光緒八年敬刊

御製數理精蘊

板藏江甯藩署

御製數理精蘊上編卷一

御製數理精蘊上編

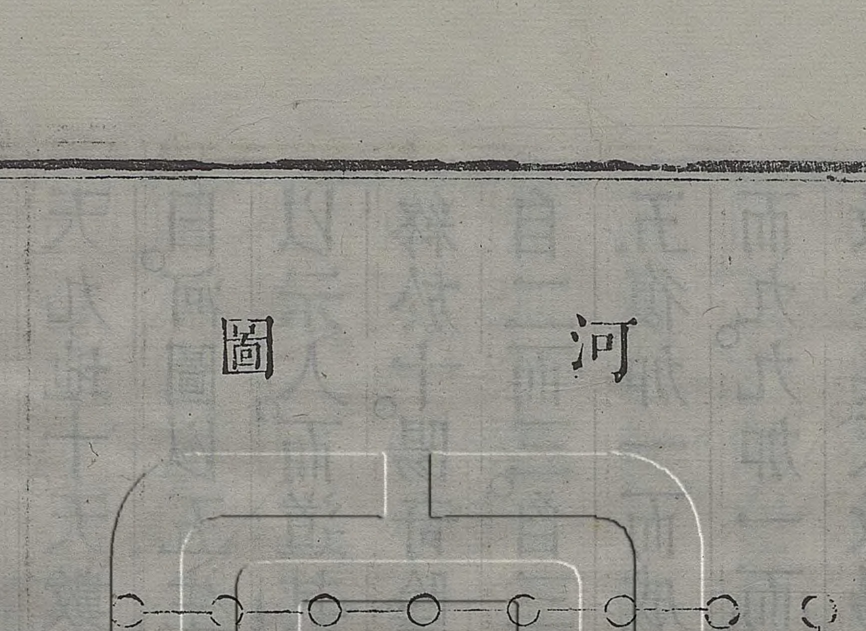
立綱明體

數理本原

粵稽上古河出圖洛出書八卦是生九疇是敘數學亦於是乎肇焉葢圖書應天地之瑞因聖人而始出數學窮萬物之理自聖人而得明也昔黃帝命隸首作算九章之義已啓堯命羲和治暦敬授人時而歲功以成周官以六藝教士數居其一周髀商高之說可考也秦漢而後代不乏人如洛下閎張衡劉焯祖冲之之徒各有著述唐宋設明經算學科其書頒在學宮令博士弟子肄習是知算數之學實格物致知

之要務也故論其數設爲幾何之分而立相求之法加減乘除凡多寡輕重貴賤盈朒無遺數也論其理設爲幾何之形而明所以立算之故比例分合凡方圓大小遠近高深無遺理也溯其本原加減實出於河圖乘除殆出於洛書一奇一偶對待相資遞加遞減而繁衍不窮焉奇偶各分縱橫相配互乘互除而變通不滯焉徵其實用測天地之高深審日月之交會察四時之節候較晝夜之短長以至協律度同量衡通食貨便營作皆賴之以爲統紀焉今匯集成編以類相從提點線面體以爲綱分和較順逆以爲目法無論巨細惟擇其善者由淺以及深執簡以御繁使理與數協務有裨於天下國家以傳於億萬世云爾

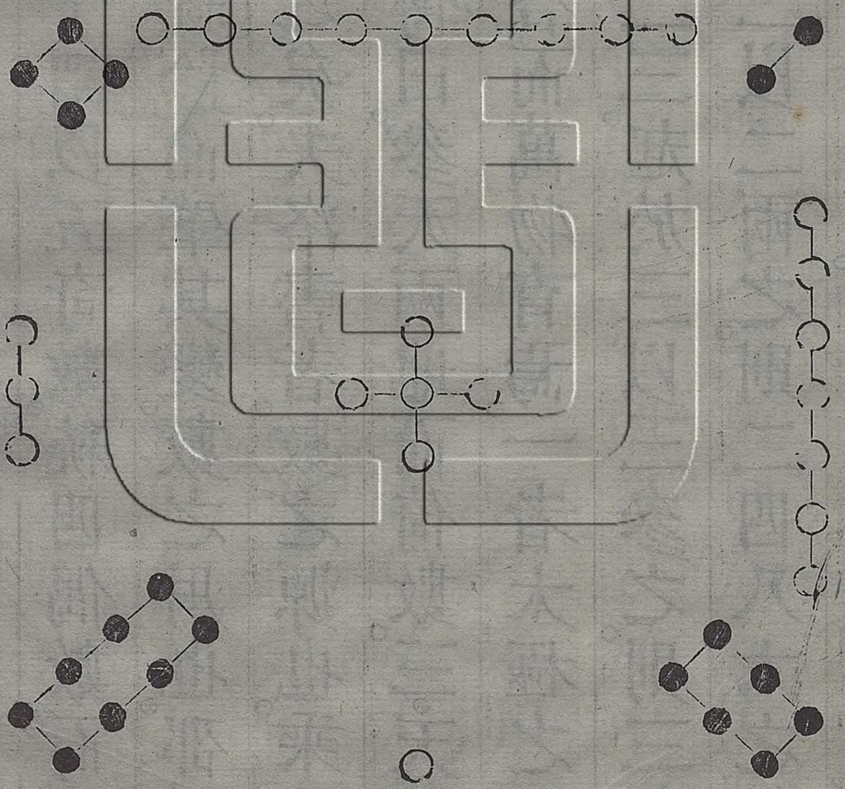
河圖



易繫辭曰天一地二天三地四天五地六天七地八天九地十天數五地數五五位相得而各有合朱子曰河圖以五生數統五成數而同處其方蓋揭其全以示人而道其常數之體也考其數始於一中於五終於十陽奇陰偶而數之加減由是生焉自一而二自二而三自三而四自四而五皆遞加一以相生自五復加一而成六六加一而七七加一而八八加一而九九加一而十十則仍歸於一故至十而天地之數全矣天數陽也地數陰也言天地即所以言陰陽也五位相得而各有合以五行之序而定位也邵子曰天之陽在南而陰在北地之陰在南而陽在北故河圖之數一陽位於北二陰位於南其即五行質具於地之義而言之歟今以陰陽相生之數論之一爲陽天一生水而位北一加一爲二爲陰地二生火而位南二加一爲三爲陽天三生木而位東三加一爲四爲陰地四生金而位西四加一爲五爲陽天五生土而位中至五而五行之數已周此生數之極也自一至五則五又爲一體矣於是以五爲中數而復加

一。則爲六。六。陰也。因五中數與一相加。故與一同位而屬之水焉。六加一爲七。以中數五計之。實加二。故與二同位而屬之火焉。七加一爲八。以中數五計之。實加三。故與三同位而屬之木焉。八加一爲九。以中數五計之。實加四。故與四同位而屬之金焉。九加一爲十。以中數五計之。復加五。故與五同位而屬之土焉。至十而五行之數再周。天地之數已備。此成數之極也。以陰陽運行之序論之。以五生數統十成數。位麗於中。而奇數則始於北一。次東三。次南七。次西九。偶數則始於南二。次西四。次北六。次東八。此數之陰與陰陽與陽各從其類者也。以奇偶相得之數論之。一與六合。二與七合。三與八合。四與九合。五與十合。此又奇偶相得而各有合者也。邵子謂圓者河圖之數。又曰歷紀之數。其肇於此。然則所謂圓數者。卽一陰一陽。一奇一偶。循環無間。表裏相維。百千萬億。總由此推之以成其變化。河圖者。豈非天地自然生成之數也哉。

洛書



洛書之數戴九履一左三右七二四爲肩八六爲足五居其中朱子謂以五奇數統四偶數而各居其所葢主於陽以統陰而肇其變數之用也邵子曰數學雖多乘除盡之矣夫洛書者數之源也乘除之所以生也易說卦傳曰參天兩地而倚數三天數也二地數也天地相合而萬物育焉一者太極之體其數不行故數行於二三起於三以三參之則三九七一之數生焉起於二以二兩之則二四八六之數生焉其序列之位則天居四正取以陽統陰之義地居四維取以陰從陽之義其三九七一乘數則旋而左除數則返而右也其二四八六乘數則旋而右除數則返而左也二三相合而爲五五五則無對居中者立其體也二五相合而爲十十仍歸一洛書不用者藏其用也是故三始於東方發生之地而位於左自東而南三而三之是爲九故戴九自南而西九而三之爲二十七去成數餘七故右七自西而北七而三之爲二十一去成數餘一故履一奇數左旋以三參之即天道左行之說也如轉而右行以三除之仍復其原數

焉。二立於西南二陰始生之地。而位於右肩。自西南而東南。二而二之是爲四。位於左肩。自東南而東北。四而二之爲八。位於左足。自東北而西北。八而二之爲十六。去十餘六。位於右足。偶數右旋以二兩之。卽地道右行之說也。如轉而左行。以二除之。仍復其原數焉。此乘除之數見於運行者如此。若以對待者觀之。一與九對。一爲數之始。九爲數之終。互乘互除。其數不變也。二與八對。二八互乘。俱得十六。二除十六得八。八除十六仍得二。此二與八之相倚也。三與七對。三七互乘。皆二十一。三除二十一得七。七除二十一仍得三。此三與七之相倚也。四與六對。四六互乘。皆二十四。四除二十四得六。六除二十四仍得四。此四與六之相倚也。至五爲二三之合。天地之交。陰陽之會。位於洛書之中。以建人極。配上下而爲三才。故斜直四圍。皆得十五。合之得四十有五。爲九五之數。要之運行者其序也。對待者其位也。進退循環。縱橫交錯。總不外於乘除。故曰乘除之本原。自洛書生也。

周髀經解

數學之失傳久矣漢晉以來所存幾如一綫其後祖冲之郭守敬輩殫心象數立密率消長之法以為習算入門之規然其法以有盡度無盡止言天行未及地體是以測之有變更度之多盈縮葢有未盡之餘蘊也明萬曆間西洋人始入中土其中一二習算數者如利瑪竇穆尼閣等著為幾何原本同文算指諸書大體雖具實未闡明理數之精微及我朝定鼎以來遠人慕化至者漸多有湯若

望南懷仁安多閔明我相繼治理曆法間明算學而度數之理漸加詳備然詢其所自皆云本中土所流傳粤稽古聖堯之欽明舜之濬哲曆象授時閏餘定歲璿璣玉衡以齊七政推步之學孰大於是至於三代盛時聲教四訖重譯向風則書籍流傳於海外者殆不一矣周末疇人子弟失官分散嗣經秦火中原之典章既多缺佚而海外之支流反得眞傳此西學之所以有本也古算書存者獨有周髀周公商高問答其本文也榮方陳子以下所推衍也而漢張衡蔡邕以爲術數雖存考驗天狀多所違失按榮方陳子始言晷度衡邕所疑或在於是若周髀本文辭簡而意該理精而用博實言數者所不能外其圓方矩度之規推測分合之用莫不與西法相爲表裏然則商高一篇誠成周六藝之遺文而非後人所能假託也舊註義多舛訛今悉詳正弁於算書之首以明數學之宗使學者知中外本無二理焉爾

昔者周公問於商高曰竊聞乎大夫善數也請問古

者包犧立周天曆度

周天曆度者。分周天三百六十度。為推求曆日之用也。按通鑑載包犧作甲曆。天干地支相配六甲一轉天度一周。年以是紀而歲功成。月以是紀而朔望定。晝夜以是紀而時日分。易大傳言包犧仰以觀於天文。俯以察於地理。其觀察之時。必有度數以紀其法象。則曆度始於包犧無疑矣。

夫天不可階而升。地不可將尺寸而度。請問數從安出。

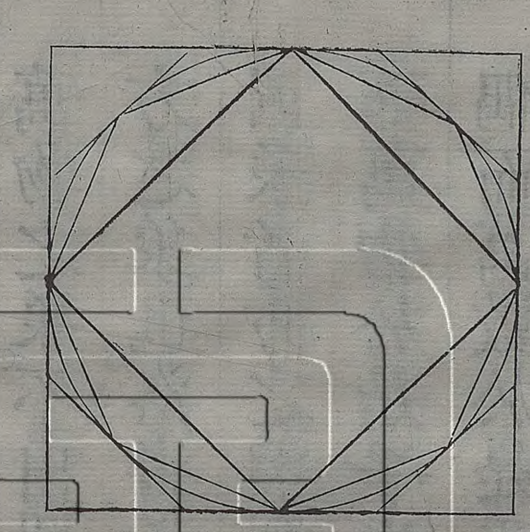
天之高明。地之博厚。非人力所能及。其曆度之數。不知從何而得也。

商高曰。數之法出於圓方。

萬物之象。不出圓方。萬象之數。不離圓方。河圖者。方之象也。洛書者。圓之象也。太極者。圓之體。奇也。四象者。方之體。偶也。奇數天也。偶數地也。有天地而萬物於是乎生。有圓方而萬象於是乎定。有奇偶而萬數於是乎立矣。

圓出於方。

以數而論。出於圓方。以圓方而論。則圓出於方。蓋

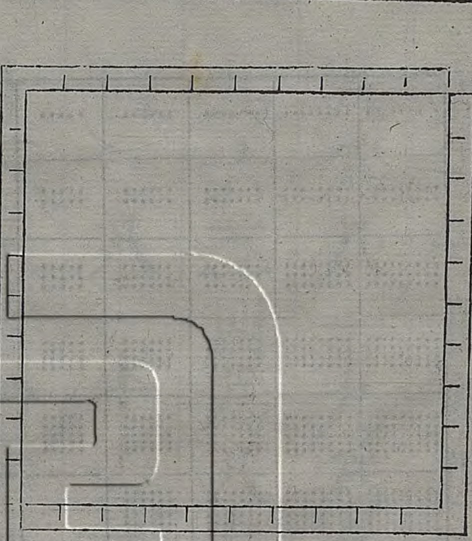


方易度而圓難測。方有盡而圓無盡。故推圓者以方度之。以有盡而度無盡也。是以圓周內弦外切屢求勾股。為無數多邊形。以切近圓界。將合而為一。而圓

周始得。故曰圓出於方也。

方出於矩。

孟子曰。不以規矩。不能成方圓。夫規所以成圓。而



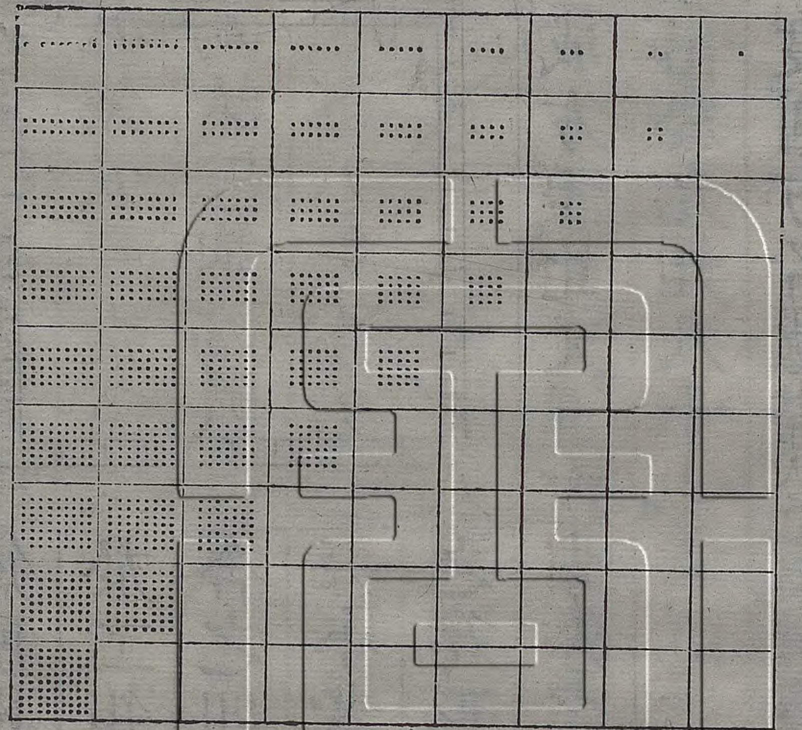
矩所以成方也。故凡方形必出於二矩相合。如矩之二股均者。合之即為正方。矩之二股一大一小者。合之則為長方。蓋因矩之為形。其角直。其線正。所以能

成方體。此又直內方外之理。故曰方出於矩也。

矩出於九九八十一。

度圓方者。遞歸於矩。而矩之形總不外乎二數相乘。九九者數之終。而一一乃數之始。言九九而不

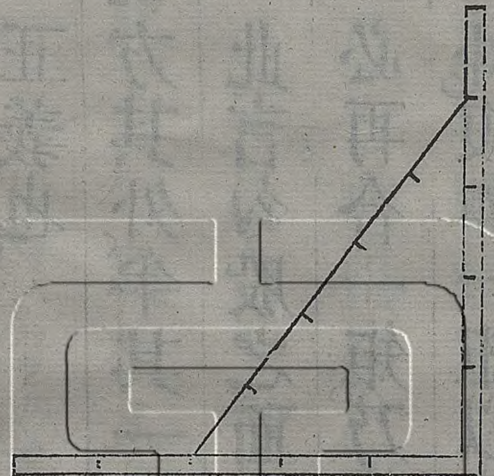
及他數者。以九九之內。他數俱該也。是以一一為



一。二二為四。三三為九。四四為一十六。五五為二十五。六六為三十六。七七為四十九。八八為六十四。九九為八十一。乃矩之二股均平所成之正方也。一二為二。一三為三。一四為四。一五為五。一六為六。一七為七。一八為八。一九為九。形雖未方。而其理猶存也。二三為六。二四為八。二五一十。二六一十二。二七一十四。二八一十六。二九一十八。三三九。三四一十二。三五一十五。三六一十八。三七二十一。三八二十四。三九二十七。四四一十六。四五二十。四六二十四。四七二十八。四八三十二。四九三十六。五五二十五。五六三十。五七三十五。五八四十。五九四十五。六六三十六。六七四十二。六八四十八。六九五十四。七七四十九。七八五十六。七九六十三。八八六十四。八九七十二。乃

矩之一股小一股大所成之長方也。至於一百之類，雖爲正方，乃十十之相乘，十則仍歸於一也。又如八十四、九十六之類，乃六七四十二、六八四十八之倍，不得自立爲數之本。又或十一、十三、十七、十九之類，十一爲二五一十之奇，十三爲二六一十二之奇，十七爲四四一十六之奇，不得成正方，亦不得成長方，故不入九九之數也。是以九九之數爲方之本，而方之形必合以矩，故曰矩出於九九八十一也。

故折矩以爲勾廣三，股修四，徑隅五。



前言圓方之形，此言勾股生成之正數也。以二矩合之，既爲方形，今以一矩折之，則爲一方之兩邊。是以折矩之橫者爲勾之廣，折矩之縱者爲股之長，於勾股之末以斜弦連之，是爲徑隅。徑，直也；隅，角也。言自兩角相對直連之也。勾之廣必三，股之修必四，而徑隅始得五，此乃自然生成之正分也。易曰參

天兩地而倚數。天數一。參之則爲三。地數二。兩之則爲四。三二合之則爲五。此又勾三股四弦五之正義也。

既方其外。半其一矩。

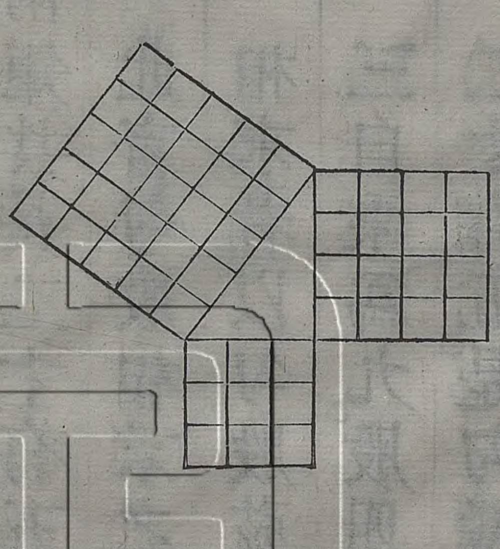
此言勾股之面積也。勾股以弦連之。不得爲方形。必再合一矩。乃爲一長方。所謂方其外者。言弦之外。復加一矩以成方也。勾三股四相乘得一十有二。即爲兩矩合成之數。半之得六。乃勾股之面積。所謂半其一矩者也。

環而共盤。得成三四五。

此言勾股弦相和之數也。環而共盤者。環繞盤旋於勾股弦之周圍。得成三四五。共之爲一十有二。乃三數相和之總數也。

兩矩共長二十有五。是爲積矩。

此言勾股相求之法也。兩矩者。勾與股也。其所以相求者。以勾股弦各面積。彼此加減以立法也。勾三自乘爲九。股四自乘爲一十有六。合而計之爲二十有五。是勾股各自乘之積相併而與弦自乘



之積等。故曰積矩也。弦之自乘積內。減勾自乘之積。得股自乘之積。弦之自乘積內。減股自乘之積。得勾自乘之積。故爲勾股弦相求之法也。

故禹之所以治天下者。此數之所由生也。

言禹之平成之功。昭垂萬古。揆厥所以奏績者。必藉勾股以審高下。始得順水之性而告厥成功也。然則禹之所以治水者。非此勾股之數所由生乎。

周公曰。大哉言數。請問用矩之道。

商高曰。平矩以正繩。

此言用矩立法。必以正且直也。平矩以正繩有兩義。平置其矩。使矩之角直。以此直角之一股。或横或平。横以度遠。平以度高。復自一股引繩以度其分。爲我所知。故以所知。推所不知。此繩引長時。必使與直角對正。不論其分之幾何。引之又必令直。方能得測度之準。故爲平矩以正繩。又平者均平整齊之謂。用矩之道。矩之角正。卽直角之說也。然後二股得

直。以之測高測遠。乃得度其大小之分。此矩既正。而所測之度亦正矣。孟子曰。規矩準繩。以爲方圓平直。繩者卽準之之意。規矩所以度圓方。而準繩所以考平直。故準之以平。繩之以直。始得立法之精微。故曰平矩以正繩也。

偃矩以望高。

此用矩測高之法也。偃者仰也。仰矩方可測高。矩之一股植立在前。一股定平在下。然後比例推之。蓋平股與立股之比。卽所知之遠與所測之高之比也。故仰測之而得高。

覆矩以測深。

此用矩測深之法也。覆者俯也。俯矩方可測深。矩之一股立者在前。一股平者在上。平股與立股之比。卽所知之遠與所測之深之比也。故俯測之而得深。

臥矩以知遠。

此用矩測遠之法也。臥者平也。平矩方可測遠。以矩之一股爲橫向內。一股爲縱向前。是以橫與縱

之比即所知之度與所求之遠之比也故平測之而得遠

環矩以爲圓

此用矩爲圓之法也以矩之一端爲樞一端旋轉爲圓則成一圓環矩者即旋規之說也

合矩以爲方

此用矩爲方之法也矩二股也兩矩相合乃成一方即前方出於矩之說也

方屬地圓屬天天圓地方

前言用矩以測高深廣遠復用矩以爲圓方此以圓方屬之天地者非以形體言蓋以陰陽動靜之理言也樂記云著不息者天也著不動者地也不息故運而不積圓之象也不動故靜而有常方之理也且圓之數無盡而方之數有盡天不可階而升測天者恆於地上度之是仍以方度圓也凡數之不盡者必奇數之可盡者必偶是以陽爲奇陰爲偶此方圓之理數所以屬乎天地也

方數爲典以方出圓

典則也。言圓之數奇零不盡。不可為則。故惟方數可為典則。以方出圓者。以方之形度圓之分。從方數中生出圓數。即前圓出於方之說也。如圓徑求積。則以徑自乘之為正方形。而以方率圓率比例推之。即得圓積。是皆以方出圓之理也。

笠以寫天。天青黑。地黃赤。天數之為笠也。青黑為表。丹黃為裏。以象天地之位。

此即儀象以表天地之形色也。笠形圓。故以象天。寫象也。青黑天之色。黃赤地之色。天數之為笠形。則以青黑為表。丹黃為裏。以象天地之位。蓋取天包地之象也。

是故知地者智。知天者聖。智出於勾。勾出於矩。夫矩之於數。其裁制萬物。惟所為耳。

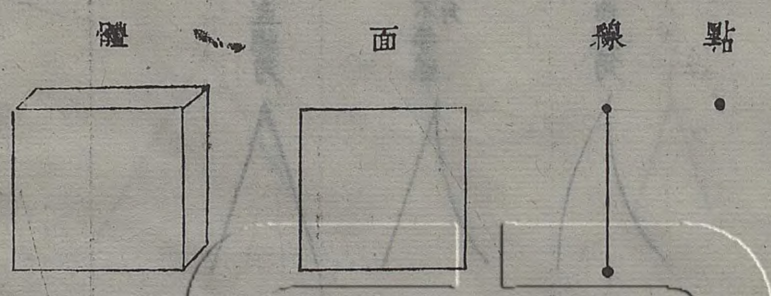
天地之高深廣遠。非聖智不能知。然聖智非由理之自然。亦不能無所憑藉而知也。故明勾股之數。即可以知地而為智。知地之數。即可因地以知天而為聖矣。故曰智出於勾也。然勾股之形。又賴矩以成。故矩為勾股之本。而天地之高深廣遠。皆賴

矩以測。況萬物之大小巨細。豈能外於矩之度分乎。故矩之於數。其裁制萬物。惟其所爲而無不可也。

周公曰。善哉。

以周公之聖。而與之曰善哉。則其得數之本。立法之妙。可謂至矣。至是而周髀之義盡矣。

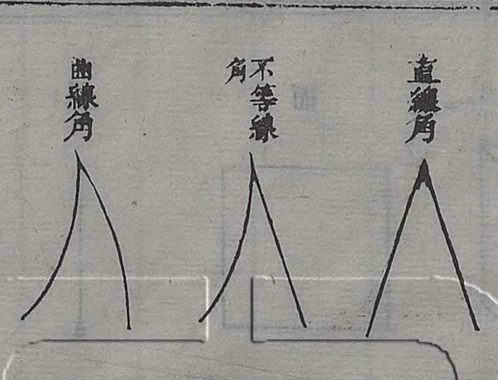
御製數理精蘊上編卷二



幾何原本一

第一

凡論數度必始於一點自點引之而為線自線廣之而為面自面積之而為體是名三大綱是以有長而無闊者謂之線有長與闊而無厚者謂之面長與闊厚俱全者謂之體惟點無長闊厚薄其間不能容分不可以數度然線之兩端即點而線面體皆由此生點雖不入於



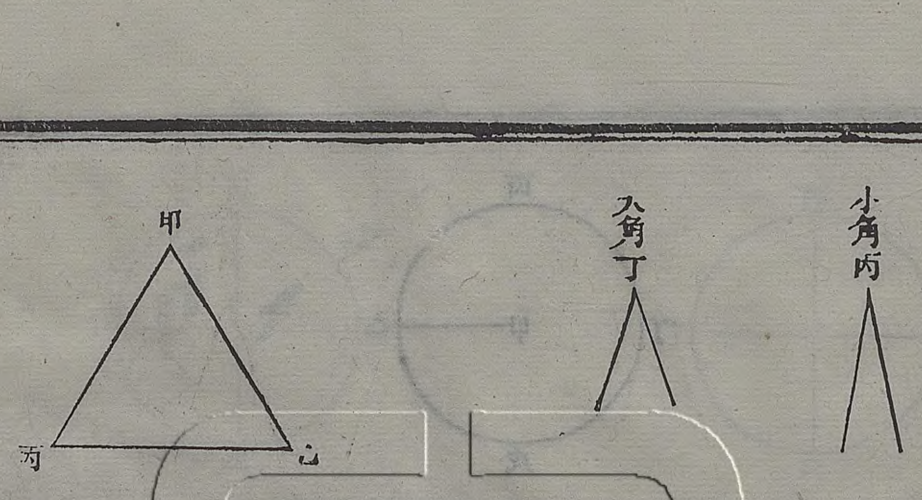
數實爲衆數之本。

第二

線有直曲兩種。其二線之二端相合。一端漸離。必成一角。二線若俱直者。謂之直線角。一線直一線曲者。謂之不等線角。二線俱曲者。謂之曲線角。

第三

凡角之大小。皆在於角空之寬狹。出角之二線。即如規之兩股。漸漸張去。自然開寬。是以命角不論線之長短。止看角之大小。如丙角兩線雖長。其開股之空狹。遂爲小角。若丁角兩線雖短。其開股之空寬。遂成大角矣。

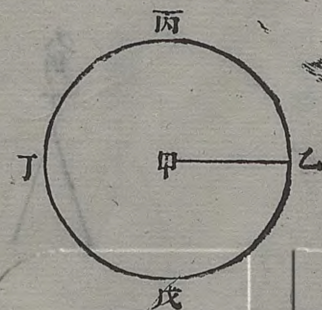


第四

凡命角必用三字爲記。如甲乙丙三角形。指甲角。則云乙甲丙。指乙角。則云甲乙丙。指丙角。則云甲丙乙角是也。亦有單舉一字者。則其所舉之一字。即

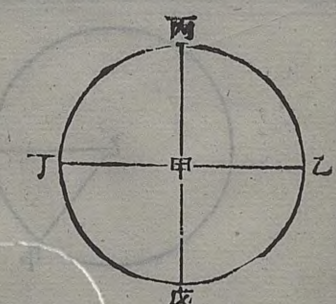
是所指之角也。如單言甲角乙角丙角之類。

第五



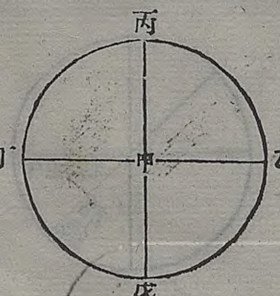
凡有一線。以此線之一端爲樞。復以此線之一端爲界。旋轉一周。即成一圜。如甲乙一線。以甲端爲樞。乙端爲界。旋轉復至乙處。即成乙丙丁戊之圜。此圜線謂之圜界。圜界內所積之面度謂之圜面。

第六

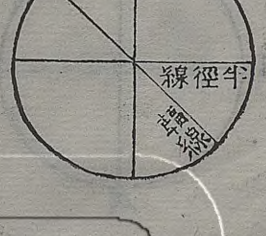


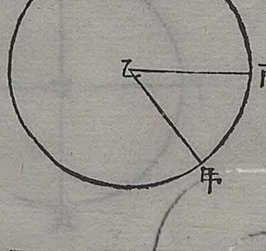
凡圜界不拘長短。其分界之所。即爲弧線。如乙丙丁戊之圜。丙至丁。丁至戊。俱爲弧線。因其形似弧。故名之。

第七



凡圜自一界過圜心至相對之界。畫一直線。將一圜爲兩平分。則爲圜徑。如乙丙丁戊之圜。以甲爲心。自圜界乙處過甲心至丁。或自圜界丙處過甲心至戊。畫乙甲丁及丙甲戊線。皆爲圜徑也。



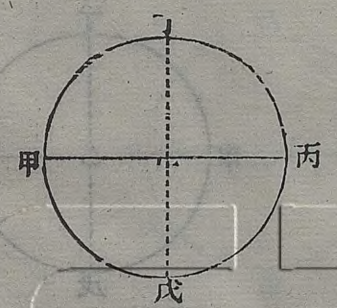


第八

凡自圜心至圜界。作幾何線。皆謂之輻線。其度俱相等。因平分全徑之半。故又謂之半徑線。

第九

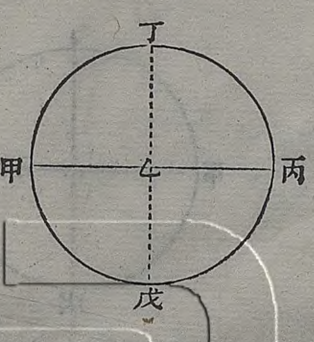
凡圜界。皆以所對之角而命其弧。而角又以所對之弧而命其度。葢角度俱在圜界。而圜界爲角度之規也。如乙角爲心。甲丙爲界。則乙角相對之界。卽甲丙



弧。而甲丙弧。卽乙角之度也。

第十

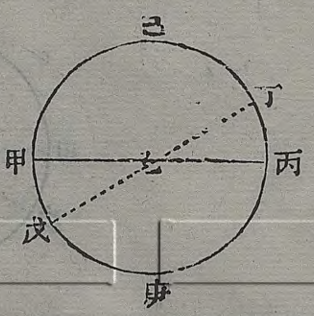
凡角相對之弧。得圜界四分之一者。此角必直。故謂之直角。如甲丁丙戊之圜。甲乙丙之徑。自中心乙至圜界丁畫一半徑。將半圜界又分爲兩平分。則成甲乙丁丙乙丁之二角。此二角各得圜界四分之一。則此二角爲直角也。若自丁界過乙心至圜界戊處。畫一直線。又成



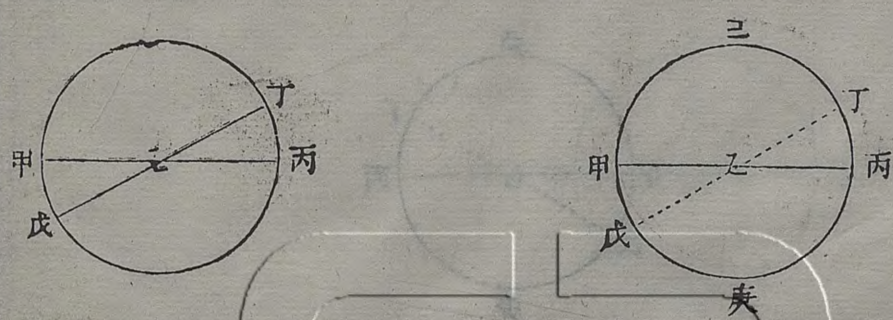
丁乙戊之徑。復得甲乙戊。丙乙戊。兩相等之直角矣。故凡畫一直線。交於別線。其所成之角若直。此線謂之垂線。蓋因平分圓界為四。其四弧相對之四角。必相等而皆為直角。則其二徑相交。必互為垂線可知矣。

第十一

凡角相對之弧。不足圓界四分之一者。謂之銳角。若過四分之一者。謂之鈍角。



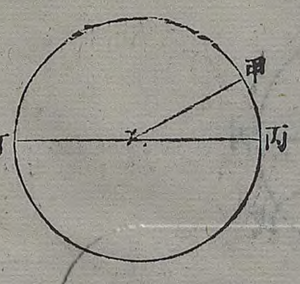
故自圓徑中心。復畫一輻線。而不平分半圓之界。則成一銳角。一鈍角。如甲己丙庚之圓。於甲乙丙之徑。自乙心至甲己丙之半圓界。不兩平分。於丁處畫一輻線。遂成丙乙丁一銳角。甲乙丁一鈍角。再將丁乙線引於相對圓界戊處。畫一丁乙戊徑線。復成甲乙戊一銳角。丙乙戊一鈍角。合前二角。總為四角矣。故凡二角兩尖相對。謂之對角。二角兩尖



相並謂之並角。如甲乙戊丙乙丁二角之兩尖相對。即謂之對角。丙乙戊甲乙丁二角之兩尖亦相對。故亦謂之對角也。如丙乙戊甲乙戊之二角。兩尖相並。而同出一線則謂之並角矣。

第十二

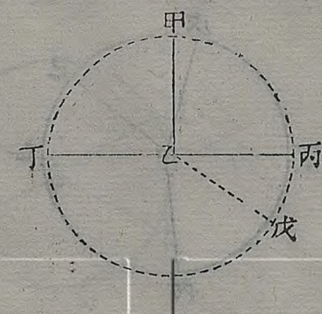
凡一圜內設兩角。此一角相對之弧。與彼一角相對之弧。其限若等。則此二角之度亦必相等。如甲丁丙戊之圜。丙乙



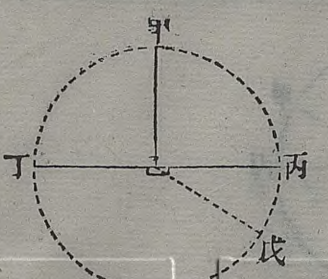
丁角相對之丙丁弧。甲乙戊角相對之甲戊弧。其限相等。故丙乙丁角。甲乙戊角。其度亦相等也。

第十三

凡有一圜。其徑線之中心。作相並之二角。此二角之度必與二直角等。如甲丙丁之圜。自丁乙丙徑線之中心。作甲乙丙甲乙丁之相並二角。此二角之度。必與二直角相等也。

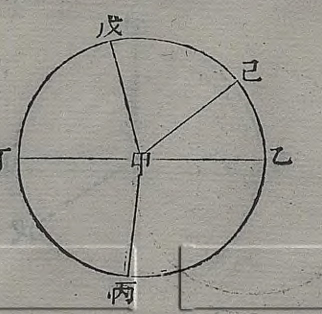


線為圜之徑線。必將圜界平分為兩平分矣。此丙乙丁徑線之中心所畫之甲乙線。又將半圜界平分為兩平分。則此二角各相對之弧。皆為一圜界四分之二。而各為一直角可知矣。又如戊乙線。將半圜界雖不兩平分而成一鋭角一鈍角。然所成二角。仍在丙乙丁徑線所限半圜界度。為全圜界四分之二。故與二直角相等也。



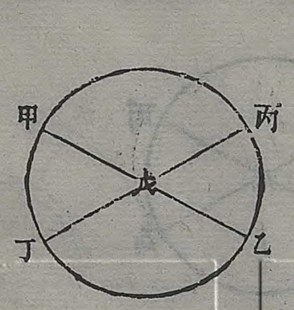
第十四

凡一直線。交於他直線。其所成之二角。或為二直角。或與二直角等。如丙乙丁直線上。畫一甲乙直線。至於乙處。即成甲乙丙甲乙丁之二直角也。又或於丙乙丁直線上。畫一戊乙直線。亦至乙處。復成丙乙戊一鋭角。丁乙戊一鈍角。此二角必與二直角相等也。再申明之。以乙為心。丙為界旋轉畫一圜。則丙乙丁



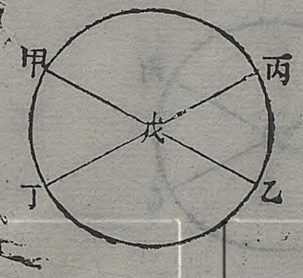
第十五

凡自一心畫爲衆線。其所成之角雖多。止與四直角相等。如自甲心至乙至丙至丁至戊至己。畫衆輻線。雖成衆角。其各角所函之度。必與四直角等。蓋因甲點爲心。衆輻線皆立一圜之界。故衆角所對之弧。總不越一圜之全度。前言一圜之界。僅有四直角之弧線。茲角雖多。亦未嘗出一圜之界。故曰衆角雖多。止與四直角等也。

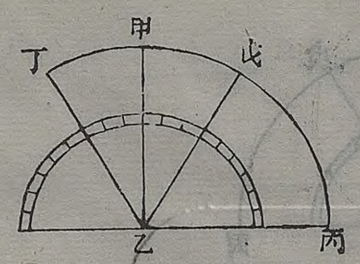


第十六

凡兩直線相交所成二對角之度。必俱相等。如甲乙丙丁二線。交於戊處。成甲戊丁丙戊乙之二對角。斯二角之度。必俱相等。今以二線相交之處爲心。旋轉畫一全圜。則甲乙丙丁二線俱爲此圜之徑線矣。惟其俱爲徑線。故將一圜爲兩平分。而甲戊乙之徑線爲甲丙乙之



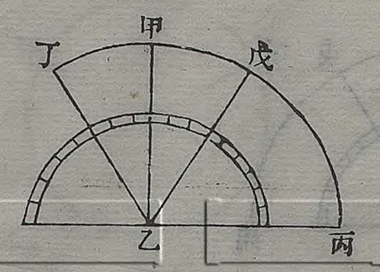
半圜界。丙戊丁之徑線。爲丙甲丁之半圜界。因兩半圜界。俱係全圜徑線。故相交戊對角。其度必等。茲將甲丙乙之半圜界。減去甲丙弧。卽餘丙乙弧。丙甲丁之半圜界。亦減去丙甲弧。又餘甲丁弧。凡兩相等之弧。減去一段相等之弧。所餘之弧必相等。今甲丙乙。丙甲丁。二半圜之界內。減去甲丙。丙甲同體之弧。則所餘丙乙甲丁相對之弧。亦必相等矣。



此二弧之度旣俱相等。則所對之甲戊丁丙戊乙。二角之度。亦必相等可知矣。其餘甲戊丙丁戊乙。亦與甲戊丁丙戊乙同理。故其所對之角度。亦必相等也。

第十七

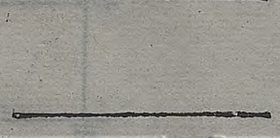
凡大小圜界。俱定爲三百六十度。而一度定爲六十分。一分定爲六十秒。一秒定爲六十微。一微定爲六十纖。夫圜界定爲三百六十度者。取其數無奇零。便



於布筭。卽徵之經傳。亦皆符合也。易曰。凡三百有六十當期之日。邵子曰。三百六十。中分之得一百八十。爲二至二分相去之數。度下皆以六十起數者。以三百六十。乃六六所成。以六十度之。可得整數也。

凡有度之圜界。可度角分之大小。如甲乙丙角。欲求其度。則以有度之圜心。置於乙角。察乙丙乙甲之相離。可以容圜界之幾度。如容九十度。卽是甲乙丙直角。何以知爲直角。因九十度爲全圜三百六十度之四分之一。前言凡角得圜界四分之一者爲直角。故知其爲直角也若過九十度者。爲丁乙丙鈍角。不足九十度者。爲丙乙戊銳角。觀此三角之度。其餘可類推矣。

平行線

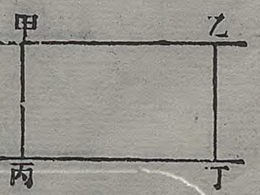


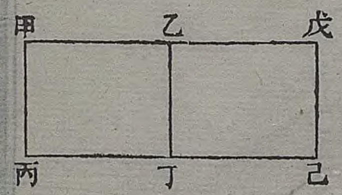
第十八

凡二線之間。寬狹相離之分俱等。則此二線。謂之平行線也。

第十九

欲求平行線之間。相距幾何。則自上一線不拘何處至下一線。畫二縱線。則此

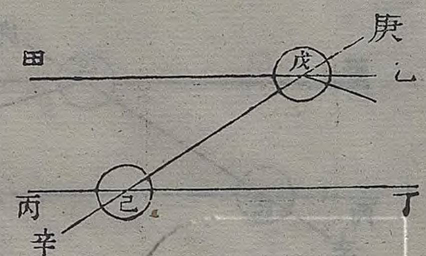




二線爲相距度分也。如甲乙丙丁二線平行。自上線甲乙二處至下線丙丁二處畫二縱線。則此二線爲相等線。其度必等。然則甲乙丙丁相對之間。其相距之遠近。不已見耶。

第二十

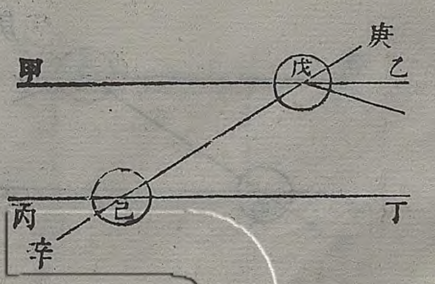
平行二線。雖引至於無窮。其端必不能相合。蓋二線相離之度。各處遠近俱爲相等故也。如甲乙丙丁平行二線。隨意



引於戊己。又自戊至己。畫一縱線。其度亦等於甲丙乙丁二縱線。故曰平行線。雖引至於無窮。其端終不能相合也。

第二十一

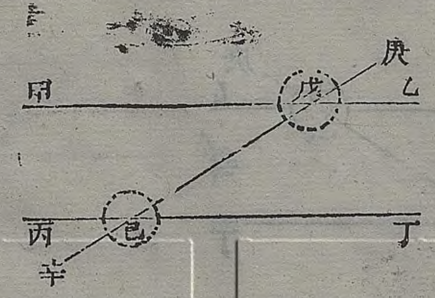
凡平行二線。或縱或斜。畫一直線交加於上。則平行線上所成之二角。必俱相等。如甲乙丙丁二平行線上畫一庚辛斜線。其甲乙線之庚戊乙角。丙丁線之戊己丁角。皆相等。假使庚戊乙角。大於



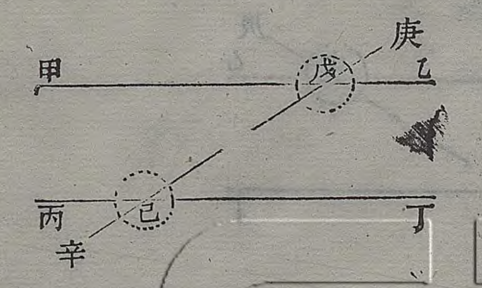
戊己丁角。則戊乙線。必離於庚戊線而向丙丁線。甲乙。丙丁。二線不平行矣。若甲乙。丙丁。二線。毫無偏斜。又得庚辛直線相交成二角。則此二角必然相等矣。

第二十二

凡平行二線上。畫一斜線。則成八角。此八角度有相等者。必是對角或內外角。如庚戊乙。甲戊己。二角。其度相等。因其兩尖相對。謂之對角。庚戊乙。戊己丁。二



角。其度亦相等。因其在平行二線之內外。故謂之內外角。甲戊己。戊己丁。二角。其度亦相等。因其俱在平行二線之內。而立斜線之左右。故又謂之相對錯角。又如甲戊庚。庚戊乙。二角。其度不等。因其立一線之界。謂之並角。庚戊甲。丁己辛。二角。其度亦相等。因其俱在平行二線之外。故謂之外角。乙戊己。丙己戊。二角。其度亦相等。因其又俱在平行二線



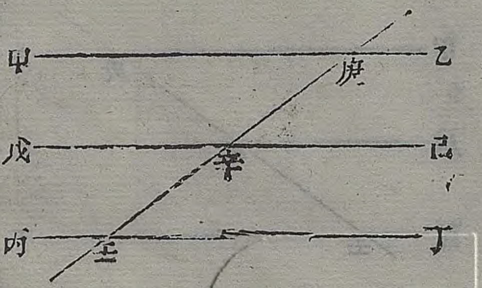
之內。故又謂之內角。總之二平行線上。交以斜線。所成八角。必兩兩相等也。

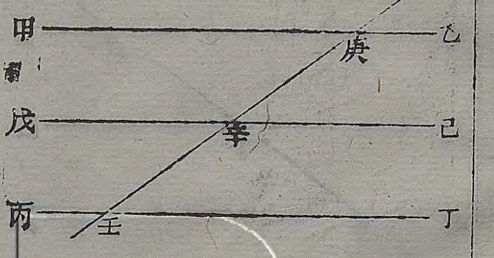
第二十三

平行線上一邊之二內角。或一邊之二外角。與二直角相等。如丁己戊角與丙己戊角爲並角。則此二並角。與二直角等。前第十四節云。凡一直線。交於他直線。所成二角。必與二直角相等。則此二角同出於一直線。爲並角。故亦與二直角等矣。又如甲戊庚庚戊乙。雖爲外角。而亦爲並角。此二並角。亦與二直角等也。他如甲戊己乙戊己二並角。丙己辛丁己辛二並角。亦與二直角等也。

第二十四

有平行二線。復與一線相平行者。此三線互相爲平行線也。如甲乙丙丁二線之間。有戊己線與之平行。則甲乙丙丁戊己三線。互相爲平行線也。照前第二



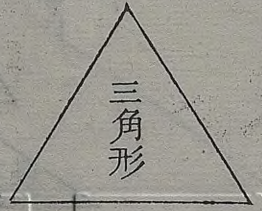


十一節。在此三線上。畫一庚辛壬斜線。則所成之庚辛二角必相等。而辛壬二角亦必等也。三線之與斜線相交所成之角。既各相等。則三線互爲平行可知矣。

幾何原本二

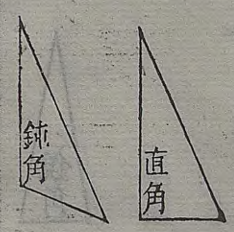
第一

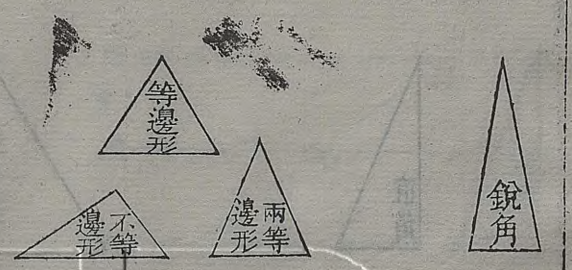
凡各種界所成。俱謂之形。其直界所成者爲直界形。曲界所成者爲曲界形。凡直界所成各形。未有少於三角形界者。故三角形爲諸形之首。



第二

凡三角形。一角直者爲直角三角形。一角鈍者爲鈍角三角形。三角俱銳者爲





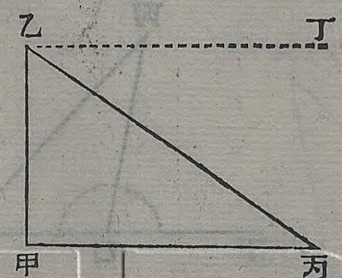
銳角三角形。

第三

凡三角形。其三邊線度等者。為等邊三角形。兩邊線度等者。為兩等邊三角形。三邊線度俱不等者。為不等邊三角形。

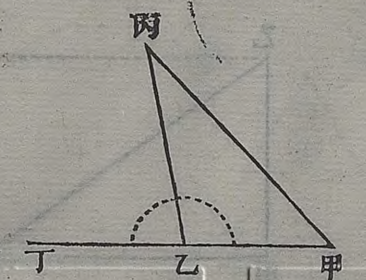
第四

凡三角形之三角度相併。必與二直角度等。如甲乙丙三角形。自乙角與甲丙線平行畫一乙丁線。則成丙乙丁角。與



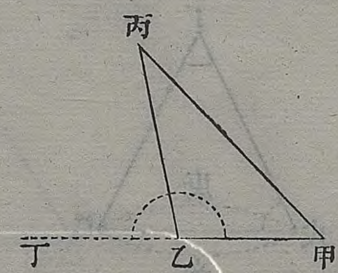
丙角為二尖交錯之二角。其度必相等。見首卷第二十二節。而甲角與甲乙丁角。為甲丙乙丁二平行線內一邊之二內角。與二直角等。見首卷第二十三節。今於甲乙丁直角內。減丙乙丁角。所餘為甲乙丙角。丙乙丁角。既與丙角度等。則甲乙丙。丙乙丁。合成之一直角。與甲角之一直角。非二直角之度耶。

第五



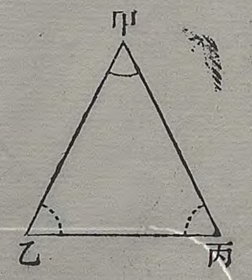
凡三角形。自一界線引長成一外角。此外角度。與三角形內所有之二銳角等。

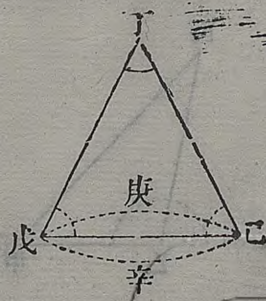
如甲乙丙三角形。自甲乙線引長至丁所成之丙乙丁角。卽為外角。其度與三角形內甲丙二銳角之度等。蓋甲乙丙三角形之三角度。併之原與二直角等。如本卷第四節云而甲丁直線。與丙乙直線相交所成之甲乙丙丁乙丙內外角。亦與二直角等。如首卷第十四節云則此內外二角所併之度。與三角形內三角所併之度。亦必相等。今於內外角所併之二直角內。減去甲乙丙角。則所餘之丙乙丁一外角度。與甲角丙角所併之度。為相等可知矣。



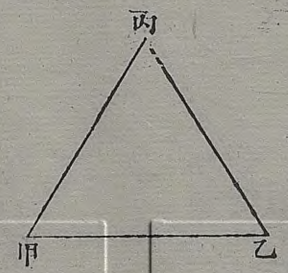
第六

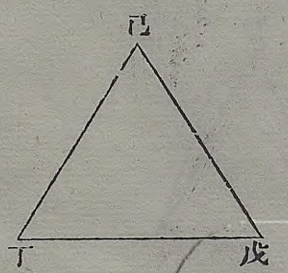
凡兩三角形。其兩邊線之度相等。二線所合之角又等。則二形底線之度必等。二形之式亦等。其底線之二角亦皆等





也。如甲乙丙一三角形。丁戊己一三角形。此二形之甲角丁角若等。甲丙丁戊二線。甲乙丁己二線。又互相等。則乙丙戊己之二底線必等。其二形之三角式亦必等。而乙角己角相等。丙角戊角亦相等。若將二形之甲角丁角相合。則甲丙丁戊二線。甲乙丁己二線。各度必等。因其俱等。故丙乙線之二角。與戊己線之二角。俱恰相符而無偏側矣。若謂乙丙底與戊己底不符。必是戊己線上斜於庚。或下斜於辛。不成直線形矣。





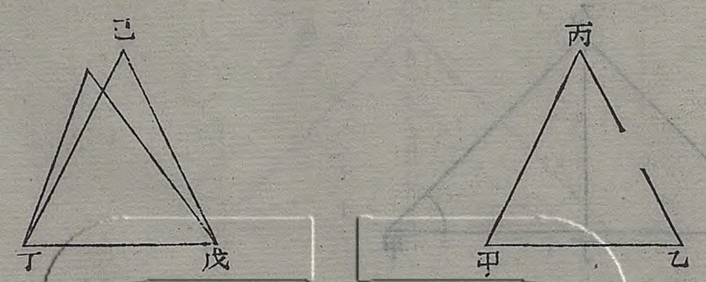
第七

兩三角形。其三邊線之度若等。則三角之度亦必相等。而此形內所函之分亦俱等也。如甲乙丙丁戊己兩三角形之甲乙線。丁戊線。甲丙線。丁己線。乙丙線。戊己線。兩兩相等。則甲角與丁角。乙角與戊角。丙角與己角。必各相等。而甲乙

丙三界所函之分。丁戊己三界所函之分。亦俱相等。葢因此兩三角形之各線。俱恰相符。故所函之分。亦俱恰相符也。

第八

凡兩三角形。有一線相等。其相等線左右所生之二角又相等。則其他線他角俱相等。而二形之分亦相等也。如甲乙丙丁戊己兩三角形之甲乙線丁戊線若等。而此二線左邊所成之甲角丁角

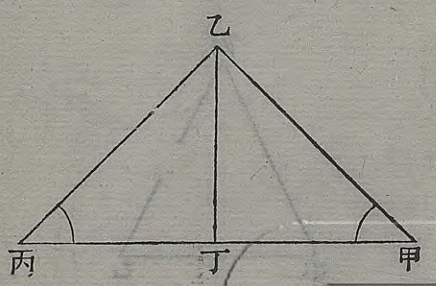


右邊所成之乙角戊角亦相等則甲丙線度與丁己線度等。丙乙線度與己戊線度等。而丙角與己角亦等。甲丙乙形所函之分。與丁己戊形所函之分。自然相等矣。若將甲乙線與丁戊線相較再將甲角與丁角。乙角與戊角相較。此二線二角之度必俱相符。此二線二角既俱相符。其他線他角亦必各相符矣。若謂一線不符。則相等之角。亦必不符。必

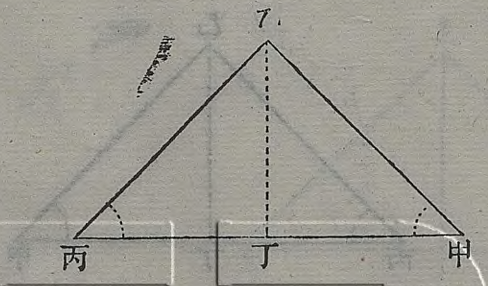
其一線斜出。或一線偏入。以致各角俱不相等。角既不相等。而形式亦必不同矣。

第九

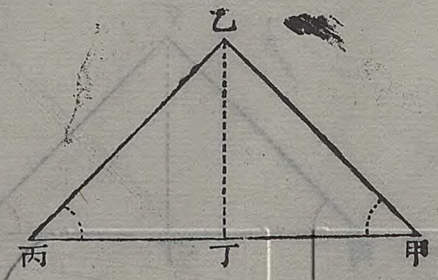
三角形之兩邊線若等。其底線之兩角度亦必等。如甲乙丙三角形。其甲乙。丙乙兩邊線之度等。則其甲丙底線之甲角丙角之度亦俱等也。若以甲丙底平分於丁處。自丁至乙角畫一直線。遂成



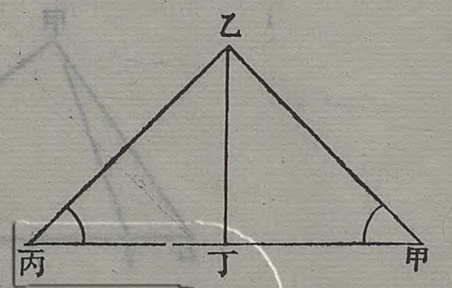
甲乙丁。丙乙丁。兩三角形。此兩形之甲乙線與丙乙線既相等。而甲丙底線平分之甲丁。丁丙。線度亦等。則乙丁爲兩三角形所共用之各一邊線。然則此兩三角形之各三邊線度必俱相等可知矣。三角形之三線既各相等。則其各角之度亦必相等。因其各角之度相等。故甲角丙角之度亦必等也。



第十



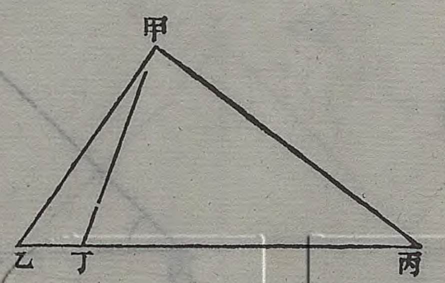
有兩邊相等之三角形。自上角至底線畫一直線。將底線為兩平分。則此線為上角之平分線又為底線之垂線也。如甲乙。丙乙。兩邊線度相等之甲乙丙三角形。自上角乙至底線丁。畫一直線將甲丙底線為兩平分。則為乙角之平分線。又為甲丙底線之垂線也。葢乙丁線將乙甲丙三角形平分為甲乙丁。丙乙丁兩三角形。此兩三角形之各界線度



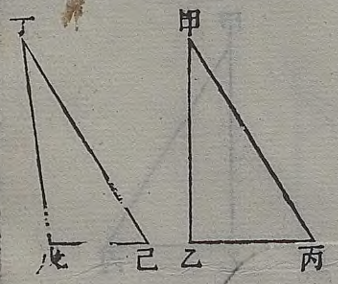
必各相等。而各角之度又俱相等。則甲乙丁角。丙乙丁角。將乙角為兩平分矣。而甲丁乙角。丙丁乙角。又為相等之兩直角。因其為兩直角。故乙丁線為平分甲丙底線之垂線也。

第十一

凡三角形內長界所對之角必大。短界所對之角必小。如甲乙丙三角形之乙丙界長於甲丙界。故其相對之甲角大



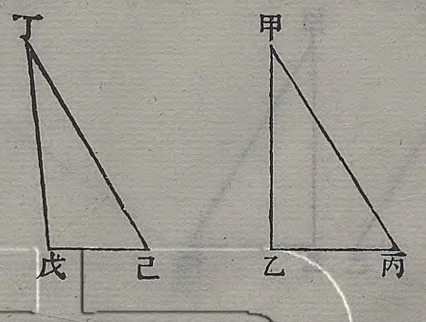
於乙角而甲乙界短於甲丙界故其所對之丙角小於乙角也試依甲丙界度截乙丙於丁復自甲至丁作甲丁線即成甲丙丁兩界相等之三角形夫甲丙丁丙兩界度既相等則甲丁丙丁甲丙兩角亦相等今甲丁丙角相等之丁甲丙角原自乙甲丙角所分則乙甲丙角必大於甲丁丙角矣然此甲丁丙角為甲乙丁小三角形之外角與小三角形



丙之甲乙二角相併之度等見本卷第五節既與甲乙二角之度等則大於乙角可知矣夫甲丁丙角既大於乙角則乙甲丙角必更大於乙角矣丙角之小於乙角其理亦同

第十二

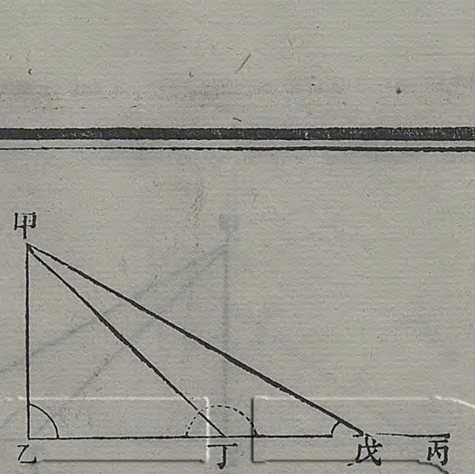
凡三角形內必有二銳角蓋三角形之三角併之與二直角等見本卷第四節如甲乙丙三角形之乙角為直角則所餘甲角



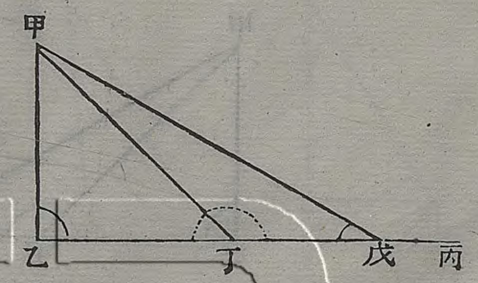
丙角。併之始與乙角相等。二角併之僅與一直角等。則此二角獨較之。必小於直角矣。故此甲丙二角爲銳角也。又如丁戊己三角形之戊角爲鈍角。則所餘之丁角己角。愈小於直角而爲銳角矣。

第十三

凡自一點至一橫線畫衆線。而衆線內有一垂線。必短於他線。而他線與垂線相離愈遠則愈長也。如自甲點至乙丙



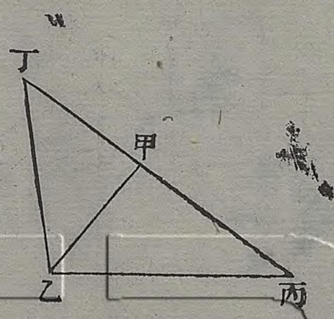
線畫甲乙。甲丁。甲戊。幾線。此內甲乙爲垂線。較之甲丁。甲戊線。則其度最短。而甲戊線與甲乙線相離。既遠於甲丁。故更長於甲丁線也。蓋甲乙爲垂線。則乙角必爲直角。見首卷第十節。而甲乙丁三角形內。丁角甲角。必俱爲銳角。而小於乙角矣。因乙角大於丁角。故此乙角相對之甲丁線。必長於丁角相對之甲乙線。又甲丁戊外角。原與甲乙丁。乙甲丁。二內



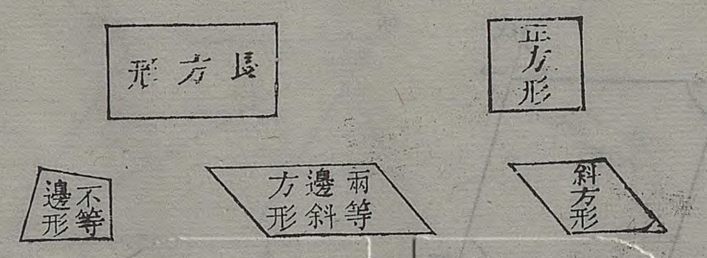
角相併之度等。見本卷第五節。則此甲丁戊一外角。必大於甲乙丁一丙角矣。甲丁戊之外角。既大於甲乙丁之丙角。則甲丁戊角相對之甲戊線。必長於甲乙丁角相對之甲丁線可知矣。

第十四

凡三角形。將二界線相併。必長於所餘之一界線。如甲乙丙三角形。將甲乙。甲丙二界線併之。則長於所餘之乙丙界



線也。試以丙甲線引之至丁。作丁甲線與甲乙等。則丁丙線。爲甲丙甲乙二界線之共度矣。復自丁至乙作丁乙線成乙甲丁兩界相等之三角形。其丁乙甲角與丁角等。見本卷第九節。則丁乙丙角必大於丁角。夫丁乙丙角既大於丁角。則其所對之丁丙線必長於丁角相對之乙丙線可知矣。見本卷第十一節。



幾何原本三

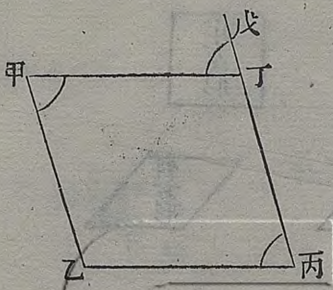
第一

凡四邊線函四角者。其形有五。四邊線度等。而角度亦等者。為正方形。四角直。而兩邊線短。兩邊線長者。為長方形。四邊線度等。而角度不等者。為等邊斜方形。兩邊線長。兩邊線短。而角度又不等者。為兩等邊斜方形。以上四形。俱自平行線出。如四邊線不等。亦不平行。而四

角度又不等者爲不等邊斜方形。

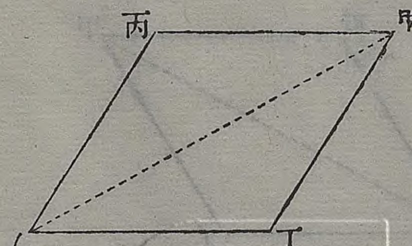
第二

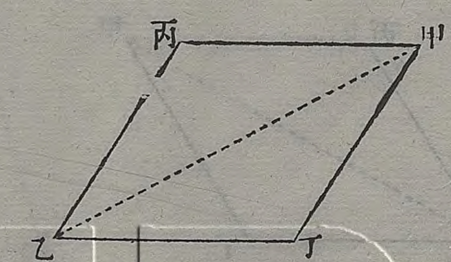
凡四平行線所成方形。其所函之角成兩對角。必兩兩相等。如甲乙丙丁平行線方形。其甲角度丙角度等。而乙角度丁角度亦等。若以丙丁線引長至戊作一線。成一丁外角。與甲角爲二尖交錯之角。其度相等。見首卷第二十二節而丁外角與丙角。又爲一邊之內外角。其度亦等。見首卷第二十二節夫甲丁二角既等。丁丙二角又等。則甲角與丙角必自相等。而丁乙兩對角之相等。不言可知矣。



第三

凡平行四邊形。自一角至相對之角作一對角線。必平分四邊形爲兩三角形。如甲丙乙丁四邊形。作甲乙對角線。即成丙甲乙丁甲乙兩相等三角形。葢此四邊形之丙丁二角爲對角。其度必等。

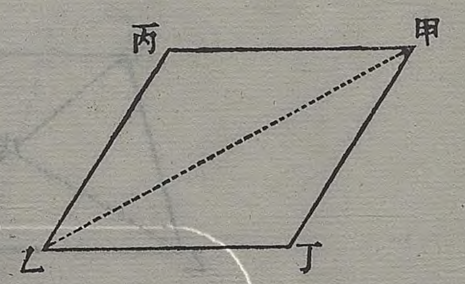




見本卷第二節而對角線所分之丙甲乙丁乙甲二角丙乙甲丁甲乙二角俱為二尖交錯之角其度又兩兩相等見首卷第二十二節夫此兩三角形原自一四邊形而分各角又俱相等則其所函之分必等而四邊形平分為兩平分無疑矣

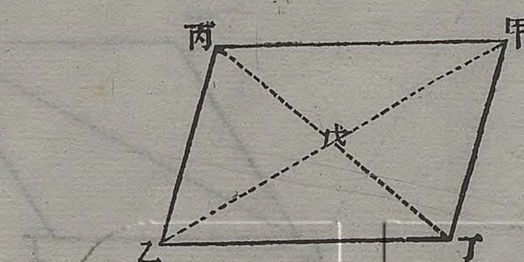
第四

凡平行線所成方形其兩兩平行線度俱相等如甲丙乙丁四邊形之丙甲線與乙丁線度等丙乙線與甲丁線度等此即如前節作一對角線成兩三角形而兩形之各角必俱相等則丙甲乙丁二線丙乙甲丁二線俱為各相等角所對之線其度亦必相等矣見二卷第八節

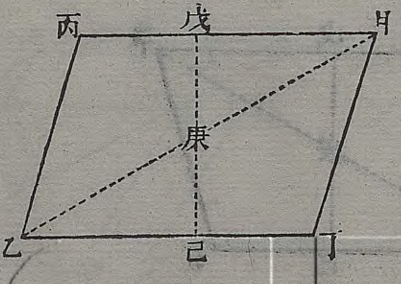


第五

平行線方形內兩對角線其相交處必平分二線之正中如甲乙丙丁二線相交於戊則所成甲戊戊乙二線丙戊戊

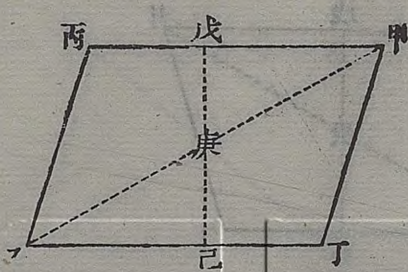


丁二線俱等。蓋因丙戊乙、甲戊丁兩三角形之丙乙、甲丁二線為平行線。其度等。見本卷第四節。而丙乙戊、丁甲戊二角。乙丙戊、甲丁戊二角。皆為平行線內相對之錯角。其度俱等。見首卷第二十二節。夫丙乙、甲丁二線既等。各相對之錯角又等。則丙乙戊、丁甲戊二等角相對之戊丙、戊丁二線度。與甲丁戊、乙丙戊二等角相對之戊甲、戊乙二線度。必皆相等可知矣。見二卷第八節。

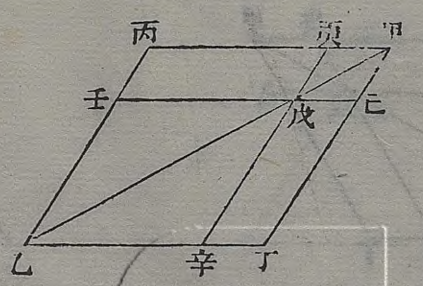


第六

凡平行線方形。於對角線上。或縱或橫。任中截開。即將此形為兩平分。如甲丙乙丁之方形。其甲乙對角線上。畫一戊己線。於庚處截開。則平分甲丙乙丁方形。為丙戊己乙一段。甲戊己丁一段。此二段內之戊甲庚、己乙庚兩三角形之甲庚、乙庚二線相等。而戊甲庚、己乙



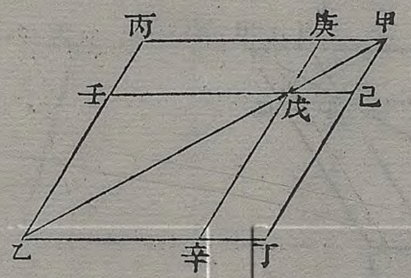
庚之兩角。又爲平行線內二尖交錯之角。其度相等。而甲庚戊乙庚己二尖相對之角。其度又等。則此兩三角形度亦必相等。又如甲乙對角線。將甲丙乙丁方形爲兩平分。則其甲丙乙甲丁乙兩三角形度必等。將此兩相等之三角形。以戊己線截開。於甲丙乙形內。減甲戊庚於甲丁乙形內。減乙己庚。則所餘之甲庚己丁乙庚戊丙二形度必等。今所



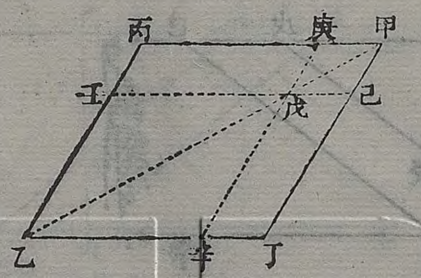
分各形。既俱兩兩相等。則甲丙乙丁之方形。爲戊己線所截。自爲兩平分可知矣。

第七

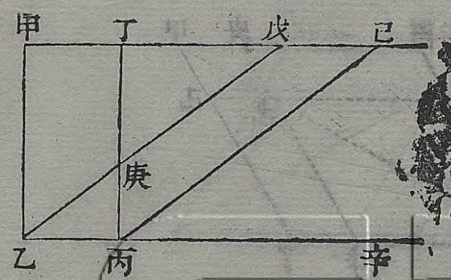
凡四邊形。於對角線不拘何處。復作相交二平行線。即成四四邊形。設如甲丙乙丁四邊形於對角線之戊處。復作一壬戊己。一辛戊庚。相交之二平行線。即成甲戊。戊乙。丙戊。戊丁。四四邊形。此四



形中之甲戊、戊乙二形。為對角線上所成之形。丙戊、戊丁二形。為對角線旁所成之形。此對角線旁所成兩形必俱相等。如丙壬戊庚、戊辛丁己兩形之分是己。蓋甲丙乙丁之全形。因甲乙對角線平分為兩。平分所成之甲丙乙、甲丁乙兩大三角形之分必等。其對角線上所成之一小方形。復為甲戊對角線平分為兩平分。成甲庚戊、甲己戊兩小三角



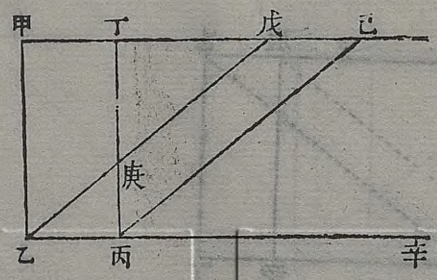
形。此兩小三角形之分亦必等。而對角線上所成之一大方形。又為戊乙對角線平分為兩。平分成戊壬乙、戊辛乙兩中三角形。此兩中三角形之分亦必等。今將甲丙乙、甲丁乙兩大三角形內。減去甲庚戊、甲己戊之兩相等小三角形。再減去戊壬乙、戊辛乙之兩相等中三角形。所餘對角線旁所成之丙壬戊庚、戊辛丁己兩四邊形。此兩四邊形自然

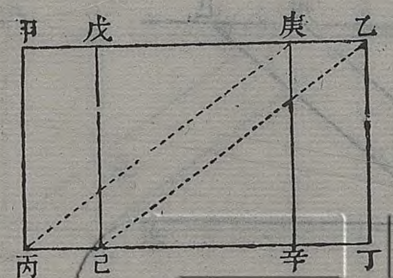


相等矣。

第八

凡兩平行線內同底所成之四邊形。其面積必等。如甲己乙辛兩平行線內。於乙丙底作甲乙丙丁一長方四邊形。戊乙丙己一斜方四邊形。此兩形雖不同。而所容之分必相等。何也。試以兩三角形考之。如甲乙戊一三角形。丁丙己一三角形。此兩三角形之甲乙丁丙二線等。甲戊丁己二線亦等。甲丁戊己二線。俱與乙丙平行。而度分相等。若於甲丁戊己二線。各加一丁戊線。即成甲戊丁己線。其度自然相等。而戊甲乙己丁丙二角。為甲乙丁丙二平行線一邊之內外角。其度又等。則此兩三角形自然相等可知矣。今於兩三角形內。各減去丁戊庚。則所餘之甲乙庚丁。戊庚丙己二形之分必等。復於此二形內。每加一庚乙丙形。則成甲乙丙丁。戊乙丙己之兩四邊形。其面積必然

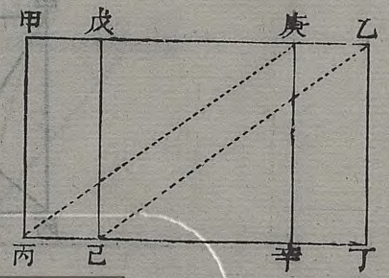




相等也。

第九

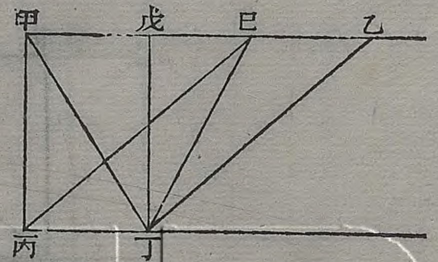
兩平行線內，無論作幾四邊形，其底度若等，則面積必俱等。如甲乙丙丁二平行線內作甲丙己戊庚辛丁乙兩平行線四邊形，其丙己辛丁兩底度相等，則其積亦等。試自丙己底至庚乙畫二直線，卽成一庚丙己乙斜四邊形，此斜四邊形既與甲丙己戊四邊形同出於丙



己之底，卽同前節兩形面積俱等矣。至於庚辛丁乙與庚丙己乙，又同出於庚乙之底，故此兩形面積亦俱等。觀此兩兩相等，則甲丙己戊庚辛丁乙兩形之面積相等明矣。

第十

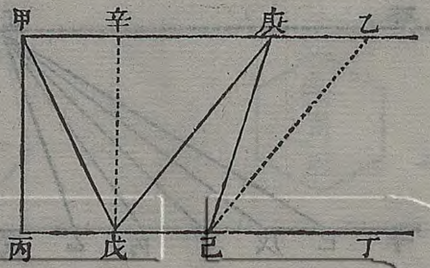
凡兩平行線內同底所成之各種三角形，其面積俱等。如甲乙丙丁兩平行線內於丙丁底作甲丙丁一三角形，己丙

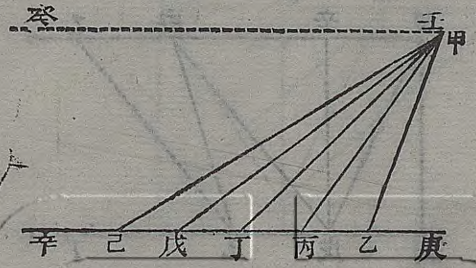


丁二三角形。此兩三角形之面積必等何也。自丁至戊作一直線。與甲丙平行再自丁至乙作一直線。與己丙平行。卽成甲丙丁戊、己丙丁乙兩四邊形。此二形既同出於丙丁底。其面積相等。而甲丙丁、己丙丁兩三角形爲平分兩四邊形之一半。其面積亦必相等矣。

第十一

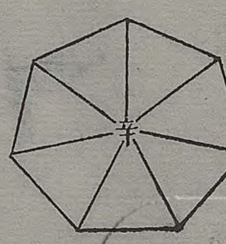
兩平行線內。無論作幾三角形。其底度若等。其面積亦俱等。如甲乙、丙丁二平行線內。作甲丙戊、庚戊己兩三角形。其丙戊、戊己兩底度相等。故其面積亦等。今自戊至辛作一直線。與甲丙平行。又自己至乙作一直線。與庚戊平行。卽同前節成面積相等之兩四邊形。而此甲丙戊、庚戊己兩三角形。爲面積相等兩四邊形之各一半。則此兩三角形之面積必等可知矣。





第十二

凡有幾三角形。其底若俱在一直線。而各底相對之角。又共遇於一處。則其衆三角形。必在二平行線之間。如甲乙丙甲丙丁甲丁戊甲戊己四三角形。其乙丙丙丁丁戊戊己各底俱在一庚辛直線上。而各底相對之角。又皆遇於甲處。則此四三角形俱同在庚辛壬癸二平行線之間矣

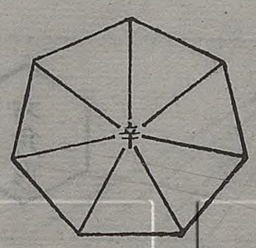


第十三

凡等邊等角各形。內五邊者爲五角形。六邊者爲六角形。邊愈多角愈多者。俱隨其邊與角而名之焉。

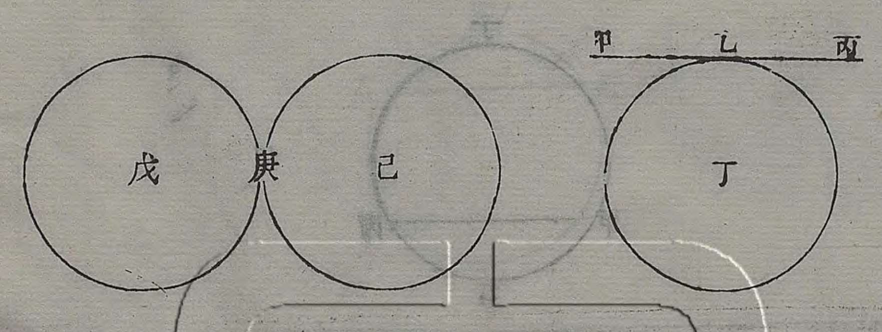
第十四

多邊多角形。自角至心作線。凡有幾界。即成幾三角形。設如辛七邊形。自心至七角作七線。即成七三角形。而此各三角形之分。俱相等也。



第十五

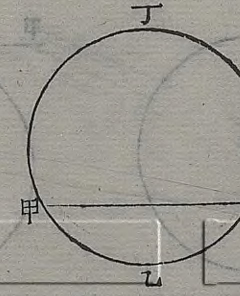
欲知衆邊形各邊角之度將邊數加一倍得數減四其所餘之數即為各邊角度也如辛七邊形以七邊數加一倍共為十四於十四內減四所餘之十即為十直角數為此七邊形之各邊角之總度也何也假如辛形自心至七角作七線成七三角形凡三角形之三角與二直角等（見二卷第四節）則此七三角形之各三角度共與十四直角等其七三角形之辛心所有之七角又與四直角等（見首卷第十五節）若將十四直角內減四直角乃餘十直角則此十直角與衆邊形之各邊角之總度相等可知矣



幾何原本四

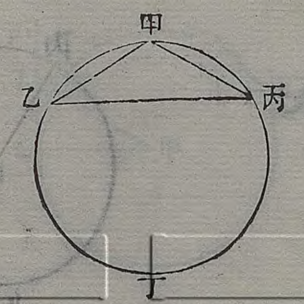
第一

凡有直線。切於圜界。而不與圜界相交者。謂之切線。如甲乙丙線。切於丁圜乙界。其線雖自甲過乙至丙。而與圜界不出入相交。此甲乙丙線。卽爲圜之切線也。又如一圜與一圜界相切而不相交。則謂之切圜。假如戊圜與己圜。於庚界相切。二界總未相交。故又謂之切圜也。



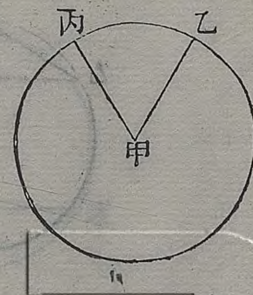
第二

凡一直線、橫分圜之兩界、謂之弦線。其所分圜界之一段謂之弧。此弧與弦相交所成之二角。謂之弧分角。如甲丙線橫分甲乙丙丁圜界於甲丙。則甲丙線為弦。其所分之甲丁丙一段。甲乙丙一段。皆謂之弧。而甲丙弦與甲乙丙弧相交所成之甲丙乙。丙甲乙二角。卽謂之弧分之角焉



第三

凡自一圜弦線之兩頭。復作二直線相遇於圜界之一處。其所成之角。謂之圜分內角。又謂之弧分相對之界角也。如甲乙丁丙圜之甲乙丙一段。自乙丙弦線之兩頭。各作一直線。於甲處相遇。其所成之乙甲丙角。卽圜分內角。然此甲角與乙丁丙弧相對。故又為弧分相對之界角也。

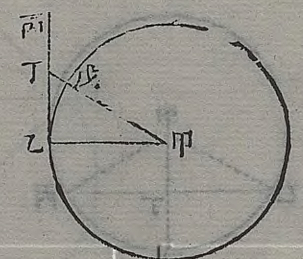


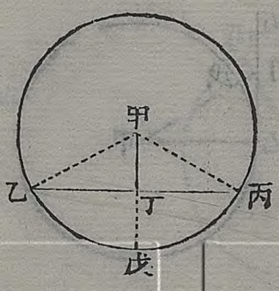
第四

凡一圜有二輻線截弧之一段所成之三角形謂之分圜面形如甲圜自甲心至圜界乙丙二處作甲乙甲丙二輻線所成之甲丙乙三角形即爲分圜面形也

第五

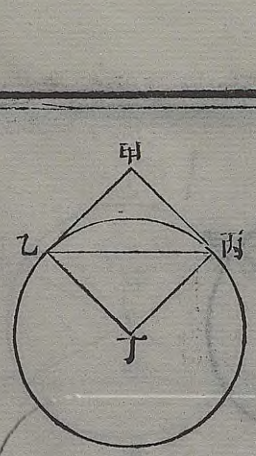
凡自圜之輻線之末與圜界相切作一垂線則此垂線與輻線之末在圜界僅一點相切其他全在圜外即如甲圜之甲乙輻線於乙末作一丙乙垂線則此丙乙垂線與甲乙輻線俱在圜界乙處之一點相切而此垂線之丁等處俱在圜外也若自圜之甲心至丁作一甲戊丁線此線必長於甲乙輻線如二卷第十三節云因其長於輻線必出於圜界之外此甲戊丁線既出於圜界之外則丙乙線全在圜外可知矣





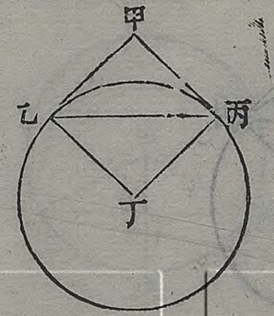
第六

圜弦線上。自圜心作一垂線。則將弦線為兩平分。如乙丙弦。自圜心甲至弦線丁。作一垂線。必將乙丙弦為兩平分。成乙丁、丁丙二段。若自甲心至弦線乙丙二末。作二輻線。成一甲乙丙三角形。此三角形之甲乙、甲丙二線。為一圜之輻線。其度必等。此二輻線既等。則甲乙丙三角形內甲丁垂線所分之乙丁、丁丙二段。亦必等矣。若將垂線引長至弧界戊作線。則又將乙丙弧界為兩平分矣

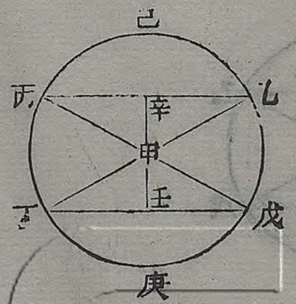


第七

凡自圜外一處至圜界兩邊。作二切線。此二線之度必等。如自圜外甲至圜界乙丙兩邊。作甲乙、甲丙二切線。此二線之度相等。今於圜心丁至圜界乙丙二切線之末。作二輻線。則此二輻線為甲乙、甲丙之垂線矣。如本卷第五節云。因其為垂



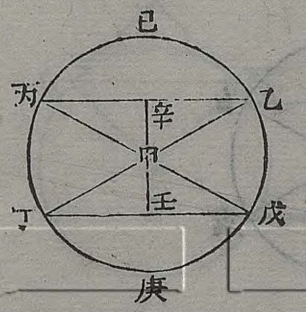
線。則甲乙丁。甲丙丁之二角。必同爲直角。見首卷第十節再自丙至乙作一弦線。即成丁乙丙。甲乙丙。兩三角形。丁乙丙三角形之丁乙。丁丙。二線。同爲圜之輻線。其度必等。因其相等。故丁乙丙丁丙乙二角亦必等。夫甲乙丁。甲丙丁。二角原相等。此二角內減去丁乙丙丁丙乙之二角。則所餘之甲乙丙。甲丙乙。二角。亦自相等。此二角既俱相等。則甲乙。甲丙。二切



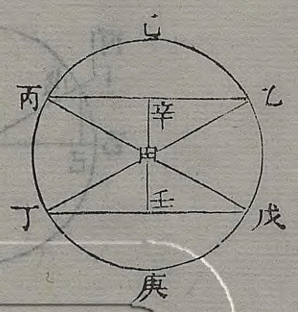
線爲等角傍之兩界線自然相等無疑矣。

第八

凡圜內兩弦線若等其分圜弧面之積必等。自心至兩弦所作垂線亦必等。如甲圜之丙乙。丁戊。二弦之度若等。則所分丙己乙辛。丁庚戊壬。二弧面積必等。自此圜之甲心至丙乙。丁戊。二弦。各作甲壬。甲辛。垂線。其度亦必等。何也。如自



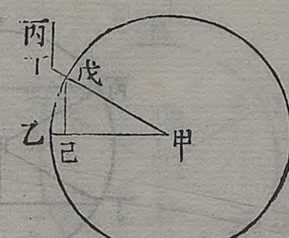
甲心至丙乙丁戊二弦之末各作輻線卽成甲丙乙甲丁戊兩三角形此兩三角形之各界線必兩兩相等則此兩三角形內相等線所對之角亦必相等（見二卷第七節）角既相等則等角相對弧界之丙己乙丁庚戊二段亦必相等（見首卷第十二節）丙己乙丁庚戊二弧線既等丙乙丁戊二弦線又等則丁庚戊壬之弧面積與丙己乙辛之弧面積自然相符矣又甲



辛甲壬二垂線將丙乙丁戊二弦爲兩平分則丙辛乙辛丁壬戊壬之四線亦俱等三角形之各界線既兩兩相等而三角形丙各角又兩兩相等則平分丙乙丁戊二弦之甲辛甲壬之度自然相等矣

第九

凡弦線之所屬有三種一爲弧之切線一爲弧之割線一爲弧之弦線欲取弧

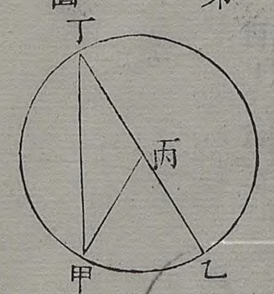


界各角之度。用此三線求之必得也。如甲圜之甲乙輻線於乙末作丙乙垂線。復自圜心甲至圜界戊割出至丙乙垂線丁分作甲丁線。又從圜界戊至甲乙輻線作戊己垂線。則成三種線。此三線丙丁乙線爲乙戊弧之切線。甲丁線爲乙戊弧之割線。戊己線爲乙戊弧之正弦。凡欲得各角弧界之度。必於此三種線取之。如欲取乙甲戊角相對弧度則自與甲角相對乙戊弧之丁乙切線取之。或自乙戊弧之甲丁割線取之。或自乙戊弧之戊己正弦取之。皆得乙戊弧之度數焉

第十

一圜界內。在於圜界一段至圜心作二線至圜界作二線。即成二角。在圜心者爲心角。在圜界者爲界角。設如甲乙丁圜自甲乙一段至丙心作甲丙乙丙。二

第一圖

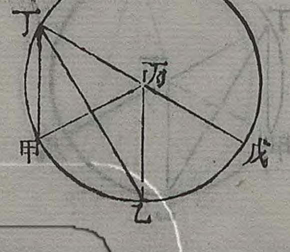


線仍自甲乙至丁界作甲丁乙丁二線成甲丙乙甲丁乙二角其甲丙乙角爲心角甲丁乙角爲界角也

第十一

圜內之心角界角同立圜界之一段而各角之二線所成之式又分爲三種有界角心角同用一線者有界角心角不同用一線者有界角二線跨心角二線者總之此三種心角皆大於界角一倍

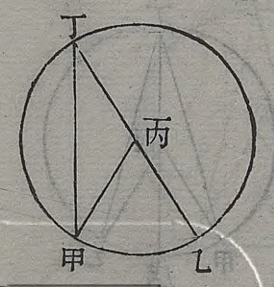
第二圖



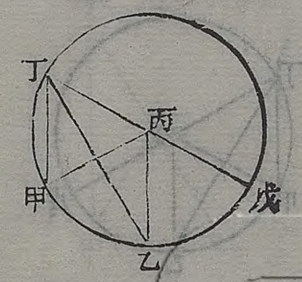
第三圖

如有三圖圜心之甲丙乙角皆自圜界甲乙一段作甲丙乙丙二線圜界之甲丁乙角亦自圜界甲乙一段作甲丁乙丁二線則第一圖之甲丁乙界角之乙丁線同立於甲丙乙丙線上而甲丙乙心角爲甲丙丁三角形之外角與甲丁丙丙甲丁二內角等見二卷第五節其甲丙丙丁二線又爲一圜之輻線其度亦等此二線既等則甲丁丙丙甲丁

第一圖

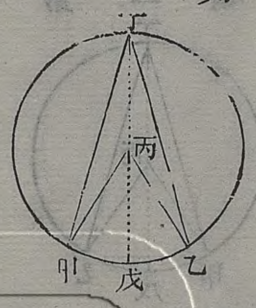


第二圖

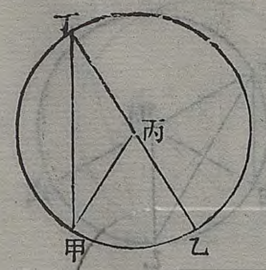


二角亦必等。見二卷第九節。今甲丙乙之外角。既與甲丁丙。丙甲丁。二丙角等。則甲丙乙心角。大於甲丁乙界角一倍可知矣。如第二圖。甲丁乙界角之乙丁線。不同立於甲丙乙心角之乙丙線上。而甲丙乙心角。在甲丁乙界角甲丁。丁乙。二直線之外。則自丁角過圜之丙心至對界。作一丁丙戊全徑線。即成甲丙戊一大心角。乙丙戊一小心角。甲丁戊一大界

第三圖

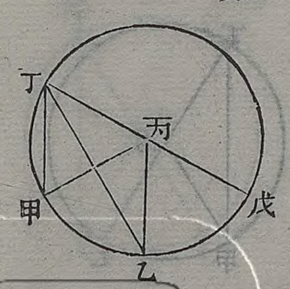


第一圖

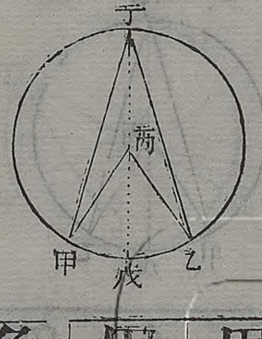


角。乙丁戊一小界角。其甲丙戊大心角。即如第一圖必倍於甲丁戊大界角。而乙丙戊小心角。亦必倍於乙丁戊小界角。於甲丙戊大心角內減去乙丙戊小心角。甲丁戊大界角內減去乙丁戊小界角。則所餘之甲丙乙心角。必大於所餘之甲丁乙界角一倍矣。如第三圖。甲丁乙界角之二線。正跨於甲丙乙心角二線之上。而甲丙乙心角。在甲丁乙界

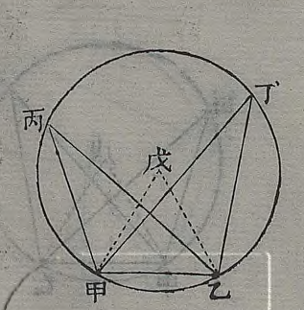
第二圖



第三圖

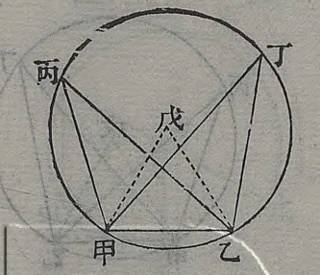


角甲丁丁乙二直線之間。則自丁角過圜之丙心至對界。作丁丙戊全徑線。即成甲丙戊乙丙戊二心角。甲丁戊乙丁戊二界角。此甲丙戊心角必倍於甲丁戊界角。乙丙戊心角亦必倍於乙丁戊界角。以甲丙戊乙丙戊二心角併之。乃甲丙乙一心角。以甲丁戊乙丁戊二界角併之。乃甲丁乙一界角。今所分之二心角。既各倍於所分之界角。則此所併之甲丙乙心角。必倍於所併之甲丁乙界角矣。



第十二

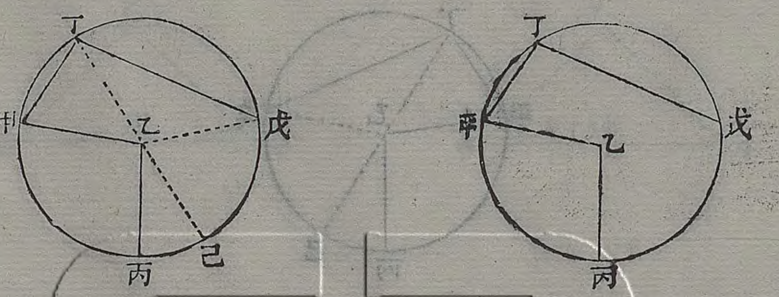
凡自圜之弧線一段。任作相切界角幾何。其度必俱相等。如甲乙丁丙之圜。自甲乙弧線一段。至圜界丙丁作相切之甲丙乙乙丁甲二界角。此二角之度必俱相等。試自圜之戊心至圜界甲乙作二輻線。即成甲戊乙一心角。此甲戊乙



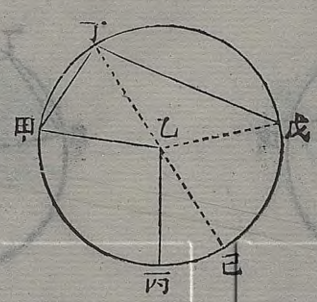
之心角與甲丙乙乙丁甲界角俱同一圜弧線之一段則心角必倍於界角然則甲丙乙乙丁甲二界角既俱爲甲戊乙心角之一半則此二角之度必等可知矣

第十三

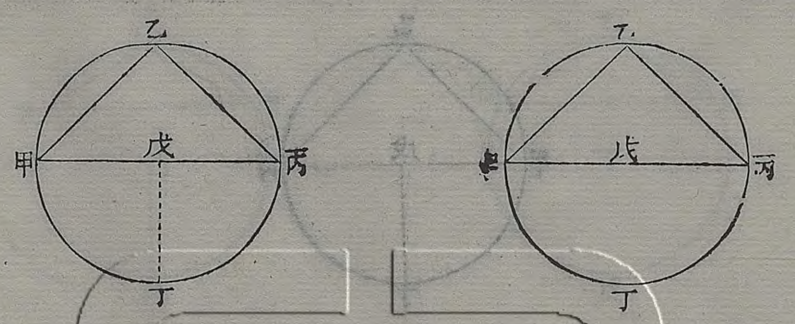
凡圜內心角所對弧線之度比界角所對弧線之度少一半則二角之度必等如甲丙戊丁圜內有甲乙丙一心角甲



丁戊一界角而甲乙丙心角相對甲丙弧線之度比甲丁戊界角相對甲戊弧線之度少一半則甲乙丙心角之度必與甲丁戊界角之度相等試自丁角過圜之乙心至對界作丁乙己全徑線復自乙心至戊界作乙戊半徑線即成甲乙己乙己乙戊二心角甲丁己己丁戊二界角其甲乙己心角必倍於甲丁己界角而己乙戊心角亦必倍於己丁戊界

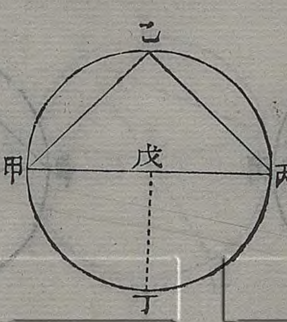


角。今以甲乙己己乙戊二心角相併。甲丁己己丁戊二界角亦相併。則甲乙己己乙戊二心角所併之度。必倍於甲丁己己丁戊二界角所併之度矣。是以甲丁戊一界角。必得甲乙己己乙戊二心角所併之一半。夫甲丙弧線。既為甲戊弧線之一半。而甲乙丙角。又為甲乙己己乙戊二心角所併之一半。則甲乙丙心角度必與甲丁戊界角之度相等矣。

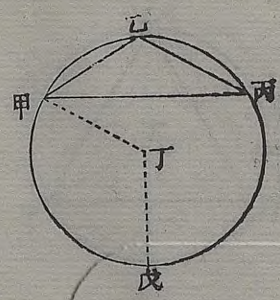


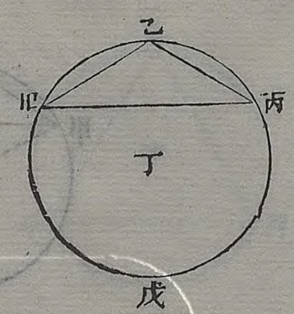
第十四

凡圜內界角。立於圜界之半者。必為直角。如甲乙丙丁圜內之甲乙丙界角。立於甲丁丙圜界之正一半。則此甲乙丙角。必然為直角也。自甲丁丙之半圜。於丁界為兩平分。復自丁界至圜心戊。作丁戊輻線。即成甲戊丁角。其相對之甲丁弧。為圜界四分之一。既為圜界四分之一。則必為直角。如首卷第十節云。夫心角相



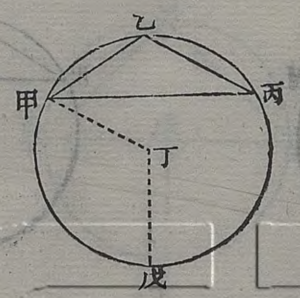
對弧線若爲界角相對弧線之一半。其二角之度相等矣如本卷第十三節云。今甲戊丁心角相對之甲丁弧線。既爲甲乙丙界角相對之甲丁丙弧線之一半。則甲戊丁心角度必與甲乙丙界角度相等。且甲丁弧線既爲圓界四分之一。而甲丁丙弧線又爲圓界之正一半。則甲戊丁心角爲直角。而甲乙丙界角亦必爲直角矣。



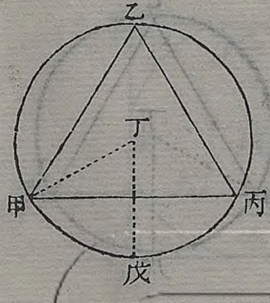


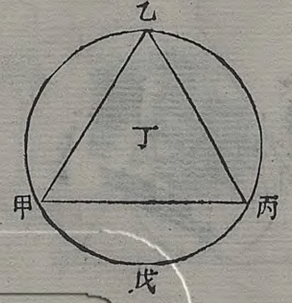
第十五

凡圓內界角。其所對之弧。過於圓界之半者。必爲鈍角。如甲乙丙戊圓內之甲乙丙界角。其相對之甲戊丙弧。大於圓界之一半。故其相對之甲乙丙角爲鈍角也。試將甲戊丙弧平分於戊。爲甲戊戊丙兩段。復自圓心丁至甲。戊作二輻線。即成甲丁戊一心角。其甲戊丙弧分既大於半圓。則此甲戊弧線一段。亦大



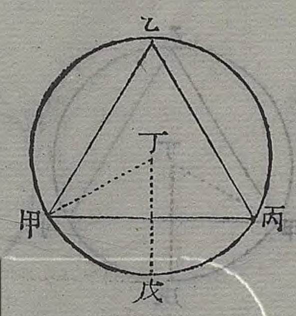
於圓之四分之一矣。故此甲戊弧線相對之甲丁戊心角。必爲鈍角。見首卷第十一節。夫心角相對之弧線。比界角相對之弧線少一半。則二角之度必相等。如本卷第十三節云。今甲丁戊心角相對之甲戊弧線。正爲甲乙丙界角相對甲戊丙弧線之一半。則甲乙丙界角。自然與甲丁戊心角等矣。夫甲丁戊心角。既爲鈍角。則甲乙丙界角亦必爲鈍角矣。





第十六

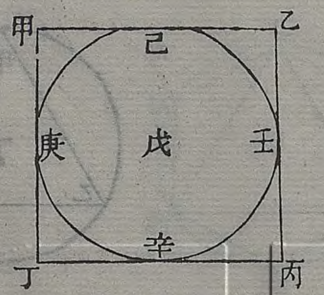
凡圜內界角。其所對之弧。不及圜界之半者。必爲銳角。如甲乙丙戊圜內之甲乙丙界角。其相對之甲戊丙弧。小於圜界之一半。故其相對之甲乙丙角爲銳角也。試將甲戊丙弧平分於戊。爲甲戊戊丙兩段。復自圜心丁至甲。戊。作二輻線。即成甲丁戊一心角。此心角所對之甲戊弧線。既不足圜界四分之一。則此

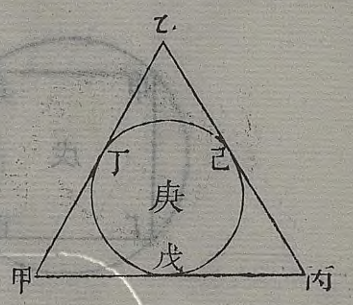


甲丁戊心角。必爲銳角矣。見首卷第十一節。此甲丁戊心角所對之弧。比之甲乙丙界角所對之弧爲一半。則此二角之度必等。夫甲丁戊心角既爲銳角。則甲乙丙界角亦必爲銳角矣。

第十七

凡函圓各界形之各線。與圓界相切而不相交。則謂之函圓切界形。如甲乙丙三角形之甲乙、乙丙、丙甲三界線。俱在

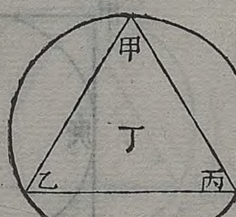


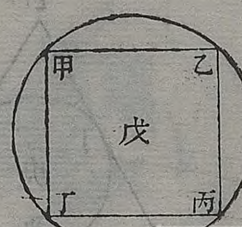


庚圓界之丁己戊三處相切而不相交。故謂之函圓切界三角形。又若甲乙丙丁四方形之甲乙、乙丙、丙丁、丁甲四界線。俱在戊圓界之己庚辛壬四處相切而不相交。則謂之函圓切界四邊形。觀此二圖。則知函圓各界形。必大於所函圓界形之分矣。

第十八

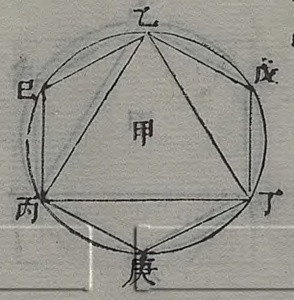
凡圓內直界形之各角。止抵圓界而不



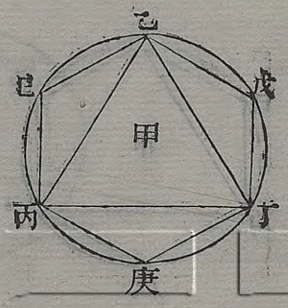


割出。則謂之圜內所函各邊形。如甲乙丙三角形之甲角乙角丙角。俱與丁圜界相抵。而不會割出。卽謂之圜內所函三角形。又如甲乙丙丁四方形之甲角乙角丙角丁角。俱與戊圜界相抵。而不割出。則謂之圜內所函四邊形。觀此二圖。則知函於圜界各界形。必小於圜界形之分矣。

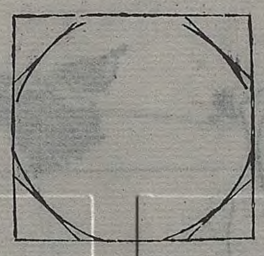
第十九



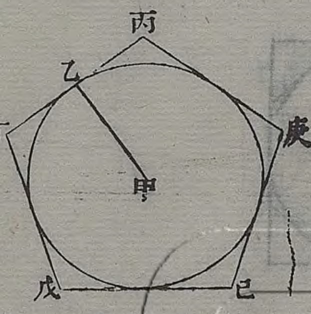
凡等邊眾界形。或函圜。或函於圜。其界數愈多。愈與圜界相近。如甲圜形。函乙丙丁等邊三角形。又函乙己丙庚丁戊等邊六角形。以三角形之三邊。比之六角形之六邊。則六角形之六邊。與圜界相近矣。設有十二角形之十二邊。比此六角形之六邊。則十二角之十二邊。又與圜界爲近。若有二十四角之二十四邊。則又更近於十二角之十二邊矣。蓋



函衆界形之度。必大於所函之衆界形度。見本卷第十七十八兩節。今甲圜既函等邊六角形。自大於六角形而此六角形。又函等邊三角形。亦必大於三角形。由此推之十二角函六角。二十四角函十二角。其邊愈多者其度愈大故與圜界愈近也。又如復有一函圜等邊四角形內。又作一函圜等邊八角形。此四角形既函八角形。必大於八角形可知矣若於八角



形內復作十六角形。十六角形內又作三十二角形。其所函形愈小。邊數愈多。則與所函之圜界度愈近矣。苟設一函於圜界之多邊形。爲幾十萬邊。設函於圜界之多邊形一自六邊起算。一自四邊起算。復設一函圜界之多邊形。亦爲幾十萬邊。設函圜界之多邊形。亦一自六邊起算。一自四邊起算。使此函圜之多邊形。自外與圜界相比。而函於圜界之多邊形。自內與圜界相比。則此二多邊形之每邊

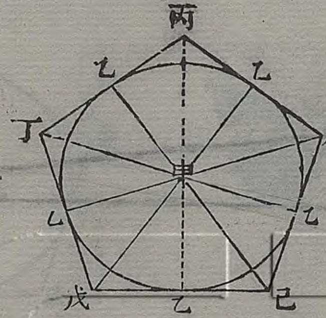


直界線。將與圓界曲線合而爲一。故圓界曲線。可得直線之度。而多邊形之直線。亦可得爲圓界度也。

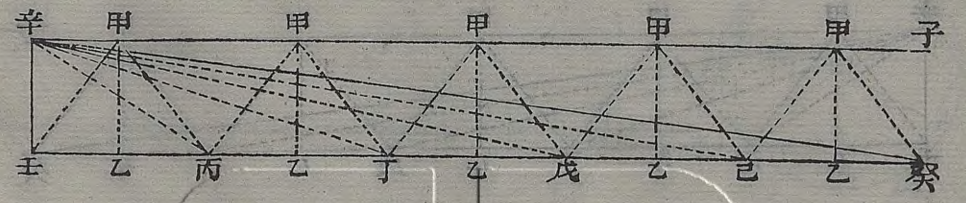
第二十

函圓切界等邊形。其所函圓之輻線度。與一直角三角形之小邊之度等。而等邊形之衆界共度。又與三角形之大邊之度等。則三角形之面積。與等邊形之面積等。如丙丁戊己庚等邊五角形。其

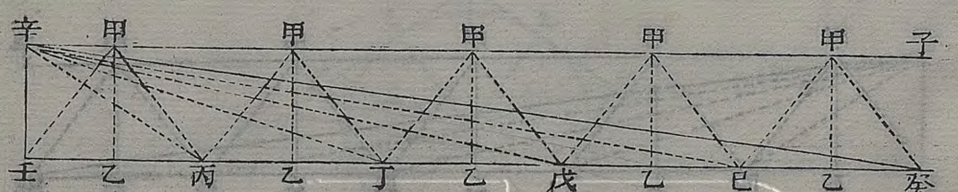
所函甲圓之甲乙輻線。與辛壬癸直角三角形之辛壬小邊線度等。而五角形之丙丁戊己庚五邊線共度。又與三角形之壬癸大邊線度等。則此辛壬癸三角形面積。必與丙丁戊己庚等邊五角形面積等也。何以見之。若自五邊形之甲心。至丙丁戊己庚之五角。作甲丙。甲丁。甲戊。甲己。甲庚。五線。即分成甲丙丁類五三角形。夫辛壬癸三角形之壬癸



線度既與五角形之五邊共度等。今將壬癸線平分五分。以所分之每分為底。依前所分五三角形式。作甲壬丙類五正式三角形。復自所分丙丁戊己四處。俱至三角形之辛角。作丙辛丁辛戊辛己辛四線。遂分辛壬癸一三角形為辛壬丙類五斜式三角形。再自甲壬丙類五三角形之甲角至底。各作一甲乙垂線。俱與圓之輻線等。則甲壬丙相等之



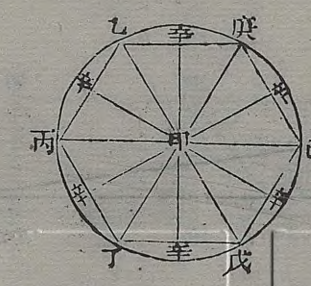
五三角形之高度亦自相等矣。於是復自辛壬癸三角形之辛角與五甲角相切。作一辛子線。與壬癸為平行線。則此平行線內同底所成之各種三角形之面積。必俱相等矣。見三卷第十節蓋辛壬丙。甲壬丙兩三角形為同底。辛丙丁。甲丙丁兩三角形為同底。辛丁戊。甲丁戊兩三角形為同底。辛戊己。甲戊己兩三角形為同底。辛己癸。甲己癸兩三角形為同



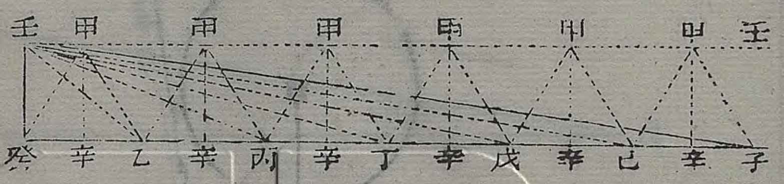
底。故其面積俱相等也。且辛壬丙三角形。與甲壬丙三角形既俱相等。則辛壬丙之類五斜式三角形之面積。卽如甲壬丙之類五正式三角形之面積矣。其所分各形之面積俱等。則其全形之面積。自然相等。此所以辛壬癸直角三角形之面積。與丙丁戊己庚等邊五角形之面積相等也。

第二十一

圓界丙函等邊衆界形。其圓心至衆界所作中垂線。與一直角三角形之小邊之度等。而等邊衆界形之衆界共度。又與直角三角形之大邊之度等。則此三角形之面積。與等邊衆界形之面積等。如甲圓所函乙丙丁戊己庚等邊六角形。其圓之甲心至衆界所作甲辛垂線。與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等。而六角形之乙丙丁戊己庚六邊



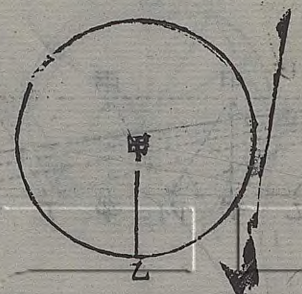
線共度。又與三角形之癸子大邊線度等。則此壬子癸三角形面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形面積等也。若依前節法。將六邊形分爲六三角形。復以三角形之癸子界。照六邊形度。分爲六分。又照六邊形所分六三角形。作六正式三角形。復自壬子癸三角形之壬角。至乙丙丁戊己五處。作五斜線成六斜式三角形。此兩式三角形同底又同在



二平行線內。則其面積必兩兩相等。此兩式六三角形之垂線。既與壬癸子直角三角形之壬癸小邊線度等。而兩式六三角形之底線共度。又與壬子癸直角三角形之癸子大邊線度等。則壬癸子直角三角形之面積。必與乙丙丁戊己庚等邊六角形之面積相等矣。

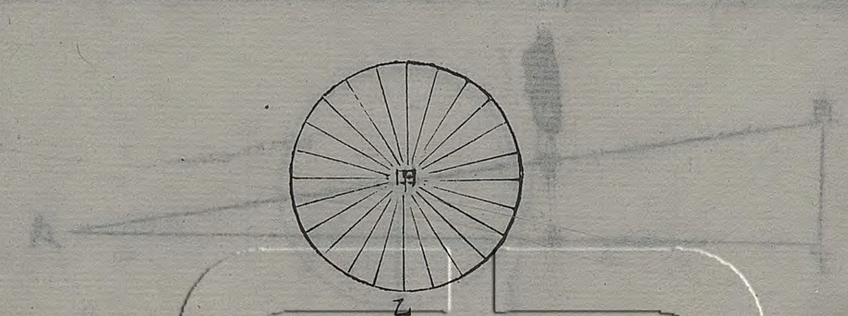
第二十二

凡圓形之輻線。與一直角三角形之小



邊線度等。而圓之周界。與三角形之大邊線度等。則此直角三角形之面積與圓形之面積相等。如有一甲圓形其甲乙輻線與丙丁戊直角三角形之丙丁小邊線度等。而甲圓形之乙周界。又與丙丁戊三角形之丁戊大邊線度等。則此丙丁戊三角形之面積。即與甲圓形之面積相等也。何以見之。甲圓之輻線。與三角形之小邊等者。即如等邊衆界

形之中垂線。與三角形之小邊等也。甲圓之周界。與三角形之大邊等者。即如等邊衆界形之各界共度。與三角形之大邊等也。若夫函圓衆界形相等之三角形。其小邊雖與圓之輻線等。其大邊則長於圓之周線。故其積分亦大於圓之積分。而函於圓衆界形相等之三角形。其小邊既短於圓之輻線。而大邊亦短於圓之周線。故其積分亦小於圓之



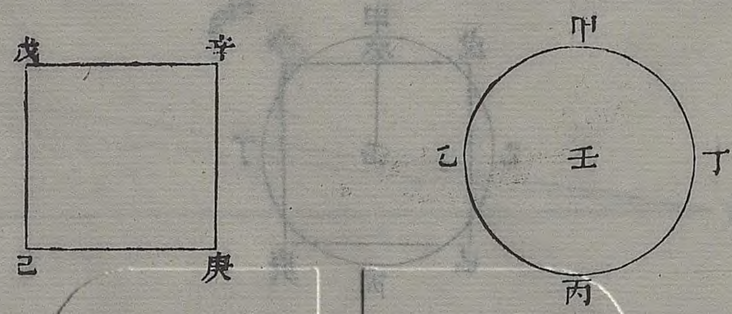
積分。今此甲圜形相等之丙丁戊三角形。其小邊既與圜之輻線等。而三角形之大邊。又與圜之周線等。則其積分與圜形之積分相等無疑矣。然圜周界曲線也。等邊衆界形之界度直線也。觀之似難於相通者。如以圜之內外。各設多邊衆界形。分爲千萬邊。如本卷第十九節云。則逼圜界最近。將合而爲一。乃依所分之段。爲千萬正式三角形。此千萬正式三角

形之中垂線。亦將與圜之輻線合而爲一。而千萬邊共界度。既與圜周合而爲一。則圜周之曲線。亦變而爲直線矣。夫千萬邊正式三角形之中垂線。既成圜之輻線。則與丙丁戊三角形之小邊等。而千萬邊正式三角形之底界共度。又成圜之周度。則又與丙丁戊三角形之大邊度等矣。復自丙丁戊三角形之丙角至千萬正式三角形之底界。各作千

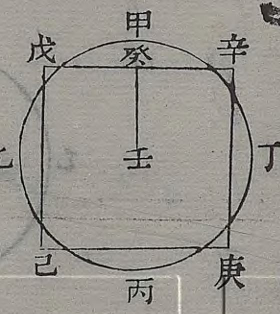
萬斜式三角形。以此正式三角形。因其底同。其分自相等。故千萬斜式三角形之面積。比之千萬正式三角形之面積千萬正式三角形之面積比之丙丁戊一直角三角形之面積。丙丁戊直角三角形之面積。比之甲圜形之面積。俱相等也。

第二十三

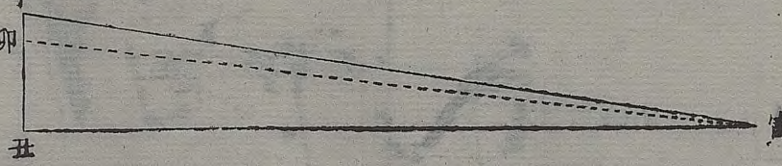
有一圜形。又一衆界形。此圜界度。若與



彼衆界總度等。則圜形之面積。必大於衆界形之面積也。如甲乙丙丁圜形之周界與戊己庚辛等邊四角形之四邊總度等。則圜形之面積。必大於等邊四角形之面積矣。前言凡圜形之輻線與一直角三角形之小邊線度等。而圜之周界與三角形之大邊線度等。則三角形之面積與圜形之面積相等矣。今試以甲乙丙丁圜形周界為三角形之大

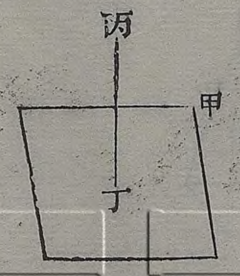


邊。以甲乙丙丁圜形之甲壬輻線爲三角形之小邊。作一子丑寅直角三角形。則三角形之丑寅大邊線度亦與戊己庚辛四角形之四邊總度等。而三角形之子丑小邊線度雖與圜形甲壬輻線等。却比四角形之自壬心至癸邊所作垂線爲長。若將三角形之子丑小邊線照四角形之壬癸垂線度截開。則分子丑線於卯。復自卯至寅作一斜弦。即成



卯丑寅一直角三角形。而此卯丑寅三角形之分。與戊己庚辛四角形相等也。此卯丑寅三角形。自子丑寅三角形分之。則卯丑寅形。必小於子丑寅形。今甲乙丙丁圜形之面積。既與子丑寅三角形之面積等。而戊己庚辛四角形之面積。又與卯丑寅三角形之面積等。則戊己庚辛四角形之面積。必小於甲乙丙丁圜形之面積可知矣。觀此凡界度相

等之形。圜界所函之分。比衆界所函之分必大。而衆界所函之分。與圜界所函之分同者。則衆界之總度復比圜界度大也。



幾何原本五

第一

平面之上所立直線無少偏倚。其所生之角必俱直。則謂之平面上所立垂線也。如甲乙之平面。正立一丙丁線。不偏不倚。此卽爲平面上所立之垂線矣。

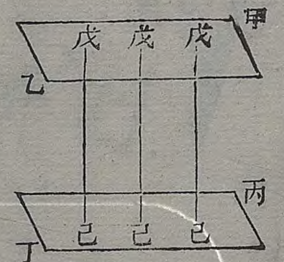
第二

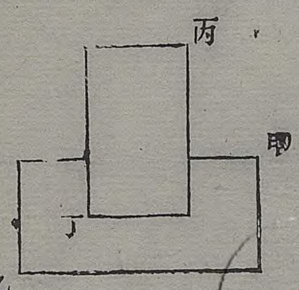
凡兩平面相對。其所立衆垂線度。俱各

相等。則此相對之平面。謂之平行面也。如甲乙丙丁二平面間所有戊己衆垂線之度俱相等。此甲乙丙丁二平面即爲平行面矣。

第三

平面上復立一平面。無少偏倚。其兩邊所成之角。必皆爲直角。則謂之平面上所立直面也。如甲乙平面上所立之丙丁平面。無偏無倚。兩邊亦俱成直角。此



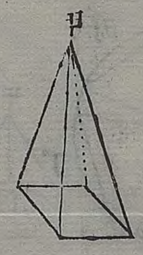


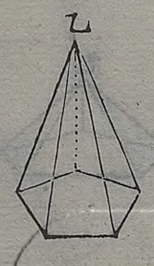
即爲平面上所立之直面矣

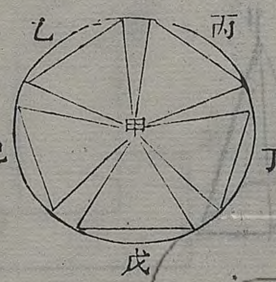
第四

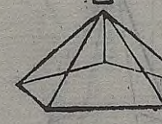
凡各面相合。其每面之角所合處。復成一種體角。則謂之厚角。夫厚角必自三面合之。乃成。其面多者爲各瓣相併而成之厚角也。如甲圖四面爲四瓣相併所生之厚角。乙圖五面爲五瓣相併所生之厚角是已。

第五

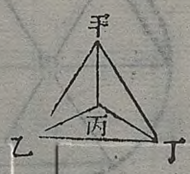








凡各面相併所成之厚角。如將各面計之則其衆角所合之分。必不足於四直角度也。如甲圓五面合成之厚角。若將其五面展開使平。作乙丙丁戊己平面之五瓣。復以甲爲心。作一甲圜。其乙丙丁戊己之五瓣相離處。不能滿甲圜之周界矣。因其不滿於圜之周界。故比四直角爲不足也。或以四直角分。强欲作一厚角。則其瓣過於大。必不能成平面

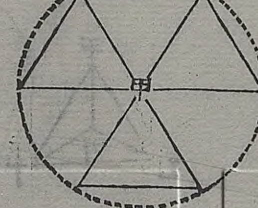


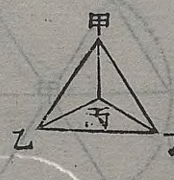
所合之厚角矣。

第六

凡等邊三面所合厚角。其三面內之兩面角併之必大於一直角度也。如甲丙乙丁之等邊三面所合之甲厚角。將乙甲丙。丙甲丁。二面併之。必大於一直角度矣。依前節法將甲厚角展開使平。雖不足四直角之度。而乙甲丙。丙甲丁之二面併之。則較之一直角度爲大焉。何

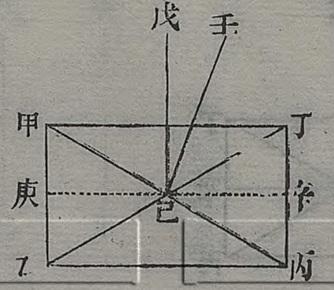
以見之。夫三面展開。其所離之虛分。仍有三面之分。以三面之實分。合三面之虛分。則為六角之全形。此六角之全形。得四直角度矣。六角而得四直角。則三角必得二直角。三角既得二直角。則二角相併。必大於一直角可知矣。

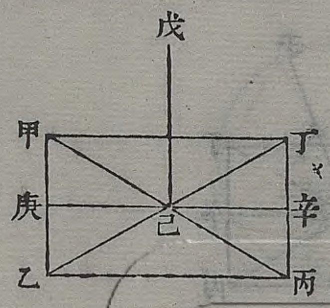




第七

凡平面二線交處作一垂線。正立而無偏倚。此線任在平面各處。俱為垂線。如甲乙丙丁平面上。甲丙丁乙二線相交己處。作一戊己垂線。正立而不偏倚。則此戊己線。任在甲乙丙丁平面上某一處。俱為垂線也。假使戊己垂線。不能正立而有所偏倚。則如壬己線。近於辛而離於庚矣。壬己線既近於辛而離於庚。則偏向於丁丙而遠於甲乙。而壬己丁、壬己丙之二角為銳角。壬己甲、壬己乙之二角為鈍角矣。戊己既如壬己。則不

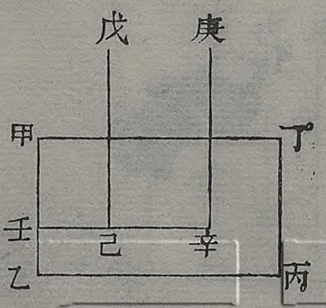




得謂之甲丙丁乙二線相交處正立之垂線矣。

第八

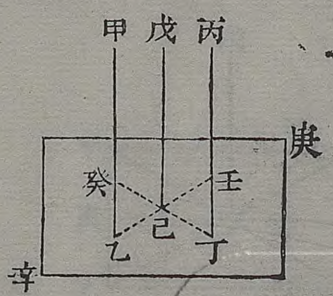
衆線交處。立一垂線。其各角若俱直。此所交各線。必在一平面也。如甲丙。乙丁。庚辛之三線相交處。立一戊己垂線。其與衆線相接各角若俱直。則此相交之三線。必在一平面也。夫衆線之相交固在平面而垂線之所立正正所以考面或



一角不直。則不得謂之平面矣。

第九

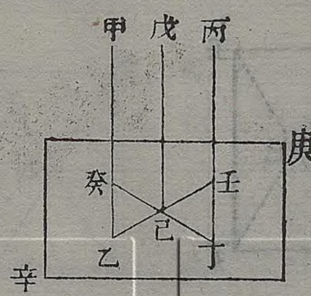
平面上若立二垂線。必互為平行線。如甲乙丙丁之平面上。立戊己庚辛二垂線。則此二線互為平行線也。試自辛過己至壬。作一辛壬線。則戊己。庚辛二垂線所立之分必正。其在甲乙丙丁平面上。任指何處所生之角俱是直角。見本卷首節。故戊己壬。庚辛己二角俱為直角而



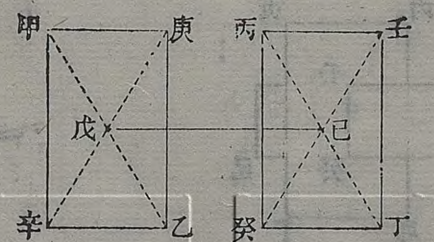
相等也。且此二角。又為二線與一線相交所成之內外角。其度既等。則戊己庚辛二線。必為平行線矣。如首卷第二十一節。

第十

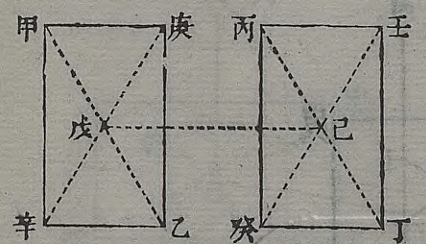
有二線與一垂線平行。雖不在平面之一界。此三線亦互相為平行線也。如甲乙丙丁二線。俱與戊己一垂線平行。不立於一直線上。雖不居平面之一界。此三線亦必互為平行線也。試於甲乙丙



丁。戊己三線之末。作一庚辛平面。此平面上之戊己線為垂線。其四圍平面所生之各角。俱是直角矣。復自乙過己。自丁過己。作相交二線。則成甲乙己。戊己壬。二角。丙丁己。戊己癸。二角。此各二角。俱為平行線一邊之內外角。俱為相等角矣。見首卷第二十一節。而甲乙己。丙丁己。二角。亦俱為直角。夫甲乙。丙丁。二線。在庚辛平面上所生之角皆直。又皆與戊己垂



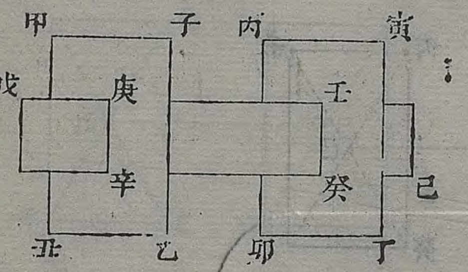
平面。互相爲平行面矣。試將此二平面之戊己橫線所抵之處作甲乙庚辛相交二線。丙丁壬癸相交二線。則戊己橫線於二平面各界所生之角俱爲直角。如甲乙丙丁二線與戊己橫線相抵所生之甲戊己戊己癸二尖交錯之角相等。故甲乙丙丁相當之二線爲平行矣。又如辛戊己戊己丙二尖交錯之角亦相等。故庚辛壬癸相當二線亦爲平行



線所生之角等。則甲乙丙丁二線亦皆得爲垂線。其與戊己線爲互相平行之三線可知矣。

第十一

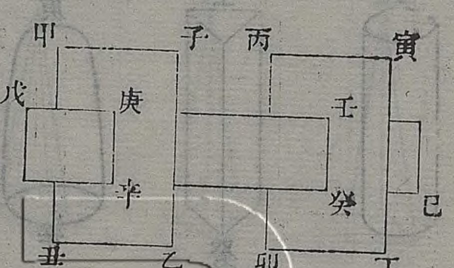
相對二平面之間橫一直線。此線在二平面上所生角若俱直。則此相對二面互相爲平行面也。如甲辛乙庚丙癸丁壬二平面之間橫一戊己直線。此戊己線末所抵處其四圍俱成直角。則此二

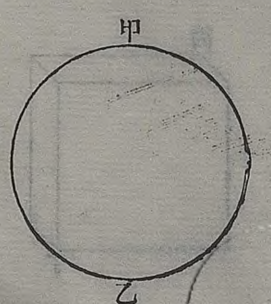


矣。相對二平面之上。所有之相當各二線。既俱同爲平行線。則相對之二平面。自然互爲平行面矣。

第十二

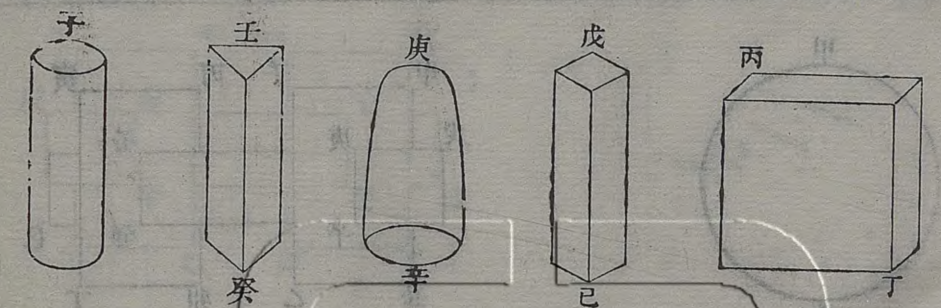
有二平行面橫交一面。其相交處所生二線必平行。如甲乙丙丁平行二面上。橫交一戊己平面。其庚辛壬癸之相交處所生二線。亦俱平行也。何以言之。庚辛壬癸平面相交處所生二縫。既在甲乙丙丁二平面之上。自然與甲乙丙丁二面之甲丑子乙丙卯寅丁之各線。同爲平行線。且又在戊己一平面內。其分自然相對。故此二平面與一平面相交之縫線。亦得爲平行也。



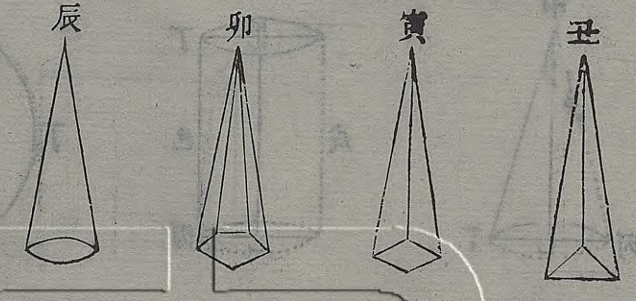


第十三

凡各種面內所積之實爲體。而皆因其面以名之焉。如全體不成角度。止現圓之圓面。則謂之圓體。甲乙圖是也。全體

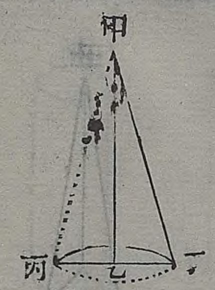


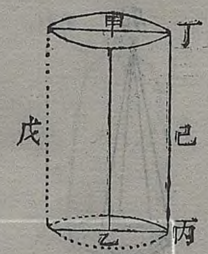
各面俱平。各邊相等。所成各角又等。則謂之平面正方體。丙丁圖是也。全體各面雖平。體長而面成兩式。其相對各面。仍兩兩相等。相對各邊。則又平行。角又相等。此謂之平行長方體。戊己圖是也。體有曲平兩面相雜。而不成等邊等面。則謂之底平半圓體。庚辛圖是也。全體相對之各面不平行。上下兩面平行。則謂之上下面平行體。壬癸圖是也。體圓而上下面俱平。則謂之長圓體。子圖是也。底爲平面。其各面俱合於一角而成厚角。則謂之尖瓣體。底三角者。謂之三瓣尖體。底四角者。謂之四瓣尖體。底衆角者。謂之衆瓣尖體。如丑寅卯三圖是也。又或底面圓而漸銳成形。則謂之尖圓體。辰圖是也。

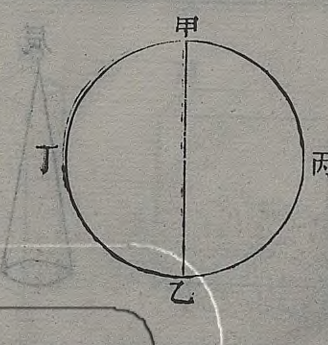


第十四

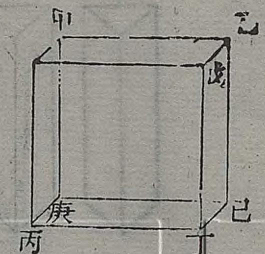
凡圓體。長圓體。尖圓體。俱生於圓面。故







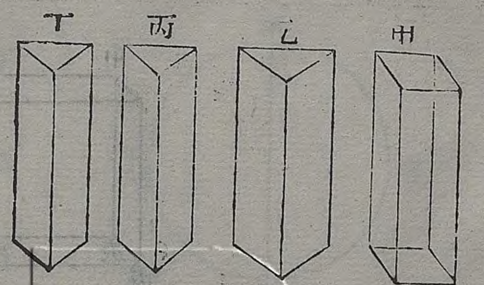
其外皮面積。亦生於圜界一旋轉之度分耳。如取甲乙丙丁之圜形。則以甲乙徑線為樞心。將甲丙乙半圜作轉式旋轉復還於原處。卽成甲丙乙丁一圓形體。如取甲乙戊己平行面之長圓形。則以甲乙中線為樞心。將丙丁線界作轉式。旋轉復還於原處。卽成甲乙戊己一長圓體。如取甲丙丁平底尖圓形。則以甲乙中線為樞心。將甲丁邊線作轉式旋轉復還於原處。卽成甲乙丙丁一尖圓體矣。



第十五

凡各體形。其各面平行相當。則相對兩邊面積俱相等。如甲乙丙丁之正方體其甲戊庚丁。甲己。戊丙。甲丙。乙丁。六面。俱各平行。故相對二面之積。俱兩兩相等也。

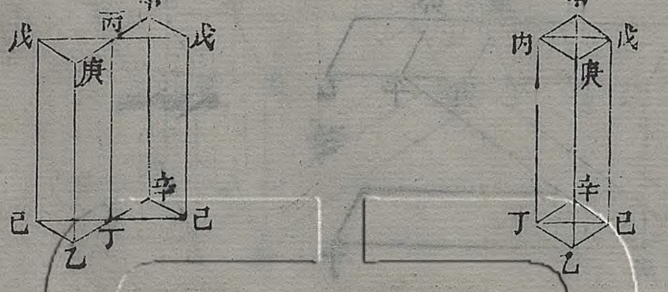
第十六



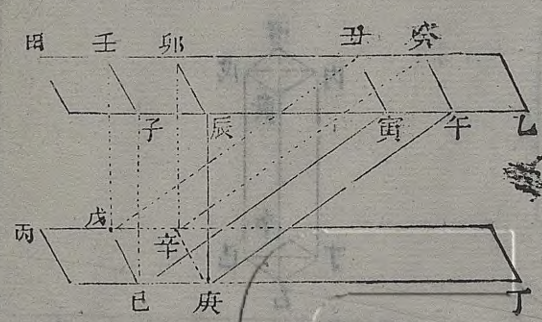
凡體面式不一而積等者。爲積數相等之體。面式既同而體積又等者。爲面式體積全等之體。如甲乙二體。爲積數相等之體也。丙丁二體。爲面式體積全等之體也。

第十七

凡平行面之長方體。自一面之對角線。平分爲兩三稜體。此兩三稜體。必爲面式體積全等之體矣。如甲乙平行面長



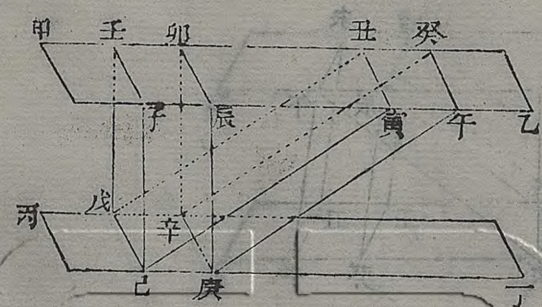
方體。自丙丁二角至相對戊己二角。分爲兩段。成戊丙乙丁己甲兩三稜體。爲面式體積全等體也。試以甲丙庚戊辛丁乙己兩平面形。自戊丙丁己兩對角線。均分爲兩三角形面。則所分之戊庚丙己乙丁丙甲戊丁辛己四三角形面。積俱相等。而丙乙甲己甲丁戊乙各面。又互爲平行。必兩兩相等。再對角線分成之丙丁己戊。戊己丁丙二面原在一



界所分。必各相等。今所分二形之各面。既各相等。則其積必等。而為面式體積全等體無疑矣。

第十八

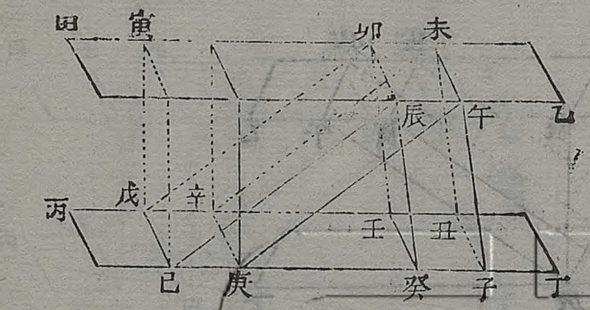
凡平行二平面之間。若同底。立各平行體。其積必相等。設甲乙丙丁平行二平面之間。於戊己庚辛底。立壬庚癸巳二平行體。其積俱相等。何也。蓋因壬戊己子丑寅平面三角形之壬戊己子面。與



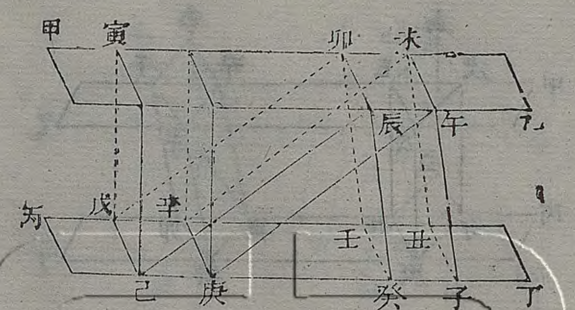
卯辛庚辰癸午平面三角形之卯庚辛辰面平行。而壬戊己子丑寅平面三角形之丑戊己寅面。與卯辛庚辰癸午平面三角形之癸辛庚午面平行。故其各面之度相等。其壬子辰卯之面。與丑寅午癸二面。俱與戊己庚辛一面平行。其度亦必相等。此二面之度既等。則壬子寅丑卯辰午癸二面之度亦必俱等。其上下各面度既等。而平面兩三角形之

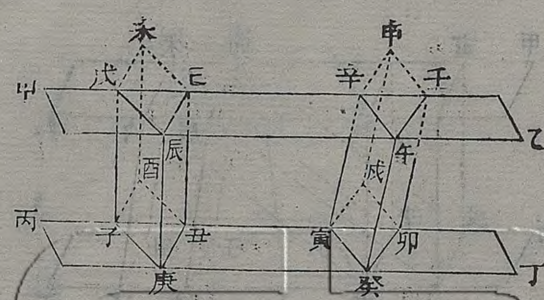
各面各邊度又俱等。則此壬庚。癸己。二平行體之積。必然相等也可知矣。

第十九



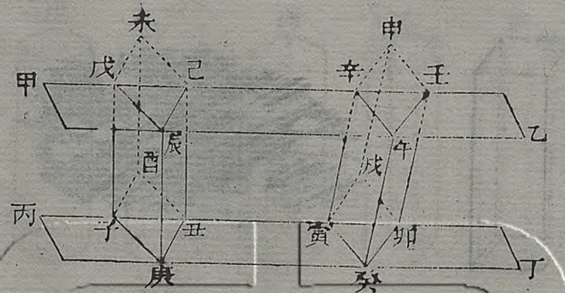
凡平行平面之間。所有立於等積底之各平行體。其積必俱相等。設如甲乙丙丁。午未二平面之間。有戊己庚辛。壬癸子丑。二等積之底。立一寅庚正面平行體。一卯子斜面平行體。此二體之積必相等。試自寅庚正面平行體之戊己庚辛底。至卯子斜面平行體之卯辰午未面。復作一卯庚斜面平行體。則寅庚。卯庚。二體。立於戊己庚辛之一底。其積相等矣。如前節所云。而卯子。卯庚。二體。又同立於卯辰午未之面。其積亦必相等。是以寅庚正面平行體。卯子斜面平行體。俱與卯庚平行體相等。故云凡平行平面之間。所有立於等積底之各平行體。其積必俱相等也。



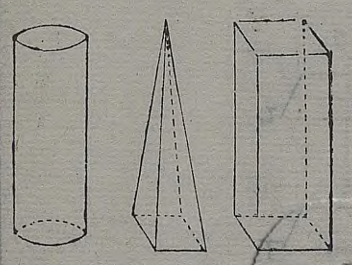


第二十

平行平面之間。有立於等積三角底之各三面體。其積必俱等。如甲乙丙丁平行二平面之間。有子庚丑寅癸卯等積三角底。立戊庚己辛癸壬之兩三面體。此二體積必相等。何以見之。若以此二體之上邊二面之戊辰辰己二界平行作戊未己未二線。辛午壬午二界平行作辛申壬申二線。又於此二體之下邊



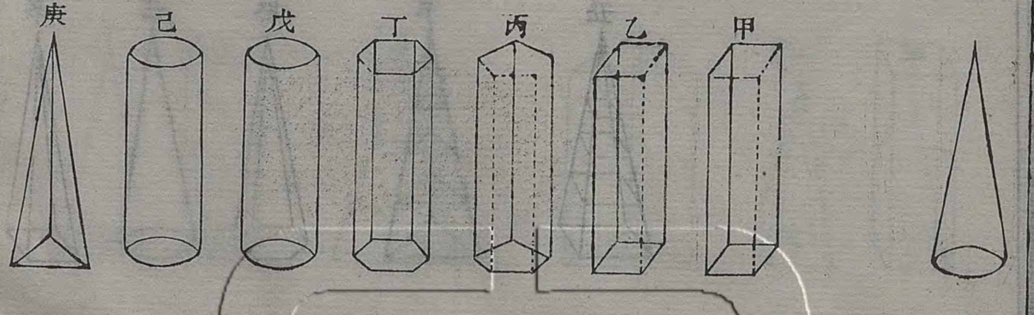
二面之子庚庚丑二界平行作子酉酉丑二線。寅癸癸卯二界平行作寅戌戌卯二線。則二體所生酉子庚丑戌寅癸卯酉邊平行二底俱在子丑寅卯二對角線。其度相等。見三卷第三節其分此三角面各大一倍矣。復於所作二二底邊酉戌二處作酉未一縱線。戌申一縱線。即戌未庚申癸平行面二方體矣。其酉子庚丑戊寅癸卯二底既俱相等。則所生之未



庚申癸平行面之二方體。亦自相等。見本卷第十九節。此未庚申癸平行面二方體。既各相等。則戊庚己辛癸壬之三面體。爲未庚申癸二方體之正一半。其積必等無疑矣。

第二十一

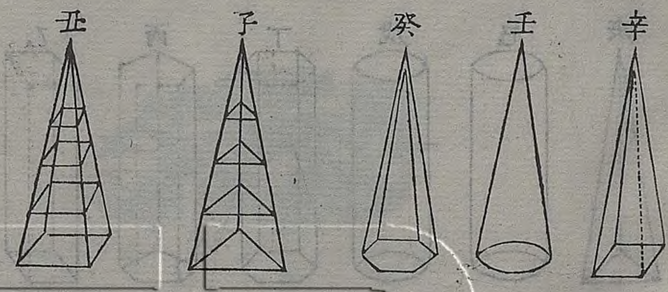
凡各種體形難以圖顯。蓋以圖止一面故也。必用木石製之始能相肖。況此各種形體。又或有外實而內空者。必按其



形以求其理。始可發明其精蘊矣。

第二十二

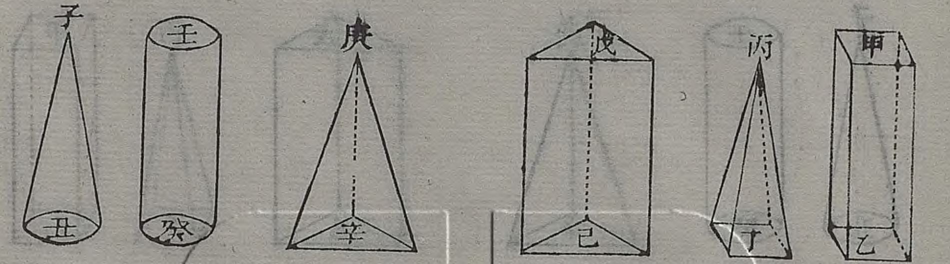
凡各面所成體形內。其各面俱平行。或上下面爲平行。而立於等積之底。其體之高又等。則其體之積亦相等。如甲乙體。其各面俱平行。又如丙丁體。其上下面平行。立於等積之底。其高又等。或又如戊己體。其上下面平行圓面積又等。高又等。則其兩兩體積必相等矣。又如

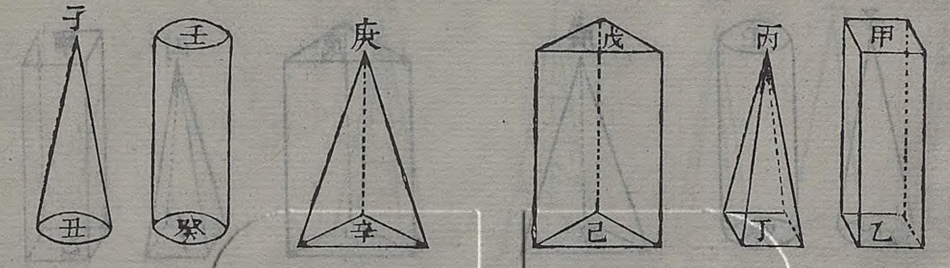


庚辛壬癸之類尖體形。苟立於等積之底。其體之高若等。則其體之積亦相等。何以見之。若將衆尖體。分為平行底之衆小體。其所分衆小體之底度高度。必俱相等。如子。丑圓。其所分小體之積俱等。故其全體之積亦相等也。

第二十三

凡上下面平行各體。與平底尖體。同底同高者。不論平面圓面。其平底尖體。皆得上下面平行體三分之一。如甲乙上下面平行之長方體。與丙丁四瓣尖體。其乙丁兩底積等。甲乙。丙丁兩高度又等。則甲乙長方體。與丙丁尖體三形等。如戊己上下面平行之三稜體。與庚辛三瓣尖體。其己辛兩底積等。戊己。庚辛兩高度又等。則戊已三稜體。與庚辛尖體三形等。又如壬癸上下面平行之長圓體。與子丑尖圓體。其癸丑兩底積等。

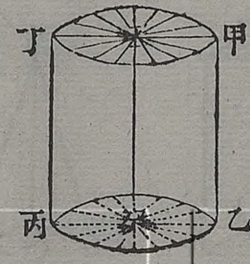




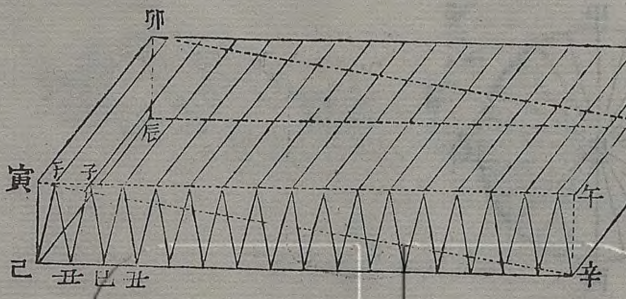
壬癸子丑兩高度又等。則壬癸長圓體。與子丑尖圓體三形等。又如壬癸長圓體。與甲乙戊己類體同底同高。則壬癸長圓體。亦與丙丁庚辛類尖體三倍所合之數等。又或子丑尖圓體與丙丁庚辛類尖體同底同高。則子丑尖圓體。三倍之。乃與甲乙一體戊己一體等也。夫同底同高上下面平行體既俱為尖體之三倍。則尖體為上下面平行體三分之一可知矣。蓋甲乙戊己壬癸各體。其式雖不同。苟底積高度相等。其積必等。而丙丁庚辛子丑各體。式雖不同。苟底積高度相等。其積亦必等。故知丙丁庚辛子丑平底尖體。互為甲乙戊己壬癸上下面平行各體三分之一也。如將上下面平行各體。以木石為之。分作同底同高之各平底尖體。用權衡以較其分量。則各體之積分。自昭然可見矣。

第二十四

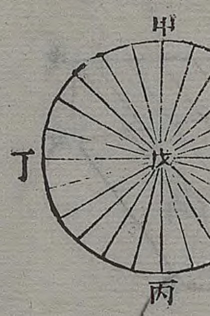
凡長圓體外周面積。與長方體底面積相等。而長圓體半徑。又與長方體高度相等。則長圓體積。必得長方體積之半



也如甲乙丙丁長圓體。其周圍外面積。與戊己長方體之庚己底面積等。而長圓體之壬丁半徑。又與長方體之戊庚高度等。則此甲乙丙丁長圓體積。必得戊己長方體積之一半也。試將甲乙丙丁長圓體。從壬癸中線。至周圍外面。分爲千萬分。則成子丑巳類千萬長尖體。此千萬長尖體之高。與長圓體之壬子半徑等。而千萬長尖體之共底。卽長圓



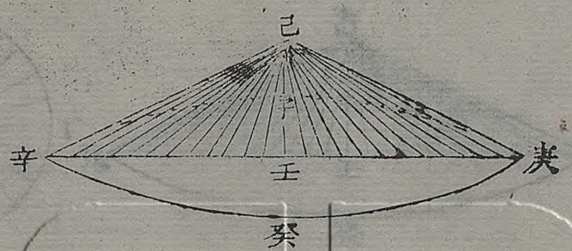
體之周圍外面積。則此千萬長尖體。必爲戊己長方體之一半矣。蓋寅己辛三角面爲午己長方面之一半。見三卷第三節。而此子丑巳類衆三角面。與寅己辛三角面等。見四卷第二十節。子丑巳類衆三角面。旣與寅己辛三角面等。則子丑巳類衆長尖體。亦必與卯辰庚辛己寅三角體等。此卯辰庚辛己寅三角體。固爲戊己長方體之一半。今長圓體所分之衆長尖



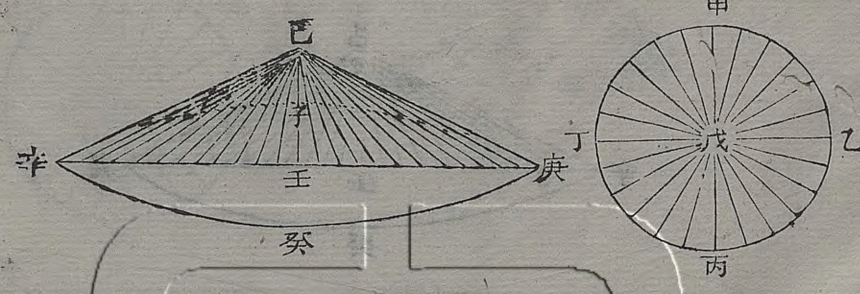
體。既與卯辰庚辛己寅三角體等。則亦必為戊己長方體之一半。故甲乙丙丁長圓體。為戊己長方體之一半也。

第二十五

凡球體外面積。與尖圓體之底積等。而球體之半徑。與尖圓體之高度等。則此球體之積。與尖圓體之積等也。如甲乙丙丁球體之外面積。與己庚辛尖圓體之庚子辛癸底積等。球體之甲戊半徑



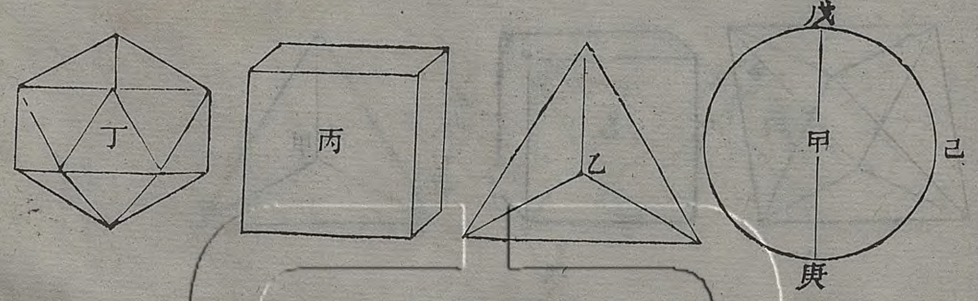
與尖圓體之己壬高度等。則此球體之積。為與尖圓體之積等也。試將球體從中心分為千萬尖體。復將尖圓體亦分為千萬尖體。則球體所分尖體每一分。必皆與尖圓體所分尖體一分等。何也。蓋球體所分尖體。皆以球體之外面為底。而以球體之甲戊半徑為高。其尖圓體所分尖體。皆以尖圓體之底為底。而以尖圓體之己壬高為高。夫尖圓體之



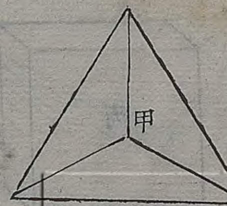
底積。原與球體之外面積等。而尖圓體之高度。又與球體甲戊半徑等。故此兩種千萬尖體。皆爲同底同高。其積相等無疑矣。見本卷第十八節。然此兩種千萬尖體。即球體尖圓體之所分。其所分之體既等。則原體亦必相等可知。故曰球體與尖圓體俱相等也。

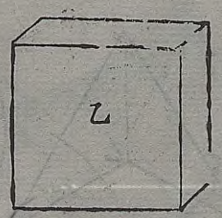
第二十六

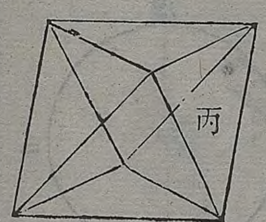
凡各形外皮面積相等之體。惟圓體所



函之積數。大於他種各體所函之積如甲乙丙丁外皮面積相等各形內。甲圓體所函之積。必大於乙丙丁直界體所函之積也。何也。大凡圓形。其半圓周一旋轉間。即成圓體。此戊己庚半圓周一次旋轉。即成甲圓體。見本卷第十四節。又凡平面圓界所函之積。必大於等邊各形所函之積。見四卷第二十三節。平面圓界所函。猶大於各等邊所函之積。則圓體所函。必大



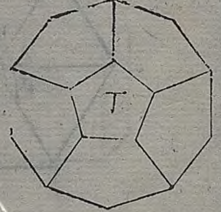


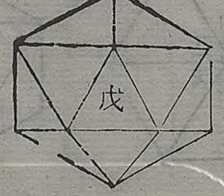


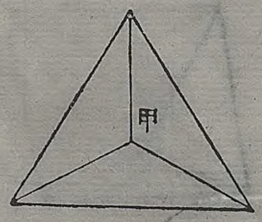
於各直界體所函之積可知矣。

第二十七

厚角所成等面體形有五種。各以面數而名之。其一為四面體。每面有三角各三角之各三界度俱等。如甲圖是也。二為六面體。每面俱為正方。其方面之四角俱為直角。而各界互等。故又為正方體。如乙圖是也。三為八面體。每面有三角。各三角之各三界度俱等。如丙圖是



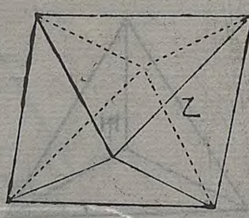


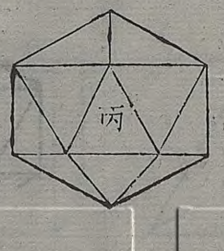


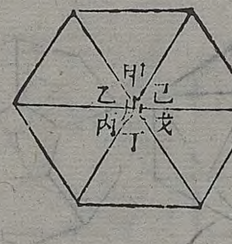
也。四為十二面體。每面有五角。各五角之五界度俱等。如丁圖是也。五為二十面體。每面有三角。各三角之各三界度俱等。如戊圖是也。

第二十八

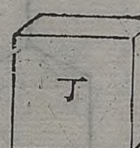
前節發明五種厚角所成等面體形之外。不能復生他形。蓋此五種厚角體。俱是等邊三角四角五角之平面相合所成也。凡平面自三界以下。不能成面。見二

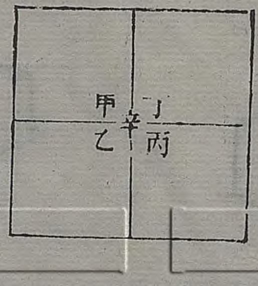


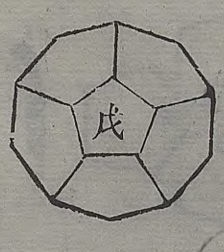




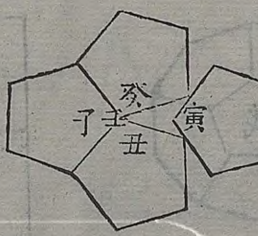
卷首節。而厚角自三面以下。亦不能成角。故厚角自三面始。如甲四面體。其四厚角皆三平面三角形所合而成也。乙八面體。其六厚角。皆四平面三角形所合而成也。丙二十面體。其十二厚角。皆五平面三角形所合而成也。然平面三角形所合。過於五形。則不能成厚角。故平面六三角形。合於一處。即成庚形。其甲乙丙丁戊己六角相合。與四直角等。見首



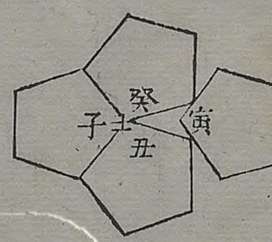


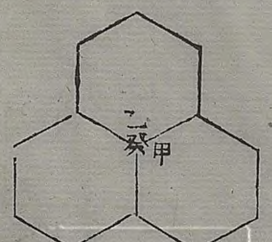


卷第十五節。既與四直角等。則為平面不成厚角矣。如本卷第五節。六形相合。尚不能成厚角。況多形乎。是故平面三角形所生厚角體。僅得四面八面二十面三種而已。若夫平面正方四角形所成厚角。如丁六面正方體。其八厚角。皆三平面四角形所合而成。此外更無他形。若將四平面四角形。合於一處。即成辛形。其甲乙丙丁四角。既俱為直角。必不能成厚角



矣。故四角形所生厚角。僅有一六面正方體而已。至於平面五角形所成厚角。如戊十二面體。其二十厚角。皆三平面五角形所合而成。此外更無他形也。或將四平面五角形。如癸子丑寅之四角。合於壬。此四角俱為鈍角。必大於四直角。既大於四直角。在平面尚不能相合。厚角豈能成耶。是以平面五角形所成之厚角。僅有一十二面體而已。或將平





面六角形之三形。合於一處為癸。其甲乙丙三角度與四直角等。故不成厚角。六角平面相合。既不成厚角。其七角八角等形。愈不能成厚角矣。故曰四面六面八面十二面二十面五種體。只在三角四角五角三種平面形所生。此外不能復成他形也。