

430. 試證若 $a, b, c, d, \cdots$ 等數爲互質數，則

$$\phi(abcd\cdots)=\phi(a)\cdot\phi(b)\cdot\phi(c)\cdots$$

考究乘積 ab；於是首 ab 個整數可寫爲 b 行，每行含 a 個數；如

$$\begin{array}{cccc}
1, & 2,\cdots\cdots & k,\cdots\cdots & a, \\
a+1, & a+2,\cdots\cdots & a+k,\cdots\cdots & a+a, \\
2a+1, & 2a+2,\cdots\cdots & 2a+k,\cdots\cdots & 2a+a, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

$$(b-1)a+1,\ (b-1)a+2,\cdots\cdots(b-1)a+k,\cdots\cdots(b-1)a+a.$$

茲考究由 k 起之行，若 k 與 a 爲互質數，則此行中所有諸數皆與 a 爲互質數；若 a 與 k 有一公約數則此行無與 a 互爲質數之數．今第一列含 $\phi(a)$ 個數與 a 互爲質數；故有 $\phi(a)$ 行，其每行中之各項與 a 互爲質數．假設由 k 起之行即爲此中之一行，此行爲一 $A.P.$ 以 b 除其各項時餘 0，1，2，3，$\cdots\cdots b-1$ [§426 推論]；故此行含有 $\phi(b)$ 個與 b 爲互質數之整數．

同理，每項與 a 爲互質數之 $\phi(a)$ 行中每行含 $\phi(b)$ 個與 b 爲互質數之數；故上表中有 $\phi(a)\cdot\phi(b)$ 個整數與 a 爲互質數，與 b 亦爲互質數，由是與 ab 亦爲互質數；即

$$\phi(ab)=\phi(a).\phi(b).$$

$$\begin{aligned}
\text{故}\ \phi(abcd\cdots)&=\phi(a).\phi(bcd\cdots)\\
&=\phi(a).\phi(b).(\phi cd\cdots)\\
&=\phi(a).\phi(b).(c).\phi(d)\cdots\cdots
\end{aligned}$$

431. 求小於已知數且與之互爲質數之正整數之個數．

令 N 表此數，設 $N=a^pb^qc^r\cdots\cdots\cdots$，其 $a, b, c,\cdots\cdots$ 爲不同之質數，p,q,r 爲正整數．考究因數 a^p；在自然數 1，2，$3\cdots a^p-1$，a^p 中，其不與 a 互爲質數者僅

$$a,\ 2a,\ 3a,\cdots\cdots\cdots(a^{p-1}-1)a,(a^{p-1})a,$$

而矣，其個數爲 a^{p-1}；故

$$\phi(a^p)=a^p-a^{p-1}=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right).$$

今因數 a^p，b^q，c^r，……等均互爲質數.

$$\therefore\ \phi(a^p b^q c^r\cdots)=\phi(a^p)\cdot\phi(b^q)\cdot\phi(c^r)\cdots$$

$$=a^p\left(1-\frac{1}{a}\right)\cdot b^q\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdot c^r\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$$

$$=a^p b^q c^r\cdots\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots;$$

即
$$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots$$

例. 試證一切小於 N 且與之互爲質數之整數之和爲 $\frac{1}{2}N\phi(N)$.

設 x 爲小於 N 且與之互爲質數之任一整數，於是 $N-x$ 亦爲小於 N 且與之互爲質數之整數.

以 1，p，q，r，……表諸整數，以 S 其和；則

$S=1+p+q+r+\cdots+(N-r)+(N-q)+(N-p)+(N-1)$，

此級數含有 $\phi(N)$ 項.

按照相反順序寫出此級數，

$S=(N-1)+(N-p)+(N-q)+(N-r)+\cdots\cdots+r+q+p+1$

$\therefore$ 由加法，$2S=N+N+N+\cdots\cdots$至 $\phi(N)$項；

$$\therefore S=\tfrac{1}{2}N\phi(N).$$

432. 由上節知小於 N 且不與之互爲質數之整數之個數爲

$$N-N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\left(1-\frac{1}{d}\right)\cdots;$$

即
$$\frac{N}{a}+\frac{N}{b}+\frac{N}{c}+\cdots-\frac{N}{ab}-\frac{N}{ac}-\frac{N}{bc}-\cdots+\frac{N}{abc}+\cdots\cdots$$

此處$\frac{N}{a}$項表整數 a，$2a$，$3a$，…………$\frac{N}{a}\cdot a$ 之個數，各數均含 a 爲一因數. $\frac{N}{ab}$項表整數 ab，$2ab$，$3ab$，……$\frac{N}{ab}ab$ 之個數，各數均含 ab

爲一因數；類推．再者，任一整數概計算一次，且祇計算一次；如 ab 之每一倍數，在 a 之倍數中見一次，在 b 之倍數中見一次，但在 ab 之倍數中抵消一次，是故祇計算一次．又 abc 之每倍數將見於 a，b，c 之倍數$\frac{N}{a}$，$\frac{N}{b}$，$\frac{N}{c}$之諸項中；又將見之於 ab，ac，bc 之倍數$\frac{N}{ab}$，$\frac{N}{ac}$，$\frac{N}{bc}$諸項中；並見之於 abc 之倍數$\frac{N}{abc}$一項中；換言之，因 $3-3+1=1$，故 abc 之每倍數出現一次，亦祇出現一次．其他諸情形，均可照此法討論之．

433.　[威爾遜氏定理 *wilson's Theorem*]．若 p 爲質數，則 $1+|\underline{p-1}$ 可以 p 除盡之．

由 §314 例 2，知

$$|\underline{p-1}=(p-1)^{p-1}-(p-1)(p-2)^{p-1}+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(p-3)^{p-1}$$

$$-\frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{|\underline{3}}(p-4)^{p-1}+\cdots\text{至}\ p-1\text{項；}$$

又由忽馬氏定理，$(p-1)^{p-1}$，$(p-2)^{p-1}$，$(p-3)^{p-1}$，………諸式中之每式皆屬於 $1+M(p)$ 之形式；如是

$$|\underline{p-1}=M(p)+\left\{1-(p-1)+\frac{(p-1)(p-2)}{1.2}-\cdots\text{至}\ p-1\ \text{項}\right\}$$

$$=M(p)+\{(1-1)^{p-1}-(-1)^{p-1}\}$$

$$=M(p)-1,\ \text{因}\ p-1\ \text{爲偶數也}.$$

故　　　　$1+|\underline{p-1}=M(p)$．

此定理僅當 p 爲質數時爲眞．蓋若 p 有一因數 q，則 q 必小於 p 且能除盡 $|\underline{p-1}$；如是 $1+|\underline{p-1}$ 非 q 之倍數，故非 p 之倍數．

威爾遜氏定理，亦可不用 §314 之結果，而如下節證明之．

434. [威爾遜氏定理]. 若 p 爲質數，則 $1+\underline{|p-1}$ 可以 p 除盡之.

令 a 表

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\cdots\cdots(p-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

中之任一數，則 a 與 p 爲互質數，又若以 p 除

$$1.a,\ 2.a,\ 3.a,\cdots\cdots(p-1)a$$

等積，則其中必有一積，且祇有一積之餘數爲 1. [§426]

令此積爲 ma；則可證明除 $a=p-1$ 或 1 外，m 及 a 爲不相同之數. 蓋若以 p 除 a^2 時得餘數 1，則

$$a^2-1\equiv 0\ (\text{數率}\ p),$$

而因 p 爲質數，此僅在 $a+1=p$ 或 $a-1=0$ 時，即當 $a=p-1$ 或 1 時方可.

故在 $2a,\ 3a,\cdots\cdots(p-2)a$ 諸積中，有一積，且祇有一積當除以 p 時得餘數 1；換言之，對於級數 (1) 中之任一數，除首末二數外，儘可求得他一數，令此兩數之積爲 $M(p)+1$ 之形式.

故諸整數 $2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots(p-2)$，其個數爲偶數，可兩兩配合，俾每對之積之形式爲 $M(p)+1$.

故將所有各對相乘，得

$$2.3.4.\cdots(p-2)=M(p)+1;$$

即 $$1.2.3.4\cdots(p-1)=(p-1)\{M(p)+1\};$$

由是 $$\underline{|p-1}=M(p)+p-1;$$

即 $1+\underline{|p-1}$ 爲 p 之一倍數.

推論. 若 $2p+1$ 爲質數，則 $(\underline{|p})^2+(-1)^p$ 可以 $2p+1$ 除盡之.

蓋由威爾遜氏定理，$1+\underline{|2p}$ 可爲 $2p+1$ 除盡之. 令 $n=2p+1$，因此 $p+1=n-p$，於是

$$\underline{|2p}=1.2.3.4\cdots\cdots p(p+1)(p+2)\cdots\cdots(n-1)$$

$$=1(n-1)2(n-2)3(n-3)\cdots p(n-p)$$

$$=n+(-1)^p(\underline{|p})^2\ \text{之倍數}.$$

故 $1+(-1)^p(\underline{|p})^2$ 可以 n 或 $2p+1$ 除盡之，因而 $(\underline{|p})^2+(-1)^p$ 可以 $2p+1$ 除盡之.

435. 關於數之性質之許多定理，可用歸納法證明之.

例 1. 若 p 爲質數，則 x^p-x 可以 p 除盡之.

令 $f(x)$ 表 x^p-x，於是

$$f(x+1)-f(x)=(x+1)^p-(x+1)-(x^p-x)$$
$$=px^{p-1}+\frac{p(p-1)}{1.2}x^{p-2}+\cdots\cdots+px$$
$$=p \text{ 之倍數，若 } p \text{ 爲質數 [§419.]}$$
$$\therefore f(x+1)=f(x)+p \text{ 之倍數.}$$

因此，若 $f(x)$ 可爲 p 除盡，則 $f(x+1)$ 亦可爲 p 除盡；但

$$f(2)=2^p-2=(1+1)^p-2,$$

當 p 爲質數時，此爲 p 之倍數 [§419]；故 $f(3)$ 可爲 p 除盡，因而 $f(4)$ 可爲 p 除盡，類推；故此命題恒能成立.

由此得忽馬氏定理之又一證明，蓋若 x 與 p 爲互質數，則得 $x^{p-1}-1$ 爲 p 之倍數也.

例 2. 求證 $5^{2n+2}-24n-25$ 可以 576 除盡之.

設以 $f(n)$ 表 $5^{2n+2}-24n-25$；於是

$$f(n+1)=5^{2n+4}-24(n+1)-25$$
$$=5^2.5^{2n+2}-24n-49;$$
$$\therefore f(n+1)-25f(n)=25(24n+25)-24n-49$$
$$=576(n+1).$$

故，若 $f(n)$ 可被 576 約盡，則 $f(n+1)$ 亦可被 576 除盡；但由試驗知 $n=1$ 時此定理爲眞，故 $n=2$ 時亦眞，$n=3$ 時亦眞，類推；故此定理恒眞.

上之結果亦可證明如次：

$$\begin{aligned}5^{2n+2}-24n-25&=25^{n+1}-24n-25\\&=25(1+24)^n-24n-25\\&=25+25.n.24+M(24^2)-24n-25\\&=576n+M(576)\\&=M(576).\end{aligned}$$

習 題 三十.B.

1. 試證 $10^n+3\cdot4^{n+2}+5$ 可以 9 除盡之.

2. 試證 $2\cdot7^n+3\cdot5^n-5$ 爲 24 之倍數.

3. 試證以 20 除 4.6^n+5^{n+1} 時所得之餘數爲 9.

4. 試證 8.7^n+4^{n+2} 爲 $24(2r-1)$ 之形式.

5. 設 p 爲質數，試證 $2\,\underline{|p-3}+1$ 爲 p 之倍數.

6. 試證 $a^{4b+1}-a$ 可以 30 除盡之.

7. 試證 $\underline{|2^r-1}$ 中所含 2 之最高次冪爲 2^r-r-1.

8. 試證 $3^{4n+2}+5^{2n+1}$ 爲 14 之倍數.

9. 試證 $3^{3n+5}+160n^2-56n-243$ 可以 512 除盡之.

10. 試證在 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^{n-1}$ 之展開式中，x 之奇次冪之係數之和，當 n 爲 5 外之質數時，可以 n 除盡之.

11. 設 n 爲大於 7 之質數，試證 n^6-1 可以 504 除盡之.

12. 設 n 爲質數，試證 $n^6+3n^4+7n^2-11$ 爲 128 之倍數.

13. 設 p 爲質數，試證 $(1+x)^{p-1}$ 之諸項之係數交互的較 p 之倍數大 1 或小 1.

14. 設 p 爲質數，試證在公差不能爲 p 除盡之 $A.P.$ 中，任意 p 個數之 $p-1$ 次冪之和較 p 之倍數少 1.

15. 設 a 及 b 均與 91 互爲質數，試證 $a^{12}-b^{12}$ 可以 91 除盡之.

16. 設 p 爲質數，試證 $\underline{|p-2r}\,\underline{|2r-1}-1$ 可以 p 除盡之.

17. 設 $n-1$，$n+1$ 均爲大於 5 之質數，試證 $n(n^2-4)$ 可以 120 除盡之，$n^2(n^2+16)$ 可以 720 除盡之. 幷證 n 必爲 $30t$ 或 $30t\pm 12$ 之形式.

18. 試證在 $\underline{|n^r-1}$ 中 n 之最高次冪等於

$$\frac{n^r-nr+r-1}{n-1}.$$

19. 設 p 爲一質數，又 a 與 p 互爲質數，且能求得一平方數 c^2，俾 c^2-a 可以 p 除盡之，試證 $a^{\frac{1}{2}(p-1)}-1$ 可以 p 除盡之.

20. 求一同形式

$$98x-1\equiv 0 \text{ (數率 139)}$$

之通解.

21. 試證小於已知數 N 且與之互爲質數之一切數之平方和爲

$$\frac{N^3}{3}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots+\frac{N}{6}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots,$$

又其立方和爲

$$\frac{N^4}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\cdots+\frac{N^2}{4}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots\cdots,$$

其 a, b, c,⋯⋯ 爲 N 內不同之質因數.

22. 設 p 及 q 爲任意二正整數，試證 $\lfloor pq$ 可以 $(\lfloor p)^q\cdot\lfloor q$ 及 $(\lfloor q)^p\cdot\lfloor p$ 除盡之.

23. 試證平方數兼爲三角數者可由 $\dfrac{1}{1-6x+x^2}$ 之展開式中 x 之各次冪之係數之平方得之. 又平方數兼爲五角數者可由 $\dfrac{1}{1-10x+x^2}$ 之展開式中 x 之各次冪之係數之平方得之.

24. 試證小於 N 且與之互爲質數之一切數之四次冪之和爲

$$\frac{N^5}{5}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots+\frac{N^3}{3}(1-a)(1-b)(1-c)\cdots$$
$$-\frac{N}{30}(1-a^3)(1-b^3)(1-c^3)\cdots,$$

其 a, b, c, ⋯爲 N 之不同質因數.

25. 設 $\phi(N)$ 爲小於 N 且與之爲互質數之整數之個數，又設 x 與 N 互爲質數，試證

$$x^{\phi(N)}-1\equiv 0\ (\text{數率 } N).$$

26. 設 d_1, d_2, d_3, ⋯⋯ 表 N 之諸約數，則

$$\phi(d_1)+\phi(d_2)+\phi(d_3)+\cdots\cdots=N.$$

又證

$$\phi(1)\frac{x}{1+x^2}-\phi(3)\frac{x^3}{1+x^6}+\phi(5)\frac{x^5}{1+x^{10}}-\cdots\cdots\text{至無窮}=\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

第三十一章

連分數通論

*__436.__ 在第二十五章中，吾人曾研究形爲 $a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{c_3+}\cdots\cdots$ 之連分數之性質，其 a_2，a_3，$\cdots\cdots$爲正整數，而 a_1 爲正整數或零．茲考究普通形式之連分數．

*__437.__ 連分數之最普通形式爲

$\frac{b_1}{a_1\pm}\,\frac{b_2}{a_2\pm}\,\frac{b_3}{a_3\pm}\cdots\cdots$，此處 a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots$，b_1，b_2，b_3，$\cdots\cdots$ 表任意數．

$\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_2}{a_2}$，$\frac{b_3}{a_3}\cdots\cdots$，諸分數名曰此連分數之成分 (*component*)．吾人專論兩種情形：(I) 其中各成分前之符號爲正者．(II) 其中各成分前之符號爲負者．

*__438.__ 求連分數

$$\frac{b_1}{a_1+}\,\frac{b_2}{a_2+}\,\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$$

之連續近值之構成律．

其首三近值爲

$$\frac{b_1}{a_1},\quad \frac{a_2b_1}{a_2a_1+b_2},\qquad \frac{a_3\cdot a_2b_1+b_3\cdot b_1}{a_3(a_2a_1+b_2)+b_3\cdot a_1}.$$

觀此可知其三近值之分子，由以 a_3 乘第二近值之分子，以 b_3 乘第一近值之分子，而相加其結果得來；其分母亦可以同法得之．

設諸連續近值均用同法構成之；令 p_1，p_2，p_3，……表諸分子，而以 q_1，q_2，q_3，……表諸分母.

假定此構成律適用於 n 次近值；換言之，假定

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}.$$

其 $n+1$ 次與 n 次近值之不同，不過以 $a_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ 代 a 而矣；故其 $n+1$ 次近值

$$=\frac{\left(a_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+b_np_{n-2}}{\left(a_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+b_nq_{n-2}}=\frac{p_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}p_{n-1}}{q_n+\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}p_n+b_{n+1}p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}}.$$

因此，若令

$$p_{n+1}=a_{n+1}p_n+b_{n+1}p_{n-1},\quad q_{n+1}=a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1},$$

則知 $n+1$ 次近值之分子分母合於假定適用於 n 次近值之構成律.但此法則適用於三次收斂值；故亦適用於四次；餘類推；因之適用於一切.

***439.** 在連分數

$$\frac{b_1}{a_1-}\ \frac{b_2}{a_2-}\ \frac{b_3}{a_3-}\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

之情形中，可證明

$$p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-2};$$

此結果可由前節變換 b_n 之符號推得之.

***440.** 在連分數

$$\frac{b_1}{a_1+}\ \frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

中，已知

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2}\quad q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}.$$

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(a_{n+1}p_n+b_{n+1}p_{n-1})q_n-(a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1})p_n}{q_{n+1}q_n}$$

$$=-\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right);$$

但
$$\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}=\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{a_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}},$$

故爲一眞分數；因此$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$絕對值小於$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$而符號相反.

按照 §335 之理論，可證明凡奇次近值皆大於其連分數，凡偶次近值皆小於其連分數；故任一奇次近值大於任一偶次近值.

是以$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}-\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$爲正且小於$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$；故

$$\frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}}<\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}.$$

又　$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-\frac{p_{2n}}{q_{2n}}$爲正且小於$\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}-\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}$；故

$$\frac{p_{2n}}{q_{2n}}>\frac{p_{2n-2}}{q_{2n-2}}.$$

故諸奇次近值皆大於其連分數，但逐次減小，諸偶次近值皆小於其連分數，但逐次增大.

設成分之個數無窮多，則諸奇次近值必漸近一固定極限，諸偶次近值亦必漸近一固定極限；若此二極限相等，則此連分數漸近於一個固定極限，若其不等，則諸奇次近值漸近一極限，諸偶次近值漸近另一極限．而此連分數名曰擺動連分數；在此情形中，連分數不過爲兩數之記號，其一爲諸奇次近值之極限，其他爲諸偶次近值之極限.

***441.** 設當 n 爲無窮大時$\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}$之極限大於零，求證連分數

$\frac{b_1}{a_1+}\ \frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}$………有一定值.

當 n 爲無窮大時，若$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$及$\frac{p_n}{q_n}$兩極限之差爲零，則此連分數有一定值.

令
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=-\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right);$$

由是得

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=(-1)^{n-1}\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\cdot\frac{b_n q_{n-2}}{q_n}\cdots\frac{b_4 q_2}{q_4}\cdot\frac{b_3 q_1}{q_3}\left(\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}\right).$$

但
$$\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}=\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}q_n+b_{n+1}q_{n-1}}=\frac{1}{\dfrac{a_{n+1}q_n}{b_{n+1}q_{n-1}}+1};$$

及
$$\frac{a_{n+1}q_n}{b_{n+1}q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}(a_n q_{n-1}+b_n q_{n-2})}{b_{n+1}q_{n-1}}=\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}+\frac{a_{n+1}b_n q_{n-2}}{b_{n+1}q_{n-1}};$$

又諸項無能爲負者；故若$\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}$之極限大於零，則$\frac{a_{n+1}q_n}{b_{n+1}q_{n-1}}$之極限亦必大於零；在此情形中$\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}$之極限小於 1；是以$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$爲無窮個眞分數之積之極限，故必等於零；即$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$及$\frac{p_n}{q_n}$漸近同一極限；此證明本命題.

例如，在連分式

$$\frac{1^2}{3+}\ \frac{2^2}{5+}\ \frac{3^2}{7+}\cdots\cdots\frac{n^2}{2n+1+}\cdots\text{中},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+3)}{(n+1)^2}=4;$$

故此連分數漸近一定極限.

*442. 在連分數 $\frac{b_1}{a_1-}\ \frac{b_2}{a_2-}\ \frac{b_3}{a_3-}\cdots$中,若各份子之分母較其分子至少大 1，則諸次近值爲依次增大之正分數.

根據假設，$\frac{b_1}{a_1}$，$\frac{b_2}{a_2}$，$\frac{b_3}{a_3}$，…等分數爲正眞分數,每分數之分母至少較其分子大1. 其二次近值爲$\dfrac{b_1}{a_1-\dfrac{b_2}{a_2}}$，因 a_1 至少較 b_1 大 1，及 $\frac{b_2}{a_2}$ 爲眞分數，故 $a_1-\frac{b_2}{a_2}$ 大於 b_1，即二次近值爲一正眞分數.同法可證明$\dfrac{b_2}{a_2-\dfrac{b_3}{a_3}}$爲一正眞分式；以 f_1 表之，則三次近值爲$\frac{b_1}{a_1-f_1}$，故爲一正眞分數. 同法可證明$\frac{b_2}{a_2-}\ \frac{b_3}{a_3-}\ \frac{b_4}{a_4}$爲一正眞分數；故四次近值

$$\frac{b_1}{a_1-}\ \frac{b_2}{a_2-}\ \frac{b_3}{a_3-}\ \frac{b_4}{a_4}$$

亦爲一正眞分數；類推.

再者，$p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2}$，　$q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-2}$，

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{b_{n+1}q_{n-1}}{q_{n+1}}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right);$$

故　$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\frac{p_n}{q_n}$ 及 $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 同號.

但　$\frac{p_2}{q_2}-\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_2b_1}{a_1a_2-b_2}-\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_1b_2}{q_1q_2}$，因此爲正數；

故　$\frac{p_2}{q_2}>\frac{p_1}{q_1}$，$\frac{p_3}{q_3}>\frac{p_2}{q_2}$，$\frac{p_4}{q_4}>\frac{p_3}{q_3}$；類推；此證明本命題.

推論. 若成分之個數無窮多，則諸近値構成一眞分數之無窮級數，各項逐次增大；在此種情形下，此連分數必漸近一定極限，此極限不能大於 1.

*443. 用公式

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2},$$

恆可依次求得任若干近値. 但在某種情形下，有時能求出 n 次近値之通式.

例. 求 $\dfrac{6}{5-}\;\dfrac{6}{5-}\;\dfrac{6}{5-}\cdots\cdots$ 之 n 次近値.

因 $p_n=5p_{n-1}-6p_{n-2}$；故諸分子成一循環級數，其中之任三連續項之關係式爲

$$p_n-5p_{n-1}+6p_{n-2}.$$

令 $$S=p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots+p_nx^{n-1}+\cdots;$$

則照 §325，得 $S=\dfrac{p_1+(p_2-5p_1)x}{1-5x+6x^2}$.

但其首二近値爲 $\dfrac{6}{5}$；$\dfrac{30}{19}$；

$$\therefore\quad S=\frac{6}{1-5x+6x^2}=\frac{18}{1-3x}-\frac{12}{1-2x};$$

由是 $$p_n=18\cdot3^{n-1}-12\cdot2^{n-1}=6(3^n-2^n).$$

同理，若 $$S'=q_1+q_2x+q_3x^2+\cdots+q_nx^{n-1}+\cdots,$$

則得 $$S'=\frac{5-6x}{1-5x+6x^2}=\frac{9}{1-3x}-\frac{4}{1-2x};$$

由是 $$q_n=9\cdot3^{n-1}-4\cdot2^{n-1}=3^{n+1}-2^{n+1}.$$

$$\therefore\quad\frac{p_n}{q_n}=\frac{6(3^n-2^n)}{3^{n+1}-2^{n+1}}.$$

僅在 a_n 及 b_n 於 n 之一切値皆爲常數時，此法適能適用. 故在連分數 $\dfrac{b}{a+}\;\dfrac{b}{a+}\;\dfrac{b}{a+}\cdots$ 之情形中，可證明諸連續次近値之分子 $\dfrac{b}{1-ax-bx^2}$ 之展開式中 x 之各次冪之係數，其分母爲 $\dfrac{a+bx}{1-ax-bx^2}$ 之展開式中 x 之各次冪之係數.

***444.** 關於 p_n 及 q_n 之通值之研究，學者可參考有限差 (*Finite Differences*) 之專書．其能用代數方法求得者，不過若干特例而矣．下例方法有時有用．

例．求 $\frac{1}{1+}\ \frac{2}{2+}\ \frac{3}{3+}\cdots$ 之值．

p_n 及 q_n 所用之構成律相同；吾人以 u_n 表其一；於是

$$u_n = nu_{n-1} + nu_{n-2},$$

即
$$u_n-(n+1)u_{n-1}=-(u_{n-1}-nu_{n-2}).$$

同理
$$u_{n-1}-nu_{n-2}=-(u_{n-2}-\overline{n-1}\,u_{n-3}).$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$u_3-4u_2=-(u_2-3u_1);$$

故由乘法得 $u_n-(n+1)u_{n-1}=(-1)^{n-2}(u_2-3u_1)$.

共首二近値爲 $\frac{1}{1}$，$\frac{2}{4}$；是以

$$p_n-(n+1)p_{n-1}=(-1)^{n-1},\quad q_n-(n+1)q_{n-1}=(-1)^{n-2},$$

故
$$\frac{p_n}{|\underline{n+1}}-\frac{p_{n-1}}{|\underline{n}}=\frac{(-1)^{n-1}}{|\underline{n+1}},\quad \frac{q_n}{|\underline{n+1}}-\frac{q_{n-1}}{|\underline{n}}=\frac{(-1)^{n-2}}{|\underline{n+1}},$$
$$\frac{p_{n-1}}{|\underline{n}}-\frac{p_{n-2}}{|\underline{n-1}}=\frac{(-1)^{n-2}}{|\underline{n}},\quad \frac{q_{n-1}}{|\underline{n}}-\frac{q_{n-2}}{|\underline{n-1}}=\frac{(-1)^{n-3}}{|\underline{n}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{p_2}{|\underline{3}}-\frac{p_1}{|\underline{2}}=-\frac{1}{|\underline{3}},\quad \frac{q_2}{|\underline{3}}-\frac{q_1}{|\underline{2}}=\frac{1}{|\underline{3}},$$
$$\frac{p_1}{|\underline{2}}=\frac{1}{|\underline{2}},\quad \frac{q_1}{|\underline{2}}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{|\underline{2}};$$

因是，由加法，

$$\frac{p_n}{|\underline{n+1}}=\frac{1}{|\underline{2}}-\frac{1}{|\underline{3}}+\frac{1}{|\underline{4}}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{|\underline{n+1}};$$
$$\frac{q_n}{|\underline{n+1}}=1-\frac{1}{|\underline{2}}+\frac{1}{|\underline{3}}-\frac{1}{|\underline{4}}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-2}}{|\underline{n+1}}.$$

令 n 爲無窮大，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{e}\div\left(1-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e-1},$$

故此即已知式之值．

*445. 若在連分數$\frac{b_1}{a_1+}\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$中，各成分均爲整分子分母之眞分數，則此輾轉分數爲不可通約量.

設其可約，使此輾轉分數爲可約且等於$\frac{B}{A}$，A，B 爲正整數，於是 $\frac{B}{A}=\frac{b_1}{a_1+f_1}$，$f_1$ 表無窮輾轉分數 $\frac{b_2}{a_2+}\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots\cdots\cdots$；故 $f_1=\frac{Ab_1-Ba_1}{B}=\frac{C}{B}$・今 A，B，a_1,b_1，爲整數，f_1 爲正量，由是 C 爲正整數. 同法 $\frac{C}{B}=\frac{b_2}{a_2+f_2}$，$f_2$ 表無窮輾轉分數 $\frac{b_3}{a_3+}\frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots$；故 $f_2=\frac{Bb_2-Ca_2}{C}$假使$=\frac{D}{C}$；如前知 D 爲正整數；類推.

又因$\frac{B}{A}$小於眞分數$\frac{b_1}{a_1}$；$\frac{C}{B}$小於$\frac{b_2}{a_2}$；$\frac{D}{C}$小於$\frac{b_3}{a_3}$？類推；故$\frac{B}{A}$，$\frac{C}{B}$，$\frac{D}{C}$，$\cdots\cdots\cdots$爲眞分數.

由是 A，B，C，D，$\cdots\cdots$成一正整數之遞減無限級數；此爲不合理. 故已知分數爲不可約量.

設從某固定份子後所有其他份子皆爲眞分數，則以上結果於份子之幾不爲眞分數時，亦依然適用.

因設$\frac{b_n}{a_n}$及所有其後諸份子，爲眞分數；由是如適所證明，以$\frac{b_n}{a_n}$始之無窮輾轉分數爲不可約量；表之以 k，於是相當$\frac{p_n}{q_n}$之全商爲$\frac{k}{1}$，且由是此輾轉分數之值爲$\frac{p_{n-1}+kp_{n-2}}{q_{n-1}+kq_{n-2}}$.

除非$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$，此分數不能爲可通約量；而此條件，必須$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{p_{n-3}}{q_{n-3}}$，$\frac{p_{n-3}}{q_{n-3}}=\frac{p_{n-4}}{q_{n-4}}$，………，以至最後$\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_1}{q_1}$，即 $b_1b_2=0$ 始能成立，但此爲不可能，故已知分數必爲不可約量.

***446.** 若 $\frac{b_1}{a_1-}\,\frac{b_2}{a_2-}\,\frac{b_3}{a_3-}\cdots\cdots$之各成分均爲整分子分母之眞分數，又若從任一成分起之連分數之値皆小於1，則此分數爲不可通約量.

此定理之證法與前節類似.

*習　題　三十一.A.

1. 試證在連分數

$$\frac{b_1}{a_1-}\,\frac{b_2}{a_2-}\,\frac{b_3}{a_3-}\cdots\cdots$$

中，　$p_n=a_np_{n-1}-b_np_{n-2}$，　$q_n=a_nq_{n-1}-b_nq_{n-2}$.

2. 將$\left(\frac{2x+1}{2x}\right)^2$化爲分子爲 1 之連分數.

3. 試證

(1) $\sqrt{a^2+b}=a+\frac{b}{2a+}\,\frac{b}{2a+}\cdots\cdots\cdots$,

(2) $\sqrt{a^2-b}=a-\frac{b}{2a-}\,\frac{b}{2a-}\cdots\cdots\cdots$.

4. 在連分數$\frac{b_1}{a_1-}\,\frac{b_2}{a_2-}\,\frac{b_3}{a_3-}\cdots\cdots$中，若每成分之分母至少較其分子大 1，試證 p_n 及 q_n 與 n 俱增.

5. 若 a_1，a_2，$a_3\cdots\cdots a_n$ 成調和級數，試證

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2-}\,\frac{1}{2-}\,\frac{1}{2-}\cdots\cdots\frac{1}{2-}\,\frac{a_2}{a_1}.$$

6.　試證

$$\left(a+\frac{1}{2a+}\ \frac{1}{2a+}\cdots\right)^2+\left(a-\frac{1}{2a-}\ \frac{1}{2a-}\cdots\right)^2=2a^2,$$

又 $\left(a+\dfrac{1}{2a+}\ \dfrac{1}{2a+}\cdots\right)\left(a-\dfrac{1}{2a-}\ \dfrac{1}{2a-}\cdots\right)=a^2-\dfrac{1}{2a^2-}\ \dfrac{1}{2a^2-}\cdots$

7.　在連分數

$$\frac{b}{a+}\ \frac{b}{a+}\ \frac{b}{a+}\cdots\cdots$$

中，試證　　$p_{n+1}=bq_n,\ \ bq_{n+1}-ap_{n+1}=b^2q_{n-1}.$

8.　試證 $\dfrac{b}{a+}\ \dfrac{b}{a+}\ \dfrac{b}{a+}\cdots\cdots=b.\dfrac{\alpha^x-\beta^x}{\alpha^{x+1}-\beta^{x+1}}$，

x 爲成分之個數，α，β 爲方程式 $k^2-ak-b=0$ 之根.

9.　試證

$a+\dfrac{1}{b+}\ \dfrac{1}{c+}\ \dfrac{1}{d+}\ \dfrac{1}{a+}\cdots\cdots$，及 $-d+\dfrac{1}{-c+}\ \dfrac{1}{-b+}\ \dfrac{1}{-a+}\ \dfrac{1}{-d+}\cdots$，

兩連分數之積等於 -1.

試證

10.　$\dfrac{1}{1-}\ \dfrac{4}{5-}\ \dfrac{9}{13-}\ \dfrac{64}{25-}\cdots=\dfrac{(n^2-1)^2}{n^2+(n+1)^2}$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

11.　$\dfrac{2}{1-}\ \dfrac{3}{5-}\ \dfrac{8}{7-}\cdots\cdots\dfrac{n^2-1}{2n+1}=\dfrac{n(n+3)}{2}.$

12.　$\dfrac{2}{2-}\ \dfrac{3}{3-}\ \dfrac{4}{4-}\cdots\cdots\dfrac{n+1}{n+1-}\ \dfrac{n+2}{n+2}=1+1+\underline{|2}+\underline{|3}+\cdots+\underline{|n}.$

13.　$\dfrac{1}{1-}\ \dfrac{1}{3-}\ \dfrac{2}{4-}\ \dfrac{3}{5-}\cdots\cdots\dfrac{n-1}{n+1-}\cdots\cdots=e-1.$

14.　$\dfrac{4}{1+}\ \dfrac{6}{2+}\ \dfrac{8}{3+}\cdots\cdots\dfrac{2n+2}{n+}\cdots\cdots=\dfrac{2(e^2-1)}{e^2+1}.$

15.　$\dfrac{3.3}{1+}\ \dfrac{3.4}{2+}\ \dfrac{3.5}{3+}\cdots\cdots\dfrac{3(n+2)}{n+}\cdots\cdots=\dfrac{6(2e^3+1)}{5e^3-2}.$

16.　設 $u_1=\dfrac{a}{b}$，$u_2=\dfrac{b}{a+b}$，$u_3=\dfrac{a+b}{a+2b}$，$\cdots\cdots\cdots$，每分數之分子爲前分數之分母，其分母則爲前分數之分子及分母之和，試證

$$u_\infty=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

17．試證連分數

$$\frac{r}{r+1-}\,\frac{r}{r+1-}\,\frac{r}{r+1-}\cdots\cdots$$

之 n 次近値爲$\dfrac{r^{n+1}-r}{r^{n+1}-1}$.

18．求$\dfrac{a_1}{a_1+1-}\,\dfrac{a_2}{a_2+1-}\,\dfrac{a_3}{a_3+1-}$ 之値，

其 a_1，a_2，a_3，……爲大於 1 之正數．

19．試證 $1-\dfrac{1}{4-}\,\dfrac{1}{4-}\cdots\cdots$ 之 n 次近値等於

$\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\cdots\cdots\cdots$之 $2n-1$ 次近値．

20．試證

$$\frac{1}{5-}\,\frac{1}{2-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{1}{5-}\,\frac{1}{2-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{1}{5-}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之 $3n$ 次近値爲$\dfrac{n}{3n+1}$.

21．試證$\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{2}{3+}\,\dfrac{3}{4+}\cdots\cdots\cdots=\dfrac{3-e}{e-2}$;

由是證明 e 在 $2\frac{2}{3}$ 與 $2\frac{8}{11}$ 之間．

將級數化爲連分數

***447.** 爲便利計，可將級數寫爲下之形式:

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{u_n}.$$

令
$$\frac{1}{u_r}+\frac{1}{u_{r+1}}=\frac{1}{u_r+x_r};$$

於是
$$(u_r+x_r)(u_{r+1}+u_r)=u_ru_{r+1},$$

$$\therefore\ x_r=-\frac{u_r^2}{u_r+u_{r+1}}.$$

故
$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}=\cfrac{1}{u_1-\cfrac{u_1^2}{u_1+u_2}}=\frac{1}{u_1-}\,\frac{u_1^2}{u_1+u}.$$

同理，

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2+x_2}=\frac{1}{u_1-}\;\frac{u_1^2}{u_1+u_2+x_2}.$$

$$=\frac{1}{u_1-}\;\frac{u_1^2}{u_1+u_2-}\;\frac{u_2^2}{u_2+u_3};$$

類推；故一般言之，

$$\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{u_n}$$

$$=\frac{1}{u_1-}\;\frac{u_1^2}{u_1+u_2-}\;\frac{u_2^2}{u_2+u_3-}\cdots\cdots\frac{u_{n-1}^2}{u_{n-1}+u_n}.$$

例 1.　將下級數化爲連分數：

$$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}+\frac{x^2}{a_0a_1a_2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{a_0a_1a_2\cdots a_n}.$$

令　$$\frac{1}{a_n}-\frac{x}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_n+y_n};$$

於是　$$(a_n+y_n)(a_{n+1}-x)=a_na_{n+1};$$

$$\therefore\quad y_n=\frac{a_nx}{a_{n+1}-x}.$$

故　$$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}=\frac{1}{a_0+y_0}=\frac{1}{a_0+}\;\frac{a_0x}{a_1-x}.$$

又，$$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}+\frac{x^2}{a_0a_1a_2}=\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{x}{a_1a_2}\right)=\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0(a_1+y_1)}$$

$$=\frac{1}{a_0+}\;\frac{a_0x}{a_1+y_1-x}$$

$$=\frac{1}{a_0+}\;\frac{a_0x}{a_1-x+}\;\frac{a_1x}{a_2-x};$$

一般言之，$$\frac{1}{a_0}-\frac{x}{a_0a_1}+\frac{x^2}{a_0a_1a_2}\cdots\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{a_0a_1a_2\cdots a_n}$$

$$=\frac{1}{a_0+}\;\frac{a_0x}{a_1-x+}\;\frac{a_1x}{a_2-x+}\cdots\cdots\frac{a_{n-1}x}{a_n-x}.$$

例 2.　將 $log(1+x)$化爲連分數.

已知　$$log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\cdots$$

所求之式，由與級數

$$\frac{x}{a_1}-\frac{x^2}{a_2}+\frac{x^3}{a_3}-\frac{x^4}{a_4}+\cdots\cdots$$

同值之連分數推得之，最爲簡捷.

令 $$\frac{1}{a_n}-\frac{x}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n+y_n},$$

得 $$y_n=\frac{a_n^2x}{a_{n+1}-a_nx};$$

由是

$$\frac{x}{a_1}-\frac{x^2}{a_2}+\frac{x^3}{a_3}-\frac{x^4}{a_4}+\cdots=\frac{x}{a_1+}\;\frac{a_1^2x}{a_2-a_1x+}\;\frac{a_2^2x}{a_3-a_2x+}\;\frac{a_3^2x}{a_4-a_3x+}\cdots;$$

$$\therefore\ \log(1+x)=\frac{x}{1+}\;\frac{1^2x}{2-\ x+}\;\frac{2^2x}{3-2x+}\;\frac{3^2x}{4-3x+}\cdots\cdots$$

***448.** 在某種情形下，連分數之成分可用下定理化簡之．

連分數

$$\frac{b_1}{a_1+}\;\frac{b_2}{a_2+}\;\frac{b_3}{a_3+}\;\frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots$$

等於連分數

$$\frac{c_1b_1}{c_1a_1+}\;\frac{c_1c_2b_2}{c_2a_2+}\;\frac{c_2c_3b_3}{c_3a_3+}\;\frac{c_3c_4b_4}{c_4a_4+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

其 c_1, c_2, c_3, c_4, $\cdots\cdots$ 爲任意數．

以 f_1 表 $\frac{b_2}{a_2+}\;\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$; 則此連分數等於

$$\frac{b_1}{a_1+f_1}=\frac{c_1b_1}{c_1a_1+c_1f_1}.$$

以 f_2 表 $\frac{b_3}{a_3+}\;\frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots$; 則

$$c_1f_1=\frac{c_1b_2}{a_2+f_2}=\frac{c_1c_2b_2}{c_2a_2+c_2f_2}.$$

同理，$c_2f_2=\frac{c_2c_3b_3}{c_3a_3+c_3f_3}$；餘類推；故此定理證明矣．

習 題 三十一.B.

試證

1. $\dfrac{1}{u_0}-\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}-\dfrac{1}{u_3}+\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{u_n}$

$$=\frac{1}{u_0+}\,\frac{u_0^2}{u_1-u_0+}\,\frac{u_1^2}{u_2-u_1+}\cdots\cdots\frac{u^2_{n-1}}{u_n-u_{n-1}}.$$

2. $\dfrac{1}{a_0}+\dfrac{x}{a_0a_1}+\dfrac{x^2}{a_0a_1a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{a_0a_1a_2\cdots a_n}$

$$=\frac{1}{a_0-}\,\frac{a_0x}{a_1+x-}\,\frac{a_1x}{a_2+x-}\cdots\cdots\frac{a_{n-1}x}{a_n+x}.$$

3. $\dfrac{r-1}{r-2}=\dfrac{r}{r-}\,\dfrac{r+1}{r+1-}\,\dfrac{r+2}{r+2-}\cdots\cdots$

4. $\dfrac{2n}{n+1}=\dfrac{1}{1-}\,\dfrac{1}{4-}\,\dfrac{1}{1-}\,\dfrac{1}{4-}\cdots\cdots$至 n 商.

5. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{1-}\,\dfrac{1}{3-}\,\dfrac{4}{5-}\,\dfrac{9}{7-}\cdots\cdots\dfrac{n^2}{2n+1}.$

6. $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{1-}\,\dfrac{1^4}{1^2+2^2-}\cdots\cdots\dfrac{n^4}{n^2+(n+1)^2}.$

7. $e^x=1+\dfrac{x}{1-}\,\dfrac{x}{x+2-}\,\dfrac{2x}{x+3-}\,\dfrac{3x}{x+4-}\cdots\cdots$

8. $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{abc}-\dfrac{1}{abcd}+\cdots=\dfrac{1}{a+}\,\dfrac{a}{b-1+}\,\dfrac{b}{c-1+}\,\dfrac{c}{d-1+}\cdots\cdots$

9. $1+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r^4}+\dfrac{1}{r^9}+\dfrac{1}{r^{16}}+\cdots=1+\dfrac{1}{r-}\,\dfrac{r}{r^3+1-}\,\dfrac{r^3}{r^5+1-}\,\dfrac{r^5}{r^7+1-}\cdots$

10. $\dfrac{a_1}{a_1+}\,\dfrac{a_2}{a_2+}\,\dfrac{a_3}{a_3+}\cdots\cdots\dfrac{a_n}{a_n}=\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{a_1}{a_2+}\,\dfrac{a_2}{a_3+}\cdots\cdots\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}.$

11. 設 $P=\dfrac{a}{a+}\,\dfrac{b}{b+}\,\dfrac{c}{c+}\cdots\cdots\quad Q=\dfrac{a}{b+}\,\dfrac{b}{c+}\,\dfrac{c}{d+}\cdots\cdots,$

試證 $P(a+1+Q)=a+Q.$

12. 試證$\dfrac{1}{q_1}-\dfrac{x}{q_1q_2}+\dfrac{x^2}{q_2q_3}-\dfrac{x^3}{q_3q_4}+\cdots\cdots$與連分數$\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{x}{a_2+}\,\dfrac{x}{a_3+}\,\dfrac{x}{a_4+}$ ………相等，其 q_1，q_2，q_3，……爲連續近値之分母.

第三十二章

或能論

(又名適遇法)

449. 定義. 若某事能由 a 法成功，而由 b 法失敗，且各法皆有同等可能性，則此事成功之或能率或機會率爲$\frac{a}{a+b}$，而失敗之或能率爲$\frac{b}{a+b}$.

例如，若某種彩票有獎者 7 張而空白者 25 張，則有一彩票者得獎之或能率爲 7/32，而落空之或能率爲 25/32.

450. 關於或能率之數學定義之理論，觀次之研究可更爲明瞭.

若某事能由 a 法成功，而由 b 法失敗，且諸法有同等可能性，吾人能斷定此事成功之或能率對於失敗之或能率之比等於 a 比 b. 故若以 ka 表成功之或能率，則其失敗之或能率應以 kb 表之，此處 k 爲一未定之常數.

$\therefore$ 成功之或能率＋失敗之或能率 $=k(a+b)$.

此事成功或失敗二者必居其一；故其成功之或能率及失敗之或能率之和必爲定數，若取此定數爲單位，則得

$$1=k(a+b),\quad 即\quad k=\frac{1}{a+b};$$

$\therefore$ 此事成功之或能率爲$\frac{a}{a+b}$,

其失敗之或能率爲$\frac{b}{a+b}$.

推論. 若 p 爲某事成功之或能率，則其失敗之或能率爲 $1-p$.

451. 有不謂某事成功之或能率爲$\frac{a}{a+b}$，而謂此事成功之優率爲 a 比 b，或此事失敗之優率爲 b 比 a.

452. §449 或能率之定義，有時略變其形式，以便應用．若可能發生之情形之全數爲 c，各情形之可能性皆等，其中有 a 情形此事能成功，則此事成功之或能率爲$\frac{a}{c}$，失敗之或能率爲 $1-\frac{a}{c}$.

例1． 取通常骰子一枚，六面刻 1 至 6 等數，問一擲能得大於 4 之數之或能率爲何？

此骰之落法共有六種，其中有二種此事能成功；

$$\therefore \quad 所求之或能率=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

例2． 一袋裝有 4 白球 5 黑球，某人由此袋中隨手取出 3 球；問非三者皆黑之優率爲何？

三球取法之全數爲 ${}^9C_3$；三黑球取法之全數爲 ${}^5C_3$；故取出三球皆黑之或能率

$$=\frac{{}^5C_3}{{}^9C_3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{9\cdot8\cdot7}=\frac{5}{42}.$$

非三球皆黑之優率爲 37 比 5.

例3． 求二骰一擲至少擲得一么之或能率.

擲法之總數爲 6×6，或 36.

一骰之么面可與他骰之六面中之每面配合，此骰么面外之 5 面中之每面又可與他骰之么面配和；故擲得一么之方法有 11 種.

故所求之或能率爲$\frac{11}{36}$.

亦可如下解之：

每骰不能擲得么之擲法有 5 種，故二骰有 25 種擲法不能擲得一么．故不能擲得一么之或能率爲$\frac{25}{36}$；因此至少擲得一么之或能率爲

$$1-\frac{25}{36} \text{ 或 } \frac{11}{36}.$$

例4.　求三骰一擲得 15 點以上之或能率.

一擲得 18 點，必由三個 6 點配成，其擲法僅有一種；一擲得 17 點，必由三面配成，其擲法有三種；一擲得 16 點，必由 6, 6, 4, 或 6, 5, 5, 配成，其擲法有三種.

故成功擲法之數爲

$$1+3+3+3 \text{ 或 } 10.$$

其擲法之全數爲 6^3 或 216;

$$\therefore \quad \text{所求或能率}=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}.$$

例5.　A 有彩票 3 張，此彩中有三個獎六個空白；B 有彩票一張，此彩有一個獎兩個空白，試證 A 與 B 之得獎之或能率之比爲 16 比 7.

A 僅有一種情形能得 3 獎；

有$\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\times 6$ 種情形能得 2 個獎 1 個空白；

有 $3\times\frac{6\cdot5}{1\cdot2}$種情形能得1個獎2個空白；

此等數之和爲 64，是即 A 能得獎之方法之數.

又A 有$\frac{9\cdot8\cdot7}{1\cdot2\cdot3}$ 或 84 種方法取法得三張；

故 A 得獎之或能率$=\frac{64}{84}=\frac{16}{21}$.

B 得獎之或能率顯然爲$\frac{1}{3}$;

$$\text{故 } A \text{ 之或能率} : B \text{ 之或能率}=\frac{16}{21} : \frac{1}{3}$$
$$=16 : 7.$$

亦可解之如次：A 有 $\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}$ 或 20 情形完全落空；故其落空之或能率爲$\frac{20}{84}$或$\frac{5}{21}$;

因此 A 得獎之或能率爲 $1-\frac{5}{21}=\frac{16}{21}$.

453.　設 $A, B, C,\cdots\cdots$ 諸事中必有一事能成功，且僅有一能成功；又設 a, b, c 爲各事能成功之情形之數，各情形皆有同等之發生之可能性；求各事件成功之或能率.

此同等可能之方法之總數爲 $a+b+c+\cdots\cdots$，其中 A 能成功者有

a 種；故 A 成功之或能率爲 $\frac{a}{a+b+c+\cdots}$. 同理，B 成功之或能率爲 $\frac{b}{a+b+c+\cdots}$；類推.

454. 就上舉諸例觀之，解簡易之或能率問題，不外利用或能率之定義及排列組合之定律而已，此外則一無所需.

習 題 三十二. A.

1. 求二骰一擲得 (1) 五點，(2) 六點之或能率.

2. 從一副 52 張之紙牌中任取二張；求得一僕牌及一后牌之或能率.

3. 一袋內有 5 白球，7 黑球，4 紅球：求任意取 3 個，其色皆白之或能率.

4. 擲錢幣四枚，求得二正面二反面之或能率.

5. 二事之一必發生：已知一事之或能率爲他事者之 2/3，求他事發生之優率.

6. 從一付紙牌內任意取四張，求取得同套四尊之或能率.

7. 十三人圍一圓桌而坐，試證二特殊人不相隣之或能率爲 5比1.

8. 有 A,B,C 三事，其中必有一事且僅有一事必發生；A 不發生之優率爲 8 比 3，B 者爲 5 比 2；求 C 不發生之優率.

9. 求一骰擲 4 點，二骰擲 8 點，三骰擲 12 點之或能率之比.

10. 洗牌時無意中掉落四張；求每組落一張之或能率.

11. A 彩票 3 張，此彩有三個奬九個空白，B 之彩票 2 張，此彩有二個奬六個空白；求二人得奬之或能率之比.

12. 試證用 4 個骰，3 個骰，及 2 個骰擲得六點之或能率之比爲 1:6:18.

13. 有書三種，一種有 3 本，一種有 4 本，一種有 1 本．設任置書架上，試証同種同處之或能率為$\frac{3}{140}$．

14. A,B 二人擲兩骰；A 擲得 9，求 B 擲得較大點之或能率．

15. 任意將 *Clifton* 所含字母排為一行;試求二母音相鄰之或能率．

16. 玩牌時一手牌中有王牌之或能率為何?

17 設將 4 個先令及 3 個半克郎任置一行；試證兩端為半克郎之或能率為$\frac{1}{7}$．若為 m 先令及 n 半克郎則何如?

455. 此前吾人所論者，僅為或能論中之單純事件．若兩種或多種單純事件連合發生，則謂諸事件為複合事件．

例如，一袋內有 5 個白球，8 個黑球，今從其中連取兩次，每次取 3 球．若計算先取得 3 白球，後取得三黑球之或能率，則須討論一複合事件．

在此例中，第二次取得之球可與第一次取得者有關，亦可無關．若第一次取出之球不再放回，如取得三白球，則其餘黑球與白球之比值，必較第一次取出非皆白者為大，即受第一結果之影響．但若第一次取出之球，於取第二次前仍放回袋內，則第二次之結果決不受第一次之結果之影響．

故得下之定義:

諸事件之稱為相關事件或獨立事件，全視一事件之發生是否影響於其他事件而定．相關事件有時稱為未定事件．

456. 設有二獨立事件，其或能率均爲已知，求二者皆發生之或能率．

設第一事件有 a 法發生，而有 b 法不發生，諸法之可能性皆等；又假設第二事件有 a' 法發生，而有 b' 法不發生，諸法亦有同等之可能性．則 $a+b$ 法中每皆可與 $a'+b'$ 法中之每法結合而成 $(a+b)(a'+b')$ 個複合法，諸法有同等之可能性．

在其中之 aa' 法中，二事皆能發生，在 bb' 法中，二事皆不發生，在 ab' 中，第一事發生而第二事不發生，在 $a'b$ 中，第一事不發生而第二發生．故

$\dfrac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$爲二事皆發生之或能率；

$\dfrac{bb'}{(a+b)(a'+b')}$爲二事皆不發生之或能率；

$\dfrac{ab'}{(a+b)(a'+b')}$爲第一事發生而第二事不發生之或能率；

$\dfrac{a'b}{(a+b)(a'+b')}$爲第一事不發生而第二事發生之或能率．

故若二獨立事件之或能率爲 p 及 p'，則二事皆發生之或能率爲 pp'．此理可適用於任若干獨立事件．故若 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots$ 爲若干獨立事件發生之或能率，則全數發生之或能率爲 $p_1p_2p_3\cdots\cdots$；首二者發生而餘皆不發生之或能率爲 $p_1p_2(1-p_3)(1-p_4)\cdots\cdots$；此理可用於任何連續特殊情形．

457. 若某事在一次試驗中發生之或能率爲 p，則此事在任意指定之 r 次試驗中發生之或能率爲 p^r；此由前節內使 $p_1=p_2=p_3=\cdots\cdots=p$ 推知之．

欲求諸事中至少有一事發生之或能率，可如下進行之：諸事皆不發生之或能率爲 $(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots\cdots$，此情形外則諸事中必有一事發生；故所求之或能率爲

$$1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots\cdots$$

例1．一袋內有 5 個白球 8 個黑球，設從袋內任取球二次，每次取 3 個，且在取第二次之前，仍將第一次取出之球放回；試求先取得三個白球，次取得三個黑球之或能率．

三球取法之總數為 ${}^{13}C_3$；

三白球取法之數為 ${}^{5}C_3$；

三黑球取法之數為 ${}^{8}C_3$．

故第一次取得 3 白球之或能率 $=\dfrac{5\cdot4}{1\cdot2}\div\dfrac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{5}{143}$；

第二次取得 3 黑球之或能率 $=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\div\dfrac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3}=\dfrac{28}{143}$；

因此所求之或能率 $=\dfrac{5}{143}\times\dfrac{28}{143}=\dfrac{140}{20449}$．

例2．設將一錢幣連擲三次，試求正面反面互見之或能率．

第一次擲必得正面或反面；第二次擲得與第一次相反之結果之或能率為 $\frac{1}{2}$，第三次擲得與第一次相同之結果之或能率為 $\frac{1}{2}$．

故此複合事件之或能率 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$．

例3．A 君現年 35 歲，其不能活至 65 歲之優率為 9 比 7，B 君現年 45 歲，其不能活至 75 歲之優率為 3 比 2；試求二人中至少有一人由今再活 30 年之或能率．

A 在 30 年內故去之或能率為 $\dfrac{9}{16}$；

B 在 30 年內故去之或能率為 $\dfrac{3}{5}$；

故在 30 年內二人皆故去之或能率為 $\dfrac{9}{16}\times\dfrac{3}{5}$ 或 $\dfrac{27}{80}$；

是以在 30 年內至少一人尚在之或能率為 $1-\dfrac{27}{80}$ 或 $\dfrac{53}{80}$．

458. 稍稍變更 §456 內符號之意義，足可用以估定二相關事件之或能率．因設在第一事件發生之後，第二事件能隨之發生之方法之數為 a'，不隨之發生之方法之數為 b'；則二事件俱發生之方法之數為 aa'，而其俱發生之或能率為 $\dfrac{aa'}{(a+b)(a'+b')}$．

故若第一事件發生之或能率為 p，第二事件隨之發生之或能率為 p'，則二事件俱發生之或能率為 pp'.

例 1. 在玩牌時之一手牌中，試求一人能得將牌中之王，后兩牌之或能率.

設玩牌者為 A；A 得王牌之或能率顯為$\frac{13}{52}$，因王牌有 52 種不同之安置法，而其中有 13 種可落於 A 手也. 當A既有王牌時，其兼得后牌之或能率為$\frac{12}{51}$；因后牌有51種不同安置法，而其中之 12 可落於 A 手也.

故所求之或能率$=\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}=\frac{1}{17}$.

亦可解之如次:

A 能得王，后兩牌之方法之數，等於 13 物之二元排列法之數，即 $13\cdot12$. 又王，后之安置法之總數為 $52\cdot51$.

故所求或能率$=\frac{13\cdot12}{52\cdot51}=\frac{1}{17}$，與前得者同.

例 2. 某袋內有 5 個白球，8 個黑球，設從袋內任取球兩次，每次取兩球，其已取出者不再放回；試求第一次取得 3 個白球，第二次取得 3 個黑球之或能率.

在取第一次時，三球之取法之總數為 ${}^{13}C_3$，而取得三個白球之方法之數為 ${}^{5}C_3$.

故第一次取得 3 白球之或能率$=\frac{5\cdot4}{1\cdot2}\div\frac{13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3}=\frac{5}{143}$.

既取出 3 個白球後，袋內餘 2 個白球，8 個黑球.

故在取第二次時，取三球之方法之總數為 ${}^{10}C_3$，而取得 3 個黑球之方法之數為 ${}^{8}C_3$.

故第二次取得三個黑球之或能率

$$=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}\div\frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3}=\frac{7}{15};$$

故所求之或能率

$$=\frac{5}{143}\times\frac{7}{15}=\frac{7}{429}.$$

學者應將此解法與 §457 例 1 者比較之.

459. 設某事能由互斥之兩種或多種不同方法發生，則此事發生之或能率爲其由各種不同方法發生之或能率之和.

此有時視爲由或能率定義生出之自明命題．但亦可證明如下:

設某事能由兩方法發生，此兩法不能同時存在；令$\frac{a_1}{b_1}$，及$\frac{a_2}{b_2}$表此事由兩法發生之或能率，則在 b_1b_2 種情形之中，有 a_1b_2 種此事能由第一方法發生，有 a_2b_1 種此事能由第二方法發生，而諸方法不能同時並立．故在 b_1b_2 種情形之中，有 $a_1b_2+a_2b_1$ 此事能發生；故此事由一法或他法發生之或能率爲

$$\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1b_2}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}.$$

此理可推及於此事能由任若干互斥方法發生之情形.

故若某件能由 n 個互斥之方法發生，又設其或能率分別爲 p_1，p_2，p_3，……p_n，則其能由諸方法中之某一方法發生之或能率爲

$$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n.$$

例 1．　求擲二骰至少得 9 點之或能率.

9 點能由 4 法合成，故擲得 9 點之或能率爲 $\frac{4}{36}$.

10 點能由 3 法合成，故擲得 10 點之或能率爲$\frac{3}{36}$.

11 點能由 2 法合成，故擲得 11 點之或能率爲$\frac{2}{36}$.

12 點能由 1 法作成，故擲得 12 點之或能率爲$\frac{1}{36}$.

擲得不小於 9 之點之或能率應爲以上諸或能率之和;

$$\therefore\quad 所求或能率=\frac{4+3+2+1}{36}=\frac{5}{18}.$$

例 2. 設有三個錢袋，第一袋內有 1 個薩瓦林，3 個先令，第二錢袋內有 2 個薩瓦林，4 個先令；第三錢袋內有 3 個薩瓦林，1 個先令. 設從任一錢袋內任取一個錢幣，試求取得一個薩瓦林之或能率.

因可從任一袋內任取一錢幣，故從第一袋內採取之或能率為 $\frac{1}{3}$，而取得一薩瓦林之或能率為 $\frac{1}{4}$；是以從第一袋取得一薩瓦林之或能率為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$ 即 $\frac{1}{12}$. 同理，從第二袋取得一薩瓦林之或能率為 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{6}$ 即 $\frac{1}{9}$；從第三袋取得一薩瓦林之或能率為 $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}$ 即 $\frac{1}{4}$；

$$\therefore 所求之或能率=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{4}{9}.$$

460. 就上節觀之，足見某事之或能率，有時可視為兩事或率事之或能率之和；但務須注意，一串事中之一事或他事之或能率為個別右事之或能率之和者，僅在諸事件為互斥時為然，換言之即當一事之發生與他任一事之發生不能並見時方可.

例. 在分寫首 20 個自然數之 20 張紙片中，任取一張，試求取得數為 3 或 7 之倍數之或能率.

取得數為 3 之倍數之或能率為 $\frac{6}{20}$，取得數為 7 之倍數之或能率為 $\frac{2}{20}$；此二者不能同在，故所求之或能率為

$$\frac{6}{20}+\frac{2}{20} 或 \frac{2}{5}.$$

但若此問題為：求取得數為 3 或 5 之倍數之或能率，則依此理論，推之必得錯誤之結果.

蓋吾人不能謂取得數為 3 之倍數之或能率為 $\frac{6}{20}$，而為 5 之倍數之或能率為 $\frac{4}{20}$，故取得數為 3 或 5 之倍數之或能率為 $\frac{6}{20}+\frac{4}{20}$ 即 $\frac{1}{2}$. 因紙片上之數可兼為 3 及 5 之倍數，是二事非互斥者也.

461. 須知在許多情形中，單純事件與複合事件間之別，不過對同一事件之不同看法而已.

例. 某袋內有 5 個白球，7 個黑球；設任取二球，試求取得一黑一白之或能率.

(*i*) 將此視爲單純事件，則其或能率

$$=(5\times7)\div{}^{12}C_2=\frac{35}{66}.$$

(*ii*) 此事可視爲下列二複合事件中之任一種：

(1) 取得一白球後，再取得一黑球，其或能率爲

$$\frac{5}{12}\times\frac{7}{11}\text{或}\frac{35}{132};$$

(2) 取得一黑球後，再取得一白球，其或能率爲

$$\frac{7}{12}\times\frac{5}{11}\text{或}\frac{35}{132}.$$

因二者不可得兼，故所求或能率

$$=\frac{35}{132}+\frac{35}{132}=\frac{35}{66}.$$

此處假定分次取兩個指定之球，其或能率與同時取此二球者相同．稍加考慮即知此假定之無誤也.

習　題　三十二.B.

1. 求一骰連擲二次，僅第一次擲得么之或能率.

2. 從常用紙牌中任取三張，求取得僕，后，王牌各一張之或能率.

3. 某事不發生之優率爲 5 比 2，另有一事與前事無關其優率爲 6 比 5；求至少有一事發生之或能率.

4. 某問題 A 不能解之優率爲 4 比 3，B 能解之優率爲 7 比 5；設二人同解，求能解出此問題之或能率.

5. 某錢袋隔爲兩部，一部有 3 個先令，2 個薩瓦林，一部有 2 個薩瓦林，1 個先令，試求從此錢袋取得一個薩瓦林之或能率.

6. 某袋內有籌碼 17 枚，上刻 1 至 17 之數碼，設從袋內任取一枚、又復放回，然後再取一枚；問先取出者爲偶數後取出者爲奇數之或能率爲何?

7. 四人各從常用紙牌中任取一張，求 (1) 每套一張，(2) 無二張之勢力相等之或能率.

8. 求一骰連擲五次至少有一次擲得 6 點之或能率.

9. 三個未互通聲氣之批評家批評一書，其贊許之優率爲 5 比 2，4 比 3，3 比 4，問三批評家多數贊許此書之或能率爲何?

10. 從盛 5 白球 3 黑球之袋內陸續取出 4 球，取出後不再放回；求取得互爲不同顏色球之或能率.

11. 設用二骰連擲三次，求至少有一次同點之或能率.

12. 設任取 4 個整數相乘，試證所得積之末一個數字爲 1，3，7，或 9 之或能率爲$\frac{16}{625}$.

13. 第一錢袋內有一個薩瓦林，九個先令；第二錢袋內有 10 個先令，設從第一袋取出九個置入第二袋，後由第二袋取出九個置入第一袋；求薩瓦林仍在第一袋之或能率.

14. 將二錢連擲 5 次，求擲得五個正面五個反面之或能率.

15. 設擲 8 錢，試求得一反面且僅得一反面之或能率.

16. A,B,C 依次矢 (*cut*) 牌，每矢一次後仍將牌復原，以先矢得鋤形牌者爲勝；求各人之或能率.

17. A 及 B 從盛有 3 薩瓦林，4 先令之錢袋內各取一幣；設已取出者不再置入，求各人取得一個薩瓦林之或能率.

18. 設 n 人圍坐一圓桌，試求二指定人不相隣之或能率.

19. A 爲競走中 6 馬之一，由騎馬師 B 或 C 乘之. B 乘 A 之優率爲 2 比 1. B 若乘 A，則各馬得勝之可能性皆同，若 C 乘 A，則其機會三倍之，問不得勝之優率爲何?

20. 設 10 船中平均有一船沉沒，求 5 船至少有 4 船平安到達之或能率.

462. 已知一事在一次試驗中發生之或能率．求此事在 n 次試驗中發生一次，二次，三次，……之或能率．

設 p 爲此事在一次試驗中發生之或能率，令 $q=1-p$；則此事在 n 次試驗中發生 r 次之或能率，等於 $(q+p)^n$ 之展開式中之第 $r+1$ 項．

因若從總數 n 次試驗中任意選出任 r 次試驗爲一組，則此事在此 r 次試驗中每試驗皆發生，而在其餘試驗中皆不發生之或能率爲 $p^r q^{n-r}$ [§456]，又選取 r 次試驗爲一組之選法有 ${}^nC_r$ 種，此諸方法同等適用於所論之情形，故所求或能率爲 ${}^nC_r p^r q^{n-r}$．

若用二項式定理展開 $(p+q)^n$，則得

$$p^n+{}^nC_1p^{n-1}q+{}^nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}^nC_{n-r}p^rq^{n-r}+\cdots\cdots+q^n;$$

如是此級數之諸項分別代表 n 次試驗中此事發生 n 次，$n-1$ 次，$n-2$ 次，………之或能率．

463. 若此事發生 n 次，或僅一次，二次，……$(n-r)$ 次不發生，則此事發生 r 次以上； 故此事在 n 次試驗中至少發生 r 次之或能率爲

$$p^n+{}^nC_1p^{n-1}q+{}^nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}^nC_{n-r}p^rq^{n-r}\text{，或}(p+q)^n$$

之展開式中之首 $n-r+1$ 項之和．

例 1．設將兩骰連擲 4 次，試求兩骰至少擲兩次二點之或能率．

兩骰擲一次得二點之或能率爲 $\dfrac{6}{36}$，即 $\dfrac{1}{6}$；不得二點之或能率爲 $\dfrac{5}{6}$．今若兩點之數擲得四次，三次，或兩次，則所求之事得矣；故所求之或能率爲 $\left(\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}\right)^4$ 之展開式中之首三項之和．

$$\text{故此或能率}=\frac{1}{6^4}(1+4\cdot5+6\cdot5^2)=\frac{19}{144}.$$

例2. 某袋內有球若干，其中之幾爲白色；取出一球復放回袋內，又取出一球又放回袋內；餘倣此：設 p 爲取一次得白球之或能率，求在 n 次探取中取得白球之或能率.

正好取出 r 個白球之或能率爲 ${}^nC_r p^r q^{n-r}$. 今須求 r 爲何值時，此式之值爲最大.

今 $${}^nC_r p^r q^{n-r} > {}^nC_{r-1} p^{r-1} q^{n-(r-1)},$$

必須 $$(n-r+1)p > rq,$$

即必須 $$(n+1)p > (p+q)r.$$

但 $p+q=1$；故所求 r 之值爲 $p(n+1)$ 中之最大整數.

如 n 爲令 pn 爲一整數之數，則其最可能之情形爲成功 pn 次，而失敗 qn 次.

464. 設有獎金 £x 之彩票 n 張，於是因各票得獎之可能性相等，而有全數彩票者必得此獎，是每彩票之價值爲 £$\frac{x}{n}$；換言之，此即每張彩票之公平價値；故有 r 張彩票者，應以 £$\frac{rx}{n}$ 爲出售其彩票之代價；換言之，彼應估定 £$\frac{r}{n}x$ 爲其機會之代價. 故得以下之定義：

設 p 表一人在任何投機事業中之成功之或能率，M 表成功時所得之欵額，則 pM 所表之款額稱爲某人之期望值 (*Expectation*).

465. 期望值乃對人而言，對物則稱可能値 (*probable value*).

例1. 第一袋內有 5 個先令及 1 個薩瓦林；第二袋內有 6 個先令. 設取第一袋內二錢置於第二袋內；復從第二袋取二錢置於第一袋內；試求各袋內之可能值.

一薩瓦林仍在第一袋內之或能率等於其移動兩次，或全未移動之或能率之和.

即，其或能率$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 薩瓦林在次袋內之或能率$=\frac{1}{4}$.

故第一袋之可能值

$$=\frac{3}{4}\cdot 25s.+\frac{1}{4}\cdot 6s.=£1.0s.3d.$$

$\therefore$ 第二袋之可能值

$$=31s.-20\tfrac{1}{4}s.=£10s.3d.$$

此問題亦可如下解之:

錢幣移出之可能值

$$=\frac{1}{3}\cdot 25s.=8\tfrac{1}{3}s.;$$

錢幣移回之可能值

$$=\frac{1}{4}\cdot(6s.+8\frac{1}{3}s.)=3\frac{7}{12}s.;$$

$\therefore$ 第一袋內之可能值

$$=\left(25-8\frac{1}{3}+3\frac{7}{12}\right)\text{先令}=£1.0s.3d.,\text{與前同.}$$

例 2. A 及 B 擲一骰賭 £ 11 之欵，以首擲六點者爲贏. 設 A 先擲，問各人之期望值爲何?

A 在第一擲中之或能率爲 $\frac{1}{6}$; 在第二擲中爲 $\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$, 因兩人必各失敗一次 A 始得擲第二次也; A 在第三擲中之或能率爲$\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}$, 因各賭徒於其擲第三次前必各失敗二次也; 類推.

故 A 之或能率爲無窮級數

$$\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\text{之和.}$$

同理，B 之或能率爲無窮級數

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\left\{1+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^4+\cdots\cdots\right\}\text{之和;}$$

$\therefore$ A 與 B 之或能率之比爲 6 比 5; 因此二人之或能率爲$\frac{6}{11}$及$\frac{5}{11}$, 而其期望值爲 £6 及 £5.

466. 玆舉兩例，由此可得有用及有趣之結果.

例 1. A 及 B 二角技者，各差 m 點及 n 點以獲一盤之勝利；其得單獨一局勝利之或能率各爲 p 及 q，此處 p 及 q 之和爲 1；先勝一盤者得此錦標；求二人得錦標之或能率.

設 A 適於 $m+r$ 局中獲得勝利；爲達此目的起見，彼必勝最末之一局及前 $m+r-1$ 局中之 $m-1$ 局.其或能率爲 ${}^{m+r-1}C_{m-1}p^{m-1}q^r p$，即 ${}^{m+r-1}C_{m-1}p^m q^r$.

今此盤之勝利必於 $m+n-1$ 局中決定之，而 A 適可於 m 局中勝 m 局，或於 $m+1$ 局，……$m+n-1$ 局中勝 m 局；故吾人將在 ${}^{m+r-1}C_{m-1}p^m q^r$ 式中令 r 之値爲 0，1，2，……$n-1$ 以得 A 勝此盤之或能率. 如是 A 之或能率爲

$$p^m\left\{1+mq+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}q^2+\cdots\cdots+\frac{|\underline{m+n-2}}{|\underline{m-1}\,|\underline{n-1}}q^{n-1}\right\};$$

同理，B 之或能率爲

$$q^n\left\{1+np+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}p^2+\cdots\cdots+\frac{|\underline{m+n-2}}{|\underline{m-1}\,|\underline{n-1}}p^{n-1}\right\}.$$

此爲著名之"點之問題"；曾引起巴斯加（*Pascal*）氏以來許多名數學家之注意. 此問題在 1654 年首由 *Chevalier de Mêrê* 提交巴氏，而巴氏及忽馬氏討論之.但彼等以角技者之技術相等之情形爲限,其結果亦以不同之形式發表之. 吾人所示公式應歸功於 *Montmort* 氏，因其首見於該氏 1714 年發表之著作中也. 後 *Lagrange* 及 *Laplace* 二氏以不同方法得此結果，後者且就各種變形下，對此問題加以極詳細之研究.

例 2. 今有骰 n 個，各有 f 面刻有 1 至 f 之數字；設將諸骰任意一擲，問出限數字之和等於 p 之或能率爲何?

因 n 骰中任一骰可露其 f 面中之任一面，故諸骰之落法有 f^n 種. 又擲得諸數之和爲 p 擲法之數等於

$$(x^1+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^f)^n$$

之展開式中 x^p 之係數；因此係數乃由取指數 1，2，3，…… f 中之 n 個指數相加而得 r 之不同方法中得之也.

今上式$=x^n(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{f-1})^n$

$$=x^n\left(\frac{1-x^f}{1-x}\right)^n.$$

故必須求 $(1-x^f)^n(1-x)^{-n}$ 之展開式中 x^{p-n} 之係數.

今　$$(1-x^f)^n=1+nx^f+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{2f}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}x^{3f}+\cdots\cdots;$$

及　$$(1-x)^{-n}=1+nx+\frac{n(n+1)}{1\cdot2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\cdots\cdots$$

將此二級數相乘而由其積中取出 x^{p-n} 之係數；得

$$\frac{n(n+1)\cdots(p-1)}{\underline{\lvert p-n}}-n.\frac{n(n+1)\cdots(p-f-1)}{\underline{\lvert p-n-f}}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}.\frac{n(n+1)\cdots(p-2f-1)}{\underline{\lvert p-n-2f}}-\cdots\cdots,$$

此級數在無負因子發現時，儘可推衍下去. 以 f^n 除此級數即得所求之或能率.

此問題得自馬氏 (*De Moivre*)，發表於 1730 年；乃說明一常用之方法.

嗣後 *Laplace* 氏亦得到此同一公式，但其方法則煩難遠甚；彼曾用此証明行星遵循近黃道處之軌道運動並依地球繞日之方向之基本原因. 關於此點學者可參攷託箸或能論史 (*Todhunter's History of Probability*)，§987.

習　題　三十二.C.

1. 在某次較技中，A 之技術比 B 之技術爲 3 比2：求在 5 次角技中，A 至少勝 3 次之或能率.

2. 一銅元之兩面刻以 2，3 兩數字,設將此銅元連擲 5 次；問共得 12 之或能率爲何?

3. 在一盤競技之每局中，已勝前局者再勝之優率爲 2：1，問已勝第一局者在其次四局中至少勝三局之或能率爲何?

4. 一袋內藏錢幣 9 個，其中 5 個爲薩瓦林，其餘各幣之値相等，但不知其名；設取一次之可能値爲 12 先令，求未知者爲何幣?

5. 設將一錢幣連擲 n 次，問正面出現奇數次之或能率為何?

6. 在盛 2 薩瓦林 3 先令之袋內，准許某人探取兩個，求此人之期望值.

7. 六人依次擲一銅元為賭，先擲得正面者贏，求第四人之或能率.

8. 在盛刻 1，2，3 三籌碼之袋內，每次取出一個，又放回之，如是三次，問得總數為 6 之或能率為何?

9. 將兩面刻 3 與 5 之一錢連擲 4 次；問擲得數之和不小於 15 之或能率為何?

10. 求三骰一擲恰得 10 點之或能率.

11. 有技術相等之二競技者 A，B 賭若干局，在 A 差 3 點，B 差 2 點時停止競賽. 如所賭之彩為 £16，求二人應得之份為何?

12. A 及 B 擲 3 骰：設 A 擲得 8 點，問 B 擲得更多點之或能率為何?

13. A 之袋內有 1 個薩瓦林 4 個先令；信手取出 2 個分與 B 及 C，則 C 之期望值為何?

14. 將一骰連擲五次，求或能率：(1) 恰有三個么，(2) 至少有 3 個么.

15. A 以 5s. 與 B 之 2s. 賭，謂同擲二骰，彼能於 B 擲得 4 點前擲得 7 點，二人各以二骰擲之，至分勝負為止，擲得同點者不算，求 B 之期望值.

16. 某人擲兩骰，一為普通立方體，一為正四面體，在四面體，則取其底面之點數. 求擲得和不小於 5 之或能率.

17. 某袋內有值 M 之錢幣一個及共值 m 之他種錢幣若干個，某人每次由袋內取出一個，至取出值 M 之幣止：求其期望值.

18. 一袋內藏票 $6n$ 張，其號碼為 0，1，2，……$6n-1$. 設每次取出三票，試證三數和為 $6n$ 之或能率為

$$\frac{3n}{(6n-1)(6n-2)}.$$

*反或能率

***467.** 在前所考驗諸情形中,皆假設發生某事之諸原因為已知,能用以決定此事件發生之或能率. 茲考驗不同性質之問題,例如,已知某事件已因若干原因中之一而發生,求估定各原因為其眞原因之或能率,並由是推出未來事件由此同原因發生之或能率.

***468.** 茲於討論一般情形之前,先舉一數字例題.

設有二錢袋一藏 5 個薩瓦林,3 個先令,一藏 3 個薩瓦林,1 個先令,又設已取出 1 薩瓦林:求此薩瓦林係從第一或第二袋取出之或能率.

取最多試驗次數 N 討論之;在未取之前各袋有同等被取之可能性,故第一袋在試驗中應被取 $\frac{1}{2}N$ 次,而其中之 $\frac{5}{8}$ 次應取出一薩瓦林,故一薩瓦林應由第一袋內取出$\frac{5}{8}\times\frac{1}{2}N$或$\frac{5}{16}N$次.

第二袋在試驗中亦應被取 $\frac{1}{2}N$,而於其中之 $\frac{3}{4}$ 次應取出一薩瓦林;故一薩瓦林應由第二袋內取出 $\frac{3}{8}N$ 次.

今 N 為最大數,但同時又為一任意數;令 $N=16n$;由是一薩瓦林應從第一袋內取出 $5n$ 次:第二袋內取出 $6n$ 次; 即在取出一薩瓦林之 $11n$ 次中,應從第一袋取出 $5n$ 次,從第二袋取出 $6n$ 次.故此薩瓦林係從第一袋取出之或能率為$\frac{5}{11}$,從第二袋取出之或能率為$\frac{6}{11}$.

*469. 學者應注意前節假設之性質，此點甚關重要．茲舉一特例說明之，如將一完全對稱之骰連擲 60 次，雖未必擲得 10 次么點，但擲之次數愈多，則擲得么點之次數與總次數之比必漸近於其極限 $\frac{1}{6}$，則決無可疑．蓋無理由斷定一面較他面常現也；故充分加多試驗之次數，必能令六面中各面出現之次數漸近於相等．

上爲柏腦理氏（*James Bernoulli*）定理之特例，在 1713 年出板之 *Ars Conjectandi* 中首次問世，時去作者故去已八年矣．柏氏定理可述之如下：

若 p 爲某事在一次試驗中發現之或能率，則當試驗次數無限增加時，成功次數與試驗次數之比之極限必等於 p；換言之，若試驗之次數爲 N，則成功之次數爲 pN．

參考滔得亨特氏之或能論史，第七章．柏氏定理之證明可於大英百科全書或能論篇中見之．

*470. 某事由若干互斥原因中之一而發生：試求任一指定原因爲眞原因之或能率．

設有 n 個原因，且在此事發生之前，諸原因存在之或能率以 p_1，p_2，p_3，$\cdots p_n$ 計之．命 p_r 表當第 r 原因存在時此事因之發生之或能率：在此事發生之後，試估定第 r 原因爲眞原因之或能率．

考究甚多之試驗次數 N；則第一原因存在之次數爲 P_1N，而在此數之中，事件隨之發生 p_1P_1N 次；同理，此事隨第二原因發生 p_2P_2N 次，類推於其他之每一原因，故此事隨之發生之次數爲

$$(p_1P_1+p_2P_2+\cdots\cdots p_nP_n)N，即\ N\Sigma(pP)；$$

而此事隨第 r 原因發生之次數爲 p_rP_rN；故事後第 r 原因爲眞原因之或能率爲

$$p_rP_rN\div N\Sigma(pP)；$$

即此事隨第 r 原因發生之或能率爲

$$\frac{p_rP_r}{\Sigma(pP)}.$$

***471.** 事前諸原因存在之或能率與事後任一原因爲眞原因之或能率之別，必須判分明晰．前者名爲由因至果之或能率，以 $P_1,P_2,P_3\cdots\cdots P_n$ 表之，後者名曰由果至因之或能率以 Q_1，Q_2，Q_3，$\cdots\cdots\cdots Q_n$ 表之，前已證明

$$Q_r=\frac{p_rP_r}{\Sigma(pP)}；$$

此處 p_r 表示此事在設第 r 原因存在時之或能率．

由此結果，顯見 $\Sigma(Q)=1$，就此事由其一因且僅由其一因發生之理觀之，此理亦甚顯然．

玆不用 §469 原則而予前節定理以另一証明．

***472.** 某事已由若干互斥原因中之某一原因發生：求任一指定原因爲眞原因之或能率．

設有 n 個原因，又設在此事發生之前，諸原因存在之或能率以 P_1 P_2，P_3，$\cdots\cdots\cdots P_n$ 計之．令 p_r 表第 r 原因存在時此事隨之發生之或能率，於是此事件隨第 r 原因發生之前或能率爲 p_rP_r.

令 Q_r 爲第 r 原因爲眞原因之後或能率．則第 r 原因爲眞原因之或能率與倘若此原因存在時此事隨之發生之或能率成比例；

$$\therefore \frac{Q_1}{p_1P_1}=\frac{Q_2}{p_2P_2}=\cdots\cdots=\frac{Q_n}{p_nP_n}=\frac{\Sigma(Q)}{\Sigma(pP)}=\frac{1}{\Sigma(pP)};$$

$$\therefore Q_r=\frac{p_rP_r}{\Sigma(pP)}.$$

解此類問題時，第一步必精確求出 P_rp_r 之積；但在多數情形內 P_1，P_2，P_3……皆相等，如是其解法簡單多矣．

例．今有 3 袋，每袋內有 5 白球 2 黑球，又有 2 袋每袋內有 1 白球 4 黑球：今取出一黑球，求此黑球出自第一組袋中之或能率．

此 5 袋中，3 袋屬於第一組，2 袋屬於第二組；故

$$P_1=\frac{3}{5},\qquad P_2=\frac{2}{5}.$$

若一袋已從第一組中選出，則取出一黑球之或能率爲$\frac{2}{7}$；若從第二組中選出，則其或能率爲$\frac{4}{5}$；是以 $p_1=\frac{2}{7}$，$p_2=\frac{4}{5}$；

$$\therefore p_1P_1=\frac{6}{35},\ p_2P_2=\frac{8}{25}.$$

故此黑球出自第一組袋中之或能率爲

$$\frac{6}{35}\div\left(\frac{6}{35}+\frac{8}{25}\right)=\frac{15}{43}.$$

***473.** 當吾人考究某事時，可用 §472 方法估定以任一原因爲眞原因之或能率；而後估計此事在下次試驗中發生之或能率，或可求得其他事發生之或能率．

例如，p_r 爲設第 r 原因存在時，某事隨之發生之或能率，又第 r 原因爲眞原因之或能率爲 Q_r：則下次試驗中，此事隨第 r 原因發生之或能率爲 p_rQ_r．故在下次試驗中，此事隨某原因發生之或能率爲 $\Sigma(pQ)$．

例． 錢袋內有錢幣四個，或為薩瓦林，或為先令；取出兩個，視之為先令：設依然放回，則再取得一薩瓦林之或能率為何？

此問題有兩種解法，茲分別研究之．

I． 設吾人所討論者為一切先令之數在事前之可能性均等，則可有三假設；(*i*) 所有錢幣皆為先令，(*ii*) 其中之三個為先令，(III) 共僅有兩個為先令．

令 $$P_1=P_2=P_3;$$

又 $$p_1=1,\quad p_2=\tfrac{1}{2},\quad p_3=\frac{1}{6}.$$

$$\text{故第一假設之或能率}=1\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{6}{10}=Q_1,$$

$$\text{第二假設之或能率}=\frac{1}{2}\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{10}=Q_2,$$

$$\text{第三假設之或能率}=\frac{1}{6}\div\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{10}=Q_3.$$

是以取第二次取得一薩瓦林之或能率

$$=(Q_1\times 0)+\left(Q_2\times\frac{1}{4}\right)+\left(Q_3\times\frac{2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{10}\times\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{10}=\frac{5}{40}=\frac{1}{8}.$$

II． 設每錢幣之為先令或薩瓦林之可能性均等，則由 $(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^4$ 之展開式中之項，知四先令之或能率為 $\frac{1}{16}$，三先令者為 $\frac{4}{16}$，二先令者為 $\frac{6}{16}$；故

$$P_1=\frac{1}{16},\qquad P_2=\frac{4}{16},\qquad P_3=\frac{6}{16};$$

又，同前， $$p_1=1,\qquad p_2=\tfrac{1}{2},\qquad p_3=\frac{1}{6}.$$

故 $$\frac{Q_1}{6}=\frac{Q_2}{12}=\frac{Q_3}{6}=\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{24}=\frac{1}{24}.$$

是以第二次取得一薩瓦林之或能率

$$=(Q_1\times 0)+\left(Q_2\times\frac{1}{4}\right)+\left(Q_3\times\frac{2}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{2}{16}=\frac{1}{4}.$$

***474.** 今將證明，何以若證人之信用已知，則可利用或能率估計其證言之眞僞．設每證人所說爲衷心之言，其所本或爲目擊，或爲推論，或爲經驗；因此若有錯誤或不實，應歸於判斷之錯誤而非有意之欺騙．

此類將討論之問題，可爲吾人之極有用之智力鍛鍊，雖其結果不能視爲有何等實用重要，但可以證實常識之判斷．

***475.** 凡謂某人說眞話之或能率爲 p 時，意指就此人之大多談話考究之，其中之眞實者與全數之比爲 p．

476. 兩個不通聲氣之證人 A 及 B，其說眞話之或能率爲 p 及 p'，今所述者相同：問其證詞眞實之或能率爲何？

此處所考究之事件，爲 A 及 B 之陳述相同．事前可有四種假設；蓋 A 及 B 可俱說眞話；或 A 說眞話而 B 說謊話，或 A 說謊話而 B 說眞話；或 A 及 B 皆說謊話．此四種假設之或能率爲

$$pp',\ p(1-p'),\ p'(1-p),\ (1-p)(1-p').$$

今 A, B 之陳述相同，故事後此證詞爲眞之或能率與此陳述爲僞之或能率之比爲 pp' 比 $(1-p)(1-p')$；換言之，此共同證詞爲眞之或能率爲

$$\frac{pp'}{pp'+(1-p)(1-p')}.$$

同理若有第三者，其說眞話之或能率爲 p''，其所陳述者又相同，則此共同證詞爲眞之或能率爲

$$\frac{pp'p''}{pp'p''+(1-p)(1-p')(1-p'')}.$$

準此可推及於任若干人．

***477.** 前節乃假定關於所考究之事件，除 A,B 所陳述外一無所知；設又能從其他方面獲得關於此證詞之眞或僞之或能率之報告，則於估定各假設之或能率時，亦必須計及之.

例如，A，B 對一事之陳述相同，其前或能率爲 P，則吾人應分別以

$$Ppp' \text{ 及 } (1-P)(1-p)(1-p')$$

爲計算證詞眞僞之或能率.

例．今有彩票 12 張，其頭獎爲 £9，二獎爲 £3．有 A,B,C 三人，其說眞話之或能率爲 $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{5}$．設三人報告開彩結果於持有一票之 D 君，A，B 謂其得 £9 之彩，C 謂其得 £3 之彩：問 D 之期望值爲何？

此處有三種可能情形；D 得 £9，或 £3，或一無所得，因 A，B，C 之報告可皆僞也.

今用 §472 之表示法，得前或能率

$$P_1=\frac{1}{12},\quad P_2=\frac{1}{12},\quad P_3=\frac{10}{12};$$

及 $$p_1=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{30},\quad p_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{30},\quad p_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{30};$$

$$\therefore\ \frac{Q_1}{4}=\frac{Q_2}{3}=\frac{Q_3}{20}=\frac{1}{27};$$

故 D 之期望值 $=\frac{4}{27}\cdot £9+\frac{3}{27}\cdot £3=£1.13s.4d.$

***478.** 關於 §476 證得之結果，有須注意者，乃假定陳述之法僅有二種，故若所有證人之所說皆僞，則彼等說同一之謊話.

設非此情形，令 c 表 A，B 二人說同一謊話之或能率，則其言之眞僞之或能率之比爲 pp' 比 $c(1-p)(1-p')$.

就一般而論，兩不通聲氣之證人能說同一謊話者極少，故 c 之值通常極小．且證人愈多 c 愈小．此種考究足以增加不通聲氣之二證人或多證人之說話眞實之或能率，雖則證人可信之處不多.

例．A 談話 4 次中有 3 次眞話，B 談話 10 次中有 7 次眞話；二人今從盛不同色之 6 球之袋內取出一球，二人同謂此球爲白色；試求此話之眞實之或能率．

此可有兩種假設；(i) 二人一致之意見爲眞，(ii) 二人一致之意見爲僞．

此處
$$P_1=\frac{1}{6},\qquad P_2=\frac{5}{6};$$

$$p_1=\frac{3}{4}\times\frac{7}{10},\qquad p_2=\frac{1}{25}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{10};$$

蓋估定 p_2 時，必須計及 A 及 B 容俱以白色球爲造謊之或能率也；此或能率爲
$$\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\text{ 即 }\frac{1}{25}.$$

玆二假設之或能率爲 P_1p_1 比 P_2p_2，故爲 35 比 1；故二人爲眞之或能率爲$\frac{35}{36}$.

***479.** 前所考究之情形，乃關於同一時期證據確實之或能率；下爲先後相傳之證據之一例．

設 A 謂某事發生，並謂彼從 B 得此消息，問此事已發生之或能率爲何？

(1) 若二人所述皆眞，(2) 若二人所述皆僞，則此事已然發生，若僅一人所述爲眞，則此事未發生．

設 p 及 p' 表 A 及 B 說眞話之或能率；則此事已發生之或能率爲
$$pp'+(1-p)(1-p'),$$
其未發生之或能率爲
$$p(1-p')+p'(1-p).$$

***480.** 前節所述乃教科書內常用之解法，但此解法有一重要缺點，因若 A 及 B 所述皆僞時，即斷定此事發生，必須陳述方法僅有兩種方可．再者，雖則謂 A 之消息由 B 得來，但通常不能認爲眞實，蓋此當繫於 A 之信實也．

關於此問題之各種解釋之詳盡討論，及其所得之不同解答，可於英國教育時報彙刊 (*Educational Times Reprint*)，第二十七，及第三十二兩卷中見之。

*習 題 三十二.D.

1. 袋內有四球，但不知爲何色，設取出一球適爲白球：試求皆爲白球之或能率.

2. 袋內有球六個，不知爲何色，設取出三球適爲黑球，求袋內餘球皆非黑球之或能率.

3. 已知一信非由 *London* 寄來即由 *Clifton* 寄來；郵局戳記僅有二連續字母 *on* 尚可看出；問此信發自 *London* 之或能率爲何?

4. 在賽跑之前，A，B，C 三選手之或能率成 5，3，2 之比；但 A 在賽跑時遭意外之變，因之其或能率降至 $\frac{1}{3}$. 問此時 B，C 之或能率爲何?

5. 錢袋內有不知價值之錢幣 n 個，任取一枚適得一薩瓦林：問此爲袋內惟一之薩瓦林之或能率爲何?

6. 某人有 10 個先令，其中之一有兩個正面，設任取一枚連擲之 5 次皆得正面；問此有兩正面之先令之或能率爲何?

7. 袋內盛未知顏色之球 5 個，取出一球復放回袋內者二次，每次取出者皆爲紅球：設同時取出二球，求皆爲紅球之或能率.

8. 袋內有錢幣五個，或爲先令，或爲六辨士；設任意取出兩個，皆得先令；求其餘諸錢幣之或能值.

9. 將一骰連擲三次，擲得點數之和爲 15：求第一擲得 4 點之或能率.

10. A 談話 4 次中有 3 次眞話，B 談話 6 次中有 5 次眞話；問二人述同一事時，其互相矛盾之或能率爲何?

11. A 談話 3 次中有 2 次眞話，B 談話 5 次中有 4 次眞話；今二人同謂從含 6 個不同顏色之球之袋內取出一紅球，試求二人斷語眞實之或能率.

12. 一副 52 張之紙牌失落一張，設從餘牌中任取二張適均得鋤牌，試求失者爲鋤牌之或能率.

13. 彩票 10 張，有値 £5 及 £1 之兩彩，今 A 持有一張，B 謂其得 £5 之彩，C 謂其得 £1 之彩. 設 B 之可信率爲 $\frac{2}{3}$，而 C 之可信率爲 $\frac{3}{4}$，問 A 之期望値爲何?

14. 某錢袋內有 4 錢幣，任取其二，適得二薩瓦林；求 (1) 所有錢幣皆薩瓦林之或能率，(2) 放回再取仍得一薩瓦林之或能率.

15. A,B,C，三馬雛勝三賽之優率爲 3 比 2，4 比 1，2 比 1，P 以 £8 與 Q 以 £120 相賭. 首次 A 得勝，又聞第二次之勝利必爲 B 或他一馬 D 所得(D 雛勝之優率爲 2 比 1). 求 P 之期望値.

16. 某袋內有球 n 個，其色或黑或白，每種之球數皆有同等可能性，從袋內任取一球得白球，放回另取，復得白球. 設再放還之，試證再取得一黑球之或能率爲 $\frac{1}{2}(n-1)(2n+1)^{-1}$.

17. 設將 mn 個錢幣分置 m 個袋內，每袋內 n 個，求 (1) 兩特殊錢幣同在一袋之或能率；(2) 兩特殊錢幣均不在提出檢查之 r 袋中之或能率.

18. A,B 爲兩個不精計算之數學家，其解某問題無誤之或能率爲 $\frac{1}{8}$ 及$\dfrac{1}{12}$；設二人得同一結果，又設二人不得同錯誤之優率爲 1000 比 1，求此結果正確之或能率.

19. 有證人 10 人，每人六次談話中僅說謊一次，今六人均謂某事發生；試證雖則此事件之前或能率小至$\dfrac{1}{5^9+1}$，但其所云可信之優率爲 5 比 1.

局部或能率. 應用幾何方法.

481. 應用幾何方法於或能率之問題，大都須借助於積分學；但有許多簡易問題，可以初等幾何學解之.

例 1. 取長 l 之二等線段任意各截去一段. 問所餘二線段之和小於 l 之或能率爲何?

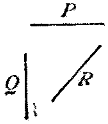
將二線段置於互相平行之位置，並於截斷後將各端之部分移開. 於是此問題變爲求右方部分之和大於左方部分之和之或能率之問題，前者之大於或小於後者，顯然有同等可能性，故所求或能率爲 $\frac{1}{2}$.

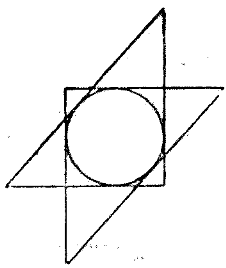
推論. 若已知二線段之長皆不大於 l: 其和不大於 l 之或能率爲 $\frac{1}{2}$.

例 2. 設任意取三線段，試證其是否一三角形之三邊之或能率相等.

三線段之中，必有一線段等於或大於其他任一綫段；以 l 表其長，則吾人對於他二線段之所知，僅其長皆在 0 及 l 之間而已. 但若已知二線段中每線段之長爲 0 及 l 間之任意長，則其和大於 l 之或能率適得平等. [例 1，推論.]

例 3. 對已知圓任意作三切線：試證此圓不內切於此三切線所成之三角形之優率爲 3 比 1.





在圓之同平面內畫任意三線段 P, Q, R, 並對圓作平行於所畫三線段之六切線.

在此作成之 8 個三角形中，此圓顯然旁切 6 個而內切 2 個；且無論 P，Q，R 之原來方向爲何，此恆爲眞，故所證之結果隨之矣.

***482.** 或能率中之問題，有時借助解析幾何學，頗易解之.

例. 於長 $a+b+c$ 之杆上，任意度 a，b 之長. 求度得之兩綫段無點相重合之或能率.

令 AB 爲線，令 $AP=x$，$PQ=a$；又令 a 爲由 P 向 B 所度之長，由是 x 必小於 $b+c$. 又令 $AP'=y$，$P'Q'=b$，而設 $P'Q'$ 爲由 P' 向 B 所度之長，則 y 必小於 $a+c$.

令在合題之情形中，必 $AP'>PQ$，或 $AP>AQ'$，

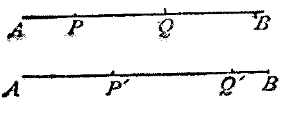
故 $$y>a+x,\text{ 或 } x>b+y\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

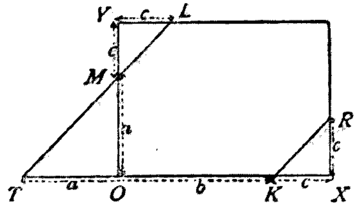
又在一切可能之情形中，吾人必得

$$\left.\begin{array}{l} x>0,\text{而}<b+c \\ y>0,\text{而}<a+c \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

取兩直交坐標軸，令 $OX=b+c$，$OY=a+c$.

作直線 $y=a+x$，如圖中之 TML 及直線 $x=b+y$ 以 KR 表之.





於是 YM 及 KX 皆等於 c，而 OM 及 OT 皆等於 a.

條件 (1) 僅能以三角形 MYL 及 KXR 內之點適合之，而條件 (2) 則爲矩形 OX，OY 內之任何點所適合.

$$\therefore\text{所求或能率} = \frac{c^2}{(a+c)(b+c)}.$$

***483.** 茲舉雜例數題以結束本章.

例 1. 將一箱隔爲 m 部分，而任意擲入 n 球；試求 p 部分每部有 a 珠，q 部分每部有 b 球，r 部分每部有 c 球，…類推，之或能率. 此處 $pa+qb+rc+\cdots\cdots=n$.

在 n 球中之每球，可落入 m 部分中之任一部分，故可能發生之情形共有 m^n 種，且皆有同等之可能性，欲求合題之情形之數，必求將 n 球分爲 $p,\ q,\ r,\cdots$ 堆，各含 $a,\ b,\ c,\cdots$ 個球之分法之數.

先選任意 s 部分，此處 s 表 $p+q+r+\cdots\cdots$；其選法之數爲

$$\frac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{s}\ \lfloor\underline{m-s}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1).$$

次分 s 部分爲各含 $p,\ q,\ r,\cdots\cdots$ 之組；由 § 147，其分法之數爲

$$\frac{\lfloor\underline{s}}{\lfloor\underline{p}\ \lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\cdots}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

最後以 n 球分配於各部分內，將 a 球置於 p 組之各部分，將 b 球置於 q 組之各部分，將 c 球置於 r 組之各部分，類推，其分配法之數爲

$$\frac{\lfloor\underline{n}}{(\lfloor\underline{a})^p(\lfloor\underline{b})^q(\lfloor\underline{c})^r\cdots}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

故能適合所求條件之排列法之數爲 (1)，(2)，(3) 三式之積，是以所求或能率爲

$$\frac{\lfloor\underline{m}\ \lfloor\underline{n}}{m^n(\lfloor\underline{a})^p(\lfloor\underline{b})^q(\lfloor\underline{c})^r\cdots\lfloor\underline{p}\ \lfloor\underline{q}\ \lfloor\underline{r}\cdots\ \lfloor\underline{m-p-q-r-\cdots}}.$$

例 2. 一袋內有球 n 個；連取 k 次，每次皆得白球；試求再取仍得白球之或能率：(*i*) 每次取出後依然放回，(*ii*) 取出後不再放回.

(*i*) 因此袋內可有 0，1，2，3，…或 n 個白球，故事前有 $n+1$ 個同等可能之假設；依 §471 之表示法，得

$$P_0=P_1=P_2=P_3=\cdots=P_n;$$

及 $$p_0=0,\ p_1=\left(\frac{1}{n}\right)^k,\ p_2=\left(\frac{2}{n}\right)^k,\ p_3=\left(\frac{3}{n}\right)^k,\cdots\cdots p_n=\left(\frac{n}{n}\right)^k.$$

故事後，

$$Q_r=\frac{r^k}{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}.$$

今再取仍得白球之或能率 $=\Sigma_n^r Q_r$；故所求或能率

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1^{k+1}+2^{k+1}+3^{k+1}+\cdots\cdots+n^{k+1}}{1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k}$$

其分子及分母之值可用 §405 方法求得之.

在 $k=2$ 之特例中，

$$\text{所求或能率}=\frac{1}{n}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\div\frac{n(n+2)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{3(n+1)}{2(2n+1)}.$$

若 n 爲無窮大，則其或能率等於

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{n^{k+2}}{k+2}\div\frac{n^{k+1}}{k+1}$$

之當 n 爲無窮大時之極限；故其或能率爲$\dfrac{k+1}{k+2}$.

(*ii*) 設球不再放回，

$$p_r=\frac{r}{n}\cdot\frac{r-1}{n-1}\cdot\frac{r-2}{n-2}\cdots\cdots\frac{r-k+1}{n-k+1};$$

及 $$Q_r=\frac{p_r}{\Sigma p_r}=\frac{(r-k+1)(r-k+2)\cdots\cdots(r-1)r}{\sum\limits_{r=0}^{r=n}(r-k+1)(r-k+2)\cdots\cdots(r-1)r}$$

$$=(k+1)\frac{(r-k+1)(r-k+2)\cdots\cdots(r-1)r}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots\cdots(n-1)n(n+1)}.\quad[\S394.]$$

$$\text{再取仍得白球之或能率}=\sum_{r=0}^{r=n}\frac{r-k}{n-k}Q_r$$

$$=\frac{k+1}{(n-k)(n-k+1)\cdots n(n+1)}\sum_{r=0}^{r=n}(r-k)(r-k+1)\cdots(r-1)r$$
$$=\frac{k+1}{(n-k)(n-k+1)\cdots\cdots n(n+1)}\cdot\frac{(n-k)(n-k+1)\cdots n(n+1)}{k+2}$$
$$=\frac{k+1}{k+2},$$

此與袋內最初之球數無關.

例 3. 某人寫信 n 封，並將各信之信封寫就，設任意將諸信裝入信封之內；問各信皆誤裝之或能率爲何?

令 u_n 表諸信皆誤裝之方法之數，而令 $abcd$ …… 表所有諸信各得其所之排列. 今若 a 信在任何他排列中佔據 b 信之位置，則 b 必佔 a 或他信之位置.

(*i*) 若 b 佔 a 信之位置. 則所有其餘 $n-2$ 信易位之方法之數爲 u_{n-2}，故 a 可與 $n-1$ 信中之任一信互換，並將其餘諸信皆易位之方法之數爲 $(n-1)u_{n-2}$.

(*ii*). 若 a 佔據 b 之位置，而 b 未佔據 a 之位置．則於適合所求條件之諸排列中，因 a 在 b 之位置，故字母 $b, c, d,$………亦必皆易位，其易法可有 u_{n-1} 個；故 a 佔據他信之位置而他們不佔據 a 之位置之方法有 $(n-1)u_{n-1}$ 個．

$$\therefore\ u_n=(n-1)(u_{n-1}+u_{n-2});$$

由此，用 §444 方法，得 $u_n-nu_{n-1}=(-1)^n(u_2-u_1)$.

又$u_1=0, u_2=1$；故最後得

$$u_n=\lfloor n\left\{\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\cdots+\frac{(-1)^n}{\lfloor n}\right\}.$$

今將 n 物置於 n 處之方法共有 $\lfloor n$ 個；故所求或能率爲

$$\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{\lfloor n}.$$

此處所包含之問題頗有興趣，而以各種各樣之方法記述之．此在或能論之研究上佔有悠久之地位．最初之討論者爲慕翁禮氏 (*Montmort*) 而由馬氏 (*De Moivre*)，尤勒氏 (*Euler*)，及拉波拉斯氏 (*Laplace*)，發揚光大之．

***484.** 或能論範圍太廣，吾人除此主要代數方法而外，此處不能爲更詳盡之說明．闡明各種代數方法之例題可於 *Whitworth* 氏之 *Choice and Chance* 書中見之；孰習積分學之讀者，可參考大英百科全書中 *Crofton* 教授之或能論篇．關於或能論之起源及發展可見於託得亨滔氏 (*Todhunter*) 之由巴斯加至拉波拉斯時之或能論史．

或能論對於商業上之實用，則非此初步研究所能論及．關於此點，學者可參考大英百科全書中年金及保險諸篇．

習　題　三十二.E.

1．用兩骰擲一次，其至少得 7 點之優率爲何?

2．某錢袋內有 5 薩瓦林及 4 先令．設逐一取出，則由薩瓦林起，更迭爲薩瓦林及先令之或能率爲何?

3．設平均 10 船中有 9 船安然回港，問 5 船中至少有 3 船到埠之或能率爲何?

4. 某彩票僅有 1 張有彩，每人抽一張不再放回，試證每人得彩之或能率相等.

5. 一袋內有 5 白球，3 紅球，又一袋內有 4 白球 5 紅球，由任一袋任取二球；求二球不同色之或能率.

6. A, B, C, D, E 五人依次擲一骰，至一人擲得幺點爲止：求五人之相對或能率.

7. 任取象棋盤上之三方格，求其中有兩格同色，一格異色之或能率爲何？

8. 某人擲兩骰，一爲普通立方體，一爲正四面體．四面體視其底面之點數；求擲得之平均數，並比較其擲得 5，6，7 之或能率.

9. A, B 之技巧之比爲 $1:3$；A, C 者爲 $3:2$；A, D 者爲 $4:3$：今 A 與每人各試一次，求彼在此三次中至少勝二次之或能率.

10. 四人擲一八面骰爲賭，首次擲得幺點者贏：問第四人之或能率爲何？

11. 球員 A, B 二人之技術相等，相與比賽一盤；A 差二局勝此盤而 B 差三局勝此盤：試比較二人得勝之或能率.

12. 某錢袋內有 3 個薩瓦林 2 個先令：某人兩手各取一錢，視之，一爲薩瓦林：試證他一錢爲薩瓦林或先令之或能率相等.

13. A 及 B 擲一骰相賭；A 先擲，得 6 點則勝．若 A 失敗，則 B 繼擲，得 5 點或 6 點即勝．若 B 亦失敗，則仍由 A 擲，得 6 點或 5 點或 4 點即勝，類推：求各人之得勝之或能率.

14. 七人抽籤以分配頭等車中之六座位，求（1）其二人之座位相對之或能率，（2）其座位在同旁相鄰之或能率.

15. 一數包含 7 個數字，此 7 數字之和爲 59；試證此數能被 11 除盡之或能率爲 $\frac{4}{21}$.

16. 求 3 骰擲一次得 12 之或能率.

17. 袋內有票 7 張其號碼爲 0, 1, 2,……6. 抽出一票仍復放還; 求 4 次抽得數字之和爲 8 之或能率.

18. 今有票 10 張, 5 張空白, 他則記以數碼 1, 2, 3, 4. 5 求抽三次得 10 之或能率, (1) 抽出復放還, (2) 抽出不放還.

19. 設任取 n 個整數相乘, 試證所得積之末數字爲 1, 3, 7, 或 9 之或能率爲$\frac{2^n}{5^n}$; 爲 2, 4, 6, 或 8 者爲 $\frac{4^n-2^n}{5^n}$; 爲 5 者爲$\frac{5^n-4^n}{10^n}$; 爲 0 者爲$\frac{10^n-8^n-5^n+4^n}{10^n}$.

20. 某錢袋內有薩瓦林及先令各兩個, 又有同形體之金屬僞幣一個; 某人許可每次取一枚, 迄取得僞幣止: 求其期望值.

21. A, B, C 三人以三骰擲之, 先擲得 10 者得獎; 試證三人之或能率爲

$$\left(\frac{8}{13}\right)^2, \quad \frac{56}{13^3}, \quad \left(\frac{7}{13}\right)^3.$$

22. 某二人說實話之或能率爲$\frac{2}{3}$及$\frac{5}{6}$, 二人均謂由裝 15 票之袋內抽得某特殊票: 問其所云眞實之或能率爲何?

23. 某袋內有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 個籌碼, 其中一標以 1, 二標以 4, 三標以 9, 類推; 某人任取其一, 照其上所標數得若干先令; 求其期望値.

24. 設以 10 物分與 3 人, 試證某一人較他二人多得 5 件之或能率爲$\frac{1507}{19683}$.

25. 設於一杆上任意點 n 點而就此 n 點分之, 求所分諸段均不大於此杆之$\frac{1}{n}$之或能率爲$\frac{1}{n^n}$.

26. 今有二錢袋，一裝三薩瓦林一先令，一裝三先令一薩瓦林．從任一袋內取一個置入他袋；再由二袋內各取一錢得二先令，設再從二袋內各取一枚，則其不仍爲二先令之優率爲何?

27. 設連圓周上任三點成一三角形 試證此三角形非銳角三角形之優率爲 3 比 1.

28. 於圓周上任取三點: 問所成任二弧之和大於第三弧之或能率爲何?

29. 將一直線任意分爲三段，問此三段可構成一三角形之或能率爲何?

30. 設有兩錢袋，一盛 25 個薩瓦林，一盛 10 個薩瓦林 15 個先令．設從任一袋內任取 4 個，俱得薩瓦林；問此袋內只有薩瓦林之或能率爲何? 又取第二次之期望值爲何?

31. 於長 a 之直線上任取二點；求其間距離大於 b 之或能率.

32. 在長 a 之直線上任取兩點將其分爲三段；求各段皆不大於 b 之或能率.

33. 設於長 $a+b$ 之直線上，任意度兩長 a 及 b，則兩長之公有部分不大於 c 之或能率爲 $\dfrac{c^2}{ab}$，此處 c 爲小於 a 或 b；又短線段 b 完全在長線段 a 內之或能率爲 $\dfrac{a-b}{a}$.

34. 設於長 $a+b+c$ 之直線上任意度兩長 a 及 b，則公有部分不大於 d 之或能率爲 $\dfrac{(c+d)^2}{(c+a)(c+b)}$，此處 d 小於 a 或 b.

35. 旅客 A, B, C, D 四人，彼各不相識，同乘火車旅行，此火車有頭等車 l 輛，二等車 m 輛，三等車 n 輛. A 及 B 爲男子，其得乘頭等，二等，三等車之前或能率以 λ, μ, ν 表之；C 及 D 爲婦人，其同樣之前或能率以 l, m, n, 表之. 試證對於 λ, μ, ν 之一切值 (除 $\lambda:\mu:\nu=l:m:n$ 外)，A 及 B 與同一婦人共坐一輛較二人各與一婦人共坐一輛之可能性大.

第三十三章

行列式

485. 在此章中，吾人將摘要討論行列式及其基本性質．俾學者在解析幾何及其他高等數學中，能得行列式之記法之便利．至對於行列式之更深研究，學者可參考沙門博士之近代高等代數學及繆耳氏之行列式論．

486. 考究二齊次一次方程式

$$a_1x+b_1y=0,$$

$$a_2x+b_2y=0;$$

以 b_2 乘第一方程式，以 b_1 乘第二方程式，相減並以 x 除之，得

$$a_1b_2-a_2b_1=0.$$

此結果有時寫為

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0,$$

左邊之式名曰行列式．其中包含兩行兩列，其展開式中之每項均為二數之積；因此名曰二次行列式．

a_1，b_1，a_2，b_2 諸字母名曰此行列式之元，a_1b_2，a_2b_1 諸積名曰此行列式之項．

487. 因

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

故知行變爲列，列變爲行後，行列式之値不變.

488. 又

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}, \text{及} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix};$$

即，若將行列式之兩行或兩列互換．則得一行列式，其與原行列式之別，僅符號相反而已.

489. 今考究三個齊次一次方程式

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = 0,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = 0.$$

如 §16 例 2，消去 x，y，z，得

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0,$$

即 $$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

此消去式通常寫爲

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0,$$

其左邊乃包含三行三列之行列式，名曰三次行列式.

490. 將上行列式之展開式之各項重新排列，可寫爲

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

即 $$a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix};$$

故
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

即，將行列式之行變爲列，列變爲行後，其值不變.

491. 由前節

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_2\begin{vmatrix} b_3 & c_3 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \cdots\cdots(1).$$

又從 §489，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \cdots\cdots(2).$$

茲說明寫出三次行列式之展開式之簡單方法，此處有當注意者，即不論就第一行展開，或就第一列展開，所得之結果恆同.

由方程（1）觀之，可知 a_1，a_2，a_3 中任一元之係數，乃除去其所居之行列所得之二次行列式. 此行列式名曰子行列式，而方程式（1）之左邊可寫爲

$$a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3,$$

此處 A_1，A_2，A_3 爲 a_1，a_2，a_3 之子行列式.

又由方程式（2），此行列式等於

$$a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1,$$

此處 A_1，B_1，C_1，爲 a_1，b_1，c_1 之子行列式.

492. 行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+b_1(c_2a_3-c_3a_2)+c_1(a_2b_3-a_3b_2)$$

$$=-b_1(a_2c_3-a_3c_2)-a_1(c_2b_3-c_3b_2)-c_1(b_2a_3-b_3a_2);$$

由是
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

故知若將行列式之相鄰之二行或二列互換，則行列式之符號變而其絕對值不變.

為簡便計，以 $(a_1\ b_2\ c_3)$ 表行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

於是上得結果可寫為

$$(b_1\ a_2\ c_3)=-(a_1\ b_2\ c_3).$$

同法可證明

$$(c_1\ a_2\ b_3)=-(a_1\ c_2\ b_3)=+(a_1\ b_2\ c_3).$$

493. 若行列式有兩行，或兩列恆等，則此行列式之值為零.

因令 D 為此行列式之值，則由其兩行或兩列之互換得一行列式，其值為 $-D$，但此行列式實質未變；故 $D=-D$，即 $D=0$. 故得方程式

$$a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3=D,$$

$$b_1A_1-b_2A_2+b_3A_3=0,$$

$$c_1A_1-c_2A_2+c_3A_3=0.$$

494. 若以同一因數乘行列式之任一行或任一列之各元，則此行列式為此因數所乘.

因
$$\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 & c_1 \\ ma_2 & b_2 & c_2 \\ ma_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$
$$=ma_1 . A_1 - ma_2 . A_2 + ma_3 . A_3$$
$$=m(a_1A_1 - a_2A_2 + a_3A_3);$$
此證明本命題.

推論. 設一行或一列之各元爲他一行或列之相當元之同倍數,則此行列式之値爲零.

495. 若有一行或列之各元均含二項,則此行列式可以兩行列式之和表之.

例如:

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

因左式 $=(a_1+\alpha_1)A_1-(a_2+\alpha_2)A_2+(a_3+\alpha_3)A_3$

$=(a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3)+(\alpha_1A_1-\alpha_2A_2+\alpha_3A_3)$;

此證明本命題.

同理,若有一行或列之各元均含 m 項,則此行列式可以 m 個行列式之和表之.

同法可證明

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1 & b_1+\beta_1 & c_1 \\ a_2+\alpha_2 & b_2+\beta_2 & c_2 \\ a_3+\alpha_3 & b_3+\beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 & c_1 \\ a_2 & \beta_2 & c_2 \\ a_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & c_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & c_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

此結果不難推廣之；例如，設有三行之各元包含 m, n, p 項，則此行列式可以 mnp 個行列式之和表之.

例 1. 試證 $\begin{vmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{vmatrix} = 3abc-a^3-b^3-c^3.$

此行列式

$$=\begin{vmatrix} b & a & a \\ c & b & b \\ a & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & b & a \\ c & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a \\ a & b & b \\ b & c & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{vmatrix}.$$

在此四行列式中，首三行列式為零，§493；故原式化為其中最末之行列式；故其值

$$=-\{c(c^2-ab)-b(ac-b^2)+a(a^2-bc)\}$$

$$=3abc-a^3-b^3-c^3.$$

例 2. 求次行列式之值.

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 67 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 81 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10+57 & 19 & 21 \\ 0+39 & 13 & 14 \\ 9+72 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 57 & 19 & 21 \\ 39 & 13 & 14 \\ 72 & 24 & 26 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 10 & 19 & 21 \\ 0 & 13 & 14 \\ 9 & 24 & 26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 19+2 \\ 0 & 13 & 13+1 \\ 9 & 24 & 24+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 19 & 2 \\ 0 & 13 & 1 \\ 9 & 24 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix} 13 & 1 \\ 24 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 20-63=-43.$$

496. 考究行列式

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

如上節所述，此行列式等於

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pb_1 & b_1 & c_1 \\ pb_2 & b_2 & c_2 \\ pb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qc_1 & b_1 & c_1 \\ qc_2 & b_2 & c_2 \\ qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

其中末二行列式爲零 [§494，推論]. 故知已知行列式等於一新行列式，其第一行由將原行列式首行之各元減他二行中各相當元之同倍數得出，而第二及第三行依舊.

反之，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+pb_1+qc_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+pb_2+qc_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+pb_3+qc_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

此處關於第一行所證明者，對於其他任何行或列皆同等眞實；故在化簡行列式時，可將其任一行或列換爲如下構成之新行或列：

將欲換之行或列內之各元加或減以其他一行或列或多行多列內之相當元之任意同倍數.

稍經練習之後，可知同時將兩行或多行互換，常能將行列式迅速化爲簡單；例如

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1-qc_1 & c_1 \\ a_2+pb_2 & b_2-qc_2 & c_2 \\ a_3+pb_3 & b_3-qc_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

但在照上述法則變化時，必須留一行或一列不變.

例如,若在上列恒等式之左邊,將第三行之各元換爲 $c_1+ra_1, c_2+ra_2, c_3+ra_3$， 則其値應較原値增加

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1 & b_1-qc_1 & ra_1 \\ a_2+pb_2 & b_2-qc_2 & ra_2 \\ a_3+pb_3 & b_3-qc_3 & ra_3 \end{vmatrix},$$

此式可化成四個行列式，其中有一行列式不爲零，即

$$\begin{vmatrix} pb_1 & -qc_1 & ra_1 \\ pb_2 & -qc_2 & ra_2 \\ pb_3 & -qc_3 & ra_3 \end{vmatrix}.$$

例1. 求 $\begin{vmatrix} 29 & 26 & 22 \\ 25 & 31 & 27 \\ 63 & 54 & 45 \end{vmatrix}$ 之值.

原行列式

$$=\begin{vmatrix} 3 & 26 & -4 \\ -6 & 31 & -4 \\ 9 & 54 & -8 \end{vmatrix}=-3\times4\times\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -2 & 31 & 1 \\ 3 & 54 & 2 \end{vmatrix}=-12\times\begin{vmatrix} 1 & 26 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=12\begin{vmatrix} 1 & 1 & 26 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-12\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=132.$$

[註. 第一步保留第二行；從第一行內各元減第二行內之相當元作爲新第一行；從第三行內各元減第二行內之相當元爲新第三行. 第二步提出因數 3 及 -4. 第三步保留第一行；從第二行內各元減去第一行內之相當元爲新第二行；從第三行內各元減去第一行內之相當元爲新第三行，其餘各步不難看出.]

例 2. 指明

$$\begin{vmatrix} a+b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

已知行列式

$$=\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -b-c-a & 0 \\ 2c & 0 & -c-a-b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b+c)\times\begin{vmatrix} -b-c-a & 0 \\ 0 & -c-a-b \end{vmatrix}=(a+b+c)^3.$$

[註．　第一新行列式之第一列爲原行列式內三列諸元之和，第二及第三列不變．第三新行列式之第一行不變，第二及第三行爲由第二及第三行內各元減第一行內各元；其餘變法則甚爲明顯．]

497. 在証明如何將兩行列式之積寫爲一行列式之前，玆先考究次行列式之值．

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_2+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

由 §495，可知上行列式可以 27 個行列式之和表之，但於其中列舉下之數行列行，即足以概其餘：

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix},$$

此三行列式各等於

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \alpha_1\beta_2\gamma_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \alpha_1\beta_3\gamma_2\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix};$$

其中之第一個爲零；同法可知此 27 個行列式中有 21 個爲零．其餘六行列式等於

$$(\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2-\alpha_3\beta_2\gamma_1)\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

故原行列式可以他二行列式之積表之．

498. 兩行列式之積仍爲一行列式．

考究兩個一次方程式

$$\left.\begin{aligned} a_1X_1+b_1X_2=0 \\ a_2X_1+b_2X_2=0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

此處

$$\left.\begin{aligned}X_1&=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\\X_2&=\beta_1x_1+\beta_2x_2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

將 X_1 及 X_2 之值代入 (1)，得

$$\left.\begin{aligned}(a_1\alpha_1+b_1\beta_1)x_1+(a_1\alpha_2+b_1\beta_2)x_2=0\\(a_2\alpha_1+b_2\beta_1)x_1+(a_2\alpha_2+b_2\beta_2)x_2=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

欲 (3) 之兩方程式對於 x_1 及 x_2 之零外之值能同時成立，必須

$$\begin{vmatrix}a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2\\a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4).$$

但欲方程式 (3) 能成立，必須方程式 (1) 能成立，而方程式 (1) 之成立，必須

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5),$$

或 $X_1=0$ 及 $X_2=0$;

此需

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\\alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6).$$

故若 (5)，(6) 能成立，則 (4) 亦能成立；故 (4) 必包含 (5) 及 (6) 兩行列式爲因式；就行列式之次數觀察，可知 (4) 之其他因子必爲因數；故

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\\alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1\alpha_1+b_1\beta_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2\\a_2\alpha_1+b_2\beta_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2\end{vmatrix},$$

比較兩邊 $a_1b_2\alpha_1\beta_2$ 之係數，知其因數爲 1.

推論. $$\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix}a_1^2+b_1^2 & a_1a_2+b_1b_2\\a_1a_2+b_1b_2 & a_2^2+b_2^2\end{vmatrix}.$$

上舉證法極爲普通，任何次行列式均可用之.

因以行爲列以列爲行時，行列式之值不變，故以一行列式表兩行列式之積，有種種方法；但展開時所得之結果恆同.

例．試證

$$\begin{vmatrix} A_1 & -B_1 & C_1 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 \\ A_3 & -B_3 & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2,$$

左式內之大寫字母，表右式內相當小寫字母之子行列式．

令 D 及 D' 分表左右兩行列式；則

$$DD' = \begin{vmatrix} a_1A_1 - b_1B_1 + c_1C_1 & a_2A_1 - b_2B_1 + c_2C_1 & a_3A_1 - b_3B_1 + c_3C_1 \\ -a_1A_2 + b_1B_2 - c_1C_2 & -a_2A_2 + b_2B_2 - c_2C_2 & -a_3A_2 + b_3B_2 - c_3C_2 \\ a_1A_3 - b_1B_3 + c_1C_3 & a_2A_3 - b_2B_3 + c_2C_3 & a_3A_3 - b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D \end{vmatrix};\ [\S 493.]$$

故 $DD' = D^3$，因此 $D' = D^2$．

習 題 三十三．A．

計算下列各行列式之值：

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$． 2. $\begin{vmatrix} 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \\ 15 & 18 & 21 \end{vmatrix}$． 3. $\begin{vmatrix} 13 & 3 & 23 \\ 30 & 7 & 53 \\ 39 & 9 & 70 \end{vmatrix}$．

4. $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$． 5. $\begin{vmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{vmatrix}$． 6. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$．

7. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$． 8. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$．

設 ω 爲 1之虛立方根，求下列兩行列式之值：

9. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}$． 10. $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^3 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$．

11．從方程式

$al + cm + bn = 0$，$cl + bm + an = 0$，$bl + am + cn = 0$ 消去 l，m，及 n，並化簡所得之結果．

12．不用展開行列式，證明

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & b & q \\ x & a & p \\ z & c & r \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}.$$

13．解方程式：

(1) $\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix}=0.$　　(2) $\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix}=0.$

證下列恆等式：

14. $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}.$

15. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b).$

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$

17. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}=(y-z)(z-x)(x-y)(yz+zx+xy).$

18. $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+c & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix}=4(b+c)(c+a)(a+b).$

19. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}=2abc(a+b+c)^3.$

20．將 $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$ 化爲一個行列式.

21．設有方程式 $lx+my+nz=0$，試求其能被(a_1,b_1,c_1)，(a_2,b_2,c_2)，(a_3,b_3,c_3) 三組值適合之條件，並證此條件即三方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=0,\quad a_2x+b_2y+c_2z=0,\quad a_3x+b_3y+c_3z=0$$

能同被 l,m,n 適合之條件.

22. 求行列式

$$\begin{vmatrix} a^2+\lambda^2 & ab+c\lambda & ca-b\lambda \\ ab-c\lambda & b^2+\lambda^2 & bc+a\lambda \\ ca+b\lambda & bc-a\lambda & c^2+\lambda^2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & c & -b \\ -c & \lambda & a \\ b & -a & \lambda \end{vmatrix}$$ 之值.

23. 求證

$$\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha-i\beta & \gamma-i\delta \\ -\gamma-i\delta & \alpha+i\beta \end{vmatrix}$$

能寫爲

$$\begin{vmatrix} A-iB & C-iD \\ -C-iD & A+iB \end{vmatrix}$$

之形式，此處 $i=\sqrt{-1}$.

因而推得尤勒氏 (*Euler*) 定理:

各含四個平方和之兩式之積，可以四個平方之和表之.

證下列各恒等式

24. $$\begin{vmatrix} 1 & bc+ad & b^2c^2+a^2d^2 \\ 1 & ca+bd & c^2a^2+b^2d^2 \\ 1 & ab+cd & a^2b^2+c^2d^2 \end{vmatrix}$$

$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d).$$

25. $$\begin{vmatrix} bc-a^2 & ca-b^2 & ab-c^2 \\ -bc+ca+ab & bc-ca+ab & bc+ca-ab \\ (a+b)(a+c) & (b+c)(b+a) & (c+a)(c+b) \end{vmatrix}$$

$$=3(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(bc+ca+ab).$$

26. $$\begin{vmatrix} (a-x)^2 & (a-y)^2 & (a-z)^2 \\ (b-x)^2 & (b-y)^2 & (b-z)^2 \\ (c-x)^2 & (c-y)^2 & (c-z)^2 \end{vmatrix}$$

$$=2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y).$$

27. 求

$$u\alpha^2+v\beta^2+w\gamma^2+2u'\beta\gamma+2v'\gamma\alpha+2w'\alpha\beta$$

能析爲兩個含 α, β, γ 之一次因子之積之條件，以行列式之形式表之.

28. 解方程式

$$\begin{vmatrix} u+a^2x & w'+abx & v'+acx \\ w'+abx & v+b^2x & u'+bcx \\ v'+acx & u'+bcx & w+c^2x \end{vmatrix}=0,$$

以行列式表所得之結果.

499. 行列式之性質，在解聯立一次方程式中，爲用最著．設聯立方程式爲

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0.$$

以 $A_1, -A_2, A_3$ 分乘之，而相加其結果，此處 A_1, A_2, A_3 爲行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

內 a_1, a_2, a_3 之子行列式．據 §493 證得之關係，y, z 之係數爲零，故得

$$(a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3)x+(d_1A_1-d_2A_2+d_3A_3)=0.$$

同法可證

$$(b_1B_1-b_2B_2+b_3B_3)y+(d_1B_1-d_2B_2+d_3B_3)=0,$$

及

$$(c_1C_1-c_2C_2+c_3C_3)z+(d_1C_1-d_2C_2+d_3C_3)=0.$$

今 $$a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3=-(b_1B_1-b_2B_2+b_3B_3)$$
$$=c_1C_1-c_2C_2+c_3C_3=D;$$

故此解可寫爲

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & c_1 \\ d_2 & a_2 & c_2 \\ d_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} d_1 & a_1 & b_1 \\ d_2 & a_2 & b_2 \\ d_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

或寫爲更對稱之形式

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}.$$

500. 設有四個齊次一次聯立方程式:

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1u=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2u=0,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3u=0,$$
$$a_4x+b_4y+c_4z+d_4u=0.$$

用前節方法，由後三式得

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}}=\frac{-u}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}}$$

代入第一方程式，得消去式

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}-d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}=0.$$

此可寫為更簡之形式

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=0;$$

左式爲一四次行列式.

又可知 a_1，b_1，c_1，d_1 之係數，連同其前之符號，爲除去該元所居之行列而得之子行列式.

501. 一般言之，若有 n 個一次齊次方程式

$$a_1x_1+b_1x_2+c_1x_3+\cdots\cdots\cdots+k_1x_n=0,$$
$$a_2x_1+b_2x_2+c_2x_3+\cdots\cdots\cdots+k_2x_n=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx_1+b_nx_2+c_nx_3+\cdots\cdots\cdots+k_nx_n=0,$$

各包含 n 個未知數 x_1，x_2，x_3，$\cdots\cdots\cdots x_n$，則可消去諸未知數，而得

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \cdots\cdots\cdots & k_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots\cdots\cdots & k_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ a_n & b_n & c_n & \cdots\cdots\cdots & k_n \end{vmatrix}=0$$

之形式之結果.

方程式之左邊爲行列式，包含 n 行 n 列，名曰 n 次行列式.

關於此種一般行列式之討論，不在本書範圍之內；惟前就二次及三次行列式證得之性質，實際非常一般，足可推及於任何次數之行列式.

例如，上舉 n 次行列式等於

$$a_1A_1-b_1B_1+c_1C_1-d_1D_1+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}k_1K_1,$$

或 $$a_1A_1-a_2A_2+a_3A_3-a_4A_4+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_nA_n,$$

全視其就第一列或第一行展開而定. 此處之大寫字母，代表其相當之小寫字母所表之元之子行列式，其本身爲 $n-1$ 次之行列式. 每式又可以若干 $n-2$ 次之行列式之和表之；類推；如是原行列式之展開式可求得矣.

行列式雖惟可用上法展開，但常非最簡之方法，若所求非全行列式之值，而爲其展開式內各項之符號，則上法尤不適用.

502. 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ 之展開式

$$=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1,$$

此展開式中之各項，均爲三因子之積，由每行取一個，由每列取一個；而各項中符號，半數爲正，半數爲負. 各項之符號可求得如下. 第一項 $a_1b_2c_3$ 爲正，其中之附數順數字之順序；名曰展開式之主項. 將附數加以適當之互換，可求得其他之任何項. 任何項前爲正號抑或負號，

視其由主項變來時，二附數經過偶或奇數次互換而定．例如，$a_3\ b_2\ c_1$ 一項，乃先將 1 與 3 再將 1 與 2 互換得來，故其符號爲正．

503. 主項爲 $a_1\ b_2\ c_3\ d_4$ …… 之行列式，可以記號

$$\Sigma\pm a_1b_2c_3d_4\cdots\cdots\cdots\cdots$$

表之，將 $\Sigma\pm$ 置於主項之前，乃表所有項之總和，此等項由適當互換附數及規定符號求得之．

行列式有時可以更簡之形式表之，即將主項置於括弧之內是也；如 $(a_1\ b_2\ c_3\ d_4\cdots)$，即表 $\Sigma\pm\ a_1\ b_2\ c_3\ d_4\cdots\cdots$.

例． 在行列式（$a_1\ b_2\ c_3\ d_4\ e_5$）內，$a_4\ b_3\ c_1\ d_5\ e_2$ 一項之符號爲何？

從主項起互換 a 及 b 之附數得 $a_4\ b_2\ c_3\ d_1\ e_5$；再互換 b 及 c 之附數得 $a_4\ b_3\ c_2\ d_1\ e_5$；再互換 c 及 d 之附數得 $a_4\ b_3\ c_1\ d_2\ e_5$；最後互換 d 及 e. 之附數得 $a_4\ b_3\ c_1\ d_5\ e_2$；共計互換四次，故此項之符號爲正．

504. 在 §501 之行列式內，若 b_1，c_1，………k_1 各元爲零，則此行列式變爲 a_1A_1；換言之，即等於 a_1 及一個 $n-1$ 次行列式之積，因此推得下之一般定理：

若行列式之第一列或第一行中，除第一元外之各元皆爲零，設此元等於 m，則此行列式等於以 m 乘除去第一列或第一行所得之子行列式．

將行列加以適當之互換，可將任一元變爲第一元，故只要有一行或列僅有一元非零，則此行列式可以低一次之行列式表之．

此對於行列式之化簡，有時十分有用．

例. 求 $\begin{vmatrix} 30 & 11 & 20 & 38 \\ 6 & 3 & 0 & 9 \\ 11 & -2 & 36 & 3 \\ 19 & 6 & 17 & 22 \end{vmatrix}$ 之值.

從第一行之各元減去第二行之相當元之二倍，又從第四行之各元減去第二行之相當元之三倍，得

$$\begin{vmatrix} 8 & 11 & 20 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & -2 & 36 & 9 \\ 7 & 16 & 17 & 4 \end{vmatrix},$$

在第二行內有三元爲零，故此行列式

$$=3\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 15 & 36 & 9 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 8 & 20 & 5 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 8 & 19 & 5 \\ 7 & 17 & 4 \end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}=9.$$

505. 下例所示之捷法，有時頗爲有用.

例 1. 求證

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}=(a+b+c+d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)(a+b-c-d).$$

將所有各列相加，可知 $a+b+c+d$ 爲左邊行列式之因子；又從第二，四兩列之和減第一，三兩列之和，可知 $a-b+c-d$ 爲左邊行列式之因子；仿此可知 $a-b-c+d$ 及 $a+b-c-d$ 亦爲其因子；此外則爲數字因數，比較兩邊含 a^4 之項之係數，知此數字爲 1，故得所證之結果.

例 2. 求証

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

此行列式當 $b=a$ 時等於零，因此時第一行與第二行恒等也；故 $a-b$ 爲此行列式之因子 [§514]. 仿此 $a-c$, $a-d$, $b-c$, $b-d$, $c-d$ 皆爲此行列式之因子；此行列式既爲六次，此外之因子必爲數字因數；比較兩邊含 bc^2d^3 之項之係數，知此因數爲 1；故得所證之結果.

習　題　三十三.B.

計算下列各行列式之值:

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

2. $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

3. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$.

4. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b+c & a & a \\ 1 & b & c+a & b \\ 1 & c & c & a+b \end{vmatrix}$.

5. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 29 & 2 & 14 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \end{vmatrix}$.

6. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

7. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$.

8. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ -x & 0 & c & b \\ -y & -c & 0 & a \\ -z & -b & -a & 0 \end{vmatrix}$.

9. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

10. 設 ω 爲 1 之虛立方根，試證

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ \omega & \omega^2 & \omega^3 & 1 \\ \omega^2 & \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^3 & 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

並證左邊行列式之值爲 $3\sqrt{-3}$.

11. 設

$$(f^2-bc)x+(ch-fg)y+(bg-hf)z=0,$$

$$(ch-fg)x+(g^2-ca)y+(af-gh)z=0,$$

$$(bg-hf)x+(af-gh)y+(h^2-ab)z=0,$$

試證 $$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

解方程式：

12.
$$x+y+z=1,\quad ax+by+cz=k,\quad a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$$

13.
$$ax+by+cz=k,\quad a^2x+b^2y+c^2z=k^2,\quad a^3x+b^3y+c^3z=k^3.$$

14.
$$\begin{aligned} x+y+z+u&=1,\\ ax+by+cz+du&=k,\\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=k^2,\\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=k^3. \end{aligned}$$

15. 求證

$$\begin{vmatrix} b+c-a-d & bc-ad & bc(a+d)-ad(b+c) \\ c+a-b-d & ca-bd & ca(b+d)-bd(c+a) \\ a+b-c-d & ab-cd & ab(c+d)-cd(a+b) \end{vmatrix}$$
$$=-2(b-c)(c-a)(a-b)(a-d)(b-d)(c-d).$$

16. 求證

$$\begin{vmatrix} a^2 & a^2-(b-c)^2 & bc \\ b^2 & b^2-(c-a)^2 & ca \\ c^2 & c^2-(a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

17. 求證

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ f & a & b & c & d & e \\ e & f & a & b & c & d \\ d & e & f & a & b & c \\ c & d & e & f & a & b \\ b & c & d & e & f & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix},$$

此處

$$A=a^2-d^2+2ce-2bf,$$

$$B=e^2-b^2+2ac-2df,$$

$$C=c^2-f^2+2ae-2bd.$$

18. 設有一行列式爲 n 次，其第一，二，三，……… n 列元爲第一，二，三，次之擬形數之前 n 個數，試證其值爲 1.

第三十四章

雜定理及雜例題

506. 吾人於此章之始，將稍論代數形式之不變性，並擇要復習書中已證之基本定律.

507. 在代數原理之闡明中，吾人採用分析方法；其始也，不羅列新名辭及新觀念，但由已知之算術不名數之知識起始；吾人證明某等演算定律在任何特殊情形下皆可用之，此等定律之一般理論，即構成代數之科學.

故通常言算術代數學及符號代數學，而就其中區別之．前者所定符號之定義，可以算術方法說明之，而由此推出演算之基本定律，後者則不問符號之性質，而假定諸演算定律能通用於一切情形，而由是求須加何種意義於諸符號，始可使其合於諸演算定律．因之漸次超出普通算術之限制，而得出新結果，必須運用新術語，並對於原符號及定義中未曾預及者，必須加以新解釋矣．同時代數學之一般定律，就其證得所用之方法觀之，可斷言其有永久性及一般性，即用於無算術解釋之量時亦然.

508. 若只重符號之正整數值，則下列諸定律，不難由算術定義直接證明之.

I. 交換定律. 此可述之如次:

(i) 加法及減法可就任何次序行之.

如是 $a+b-c=a-c+b=b-c+a$.

(ii) 乘法及除法就任何次序行之.

如是 $$a\times b=b\times a;$$

$$a\times b\times c=b\times c\times a=a\times c\times b;$$

$$ab\div c=a\times b\div c=(a\div c)\times b=(b\div c)\times a.$$

II. 分配定律. 可述之如次.

乘法及除法可分配於加法及減法之中.

如是 $$(a-b+c)m=am-bm+cm,$$

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd.$$

[見初級代數 §§ 33,34.]

又因除法為乘法之逆運算，故除法之分配定律，不再分別討論之.

III. 指數定律.

(i) $$a^m\times a^n=a^{m+n},$$

(ii) $$a^m\div a^n=a^{m-n},$$

$$(a^m)^n=a^{mn}.$$

[見初級代數 §233至235]

上述諸定律,實為代數學之基礎，其初可證明,乃假定所用符號表正整數，且限於上述諸施算之有算術的解釋者. 若此種條件不合，則由符號代數學之原理，假定算術代數學諸定律於任何情形皆眞，而接受由此假定所引致之一切解釋. 循此進行吾人足以保證代數之諸演算定律之不矛盾；而包含所有初級算術中諸特例於其一般性之中.

509. 由交換定律，吾人推出加或去括號之法則 [初級代數 §§21,22]；借此等法則，吾人證明 §35 之分配定律. 例如，吾人已就

a, b, c, d 爲正整數，及 a 大於 b，而 c 大於 d 之限制，證明

$$(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd.$$

若除去此等限制，則對於此結果之解釋，應屬於符號代數學之範圍．令 $a=0$, $c=0$，得 $(-b)\times(-d)=bd$，即二負量之積爲正量；又令 $b=0$, $c=0$，得 $a\times(-d)=-ad$，即異號二量之積爲負量．

故知符號法則，乃分配定律之自然結果，因此，符號法則歸併於基本演算定律之內．

510. 應用基本定律證明代數分式性質之方法，讀者可參考著者之初等代數學第十九，二十一，二十二等章；在彼處將見凡不能直接下定義之符號及演算，恒以適合於算術代數之定律解釋之．

511. 在初等代數第三十章中，討論指數定律至爲詳盡．當 m 及 n 爲正整數而 $m>n$ 時，吾人先由指數定義直接證明

$$a^m\times a^n=a^{m+n};\ a^m\div a^n=a^{m-n};\ (a^m)^n=a^{mn}.$$

然後假定第一律當指數毫無限制時爲眞，吾人依此法規定符號在原定義中所未及之意義．如是從第一定律所得對於 $a^{\frac{p}{q}}$, a^0, a^{-n} 之解釋，與其他二定律完全相合；故知諸指數定律不互相矛盾而有完全之一般性．

512. 在第八章中，吾人規定符號 i 或 $\sqrt{-1}$ 依從 $i^2=-1$ 之關係．由此定義，並令 i 依從代數之一般定律，能以討論形如 $a+ib$ 之實虛量之結合式之性質．此等式有時稱爲複虛數，參看 §92至§105，將知複虛數施以加，減，乘，除之演算後，通常仍得複虛數．又，任

何有理函數所含之演算，不外上述數種，故複虛數之有理函數通常爲一複虛數.

形似 a^{x+iy}，$log\ (x+iy)$ 之式，不用三角法不能詳盡討論；但應用馬氏定理不難證明此類式能變爲形似 $A+iB$ 之複虛數.

e^{x+iy} 之式，當然包含於更一般之 a^{x+iy} 之式內，但有另外之研究方法，値得注意.

吾人在 §220 中，已知

$$e^x=Lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

此處 x 爲任意實數；同理 e^{x+iy} 之意義可用方程式

$$e^{x+iy}=Lim\left(1+\frac{x+iy}{n}\right)^n$$

規定之，此處 x 及 y 爲任意實數.

關于複虛數理論發展之詳盡研究可於 *Schlömilch's Handbuch der algebraischen Analysis* 中見之.

513. 玆舉若干定理及例題，以說明在證恆等式中及方程式論中常用之方法.

514. 求以 $x-a$ 除任一 x 之有理函數時所得之餘數.

令 $f(x)$ 表任 x 之有理整函數；以 $x-a$ 除 $f(x)$ 至餘式不含 x 止；令 Q 爲商，R 爲餘式，於是

$$f(x)=Q(x-a)+R.$$

因 R 不含 x，故與 x 之值無關；令 $x=a$，則

$$f(a)=Q\times 0+R;$$

今當 x 爲有限值時，Q 亦爲有限值，故

$$R=f(a).$$

推論．若 $f(x)$ 能被 $x-a$ 除盡，則 $R=0$，即 $f(a)=0$；故若 x 之有理整函數當 $x=a$ 時為零，則此函數能被 $x-a$ 除盡．

515. 上節所證定理為用甚廣，故吾人再舉另一證法，此法之優點，乃在能表明商之形式．

設此函數為 n 次，並以

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots+p_n$$

表之，則其商為 $n-1$ 次；以

$$q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\cdots\cdots q_{n-1}\text{ 表之；}$$

令 R 為不含 x 之餘數；則

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+p_3x^{n-3}+\cdots\cdots+p_n$$
$$=(x-a)(q_0x^{n-1}+q_1x^{n-2}+q_2x^{n-3}+\cdots\cdots+q_{n-1})+R.$$

施乘，並等置 x 之同次冪之係數，得

$$q_0=p_0;$$
$$q_1-aq_0=p_1,\text{ 即 } q_1=aq_0+p_1;$$
$$q_2-aq_1=p_2,\text{ 即 } q_2=aq_1+p_2;$$
$$q_3-aq_2=p_3,\text{ 即 } q_3=aq_2+p_3;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$R-aq_{n-1}=p_n,\text{ 即 } R=aq_{n-1}+p_n;$$

如是商之每一連續係數，皆由其前一係數乘 a，再加以被除式內之次一係數構成之．其求商之各項及餘式之方法可排列如下：

$$\begin{array}{cccccc} p_0 & p_1 & p_2 & p_3\cdots & p_{n-1} & p_n \\ & aq_0 & aq_1 & aq_2\cdots & aq_{n-2} & aq_{n-1} \\ \hline q_0 & q_1 & q_2 & q_3\cdots & q_{n-1} & R \end{array}$$

故　$R=aq_{n-1}+p_n=a(aq_{n-2}+p_{n-1})+p_n=\cdots\cdots$

$$=p_0a^n+p_1a^{n-1}+p_2a^{n-2}+\cdots\cdots+p_n.$$

除式為 $x+a$ 時，此法仍能應用，惟將乘數改為 $-a$ 而已．

例．求以 $x+2$ 除 $3x^7-x^6+31x^4+21x+5$ 所得之商及餘數．

此處之乘數為 -2，故得

$$\begin{array}{rrrrrrrr} 3 & -1 & 0 & 31 & 0 & 0 & 21 & 5\\ & -6 & 14 & -28 & -6 & 12 & -24 & 6 \\ \hline 3 & -7 & 14 & 3 & -6 & 12 & -3 & 11\end{array}$$

故所求商為 $3x^6-7x^5+14x^4+3x^3-6x^2+12x-3$，而餘數為 11．

516. 上例之解法因僅寫出各項之係數而特別化簡，其零乃表 x 之缺項之係數．此種分離係數法，常可用以免去初等代數計算之繁，當所論為有理整函數時尤甚．茲舉一例於下．

例．以 x^3-2x^2-4x+8 除 $3x^5-8x^4-5x^3+26x^2-33x+26$．

$$\begin{array}{l} 1+2+4-8)\,3-8-5+26-33+26\,(3-2+3 \\ \qquad\qquad\quad \underline{3+6+12-24} \\ \qquad\qquad\qquad -2+7+2-33 \\ \qquad\qquad\qquad \underline{-2-4-8+16} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 3-6-17+26 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \underline{3+6+12-24} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -5+2 \end{array}$$

如是其商為 $3x^2-2x+3$，而餘式為 $-5x+2$．

注意：寫除式時，除首項以外，各項符號一概變更；如是在各步計算中，可以加法代替減法．

517. 照下法排列，可將此計算更為縮簡，此法名曰賀氏（*Horner*）綜合除法．

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 3 & -8 & -5 & +26 & -33 & +26 \\ 2 & & 6 & +12 & -24 & & \\ 4 & & & -4 & -8 & +16 & \\ -8 & & & & 6 & +12 & -24 \\ \hline & 3 & -2 & +3 & +0 & -5 & +2 \end{array}$$

［註．豎線左邊之一行數字，乃除式各項之係數，除第一項外，各項之符號皆改變，第二橫列由以 3 乘 2，4，-8 得之，3 為商之第一項，然從將豎線右方第二豎行之各項相加，得 -2，是為商式之第二項之係數．用如此求得之係數作成其次一橫列，而加第三豎行中之

諸項，得 3，是爲商式之第三項之係數.

將其他諸豎行相加，即餘式之諸項之係數.]

例. 以 $2a^3+3a^2b-b^3$ 除 $6a^5+5a^4b-8a^3b^2-6a^2b^3-6ab^4$ 至商之第四項.

$$\begin{array}{r|r|r}
2 & 6+5-8-6-6 & \\
-3 & -9+0+3 & \\
0 & 6+0-2 & -1 \\
1 & 3+0 & 12+0-4 \\
\hline
 & 3-2-1+0-4 & +11+0-4
\end{array}$$

故其商爲 $3a^2-2ab-b^2-4a^{-2}b^4$，而餘式爲 $11b^5-4a^{-2}b^7$.

此處將諸豎行相加如前，但所得各和均須以除式之首項係數 2 除之. 已足所求之項數後，只將其餘各豎行相加，即得餘數，不必再除矣.

學者試用分離係數法證明此法則.

518. §514 之原理，在證明代數恆等式時常用之；但在討論之前，但說明須對於對稱函數及交替函數稍加論列.

函數之不因其中任二變數互換而變值者，名曰其變數之對稱函數. 如 $x+y+z$，$bc+ca+ab$，$x^3+y^3+z^3-xyz$ 爲一次，二次，三次之對稱函數.

注意：x，y，z 之唯一一次對稱函數之形式爲 $M(x+y+z)$，此處 M 不含 x，y，z.

519. 由此定義，可知任二對稱函數之和，差，積，商仍爲對稱函數. 在核算代數計算結果有無錯誤時，此原則極爲有用，有時且可用之免去許多計算之繁.

例如，吾人知 $(x+y+z)^3$ 之展開式必爲三次之齊次函數，故必爲 $x^3+y^3+z^3+A(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+Bxyz$ 之形式，此處 A 及 B 均不含 x，y，z.

令 $z=0$，則 $A=3$，此為 $(x+y)^3$ 之展開式中 x^2y 之係數．

令 $x=y=z=1$，則 $27=3+(3\times6)+B$，由是 $B=6$．

故 $(x+y+z)^3$

$=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3xy^2+3y^2z+3yz^2+3z^2x+3zx^2+6xyz$．

520. 函數之當其中任二變數互換後僅變符號而不變值者，名曰其變數之交替函數．如 $x-y$ 及 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 均為交替函數．

顯然一次交替函數之變數不能多於兩個，又交替函數與對稱函數之積仍為交替函數．

521. 對稱函數及交替函數可寫出其中之一項而冠以符號 Σ 以表之；如 Σa 表 a 型之一切項之和，Σab 表 ab 型之一切項之和；類推．例如，函數若包含 a，b，c，d 四個字母，則

$$\Sigma a=a+b+c+d;$$

$$\Sigma ab=ab+ac+ad+bc+bd+cd;$$

依此類推．

依此，若函數包含 a，b，c 三個字母，則

$$\Sigma a^2(b-c)=a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b);$$

$$\Sigma a^2bc=a^2bc+b^2ca+c^2ab;$$

依此類推．

注意：若包含三個字母，則 Σa^2b 非表三項之和而表六項之和；如是

$$\Sigma a^2b=a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b.$$

符號 Σ 亦可用以表兩組或多組字母之和；如

$$\Sigma yz(b-c)=yz(b-c)+zx(c-a)+xy(a-b).$$

522. 對稱式之積或方冪，可用上節符號以簡縮之形式表之：如

$$(a+b+c)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6abc;$$
$$(a+b+c+d)^3=\Sigma a^3+3\Sigma a^2b+6\Sigma abc;$$
$$(a+b+c)^4=\Sigma a^4+4\Sigma a^3b+6\Sigma a^2b^2+12\Sigma a^2bc;$$
$$\Sigma a\times\Sigma a^2=\Sigma a^3+\Sigma a^2b.$$

例 1．求證

$$(a+b)^5-a^5-b^5=5ab(a+b)(a^2+ab+b^2).$$

以 E 表左函數；於是 E 爲 a 之函數，當 $a=0$ 時爲零；故 a 爲 E 之因子；同理，b 亦爲 E 之因子．又，當 $a=-b$ 時，E 之値爲零，故 $a+b$ 爲 E 之因子；故 E 含有 $ab(a+b)$ 之因子．其餘因子必爲二次，旣爲 a, b 之對稱函數，其形式必爲 $Aa^2+Bab+Ab^2$；是以

$$(a+b)^5-a^5-b^5=ab(a+b)(Aa^2+Bab+Ab^2),$$

此處 A 及 B 均不含 a, b.

令 $a=1$，$b=1$，得 $15=2A+B$：

令　$a=2$，$b=-1$，得 $15=5A-2B$；

解之，得 $A=5$，$B=5$；而所求結果可立即寫出．

例 2．求 $(b^3+c^3)(b-c)+(c^3+a^3)(c-a)+(a^3+b^3)(a-b)$ 之因子．

以 E 表此式；則 E 爲 a 之函數．此式當 $a=b$ 時爲零，故含有 $a-b$ 之因子，[§514]．同理，含有 $b-c$ 及 $c-a$ 之因子，故 E 含有 $(b-c)(c-a)(a-b)$ 之因子．

因 E 爲四次，其餘一因子必爲一次；且旣爲 a, b, c 之對稱函數，其形式必爲 $M(a+b+c)$．[§518]．

$$\therefore\quad E=M(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

令 a, b, c 爲適當之値以定 M 之値；令 $a=0$，$b=1$，$c=2$，得 $M=1$，即得所求之結果．

例 3．求證

$$(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$
$$=5(y+z)(z+x)(x+y)(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy).$$

以 E 表左式；於是因當 $y=-z$ 時 E 等於零，故 $y+z$ 爲 E 之因子；同理，$z+x$ 及 $x+y$ 亦爲 E 之因子；故 E 含有 $(y+z)(z+x)$

$(x+y)$ 之因子。因 E 爲 x, y, z 之五次對稱函數，故其餘一因子必爲二次，而其形式爲

$$A(x^2+y^2+z^2)+B(yz+zx+xy).$$

令 $x=y=z=1$；得 $10=A+B$；

令 $x=2, y=1, z=0$；得 $35=5A+2B$；

解之，得 $A=B=5$,

代入即得所求之結果。

523. 爲參考便利計，茲列一恒等式表於此，此等恒等式，在變化代數式時甚爲有用；表有若干已於初等代數第二十九章中見之．

$$\Sigma bc(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$\Sigma a^2(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$\Sigma a(b^2-c^2)=(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$\Sigma a^3(b-c)=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

此恒等式可與以另一形式，

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

$$(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b).$$

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$\Sigma bc(b+c)+2abc=(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$\Sigma a^2(b+c)+2abc=(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b).$$

$$2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$$

$$=(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$$

習 題 三十四．A．

1. 求以 $x+5$ 除 $3x^5+11x^4+90x^2-19x+53$ 所得之餘數．

2. 設 $2x^4-7x^3+ax+b$ 可以 $x-3$ 除盡，試求 a,b 之關係方程式．

3.　求以 x^2-3x+2 除 $x^5-5x^4+9x^3-6x^2-16x+13$ 時所得之商及餘式.

4.　須 a 爲何值，x^3-7x+5 方能爲

$$x^5-2x^4-4x^3+19x^2-31x+12+a$$

之因子?

5.　依照 x 之降冪展開 $\dfrac{1}{x^4-5x^3+7x^2+x-8}$ 至第四項，並求其餘式.

求下列各式之因子:

6.　$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$.

7.　$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$.

8.　$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$.

9　$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2+8abc$.

10.　$a(b^4-c^4)+b(c^4-a^4)+c(a^4-b^4)$.

11.　$(bc+ca+ab)^3-b^3c^3-c^3a^3-a^3b^3$.

12.　$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$.

13.　$(a+b+c)^5-(b+c-a)^5-(c+a-b)^5-(a+b-c)^5$.

14.　$(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$.

證下列諸恒等式:

15.　$\Sigma(b+c-2a)^3=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$.

16.　$\dfrac{a(b-c)^2}{(c-a)(a-b)}+\dfrac{b(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{c(a-b)^2}{(b-c)(c-a)}=a+b+c$.

17.　$\dfrac{2a}{a+b}+\dfrac{2b}{b+c}+\dfrac{2c}{c+a}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{(b+c)(c+a)(a+b)}=3$.

18.　$\Sigma a^2(b+c)-\Sigma a^3-2abc=(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

19.　$\dfrac{a^3(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3(a+b)}{(c-a)(c-b)}=bc+ca+ab$.

20.　$4\Sigma(b-c)(b+c-2a)^2=9\Sigma(b-c)(b+c-a)^2$.

21.　$(y+z)^2(z+x)^2(x+y)^2=\Sigma x^4(y+z)^2+2(\Sigma yz)^3-2x^2y^2z^2$.

22.　$\Sigma(ab-c^2)(ac-b^2)=(\Sigma bc)(\Sigma bc-\Sigma a^2)$.

23.　$abc(\Sigma a)^3-(\Sigma bc)^3=abc\Sigma a^3-\Sigma b^3c^3$

$$=(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab).$$

24.　$\Sigma(b-c)^3(b+c-2a)=0$；故 $\Sigma(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-2\alpha)^3=0$.

25.　$(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$
$$=2(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

26.　設 $x=b+c-a$，$y=c+a-b$，$z=a+b-c$，試證
$$x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc).$$

27.　試證在 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 中，以 $s-a, s-b, s-c$ 代 a, b, c 後其值不變，此處
$$3s=2(a+b+c).$$

求下列各式之值:

28.　$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

29.　$$\frac{a^2-b^2-c^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2-c^2-a^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2-a^2-b^2}{(c-a)(c-b)}.$$

30.　$$\frac{(a+p)(a+q)}{(a-b)(a-c)(a+x)}+\frac{(b+p)(b+q)}{(b-c)(b-a)(b+x)}+\frac{(c+p)(c+q)}{(c-a)(c-b)(c+x)}.$$

31.　$\Sigma\dfrac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}$.　　32.　$\Sigma\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}$.

33.　設 $x+y+z=s$，及 $xyz=p^2$，試證
$$\left(\frac{p}{ys}-\frac{y}{p}\right)\left(\frac{p}{zs}-\frac{z}{p}\right)+\left(\frac{p}{zs}-\frac{z}{p}\right)\left(\frac{p}{xs}-\frac{x}{p}\right)+\left(\frac{p}{xs}-\frac{x}{p}\right)\left(\frac{p}{ys}-\frac{y}{p}\right)=\frac{4}{s}.$$

雜恆等式

524. 許多恆等式，能用 1 之立方根之性質簡易證明之；1 之立方根，通常以 1，ω，ω^2 表之．

例．試證
$$(x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

以 E 表左式，當 $x=0$，$y=0$，及 $x+y=0$ 時，E 等於零；故 E 含有 $xy(x+y)$ 之因子．

令 $x=\omega y$，得
$$E=\{(1+\omega)^7-\omega^7-1\}y^7=\{(-\omega^2)^7-\omega^7-1\}y^7$$
$$=(-\omega^2-\omega-1)y^7=0;$$

故 E 含有 $x-\omega y$ 之因子；仿此，知 E 含有 $x-\omega^2y$ 之因子，即是 E 能被 $(x-\omega y)(x-\omega^2y)$，即 x^2+xy+y^2 除盡之．

再者，既然 E 爲七次，而 $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ 爲五次，則餘一因子必爲

$A(x^2+y^2)+Bxy$ 之形式；故得

$$(x+y)^7-x^7-y^7=xy(x+y)(x^2+xy+y^2)(Ax^2+Bxy+Ay^2).$$

令 $x=1,\quad y=1$，得 $21=2A+B$；

令 $\quad x=2,\quad y=-1$，得 $21=5A-2B$；

解之，得 $\quad A=7,\quad B=7$；

$$\therefore\ (x+y)^7-x^7-y^7=7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

525. 在初等代數中，已知

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab),$$

又從 §110，例 3，復知

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c);$$

故知 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 可析爲三個一次因子；即

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c).$$

例. 試證 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 與 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 之積，可寫爲 $A^3+B^3+C^3-3ABC$ 之形式.

$$\begin{aligned}\text{原積}\ &=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)\\&\quad\times(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z).\end{aligned}$$

將此六因子配爲三對相乘：$(a+b+c)(x+y+z)$；

$(a+\omega b+\omega^2c)(x+\omega^2y+\omega z)$；及 $(a+\omega^2b+\omega c)(x+\omega y+\omega^2z)$，

則得三個部分積

$$A+B+C,\ A+\omega B+\omega^2C,\ A+\omega^2B+\omega C,$$

此處 $\quad A=ax+by+cz,\ B=bx+cy+az,\ C=cx+ay+bz.$

$$\begin{aligned}\text{故原積}\ &=(A+B+C)(A+\omega B+\omega^2C)(A+\omega^2B+\omega C)\\&=A^3+B^3+C^3-3ABC.\end{aligned}$$

526. 當已知 $a,\ b,\ c$ 之關係爲 $a+b+c=0$ 而求含 $a,\ b,\ c$ 之式之值時，可應用代替式

$$a=h+k,\qquad b=\omega h+\omega^2k,\ c=\omega^2h+\omega k.$$

但若爲 $a,\ b,\ c$ 之對稱式，則以用次述方法爲佳.

例. 設 $a+b+c=0$，指明

$$6(a^5+b^5+c^5)=5(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2).$$

已知 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+px+qx^2+rx^3$ 爲恆等.

於此 $p=a+b+c$，$q=bc+ca+ab$，$r=abc$.

故應用所與條件，得

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+qx^2+rx^3.$$

取其對數且相等 x^n 之係數，得 $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(a^n+b^n+c^n)$

$=log\ (1+qx^2+rx^3)$ 之展開式內 x^n 之係數 $=(qx^2+rx^3)$
$-\frac{1}{2}(qx^2+rx^3)^2+\frac{1}{3}(qx^2+rx^3)^3-\cdots\cdots\cdots\cdots$ 內 x^n 之係數.

由使 $n=2, 3, 5$ 得

$$-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=q,\ \frac{a^3+b^3+c^3}{3}=r,\ \frac{a^5+b^5+c^5}{5}=-qr;$$

由是
$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

而所求之結果即可求得.

設 $a=\beta-\gamma$，$b=\gamma-\alpha$，$c=\alpha-\beta$，能適合已知條件；由是得合於 α, β, γ 一切値之恆等式

$$6\{(\beta-\gamma)^5+(\gamma-\alpha)^5+(\alpha-\beta)^5\}$$
$$=5\{(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3\}\{(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta^2)\}$$

即

$$(\beta-\gamma)^5+(\gamma-\alpha)^5+(\alpha-\beta)^5=5(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta);$$

[比較 §522 例 3.]

習題 三十四.B.

1. 設 $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$，指明當 n 爲正整數時
$(a+b+c)^{2n+1}=a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}$.

2. 指明
$(a+\omega b+\omega^2c)^3+(a+\omega^2b+\omega c)^3=(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$.

3. 指明 設 n 爲奇正整數且非 3 之倍數，
則 $(x+y)^n-x^n-y^n$ 能爲 $xy(x^2+xy+y^2)$ 所除盡

4. 指明

$$a^3(bz-cy)^3+b^3(cx-az)^3+c^3(ay-bx)^3$$
$$=3abc(bz-cy)(cx-az)(ay-bx).$$

5. 求$(b-c)(c-a)(a-b)+(b-\omega c)(c-\omega a)(a-\omega b)+(b-\omega^2 c)(c-\omega^2 a)(a-\omega^2 b)$之值.

6. 試證 $(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$ 可寫為 $A^2+B^2+C^2-BC-CA-AB$ 之形式.

7. 試證$(a^2+ab+b^2)(x^2+xy+y^2)$可寫為 A^2+AB+B^2 之形式，並求 A 及 B 之值.

試證

8. $$\Sigma(a^2+2bc)^3-3(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

9. $$\Sigma(a^2-bc)^3-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

10. $$(a^2+b^2+c^2)^3+2(bc+ca+ab)^3-3(a^2+b^2+c^2)(bc+ca+ab)^2=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2.$$

設 $a+b+c=0$，證明第 11 至第 17 題諸恆等式.

11. $2(a^4+b^4+c^4)=(a^2+b^2+c^2)^2.$

12. $a^5+b^5+c^5=-5abc(bc+ca+ab).$

13. $a^6+b^6+c^6=3a^2b^2c^2-2(bc+ca+ab)^3.$

14. $3(a^2+b^2+c^2)(a^5+b^5+c^5)=5(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4).$

15. $$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

16. $$\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}+\frac{a-b}{c}\right)\left(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}\right)=9.$$

17. $$(b^2c+c^2a+a^2b-3abc)(bc^2+ca^2+ab^2-3abc)=(bc+ca+ab)^3+27a^2b^2c^2.$$

18. $$25\{(y-z)^7+(z-x)^7+(x-y)^7\}\{(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3\}=21\{(y-z)^5+(z-x)^7+(x-y)^5\}^2.$$

19. $$\{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2\}^3-54(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2=2(y+z-2x)^2(z+x-2y)^2(x+y-2z)^2.$$

20. $$(b-c)^6+(c-a)^6+(a-b)^6-3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2=2(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^3.$$

21. $$(b-c)^7+(c-a)^7+(a-b)^7=7(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^2.$$

22. 設 $a+b+c=0$，及 $x+y+z=0$，試證

$$4(ax+by+cz)^3-3(ax+by+cx)(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-2(b-c)(c-a)(a-b)(y-z)(z-x)(x-y)=54abcxyz.$$

設 $a+b+c+d=0$，試證

23. $\dfrac{a^5+b^5+c^5+d^5}{5}=\dfrac{a^3+b^3+c^3+d^3}{3}\cdot\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{2}$.

24. $(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+cda+dab+abc)^2$

$$=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd).$$

25. 設 $2s=a+b+c$ 及 $2\sigma^2=a^2+b^2+c^2$，試證

$$\Sigma(s-b)(s-c)(\sigma^2-a^2)+5abcs=(s^2-\sigma^2)(4s^2+\sigma^2).$$

26. 試證 $(x^3+6x^2y+3xy^2-y^3)^3+(y^3+6xy^2+3x^2y-x^3)^3$

$$=27xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^3.$$

27. 試證 $\Sigma\dfrac{a^5}{(a-b)(a-c)(a-d)}$

$$=a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd.$$

28. 將次式析爲因式:

$$2a^2b^2c^2+(a^3+b^3+c^3)abc+b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3.$$

消 去 法

527. 在第三十三章中，吾人已知一組一次方程式之消去式，可以行列式之形式立即寫出之．至用於任何次方程式之一般消去法，則於方程式論之專書中始能論及，學者可參考薩氏近世高等代數學 (*Salmon's Lessons Introductory to the modern Algebra*) 之第四，六兩章，及柏潘兩氏之方程式論 (*Burnside and Panton's Theory of Equations*) 第八章．

此等方法，雖然理論完善，但不常切於實用．故吾人僅對於其一般原理，加以簡單之說明，而從舉例說明若干較切實用之消去方法．

528. 茲先討論從兩方程式消去一未知數之方法．

以 $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 表此兩方程式，必需時，並設此兩方程式已化爲 $f(x)$ 及 $\phi(x)$表 x 之有理整函數之形式．此兩方程式既同時爲零，必有 x 之某値能同時適合之；故其消去式必表使二方程式有

一公根之係數間之條件.

設 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$……為 $f(x)=0$ 之根，則在 $\phi(\alpha)$, $\phi(\beta)$, $\phi(\gamma)$,……諸數中，至少必有一數為零；故其消去式為

$$\phi(\alpha),\ \phi(\beta),\ \phi(\gamma)\cdots\cdots=0.$$

左式為 $f(x)=0$ 之根之對稱函數，其值可用方程式論專書中所示之方法求得之.

529. 茲說明三種普通消去法：此舉一簡單之例即足以明之，但不論在何種情形下，此方法可通用於任何次方程式.

下例所示原則，為尤勒氏 (*Euler*) 所發明.

例. 由方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0,\ \text{及}\ fx^2+gx+h=0$$

消去 x.

令 $x+k$ 為與此兩方程式之公根相當之因子，又設

$$ax^3+bx^2+cx+d=(x+k)(ax^2+lx+m),$$

及

$$fx^2+gx+h=(x+k)(fx+n),$$

此處 k, l, m, n 為未知數.

由此兩方程式，可得恒等式

$$(ax^3+bx^2+cx+d)(fx+n)=(ax^2+lx+m)(fx^2+gx+h).$$

等置 x 之同次冪之係數，得

$$\begin{aligned} fl \qquad\quad -an+ag-bf&=0,\\ gl+fm-bn+ah-cf&=0,\\ hl+gm-cn \qquad\quad -df&=0,\\ hm-dn \qquad\qquad\quad &=0. \end{aligned}$$

從此等一次方程式消去 l, m, n, 得行列式

$$\begin{vmatrix} f & 0 & a & ag-bf \\ g & f & b & ah-cf \\ h & g & c & -df \\ 0 & h & d & 0 \end{vmatrix}=0.$$

530. $f(x)=0$ 及 $\phi(x)=0$ 之消去式，極易用薛爾維特氏(*Sylvester*)之分析消去法列為行列式．今就前例說明之．

例．由方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \text{ 及 } fx^2+gx+h=0$$

消去 x．

以 x 乘第一方程式，以 x 及 x^2 乘第二方程式；於是得五個方程式，其中 x^4, x^3, x^2, x 可視作四個不同變數而消去之．此五個方程式為

$$\begin{aligned}
ax^3+bx^2+cx+d&=0,\\
ax^4+bx^3+cx^2+dx&=0,\\
fx^2+gx+h&=0,\\
fx^3+gx^2+hx&=0,\\
fx^4+gx^3+hx^2&=0.
\end{aligned}$$

故其消去式為

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & b & c & d & 0 \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & f & g & h & 0 \\ f & g & h & 0 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

531. 下舉方法之原理乃貝氏 (*Bezout*) 所發明；其優點在能以較前數法所得者次數皆低之行列式表其結果．茲仍用前例說明之，並示柯希氏(*Cauchy*)之消去法．

例．由方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0, \text{ 及 } fx^2+gx+h=0$$

消去 x；由此兩方程式得

$$\frac{a}{f}=\frac{bx^2+cx+d}{gx^2+hx},$$

$$\frac{ax+b}{fx+g}=\frac{cx+d}{hx};$$

由是 $$(ag-bf)x^2+(ah-cf)x-df=0,$$

及 $$(ah-cf)x^2+(bh-cg-df)x-dg=0.$$

將此兩方程式與

$$fx^2+gx+h=0$$

相結合，並視 x^2 及 x 爲二不同變數，則其消去式爲

$$\begin{vmatrix} f & g & h \\ ag-bf & ah-cf & -df \\ ah-cf & bh-cg-df & -dg \end{vmatrix}=0.$$

532. 設有兩方程式，其形式爲 $\phi_1(x,y)=0$ 及 $\phi_2(x,y)=0$，則可用前述任一方法消去 y；其消去式爲 x 之函數.

設有三方程式，其形式爲

$\phi_1(x,y,z)=0$，$\phi_2(x,y,z)=0$，$\phi_3(x,y,z)=0$，

則可從第一，二，兩方程式消去 z，再從第一，三兩方程式消去 z，而得兩方程式，其形式爲

$$\psi_1(x,y)=0,\quad \psi_2(x,y)=0.$$

再從此二方程式消去 y，則得形似 $f(x)=0$ 之結果. 準此理論，吾人能於 $n+1$ 個方程中消去 n 個變數.

533. 以上說明之普通方法，固有時便於應用，惟所得之消去式之形式殊少簡單者，而諸方程式之本身，有時暗示出某種特殊消去法. 玆舉數例說明之.

例 1. 由方程式

$$lx+my=a,\quad mx-ly=b,\quad 及\quad l^2+m^2=1.$$

消去 l 及 m.

將第一二兩方程式自乘而相加之，得

$$l^2x^2+m^2x^2+m^2y^2+l^2y^2=a^2+b^2,$$

即 $$(l^2+m^2)(x^2+y^2)=a^2+b^2;$$

故其消去式爲 $$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

若 $l=\cos\theta$，$m=\sin\theta$，則恒能適合第三方程式；換言之，即

$$x\cos\theta+y\sin\theta=a,\quad x\sin\theta-y\cos\theta=b$$

之消去式爲 $$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

例 2. 由方程式

$$y^2+z^2=ayz,\ z^2+x^2=bzx,\ 及\ x^2+y^2=cxy,$$

消去 x, y, z.

因
$$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}=a,\ \frac{z}{x}+\frac{x}{z}=b,\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=c;$$

三方程式相乘，得

$$2+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{z^2}{x^2}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=abc;$$

故
$$2+(a^2-2)+(b^2-2)+(c^2-2)=abc;$$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2-4=abc.$$

例 3. 由方程式

$$x^2-y^2=px-qy,\ 4xy=qx+py,\ x^2+y^2=1,$$

消去 x, y.

以 x 乘第一方程式，以 y 乘第二方程式，得

$$x^3+3xy^2=p(x^2+y^2);$$

故由第三方程式，

$$p=x^3+3xy^2.$$

同理
$$q=3x^2y+y^3.$$

如是
$$p+q=(x+y)^3,\ p-q=(x-y)^3;$$

$$\therefore (p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}=(x+y)^2+(x-y)^2$$
$$=2(x^2+y^2);$$

$$\therefore (p+q)^{\frac{2}{3}}+(p-q)^{\frac{2}{3}}=2.$$

例 4. 由方程式

$$\frac{y}{z}-\frac{z}{y}=a,\ \frac{z}{x}-\frac{x}{z}=b,\ 及\ \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=c,$$

消去 x, y, z.

$$a+b+c=\frac{x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)}{xyz}$$
$$=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{xyz}.$$

若改變 x 之符號，則 b, c 之符號亦隨而變，而 a 之符號不變.

故
$$a-b-c=\frac{(y-z)(z+x)(x+y)}{xyz}.$$

同理
$$b-c-a=\frac{(y+z)(z-x)(x+y)}{xyz}.$$

及
$$c-a-b=\frac{(y+z)(z+x)(x-y)}{xyz}.$$

$$\therefore\quad (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$
$$=-\frac{(y^2-z^2)^2(z^2-x^2)^2(x^2-y^2)^2}{x^4y^4z^4}$$
$$=-\left(\frac{y}{z}-\frac{z}{y}\right)^2\left(\frac{z}{x}-\frac{x}{z}\right)^2\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2$$
$$=-a^2b^2c^2.$$

$$\therefore\quad 2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4+a^2b^2c^2=0.$$

習 題 三十四.C.

1. 由方程式
$m^2x-my+a=0$ 及 $my+x=0$ 消去 m.

2. 由方程式
$m^2x-my+a=0$, $n^2x-ny+a=0$, $mn+1=0$ 消去 m 及 n.

3. 由方程式
$mx-ny=a(m^2-n^2)$, $nx+my=2amn$, $m^2+n^2=1$ 消去 m 及 n.

4. 由四方程式
$p+q+r=0$, $a(qr+rp+pq)=2a-x$,
$apqr=y$, $qr=-1$ 消去 p,q,r.

5. 由方程式
$ax^2-2a^2x+1=0$, $a^2+x^2-3ax=0$ 消去 x.

6. 由方程式
$y+mx=a(1+m)$, $my-x=a(1-m)$ 消去 m.

7. 由方程式
$yz=a^2$, $zx=b^2$, $xy=c^2$, $x^2+y^2+z^2=d^2$ 消去 x, y, z.

8. 由方程式
$x(p+q)=y$, $p-q=k(1+pq)$, $xpq=a$ 消去 p 及 q.

9. 由方程式
$x-y=a$, $x^2-y^2=b^2$, $x^3-y^3=c^3$ 消去 x 及 y.

10. 由方程式
$x+y=a$, $x^2+y^2=b^2$, $x^4+y^4=c^4$ 消去 x 及 y.

11. 由四方程式
$x=by+cz+du$, $y=cz+du+ax$,
$z=du+ax+by$, $u=ax+by+cz$ 消去 x, y, z, u.

12. 由方程式
$x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=a^2$,
$x^3+y^3+z^3=b^3$, $x^5+y^5+z^5=c^5$
消去 x, y, z.

13. 由方程式

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=a,\quad \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}=b,\quad \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)=c$$ 消去x, y, z.

14. 由方程式

$$\frac{x^2(y+z)}{a^3}=\frac{y^2(z+x)}{b^3}=\frac{z^2(x+y)}{c^3}=\frac{xyz}{abc}=1$$ 消去 x, y, z。

15. 由方程式

$4(x^2+y^2)=ax+by,\ 2(x^2-y^2)=ax-by,\ xy=c^2$ 消去 x 及 y.

16. 由方程式

$(y+z)^2=4a^2yz,\ (z+x)^2=4b^2zx,\ (x+y)^2=4c^2xy$, 消去 x, y, z.

17. 由方程式

$(x+y-z)(z-y+z)=ayz,\quad (y+z-x)(y-z+x)=bzx,$

$(z+x-y)(z-x+y)=cxy$ 消去 x, y, z.

18. 由方程式

$$x^2y=a,\quad x(x+y)=b,\quad 2x+y=c$$

消去 x, y.

19. 試證 $(a+b+c)^3-4(b+c)(c+a)(a+b)+5abc=0$ 爲

$$ax^2+by^2+cz^2=ax+by+cz=yz+zx+xy=0$$

之消去式.

20. 由方程式

$$ax^2+by^2=ax+by=\frac{xy}{x+y}=c$$

消去 x 及 y.

21. 試證 $b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3=5a^2b^2c^2$ 爲

$$ax+yz=bc,\quad by+zx=ca,\quad cz+xy=ab,\quad xyz=abc$$

之消去式.

22. 由方程式

$$x^2+y^2+z^2=x+y+z=1,$$

$$\frac{a}{x}(x-p)=\frac{b}{y}(y-q)=\frac{c}{z}(z-r)$$

消去 x, y, z.

23. 用貝氏消去法由方程式

$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=0$ 及 $a'x^3+b'x^2y+c'xy^2+d'y^3=0$

消去 x 及 y.

第三十五章

方程式論

534. 在第九章中，吾人已證得二次方程式之根與係數間之若干必然關係．今探究適用於 n 次方程式之類似關係，然後再討論方程式之一般理論中之更基本之性質．

535. 令 $p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$ 爲 x 之 n 次有理整函數，以 $f(x)$ 表之；於是 $f(x)=0$ 爲 n 次有理整方程式之範式．以 p_0 遍除之，吾人可視

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

爲任何次有理整方程式之範式，而不減其一般性．

除有特別聲明者外，恆設 p_1，p_2，$\cdots\cdots\cdots p_n$ 等係數爲有理數．

536. 凡能令 $f(x)$ 爲零之 x 之值，名曰方程式 $f(x)=0$ 之根．在 §514 中，已證明以 $x-a$ 除 $f(x)$ 所得之餘數爲 $f(a)$；故若 $f(x)$ 能爲 $x-a$ 除盡，則 a 爲方程式 $f(x)=0$ 之一根．

537. 茲假定凡形似 $f(x)=0$ 之方程式，必有一實根或虛根．其證明見於方程式論之專書中，而非此處所能論及．

538. 凡 n 次方程式必有 n 根，且僅有 n 根.

以 $f(x)=0$ 表已知方程式，此處

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots+p_n.$$

方程式 $f(x)=0$ 必有一實根或虛根；以 a_1 表之；於是 $f(x)$ 可以 $x-a_1$ 除盡之，由是

$$f(x)=(x-a_1)\phi_1(x),$$

此處 $\phi_1(x)$ 爲 $n-1$ 次之有理整函數. 又方程式 $\phi_1(x)=0$ 必有一根，以 a_2 表之，於是 $\phi_1(x)$ 能以 $x-a_2$ 除盡之；由是

$$\phi_1(x)=(x-a_2)\phi_2(x),$$

此處 $\phi_2(x)$ 爲 $n-2$ 次之有理整函數.

因此 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\phi_2(x)$.

依此法進行，如 §309，得

$$f(x)=p_0(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots\cdots(x-a_n).$$

因當 x 爲 a_1, a_2, $a_3\cdots\cdots\cdots a_n$ 中之任一値時，$f(x)$ 之値爲零，故方程式 $f(x)=0$ 有 n 個根.

此方程式之根亦不能多於 n 個；蓋若 x 爲 a_1, a_2, $a_3,\cdots\cdots\cdots a_n$ 等値外之任一値，則右方諸因子皆不爲零，因之 $f(x)$ 亦不能爲零也.

在上之探討中，a_1, a_2, $a_3\cdots\cdots\cdots a_n$ 等數中可有若干相等；此時諸根雖非盡相異，但仍視爲有 n 個根.

539. 任意方程式之根與係數間之關係之研究.

設此方程式以

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots p_{n-1}x+p_n=0$$

表之，其根以 a, b, $c,\cdots\cdots\cdots k$ 表之；於是得恆等式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots\cdots(x-k);$$

故，用 §163 之表示法，得

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=x^n-S_1x^{n-1}+S_2x^{n-2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}S_{n-1}x+(-1)^nS_n.$$

等置此恒等式內 x 之同次冪之係數，

$$-p_1=S_1=\text{諸根之和};$$

$$p_2=S_2=\text{每次取二根之積之和};$$

$$-p_3=S_3=\text{每次取三根之積之和};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-1)^n p_n=S_n=\text{諸根之積}.$$

若 x^n 之係數爲 p_0，以 p_0 除各項，則此方程式變爲

$$x^n+\frac{p_1}{p_0}x^{n-1}+\frac{p_2}{p_0}x^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{p_{n-1}}{p_0}x+\frac{p_n}{p_0}=0,$$

而依 §521 之表示法，

$$\Sigma a=-\frac{p_1}{p_0},\Sigma ab=\frac{p_2}{p_0},\ \Sigma abc=-\frac{p_3}{p_0},\cdots\cdots\cdots,\ abc\cdots\cdots k=(-1)^n\frac{p_n}{p_0}.$$

例 1. 解方程式

$$x+ay+a^2z=a^3,\ x+by+b^2z=b^3,\ x+cy+c^2z=c^3.$$

由此三方程式，知 a，b，c 爲適合三次方程式

$$t^3-zt^2-yt-x=0$$

之 t 之值，故　$z=a+b+c$，$y=-(bc+ca+ab)$，$x=abc$.

例 2. 設 a, b, c 爲方程式 $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$ 之根，試以 a^2，b^2，c^2 爲根作一方程式.

所求方程式爲

$$(y-a^2)(y-b^2)(y-c^2)=0,$$

若 $y=x^2$，此即 $(x^2-a^2)(x^2-b^2)(x^2-c^2)=0$，

即是　$(x-a)(x-b)(x-c)(x+a)(x+b)(x+c)=0.$

但　$(x-a)(x-b)(x-c)=x^3+p_1x^2+p_2x+p_3$;

故　$(x+a)(x+b)(x+c)=x^3-p_1x^2+p_2x-p_3.$

故所求方程式爲

$$(x^3+p_1x^2+p_2x+p_3)(x^3-p_1x^2+p_2x-p_3)=0,$$

即　$(x^3+p_2x)^2-(p_1x^2+p_3)^2=0,$

即　$x^6+(2p_2-p_1^2)x^4+(p_2^2-2p_1p_3)x^2-p_3^2=0;$

以 y 代 x^2，得

$$y^3+(2p_2-p_1^2)y+({}^2p_2^2-2p_1p_3)y-p_3^2=0.$$

540. 因上節所得之關係式之個數與根之個數相等，學者或認為能用以解任何方程式，但稍加回想，即知並非如此．蓋設消去 a，b，c，………k 諸數中之任何 $n-1$ 數，而得一方程式，以決定其餘一未知數；則因諸數在各方程內為對稱，顯然將恆得一同係數之方程式；此即原方程式，不過以 a，b，c，………k 諸根中之一代 x 而已．

試以方程式

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

為例；令 a，b，c 為其根；於是

$$a+b+c=-p_1,$$
$$ab+ac+bc=p_2,$$
$$abc=-p_3.$$

以 a^2，$-a$，1 分乘此三方程式，並相加其結果，得

$$a^3=-p_1a^2-p_2a-p_3,$$
$$a^3+p_1a^2+p_2a+p_3=0,$$

此即原方程式，不過以 a 代 x 而已．

上述消去法甚為一般，對於任何次之方程式皆能用之．

541. 若已知二根或多根間之關係，則方程式之全解，有時可用 §539 証得之性質求得之．

例 1．解方程式 $4x^3-24x^2+23x+18=0$，已知其諸根成等差級數．

以 $a-b$，a，$a+b$ 表其三根；於是其三根之和為 $3a$；每次取二根之積之和為 $3a^2-b^2$；三根之連乘積為 $a(a^2-b^2)$；故得方程式

$$3a=6,\quad 3a^2-b^2=\frac{23}{4},\ a(a^2-b^2)=-\frac{9}{2};$$

由第一方程式，得 $a=2$，由第二，得 $b=\pm\frac{5}{2}$，因此諸值能適合第三方程式，此三方程式一致．故所求根為

$$-\tfrac{1}{2},\ 2,\ \tfrac{9}{2}.$$

例 2. 解方程式 $24x^3-14x^2-63x+45=0$，已知其有一根爲他一根之二倍.

以 a，$2a$，b 表其三根；於是

$$3a+b=\frac{7}{12},\quad 2a^2+3ab=-\frac{21}{8};\quad 2a^2b=-\frac{15}{8}.$$

解前兩方程式，得

$$8a^2-2a-3=0;$$

$$\therefore\quad a=\frac{3}{4}\text{ 或 }-\frac{1}{2};\quad b=-\frac{5}{3}\text{ 或 }\frac{25}{12}.$$

由嘗試法，知 $a=-\frac{1}{2}$，及 $b=\frac{25}{12}$ 並不適合第三方程式：故所得值爲

$$a=\frac{3}{4},\text{ 及 } b=-\frac{5}{3}.$$

故所求根爲 $\frac{3}{4}$，$\frac{3}{2}$，$-\frac{5}{3}$.

542. 方程式之根雖或不能求得，但用 §539 證得之關係，可求得根之對稱函數之值.

例 1. 求方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根之平方和及立方和.

以 a，b，c 表其三根；於是

$$a+b+c=p,\quad bc+ca+ab=q.$$

今
$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)$$
$$=p^2-2q.$$

又，在已知方程式內，以 a，b，c 代 x 而相加之；如是

$$a^3+b^3+c^3-p(a^2+b^2+c^2)+q(a+b+c)-3r=0;$$

$$\therefore\ a^3+b^3+c^3=p(p^2-2q)-pq+3r$$
$$=p^3-3pq+3r.$$

例 2. 設 a，b，c，d 爲方程式

$$x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$$

之根，試求 Σa^2b 之值.

因
$$a+b+c+d=-p\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=q\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$abc+abd+acd+bcd=-r\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由此三方程式，得

$$-pq=\Sigma a^2b+3(abc+abd+acd+bcd)$$

$$=\Sigma a^2b-3r;$$

$$\therefore\ \Sigma a^2b=3r-pq.$$

習 題 三十五.A.

作方程式，其根爲

1. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\pm\sqrt{3}$.　　2. 0,0, 2,2, -3, -3.

3. 2,2, -2, -2, 0, 5.　4. $a+b$, $a-b$, $-a+b$, $-a-b$, .

解下列各方程式:

5. $x^4-16x^3+86x^2-176x+105=0$，其二根爲 1 及 7.

6. $4x^3+16x^2-9x-36=0$，其中有二根之和爲零.

7. $4x^3+20x^2-23x+6=0$，有二根相等.

8. $3x^3-26x^2+52x-24=0$，其根成等比級數.

9. $2x^3-x^2-22x-24=0$，有二根之比爲 3:4.

10. $24x^3+46x^2+9x-9=0$，一根爲他一根之二倍.

11. $8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$，其中有二根絕對値等而符號異.

12. $54x^3-39x^2-26x+16=0$，其根成等比級數.

13. $32x^3-48x^2+22x-3=0$，其根成等差級數.

14. $6x^4-29x^3+40x^2-7x-12=0$，其中二根之積爲 2.

15. $x^4-2x^3-21x^2+22x+40=0$，其根成等差級數.

16. $27x^4-195x^3+494x^2-520x+192=0$，其根成等比級數.

17. $18x^3+81x^2+121x+60=0$，其一根爲他二根之和之半.

18. 設 a, b, c 爲方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根，求下兩式之值:

(1) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$.　　(2) $\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}+\frac{1}{a^2b^2}$.

19. 設 a, b, c 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根，求下兩式之值:

(1) $(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$.

(2) $(b+c)^{-1}+(c+a)^{-1}+(a+b)^{-1}$.

20. 求 $x^4+qx^2+rx+s=0$ 之根之平方和及立方和.

21. 求 $x^3+qx+r=0$ 之根之四次冪之和.

543. 實係數方程式內之虛根必成雙出現.

設 $f(x)=0$ 爲實係數方程式，且設其有一虛根 $a+ib$；玆證明 $a-ib$ 亦爲其一根.

在 $f(x)$ 之諸因子中，其與此兩根相當者爲

$$(x-a-ib)(x-a+ib),\ 即\ (x-a)^2+b^2.$$

設以 $(x-a)^2+b^2$ 除 $f(x)$；以 Q 表其商，而以 $Rx+R'$ 表其餘式；則

$$f(x)=Q\{(x-a)^2+b^2\}+Rx+R'.$$

在此恒等式內，令 $x=a+ib$，則由假設 $f(x)=0$；又 $(x-a)^2+b^2=0$；故 $R(a+ib)+R'=0$.

令其實數虛數二部分皆等於零，

$$Ra+R'=0,\quad Rb=0;$$

但根據假設 b 不爲零，

$$\therefore R=0\ 及\ R'=0.$$

故 $f(x)$ 可以 $(x-a)^2+b^2$ 除盡，即可以

$$(x-a-ib)(x-a+ib)$$

除盡之. 故 $x=a-ib$ 亦爲其一根.

544. 在前節中，已知各方程式 $f(x)=0$ 有一雙虛根 $a\pm ib$，則 $(x-a)^2+b^2$ 爲 $f(x)$ 之因子.

設 $a\pm ib$, $c\pm id$, $e\pm ig$, $\cdots$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之虛根，又設 $\phi(x)$ 爲與此等虛根相當之二次因子之積；則

$$\phi(x)=\{(x-a)^2+b^2\}\{(x-c)^2+d^2\}\{(x-e)^2+g^2\}\cdots$$

今當 x 爲實值時各因子均爲正，故當 x 爲實值時，$\phi(x)$ 之值恒爲正．

545. 與 §543 相同，吾人可証明在有理係數方程式中，無理根成雙存在；即若 $a+\sqrt{b}$ 爲其一根，則 $a-\sqrt{b}$ 亦爲其一根．

例 1. 解方程式 $6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$，已知其一根爲 $2-\sqrt{3}$.

因 $2-\sqrt{3}$ 爲其一根，故 $2+\sqrt{3}$ 亦必爲其一根，而與此二根相當之二次因子爲 x^2-4x+1.

又 $6x^4-13x^3-35x^2-x+3=(x^2-4x+1)(6x^2+11x+3)$；

故其他二根可從 $6x^2+11x+3=0$，即 $(3x+1)(2x+3)=0$ 求得之．

如是其四根爲 $-\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$.

例 2. 作四次有理係數方程式，已知其一根爲 $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$.

此處必以 $\sqrt{2}+\sqrt{-3}$, $\sqrt{2}-\sqrt{-3}$ 爲一對根，而以 $-\sqrt{2}+\sqrt{-3}$, $-\sqrt{2}-\sqrt{-3}$ 爲他一對根．

與第一對根相當之二次因子爲 $x^2-2\sqrt{2x+5}$，與第二對根相當之二次因子爲 $x^2+2\sqrt{2x+5}$. 故所求方程式爲

$$(x^2+2\sqrt{2x+5})(x^2-2\sqrt{2x+5})=0,$$

即 $$(x^2+5)^2-8x^2=0,$$

即 $$x^4+2x^2+25=0.$$

例 3. 試證方程式

$$\frac{A^2}{x-a}+\frac{B^2}{x-b}+\frac{C^2}{x-c}+\cdots\cdots+\frac{H^2}{x-h}=k$$

無虛根．

此方程式有虛根，令其一爲 $p+iq$，則 $p-iq$ 亦爲其一根；在原方程式中，以此兩值分別代 x，並從第一結果減第二結果．如是

$$q\left\{\frac{A^2}{(p-a)^2+q^2}+\frac{B^2}{(p-b)^2+q^2}+\frac{C^2}{(p-c)^2+q^2}+\cdots+\frac{H^2}{(p-h)^2+q^2}\right\}=0;$$

除 $q=0$ 外，此決不可能.

546. 定方程式之某數根之性質，恒無需解此方程式，例如，下舉數則之眞實，不難一目了然.

(*i*) 若係數皆正，則此方程式無正根；如方程式 $x^5+x^3+2x+1=0$ 不能有正根.

(*ii*) 若 x 之諸偶次羃同號，而諸奇次羃同具有相反之符號，則此方程式無負根；如方程式

$$x^7+x^5-2x^4+x^3-3x^2+7x-5=0$$

不能有負根.

(*iii*) 若方程式只含 x 之偶次羃，而係數又皆同號，則此方程式無實根；如方程式 $2x^8+3x^4+x^2+7=0$，除 $x=0$ 外，不能有實根.

(*iv*) 若方程式只含 x 之奇次羃，而係數又皆同號，則，除 $x=0$ 外，此方程式不能有實根；如方程式 $x^9+2x^5+3x^3+x=0$ 除 $x=0$ 外，不能有實根.

上舉數則，均包括於下節定理之內，此定理名曰笛卡兒符號法則.

547. 方程式 $f(x)=0$ 之正根之個數，不能多於 $f(x)$ 中之符號變換之次數，其負根之個數，不能多於 $f(-x)$ 中之符號變更之次數.

設一多項式中諸項之符號爲 $+ + - - + - - - + - + -$；今證明若以符號爲 $+ -$ 之二項式乘此多項式，其積中之符號之變更，至少較原多項式增加一次.

僅將此乘法之符號寫出，則

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
+ & + & - & - & + & - & - & - & + & - & + & - & \\
+ & - & & & & & & & & & & & \\
\hline
+ & + & - & - & + & - & - & - & + & - & + & - & \\
 & - & - & + & + & - & + & + & + & - & + & - & + \\
\hline
+ & \pm & - & \mp & + & - & \mp & \mp & + & - & + & - & +
\end{array}$$

觀此積可知

(*i*) 原多項式中之襲號變為歧號.

(*ii*) 一個歧號或一羣歧號之前後兩符號不相同.

(*iii*) 尾端新添一次符號變更.

姑就其變更次數最少之情形而論,即將一切歧號換作襲號;由(*ii*)可知無論取上號或下號,符號變更之次數相同;設取上號,則符號變更之次數,不能少於

$$+\ +\ -\ -\ +\ -\ -\ -\ +\ -\ +\ -\ +$$

中之變更次數,而此行符號與原多項式者相同,僅於尾端新添一符號變更而已.

設負根及虛根之相當因子業已相乘,則相當每一正根之每一因子 $x-a$ 至少增加一次符號變更;故方程式之正根之個數,不能多於其符號變更之次數.

又,方程式 $f(-x)=0$ 之根,同於 $f(x)=0$ 之根,而符號相反;故 $f(x)=0$ 之負根即 $f(-x)=0$ 之正根;但後者之正根之個數不能多於 $f(x)=0$ 中之符號變更之次數;亦即 $f(x)=0$ 之負根之個數不能多於 $f(-x)$ 中之符號變更之次數.

例. 考究方程式 $x^9+5x^8-x^3+7x+2=0$.

其中有兩次變號,故至多有兩個正根.

又 $f(-x)=-x^9+5x^8+x^3-7x+2$,其中有兩次變號,故原方程式至多有三負根,因此原方程式至少有四個虛根.

習 題 三十五. B.

解方程式:

1. $3x^4-10x^3+4x^2-x-6=0$,其一根為$\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$.

2. $6x^4-13x^3-35x^2-x+3=0$,其一根為 $2-\sqrt{3}$.

3. $x^4+4x^3+5x^2+2x-2=0$,其一根為 $-1+\sqrt{-1}$.

4. $x^4+4x^3+6x^2+4x+5=0$，其一根爲 $\sqrt{-1}$.

5. 解方程式 $x^5-x^4+8x^2-9x-15=0$，其一根爲 $\sqrt{3}$，又一根爲 $1-2\sqrt{-1}$.

作最低次之有理係數方程式，其一根爲

6. $\sqrt{3}+\sqrt{-2}$.　　7. $-\sqrt{-1}+\sqrt{5}$.

8. $-\sqrt{2}-\sqrt{-2}$.　　9. $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$.

10. 作方程式，其根爲$\pm4\sqrt{3}$，$5\pm2\sqrt{-1}$.

11. 作方程式，其根爲$1\pm\sqrt{-2}$，$2\pm\sqrt{-3}$.

12. 作八次有理係數方程式，其一根爲

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{-1}.$$

13. 求方程式 $3x^4+12x^2+5x-4=0$ 之諸根之性質.

14. 試證方程式 $2x^7-x^4+4x^3-5=0$ 至少有四個虛根.

15. 關於方程式

$$x^{10}-4x^6+x^4-2x-3=0$$

之根，可有如何之推斷?

16. 方程式 $x^9-x^5+x^4+x^2+1=0$ 之虛根至少有幾個.

17. 求方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 有下列兩種性質之條件:

(1) 異號之二等根;

(2) 成等比級數之根.

18. 設方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根成等差級數，試證 $p^3-4pq+8r=0$；又設其根式成等比級數，試證 $p^2s=r^2$.

19. 設方程式 $x^n-1=0$ 之根爲 $1, \alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots$，試證

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\cdots\cdots=n.$$

設 a, b, c 爲方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根，求下列各式之值:

20. Σa^2b^2.　　21. $(b+c)(c+a)(a+b)$.

22. $\Sigma\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)$.　　23. Σa^2b.

設 a, b, c, d，爲 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根，求下列各式之值:

24. Σa^2bc.　　25. Σa^4.

548. 當 $f(x)$ 爲 x 之有理整函數時，求 $f(x+h)$ 之值.

令 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n$;

於是 $f(x+h)=p_0(x+h)^n+p_1(x+h)^{n-1}+p_2(x+h)^{n-2}+\cdots\cdots$
$$+p_{n-1}(x+h)+p_n.$$

展開各項且依 h 之升冪排列之，得

$$\begin{aligned}&p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_{n-1}x+p_n\\ &\quad+h\{np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+(n-2)p_2x^{n-3}+\cdots+p_{n-1}\}\\ &\quad+\frac{h^2}{\lfloor 2}\{n(n-1)p_0x^{n-2}+(n-1)(n-2)p_1x^{n-3}+\cdots+2p_{n-2}\}\\ &\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\quad+\frac{h^n}{\lfloor n}\{n(n-1)(n-2)\cdots2.1p_0\}.\end{aligned}$$

此結果常寫爲

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x),$$

而函數 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, …… 等，名曰 $f(x)$ 之一級，二級，三級，……導來函數.

學者之已習初等微分者，當知以上 $f(x+h)$ 之展開式，不過爲泰勒氏定理之特例而已；故函數 $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ 等，可用微分法立即寫出之：如是從 $f(x)$ 以求 $f'(x)$，吾人將 $f(x)$ 中之各項以該項 x 之指數乘之，再將其指數減 1.

同理，由連續微分法求得 $f''(x)$, $f'''(x)$, ………等.

以 $-h$ 代 h，則得

$f(x-h)$
$$=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)-\frac{h^3}{\lfloor 3}f'''(x)+\cdots+(-1)^n\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(x).$$

函數 $f(x+h)$ 顯爲 x 及 h 之對稱函數；故

$$f(x+h)=f(h)+xf'(h)+\frac{x^2}{\lfloor 2}f''(h)+\cdots+\frac{x^n}{\lfloor n}f^n(h).$$

此處 $f'(h), f''(h), f'''(h), \cdots\cdots$ 等，表在連續導來函數 $f'(x)$, $f''(x), f'''(x), \cdots\cdots$ 中，以 h 代 x 所得之結果．

例．設 $f(x)=2x^4-x^3-2x^2+5x-1$，試求 $f(x+3)$ 之值．

此處 $f(x)=2x^4-x^3-2x^2+5x-1$，因此 $f(3)=131$；

$f'(x)=8x^3-3x^2-4x+5$，而 $f'(3)=182$；

$$\frac{f''(x)}{\underline{|2}}=12x^2-3x-2, \quad 而 \quad \frac{f''(3)}{\underline{|2}}=97;$$

$$\frac{f'''(x)}{\underline{|3}}=8x-1, \quad 而 \quad \frac{f'''(3)}{\underline{|3}}=23;$$

$$\frac{f^{iv}(x)}{\underline{|4}}=2.$$

如是 $f(x+3)=2x^4+23x^3+97x^2+182x+131$．

此計算用賀氏方法（*Horner's Process*）行之，較爲整齊，觀次節可知．

549． 令 $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$；

設 $x=y+h$，並設 $f(x)$ 於是變爲

$$q_0y^n+q_1y^{n-1}+q_2y^{n-2}+\cdots\cdots+q_{n-1}y+q_n.$$

今 $y=x-h$；故得恆等式

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=q_0(x-h)^n+q_1(x-h)^{n-1}+\cdots\cdots+q_{n-1}(x-h)+q_n;$$

故 q_n 爲以 $x-h$ 除 $f(x)$ 所得之餘數，又其商爲

$$q_0(x-h)^{n-1}+q_1(x-h)^{n-2}+\cdots\cdots+q_{n-1}.$$

同理 q_{n-1} 爲除上式以 $x-h$ 所得之餘式，其所得之商爲

$$q_0(x-h)^{n-2}+q_1(x-h)^{n-3}+\cdots\cdots+q_{n-2};$$

類推．如是 $q_n, q_{n-1}, q_{n-2}, \cdots$ 等，可用 §515所示之法則求得之．最後商爲 q_0，顯然等於 p_0．

例. 求在 $2x^4-x^3-2x^2+5x-1$ 中，以 $x+3$ 代 x 所得之結果.

以 $x-3$ 累次除之，

$$\begin{array}{rrrrrl}
2 & -1 & -2 & 5 & -1 & \\
 & 6 & 15 & 39 & 132 & \\
\hline
 & 5 & 13 & 44 & \multicolumn{2}{|l}{131=q_4} \\
 & 6 & 33 & 138 & \multicolumn{2}{|l}{} \\
\hline
 & 11 & 46 & \multicolumn{3}{|l}{182=q_3} \\
 & 6 & 51 & \multicolumn{3}{|l}{} \\
\hline
 & 17 & \multicolumn{4}{|l}{97=q_2} \\
 & 6 & \multicolumn{4}{|l}{} \\
\hline
 & \multicolumn{5}{l}{23=q_1}
\end{array}$$

或更簡寫爲

$$\begin{array}{lllll}
2 & -1 & -2 & 5 & -1 \\
2 & 5 & 13 & 44 & \mid 131 \\
2 & 11 & 46 & \mid 182 & \\
2 & 17 & \mid 97 & & \\
2 & \mid 23 & & & \\
2 & & & &
\end{array}$$

故其結果爲 $2x^4+23x^3+97x^2+182x+131$. 試與 §548 比較之. 故賀氏法對於數字計算，最爲有用.

550. 若變數 x 從 a 逐次變至 b，則 $f(x)$ 從 $f(a)$ 逐次變至 $f(b)$.

令 c 及 $c+h$ 爲 x 在 a 及 b 之間之任兩值，則

$$f(c+h)-f(c)=hf'(c)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(c)+\cdots+\frac{h^n}{\lfloor n}f^n(c);$$

令 h 爲充分之小，可令 $f(c+h)$ 及 $f(c)$ 之差小至任何程度. 故變數 x 每有一小變化，函數 $f(x)$ 亦有一相當之小變化，由是當 x 從 a 漸變至 b 時，$f(x)$ 亦從 $f(a)$ 漸變至 $f(b)$.

551. 有應特別注意者，吾人並未證明 $f(x)$ 恒從 $f(a)$ 漸增至 $f(b)$，或漸減至 $f(b)$. 但由一値變至他値，其間無猝然之變化，此有時遞增，亦有時遞減。

嫻習作函數曲線之學者，可繪出 $y=f(x)$ 之曲線，藉此看出 $f(x)$ 之變化情形.

552. 設 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之符號相反，則方程式 $f(x)=0$ 必有一根在 a 與 b 之間.

當 x 從 a 漸變至 b 時，函數 $f(x)$ 從 $f(a)$ 漸變至 $f(b)$，故必經過中間之一切値；但 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之符號不同，故必有一零値於其間；即

a 及 b 間有一值令 $f(x)=0$.

但此非謂 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間僅有一根，亦非謂若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 同號，則 $f(x)=0$ 在 a 及 b 之間無根也.

553. 凡奇次方程式至少有一實根，其符號與方程式之末項者相反.

在函數 $f(x)$ 中，依次以 $+\infty, 0, -\infty$ 代 x，則得

$$f(+\infty)=+\infty, f(0)=p_n, f(-\infty)=-\infty.$$

若 p_n 爲正，則 $f(x)=0$ 在 0 及 $-\infty$ 之間有一根，若 p_n 爲負，則 $f(x)=0$ 在 0 及 $+\infty$ 之間有一根.

554. 凡末項爲負之偶次方程式至少有兩實根，一爲正，一爲負.

蓋在此情形中，

$$f(+\infty)=+\infty, f(0)=p_n, f(-\infty)=+\infty;$$

但 p_n 爲負；故 $f(x)=0$ 在 0 及 $+\infty$ 之間有一根，在 0 及 $-\infty$ 之間有一根.

555. 若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 異號，則 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間有奇數個根；若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 同號，則 $f(x)=0$ 在 a 及 b 之間有偶數個根或無根.

設 a 大於 b，又設 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots k$ 表 $f(x)=0$ 在 a 及 b 間之一切根. 令 $\phi(x)$ 表以 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots(x-\kappa)$ 之積除 $f(x)$ 所得之商；則

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots(x-\kappa)\phi(x).$$

故

$$f(a)=(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\cdots(a-\kappa)\phi(a).$$

$$f(b)=(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)\cdots(b-\kappa)\phi(b).$$

今 $\phi(a)$ 及 $\phi(b)$ 必同號，否則方程式 $\phi(x)=0$，亦即 $f(x)=0$ 必有一根在 a 及 b 之間［§552］，此與假設不合. 故若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 之符號相反；則

$$(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)\cdots\cdots(a-\kappa),$$

及
$$(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)\cdots\cdots(b-\kappa)$$

之符號亦必相反．又第一式內各因子全爲正，第二式內之各因子全爲負；故因子之個數必爲奇數，即 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots \kappa$ 諸根之個數必爲奇數．

同理若 $f(a)$ 及 $f(b)$ 同號，則其因子之個數必爲偶數，在此情形中，若 $\alpha, \beta, \gamma \cdots\cdots \kappa$ 皆大於 a，或皆小於 b，則所示之條件亦可適合，故 $f(x)=0$ 不一定有根在 a, b 之間也．

556. 若 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之根，則

$$f(x)=p_0(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-k),$$

此處 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 諸數不必盡不相等．若其中等於 a 者有 r 個，等於 b 者有 s 個，等於 c 者有 t 個，$\cdots$，則

$$f(x)=p_0(x-a)^r(x-b)^s(x-c)^t\cdots\cdots$$

爲方便計，仍謂方程式 $f(x)=0$ 有 n 個根，其各等根以不同之根視之．

557. 設方程式 $f(x)=0$ 有 r 個根等於 a，則方程式 $f'(x)=0$ 有 $r-1$ 個根等於 a．

令 $\phi(x)$ 表以 $(x-a)^r$ 除 $f(x)$ 時所得之商，則

$$f(x)=(x-a)^r\phi(x).$$

以 $x+h$ 代 x；如是

$$f(x+h)=(x-a+h)^r\phi(x+h);$$

$$\therefore f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}f''(x)+\cdots$$

$$=\left\{(x-a)^r+r(x-a)^{r-1}h+\cdots\right\}\left\{\phi(x)+h\phi'(x)+\frac{h^2}{\lfloor 2}\phi''(x)+\cdots\right\}.$$

等置此恒等式中 h 之係數，得

$$f'(x)=r(x-a)^{r-1}\phi(x)+(x-a)^r\phi'(x).$$

如是 $f'(x)$ 含因子 $x-a$ 重複至 $r-1$ 次；即方程式 $f'(x)=0$ 有 $r-1$ 個根等於 a.

同法可證，若 $f(x)=0$ 有 s 個根等 b，則方程式 $f'(x)=0$ 有 $s-1$ 個根等於 b；類推.

558. 由以上證明，可知若 $f(x)$ 含有因子 $(x-a)^r$，則 $f'(x)$ 含有因子 $(x-a)^{r-1}$；如是 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 有一公因子，$(x-a)^{r-1}$.

故若 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 無公因子，則 $f(x)$ 無重復因子；因此方程式 $f(x)=0$ 之有無等根，全視 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之有無含 x 之公因子而定.

559. 就上節觀之，欲求方程式 $f(x)=0$ 之等根，必先求 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之公因子.

例 1. 解方程式 $x^4-11x^3+44x^2-76x+48=0$，此方程式有等根.

此處 $f(x)=x^4-11x^3+44x^2-76x+48$,

$$f'(x)=4x^3-33x^2+88x-76;$$

用常用方法求得 $f(x)$ 及 $f'(x)$ 之公因子爲 $x-2$；故 $(x-2)^2$ 爲 $f(x)$ 之因子；而

$$f(x)=(x-2)^2(x^2-7x+12)$$
$$=(x-2)^2(x-3)(x-4);$$

故其根爲 2,2,3,4.

例 2. 求方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 有兩個等根之條件.

在此例中，方程式 $f(x)=0$ 及 $f'(x)=0$，即

$$ax^3+3bx^2+3cx+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

$$ax^2+2bx+c=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

必有一公根，而所求條件將由消去二方程式間之 x 求得之.

將 (1) 及 (2) 結合，得

$$bx^2+2cx+d=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3).$$

從 (2) 及 (3)，得

$$\frac{x^2}{2(bd-c^2)}=\frac{x}{bc-ad}=\frac{1}{2(ac-b^2)};$$

故所求條件爲

$$(bc-ad)^2=4(ac-b^2)(bd-c^2).$$

560. 吾人已知，若方程式 $f(x)=0$ 有 r 個根等於 a，則方程式 $f'(x)=0$ 有 $r-1$ 個根等於 a. 但 $f''(x)$ 爲 $f'(x)$ 之一次導來函數，故方程式 $f''(x)=0$ 必有 $r-2$ 個根等於 a；同理 $f'''(x)=0$ 必有 $r-3$ 根等於 a；類推. 用此種觀察法求 $f(x)=0$ 之等根，有時較 §559 之方法尤爲簡便.

561. 設 $a, b, c, \cdots\cdots k$ 爲方程式 $f(x)=0$ 之根，求證

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\cdots+\frac{f(x)}{x-k}.$$

已知 $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-k)$；

以 $x+h$ 代 x，得

$$f(x+h)=(x-a+h)(x-b+h)(x-c+h)\cdots(x-k+h)\cdots(1).$$

但 $$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{\underline{|2}}f''(x)+\cdots;$$

由是 $f'(x)$ 等於 (1) 式右方之 h 之係數；故按照 §163，

$$f'(x)=(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-k)+(x-a)(x-c)\cdots\cdots(x-k)+\cdots;$$

即 $$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-k}.$$

562. 用上節結果，可求方程式之諸根之任何次冪之和.

例. 設 S_k 表方程式 $x^5+px^4+qx^2+t=0$ 之根之 k 次冪之和，求 S_4, S_6, 及 S_{-4} 之值.

令 $$f(x)=x^5+px^4+qx^2+t,$$

則 $$f'(x)=5x^4+4px^3+2qx.$$

令 $\dfrac{f(x)}{x-a}$

$$=x^4+(a+p)x^3+(a^2+ap)x^2+(a^3+a^2p+q)x+a^4+a^3p+aq;$$

而 $\dfrac{f(x)}{x-b}$, $\dfrac{f(x)}{x-c}$, $\dfrac{f(x)}{x-d}$, $\dfrac{f(x)}{x-e}$ 諸式可類推得之.

故由加法，

$$5x^4+4px^3+2qx=5x^4+(S_1+5p)x^3+(S_2+pS_1)^2$$
$$+(S_3+pS_2+5q)x+(S_4+pS_3+qS_1).$$

由等置係數法，

$$S_1+5p=4p,\ \text{故}\ S_1=-p;$$
$$S_2+pS_1=0,\quad \text{故}\ S_2=p^2;$$
$$S_3+pS_2+5q=2q,\quad \text{故}\ S_3=-p^3-3q;$$
$$S_4+pS_3+qS_1=0,\quad \text{故}\ S_4=p^4+4pq.$$

欲求 S_k 當 k 爲他值時之值，可施算如下：

以 x^{k-5} 乘已知方程式，得

$$x^k+px^{k-1}+qx^{k-3}+tx^{k-5}=0.$$

依次以 a，b，c，d，e 諸值代 x，得

$$S_k+pS_{k-1}+qS_{k-3}+tS_{k-5}=0.$$

令 $k=5$；如是　$S_5+pS_4+qS_2+5t=0$，

由是　$S_5=-p^5-5p^2q-5t.$

令 $k=6$；如是　$S_6+pS_5+qS_3+tS_1=0$，

由是　$S_6=p^6+6p^3q+3q^2+6pt.$

欲求 S_{-4} 之值，依次令 $k=4$，3，2，1，則

$$S_4+pS_3+qS_1+tS_{-1}=0,\ \text{故}\ S_{-1}=0;$$
$$S_3+pS_2+5q+tS_{-2}=0,\ \text{故}\ S_{-2}=-\frac{2q}{t};$$
$$S_2+pS_1+qS_{-1}+tS_{-3}=0,\ \text{故}\ S_{-3}=0;$$
$$S_1+5p+qS_{-2}+tS_{-4}=0,\ \text{故}\ S_{-4}=\frac{2q^2}{t^2}-\frac{4p}{t}.$$

563. 若爲數字係數，則可如下例求之.

例. 求 $x^3-2x^2+x-1=0$ 之諸根之四次冪之和.

此處　$f(x)=x^3-2x^2+x-1$，

$$f'(x)=3x^2-4x+1.$$

又
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}$$
$$=\Sigma\left(\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{a^2}{x^3}+\frac{a^3}{x^4}+\cdots\right)$$
$$=\frac{3}{x}+\frac{S_1}{x^2}+\frac{S_2}{x^3}+\frac{S_3}{x^4}+\cdots;$$

故 S_4 等於以 $f(x)$ 除 $f'(x)$ 所得之商中之 $\frac{1}{x^5}$ 之係數，此最宜於用綜合除法求之：

$$\begin{array}{r|cccccccc}
1 & 3 & -4 & +1 & & & & \\
2 & & 6 & -3 & +3 & & & \\
-1 & & & 4 & -2 & +2 & & \\
1 & & & & 4 & -2 & +2 & \\
 & & & & & 10 & -5 & +5 \\
\hline
 & 3 & +2 & +2 & +5 & +10 & +\cdots\cdots &
\end{array}$$

其商為 $$\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{5}{x^4}+\frac{10}{x^5}+\cdots\cdots;$$

$$\therefore \quad S_4=10.$$

習 題 三十五.C.

1. 設 $f(x)=x^4+10x^3+39x^2+76x+65$，求 $f(x-4)$ 之值.
2. 設 $f(x)=x^4-12x^3+17x^2-9x+7$，求 $f(x+3)$ 之值.
3. 設 $f(x)=2x^4-13x^2+10x-19$，求 $f(x+1)$ 之值.
4. 設 $f(x)=x^4+16x^3+72x^2+64x-129$，求 $f(x-4)$ 之值.
5. 設 $f(x)=ax^6+bx^5+cx+d$，求 $f(x+h)-f(x-h)$ 之值
6. 試證方程式 $10x^3-17x^2+x+6=0$ 在 0 及 -1 間有一根.
7. 試證方程式 $x^4-5x^3+3x^2+35x-70=0$ 在 2 及 3 間有一根，在 -2 及 -3 間有一根.
8. 試證方程式 $x^4-12x^2+12x-3=0$ 在 -3 及 -4 間有一根，在 2 及 3 間有一根.
9. 試證方程式 $x^5+5x^4-20x^2-19x-2=0$ 在 2 及 3 間有一根，在 -4 及 -5 間有一根.

解下列有等根之方程式：

10. $x^4-9x^2+4x+12=0$. 11. $x^4-6x^3+12x^2-10x+3=0$.
12. $x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0$.
13. $x^5-x^3+4x^2-3x+2=0$. 14. $8x^4+4x^3-18x^2+11x-2=0$.
15. $x^6-3x^5+6x^3-3x^2-3x+2=0$.
16. $x^6-2x^5-4x^4+12x^3-3x^2-18x+18=0$.
17. $x^4-(a+b)x^3-a(a-b)x^2+a^2(a+b)x-a^3b=0$.

解下列有公根之各對方程式:

18. $2x^4-2x^3+x^2+3x-6=0$, $4x^4-2x^3+3x-9=0$.

19. $4x^4-12x^3-x^2-15x=0$, $6x^4+13x^3-4x^2-15x=0$.

20. 求 $x^n-px^2+r=0$ 有等根之條件.

21. 試證 $x^4+qx^2+s=0$ 不能有三個等根.

22. 求 b 與 a 之比，俾方程式

$$ax^2+bx+a=0,\ 及\ x^3-2x^2+2x-1=0$$

可有 (1) 一個公根，(2) 兩個公根.

23. 試證方程式

$$x^n+nx^{n-1}+n(n-1)x^{n-2}+\cdots\cdots+\lfloor n=0$$

不能有等根.

24. 設方程式 $x^5-10a^3x^2+b^4x+c^5=0$ 有三個等根，試證 $ab^4-9a^5+c^5=0$.

25. 設方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ 有三個等根，試證其各等於$\dfrac{6c-ab}{3a^2-8b}$.

26. 設 $x^5+qx^3+rx^2+t=0$ 有兩個等根，試證其一根爲二次方程式 $15rx^2-6q^2x+25t-4qr=0$ 之根.

27. 求方程式 $x^3-x-1=0$ 之 S_6 之值.

28. 求方程式 $x^4-x^3-7x^2+x+6=0$ 之 S_4 及 S_6 之值.

方程式之變換

564. 對於一方程式之研究，有時將其變換爲另一方程式，其根與原方程式之根具有某指定之關係，能令其手續特別化簡；此在解三次方程式時，尤見便利.

565. 將一方程式變換爲另一方程式，其根等於原方程式之根變號.

設 $f(x)=0$ 爲原方程式.

以 $-y$ 代 x；則方程式 $f(x)=0$ 之變號之每根必適合於方程式 $f(-y)=0$，故所求方程式爲 $f(-y)=0$.

設原方程式爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0,$$

則所求方程式，顯即

$$p_0y^n-p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}-\cdots+(-1)^{n-1}p_{n-1}y+(-1)^np_n=0,$$

故在原方程式中，從二項起，每隔一項變號，即得所求之方程式.

566. 將一方程式變換爲另一方程式，其根等於原方程之根以已知數乘之.

設 $f(x)=0$ 爲原方程式，q 爲已知數.

令 $y=qx$，則 $x=\dfrac{y}{q}$，而所求方程式爲 $f\left(\dfrac{y}{q}\right)=0$.

此種變換之主要應用，乃將分係數方程式化爲整係數方程式.

例. 從下方程式消去分數係數

$$2x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{8}x+\frac{3}{16}=0.$$

令 $x=\dfrac{y}{q}$，並以 q^3 乘各項；得

$$2y^3-\frac{3}{2}qy^2-\frac{1}{8}q^2y+\frac{3}{16}q^3=0.$$

令 $q=4$，則一切項變爲整數，再以 2 除之，得

$$y^3-3y^2-y+6=0.$$

567. 將一方程式變換爲另一方程式，其根爲原方程式之根之倒數.

設 $f(x)=0$ 爲原方程式；令 $y=\dfrac{1}{x}$，因之 $x=\dfrac{1}{y}$；故所求方程式爲 $f\left(\dfrac{1}{y}\right)=0$.

此種變換之主要用途，其一爲求根之負冪之對稱函數之值.

例 1. 設 a, b, c 為方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ 之根，求

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\text{ 之值.}$$

以 $\frac{1}{y}$ 代 x，乘以 y^3，並變其所有符號；則所得方程式

$$ry^3-qy^2+py-1=0$$

之根必為 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$；

故 $\Sigma\frac{1}{a}=\frac{q}{r}, \quad \Sigma\frac{1}{ab}=\frac{p}{r};$

$$\therefore\ \Sigma\frac{1}{a^2}=\frac{q^2-2pr}{r^2}.$$

例 2. 設 a, b, c 為 $x^3+2x^2-3x-1=0$ 之根，試求 $a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}$ 之值.

以 $\frac{1}{y}$ 代 x，則得方程式

$$y^3+3y^2-2y-1=0;$$

而已知式等於此方程式之 S_3 之值.

此處 $S_1=-3;$

$$S_2=(-3)^2-2(-2)=13;$$

$$S_3+3S_2-2S_1-3=0;$$

故得 $S_3=-42.$

568. 若方程式在以 $\frac{1}{x}$ 代 x 後不變，則此方程式名曰倒數方程式 (*Reciprocal equation*).

設原方程式為

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-2}x^2+p_{n-1}x+p_n=0,$$

以 $\frac{1}{x}$ 代 x，去分數後得方程式

$$p_nx^n+p_{n-1}x^{n-1}+p_{n-2}x^{n-2}+\cdots\cdots+p_2x^2+p_1x+1=0.$$

若此二方程式相同，必須

$$p_1=\frac{p_{n-1}}{p_n},\ p_2=\frac{p_{n-2}}{p_n},\cdots\cdots p_{n-2}=\frac{p_2}{p_n},\ p_{n-1}=\frac{p_1}{p_n},\ p_n=\frac{1}{p_n};$$

從末式得 $p_n=\pm1$，如是得兩種倒數方程式.

(i) 若 $p_n=1$，則

$$p_1=p_{n-1},\ p_2=p_{n-2},\ p_3=p_{n-3},\cdots\cdots;$$

即距首尾兩端等遠之每兩項之係數相等.

(ii) 若 $p_n=-1$，則

$$p_1=-p_{n-1},\ p_2=-p_{n-2},\ p_3=-p_{n-3},\cdots\cdots;$$

故若此方程式爲 $2m$ 次，則 $p_m=-p_m$，即 $p_m=0$. 在此種情形中，距首尾兩端等遠之每兩項之係數，絕對値同而符號相反. 若此方程爲偶次，則必缺中項.

569. 設 $f(x)=0$ 爲一倒數方程式.

若 $f(x)=0$ 屬於第一種而爲奇次，則必有一根 -1；因此 $f(x)$ 可以 $x+1$ 除盡之. 設其商爲 $\phi(x)$，則 $\phi(x)=0$ 爲第一種之偶次倒數方程式.

若 $f(x)=0$ 屬於第二種而爲奇次，則必有一根 $+1$；此時 $f(x)$ 可爲 $x-1$ 除盡之，同前，$\phi(x)=0$ 爲第一種之偶次倒數方程式.

若 $f(x)=0$ 屬於第二類而爲偶次，則必有 $+1$ 及 -1 之兩根；此時 $f(x)$ 可以 x^2-1 除盡之，同前，$\phi(x)=0$ 爲第一種之偶次倒數方程式.

故凡倒數方程式均爲偶數次且其末項爲正，否則亦能變換爲此種形式. 故此種形式可視爲倒數方程式之標準式.

570. 標準倒數方程式可變換爲另一方程式，其次數爲原次數之半.

設此方程式爲

$$ax^{2m}+bx^{2m-1}+cx^{2m-2}+\cdots\cdots+kx^m+\cdots\cdots$$
$$+cx^2+bx+a=0;$$

以 x^m 除之，重列各項，得

$$a\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)+b\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+c\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)+\cdots\cdots+k=0.$$

今　$$x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}}=\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right);$$

由是以 z 代 $x+\frac{1}{x}$，而依次予 p 以 1，2，3，……等值，得

$$x^2+\frac{1}{x^2}=z^2-2,$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=z(z^2-2)-z=z^3-3z;$$

$$x^4+\frac{1}{x^4}=z(z^3-3z)-(z^2-2)=z^4-4z^2+2;$$

餘倣此；一般言之，$x^m+\frac{1}{x^m}$ 爲 z 之 m 次，故此 z 方程式爲 m 次.

571. 作一方程式，其根爲已知方程式之根之平方.

設 $f(x)=0$ 爲已知方程式；令 $y=x^2$，則 $x=\sqrt{y}$；故所求方程式爲 $f(\sqrt{y})=0$.

例．作一方程式，其根爲方程式

$$x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$$

之根之平方.

令 $x=\sqrt{y}$，且移項得

$$(y+p_2)\sqrt{y}=-(p_1y+p_3);$$

由是　$$(y^2+2p_2y+p_2^2)y=p_1^2y^2+2p_1p_3y+p_3^2,$$

即　$$y^3+(2p_2-p_1^2)y^2+(p_2^2-2p_1p_3)y-p_3^2=0.$$

試與 §539，例 2 比較之.

572. 將已知方程式變換爲另一方程式，其根較已知方程式之根大一已知數.

設 $f(x)=0$ 爲已知方程式，h 爲已知數；令 $y=x+h$，因之 $x=y-h$；故所求方程式爲 $f(y-h)=0$.

同理，$f(y+h)=0$ 爲一方程式，其根較 $f(x)=0$ 之根小 h.

例．作一方程式，其根較方程式

$$4x^4+32x^3+83x^2+76x+21=0$$

之根大 2．

所求之方程式，可於原方程式中以 $x-2$ 代 x 得之；由是用賀氏法，以 $x+2$ 爲除式計算如次：

$$\begin{array}{rrrrr}
4 & 32 & 83 & 76 & 21 \\
4 & 24 & 35 & 6 & |\,9 \\
4 & 16 & 3 & |\,0 & \\
4 & 8 & |\,-13 & & \\
4 & 0 & & & \\
4 & & & &
\end{array}$$

故所求方程式爲

$$4x^4-13x^2+9=0, \text{ 即 } (4x^2-9)(x^2-1)=0.$$

此方程式之根爲 $+\frac{3}{2}$，$-\frac{3}{2}$，$+1, -1$；故原方程式之根爲

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{7}{2},\ -1, -3.$$

573. 上節代入法之主要用途，在消去方程式中之某指定項．

設原方程式爲

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0;$$

於是若 $y=x-h$，則得新方程式

$$p_0(y+h)^n+p_1(y+h)^{n-1}+p_2(y+h)^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0,$$

依照 y 之降冪排列之，此方程式變爲

$$p_0y^n+(np_0h+p_1)y^{n-1}+\left\{\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}p_0h^2+(n-1)p_1h+p_2\right\}y^{n-2}+\cdots=0.$$

若消去第二項，則令 $np_0h+p_1=0$，因此 $h=-\frac{p_1}{np_0}$；若消去第三項．令

$$\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}p_0h^2+(n-1)p_1h+p_2=0,$$

如此得一二次方程式以求 x；同法可消去任何其他指定項．

照下例施算，有時更爲簡便．

例． 消去方程式

$$px^3+qx^2+rx+s=0$$

之第二項．

令 α, β, γ 爲其根，則 $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{q}{p}$． 於是，若每根增大$\frac{q}{3p}$，則在新方程式中，諸根之和必等於$-\frac{q}{p}+\frac{q}{p}$；即第二項之係數爲零．故所求之方程式，可在原方程式中，以 $x-\frac{q}{3p}$代 x 求得之．

574． 根據方程式 $f(x)=0$ 作一方程式，其根與此方程式之根間具有某種指定之關係．

令 y 爲新方程式之一根，而以 $\phi(x,y)=0$ 表指定之關係；於是所求之新方程式，可由先從方程式 $\phi(x, y)=0$ 求出表 x 之 y 之函數，將其代入 $f(x)=0$ 求得之；或由 $f(x)=0$ 及 $\phi(x,y)=0$ 消去 x 求得之．

例 1． 設 a, b, c 爲方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之根；作一方程式，其根爲

$$a-\frac{1}{bc}, b-\frac{1}{ca}, c-\frac{1}{ab}.$$

當原方程式中 $x=a$ 時，新方程式中 $y=a-\frac{1}{bc}$．

但
$$a-\frac{1}{bc}=a-\frac{a}{abc}=a+\frac{a}{r};$$

故新方程式可由代入

$$y=x+\frac{x}{r}, \text{ 或 } x=\frac{ry}{1+r}$$

求得之，故所求方程式爲

$$r^2y^3+pr(1+r)y^2+q(1+r)^2y+(1+r)^3=0.$$

例 2． 作一方程式，其根爲三次方程式

$$x^3+qx+r=0$$

之根之差之平方．

令 a, b, c 爲原方程式之根；則所求方程式之根爲 $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$．

今 $(b-c)^2=b^2+c^2-2bc=a^2+b^2+c^2-a^2-\dfrac{2abc}{a}$

$$=(a+b+c)^2-2(bc+ca+ab)-a^2-\frac{2abc}{a}$$

$$=-2q-a^2+\frac{2r}{a};$$

又當已知方程式中 $x=a$ 時，所求方程式中 $y=(b-c)^2$；

$$\therefore\ y=-2q-x^2+\frac{2r}{x}.$$

故須由方程式 $x^3+qx+r=0$ 及 $x^3+(2q+y)x-2r=0$ 消去 x.

由減法，$(q+y)x=3r$； 即 $x=\dfrac{3x}{q+y}$.

代入而化簡之，得

$$y^3+6qy^2+9q^2y+27r^2+4q^3=0.$$

推論. 設 a，b，c 皆爲實數，則 $(b-c)^2$，$(c-a)^2$，$(a-b)^2$ 均爲正；因此 $27r^2+4q^3$ 爲負.

故欲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根皆爲實根，必須 $27r^2+4q^3$ 爲負數，即必須 $\left(\dfrac{r}{2}\right)^2+\left(\dfrac{q}{3}\right)^3$ 爲負數.

若 $27r^2+4q^3=0$，則新方程式必有一根爲零，因此原方程式有二等根.

若 $27r^2+4q^3$ 爲正，則新方程式有一負根 [§553]，因之原方程式必有二虛根，蓋非此新方程式不能有一負根也.

習 題 三十五.D.

1. 將 $x^3-4x^2+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{1}{9}=0$ 變換爲另一方程式，其係數爲整數，其首項之係數爲 1.

2. 將 $3x^4-5x^3+x^2-x+1=0$ 變換爲另一方程式，其首項之係數爲 1.

解下列各方程式:

3. $2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$.

4. $x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$.

5. $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.

6. $4x^6-24x^5+57x^4-73x^3+57x^2-24x+4=0$.

7.　方程式 $3x^3-22x^2+48x-32=0$ 之根成調和級數，試解之.

8.　方程式 $x^3-11x^2+36x-36=0$ 之根成調和級數，試解之.

9.　方程式 $x^3-ax^2+x-b=0$ 之根成調和級數，試證其中項之根爲 $3b$.

10.　方程式 $40x^4-22x^3-21x^2+2x+1=0$ 之根成調和級數，試解之.

消去下列各方程式之第二項:

11.　$x^3-6x^2+10x-3=0$.

12.　$x^4+4x^3+2x^2-4x-2=0$.

13.　$x^5+5x^4+3x^3+x^2+x-1=0$.

14.　$x^6-12x^5+3x^2-17x+300=0$.

15.　將 $x^3-\frac{x}{4}-\frac{3}{4}=0$ 變換爲另一方程式，其根較原方程式之相當根大$\frac{3}{2}$.

16.　將方程式 $x^5-4x^4+3x^2-4x+6=0$ 之根減 3.

17.　作一方程式，其每根較 $x^3-5x^2+6x-3=0$ 之一根小 1.

18.　作一方程式，其根爲 $x^4+x^3+2x^2+x+1=0$ 之根之平方.

19.　作一方程式，其根爲 $x^3+3x^2+2=0$ 之根之立方.

設 a, b, c 爲 $x^3+qx+r=0$ 之根，作一方程式，其根爲

20.　ka^{-1}, kb^{-1}, kc^{-1}.　　21.　b^2c^2, c^2a^2, a^2b^2.

22.　$\frac{b+c}{a^2}$. $\frac{c+a}{b^2}$, $\frac{a+b}{c^2}$.　　23.　$bc+\frac{1}{a}$, $ca+\frac{1}{b}$, $ab+\frac{1}{c}$.

24.　$a(b+c)$, $b(c+a)$, $c(a+b)$.　　25.　a^3, b^3, c^3.

26.　$\frac{b}{c}+\frac{c}{b}$, $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$.

27.　試證 $x^3+ax^2+bx+ab=0$ 之根之立方由方程式 $x^3+a^3x^2+b^3x+a^3b^3=0$ 之根求得之.

28.　解方程式 $x^5-5x^4-5x^3+25x^2+4x-20=0$，其根之形式爲 $a,-a$, $b,-b,c$.

29.　設 $x^3+3px^2+3qx+r=0$ 之根成調和級數. 試証

$$2q^3=r(3pq-r).$$

三次方程式

575. 三次方程式之普通形式爲

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$

但由 §573 所示，此方程式可化爲較簡之形式

$$x^3+qx+r=0,$$

吾人即以此爲三次方程式之標準形式.

576. 解方程式 $x^3+qx+r=0$.

令 $x=y+z$；則

$$x^3=y^3+z^3+3yz(y+z)=y^3+z^3+3yzx,$$

而已知方程式變爲

$$y^3+z^3+(3pz+q)x+r=0.$$

令 y,z 爲任意二量，其和等於所論方程式之一根，如再設其適合方程式 $3yz+q=0$，則其値完全可定矣. 如是得

$$y^3+z^3=-r,\quad y^3z^3=-\frac{q^3}{27};$$

由是 y^3 及 z^3 爲二次方程式

$$t^2+rt-\frac{q^3}{27}=0$$

之兩根. 解此方程式，並令

$$y^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$z^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

則由 $x=y+z$ 之關係，求 x 之値，得

$$x=\left\{-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}\right\}^{\frac{1}{3}}.$$

上解法通稱卡登氏解法 (*Cordan's solution*)，因彼於 1545 年首先在 *Ars Magna* 中刊布也. 卡氏得自太爾太格里亞 (*Tartaglia*)；但此解法似乎原出於 *Scipio Ferreo*，時約在 1505 年. 在 *Burnside* 及 *Panton* 二氏方程式論之末，對此有極饒興趣之記載.

577. 根據 §110，上節中 (1) 及 (2) 兩方程式之右方之數各有三個立方根，故 x 似有九值，其實不然．蓋因 $yz=-\frac{q}{3}$，其立方根以對取，俾每對之積必爲有理數．故若 y，z 表滿足此條件之任一對立方根之值，則其唯一之對值爲 ωy，$\omega^2 z$ 及 $\omega^2 y$，ωz，此處 ω，ω^2 表 1 之兩虛立方根．故方程式之根爲

$$y+z,\ \omega y+\omega^2 z,\ \omega^2 y+\omega z.$$

例．解方程式 $x^3-15x=126$．

以 $y+z$ 代 x，得

$$y^3+z^3+(3yz-15)x=126;$$

令 $$3yz-15=0,$$

則 $$y^3+z^3=126;$$

又 $$y^3z^3=125;$$

故 y^3，z^3 爲方程式 $t^2-126t+125=0$ 之根．

$$\therefore\quad y^3=125,\ z^3=1;$$

$$\therefore\quad y=5,\ z=1.$$

如是 $$y+z=5+1=6;$$

$$\omega y+\omega^2 z=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\cdot 5+\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

$$=-3+2\sqrt{-3};$$

$$\omega^2 y+\omega z=-3-2\sqrt{-3};$$

而其根爲 $$6,\quad -3+2\sqrt{-3},\ -3-2\sqrt{-3}.$$

578. 欲知在 §576 中，何以 x 似有九值，應注意 y 及 z 乃從方程式 $y^3+z^3+r=0$，及 $yz=-\frac{q}{3}$ 求得者；但於求解時，第二方程式變爲 $y^3z^3=-\frac{q^3}{27}$，此如 $yz=-\frac{\omega q}{3}$，或 $yz=-\frac{\omega^2 q}{3}$ 亦應適合；故 x 之其他六根之值爲三次方程式

$$x^3+\omega qx+r=0,\ 及\ x^3+\omega^2 qx+r=0$$

之根．

579. 玆更精密考究方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根．

(i) 若$\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$為正，則 y^3 及 z^3 皆為實數；令 y 及 z 表其算術立方根，則方程式之根為

$$y+z,\quad \omega y+\omega^2 z,\ \omega^2 y+\omega z.$$

其第一根為實，又代入 ω 及 ω^2 之值，則他二根為

$$-\frac{y+z}{2}+\frac{y-z}{2}\sqrt{-3},\ -\frac{y+z}{2}-\frac{y-z}{2}\sqrt{-3}.$$

(ii). 若 $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$為零，則 $y^3=z^3$；在此例中 $y=z$，而三根變為

$2y$，$y(\omega+\omega^2)$，$y(\omega+\omega^2)$，即 $2y$，$-y$，$-y$.

(iii). 若 $\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}$為負，則 y^3 及 z^3 為 $a+ib$ 及 $a-ib$ 之形式之虛式；設其立方根為 $m+in$ 及 $m-in$；則此三次方程式之根變為

$$m+in+m-in,\qquad \text{即 } 2m;$$

$$(m+in)\omega+(m-in)\omega^2,\quad \text{即} -m-n\sqrt{3};$$

$$(m+in)\omega^2+(m-in)\omega,\quad \text{即} -m+n\sqrt{3};$$

此三根皆為實根．但因求虛數之立方根之確值，尚乏一般之算術或代數方法［比較 §89］，故當三次方程式之諸根為不相等之實根時，§576之解法，殊少實用．

此例有時名曰卡登氏解法之不可約例．

580. 上舉不可約例之解，可藉助三角法補足之如次．令其解為

$$x=(a+ib)^{\frac{1}{3}}+(a-ib)^{\frac{1}{3}};$$

令 $a=r\cos\theta$，$b=r\sin\theta$，由是 $r^2=a^2+b^2$，$\tan\theta=\frac{b}{a}$；於是

$$(a+ib)^{\frac{1}{3}}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{\frac{1}{3}}.$$

今由馬氏（*Moivre*）定理，此式之三値爲

$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta}{3}+i\sin\frac{\theta}{3}\right),\quad r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right),$$

及
$$r^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right),$$

此處 $r^{\frac{1}{3}}$ 表 r 之算術立方根，θ 表由方程式 $\tan\theta=\frac{b}{a}$ 求得之最小之角．

改變上結果中 i 之符號，即得 $(a-ib)^{\frac{1}{3}}$ 之三値，故所求之三根爲

$$2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3},\quad 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3},\quad 2r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}.$$

四次方程式

581． 吾人兹舉四次方程式之普通解法數種，加以簡單之討論．在此等方法中，均須先解一輔助三次方程式；故知此普通解法，非可由數字方程式之解答改作而成．此與三次方程式中正相同也．

582． 四次方程式之解法，首由卞登氏之弟子范蘭理氏（*Ferrari*）得如次：

設此方程式爲

$$x^4+2px^3+qx^2+2rx+s=0;$$

兩邊各加 $(ax+b)^2$，此處 a 及 b 之値須能令左邊爲完全平方；於是

$$x^4+2px^3+(q+a^2)x^2+2(r+ab)x+s+b^2=(ax+b)^2.$$

設方程式之左邊等於 $(x^2+px+k)^2$，則由比較係數，得

$$p^2+2k=q+a^2,\quad pk=r+ab,\quad k^2=s+b^2;$$

由此三方程式消去 a 及 b，得

$$(pk-r)^2=(2k+p^2-q)(k^2-s),$$

即
$$2k^3-qk^2+2(pr-s)k-p^2s+qs-r^2=0.$$

由此三次方程式，恆能求得 k 之一實根 [§553]；如是 a 及 b 可得而知矣．又

$$(x^2+px+k)^2=(ax+b)^2;$$

$$\therefore\ x^2+px+k=\pm(ax+b);$$

而 x 之值可得自二次方程式

$$x^2+(p-a)x+(k-b)=0,$$

$$x^2+(p+a)x+(k+b)=0.$$

例． 解方程式

$$x^4-2x^3-5x^2+10x-3=0.$$

兩邊各加 $a^2x^2+2abx+b^2$，並假定

$$x^4-2x^3+(a^2-5)x^2+2(ab+5)x+b^2-3=(x^2-x+k)^2;$$

於是由等置係數得

$$a^2=2k+6,\quad ab=-k-5,\quad b^2=k^2+3;$$

$$\therefore\ (2k+6)(k^2+3)=(k+5)^2;$$

$$\therefore\ 2k^3+5k^2-4k-7=0.$$

由嘗試法，求得 $k=-1$；故 $a^2=4$，$b^2=4$，$ab=-4$．

但由假定知

$$(x^2-x+k)^2=(ax+b)^2.$$

代入 k，a 及 b 之值，則得兩方程式

$$x^2-x-1=\pm(2x-2);$$

即
$$x^2-3x+1=0,\ 及\ x^2+x-3=0;$$

故其根爲
$$\frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\quad \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

583. 次解法爲笛卡兒氏於 1637 年所示者．

設此四次方程式之形式化簡爲

$$x^4+qx^2+rx+s=0;$$

假定
$$x^4+qx^2+rx+s=(x^2+kx+l)(x^2-kx+m);$$

則由等置係數法，得

$$l+m-k^2=q,\ k(m-l)=r,\ lm=s.$$

從前兩方程式，得

$$2m=k^2+q+\frac{r}{k},\ 2l=k^2+q-\frac{r}{k};$$

代入第三方程式，

$$(k^3+qk+r)(k^3+qk-r)=4sk^2,$$

即 $$k^6+2qk^4+(q^2-4s)k^2-r^2=0.$$

此爲 k^2 之三次方程式，恆有一正實根［§553］；故若知 k^2，則 l 及 m 之値可定，而此四次方程式之解可由解二次方程式

$$x^2+kx+l=0,\text{ 及 } x^2-kx+m=0$$ 求得之.

例. 解方程式

$$x^4-2x^2+8x-3=0.$$

假定 $$x^4-2x^2+8x-3=(x^2+kx+l)(x^2-kx+m);$$

由等置係數法，得

$$l+m-k^2=-2,\ k(m-l)=8,\ lm=-3;$$

由是得 $$(k^3-2k+8)(k^3-2k-8)=-12k^2,$$

即 $$k^6-4k^4+16k^2-64=0.$$

當 $k^2-4=0$，即 $k=\pm2$ 時，此方程式顯然適合. 今考究 k 之一値足矣；令 $k=2$，得

$$m+l=2,\ m-l=4,\text{ 即 } l=-1,\ m=3.$$

如是 $$x^4-2x^2+8x-3=(x^2+2x-1)(x^2-2x+3);$$

由是 $$x^2+2x-1=0,\text{ 及 } x^2-2x+3=0;$$

故其根爲 $-1\pm\sqrt{2},\quad 1\pm\sqrt{-2}.$

584. 高於四次之方程式之一般代數解法，至今尙未求得；而亞培爾氏（*Abel*）關於此種解法之不可能之證明，則已爲一般數學家所承認. 但若方程式之係數爲數字，則任何實根之値，可用賀氏近値法求至任意之精確程度，共詳盡說明，可於方程式論專書中見之.

585. 今討論若干雜方程式，以結束本章.

例 1. 解方程式

$$
\begin{aligned}
x+y+z+u&=0,\\
ax+by+cz+du&=0,\\
a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=0,\\
a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=k.
\end{aligned}
$$

從最下方程式起，以 1，p，q，r 分別乘各方程式；此處，p，q，r 之值，今尚未決定. 假定其值能令 y，z，u 之係數為零；則

$$x(a^3+pa^2+qa+r)=k,$$

同時 b，c，d 為方程式

$$t^3+pt^2+qt+r=0$$

之根.

由是 $$a^3+pa^2+qa+r=(a-b)(a-c)(a-d).$$

故 $$(a-b)(a-c)(a-d)x=k.$$

如是 x 之值求得，而 y，z，u 之值，可按照對稱關係寫出之.

推論. 若方程式為

$$
\begin{aligned}
x+y+z+u&=1,\\
ax+by+cz+du&=k,\\
a^2x+b^2y+c^2z+d^2u&=k^2,\\
a^3x+b^3y+c^3z+d^3u&=k^3,
\end{aligned}
$$

則照前法進行，得

$$x(a^3+pa^2+qa+r)=k^3+pk^2+qk+r;$$

$$\therefore\quad (a-b)(a-c)(a-d)x=(k-b)(k-c)(k-d).$$

由是 x 之值求得，而 y，z，u 之值，可按照對稱之關係寫出之.

上方程式之解法，若用未定係數法，則省力多矣.

例 2. 指明方程式

$$(x-a)(x-b)(x-c)-f^2(x-a)-g^2(x-b)-h^2(x-c)+2fgh=0$$

之根均為實根.

由已知方程式，得

$$(x-a)\{(x-b)(x-c)-f^2\}-\{g^2(x-b)+h^2(x-c)+2fgh\}=0.$$

令 p，q 為二次方程式 $(x-b)(x-c)-f^2=0$

之根，並設 p 不小於 q．則解此二次方程式，得

$$2x=b+c\pm\sqrt{(b-c)^2+4f^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1);$$

今此根數之值大於 $b\sim c$，故 p 大於 b 或 c，而 q 小於 b 或 c．

在已知方程式中，依次令 x 爲

$$+\infty,\quad p,\quad q,\quad -\infty$$

等值，則其結果各爲

$$+\infty,\ -(g\sqrt{p-b}-h\sqrt{p-c})^2,\ +(g\sqrt{b-q}-h\sqrt{c-q})^2,\ -\infty,$$

因　$(p-b)(p-c)=f^2=(b-q)(c-q)$ 也．

故已知方程式有三個實根，一大於 p，一在 p 及 q 之間，一小於 q．

若 $p=q$，則由 (1)，得 $(b-c)^2+4f^2=0$，由是 $b=c$，$f=0$．此時已知方程式變爲

$$(x-b)\{(x-a)(x-b)-g^2-h^2\}=0;$$

故其根均爲實根．

若 p 爲已知方程式之一根，則上之研究失效；蓋此僅能證明有一根在 q 及 $+\infty$ 之間，即 p 也．但與前同，又有小於 q 之第二根；故第三根亦必爲實根．同理，若 q 爲已知方程式之一根，亦能證明三根均爲實根．

此處所論之方程式，至關重要；常於立體幾何中見之，名曰三次方程判定式．

586. 下舉聯立方程式，在各種應用數學中常見之．

例．　解方程式

$$\frac{x}{a+\lambda}+\frac{y}{b+\lambda}+\frac{z}{c+\lambda}=1,$$

$$\frac{x}{a+\mu}+\frac{y}{b+\mu}+\frac{z}{c+\mu}=1,$$

$$\frac{x}{a+\nu}+\frac{y}{b+\nu}+\frac{z}{c+\nu}=1.$$

考究下列之 θ 之方程式，

$$\frac{x}{a+\theta}+\frac{y}{b+\theta}+\frac{z}{c+\theta}=1-\frac{(\theta-\lambda)(\theta-\mu)(\theta-\nu)}{(a+\theta)(b+\theta)(c+\theta)}.$$

此時視 x，y，z 爲已知數．

此方程式整化後變爲 θ 之二次方程式，根據題設之三方程式，可知此方程式必能爲 $\theta=\lambda$，$\theta=\mu$，$\theta=\nu$ 三値所適合；故必爲恒等式．[§310]．

欲求 x 之値，以 $a+\theta$ 乘之，再令 $a+\theta=0$；

如是
$$x=-\frac{(-a-\lambda)(-a-\mu)(-a-\nu)}{(b-a)(c-a)};$$

即
$$x=\frac{(a+\lambda)(a+\mu)(a+\nu)}{(a-b)(a-c)}.$$

按照對稱關係，得

$$y=\frac{(b+\lambda)(b+\mu)(b+\nu)}{(b-c)(b-a)},$$

及
$$z=\frac{(c+\lambda)(c+\mu)(c+\nu)}{(c-a)(c-b)}.$$

習題 三十五.E.

解下列各方程式:

1. $x^3-18x=35$.
2. $x^3+72x-1720=0$.
3. $x^3+63x-316=0$.
4. $x^3+21x+342=0$.
5. $28x^3-9x^2+1=0$.
6. $x^3-15x^2-33x+847=0$.
7. $2x^3+3x^2+3x+1=0$.
8. 試證方程式 $x^3+12x-12=0$ 之實根爲 $2\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$.

解下列各方程式:

9. $x^4-3x^2-42x-40=0$,
10. $x^4-10x^2-20x-16=0$.
11. $x^4+8x^3+9x^2-8x-10=0$.
12. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$.
13. $x^4-3x^2-6x-2=0$.
14. $x^4-2x^3-12x^2+10x+3=0$.
15. $4x^4-20x^3+33x^2-20x+4=0$.
16. $x^5-6x^4-17x^3+17x^2+6x-1=0$.
17. $x^4+9x^3+12x^2-80x-192=0$，此方程式有兩等根.
18. 欲方程式 $x^3+qx+r=0$ 能寫作 $x^4=(x^2+ax+b)^2$ 之形式，q 及 r 間須有何種關係?

由是解方程式

$$8x^3-36x+27=0.$$

19. 設 $x^3+3px^2+3qx+r$ 及 $x^2+2px+q$ 有一公因子，試證

$$4(p^2-q)(q^2-pr)-(pq-r)^2=0.$$

設有兩公因子，試証

$$p^2-q=0, \qquad q^2-pr=0.$$

20. 設方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 有兩等根，試證二者各等於 $\dfrac{bc-ad}{2(ac-b^2)}$.

21. 設 $r^2=p^2s$，試證方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 可作二次方程式解之.

22. 解方程式

$$x^6-18x^4+16x^3+28x^2-32x+8=0,$$

已知其一根爲 $\sqrt{6}-2$.

23. 設 α, β, γ, δ 爲方程式

$$x^4+qx^2+rx+s=0$$

之根，求根爲 $\beta+\gamma+\delta+(\beta\gamma\delta)^{-1}$ 等等之方程式.

24. 在方程式 $x^4-px^3+qx^2-rx+s=0$ 中，若有二根之和等於他二根之和，試證 $p^3-4pq+8r=0$；又若有二根之積等於他二根之積，試證 $r^2=p^2s$.

25. 方程式 $x^5-209x+56=0$ 有二根之積爲 1，求此二根.

26. 求 $x^5-409x+285=0$ 之二根，其和爲 5.

27. 設 a, b, c,…… k 爲

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots p_{n-1}x+p_n=0$$

之根，試證

$$(1+a^2)(1+b^2)\cdots(1+k^2)=(1-p_2+p_4-\cdots)^2+(p_1-p_3+p_5-\cdots)^2.$$

28. 方程式 $x^4-8x^3+21x^2-20x+5=0$ 有兩根之和爲 4；試說明何以根據此關係，不能解此方程式.

雜　題

1.　設 s_1, s_2, s_3 爲等差級數之 n, $2n$, $3n$ 等項之和，試證 $s_3=3(s_2-s_1)$.

2.　求差，和，積之比爲 1，7，24 之二數.

3.　在何種進位法中，將 25 之數字順序顛倒後，適爲原數之二倍?

4.　解方程式

(1)　$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=44$.

(2)　$x(y+z)+2=0$，$y(z-2x)+21=0$，　$z(2x-y)=5$.

5.　設首項 a 之 $A.P.$ 之首 p 項之和爲零，試證其次 q 項之和

$$=-\frac{a(p+q)q}{p-1}.$$

6.　解方程式

(1)　$(a+b)(ax+b)(a-bx)=(a^2x-b^2)(a+bx)$.

(2)　$x^{\frac{1}{3}}+(2x-3)^{\frac{1}{3}}=\{12(x-1)\}^{\frac{1}{3}}$.

7.　設一等差級數之首項爲 1，其第二，第十，及 第十四項成等比級數，求此級數.

8.　設 α, β 爲 $x^2+px+q=0$ 之根，求

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$，$\alpha^3+\beta^3$，$\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$ 之値.

9.　設 $2x=a+a^{-1}$ 及 $2y=b+b^{-1}$，求

$$xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\ \text{之値}.$$

10.　求 $\dfrac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ 之値.

11.　設 α 及 β 爲 1 之虛立方根，試證

$$\alpha^4+\beta^4+\alpha^{-1}\beta^{-1}=0.$$

12. 試證在進率大於 4 之進法中，12432 能以 111 除盡之，亦能以 112 除盡之.

13. A 及 B 二人作一英哩之賽跑. 第一次 A 讓 B 11 碼而以 57 秒勝之；第二次 A 讓 B 81 秒而以 88 碼勝之；問跑 1 哩各需時若干?

14. 從下方程式消去 x, y, z;

$$x^2-yz=a^2,\ y^2-zx=b^2,\ z^2-xy=c^2,\ x+y+z=0.$$

15. 解方程式

$$ax^2+bxy+cy^2=bx^2+cxy+ay^2=d.$$

16. 一船夫航至 48 哩之地點，經 14 時復航回原處：設其順水行 4 哩及逆水行 3 哩所用之時間相同，試求水流之速度.

17. 求下兩式之平方根：

(1)　$(a^2+ab+bc+ca)(bc+ca+ab+b^2)(bc+ca+ab+c^2)$.

(2)　$1-x+\sqrt{22x-15-8x^2}$.

18. 求 $(1-3x)^{\frac{10}{3}}$ 之展開式中 x^6 之係數，及 $\left(\frac{4}{3}x^2-\frac{3}{2x}\right)^9$ 中不含 x 之項.

19. 解方程式

(1)　$\dfrac{2x-3}{x-1}-\dfrac{3x-8}{x-2}+\dfrac{x+3}{x-3}=0$.

(2)　$x^2-y^2=xy-ab,\ (x+y)(ax+by)=2ab(a+b)$.

20. 設 $a(b-c)x^2+b(c-a)xy+c(a-b)y^2$ 爲完全平方，試證 a, b, c 三數成調和級數.

21. 設 $(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2$

$$=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$$

及 x, y, z 爲實數，試證 $x=y=z$.

22. 求十二進數 $3e58261$ 之平方根，並求在何種進法中，$\frac{1}{5}$ 應以 $.\dot{1}\dot{7}$ 表之.

23. 求於 1, 2, 3,……n 諸整數中，每次取兩個相乘之積之和，並證明此和等於諸數立方和與其平方和之差之半.

24. 某人及其家屬每週食麵包 20 塊. 若其工資增加 5%. 麵包漲價 $2\frac{1}{2}$%，則每週盈餘 $6d$. 但若其工資減低 $7\frac{1}{2}$%，麵包落價 10%，則每週損失 $1\frac{1}{2}d$. 求其每週工資及麵包之價値.

25. 有四數成等差級數，其和爲 48. 又外兩數之積與中兩數之積之比爲 27:35. 求此四數.

26. 解方程式

(1)　$a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0.$

(2)　$\dfrac{(x-a)(x-b)}{x-a-b}=\dfrac{(x-c)(x-d)}{x-c-d}.$

27. 設 $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}+\sqrt{c-x}=0$，試證

$$(a+b+c+3x)(a+b+c-x)=4(bc+ca+ab);$$

又設 $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$，試證 $(a+b+c)^3=27abc$.

28. 某火車於出發一小時後，因遭意外停留一小時，其後照原速度之$\frac{3}{5}$之速進行，於原定時刻三時後到達：但若此意外在較遠 50 哩之處發生，則可早到 $1\frac{1}{2}$ 時：求行程之距離.

29. 解方程式

$$2x+y=2z,\ 9z-7x=6y,\ x^3+y^3+z^3=216.$$

30. 設有試卷六份，其中二者爲數學試卷，設僅二數學試卷不得連續，問能有幾種不同發法?

31. 將 £5. 4s. 2d. 換爲錢幣 60 枚，其中含有半克郎，先令，四辨士三種，問能有幾種換法?

32. 欲 $x^3+ax^2+11x+6$ 及 $x^3+bx^2+14x+8$ 有 x^2+px+q 形式之公因子，問須 a 及 b 之値爲何?

33. 設 A 獨作某事較 A, B, C 合作多用 6 時，B 獨作多用 1時，而 C 獨作則需兩倍之時間. 問 A, B, C 三人合作需若干時?

34. 設 $ax+by=1$，$cx^2+dy^2=1$ 兩方程式僅有一解，試證

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}=1，及\ x=\frac{a}{c}，y=\frac{b}{d}.$$

35. 用二項式定理求 $(1-2x+2x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 之展開式之首五項．

36. 設 $x^2+px+q=0$ 之兩根中，一根為他根之二倍，試證

$$p^3-q(3p-1)+q^2=0.$$

37. 解方程式

$$x^4-5x^2-6x-5=0.$$

38. a 爲何值時分式

$$\frac{x^3-vx^2+19x-a-4}{x^3-(a+1)x^2+23x-a-7}$$

始可化簡？化之爲最簡式．

39. 設 a，b，c，x，y，z 爲實數，及

$$(a+b+c)^2=3(bc+ca+ab-x^2-y^2-z^2),$$

試證　$a=b=c$，及 $x=0$，$y=0$，$z=0$．

40. 當 x 之值爲$\frac{6}{7}$時，問$\left(1-\frac{2}{3}x\right)^{-\frac{3}{2}}$之展開式中之最大項爲何？

41. 求兩數，其和乘其平方和得 5500，其差乘其平方差得 352．

42. 設 $x=\lambda a$，$y=(\lambda-1)b$，$z=(\lambda-3)c$，$\lambda=\dfrac{1+b^2+3c^2}{a^2+b^2+c^2}$，試以 a，b，c 表 $x^2+y^2+z^2$ 之最簡式．

43. 解下列方程式：

(1)　$x^4+3x^2=16x+60$.

(2)　$y^2+z^2-x=z^2+x^2-y=x^2+y^2-z=1$.

44. 設 x，y，z 成調和級數，試證

$$\log(x+z)+\log(x-2y+z)=2\log(x-z).$$

45. 試證

$$\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\cdots=\frac{4}{3}(2-\sqrt{3})\sqrt{3}$$

46. 設 $\dfrac{3x+2y}{3a-2b}=\dfrac{3y+2z}{3b-2c}=\dfrac{3z+2x}{3c-2a}$，試證

$$5(x+y+z)(5c+4b-3a)=(9x+8y+13z)(a+b+c).$$

47. 問以 17 個子音及 5 個母音能組成若干含四字母之字，其居中字母爲兩個不同之母音各端爲一個子音（同或異）?

48. 某議案經 600 人表决而打消矣，後經提出複决，則可決所多之票數二倍於前此否決所多之票數，而今可決之多數與前此否決之多數之比爲 8 比7：問改變意見者有若干人?

49. 試證

$$\log\frac{(1+x)^{\frac{1-x}{2}}}{(1-x)^{\frac{1+x}{2}}}=x+\frac{5x^3}{2\cdot3}+\frac{9x^5}{4\cdot5}+\frac{13x^7}{6\cdot7}+\cdots\cdots\cdots.$$

50. 一隊人排成三層之空心方陣，若增加 25 人，則可排成實心方陣，其每邊人數較空心方陣每邊人數之平方根多 22；求人數.

51. 解下列兩方程式：

(1) $\sqrt[m]{(a+x)^2}+2\sqrt[m]{(a-x)^2}=3\sqrt[m]{a^2-x^2}$.

(2) $(x-a)^{\frac{1}{2}}(x-b)^{\frac{1}{2}}-(x-c)^{\frac{1}{2}}(x-d)^{\frac{1}{2}}=(a-c)^{\frac{1}{2}}(b-d)^{\frac{1}{2}}$.

52、 試證

$$\sqrt[3]{4}=1+\frac{2}{6}+\frac{2.5}{6.12}+\frac{2.5.8}{6.12.18}+\cdots\cdots\cdots$$

53. 解 $\sqrt[3]{6(5x+6)}-\sqrt[3]{5(6x-11)}=1$.

54. 甲瓶盛酒 a 罎，乙瓶盛水 b 罎，從每瓶中各取出 c 罎注入他瓶，如此重複至任何次：若 $c(a+b)=ab$，試證在第一次交注後，各瓶中之酒量將永遠相同．

55. 設 m 及 n 之等差中項及 a 及 b 之等比中項同等於 $\dfrac{ma+nb}{m+n}$：試求 m 及 n 用 a 及 b 所表之値．

56. 設 x, y, z 之和爲常數，又設

$$(z+x-2y)(x+y-2z)$$

與 yz 成正變，試證 $3(y+z)-x$ 與 yz 成正變．

57. 設 n 大於 3，試證

$$1.2.{}^nC_r.-2.3.{}^nC_{r-1}+3.4.{}^nC_{r-2}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^r(r+1)(r+2)=2.{}^{n-3}C_r.$$

58. 解下列各方程式：

(1) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}=\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

(2) $4\{(x^2-16)^{\frac{3}{4}}+8\}=x^2+16(x^2-16)^{\frac{1}{4}}$.

59. 設

$$\frac{y-z}{1+yz}+\frac{z-x}{1+zx}+\frac{x-y}{1+xy}=0,$$

試證 x, y, z 中必有兩數互等．

60. 在某 p 人組織之團體中，能讀能寫者佔 $a\%$，分別言之；男子能讀能寫者佔 $b\%$，女子能讀能寫者佔 $c\%$：求團體中男女之人數．

61. 設 $x=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{2ab}{a^2-b^2}}$，試證 $\dfrac{ab}{a^2+b^2}\left(x^{\frac{a}{b}}+x^{\frac{b}{a}}\right)=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$.

62. 試證 $(1-x+x^2-x^3)^{-1}$ 展開式中 x^{4n} 之係數爲 1.

63. 解方程式

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}.$$

64. 求出首項爲 a 末項爲 b 之 n 項等差級數及調和級數；並證前級數之第 r 項與次級數之第 $n-r+1$ 項之積爲 ab.

65. 設方程式

$$\left(1-q+\frac{p^2}{2}\right)x^2+p(1+q)x+q(q-1)+\frac{p^2}{2}=0$$

之兩根相等，試證 $p^2=4q$.

66. 設 $a^2+b^2=7ab$. 試證

$$log\left\{\tfrac{1}{3}(a+b)\right\}=\tfrac{1}{2}(log a+log b).$$

67. 設 n 爲方程式

$$x^2(1-ac)-x(a^2+c^2)-(1+ac)=0$$

之一根，又如插入 n 個調和中項於 a，c 之間，試證插入中項之首末二項之差爲 $ac(a-c)$.

68. 設 ${}^{n+2}C_8:{}^{n-2}C_4=57:16$，求 n.

69. 某人購買若干於利率 $6\frac{1}{2}\%$ 之政府公債：設其每張購價少 £3，則應多得 $\frac{1}{3}\%$ 之利息：問公債發行之價格爲何？［票面額爲 £100］

70. 解方程式

$$\{(x^2+x+1)^3-(x^2+1)^3-x^3\}\{(x^2-x+1)^3-(x^2+1)^3+x^3\}$$
$$=3\{(x^4+x^2+1)^3-(x^4+1)^3-x^6\}.$$

71. 如由方程式 $x^2+ax+b=0$，及 $xy+l(x+y)+m=0$ 消去 x，則得一 y 之二次方程式，其根與原來之 x 之二次方程式之根相同，試證 $a=2l$，$b=m$，或 $b+m=al$.

72. 已知 $log 3=.47712$，$log\ 2=.30103$；解方程式

(1) $6^x=\dfrac{10}{4}-6^{-x}$. (2) $\sqrt{5^x}+\sqrt{5^{-x}}=\dfrac{29}{10}$.

73. 求兩數，其和爲 9，其四次冪之和爲 2417.

74. A 以每時 4 哩之速率前進，B 於其出發 $2\frac{3}{4}$ 時後出發追之，第一時行 $4\frac{1}{2}$ 哩，第二時 $4\frac{3}{4}$ 哩，第三時行 5 哩，由從此每時多行 $\frac{1}{4}$ 哩. 問需若干時追及 A？

75. 試證大於 $(\sqrt{3}+1)^{2m}$ 之第一個整數含 2^{m+1} 爲其因數.

76. 將自然數串分爲 1; 2, 3, 4; 5, 6, 7, 8, 9; ……等組:試證第 n 組諸數之和爲 $(n-1)^3+n^3$.

77. 試證級數

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{|\underline{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1\cdot 3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{|\underline{4}}\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots\cdots\cdots$$

之 n 項和等於 $1-\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots\cdots(2n-1)}{2^n n}$.

78. 試證在 $\dfrac{1+2x}{1-x+x^2}$ 之展開式中, x^n 之係數, 視 n 之爲 $3m$, $3m+1$, $3m+2$ 之形式而爲

$$(-1)^{\frac{n}{3}},\ 3(-1)^{\frac{n-1}{3}},\ 2(-1)^{\frac{n-2}{3}}.$$

79. 解方程式:

(1) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=\dfrac{xyz}{x+y+z}$.

(2) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=x+y+z=3$.

80. xyz 之値爲 $7\frac{1}{2}$ 或 $3\frac{3}{5}$ 視 a, x, y, z, b 之爲等差級數或調和級數而定. 設 a, b 爲正整數, 求 a 及 b 之値.

81. 設 $ay-bx=c\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$, 試證除 $c^2<a^2+b^2$ 外, x 及 y 之實値均不能適合此方程式.

82. 設 $(x+1)^2$ 大於 $5x-1$ 而小於 $7x-3$, 求 x 之正整値.

83. 設有 P 個整數, 其對數之指標均爲 p, 又有 Q 個整數, 其倒數之對數之指標均爲 $-q$, 試證

$$log_{10}P-log_{10}Q=p-q+1.$$

84. 五人分 20 先令, 每人所得不准少於 3 先令, 問能有幾種分法?

85. 某人欲使其二女於成年時承受相等之遺產, 彼授與長女者爲臨終買入八八折利率 4% 之證卷所蓄積之利息; 授與幼女者爲同時買入六三折, 利率 3% 之證卷所蓄積之利息, 但其本金較姊者少£3500. 設其父沒時二女之年齡爲 17 及 14, 求爲二女所儲之金額, 及二女各得財產若干?

86. 一 7 進三位數，若以 9 進法表之，則其數字之順序恰與原數相反；求此數.

87. 設一等差級數之 m 項之和等於次 n 項之和亦等於再次 p 項之和；試證

$$(m+n)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{p}\right)=(m+p)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right).$$

88. 試證

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2.$$

89. 設 m 爲大於 1 之負數或正數，試證

$$1^m+3^m+5^m+\cdots\cdots\cdots+(2n-1)^m>n^{m+1}.$$

90. 設三方程式

$$x^2+p_1x+q_1=0,\ x^2-p_2x+q_2=0,\ x^2+p_3x+q_3=0$$

中每二方程式有一公根，試證

$$p_1^2+p_2^2+p_3^2+4(q_1+q_2+q_3)=2(p_2p_3+p_3p_1+p_1p_2).$$

91. A 及 B 以同速度循同路徑從亭丁敦 (*Huntingdon*) 向倫敦出發. A 在距倫敦 50 哩之標石處，追及鵝一羣，鵝之速度爲每二時 3 哩，二時後復遇車一輛，車之速度爲每四時行 9 哩；B 於第 45 個哩石之處追及同一鵝群，而於至第 31 個哩石之 40 分鐘前，遇及同一車，問 A 抵倫敦時，B 在何處?

92. 設 $a+b+c+d=0$，試證

$$abc+bcd+cda+dab=\sqrt{(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)}.$$

93. 設 $A.P.$, $G.P.$, $H.P.$ 俱以 a 及 b 爲首兩項，若

$$\frac{b^{2n+2}-a^{2n+2}}{ba(b^{2n}-a^{2n})}=\frac{n+1}{n},$$

試證三級數之第 $n+2$ 項成等比級數.

94. 試證在 $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)}$ 依 x 升冪之展開式中，x^n 之係數爲 $\dfrac{a^n-b^n}{a-b}\cdot\dfrac{1}{a^nb^n}$；而在 $\dfrac{(1+x^2)^n}{(1-x)^3}$ 之展開式中，x^{2n} 之係數爲 $2^{n-1}(n^2+4n+2)$.

95. 解方程式:

$$\sqrt{x-y}+\frac{1}{2}\sqrt{x+y}=\frac{x-1}{\sqrt{x-y}},\quad x^2+y^2:\ xy=34:\ 15.$$

96. 求 $1+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}$之二次根式值.

97. 試證一整數之立方可以二平方之差表之；且奇整數之立方可以如是表之者有兩法；而任連續整數之立方之差，可以二平方之差表之.

98. 求無窮級數

$$\frac{1}{|\underline{3}}+\frac{2}{|\underline{5}}+\frac{3}{|\underline{7}}+\frac{4}{|\underline{9}}+\cdots\cdots\text{之值}.$$

99. 設 $x=\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\cdots\cdots,$

及 $y=\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\cdots\cdots,$

試證 $bx-dy=a-c.$

100. 求循環級數 $1+5x+7x^2+17x^3+31x^4+\cdots\cdots$ 之母函數，n 項和，及第 n 項.

101. 設 a, b, c 成 $H.P.$, 試證

(1) $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}>4.$

(2) $b^2(a-c)^2=2\{c^2(b-a)^2+a^2(c-b)^2\}.$

102. 設 a, b, c 皆實數，而 $x^3-3b^2x+2c^3$ 可以 $x-a$ 及 $x-b$ 除盡之；試證 $a=b=c$, 或 $a=-2b=-2c$.

103. 試證三連續奇數之平方和加 1 可以 12 除盡之，但不能以 24 除盡.

104. 試證$\frac{ac-b^2}{a}$爲 $ax^2+2bx+c$ 之最大值或最小值，視 a 之爲負或正而定.

設 $x^4+y^4+z^4+y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=2xyz\ (x+y+z)$, 又設 x, y, z 皆爲實數，試證 $x=y=z$.

105. 試證$\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}$之展開式爲

$$\frac{x}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{x^5}{10}+\cdots\cdots$$

106. 設 α,β 爲方程式

$$x^2+px+q=0,\quad x^{2n}+p^nx^n+q^n=0$$

之根，其中 n 爲偶整數，試證 $\dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha}$ 爲 $x^n+1+(x+1)^n=0$ 之根.

107. 求無窮連分數

$$a+\frac{b}{2a+}\,\frac{b}{2a+}\,\frac{b}{2a+}\cdots\cdots \text{及 } c+\frac{d}{2c+}\,\frac{d}{2c+}\,\frac{d}{2c+}\cdots\cdots$$

之平方之差.

108. 以某欵分與若干人，第二人較第一人多得 1 先令，第三人較第二人多得 2 先令，第四人較第三人多得 3 先令，餘類推，設第一人得 1 先令，最後人得 3 鎊 7 先令，求人數及欵額.

109. 解方程式:

(1) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y+z}{b+c}=\dfrac{y}{b}+\dfrac{z+x}{c+a}=\dfrac{z}{c}+\dfrac{x+y}{a+b}=2.$

(2) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}+x^2+y^2=13\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{xy}{x^2+y^2}+xy=3\dfrac{3}{10}$.

110. 設$a>b>0$，及 n 爲正整數，試證

$$a^n-b^n>n(a-b)(ab)^{\frac{n-1}{2}}.$$

111. 試以連分數表 $\dfrac{763}{396}$; 由是求適合方程式 $396x-763y=12$ 之 x, y 之最小值.

112. 完成某工所需之天數，A 獨作者爲 B,C 合作者之 m 倍; B 獨作者爲 A,C 合作者之 n 倍; C 獨作者爲 A,B 合作者之 p 倍: 試證每人獨作所需之天數之比爲 $m+1:n+1:p+1$.

又證 $\dfrac{m}{m+1}+\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{p}{p+1}=2.$

113. 海上療養院之耗費，一部分為常數，一部分與住院之人數成正變，住院者每人每年繳費 £65. 住院者有 50 人時，所獲每人之年利益為 £9，有 60 人時，為 £10.13s.4d.：問有 80 人時，可從每住院者獲利若干?

114. 設 $x^2y=2x-y$，及 x^2 不大於 1，試證

$$4\left(x^2+\frac{x^6}{3}+\frac{x^{10}}{5}+\cdots\right)=y^2+\frac{y^4}{2}+\frac{y^6}{3}+\cdots.$$

115. 設 $\frac{x}{a^2-y^2}=\frac{y}{a^2-x^2}=\frac{1}{b}$，及 $xy=c^2$；試證當 a 及 c 不等時，

$$(a^2-c^2)^2-b^2c^2=0，或\ a^2+c^2-b^2=0.$$

116. 設 $(1+x+x^2)^{3r}=1+k_1x+k_2x^2+\cdots$，

及 $$(x-1)^{3r}=x^{3r}-c_1x^{3r-1}+c_2x^{3r-2}-\cdots;$$

試證 (1) $1-k_1+k_2-\cdots\cdots=1$，

(2) $1-k_1c_1+k_2c_2-\cdots\cdots=\pm\frac{\underline{|3r}}{\underline{|r}\,\underline{|2r}}$.

117. 解方程式:

(1) $(x-y)^2+2ab=ax+by$，$xy+ab=bx+ay$.

(2) $x^2-y^2+z^2=6$，$2yz-zx+2xy=13$，$x-y+z=2$.

118. 設有 n 個正數 a_1，a_2，$\cdots\cdots a_n$，又設已知其每次取兩數之一切積之平方根，試證

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\cdots\cdots<\frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n);$$

由是證明此等積之平方根之等差中項小於題設數之等差中項.

119. 設 $b^2x^4+a^2y^4=a^2b^2$，及 $a^2+b^2=x^2+y^2=1$，試證

$$b^4x^6+a^4y^6=(b^2x^4+a^2y^4)^2.$$

120. 求級數之首 n 項之和，其第 r 項為

(1) $\frac{2r+1}{r^2(r+1)^2}$，　　(2) $(a+r^2b)x^{n-r}$.

121.　求$\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$之最大值.

122.　解方程式:

(1)　$1+x^4=7(1+x)^4$.

(2)　$3xy+2z=xz+6y=2yz+3x=0$.

123.　設 a_1, a_2, a_3, a_4 爲二項式展開式之任何相鄰四係數, 試證

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

124.　將$\dfrac{x^3+7x^2-x-8}{(x^2+x+1)(x^2-3x-1)}$析爲部分分數: 並求按照 x 之升冪展開$\dfrac{3x-8}{x^2-4x-4}$時之通項.

125.　循環級數

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{2}x+2x^2+lx^3+5x^4+7x^5+\cdots\cdots$$

之關係式爲二次式; 求第四項之係數及關係式, 並求此級數之通項.

126.　設 x, y, z 不等, 又設

$$2a-3y=\frac{(z-x)^2}{y},\quad 2a-3z=\frac{(x-y)^2}{z},$$

試證

$$2a-3x=\frac{(y-z)^2}{x},\quad x+y+z=a.$$

127.　解方程式:

(1)　$xy+6=2x-x^2$, $xy-9=2y-y^2$.

(2)　$(ax)^{\log a}=(bx)^{\log b}$, $b^{\log x}=a^{\log y}$.

128.　求下兩式之極限值:

(1)　$x\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^4+a^4}$, 當 $x=\infty$時.

(2)　$\dfrac{\sqrt{a+2x}-\sqrt{3x}}{\sqrt{3a+x}-2\sqrt{x}}$, 當 $x=a$時.

129.　兩數之積爲 192, 以其最大公約及最小公倍之調和中項除等差中項之商爲 $3\frac{25}{48}$: 求此兩數.

130. 解方程式:

(1) $\sqrt[3]{13x+37}-\sqrt[3]{13x-37}=\sqrt[3]{2}$.

(2) $\left.\begin{aligned} b\sqrt{1-z^2}+c\sqrt{1-y^2}&=a,\\ c\sqrt{1-x^2}+a\sqrt{1-z^2}&=b,\\ a\sqrt{1-y^2}+b\sqrt{1-x^2}&=c. \end{aligned}\right\}$

131. 試證級數

$\frac{1}{2^3\lfloor\underline{3}}-\frac{1\cdot 3}{2^4\lfloor\underline{4}}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^5\lfloor\underline{5}}$……至無窮項之和爲$\frac{23}{24}-\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

132. 有一三位數，將其數字之順序反轉，則適爲原數之二倍；試證其首末二數字所成之數亦然，並證此類數在每三種進法中，僅能於一種進法中見之.

133. 求 $\frac{1+x^3}{(1-x^2)(1-x)}$ 及 $1-x+x^2$ 之積中 x^{18} 及 x^r 之係數.

134. 某人購得臨街地一塊；此地爲長方形，其前邊之三倍與其寬之二倍之和爲 96 碼. 問彼最多能得若干平方碼?

135. 試證

$$\begin{aligned}&(a+b+c+d)^4+(a+b-c-d)^4+(a-b+c-d)^4+(a-b-c+d)^4\\ &-(a+b+c-d)^4-(a+b-c+d)^4-(a-b+c+d)^4-(-a+b+c+d)^4\\ &=192abcd.\end{aligned}$$

136. 欲 $x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ 及 $x^4+2ax^3+2bx^2+2cx+1$ 各爲完全平方，須 a, b, c 爲何值方可?

137. 解方程式:

(1) $\frac{\sqrt[3]{x+y}-\sqrt[3]{x-y}}{\sqrt[3]{x+y}+\sqrt[3]{x-y}}=3$, $x^2+y^2=65$.

(2) $\sqrt{2x^2+1}+\sqrt{2x^2-1}=\frac{2}{\sqrt{3-2x^2}}$.

138. 某農夫以某價售羊 10 隻，又售 5 隻，每隻之價較前售者低 10 先令，設每次售得鎊數之二數字相同；求羊每隻之價.

139. 求 n 項之和:

(1) $(2n-1)+2(2n-3)+3(2n-5)+\cdots\cdots$

(2) 級數 1, 3, 6, 10, 15,……等項之平方.

(3) (2) 中之奇數項.

140. 設 α, β, γ 爲方程式 $x^3+qx+r=0$ 之根, 試證

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)=5(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

141. 解方程式:

(1) $\left.\begin{aligned} x(3y-5)&=4 \\ y(2x+7)&=27 \end{aligned}\right\}$. (2) $\left.\begin{aligned} x^3+y^3+z^3&=495 \\ x+y+z&=15 \\ xyz&=105 \end{aligned}\right\}$.

142. 設 a, b, c 爲 $x^3+qx^2+r=0$ 之根,作方程式,其根爲 $a+b-c$, $b+c-a$, 及 $c+a-b$.

143. 求級數和:

(1) $n+(n-1)x+(n-2)x^2+\cdots+2x^{n-2}+x^{n-1}$;

(2) $3-x-2x^2-16x^3-28x^4-676x^5+\cdots\cdots$至無窮.

(3) $6+9+14+23+40+\cdots\cdots$至 n 項.

144. 從方程式

$$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1},\ x+y+z=b.$$

$$x^2+y^2+z^2=c^2,\ x^3+y^3+z^3=d^3,$$

消去 x, y, z, 並證若 x, y, z 均爲絕對不等之有限數, 則 b 不能等於 d.

145. 方程式 $3x^2(x^2+8)+16(x^3-1)=0$ 之根非全不相等;求其根.

146. 某旅客自某地出發, 第一日行 1 哩,第二日 3 哩, 第三日 5 哩, 依此類推, 每日較其前一日多行 2 哩. 三日後有第二人出發, 其第一日行 12 哩, 第二日行 13 哩, 依此類推. 問第二人追及第一人需時若干? 解釋其兩答數.

147. 求

$$\frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\cdots\cdots \text{之值}.$$

148.　解方程式

$$x^3+3ax^2+3(a^2-bc)x+a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

149.　設 n 爲不能除盡 a，b，及 $a+b$ 之質數，試證 $a^{n-2}b-a^{n-3}b^2+a^{n-4}b^3-\cdots\cdots+ab^{n-2}$ 較 n 之倍數大 1.

150.　求級數之第 n 項及 n 項和，已知其無窮項之和爲

$$(1-abx^2)(1-ax)^{-2}(1-bx)^{-2}.$$

151.　設 a，b，c 爲 $x^3+px+q=0$ 作方程式，其根爲

$$\frac{b^2+c^2}{a},\quad \frac{c^2+a^2}{b},\quad \frac{a^2+b^2}{c}.$$

152.　試證

$$(y+z-2x)^4+(z+x-2y)^4+(x+y-2z)^4$$
$$=18(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2.$$

153.　解方程式：

(1) $x^3-30x+133=0$，用卡登氏法．

(2) $x^5-4x^4-10x^3+40x^2+9x-36=0$，其根之形式爲 $\pm a,\pm b$，及 c.

154.　某人每時之工作量，與其每時之報酬成正變，而與每日工作時數之平方根成反變．設某工作每日工作 9 時，每時工資 1s.，則六日可完成一工程．若每日工作 16 時，每時酬金 1s. 6d.，則完成同一工程須若干日？

155.　設 s_n 表級數 $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots\cdots$ 之 n 項和，而 σ_{n-1} 表級數

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6}+\cdots\cdots$$

之 $n-1$ 項和．試證 $18s_n\sigma_{n-1}-s_n+2=0$.

156.　解方程式：

(1) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$.

(2) $\dfrac{1}{5}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+2)(x-4)}+\dfrac{1}{9}\dfrac{(x+3)(x-5)}{(x+4)(x-6)}-\dfrac{2}{13}\dfrac{(x+5)(x-7)}{(x+6)(x-8)}=\dfrac{92}{585}.$

157. 某房在年初值金 £250，但因逐漸陳舊，每年終跌落損其每年初之價之 10%：問若干年後，此房之價跌至 £25 之下？已知

$$\log_{10}3=\cdot4771213.$$

158. 試證兩次無窮級數相等：

(1) $1+\frac{1}{4}+\frac{1\cdot4}{4\cdot8}+\frac{1\cdot4\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{4\cdot8\cdot12\cdot16}+\cdots\cdots,$

(2) $1+\frac{2}{6}+\frac{2\cdot5}{6\cdot12}+\frac{2\cdot5\cdot8}{6\cdot12\cdot18}+\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11}{6\cdot12\cdot18\cdot24}+\cdots\cdots\cdots$

159. 證恆等式

$$\left\{1-\frac{x}{a}+\frac{x(x-a)}{a\beta}-\frac{x(x-a)(x-\beta)}{a\beta\gamma}+\cdots\right\}$$

$$\left\{1+\frac{x}{a}+\frac{x(x+a)}{a\beta}+\frac{x(x+a)(x+\beta)}{a\beta\gamma}+\cdots\right\}$$

$$=1-\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^2(x^2-a^2)}{a^2\beta^2}-\frac{x^2(x^2-a^2)(x^2-\beta^2)}{a^2\beta^2\gamma^2}+\cdots$$

160. 設 n 爲大於 1 之正整數，試証 $n^5-5n^3+60n^2-56n$ 爲 120 之倍數．

161. 若干人約定完成某工程，若同時興工，則 24 小時可成；但彼等開始之時間，適成相等之間段，然後共作至完工．報酬與每人之工作量成比例：已知最先開始者所得之工資爲最後開始者之 11 倍；求此工作起訖所用之時間．

162. 解方程式：

(1) $\frac{x}{y^2-3}=\frac{y}{x^2-3}=\frac{-7}{x^3+y^3}.$

(2) $y^2+z^2-x(y+z)=a^2,$

$z^2+x^2-y(z+x)=b^2,$

$x^2+y^2-z(x+y)=c^2.$

163. 解方程式

$$a^3(b-c)(x-b)(x-c)+b^3(c-a)(x-c)(x-a)$$
$$+c^3(a-b)(x-a)(x-b)=0;$$

並証若有兩根相等，則

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\pm\frac{1}{\sqrt{b}}\pm\frac{1}{\sqrt{c}}=0.$$

164. 求級數和:

(1) $1\cdot2\cdot4+2\cdot3\cdot5+3\cdot4\cdot6+\cdots\cdots$至 n 項.

(2) $\frac{1^2}{|\underline{3}}+\frac{2^2}{|\underline{4}}+\frac{3^2}{|\underline{5}}+\cdots\cdots$至無窮項.

165. 設 a, b, c, d 爲四個不等正數，而 $s=a+b+c+d$，試證 $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)>81abcd$.

166. 解方程式:

(1) $\sqrt{x+a}-\sqrt{y-a}=\frac{5}{2}\sqrt{a}$，$\sqrt{x-a}-\sqrt{y+a}=\frac{3}{2}\sqrt{a}$.

(2) $x+y+z=x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}(x^3+y^3+z^3)=3$.

167. 從方程式

$$lx+my+nz=mx+ny+lz=nx+ly+mz$$
$$=k^2(l^2+m^2+n^2)=1,$$

消去 l, m, n.

168. 化簡

$$\frac{a(b+c-a)^2+\cdots\cdots+\cdots\cdots+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a^2(b+c-a)+\cdots\cdots+\cdots\cdots-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}.$$

169. 試證次式爲完全平方，并求其平方根:

$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$.

170. 有 A, B, C 三鎮，某人步行由 A 至 B，乘車由 B 至 C，騎馬由 C 至 A，共用 $15\frac{1}{2}$ 時；而乘車由 A 至 B，騎馬由 B 至 C，步行由 C 至 A，則共用 12 時．設此旅程步行用 22 時，騎馬用 $8\frac{1}{4}$ 時，乘車用 11 時．又步行一哩，馬行一哩，車行一哩共需半時．求各速度及諸鎮間之距離．

171. 設 n 爲不小於 3 之整數，試證 $n^7-7n^5+14n^3-8n$ 可以 840 除盡之.

172. 解方程式:

(1) $\sqrt{x^2+12y}+\sqrt{y^2+12x}=33$, $x+y=23$.

(2) $\dfrac{u(y-x)}{z-u}=a$, $\dfrac{z(y-x)}{z-u}=b$, $\dfrac{y(u-z)}{x-y}=c$, $\dfrac{x(u-z)}{x-y}=d$.

173. 設 s 爲 a, b, c,…等 n 個不等正數之和，試証

$$\frac{s}{s-a}+\frac{s}{s-b}+\frac{s}{s-c}+\cdots\cdots>\frac{n^2}{n-1}.$$

174. 商人購棉，以之易油出賣，其買得之棉之担數，與棉一担換得之油之罎數，以及每罎油之售價之先令數成降等比級數．若彼多得一担之棉，每担棉多換一罎之油，每罎油多售一先令，則可多得 508 鎊 9 先令；又若多得一担之棉，每担棉少換一罎之油，每罎油少售一先令；則少得 483 鎊 13 先令．問其得欵確爲若干?

175. 試証

$$\Sigma(b+c-a-x)^4(b-c)(a-x)$$
$$=16(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c).$$

176. 設 α, β, γ 爲 $x^3-px^2+r=0$ 之根，作方程式，其根爲

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha},\ \frac{\gamma+\alpha}{\beta},\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma}.$$

177. 設取任若干 a^2+b^2 形式之因子相乘，試證其積可以二平方之和表之.

設 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2)=p^2+q^2$，試以 a, b, c, d, e, f, g h 表 p, q 之值.

178. 解方程式

$$x^2+y^2=61,\ 及\ x^3-y^3=91.$$

179. 某人應試，計有試卷四份，每份最多得 m 分，試證彼有 $\frac{1}{3}(m+1)(2m^2+4m+3)$ 種方法得 $2m$ 分.

180. 設 α 及 β 爲 $x^2+px+1=0$ 之根，及 γ,δ 爲 $x^2+qx+1=0$ 之根；試證 $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\delta)=q^2-p^2$.

181. 設 a_m 爲 $(1+x)^n$ 之展開式中 x^m 之係數，試證不論 n 爲何值，恒得

$$a_0-a_1+a_2-\cdots+(-1)^{m-1}a_{m-1}=\frac{(m-1)(m-2)\cdots(n-m+1)}{\underline{|m-1}}(-1)^{m-1}.$$

182. 某數爲三質因數之積，此三質因數之平方和爲 2331. 有7560數（1 在內）小於此數且與之爲互質數. 又其約數（1 及本數在內）之和爲 10560. 求此數.

183. 作一方程式，其根爲 $x^3-ax^2+bx+c=0$ 之根之每兩根之積. 將方程式 $2x^5+x^4+x+2=12x^3+12x^2$ 完全解出之.

184. 設 n 爲正整數，試證

$$n^n-n(n-2)^n+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}(n-4)^n-\cdots\cdots=2^n\,\underline{|n}.$$

185. 設 $(6\sqrt{6}+14)^{2n+1}=N$，又設 F 爲 N 之分數部分，試證 $NF=20^{2n+1}$.

186. 解方程式：

(1) $x+y+z=2,\ x^2+y^2+z^2=0,\ x^3+y^3+z^3=-1.$

(2) $x^2-(y-z)^2=a^2,\ y^2-(z-x)^2=b^2,\ z^2-(x-y)^2=c^2.$

187. 在某次普選中，已得報造之自由黨之總數較英格蘭保守黨當選者多 15 人，保守黨當選之總數較英格蘭自由黨當選之人數之二倍多 5，蘇格蘭保守黨當選者之數同於威爾士自由黨當選者之人數．又蘇格蘭自由黨之多數等於威爾士保守黨之人數之二倍，而與愛爾蘭自由黨之多數之比爲 2:3. 再英格蘭保守黨之多數較愛爾蘭之兩黨之總數多 10. 當選總數爲 652 人，其中 60 人由蘇格蘭選區選出．求各黨由英格蘭，蘇格蘭，愛爾蘭，威爾士所得報告之人數.

188. 試證 $a^5(c-b)+b^5(a-c)+c^5(b-a)$

$$=(b-c)(c-a)(a-b)(\Sigma a^3+\Sigma a^2b+abc).$$

189.　試證 $\begin{vmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2+2a & 2a+1 & 1 \\ a & 2a+1 & a+2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=(a-1)^6$.

190.　設$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0$，試證除 $b=a+c$ 外，a, b, c 三數成調和級數.

191.　解方程式:

(1)　$x^3-13x^2+15x+189=0$，已知其一根較他一根大 2.

(2)　$x^4-4x^2+8x+35=0$，已知其一根爲 $2+\sqrt{-3}$.

192.　設 a 及 b 二數爲已知；而 a_1 及 b_1 爲由 $3a_1=2a+b$ 及 $3b_1=a+2b$ 之關係得之；又 a_2 及 b_2 二數爲用同法由 a_1 及 b_1 而得者，類推；試求 a_n 及 b_n 以 a 及 b 所表之値，並證，當 n 爲無窮大時，$a_n=b_n$.

193.　設 $x+y+z+w=0$，試證

$$wx(w+x)^2+yz(w-x)^2+wy(w+y)^2+zx(w-y)^2$$
$$+wz(w+z)^2+xy(w-z)^2+4xyzw=0.$$

194.　設 $a+\frac{bc-a^2}{a^2+b^2+c^2}$ 之値，不因 a，b，c 中某二者之易位而改變，則不因二者之易位而改變；且當 $a+b+c=1$ 時爲零.

195.　在雙軌鐵道之兩聯站 A 及 B 之間，有兩下行車在 6 點及 6 點 45 分開行，而兩上行車於 7 點 15 分及 8 點 30 分開行．如此四車（以四點視之）同時互相經過，求其每時速度 x_1，x_2，x_3，x_4 所成之方程式

$$\frac{3x_2}{x_2-x_1}=\frac{4m+5x_3}{x_1+x_3}=\frac{4m+10_4}{x_1+x_4},$$

此處 m 爲 AB 間之哩數.

196.　不計三次以上各項，試證

$$\frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}+(1-y)^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{(1-x)(1-y)}}=1+\tfrac{1}{2}(x+y)+\tfrac{1}{8}(3x^2+xy+3y^2).$$

197. 試證當 n 之形式爲 $3m^2-1$ 及 $2a=(3m-2)(m+1)b$ 時，級數

$$a,\ a-b,\ a-2b,\ \cdots\cdots,\ a-(n-1)b$$

之每兩項之積之和爲零.

198. 若 n 爲偶數，及 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$ 爲等差級數之中央兩項，試證此級數之各項之立方之和爲

$$n\alpha\{\alpha^2+(n^2-1)\beta^2\}.$$

199. 設 a，b，c 爲正實數，試證

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

200. A，B，C 同時向距離一哩之某鎮城出發；A 以每時 u 哩之等速度步行，B 及 C 以每時 v 哩之等速度車行. 若干時後 B 下車以 A 等速度步行前進，C 則驅車返行迎 A；A 上車後二人乘車追 B，結果與 B 同時入城：試證自出發時起共用 $\frac{a}{v}\cdot\frac{3v+u}{3u+v}$ 時.

201. 某城市之街道照棋盤排列. 南北街有 m，東西街有 n，某人從西北至東南，問有捷徑若干?

202. 解方程式 $\sqrt[4]{x+27}+\sqrt[4]{55-x}=4$.

203. 試證在級數

$$ab+(a+x)(b+x)+(a+2x)(b+2x)+\cdots\cdots \text{至 } 2n \text{ 項之中},$$

後 n 項和與首 n 項和之差與末項與首項之差之比爲 n^2 比 $2n-1$.

204. 求 n 次近值:

(1) $\dfrac{1}{2-}\ \dfrac{1}{2-}\ \dfrac{1}{2-}\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{4}{3+}\ \dfrac{4}{3+}\ \dfrac{4}{3+}\ \cdots\cdots\cdots\cdots$

205. 試證

$$(a-x)^4(y-z)^4+(a-y)^4(z-x)^4+(a-z)^4(x-y)^4$$
$$=2\{(a-y)^2(a-z)^2(x-y)^2(x-z)^2+(a-z)^2(a-x)^2(y-z)^2(y-x)^2$$
$$+(a-x)^2(a-y)^2(z-x)^2(z-y)^2\}.$$

206. 設 α, β, γ 爲 $x^3+qx+r=0$ 之根求

$$\frac{m\alpha+n}{m\alpha-n}+\frac{m\beta+n}{m\beta-n}+\frac{m\gamma+n}{m\gamma-n}$$

表以 m, n, q, r 之值.

207. 英國每年每 46 人中死一人，每 33 人中生一人. 設無移民，問依此計算若干年後人口可增一倍.

208. 設$(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\cdots$，求証捨 r 爲 3 之倍數外

$$a_r-na_{r-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a_{r-2}-\cdots\cdots+(-1)^r\frac{n!}{r!(n-r)!}a_0=0,$$

又當 r 爲 3 之倍數時，其値爲何?

209. 某團體爲波蘭，土耳其，希臘，德意志，意大利五國人所組成. 其中波人較德人之 $\frac{1}{3}$ 少 1，意人之半數少 3，土人與德人較希人與意人多 3 人；意人及希人佔全團體人數之$\frac{7}{26}$: 求各國籍之人數.

210. 求無窮級數之和，已知其第 n 項爲

$(n+1)n^{-1}(n+2)^{-1}(-x)^{n+1}$.

211. 設 n 爲正整數，求證

$$n-\frac{n(n^2-1)}{\underline{|2}}+\frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)}{\underline{|2}\,\underline{|3}}-\cdots\cdots$$
$$+(-1)^r\frac{n(n^2-1)(n^2-2^2)\cdots\cdots(n^2-r^2)}{\underline{|r}\,\underline{|r+1}}+\cdots=(-1)^{n+1}.$$

212. 求級數和:

(1) 6, 24, 60, 120, 210, 336,⋯⋯至 n 項.

(2) $4-9x+16x^2-25x^3+36x^4-49x^5+\cdots\cdots$至無窮.

(3) $\frac{1\cdot 3}{2}+\frac{3\cdot 5}{2^2}+\frac{5\cdot 7}{2^3}+\frac{7\cdot 9}{2^4}+\cdots\cdots$至無窮.

213. 解方程式 $\begin{vmatrix} 4x & 6x+2 & 8x+1 \\ 6x+2 & 9x+3 & 12x \\ 8x+1 & 12x & 16x+2 \end{vmatrix}=0.$

214. 試證

(1) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)>6abc$,

(2) $n(a^{p+q}+b^{p+q}+c^{p+q}+\cdots\cdots)$
$$>(a^p+b^p+c^p+\cdots\cdots)\ (a^q+b^q+c^q+\cdots\cdots),$$

此處 $a, b, c,\cdots\cdots$諸數之個數爲 n.

215. 解方程式

$$\left.\begin{array}{l} yz=a(y+z)+\alpha \\ zx=a(z+x)+\beta \\ xy=a(x+y)+\gamma \end{array}\right\}.$$

216. 設 n 爲質數，試証

$$1(2^{n-1}+1)+2(3^{n-1}+\tfrac{1}{2})+3(4^{n-1}+\tfrac{1}{3})+\cdots\cdots+(n-1)(n^{n-1}+\frac{1}{n-1})$$

可以 n 除盡之.

217. 在某射擊比賽中，射擊一次可得 5，4，3，2，或 0 點：問射七次得 30 點有幾種不同射法.

218. 試証 $x^5-bx^3+cx^2+dx-e$ 爲一完全平方及一完全立方之積，設

$$\frac{12b}{5}=\frac{9d}{b}=\frac{5e}{c}=\frac{d^2}{c^2}.$$

219. 某袋盛有六個黑球及不能多於六個之白球，設連取三球，取出者不再放回，全體盡得白球；試証再取得一黑球之或能率爲$\frac{677}{909}$.

220. 試證在首 n 個自然數中，每二數平方之積之和爲
$\frac{1}{360}n(n^2-1)(4n^2-1)(5n+6)$.

221. 設$\dfrac{\alpha^2(b-c)}{x-a}+\dfrac{\beta^2(c-a)}{x-b}+\dfrac{\gamma^2(a-b)}{x-c}=0$ 有等根，試證

$$\alpha(b-c)\pm\beta(c-a)\pm\gamma(a-b)=0.$$

222. 當 n 爲正整數時，試證

$$n=2^{n-1}-\frac{n-2}{1}2^{n-3}+\frac{(n-3)(n-4)}{\underline{|2}}2^{n-5}$$
$$-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{\underline{|3}}2^{n-7}+\cdots\cdots\cdots$$

223. 解方程式:

(1)　$x^2+2yz=y^2+2zx=z^2+2xy+3=76.$

(2)
$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a+b+c\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}&=3\\ ax+by+cz&=bc+ca+ab.\end{aligned}\right\}$$

224. 設將一直線內之 m 點各與他一直線內之 n 點相連，連線兩端止於兩線，試證除諸已知點外，諸線相交 $\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1)$ 次.

225. 已知 $y=x+x^2+x^5$，展開 x 為

$$y+ay^2+by^3+cy^4+dy^5+\cdots\cdots$$

之形式. 並證 $a^2d-3abc+2b^3=-1$.

226. 某農夫買牛，豬，羊所用之款相等，牛每頭之價較豬一隻的價貴 £1，較羊一隻之價貴 £2；計共買 47 頭. 但知豬多於牛之隻數，等於以 £9 所買之羊數：問牛，豬，羊各買若干?

227. 將 $log 2$ 化為無窮連分數

$$\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+}\cdots\cdots\cdots\frac{n^2}{1+}\cdots\cdots\cdots$$

之形式.

228. 考試中分發試卷 6 份，每份最多得 100 分. 試証投考者能共得 240 分之方法之數為

$$\frac{1}{5}\left\{\frac{|\underline{245}}{|\underline{240}}-6\cdot\frac{|\underline{144}}{|\underline{139}}+15\cdot\frac{|\underline{43}}{|\underline{38}}\right\}.$$

229. 驗下式之收斂性.

$$\frac{x}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^3}{6}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^5}{10}+\frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{x^7}{14}+\cdots\cdots$$

230. 求循環級數 $1+6+40+288+\cdots\cdots$ 之關係式，第 n 項，及 n 項和.

又證以此級數之 r 項和為第 r 項所成級數之 n 項和為

$$\frac{2}{3^2}(2^{2n}-1)+\frac{4}{7^2}(2^{3n}-1)-\frac{5n}{21}.$$

231. 某地午時之太陽，平均三日中有二日爲雲所蔽；試求在此後五日中，至少有四日之午時有太陽照耀之或能率.

232. 解方程式

$$\left.\begin{aligned} x^2+(y-z)^2=a^2 \\ y^2+(z-x)^2=b^2 \\ z^2+(x-y)^2=c^2 \end{aligned}\right\}.$$

233. 從方程式

$$\frac{x^2-xy-xz}{a}=\frac{y^2-yz-yx}{b}=\frac{z^2-zx-zy}{c},\ 及\ ax+by+cz=0$$

消去 x, y, z.

234. 設 $x^3+px^2+qx+r=0$ 之兩根同値而異號，試證 $pq=r$.

235. 求級數和：

(1) $1+2^3x+3^3x^2+\cdots\cdots+n^3n^{n-1}$,

(2) $\dfrac{25}{1^2\cdot2^3\cdot3^3}+\dfrac{52}{2^2\cdot3^3\cdot4^3}+\cdots+\dfrac{5n^2+12n+8}{n^2(n+1)^3(n+2)^3}$.

236. 設 $(1+a^3x^4)(1+a^5x^8)(1+a^9x^{16})(1+a^{17}x^{32})\cdots\cdots$

$$=1+A_4x^4+A_8x^8+A_{12}x^{12}+\cdots\cdots$$

試證 $A_{8n+4}=a^3A_{8n}$ 及 $A_{8n}=a^{2n}A_{4n}$；並求其展開式之首十項.

237. 在某水面上，由 A 至 B，水靜止不流，而由 B 至 C，則其水流動；某人順流由 A 航至 C 用 3 時，而逆流由 C 航至 A 用 $3\frac{1}{2}$ 時；設全路之水與由 B 至 C 之水流相同，則順流航行用 $2\frac{3}{4}$ 時；求在此情形下逆流回航所用之時間.

238. 試證連分數 $\dfrac{3}{2+}\ \dfrac{3}{2+}\ \dfrac{3}{2+}\cdots\cdots$ 之 n 次近值爲

$$\frac{3^{n+1}+3(-1)^{n+1}}{3^{n+1}-(-1)^{n+1}}.$$

239. 設方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots+p_n=f(x)=0$$

中之一切係數均爲整數，若 $f(0)$, $f(1)$ 各爲奇整數，試証此方程式不能有可約之根.

240. 設 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\pm\sqrt{c}=0$，試証方程式

$$\sqrt{ax+\alpha}+\sqrt{bx+\beta}+\sqrt{cx+\gamma}=0$$

可化爲簡單方程式.

解方程式

$$\sqrt{6x^2-15x-7}+\sqrt{4x^2-8x-11}-\sqrt{2x^2-5x+5}=2x-3.$$

241. 某袋內有紅綠球各三個，某人隨手取出三球後，置入藍球三個，於是復隨手取出三球. 試証此三球非三種顏色之或能率爲 8 比 3.

242. 求方程式 $x^4-7x^2+4x-3=0$ 之根之五次羃之和.

243. 有一等比級數及一調和級數，其第 p, q, r 項均爲 a, b, c: 試證

$$a(b-c)\log a+b(c-a)\log b+c(a-b)\log c=0.$$

244. 今有四數，第一，三，四 數之和較第二數大 8；第一，二兩數之平方和較第三，四兩數之平方和大 36；第一，二兩數之積與第三，四兩數之積之和爲 42；又第一數之立方等於第二，三，四，三數之立方之和；求此四數.

245. 設 T_n, T_{n+1}, T_{n+2} 爲一循環級數之相鄰三項，其關係式爲 $T_{n+2}=aT_{n+1}-bT_n$，試證

$$\frac{1}{b^n}\left\{T^2_{n+1}-aT_nT_{n+1}+bT_n^2\right\}=\text{常數}.$$

246. 從方程式

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a}, & x^2+y^2+z^2=b^2, \\ x^3+y^3+z^3=c^3, & xyz=d^3.\end{array}\right\}$$

消去 x, y, z.

247. 試證方程式

$$x^4-px^3+qx^2-rx+\frac{r^2}{p^2}=0$$

之根成比例. 由是解方程式 $x^4-12x^3+47x^2-72x+36=0$.

248.　對於一標的之射擊，A 五發中四次；B 四發中三次，C 三發中二次．今三人齊發一槍：問至少中兩彈之或能率為何？又設中兩彈，問 C 未中之或能率為何？

249.　求級數之 n 項和：

(1) $1+0-1+0+7+28+79+\cdots\cdots$；

(2) $-\frac{2.2}{1.2.3.4}+\frac{1.2^2}{2.3.4.5}+\frac{6.2^3}{3.4.5.6}+\frac{13.2^4}{4.5.6.7}+\cdots\cdots$；

(3) $3+x+9x^2+x^3+33x^4+x^4+129x^6+\cdots\cdots$

250.　解方程式：

(1) $\left.\begin{array}{l} y^2+yz+z^2=ax, \\ z^2+zx+x^2=ay, \\ x^2+xy+y^2=az. \end{array}\right\}$　　(2) $\left.\begin{array}{l} x(y+z-x)=a, \\ y(z+x-y)=b, \\ z(x+y-z)=c. \end{array}\right\}$

251.　設 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$，及 n 為奇整數，試證

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

設 $u^6-v^6+5u^2v^2(u^2-v^2)+4uv(1-u^4v^4)=0$，試證 $(u^2-v^2)^6=16u^2v^2(1-u^8)(1-v^8)$.

252.　設 $x+y+z=3p$，$yz+zx+xy=3q$，$xyz=r$，試證

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=-27p^3+36pq-8r,$$

及

$$(y+z-x)^3+(z+x-y)^3+(x+y-z)^3=27p^3-24r.$$

253.　求下式含 x，y，z 之一次因式．

$$\{a(b+c)x^2+b(c+a)y^2+c(a+b)z^2\}^2 -4abc(x^2+y^2+z^2)(ax^2+by^2+cz^2).$$

254.　試證 $\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)^{x+y+z}>x^xy^yz^z>\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{x+y+z}$.

255.　根據恆等式 $\left\{1-\frac{4x}{(1+x)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\frac{1+x}{1-x}$，　證明

$$\sum_{r=1}^{r=n}(-1)^{n-r}\frac{(n+r-1)!}{r!(r-1)!(n-r)!}=1.$$

256. 解方程式:

(1) $ax+by+z=zx+ay+b=yz+bx+a=0$.

(2) $$\left.\begin{aligned} x+y+z-u&=12,\\ x^2+y^2-z^2-u^2&=6,\\ x^3+y^3-z^3+u^3&=218,\\ xy+zu&=45.\end{aligned}\right\}.$$

257. 設 p 約等於 q, 及 $n>1$, 試證

$$\frac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

若$\frac{p}{q}$至 r 小數位與 1 相合, 問此近值通常可精確若干小數位?

258. 某婦人買茶及咖啡共 54 磅; 若茶為原額之 $\frac{5}{6}$, 咖啡為原額之$\frac{4}{5}$, 則共用錢僅為原用者之 $\frac{9}{11}$; 又若茶及咖啡之磅數互易, 則須多用 5 先令, 已知茶貴於咖啡, 及咖啡 6 磅之價較茶 2 磅之價多 5 先令; 試求各價若干?

259. 設 s_n 表首 n 個自然數中每兩數之積之和, 試證

$$\frac{2}{3!}+\frac{11}{4!}+\cdots\cdots\frac{s_{n-1}}{n!}+\cdots\cdots=\frac{11}{24}e.$$

260. 設$\dfrac{P}{pa^2+2qab+rb^2}=\dfrac{Q}{pac+q(bc-a^2)-rab}=\dfrac{R}{pc^2-2qca+ra^2}$,

試證 P,p; Q,q; 及 R,r 可互換而不變其相等.

261. 設 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 試證

$$\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}+\gamma^{n+3}$$
$$=\alpha\beta\gamma(\alpha^n+\beta^n+\gamma^n)+\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}+\gamma^{n+1}).$$

262. 設 α, β, γ, δ 為方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 之根, 試求 $\Sigma(\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2$ 以諸係數所表之值.

263. 某農夫買雞，鵝，鴨各若干；每種每隻所用之先令數同於該種之隻數；計用 10 鎊 11 先令，共買 23 隻，問每種各買若干隻?

264. 試證方程式 $(y+z-8x)^{\frac{1}{3}}+(z+x-8y)^{\frac{1}{3}}+(x+y-8z)^{\frac{1}{3}}=0$，與方程式 $x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2=0$ 同值.

265. 設方程式 $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{c}{x+c}+\frac{d}{x+d}$ 有兩等根,試證 a 或 b 等於 c 或 d；或 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. 又證此時其根為 $-a$，$-a$，0；$-b$，$-b$，0；或 $0,0,-\frac{2ab}{a+b}$.

266. 解方程式:

(1) $x+y+z=ab$，$x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=a^{-1}b$，$xyz=a^3$.

(2) $ayz-by+cz=bzx+cz+ax=cxy+cx+by=a+b+c$.

267. 求下式之最簡形式:

$$\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-a)(\alpha-\varepsilon)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\varepsilon^3}{(\varepsilon-\alpha)(\varepsilon-\beta)(\varepsilon-\gamma)(\varepsilon-\delta)}.$$

268. 在某牧師，醫生，及律師之團體中，總計年齡共為 2160 歲；平均年齡為 36 歲，僧侶及醫生之平均年齡為 39 歲，醫生及律師者為 $32\frac{8}{11}$歲；僧侶及律師者為 $36\frac{2}{3}$歲. 設每僧侶增加 1 歲；每律師增大 7 歲，每醫生增大 6 歲，則其平均年齡增大 5 歲：求每種之人數及其平均年齡.

269. 欲 $a_0x^4+4a_1x^3y+6a_2x^2y^2+4a_3xy^3+a_4y^4$ 可化為兩個 x 及 y 之一次式之四次冪之和，問其係數間須有何種條件?

270. 求下列方程式之實根:

$$x^2+v^2+w^2=a^2,\qquad vw+u(y+z)=bc,$$
$$y^2+w^2+u^2=b^2,\qquad wu+v(z+x)=ca,$$
$$z^2+u^2+v^2=c^2,\qquad uv+w(x+y)=ab.$$

271. 在結兒族 (*Gaelic*) 之文字中，强母音及弱母音之間，不能直接有一個或多個子音存在. 其强母音爲 a, o, u; 弱母音爲 e 及 i. 試證由 n 子音及母音 aeo 組成之包含 $n+3$ 個字母之結兒文字共有 $\dfrac{2\,|\underline{n+3}}{n+2}$ 個. 同文字中之字母均不相同.

272. 設 $x^2+y^2=2z^2$，此處 x, y, z 爲整數，試證

$$2x=r(l^2+2lk-k^2),\ 2y=r(k^2+2lk-l^2),\ 2z=r(l^2+k^2),$$

式中 r, l, 及 k 均爲整數.

273. 求 $\dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{2}{3+}\ \dfrac{4}{5+}\ \dfrac{6}{7+}\cdots$ 至無窮項之值.

274. 求級數之和:

(1) $\dfrac{x^2}{2.3}+\dfrac{2x^3}{3.4}+\dfrac{3x^4}{4.5}+\cdots\cdots$ 至無窮項.

(2) $\dfrac{|\underline{1}}{a+1}+\dfrac{|\underline{2}}{(a+1)(a+2)}+\cdots\cdots+\dfrac{|\underline{n}}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$.

275. 解方程式:

(1) $2xyz+3=(2x-1)(3y+1)(4z-1)+12$

$$=(2x+1)(3y-1)(4z+1)+80=0.$$

(2) $3ux-2vy=vx+uy=3u^2+2v^2=14;\quad xy=10uv.$

276. 試證
$$\begin{vmatrix} a^2+\lambda & ab & ac & ad \\ ab & b^2+\lambda & bc & bd \\ ac & bc & c^2+\lambda & cd \\ ad & bd & cd & d^2+\lambda \end{vmatrix}$$

可以 λ^3 除盡之，並求其他之因數.

277. 設 $a, b, c, \cdots\cdots$ 爲方程式

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

之根. 試求 $a^3+b^3+c^3+\cdots\cdots$ 之和，並證

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{a}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\cdots\cdots=p_1-\frac{p_{n-1}(p_1{}^2-2p_2)}{p_n}.$$

278. 根據 $\frac{1+2x}{1-x^3}$ 之展開式，或用其他方法，證明

$$1-3n+\frac{(3n-1)(3n-2)}{1\cdot 2}-\frac{(3n-2)(3n-3)(3n-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$$
$$+\frac{(3n-3)(3n-4)(3n-5)(3n-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\cdots=(-1)^n,$$

此處 n 爲整數，此級數止於首先爲零之項.

279. A，B 外出遊獵，共獲鳥 10 隻，二人所用彈數之平方和爲 2880，而每人所用彈數之積爲其所獲鳥數之積之 48 倍. 設二人所發之彈數互易，則 B 較 A 多得 5 鳥. 求各得鳥若干?

280. 試證 $8(a^3+b^3+c^3)>9(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$.

281. 試證 $\frac{2}{3-}\;\frac{4}{4-}\;\frac{6}{5-}\cdots\cdots$ 之 n 次近值爲

$$2-\frac{2^{n+1}}{\Sigma_0{}^n 2^r(n-r)!}.$$

又當 n 爲無窮大時，其極限爲何?

282. 設 $\frac{p_n}{q_n}$ 爲連分數

$$\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\;\frac{1}{a+}\;\frac{1}{b+}\;\frac{1}{c+}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

之 n 次近值，試證 $r_{3n+3}=bp_{3n}+(bc+1)q_{3n}$.

283. 設於各長 1，2，3，$\cdots\cdots\cdots n$ 吋 n 條直線中，選取四線作一能內切一圓之四邊形，試證選法有

$$\frac{1}{48}\{2n(n-2)(2n-5)-3+3(-1)^n\}\text{ 種.}$$

284. 設 u_2 及 u_3 表一切小於 n 且與之互爲質數之數之平方及立方之等差中項．試證 $n^3-6nu_2+4u_3=0$，此處 1 亦視爲質數．

285. 設 n 之形式爲 $6m-1$，試證 $(y-z)^n+(z-x)^n+(x-y)^n$ 可以 $x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$ 除盡之；又設 n 之形式爲 $6m+1$；試證其可以 $(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)^2$ 除盡之．

286. 設 S 爲 a_1, a_2, a_3, ……a_n 等 n 數之 m 次冪之和，及 P 爲其中每 m 個相乘之積之和，試證

$$|\underline{n-1} \cdot S > |\underline{n-m} \cdot |\underline{m} \cdot P.$$

287. 設方程式

$$x^3+qx-r=0, \text{ 及 } rx^3-2q^2x^2-5qrx-2q^3-r^2=0$$

有一公根，試證第一方程式有一對等根；又設此等根爲 a，試求第二方程式之一切根．

288. 設 $x\sqrt{2a^2-3x^2}+y\sqrt{2a^2-3y^2}+z\sqrt{2a^2-3z^2}=0$，此處 a^2 表 $x^2+y^2+z^2$，試證

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)=0.$$

289. 求 x_1, x_2,……x_n 適合下列聯立方程式之値：

$$\frac{x_1}{a_1-b_1}+\frac{x_2}{a_1-b_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_1-b_n}=1,$$

$$\frac{x_1}{a_2-b_1}+\frac{x_2}{a_2-b_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_2-b_n}=1,$$

……………………………………

$$\frac{x_1}{a_n-b_1}+\frac{x_2}{a_n-b_2}+\cdots+\frac{x_n}{a_n-b_n}=1.$$

290. 試證 $\begin{vmatrix} yz-x^2 & zx-y^2 & xy-z^2 \\ zx-y^2 & xy-z^2 & yz-x^2 \\ xy-z^2 & yz-x^2 & zx-y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r^2 & u^2 & u^2 \\ u^2 & r^2 & u^2 \\ u^2 & u^2 & r^2 \end{vmatrix}$,

此處 $r^2=x^2+y^2+z^2$，及 $u^2=yz+zx+xy$.

291. A, B, C 三人做一工程；最初 A 獨作，數日後 B 加入，又於數日後 C 始加入．設 B,C 工作其確作時間之二倍，則不需 A 之助，彼二人能完成此工程．又若 A 工作其確作日數之 $\frac{2}{3}$ 日，C 作其確作日數之四倍，則不需 B 之助，而 A, C 亦可完成之；或 A; B 同作 40 日不用 C；或三人同作 B 所曾作之日數亦足以完成之．已知 B 開始工作前之日數比 C 開始工作前之日數等於 3 比 5：試求每人工作之日數．

292. 設 S_r 表 1, x, x^2, x^3, $\cdots\cdots x^{n-1}$ 中 r 個相乘之積之和，試證 $S_{n-r}=S_r.\ x^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2r)}$.

293. 設 a, b, c 爲正數，且任二數之和大於第三數，試證

$$\left(1+\frac{b-c}{a}\right)^a\left(1+\frac{c-a}{b}\right)^b\left(1+\frac{a-b}{c}\right)^c<1.$$

294. 將

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)(a^2+b^2+c^2)-8a^2b^2c^2$$

析爲因子，並證

$$4\{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+(\alpha+\beta+\gamma)^4\}=(\beta+\gamma)^4+(\gamma+\alpha)^4+(\alpha+\beta)^4$$
$$+6(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2+6(\gamma+\alpha)^2(\alpha+\beta)^2+6(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2.$$

295. 試證 1, 2, 3, $\cdots\cdots n$ 諸數及其乘羃之 r 次齊次積之和爲

$$\frac{(-1)^{n-1}}{\lfloor n-1}\left\{1^{n+r-1}-\frac{n-1}{1}\cdot 2^{n+r-1}+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}-3^{n+r-1}-\cdots\cdots\right.$$
$$\left.\text{至 } n \text{ 項.}\right\}$$

296. 設 n 爲正整數，試證

$$1-3n+\frac{3n(3n-3)}{1\cdot 2}-\frac{3n(3n-4)(3n-5)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots\cdots=2(-1)^n.$$

297. 設 $x(2a-y)=y(2a-z)=z(2a-u)=u(2a-x)=b^2$，試證除 $b^2=2a^2$ 外，$x=y=z=u$；又若 $b^2=2a^2$ 適合此條件，則諸方程式非獨立方程式．

298. 設 a, b, c 爲不等之正數，試證由方程式

$$ax+yz+z=0,\quad zx+by+z=0,\quad yz+zx+c=0$$

得 x, y, z 之三組不同實根；而 x 之三值之積比 y 之三值之積爲 $b(b-c):a(c-a)$。

299. 設 $A=ax-by-cz,\ D=bz+cy,$

$$B=by-cz-ax,\quad E=cx+az,$$

$$C=cz-ax-by,\quad F=ay+bx,$$

試證 $ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF$

$$=(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)(x^2+y^2+z^2).$$

300. 某學者辨認一不清晰之遠年稿件．由已往之經驗，知每日辨認之字數與每日散步之哩數及工作之時數合變．彼第一日照常，從第二日起每日多行一哩，多工作一時．此書共有 232000 字，彼第一日認出 12000 字，末一日認出 72000 字，而在全時間之中間日已認出 62000 字：求彼日常散步之哩數及工作之時數．

答　　　案

習題一.　頁 10 至 12

1. (1) $54b:x$. (2) 9:7. (3) $bx:ay$.　　2. 18.　　3. 385,660.

4. 11.　　5. 5:13.　　6. 5:6 或 $-3:5$.

10. $\frac{x}{4}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$, 或 $\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$.　　17. $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.

20. 3,4,1.　　21. $-3,4,1$.　　22. 7,3,2.　　23. 3,4,1.

25. $\pm a(b^2-c^2), \pm b(c^2-a^2), \pm c(a^2-b^2)$.

26. $bc(b-c), ca(c-a), ab(a-b)$.

習題二.　頁 19 至 20

1. 45.　　2. (1) 12. (2) $300a^3b$.　　3. $\frac{x^3}{y(x^2+y^2)}$.

13. $0, 5, \frac{8}{7}$.　　14. 0,3,8.　　15. $\frac{a(b+c)}{cm-bm-2an}$.

18. 8.　　19. 6,9,10,15.　　20. 從 A 取 3 罌;從 B 取 8 罌.

21. 45 罌.　　23. 17:3.　　24. $a=4b$.

25. 64% 銅, 36% 鋅.　　26. 63 或 12 分鐘.

習題三.　頁 26 至 27

1. $5\frac{1}{3}$.　　2. 9.　　3. $1\frac{1}{3}$.　　4. 2.　　7. 60.

9. $y=2x-\frac{8}{x}$.　　10. $y=5x+\frac{36}{x^2}$.　　11. 4.

12. $x=\frac{22}{15}z+\frac{2}{15z}$.　　14. 36.　　15. 1610 呎; 305·9 呎.

16. 22[illegible] 立方呎.　　17. 4:3.

18. 此會連續 6 日; 第 4,5,6 等日.

20　16,25 年; £200, £250.　　21. 1 日 18 時 28 分.

22. 速度每時 12 哩時耗費最小; 此時每哩耗費 £$\frac{3}{32}$, 百哩路程耗費 £9.7s.6d.

習題四.A. 頁 31 至 32

1. $277\frac{1}{2}$. 2. 153. 3. 0. 4. $\dfrac{n(10-n)}{3}$. 5. 30.
6. -42. 7. -185. 8. $1325\sqrt{3}$. 9. $75\sqrt{5}$.
10. $820a-1680b$. 11. $n(n+1)a-n^2b$. 12. $\dfrac{21}{2}(11a-9b)$.
13. $-\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{4},\cdots,-9\frac{1}{4}$. 14. $1,-1\frac{1}{2},\cdots,-39$. 15. $-33x,-31x,\cdots,x$.
16. $x^2-x+1,x^2-2x+2,\cdots,x$. 17. n^2. 18. 3. 19. 5.
20. 612. 21. 4,9,14. 22. 1,4,7. 23. 495. 24. 160.
25. $\dfrac{p(p+1)}{2a}+pb$. 26. $n(n+1)a-\dfrac{n^2}{a}$.

習題四.B. 頁 35 至 36

1. 10 或 -8. 2. 8 或 -13. 3. 2,5,8,⋯
4 首項 8, 項數 59.
5. 首項 $7\frac{1}{2}$, 項數 54.
6. £51, £53, £55,⋯ 7. 12. 8. 25.
9. $\dfrac{n}{2(1-x)}(2+\overline{n-3}\cdot\sqrt{x})$. 10. n^2. 12. $-(p+q)$.
13. 3,5,7,9. [設四數為 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$.]
14 2,4,6,8. 15. $p+q-m$. 16. 12 或 -17. 17. $6r-1$.
20. $10p-8$. 21. 8 項. 級數 $1\frac{1}{2},3,4\frac{1}{2},\cdots\cdots$
22 3,5,7;4,5,6. 23. $ry=(n+1-r)x$.

習題五.A. 頁 41 至 42

1. $\dfrac{2059}{1458}$. 2. $\dfrac{1281}{512}$. 3. $191\frac{1}{4}$. 4. -682.
5. $\dfrac{1093}{45}$. 6. $\dfrac{1}{4}(5^p-1)$. 7. $\dfrac{9}{7}\left\{1-\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2n}\right\}$. 8. $364(\sqrt{3}+1)$.
9. $\dfrac{1}{2}(585\sqrt{2}-292)$. 10. $-\dfrac{463}{192}$. 11. $\dfrac{3}{2},1,\dfrac{2}{3}$.
12. $\dfrac{16}{3},8\cdots,27$. 17. 13. $-7,\dfrac{7}{2},\cdots,\dfrac{7}{32}$. 14. $\dfrac{64}{65}$.
15. $\dfrac{27}{58}$. 16. ·999. 17. $\dfrac{1}{2}$. 18. $\dfrac{3(3+\sqrt{3})}{2}$.
19. $7(7+\sqrt{42})$. 20. 2. 21. 16,24,36,⋯ 22. 2.
23. 2. 24. 8,12,18. 25. 2,6,18. 28. $6,-3,1\frac{1}{2}\cdots\cdots$

習題五. B. 頁 45 至 46

1. $\dfrac{1-a^n}{(1-a)^2}-\dfrac{na^n}{1-a}$.　2. $\dfrac{8}{3}$.　3. $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$.

4. $4-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{n}{2^{n-1}}$.　5. 6.　6. $\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

9. $\dfrac{1}{(1-r)(1-br)}$.　10. 40, 20, 10.　11. $4, 1, \dfrac{1}{4}, \cdots\cdots$

12. $\dfrac{x(x^n-1)}{x-1}+\dfrac{n(n+1)a}{2}$.　13. $\dfrac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1}+\dfrac{xy(x^ny^n-1)}{xy-1}$.

14. $4p^2a+\dfrac{2}{9}\left(1-\dfrac{1}{2^{2p}}\right)$.　15. $1\frac{1}{8}$.　16. $\dfrac{23}{48}$.　19. $n.2^{n+2}-2^{n+1}+2$.

20. $\dfrac{(1+a)(a^nc^n-1)}{ac-1}$.　21. $\dfrac{a}{r-1}\left\{\dfrac{r(r^{2n}-1)}{r^2-1}-n\right\}$.

習題六. A. 頁 52 至 53

1. (1) 5. (2) $3\frac{1}{2}$. (3) $3\dfrac{29}{32}$.　2. $6\dfrac{1}{9}$, $7\dfrac{6}{7}$.　3. $\dfrac{2}{5}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{11}$.

4. 6 及 24.　5. 4:9.　10. $n^2(n+1)$.

11. $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n+3)$.　12. $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

13. $\frac{1}{3}n(n+1)(n^2+3n+1)$.　14. $\frac{1}{2}(3^{n+1}+1)-2^{n+1}$.

15. $4^{n+1}-4-n(n+1)(n^2-n-1)$.

18. 第 n 項$=b+c(2n-1)$,於 n 之一切值均大於 1,第一項爲$a+b+c$;其他各項成 *A P*. $b+3c$, $b+5c$, $b+7c$, $\cdots$

19. n^4.　22. $\dfrac{n}{2}(2a+\overline{n-1}d)\left\{a^2+(n-1)ad+\dfrac{n(n-1)}{2}d^2\right\}$.

習題六 B. 頁 56

1. 1240.　2. 1140.　3. 16646.　4. 2470.
5. 21321.　6. 52.　7. 11879.　8. 1840.
9. 11,940.　10. 190.　11. 300.　12. 18296.
14. 三角堆之彈數爲 364; 平方堆之彈數爲 4900.　15. 120.
16. $n-1$.

習題七. A. 頁 59

1. 333244.　2. 728626.　3. 1740137.　4. e7074.
5. 112022.　6. 334345.　7. 17832126.　8. 1625.
9. 2012.　10. 342.　11. ttt90001.　12. 231.
13. 1456.　14. 7071.　15. cee.　16. (1) 121. (2) 122000.

習題七. B. 頁 65 至 66

1. 20305.　2. 4444.　3. 11001110.　4. 2000000.
5. 7338.　6. 34402.　7. 6587.　8. 8978.

9. 26011. 10. 37214. 11. 30034342. 12. 710ℓe3.

13. 2714687. 14 $\cdot\dot{2}04\dot{6}$. 15. 15·1t6. 16. 20·73.

17. $125\cdot01\dot{2}\dot{5}$. 18. $\frac{5}{8}$. 19. $\frac{2}{8}$, $\frac{5}{8}$. 20. 九.

21. 四. 22. 十二. 23. 八. 24. 十一.

25. 十二. 26. 十. 30. $2^{11}+2^7+2^6$.

31. $3^9-3^8-3^7-3^6-3^5+3^3+3^2+1$.

習題八.A. 頁 72, 73

1. $\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ 2. $\dfrac{3+\sqrt{6}+\sqrt{15}}{6}$.

3. $\dfrac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}-\sqrt{ab(a+b)}}{2ab}$. 4. $\dfrac{a-1+\sqrt{a^2-1}+\sqrt{2a(a-1)}}{a-1}$.

5. $\dfrac{3\sqrt{30}+5\sqrt{15}-12-10\sqrt{2}}{7}$. 6. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$.

7. $3^{\frac{5}{3}}+3^{\frac{4}{3}}.2^{\frac{1}{2}}+3.2+3^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{1}{3}}.2^{2}+2^{\frac{5}{2}}$.

8. $5^{\frac{5}{6}}-5^{\frac{4}{6}}.2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{3}{6}}.2^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{2}{6}}.2+5^{\frac{1}{6}}.2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{5}{3}}$.

9. $a^{\frac{11}{6}}-a^{\frac{10}{6}}b^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{9}{6}}b^{\frac{1}{2}}-\cdots+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{10}{4}}-b^{\frac{11}{4}}$. 10. $3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}+1$.

11. $2^3-2^2.7^{\frac{1}{4}}+2.7^{\frac{1}{2}}-7^{\frac{3}{4}}$.

12. $5^{\frac{11}{3}}+5^{\frac{10}{3}}.3^{\frac{1}{4}}+5^3.3^{\frac{2}{4}}+\cdots+5^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{10}{4}}+3^{\frac{11}{4}}$. 13. $\dfrac{1-3^{\frac{2}{3}}+3^{\frac{1}{3}}}{2}$.

14. $17-3^{\frac{5}{3}}.2^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{4}{3}}.2^2-3.2^{\frac{5}{2}}+3^{\frac{2}{3}}.2^3-3^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{7}{2}}$.

15. $3^2.2^{\frac{1}{2}}-3^{\frac{5}{3}}.2+3^{\frac{4}{3}}.2^{\frac{3}{2}}-3.2^2+3^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{5}{2}}-3^{\frac{1}{3}}.2^3$.

16. $\dfrac{1}{2}\left(3^{\frac{5}{6}}-3^{\frac{4}{6}}+3^{\frac{3}{6}}-3^{\frac{2}{6}}+3^{\frac{1}{6}}-1\right)$. 17. $\dfrac{2^5+2^{\frac{31}{6}}+2^{\frac{26}{6}}+2^{\frac{21}{6}}+2^{\frac{16}{6}}+2^{\frac{11}{6}}+1}{31}$.

18. $\dfrac{3^{\frac{3}{2}}+3^{\frac{5}{6}}+3^{\frac{1}{6}}}{8}$. 19. $\sqrt{5}+\sqrt{7}-2$.

20. $\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\sqrt{3}$. 21. $1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$. 22. $1+\sqrt{\dfrac{3}{2}}-\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

23. $2+\sqrt{a}-\sqrt{3b}$. 24. $3-\sqrt{7}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$. 25. $1+\sqrt{3}$.

26. $2+\sqrt{5}$. 27. $3-2\sqrt{2}$. 28. $\sqrt{14}-2\sqrt{2}$.

29. $2\sqrt{3}+\sqrt{5}$.　30. $3\sqrt{3}-\sqrt{6}$.　31. $\sqrt{\frac{2a+x}{2}}+\sqrt{\frac{x}{2}}$.

32. $\sqrt{\frac{3a+b}{2}}-\sqrt{\frac{a-b}{2}}$.　33. $\sqrt{\frac{1+a+a^2}{2}}+\sqrt{\frac{1-a+a^2}{2}}$.

34 $\frac{1}{\sqrt[4]{1-a^2}}\left(\sqrt{\frac{1+a}{2}}+\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)$.

35. $11+56\sqrt{3}$.　36. 289.　37. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

38. $3\sqrt{3}+5$.　39. 3.　40. $8\sqrt{3}$.

41. $3+\sqrt{5}=5\cdot23607$.　42. $x^2+1+\sqrt[3]{4}+x-x\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}$.

43. $3a+\sqrt{b^2-3a^4}$.　44. $\frac{a-1}{2}$.

習題八.B.　頁 81 至 82

1. $6-2\sqrt{6}$.　2. -13.　3. $e^{2\sqrt{-1}}-e^{-2\sqrt{-1}}$.

4 x^2-x+1.　5. $\frac{3+\sqrt{-2}}{11}$.　6. $-19-6\sqrt{10}$.

7. $-\frac{8}{29}$.　8. $\frac{4ax\sqrt{-1}}{a^2+x^2}$.　9. $\frac{2(3x^2-1)\sqrt{-1}}{x^2+1}$.

10. $\frac{3a^2-1}{2a}$.　11. $\sqrt{-1}$.　12. 100.

13. $\pm(2+3\sqrt{-1})$.　14. $\pm(5-6\sqrt{-1})$　15. $\pm(1+4\sqrt{-3})$.

16. $\pm2(1-\sqrt{-1})$.　17. $\pm(a+\sqrt{-1})$.

18. $\pm\{(a+b)-(a-b)\sqrt{-1}\}$.　19. $-\frac{9}{13}+\frac{19}{13}i$.

20. $\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{6}}{14}i$.　21. i.　22. $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$.　23. $\frac{2b(3a^2-b^2)}{x^2+b^2}i$.

習題九.A.　頁 88 至 90

1. $35x^2+13x-12=0$.　2. $mnx^2+(n^2-m^2)x-mn=0$.

3. $(p^2-q^2)x^2+4pqx-p^2+q^2=0$.　4. $x^2-14x+29=0$.

5. $x^2+10x+13=0$.　6. $x^2+2px+p^2-8q=0$.

7. $x^2+6x+34=0$.　8. $x^2+2ax+a^2+b^2=0$.

9. $x^2+a^2-2ab+b^2=0$.　10. $6x^3+11x^2-19x+6=0$.

11. $2ax^3+(4-a^2)x^2-2ax=0$.　12. $x^3-8x^2+17x-4=0$.

14. 3,5.　15. $2,-\frac{10}{9}$.　16. $\frac{a-b}{a+b}$.

18. $\frac{b^2-2ac}{c^2}$.　19. $\frac{bc^4(3ac-b^2)}{a^7}$.　20. $\frac{a^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}$.

21. 7.　22. -15.　23. 0.　24. $x^2-2(p^2-2q)x+p^2(p^2-4q)=0$.

26. (1) $\dfrac{b^2-2ac}{a^2c^2}$.　　(2) $\dfrac{b(b^2-3ac)}{a^3c^3}$.　　27. $nb^2=(1+n)^2ac$.

28. $a^2c^2x^2-(b^2-2ac)(a^2+c^2)x+(b^2-2ac)^2=0$.

29. $x^2-4mnx-(m^2-n^2)^2=0$.

習題九.B.　頁 92，93

1. 2 及 -2.　　5. $lx^2-2ax+a=0$.

6. (1) $\dfrac{p(p^2-4q)(p^2-q)}{q}$.　　(2) $\dfrac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$.　　11. $\dfrac{1}{3}$.

習題九.C.　頁 96

1. -2.　　2. ± 7.　　5. $(ln'-l'n)^2=(lm'-l'm)(mn'-m'n)$.

7. $(aa'-bb')^2+4(ha'+h'b)(hb'+h'a)=0$.

10 $(bb'-2ac'-2a'c)^2=(b^2-4ac)(b'^2-4a'c')$；化簡則爲 $(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$.

習題十.A.　頁 101，102

1. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}$.　　2. $\pm\frac{1}{3}, \pm 1$.　　3. $4, \frac{1}{4}$.　　4. $\frac{4}{9}, \frac{1}{4}$.

5. $3^n, 2^n$.　　6. $1, 2^{2n}$.　　7. $27, \frac{25}{147}$.　　8. $\frac{9}{13}, \frac{4}{13}$.

9. $\frac{1}{9}, \frac{25}{4}$.　　10. $-1, -\frac{1}{32}$.　　11. 2, 0.　　12. ± 1.

13. -4.　　14. ± 3.　　15. 0.　　16. $\frac{1}{8}$, 450.

17. $9, -7, 1\pm\sqrt{-24}$.　18. $2, -4, -1\pm\sqrt{71}$.　19. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3\pm\sqrt{-47}}{4}$.

20. $4, -\frac{7}{2}, \frac{1\pm\sqrt{65}}{4}$.　21. $2, -8, -3\pm 3\sqrt{5}$.　22. $3, -\frac{5}{3}, \frac{2\pm\sqrt{70}}{3}$.

23. $5, \frac{1}{3}, \frac{8\pm\sqrt{148}}{3}$.　24. $7, -\frac{14}{3}, \frac{7\pm\sqrt{37}}{6}$.　25. $2, \frac{1}{2}, \frac{5\pm\sqrt{201}}{4}$.

26. $5, -\frac{7}{3}, \frac{8\pm\sqrt{415}}{6}$.　27. 1, 3.　　28. $5, \frac{1}{2}$.

29. $1, 9, -\frac{18}{5}$.　　30. $a, \frac{a}{2}, -\frac{a}{3}$.　　31. $2, -\frac{9}{2}$.

32. $4, -\frac{10}{3}$,　　33. 0, 5.　　34. $6, -\frac{5}{2}$.

35. $1, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.　36. $3, \frac{1}{3}, \frac{-1\pm\sqrt{-35}}{6}$.　37. $2\pm\sqrt{3}, \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

38. $2, -\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{5}$.　39. $3a, -4a$.　　40. $\pm\frac{2a}{5}$.

41. 0, 1, 3.　42. $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$.

43. $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$.　44. 3, −1.　45. ±1.

46. 13.　47. 4.　48. 0, $\frac{63a}{65}$.

49. 1, $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+4}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4}$.　50. ±5.　51. 5, −4, $\frac{1\pm\sqrt{-75}}{2}$.

52. $-\frac{1}{3}$, $\frac{1\pm\sqrt{-31}}{6}$.

習題十.B.　頁 106, 107

1. $x=5,-\frac{8}{3};y=4,-\frac{15}{2}$.　2. $x=2,-\frac{8}{19};y=7,-\frac{97}{19}$.

3. $x=1,-\frac{53}{88};y=1,-\frac{25}{22}$.　4. $x=\pm5,\pm3;y=\pm3,\pm5$.

5. $x=8,2;y=2,8$.　6. $x=45,5;y=5,45$.

7. $x=9,4;y=4,9$.　8. $x=\pm2,\pm3;y=\pm1,\pm2$.

9. $x=\pm2,\pm3;y=\pm3,\pm4$.　10. $x=\pm5,\pm3;y=\pm3,\pm4$.

11. $x=\pm2,\ \pm1;y=\pm1,\pm3$.

12. $x=\pm\sqrt{3},\pm\sqrt{\frac{3}{19}};y=0,\pm6\sqrt{\frac{3}{19}}$.

13. $x=5,3,4\pm\sqrt{-97};y=3,5,4\mp\sqrt{-97}$.

14. $x=4,\ -2,\pm\sqrt{-15}+1;y=2,-4,\pm\sqrt{-15}-1$.

15. $x=4,-2,\pm\sqrt{-11}+1;y=2,-4,\pm\sqrt{-11}-1$.

16. $x=\frac{4}{5},\ \frac{1}{5};y=20,5$.　17. $x=2,1;y=1,2$.

18. $x=6,4;y=10,15$.　19. $x=729,343;y=343,729$.

20. $x=16,\ 1;y=1,16$.　21. $x=9,4;y=4,9$.

22. $x=5;y=\pm4$.　23. $x=1,\frac{5}{3};y=2,\frac{2}{3}$.

24. $x=9,1;y=1,9$.　25. $x=\pm25;y=\pm9$.

26. $x=6,2,4,3;\ y=1,3,\ \frac{3}{2},\ 2$.

27. $x=\pm5,\pm4,\ \pm\frac{5}{2},\ \pm2;y=\pm5,\pm4,\pm10,\pm8$.

28. $x=4,\frac{107}{13};y=1,\frac{48}{13}$.

29. $x=-6,\frac{1\pm\sqrt{-143}}{2};y=-3,\frac{1\pm3\sqrt{-143}}{4}$.

30. $x=0,9,3;y=0,3,9$.　31. $x=0,1,\frac{15}{22};y=0,2,\frac{9}{22}$.

32. $x=5,\frac{10}{23},0;y=3,-\frac{6}{23},-\frac{4}{7}$. 33. $x=2,\sqrt[3]{4},2;y=2,2\sqrt[3]{4},6$.

34. $x=1,\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}};y=2,3\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$.

35. $x=\pm3,\pm\sqrt{-18};y=\pm3,\mp\sqrt{-18}$.

36. $x=y=\pm2$.

37. $x=0,\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};y=0,\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},-\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

38. $x=b,\frac{b(-1\pm\sqrt{3})}{2};y=a,a(1\mp\sqrt{3})$.

39. $x=\frac{a^2}{b},\frac{a(2b-a)}{b};y=\frac{b^2}{a},\frac{b(2a-b)}{a}$.

40. $x=0,\pm a\sqrt{7},\pm a\sqrt{13},\pm3a,\pm a;y=0,\pm b\sqrt{7},\pm b\sqrt{13},\mp b,\mp3b$.

41. $x=\pm1,\pm\frac{2a^2}{\sqrt{16a^4-a^2-1}};y=\pm2a,\mp\frac{a}{\sqrt{16a^4-a^2-1}}$.

習題十.C. 頁 109, 110

1. $x=\pm3;y=\pm5;z=\pm4$. 2. $x=5;y=-1;z=7$.

3. $x=5,-1;y=1,-5;z=2$. 4. $x=8,-3;y=3;z=3,-8$.

5. $x=4,3,\frac{2\pm\sqrt{151}}{3};y=3,4,\frac{2\mp\sqrt{151}}{3};z=2,-\frac{11}{3}$.

6. $x=\pm3;y=\mp2;z=\pm5$. 7. $x=\pm5;y=\pm1;z=\pm1$.

8. $x=8,-8;y=5,-5;z=3,-3$. 9. $x=3;\ y=4;z=\frac{1}{2};u=\frac{1}{3}$.

10. $x=1;y=2;z=3$. 11. $x=5,-7;y=3,-5;z=6,-8$.

12. $x=1,-2;y=7,-3;z=3,-\frac{11}{3}$.

13. $x=4,\frac{60}{7};y=6,\frac{66}{7};z=2,-6$. 14. $x=a,0,0;y=0,a,0;z=0,0,a$.

15. $x=\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{6}a;y=\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{-5\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{6}a;$

$z=\frac{a}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{-9}}{3}a$.

16. $x=a,-2a,\frac{7\pm\sqrt{-15}}{2}a;y=4a,a,\frac{-11\pm\sqrt{-15}}{2}a;$

$z=2a,-4a,(1\pm\sqrt{-15})a$.

習題十.D. 頁 113

1. $x=29,21,13,5;y=2,5,8,11$.

2. $x=1,3,5,7,9;y=24,19,14,9,4$.

3. $x=20,8;y=1,8$. 4. $x=9,20,31;y=27,14,1$.

5. $x=30,5;y=9,32$. 6. $x=50,3;y=3,44$.

7. $x=7p-5,2;y=5p-4,1$. 8. $x=13p-2,11;y=6p-1,5$.

9. $x=21p-9, 12; y=8p-5, 3$. 10. $x=17p, 17; y=13p, 13$.
11. $x=19p-16, 3; y=23p-19, 4$. 12. $x=77p-74, 3; y=30p-25, 5$.
13. 馬 11 匹,牛 15 頭. 14. 101. 15. 56,25 或 16,65.
16. 付 3 金泥找回 21 半克郎.
17. 1147;無限個形爲 $1147+39\times56p$ 之數.
18. 付 17 福勞音找回 3 半克郎. 19. 37, 99; 77, 59; 117, 19.
20. 28 羊,1 猪,11 牛;或 13 羊,14 猪,13 牛.
21. 3 薩瓦林,11 半克郎,13先令.

習題十一.A. 頁 122至 124.

1. 12. 2. 224. 3. 40320,6375600,10626,11628.
4. ~~6720.~~ 5. 15. 6. 40320;720. 7. 15,360.
8. 6. 420 9. 120. 10. 720. 11. 10626,1771.
12. 1440. 13. 6375600. 14. 360,144. 15. 230300.
16. 1140,231. 17. 144. 18. 224 896. 19. 848.
20. 56. 21. 360000. 22. 2052000. 23. 369600.
24. 21600. 25. $\dfrac{|\underline{45}}{|\underline{10}\,|\underline{15}\,|\underline{20}}$. 26. 2520. 27. 5760.
28. 3456. 29. 2903040. 30. 25920. 32. 41.
33. 1956. 34. 7.

習題十一.B. 頁 131 至 132.

1. (1) 1663200. (2) 129729600. (3) 3326400. 2. 4084080.
3. 151351200. 4. 360. 5. 72. 6. 125.
7. n^r. 8. 531441. 9. p^n. 10. 30.
11. 1260. 12. 3374. 13. 455. 14. $\dfrac{|\underline{a+2b+3c+d}}{|\underline{a}\,(|\underline{b})^2(|\underline{c})^3}$
15. 4095. 16. 57760000. 17. 1023. 18. 720;3628800.
19. 127. 20. 315. 21. $\dfrac{|\underline{mn}}{(|\underline{m})^n\,|\underline{n}}$ 22. 64;325. 23. 42.
24. (1) $\dfrac{p(p-1)}{2}-\dfrac{q(q-1)}{2}+1$; (2) $\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}-\dfrac{q(q-1)(q-2)}{6}$.
25. $\dfrac{p(p-1)(p-2)}{6}-\dfrac{q(q-1)(q-2)}{6}+1$. 26. $(p+1)^n-1$.
27. 113;2190. 28. 2454. 29. 6666600. 30. 5199960.

習題十三.A. 頁 142至 143.

1. $x^5-15x^4+90x^3-270x^2+405x-243$.
2. $81x^4+216x^3y+216x^2y^2+96xy^3+16y^4$.

3. $32x^5-80x^4y+80x^3y^2-40x^2y^3+10xy^4-y^5$.
4. $1-18a^2+135a^4-540a^6+1215a^8-1458a^{10}+729a^{12}$.
5. $x^{10}+5x^9+10x^8+10x^7+5x^6+x^5$.
6. $1-7xy+21x^2y^2-35x^3y^3+35x^4y^4-21x^5y^5+7x^6y^6-x^7y^7$.
7. $16-48x^2+54x^4-27x^6+\dfrac{81x^8}{16}$.
8. $729a^6-972a^5+540a^4-160a^3+\dfrac{80a^2}{3}-\dfrac{64a}{27}+\dfrac{64}{729}$.
9. $1+\dfrac{7x}{2}+\dfrac{21x^2}{4}+\dfrac{35x^3}{8}+\dfrac{35x^4}{16}+\dfrac{21x^5}{32}+\dfrac{7x^6}{64}+\dfrac{x^7}{128}$.
10. $\dfrac{64x^6}{729}-\dfrac{32x^4}{27}+\dfrac{20x^2}{3}-20+\dfrac{135}{4x^2}-\dfrac{243}{8x^4}+\dfrac{729}{64x^6}$.
11. $\dfrac{1}{256}+\dfrac{a}{16}+\dfrac{7a^2}{16}+\dfrac{7a^3}{4}+\dfrac{35a^4}{8}+7a^5+7a^6+4a^7+a^8$.
12. $1-\dfrac{10}{x}+\dfrac{45}{x^2}-\dfrac{120}{x^3}+\dfrac{210}{x^4}-\dfrac{252}{x^5}+\dfrac{210}{x^6}-\dfrac{120}{x^7}+\dfrac{45}{x^8}-\dfrac{10}{x^9}+\dfrac{1}{x^{10}}$.

13. $-35750x^{10}$.　14. $-112640x^9$.　15. $-312x^2$.

16. $\dfrac{|\underline{30}}{|\underline{27}\;|\underline{3}}(5x)^3(8y)^{27}$.　17. $40a^7b^3$.　18. $\dfrac{1120}{81}a^4b^4$.

19. $\dfrac{10500}{x^3}$.　20. $\dfrac{70x^6y^{10}}{a^7b^6}$.　21. $2x^4+24x^2+8$.

22. $2x(16x^4-20x^2a^2+5a^4)$.　23. $140\sqrt{2}$.

24. $2(365-363x+63x^2-x^3)$.　25. 252.　26. $-\dfrac{429}{16}x^{14}$.

27. $110565a^4$.　28. $84a^3b^6$.　29. $1365, -1365$.

30. $\dfrac{189a^{17}}{8}, -\dfrac{21}{16}x^{19}$.　31. $\dfrac{7}{18}$.　32. 18564.

33. $\dfrac{|\underline{n}}{|\underline{\tfrac12(n-r)}\;|\underline{\tfrac12(n+r)}}$.　34. $(-1)^n\dfrac{|\underline{3n}}{|\underline{n}\;|\underline{2n}}$.

習題十三.B.　頁147至148.

1. 第9.　2. 第12.　3. 第6.　4. 第10及第11.

5. 第三$=6\frac{2}{3}$.　6. 第4及第5 $=\dfrac{7}{144}$.　9. $x=2, y=3, n=5$.

10. $1+8x+20x^2+8x^3-26x^4-8x^5+20x^6-8x^7+x^8$.

11. $27x^6-54ax^5+117a^2x^4-116a^3x^3+117a^4x^2-54a^5x+27a^6$.

12. $\dfrac{\lfloor\underline{n}}{\lfloor\underline{r-1}\,\lfloor\underline{n-r+1}}x^{r-1}a^{n-r+1}$.　　13. $(-1)^p\dfrac{\lfloor\underline{2n+1}}{\lfloor\underline{p+1}\,\lfloor\underline{2n-p}}x^{3p-2n+1}$.

14. 14.　　15. $2r=n$.

習題十四.A.　頁 155.

1. $1+\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{8}x^2+\dfrac{1}{16}x^3$.　　2. $1+\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{8}x^2-\dfrac{1}{16}x^3$.

3. $1-\dfrac{2}{5}x-\dfrac{3}{25}x^2-\dfrac{8}{125}x^3$.　　4. $1-2x^2+3x^4-4x^6$.

5. $1-x-x^2-\dfrac{5}{3}x^3$.　　6. $1+x+2x^2+\dfrac{14}{3}x^3$.

7. $1-x+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{5}{2}x^3$.　　8. $1-x+\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{10}{27}x^3$.

9. $1+x+\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{x^3}{54}$.　　10. $1-2a+\dfrac{5}{2}a^2-\dfrac{5}{2}a^3$.

11. $\dfrac{1}{8}\left(1-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{5}{4}x^3\right)$.　　12. $3\left(1+\dfrac{x}{9}-\dfrac{1}{162}x^2+\dfrac{1}{1458}x^3\right)$.

13. $4\left(1+a-\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{6}a^3\right)$.　　14. $\dfrac{1}{27}\left(1+x+\dfrac{5}{6}x^2+\dfrac{35}{54}x^3\right)$.

15. $\dfrac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}\left(1+\dfrac{x}{a}+\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{x^3}{a^3}\right)$.　　16. $-\dfrac{429}{16}x^7$.　　17. $\dfrac{77}{256}x^{30}$.

18. $-\dfrac{1040}{81}a^{18}$.　　19. $\dfrac{16b^4}{243a^5}$.　　20. $(r+1)x^r$.

21. $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}x^r$.　　22. $(-1)^{r-1}\dfrac{1.3.5\cdots(2r-3)}{2^r\lfloor\underline{r}}x^r$.

23. $(-1)^{r-4}\dfrac{11.8.5\ 2.1.4\cdots(3r-14)}{3^r\lfloor\underline{r}}x^r$.

24. $-1848x^{13}$.　　25. $-\dfrac{19712}{3}x^6$.

習題十四. B. 頁 161,162.

1. $(-1)^r\dfrac{1.3.5.7\cdots(2r-1)}{2^r\lfloor\underline{r}}x^r$.　　2. $\dfrac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{\lfloor\underline{4}}x^r$.

3. $(-1)^{r-1}\frac{1\cdot2\cdot5\cdots(3r-4)}{\underline{|r}}x^r$. 4. $(-1)^r\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3r-1)}{3^r\underline{|r}}x^r$.

5. $(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{\underline{|2}}x^{2r}$. 6. $\frac{3\cdot5\cdot7\cdots(2r+1)}{\underline{|r}}x^r$.

7. $(-1)^r\frac{b^r}{a^{r+1}}\cdot x^r$. 8. $\frac{r+1}{2^{r+2}}x^r$.

9. $-\frac{2\cdot1\cdot4\cdots(3r-5)}{3^r\underline{|r}}\cdot\frac{x^{3r}}{a^{3r-2}}$. 10. $(-1)^r\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2r-1)}{\underline{|r}}x^r$.

11. $\frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3r-1)}{\underline{|r}}x^r$. 12. $\frac{(n+1)(2n+1)\cdots(\overline{r-1}\,n+1)}{\underline{|r}}\cdot\frac{x^r}{a^{nr+1}}$.

13. 第3項 14. 第5項. 15. 第13項. 16. 第7項.

17. 第4及第5項. 18. 第3項. 19. 9.89949.

20. 9.99333. 21. 10.00999. 22. 6.99927. 23. .19842.

24. 1.00133. 25. .00795. 26. 5.00096. 27. $\frac{23x}{[illegible]}$.

28. $\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{24}\right)$. 29. $1-\frac{5x}{8}$. 30. $\frac{1}{4}-\frac{5}{6}x$. 31. [illegible]

32. $\frac{1}{3}-\frac{71}{360}x$. 35. $1-4x+13x^2$. 36. $2+\frac{29}{4}x+\frac{[illegible]7}{32}x^2$.

習題十四. C. 頁167至169.

1. -197. 2. 142. 3. $(-1)^{n-1}$.

4. $(-1)^n(n^2+2n+2)$. 6. $\sqrt{8}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{2}}$.

7. $\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-n}=2^n\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-n}$. 12. $\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$.

14. 由 $(1-x^3)-(1-x)^3=3x-3x^2$ 推得之.

16. (1) 45. (2) 6561.

18. (1) 等置 $(1+x)^n(1+x)^{-1}=(1+x)^{n-1}$ 中 x^r 之係數.

(2) 等置 $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}=x^2(1+x)^{n-2}$ 內之常數項.

20. 左級數 $+(-1)^nq_n{}^2=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 中 x^{2n} 之係數.

21. $2^{2n-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n}\,\underline{|n}}$.

[用 $(c_0+c_1+c_2+\cdots c_n)^2-2(c_0c_1+c_1c_2+\cdots)=c_0{}^2+c_1{}^2+c_2{}^2+\cdots c_n{}^2$].

習題十五： 頁 173,174.

1. -12600.　2. -168.　3. 3360.　4. $-1260a^2b^3c^4$.

5. -9.　6. 8085.　7. 30.　8. 1905.

9. -10.　10. $-\frac{3}{2}$.　11. -1.　12. $-\frac{4}{81}$.

13. $\frac{59}{16}$.　14. -1.　15. $\frac{211}{3}$.　16. $1-\frac{1}{2}x-\frac{7}{8}x^2$.

17. $1-2x^2+4x^3+5x^4-20x^5$.

18. $16\left(1-\frac{3}{2}x^3+3x^4+\frac{9}{32}x^6-\frac{9}{8}x^7+\frac{9}{8}x^8\right)$.

習題十六. A. 頁 178,179.

1. $8, 6$.　2. $2, -1$.　3. $-\frac{16}{3}, -\frac{1}{2}$.　4. $-4, -\frac{3}{2}$.

5. [illegible] $-\frac{4}{5}$.　6. $\frac{2}{5}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}$.　7. $\frac{7}{3}, -3, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}$.

8. [illegible] $\log a+9\log b$.　9. $\frac{2}{3}\log a+\frac{3}{2}\log b$.

10. $-\frac{4}{9}\log a+\frac{1}{3}\log b$.　11. $-\frac{2}{3}\log a-\frac{1}{2}\log b$.

12. $-\frac{7}{12}\log a-\log b$.　13. $\frac{1}{2}\log a$.　14. $-5\log c$.　16. $\log 3$.

18. $\frac{\log c}{\log a-\log b}$.　19. $\frac{5\log c}{2\log a+3\log b}$.

20. $\frac{\log a+\log b}{2\log c-\log a+\log b}$.　21. $x=\frac{4\log m}{\log a}, y=-\frac{\log m}{\log b}$.

22. $\log x=\frac{1}{5}(a+3b)$, $\log y=\frac{1}{5}(a-2b)$.　24. $\frac{\log(a-b)}{\log(a+b)}$.

習題十六.B. 頁 185, 186.

1. $4, 1, 2, \bar{2}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}$.
2. $\cdot 8821259, 2\cdot 8821259, \bar{3}\cdot 8821259, 5\cdot 8821259, \bar{6}\cdot 8821259$.
3. $5, 2, 4, 1$.
4. 第二位次；第一位次；第五位次.
5. $1\cdot 8061600$.　6. $1\cdot 9242793$.　7. $\bar{1}\cdot 1072100$.　8. $\bar{2}\cdot 0969100$.
9. $1\cdot 1583626$.　10. $\cdot 6690067$.　11. $\cdot 3597271$.　12. $\cdot 0563520$.
13. $\bar{1}\cdot 5052973$.　14. $\cdot 44092388$.　15. $1\cdot 948445$.　16. $191563\cdot 1$.
17. $1\cdot 1998692$.　18. $1\cdot 0039238$.　19. $9\cdot 076226$.　20. $178\cdot 141516$.

21. 9. 23. 301. 24. 3·46. 25. 4·29. 26. 1·206.
27. 14·206. 28. 4·562. 29. $x=\frac{log3}{log3-log2}$; $y=\frac{log2}{log3-log2}$.
30. $x=\frac{3log3-2log2}{4(log3-log2)}$; $y=\frac{log3}{4(log3-log2)}$. 31. 1·64601.
32. $\frac{log2}{2log7}=\cdot1781$; $\frac{2log7}{log2}=5\cdot614$.

習題十七. 頁 195 至 197.

1. $log_e 2$. 2. $log_e 3-log_e 2$. 6. ·002000000666670.
9. $e^{x^2}-e^{y^2}$. 10. ·8450980; 1·0413927; 1·1139434. 在 225 節之 (2) 中令 $n=50$; (1) 中令 $n=10$; 又 (1) $n=1000$.
12. $(-1)^{r-1}\cdot\frac{2^r+1}{r}x^r$. 13. $\frac{(-1)^{r-1}3^r+2^r}{r}x^r$.
14. $2\left\{1+\frac{(2x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(2x)^4}{\lfloor 4}+\cdots+\frac{(2x)^{2r}}{\lfloor 2r}+\cdots\right\}$.
15. $1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots+(-1)^r\frac{x^{2r}}{\lfloor 2r}+\cdots$ 18. $\frac{x}{1-x}+log_e(1-x)$.
24. ·69314718; 1·09861229; 1·60943792; $a=-log_e\left(1-\frac{1}{10}\right)$ $=\cdot105360516$; $b=-log_e\left(1-\frac{4}{100}\right)=\cdot040821995$; $c=log_e\left(1+\frac{1}{80}\right)$ $=\cdot012422520$.

習題十八.A. 頁 202.

1. £1146. 14s. 10d. 2. £720. 3. 14·2 年.
4. £6768. 7s. 10½d. 5. 9·6 年. 8. £496. 19s. 4¾d.
9. 略少於 7 年. 10. £119. 18s. 5¾d.

習題十八.B. 頁 207.

1. 6%. 2. £3137. 2s. 2⅔d. 3. £110.
4. 3%. 5. $28\frac{4}{7}$ 年. 6. £1275. 7. £926. 2s.
8. £6755. 13s. 9 £183. 18s. 10. 3⅓%. 11. £616. 9s. 1½d.
13. £1308. 12s. 4½d. 15. £4200.

習題十九.A. 頁 213, 214.

8. a^3+2d^3 較大. 12. $x^3>$或$<x^2+x+2$, 視 $x>$或<2 而定.
14. x之最大値爲1. 15. 4;8. 22. $4^4.5^5$; 當$x=3$時. 23. 9, 當$x=1$時.

習題十九.B.　頁 218, 219.

10. $\frac{3^3\cdot 5^5}{2^8}a^8$; $\sqrt{\frac{3}{5}}$. $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

習題二十.　頁 228.

1. $\frac{10}{7}$; $-\frac{9}{4}$.　2. 9; $\frac{1}{9}$.　3. $\frac{1}{2}$; $\frac{5}{3}$.

4. $-\frac{15}{8}$; 6.　5. 1; 0.　6. 0; -30.　7. $-\frac{3}{2}$.

8. $\log a-\log b$.　9. 2.　10. me^{ma}.　11. $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

12. $\frac{1}{3}$.　13. -1.　14. $\frac{\sqrt{2a}}{a\sqrt{3}+1}$.　15. $\sqrt{a}$.

16. 0.　17. $\frac{3}{2}$.　18. $e^{\frac{2}{a}}$.

習題二十一.A.　頁 241, 242.

1. 收斂.　2. 收斂.　3. 收斂.
4. $x<1$ 或 $x=1$ 時收斂, $x>1$ 時發散.
5. 結果與第 4 題同.　6. 收斂.　7. 發散.
8. $x<1$ 時收斂; $x>1$ 或 $x=1$ 時發散.
9. 除 $p>2$ 外爲收斂.
10. x　1 或 $x=1$ 時收斂; $x>1$ 時發散.
11. $x<1$ 時收斂; $x>1$ 時發散.
12. 結果與第 11 題同.　13. 除 $p>1$ 外爲發散.
14. $x<1$ 或 $x=1$ 時收斂; $x>1$ 時發散.
15. 收斂.　16. 發散.
17. (1) 發散.　(2) 收斂.
18. (1) 發散.　(2) 收斂.

習題二十一.B.　頁 252.

1. $x<1$ 或 $x=1$ 時收斂, $x>1$ 時發散.
2. 結果與第 1 題同.　3. 結果與第一題同.
4. $x<\frac{1}{e}$ 或 $x=\frac{1}{e}$ 時收斂; $x>\frac{1}{e}$ 時發散.
5. $x<e$ 時收斂; $x>e$ 或 $x=e$ 時發散.
6. $x<1$ 時收斂; $x>1$ 或 $x=1$ 時發散.　7. 發散.

8. $x<\frac{1}{e}$ 時收斂；$x>\frac{1}{e}$，或 $x=\frac{1}{e}$ 時發散．

9. $x<1$ 時收斂；$x>1$ 時發散．當 $x=1$，且 $\gamma-\alpha-\beta$ 爲正時收斂；當 $\gamma-\alpha-\beta$ 爲負或零時發散．

10. $x<1$ 時收斂；$x>1$ 或 $x=1$ 時發散．此結果對於 q 之任何正負值均能成立．

11. 當 a 爲負，或零時收斂；當 a 爲正時發散．

習題二十二.A.　頁 256.

1. $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.　　2. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.

3. $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$.　　4. $n^2(2n^2-1)$.

5. $\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.　　6. $p^3=q^2$.

7. $b^3=27a^2d$, $c^3=27ad^2$.　　8. $ad=bf$, $4a^2c-b^2=8a^3f$.

13. $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$.

習題二十二.B.　頁 260.

1. $1+3x+4x^2+7x^3$.　　2. $1-7x-x^2-43x^3$.

3. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3$.　　4. $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}x+\frac{11}{8}x^2+\frac{21}{16}x^3$.

5. $1-ax+a(a+1)x^2-(a^3+2a^2-1)x^3$.

6. $a=1$, $b=2$.　　7. $a=1$, $b=-1$, $c=2$.

9. 其次項爲 $+\cdot 00000000000003$.

11. $\dfrac{a^n}{(1-a)(1-a^2)(1-a^3)\cdots\cdots(1-a^n)}$.

習題二十三.　頁 265 至 266.

1. $\frac{4}{1-3x}-\frac{5}{1-2x}$.　　2. $\frac{7}{3x-5}-\frac{5}{4x+3}$.　　3. $\frac{4}{1-2x}-\frac{3}{1-x}$.

4. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x-3}$.　　5. $1+\frac{1}{x}-\frac{1}{5(x-1)}-\frac{8}{5(2x+3)}$.

6. $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}-\frac{3}{(x+2)^2}$.

7. $x-2+\frac{17}{16(x+1)}-\frac{11}{4(x+1)^2}-\frac{17}{16(x-3)}$.

8. $\frac{41x+3}{x^2+1}-\frac{15}{x+5}$.　　9. $\frac{3x}{x^2+2x-5}-\frac{1}{x-3}$.

10. $\frac{5}{(x-1)^4}-\frac{7}{(x-1)^3}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}$.

11. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}-\dfrac{3}{(x+1)^3}+\dfrac{2}{(x+1)^4}$.

12. $\dfrac{4}{3(1+7x)}-\dfrac{1}{3(1+4x)}$; $\dfrac{(-1)^r}{3}(4.7^r-4^r)x^r$.

13. $\dfrac{11}{3(1-x)}-\dfrac{4}{3(2+x)}$; $\dfrac{1}{3}\left(11+\dfrac{(-1)^{r-1}}{2^{r-1}}\right)x^r$.

14. $1+\dfrac{7}{3(x+5)}-\dfrac{7}{3(x+2)}$; $(-1)^r\dfrac{7}{3}\left(\dfrac{1}{5^{r+1}}-\dfrac{1}{2^{r+1}}\right)x^r$.

15. $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{4}{1-2x}$; $\{1+(-1)^{r-1}-2^{r+2}\}x^r$.

16. $\dfrac{4}{3(1+2x)}-\dfrac{1}{3(1-x)}+\dfrac{3}{(1-x)^2}$; $\dfrac{1}{3}\{9r+8+(-1)^r2^{r+2}\}x^r$.

17. $\dfrac{1}{4(1-4x)}+\dfrac{11}{4(1-4x)^2}$; $4^{r-1}(12+11r)x^r$.

18. $\dfrac{2}{1+x}+\dfrac{3}{(1+x)^2}-\dfrac{6}{2+3x}$; $(-1)^r\left(3r+5-\dfrac{3^{r+1}}{2^r}\right)x^r$.

19. $\dfrac{3}{2(x-1)}+\dfrac{1-3x}{2(1+x^2)}$; r 偶數，$\dfrac{1}{2}\{(-1)^{\frac{r}{2}}-3\}x^r$; r 奇數

$-\dfrac{3}{2}\{1+(-1)^{\frac{r-1}{2}}\}x^r$.

20. $\dfrac{2}{(1-x)^3}-\dfrac{3}{(1-x)^2}+\dfrac{2}{1-x}$; $(r^2+1)x^r$.

21. $\left\{\dfrac{a^{r+2}}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^{r+2}}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^{r+2}}{(c-a)(c-b)}\right\}x^r$.

22. $-\dfrac{5}{(2-x)^2}-\dfrac{2}{2-x}+\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{2}{1-x}$; $\left\{r+3-\dfrac{5r+9}{2^{r+2}}\right\}x^r$.

23. (1) $\dfrac{1}{x(1-x)}\left\{\dfrac{1}{1+x^{n+1}}-\dfrac{1}{1+x}\right\}$.

(2) $\dfrac{1}{x(1-a)^2}\left\{\dfrac{1}{1+a^nx}-\dfrac{1}{1+a^{n+1}x}-\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+ax}\right\}$.

24. $\dfrac{1}{x(1-x)(1-x^2)}$.　25. $\dfrac{1}{(1-x)^2}\left\{\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{x^2}{1-x^2}-\dfrac{x^{n+1}}{1-x^{n+1}}+\dfrac{x^{n+2}}{1-x^{n+2}}\right\}$.

習題二十四. 頁 272.

1. $\dfrac{1+3x}{(1-x)^2}$; $(4r+1)x^r$.　2. $\dfrac{2+x}{1+x-2x^2}$; $\{1+(-1)^r2^r\}x^r$.

3. $\dfrac{2-3x}{1-3x+2x^2}$; $(1+2^r)x^r$. 4. $\dfrac{7-20x}{1-2x-3x^2}$; $\left\{\dfrac{27}{4}(-1)^r+\dfrac{3^r}{4}\right\}x^r$.

5. $\dfrac{3-12x+11x^2}{1-6x+11x^2-6x^3}$; $(3^r+2^r+1)x^r$.

6. $3^{n-1}+2^{n-1}$; $\dfrac{1}{2}(3^n-1)+2^n-1$.

7. $(2.3^{n-1}-3.2^{n-1})x^{n-1}$; $\dfrac{2(1-3^nx^n)}{1-3x}-\dfrac{3(1-2^nx^n)}{1-2x}$.

8. $(4^{n-1}+3^{n-1})x^{n-1}$; $\dfrac{1-4^nx^n}{1-4x}+\dfrac{1-3^nx^n}{1-3x}$.

9. $(1+3^{n-1}-2^{n-1})x^{n-1}$; $\dfrac{1-x^n}{1-x}+\dfrac{1-3^nx^n}{1-3x}-\dfrac{1-2^nx^n}{1-2x}$.

10. $\dfrac{8}{5}(-1)^n+\dfrac{2^{2n-3}}{5}$; $\dfrac{4}{5}\{(-1)^n-1\}+\dfrac{1}{30}(2^{2n}-1)$.

11. $u_n-3u_{n-1}+3u_{n-2}-u_{n-3}=0$; $u_n-4u_{n-1}+6u_{n-2}-4u_{n-2}+u_{n-4}=0$.

12. $S_n=S\alpha-\Sigma$, 其 $\Sigma=$從第 $n+1$ 項起至無窮項之和. 此甚易證明與第 325 節之結果相同.

13. $(2n+1)^2+\frac{2}{3}(2^{2n+1}+1)$.

習題二十五.A. 頁 277, 278.

1. $\dfrac{2}{1}$, $\dfrac{13}{6}$, $\dfrac{15}{7}$, $\dfrac{38}{13}$, $\dfrac{323}{150}$, $\dfrac{674}{313}$.

2. $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{7}{17}$, $\dfrac{9}{22}$, $\dfrac{43}{105}$, $\dfrac{95}{232}$, $\dfrac{613}{1497}$.

3. $\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{10}{3}$, $\dfrac{13}{4}$, $\dfrac{36}{11}$, $\dfrac{85}{26}$, $\dfrac{121}{37}$, $\dfrac{1174}{359}$.

4. $1+\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{17}{12}$.

5. $5+\dfrac{1}{4+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{157}{30}$.

6. $\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{33}{109}$.

7. $\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{5+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{11}{35}$.

8. $\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{2+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{7}{19}$. 9. $1+\dfrac{1}{7+}\,\dfrac{1}{5+}\,\dfrac{1}{6+}\,\dfrac{1}{1+}\,\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{254}{223}$.

10. $\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{10}$; $\frac{63}{208}$.

11. $4+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\frac{1}{3}$; $\frac{259}{60}$.　　13. $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{29}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{39}{161}$, $\frac{47}{194}$.

16. $n-1+\frac{1}{(n+1)+}\frac{1}{(n-1)+}\frac{1}{n+1}$; 其首三近值爲

$$\frac{n-1}{1},\ \frac{n^2}{n+1},\ \frac{n^3-n^2+n-1}{n^2}.$$

習題二十五.B.　頁 281 至 283.

1. $\frac{1}{(203)^2}$ 及 $\frac{1}{2(1250)^2}$.　　2. $\frac{151}{115}$.

4. $\frac{1}{a+}\frac{1}{(a+1)+}\frac{1}{(a+2)+}\frac{1}{a+3}$; $\frac{a^3+3a+3}{a^3+3a^2+4a+2}$.

習題二十六.　頁 290, 291.

1. $x=711t+100$, $y=775t+109$; $x=100$, $y=109$.
2. $x=519t-73$, $y=455t-64$; $x=446$, $y=391$.
3. $x=393t+320$, $y=436t+355$; $x=320$, $y=355$.
4. 四種.　　5. 七解.　　6. $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{9}$.
7. $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{8}$; $\frac{11}{12}$, $\frac{7}{8}$; 或 $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$.
8. £6. 13*s*.　　9. $x=9$, $y=8$, $z=3$.　　10. $x=5$, $y=6$, $z=7$.
11. $x=4$, $y=2$, $z=7$.　　12. $x=2$, $y=9$, $z=7$.
13. $x=3, 7, 2, 6, 1$; $y=11, 4, 8, 1, 5$; $z=1, 1, 2, 2, 3$.
14. $x=1, 3, 2$; $y=5, 1, 3$; $z=2, 4, 3$.
15. $280t+93$.　　16. 181, 412.
17. 十進法 248, 七進法 503, 九進法 305.
18. $a=11, 10, 9, 8, 6, 4, 3$; $b=66, 30, 18, 12, 6, 3, 2$.
19. 從任一端起之第 107 及第 104 分點.
20. 50, 41, 35 次, 第一次除外.
21. 425.　　22. 899.　　23. 1829 及 1363.

習題二十七.A.　頁 294, 295.

1. $1+\frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\cdots$; $\frac{26}{15}$.　　2. $2+\frac{1}{4+}\cdots$; $\frac{2889}{1292}$.

3. $2+\frac{1}{2+}\frac{1}{4+}\cdots$; $\frac{485}{198}$.　　4. $2+\frac{1}{1+}\frac{1}{4+}\cdots$; $\frac{99}{35}$.

5. $3+\frac{1}{3+}\frac{1}{6+}\cdots$; $\frac{3970}{1197}$,　　6. $3+\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{6+}\cdots$; $\frac{119}{33}$.

7. $3+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{6+}\cdots;\ \frac{116}{31}$.

8. $4+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\cdots;\ \frac{197}{42}$.

9. $3+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{6+}\cdots;\ \frac{1351}{390}$.

10. $5+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10+}\cdots;\ \frac{198}{35}$.

11. $6+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{12+};\ \frac{161}{24}$.

12. $12+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{24+};\ \frac{253}{20}$.

13. $\frac{1}{4+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{8+}\cdots;\ \frac{12}{55}$.

14. $\frac{1}{5+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{10+}\cdots;\ \frac{47}{270}$.

15. $1+\frac{1}{10+}\,\frac{1}{2+}\cdots;\ \frac{5291}{4830}$.

16. $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{16+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{16+}\cdots;\ \frac{280}{351}$.

17. $\frac{1}{(65)^2}$ 及 $\frac{1}{2(528)^2}$.

18. $\frac{1}{(191)^2}$ 及 $\frac{1}{2(240)^2}$.

19. $\frac{4030}{401}$.

20. $\frac{1677}{433}$.

21. $\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\cdots$

22. $4+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{4+}\cdots$

23. $1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\cdots$

24. $4+\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\cdots;\ \frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{3+}\cdots$.

25. $\sqrt{10}$.

26. $x^2+3x-3=0$ 之正根.

27. $3x^2-10x-4=0$ 之正根.

28. $4\sqrt{2}$.

30. $\frac{1}{2}$.

習題二十七. B. 頁301,302.

1. $a+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2a+}\cdots;\ \frac{8a^4+8a^2+1}{8a^3+4a}$.

2. $a-1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\cdots;\ \frac{8a^2-8a+1}{8a-4}$.

3. $a-1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\cdots;\ \frac{2a^2-1}{2a}$.

4. $1+\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{2+}\cdots;\ \frac{8a^2+8a+1}{8a^2+4a}$.

5. $a+\frac{1}{b+}\,\frac{1}{2a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{2a+}\cdots;\ \frac{2a^2b^2+4ab+1}{2ab^2+2b}$.

6. $a-1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2(n-1)+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2(a-1)+}\cdots;\ \frac{2an-1}{2n}$.

7. $\dfrac{432a^5+180a^3+15a}{144a^4+36a^2+1}$.

習題二十八. 頁311.

1. $x=7$ 或 1, $y=4$; $x=7$ 或 5, $y=6$.　　2. $x=2, y=1$.
3. $x=3$, $y=1$, 11; $x=7$, $y=9$, 19; $x=10$, $y=18$, 22.
4. $x=2, 3, 6, 11$; $y=12, 7, 4, 3$.　　5. $x=3, 2$; $y=1, 4$.
6. $x=79, 27, 17, 13, 11, 9$; $y=157, 51, 29, 19, 13, 3$.
7. $x=15$, $y=4$.　　8. $x=170$, $y=39$.
9. $x=32$, $y=5$.　　10. $x=164$, $y=21$.　　11. $x=4$, $y=1$.
12. $2x=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$; $2\sqrt{3}.y=(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n$; n 爲任意整數.
13. $2x=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$; $2\sqrt{5}.y=(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n$; n 爲任意偶正整數.
14. $2x=(4+\sqrt{17})^n+(4-\sqrt{17})^n$; $2\sqrt{17}.$ $y=(4+\sqrt{17})^n-(4-\sqrt{17})^n$; n 爲任意奇正整數.

15至17,19,20之答案之形式,將因方程式兩邊析因式之方法而變.

15. $x=m^2-3n^2, y=m^2-2mn$.　　16. $x=-m^2+2mn+n^2; y=m^2-n^2$.
17. $x=2mn, y=5m^2-n^2$.　　18. 53,52;19,16;13,8;11,4.
19. $m^2-n^2; 2mn; m^2+n^2$.　　20. $m^2-n^2; 2mn+n^2$.
21. 亨得利,安娜;克拉司,戞特林;康內略,機爾楚.

習題二十九. A. 頁321,322.

1. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$.　　2. $\frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$.
3. $\frac{1}{12}(3n-2)(3n+1)(3n+4)(3n+7)+\frac{56}{12}=\frac{n}{4}(27n^3+90n^2+45n-50)$.
4. $\frac{n}{4}(n+1)(n+6)(n+7)$.　　5. $\frac{n}{4}(n+1)(n+8)(n+9)$.
6. $\frac{n}{n+1}$; 1.　　7. $\frac{n}{3n+1}$; $\frac{1}{3}$.
8. $\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$; $\frac{1}{12}$.　　9. $\frac{1}{24}-\frac{1}{6(3n+1)(3n+4)}$; $\frac{1}{24}$.
10. $\frac{5}{4}-\frac{2n+5}{2(n+1)(n+2)}$; $\frac{5}{4}$.　　11. $\frac{1}{6}-\frac{1}{n+3}+\frac{2}{(n+3)(n+4)}$; $\frac{1}{6}$.
12. $\frac{3}{4}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$; $\frac{3}{4}$.　　13. $\frac{n}{10}(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)$.
14. $\frac{1}{4}n^2(n^2-1)$.　　15. $\frac{n}{10}(n-1)(n+1)(n+2)(2n+1)$.
16. $\frac{1}{15}(n+1)(n+2)(3n^3+36n^2+151n+240)-32$.

17. $\dfrac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{6(2n+1)}$.　　18. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}-\dfrac{n}{n+1}$.

19. $\dfrac{n(n+3)}{2}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{n+2}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$.　　20. $n+1-\dfrac{1}{n+1}$.

習題二十九. B. 頁 332,333.

1. $3n^2+n; n(n+1)^2$.　　2. $5n^2+3n; \frac{1}{6}n(n+1)(5n+7)$.

3. $n^2(n+1); \dfrac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+1)$.

4. $-4n^2(n-3); -n(n+1)(n^2-3n-2)$.

5. $n(n+1)(n+2)(n+4); \dfrac{1}{20}n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+21)$.

6. $\dfrac{1+x^2}{(1-x)^3}$.　　7. $\dfrac{1-x+6x^2-2x^3}{(1-x)^3}$.　　8. $\dfrac{2-x+x^2}{(1-x)^3}$.

9. $\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$.　　10. $\dfrac{1+11x+11x^2+x^3}{(1-x)^5}$.　　11. $\dfrac{9}{4}$.

12. $\dfrac{25}{54}$.　　13. $3.2^n+n+2; 6(2^n-1)+\dfrac{n(n+5)}{2}$.

14. $n^3-(n+1)^2; \dfrac{n}{12}(3n^3+2n^2-15n-26)$.

15. $3^{n-1}+n; \dfrac{3^n+n^2+n-1}{2}$.

16. $2^{n+1}-n^2-2n; 2^{n+2}-4-\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$.

17. $3^n-1+\dfrac{1}{2}n(n+3); \dfrac{1}{2}(3^{n+1}-3)+\dfrac{n(n+1)(n+5)}{6}-n$.

18. $\dfrac{1-x^n}{(1-x)^2}-\dfrac{nx^n}{1-x}$.　　19. $\dfrac{1-x^n}{(1-x)^3}-\dfrac{nx^n}{(1-x)^2}-\dfrac{n(n+1)x^n}{2(1-x)}$.

20. $1-\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{1}{2^n}$.　　21. $\dfrac{n-1}{n+2}\cdot\dfrac{4^{n+1}}{3}+\dfrac{2}{3}$.

22. $\dfrac{n(n+1)(3n^3+27n^2+58n+2)}{15}$.　　23. $\dfrac{n(n+1)(12n^3+33n^2+37n+8)}{60}$.

24. $\dfrac{n(n+1)(9n^2+13n+8)}{12}$.　　25. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1.3\ 5.7\cdots\cdots(2n+1)}$.

26. $1-\dfrac{2^{n+1}}{\lfloor n+2}$.　　27. $(n^2-n+4)2^n-4$.

28. $(n-1)3^{n+1}+3$.　　29. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1.3.5\cdots\cdots(2n+1)}{2.4.6\cdots\cdots(2n+2)}$.

30. $\frac{n}{n+1}\cdot 2^n$.

31. $\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$. $\frac{1}{3^n}$.

32. $\frac{1}{2}-\frac{n+1}{(n+2)!}$.

33. $1-\frac{n+4}{(n+1)(n+2)}$. $\frac{1}{2^{n+1}}$.

習題二十九.C. 頁 338 至 340.

1. $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})-x$.

2. $1+\frac{1-x}{x}\log(1-x)$.

3. $\frac{1}{4}(e^x-e^{-x}-ie^{ix}+ie^{-ix})$.

4. $\frac{1}{(r-2)(r-1)!}$.

5. $(1+x)e^x$.

6. $\frac{(p+q)^r}{r!}$.

7. 1.

8. $n(2n-1)$.

9. 0.

10. 4.

11. $\log_e 2-\frac{1}{2}$.

12. $3(e-1)$.

13. $e^x-\log(1+x)$.

14. (1) $\frac{n^7}{7}+\frac{n^6}{2}+\frac{n^5}{2}-\frac{n^3}{6}+\frac{n}{42}$. (2) $\frac{n^8}{8}+\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{12}-\frac{7n^4}{24}+\frac{n^2}{12}$.

15. $15e$.

17. (1) $n+1$.

19. (1) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{1+n+n^2}\right)$; (2) $3-\frac{2+(-1)^n}{n+1}$.

20. $\frac{(1+x)^2}{2x^2}\log(1+x)-\frac{3x+2}{4x}$.

21. $n(n+1)2^{n-3}$.

22. (1) $\frac{1}{3}\left\{1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}\right\}$. (2) $\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{2}+(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}\right\}$.

習題三十.A. 頁 348 至 349.

1. 3, 6, 15, 42.

2. 1617, 180, 1859.

6. 48.

7. 23.

33. 8987.

習題三十.B. 頁 356 至 358.

20. $x=139t+61$, 其 t 爲整數.

習題三十一.A. 頁 367 至 369.

2. $1+\frac{1}{x-}\,\frac{1}{4+}\,\frac{1}{x}$.

18. 1; 可證明 $q_n=1+p_n$.

習題三十二.A. 頁 376 至 377.

1. (1) $\frac{1}{9}$; (2) $\frac{5}{36}$.

2. $\frac{8}{663}$.

3. $\frac{1}{56}$.

4. $\frac{3}{8}$

5. 2 比 3. 6. $\frac{4}{270725}$. 8. 43 比 34. 9. 36:30:25.

10. $\frac{2197}{20825}$. 11. 952 比 715. 14. $\frac{1}{6}$. 15. $\frac{2}{7}$.

16. $\frac{11}{4165}$. 17. $\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$.

習題三十二.B. 頁 383 至 384.

1. $\frac{5}{36}$. 2. $\frac{16}{5525}$. 3. $\frac{52}{77}$. 4. $\frac{16}{21}$. 5. $\frac{8}{15}$.

6. $\frac{72}{289}$. 7. (1) $\frac{2197}{20825}$; (2) $\frac{2816}{4165}$. 8. $\frac{4651}{7776}$. 9. $\frac{209}{343}$.

10. $\frac{1}{7}$. 11. $\frac{91}{216}$. 13. $\frac{10}{19}$. 14. $\frac{63}{256}$. 15. $\frac{1}{32}$.

16. $\frac{16}{37}$, $\frac{12}{37}$, $\frac{9}{37}$. 17. $\frac{22}{35}$, $\frac{13}{35}$. 18. $n-3$ 比 2.

19. 13 比 5. 20. $\frac{45927}{50000}$.

習題三十二.C. 頁 389 至 390.

1. $\frac{2133}{3125}$. 2. $\frac{5}{16}$. 3. $\frac{4}{9}$. 4. 福勞音. 5. $\frac{1}{2}$.

6. 17s. $2\frac{2}{5}d$. 7. $\frac{4}{63}$. 8. $\frac{7}{27}$. 9. 11 比 5. 10. $\frac{1}{8}$.

11. A £5; B £11. 12. $\frac{20}{27}$. 13. $4\frac{4}{5}$ 先令.

14. (1) $\frac{250}{7776}$; (2) $\frac{276}{7776}$. 15. 4d. 16. $\frac{3}{4}$. 17. $M+\frac{1}{2}m$.

習題三十二.D. 頁 399, 400.

1. $\frac{2}{5}$. 2 $\frac{1}{35}$. 3. $\frac{12}{17}$. 4. $B\ \frac{2}{5}$; $C\ \frac{4}{15}$.

5. $\frac{2}{n(n+1)}$. 6. $\frac{32}{41}$. 7. $\frac{377}{550}$. 8. 2s. 3d. 9. $\frac{1}{5}$.

10. $\frac{1}{3}$. 11. $\frac{40}{41}$. 12. $\frac{11}{50}$. 13. £1. 14. (1) $\frac{3}{5}$; (2) $\frac{7}{8}$.

15. £8. 17. $\frac{n-1}{mn-1}$, $\frac{n-1}{mn-rn-1}$. 18. $\frac{13}{14}$.

習題三十二.E.　頁 405 至 408.

1．7比5.　2．$\frac{1}{126}$.　3．$\frac{12393}{12500}$.　5．$\frac{275}{504}$.

6．$1:\frac{5}{6}:\left(\frac{5}{6}\right)^2:\left(\frac{5}{6}\right)^3:\left(\frac{5}{6}\right)^4$.　7．$\frac{16}{21}$.　8．6；各等於$\frac{1}{6}$.

9．$\frac{13}{28}$.　10．$\frac{343}{1695}$.　11．11 比 5.　13．$A,\frac{169}{324}$；$B,\frac{155}{324}$.

14．$\frac{1}{7}$，$\frac{4}{21}$.　16．$\frac{25}{216}$.　17．$\frac{149}{2401}$.　18．$\frac{33}{1000}$，$\frac{1}{60}$.

20．一金泥.　22．$\frac{140}{141}$.　23．$\frac{n(n+1)}{2}$先令.　26．15 比 1.

28．$\frac{1}{4}$.　29．$\frac{1}{4}$.　30．$\frac{1265}{1286}$；£$\frac{5087}{5144}$.　31．$\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$.

32．若$b>\frac{a}{2}$，其或能率爲$1-3\left(\frac{a-b}{a}\right)^2$；

若$b<\frac{a}{2}$，其或能率爲$\left(\frac{3b-a}{a}\right)^2$.

習題三十三.A.　頁 419，420，421.

1．7.　2．0.　3．1.　4．$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$.

5．$1+x^2+y^2+z^2$.　6．xy.　7．0.　8．$4abc$.　9．0.

10．3.　11．$3abc-a^3-b^3-c^3=0$.　13．(1) $x=a$，或 b；(2) $x=4$.

20．$\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ba & c^2+a^2 & bc \\ ca & cb & a^2+b^2 \end{vmatrix}$.　22．$\lambda^3(\lambda^2+a^2+b^2+c^2)^3$.

26．此行列式等於$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 1 & -2x & x^2 \\ 1 & -2y & y^2 \\ 1 & -2z & z^2 \end{vmatrix}$.

27．$\begin{vmatrix} u & w' & v' \\ w' & v & u' \\ v' & u' & w \end{vmatrix}=0$.　28．$\begin{vmatrix} u & w' & v' \\ w' & v & u' \\ v' & u' & w \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} u & w' & v' & a \\ w' & v & u' & b \\ v' & u' & w & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$.

習題三十三.B.　頁 427，428.

1．1.　2．0；第一列第二列相加，第三列第四列相加.

3．$(a+3)(a-1)^3$.　4．$a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab$.

5．6；由第一行減第三行之三倍，由第二行減第三行之二倍，由第四行減第三行之四倍.

6. $abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$.

7. $-(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$.

8. $(ax-by+cz)^2$. 9. a^4. 12. $x=\frac{(k-b)(k-c)}{(a-b)(a-c)}$; &c.

13. $x=\frac{k(k-b)(k-c)}{a(a-b)(a-c)}$; &c. 14. $x=\frac{(k-b)(k-c)(k-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)}$; &c.

習題三十四.A. 頁 439, 440.

1. -102. 2. $3a+b=27$.

3. x^3-2x^2+x+1; $-15x+11$. 4. $a=3$.

5. $x^{-4}+5x^{-5}+18x^{-6}+54x^{-7}$; $147x^{-4}-356x^{-5}+90x^{-6}+432x^{-7}$.

6. $(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.

7. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$.

8. $24abc$. 9. $(b+c)(c+a)(a+b)$

10. $(a-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$.

11. $3abc(b+c)(c+a)(a+b)$. 12. $12abc(a+b+c)$.

13. $80abc\,(a^2+b^2+c^2)$.

14. $3(b-c)(c-a)(a-b)(x-a)(x-b)(x-c)$.

28. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$. 29. 2.

30. $\frac{(p-x)(q-x)}{(a+x)(b+x)(c+x)}$. 31. -1. 32. $a+b+c+d$.

習題三十四.B. 頁 442, 443.

5. 0. 7. $A=ax+by+ay$, $B=bx-ay$.

28. $(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$.

習題三十四. C. 頁 449, 450.

1. $x^3+xy^2+ay^2=0$. 2. $x+a=0$. 3. $x^2+y^2=a^2$.

4. $y^2=a(x-3a)$. 5. $a^6-a^3=1$. 6. $x^2+y^2=2a^2$.

7. $b^4c^4+c^4a^4+a^4b^4=a^2b^2c^2d^2$. 8. $y^2-4ax=k^2(x+a)^2$.

9. $a^4-4ac^3+3b^4=0$. 10. $a^4-2a^2b^2-b^4+2c^4=0$.

11. $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}=1$. 12. $5a^2b^3=6c^5$.

13. $ab=1+c$. 14. $a^3+b^3+c^2+abc=0$.

15. $(a+b)^{\frac{2}{3}}-(a-b)^{\frac{2}{3}}=4c^{\frac{2}{3}}$. 16. $a^2+b^2+c^2\pm 2abc=1$.

17. $abc=(4-a-b-c)^2$. 18. $a^2-4abc+ac^3+4b^3-b^2c^2=0$.

20. $c^2(a+b-1)^2-c(a+b-1)(a^2-2ab+b^2-a-b)+ab=0$.

22. $\frac{1}{(a-b)cr+(a-c)bq}+\frac{1}{(b-c)ap+(b-a)cr}+\frac{1}{(c-a)bq+(c-b)ap}$
$=\frac{1}{bcqr+carp+abpq}$.

23. $$\begin{vmatrix} ab'-a'b & ac'-a'c & ad'-a'd \\ ac'-a'c & ad'-a'd+bc'-b'c & bd'-b'd \\ ad'-a'd & bd'-b'd & cd'-c'd \end{vmatrix}=0.$$

習題三十五. A. 頁 456,457.

1. $6x^4-13x^3-12x^2+39x-18=0$.
2. $x^6+2x^5-11x^4-12x^3+36x^2=0$.
3. $x^6-5x^5-8x^4+40x^3+16x^2-80x=0$.
4. $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$.　　5 1,3,5,7.
6. $\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$, -4.　　7. $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -6.　　8. $6,2,\frac{2}{3}$.
9. $-\frac{3}{2},-2,4$.　　10. $-\frac{3}{2},-\frac{3}{4},\frac{1}{3}$.　　11. $\pm\sqrt{3},\frac{3}{4},-\frac{1}{2}$.
12. $\frac{8}{9},-\frac{2}{3},\frac{1}{2}$.　　13. $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}$.　　14. $\frac{4}{3},\frac{3}{2},1\pm\sqrt{2}$.
15. $-4,-1,2,5$.　　16. $\frac{8}{9},\frac{4}{3},2,3$.　　17. $-\frac{4}{3},-\frac{3}{2},-\frac{5}{3}$.
18. (1)$\frac{q^2-2pr}{r^2}$; (2)$\frac{p^2-2q}{r^2}$.　　19. (1)$-6q$; (2)$\frac{q}{r}$.
20. $-2q$, $-3r$.　　21. $2q^2$.

習題三十五. B. 頁 460,461.

1. $3,-\frac{2}{3},\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$.　　2. $-\frac{3}{2},-\frac{1}{3},2\pm\sqrt{3}$.
3. $-1\pm\sqrt{2}$, $-1\pm\sqrt{-1}$.　　4. $\pm\sqrt{-1}$, $-2\pm\sqrt{-1}$.
5. -1, $\pm\sqrt{3}$, $1\pm2\sqrt{-1}$.　　6. $x^4-2x^2+25=0$.
7. $x^4-8x^2+36=0$.　　8. $x^4+16=0$.
9. $x^4-10x^2+1=0$.　　10. $x^4-10x^3-19x^2+480x-1392=0$.
11. $x^4-6x^3+18x^2-26x+21=0$.
12. $x^8-16x^6+88x^4+192x^2+144=0$.
13. 一正根,一負根,兩虛根[比較554節].
15. 一正根,一負根,至少四虛根[比較554節].
16. 六.　　17. (1)$pq=r$;(2)$p^3r=q^3$.　　20. q^2-2pr.
21. $pq-r$.　　22. $\frac{pq}{r}-3$.　　23. $pq-3r$.
24. $pr-4s$.　　25. $p^4-4p^2q+2q^2+4pr-4s$.

習題三十五. C. 頁 470,471.

1. $x^4-6x^3+15x^2-12x+1$. 2. $x^4-37x^2-123x-110$.
3. $2x^4+8x^3-x^2-8x-20$. 4. x^4-24x^2-1.
5. $16axh(x^6+7x^4h^2+7x^2h^4+h^6)+2bh(5x^4+10x^2h^2+h^4)+2ch$.
10. $2,2,-1,-3$. 11. $1,1,1,3$. 12. $3,3,3,2,2$.
13. $-2,\ \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2},\ \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$. 14. $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ -2$.
15. $1,1,1,\ -1,\ -1,2$. 16. $\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{3},\ 1\pm\sqrt{-1}$.
17. $a,a,-a,b$. 18. $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \dfrac{1\pm\sqrt{-7}}{2};\ \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \dfrac{1\pm\sqrt{-23}}{4}$.
19. $0,1,-\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{2};\ 0,1,-\dfrac{3}{2},-\dfrac{5}{3}$. 20. $n^n r^{n-2}=4p^n(n-2)^{n-2}$.
22. (1) -2; (2) -1. 27. 5. 28. 99,795.

習題三十五. D. 頁 478,479.

1. $y^3-24y^2+9y-24=0$. 2. $y^4-5y^3+3y^2-9y+27=0$.
3. $1,1,-2,-\frac{1}{2}$. 4. $3\pm2\sqrt{2},\ 2\pm\sqrt{3}$.
5. $1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2},\ \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. 6. $2,\ 2,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{-3})$.
7. $4,\ 2,\ \dfrac{4}{3}$. 8. $6,3,2$. 10. $\dfrac{1}{4},1,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{5}$.
11. $y^3-2y+1=0$. 12. $y^4-4y^2+1=0$.
13. $y^5-7y^3+12y^2-7y=0$.
14. $y^6-60y^4-320y^3-717y^2-773y-42=0$.
15. $y^3-\dfrac{9y^2}{2}+\dfrac{13y}{2}-\dfrac{15}{4}=0$.
16. $y^5+11y^4+42y^3+57y^2-13y-60=0$.
17. $y^3-8y^2+19y-15=0$. 18. $y^4+3y^3+4y^2+3y+1=0$.
19. $y^3+33y^2+12y+8=0$. 20. $ry^3+kqy^2+k^3=0$.
21. $y^3-q^3y^2-2qr^2y-r^4=0$. 22. $ry^3-qy^2-1=0$.
23. $ry^3+q(1-r)y^2+(1-r)^3=0$. 24. $y^3-2qy^2+q^2y+r^2=0$.
25. $y^3+3ry^2+(q^3+3r^2)y+r^3=0$.
26. $r^3y^3+3r^3y^2+(3r^2+q^3)ry+r(r^3+2q^3)=0$. 28. $\pm1,\pm2,5$.

習題三十五.E. 頁 488, 489.

1. $5,\dfrac{-5\pm\sqrt{-3}}{2}$. 2. $10,-5\pm7\sqrt{-3}$. 3. $4,-2\pm5\sqrt{-3}$.
4. $-6,3\pm4\sqrt{-3}$. 5. $-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{2\pm\sqrt{-3}}{7}$. 6. $11,\ 11,\ 7$.

7. $-\frac{1}{2}, -\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}$.　9. $4, -1, -\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{-31})$.

10. $4, -2, -1\pm\sqrt{-1}$.　11. $\pm 1, -4\pm\sqrt{6}$.　12. $1, 2, -2, -3$.

13. $1\pm\sqrt{2}, -1\pm\sqrt{-1}$.　14. $1, -3\ 2\pm\sqrt{5}$.

15. $2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.　16. $1, 4\pm\sqrt{15}, -\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

17. $-4, -4, -4, 3$.　18. $q^3+8r^2=0; \frac{3}{2}, \frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{4}$.

22. $-2\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{2}, 2\pm\sqrt{2}$.

23. $s^3y^4+qs(1-s)^2y^2+r(1-s)^3y+(1-s)^4=0$.

25. $2\pm\sqrt{3}$.　26. $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$.

28. $x^4-8x^3+21x^2-20x+5=(x^2-5x+5)(x^2-3x+1)$；若令 $x=4-y$，則 x^2-5x+5 及 x^2-3x+1 變爲 y^2-3y+1 及 y^2-5y+5，僅復化爲原方程式而已．

雜　　題．　頁 490 至 524.

2. 6, 8.　3. 八進法．

4. (1) $1\pm\sqrt{5}$; $1\pm 2\sqrt{5}$.
(2) $x=1, y=3, z=-5$; 或 $x=-1, y=-3$; $z=5$.

6. (1) $1, -\frac{a+2b}{2a+b}$. (2) 3, 3, 1.　7. 首項 1，公差 $\frac{1}{8}$.

8. p^2-q; $-p(p^2-3q)$; $(p^2-q)(p^2-3q)$.

9. $\frac{1}{2}(ab+a^{-1}b^{-1})$.　10. $\frac{7}{13}$.　13. A, 7 分鐘；B, 8 分鐘．

14. $a^2=b^2=c^2$.

15. $x^2=y^2=\frac{d}{a+b+c}$; 或 $\frac{x}{c-a}=\frac{y}{a-b}=k$;
此處 $k^2a(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)=d$.

16. 每時一哩．

17. (1) $(b+c)(c+a)(a+b)$. (2) $\sqrt{\frac{5-4x}{2}}+\sqrt{\frac{2x-3}{2}}$.　18. $\frac{35}{9}$; 2268.

19. (2) $\frac{21\pm\sqrt{105}}{4}$.

(2) $x=y=\pm\sqrt{ab}$; $\frac{x}{2a+b}=\frac{y}{-(3a+2b)}=\pm\sqrt{\frac{ab}{b^2+ab-a^2}}$.

22. $let5$; 九進法．

23. $\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\}$.

24. 工資 15s.；麵包價格 6d.　25. 6, 10, 14, 18.

26. (1) $1, \frac{c(a-b)}{a(b-c)}$. (2) $\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}$.　28. $88\frac{8}{9}$ 哩．

29. $x=3k,\ y=4k,\ z=5k$; 其 $k^3=1$, 故 $k=1,\ \omega$, 或 ω^2. 30. 480.

31. 33 半克郎, 19 先令, 8 四辨士; 或 37 半克郎, 6 先令, 17 四辨士.

32. $a=6,\ b=7$. 33. 40 分.

35. $1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{13}{8}x^4$.

37. $\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$, 或 $\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}$. $[x^4-x-5(x^2+x+1)=0.]$

38. $a=8$; $\frac{x-4}{x-5}$. 40. 首項.

41. 13, 9. 42. $\frac{1+4b^2c^2+9c^2a^2+a^2b^2}{a^2+b^2+c^2}$.

43. (1) $3,\ -2,\ \frac{-1\pm\sqrt{-39}}{2}$. [兩邊各加 x^2+4.]

(2) $x=1,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ 0,\ 0$;

$x=1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ -1,\ 0$;

$x=1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 0,\ -1$. 47. 5780.

48. 150 人意見改變; 第一次少數爲 250, 多數爲 350. 50. 936 人.

51. (1) 0, $\frac{2^m-1}{2^m+1}a$. (2) $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}$.

[令 $(a-c)(b-d)=\{(x-c)-(x-a)\}\{(x-d)-(x-b)\}$; 再平方之.]

53. $6,\ -\frac{161}{30}$. 55. $m=\frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\ n=\frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

58. (1) 1. (2) $\pm4\sqrt{2}$ [令 $x^2-16=y^4$, 則得 $y^4-16-4y(y^2-4)=0$.]

60. $\frac{(a-c)p}{b-c}$ 個男人; $\frac{(b-a)p}{b-c}$ 個女人. 63. $0,\ a+b,\ \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

64. 等差級數之公差爲 $\frac{b-a}{n-1}$; 調和級數之倒級數 A.P. 之公差爲 $\frac{a-b}{ab(n-1)}$ [第 r 項爲 $\frac{a(n-r)+b(r-1)}{n-1}$; 第 $(n-r+1)$ 項爲 $\frac{ab(n-1)}{a(n-r)+b(r-1)}$.]

68. 19. 69. £78.

70. $0,\ \frac{1\pm\sqrt{-3}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$.

$[(a+b)^3-a^3-b^3=3ab(a+b),\ (a-b)^3-a^3+b^3=-3ab(a-b).]$

72. (1) $x=\pm\frac{\log3}{\log6}=\pm\cdot614$. (2) $x=\pm\frac{2(1-2\log2)}{1-\log2}=\pm1\cdot139$.

73. 7, 2. 74. 8 時.

79. (1) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=0$，或 $\frac{a+b+c}{abc}$.　(2) $x=y=z=1$.

80. $a=3, b=1$.　81. [令 $x-a=u, y-b=v$.]　82. $x=3$.　84. 126.

85. 儲額為 £7700 及 £3500；各人所得遺產為 £1400.

86. 七進數 503.　　91. 距倫敦 25 哩.

95. $x=5, 1, \frac{15\pm6\sqrt{-1}}{29}$；$y=3, \frac{3}{5}, \frac{25\pm10\sqrt{-1}}{29}$.　96. $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

98. $\frac{1}{2e}$.　100. 其母函數為 $\frac{1+4x}{1-x-2x^2}$；和 $=\frac{2(1-2^nx^n)}{1-2x}-\frac{1-(-1)^nx^n}{1+x}$.

第 n 項 $=\{2^n+(-1)^n\}x^{n-1}$.

107. a^2+b-c^2-d.　　108. 12 人，£14.18s.

109. (1) $x=a$，$y=b$，$z=c$.　(2) $x=3$，或 1；$y=1$，或 3.

111. $1+\frac{1}{1+}\frac{1}{12+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{9}$；$x=948, y=492$.　113. £12.15$s$.

117. (1) $x=a, y=b$；$x=a, y=2a$；$x=2b, y=b$.

(2) $x=3$ 或 1，$y=2$，$z=1$ 或 3；

$x=\frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$，$y=-3$；$z=\frac{-1\mp\sqrt{29}}{2}$.

120. (1) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$.

(2) $\frac{a(x^n-1)}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^3}\{x^{n+2}+x^{n+1}-(n+1)^2x^2+(2n^2+2n-1)x-n^2\}$.

121. $\frac{1}{3}$.　　122. (1) $\frac{-5\pm\sqrt{-11}}{6}$ 或 $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

(2) $x=0, y=0, z=0$；$x=\pm2, y=\pm1, z=\pm3$.

124. $\frac{13x-23}{3(x^2-3x-1)}-\frac{10x-1}{3(x^2+x+1)}$；$-\frac{r+4}{2^{r+1}}$.

125. $t=1$；關係式為 $1-x-2x^2$；通項為 $\{2^{n-3}+(-1)^{n-1}\}x^{n-1}$.

127. (1) $x=-6, 2$；$y=9, -3$.　(2) $x=\frac{1}{a}$；$y=\frac{1}{b}$.

128. (1) $\frac{a^2}{2}$. (2) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.　　129. 12, 16；或 48, 4.

130. (1) $x=\pm7$.

(2) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\pm\frac{k}{2abc}$，此處 $k^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

133. 11, $r-1$.　　134. 384 方碼.　　136. $a=\pm2, b=3, c=\pm2$.

137. (1) $x=\pm\frac{7}{\sqrt{2}}, y=\pm\frac{9}{\sqrt{2}}$. (2) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\pm\sqrt{\frac{13}{10}}$.

138. 第一次每隻賣 £3.2s. 第二次每隻賣 £2.12s.

139. (1) $\frac{1}{6}n(n+1)(2n-1)$. (2) $\frac{1}{60}n(n+1)(n+2)(3n^2+6n+1)$.

141. (1) $x=1$ 或 $\frac{14}{5}$; $y=3$ 或 $\frac{15}{7}$.

(2) x, y, z 可有 3, 5, 7 三值之排列數.

142. $y^3+qy^3-q^2y-q^3-8r=0$.

143. (1) $\frac{x(x^n-1)}{(x-1)^2}-\frac{n}{x-1}$. (2) $\frac{3+14x-157x^2}{1+5x-50x^2-8x^3}$.

(3) $2^{n+1}+\frac{1}{2}n(n+7)-2$. 144. $2(b^3-d^3)=3(b^2-c^2)(b-a)$.

145. $-2, -2, -2, \frac{2}{3}$.

146. A 連續各日行 1, 3, 5, 7, 9, | 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, | 哩,
B 連續各日行 12, 13, | 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, |

故 B 2 日內追及 A, 第三日且過之; A 結果勝 B, 於 B 之第九日追及 B.

147. $\frac{\sqrt{37}-4}{7}$. 148. $-(a+b+c), -(a+\omega b+\omega^2c), -(a+\omega^2b+\omega c)$.

150. 第 n 項爲 $\frac{n(a^n-b^n)}{a-b}x^{n-1}$; 和 $=A-B$,

此處 $A=\frac{a(1-na^nx^n)}{1-ax}+\frac{a^2x(1-a^{n-1}x^{n-1})}{(1-ax)^2}$; B 表 B 之相當函數.

151. $qy^3-2p^2y^2-5pqy-2p^3-q^2=0$.

153. (1) $-7, \frac{7\pm3\sqrt{-3}}{2}$. (2) $\pm1, \pm3, 4$. 154. 3 日.

156. (1) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{12}, \frac{5\pm\sqrt{-39}}{24}$. [$(12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=120$.]

(2) $1\pm\sqrt{19}$. $\left[\frac{92}{585}=\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{2}{13}.\right]$

157. 約 22 年. 161. 44 時.

162. (1) $x^2=y^2=\frac{-7\pm\sqrt{217}}{4}$; $x=\pm1, \pm2$; $y=\mp2, \mp1$; $x=-y=\pm\sqrt{3}$,

(2) $x=k(b^4+c^4-a^2b^2-a^2c^2)$, &c., 此處 $2k^2(a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2)=1$.
[甚易證明 $a^2x+b^2y+c^2z=0$, 及
$a^2y+b^2z+c^2x=x^3+y^3+z^3-3xyz=a^2z+b^2x+c^2y$.]

163. $2(a+b+c)x=(bc+ca+ab)\pm\sqrt{(bc+ca+ab)^2-4abc(a+b+c)}$.

[方程式變爲 $(a+b+c)x^2-(bc+ca+ab)x+abc=0$.]

164. (1) $\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+13)$. (2) $2c-5$.

166. (1) $x=\frac{51+30\sqrt{2}}{8}a$, $y=\frac{17a}{8}$. 消去x.

(2) x,y,z 爲 2, $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$, 三數之排列數.

167. $(x+y+z)^2=3k^2$.　168. 2.　169. $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

170. 每時步行 $3\frac{3}{4}$ 哩, 車行 $7\frac{1}{2}$ 哩, 騎馬行 10 哩.

$AB=37\frac{1}{2}$, $BC=30$, $CA=15$哩.

172. (1) $x=13$ 或 10, $y=10$或13.

(2) $x=\frac{d(a-b)}{d-c}$; $y=\frac{c(a-b)}{d-c}$; $z=\frac{b(d-c)}{a-b}$; $u=\frac{a(d-c)}{a-b}$.

174. £3200.　176. $ry^3+3ry^2+(3r-p^3)y+r^3=0$.

177. $p=(ac\pm bd)(eg\pm fh)+(bc\mp ad)(fg\mp eh)$;

$q=(bc\mp ab)(eg\pm fh)-(ac\pm bd)(fg\mp eh)$.

178. $x=6$, -5; $\frac{13\pm\sqrt{-47}}{2}$; $\frac{-14\pm\sqrt{-74}}{2}$;

$y=5$, -6; $\frac{-13\pm\sqrt{-47}}{2}$; $\frac{14\pm\sqrt{-74}}{2}$.

[令 $x-y=u$, 及 $xy=v$, 則 $u^2+2v=61$, $u(61+v)=91$.]

182. 8987.　183. $y^3-by^2-acy-c^2=0$. -1, -2, $-\frac{1}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

186. (1) x,y,z 爲 1, $\frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ 三數之排列數.

(2) $x=\pm\frac{a(b^2+c^2)}{2bc}$, &c.

187. 保守黨; 英286, 蘇19, 愛35, 威11.

自由黨; 英173, 蘇41, 愛68, 威19.

191. (1) 7, 9, -3. (2) $2\pm\sqrt{-3}$, $-2\pm\sqrt{-1}$.

192. $2a_n=a+b+\frac{a-b}{3^n}$; $2b_n=a+b-\frac{a-b}{3^n}$.　201. $\frac{\lfloor m+n-2}{\lfloor m-1\lfloor n-1}$.

202. 54, -26, $14\pm 840\sqrt{-1}$.　204. $\frac{n}{n+1}$, $\frac{4^{n+1}+4(-1)^{n+1}}{4^{n+1}-(-1)^{n+1}}$.

206. $\frac{3rm^3+nm^2q-3n^3}{rm^3+nm^2q+n^3}$.　207. 約81年.

209. 7波蘭人, 14土耳其人, 15希臘人, 24德人, 20意大利人.

210. $\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{1+x^2}{2x}\log(1+x)$.

212. (1) $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$;　(2) $\frac{4+3x+x^2}{(1+x)^3}$;　(3) 23.

213. $-\frac{11}{97}$. 215. $x=a\pm\sqrt{\frac{(a^2+\beta)(a^2+\gamma)}{a^2+\alpha}}$, &c. 217. 420.

223. (1) $x=y=\frac{1}{3}(\pm 15\pm\sqrt{-3})$, $z=\frac{1}{3}(\pm 15\mp 2\sqrt{-3})$;

或 $x=4,\ 6,\ -4,\ -6$;
$y=6,\ 4,\ -6,\ -4$;
$z=5,\ 5,\ -5,\ -5$.

(2) $\frac{x-a}{a(b-c)}=\frac{y-b}{b(c-a)}=\frac{z-c}{c(a-b)}=\lambda$,

此處 $(b-c)(c-a)(a-b)\lambda=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$.

226. 12牛，15猪，20羊. 229. $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right\}=\frac{3}{2}$;收歛.

230. 關係式為 $1-12x+32x^2$; 第 n 項 $=\frac{1}{2}\{4^{n-1}+8^{n-1}\}$;

$$S_n=\frac{2^{2n-1}}{3}+\frac{2^{3n-1}}{7}-\frac{5}{21}.$$

231. $\frac{11}{243}$. 232. $2x=\pm\sqrt{a^2-b^2+c^2}\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, 等等.

233. $a^3+b^3+c^3=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.

235. (1) $(1-x)^4 S=1+4x+x^2-(n+1)^3x^n+(3n^3+6n^2-4)x^{n+1}$
$-(3n^3+3n^2-3n+1)x^{n+2}+n^3x^{n+3}$.

(2) $\frac{1}{8}-\frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

236. $1+a^3x^4+a^5x^8+a^8x^{12}+a^9x^{16}+a^{12}x^{20}+a^{14}x^{24}+a^{17}x^{28}+a^{17}x^{32}$
$+a^{20}x^{36}$.

327. 3 時 51 分. 240. 2 或 $-\frac{1}{2}$. 242. -140.

244. 3,4,5,6. 246. $a^3(c^3-3d^3)^2=(ab^2+2d^3)(ab^2-d^3)^2$.

247. 2,6,1,3. 248. $\frac{6}{13}$.

249. (1) $2^{n+1}-2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

(2) $\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}-\frac{2}{3}$.

(3) n為偶數時，$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}+\frac{2(1-2^nx^n)}{1-4x^2}$; n為奇數時，$\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$
$+\frac{2(1-2^{n+1}x^{n+1})}{1-4x^2}$.

250. (1) $x=y=z=0$ 或 $\frac{a}{3}$. 但若 $x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy=0$, 則
$x+y+z=-a$, 而解答為不定.

$$(2)\ \frac{x}{a(-a+b+c)}=\frac{y}{b(a-b+c)}=\frac{z}{c(a+b-c)}$$
$$=\pm\frac{1}{\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}.$$

253. $-(Ax+By+Cz)(-Ax+By+Cz)(Ax-By+Cz)(Ax+By-Cz)$
此處$A=\sqrt{a(b-c)}$, &c.

256. (1) $x=1,\ \omega,\ \omega^2$;
$y=1,\ \omega^2,\ \omega$;
$z=-(a+b),\ -(a\omega+b\omega^2),\ -(a\omega^2+b\omega)$.
(2) $\left.\begin{matrix}x=3,\text{ 或 }7\\ y=7,\text{ 或 }3\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}z=6,\text{ 或 }-4\\ u=4,\text{ 或 }-5\end{matrix}\right\}.$

257. 至少求至 $3r-2$ 位.　　258. 茶, 2*s*. 6*d*.; 咖啡, 1*s*. 8*d*.

262. $2q^2-6pr+24s$.　　263. 11 火雞, 9 鵝, 3 鴨.

266. (1) $x,\ y,\ z$ 有下三數之排列數:
$a,\ \frac{1}{2}a(b-1+\sqrt{b^2-2b-3}),\ \frac{1}{2}a(b-1-\sqrt{b^2-2b-3})$.
(2) $x=y=z=1$; $x=\dfrac{a+b+c}{a-b-c}$; 類推.　　267. 0.

268. 僧侶 16 人, 平均年齡 45 歲;
醫士 24 人; 平均年齡 35 歲;
律師 20 人, 平均年齡 30 歲.

269. $(a_0a_2-a_1^2)(a_2a_4-a_3^2)=(a_1a_3-a_2^2)^2$;
或 $a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3=0$.

270. $x=\pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, &c. $u=\pm\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, &c.　　273. $e^{-\frac{1}{2}}$.

274. (1) $\left(1-\dfrac{2}{x}\right)\log(1-x)-2$.　(2) $\dfrac{1}{a-1}\left\{1-\dfrac{|n+1}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}\right\}$.

275. (1) $x=\frac{3}{2},\ \frac{3}{2},\ 2$;
$y=-1,\ -\frac{4}{3},\ -1$;
$z=1,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{4}$.
(2) $x=\pm4,\ y=\pm5,\ u=\pm2,\ v=\pm1$.
$x=\pm\frac{5}{3}\sqrt{\frac{3}{2}},\ y=\mp2\sqrt{\frac{2}{3}},\ u=\mp\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}},\ v=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

276. $a^2+b^2+c^2+d^2+\lambda$.　　277. $-p_1^3+3p_1p_2-3p_3$.

279. A, 6 隻; B, 4 隻.　　281. 2.

287. $a,\ -5a,\ -5a$.　　289. $x_1=-\dfrac{(b_1-a_1)(b_1-a_2)\cdots(b_1-a_n)}{(b_1-b_2)(b_1-b_3)\cdots(b_1-b_n)}$ &c.

291. A 工作 45 日, B, 24 日, C, 10 日.

294. $(b^2+c^2-a^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$.

300. 一日散步 3 哩, 工作 4 時.
或散步 4 哩, 工作三時.