大學叢書

理論力學綱要

孟特爾著
嚴濟慈 李曉舫譯

商務印書館發行

大學叢書

理論力學綱要

孟特爾 著

嚴濟慈
李曉舫 譯

中華教育文化基金董事會
編譯委員會編輯

商務印書館發行

中華民國二十七年七月初版
中華民國二十八年一月再版

(大學叢書)(教本) 理論力學綱要 一册
(51048平)
Eléments de Mécanique
平裝每册實價國幣壹元伍角
外埠酌加運費匯費

原著者 M. P. Montel
編譯者 嚴濟慈 李曉舫
編輯者 中華教育文化基金董事會編譯委員會
發行人 王雲五 長沙南正路
印刷所 商務印書館
發行所 商務印書館 各埠

(本書校對者 鄒光昭 盧金擘)

G三三三

序　言

算學之系統首為計算之科學,植基於數之概念,而其他之概念屬之。其次加入空間之概念,而有幾何學。集點成線,集線成面,至於點線之運動與時間之關係,則未嘗討論。若更加入時間之概念,便得一較繁之科學,即所謂動學是。故動學乃討論運動之幾何學的性質與時間之關係,至於運動之物理的原因,亦未嘗論也。若並此而論之,即力學之事也。物理現象之根本原因不可知,科學家據果測因,謂使運動發生之原因曰力。故力學之目的在解釋下列之二問題:

1° 以某力加於物體上而求其運動,

2° 已知物體之運動,而求施於其上之力。

本書據此程序,分為四篇,即動學,點之動力學,靜力學,與固體動力學,更於起始附以有向量之研究,以為本書之導論焉。

凡　例

1° 本書根據巴黎大學教授孟特爾先生(M. Paul Montel)理論力學綱要講義(Eléments de Mécanique)編譯而成。

2° 本書可供大學數,理二系,與工學院學生已習初等微積分學者之用;或以之自修,或採作教本,皆甚適宜。

3° 本書譯名關於算學者採通用之名詞,關於物理學者遵照二十三年教育部公布之物理學名詞,期收名詞統一之效。書末更附有法,英,中名詞索引,俾便檢查。

4° 本書僅爲初學而作,與本書程度相銜接者尙有一卷,名高等理論力學,以供學者進級硏究之用。

5° 編者謹請讀者將本書之缺欠或錯誤之處見示,俾於再版時更正,幸甚。

目　錄

導言　有向量與有向量之系

第一篇　動學

第一章　通論

第二章　點之動學——速度

第三章 速度圖與加速度

第四章 固體之運動

第五章 比較系統之改換

第二篇 點之動力學

第一章 通論

第二章 力學之方程式

第三章 功與活力

第四章 一自由點運動之舉例

第五章 不自由之質點的平衡與運動

第三篇 靜力學

第一章 平衡之必須的條件

第二章 固體之平衡

第四篇　系之動力學

第一章　普通方程式

第二章　固體繞軸之運動

第三章　碰撞與打擊

附　　錄

力學之單位

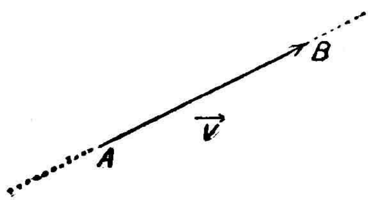
理論力學綱要

導　言

有向量與有向量之系

1. 有向量　於直線上取一段,兩端爲 A,B 二點所限,并在此線上選一進行之方向,自 A 至 B,A 爲原點(origine) B 爲終點 (extrémité),此線段稱曰有向量(vecteur)。(圖 1)

故定有向量之元有四;1° **原點** A;2° **方位**(direction)卽負此有向量之直線的方位;3° **方向** (seno) 卽此直線上一動點由 A 至 B 移動之方向;4° **量**卽 AB 之距離。



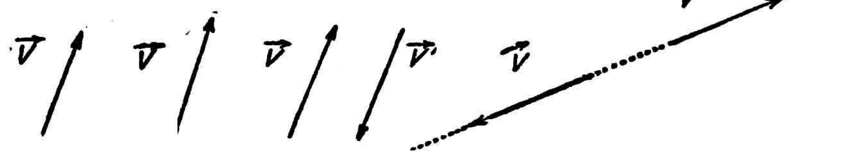
(圖 1)

吾人以 $\vec{V}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 表有向量,至其量則以 V 或 AB 表之。又 $k\vec{V}$ (k 爲一正數或負數) 表示與 $\vec{V}$ 同方位之有向量,而其量爲 $|k|$V。若 k 爲正,則方向與 $\vec{V}$ 之方向相同,而其量等於 kV。若 k 爲負,則其方向與 $\vec{V}$ 之方向相反,而其量爲 $-k$V。例如對於 A 點與 AB 對稱之有向量以 $-\vec{V}$ 表之。

若二有向量之差異僅屬原點一項,可以平移 (translation),而使兩者完全重合,則此二有向量稱爲相等 (équipollents)。

若二有向量之差異僅屬原點與方向,則二有向量 $\overrightarrow{V}$ 與 $\overrightarrow{V}'$ (圖 2) 稱曰相反 (opposés) 在此情形 $\overrightarrow{V}'$ 等於 $-\overrightarrow{V}$, $\overrightarrow{V}$ 等於 $-\overrightarrow{V}'$。

若二有向量相反而同在一直線上,則此二有向量稱爲**直接相反** (directement opposés)。(圖 2)

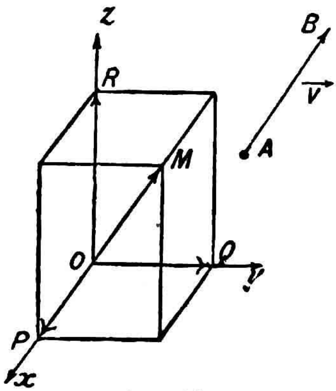


(圖 2)

2. 有向量之分析的表示法——分有向量 (composantes)

設 $Oxyz$ 爲三坐標軸。有向量 $\overrightarrow{V}$ 在 Ox, Oy, Oz 之射影以 X, Y, Z 表之。此三數對於所有之相等的有向量 $\overrightarrow{V}$ 皆同。從原點 O 引一有向量 $\overrightarrow{OM}$ (圖 3) 與 $\overrightarrow{V}$ 相等。作一直六面體,其各棱與坐標軸平行,而 $\overrightarrow{OM}$ 爲其一對角線。於是有

$$\overline{OP}=X \qquad \overline{OQ}=Y \qquad \overline{OR}=Z。$$



(圖 3)

X, Y, Z 三數乃 M 點之坐標。

本書中,除特別聲明外,皆以坐標

軸爲正交的,六面體爲正六面體,其底爲矩形,故有

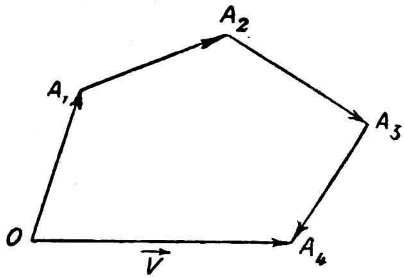
$$\overline{\mathrm{OM}}^2=\mathrm{V}^2=\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2。$$

若已知一有向量 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 之原點 A,及其在三坐標軸上之射影(projections),或**分有向量**(composantes) X Y Z 時,則此有向量完全規定。但 A 點可以其三坐標 x, y, z 定之,故有向量 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 爲

$$x, y, z; \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z},$$

六數所規定。

3. 幾何和與差 設有數個有向量 $\overrightarrow{\mathrm{V}}_1, \overrightarrow{\mathrm{V}}_2, \overrightarrow{\mathrm{V}}_3, \overrightarrow{\mathrm{V}}_4$; (圖4)由空間任一點 O 作 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$ 等於 $\overrightarrow{\mathrm{V}}_1$, 又 $\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}$ 等於 $\overrightarrow{\mathrm{V}}_2$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}$ 等於 $\overrightarrow{\mathrm{V}}_3$, $\overrightarrow{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_4}$ 等於 $\overrightarrow{\mathrm{V}}_4$。有向量 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$ 稱爲 $\overrightarrow{\mathrm{V}}_1, \overrightarrow{\mathrm{V}}_2, \overrightarrow{\mathrm{V}}_3, \overrightarrow{\mathrm{V}}_4$ 四有向量之**幾何和**(somme géométrique)。凡有向量 $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ 等於 $\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$ 者皆爲此四有向量之和。



(圖 4)

常記爲:

$$\overrightarrow{\mathrm{V}}=\overrightarrow{\mathrm{V}}_1+\overrightarrow{\mathrm{V}}_2+\overrightarrow{\mathrm{V}}_3+\overrightarrow{\mathrm{V}}_4。$$

設另由他一點 O′ 出發,以同上之法作圖,最後得一有向量 $\overrightarrow{\mathrm{V}}'$ 與 $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ 相等,因第二圖可由第一圖依 OO′ 平移而得之也。

設 $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ 之分有向量爲 X, Y, Z; $\overrightarrow{\mathrm{V}}_1$ 之分有向量爲 $\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Z}_1$, $\overrightarrow{\mathrm{V}}_2$ 之分有向量爲 X_2 Y_2, Z_2 等。使周界 $\mathrm{OA}_1\,\mathrm{A}_2\,\mathrm{A}_3\,\mathrm{A}_4$, 封閉之邊

OA_4 投射於三坐標軸上,則有:

$$X=X_1+X_2+X_3+X_4=\Sigma X_i,$$

$$Y=Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=\Sigma Y_i,$$

$$Z=Z_1+Z_2+Z_3+Z_4=\Sigma Z_i,$$

ΣX_i 符號乃諸數之和之簡寫。

〔定理 I〕 更換諸有向量相加之次序,其幾何和不變。

蓋更換有向量之次序,即更換組成 $X, Y, Z,$ 三和內諸項之次序,此等和數不因此更換而異,故 $\vec{V}$ 不變。

〔定理 II〕 以數有向量之幾何和代此數有向量,而與他有向量相加,則總幾何和不變。

例如以 $\vec{V}_2$ 及 $\vec{V}_4$ 之幾何和代表 $\vec{V}_2$ 與 $\vec{V}_4$, 此幾何和之分有向量爲 (X_2+X_4), (Y_2+Y_4), (Z_2+Z_4), 是在組成 X, Y, Z 諸項內以二項之和代二項,總和仍不變,故 $\vec{V}$ 亦不變。

總之幾何和仍遵守算術和或代數和之二定理(交換定理與組合定理)。

注意 I 由圖 3 可見 $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ 三有向量之幾何和爲六面體之對角線 $\overrightarrow{OM}$, 故可寫爲:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

或 $$\vec{V}=\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z}$$

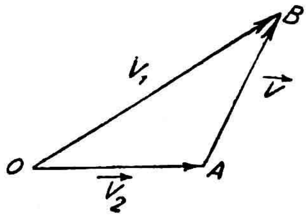
反之若已知一有向量 $\overrightarrow{OM}$, 由六面體之作法,得分解其爲隨 $Ox, Oy, Oz,$ 三方向之三有向量之和。

注意 II 有向量 $\overrightarrow{OB}$ 乃 $\overrightarrow{OA}$ 及 $\overrightarrow{AB}$ 之幾何和,故 $\overrightarrow{AB}$ 之末

端 B 之坐標爲

$$x+X, y+Y, z+Z$$

(圖 5)



(圖 5)

設二有向量 $\vec{V}_1$ 及 $\vec{V}_2$ 其差 (différence) 爲 $\vec{V}$，則依定義 $\vec{V}$ 與 $\vec{V}_2$ 之幾何和爲 $\vec{V}_1$。以式表之:

$$\vec{V}_1=\vec{V}_2+\vec{V},$$

即

$$\vec{V}=\vec{V}_1-\vec{V}_2。$$

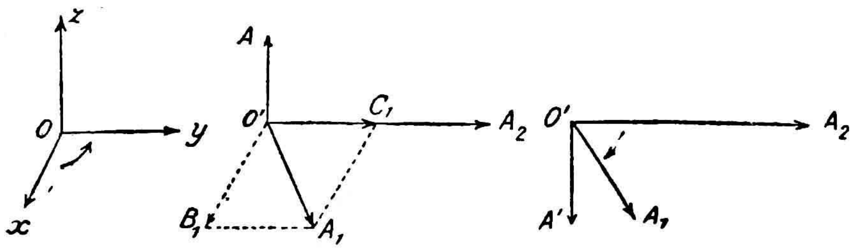
據圖 5 可見此有向量 $\vec{V}$ 係以第一有向量 $\vec{V}_1$ 之終點爲終點，第二有向量 $\vec{V}_2$ 之終點爲原點。

設一有向量其原點爲 A (x, y, z)，終點爲 B (x', y', z')，則此有向量 $\overrightarrow{AB}$ 爲 $\overrightarrow{OB}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 二有向量之差，(O 乃坐標軸之原點) 故 $\overrightarrow{AB}$ 之分有向量爲:

$$x'-x,\quad y'-y,\quad z'-z。$$

4. 有向積(produit vectoriel)　設有二有向量 $\vec{V}_1$ 及 $\vec{V}_2$，$\vec{V}_1$ 被 $\vec{V}_2$ 所乘之有向積爲一有向量 $\vec{V}$，其定義如下。

由任一點 O′ 作 $\overrightarrow{O'A_1}$ 等於 $\vec{V}_1$，$\overrightarrow{O'A_2}$ 等於 $\vec{V}_2$，(圖 6) 所求之積 $\overrightarrow{OA}$ 之量爲一數，等於以 $O'A_1$ 與 $O'A_2$ 爲二邊所作之平行四邊形之面積；其位置係垂直於 $A_1O'A_2$ 平面；至其方向之規定如下：對於足立在 O′，頭在 A 點之觀察者 $\overrightarrow{O'A_1}$ 掃過平行四邊形而至 $\overrightarrow{O'A_2}$ 之一轉動，應與下列之轉動同向，即對同一觀察者，足立在 O，頭在 z，Ox 轉過小於 180° 之角而至 Oy。



（圖 6）

此種轉動之方向,稱爲坐標軸轉動之方向。若在定義中以 y 代 x, z 代 y, x 代 z, 或以 z 代 x, x 代 y, y 代 z 卽將 x, y, z 作輪次交換對於此觀察者,此方向仍不改變。可說 $O'A_1A_2A$ 三稜與坐標軸 $Oxyz$ 有同一之轉動向,或同一之方位。

若坐標系三軸安置之方位,如本書諸圖所載者,此坐標軸之轉動向爲正向,或簡稱曰**正向坐標系** (triédre direct)。對於隨 Oz 向而立之觀察者,此種轉動在其前面經過,係由右而左。

凡有向量 $\overrightarrow{V}$ 之等於 $\overrightarrow{O'A}$ 者,等於 $\overrightarrow{V}_1$ 被 $\overrightarrow{V}_2$ 所乘之有向積,記爲:

$$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{V}_1\times\overrightarrow{V}_2$$

× 符號萬不可略。

據定義,可見 $\overrightarrow{V}_2$ 被 $\overrightarrow{V}_1$ 所乘之積爲一有向量 $\overrightarrow{O'A'}$ 與 $\overrightarrow{V}$ 相反。故:

$$\overrightarrow{V}_1\times\overrightarrow{V}_2=-(\overrightarrow{V}_2\times\overrightarrow{V}_1)$$

有向積的長度 V 等於 $V_1V_2\sin\theta$, θ 表 $\overrightarrow{V}_1$ 與 $\overrightarrow{V}_2$ 間小於

180° 之角。此二有向量之積爲零之必須及充分的條件,係任一有向量爲零,或其間之角爲 0 或 180°,故二平行有向量之有向積爲零。

注意 I　若將二有向量之一,代以其正交於他一有向量上之分有向量,則此二有向量之有向積仍不變。

因 $\overrightarrow{O'A_1}$ (圖 6) 乃 $\overrightarrow{O'A_2}$ 向上之 $\overrightarrow{O'C_1}$ 及正交於 $\overrightarrow{V_2}$ 向上之 $\overrightarrow{O'B_1}$ 之幾何和。試證:

$$\overrightarrow{V_1}\times\overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{O'B_1}\times\overrightarrow{V_2}$$

因建造於 $\overrightarrow{V_1}$ 及 $\overrightarrow{V_2}$ 上之平行四邊形之面積,與建造於 $\overrightarrow{O'B_1}$ 及 $\overrightarrow{V_2}$ 上之矩形之面相等,故二有向積之量相同,至於位置與方向亦同,故二有向積相同。

注意 II　設一有向量 $\overrightarrow{X}$ 在 Ox 上其量爲 X,又一有向量 $\overrightarrow{Y'}$ 在 Oy 上,其量爲 Y',則其積 $\overrightarrow{X}\times\overrightarrow{Y'}$ 在 Oz 上,其量爲 XY'。此積之量等於 XY' 之絕對值。若此二數爲同號,則有向積之方向爲 Oz,其量爲正,故等於 XY'。若此二數異號,則有向積之方向爲 zO,其量爲負,其值亦爲 XY'。

同樣設 Z 與 Z' 表在 Oz 上二有向量 $\overrightarrow{Z}$ 與 $\overrightarrow{Z'}$ 之量。於是:

$$\overrightarrow{Y}\times\overrightarrow{X'}=-\overrightarrow{X'}\times\overrightarrow{Y}\qquad\text{在 }Oz\text{ 上之量爲 }-YX'$$

$$\overrightarrow{Y}\times\overrightarrow{Z'}\qquad\text{在 }Ox\text{ 上之量爲 }+YZ'$$

$$\overrightarrow{Z}\times\overrightarrow{Y'}=-\overrightarrow{Y'}\times\overrightarrow{Z}\qquad\text{在 }Ox\text{ 上之量爲 }-ZY'$$

$$\overrightarrow{Z}\times\overrightarrow{X'}\qquad\text{在 }Oy\text{ 上之量爲 }+ZX'$$

$$\overrightarrow{X}\times\overrightarrow{Z'}=-\overrightarrow{Z'}\times\overrightarrow{X}\qquad\text{在 }Oy\text{ 上之量爲 }-XZ'.$$

〔定理〕 以一有向量乘諸有向量之和,等於以此有向量乘和之各項,而作其結果之和。

此所謂和乃幾何和,所謂積乃有向積。

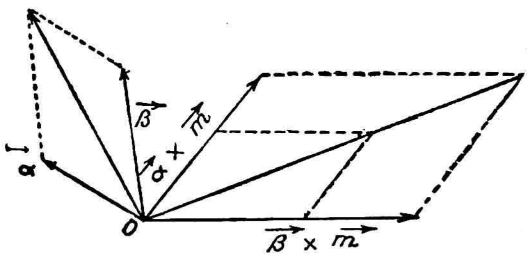
卽須證明:

$$\overrightarrow{(a+b+c)}\times\vec{m}=\vec{a}\times\vec{m}+\vec{b}\times\vec{m}+\vec{c}\times\vec{m}$$

玆先證明對於二有向量之和:

$$\overrightarrow{(a+b)}\times\vec{m}=\vec{a}\times\vec{m}+\vec{b}\times\vec{m}$$

設此三有向量具同一之原點 O, (圖 7)又(P)爲在O點正交於有向量$\vec{m}$之平面。$\vec{a}$與$\vec{b}$在(P)上之正射影爲$\vec{\alpha}$及$\vec{\beta}$二有向量。建造於$\vec{a}$及$\vec{b}$上之平行四邊形之正射影爲建造於$\vec{\alpha}$及$\vec{\beta}$上之平行四邊形。前者之對角線卽$\overrightarrow{a+b}$,其正射影爲後者之對角線$\overrightarrow{\alpha+\beta}$。據注意 1,吾人可以其在(P)上之射影,代替被乘之有向量,以求有向積。



(圖 7)

由是僅須證明:

$$\overrightarrow{(\alpha+\beta)}\times\vec{m}=\vec{\alpha}\times\vec{m}+\vec{\beta}\times\vec{m}$$

設想(P)平面爲圖 7 所在之平面,有向量$\vec{m}$在紙之前面。

此有向量在圖中僅以一點O表之。

欲作$\vec{a}\times\vec{m}$之積,僅須使$\vec{a}$旋轉一直角,旋轉方向,則如Ox對於Oy向Oz而轉,繼m倍其長度a;對於有向量$\vec{\beta}$及$\overrightarrow{a+\beta}$亦同此法作圖。或使第一平行四邊形全體旋轉一直角,旋轉後m倍其各邊,仍使O為一角項。如是造成之新圖仍為一平行四邊形及其對角線。

因有向量$(\overrightarrow{a+\beta})\times\vec{m}$是以$\vec{a}\times\vec{m}$與$\vec{\beta}\times\vec{m}$為二邊之平行四邊形之對角線,故有下列之幾何的等式:

$$(\overrightarrow{a+\beta})\times\vec{m}=\vec{a}\times\vec{m}+\vec{\beta}\times\vec{m}$$

此卽本定理之證明:

對於三項之和的情形吾人可使:

$$\overrightarrow{a+b+c}=\vec{a}+\overrightarrow{b+c}=\overrightarrow{a+a'}$$

有向量$\vec{a'}$表　$\overrightarrow{b+c}=\vec{b}+\vec{c}$。

由前所得,於是有:

$$(\overrightarrow{a+b+c})\times\vec{m}=(\overrightarrow{a+a'})\times\vec{m}=\vec{a}\times\vec{m}+\vec{a'}\times\vec{m}$$

同樣　$\vec{a'}\times\vec{m}=(\overrightarrow{b+c})\times\vec{m}=\vec{b}\times\vec{m}+\vec{c}\times\vec{m}$

以其等值代　$\vec{a'}\times\vec{m}$,故有

$$(\overrightarrow{a+b+c})\times\vec{m}=\vec{a}\times\vec{m}+\vec{b}\times\vec{m}+\vec{c}\times\vec{m}$$

據同法可證明四項,五項以至多項均有此性質。

又一有向量被數有向量之和所乘之積,亦有此性質。

結論　二和相乘,只須以一和之各項,乘他和之各項,而加其結果。

此結論之證法,與在算術上相同。

總之,有向積具有代數積之分配性質,而無交換性質,換言之,卽不能任意交換因子之次序。

應用,設 $\vec{V}$ 之分有向量爲 X, Y, Z, $\vec{V}'$ 之分有向量爲 X′, Y′, Z′, 求 $\vec{V}\times\vec{V}'$ 之分有向量。

因 $$\vec{V}=\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z},$$

$$\vec{V}'=\vec{X}'+\vec{Y}'+\vec{Z}',$$

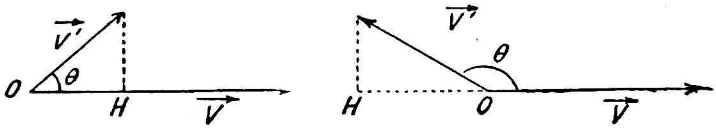
故 $$\vec{V}\times\vec{V}'=(\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z})\times(\vec{X}'+\vec{Y}'+\vec{Z}').$$

實行乘之, $$\begin{aligned}\vec{V}\times\vec{V}'=&\vec{X}\times\vec{X}'+\vec{Y}\times\vec{Y}'+\vec{Z}\times\vec{Z}'\\&+\vec{Y}\times\vec{Z}'+\vec{Z}\times\vec{Y}'\\&+\vec{Z}\times\vec{X}'+\vec{X}\times\vec{Z}'\\&+\vec{X}\times\vec{Y}'+\vec{Y}\times\vec{X}'\end{aligned}$$

第一列之諸積 $\vec{X}\times\vec{X}'$, $\vec{Y}\times\vec{Y}'$, $\vec{Z}\times\vec{Z}'$ 爲零。第二列之二有向量在 Ox 上,其量爲 YZ′ 與 −ZY′;故其和爲一有向量,在 Ox 上,其量爲 YZ′−ZY′;同樣第三列爲一有向量,在 Oy 上,其量爲 ZX′−XZ′;最末一列爲一有向量,在 Oz 上,其量爲 XY′−YX′。故 $\vec{V}\times\vec{V}'$ 之積爲隨 Ox, Oy, Oz 上三有向量之和,卽其分有向量爲:

$$YZ'-ZY',\quad ZX'-XZ',\quad XY'-YX'。$$

5. **無向積** (produit scalaire) 所謂二有向量 $\vec{V}$ 及 $\vec{V}'$,之無向積乃一數,其大小爲 $VV'\cos\theta$。(圖 8) θ 表二有向量間之角。表此無向積之記號爲 $\vec{V}\cdot\vec{V}'$ 或簡寫爲 $\vec{V}\vec{V}'$。故:



（圖 8）

$$\vec{V}\cdot\vec{V}'=\vec{V}\vec{V}'=\mathrm{V\,V}'\cos\theta$$

若此二有向量之一爲零,或彼此正交,則此無向積爲零。視二有向量間之角 θ 爲銳,或鈍,其無向積爲正或爲負。

使 $\vec{V}'$ 投其正射影於 $\vec{V}$ 之上,則此正射影 $\overrightarrow{OH}$ 之長爲 $\mathrm{V}'\cos\theta$,故:

$$\mathrm{V}\vec{V}'=\mathrm{V}\cdot\overline{\mathrm{OH}}=\mathrm{V}\cdot(\vec{V}'\text{之射影})$$

故無向積等於一有向量之長,被他一有向量在其上之正射影之長之乘積。

在無向積內可以交換二因子之次序:

$$\vec{V}\vec{V}'=\vec{V}'\vec{V}。$$

注意　設在 Ox 上之二有向量,其長爲 X 及 X',則其無向積爲 XX'。

若 X 及 X' 爲同號,因 θ 爲零,故無向積爲正,而等於 XX' 若 X 及 X' 異號,因 $\theta=\pi$ 故無向積爲負,而仍等於 XX'。

二有向量在二正交軸上,例如 Ox 與 Oy,則其無向積爲零。

〔定理〕一幾何和被一有向量所乘之無向積,乃和之每項被此有向量所乘之無向積之代數和。

$$\overrightarrow{(a+b+c)}\,\vec{m}=\vec{a}\,\vec{m}+\vec{b}\,\vec{m}+\vec{c}\,\vec{m}。$$

(證)使$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$投其正射影於$\vec{m}$之上,則有

$\vec{a}\,\vec{m}=m\cdot(\vec{a}$之射影$)$, $\vec{b}\,\vec{m}=m\cdot(\vec{b}$之射影$)$, $\vec{c}\,\vec{m}=m\cdot(\vec{c}$之射影$)$

加之: $\vec{a}\,\vec{m}+\vec{b}\,\vec{m}+\vec{c}\,\vec{m}=m\,(\vec{a}$之射影$+\vec{b}$之射影$+\vec{c}$之射影$)$

據射影定理,

$\vec{a}$之射影$+\vec{b}$之射影$+\vec{c}$之射影$=\overrightarrow{a+b+c}$之射影,

故 $\vec{a}\,\vec{m}+\vec{b}\,\vec{m}+\vec{c}\,\vec{m}=m\,(a+b+c$之射影$)=\overrightarrow{(a+b+c)}\,\vec{m}$。

結論 二和相乘,只須以一和之各項乘他和之各項而加其結果。此結論之證法,與在算術上相同。

總之無向積亦如代數積,具有分配及交換二性質;但此定義僅應用於二因子耳。

應用 二有向量$\vec{V}$及$\vec{V}'$之分有向量爲X, Y, Z及X′, Y′, Z′,試求其無向積。

$$\vec{V}\vec{V}'=(\vec{X}+\vec{Y}+\vec{Z})(\vec{X}'+\vec{Y}'+\vec{Z}')$$
$$=\vec{X}\vec{X}'+\vec{Y}\vec{Y}'+\vec{Z}\vec{Z}'$$

因展開式內其餘之各項,每二分有向量彼此正交,故其無向積爲零,又$\vec{X}\vec{X}'=XX'$,故

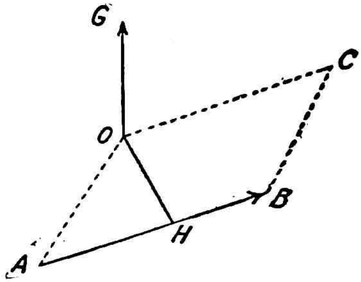
$$\vec{V}\vec{V}'=XX'+YY'+ZZ'。$$

由此可見二有向量正交之條件爲:

$$XX'+YY'+ZZ'=0。$$

6. 有向量對於一點之矩 (moment) 矩之觀念,在力學上非常重要,與有向積相連。

設有一有向量 $\overrightarrow{AB}$ 與一點 O(圖 9), $\overrightarrow{AB}$ 對於 O 點之矩爲一有向量 $\overrightarrow{OG}$,其原點爲 O,其量等於 AB 與 O 至 $\overrightarrow{AB}$ 之距離 $\overrightarrow{OH}$ 之乘積。$\overrightarrow{OG}$ 之方位正交於 OAB 平面,而其方向之決定如下,若 $\overrightarrow{OC}$ 爲等於 $\overrightarrow{AB}$ 之有向量,OHCG 三稜之方位,應與正向坐標系同。



(圖 9)

AB×OH 之積代表以 OA 及 AB 爲邊之平行四邊形之面積;故矩不過是 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{AB}$ 之積,而原點 O 爲固定耳。卽:

矩乃原點已定之有向積。

當有向量 $\overrightarrow{AB}$ 在其所在之直線上移動時矩不變。因矩之四元:原點,量,方位,方向均不變也。$\overrightarrow{V}$ 之矩以 $M^t\overrightarrow{V}$ 記之。

矩爲零之必須與充分的條件是 AB×OH 爲零,換言之,卽 AB 或 OH 爲零。故對於一點 O 之有向量的矩爲零,須此有向量爲零或 O 點在載此有向量之直線上,且僅在此二情形如是。

同原點之數有向量——定理 設 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 三有向量同具一原點 P。於 P 點作其幾何和 $\overrightarrow{PR}$, 茲欲證明下述之定理:

$\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$ 之幾何和 $\overrightarrow{PR}$ 對於一點 O 之矩,等於此三有向量對於 O 點之矩之幾何和。

設 $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ 爲 $\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}$,又 $\vec{m}$ 爲 $\overrightarrow{OP}$, 則有 $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{(a+b+c)}$

$M^t\,\overrightarrow{PR} = \vec{m} \times \overrightarrow{(a+b+c)}$,

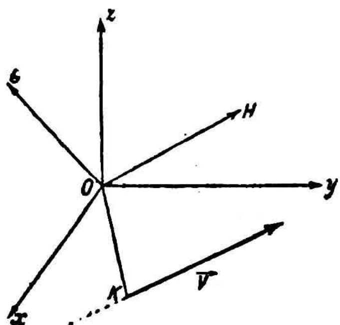
但 $\vec{m} \times \overrightarrow{(a+b+c)} = \vec{m} \times \vec{a} + \vec{m} \times \vec{b} + \vec{m} \times \vec{c}$,

故 $M^t\,\overrightarrow{PR} = M^t\,\overrightarrow{PA} + M^t\,PB + M^t\,\overrightarrow{PC}$。

分矩(composantes du moment) 設 $\vec{V}$ 之原點爲 $A(x, y, z)$ 其分量爲 X, Y, Z。令 L, M, N 爲 $\vec{V}$ 對於坐標軸之原點 O 之矩 $\overrightarrow{OG}$ 之三分矩,此卽二有向量 $\overrightarrow{OA} \times \vec{V}$ 之積之三分量;但 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\vec{V}$ 之分量爲 x, y, z 與 X, Y, Z,故有

$$L = yZ - zY, \quad M = zX - xZ, \quad N = xY - yX$$

注意 X, Y, Z, L, M, N 六數稱有向量 $\vec{V}$ 之坐標。當 $\vec{V}$ 沿其所在之直線上移動時,此六數不變。



(圖 10)

因 $\vec{V}$ 及 $\overrightarrow{OG}$ 正交,故必有:

$$LX + MY + NZ = 0$$

此關係亦易由直接計算得之。

反之,設已知六數滿足此一關係式,而 X, Y, Z 不同時爲

零,則此六數決定一有向量,其原點在負此有向量之直線上,而非固定。

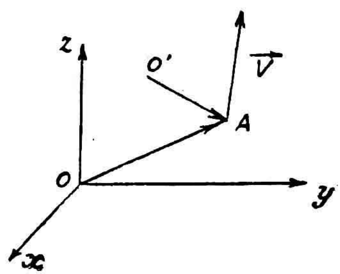
〔證〕設 L, M, N 不同時爲零,作分量爲 L, M, N 之有向量 $\overrightarrow{OG}$。所求之有向量 $\overrightarrow{V}$,必在過 O 點,正交於 $\overrightarrow{OG}$ 之平面上。據假設此平面含分量爲 X, Y, Z 之有向量 $\overrightarrow{OH}$。負 $\overrightarrow{V}$ 之直線平行於 OH, 而其間之距離爲 $\frac{OG}{OH}$。故過 O 點垂直於 GOH 平面作線,在此線上取 OK,使其長爲 $\frac{OG}{OH}$,而其方向係使 OKHG 正交三稜與 $Oxyz$ 三軸有同一之方位。等於 OH 之有向量 $\overrightarrow{V}$,在過 K 點平行於 OH 之直線。若 L, M, N 同時爲零, $\overrightarrow{V}$ 應過 O 點而等於 OH, 且在 OH 直線上。

求對於 $O'(x', y', z')$ 之矩 $\overrightarrow{O'G'}$ 之分量 L'M'N' 此卽 $\overrightarrow{O'A}\times\overrightarrow{V}$ 有向積之分量;但 $\overrightarrow{O'A}$ 之分量爲 $(x-x')$, $(y-y')$, $(z-z')$ 故:

$$L'=(y-y')Z-(z-z')Y=L-(y'Z-z'Y),$$

$$M'=(z-z')X-(x-x')Z=M-(z'X-x'Z),$$

$$N'=(x-x')Y-(y-y')X=N-(x'Y-y'X).$$



(圖 11)

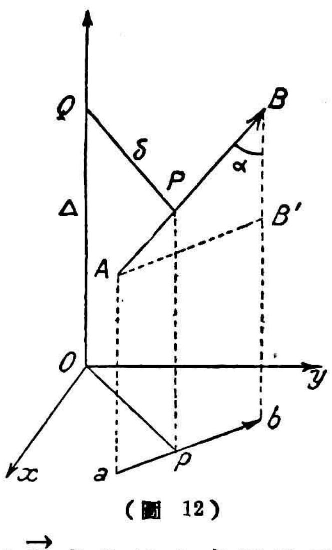
注意 設 O' 在 Oz 上，於是 $x'=y'=0$，因此 $N'=N$，有向量 $\overrightarrow{O'G'}$ 在 Oz 上之射影常為同一之數，即 $xY-yX$，

設 $\overrightarrow{ab}$ 為 $\overrightarrow{AB}$ 在 xy 平面上之正射影，其分量為 X, Y, O 其原點 a 之坐標為 x, y, O，其對 O 點之矩易見其在 Oz 上，其分量為：

$$O,\ O,\ N=xY-yX$$

因空間之任何軸均可取為 z 軸，故有下列之定理。

〔定理〕 一有向量 $\overrightarrow{V}$ 對於某軸上之任一點之矩，在此軸上之射影，常為一定量。此定量即等於 $\overrightarrow{V}$ 在正交於此軸之平面上之射影 $\overrightarrow{V}$，對於此軸與此平面相交之點之矩。



（圖 12）

7. 有向量對於一軸之矩 有向量 $\overrightarrow{V}$ 對於一軸 Δ 之矩，乃 $\overrightarrow{V}$ 對於此軸上之任一點之矩，在此軸上之射影。換言之，即 $\overrightarrow{V}$ 在正交於此軸之一平面上之射影，對於此軸在此平面上之垂足之矩。(圖 12)

由圖 12 吾人取 Δ 軸為 z 軸，$\overrightarrow{V}$ 在此軸上之矩的長度係 $\pm ab\times Op$，Op 表 O 至 $\overrightarrow{ab}$ 之距離。若此矩為零，即 $\overrightarrow{AB}$ 為零，或平行於此軸；或 Op 為零即 ab 經過 O 點，如此則 AB 與 Δ 軸相交。故對於 Δ 軸之矩為零之必需

與充分的條件,係有向量自身爲零,或在Δ軸之平面內,

p點爲$\overrightarrow{AB}$上之一點P之射影。過P點引平行於pO之直線PQ交Oz於Q: PQ乃Δ及AB之公垂線。PQ因平行於Op,故垂直於Δ,又因其垂直於ab與Pp,故垂直於AB。於是$Op=PQ=\delta$; δ乃有向量與Δ軸間之最短距離。設α爲$\overrightarrow{AB}$與軸間之角,ab因爲AB之射影,故其長爲$V\sin\alpha$,故$\overrightarrow{AB}$對於軸之矩可以下式表之:

$$\pm V\delta\sin\alpha$$

8. 有向量之系——總和與合矩　就數有向量之全體而論,是爲有向量之系(système de vecteurs)。

設O爲空間內任意一點,$\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}_4$爲一有向量之系。所謂此系對於O點之合矩(moment résultant),乃此等有向量對於O點之矩之幾何和$\overrightarrow{OG}$。所謂對於一軸Δ之合矩,乃此等有向量對於Δ之矩。若在Δ上任取一點O,此等有向量對於Δ之矩,乃此等有向量對於O點之矩$\overrightarrow{OG_1}$ $\overrightarrow{OG_2}$ $\overrightarrow{OG_3}$ $\overrightarrow{OG_4}$在此軸上之諸射影,故其和乃其幾何和在Δ上之射影,亦卽合矩$\overrightarrow{OG}$。故:

欲求對於一軸Δ之合矩,只須求對於此軸上之一點之合矩在此軸上之射影。

分析式　求總和的分量X, Y, Z,與對於原點之合矩的分量L, M, N.

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \Sigma X_i,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 = \Sigma Y_i,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = \Sigma Z_i,$$

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = \Sigma L_i,$$

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = \Sigma M_i,$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \Sigma N_i,$$

$X_i, Y_i, Z_i, L_i, M_i, N_i$ 乃 $\overrightarrow{V}_i$ 之坐標$(i=1, 2, 3, 4)$

求對於一點 $O'(x', y', z')$ 之矩 $\overrightarrow{O'G'}$ 的分量 L', M', N'。

$$L'_1 = L_2 - y'Z_1 + z'Y_1,$$

$$L'_2 = L_2 - y'Z_2 + z'Y_2,$$

$$L'_3 = L_3 - y'Z_3 + z'Y_3,$$

$$L'_4 = L_4 - y'Z_4 + z'Y_4,$$

相加得 $\qquad L' = L - y'Z + z'Y$。

同樣求 M', N' 得

$$L' = L - (y'Z - z'Y)$$

$$M' = M - (z'X - x'Z)$$

$$N = N - (x'Y - y'X)$$

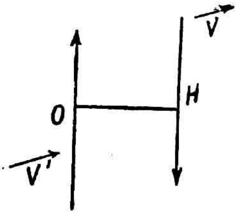
偶(couple) 一有向量之系,而其總和爲零者,稱曰偶。

$$X = Y = Z = O$$

由前式 $\qquad L' = L, \qquad M' = M, \qquad N' = N$

故一偶之合矩,對於空間之任何點皆相同。代表此合矩之有向量稱曰**偶之軸**(axe du couple)。

偶之最簡單者,爲二相反有向量所組成稱曰**基本偶**(couple élémentaire)。在二有向量之一($\overrightarrow{V'}$)上取一點O,此偶對於O之合矩遂簡單爲$\overrightarrow{V}$之矩,因$\overrightarrow{V'}$之矩對於O爲零。偶之軸的量故爲V×OH; OH稱爲**偶之槓臂**(bras de levier de couple)。



(圖 13)

等於零之有向量之系　一有向量之系的總和,及其對於任何點之合矩皆爲零者,則此系稱爲等於零之系。

只須總和與對於某一點O之合矩爲零已足;因由上L',M',N'諸式可見對於任何點O'之合矩,將亦無不爲零也。

第一篇　動學

第一章

通論

9. 動學之目的與其範圍　動學 (la cinématique) 研究物體移位與時間之關係。

幾何學研究物體之運動的性質,而無時間觀念。例如物體運動時,其各點所畫成之曲線的形狀,乃幾何學之所討論者。

幾何學只有一根本單位即長度是。

動學因計長度與時間,須一長度之單位(糎,粎,粁),與一時間之單位(平太陽時之秒,時,日)。

力學上所謂質點(point matériel),乃如此其小之質量,至可假想其爲一幾何學上之點,俾所生之誤差,對於測量之誤差尤小而可忽略者。

物體可視爲質點之集團。在流體內(氣體或液體)此等質點可彼此移動,在不變形之固體內,假想質點間之距離爲常定不變。其實宇宙間無不變形之固體,一切物體皆變形。但以近似論,可假設變形甚小之固體爲不變形者。

因此,動學之研究分爲數部:即點之動學,與系之動學,所謂系即諸點所成之系。後者又可分爲不變形之固體的動學,與變形之流體的動學。

本書僅討論點之動學,且略論固體動學。

9.(附)運動之相對性 所謂一物體在運動中,即指此體上之一點,對於他一體(S)上各點之距離隨時間而改變也。故運動觀念之產生,端賴一比較系統之存在。例如言一蠅在室飛行,即以牆壁地板爲比較系統(S),而表明蠅與此等平面之距離隨時間而改變也。

若更改比較系統,則運動之種類亦異。例如蠅在火車的車輛內飛行,其運動視比較系統之爲車輛板壁(S),或爲某車站(S′),而儼然不同。若蠅息於車輛之板上,則對於車輛爲靜止,對於車站(S′)爲運動。

因此,吾人當研究比較系統之改變一問題,通常以附麗於此系統(S)內的三直交坐標軸,表此系統(S)。

第二章

點之動學——速度

10. 軌道——運動之方程式 一質點運動所成之曲線,稱曰**軌道**(trajectoire)。

若軌道爲直線,稱爲**直線動**(mouvement rectiligne),若軌道非直線,則爲**曲線動**(mouvement curviligne)。

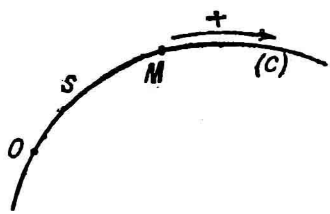
自某一霎時間起,計時之數 t 已定,則質點M之位置亦定。設此點對於比較系統,其坐標爲 x, y, z, 則此三數乃時間 t 之函數:即

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=h(t)$$

是爲**運動之方程式**(équations du mouvement)。

設軌道(C)爲已知,可以下法定動點之位置:

在(C)曲線上(圖 14)選一進行之方向(圖中以箭頭表之),稱曰**正方向**。



(圖 14)

取O爲曲線上之原點。

曲線上之一點M之位置,將視一數 s 而定,此 s 之值即表OM弧之長。至其號之正負,則視由O至M進行之向爲正或負而定。此數 s 稱爲M點之**弧坐標**(abscisse curviligne)。

一點M在曲線(C)上運動,此數 s 乃時間 t 之函數,有

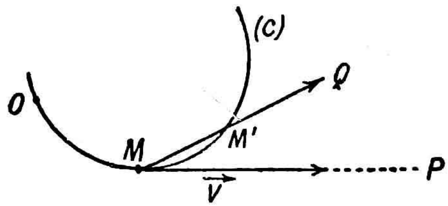
$$s=F(t)$$

稱爲軌道上之運動的方程式。

11. 速度之向量——速度之代數值——

設M爲動點在 t 時之位置,M' 爲其後 $t+\Delta t$ 時之位置;Δt 爲正。(圖15)

設想有他一動點,在 MM' 弦上由M至 M',作等速動,與第一動點同時經過此 M, M' 二點;此等速動速度爲 $\frac{MM'}{\Delta t}$。在 MM' 弦上作一有向量 $\overrightarrow{MQ}$ 與 $\overrightarrow{MM'}$ 同方向,但其量爲 $\frac{MM'}{\Delta t}$。此有向量稱爲所論之運動在 Δt 時內之**平均速度**。



(圖 15)

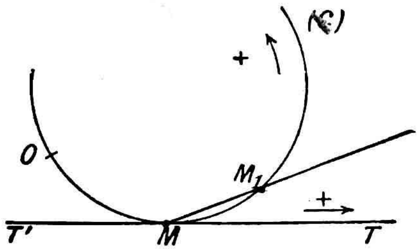
使 Δt 縮小以至於零,半直線MQ之極限位置便爲半直線MP,即在M點軌道(C)之切線。$\overrightarrow{MQ}$ 之長有一極限值,因

$$\frac{MM'}{\Delta t}=\frac{MM'\text{弦}}{MM'\text{弧}}\cdot\frac{MM'\text{弧}}{\Delta t}$$

弦與弧之比之極限值爲1,而 $\frac{MM'\text{弧}}{\Delta t}=\left|\frac{\Delta s}{\Delta t}\right|$,$s$ 與 $s+\Delta s$ 乃M及 M' 點之弧坐標,其極限爲 $\left|\frac{ds}{dt}\right|=\left|F'(t)\right|$。此處假設軌道上之運動的方程式爲 $s=F(t)$ 故MQ之極限值爲 $|F'(t)|$。

如是有向量$\overrightarrow{MQ}$之極限爲$\overrightarrow{V}$,其原點爲M,在半直線MP上,而其量V等於$\left|\frac{ds}{dt}\right|$。當$\Delta t$縮小而爲零時,有向量$\overrightarrow{MQ}$可鄰近於$\overrightarrow{V}$,有如意想之所欲者。於是$\overrightarrow{V}$稱爲M點在$t$時之**速度的有向量**(vecteur vitesse)。其大小與位置,通常隨時間而異。若V之量爲常數,則運動爲**等速**(uniforme)。

茲於曲線(C)在M點之切線上,定一正方向。設M與M_1爲曲線上之二點,其弧坐標爲s與$s+\Delta s$,Δs爲正(圖16)半直線MM_1之極限位置爲MT,稱爲正半直線。由M至T之方向乃切線T′T之正方向



(圖 16)

若$\frac{ds}{dt}$爲正,s隨t而增,在曲線(C)上M′與M_1在M之同旁,半直線MP與MT疊合,有向量$\overrightarrow{V}$具切線之正方向。若$\frac{ds}{dt}$爲負,M′與M_1在M之旁;半直線MP與MT′疊合,有向量$\overrightarrow{V}$具切線之負方向。$V=\frac{ds}{dt}$一數乃$\overrightarrow{V}$在T′T軸上之代數值,稱爲**速度之代數值**。

注意　在實際生活裏,速度一字常用以表速度有向量之量,蓋通常對此有向量之方位與方向或已明顯,或不注意

及之也。例如常言火車之速度,飛機之速度

分速度 若M之坐標爲x,y,z, M′之坐標爲$x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z$, 則 MM′ 間平均速度之有向量的分量爲: $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z}{\Delta t}$ 此三比之極限值爲:

$$\frac{dx}{dt}=f'(t), \quad \frac{dy}{dt}=g'(t) \quad \frac{dz}{dt}=h'(t)$$

此卽速度有向量$\overrightarrow{V}$之分量簡稱分速度。若作一有向量$\overrightarrow{V}_1$原點爲M,其分量爲此三數,則$\overrightarrow{MQ}$可與之相近至如意願之所欲者,故$\overrightarrow{V}_1$乃$\overrightarrow{MQ}$之極限,而與$\overrightarrow{V}$相疊合.

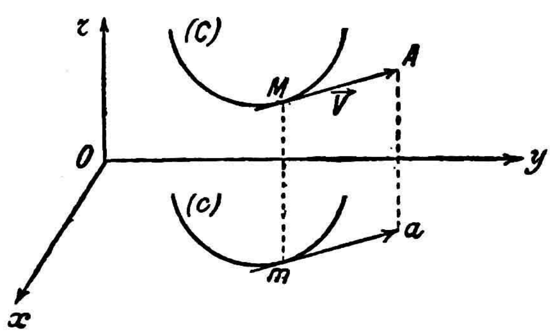
因此分速度,乃各坐標對於時間之引數(dérivée)。

注意 I 藉其分量,求V之大小。

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

故有下式 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$

注意 II 設m爲M在xy平面上之射影(圖17)。當M在



(圖 17)

其軌道(C)上進行時,其射影 m 亦在其軌道(c)上進行,(c)即(C)在 xy 平面上之射影。m 點之運動稱曰**射影運動** (mouvement projeté)。m 點之坐標爲

$$x=f(t),\quad y=g(t),\quad z=0$$

故其分速度爲

$$\frac{dx}{dt}=f'(t),\quad \frac{dy}{dt}=g'(t),\quad \frac{dz}{dt}=0$$

即 $\overrightarrow{\mathrm{V}}$ 投射於 xy 平面上所得之有向量的分量。故:

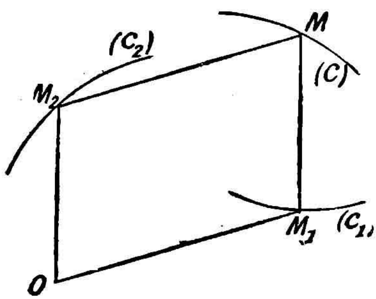
投射某運動於一平面上,在 t 時其射影之速度,乃彼時速度有向量之射影。

投射 M 點於 x 軸上時,亦有此性質故:

投射某運動於一直線上,射影運動之速度乃速度有向量在此直線上之射影。

注意 III　若 x, y, z 表斜坐標,射影亦爲斜投射時,上述之結果不變,表分速度之諸式相同。

注意 IV　設 M_1 與 M_2 兩點各沿其軌道 (C_1) 與 (C_2) 運動,(圖 18) 又設 $\mathrm{M}_1\ (x_1, y_1, z_1)$ 與 $\mathrm{M}_2\ (x_2, y_2, z_2)$爲二動點在 t 時之位置。



(圖 18)

設 M 爲建造於 OM_1 與 OM_2 上之平行四邊形之第四頂點,

O 表坐標軸之原點。於是 M 作一軌道(C)。求證在 t 時 M 點之速度,乃彼時 M_1 與 M_2 之速度之幾何和。

因　$x=x_1+x_2,\quad y=y_1+y_2,\quad z=z_1+z_2,$

故　$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx_1}{dt}+\frac{dx_2}{dt},$$

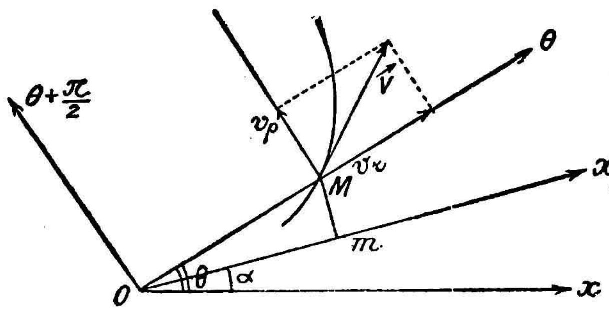
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy_1}{dt}+\frac{dy_2}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dz_1}{dt}+\frac{dz_2}{dt}.$$

12. 平面運動——極坐標　設有一平面軌道及二坐標軸 Ox, Oy, 分速度為 $\frac{dx}{dt}$ 與 $\frac{dy}{dt}$。

但平面上之一點,有時以其極坐標 r 與 θ 表之。在每時 t, 若知動點之 r 與 θ 二值,則此動點之軌道為斷定,故 r 與 θ 二坐標乃時間 t 之函數 $r(t)$ 與 $\theta(t)$。

對於極坐標,為便利計,速度有向量以其分量 V_r 及 V_p 表之,V_r 在成極角 θ 之徑上,V_p 在成極角 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 之徑上。



(圖 19)

欲求此二分量,過極點O作一軸Ox_1,其極角為α,而求在Ox_1上之速度的分量,即求M點在Ox_1上之射影m點的速度。此m點之坐標為$x_1=r\cos(\theta-\alpha)$,故

$$Vx_1=\frac{dx_1}{dt}=\frac{dr}{dt}\cos(\theta-\alpha)-r\sin(\theta-\alpha)\frac{d\theta}{dt}$$

欲求v_r及v_p先使Ox_1與θ軸相重合$(\alpha=\theta)$然後與$\theta+\frac{\pi}{2}$軸相重合$\left(\alpha=\theta+\frac{\pi}{2}\right)$於是

$$v_r=\frac{dr}{dt},\qquad v_p=r\frac{d\theta}{dt}$$

注意 I　求速度V之大小。

因　$v^2=v_r^2+v_p^2$

故　$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

以dt^2乘兩端,而有下式,

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2$$

求軌道上之切線與向徑θ間之角U,此即速度有向量與此向徑所成之角,而tg U乃此速度有向量對於此向徑之傾斜率(pente),故:

$$\operatorname{tg} U=\frac{v_p}{v_r}=\frac{r\frac{d\theta}{dt}}{\frac{dr}{dt}}=\frac{rd\theta}{dr}$$

若U在軌道上任何處均為零,則$d\theta$為零,而θ為常數,軌道為一向徑。故若平面軌道上,各點之速度過一定點O時,則

此軌道爲過O點之直線。

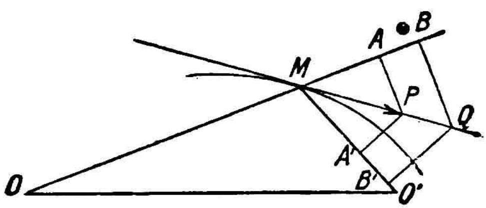
注意II 隨 Ox 及 Oy 之分速度爲

$$V_x=\frac{dx}{dt}=\frac{d(r\cos\theta)}{dt}$$

$$V_y=\frac{dy}{dt}=\frac{d(r\sin\theta)}{dt}$$

於此可將分量爲 V_x 及 V_y 之有向量,投射於其相當之向徑上,而求 V_r 及 V_p。若一有向量隨向徑O與 $\frac{\pi}{2}$ 之分量爲 $\frac{d(r\cos\theta)}{dt}$ 與 $\frac{d(r\sin\theta)}{dt}$,則其分量之隨向徑 θ 及 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 者爲 $\frac{dr}{dt}$ 與 $r\frac{d\theta}{dt}$.

注意III 已知一平面軌道與此平面上之一定點O,隨由O點射出之向徑上之分速度爲 $\frac{dr}{dt}$。若另選一定點O',隨此新向徑上之分速度爲 $\frac{dr'}{dt}$, r' 表新向徑。(圖20) 已由 $\frac{dr}{dt}$ 及 $\frac{dr'}{dt}$ 時,求速度有向量。只須在OM及O'M二向徑上,作MA及MA'等於 $\frac{dr}{dt}$ 及 $\frac{dr'}{dt}$,過A及A'點作與向徑之正交線,則此二線交於速度有向量之終點P。



(圖 20)

當M點作一曲線時，從O及O′二點發出之二向徑之間有$\varphi(r, r')=0$之關係，因若知r，則曲線上之M點固定，故若知r則r'即定。$\varphi(r, r')=0$稱爲對於雙極坐標(coordonnées bipolaires)之曲線的方程式。例如橢圓的方程式爲$r+r'=2a$，$2a$表長軸之長，O及O′爲橢圓之焦點。

若已知曲線在雙極坐標的方程式，則可利用此理求曲線的切線。只須假想曲線爲一軌道，於二向徑上取MA與MA′使其等於$\frac{dr}{dt}$與$\frac{dr'}{dt}$(圖20)，或作MB與MB′使其等於dr與dr'再從B與B′作正交於OM及OM′二向徑之二直線，此二直線相交於Q點，則MQ即爲所求之切線。因$\overline{\mathrm{MB}}$及$\overline{\mathrm{MB}'}$與$\overline{\mathrm{MA}}$及$\overline{\mathrm{MA}'}$成比例，BQB′及APA′對於M爲相似形，故P與Q二相當點與M同在一直線上。

例如：於橢圓有

$$dr+dr'=0.$$

MB與MB′同值而異號，設取$\overline{\mathrm{MB}}=+1$，$\mathrm{MB}'=-1$於此MBQ與MB′Q二三角形爲全相等，故切線爲二向徑間之外二等分角線。

反之若一曲線之切線外分二向徑間所成之角，則$\overline{\mathrm{MA}}$及$\overline{\mathrm{MA}'}$爲相等而相對，故

$$dr+dr'=0,$$

即　$$r+r'=\text{常數},$$

而曲線爲橢圓

讀者可應用此法,於下列諸曲線:

$$r-r'=0 \quad (\text{雙曲線})$$

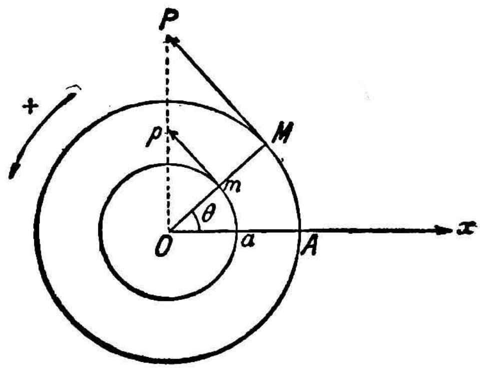
$$r+nr'=a \quad (\text{Descartes 氏之卵形曲線})$$

$$rr'=k^2 \quad (\text{Cassini 氏之卵形曲線})$$

n, a, k 皆係常數

圓運動——角速度 平面運動之軌道爲圓周者爲圓運動(mouvement circulaire)。

設R乃中心爲O之圓半徑,θ爲半徑OM與一定方向Ox所成之角,M爲動點在t時之位置。(圖21)設Ox與圓周相交之點A,爲計弧之起點,圓周上之正方向乃θ角之正方向。於是有$s=R\theta$,因此$V=\frac{ds}{dt}=R\frac{d\theta}{dt}$



(圖 21)

有向量$\overrightarrow{V}$或$\overrightarrow{MP}$乃圓周上M點之切線,其方向爲運動之方向,其量爲$R\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$。

若取M點之極坐標R與θ,亦得同樣之結果爲:

$$V_r=0, \quad V_p=R\frac{d\theta}{dt}.$$

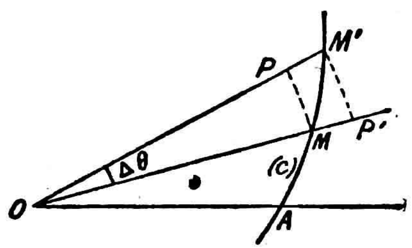
半徑OM與R半徑爲1之同心圓相交於m點。m之極坐標爲$(1,\theta)$，其速度爲$1\times\frac{d\theta}{dt}$，$\overrightarrow{mp}$與$\overrightarrow{MP}$平行而同向，$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{Rmp}$。

$\omega=\frac{d\theta}{dt}$一數，稱爲M之角速度(vitesse angulaire)。

若運動爲等速，則ω爲常數，其逆理亦然。於是半徑所轉過之角，與旋轉所須之時爲正比。

例如某車站之鐘其針的長爲 2 粎。若以秒爲時之單位，則角速度爲$\frac{2\pi}{60^2}$若以粎爲長度單位，則長針極端之速度爲$\frac{4\pi}{60^2}$，卽約爲每秒3,5粍。通常記爲 3,5 粍/秒 (mm/s)，以表所用之長度與時之單位。

13. 面積速度 設M爲動點在平面軌道(C)上t時之位置，而A爲$t=0$時之位置。(圖 22) AOM扇形之面積S，稱爲向徑所掃過之面積；S爲時間t之函數，其對t之引數稱曰**面積速度**(vitesse aréolaire)。面積速度之觀念，在研究在行星運動上，甚爲重要。



（圖 22）

欲求此速度設 M 及 M′ 爲動點在 t 與 $t+\Delta t$ 時之位置 ($\Delta t>0$)；設 (r,θ) 與 $(r+\Delta r,\theta+\Delta\theta)$ 爲其對於以O爲極點之極軸的極坐標。增量 ΔS 等於扇形 MOM′ 之面積。

假設在 MM′ 弧上面向徑 OM 常隨一方向而變，例如常增，面積 ΔS 介於扇形 OMP 與 OM′P′ 之面積 $\frac{1}{2}r^2\Delta\theta$ 與 $\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta$ 之間：

$$\frac{1}{2}r^2\Delta\theta<\Delta S<\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\Delta\theta,$$

以 Δt 除之得

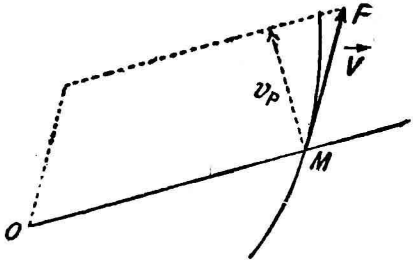
$$\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}<\frac{\Delta S}{\Delta t}<\frac{1}{2}(r+\Delta r)^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

Δt 近而爲零時，$\Delta\theta$ 亦趨近於零，但 $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 趨近爲 $\frac{d\theta}{dt}$，雙不等式之兩端，趨近其極限爲 $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$。故 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 之極限爲：

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

上列之證法內假想 θ 爲正，但在一般情形皆然。當向徑向極角之正方向轉時，則其掃過之面積爲正，反之則爲負。

取向徑之爲 $\theta=0$ 與 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 者爲 Ox 與 Oy 軸，$r^2\frac{d\theta}{dt}$ 乃代表在正交於平面之 Oz 軸上速度有向量 $\overrightarrow{V}$ 對於O點之矩；因 $r^2\frac{d\theta}{dt}=r\times v_p$ 乃建於 $\overrightarrow{OM}$ 及 $\overrightarrow{V}$ 上之平行四邊形的面積，至其符號則視 $\frac{d\theta}{dt}$ 而定。面積速度乃此數之半。(圖23)

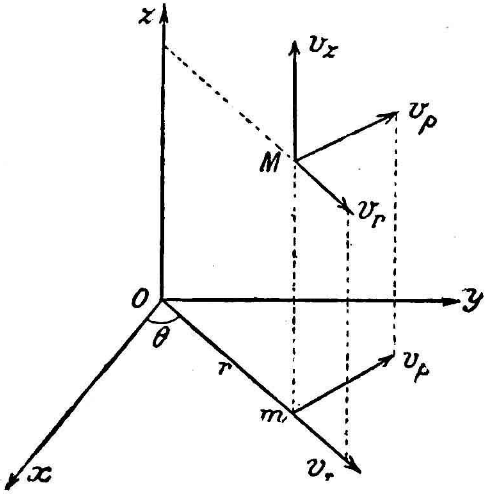


（圖　23）

但 $\vec{V}$ 在 Ox, Oy 上之分量爲 $\frac{dx}{dt}$ 與 $\frac{dy}{dt}$，其對於 O 點之矩，在 Oz 上，其值爲 $x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}$ 故於戴氏坐標 (coordonnées cartésiennes 卽三直交坐標)，面積速度爲：

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

14. 半極坐標或柱坐標　空間之一點 M，常以其對於



（圖　24）

xy 平面之高 z 與其在此平面上之射影的極坐標 r 及 θ 定之(圖 24)。r, θ, z 三數稱爲 M 點之半極坐標或柱坐標 (coordonnées semi-polaires ou cylindriques)。當 M 運動時, r, θ, z 皆爲時間 t 之函數。

M 之速度爲其分量 V_z, 與過 M 點平行於 xOy 之平面上之分量而定。

此後一分量乃等於 M 點在 xOy 上之射影 m 的速度, 又可以其分量 V_r 及 V_p 定之。過 M 點平行於此三分量作線, 可見 M 點之速度之分量在直交之三方向上, 即 xOy 平面上之向徑爲 θ 與 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 二方向, 及 Oz 一方向。此等分量之值爲:

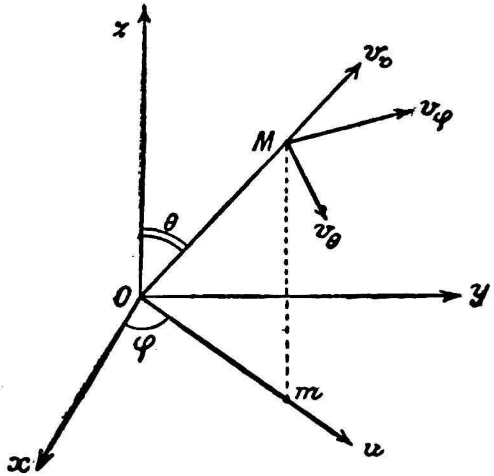
$$V_r=\frac{dr}{dt}, \quad V_p=r\frac{d\theta}{dt}, \quad V_z=\frac{dz}{dt}$$

注意 求速度之值。

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

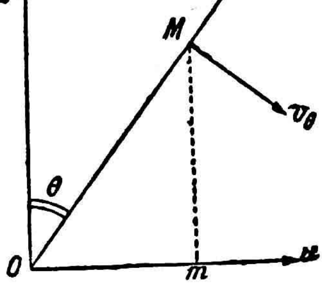
由是 $$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+dz^2$$

15. 空間之極坐標 空間之一點 M 可以其極坐標 (coordonnées polaires) r, φ, θ 定之。向徑 (rayon vecteur) r 表示 OM 線段之長, 其符號則視與在 OM 直線上之 $O\mu$ 軸的方向同異而定正負 (圖 25), 經度 (longitude) φ 乃 zOM 平面與 zOx 定平面間之角度, 餘緯度 (colatitude) θ 乃 $O\mu$ 軸與 Oz 軸間之角度。當 M 點運動時, r, φ, θ 皆爲時間 t 之函數。



（圖 25）

速度於此,亦可以其在三正交之方向上的分量而定。在 $O\mu$ 軸上之分量爲 v_r。在 zOM 平面上,隨向徑爲 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 向上之分量爲 v_θ。在 zOM 平面之垂直線上平行於 xOy 平面上,向徑之爲 $\varphi+\frac{\pi}{2}$ 角者,其分量爲 $v\varphi$。此最後之一分量,等於M點在



（圖 26）

xOy平面上之射影m的分速度即m點在向徑爲$\varphi+\frac{\pi}{2}$者之上的分速度其值爲

$$\overline{Om}\frac{d\varphi}{dt}=r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

在zOM平面上作Ou及Oz二軸,(圖26) v_r及v_θ乃在向徑之爲θ及$\theta+\frac{\pi}{2}$二直線上。

因$\overline{Om}$, φ, z乃M點之半極坐標,故於上節已算出在Oz與Ou上之分速度,即

$$\frac{dz}{dt}=\frac{d(r\cos\theta)}{dt}$$

$$\frac{d\overline{Om}}{dt}=\frac{d(r\sin\theta)}{dt}$$

但據12節之注意II,在此情形下v_r及v_θ二分量爲

$\frac{dr}{dt}$與$r\frac{d\theta}{dt}$,由此得

$$v_r=\frac{dr}{dt}\qquad v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}\qquad v_\varphi=r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

注意 求速度之值。

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

於是 $$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2$$

16. 結論 總之,在某時之速度有向量,給吾人以此時附近之瞬息間內運動之概念。若將軌道與其切線相混,則速

度有向量即表運動之位置與方向。若使運動與等速動相混,則速度有向量之數值,表示此等速動之速度。

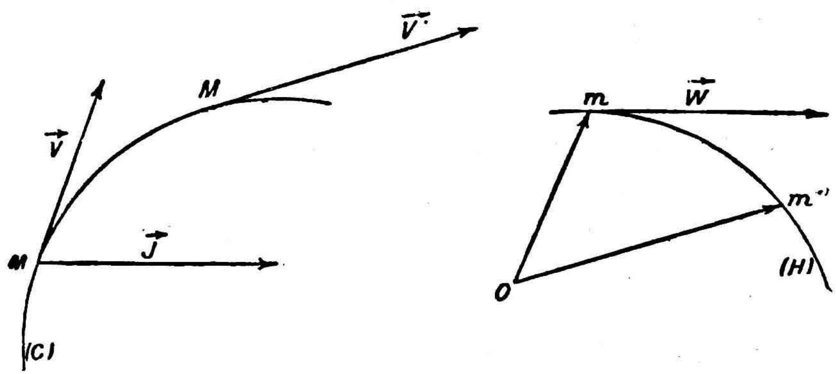
但於此須知長度及時間之單位,否則表速度大小的數字毫無意義。

第三章

速度圖與加速度

17. 加速度有向量之定義　一點M在軌道(C)上運動而欲研究其速度有向量之改變。過一定點O作$\overrightarrow{Om}$等於M點之速度$\overrightarrow{V}$;當M變動時,m作一軌道(H),是爲M之速度圖(hodographe)。

當t時動點在M之位置,m在速度圖上有一速度有向量爲$\overrightarrow{W}$。以M爲原點作與$\overrightarrow{W}$相等之有向量$\overrightarrow{J}$,稱爲t時M點運動之加速度(accélération)(圖 27)



(圖 27)

分有向量　設O爲坐標軸之原點,m點之坐標爲:

$$\frac{dx}{dt}=x', \qquad \frac{dy}{dt}=y', \qquad \frac{dz}{dt}=z';$$

m 點之分速度爲

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=x'',\quad \frac{dy'}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=y'',\quad \frac{dz'}{dt}=\frac{d^2z}{dt^2}=z''$$

故加速度 $\overrightarrow{J}$ 之分量簡稱分加速度 (composantes de l'accélération)乃坐標對於時間之二次引數。

此等分加速度之公式對於橫坐標軸亦然。

於此可得關於射影運動之射影於一平面或一軸上之諸定理,在加速度亦與在速度,即與上章所得者相同。

注意 I　爲 $\overrightarrow{V}$ 及 $\overrightarrow{J}$ 二有向量所定之平面 P 完全由曲線 (C) 決定,與運動之法則無關,無論運動之法則如何,此平面不改。

(證) Om 諸線造一頂點爲 O 之錐體,稱爲 (C) 曲線之切線的方向錐 (cone directeus)。由母線 (génératrice) Om 與在此錐面上所畫之曲線 (H) 的切線 $\overrightarrow{W}$ 所定之平面,乃錐體沿 Om 上之切平面。無論運動之法則如何,此平面不改變,故與此平行之 $\overrightarrow{V}$,$\overrightarrow{J}$ 平面亦不改變。

沿 Om 在方向錐上之切平面乃過鄰近二母線之平面 $m\,Om'$ 之極限的位置。故 $\overrightarrow{V}$,$\overrightarrow{J}$ 平面乃過 $\overrightarrow{V}$ 而與鄰近一點 M' 之速度 $\overrightarrow{V'}$ 平行,當 M' 與 M 相重時之平面的極限位置。

此平面稱爲曲線(C)在 M 點之密切面(plan osculateur)

以上蓋假設 $\overrightarrow{V}$ 與 $\overrightarrow{J}$ 二有向量定一平面。有時曲線 (C) 上,有特別之點,在此點 $\overrightarrow{V}$ 與 $\overrightarrow{J}$ 二有向量同在一直線上。若(C)

上各點皆有此特別情形,則此曲線上(C)乃一直線。因於此情形,曲線(H)各點之切線均經過一定點O,使(H)投射於過O點之平面(P)上為(H_1),則(H_1)各點之切線均過O點,由上(§12注意一)知(H_1)為過O之一直線。同理(H)在過O點之另一平面(P')上之射影亦為過O點之直線。故(H)在過O點任何二平面(P)及(P')上之射影為過O點之直線。則其自身亦必為過O點之直線,即投射於(P)及(P')之二投射平面的交線也。

由上可見曲線(C)各點之切線常有一定之方向。此曲線在任一平面(Q)上之射影(C_1)亦然。故(C_1)為一直線平行於定方向之射影,因在(Q)上(C_1)之縱坐標(視為橫坐標之函數)的引數為一常數。以對於(H)之同一理解,可見(C)為一直線。

總之,只於直線運動加速度與速度常在同一直線上。

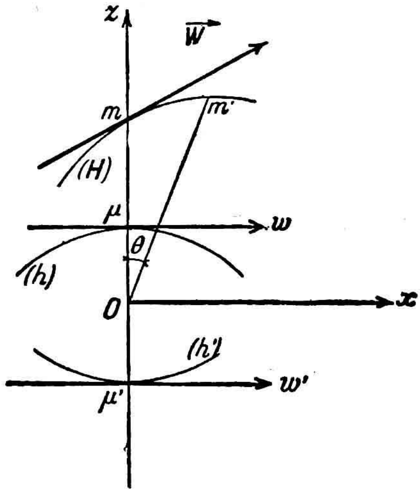
注意II　若運動為等速,Om之長為常數;速度圖為畫於半徑為V之球上的曲線。此曲線即此球與平行於速度諸半直線所造之錐體的交線。若更假設軌道為平面,則速度圖為圓。

在等速運動,曲線(H)既為一球面曲線,此曲線之切線即球之切線,因此與Om正交。故$\overrightarrow{V}$及$\overrightarrow{J}$二有向量正交。

反之,若加速度常與速度為正交,則運動為等速。因m點之速度$\overrightarrow{W}$在Om上之射影為零。但此射影在曲線(C)之切線

的正方向上之值爲 $\frac{dv}{dt}$，故 $\frac{dv}{dt}=0$，而 v 爲常數。

特設 $v=1$；則軌道上之運動方程式爲 $s=t_0$，因此速度圖 (h) 畫於中心爲 O 半徑爲 1 之球面上。與 M 點相應之一點 μ 上之速度 $\overrightarrow{\mu w}$ 定一方向 MN，與曲線正交，且在密切面上。此方向稱爲曲線(C)在 M 點之**主法線** (normale principale) 的正方向，此正方向與曲線 (C) 上所選之正方向無關。因若改 (C) 之弧的正方向，新運動 $s=t$ 與前者爲反向，而新速度圖 (h') 與舊速度圖將對於 O 點爲對稱(圖 28)。



（圖 28）

若 $\overrightarrow{\mu' w'}$ 爲與 M 相應之 μ' 點的速度。μ 與 μ' 對於 O 點爲對稱；μ 此時在 (h) 上之移動與以前之方向相反，其速度與 $\overrightarrow{\mu w}$ 相反，故與此對稱之 μ' 點之速度爲 $\overrightarrow{\mu w}$。

曲線 (C) 在 M 點之切線分密切面爲兩半平面，其一含

正方向的半法線,特稱曰**正向主法線**(demi-normale principale positive)。曲率心(centre de courbure)即在此半直線上。

注意III 加速度常在含正向主法線之半平面內,換言之即常在軌道之凹的一面。

(證)設 v 爲正;$\frac{ds}{dt}$ 爲正,s 隨 t 而增,M向(C)之正方向移動;μ 與 m 在O之同旁,在(h)及(H)曲線上,μ 及 m 點之速度在方向錐之切平面上 $\mu' O\mu$ 直線之同旁。若 $v=\frac{ds}{dt}$ 爲負,μ' 與 m 在O之同旁,$\overrightarrow{W}$ 及 $\overrightarrow{\mu' w'}$ 亦在 $\mu O \mu'$ 之同旁。總之 $\overrightarrow{W}$ 常在同一之半平面上。

因此,有向量之爲加速度在曲線(C)之法線上之射影者,常在正向主法線之上。

18. 切線加速度與法線加速度 投射加速度有向量 $\overrightarrow{J}$ 於(C)上M點之切線及主法線之上。

γ_t 一數乃 $\overrightarrow{J}$ 在切線正向之射影稱曰**切線加速度**(accélération tangentielle)。γ_n 乃 $\overrightarrow{J}$ 在主法線正向之射影,稱曰**法線加速度**(accélération centripète)。據前註此數常爲正。

故切線加速度與法線加速度係數值,而非有向量。

欲求其值,試取切線之正方向 $O\mu$ 爲 z 軸,平行於主法線 μw 之方向爲 x 軸,速度圖(H)之一點 m' 可以其極坐標 v, θ, φ 定之。切線加速度乃 m 點速度在向徑 Oz 上之射影,其值爲 $\frac{dv}{dt}$。法線加速度乃同一速度在 zOx 平面上向徑之爲 $\theta+\frac{\pi}{2}$

者上之射影,其值爲 $v\frac{d\theta}{dt}$。

$$但\quad \frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\frac{1}{\rho}v,$$

$\frac{1}{\rho}$表 (C) 在 M 點的曲率 (courbure)。因 $d\theta$ 爲二相鄰正切線間之角, ds 乃其間之弧的長度: 據定義 $\frac{d\theta}{ds}$ 乃 M 點之曲率,故:

$$v\frac{d\theta}{dt}=\frac{v^2}{\rho};$$

因此

$$\gamma_t=\frac{dv}{dt},\quad \gamma_n=\frac{v^2}{\rho}。$$

可見切線加速度與運動有關,而與軌道之形狀無關;法線加速度與運動及軌道之幾何的性質皆有關係。

若 $\gamma_t=0$, 加速度常與軌道正交, 即 $\gamma_t=\frac{dv}{dt}=0$,故 v 爲常數, 運動爲等速。若 $\gamma_n=0$, 加速度常與軌道相切;吾人已知此運動爲直線動。但亦可由下推之;若 $\gamma_n=0$ 則 $\frac{1}{\rho}=0$,即一曲線上到處之曲率爲零,故此曲線爲一直線。

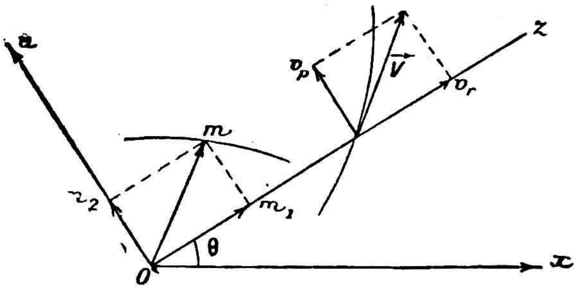
注意　吾人可將切線加速度公式稍改變,使其表面上不含有時間;

$$\gamma_t=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v\frac{dv}{ds},$$

或

$$\gamma_t=\frac{1}{2}\cdot\frac{dv^2}{ds}$$

19. 平面運動——加速度在極坐標上之分量 即以極點爲O之極坐標,作速度圖。有向量$\overrightarrow{Om}$乃$\overrightarrow{Om_1}$及$\overrightarrow{Om_2}$之和(圖29)$\overrightarrow{Om_1}$在極角爲θ之Oz軸上,其值爲$\frac{dr}{dt}$,$\overrightarrow{Om_2}$在極角爲$\theta+\frac{\pi}{2}$之Ou軸上,其值爲$r\frac{d\theta}{dt}$。m點之速度$\overrightarrow{W}$乃m_1及m_2二點之速度的幾何和。試求此二速度在Oz及Ou上之分量。



(圖 29)

m_1之極坐標爲$\frac{dr}{dt}$與θ,故其速度之分量爲:

$$\frac{d^2r}{dt^2}\ (\text{在}\ Oz\ \text{上})\quad \frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\ (\text{在}\ Ou\ \text{上})$$

m_2之極坐標爲$r\frac{d\theta}{dt}$及$\theta+\frac{\pi}{2}$,故其速度之分量爲在Ou上爲$\frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)$,在極角之爲$\theta+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\theta+\pi$之軸上者爲$r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\frac{d\theta}{dt}$,

即在Oz上爲

$$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\quad \text{在}\ Ou\ \text{上爲}\ \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

將此在Oz上Ou上二分量各相加即得加速度$\vec{J}$之分量爲

$$\gamma_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$\gamma_p = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

γ_p之值可改書爲他一形狀:

$$r\,\gamma_p = r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{dr^2}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

即

$$r\,\gamma_p = \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\gamma_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

由是分量γ_p與面積速度

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

有關係。

20. 向心加速度之運動——面積定律 若面積速度爲常數,即$r^2\frac{d\theta}{dt}$爲常數,而γ_p爲零,則加速度常在OM向徑上;反之設於平面運動,加速度常在向徑之上,於是有:

$$\gamma_p = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C\ (爲常數)$$

面積速度為常數;即當運動時向徑所掃過之面積,與其掃過所須之時為比例。常數C表單位時間內掃過之面積之二倍稱為**面積常數** (constante des aires)。即等於建在速度有向量與向徑上之平行四邊形的面積。此運動稱為**遵守面積定律**(loi des aires)。

若在軌道上之一點速度與加速度同在一直線上,換言之若速度過O點,即C為零;$\frac{d\theta}{dt}$常為零,而運動為直線動。

若C不為零,$\frac{d\theta}{dt}$常保存一種符號(正或負),故若運動遵照面積定律,則向徑常向同一方向轉動。

若加速度有向量所在之直線常過一定點O,則運動稱為**向心加速度之運動**(movement a accélération centrale);此定點O稱為**加速度之心**(centre des accélérations)。由是可見運動若係平面的,且圍繞一點O,遵循面積定律時,則其加速度為向心的,而O點為加速度之心。反之,可宣佈下列之定理。

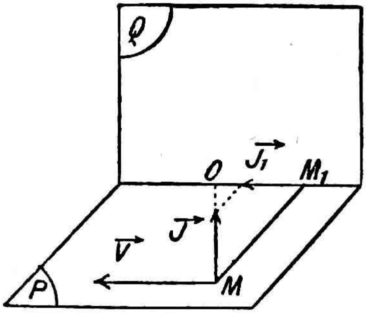
〔定理〕 對於向心加速度之運動,軌道係平面的,且此運動遵守面積定律。

(證)設O為加速度之心,$\vec{V}$不常過O點,否則軌道為過O之直線。設M為軌道(C)上之一點,在此點上,$\vec{V}$與$\vec{J}$定一平面(P)。

使曲線(C)投射於過O而與平面(P)正交之平面(Q)上,設M_1為M之射影。(圖30)

(C)之射影(C_1)乃一平面曲線M_1經行於(C_1)上之加速

度$\overrightarrow{J_1}$常經過O點因$\overrightarrow{J_1}$爲$\overrightarrow{J}$之射影,而$\overrightarrow{J}$常經過O點也。又對於(C_1),面積常數爲零,因在M_1點之速度乃$\overrightarrow{V}$之射影,經過O點。故(C_1)乃一直線,即(P)與(Q)二平面之交線;由是(C)爲在(P)上之平面曲線,而在此平面上,曲線係照面積定律而作成。是故$\overrightarrow{V}$與$\overrightarrow{J}$非在一直線上,而平面(P)乃(C)上任一點之速度與加速度二有向量所定。



(圖 30)

結果　設於某軌道(C)加速度常與一定直線Δ相遇。則(C)在垂直於Δ之平面(P)上之正射影,將照面積定律而作成。因加速度在(P)上之射影常過一定點即Δ與平面(P)之交點。

同理,設一運動之加速度與二定直線Δ及Δ′相遇,(C)在一垂直於Δ又一垂直於Δ′之二平面上之射影,皆照面積定律而作成。

21. 柱坐標之加速度的分量　設r, θ, z乃軌道上一點M之柱坐標。則在M點之加速度與Oz平行向之分量爲

$$\gamma_z=\frac{d^2z}{dt^2}$$

欲求他二分量,只須計算M點在xy平面上之射影,於是有

$$\gamma_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad \gamma_p=\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)。$$

22. 運動之舉例——I 圓運動 在此情形有:

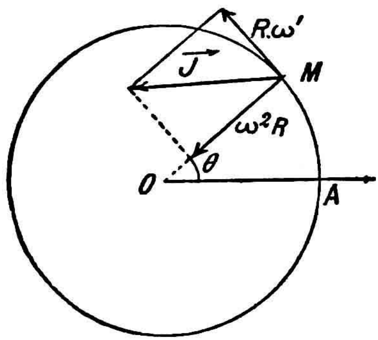
$$r=\mathrm{R}, \qquad \frac{d\theta}{dt}=\omega$$

R 表圓之半徑, ω 表角速率。於是

$$\gamma_r=-\omega^2\mathrm{R} \qquad \gamma_p=\mathrm{R}\frac{d\omega}{dt}=\mathrm{R}\omega'$$

ω' 稱爲運動之**角加速度**(accélération angulaire)。

若運動爲等速,ω' 爲零,加速度與軌道正交,在半徑上而其值 $\omega^2\mathrm{R}$ 爲一常數。於是速度圖爲一圓周,其半徑爲 $\omega\mathrm{R}$,其角速度亦爲常數 ω。



(圖 31)

例如有一半徑爲 2 米之飛輪,在尋常狀態下作每分鐘 80 轉之等速運動。當開動時由靜止起速度與時成正比而增加,達至尋常等速速度,共歷過 90 秒之久。

設以米爲長度之單位,弧度(radian)爲角之單位,秒爲時之單位,在尋常狀態下,角速度爲 $\frac{160\pi}{60}=8.38$,飛輪周上之一點M之速度爲

$$8.38\times2=16.76 \text{ 米/秒}$$

角加速度爲零;M點之加速度垂直於飛輪之周,其值爲:

$$(8.38)^2\times 2=140.45\ 米/秒$$

當開動時卽由靜而至等速動之期間，ω' 爲常數，因 ω 與時爲正比，$\omega'=\frac{8.38}{90}=0.093$；飛輪周上之一點的切線加速度爲常數，等於 $0.093\times 2=0.19$ 米/秒^2。至於法線加速度從 0 起而增至最後値爲 140.45 米/秒^2 與經過之時間的平方成比例，因 ω 與此時間成比例也。加速度有向量起始極與切線相近，漸趨近於飛輪之半徑。

II. **簡諧運動**　設一點M在半徑爲 a 之圓周上作等角速度 ω 之運動，又設P爲M點在圓之定直徑 Ox 上之射影，則P點之運動稱爲簡諧運動(mouvement vibratαire simple)。凡與P照此同一定律運動之點，稱爲作簡諧動。

設 φ 爲半徑OM在0時與正交於 Ox 之 Oy 軸所成之角，在 t 時此角爲 $\theta=\omega t+\varphi$。於是：

$$x=\overline{OP}=OM\sin\theta=a\sin(\omega t+\varphi)$$

動點在直徑 Ox 之兩端A,A'之間作無限的往復運動。當 ωt 增加 2π，卽當 t 增 $\frac{2\pi}{\omega}=T$ 時，x 再有同前之値，卽動點復其原位置；而速度與加速度亦然，

$$v=a\,\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\gamma=-a\,\omega^2\sin(\omega t+\varphi)$$

運動稱爲**週期運動**(mouvement périodique)

週期爲 $T=\frac{2\pi}{\omega}$ 又 $\frac{1}{T}=N$ 若爲整數，乃表單位時間內週期之數，稱爲**頻率**(frequence)，a 稱爲**振幅**(amplitude)，$\omega t+\varphi$ 角

乃 t 時簡諧動之相(phase), φ 乃初相(phase initiale)。

由上有

$$\gamma=-\omega^2 x$$

此表明P點之加速度常向O點,而其大小則與$\overline{OP}$爲比例。若以M點之加速度投射於Ox上,亦得此同一之結果。

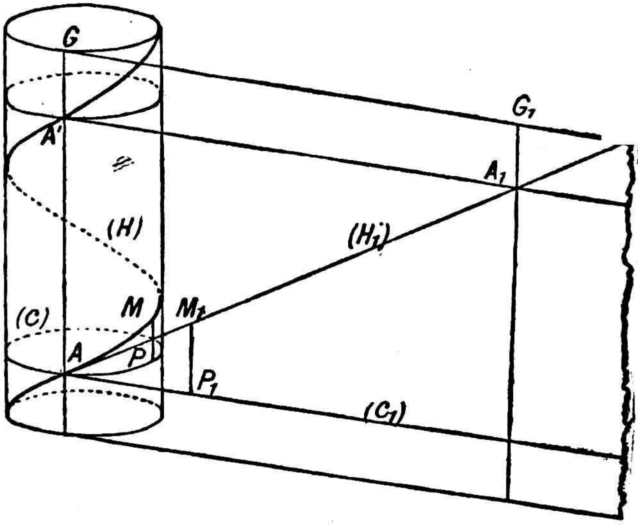
與簡諧動相關者有下列之運動

$$x=x_0+v_0 t+a\sin(\omega t+\varphi)$$

(x_0與v_0皆常數) 稱週期的等速運動 (mouvement periodiquement uniforme) 及 $x=a\,e^{-\lambda t}\sin.(\omega t+\varphi)$ (λ 乃正常數)稱爲阻尼週期動(mouvement periodique amorti)

III. **螺旋運動** 假設一圓柱面,隨一母線G剖開,將此曲面鋪展於一平面上。圓柱之一直剖面(C),在其鋪展面上爲一直線 (C_1), 此剖面上之一點P在直線上爲P_1, AP弧之長等於AP_1之距,因在鋪展之進程中,AP弧上所有之部份,完全落於AP_1線段上之各部份也。故在圓柱面上之曲線,在鋪展面上有一相當之平面曲線。反之若重將表面捲起,在平面上所作之曲線,在圓柱上有一相當之曲線。若在平面上畫一直線 (H_1), 捲在圓柱上爲一曲線,此曲線稱曰螺旋線(hélice) (圖32)

故螺旋線乃一曲線,係一平面捲於一圓柱上時,此平面內之一直線所作成者。當其捲上一周時,直線之AA_1一部份全捲於螺旋之AA′弧上;此弧乃螺旋線之一圈(spire)其兩端



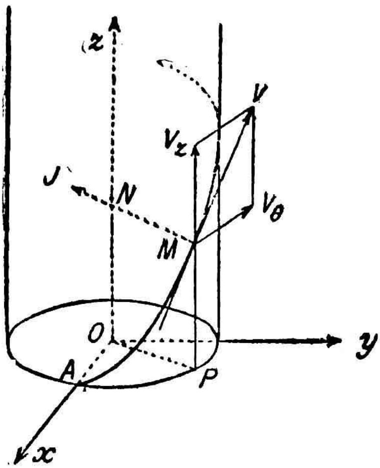
（圖 32）

在同一之母線上，AA′之長稱爲螺旋線之步(pas)，換言之卽螺旋線與任一母線連續二交點間之距離。

設 M_1 爲直線上之一點，捲在螺旋線上爲 M 則 $\frac{M_1P_1}{AP_1}$ 之比爲常數，卽直線(H_1)對於直線(C_1)之傾斜率，但 $AP_1=AP$ 弧，$M_1P_1=MP$。

故 $\frac{MP}{AP弧}$ 爲常數，此卽螺旋線之特性。任何柱體上所作之螺旋線，均有此定義與此結果。

若柱體爲圓柱，螺旋線稱爲圓螺旋線(hélice circulaire)。試取圓柱之軸爲 z 軸，平圓(C)之平面爲 xy 平面(圖 33)，Ox 通過 A 點。設 r, θ, z 乃螺旋線上之一點 M 的柱坐標；r 乃圓柱之半徑，故係常數；又 AP 弧 $=r\theta$ 故 $\frac{z}{r\theta}$，因之 $\frac{z}{\theta}$ 爲常數：於是 $z=k\theta$



（圖 33）

因一轉時θ增加2π，z增進一步h；故$h=2\pi k$；而常數$k=\frac{h}{2\pi}$稱爲簡步(pas réduit)。當M點之高z增時，θ可增或減。若θ增則P點轉動之向係由Ox而至Oy，螺旋線之向爲正。若θ減，則螺旋線爲反向。上面之計算係假設螺旋線爲正向，對於反向之螺旋，應取$k=-\frac{h}{2\pi}$。對於坐標軸之通常列法，應設直線(H_2)對於(C_1)之傾斜率爲負。螺螄釘及取塞鑽之稜係正向的。螺旋線之正反方向，與圓柱之軸的正方向的選擇無關。

例如一人直立面向螺旋線譬如螺螄簧，如螺旋線爲正方向者，則曲線由左而右上昇；否則曲線由右而左上昇，無論何端置於上面，結果均同。

注意 若h趨近於O，螺旋線近而與圓周(C)相混；若h增至無限，螺旋線近而與母線(G)相混。

若一點運動之軌道爲螺旋線,則此運動稱爲螺旋運動(mouvement hélicoidal)。設有圓螺線,其上一點之坐標 z 與 θ 皆爲時間 t 之函數。因

$$z=k\theta,$$

故
$$\frac{dz}{dt}=k\frac{d\theta}{dt}=k\omega,$$

ω 表角速度。

速度對於柱坐標之分量爲:

$$v_z=\frac{dz}{dt}=k\omega,\quad v_r=\frac{dr}{dt}=0,\quad v_\theta=\frac{rd\theta}{dt}=r\omega$$

$\frac{v_z}{v_\theta}$ 爲常數,故螺旋線之切線與母線所成之角爲常數。

試求加速度之分量;設 ω 爲常數,v_z 與 v_θ 皆爲常數,故 v 亦爲常數,即運動爲等速。分量 γ_z 爲零,故加速度平行於 xy 平面,而等於爲圓運動之P點之加速度。此加速度在OP半徑上由P至O其值爲 $\omega^2 r$。故M點之加速度 $\overrightarrow{\mathrm{J}}$,在圓柱之法線方向上,其值爲 $\omega^1 r$。

於是螺旋線之主法線 MN, 乃圓柱之法線。其密切面 NMV 爲圓柱之法線面。

試求螺旋線上M點之曲率半徑 ρ

因
$$\frac{v^2}{\rho}=\mathrm{J}=\omega^2 r,$$

而
$$v^2=v_z{}^2+v_\theta{}^2=(k^2+r^2)\,\omega^2,$$

故
$$\rho=\frac{k^2+r^2}{r}=r+\frac{k^2}{r}.$$

故螺旋線之曲率半徑為常數。

若運動非等速,則P點之加速度應有一分量 $-\omega^2 r$ 在半徑成極角 θ 者之上,及一分量 $r\omega'$ 在 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 之半徑之上。於是:

$$\gamma_z=k\omega' \quad \gamma_r=-\omega^2 r \quad \gamma_\theta=r\omega'$$

總此二情形可見:$\overrightarrow{V}$ 與 Oz 間之角為常數;切線所成之錐體係為繞 Oz 之旋轉體。若運動為等速,則速度圖,因其為此錐與以錐頂為心之球面之交線,故係一小圓周。

第四章

固體之運動

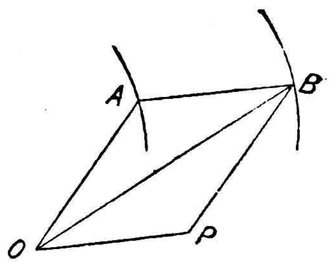
本章之所論者非固體之最普遍的運動;為理論及實際觀點計,僅就數重要的特別情形而討論之。在每一情形下,定其每時每點之速度與加速度,稱曰 t 時之速度與加速度的分配 (distribution)。玆所欲論之運動如下:

1° 移動 (le mouvement de translation)

2° 轉動 (le mouvement de rotation)

3° 螺旋動 (le mouvement hélicoidal)

23. 移動 任一線段 AB, 其兩端在固體之任何二點上,當固體運動時 AB 之方位 (direction) 不變,則此運動稱為**移動**。(圖 34)



(圖 34)

在此運動,**所有各點之軌道皆是相等的曲線**。因照 $\overrightarrow{AB}$ 所定之幾何的移動的改位。可由任何一點 A 所作之軌道 C_A, 而至任何他一點B所作之軌道 C_B。

在同一時 t **所有諸點之速度有向量皆等**。作 $\overrightarrow{OP}$ 等於 $\overrightarrow{AB}$, 其原點為一定點 O。P 亦為一定點,因 $\overrightarrow{AB}$ 之位置方向大小皆為常數。但依前第二章 §11 注意四 B 點之速度乃 A 點

及P點二者之速度之和,但P點之速度爲零,故A,B二點之速度相等。

反之,若一固體所有諸點之速度有向量常相等,則此體之運動爲移動。此僅須證明接連固體上任何二點之有向量 $\overrightarrow{AB}$ 有一不變之大小,位置與方向。但P點之速度因其爲B,A二點之速度之差故爲零;P點不動,故 $\overrightarrow{OP}$ 不變,與之相等之 $\overrightarrow{AB}$,(與其相異之件僅係原點一項),亦不變,故其運動爲移動。

對於移動,每時所有諸點之加速度有向量皆等。因A,B二點之速度有向量常相等,在一點O所作A及B之速度圖皆相同故也。

桌內之抽屜隨槽進退;平開之門,隨槽左右,皆直移動(translation rectiligne)之例也。

車頭同邊兩輪上連系之軸的運動,乃圓移動,軸上所有諸點作等圓的軌道,在每時其速度與加速度皆相等。

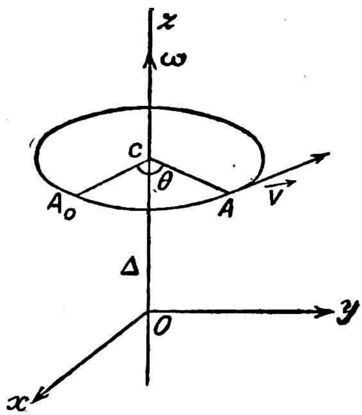
24. 轉動 若固體與某軸Δ相合之點,在運動時不動,則此固體係繞此軸而轉動。若固體不與此軸相交,僅須設想此體附於較大,而與此軸相交之他一體上。

對於轉動,固體各點之軌道皆爲圓周,含圓周之平面與軸正交,而諸圓心即在此軸上。

取坐標系,使 Oz 與Δ軸相合。若諸圓周C皆循 Ox 至 Oy 方向而作成,則轉動對於Δ軸爲正向。若諸圓周循與此相反之

向而作成，則轉動對於Δ軸爲反向（圖35）。

設θ爲半徑CA與其初位置CA_0間之角，此等角在直向轉動爲正。當A_0至A之時間中，固體上所有之點皆轉過θ角；A點之角速度$\omega=\frac{d\theta}{dt}$亦爲任何他一點B之角速度，於是稱$\omega$**爲固體轉動之角速度**(vitesse angulaire de rotation du corps)。



（圖 35）

A點之速度乃一有向量，其原點在A，其大小爲$CA\times|\omega|$，與ACz平面正交；其方向視t時ω之爲正或負，而在θ之增或減的方向上。故此有向量$\vec{V}$乃在Oz上其值爲ω之有向量對於A點之矩。

固體各點之速度，乃在轉動之軸上的一有向量ω對於該點之矩；其在此軸上之量ω爲轉動之角速度。

若以轉動之軸爲z軸某點(x, y, z)之速度因其爲有向量$(0, 0\ \omega)$對於此點(x, y, z)之矩，故此速度之分量爲

$$-\omega y, \qquad +\omega x, \qquad 0。$$

各點之加速度乃圓運動之加速度。

對於柱坐標，此速度與加速度之分量爲

$$v_r=0, \qquad v_\theta=\omega r, \qquad v_z=0$$

$$\gamma_r=-\omega^2 r, \quad \gamma_\theta=\omega' r \qquad \gamma_z=0$$

地球繞軸自轉卽固體轉動之一例。其轉一周之時間爲一恆星日(jour sidéral)卽較尋常之平日(jour mogen)少235.91秒。因轉動爲等速,故其角速度爲

$$\omega=\frac{2\pi}{24\times60^2-235.91}=729\times10^{-7}$$

此轉動由西而東,其角速度ω較鐘表之時針的角速度之半稍大。

實際上使一體對於他體作轉動,卽將此體之兩點繫於他一體上。例如門繞樞而轉動,匣之蓋繞鏈節而開閉,機器之軸在其墊機上轉動皆是。

25. 螺旋動 一體繞Δ軸轉動,同時循Δ移動是以其上之各點皆以Δ爲軸之圓螺旋線,則此體之運動,爲**螺旋動**(mouvement hélicoidal)。

假設一體能繞一軸Δ而轉,且循此軸而移動,固體上之A_0點變至佔A之位置時,卽固體繞Δ軸轉過θ角,θ爲ΔA_0與ΔA間之角。若以Δ軸與z軸相重合,則此體更循此軸移動一距離,其長等於A及A_0二點之高之差z,體上所有諸點皆同時轉過同一角θ,移動同一距離z。

A點由其初位置A_0出發,作一以Δ爲軸之圓螺旋線,$\frac{z}{\theta}$之比爲常數,

$$z=\frac{h}{2\pi}\theta$$

h 表螺旋線之步,體上所有之點的柱坐標皆有此關係。

故於繞 Δ 軸之螺旋動,固體各點的軌道皆係作於以 Δ 為軸之圓柱上之等步的螺旋線。

速度與加速度之計算,與點之螺旋動的情形相同。

故若
$$\frac{d\theta}{dt}=\omega, \qquad \frac{h}{2\pi}=k$$

則有
$$v_r=0, \qquad v_\theta=r\omega, \qquad v_z=k\omega;$$
$$\gamma_r=-\omega^2 r, \quad \gamma_\theta=r\omega', \qquad \gamma_z=k\omega'.$$

若 ω 為常數, $\omega'=0$: 則固體之運動為等速螺旋動。

實際上之螺旋動,常用一螺螄釘與螺螄眼。螺螄釘為一旋轉之圓柱體其上刻以凸出螺旋線狀的螺螄紋;螺螄眼為一同徑之圓柱其上刻以凹下之相同的螺螄紋,釘眼二體相含接時,使釘或眼運動或兩體均運動,則二體之相對運動為螺旋動。

26. 固體之基本的運動 以上三節所論之固體的簡單運動,在實際及理論上皆屬重要。實際上,通常所用之器具往往利用此種運動。理論上,此等運動實係基本,因固體所有之運動就其各點之速度的分配而論,在瞬時 t 之附近,實可作為此等運動之一視之也。

若固體有一固定點,其運動在每瞬時可視為繞過此點之一軸的小轉動,但此轉動隨時變異。

若固體有一平面恆與他一平面相接觸,其運動,在每瞬

時可視爲繞正交於此二接觸面之軸的小轉動,在特別情形下或竟爲一小移動。

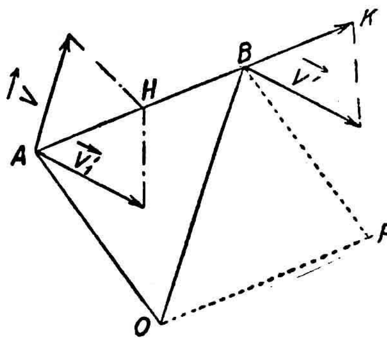
固體最普遍的運動,在每瞬時,可視爲繞隨時而變之軸的小螺旋動。在特別情形下,此小運動或竟爲一轉動,或一移動。

27. 定理 **固體運動時,其上任二點之速度,在此二點之連結線上之射影,爲相等之有向量。**

此固體之普遍的定理,應用甚多,其證明如下:

設固體上之A,B二點與一定點O相連,作$\overrightarrow{OP}$有向量等於$\overrightarrow{AB}$。$\overrightarrow{OP}$之長爲常數,故P作一曲線,於中心爲O,半徑爲OP之球面上,而其速度爲與OP正交之有向量,因$\overrightarrow{OP}$乃$\overrightarrow{OB}$與$\overrightarrow{OA}$之幾何差,P點之速度故爲B及A之速度$\overrightarrow{V'}$與$\overrightarrow{V}$之幾何差。

由A點引$\overrightarrow{V'_1}$等於$\overrightarrow{V'}$而求與$\overrightarrow{V}$之差,於是連$\overrightarrow{V}$及$\overrightarrow{V'_1}$之終點而得$\overrightarrow{V'}-\overrightarrow{V}$之差。(圖.36)此直線應與OP正交故與AB正

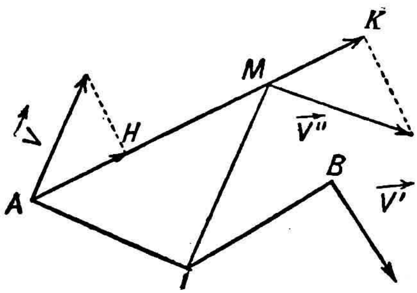


(圖 36)

交。因此$\overrightarrow{V}$及$\overrightarrow{V'}_1$在AB上有同一之射影$\overrightarrow{AH}$,換言之即$\overrightarrow{V}$及$\overrightarrow{V'}$有其射影$\overrightarrow{A'H}$及$\overrightarrow{BK}$爲二相等有向量。

28. 應用 I —— 一平面在他一平面上之運動　節26所宣佈命題之關於兩固體之有一平面相接觸者的運動,吾人可應用上定理證明如下: 設固體(S)有一平面(P')在定平面(P)上移動。此體在(P)之正交線上任二點的軌道相同,在每瞬時有相等的速度。故只須研究(S)體在平面(P')上各點之運動,而(P')在(P)上運動。於是所研究者乃一平面在他一平面上之運動。

設(P')上有二點A及B,其速度在t時不相平行。在A,B二點各作正交於其速度之直線而相交於I。試證此I點在t時之速度爲零;蓋I之速度在IA上之射影爲零,因其等於$\overrightarrow{V}$之射影。同理I之速度在IB上之射影亦爲零;故I之速度爲零。(圖37)



(圖 37)

此點 I 稱爲 t 時之轉動瞬時心 (centre instantané de rotation)

在I點與平面(P)正交之軸Δ上作一有向量$\overrightarrow{\omega}$,其量$\omega=\frac{V}{AI}$,其方向乃使$\overrightarrow{V}$為$\overrightarrow{\omega}$對A點之矩的方向。

試證(P′)上所有諸點之速度,與假設(S)在t時繞Δ軸而旋轉其角速度為$\overrightarrow{\omega}$之速度相同。設M為(P′)上之任意一點,此點之速度$\overrightarrow{V''}$與IM正交,因其在IM之射影,如I之速度的射影為零。$\overrightarrow{V''}$在AM上之射影為一有向量$\overrightarrow{MK}$,與$\overrightarrow{V}$之射影$\overrightarrow{AH}$相等。但$\overrightarrow{\omega}$對於M之矩亦為與IM正交之有向量,且其在$\overrightarrow{AM}$上之射影為$\overrightarrow{AH}$(見第六節的定理)即MK.故$\overrightarrow{V''}$實係$\overrightarrow{\omega}$對於M點之矩,宛如固體以角速度$\overrightarrow{\omega}$繞Δ軸而轉動然。

與M點之速度正交之直線IM,乃此點之軌道的法線。**故於每瞬時,(P′)上各點之軌道的法線均通過瞬時心。**

若(P′)上諸點在t時之速度互相平行,則此等速度必皆為相等有向量。

(證)設A與B為(P′)之任意二點,在A及B上之速度乃平行之二有向量。又因其AB上之射影必相等,則此二速度或相等或與AB正交。若與AB正交,則A及B之速度必等於不在AB上之一點C的速度,因此二速度既不與AC亦不與BC正交故也,故仍彼此相等。是(P′)上所有諸點之速度皆與A點之速度$\overrightarrow{V}$相等,就速度之分配論之,固體在t瞬時內可當作作一等速$\overrightarrow{V}$的移動視之。此V一數亦可為零。

注意 由上可見,若在t時(P′)所有諸點之速度不盡為零,則I點之定,獨一無二。

28. 附 **應用II——固體繞一定點之運動**　設一固體(S)繞其一定點O運動。A與B爲體上之二點,其在t時之速度各與OA及OB正交。與此等速度有向量在A及B點正交之二平面,同過O點,一含OA,一含OB。此二平面相交於經過O點之直線Δ,Δ稱爲t時之**轉動瞬時軸**(axe instantané de rotation)此軸上所有之點I,在t時之速度皆爲零,因據前定理此速度在IO, IA, IB向上之射影皆爲零也。

在Δ軸上取一有向量$\overrightarrow{\omega}$,使其量$\omega=\frac{v}{AI_0}$,V乃A點之速度I。乃由A至Δ之垂足$\overrightarrow{\omega}$之方向乃使$\overrightarrow{V}$爲ω對於A點之矩的方向。試證(S)上所有各點在t時的速度與假設固體繞Δ軸作角速度爲$\overrightarrow{\omega}$之等速轉動相同。

(證)設M爲(S)上之任一點,此點之速度$\overrightarrow{V}''$與IM正交,I乃Δ上之任一點,因其在IM上之射影如I點之速度的射影爲零。故$\overrightarrow{V}''$與含M及Δ之平面正交。$\overrightarrow{V}''$在AM上之射影爲有向量$\overrightarrow{MK}$,與$\overrightarrow{V}$之射影$\overrightarrow{AH}$相等。但$\overrightarrow{\omega}$對於M點之矩亦爲一有向量,與MΔ平面正交。據6節之定理,其在AM上之射影等於$\overrightarrow{AH}$,故速度$\overrightarrow{V}''$實係$\overrightarrow{\omega}$對於M點之矩,正如固體以角速度$\overrightarrow{\omega}$繞Δ軸旋轉然。

與M點之速度正交之平面MΔ,乃此點之軌道的法面(plan normal),故每瞬時,(S)上各點的軌道之法面均經過瞬時軸。

第五章

比較系統之改換

29. 絕對相對與牽連三種軌道 吾人已說明運動之觀念,苟非先定一與之比較的系統(S),無明確之意義。有時改換比較系統,而討論一點對於二比較系統之運動,此問題如下:已知比較系統(S)對於另一比較系統(S_1)之運動,及M點對於(S)系之運動,求M點對於(S_1)系之運動。茲先作下列名詞之公約,M對於(S)之運動稱M點之**相對運動**(mouvement relatif)。與之相應者有相對軌道,相對速度及相對加速度。M對於(S_1)之運動稱爲**絕對運動**(mouvement obsolu)與之相應者有絕對軌道,絕對速度及絕對加速度。(S)對(S_1)之運動稱**牽連運動**(mouvement d'entrainemant)。

設在 t 時動點對於(S)系佔M之位置。又設P爲(S)系之點,在 t 時與M相重合者。在(S)上之P點對於(S_1)之運動稱爲M點在 t 時之牽連運動。在 t 時P之軌道,速度,與加速度乃M點在 t 時之牽連軌道,牽連速度及牽連加速度。

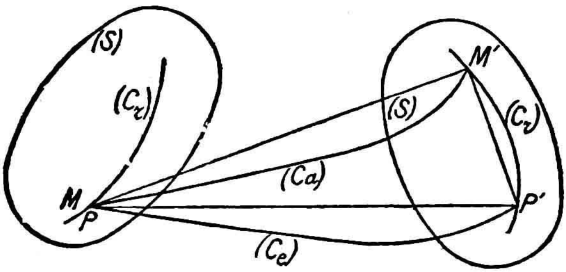
譬如一蠅在火車車輛內之壁上爬動,其對於此車輛(S)之運動,爲相對運動。設以某車站爲系統(S_1),則其對於車站之運動爲絕對運動。在 t 時蠅與車輛壁上P點相接觸,而以記號表出之,則P點對於車站之運動,乃蠅在 t 時之牽連運

動

30. 定理　絕對速度乃相對速度與牽連速度之幾何和。

設M為動點 t 時之位置,M′為其後 $t+\Delta t$ 時之位置。

在(S_1)系內,記出(S)系於 t 與 $t+\Delta t$ 時之位置;設(S)上之P點在 t 時與M點相合在 $t+\Delta t$ 時其新位置為P′。於是絕對軌道(C_a)由M而至M′,牽連軌道(C_e)由P而至P′,相對軌道(C_r)在(S)系上,由P′而至M′。(圖 38) 於是有:



(圖　38)

$$\overrightarrow{P'M'}=\overrightarrow{MM'}-\overrightarrow{PP'},$$

因此
$$\frac{\overrightarrow{P'M'}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}-\frac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t}$$

蓋若首三有向量成一三角形,則後三有向量成一相似之三角形。

就(S_1)系而論,有向量 $\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$, $\frac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t}$ 據定義乃平均的絕對速度及牽連速度。當 Δt 近而為零時,此二有向量之極限,趨近

於 t 時之絕對速度 $\overrightarrow{V}_a$ 及牽連速度 $\overrightarrow{V}_e$。故有向量 $\dfrac{\overrightarrow{P'M'}}{\Delta t}$ 之極限等於 $\overrightarrow{V}_a-\overrightarrow{V}_e$。

就(S)系而論有向量 $\dfrac{\overrightarrow{P'M'}}{\Delta t}$ 其原點為P或P′(因P及P′二點對於(S)上之觀察者係相重合)乃平均的相對速度。當 Δt 近而為零時,此有向量之極限為相對速度 $\overrightarrow{V}_r$。故有:

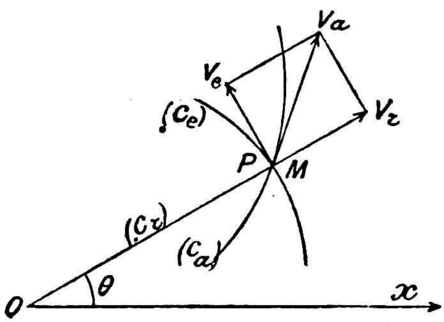
$$\overrightarrow{V}_r=\overrightarrow{V}_a-\overrightarrow{V}_e$$

或

$$\overrightarrow{V}_a=\overrightarrow{V}_r+\overrightarrow{V}_e$$

例如有旅客坐於火車內,觀雨點滴落。假設雨點垂直落下,雨點對於地面之運動,乃絕對運動。雨點對於火車之運動,乃相對運動。對於與車窗玻片相觸之雨點,其相對速度的方向,與雨點在玻片上之痕跡的方向略同。又火車之速度乃牽連速度。相對速度乃直角三角形之斜邊,其水平邊表火車之速度,其垂直邊表雨點對於地面的速度。

應用 試論平面運動。以平面為比較系統之M點的運



(圖 39)

動,可視為M在與向徑 OM 相合之桿上的相對運動,與桿繞O點之牽連運動所組成。

於是相對速度在向徑 θ 上其值為 $V_r=\frac{dr}{dt}$,桿上之P點在 t 時與M點相合,作一以 r 為半徑,以O為心之圓周,其速度在 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 軸上,其值為 $V_p=r\frac{d\theta}{dt}$,故復得以前所得之二分量:

$$V_r=\frac{dr}{dt},\qquad V_p=r\frac{d\theta}{dt}.$$

31. 比較系統之多次改換 試已採取一比較系統(S_1),更取一新比較系統(S_2),則M點對於(S)有速度為 $\vec{V}_r$ 之相對運動,對於(S_1)有速度為 $\vec{V}_{r1}$ 之相對運動,對於(S_2)有速度為 V_a 之絕對運動。設 $\vec{V}_e$ 為M點對於(S_1)之牽連速度,又 $\vec{V}_{e1}$ 為對於(S_2)之牽連速度,據以上之定理得:——

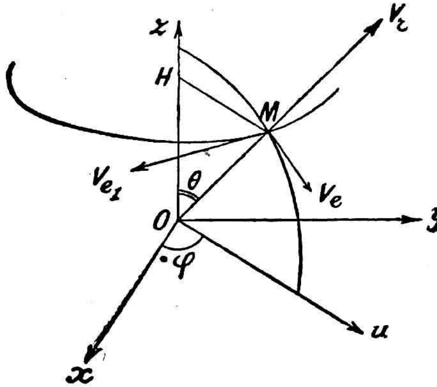
$$\vec{V}_{r1}=\vec{V}_r+\vec{V}_e$$

$$\vec{V}_a=\vec{V}_{r1}+\vec{V}_{e1}$$

故
$$\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e+\vec{V}_{e1}$$

同樣更可取一新系統(S_3)等。

應用　一動點M其極坐標為 r,θ,φ。對 $Oxyz$ 坐標軸之運動,為絕對運動。(圖 40) M在OM桿上之運動為相對運動,此桿對於 zOu 平面為牽連運動,此平面對於坐標軸 $Oxyz$ 又為牽連運動。相對速度在 OM 上其值為 $\frac{dr}{dt}$,第一牽連軌道為中心O半徑 r 之圓周,其速度為 $r\frac{d\theta}{dt}$,在 zOu 平面上 $\theta+\frac{\pi}{2}$



（圖 40）

之軸上。第二牽連軌道爲一與Oz正交之圓,其心爲H其半徑爲$HM=r\sin\theta$,其速度爲$r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}$,在水平面極坐標之向徑$\varphi+\frac{\pi}{2}$之上。故吾人復得此三分量:—

$$V_r=\frac{dr}{dt}\qquad V_\theta=r\frac{d\theta}{dt}\qquad V_\varphi=r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}$$

32. 加速度之組合 當比較系統改換之時,在普通情形下,加速度間之關係,不如速度間之關係簡單,卽通常無如下列之等式:——

$$\vec{J}_a=\vec{J}_r+\vec{J}_e$$

僅舉一例,可以說明。

試再研究一點之平面運動,其極坐標爲r,θ,對於OM之相對運動,其相對加速度在OM上,其值爲$\frac{d^2r}{dt^2}$。於牽連之圓運動,其牽連加速度有一分量在OM上,其值爲$-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$,

及他一分量與OM正交在 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 軸上,其值爲 $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$。若絕對加速度爲以上二加速度之和,則其分量應爲:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad 在\ \theta\ 軸上,$$

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad 在\ \theta+\frac{\pi}{2}\ 軸上。$$

但由19節已知分量 γ_r 在 θ 軸上固爲如上之所得者,然分量 γ_p 在 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 上者乃:

$$\gamma_p=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

故欲得絕對加速度須於 $\overrightarrow{J_r}$ 及 $\overrightarrow{J_e}$ 二有向量外,更加入一有向量 $\overrightarrow{J_c}$,在 $\theta+\frac{\pi}{2}$ 軸上,其值爲 $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$,故通常應有:——

$$\overrightarrow{J_a}=\overrightarrow{J_r}+\overrightarrow{J_e}+\overrightarrow{J_c}$$

此結果乃普遍的:絕對加速度牽連[illegible]速度及第三有向量,所謂補加速度或科氏加速度 (accélération complémentaire ou accélération de corilis) 三者之幾何和。

有時補加速度可以爲零;在此特別情形,加速度之組成與速度之組成相同,若其如此,須(S)對於(S_1)之牽連運動爲一移動。

33. 牽連運動乃一移動之情形　在此情形,有下列二等式:

$$\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e$$

$$\vec{J}_a=\vec{J}_r+\vec{J}_e$$

設 $O_1x_1y_1z_1$ 乃附於(S_1)系上之三軸,又 $Oxyz$ 乃附於(S)與 $O_1x_1y_1z_1$ 平行之三軸;$Oxyz$ 三軸對於(S_1)系之運動爲移動,若知其原點 O 在 $O_1x_1y_1z_1$ 系上之坐標 (a,b,c) 則 $Oxyz$ 之位置爲決定。a,b,c 三數乃時間之函數。其首次引數乃附於(S)系之任一點之速度的分量,其二次引數乃此點之加速度的分量。吾人已知在移動之情形,固體所有之點的速度及加速度均等。

設 M 爲一動點,對於 $Oxyz$ 之坐標爲 x,y,z, 對於 $O_1x_1y_1z_1$ 之坐標爲 x_1,y_1,z_1。$\overrightarrow{O_1M}$ 乃 $\overrightarrow{O_1O}$ 與 $\overrightarrow{OM}$ 之幾何和,故:

$$x_1=a+x$$

$$y_1=b+y$$

$$z_1=c+z$$

由是:

$$x'_1=a'+x' \qquad x''_1=a''+x''$$

$$y'_1=b'+y' \qquad y''_1=b''+y''$$

$$z'_1=c'+z' \qquad z''_1=c''+z''$$

此卽以上欲證之幾何的等式也。

33. 附 普通情形下之加速度的組合 設 O 爲 (S_1) 系上之一點,由此點作與 $\vec{V}_a, \vec{V}_r, \vec{V}_e$ 相等之有向量,其末端各以 A, R, E 記之。因有向量 $\vec{V}_a$ 乃他二有向量之幾何和,此點之絕對速度 $\vec{V}_a^A$, 乃他二絕對速度 $\vec{V}_a^R$ 及 $\vec{V}_a^E$ 之和:

$$\vec{V}_a{}^A=\vec{V}_a{}^R+\vec{V}_a{}^E$$

若(S'_1)系代(S_1)系,而此(S'_1)對於(S_1)爲移動者,則此三有向量不變。故可假想(S'_1)之一點O與運動的(S)系之一點O相合,俾(S)對(S'_1)之牽連運動在每瞬時爲繞過O點之軸的瞬間轉動,此轉動以有向量$\vec{\Omega}$表之。

有向量$\vec{V}_a{}^A$卽動點之絕對加速度$\vec{J}_a$,因A點在(S_1)所畫者,乃絕對運動之速度圖也。

再就R點論,有

$$\vec{V}_a{}^R=\vec{V}_r{}^R+\vec{V}_e{}^R$$

R之相對速度$\vec{V'}_r{}^R$乃此動點之相對加速度$\vec{J}_r$,因R在(S)上所畫者乃相對運動之速度圖。至於R點之牽連運動乃$\vec{\Omega}$對於$\vec{V}_r$之終點R之矩$\vec{W}$,故

$$\vec{V}_a{}^R=\vec{J}_r+\vec{W}$$

茲論E點之速度,在t時M之牽連速度$\vec{V}_e$,於$t+\Delta t$時被$t+\Delta t$時M′之牽連速度$\vec{V'}_e$所代,倘更加入38圖之P′點在$t+\Delta t$時的速度$\vec{V''}_e$,於是有

$$\frac{\vec{V'}_e-\vec{V}_e}{\Delta t}=\frac{\vec{V''}_e-\vec{V}_e}{\Delta t}+\frac{\vec{V'}_e-\vec{V''}_e}{\Delta t}$$

當Δt趨近於零時,左端之極限爲E點之速度$\vec{V}_a{}^E$,右端第一項之極限爲牽連加速度$\vec{J}_e$,因$\vec{V}_e$及$\vec{V''}_e$乃牽連軌道上二隣近的速度;M′點之速度$\vec{V'}_e$乃表$t+\Delta t$時之瞬間轉動之$\vec{\Omega'}$對於M′之矩,換言之卽$\vec{\Omega'}\times\overrightarrow{OM'}$;同樣$\vec{V''}_e$代表$\vec{\Omega'}\times\overrightarrow{OP'}$故

$\vec{V}'_e-\vec{V}''_e$之差等於$\vec{\Omega}'\times\overrightarrow{PM'}$。故上式右端之第二項等於:

$$\vec{\Omega}'\times\frac{\overrightarrow{PM'}}{\Delta t}$$

此積之極限乃等於極限之積。在(S)系統上論$\vec{\Omega}'$之極限爲$\vec{\Omega}$,而$\frac{\overrightarrow{PM'}}{\Delta t}$之極限爲$\vec{V}_r$,故其積之極限爲$\vec{\Omega}\times\vec{V}_r=\vec{W}$,於是有

$$\vec{V}_a^E=\vec{J}_e+\vec{W}$$

$$\vec{V}_a^R=\vec{J}_r+\vec{W}$$

與 $$\vec{V}_a^A=\vec{J}_a=\vec{V}_a^R+\vec{V}_a^E$$

故 $$\vec{J}_a=\vec{J}_r+\vec{J}_e+2\vec{W}$$

或 $$\vec{J}_a=\vec{J}_r+\vec{J}_e+\vec{J}_c$$

$\vec{J}_c=2\vec{W}$乃補加速度,或科氏加速度。

34. 運動組合之舉例 在下列諸例內牽連運動爲直線的移動。

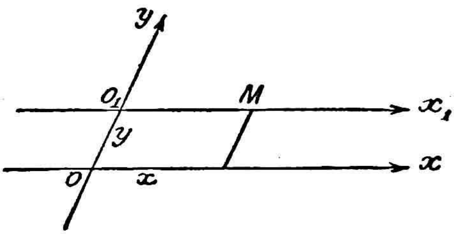
1° 相對運動及牽連運動均係直線等速動——

有向量$\vec{V}_r$及$\vec{V}_e$之大小方位與方向皆一定,故其幾何和$\vec{V}_a$亦然,絕對運動之速度常與一固定有向量相等,故此運動亦爲直線等速動。

例如M爲渡船上之一點,設M對於江流之相對運動爲直線等速動,此速度卽船之速度,牽連速度乃水流之速度,亦假設此牽連運動爲直線等速,則M對於江岸之運動亦爲直線等速動。

2° 相對運動及牽連運動均係直線動,但方向則不相同。

設 $x=f(t)$ 為 M 點在 Ox 直線上之運動的方程式;$y=g(t)$ 為此直線上之一點 O 在 Oy 軸之運動的方程式。(圖 41) 絕對



(圖 41)

運動乃是平面的;軌道在 Oy 軸及 Ox 之初位置所定之平面上。絕對運動之方程式為:

$$x=f(t),\qquad y=g(t)$$

例如相對運動為等速的,則可取 $x=at$, O 乃 M 在初時之位置。若牽連運動為等加速動,則可取 $y=bt+ct^2$, Ox 乃初時 M 之軌道的位置。絕對運動的軌道為曲線:

$$x=at\qquad y=bt+ct^2$$

由第一方程式取出 t, 代入第二方程式內,則有

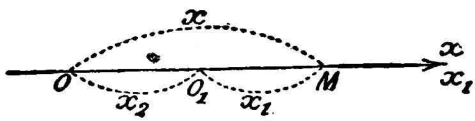
$$y=\frac{b}{a}x+\frac{c}{a^2}x^2$$

此乃拋物線之方程式。由絕對速度之組成,可見此速度在 Ox 上之射影為常數 a。由絕對加速度之組成,可見此加速度與 Oy 平行,而等於常數 $2c$。此等結果亦可由射影之運動推出。

3° M點之相對運動及牽連運動皆在一直線上。

設 $x_1=f_1(t)$ 乃M點之相對運動的方程式,又 $x_2=f_2(t)$ 乃M之軌道 O_1x_1 直線上之一定點 O_1 的運動方程式。若 x 乃M點對於 Ox 上之一定點O之坐標,則

$$x=x_1+x_2=f_1(t)+f_2(t)$$



(圖 42)

例如M及 O_1 之運動皆爲同週期的簡諧動則

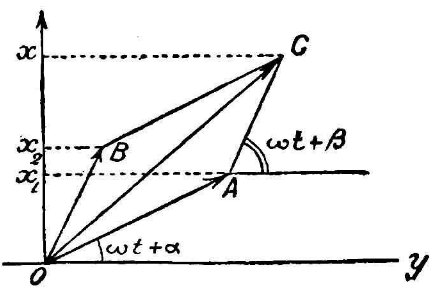
$$x_1=a\sin(\omega t+\alpha),$$

$$x_2=b\sin(\omega t+\beta),$$

故 $$x=a\sin(\omega t+\alpha)+b\sin(\omega t+\beta)$$

試證此絕對運動,亦爲同週期的簡諧動。

設 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 二有向量之長爲 a 與 b,各與 Oy 成 $\omega t+\alpha$ 及 $\omega t+\beta$ 角。(圖 43)



(圖 43)

設此二有向量以角速度ω作等速的轉動，則其終點在正交於Oy之Ox軸上之射影爲x_1及x_2。建於此二有向量上之平行四邊形OA BC，以角速度ω繞O轉動，其形狀不改。此平行四邊形之對角線$\overrightarrow{OC}$之終點C，在Ox上之射影其坐標爲x。此點x作一簡諧動，其週期爲$\frac{2\pi}{\omega}$，其振幅爲OC，其初相爲$\alpha+A\hat{O}C$。

更推廣之，設有任何數同週期的簡諧動，則總和之絕對運動，爲同週期的簡諧動，其振幅乃諸振幅的幾何和。

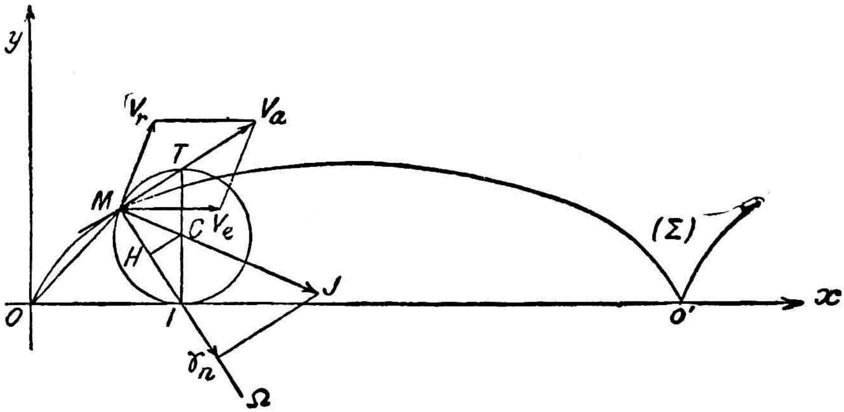
此幾何和可爲零，於是M點在Ox上爲靜止。例如有同週期同振幅的三顫動，其初相爲$0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$者是。

4° 相對運動乃等速圓運動。

設相對運動爲等速的圓運動，其角速度爲ω。牽連運動爲等速直線動。此卽在直線上進行之車輪上的一點情形。

茲特研究輪周上之一點M的運動，此點之軌道(Σ)稱爲擺線(cycloïde)。

設Ox爲車輪在其上進行之直線，C乃t時輪心的位置(圖44)。假設圓輪C在Ox上只滾而不滑，換言之卽圓周上之一點所作之弧，常等於I點在同時內所作之直線的長度，此I點乃輪與地之接觸點。所以I在Ox上之速度與圓周上一點之速度的數值相等。第一速度乃輪之牽連速度$\overrightarrow{V}_e$，第二速度乃M點之相對速度$\overrightarrow{V}_r$。若在M點作速度的平行四邊形，卽得一稜形，而MV_eV_a爲二等邊三角形，與MCI三角形相似。



（圖 44）

此相似比爲轉動之角速度ω，蓋 $V_r=\omega MC$，故 $V_a=\omega\cdot MI$。又因 MV_eV_a 三角形之邊，與 MCI 三角形之邊正交故 MI 乃擺線之法線；$\overrightarrow{V_a}$ 在切線 MT 上，切線 MT 經過與 I 點對徑相反之圓周上之點 T。

故在 t 時，M 點之速度與其以角速度 ω 繞 I 點之速度相同。

試求加速度；牽連加速度爲零，故相對加速度等於絕對加速度。此乃有向量 $\overrightarrow{MJ}$，在 MC 上等於 $\omega^2\overrightarrow{MC}$；設 $M\gamma_n$ 爲法線加速度，又 H 爲 MI 之中點；則 $M\gamma_n=\omega^2\cdot MH$，因 CH 正交於 MI 也。又因

$$M\gamma_n=\frac{V^2_a}{\rho}$$

ρ 乃擺線之曲率半徑。

所以 $$\rho=\frac{V_a^2}{M\gamma_n}=\frac{\omega^2\overline{MI}^2}{\omega^2\overline{MH}}=2\overline{MI}$$

故擺線之曲率中心Ω,對於I與M爲對稱.

注意I　吾人亦可由M點之運動的方程式,直接求得此等結果。設O爲M與地相觸時之位置,取O爲坐標軸之原點,Oy與Ox正交而在圓之一面,以M在O時爲時間之起點。曲線(Σ)乃相等的弓形線,如OMO′等所組成。設a爲圓之半徑,且設角速度ω爲單位,在t時圓輪轉過$\widehat{ICM}=\omega t=t$,將OICM與其和OM,投射於Ox及Oy之上,於是得:

$$x=\overrightarrow{OI}+\text{射影}\,\overrightarrow{IC}+\text{射影}\,\overrightarrow{CM}$$

即 $$x=at+a\cos\left(\frac{3\pi}{2}-t\right)$$

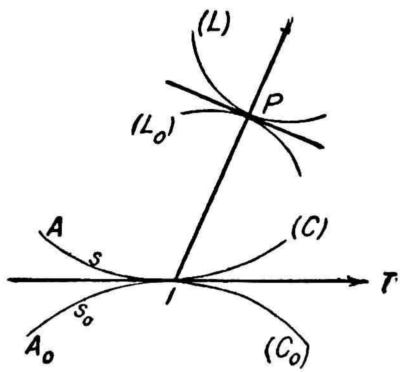
$$y=\overrightarrow{IC}+\text{射影}\,\overrightarrow{CM}=a+a\cos(\pi-t)$$

故 $$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

注意II　O與O′二點乃擺線之尖點(points de rebroussement)。圓內之一點M′,所作之曲線稱爲內擺線(cycloïde raccourcie)。圓外之一點M″所作之曲線有複點(points doubles),稱外擺線(cycloïde allongée)火車車輪有包軌之邊,此邊上之點所作之曲線,即外擺線。

35. 圓片在平面上之運動　再研究一平面的圓片,在一定平面上之運動。吾人已知在每瞬時t,圓片各點之速度

如其平面繞轉動瞬時心 I 轉動而得之速度相同。此 I 點之位置隨時更異,在圓片上作一曲線 (C),在定平面上作一曲線 (C_0)。若於每瞬時置一針於 I 點,刺圓輪及平面各一孔,(C) 卽圓輪上刺痕之軌跡,(C_0) 卽定平面上刺痕之軌跡。(圖 45) I 之相對軌道乃曲線(C),絕對軌道乃曲線 (C_0)。因 I 點之牽連



(圖 45)

速度爲零,故絕對速度 $\vec{V}_a$ 與相對速度 $\vec{V}_r$ 相重合,此二有向量之位置與方向均同,故在 (I) 點 (C) 及 (C_0) 之二切線相重合,卽 (C) 與 (C_0) 二曲線爲互相切。設 A 與 A_0 乃 I 點在 (C) 及 (C_0) 上初起時之位置,又於每一曲線上定一弧之正方向,以便在 I 點兩正切線相重合。此二速度之代數值旣相同,設 $s=$ AI 弧,$s_0=A_0I$ 弧則

$$\frac{ds}{dt}=\frac{ds_0}{dt}$$

於是 $$s=s_0+\text{常數}$$

但當 $s_0=0$, $s=0$ 故常數爲零,因此常有:

$$s=s_0$$

I 點在 (C) 及 (C_0) 二曲線上同時所經過之弧常相等。於是吾人謂 (C) 在 (C_0) 上只滾而不滑。設想動的圓片之外圍沿曲線(C)割成,平面之周界沿曲線 (C_0) 割成,則事實上此種運動,可將圓片之外圍旋轉於平面之周界上,而實現之。(C_0) 曲線稱爲**底線** (base),而 (C) 曲線稱爲**旋線** (roulette),上節之例(C)乃平圓,(C_0)乃線。

設(L)爲圓片上之一曲線,(L) 位置改異時,在定平面上爲一族相等的曲線。此等曲線有一**包線** (L_0) (enveloppe) 所謂包線者卽與此族曲線相切之曲線也。余謂在 t 時 (L) 與(L_0) 相接觸之點的公法線,經過 I 點。

(證)設 P 爲二曲線之相切點;此點之相對軌道乃曲線(L),絕對軌道乃曲線 (L_0),故速度 $\vec{V}_r$ 與 $\vec{V}_a$ 同在 P 點之公切線上。牽連速度 $\vec{V}_e$ 因其爲 $\vec{V}_r$ 及 $\vec{V}_a$ 二者之差,故亦必在此切線上。但此速度與IP 正交,故 IP 爲公法線,卽所欲得之證明也。

(L)及(L_0)二曲線稱爲運動之**共軛側面**(profils conjuguis)。在機器上常有柱體接合(engrenage cylindrique)。柱體之橫斷面接合處卽爲此種共軛側面的裝置,彼此含接滾動,而且滑動,因其相切之點,牽連速度非爲零也。

習題

1. 有摩托車在半徑2000米之圓周上行動,其速度爲每小時15仟米。前有障礙物,車以等減速動,行75米後停止。求車上一點在減速期前與減速期間之加速度。

2. 一自行車在直路上進行,其速度每小時20仟米。原動輪之半徑爲35厘米,車之進行率爲5米。(即足踏之柄轉一周時,車進行5米)設以均等減速動,車行30米而後停止。試求動輪在減速期間之角速度及角加速度。

在同此情形下,求動輪之圜上的一點,對於路之速度及加速度。

3. 一點之軌道爲圓周(C);對於此圓周上之一點O之速度圖爲一圓周(C′),與(C)相切於O,其半徑爲(C)之半徑之半,試求此運動。

4. 一點之軌道爲拋物線(P);對於此拋物線之頂點O之速度圖,乃與(P)相等之一拋物線,其焦點在O,其頂點與(P)之焦點,對於O點爲對稱。試求此運動。

5. 一點之軌道係平面的。在每瞬時加速度有向量爲速度有向量繞動點之位置轉過$+\frac{\pi}{2}$而得。試求此運動。試討論更普通的情形,即此轉過之角爲任何角α。又速度圖爲何?

6. 設有一平面運動,其對此平面上之一點O之速度

圖,乃將其軌道繞 O 點轉過 α 角而得,試求此運動。

7. 一點之軌道爲任何一空間曲線。吾人可選運動之法則而使其速度圖爲一平面曲線,試證之。試討論一特別情形;軌道爲一圓螺旋線,且求其速度圖爲何。

8. 一點之軌道爲一圓周,其加速度與速度所成之角爲常數,試求此運動之法則,及其速度圖。

9. 圓螺旋線可視爲一點之絕對軌道,此點在一圓周作等速動,而含此圓周之平面作等速直線動,此圓周之心常在螺線所在之旋轉圓柱之軸上。試證此螺旋線依平行於某定方向 Δ,而在與圓柱之軸正交之平面上的射影爲一外擺線或內擺線。在何情形此線射影爲一通常的擺線?

10. 一人以 M 點表之,在 Oy 軸上等速進行,其速度爲 v,一犬以 C 點表之,在其後追趕,其速度之方向,刻刻經過 M,其速度之值爲 $2v$,起始時 C 在 Ox 上之 A 點,其坐標爲 a,而 M 在坐標軸之原點上。試求 C 點之軌道(追跡曲線)并問何時犬追及人?

11. M 點進行之情形同上題,惟 C 點從 A 點起作一一拋物線之弧,與 Ox 相切於 A,與 Oy 相切於 B,B 即犬追及人之點,其坐標爲 b,試求 C 點之運動。

12. 一定線段 AB,在 xOy 平面上運動,A 點在 Ox 軸作等速運動,B 點之速度刻刻與 A 點之速度之值相等,試求 B 點之軌道(鍊囚曲線)。設有一平面固繫於 AB 之上,而此平

面隨 AB 在定平面 xOy 上運動,試求轉動瞬時心,底線,及旋線。

13. 設有二正交軸 Ox, Oy。在 Ox 上取二線段 OA 及 AB,其長度爲

$$\overline{OA}=l, \quad \overline{AB}=nl, \quad l>0$$

n 表一常數。有二圓(C)及(T)當 $t=0$ 時其心爲 B 及 O,各經過 A 點,(C)圓周在(T)圓周上滚動,使繞其中心 O′ 之角速度爲 t。在 $t=0$ 時,O′ 與 B 相重合。設 M 爲 t 時 (C) 圓周上之一點,在 $t=0$ 與 A 相重合者。

1° 求 t 時 M 點之坐標。

2° 作 M 之軌道上對於 M 點之曲率中心。且證此點將 MI 線段分爲兩段,兩段之比爲常數,I 乃 t 時二圓之切點。

3° 作速度及加速度二有向量,并證加速度有向量在對於 MI,而與 MO 對稱之直線上。

4° 求軌道上之切線及法線的方程式,由此推證軌道之縮閉線(developpée)爲軌道對於中心 O 之位似圖(homothétie)曾繞中心作一旋轉者。

14. 一動平面(P)在一定平面(P_0)上運動,(P) 上 A,B 二點常在(P_0)之二定直線 Ox_0 及 Oy_0 之上。試證此運動可以一圓周 (C) 在他一定圓周 (C_0) (其半徑爲前之二倍) 之內,滚動而實現之。且證(C)上各點作經過 O 點之直線,此外 (P) 上之點作以 O 爲心之橢圓。

15. 一動平面(P)在一定平面(P_0)上運動,使(P)上之二條直縫 Ox 及 Oy 在(P_0)上之二定樞上滑動。試證此運動可以一圓周(C),在他一定圓周(C_0)(其半徑爲前者之半)之外滾動,而實現之。且證凡在(P)上經過O點之直線必經過(P_0)上之一定點,其他之直線有一包線(enveloppe)爲圓周,又(P)上之點的軌道爲巴氏蝸牛曲線(limaçon de Pascal)。

第二篇　點之動力學

第一章

通　論

36. 固定軸　下面所宣佈之實驗的定律,乃力學之基礎,對於所謂絕對固定之比較系統而有效。此系統之原點乃日系之重心,其三軸經過三恆星,而簡稱之曰**固定系**(système fixe)。

37. 動力學之分類　動力學(dynamique)之目的乃研究運動與一種所謂力者之關係。至於力之定義詳後二節。

亦如在動學上,首先討論一極小量之物質,可視為一幾何學上之點,而不致生可覺之誤差者,於是有**點之動力學**(dynamique du point)。其次研究任何質點所成之系統而有所謂**系之動力學**(dynamique des systèmes)。更可就系之變形與否,分為**固體動力學**(dynamique du corps solide),與**變形系之動力學**(dynamique des systèmes diformables)。

38. 慣性原理　力之定義基於下述之一原理,稱曰慣性原理:**一質點獨自存在,其加速度對於定系為零。**

吾人已知加速度為零時,此質點或靜止或運動。若運動

則此運動爲直線等速動。故獨自存在之一質點,對於固定系或靜止,或作等速直線動。

39. 力與質量 若一點之加速度不爲零,則此點必非獨自存在,而受有其他質點之外界作用,此作用卽所謂**力**(force)。力學(mécanique)之目的卽在比較各種力,而求其效。欲達此目的,是以先研究力與其在質點上所生之效果的關係。

在每瞬時,一質點M具一加速度,以M爲原點之一有向量$\overrightarrow{\mathrm{J}}$表之。公認此加速度有向量爲力施於質點上的效果之表徵。另一有向量$\overrightarrow{\mathrm{F}}$代表力,與前一有向量$\overrightarrow{\mathrm{J}}$同一原點,而成比例。故有:

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}=m\overrightarrow{\mathrm{J}}$$

若以同一力施於數不同之質點上,由實驗表明無論此力爲何,諸質點之加速度之比,乃一非1之常數。可見不能給m以一數(例如1)與質點無關係者,而二質點之m之比乃係確定。若以一質點之值爲m,則其他質點之值完全確定。故此係數m乃每質點特具之值:稱曰質點之**質量**(masse)。

40. 力之組合的原理 一質點若同時受數力之作用,則其所得之加速度爲下一原理所規定。此原理由實驗而來,更可由其結果而證實其爲眞確。

一質點同受數力之加速度,乃此質點受每一力之作用時所有之加速度的幾何和。

若一點M之質量爲m,同受$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$三力,其加速度$\overrightarrow{J}$乃:

$$\overrightarrow{J}=\overrightarrow{J_1}+\overrightarrow{J_2}+\overrightarrow{J_3}$$

$\overrightarrow{J_1},\overrightarrow{J_2},\overrightarrow{J_3}$乃M點單受$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$或$\overrightarrow{F_3}$時之加速度。

以m乘上式之各項得:

$$\overrightarrow{mJ}=\overrightarrow{mJ_1}+\overrightarrow{mJ_2}+\overrightarrow{mJ_3},$$

於是
$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$$

故同受$\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$諸力之質點所有之加速度,與受一等於此諸力之幾何和之單力所得之加速度相同。

故於基本式　$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{mJ}$

內$\overrightarrow{F}$乃表諸力施於質點上之幾何和。

若對於此點之某一位置,此和爲零,則加速度爲零。更若此點在此位置無初速度,則此點靜止,立於平衡之狀態中。

注意　有一系統,對於所謂絕對固定的系統作等速直線動。若以此系統代絕對固定之系統時,則力$\overrightarrow{F}$與對新系統之加速度$\overrightarrow{J'}$,亦有同樣的關係

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{mJ'},$$

因$\overrightarrow{J'}$與$\overrightarrow{J}$相同。

41. 繫於地球上之軸　上列之二原理僅對於固定系而後有效。若以地球爲比較系統,即以繫於地球上之三坐標軸所定之系爲標準,則上列之公式不能應用。

設$\overrightarrow{J_a},\overrightarrow{J_r},\overrightarrow{J_e}$爲M點受數力,其和爲$\overrightarrow{F_1}$者,所得之絕對,相對及牽連加速度。此所謂之絕對運動,乃對固定系而言,相對運

動乃對地球而言。吾人已知$\overrightarrow{J_a}$非等於其他二加速度之和,設此差有向量爲$\overrightarrow{J_c}$,則

$$\overrightarrow{J_a}=\overrightarrow{J_r}+\overrightarrow{J_e}+\overrightarrow{J_c},$$

$$\overrightarrow{mJ_a}=\overrightarrow{mJ_r}+\overrightarrow{mJ_e}+\overrightarrow{mJ_c},$$

但 $$\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{mJ_a}$$

故 $$\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{mJ_r}+\overrightarrow{mJ_e}+\overrightarrow{mJ_c}$$

此卽若以地球爲比較系統時,應代替基本式之方程式也。

此$\overrightarrow{F_1}$諸力中,有爲在地面上施於質點之力,有爲天體(包括地球在內)對於質點之引力,屬於前者諸力之和設爲$\overrightarrow{F_2}$,屬於後者諸力之和設爲$\overrightarrow{A}$,則有

$$\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{A}$$

若M點對於地球爲平衡,則此質點宛如連繫於地球而有$\overrightarrow{J_a}=\overrightarrow{J_e}$。例如質點繫於線或測力計 (dynamomètre) 上,此點受$\overrightarrow{A}$力之作用,及線或測力計之張力而平衡。據定義M點之重量$\overrightarrow{P}$與張力相反,而基本方程式遂變爲:

$$-\overrightarrow{P}+\overrightarrow{A}=\overrightarrow{mJ_e}$$

將$\overrightarrow{mJ_e}$之值代入下式,

$$\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{A}=\overrightarrow{mJ_r}+\overrightarrow{mJ_e}+\overrightarrow{mJ_c}$$

而得 $$\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{P}=\overrightarrow{mJ_r}+\overrightarrow{mJ_c}。$$

但$\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{P}$乃在地面上施於質點之諸力之和$\overrightarrow{F}$(包括重量),故力學之方程式變爲:

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{mJ_r}+\overrightarrow{mJ_c}$$

但由計算可見末一項對於前兩項爲甚小而可略去。除在幾個精密的實驗,如佛科之擺(pendule de Fancault)等外,此末一項常可略去,而基本方程式書爲:

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{mJ_r}$$

與對於固定系之基本式形狀相同,但須將重量計入施於質點之諸力內耳。

42. 物體之重量 由上已知一質點之重量$\overrightarrow{P}$,可以下式表之:

$$\overrightarrow{P}=\overrightarrow{A}-\overrightarrow{mJ_e}$$

$\overrightarrow{A}$乃星與地球之引力之和,地球之引力$\overrightarrow{A_1}$甚爲重要,餘者以$\overrightarrow{A_2}$表其和。

地球運動對於絕對軸而言,乃二種運動之組合,即繞地軸之轉動,與在地球軌道上之移動。因牽連動爲一移動,故有

$$\overrightarrow{J_e}=\overrightarrow{J_1}+\overrightarrow{J_2}$$

$\overrightarrow{J_1}$表地球自轉(等速轉動)之加速度,$\overrightarrow{J_2}$表公轉(移動)之加速度。因此:

$$\overrightarrow{P}=\overrightarrow{A_1}-\overrightarrow{mJ_1}+\overrightarrow{A_2}-\overrightarrow{mJ_2}$$

但星之引力$\overrightarrow{A_2}$幾爲$\overrightarrow{mJ_2}$一項所消去,此二者之差在實際上,不及重量之六百萬分之一,故

$$\overrightarrow{P}=\overrightarrow{A_1}-\overrightarrow{mJ_1}$$

$\overrightarrow{A_1}$乃地球之引力,向地球之心。$\overrightarrow{mJ_1}$與地軸正交,其值爲$m\,\omega^2 r$,

ω 表地之轉動的角速度,r 表質點離轉動軸之距。$\overrightarrow{mJ_1}$ 與 $\overrightarrow{P}$ 之比等於 $\frac{\omega^2 r}{g}$, g 表所在地之重力加速度。此比值常在 $\frac{1}{300}$ 以下,故爲近似計,可使重量與引力 $\overrightarrow{A_1}$ 相混。

在同一地方此等 $\overrightarrow{A_1}$ 及 $\overrightarrow{mJ_1}$ 諸有向量自身常極相近,故在一小區域内,例如一室內,$\overrightarrow{P}$ 之大小及方向相同。故重量爲一恆力。

設有一體,乃 n 質點,其質量爲 $m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$ 者所組成。則其和

$$M = m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n$$

據定義,乃此體之質量。又此諸質點之重量爲 $m_1 g, m_2 g, \cdots\cdots m_n g$, 且

$$Mg = m_1 g + m_2 g + \cdots\cdots m_n g$$

據定義 $Mg = P$ 乃重量之値,簡言之卽物體之重量(poids),卽組織此體之諸質點之重量

43. 力學之基本單位方向相同經二新量,卽力與質量。爲測算計須爲此等量選定單位,可與由動學研究所得之長度及時間之單位相連。

此力與質量之二單位,非獨立無關,因此二量間有關係式:

$$F = mJ;$$

若選其一爲基本單位,則他一便爲導出單位(wnité dérivée)。

故在力學上有二種基本單位制,卽長時力制與長時質

量制。

第一制通常稱爲工業制 (système industriel), 其單位爲米,秒,與仟克,所謂仟克卽巴黎標準局內所存之一白金條之重,幾等於一立 (litre) 水於其最大密度時,在巴黎所衡之重。質量之單位由下式

$$m = \frac{P}{g}$$

導出,若 $P = g = 9.81$, 則 $m = 1$, 質量之單位因此爲 9.81 立水之質量。

第二制稱爲厘米克秒制(système c. g. s.)其單位爲厘米,秒,與克。質量一克卽上述之白金條的質量之千分之一。力之單位乃由下式

$$P = ma$$

推出,若 $m = 1, a = 1$ 則 $P = 1$。力之單位稱爲達因(dyne), 卽加於單位質量上,有加速度每秒每秒一厘米之力。一克質量之重力,加於自身,在巴黎,其加速度爲每秒每秒981厘米,卽此重力爲 981 達因。故一達因約與毫克之大小同。厘米克秒制不因地而異,此其較工業制優勝之點,而爲科學家所採用也。

第二章

力學之方程式

44. 點之運動方程式 設有一質點,其質量爲 m,同受數力,其和爲 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$。若以固定系或地球爲比較系統,有向量 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 及加速度有向量 $\overrightarrow{\mathrm{J}}$,爲下列力學的基本等式所聯繫:

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}=\overrightarrow{m\mathrm{J}}。$$

設 x,y,z 乃此點對於比較系統內三正交或斜交軸之坐標。又 X, Y, Z 乃 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 之分量。設 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 只與質點之位置,速度及時間有關,例如引力電或磁的作用,僅與點之位置有關。動點在間質中運動,所生之阻力,例如空氣之阻力,與動點之速度有關。故於普通情形,可設 X, Y, Z 爲下列七變數之函數,即 $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t$。

因 $\overrightarrow{m\mathrm{J}}$ 之分量與 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 之分量相等,故有:

$$(1)\left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2}&=\mathrm{X}\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)\\ m\frac{d^2y}{dt^2}&=\mathrm{Y}\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)\\ m\frac{d^2z}{dt^2}&=\mathrm{Z}\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right)\end{aligned}\right.$$

此三方程式(1)稱爲運動之微分方程式。

欲知此運動,須求出三函數:

(2)　$x=f(t)$,　$y=g(t)$,　$z=h(t)$

俾將 x, y, z 與其由(2)所得之一次與二次引數代入(1)式時,(1)之兩端對於 t 之任何值爲恆等式。三方程式(2)稱爲運動之方程式。

故欲決定一質點受已知數力之運動,須求三未知函數,即須由表此三函數之值,及其一次與二次引數(dérivée)之值與 t 之關係式(1)中,求出此三函數,換言之即解運動之微分方程式也。

在算學分析中證明,有 t 之三函數 x, y, z 滿足(1)式,且當 $t=t_0$ 時其值爲先定數 x_0, y_0, z_0 其第一次引數亦爲一定值 x'_0, y'_0, z'_0 故若已知與 t_0 之初值相應之六初值 $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0$ z_0' 則方程式之解完全規定。換言之,若已知施於動點上之力的法則,及動點在 t_0 時之位置與速度,則此運動完全規定。在 t_0 時吾人可將動點置於空間之任何處,給與任何速度。但一經如是放棄之,則其運動即定而不移。例如炮彈自鎗口出,彼時彈之位置與其速度有向量,即彈之運動的初情形(conditions initiales)也。

方程式(1)乃二次微分方程式,因其中之未知函數之引數的次數爲二,其解法常困難,因微分方程式之次數愈高解法愈難。但有時因運動之特別情形,(1)式之解答可滿足一個或多個一次微分方程式,(即只含未知函數之一次引數

之方程式)。於此情形,將此等一次微分方程式代替(1)式中之方程式,較爲便利。吾人於下章可見活力定理及面積定理,於許多地方,可作如是之代替。

45. 已知運動時求力 已知質量及其運動方程式,而欲求力之分量,此問題由方程式(1)易解決之。蓋欲求X, Y, Z,只須算x, y, z之二次引數,而乘以m,此乃一微分的問題。因由

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}=\overrightarrow{m\mathrm{J}}$$

一關係,可見解此問題只須求動點之加速度。

例. 設有運動

$$x=a\cos(\omega t+\alpha),\quad y=b\cos(\omega t+\beta),\quad z=ct;$$

於是 $$x''=-\omega^2 x,\quad y''=-\omega^2 y,\quad z''=0$$

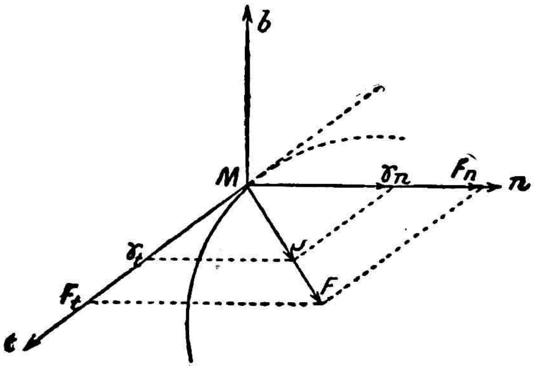
故 $$\mathrm{X}=-m\omega^2 x,\quad \mathrm{Y}=-m\omega^2 y,\quad \mathrm{Z}=0$$

卽欲求之力與Oz軸相遇而正交,其方向對此軸,而與動點離此軸之距離成正比例。

46. 運動之本身的方程式 爲便利計,有時將標記運動之坐標軸改換。欲如是改換,只須於每新系統中表出基等式

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}=\overrightarrow{m\mathrm{J}_0}$$

茲討論一特別情形,設M爲軌道上之一點,取正切線Mt,正方向之主法線Mn及正交於密切面tMn之副法線(binarmale) Mb三線爲三坐標軸(圖46),加速度在此三軸上之分量順次爲:



（圖 46）

$$\gamma_t=\frac{dv}{dt},\qquad \gamma_n=\frac{v^2}{\rho},\qquad \gamma_b=0$$

設 F_t, F_n 及 F_b 爲力在 Mt, Mn 及 Mb 三軸上之分量,則運動之方程式爲:

$$m\frac{dv}{dt}=F_t\quad m\frac{v^2}{\rho}=F_n\quad 0=F_b.$$

此三方程式所附繫之坐標軸,以動點的軌道本身爲根據,故稱爲運動之**本身的方程式**(équations intrinsèques)。當軌道爲幾何的表示時,此方程式應用尤便也。

47. 力場與力線 由44節知一力之分量,可與動點之位置的坐標 x, y, z 與速度的分量 x', y', z' 有關,亦可隨時間 t 而異。

玆設力僅與動點之位置有關,於是 X, Y, Z 僅係 x, y, z 之函數:

$$X=X(x,y,z)\quad Y=Y(x,y,z)\quad Z=Z(x,y,z)$$

X, Y, Z三函數在空間之某區域(D)內而定,吾人稱此三方程式在區域(D)內定一**力場** (champ de forces)。可以設想在(D)之每一點,有一有向量,表在此點之力。此等有向量之全體,即組成此力場。以上之方程式,即定區域(D)內此等有向量之分配。在力場之定義內,吾人假設先選一定質點,又X, Y, Z爲施於此點在x, y, z位置之力的分量。

例如在地面上一小區域內,一質量爲m之質點的重量乃一力,其大小爲mg,可以一垂直的有向量表之。故重力在一小區域內,定一均等之場(champ uniforme),在此場內之任何二點代表力之有向量相等。實際上距離一粁之二點的二垂直線,其間之角爲36″,且每高出地面3粎時,重力之強度減少其於地面時之一百萬分之一。同樣一引力的中心O,對於一定質點之作用,亦作圜O之力場,在此場內之每一點,力之有向量經過O點。

一曲線於其各點,與以此點爲原點之力的有向量相切,則此曲線稱爲**力線** (ligne de forces)。x, y, z, 點之切線爲(dx, dy, dz)有向量所定。因切線有向量與X, Y, Z有向量有同一之方位,故:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}$$

此二方程式稱爲力線之微分方程式;例如以z爲自變數,上式可寫爲:

$$\frac{dx}{dz}=\frac{X}{Z},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{Y}{Z}$$

積分以後得下列之曲線,

$$x=\varphi\,(z, c_1, c_2)$$

$$y=4\,(z, c_1, c_2)$$

含二任意常數 c_1, c_2。通常遇空間之每一點 (x_0, y_0, z_0) 有一力線,因可取 c_1, c_2 之值使 x, y 於 $z=z_0$ 時之值爲 x_0, y_0

在一恆力場內,力線與一定方向平行,故係平行於此方向之諸直線。在重力之例此諸直線,皆係垂直線。若以 z 軸爲垂直軸,則

$$X=0\qquad Y=0\qquad Z=-mg.$$

於是力線之微分方程式爲:

$$\frac{dx}{dz}=0\qquad \frac{dy}{dz}=0,$$

而力線爲　$x=x_0,\qquad y=y_0$

在中心力之場內,因力線各點之切線經過中心O,故爲過中心O之諸直線。若以O爲坐標軸之原點,則

$$X=\lambda x\qquad Y=\lambda y\qquad Z=\lambda z$$

λ 乃 x, y, z 之函數,力線之微分方程式於是爲

$$\frac{dx}{dz}=\frac{x}{z},\qquad \frac{dy}{dz}=\frac{y}{z}.$$

由第一式　$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dz}{z},$

積分之 $x=c_1 z,$

同樣 $y=c_2 z,$

故 $x=c_1 z,\quad y=c_2 z$

表過 O 點之諸直線。

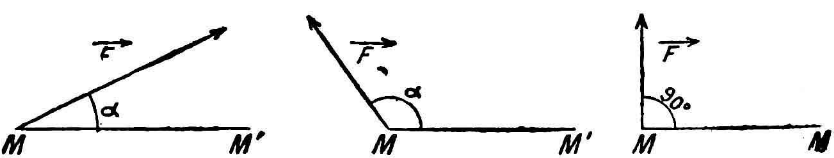
第三章

功與活力

48. 原功與其性質　力與移位二觀念相聯,而有所謂功。設有一質點 M,受一力 $\overrightarrow{F}$ 而得一小距 MM′ 的移位,其位置與方向皆與力相同。吾人以功與力之強弱及移位之多少有比,即與二者之積有比。對於此小量的移位,吾人以功爲 $F\times MM'$ 之積。普通言之,設 M 在任何方向上有一直線的微小移位 MM′,則 $F\times MM'\times\cos\alpha$ 一數,乃對於此微小移位,$\overrightarrow{F}$ 力之**原功**(travail élémentaire de la force $\overrightarrow{F}$),α 表力之方向與 MM′ 之方向間之角度。此功爲正或負或零,視力之方向與移位之方向間之角爲銳或鈍或爲直角。故:

原功乃力及移位二有向量 $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{MM'}$ 之無向積

此可以移位之長度乘力在此移位之方向上之正射影而得,或可以力之大小乘移位在力之方向上之正射影而得。



(圖 47)

由第 5 節知無向積之一因子,若爲數有向量之幾何和,

積之計算法與在算術上相同。設 $\overrightarrow{F}$ 爲同原點 M 之數力之和,則:

和力之原功乃其分力之原功之代數和。

又設 MM′ 移位乃在 M 原點之數有向量的幾何和,則:

對於和移位之原功,乃對於諸分移位之原功之代數和。

49. 原功之分析式 設 $\overrightarrow{F}$ 力之分量爲 X, Y, Z, 有向量 $\overrightarrow{MM'}$ 之分量爲 dx, dy, dz, 此二有向量之無向積爲:

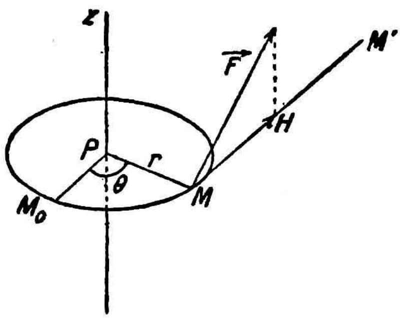
$$Xdx+Ydy+Zdz$$

即原功也。

例如設 $\overrightarrow{F}$ 爲 M 點之重量,又設向上垂直線爲 z 軸,則原功爲 $-mgdz$。

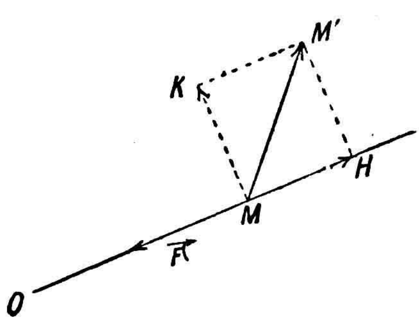
設 M 點在一曲線上移位,則對於 (dx, dy, dz) 有向量之原功,稱爲對於在此曲線上 $MM'=ds$ 一小弧移位之原功。此有向量之長爲 $|ds|$, 乃在曲線之 M 點的切線上,故功等於 $\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}$ 或 $\overrightarrow{F_t}\cdot\overrightarrow{ds}$, 若以 F_t 爲力在正切線上之射影的長度,則表功之式爲 $F_t\,ds$。

例 1° 設 M 在一圓弧上運動,設 Pz 乃圓之軸, r 其半徑, θ 乃半徑 PM 及其初位置 PM_0 間之角(圖 48)。$\overrightarrow{F}$ 之原功乃對於圓周之切線上一小弧移位 $rd\theta$ 而言,故其式爲 $F_t\times rd\theta$ 或 $rF_t\times d\theta$。第一因子乃表力 F 對於 Pz 軸之矩 N, 因力之分量在圓之法線及副法線上所作之功爲零,故原功爲 $N\,d\theta$。



(圖 48)

例 2°　設 $\vec{F}$ 經過一定點 O, 又設 $\varphi(r)$ 爲 $\vec{F}$ 在 OM 軸上之量, r 表 $\overrightarrow{OM}$ 之長; $\varphi(r)$ 之號爲正或負視力爲推斥或吸引而定。若 M 點在任一曲線上運動, 則原功乃對於 MM′ 移位, 在正切線之長 ds 而言。有向量 $\overrightarrow{MM'}$ 乃有向量 $\overrightarrow{MH}$ (在 OM 上其值爲 dr) 與有向量 $\overrightarrow{MK}$ (在 O MM′ 平面內, 正交於 OM 軸) 之幾何和。原功乃對此二移位之原功之和。因 MK 正交於 OM, 即正交於 F, 其功爲零, 其所餘者乃對於 MH 移位之功, 即係 $\overline{F} \times \overline{MH}$ 或 $\varphi(r)dr$。



(圖 49)

50. 總功 設有一質點,在一曲線之弧 M_0M 上運動。以 $M_1, M_2, \cdots\cdots M_{n-1}$ 諸分點,分此弧爲多數小弧。計算 $M_0, M_1, \cdots\cdots M_{n-1}$, M 順次諸點之坐標,而 $ds_0, ds_1, \cdots\cdots ds_{n-1}$ 表 $s_1-s_0, s_2-s_1, \cdots\cdots s-s_{n-1}$ 諸增量。此 $ds_0, ds_1, \cdots\cdots ds_{n-1}$ 諸數可用以計算 $M_0, M_1, \cdots\cdots M_{n-1}$ 諸點之原功。此等功之和爲

$$F_0\,ds_0+F_1\,ds_1+\cdots\cdots+F_{n-1}\,ds_{n-1}$$

$F_0, F_1, \cdots\cdots F_{n-1}$ 乃表力在曲線上 $M_0, M_1, \cdots\cdots M_{n-1}$ 諸點之正切線上之射影的長度。

所謂 $\overrightarrow{F}$ 力沿曲線 M_0M 弧上之**總功** (travail total) 乃 M_0, $M_1, \cdots\cdots M_{n-1}$ 諸點之原功之和,當此等分點無限增加,使相連二分點之距,近而爲零時,此和之極限。

設 F_t 爲力在曲線上坐標爲 s 之一點之正切線上射影的長度:F_t 乃變數 s 之函數,上面之和可寫爲:

$$F_t(s_0)ds_0+F_t(s_1)ds_1+\cdots\cdots+F_t(s_{n-1})ds_{n-1}$$

其極限乃函數 $F_t(s)$ 在 s_0 與 s 間之有限積分,若以 T 表此總功,則

$$T=\int_{s_0}^{s}F_t\,ds$$

注意 I 設曲線上一點之坐標,可以一助變量 (paramètre) q 之函數表之。

$$x=f(q),\qquad y=g(q),\qquad z=h(q)$$

則原功之式爲:

$$F_t ds=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=[Xf'(q)+Yg'(q)+Zh'(q)]\,dq$$

而功之式爲:

$$T=\int_{s_0}^{s} F_t ds=\int_{q_0}^{q}[Xf'(q)+Yg'(q)+Zh'(q)]dq$$

q_0 及 q 表助變量 q 對於 M_0 及 M 點相當之值。

總功通常寫爲

$$T=\int_{M_0}^{M} Xdx+Ydy+Zdz$$

積分號下之 dx, dy, dz 乃曲線之 M_0M 弧上之一點的微分。而此點之坐標以一助變量 q 之函數表之,此變量可以爲弧坐標 s. 於是上列之積分爲沿 M_0M 弧之**線積分** (intégrale curviligue)。

曲線之弧 M_0M 不必須爲 M 點受 $\overrightarrow{F}$ 力所經行之軌道之弧;若其如是,則可以時間 t 代助變量 q。

注意 II　設 $\overrightarrow{F}$ 力在 M_0M 曲線上之各點與曲線正交,對於此曲線上之一小移位的原功爲零,此等原功之總和亦然。總功因其爲常等於零之和的極限故亦爲零。

例 1°　設 $\overrightarrow{F}$ 乃 M 點之重量,且以向上之垂直線爲 Oz 軸,則 $\overrightarrow{F}$ 之分量爲:

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=-mg$$

因原功爲 $-mgdz$, 故總功爲

$$T=\int_{M_0}^{M} -mgdz=-mg(z-z_0)$$

因取 z 爲助變數 q; z 及 z_0 乃 M 及 M_0 點之高。

例 2° 設 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 爲一向心力,常經過坐標軸之原點 O, 且只與 M 離原點之距 r 有關。因原功爲:

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz=\varphi(r)\,dr$$

故總功

$$\mathrm{T}=\int_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}}\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz=\int_{r_0}^{\mathrm{R}}\varphi(r)\,dr,$$

因取 r 爲助變數 q_0 若 $\Phi(r)$ 爲 $\varphi(r)$ 之一原函數 (fonction primitive), 則

$$\mathrm{T}=\Phi(\mathrm{R})-\Phi(r_0)$$

式內之 r_0 及 R 乃 r 於曲線弧上兩端 M_0 及 M 二點之值。

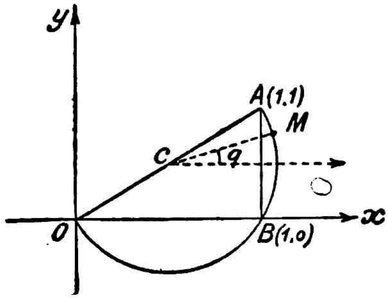
例 3° 設有力場,其力盡平行於 xy 平面,而與 z 無關。在與 xOy 平行之諸平面上,力之分配爲相同。設曲線之弧在 xy 平面上。又設在此平面上之一點 M 之力可以長等於 OM 之有向量表之,其方向與 OM 成 $+\frac{\pi}{2}$ 角。因此其分量爲

$$\mathrm{X}=-y \qquad \mathrm{Y}=+x$$

故原功爲

$$\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy=xdy-ydx$$

由右之 50 圖計算由 O 至 A (1,1) 點沿 OA 直線上的總功,又沿直徑爲 OA 之半圓周 OBA 上之總功,及沿 OBA 斷線上之總功。第一功爲零,因力於 OA 之各點係與 OA 正交,且因 $x=y,\ dx=dy$, 而有



(圖 50)

$$T=\int_0^A xdy-ydx=0$$

欲計算第二功T_2,將半圓周上之一點M的坐標以半徑CM及Ox間之角q之函數表之,在半圓周上此角由$-\frac{3\pi}{4}$變至$+\frac{\pi}{4}$,因此:

$$x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\cos q) \qquad y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}\sin q)$$

$$dx=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin q\,dq, \quad dy=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos q\,dq;$$

$$xdy-ydx=\frac{\sqrt{2}}{4}[\sqrt{2}+\sin q+\cos q]dq$$

$$T_2=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}(\sqrt{2}+\sin q+\cos q)dq$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big[\sqrt{2}\,q-\cos q+\sin q\Big]_{-\frac{3\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}$$

$$T_2=\frac{\pi}{2}$$

計算第三功 T_3, 在 OB 上, $y=0$, $dy=0$ 功爲零,在 BA 上以 y 爲變數; $x=1$, $dx=0$, 即:

$$T_3=\int_0^0 dy=1$$

51. 功之單位 力之單位及長之單位既定,則功之單位當爲其值爲 1 之功。設一質點受一恆力,在力之方位及方向上移動則 $T=Fl$, F 爲力之數值, l 乃移位之長。若 $F=1$, $l=1$, 則 $T=1$。

設以長之單位爲米,力之單位爲仟克,功之單位將爲仟克米(kilogrammètre),即等於一仟克之恆力,施於一點上,此點在力之方位及方向上移位一米,所作之功。

若長之單位爲厘米,力之單位爲達因,則功之單位爲愛格(erg)。

因一米含 100 厘米,一仟克約等於 10^6 達因,故一仟克米約爲 10^8 愛格。

例. 設大氣層厚 60 仟米,一克物自此層最高處墜下至地,試求其重力所作之功。

因重量與離地心之距爲反比例,則在距地心爲 r 處物重當爲 $\frac{R^2}{r^2}$ 克, R 表地之半徑。此題之 $\varphi(r)=-\frac{R^2}{r^2}$ 設以克及仟米爲單位,則

$$T=R^2\int_{R+60}^{R}-\frac{dr}{r^2}=R^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+60}\right)=\frac{60\,R}{R+60}\text{仟克米},$$ T 之單位爲仟克米,因力之單位爲仟克之千分之一,而長之單位

爲米之千倍也。倘對於 1 而略去小數 $\frac{60}{R}$, 則 T=60 仟克米,因

$$T=60\frac{1}{1+\frac{60}{R}}.$$

設以　　　R=6371 仟米,則得 T=59.4。

本題內,重量之定義中,未將地之轉動計入。

52. 力函數與位能　設有一質點 M 在一力場內。當此動點由 M_0 至 M_1 時,此力所作之功通常與此二點之位置,及 M 點所行之曲線之弧的形狀有關。此已表明於50節之例 3 中。但有時不論弧之形狀爲何,此功僅與其兩端 M_0 及 M_1 之位置有關,此可於50節之例 1 與 2 中見之,通常欲其如此,則以 x, y, z 爲變數之函數 X, Y, Z 應滿足下列定理所述之條件。

〔定理〕 欲使功僅與動點所行之弧的兩端有關,則

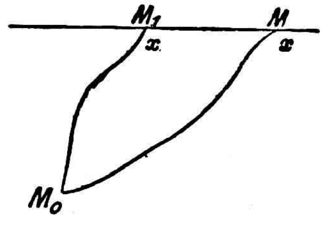
$$Xdx+Ydy+Zdz$$

一式必須亦只須爲 $U(x, y, z)$ 一函數之全微分。

換言之,卽 X, Y, Z 必須亦只須順次爲一函數 $U(x, y, z)$ 對於 x, y 及 z 之偏微分。

1° 此乃必須之條件　設 M_0 爲一定點, M 爲一變點。據假設由 M_0 至 M 之功與 M_0M 路之形狀無關;僅與 M 之位置,換言之卽定其位置之坐標 x, y, z 之值有關。故由 M_0 至 M 之功乃此變數之一函數 $U(x, y, z)$。試求 U 對於 x 之偏微分,於是以

y 及 z 爲一定值 y_1 及 z_1。且設 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 爲一定點，$M(x, y_1, z_1)$ 爲過 M_1 而與 Ox 平行之直線上之一點。當 M 在此平行線上移動時，U 爲含一變數 x 之函數 $U(x, y_1, z_1)$。由 M_0 至 M 可以循任何一道路，例如由 M_0 至 M_1，再循直線道 M_1M；(圖 51)於是功爲



(圖 51)

$$U(x, y_1, z_1)=C+\int_{x_1}^{x} Xdx$$

C 乃一常數，即 $U(x, y_1, z_1)$ 代表由 M_0 至 M_1 之功，上式之右端乃 x 之一函數，其引數對於 $x=x_1$ 爲 $X(x_1, y_1, z_1)$。因此:

$$\frac{\delta U}{\delta x}=X(x, y, z)$$

故 X,Y,Z 乃函數 $U(x, y, z)$ 之偏微分。設取他一定點 M'。則與此點相應之函數 $U'(x, y, z)$ 與 U 之差僅爲一常數，因 U 與 U' 有同一之微分也。且由 M_0 至 M 可假想經過 M_0 點，即有:

$$T_{M_0'}^{M}=T_{M_0'}^{M_0}+T_{M_0}^{M}$$

或
$$U'(x, y, z)=C+U(x, y, z)$$

C 在此表常數 $T_{M_0'}^{M}$

2° 此爲充分之條件，——設

$$Xdx+Ydy+Zdz=dU(x, y, z),$$

而計算由 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 在曲線弧上之功。在此

弧上 x, y, z 乃一助變量 q 之函數,當 $q=q_0$ 時為 x_0, y_0, z_0 當 $q=q_1$ 時,為 x_1, y_1, z_1 而 U (x, y, z) 亦變為 q 之函數,其微分為 $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$。

$$\mathrm{T}_{\mathrm{M}_0}^{\mathrm{M}_1}=\Big[\mathrm{U}\,(x,y,z)\Big]_{q_0}^{q_1}=\mathrm{U}(x_1, y_1, z_1)-\mathrm{U}(x_0, y_0, z_0)$$

故功僅與 M_0 及 M_1 兩點之位置有關。

原功為一全微分,總功只倚動點所作之弧的兩端之位置而變時,則稱力場為自一**力函數**(fonction de forces)所導出。此力函數即 U (x, y, z),其微分即原功。因可以 U+C 代 U (C 為一常數),故力函數非完全確定,可隨便加減一常數。

又設 $-\mathrm{U}=\mathrm{V}$ 則 V 稱為**位能**(potentiel)。因此亦可謂力場自一位能所導出,而有:

$$\mathrm{X}=-\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta x},\quad \mathrm{Y}=-\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta y},\quad \mathrm{Z}=-\frac{\delta \mathrm{V}}{\delta z}$$

位能亦如力函數非完全確定,可隨便加減一常數。

注意　以上之計算,係假設函數 U (x, y, z) 在力場中之每一點僅有一確定之值。換言之即由 M 點出發時,U 為一定之某值,當 M 點在一封閉之曲線上進行時,U 之值作連續的變化,最後 M 點復回其原有之位置時,U 亦復得其原有之值。但於下例則不然,如

$$\mathrm{U}(x, y, z)=\operatorname{arc}\tan\frac{y}{x}$$

由此產生之力場為

$$X=\frac{\delta U}{\delta x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\quad Y=\frac{\delta U}{\delta y}=\frac{x}{x^2+y^2},\quad Z=0$$

若從一點M以arc tan$\frac{y}{x}$之主值(détermination principale)起始進行,在一封閉道上繞 z 軸一週,U之值連續的變化,當M復回至原有之位置時,U之值較前差$\pm 2\pi$。(±號視繞 z 軸之向而定)是在爲X,Y,Z函數所定之力場內,功非與路徑無關,但若限制此場僅空間之一部,而不包含 z 軸在內,則功與所由之路徑爲無關。

53. 均勢面 力場自一力函數U導出時,則面之以

$$U(x,y,z)=C \qquad (C爲常數)$$

爲方程式者,稱**均勢面**(surfaces de niveau)。二均勢面無相交之點,因若如是,則於

$$U=C_1,\qquad U=C_2,\qquad C_1\neq C_2$$

二面之交點U須同時等於 C_1 與 C_2 爲不可能也。於力場之每一點 M_0 (x_0,y_0,z_0) 可通過一均勢面。蓋欲使一均勢面經過 M_0,須有

$$U(x_0,y_0,z_0)=C_0$$

反之均勢面之爲

$$U(x,y,z)=U(x_0,y_0,z_0)$$

者,經過 M_0 點。

由均勢面 $U=C_0$ 上之一點 M_0 (x_0,y_0,z_0),而至均勢面 $U=C_1$ 上之一點 $M_1(x_1,y_1,z_1)$,試求在此路上之功,卽等於

$$U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0) = C_1 - C_0$$

當 M_0 點在均勢面 $U=C_0$, 及 M_1 點在均勢面 $V=C_1$ 上變動時,此功仍不改變。故由一均勢面至他一均勢面所作之功不單與路徑無關,而且與出發及達到之點無關。若路之兩端在同一均勢面上,則功為零。

設有一力場諸力平行於某定平面且與由施力點至此平面之距無關。設以此平面為 xOy 平面,則

$$X = X(x, y), \qquad Y = Y(x, y), \qquad Z = 0;$$

力線皆係與 xy 平行之面上之曲線。且此等曲線可由 xOy 平面上之力線,以平行於 Oz 軸之一移動而得之。又若力場由一力函數導出,則 $Xdx + Ydy$ 乃函數 $U(x, y)$ 之全微分。均勢面 $U(x, y) = C$ 乃其母線平行於 Oz 之圓柱面。此等圓柱之橫切面上橫切線稱均勢線(courbes de niveau)。此所討論之力場可稱為平面力場,因此場之研究,實僅係 xOy 平面上之力之分配的研究也。

54. 定理　在自一力函數導出之力場上各點,力與過此點之均勢面正交。

設 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 為力場上之一點,而

$$U(x, y, z) - U(x_0, y_0, z_0) = 0$$

為過此點之均勢面的方程式。在 M_0 點之法線含次之有向量

$$\frac{\delta U}{\delta x_0} = X(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\delta U}{\delta y_0} = Y(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\delta U}{\delta z_0} = Z(x_0, y_0, z_0)$$

卽力之有向量。

由此定理,力線與均勢面成直角相交。設M_0爲力線L上之一點,則L線上M_0點之切線,含M_0點之力的有向量,而此有向量與過此點之均勢面正交。

故力線乃均勢面之**正交曲線**(trajectories orthogonales)。若此力場爲平面的,則力線乃均勢線之正交曲線。

例1° 在重力場內,有

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=-mg$$

$$Xdx+Ydy+Zdz=-mg\,dz=d(-mgz)$$

可取$U=-mgz$;均勢面乃水平面$z=$常數,而力線乃垂直線:

例2° 只與離中心之距有關之向心力場:

$$Xdx+Ydy+Zdz=\varphi(r)dr=d\Phi(r)$$

$\Phi(r)$乃$\varphi(r)$之一原函數。故可取

$$U=\Phi(r)=\Phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}),$$

均勢面乃$\Phi(r)=$常數,卽$r=$常數之球面,而力線乃此等同心球之半徑。

注意I 若$Xdx+Ydy+Zdz$爲一全微分,則當坐標軸改換時,此性質仍然保存。因若$Xdx+Ydy+Zdz$爲一全微分,功與所由之路徑無關,且其逆理亦眞;而功之性質與坐標軸之位置完全無關也。

注意II 設Δ爲任一軸,試於此軸上一點M,在Δ方位上定$U(x,y,z)$之引數。設U與U'乃U在M點與Δ上M附近之

一點M′之值，則 $\frac{U'-U}{\overline{MM'}}$ 之比，當M′趨近於M時之極限。據定義此乃U在M點依Δ方位之引數。

試證此引數乃等於 $\overline{F_\Delta}$，$\overline{F_\Delta}$ 即以M爲原點之力，在Δ上之射影。

（證）常可以Δ軸爲 Ox 軸；U′−U不變，因此乃表動點由M至M′時，力所作之功也。故 $\frac{U'-U}{\overline{MM'}}$ 之極限乃等於 $\frac{\delta U}{\delta x}=X$，而X乃表 $\overline{F_\Delta}$ 之數值。

茲特於力場之各點，計算U在過此點之均勢面之法線上的引數。試以M點之力之方向爲法線之正方向，則有

$$\frac{dU}{dn}=F$$

$\frac{dU}{dn}$ 乃表在法線軸上之數，F乃力之強度，即與其在此軸上之射影相重合。$\frac{dU}{dn}$ 既爲正，則其所從出之 $\frac{U'-U}{\overline{MM'}}$ 亦爲正。若M′在法線之正方向上，$\overline{MM'}$ 爲正，故U′−U亦爲正，即U′>U，因此正方向乃力之方向，故力在U增加之方向上。簡單言之，即力在均勢面之增進的方向上。此即表明若M′在力之有向量上，由原點而至終點運動時，與此點M′相當之U之值係增加的。總之M點之力等於U在過此點之均勢面之法線上的引數，而此力之方向在均勢面增進之方向上。

作與U及U+ε(ε　0)相當之二相鄰的均勢面。在第一面之各點，力之方向爲交第二面於M′之半法線的方向，而此力之數值約等於 $\frac{\varepsilon}{\overline{MM'}}$，故沿第一面上，力之數值係與MM′之

距爲反比。

若力場爲平面的，$U(x,y)=C$ 乃表 xOy 平面上之均勢線。在此面上之各點，力與過此點之均勢線正交，而此力之方向在均勢線增長之方向的法線上。

55. 定理　若 $\overrightarrow{F_1}$ 之力場從力函數 U_1 所導出，又 $\overrightarrow{F_2}$ 之力場從力函數 U_2 所導出，則 $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ 之力場從力函數 U_1+U_2 所導出。

(證) 因 $\overrightarrow{F_1}$ 力場爲 X_1, Y_1, Z_1 三函數所規定，而有

$$X_1dx+Y_1dy+Z_1dz=dU_1$$

又 $\overrightarrow{F_2}$ 力場爲 X_2, Y_2, Z_2 三函數所規定，而有：

$$X_2dx+Y_2dy+Z_2dz=dU_2$$

因此

$$(X_1+X_2)dx+(Y_1+Y_2)dy+(Z_1+Z_2)dz=d(U_1+U_2),$$

但 X_1+X_2, Y_1+Y_2, Z_1+Z_2 乃定 $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$ 力場之三數，換言之即此力場在各點爲 $\overrightarrow{F_1}$ 及 $\overrightarrow{F_2}$ 之幾何和所定。而由上式證明此力場係由力函數 U_1+U_2 所導出。

此定理自然可推廣於任何數之力之和所成之力場的情形。

例如地之重力場有 $U_1=-mg\,z_1$ 又過原點而與距離成比例之向中心引力場有 $\varphi(r)=-kr$ 而 $U_2=-\frac{kr^2}{2}$。此二力之和所成之力場由一力函數 $-(mgz-\frac{1}{2}kr^2)$ 所導出，而均勢面之方程式爲：

$$\frac{1}{2}kr^2+mgz=-C$$

或
$$\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2)+mgz+C=0$$

卽同心之諸球面，且亦易直接證明$\overrightarrow{F}_1+\overrightarrow{F}_2$經過$Oz$軸上之一定點，而其大小與其施力點至此定點之距離爲正比。

56. 活力　有一質點質量爲m，速度爲v，則mv^2謂之質點之**活力** (force vive) 卽質量與其速度之平方的乘積。*一點M受一力$\overrightarrow{F}$之作用，在其軌道上移位，其活力之改變與此力所作之功有一顯著之關係，特述於下列之定理中：

活力定理　**一質點受一力$\overrightarrow{F}$之作用，在其軌道上由M_0點至M_1點時其活力之改變的二分之一，等於此力$\overrightarrow{F}$在此移位所作之功。**

$$\frac{1}{2}(mv_1{}^2-mv_0{}^2)=T_{M_0}^{M_1}$$

v_0及v_1表在動點M_0及M_1時之速度之大小。

先於移位爲無窮小時，證此定理。由運動之本身的方程式之一得：

$$m\gamma_t=F_t$$

由18節之注意此式可寫爲：

$$\frac{1}{2}m\frac{dv^2}{ds}=F_t$$

*註——由此定義可見活力雖名曰力，而其實非力；其一半卽$\frac{1}{2}mv^2$稱爲動能(Kinetic Energy)，故活力實動能之倍。

或
$$d\frac{1}{2}mv^2=F_t ds$$

此式卽表明半活力之微分等於軌道上之原功。

求於 M_0 及 M_1 之間此式兩端之積分,而有:

$$\int_{s_0}^{s_1} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{s_0}^{s_1}=\frac{1}{2}(mv_1^2-mv_0^2)$$

與
$$\int_{s_0}^{s_1} F_t ds=T_{M_0}^{M_1}$$

故
$$\frac{1}{2}(mv_1^2-mv_0^2)=T_{M_0}^{M_1}$$

於功之計算,有多種之情形:

1° 力與動點之位置與速度有關時。功之計算須先知軌道與速度,換言之,卽須全知運動。因此本定理不能應用以定運動。

2° 力只與動點之位置有關時,此點在力場內,功之計算僅須知軌道已足。故已知軌道時,本定理可應用以求動點在軌道上各點之速度而定其運動。

3° 力場從一力函數 $U(x,y,z)$ 所導出時。功之計算不必須知軌道。若 x_0, y_0, z_0 爲動點在初位置時之坐標,則於軌道上之每一點 x, y, z 時有:

$$\frac{1}{2}(mv^2-mv_0^2)=U(x,y,z)-U(x_0,y_0,z_0)$$

或
$$\frac{1}{2}mv^2-U(x,y,z)=\frac{1}{2}mv_0^2-U(x_0,y_0,z_0)=h$$

此常數h稱爲**活力常數**(constante des forces vives)例如於引力場內之一動點,可以取$U=-mgz$;活力定理即表$\frac{1}{2}mv^2+mgz$或v^2+2gz爲常數。

注意　$\frac{1}{2}mv^2=U(x,y,z)+h$

一等式,表明動點每次經過均勢面$U=C$時,v^2之值與前相同。速度有向量之位置及方向或可改變,但其數值則不變。

57. 動能,位能與總能　一質點在由一力函數U,或一位能$-U$所導出之力場內時,可給與下列等式之各項一名詞:

$$\frac{1}{2}mv^2-U(x,y,z)=h$$

而將活力定理以更易想象之形式說出。$\frac{1}{2}mv^2$稱爲質點之**動能**(énergie cinétique),只與動點之速度而不與其位置有關。$-U$稱爲點之**位能**(énergie potentielle),只與點之位置有關,位能如力函數U,非完全一定,而可隨便增減一常數。又動能與位能之和稱**總能**(énergie totale)。故一質點在由位能導出之力場內,受力之作用而移位時,其活力定理即表明"**質點之總能爲常數**"動能增,則位能損;動能爲零,則位能極大。反之亦然。

58. 運動方程式之第一積分　表示活力定理的方程式,在力場由一位能所導出之情形時,對於解運動方程式有所貢獻否?此爲本節所欲研究之問題。運動方程式可寫爲:

$$E_1=mx''-X=0,\quad E_2=my''-Y=0,\quad E_3=mz''-Z=0$$

又活力方程式爲:

$$(1)\qquad \frac{1}{2}m(x'^2+y'^2+z'^2)=U+h$$

玆先證明此含未知函數 $x(t), y(t), z(t)$ 之方程式(1)乃運動方程式之必有結果。

設 $z'\neq 0$ 則

$$(\mathrm{I})\begin{cases}E_1=0\\E_2=0\\E_3=0\end{cases}\qquad\qquad (\mathrm{II})\begin{cases}E_1=0\\E_2=0\\E_1x'+E_2y'+E_3z'=0\end{cases}$$

二聯立方程式爲同解(équivalents)。此假設 $z'\neq 0$ 之意,卽設軌道非一在 xOy 平面上之平面曲線。此假設自然可以選擇坐標軸之位置而得。但(II)內之最末一方程式展開之爲:

$$m(x'x''+y'y''+z'z'')-(Xx'+Yy'+Zz')=0$$

或
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv^2-U\right]=0$$

此方程式卽與方程(1)相同,故(I)組與下列之組爲同解:

$$(\mathrm{II}')\qquad E_1=0,\qquad E_2=0,\qquad \frac{1}{2}mv^2=U+h$$

此新組是否較舊組更爲便利?

解(I)組,卽係求 t 之三函數 $x(t), y(t), z(t)$,以滿足(I),而且使其合於所給之初條件。若已知三函數 $x(t), y(t), z(t)$ 合於(I)組,而且含六任意常數者,則(I)組已得解答。有時在未得

此等函數前,先有下列之關係:

$$F(x, y, z, x', y', z', t) = h,$$

爲(I)組諸解所適合,并含一任意常數h,於是稱函數F乃(I)組之**第一積分式**(intégrale première)。(I)組之諸方程式含未知函數與其一次引數及二次引數。今若以只含未知函數與其一次引數之第一積分式代(I)組之方程式之一,此在解(I)組之方程式爲一進步。

故因活力積分,可將組(II)′代表組(I),所謂組(II)′即以第一積分式代E_3而得也。

尙有一情形可以求得第一積分式者,即係向心力之力場的情形。此處可以下列之組(III)代替組(I),

$$\text{(III)} \qquad E_1 = 0, \qquad xE_3 - zE_1 = 0, \qquad xE_2 - yE_1 = 0$$

若設軌道不在yOz平面內,(此假設同上理是常可能的)則(I)(III)二組爲同解。若以坐標軸之原點爲力之中心,則$xZ - zX = 0$,而有

$$xE_3 - zE_1 = m(xz'' - zx'') = m\frac{d}{dt}(xz' - zx')$$

故(III)之第三方程式可書爲

$$xz' - zx' = C_0$$

而第三方程式同理可書爲

$$xy' - yx' = C$$

C_0及C皆爲常數。故組(I)與下列之含二個第一積分式之組

(III)相同:

$$(\mathrm{III})' \qquad E_1=0, \qquad xz'-zx'=C_0, \qquad xy'-yx'=C。$$

吾人可更進一步,得一不含引數之第一積分式以代此組內之二個一次微分方程式之一。爲簡單計,可設動點之初位置與初速度皆在 xOy 平面內,則 $z_0=z_0'=0$ 因 $C_0=x_0z_0'-z_0x_0'=0$,故第二方程式變爲

$$xz'-zx'=0$$

或
$$\left(\frac{z}{x}\right)'=0$$

故
$$z=C_1x$$

C_1 乃一常數,爲 $z_0=C_1x_0$ 等式所定。因 $z_0=0$,而 x_0 可設爲非零,故 $C_1=0$,則第二方程式與 $z=0$ 相同,卽組(I)與下列之(III)″相同:

$$(\mathrm{III})'' \qquad z=0, \qquad xy'-yx'=C, \qquad E_1=0$$

第一方程式表軌道爲平面的,第二表運動遵守面積定律。吾人已於20節研究知加速度爲中心的之時,常有此二結果。

若此中心力更由一力函數所導出者,例如設此力只與離中心之距有關,則由活力定理更可以一新第一積分式代 E_1。於此情形設 xOy 平面爲含軌道之平面,則面積積分與活力積分成二含 x 及 y 之一次聯立微分方程式。解此二方程式,卽得所求之運動方程式,故以

$$xE_2 - yE_1 = 0, \qquad y'E_2 + x'E_1 = 0$$

代
$$E_1 = 0, \qquad E_2 = 0$$

除下列特別情形外,此二組係同解。

若
$$xx' + yy' = 0,$$

或
$$x^2 + y^2 = \text{常數},$$

即軌道爲圓周時,則不可以第二組代替第一組。

第四章

一自由點運動之舉例

59. 恆力場內之運動 設有一質點M,其質量爲m,由其初位置M_0,以速度$\vec{V}_0$,抛於恆力$\vec{F}$(卽大小與方位及方向常爲一定)之力場內:此卽擲一小石子於重力場內之情形。茲先證此運動係平面的,設M'爲M在與$\vec{F}$之方向正交之平面上之射影,則此M'點之加速度爲零;而M'之運動爲直線等速動。(見18節)此運動之初速度乃$\vec{V}_0$之射影。若此射影非零,M'之軌道爲一直線,而M在與$\vec{F}$平行,而過此直線之平面內。若$\vec{V}_0$之射影爲零;M'點固定,而M作一與$\vec{F}$平行之直線。

直線動 M點在初時,由M_0處以與$\vec{F}$方向平行之速度$\vec{V}_0$抛出。設$\vec{F}$爲重量,并取一向上垂直線爲Oz軸,M_0點爲原點;$\vec{V}_0$在Oz直線上其長爲v_0運動方程式之一爲:

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg;\text{於是}\quad \frac{d^2z}{dt^2}=-g\quad \frac{dz}{dt}=-gt+C;$$

但當 $t=0,\quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0=v_0;\quad$ 故 $C=v_0$

因此 $$\frac{dz}{dt}=-gt+v_0$$

而 $$z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C';$$

又當　　　　　$t=0,\ z=0$;故 $C'=0$ 運動方程式爲

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$$

而　　　　　　　　$$v=-gt+v_0$$

(討論)若 $v_0\leqslant 0$, 卽 M 點初向下擲,或自由墮下,v 常爲負,卽常減,則 M 點自 M_0 常向下作等加速動。

若 $v_0>0$, 於 $t\quad \frac{v_0}{g}$ 時,$v>0$ 於 $t_1=\frac{v_0}{g}$ 時 $v=0$, 在此時此點之位置爲 M_1, 其高爲

$$z_1=-\frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g}+\frac{{v_0}^2}{g}=\frac{{v_0}^2}{2g}$$

是後復由 M_1 自由下墜。故當 $t<t_1$ 時此點作等減速動,由 M_0 以達於最高點 M_1;繼後由 M_1 以等加速動下墜。

利用活力定理亦可以求得此等結果:

$$\frac{1}{2}(v^2-{v_0}^2)=-gz$$

$$v^2={v_0}^2-2gz$$

若 $v_0\leqslant 0$, 動點下降,z 爲負,而 v 常增。

若 $v_0>0$, 動點初向上,v 先減少,以至於 $z=\frac{{v_0}^2}{2g}=z_1$ 時爲零,繼動點再下降。當 z 再得原有之數值時,v 之絕對值亦與前同,因 v^2 復得原有之值。故於上昇或下降點經過同一水平面時,速度之數值相同,此等水平面皆均勢面也。

曲線動　設以軌道之平面爲 xOy 平面,此平面乃爲 $\overrightarrow{V_0}$ 及 $\overrightarrow{F}$ 二方位所定。設 $\overrightarrow{F}$ 爲重量,M_0 爲原點,Oy 爲向上垂直線,

Ox 與 $\overrightarrow{V_0}$ 在 Oy 之同一邊。如是初速度有向量與 Ox 成 α 角，在 $-\frac{\pi}{2}$ 及 $+\frac{\pi}{2}$ 之間，而初速度之分量爲 $x'_0=V_0\cos\alpha$ 0 與 $y'_0=V_0\sin\alpha$。M 在 Ox 上之射影 M′ 之加速度爲零，其運動爲等速，而此速度爲 $V_0\cos\alpha$，此 M′ 點之運動方程爲

$$x=V_0\cos\alpha\cdot t$$

M 在 Oy 上之射影 M″，以初速度 $V_0\sin\alpha$ 從 O 拋起；且受等於 $-g$ 之加速度，其運動適研究之，即於上 $V_0\sin\alpha$ 代 V_0 以 y 代 z 即得：

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0\sin\alpha\cdot t$$

故 M 點之運動方程式爲：

$$x=V_0\cos\alpha\cdot t,\quad y=-\frac{1}{2}gt^2+V_0\sin\alpha\cdot t$$

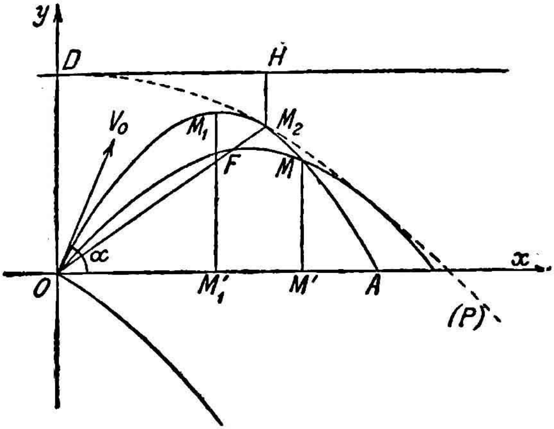
欲求 M 點之軌道的方程式，只須由第一式取出 t，代入第二式，於是有：

$$t=\frac{x}{V_0\cos\alpha},\quad y=-\frac{1}{2}\frac{gx^2}{V_0^2\cos^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\cdot x$$

y 爲 x 之二次三項式，故軌道爲拋物線，其軸乃垂直的 M 點之運動又可視爲二直線運動之和，即 M″ 點在垂直線上之相對運動與此垂直線（爲 M′ 點之運動所規定者）之等速的直線的牽連運動之和，即吾人已在 34 節討論之一運動。

現討論 M 點之運動。其在 Ox 上之射影 M′ 以等速 $V_0\cos\alpha>0$ 移動。若 $\alpha\leqslant 0$，M″ 以等加速動下落，M 點所作之拋物線

弧不含其頂點(圖 52)。若 $\alpha>0$, M″ 點上昇至 M_1 而後下降;在拋物線上之M點上昇至其頂點 M_1 然後下降.又復經過O點



(圖 52)

之水平面,而至所謂墜落點A(point de chute)。在直線動之情形內,已知 $t_1=\frac{v_0}{g}$, 此處以 $V_0\sin\alpha$ 代 V_0, 故 $t_1=\frac{V_0\sin\alpha}{g}$, M 在曲線上由O至A需時 $2t_1$, 故此過程之時(durée du trajet) T 乃 $T=2t_1=\frac{2V_0\sin\alpha}{g}$。而 M_1 點之縱坐標 y_1 乃 $\frac{v_0^2}{2g}$ 或 $\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}$。

拋物線之助變量(paramètre) p 乃 $\frac{V_0^2\cos^2\alpha}{g}$, 因此乃 x^2 之係數之倒數之半。由原點至其準線(disectrice)之距離OD爲:

$$y_1+\frac{p}{2}=\frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g}+\frac{V_0^2\cos^2\alpha}{2g}=\frac{V_0^2}{2g}$$

而與投射角 α (l'angle de tir) 無關。設速度之值爲常數

V_0,則與各射角相當之軌道爲同過O而同具一準線之諸拋物線。設M_2爲拋物線軌道與OF的第二交點,而F乃焦點,於是$OF=OD$, $M_2F=M_2H$, H乃M_2在準線上之正射影,故$M_2O=M_2H+OD$。於是M_2在以O爲焦點DH爲頂點之切線之另一拋物線(P)之上,M_2H+OD爲自M_2點至拋物線(P)的準線之距離。(圖52)此拋物線(P)在M_2點與軌道相切,因此兩曲線均以$O\hat{M}_2H$之分角線爲切線。因此與同一初速度V_0相當之諸軌道各與拋物線(P)相切,而且同過(P)之焦點O。此等軌道全在(P)之內,因二拋物線其軸同爲垂直者僅有二交點。此二交點或相異或相重,由是(P)外之點不爲任何軌道所能及,故(P)有**安全拋物線**(parabole de sureté)之稱。

在(P)內之一點,可以爲兩軌道所及,試計算其投射角α。軌道之方程式爲:

$$y=-\frac{gx^2}{2V_0^2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+x\operatorname{tg}\alpha$$

設已知目的點M之坐標x與y,則投射角α可由含$\operatorname{tg}\alpha$之二次方程式而定。當M在(P)之內時,易見其有二根。於此過M之二軌道中,在下者α之值較小,$V_0\cos\alpha$之值較大,即M點在Ox上之射影的速度較大,而先達M′點,換言之卽彈之隨低下的一軌道者,首先達目的點。

注意 I 若取三正交軸爲坐標,Oz爲向上之垂直線,則運動方程式爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=-mg$$

於是得

$$x=C_1t+C_2,\quad y=C_3t+C_4,\quad z=-\frac{1}{2}gt^2+C_5t+C_6$$

故有六常數,而爲初條件所定。

注意II　以上之計算,係假設射彈在眞空內,若在空氣中則動點受有空氣之阻力$\overrightarrow{R}$,據實驗此阻力可以在軌道切線上之一有向量表之,其方向與速度之方向相反,其大小具mCF(v)之形,F(v)乃速度v之函數,C爲一係數,以射彈之形狀與大氣之氣象情形而定。

玆證此軌道仍係一平面曲線。M在水平面上之射影M′點只受$\overrightarrow{R}$之射影$\overrightarrow{R'}$力之作用。此力在M′點之軌道的切線上,是於此點之運動速度與加速度常在同一直線上,故此運動乃直線運動。(見17節註I)此直線之方向乃初速度$\overrightarrow{V_0}$之射影。若此有向量係垂直的,則M_0之射影M'_0之速度與加速度均爲零;此M′不動,而M之軌道乃一垂直線。

對於直線運動之情形,有下列之方程式

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g\pm\frac{R}{m}$$

向下運動時應取＋號,向上時則取－號。若$\frac{R}{m}=$CF(v),則視F(v)爲偶函數或奇函數,而有兩種情形:

若F(v)爲奇函數,即F$(-v)=-$F(v)時則有

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g-\mathrm{CF}(v)。$$

而此單獨一式,足以應付向上向下二種情形。例如設 $\mathrm{F}(v)=\mathrm{A}v^{2n+1}$, A 乃一正常數, n 係整數。

若 $\mathrm{F}(v)$ 爲偶函數,卽 $\mathrm{F}(-v)=\mathrm{F}(v)$ 時,則於向上運動方程式爲:

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-g-\mathrm{CF}(v),$$

於向下運動時方程式爲: $\frac{d^2z}{dt^2}=-g+\mathrm{CF}(v)$。運動之微分方程式具二相異之形,與運動之二方面相當,在此情形例如 $\mathrm{F}(v)=\mathrm{AV}^{2n}$。

在曲線運動,則無此區別,因 v 不變其符號也。

空氣之阻力對於運動大有影響,軌道不復爲一拋物線,而具一垂直的漸近線。實際上, $\mathrm{F}(v)$ 函數爲一由實驗得來之數值表,而不能僅以通常函數表出之。運動方程式之解,僅可以其近似值代之。

60. 與距離正比之向心引力 加速度旣爲向心的,由20節,已知運動乃平面的。此軌道之平面乃爲力心O與初速度 $\overrightarrow{\mathrm{V}_0}$ 所定。(若此有向量不過O點) 在此平面上運動遵循面積定律,而向徑 OM 常向一方向轉動。若 $\overrightarrow{\mathrm{V}_0}$ 之方向過O則運動爲直線的,在 OM_0 直線上, M_0 乃動點之初位置。

直線動 設 Ox 爲動點所在之直線, x_0 爲 M_0 之坐標, x'_0

乃初速度之代數值,

$$\varphi(r)=-kr$$

乃力在OM徑上之值, k 爲一正數。運動方程式之一爲

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \text{ 或 } \frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

設 $\frac{k}{m}=\omega^2$。此最後之式乃常係數的一階微分方程式。欲積分之,先求 $e^{\lambda t}$ 形之特別解。λ 爲一常數,應爲 $\lambda^2+\omega^2=0$ 之解答。由是 $\lambda=\pm\omega i$。所求之普通積分爲:

$$x=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}=C\cos\omega t+C'\sin\omega t,$$

式中 $C=C_1+C_2$, $C'=i(C_1-C_2)$, 試以初條件定C及C'之值,於下列等式內,

$$x=C\cos t+C'\sin\omega t,\quad \frac{dx}{dt}=-\omega C\sin\omega t+\omega C'\cos\omega t$$

當 $t=0$ 時有

$$x_0=C \qquad x'_0=\omega C',$$

而運動之方程式爲

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{x'_0}{\omega}\sin\omega t.$$

此乃一簡諧運動,其週期爲 $\frac{2\pi}{\omega}$,而其振幅爲 $\sqrt{x_0^2+\frac{x'^2_0}{\omega^2}}$。由此可見週期與初情狀無關。在特別情形設點之初速度爲零, $x'_0=0$ 運動之方程式爲:

$$x=x_0\cos\omega t$$

在 $\frac{2\pi}{\omega}$ 時後,動點復回至初位置,與初情形全同。動點於

O點左右無限的擺動,振幅爲$|x_0|$,此種擺動之週期與振幅無關,稱曰等時(isochrone)擺動。活力定理在此爲:

$$\frac{1}{2}m(v^2-x'^2_0)=-\frac{k}{2}(x^2-x_0^2)$$

或
$$v^2=x'^2_0-\omega^2(x^2-x_0^2)$$

可以坐標之函數計算速度。V之絕對值,僅視x^2而定,在來回之途程中,與O等距處,速度之數值相同。且均勢面爲以O爲心之球面,每當動點過此面時,速度之數值相同。

曲線動 試於O及$\overrightarrow{V_0}$所定之平面內,取二正交或斜交軸Ox及Oy。自M以平行於Oy之向在Ox上之射影M′,爲O所吸引其引力爲$-kx$。自M以平行於Ox之向在Oy上之射影M″亦爲O所吸引,其引力爲$-ky$。蓋$-x$及$-y$乃$\overrightarrow{MO}$之分量,而$\overrightarrow{kMO}$之分量爲$-kx$及$-ky$也。

故運動方程式爲:

$$x=x_0\cos\omega t+\frac{x'_0}{\omega}\sin\omega t$$

$$y=y_0\cos\omega t+\frac{y'_0}{\omega}\sin\omega t$$

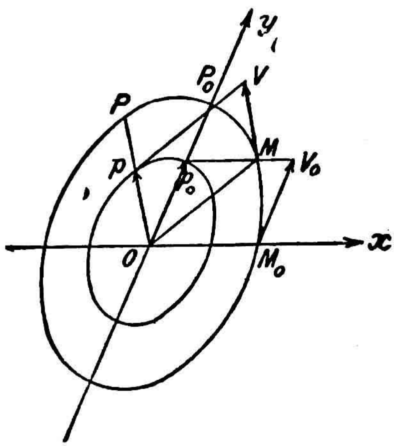
x'_0, y'_0乃初速度$\overrightarrow{V_0}$之分量。

若特以OM_0軸爲x軸,過O點平行於$\overrightarrow{V_0}$之軸爲y軸,則有$x_0>0$, $y_0=0$及$x'_0=0$, $y'_0=V_0>0$而方程式變爲:

$$x=x_0\cos\omega t$$
$$y=\frac{V_0}{\omega}\sin\omega t$$

於是
$$\frac{x^2}{x_0{}^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}=1$$

此乃對於二共軛徑之橢圓的方程式。(圖 53) 亦即 M 點之軌道，依面積定律作成，向徑常循同一方向，即 Ox 至 Oy 之方向而轉動 (因 $y'_0>0$)。動點在其軌道橢圓上走一周之時間爲 $\frac{2\pi}{\omega}$，與初情狀無關。



(圖　53)

在 Ox 及 Oy 上，共軛半徑之長 $OM_0=x_0$，$OP_0=\frac{V_0}{\omega_0}$ 初速度等於 $\omega\cdot OP_0$，即 ω 與 OM_0 之共軛半徑之積。此性質可以適用於軌道上之任何一點 M，因可以取此點爲初位置也。設動點自 M 拋出，其速度與在第一軌道上該處所有者相同，則此點所作之軌道與前一軌道重合。故有 $\overrightarrow{V}=\omega\cdot OP$，OP 乃 OM 之共軛半徑。作 $\overrightarrow{Op}$ 等於 $\overrightarrow{V}$，則此有向量在 OP 上，而有 $\frac{Op}{OP}=\omega$，但 p

點之軌道爲運動之速度圖,故此速度圖乃一與軌道相似之橢圓,其相似心爲O,相似比爲ω。

注意 應用活力定理:原功爲:

$$-kr\,dr=d\left(-\frac{1}{2}kr^2\right)$$

於是
$$\frac{1}{2}mV^2=-\frac{1}{2}kr^2+h$$

或
$$\frac{V^2}{\omega^2}+r^2=常數$$

但$\frac{V}{\omega}=OP$, $r=OM$,即$\overline{OM}^2+\overline{OP}^2$之和爲常數.此乃幾何學上之一定理,即橢圓的二共軛徑之長的平方之和爲常數。

應用面積定理:面積速度爲常數,此速度等於OM Vp平行四邊形之面積(圖53)。因$Op=\omega\cdot OP$此平行四邊形之面積等於OM及OP上之平行四邊形之面積的ω倍。故此後一面積亦爲常數。此亦幾何學上之定理,即以橢圓的二共軛徑爲邊之平行四邊形的面積爲常數。

61. 阻尼擺動——非週期動 設動點M在一間質內移位,間質對於動點之運動加以阻礙,此阻力與其速度成比例(對於速度小者假設與實驗結果相合)。茲所討論者係設動點受過O點之中心力之作用或於初位置M_0點,以方向過O點速度出發,或於M_0點安置,無初速度。

此運動乃直線的,因M在與OM_0正交之平面上之射影

M',於 M'_0 點之速度與加速度皆爲零,故平衡不動。M_0 點旣固定,則 M 點在 OM_0 線上移位。

以 OM_0 線爲 x 軸,設中心引力與距離成比例,爲 $-m\omega^2x$。又阻力之值爲 $2\lambda mx'$,λ 乃一正常數。而運動之方程式爲:

$$mx''=-m\omega^2x-2\lambda mx'$$

或
$$x''+2\lambda x'+\omega^2x=0$$

此常係數的一階微分方程式,有一普通積分,其形視其特徵方程式(équation caractéristique)。

$$r^2+2\lambda r+\omega^2=0$$

之根而定。當 λ 值小以致 $\lambda^2-\omega^2$ 爲負時,二根爲虛數,積分乃三角函數。若 $\lambda^2-\omega^2$ 爲正,二根皆負,積分乃含二負指數函數之和。

第一情形　$\lambda<\omega$　設　$\omega^2-\lambda^2=\omega_1{}^2$　特徵方程式之根爲 $-\lambda\pm i\omega_1$ 普通積分爲:

$$x=e^{-\lambda t}(C\cos\omega_1t+C'\sin\omega_1t)$$

於是
$$x'=e^{-\lambda t}[(\omega_1C'-\lambda C)\cos\omega_1t-(\omega_1C+\lambda C')\sin\omega_1t]$$

試計算 C 及 C'。當 $t=0$ 時,x 及 x' 之值爲 x_0 及 x'_0

故
$$C=x_0,\qquad C'=\frac{x'_0+\lambda x_0}{\omega_1}$$

因此
$$x=e^{-\lambda t}\left(x_0\cos\omega_1t+\frac{x'_0+\lambda x_0}{\omega_1}\sin\omega_1t\right)。$$

括弧內之式,可以改作 $A\sin(\omega_1t+\varphi)$ 的形式。A 表擺幅,φ 表初相,可以恆等式之法定之。

設 $$A\sin\varphi=x_0,\qquad A\cos\varphi=\frac{x'_0+\lambda x_0}{\omega_1},$$

於是 $$A=\sqrt{x^2_0+\left(\frac{x'_0+\lambda x_0}{\omega_1}\right)^2},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{x_0\omega_1}{x'_0+\lambda x_0};$$

$$x=Ae^{-\lambda t}\sin(\omega_1 t+\varphi)$$

與 $$x'=-Ae^{-\lambda t}\left[\lambda\sin(\omega_1 t+\varphi)-\omega_1\cos(\omega_1 t+\varphi)\right]$$

二等式,表此運動乃阻尼擺動(mouvement vibratoire amorti 見 22 節)。對於 t 爲

$$\operatorname{tg}(\omega_1 t+\varphi)=\frac{\omega_1}{\lambda},$$

方程式之根者,速度 $x'=0$。此等根之形爲 $t_1+k\frac{\pi}{\omega_1}$,動點之運動的方向在每等時期 $\frac{\pi}{\omega_1}$ 中改變,擺動仍具等時性,一完全擺動之週期 $T_1=\frac{2\pi}{\omega_1}$,因

$$\omega_1=\sqrt{\omega^2-\lambda^2}\quad \omega。$$

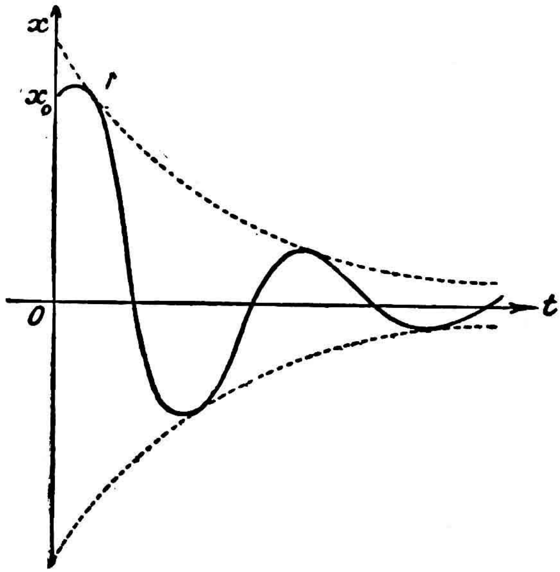
故 T_1 較不受阻礙之簡諧擺動週期 T 稍長。半週期擺動之擺幅,按幾何級數而損,因 x 之極大及極小值具 $Ae^{-\lambda\left(t_1+k\frac{T_1}{2}\right)}$ 之形,級數之公比爲 $e^{-\frac{\lambda T_1}{2}}$,而 $e^{-\lambda T_1}$ 一因數與一全擺動相當,亦卽相連二極大或極小間之減小係數,而 λ 稱阻尼因數(facteur d'amortissement)。

因阻滯而生之週期的相對改變不大,例如以減小係數 $e^{-\lambda T_1}$ 爲 $\frac{1}{2}$,此阻滯甚大,但

$$\frac{T_1}{T}=\frac{\omega}{\omega_1}=\frac{\sqrt{\omega_1{}^2+\lambda^2}}{\omega_1}=\sqrt{1+\left(\frac{\lambda T_1}{2\pi}\right)^2}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda T_1}{2\pi}\right)^2$$

因$\left(\frac{\lambda T_1}{2\pi}\right)^2$之值約為百分之一,故展開式內較高次之項略而未書,週期的相對改變$\frac{T_1-T}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda T_1}{2\pi}\right)^2$不及0.006。

試作運動之時位圖 (diagramme)。(圖 54) 此曲線包含於$x_1=\pm Ae^{-\lambda t}$二曲線之內。(以虛線表之) 在每等時$\frac{T_1}{2}$期中間續與此二曲線相切,因於 $\sin(\omega_1 t+\varphi)=\pm 1$ 時,x 及 x' 各等於 x_1 及 x'_1。



(圖 54)

第二情形　$\lambda<\omega$ 設 $-\lambda_1$ 及 $-\lambda_2$ 為特徵方程式之二負根,積分之形為:

$$x=C_1e^{-\lambda_1 t}+C_2e^{-\lambda_2 t}$$

而
$$x_1=-\lambda_1C_1e^{-\lambda_1 t}-\lambda_2C_2e^{-\lambda_2 t}$$

速度至多僅有一次爲零,卽當

$$e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}=-\frac{\lambda_2C_1}{\lambda_1C_2}$$

之時。若 C_1 與 C_2 異號,此方程式有一根 t_1。若 C_1 與 C_2 爲同號,則無根。當 t 超過 t_1 之值後,動點不斷的無限的趨近於原點。若 t_1 不存在,則動點自起始時便常趨近於原點,而無所謂擺動,故運動非週期的(apériodique)。

62. 爲週期力所擾之擺動　設於前二節所給之力上加入一與時間有關之力,在 Ox 上之大小爲 $mf(t)$,則得簡諧動或阻尼擺動爲時間之函數之力所擾之情形。茲因實際上應用甚多之故,特設外擾之力爲週期的,視原運動爲簡諧動或阻尼擺動,特分爲下兩情形而討論之:——

第一情形　原運動爲簡諧動

運動之方程式爲

$$x''+\omega^2x=P\sin(at+\beta)$$

$P\sin(at+\beta)$ 表週期力。此微分方程式有一特別積分,其形爲 $B\sin(at+\beta)$,代入上式得:

$$B=\frac{P}{\omega^2-a^2}$$

若 $\omega\neq a$ 可設 B　0 必須時,以 $\beta+\pi$ 代 β 卽合此假設。普通積分爲:

$$x = \mathrm{A}\sin(\omega t+\varphi)+\mathrm{B}\sin(a t+\beta)$$

而
$$x' = \mathrm{A}\,\omega\cos(\omega t+\varphi)+\mathrm{B}\,a\cos(a t+\beta)$$

以初值x_0及x'_0之助，定常數A及φ:

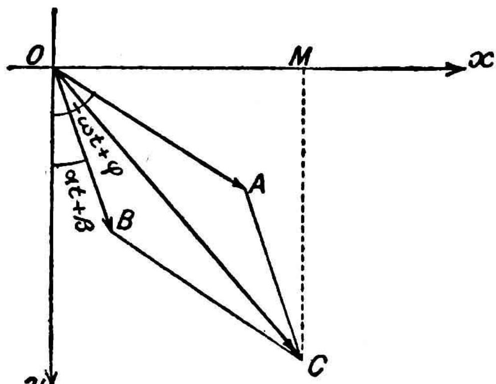
$$\mathrm{A}\sin\varphi+\mathrm{B}\sin\beta=x_0$$

$$\mathrm{A}\,\omega\cos\varphi+\mathrm{B}\,a\cos\beta=x'_0$$

由此
$$\mathrm{A}^2=(x_0-\mathrm{B}\sin\beta)^2+\frac{1}{\omega^2}(x'_0-\mathrm{B}\,a\cos\beta)^2$$

既知A，$\sin\varphi$及$\cos\varphi$極易求得。

M點之運動乃二不同週期的簡諧動之和。第一乃原有之簡諧動，週期爲$\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}$。第二乃受週期力之作用而生之擺動，其週期爲$\mathrm{T}_1=\dfrac{2\pi}{a}$，與週期力之週期相同。可如34節以旋轉的二有向量表M點之運動，設$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$及$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$爲二有向量，其長爲A與B，在其平面上繞O點等速轉動，第一之角速度爲ω，第二之角速度爲a。在起始時此二有向量與定軸$\mathrm{O}y$所成



(圖 55)

之角爲φ及β,在t時此二角爲$\omega t+\varphi$及$at+\beta$。建造於OA及OB上之平行四邊形之第四頂點C,在與Oy正交之軸Ox上之射影卽動點M。

$\widehat{BOA}=(\omega-a)t+\varphi-\beta$隨時間而變,平行四邊形以週期的漲縮變形。對角線OC亦週期的,自$|B-A|$之值變至$B+A$之值。此週期的改變,稱曰**拍**(battement)。拍之週期爲$\frac{2\pi}{|\omega-a|}$,拍之頻率(fréquence)等於$\left|\frac{\omega}{2\pi}-\frac{a}{2\pi}\right|=|N-N_1|$,乃二簡諧動之頻率N及$N_1$之差。

試研究ω與a甚相近之情形,設a爲固定,ω漸近於a。爲計算簡單計設x_1與x'_1乃x與x'在週期力爲極大之t_1時之值,與之相當之相將爲$\beta_1=a_1 t+\beta=\frac{\pi}{2}$(可有$2\pi$之差)。因可以$t_1$爲初時,振幅A可由前面之同一方程所定,只須以$x_1, x'_1$ $\frac{\pi}{2}$代x_0, x'_0, β而得:

$$A^2=(B-x_1)^2+\frac{{x'_1}^2}{\omega^2}$$

當ω趨近於a時,B增至無限,因其分母含因子$(\omega-a)$故也。以$(B-x_1)^2$除上等式之兩端得:

$$\frac{A^2}{(B-x_1)^2}=1+\frac{{x'_1}^2}{\omega^2(B-x_1)^2}$$

右端之第二項極限爲零,因$\omega\longrightarrow a\neq 0$,而$B-x_1$增至無限,故$\frac{A}{B-x_1}$之極限爲1;A與$B-x_1$爲相當之無窮大,但因B與$B-x_1$爲相當無窮大,故A與B亦爲相當無窮大。又

$$(B-x_1)^2-A^2=-\frac{{x'_1}^2}{\omega^2}$$

或
$$B-A-x_1=-\frac{{x_1'}^2}{\omega^2(B+A-x_1)}$$

右端之極限爲零,故 $B-A$ 之極限爲 x_1。振幅 OC 由近於 x_1 之值變至 $A+B$ 爲甚大之值,作週期的改變;拍之週期 $\dfrac{2\pi}{|a-\omega|}$ 在此爲甚長,平行四邊形 OABC 變形甚緩,頗似以 ω 或 a 之角速度全體轉動。

第二情形——原運動爲阻尼擺動

運動之微分方程式爲:

$$x''+2\lambda x'+\omega^2 x=P\sin(at+\beta),\quad 0<\lambda<\omega$$

其普通解爲:

$$x=Ae^{-\lambda t}\sin(\omega_1 t+\varphi)+B\sin(at+\gamma)$$

式內 A 與 φ 爲任意常數,可以運動之初情形 x_0 及 x_0' 定之,而 $B\sin(at+\gamma)$ 乃具第二端之微分方程式之一特別解。欲定此特別積分,將 $B\sin(at+\gamma)$ 代方程式內之 x 得:

$$(\omega^2-a^2)B\sin(at+\gamma)+2\lambda a B\cos(at+\gamma)$$
$$=P\sin(at+\beta)$$

欲求 B 及 γ,在此等式內先令 $at+\gamma=0$ 繼令 $at+\gamma=\frac{\pi}{2}$,於是得:

$$2\lambda aB=P\sin(\beta-\gamma)$$
$$(\omega^2-a^2)B=P\cos(\beta-\gamma)$$

故 $$B^2=\frac{P^2}{(\omega^2-a^2)^2+4\lambda^2a^2}$$

既知B, $\sin(\beta-\gamma)$ 與 $\cos(\beta-\gamma)$ 極易求得。

M點之運動乃原有的阻尼擺動及與力同週期而其振幅為B之非阻尼擺動之合成的運動。當時間增進時,第一運動漸趨停息,惟餘第二運動。若a近於ω,而λ又甚小時,振幅B變為非常之大。但若此二假設非同時存在時,振幅仍係有限。若不欲最後之振幅過大,則可使a較ω相差甚多,而阻尼因數頗大。反之,欲使振幅繼續增大,則使阻尼因數微小,而且使二週期相近。

63. 同步性 由上節可見當動點自己之週期與加入之外力的週期相異時,合成運動使M點之振幅與二週期之振幅為同數量級。若此二週期相近,M點之運動的振幅可至甚大。此振幅增大之現象稱曰同步性(Synchronisme)。視其在實際上有益或有害,特別設法產生或避免由此同步性所生之巨大的振幅。

適所研究之質點的運動乃一重要問題,因固體力學與物理學常有類似的方程式,而同步現象常發生於許多問題之內。

時鐘無擺輪則速停,故擺輪之作用係維持鐘之繼續擺動,此同步現象之有益者。

橋樑有其自身之擺動,一隊兵士步伐整齊,經行其上,若

二週期相近,可因擺幅太大,而使橋樑有折斷之虞。

火車每經過軌道上二鐵條相接處,彈簧上生一彎曲的現象。若此過程之週期與彈簧本身之振動週期相近時,彈簧之擺幅增大,而使乘客感覺不安。摩托車在一壞路上經行,所受之振動的週期與彈簧之振動週期相近時,亦發生此種現象。因此車上裝置有懸吊彈簧,以爲增加阻尼因子 λ 之阻尼器。

64. 與距離平方反比之向心力 此種向心力之研究甚爲重要,因其運動乃行星之重心的運動。加速度係向心的,故運動爲平面的。軌道所在之平面乃由攝引之中心 O 與初速度有向量 $\overrightarrow{V_0}$ 所定。茲假設此有向量之方位不過 O 點,卽暫置直線運動之情形不論。設(r,θ)乃此平面上 M 點之極坐標,O 爲極點,任選一線 Ox 爲極軸。介

$$\varphi(r)=-\frac{m\mu}{r^2}$$

m 爲質點之質量,μ 爲一正常數。

運動遵循面積定律,故

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=C \tag{1}$$

C 乃面積常數,卽單位時間內向徑所掃過之面積之二倍。據假設 C 不爲零。

力場自一力函數導出,故有

$$\varphi(r)dr=-\frac{m\mu}{r^2}dr=d\left(\frac{m\mu}{r}\right)$$

於是力函數爲 $\frac{m\mu}{r}$。據活力定理,$\frac{1}{2}mv^2-\frac{m\mu}{r}$爲常數,即

$$(2)\qquad v^2=\frac{2\mu}{r}+h$$

(1)與(2)皆含 r 與 θ 之一次微分方程式,規定此運動,亦即運動方程式之二個第一積分;式內之二常數C與 h,可由初情形定之:

$$C=r_0{}^2\theta'_0=r_0v_p{}^0,\quad h=v_0{}^2-\frac{2\mu}{r}$$

$v_p{}^0$ 表初速度在 $\theta_0+\frac{\pi}{2}$ 軸上之分量。將 v^2 以其極坐標之微分式表之,於是:

$$(1)\qquad r^2\frac{d\theta}{dt}=C$$

$$(2)\qquad \frac{dr^2+r^2d\theta^2}{dt^2}=\frac{2\mu}{r}+h$$

方程式(1)乃含 $d\theta$ 與 dt 之一次式,設由此取出 dt 而代入(2),則得一方程式含 $r, dr, d\theta$ 乃軌道之微分方程式。設由(1)取 $d\theta$ 代入(2),則得一方程式含 r, dr, dt,積分後得 r 爲時間 t 之函數 $r=f(t)$。更由軌道之方程式計算 θ 爲時間之函數 $\theta=g(t)$。

軌道之研究 由(1)得

$$dt=\frac{r^2d\theta}{C}$$

代入(2)得

$$\frac{dr^2+r^2d\theta^2}{r^4d\theta^2}=\frac{2\mu}{C^2r}+\frac{h}{C^2}$$

或
$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2}=\frac{2\mu}{C^2r}+\frac{h}{C^2}$$

(3)
$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2=-\frac{1}{r^2}+\frac{2\mu}{C^2r}+\frac{h}{C^2}=-\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}\right)^2+\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}$$

設 $\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}\neq 0$, 改換變數, 令

$$\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}=u\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}}$$

於是得

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}=\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}}\cdot\frac{du}{d\theta}$$

以 $\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}$ 除(3)之兩端得:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2=1-u^2$$

或
$$\pm d\theta=\frac{du}{-\sqrt{1-u^2}}$$

積分之
$$\pm(\theta-a)=\text{arc}\cos u$$

$$u=\cos(\theta-a)$$

a 乃一常數;由是

$$(4)\qquad \frac{1}{r}=\frac{\mu}{C^2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}}\cos(\theta-a)$$

此方程式與下列之式同形

$$(5)\qquad \frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos(\theta-a)$$

此(5)式乃表焦點在O,助變量爲p,離心率爲e之圓錐曲線。

現設 $\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}=0$,　方程式(3)變爲:

$$\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}\right)^2=0$$

此等式之成立須有:

$$\frac{1}{r}=\frac{\mu}{C^2},\qquad \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}=0$$

此二式可同時爲軌道乃以O爲心之平圓所滿足,而不互相矛盾,此解可歸入於方程式(4)之普通解內。欲有此情形,係先假設

$$h=-\frac{\mu^2}{C^2}$$

即

$$v_0{}^2-\frac{2\mu}{r_0}+\frac{\mu^2}{C^2}=0$$

但

$$v_0{}^2=(v_r{}^0)^2+(v_p{}^0)^2\quad 又\quad C=r_0v_p{}^0$$

此情形遂變爲:

$$(v_r^0)^2+(v_p^0)^2-\frac{2\mu}{r_0}+\frac{\mu^2}{r_0^2(v_p^0)^2}=0$$

或
$$(v_r^0)^2+\left(v_p^0-\frac{\mu}{r_0 v_p^0}\right)^2=0$$

由此關係得

$$v_r^0=0 \qquad v_p^0=\pm\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$$

卽初速度須與向徑正交而其數量爲 $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ 此結果亦可由下之推理求得:因軌道爲圓周時,加速度與軌道正交,且等於 $\frac{v^2}{r}$,故於初情形有:

$$\frac{\mu}{r_0^2}=\frac{v_0^2}{r_0} \quad \text{卽} \quad v_p^0=\pm\sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad \text{因} \quad v_0=v_p^0$$

在普通情形下,試計算圓錐曲線之助變量 p 與離心率 e,設以(4)與(5)表同一曲線,則應有:

(6)
$$\frac{1}{p}=\frac{\mu}{C^2}, \qquad \frac{e}{p}=\sqrt{\frac{\mu^2}{C^4}+\frac{h}{C^2}}$$

於是 (7)
$$\frac{e^2-1}{p^2}=\frac{h}{C^2}$$

由是可見 e^2-1 與 h 爲同號,

因 $h=v_0^2-\frac{2\mu}{r_0}$, 故:

若 $v_0^2-\frac{2\mu}{r_0}>0$, $e>1$, 曲線爲雙曲線;

若 $v_0^2-\frac{2\mu}{r_0}=0$, $e=1$, 曲線爲抛物線;

若 $v_0^2-\frac{2\mu}{r_0}<0$, $e<1$ 曲線爲橢圓。

於是圓錐曲線之類别,視初速度之量而定,但與初速度之位置無關。

在$h>0$時須注意動點僅在雙曲線之一支上運動,而此卽以其凹面向力心O之一支,因加速度向O點,常處於曲線凹面之內也。

坐標爲時間之函數的計算

欲表r爲t之函數,須於(1)與(2)消去$d\theta$。由(1)得

$$d\theta=\frac{Cdt}{r^2}$$

代入(2)
$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{C^2}{r^2}=\frac{2\mu}{r}+h$$

或
$$r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=hr^2+2\mu r-C^2$$

$$dt=\pm\frac{rdr}{\sqrt{hr^2+2\mu r-C^2}}$$

計算上式右端之原函數,因h之符號而有不同之形式。例如設h爲負卽對於軌道爲橢圓之情形時。試以橢圓之半長軸a與離心率e表h與C^2,於是解(6)與(7)之聯立方程式,兩端相除得:

$$\frac{h}{\mu}=\frac{e^2-1}{p}=\frac{\dfrac{C^2}{a^2}-1}{\dfrac{b^2}{a}}=-\frac{1}{a}$$

故
$$h=-\frac{\mu}{a}$$

於是(6)可書爲

$$C^2=\mu p=\mu\frac{b^2}{a}=\frac{\mu}{a}(a^2-c^2)=\mu a(1-e^2)$$

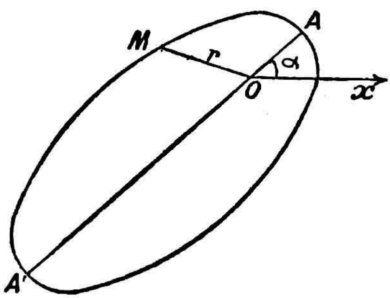
方根下之二次三項式遂變爲:

$$hr^2+2\mu r-C^2=\frac{\mu}{a}[-r^2+2ar-a^2(1-e^2)]$$

$$=\frac{\mu}{a}[a^2e^2-(a-r)^2]$$

因此
$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,dt=\pm\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}$$

設 AA′ 爲橢圓之長軸 (圖 56), A 爲最近於 O 之點稱曰**近日點**(périhélie), 因在行星之運動的情形, O 乃日之重心。同理與 A 正相反之 A′ 點稱曰**遠日點**(aphélie)。試從動點由 A 點出發起計算時間。於是向徑 r 由:



(圖 56)

$$OA=a-c=a(1-e)$$

變至
$$OA'=a+c=a(1+e)$$

故$a-r$由ae變至$-ae$,因此可改換變數,而令:

$$a-r=ae\cos u,\qquad 0\leqslant u\leqslant 2\pi$$

於是
$$dr=ae\sin u du$$

而
$$\frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}=\frac{a(1-e\cos u)ae\sin u du}{ae\sin u}$$

$$=a(1-e\cos u)du$$

吾人以動點過近日點A之時爲時間之起點,故r增時u亦增,因此根號前當取+號,而有:

$$\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}dt=(1-e\cos u)du$$

積分之,且注意u與t同時爲零,便得:

$$nt=u-e\sin u \tag{8}$$

式內之
$$n=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\mu}{a}}$$

方程式(8)稱爲**刻白爾方程式**(équation de Képler)。令$u=2\pi$便得動點之週期T爲:

$$\mathrm{T}=\frac{2\pi}{n}=2\pi a\sqrt{\frac{a}{\mu}} \tag{9}$$

在O與T之間,若與一值t,則方程式

$$f(u)=u-e\sin u-nt=0$$

將只有一值u在O與2π之間;因$f'(u)=1-e\cos u$常爲正,而$f(0)\cdot f(2\pi)\quad 0$,故$f(u)$在O與2π之間僅有一次爲零。既得u之值,於是由下式得r

$$r=a(1-e\cos u)$$

而 $\theta-a$ 可由軌道之方程式(5)得之。

注意 I　由上可見在橢圓運動,a 只與 h 有關,在雙曲線之運動亦然。但 h 只與初速度之大小有關,故以 O 爲焦點之圓錐曲線軌道之準圓 (cercle directeur), 與初速度之方位無關,此與引力場內等速諸射彈所作之諸拋物線有同一準線之事實相似。

注意 II　總合上述之結果,M 點作橢圓運動時,遵循下列諸定律:

1° 軌道乃以力心 O 爲焦點之橢圓。

2° 向徑所掃過之面積與其所須之時成比例。

3° 週期之平方與長軸之立方成比例。

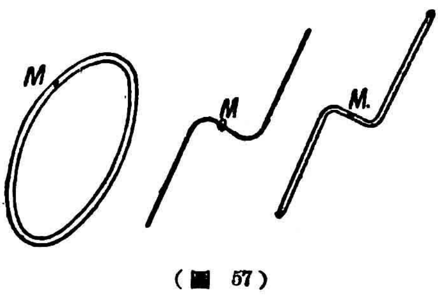
因由(9)式有　$\dfrac{T^2}{a^3}=\dfrac{4\pi^2}{\mu}$

此即有名之刻白爾的行星運動三定律,吾人適由牛頓之引力假說(即引力以離一定中心之距爲平方反比) 而推出之。

第五章

不自由之質點的平衡與運動

65. 不自由之質點 一質點置於空間之某部份,而不能佔此部份所有之任何位置時,稱爲不自由之點。點之繫於曲面(S)或曲線(L)者爲不自由。若質點爲小球形M,可假想其置於二鄰近面(S)與(S′)之間。若此點僅置於(S)面之上,須注意其有離開此面之可能。對於曲線之情形,可假想M點爲一小環形,套於曲線之上。若質點爲一小球形,則可假想曲線爲一小徑之細管,而點置於其中(圖57)。若此點僅置於曲線上,須注意此點有離開此曲線之可能。



(圖 57)

66. 支點之反動力——作用與反作用之原理 設有一受重力之質點,置於一水平面之桌上。此點受其重量$\overrightarrow{P}$,而在其支處上平衡。桌之作用乃與$\overrightarrow{P}$相等而相反之力$\overrightarrow{R}$,於是謂桌施於M點一反動力$\overrightarrow{R}$。此反動力之施力點乃在桌上鄰近

M點之處,於是謂反動力乃桌上與M點相接觸之M′點所施之反作用。

牛頓首倡下列之原理,此原理可由實驗與其推論證明之。

若一質點A施於他一質點A′上一力$\overrightarrow{F}$,在AA′直線方向上,則A′點亦施於A點上一力$\overrightarrow{F'}$,與$\overrightarrow{F}$直接相反。

$\overrightarrow{F}$或$\overrightarrow{F'}$二力之一稱曰作用(action),則他一$\overrightarrow{F'}$或$\overrightarrow{F}$稱曰反作用(réaction)。此牛頓的原理,亦稱爲**作用與反作用的原理**(principe de l'action et de la réaction)。

桌上之M′點旣施於M點一反動力$\overrightarrow{R}$,則據此原理,M點施於M′點一動力$\overrightarrow{Q}$,與$\overrightarrow{R}$相等而直接相反,換言之卽等於$\overrightarrow{P}$。此$\overrightarrow{P}$與$\overrightarrow{Q}$二有向量互相重合,但須注意$\overrightarrow{P}$之施力點爲M,而$\overrightarrow{Q}$之施力點爲M′,此$\overrightarrow{Q}$力,稱M點對於其支點上之**壓力**(pression)。

更設一重力點M懸於一不能伸長而可彎曲之線的一端,其他端則固定於O點。若OM在鉛垂向時,M點爲平衡,則線施於M點一反動力$\overrightarrow{R}$與M點之重量$\overrightarrow{P}$相等而直接相反。反之,M點施於緊張之線的極端M′一動力$\overrightarrow{Q}$,與$\overrightarrow{P}$相等,此力$\overrightarrow{Q}$稱爲線之**張力**(tension)。

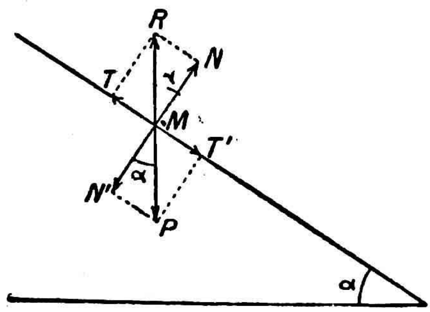
注意 I　當M點置於二相鄰面內,或甚小徑之細管內,更或爲環形套於不變形之曲線上時,$\overrightarrow{R}$之方向不關緊要。但如M點置於一表面上,或繫於一線端,則$\overrightarrow{R}$之方向須當顧及。

因於第一情形,$\overrightarrow{Q}$須壓M點,使附於表面之上,換言之即$\overrightarrow{R}$之方向應在含M點之表面的一邊;在第二情形,$\overrightarrow{Q}$使線緊張,據假設此線可彎曲,故不抵抗,換言之即$\overrightarrow{R}$之方向當由M至O。

注意 II　本書內假設Q$\overrightarrow{力}$不甚大致足使支附之物破裂。即在第一例不致使桌損壞,在第二例不致使線斷裂。

67. 靜摩擦定律　設有一重力點M置於與水平線成α角之斜面上。據實驗知α角若不過一定限φ,則此點保持平衡。若α　φ,則此點在斜面上起始滑動。

設$\alpha \leqslant \varphi$;斜面之反動力$\overrightarrow{R}$與點之重力$\overrightarrow{P}$相等,而直接相反,此力可視爲斜面之法線向的反動力$\overrightarrow{N}$,與斜面上一坡線(ligne de pente)向之力$\overrightarrow{T}$之和(圖58)。於是$tg\alpha=\frac{T}{N}$。又因$tg\alpha \leqslant tg\varphi = f$,故$\frac{T}{N} \leqslant f$,或$T \leqslant f \cdot N$。吾人亦可將重力$\overrightarrow{P}$分解爲二力$\overrightarrow{T'}$及$\overrightarrow{N'}$各與$\overrightarrow{T}$及$\overrightarrow{N}$相反,$\overrightarrow{T'}$力使質點在斜面上滑動,而$\overrightarrow{T}$力則反對此滑動。其實此斜面若在顯微鏡下窺之,呈現凸凹不平之處,此等處所之深淺與多寡,使斜面之粗糙度有大



(圖 58)

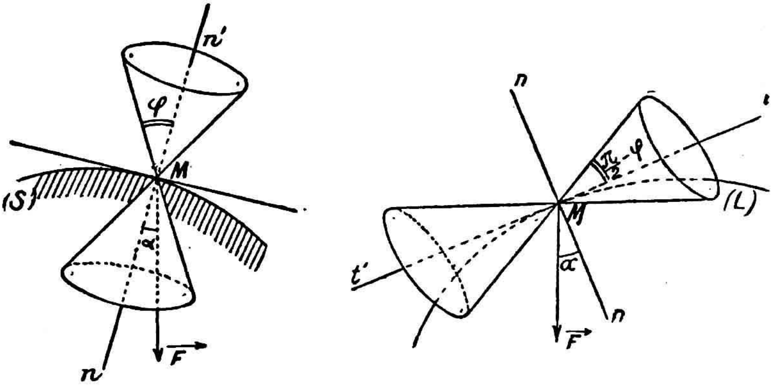
小之差。質點M與此等凸凹不平之處相接觸,受有一斜向反動力$\overrightarrow{R}$。卽因此粗糙不平之故而發生所謂**摩擦**(frottement)現象。α之極限值φ稱**摩擦角**(angle de frottement),其正切f稱**摩擦係數**(coefficient de frottement)。實驗表明φ角與M點和斜面接觸處之面積的大小無關,只與二接觸面之物體及其性質有關。例如斜面平滑之度,面愈光滑,φ角愈小。若斜面爲金類所製,擦油其上使之光滑,則φ可減小。若斜面爲完全光滑,φ角甚近於零,摩擦力可以略而不計,則反動力$\overrightarrow{R}$與斜面正交,簡稱之曰無摩擦力。

幾種物質之φ與f數值表

物　　質	φ	f
木與木(乾的)	14° 至 26°1/2	0.25 至 0.5
木與木(潤的)	2° 至 11°1/2	0.04 至 0.2
金類與金類(乾的)	8°1/2 至 11°1/2	0.15 至 0.2
金類與金類(濕的)	16°1/2	0.3
皮在金類上(乾的)	29°1/2	0.56
皮在金類上(濕的)	20°1/2	0.36
皮在金類上(上油)	8°1/2	0.15

茲設有M點置於任何表面(S)之上,而以$\overrightarrow{F}$表施於此點之諸力之合力。在M點之附近可以切平面代此表面。可見若$\overrightarrow{F}$與表面之法線所成之角α小於φ角時,常維持平衡之狀況。試就以法線nMn'爲軸,φ爲半頂角之旋轉圓錐體而討

論之，此錐體有**摩擦圓錐**(cône de frottement)之稱。欲得平衡，$\vec{F}$力須在摩擦圓錐之內。若此點僅置於表面上，$\vec{F}$點倘須在不含此點之表面的一邊的半錐體內(圖 59)。



(圖 59)

若 M 點置於一曲線(L)上，在 M 點之附近，可以正交於由 $\vec{F}$ 力與切線 $t'Mt$ 而成之 tMF 面代此曲線。在平衡時 $\vec{F}$ 力與此平面之法線 nMn' 所成之角 α 須小於 φ，故力與切線 $t'Mt$ 所成之角須大於 $\frac{\pi}{2}-\varphi$，即 $\vec{F}$ 須在以切線為軸，以 $\frac{\pi}{2}-\varphi$ 為半頂角之圓錐之外。此圓錐在此之作用與摩擦圓錐同。

在以上各情形內，$\vec{F}$ 力在面或線之切線上的分量與表或線之法線上的分量之比 $\frac{T'}{N'}$ 皆不超過 f. 茲可宣佈靜摩擦定律如下:——

一質點置於面或線上，受 $\vec{F}$ 力之作用而平衡，其必須與充分之條件乃 $\vec{F}$ 在面或線之切線上的分力與法線上的分力之比 $\frac{F_t}{F_n}$ 不超過於摩擦係數；若既有此條件，尚須 $\vec{F}$ 之方向

能使此點依附於面或線之上。

當 $F_t=f\cdot F_n$ 時，卽 $\overrightarrow{F}$ 在摩擦圓錐之一母線上時，M點稱爲在平衡之極限上。

例　若重量爲 p 之一質點M，置於水平面之桌上，一線繫於此點，由水平向拖此點；當線之張力不超過 pf 時，此點保持平衡。若此點爲一小木彈置於木桌上，按情形 f 可由 $\frac{1}{4}$ 變至 $\frac{1}{2}$，而極大張力將在 $\frac{p}{4}$ 與 $\frac{p}{2}$ 之間。

設M點置於半球形之碗內，此碗之邊爲一大圓，而碗安置於水平面上。設有一圓錐體，以球心爲頂點，鉛垂線爲軸，φ 爲半頂角。則此點在此錐體所包之球面內任何處，皆得平衡。

68. 動摩擦定律　仍設 $\overrightarrow{N}$ 與 $\overrightarrow{T}$ 爲M點在面或線上之反動力在法線與切線上之分力。對於面言，$\overrightarrow{T}$ 在M點之切平面上，對於線言 $\overrightarrow{T}$ 在切線上。據實驗得動摩擦定律如下：

1° 分力 $\overrightarrow{T}$ 與M點之速度有向量同位置而方向相反。

2° T之數值常等於 $f\cdot N$。

分力 $\overrightarrow{N}$ 常隨M點之位置而變，分力 $\overrightarrow{T}$ 之值亦因之而變，但 $\frac{T}{N}$ 之比則不變而常等於 f。

若 f 之值甚小而N又不太大，則 $\overrightarrow{T}$ 常可略去，面或線之反動力於是在法線向上，簡稱之曰無摩擦力。

例　設有一點M置於面 (S) 之上，又設此點除面之反動力外，不受任何力之作用。可假想此點爲自由點，受 $\overrightarrow{N}$ 與 $\overrightarrow{T}$ 二

力之作用。因$\vec{T}$在軌道之切線上,而$\vec{N}$與$\vec{T}$之合力在軌道之密切面上,故曲線之密切面含$\vec{N}$與$\vec{T}$二有向量,此(C)之密切面與面(S)正交。凡在面(S)上所作之曲線而其密切面與面正交者,爲此面之最短曲線(ligne géodésique)故軌道(C)爲最短曲線。球面上之最短曲線爲大圓周。圓柱上之最短曲線乃螺旋線。最短曲線乃面上鄰近二點相連之最短者。由此可見軌道之形狀與摩擦係數無關,不過僅改變點在軌道上運動之法則而已。

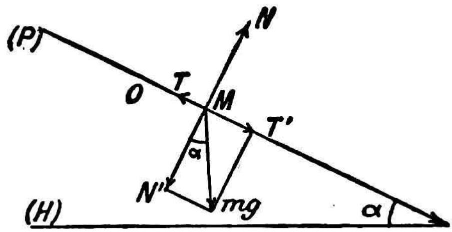
又設此M點置於一小細管(L)之內,除受(L)之反動力外,不受任何力之作用。(L)之密切面爲$\vec{N}$與$\vec{T}$二有向量所定,故反動力之法線分力在曲線之主法線的方向上。

69. 重點在斜面上之運動 設有一重點M置於斜面(P)上之O點,或不給以初速度,而任其自由,或給以一初速度而可以在此斜面上之一有向量表之者。此點繼續在斜面上,否則作一與斜面相切之有垂直軸的拋物線,完全位於斜面之下。然此乃不可能之情形,故M點在斜面上。而其加速度在斜面之法線向上的分量常爲零,故施於此點之合力,在斜面之法線向的分量常爲零,即

$$N-N'=N-mg\cos\alpha=0$$

故N常等於$mg\cos\alpha$。

M點在斜面上受下列之二力而改位:1° $T'=mg\sin\alpha$,位置數值皆爲一定,此位置即坡線之位置。2° $T=f\cdot N=fmg\cos\alpha$,



（圖 60）

數值一定,但其位置乃軌道之切線的位置。

茲僅論初速度爲零,或在斜面之一坡線向之任一情形.在此情形,M點之軌道即此坡線,因M點在水平線上之射影M′的初速度與加速度皆爲零。此又因施於M上之速度與力皆在過O點之坡線上,M′爲平衡,故M點之軌道爲此坡線。

第一情形——初速度爲零　若 $\alpha \leqslant \varphi$, M點不動。若 $\alpha\quad\varphi$, M點因受下列之力而向下動(因 $T'>T$),

$$T'-T=mg\sin\alpha-fmg\cos\alpha=mg\left(\sin\alpha-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right)$$

$$=mg\,\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$$

此點所受之力的位置與數值皆爲一定,在坡線上之向下動乃等加速動,而其加速度爲 $g\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}=\gamma$

第二情形——初速度向下　起初,點向下動,常有:

$$T'-T=mg\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$$

若 $T'\quad T$, 即若 $\alpha\quad\varphi$, M點受一向上之恆力;若 $T'>T$, 即

若 $\alpha>\varphi$, 則此力向下。茲分別論之:

若 $\alpha\quad\varphi$, T　T', 此點受向上之恆力,其加速度為:

$$\frac{T-T'}{m}=g\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi}=\gamma'$$

此點以等減速運動下降,至 t_1 時速度為零。於是與第一情形同,因 $\alpha<\varphi$, 此點遂平衡而靜止。

試計算 t_1; 若 V_0 為初速度,則 t 時之速度為 $V_0-\gamma' t$ 在 t_1 為零,故:

$$V_0-\gamma' t_1=0,\quad t_1=\frac{V_0}{\gamma'}=\frac{V_0\cos\varphi}{g\sin(\varphi-\alpha)}$$

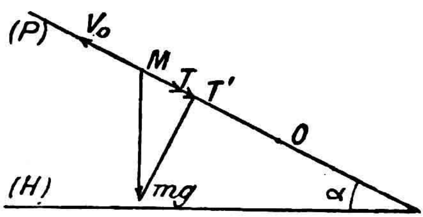
若 $\alpha>\varphi$, $T'>T$, 此點受向下之恆加速度:

$$\frac{T'-T}{m}=g\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}=\gamma$$

此點以等加速度無限下降。

此極限的情形, $\alpha=\varphi$, $T=T'$, M 點不受任何力之作用,而其運動為等速。

第三情形——初速度向上 M 點初向上動, $\vec{T}$ 與速度之方向相反,與力 $\vec{T'}$ 同為向下,故: (圖 61)



（圖 61）

$$\mathrm{T}+\mathrm{T}'=mg(\sin\alpha+f\cos\alpha)=mg\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi}=m\gamma_1$$

M點以等減速度向上動,其速度 $\mathrm{V}_0-\gamma_1 t$ 在 t_1 爲零,而

$$t_1=\frac{\mathrm{V}_0}{\gamma_1}=\frac{\mathrm{V}_0}{g}\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}$$

至 t_1 時復得第一情形.若 $\alpha\leqslant\varphi$, 此點靜止.若 α [illegible] φ, 點以等加速度 γ 下降。

摩擦力可以忽略之情形 在此情形,M點只受一力 $\mathrm{T}'=mg\sin\alpha$ 此點置於均勻平面力場內。若初速度在任何一方向上,M點將作一以坡線爲軸之拋物線。若初速度之位置在一坡線上,運動爲直線的,與59節所研究者相同。

70. 重點不受摩擦力在垂直圓周上的運動——擺

設有一質量爲 m 之質點M,附於中心爲O而在垂直面上之圓周上運動。可設想M乃在圓管內之小彈,或套於圓周上之小環,亦可假想M點繫於線之一端而他端則固定於O點。當M點在其初位置 M_0 時,以在垂直圓之切線向的一速度拋起。設O爲圓心,半徑爲 $\mathrm{OM}=l$。茲先說明M點在此情形下,將在垂直圓上運動。因此點受二力,即重力 mg, 垂直向下,與線之反動力,其方向爲MO。M點在一水平面上之射影,譬如過C點之水平面上之射影 M′, 只受反動力之射影一中心力, M′點之初速度即與圓相切之速度的射影經過O點, M′在OM′線上運動,故M在此垂直面上。當M爲一線緊繫於O點時,是爲單擺(pendule simple)。

設取 Oz 軸垂直向下,一因軌道已知,再因無摩擦力,反動力與圓周正交不作工,故活力定理足以解釋此運動。因此據活力定理所得之式,與引力場內一自由點之情形相同,即:

$$v^2-{v_0}^2=2g(z-z_0)$$

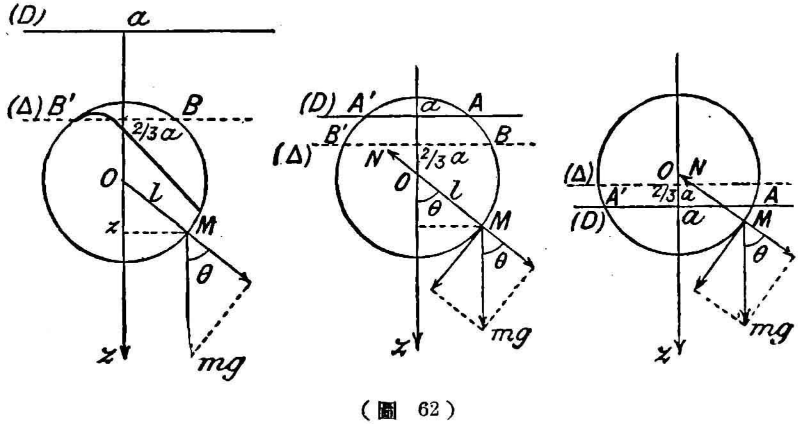
或

$$v^2=2g(z-a)$$

式內之

$$a=z_0-\frac{{v_0}^2}{2g}$$

作一水平線(D)其高為 a (圖 62),視(D)與圓周相割與否,而可分為下列之二情形:



(圖 62)

第一情形 (D)不與圓周相割,因此須 $a \quad -l$ 或

$$z_0-\frac{{v_0}^2}{2g}<-l, \qquad {v_0}^2>2g(z+l)$$

在此情形,v 絕不為零,其絕對值由一極小 $\sqrt{2g(-l-a)}$ 變至一極大 $\sqrt{2g(l-a)}$,動點常循圓周上之一方向轉動,運

動乃循環的(révolutif)。每瞬時之速度與動點自由從水平面(D)下落之速度相同。

第二情形 (D)與圓周相割於A及A′,此係假設$v_0^2<2g(z_0+l)$。設將M_0先向下拋,M點在圓上運動至A′,而速度爲零,復下降至最低點更上昇以至於A。如是往復運動稱曰擺動。一完全擺動乃由A至A′,復由A′回至A,如此往返之途程中所須之時曰擺動週期。

反動力之計算 設以N表圓周在法線正方向MO上之反動力。若將所有之力投射於MO方向上,則在法線上之運動的本身方程式爲:

$$m\frac{v^2}{l}=N-mg\cos\theta$$

θ表OM與Oz間之角,向右方算爲正,因

$$z=l\cos\theta,\qquad v^2=2g(z-a)$$

故方程式變爲:

$$N=\frac{mg}{l}2(z-a)+mg\frac{z}{l}=\frac{mg}{l}(3z-2a)=\frac{3mg}{l}\left(z-\frac{2}{3}a\right)$$

作水平線(Δ)其高爲$\frac{2}{3}a$。當M點在Δ之下時,N爲正,M點附靠於圓上;當M點在Δ之上時,N爲負,M點拖拉圓周。

若M點繫於一線上,即在擺之情形,因線爲柔順可彎曲,則N爲負之假設不能成立。因N爲零時,無反動力,線彎曲,而M爲將一自由點矣。故特研究在何情形下N可改變其符號。

若運動爲循環的，a 爲負，而(Δ)在(D)之下，欲(Δ)不與圓相割，則須有：

$$\frac{2}{3}a \quad -l$$

$$\frac{2}{3}\left(z_0-\frac{v_0^2}{2g}\right) \quad -l$$

$$v_0^2>2g\left(z_0+\frac{3}{2}l\right)$$

若此條件常滿足，則線常被拉緊，M 點繞 O 轉，此乃飛紽(或飛墳)的運動(mouvement de la fronde)。

若 $2g(z_0+l) \quad v_0^2 \quad 2g\left(z_0+\frac{3l}{2}\right)$，D 不與圓相割，運動乃循環的，但(Δ)與圓相割於 B 與 B′ 二點。當 M 點到此二點之一時，線即鬆弛，動點起始如一自由點運動。

若 $v_0^2 \quad 2g(z_0+l)$，運動乃擺動的；視 a 爲負或正則(Δ)在(D)之下或上。若 a 爲負，即若 $v_0^2 \quad 2gz_0$，(Δ)在(D)之下與圓相割於 B 與 B′，線在此二點之一鬆弛。若 a 爲正，即若 $v_0^2<2gz_0$，(Δ)在(D)之上，動點在 A 至 A′ 之間，線常緊張。

注意 當 M 點到 B′ 時線即鬆弛，動點變爲自由點，只受引力之作用，在圓周所在之鉛垂面上作一拋物線之弧。此拋物線與圓在 B′ 點相切，因速度有向量同時與圓及拋物線相切；又拋物線之準線即直線(D)，因初速度在拋物線上，與動點自過(D)之水平面墜落之速度相同：換言之 O 圓乃拋物線在 B′ 點之曲率圓。

M點作拋物線之弧,直至其距離O之長為 l 時,線復驟然緊張,此即變為碰撞(choc)之問題矣。

微小擺動——等時性 試就初速度 v_0 為零之情形討論,於是 M_0 點便與A(或A′)點之情形相同,故 $a=z_0$ 因(D)與圓相割,故運動乃擺動的。若 $\theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$,線常拉緊。若 $\theta_0 > \frac{\pi}{2}$,則線在B′點鬆弛,因若 z_0 為正,(Δ)在(D)之上;z_0 為負,(Δ)在(D)之下。設 θ_0 之值小,θ 角在 $+\theta_0$ 與 $-\theta_0$ 之間變化。於是可以本身方程式之一代活力方程式,更為便利:

$$m\frac{dv}{dt}=F_t$$

因 $F_t=-mg\sin\theta$,若以 θ 增長之方向之弧為正;$v=l\frac{d\theta}{dt}$,又 $\frac{dv}{dt}=l\frac{d^2\theta}{dt^2}$,運動之方程式為:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

若 θ_0 小,可以 θ 代 $\sin\theta$,於是:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

此微分方程式之普通解為:

$$\theta=\theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t+\theta'_0\sqrt{\frac{l}{g}}\sin\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

因 $\theta'_0=0$,故

$$\theta=\theta_0\cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t$$

運動乃週期的。半擺動之週時T可於下式得之:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,T=\pi \quad 或 \quad T=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

因T不含θ_0,故微小擺動之週期與擺幅無關。

於是稱微小擺動具等時性 (isochrone),即週期與 θ_0 之大小無關之意也。

有限擺動 若θ_0非甚小,以θ代$\sin\theta$便引入誤差,且θ_0愈大時誤差亦愈大。再就活力方程式論:

$$v^2=2g(z-z_0)=2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

因 $v=l\dfrac{d\theta}{dt}$, 故

$$l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2g(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

若動點自與$-\theta_0$相當之A′點起,θ角隨t俱增,$\dfrac{d\theta}{dt}$在第一半擺動爲正,

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$

$$t=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\theta_0}^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}$$

$$T=\sqrt{\frac{l}{g}}\int_{-\theta_0}^{+\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\theta_0)}}$$

半擺動之週期T可以橢圓積分表之。對於θ_0之任一值可由橢圓函數表查出T之值。由此表知由微小擺動所得之

值，$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 可應用至 $\theta_0=23°$，所生之相對誤差不過 0.01 至 $\theta_0=70°$ 相對誤差不過 0.1。

阻尼微擺動　設動點 M 受空氣之阻力，此力與速度爲比例，等於 $2\lambda mV$。此阻尼微擺動之本身方程式爲：

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-2\lambda ml\frac{d\theta}{dt}-mg\sin\theta$$

仍以 θ 代 $\sin\theta$ 得

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\lambda\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\theta=0$$

此乃61節內已經研究之方程式，只須以 θ 代 x，$\frac{g}{l}$ 代 ω^2，而設 $x'_0=\theta'_0$ 爲零，卽得：

$$\theta=\theta_0e^{-\lambda t}\left(\cos\omega_1t+\frac{\lambda}{\omega_1}\sin\omega_1t\right)$$

式內之
$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}-\lambda^2}$$

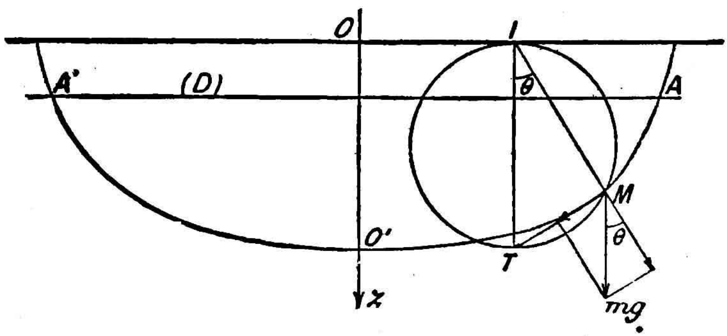
由實驗知 λ^2 小於 $\frac{g}{l}$。擺動受阻尼，擺幅按幾何級數縮短。但擺動仍具等時性，由前之研究（61節）知週期 $\frac{2\pi}{\omega_1}$，雖有阻力，變化甚少。

71. 擺線擺　上節所討論之一重點，不受摩擦力，在圓周上之運動，可以任何曲線代圓周，而推理相同。活力方程式

$$v^2=2g(z-a)$$

與曲線之形狀無關，運動之性質則視曲線與直線 (D) 之交點的數目而定。

設此曲線爲擺線 (cycloide) 之一支其對稱軸在鉛垂向而凹面向上。M 點不受初速度置於 A 處 (圖 63), 動點在 A 與



(圖 63)

A′ 間擺動。茲證此擺動有精確的等時性,換言之即擺動週期與擺幅 AA′ 弧之長無關。因常有:

$$m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2s}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

弧坐標自擺線之頂點 O′ 起算,向右爲正。θ 乃法線 MI 與鉛垂軸 Oz 所成之角。作擺線之母圓 (見 34 節 4°) I 乃轉動瞬時心。當圓周在 OI 上滾動時,速度之分配與圓週每瞬時以 $2d\theta$ 角繞 I 轉動相同。故

$$ds=2\mathrm{IM}=2l\cos\theta\, d\theta$$

l 表圓之直徑。積分之得:

$$s=2l\sin\theta$$

因 s 與 θ 同時爲零,故不加積分常數。以 $\frac{s}{2l}$ 代 $\sin\theta$, 則 M 點在擺線上之運動方程式變爲:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{2l}s=0$$

故運動乃週期的，其週期爲 $2\pi\sqrt{\frac{2l}{g}}$.

練習題

1. 由一點O以速度v_0垂直向上拋一受重力的質點。同時不給初速度,使同質量之他一質點自O′下落。O′與O同在一鉛垂線上,O′在O之上$2g$處,g表重力加速度。

1° 求二動點相遇之時與位置。

2° 設相遇點在O,又設相遇後二點連合進行,其速度變爲二者之算術平均數。試對每一點從O或O′起作其時位圖(diagramme)。

2. 一重點在眞空中,自一點O拋出,速度爲v_0,在過O點之水平面H之上方,而與此水平面成一銳角α。射彈下落後,再與(H)面相交於O′點。

1° 以同一v_0之值,倘可得第二射彈之軌道,自O點射出而復落於O′點。設此二彈同時由O射出,試求二彈先後達O′點之時間之差。

2° 設M與M′乃二射彈在同一時之位置,試證MM′線之方位不變,且計算MM′之距。對於附於M上作移動之比較系統,M′點之運動爲何?

3° 設T表第一軌道上OO′程途中之時刻,又T′表高出平面(H),超過其最高度之半的時刻。試求$\frac{T'}{T}$之比,與過O及O′二點之兩軌道相當之兩T′之差爲何?

3.　一彈自礮口A射出,穿過氣球B,而落於含A之水平面(H)上C處。AC=4000米。設P乃B在(H)上之射影,AP=2000米,PB=1000米.

1° 求射角與射彈之初速度v。

2° 射彈經過氣球時,其速度爲何?

3° 氣球被毀,下懸之籃因而下落,求其至P點時之速度,與上項所得之速度比較之。

本題不計算空氣與氣球之阻力。

4.　有三正交軸Ox, Oy, Oz與一質點M。設A與B乃M點至Ox與Oy上之垂線MA及MB之垂直脚。M點受P與Q二力之作用,P力在MA線上,由M至A;Q力在MB線上由M至B。P與Q二力之數值如下:

$$P=9mk^2\cdot MA,\qquad Q=16mk^2\cdot MB$$

m表M點之質量,k乃一常數。

1° 試研究P與Q之合力場(力函數,力線,均勢面,對於一定移位之功。)

2° 設M爲一自由點,僅受P與Q二力之作用,自O點以一定初速度出發,試求其運動。此運動是否週期運動?

3° 設M附於下列方程式所表之半徑爲R之圓周上,不受摩擦力而在其上滑動:

$$x=R\sin\theta,\qquad y=\frac{3}{4}R\cos\theta,\qquad z=\frac{\sqrt{7}}{4}R\cos\theta$$

此M點在此圓周上之某一點,以定初速度拋起,試求其運動,且算圓周之反動力。

5. 一重點其質量為m,在一間質中運動。此間質生一阻力,每瞬時t可以軌道之切線上的一有向量表之,其方向與速度有向量之方向相反,其數值等於$k.m.V$,V表速度之數值,k乃一正常數。

在起始時,動點從O點以與水動力成α角之速度V_0射出。

1° 求t時動點M之位置。作軌道與其漸近線(D)。可否選V_0與α之值,使M在一鉛垂線上之射影的運動為等速?

2° 軌道上M點之切線與直線(D)相交於T,求證M點之速度V之數值等於$k\cdot MT$。

3° 設質點循鉛垂向上拋,又V_0等於$\frac{g}{k}$,g表重力加速度。求動點由O至其軌道之最高處,間質阻力所作之功與重力所作之功之比。

6. 設有三正交坐標軸$Oxyz$與一質點M,其質量為m。此點為一向心P所吸引,此引力之值為$\omega^2 m\times MP$,ω表一常數,MP乃M至P之距離。引力心P在Oz軸上移位,於t時其高為at,a乃一常數。

求M點之運動,軌道,及速度圖,其初情形如下:

1° 在$t=0$時,M由M_0點$\left(\frac{a}{\omega},0,0\right)$出發,其初速度之分量為$(0,0,2a)$。

2° 在$t=0$時，M由M_0點出發，其初速度之分量爲$(0, a, 0)$。

7. 有一重點其重量爲P，在一與水平面成α角之斜面上隨一坡線上拋。此點自初位置O起，其速度爲v_0，此點受斜面之摩擦阻力，其係數爲f，

試特別研究下列二情形：——

$$1° \quad \alpha=45°, \qquad f=0.5;$$

$$2° \quad \alpha=30°, \qquad f=1。$$

8. 一斜面與鉛垂線所成之角爲α，在其最高處有一很小的滑車O，此滑車之平面經過斜面之坡線OA。在AOB鉛垂平面內，一可彎曲而不能伸長之線，其質量可略而不計，經過此滑車，兩端各載一同質量之重點M與M'。M點在粗糙之斜面上，摩擦係數爲$f=\operatorname{tg}\alpha$。M'點在OM'之末端，此OM'線段在OB垂直壁上自由懸着。起始時M與M'皆無初速度，而線緊張。

試求M與M'二點之運動。

9. 二重點M與M'，其重量爲p與p'，繫於一不能伸長之線之兩端。M'在水平面(H)上，此水平面上有一孔，線即由此經過，其一段循鉛垂向懸着，末端即M_0平面施與M'點一摩擦力，其摩擦係數爲f。

1° p應不超過何值，摩擦力方能使M'保持平衡？

2° 設線在水平向拉緊，M不受初速度，又設M'點常保固定，求以M點至水平面(H)之距離的函數表M點之速度與線

之反動力。由是推出M點之擺動不改變M′點之固定的條件。本題內設線之反動力(隨時而變)在線之兩端相同。

10. 一重點M放置於一粗糙之斜面上之一點O,而不給以初速度。設摩擦係數乃一變數,其值在斜面上之各點等於此點至斜面上之一定水平面(H)之距離,與常數k之商。

1° 應將O點置於斜面之何區域(R)內,M方開始運動?

2° 當M點之初位置在直線(H)上時,求其運動。

3° 當M點之初位置O在(R)之內,(H)之下,求其運動。

11. 在一斜坡為f_0之粗糙斜面之一坡線上,有同質量之二重點M與M′。不受有初速度。此二點為一拉緊之線所連,此線不能伸長,而其質量可略而不計。又M′點在M點之上,M與M′在斜面上之摩擦係數各為f與f',而f小於f'。

試研究按f_0之值而可發生之各種情形。

一線之質量可略而不計者,當緊張時,張力在線之各點皆同。

12. 一具彈性之線,一端固定於O,循鉛垂向懸着,他端M上繫一質點,其質量為m。此質點復負一相同之具彈性之線,在其末端更繫一同質量m之質點M′。試求平衡時二線之長。更推廣至p線之情形。

一具彈性之線緊張時其長為x,其張力乃$k(x-l)$,l乃線之天然長度,k乃一常係數。

13. 一擺懸於火車箱內之天花板上,與鉛垂線成a角,

若設火車之運動爲直線之移動,求其加速度爲何?

14. 三條等長,不能延伸,而其質量可略之線AM, MM′, M′B,相連於M與M′二點。在此二點各負一等重之重量P。第一線之末端A,第三線之末端B,定於二釘上。A與B同在一水平面上,其距離爲$2a$。當此系統平衡時,求各線之張力。

15. 一重點M,其質量爲m,置於一粗糙水平桌上;摩擦係數爲f。此點被桌上之一定點O所吸引,其力與距離爲比例,此點自桌上之一點M_0以過O點之一方向之速度拋出。試研究此運動。

16. 一具彈性之線,一端固定於O點,他端負一小重球,其質量爲m。先使此球在O點,不與以初速度而放下,試不計線之質量,而研究此球之運動。

17. 三重點A,O,B,其質量同爲m,爲二相同之彈性線AO與OB相連。線之天然長度爲l,當線緊張,其長爲x時,張力等於$k(x-l)$,k乃一常係數。

此三點排列成一直線,O在A與B之中,不與以初速度而置於一粗糙的水平桌上,先使二線拉緊OA與OB等長。

1° 摩擦係數對於此三點同爲f,欲使此系統當AB之長不過$3l$時保持平衡,試求f之值爲何?

2° 設摩擦係數爲如上所得之值f,三點之安排亦如上所述,使AB之長爲$4l$,試求A與B二點之運動。

18. 一重點P依附於鉛垂軸之螺旋線上運動,自離地

高 a 之 A 處無速度出發，求到地所須之時 t_1 與到時之速度 v_1。設 r 爲底圓之半徑，h 爲螺線之步。

當 P 離 A 處時，自地垂直向上抛第二質點 Q，其初速度 v_0 足使 Q 點達於高度 a，而復下墜。Q 復到地時之速度爲何？v_0 與 v_1 間之關係爲何？在何情形 P 與 Q 二點同時達地？求證此僅與螺線之形狀有關。求在此情形，螺線與其所附之圓柱的母線所成之角爲何？

19. 一具彈性之線，其天然長度爲 l，一端固定於一點 A，經過一水平向固定之小環 B（其體積甚小，可略而不計）AB 之距爲 l，線之他端繫一重點 M，線之質量可略，線之張力施於此質點上爲 $k\cdot MB$，k 乃一正常係數。系統平衡時，M 在 O 處，$BO=2l$。

1° 求證無論 M 點之位置何在，施於其上之合力經過一定點。

2° 將 M 置於 M_0 點，不給以初速度而放棄之。根據下列之二假設，求 M 點之運動：M_0 在 BO 線上，O 點之下而 $BM_0=3l$；或 M_0 在過 O 點之水平面內。

3° M 自 ABO 平面內之一點 M_0 抛出，其初速度 v_0 與此平面正交，試求此運動。

v_0 之值一定，應置 M_0 於何處，方使 M 之軌道爲一圓周。

20. 一小環其重量可以忽略，套在一橢圓圈上運動。此圈不平滑，其摩擦係數爲 f。此點（即小環）被橢圓之二焦點

所吸引,其力與距離成比例,此比例因數,對於二焦點相同。試求其平衡之地位。

21. 飛紽戲乃以一繩之一端繫一石,他端握於手而旋轉之。設繩長50厘米,每秒旋轉5周,如何釋放此繩方使石拋最遠?

22. 一擺之組成乃一重點M,其重量爲p,繫於不能伸長之線OM之一端,而他端O則爲固定。線之長爲l,線在水平向上拉緊時,以垂直向上之速度v_0將M點拋起。

1° 應用活力定理於M點之運動。求線之反動力T,且說明運動是循環抑係擺動。

2° 對於線能鬆弛之情形,M點之運動爲何?試書此運動之方程式。且言動點在運動之進程中能否落於O點。若果如是,$v^2{}_0$之值應爲若干?

在計算中,當線鬆弛時,可加入線與向上鉛垂線所成之角a,而求a與已知數v_0及l間之關係。

第三篇　靜力學

第一章

平衡之必須條件

72. 靜力學之目的　靜力學之目的在研究物體平衡之條件。包含質點靜力學,與質點所成之系的靜力學。後者又復分爲固體靜力學,與可變形之體的靜力學。實際無一體爲完全不變形之固體,固體靜力學不過係實際物體之平衡的研究,得其近似值而已。

質點組成一系,其每一點對於定軸之系爲平衡,則此系稱爲**絕對平衡**(équilibre absolu)。吾人常以附於地球之軸爲此等定軸。若此質點之系,僅對於此等軸爲不動,則此系稱爲對於地球爲**相對平衡**(équilibre relatif)或簡稱曰**平衡**。

由40節,一質點之絕對平衡的必須與充分的條件,乃施於此點上之諸力之幾何和爲零。又據41節質點對於地球之相對平衡,此條件亦極相近,至可謂之相同。

質點組成之系,其每一點爲平衡,則全系爲平衡。故一系平衡之必須與充分的條件,乃施於此系上之每一點之力之幾何和爲零。

73. 外力與內力 設有n質點,M_1, M_2,……,M_n所成之一系。施於此系中之一點(譬如M_1)之力,可分爲二類,其因系外之質點施於M_1上之作用,(例如重力,電磁作用與反作用等)稱爲施於M_1上之**外力**(forces extérieures)。其因系內之他$n-1$質點,M_2, M_3,……,M_n施於M_1點上之作用,稱爲施於M_1上之**內力**(forces intérieures)。

故外力乃因系外之質點,施於系內之質點的作用所生之力。

而內力乃系內之質點之相互的作用。

例如一流體內,內力乃分子兩兩間之相互作用。對於固體此分子間之作用,保持其間之距離,使其有固定之形狀。

據作用與反作用的原理,內力兩兩直接相反。若以有向量表之,則此等有向量所成之系的總和爲零。而此系之合矩到處爲零。故:

內力有向量之系等於零。

外力可由實驗測算,內力則不能,故僅須研究不參入內力之平衡的條件已足。

74. 平衡之必須條件 設有n質點之一系,在平衡中。若以(S_e)表外力有向量之系,(S_i)表內力有向量爲零之系。再以(S)表施於所有之點上內外諸力有向量之系。

此(S)系等於零,因其乃爲施於每點上之力所成之n系之和,而此每一系爲零。

(S_i)既爲零，(S_e)乃由等零之(S)中，減等零之(S_i)而得，故亦爲零。

故欲質點所成之系爲平衡，諸外力須爲一等於零之有向量之系。

此定理表明普遍的平衡之一條件，因其可用於質點所成之任何系。此條件之分析式與吾人以平衡的六個必須條件(six conditions nécessaires de l'équilibre)。

設 X, Y, Z, L, M, N 乃(S_e)系之總和$\overrightarrow{OR}$，與對於坐標軸之原點之合矩$\overrightarrow{OG}$之分量。$\overrightarrow{OR}$及$\overrightarrow{OG}$應爲零，故有下列之六式：

$$X=0, \qquad L=0,$$
$$Y=0, \qquad M=0,$$
$$Z=0, \qquad N=0.$$

例　設一杯內盛水，置於桌上。水之質點所成之系在平衡中，施於此系上之外力計有：水分子之重量，杯壁之反動力，與空氣在水面之壓力。此諸力所成之系乃等於零。

設再就杯之質點所成之系而論，則外力爲：杯之分子的重量，水在其所接觸之壁上的反動力，空氣在其所接觸之壁上的壓力，桌在其與杯接觸之部份上的反動力。此諸力所成之系乃等於零。

設更以杯與水爲一系統而論，則外力爲：杯與水之分子的重量，空氣的作用，桌之反動力。水與杯內壁之動力及反動力，在此情形下爲內力，而非外力。

注意　以上所論之普遍的平衡之必須條件，非常爲充

分的條件。例如在具彈性之直線的兩端,施以直接相反之二力,拖線使長,此二力所成之系爲零,但線變長而非平衡。

由下章可見此平衡之必須條件,對於固體而言,更爲充分的條件。

75. 質點系之劃分　設有 n 質點之一系在平衡中。若於此 n 質點中取 p 質點爲一系,則此系亦爲平衡。而施於此 p 點上之外力的系爲零。此須注意。所餘之 $n-p$ 點施於 p 點上之作用爲外力。

在上節置於桌上盛水杯之例內,可劃分水爲一系,而杯壁施於水上之壓力卽爲外力。

當一系劃分爲數系時,則得數個平衡的必須條件。若此等條件,對於任何之劃分法皆能成立,則此系亦爲平衡,因可取系中之任何一質點爲一系統也。

若一體乃數段或數份所組成,則應用平衡之條件於每段或每份,常較便利;於是常可定諸段間之相互作用。

由劃分法亦可確定一系之內力。例如一緊張之線,其質量可忽略者。因受施於其兩端 A 與 B 上等強而直接相反之二力P的作用而平衡。設 M 乃線之一點,更就線之AM一段而論,此一段在平衡中,其外力乃施於 A 上之力 $\overrightarrow{P}$,及線之 MB 段施於 AM 一段的作用。此作用向 AB 與 $\overrightarrow{P}$ 所成之系爲零,可以施於M與 $\overrightarrow{P}$ 直接相反之力 $\overrightarrow{T}$ 代之。此力 $\overrightarrow{T}$ 卽線之**張力**。故在線上任何二點,張力皆等。

第二章

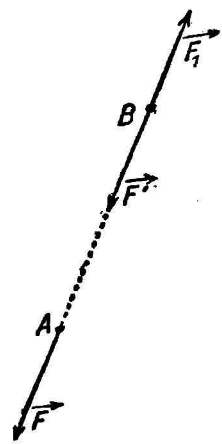
固體之平衡

76. 力系之簡化 設有諸外力成一系統 (S), 施於一固體上。所謂此系之簡化(réduction)即以設簡單之他一系(S′)代此系 (S), 此(S′)系所含之力較少,或較便利,以不擾固體之平衡或運動的情形爲準則。此卽所謂簡化不改固體之狀况也。

77. 直接相反之力 爲簡化計,常應用下述之原理。此原理由實驗而得,更由其推出之結果而證實之。

原理 吾人可加入或省去二直接相反之力,而不改固體的狀况。

結果 I 吾人可以在其動作線上 (ligne d'action) 移動一力,而不改固體的狀况。設有一力 $\overrightarrow{F}$,其施力點在 A 者,吾人可以一相等之力 $\overrightarrow{F'}$,其施力點在其動作線上之 B 點者代之。因據原理,可加入二直接相反之力 $\overrightarrow{F'}$ 與 $\overrightarrow{F_1}$,其施力點皆在B,而不改固體之狀况 (圖 64)。而 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{F_1}$ 乃直接相反,可省去之,而不改固體的



(圖 64)

狀況,所餘者乃$\overrightarrow{F'}$。

加入或省去二直接相反之力,稱爲"約法I"(opération I)。力在其動作線上移動,爲"約法I'"。故一約法I',當二約法I。

結果II 設數力施於一固體上,其動作線相交於固體內之一點O。據約法I',可將諸力全遷移於O。若以此諸力之幾何和代此諸力,則施於質點O上之作用不變。反之可以動作線相交於O之數力,代替施於O點上之一力,而固體的狀況不變。以相交於一點之數力代其幾何和,或以一力代數相交於施力點之數力,稱爲"約法II"。此約法不改變固體的狀況。

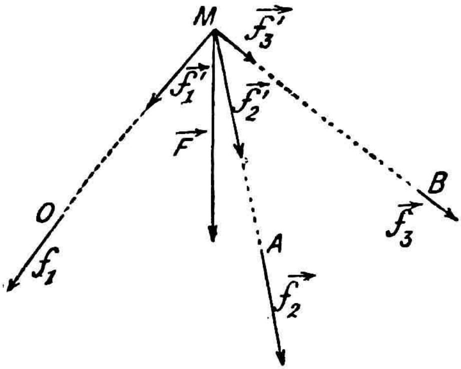
以上之推理假設O在固體之內;若在其外,應假想其以一桿與固體相連,此桿上不受有任何外力。特別言之,卽其重量爲可忽略。

78. 基本約法 上述之I, I', II三種約法,稱基本約法(opérations élémentaires)。此種約法繼續行之多次,而固體之狀況不改。

應用此種基本約法於下二節內,可見施於固體上之諸力所成之系,可以三力或二力代替之。

79. 化至三力之約法 設O, A, B乃固體內之任何三點。吾人可以過O, A, B之三力代替(S)系內之每一力$\overrightarrow{F}$。先設$\overrightarrow{F}$不在OAB平面內,需要時可利用約法I',設其施力點M在此平面之外,於是MO, MA, MB成一三稜。由約法II,可以在三

稜上之三力$\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}$代$\overrightarrow{F}$,而$\overrightarrow{F}$即爲此三力之幾何和。$\overrightarrow{f_1}$力施於O,$\overrightarrow{f_2}$施於A,$\overrightarrow{f_3}$施於B。若$\overrightarrow{F}$在OAB平面內,連合MA與MB,而以施於A及B之二力$\overrightarrow{f_2}$及$\overrightarrow{f_3}$代$\overrightarrow{F}$;於是$\overrightarrow{f_1}$爲零。



（圖 65）

應用此種約法於形成(S)系之n力之每一力上,則得施於O之力$\overrightarrow{f_1}$ n個,施於A之力$\overrightarrow{f_2}$ n個,施於B之力$\overrightarrow{f_3}$ n個。

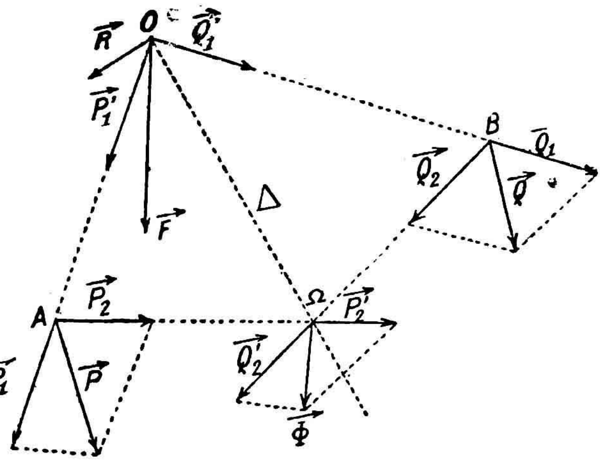
由約法II,可以其合力$\overrightarrow{R}$代n個$\overrightarrow{f_1}$力,$\overrightarrow{P}$代n個$\overrightarrow{f_2}$力,$\overrightarrow{Q}$代n個$\overrightarrow{f_3}$力。三力$\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$之系可以代替原系(S),而不改變固體的狀況,因由原系以至三力之系,所用者僅基本約法。

O, A, B三點係任意的,僅用以定一平面。故:

吾人可以施於不在一直線上之任意三點的三力,代替施於一固體上之諸力所成之系。

80. 化至二力之約法　設原系已約爲施於A, B, O三點之三力$\overrightarrow{P}, \overrightarrow{Q}, \overrightarrow{R}$。爲O及$\overrightarrow{P}$所定與爲O及$\overrightarrow{Q}$所定之二平面有一交線Δ,因O乃此二面之一公共點。設Ω乃Δ上之任一

點(圖 66)。



(圖 66)

由約法II,可以在 AO 與 AΩ 上之二力$\vec{P}_1$與$\vec{P}_2$代替$\vec{P}$,而$\vec{P}$即爲此二力之和。同樣可以過 O 之一力$\vec{Q}_1$與過Ω之一力$\vec{Q}_2$代替$\vec{Q}$。於是有$\vec{R}$,$\vec{P}_1$ $\vec{Q}_1$三力相交於O, 及$\vec{P}_2$,$\vec{Q}_2$二力相交於Ω。再由約法 II, 可以施於O點之合力$\vec{F}$代替$\vec{R}$, $\vec{P}_1$, $\vec{Q}_1$,又施於Ω點之合力$\vec{\Phi}$代替$\vec{P}_2$, $\vec{Q}_2$。故:

吾人可以二力代替施於一固體上之諸力所成之系,其內一力之施力點可爲固體內任意選擇之一點。

於是施於固體上任何多數之力,常可以選擇適當之二力代替之,而不致使固體之狀況改變。

81. 定理 在基本約法下總和與合矩不改變。

換言之,即應用多次基本約法於(S)系,而得 (S′) 系,其總

和與對空間任一點之合矩,與前相同。

此僅須證約法 I 與 II 不改變,總和與合矩,因約法 I′,由二約法 I 而得者。

設 $\overrightarrow{OR}$ 爲總和,$\overrightarrow{OG}$ 爲對於(S)系之 O 點的合矩。有向量 $\overrightarrow{OR}$ 乃等於 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{F_n}$ 諸有向量 $\overrightarrow{OF'_1}, \overrightarrow{OF'_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{OF'_n}$ 之幾何和。加入或減去其和爲零之二有向量,不改變 $\overrightarrow{OR}$,因於幾何和可以其和代二有向量,而此處之和爲零。同樣 $\overrightarrow{OG}$ 乃 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{F_n}$ 諸力對於 O 點之矩 $\overrightarrow{OG_1}, \overrightarrow{OG_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{OG_n}$ 之和。加入或減去其和爲零之二有向量,不改變 $\overrightarrow{OG}$,因與之相當之矩乃其和爲零之二有向量也。故約法 I 不改變 $\overrightarrow{OR}$ 與 $\overrightarrow{OG}$。

再研究約法 II。設有向量 $\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ 相交於一點,且以其和 $\overrightarrow{F}$ 代之。於是 $\overrightarrow{OF'_2}, \overrightarrow{OF'_3}\ \overrightarrow{OF'_4}$ 爲其和所代,吾人已知此不改變 $\overrightarrow{OR}$。同樣,據 60 節之定理,$\overrightarrow{OG_2}, \overrightarrow{OG_3}, \overrightarrow{OG_4}$ 諸矩爲其和所代,而 $\overrightarrow{OG}$ 不變,故約法 II 不改變 $\overrightarrow{OR}$ 與 $\overrightarrow{OG}$。

應用約法 I, I′, 與 II 任何幾多次,(S) 系雖變,而有向量 $\overrightarrow{OR}$ 與 $\overrightarrow{OG}$ 則不變。

結果　吾人已知利用基本約法若干次,可以二力 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{\Phi}$ 代替任何力系 (S)。此二力所成之系與原系 (S) 之總和及合矩相同。特別言之,若(S)系爲零,則 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{\Phi}$ 之系亦然。此二力之幾何和既爲零,此二力相反,而成一基本力偶(couple)。力矩卽此力偶之軸;因此矩爲零,故力偶之槓桿之臂爲零,而二力乃直接相反。

82. 自由固體之平衡 欲使一固體得平衡,須施於其上之力所成之系(S)爲零。

設此條件已滿足吾人可以直接相反之二力$\overrightarrow{F}$與$\overrightarrow{\Phi}$代替(S),而不改變固體之狀況。據實驗證明一固體受直接相反之二力,若在靜止,永遠靜止。於是有下述之原理,此原理對於質點,已經公認。

原理 一固體受直接相反之二力,若原係靜止,永遠靜止。

故若(S)等於零,在靜止中之固體,得保持其平衡,換言之即永爲靜止。

吾人亦稱組成(S)系之力,在固體上自作平衡,或簡稱(S)系爲平衡。

對於任何物質系統之平衡的必須條件,對於固體亦爲充分之條件,於是有下述之定理:——

〔定理〕 欲使一靜止之固體保持平衡,其必須與充分之條件,乃施於其上之外力所成之系爲零。

平衡條件之分析式:

設$\overrightarrow{OR}$之分量爲$X=\Sigma X_i$, $Y=\Sigma Y_i$, $Z=\Sigma Z_i$, $\overrightarrow{OG}$之分量爲$L=\Sigma L_i$, $M=\Sigma M_i$, $N=\Sigma N_i$, O乃坐標軸之原點。此所用之符號與8節及74節內相同。欲(S)系爲零,必須與充分之條件爲:

$$X=O,\quad Y=O,\quad Z=O,\quad L=O,\quad M=O,\quad N=O$$

此即平衡之分析式也。

注意 I　據以上之原理,更可將 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{\Phi}$ 除去,在靜止中之固體永爲平衡。故一固體不受任何外力,若在靜止,則永久平衡。此與對於一質點而言之結果相同。

反之,吾人可以下述之原理,代替上節之原理:

靜止中的固體,若不受任何外力,則永久平衡,而上節之原理易由此推出。

注意 II　吾人已於 9 節言之,實際無不變形之固體。此不變形之固體的觀念,乃一抽象的觀念。實際變形甚少之體,吾人欲得第一近似値,便視其爲不變形之固體。此種物體當其受直接相反之二力時,則平衡以前,稍微改變其形狀,內力之系亦因是稍改。在外力之每一施力點上,此力與施於此點之內力相平衡。凡此皆假設外力不太大足將物體破壞者而言。

注意 III　設在一固體上,平衡之系(S)乃二系(S′)與(S″)所組成,於是此二系爲平衡。設 $\overrightarrow{OR'}$, $\overrightarrow{OG'}$ 乃 (S′) 之總和與合矩; $\overrightarrow{OR''}$ $\overrightarrow{OG''}$ 乃(S″)之總和與合矩。因 $\overrightarrow{OR}$ 乃 $\overrightarrow{OR'}$ 與 $\overrightarrow{OR''}$ 之幾何和,而爲零,故 $\overrightarrow{OR'}$ 與 $\overrightarrow{OR''}$ 乃直接相反。又因 $\overrightarrow{OG}$ 乃 $\overrightarrow{OG'}$ 與 $\overrightarrow{OG''}$ 之幾何和而爲零, $\overrightarrow{OG'}$ 與 $\overrightarrow{OG''}$ 亦爲直接相反。故:

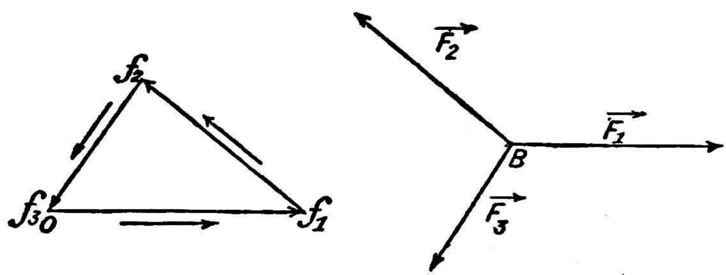
欲施於一固體上之二力系爲平衡,其必須與充分之條件,乃其總和爲直接相反,且其對每點之合矩,爲直接相反。

注意 IV　當一系(S)爲平衡時,對於任何一軸 Δ 之合矩爲零。因對於 Δ 之一點 O 之合矩 $\overrightarrow{OG}$ 爲零,但對於 Δ 之合矩乃

$\overrightarrow{OG}$在此軸上之射影的長度,故亦爲零。

83. 三力之系的平衡　設有作用線(ligne d'action)相異之三力$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$。設於$\overrightarrow{F_1}$之作用線上,而不在$\overrightarrow{F_2}$之作用線上取一定點A,則A點與負$\overrightarrow{F_2}$之直線決定一平面P。設Δ乃此平面內過A點之一軸,因Δ與$\overrightarrow{F_1}$及$\overrightarrow{F_2}$之作用線相交,$\overrightarrow{F_1}$及$\overrightarrow{F_2}$對於Δ之矩爲零。於是三力之系對於Δ之合矩,變爲$\overrightarrow{F_3}$一力之矩。若三力爲平衡,合矩爲零,故$\overrightarrow{F_3}$之矩亦爲零,因是$\overrightarrow{F_3}$與Δ同在一平面上。若將Δ繞O旋轉,可使$\overrightarrow{F_3}$在平面P之內,於是$\overrightarrow{F_2}$與$\overrightarrow{F_3}$在同一平面內。此平面含$\overrightarrow{F_1}$之作用線之任意一點A,故亦含$\overrightarrow{F_1}$。總之此三力同在一平面內。

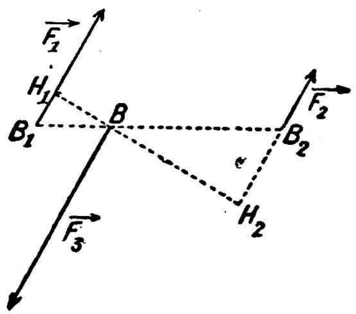
設三力中之二力如$\overrightarrow{F_1}$及$\overrightarrow{F_2}$相交於B(圖67),於是$\overrightarrow{F_3}$應與$\overrightarrow{F_1}$及$\overrightarrow{F_2}$在B之和直接相反。故$\overrightarrow{F_3}$過B點,而三力相交於一點。若作總和圖,可見$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$乃等於一三角形之三邊的有向量,其進行之方向爲一定(圖67)。反之若三力交於一點,等於三角形之三邊,其周界之推移循一定之方向。此三力爲平衡,因其中之任一力與他二力之幾何和爲直接相反。



(圖 67)

現在假設三力中之任二力不相交,即三力為平行。因總和為零,故二力如$\overrightarrow{F_1}$與$\overrightarrow{F_2}$,若為同一之方向,則第三力$\overrightarrow{F_3}$應為相反之方向。此力之大小,與他二力之和的數值相等。

設B乃$\overrightarrow{F_3}$之一點,$\overrightarrow{F_1}$與$\overrightarrow{F_2}$對於B之矩為直接相反,因合矩為零,而$\overrightarrow{F_3}$對於B之矩亦為零。故B點須在$\overrightarrow{F_1}$與$\overrightarrow{F_2}$之作用



(圖 68)

線所範圍之界限內,換言之$\overrightarrow{F_3}$在$\overrightarrow{F_1}$與$\overrightarrow{F_2}$之間經過。且應有:

$$F_1 \times BH_1 = F_2 \times BH_2$$

或
$$\frac{F_1}{BH_2} = \frac{F_2}{BH_1}$$

BH_1與BH_2乃B至二力之距。設於B點任作一橫截線,與他二力之作用線相交於B_1及B_2,於是$\frac{BB_1}{BB_2}$之比等於$\frac{BH_1}{BH_2}$,故

$$\frac{F_1}{BB_2} = \frac{F_2}{BB_1}。$$

反之,若一力在二力之間,其方向與兩端二力之方向相反,而其大小等於二者之和,且若任一橫截線B_1BB_2被中間

力所分之線段,與兩端力之數值爲反比,則三力爲平衡,因總和與對於B點之合矩皆爲零也。

結論: 欲三力爲平衡,其必須與充分之條件乃:1° 須同在一平面內; 2° 若相交,則等於三角形之三邊,依次推移之方向爲一定;若平行,則兩端之力同向,中間之力反向,後者之值,等於前二者之和,且任一橫截線被此三力所分之兩段,與兩端之力之值爲反比。

第 三 章

施於固體上之相等的力系

84. 相等之系——有二力系,非同時施於一固體上,若以其一代其他一,而不改變固體之狀況,則此二力系爲相等。

換言之,當其以一系代他一系時,固體若係靜止,仍爲靜止,若運動,則運動之規律不因是而改。吾人常以"相等之系"(systèmes équivalents),代表"施於固體上相等之力系"。

吾人已知繼續應用基本約法,得將一系(S)變爲相等之他一系(S′),此二系有同一之總和及對於空間之每點O的合矩。下述之定理即表明此結果在所有之情形皆然。

〔定理〕 **欲施於固體上之二力系相等,其必須與充分之條件,乃二系有同一之總和,並對於空間之任何一點有同一之合矩。**

兹先證其爲必須之條件。設(S)與(S′)乃二相等之系。$\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OG}', \overrightarrow{OR}', \overrightarrow{OG}'$乃二系之總和,及對於任意一點O之合矩。設$(S_1)$爲另一系,其總和$\overrightarrow{OR_1}$,其對O點之合矩$\overrightarrow{OG_1}$各與$\overrightarrow{OR}$及$\overrightarrow{OG}$相反。兹以與(S)系內諸力直接相反之力組成$(S_1)$系,於是(S)與$(S_1)$在固體上爲平衡,可以(S′)代(S),而不改變平衡之狀況,故(S′)與(S_1)爲平衡。因此$\overrightarrow{OR}'$與$\overrightarrow{OR_1}$相反,故等於$\overrightarrow{OR}$。又$\overrightarrow{OG}'$與$\overrightarrow{OG_1}$相反,故等於$\overrightarrow{OG}$。

茲再證其爲充分之條件。設(S)與(S′)二系有同一之總和及對於一點O同一之合矩。(據8節之公式對於一點然,即對於所有之點皆然)。設(S″)乃與(S′)系之力直接相反者所組成之系。設固體受(S)系內之力,吾人可加入(S′)與(S″)系內之諸力而不改變固體的狀況,因此乃視(S′)有若干力,即利用約法I若干次。(S)與(S″)二系爲平衡,因(S″)之總和與(S′)者相反,故亦與(S′)相等之(S)的總和相反。繼續應用基本約法,即取消(S)與(S″)系內之平衡的二力,而不改變固體的狀況,所餘者僅(S′)內之力,因固體之狀況不改,故(S)與(S′)爲平衡。

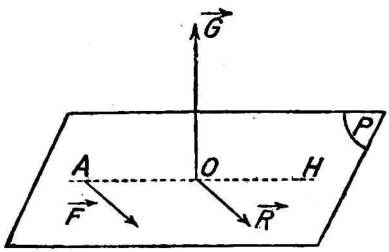
注意I 由上之證法,可見若二系爲相等時,可以基本約法,由一系以到他系。故以任意的次序與任意的次數,應用於一系內,可得諸種等於此系之系。

注意II 欲證二系爲相等,僅須表明其有同一的總和,及對於空間任一點同一的合矩。上面之證法,第二段表明二系相等,而第一段表明有對於空間任一點,同一的合矩。此事實亦8節公式的結果,因此公式乃以總和的分量,及對某一點(特取爲坐標軸之原點)的合矩的分量,表對空間任一點的合矩的分量也。

85. 等於一單力之系 一切之系等於二力。試尋在何條件下,一系(S)可等於一單力$\overrightarrow{F}$,即所謂系之合力。$\overrightarrow{OR}$與$\overrightarrow{OG}$對於(S)系與對於單力$\overrightarrow{F}$爲相同。但對$\overrightarrow{F}$而言,$\overrightarrow{OG}$正交於$\overrightarrow{F}$,即

正交於$\overrightarrow{OR}$。故若(S)等於一單力,在任一點O,總和與合矩乃正交。

反之,設$\overrightarrow{OR}$與$\overrightarrow{OG}$於一定點O爲正交。在於O點與$\overrightarrow{OG}$正交之平面(P)上置一力$\overrightarrow{F}$,等於$\overrightarrow{OR}$,$\overrightarrow{F}$之作用線至O之距爲OA,而使OA×OR=OG(圖69)在(P)平面內,與OR正交之直線上有兩點,離O之長爲$\frac{OG}{OR}$。對於此兩點之一,例如A,$\overrightarrow{F}$之矩與有向量$\overrightarrow{OG}$相合。對於他一點$\overrightarrow{F}$之矩,與$\overrightarrow{OG}$相反。於是可證$\overrightarrow{F}$與(S)相等。因$\overrightarrow{F}$之總和乃等於有向量$\overrightarrow{OR}$,$\overrightarrow{F}$對O點之合矩,據作圖法,乃有向量$\overrightarrow{OG}$。此二有向量對於$\overrightarrow{F}$與對(S)相同,故$\overrightarrow{F}$與(S)相等。於是有下述之定理:——



(圖 69)

〔定理〕 欲一力系等於一單力,其必須與充分之條件乃總和與合矩爲正交。

注意　上述之命題內所取之合矩,其相對之O點,乃任意的。若於一定點O_1,$\overrightarrow{O_1R}$與$\overrightarrow{O_1G}$爲正交,(S)系等於一單力,故於空間之任一點O,$\overrightarrow{OR}$與$\overrightarrow{OG}$爲正交。

此條件之分析式　設O爲坐標軸之原點,則$\overrightarrow{OR}$與$\overrightarrow{OG}$

之分量爲X, Y, Z,與L, M, N。此二有向量旣爲正交,則其無向積應爲零。故:

$$LX+MY+NZ=0$$

反之,若此條件滿足,又設$\overrightarrow{OR}$與$\overrightarrow{OG}$皆不爲零,則此系等於單力$\overrightarrow{F}$。設x, y, z乃$\overrightarrow{F}$之作用線上之任一點的坐標。對於O點,$\overrightarrow{F}$之矩爲$\overrightarrow{OG}$。以式表之,卽:

$$\begin{aligned} yZ-zY&=L & \qquad U&\equiv yZ-zY-L=0 \\ zX-xZ&=M \quad \text{或} & V&\equiv zX-xZ-M=0 \\ xY-yX&=N & W&\equiv xY-yX-N=0 \end{aligned}$$

此三方程式代表 $U=0$, $V=0$, $W=0$ 三平面。因 $UX+VY+WZ\equiv 0$, 而 X, Y, Z 不同時爲零,故此三平面同過一直線。設三量之一,例如Z,不爲零,前二平面,一平行於Ox,一平行於Oy,而相交於一直線(D)。(D)上所有諸點之坐標,使U與V爲零,因最後一等式之故,亦使WZ爲零。又因Z不爲零,故W爲零。故(D)之諸點亦屬於第三平面。

於此可見,與第6節同,X, Y, Z, L, M, N 乃一有向量的坐標。

若$\overrightarrow{OG}$爲零一條件爲滿足,$\overrightarrow{F}$與$\overrightarrow{OR}$相重。若$\overrightarrow{OR}$爲零,條件亦滿足,但(S)系不等於一單力,因總和爲零,而(S)系乃一力偶。

故此條件之分析式乃:

$$LX+MY+NZ=0$$

而
$$X^2+Y^2+Z^2\neq 0$$

86. 等於一基本力偶之系　所謂基本力偶,即二相反之力 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{F'}$ 所成之系,其總和爲零。其合矩即力偶之軸,不論 O 點在何處,等於一定之有向量。故若一系(S)等於一基本力偶,其總和須爲零。

反之,若總和爲零,由前已知對任何處之合矩,爲一定有向量。此系等於一基本力偶,因化(S)系至二力的約法,所得之 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{\Phi}$,其幾何和爲零,故相反。亦可用上節之推理說明之設於(P)平面內作一力 $\overrightarrow{F}$,使其對O點之矩等於 $\overrightarrow{OG}$,且設 $\overrightarrow{F'}$ 爲在O點與其相反之力。F, F′ 力偶等於(S)系,因其總和等零,對於力偶及對於(S)爲相同;且對O之合矩等於 $\overrightarrow{OG}$ 亦爲相同。

相等的力偶　二力偶系(S)及(S′)若具相同之合矩,即相同之軸時,爲相等;反之亦然。在特別情形,(S)與(S′)可爲基本力偶於是:

二基本力偶相等之必須與充分的條件乃其軸爲相等。

故可將基本力偶 $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{F'}$ 在其平面,或其平行之平面內移動,改其力之位置與大小,及槓桿臂之長短,但力偶之軸須爲相同:於是,力偶所及之固體的狀況不改

數基本力偶之組合　設有數基本力偶: $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F'_1}; \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F'_2};$ ……其全體成一系(S),亦爲一力偶,因其總和乃 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F'_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F'_2}$……諸力之幾何和爲零。(S)系等於一基本力偶,其軸爲 $\overrightarrow{OG}$,此軸乃(S)系內諸力之矩 $\overrightarrow{OG_1}, \overrightarrow{OG'_1}, \overrightarrow{OG_2}, \overrightarrow{OG'_2}$ 之幾何和。以 $\overrightarrow{F_1}$,

$\overrightarrow{F'}_1$力偶之軸Og_1即$\overrightarrow{OG}_1$與$\overrightarrow{OG'}_1$之和代$\overrightarrow{OG}_1$與$\overrightarrow{OG'}_1$,以$\overrightarrow{F}_2$,$\overrightarrow{F'}_2$力偶之軸Og_2,即$\overrightarrow{OG}_2$與$\overrightarrow{OG'}_2$之和代$\overrightarrow{OG}_2$與$\overrightarrow{OG'}_2$等……,最後$\overrightarrow{OG}$乃$\overrightarrow{Og_1}$,$\overrightarrow{Og_2}$,……之和,即等於(S)之力偶之軸,稱爲合力偶,即組成(S)系之諸力偶之軸的幾何和。

故爲數基本力偶所成之系,乃等於一基本力偶,其軸乃此數基本力偶之軸的幾何和。

87 化一系至一力與一力偶之約法 設$\overrightarrow{OR}$與$\overrightarrow{OG}$乃(S)系之總和,及對於O點之合矩。設以有向量$\overrightarrow{OR}$爲一力$\overrightarrow{R}$,又$\overrightarrow{F}$ $\overrightarrow{F'}$爲一力偶,其軸爲$\overrightarrow{OG}$。玆證(S)系等於$\overrightarrow{R}$,與$\overrightarrow{F}$,$\overrightarrow{F'}$力偶所成之系。因$\overrightarrow{F}+\overrightarrow{F'}=0$,此二系有同一之總和$\overrightarrow{OR}$,又因力偶之軸爲$\overrightarrow{OG}$,$\overrightarrow{R}$之矩爲零,故有同一之合矩。於是:

諸力所成之系,可等於一力與一力偶所成之系。

有時此力爲零,此系等於一基本力偶。或力偶之軸爲零,此系僅爲一單力。在前一情形,無論O之位置何在,力爲零。在後一情形,軸非常爲零,但與力爲正交。

88. 應用 藉各種約法之助,應用以上之結果,於施於固體上之諸力之系(S)。設R與G表總和$\overrightarrow{OR}$及對坐標軸之原點O之合矩$\overrightarrow{OG}$的長度:

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},\qquad G=\sqrt{L^2+M^2+N^2}$$

設$LX+MY+NZ\neq 0$,原系可以二力,或一力與一力偶所代替。

設$LX+MY+NZ=0$,而$R\neq 0$,原系等於一單力。設$R=0$,

而 $G \neq 0$, 原系爲一力偶, 等於一基本力偶; 若 $R=G=0$ 乃爲平衡。總上所論, 可得下表:——

$$\mathrm{LX+MY+NZ} \neq 0 \qquad \text{一力與一力偶,或二力.}$$

$$\mathrm{LX+MY+NZ}=0\begin{cases} R \neq 0 & \text{一單力,} \\ R=0,\ G\neq 0 & \text{一基本力偶,} \\ R=0,\ G=0 & \text{平衡。}\end{cases}$$

特別情形　1° 設諸力同在一平面(P)內, 所有之有向量 $\overrightarrow{OG_1}, \overrightarrow{OG_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{OG_n}$ 皆與(P)正交, 故 $\overrightarrow{OG}$ 亦與(P)正交, 故亦與在P平面內之 $\overrightarrow{OR}$ 正交。故若 $R \neq 0$, 則原系有一合力。若 $R=0$, $G \neq 0$, 原系與一基本力偶相等。若 $R=G=0$, 卽爲平衡。

注意　設(P)爲 xy 平面, 於是 $Z=0$, $L=M=0$, 而 $LX+MY+NZ=0$。若 $R=\sqrt{X^2+Y^2}\neq 0$ 則原系等於一力 $\overrightarrow{F}$, 在 $xY-yX=N$ 直線之上。此方程式, 係表施於 (x, y) 點之力 $\overrightarrow{F}$, 對於原點之矩, 在 Oz 軸上之量爲 N。

2° 設諸力相交於一點, 可以施於交點 O 之幾何和代之, 於是得 $\overrightarrow{OG}=0$ 之情形。

3° 設諸力平行於一方向 Δ, $\overrightarrow{OG_1}, \overrightarrow{OG_2}, \cdots\cdots, \overrightarrow{OG_n}$ 諸矩皆在過 O 點而與 Δ 正交之平面內, 因而其和 $\overrightarrow{OG}$ 亦皆過 O 點正交於 Δ 之平面內, 故 $\overrightarrow{OG}$ 與 Δ 同方向之 $\overrightarrow{OR}$ 正交。若 $R \neq 0$, 原系有一合力。若 $R=0$, 原系等於一力偶, 或爲平衡。

下章特論平行力所成之系的情形。

第四章

平行力　重心

89. 平行力系之約法　平行力之系,因其於實際極關重要,故特立一章研究。施於地面諸物之重力的系,即平行力之系的一例。在同一地域,組成物體之質點的重量,皆平行力。

由上節之研究,在此種系內,若總和不為零,即向一方之引力之值的總和不與向反對方之引力之值的總和相等時,有一單的總和。若此二方之引力相等時,此系等於一基本力偶。若此力偶之軸為零,則此系為平衡。

今試據計算法,以求此等結果。設 α, β, γ 為與諸力平行之方向的一軸 Δ 的方向變量;$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 為諸力在 Δ 軸上之值;$x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; \cdots\cdots, x_n, y_n, z_n$ 乃諸施力點的坐標。於是有 i 號之力的坐標為:

$$X_i=\alpha P_i,\qquad Y_i=\beta P_i,\qquad Z_i=\gamma P_i$$

$$L_i=P_i(y_i\gamma-z_i\beta),\qquad M_i=P_i(z_i\alpha-x_i\gamma),$$

$$N_i=P_i(x_i\beta-y_i\alpha)。$$

總和之分量為:

$$X=\Sigma X_i=\alpha\Sigma P_i,\qquad Y=\Sigma Y_i=\beta\Sigma P_i,$$

$$Z=\Sigma Z_i=\gamma\Sigma P_i。$$

對於 O 點之合矩的分量為:

$$L=\Sigma L_i=\gamma\Sigma P_i y_i-\beta\Sigma P_i z_i,$$

$$M=\Sigma M_i=\alpha\Sigma P_i z_i-\gamma\Sigma P_i x_i,$$

$$N=\Sigma N_i=\beta\Sigma P_i x_i-\alpha\Sigma P_i y_i。$$

由是有 $LX+MY+NZ=0$。設 $P=\Sigma P_i\neq 0$, 此系有一單合力。設 x,y,z 爲此合力上的一點的坐標,據85節:

$$yZ-zY=L,\qquad zX-xZ=M,\qquad xY-yX=N$$

則由第一方程式,

$$y\gamma P-z\beta P=\gamma\Sigma P_i y_i-\beta\Sigma P_i z_i$$

卽

$$\gamma(Py-\Sigma P_i y_i)=\beta(Pz-\Sigma P_i z_i)$$

$$\frac{Py-\Sigma P_i y_i}{\beta}=\frac{Pz-\Sigma P_i z_i}{\gamma}$$

總合三個方程式得:

$$\frac{Px-\Sigma P_i x_i}{\alpha}=\frac{Py-\Sigma P_i y_i}{\beta}=\frac{Pz-\Sigma P_i z_i}{\gamma}$$

設

$$\xi=\frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i},\quad \eta=\frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i},\quad \zeta=\frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i}.$$

合力的作用線的方程式變爲:

$$\frac{x-\xi}{\alpha}=\frac{y-\eta}{\beta}=\frac{z-\zeta}{\gamma}$$

此乃平行於Δ軸,而過坐標爲(ξ,η,ζ)之G點之値線方程式。

茲設

$$P=\Sigma P_i=0,$$

原系等於一力偶,其軸之分量爲:

$$\gamma\Sigma P_i y_i-\beta\Sigma P_i z_i,\quad \alpha\Sigma P_i z_i-\gamma\Sigma P_i x_i,\quad \beta\Sigma P_i x_i-\alpha\Sigma P_i y_i$$

當此等分量爲零,卽當

$$\frac{\Sigma P_i x_i}{\alpha}=\frac{\Sigma P_i y_i}{\beta}=\frac{\Sigma P_i z_i}{\gamma}$$

之時,原系爲平衡。

無論諸力之方向爲何,其每一力之值,與施力點爲不變時,而欲得平衡,無論 α, β, γ 爲何,須使力偶之軸的分量爲零,卽須有

$$\Sigma P_i x_i=\Sigma P_i y_i=\Sigma P_i z_i=0。$$

在此情形此系稱爲**隨處平衡或中立平衡** (équilibre astatique)。在其他之情形,力之方向只有一種,卽方向變量與 $\Sigma P_i x_i$, $\Sigma P_i y_i$, $\Sigma P_i z_i$。成比例者,方爲平衡。其他之方向,使此系等於一力偶。

90. 平行力之心 設 $P \neq 0$,吾人已知此系有一單合力,在 Δ 軸上之値爲 P,經過 G 點,此點之坐標 ξ, η, ζ,由下式而得:

$$\xi=\frac{\Sigma P_i x_i}{\Sigma P_i}, \quad \eta=\frac{\Sigma P_i y_i}{\Sigma P_i}, \quad \zeta=\frac{\Sigma P_i z_i}{\Sigma P_i}$$

G 點之坐標與力之方向無關;若以 $\lambda P_1, \lambda P_2, \cdots\cdots, \lambda P_n$ (λ 爲任意一數) 代 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n$ 此三坐標亦不變。此 G 點之坐標僅與此等平行力之施力點,及 P_i 諸數,對於其中之一之比有關。

故得下列之命題:——

有一合力之數平行力之値與施力點爲一定時,若改變其方向,合力之作用線,經過一定點。若以一數倍其值,此點不

改。此合力作用線經過之定點G,稱爲平行力之心。

注意 I　平行力之心須$P \neq 0$時,始能確定。在特例,此等力在同一之方向時,此心常可確定。

注意 II　設將(S)系之平行力分爲數組,每組有一合力,例如分爲三組,其合力在Δ上之大小爲R_1, R_2, R_3。因此三力所成之系等於(S),故其合力R等於(S)系之合力。設G_1, G_2, G_3乃每組平行力之心,又設R_1, R_2, R_3施於此諸點上,合力R經過此三力之心G。此心G與(S)系之平行力之心相合,因將(S)系之力繞其施力點旋轉時,此三力R_1, R_2, R_3亦繞G_1, G_2, G_3而旋轉也。

茲設(S)系無一單合力,於是分爲二組,一組爲向一方引之力所成,其合力爲R_1,其心爲G_1;他一組爲向反對方引之力所成,其合力爲$R_2=-R_1$,其心爲G_2。此R_1與R_2成一與(S)系相等之力偶。若將此諸力繞其施力點旋轉,R_1與R_2繞G_1與G_2旋轉,力偶之軸改變。在特別情形,若諸力與G_1G_2之直線同向,則合力R_1與R_2爲直接相反,是爲平衡。最後再設G_1與G_2相合,則平衡於任何向爲可等,原系乃隨處平衡。

注意 III　在定ζ之式內,若

$$z_1=z_2=\cdots\cdots=z_n=0$$

則$\zeta=0$,故:

若諸力之施力點在一平面內,則平行力之心在此平面內

設 $y_1=y_2=\cdots\cdots=y_n=0$ 又 $z_1=z_2=\cdots\cdots=z_n=0$, 則 $\eta=0$ 又 $\zeta=0$, 故:

若諸力之施力點在一直線上,則平行力之心在此直線上。

注意IV　設諸力同系一方向的,可設 $P_1, P_2,\cdots\cdots, P_n$ 諸數爲正,由公式

$$P\zeta=\Sigma P_i z_i$$

可見,若所有之 z_i 爲正,則 ζ 爲正,換言之:

若所有之施力點同在平面之一邊,則平行力之心亦在此諸點所在之一邊。

例如有一封閉凸出之表面,其內包含所有之施力點,則平行力之心G在此表面之內。因凸出之表面,完全在其每一切平面之一邊,故G點對於每一切平面而言,與表面在同一邊,卽此點不能在此表面之外。

若所有之施力點在一平面內,則中心G在所有含此諸點之封閉凸出的曲線之內。

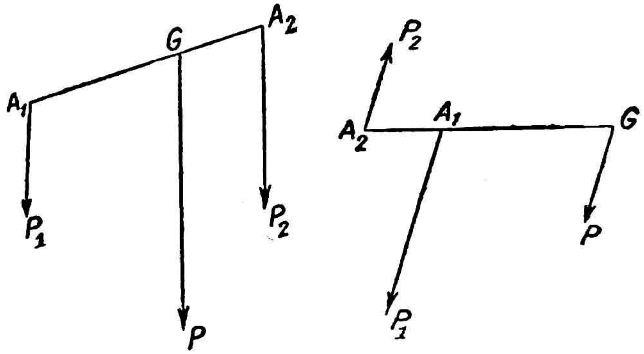
例　試舉二力的情形爲例:

1° 二力同在一向,合力等於 P_1+P_2, 平行力之心G在二力之施力點 A_1, A_2 之聯線 A_1A_2 之間,而且有:

$$\frac{\overline{GA_1}}{\overline{GA_2}}=-\frac{P_2}{P_1}$$

因在G點之合矩爲零,而二力之槓桿臂與 GA_1 及 GA_2 爲比

例(圖70之左圖)。



(圖 70)

2° 二力之向相反,合力之大小爲P_1+P_2;G點在A_1A_2直線之延長線上,而有:

$$\frac{\overline{GA_1}}{\overline{GA_2}}=-\frac{P_2}{P_1}$$

設$|P_1| \quad |P_2|$,則$GA_1 < GA_2$,G點在A_1A_2之延長線上力較大者之一邊。若施力點爲固定,P_1與P_2之絕對值相差甚少,卽合力P甚小,而G點隔離愈遠,因

$$\frac{\overline{GA_1}}{\overline{A_1A_2}}=-\frac{P_2}{P_1+P_2}。$$

當P_1+P_2近而爲零時,GA_1增長至無限。對於平面之一定點O而言,合力之矩漸近於力偶$(P_1,-P_1)$。因可假想P_1爲常數,P_2漸近於$-P_1$也。故據矩之觀點而論,一力偶之作用如一施力點甚遠之甚小力然。

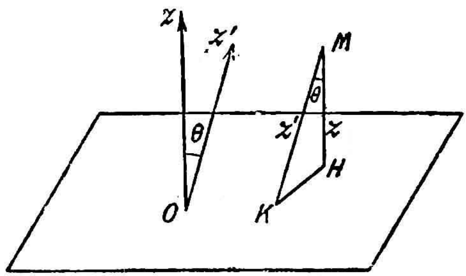
91. 對於一平面之矩　若於

$$P\zeta=P_1z_1+P_2z_2+\cdots\cdots+P_nz_n$$

內，給 P_iz_i 以一特別名稱，此等式可更解釋之如次：所謂**一力對於一平面之矩**，乃此力 P_i 在與力之方向平行之軸 Δ 上之值，與其施點至此平面之距離 z_i 之乘積。此對於一平面之矩的觀念，係先選定一平行於力之軸，及垂直於平面之軸。此觀念僅應用於平行力之情形。據此定義，上列之等式得一新意義如下：

當諸平行力之系有一合力時，合力對於一平面之矩，等於其分量之矩之和。

注意　在上述之定義及定理中，可設 z' 乃斜交於平面之 Oz' 軸上諸施力點的坐標。因設 θ 乃 Oz' 與 Oz 間之角，一點



（圖 71）

M在平行於此二軸之軸上距平面之高 z 及 z' 之關係式為 $z=z'\cos\theta$。（圖 71）上等式中之各項以 $\cos\theta$ 除之，便得：

$$P\zeta'=P_1z'_1+P_2z'_2+\cdots\cdots+P_nz'_n$$

92. 重心　設諸力 P_i 乃物體之質點的重量。此諸平行

力有一合力,等於組成此體之重量。其心稱此物體之重心(centre de gravité)。此點在所有含此體之凸出的表面之內,欲使力對於物體之方向改變,只須使物體改位,因於一定地域內重力之方向爲一定不變。故若將不變形之體方位更改時,此體之重量經過一點G,此點對於物體爲固定。

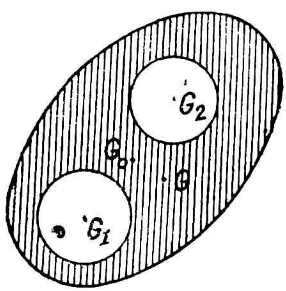
欲明平行力之第二性質,須知物體均勻之義。任取一物體之兩部份,體積相同者,若質量亦同,因是而重量亦同,則此體稱爲均勻(homogène)。故均勻體之一部份的質量,與其體積爲比例。此比值乃物體之密度,卽物體一部份的質量,與此部份之體積之商,亦卽單位體積內之質量也。以下假想每一物體可分爲極多數之小份,每份可視爲一質點,而不生顯着之差。在此每一質點上,施以等於其重量之力。重心G卽此等平行力之心。若改變組成物體之質料,而不改變其幾何的形狀,以同一分爲細微部份之法,可見各質點之重量,依同一比而變,此比卽二質料之密度之比,因此重心G不改變。故:

一均勻體之重心的位置,對於本體而言,僅與其幾何的形狀有關。

由90節注意II,知欲定G點,可先將平行力分爲數組,而以施於每組之心上之合力代替每組。於此可利用此註:欲求一體之重心G,可分此體爲數份,而組合施於每份之重心上之重量。

設有一均勻體,上有一或數孔穴。假想此等孔穴爲組成

此體之質料所充實。如此充實之體的重心G_0,乃下列三重量之心,即施於充實之第一孔之心G_1的重量P_1,施於充實之第二孔之心G_2的重量P_2,及施於假想之有孔體之心G的重量P。若P_0爲假想的充實體之重量,於是:



(圖 72)

$$P_0=P+P_1+P_2$$

故
$$P=P_0-P_1-P_2$$

若在G_1與G_2上施$-P_1$及$-P_2$力,在G_0上施P_0力,則G將爲此諸平行力之心,因$-P$,$-P_1$,$-P_2$與P_0爲平衡也。當其易定G_0,G_1,G_2諸點時,此註甚可利用。

93. 面與線之重心 設有一固體,其一度量比較他二度量甚小,而可忽略。例如一平面薄片,一葉紙,極鄰近之平行二表面所夾之物體,其重心稱爲表面之重心。

設一體之二度量比較第三度量甚小,而可忽略。例如一條線,一極小徑之管,其重心稱爲線之重心。

上節之注意可應用於面及線之重心。於一均勻的表面,質量與面積爲比例;於一均勻的曲線,質量與長度爲比例。

94. 重心之坐標的算法 設有一固體(T),在三正交坐標軸內;以$\mu(x,y,z)$表此體在$A(x,y,z)$點之密度,即以A爲心之小球之質量,與此球之體積,當其半徑近而爲零時之

商之極限。若物體爲均勻的,μ 爲常數。以平行於坐標平面之平面,分物體爲多數小六面體。(T) 之一小份其三度量爲 dx, dy, dz, 其內之一點的坐標爲 x, y, z, 則其重量爲 $g\mu dxdydz$, μ 表 (x, y, z) 點之密度,而物體之總重量爲 $\mathrm{M}g=\Sigma g\mu dxdydz$ 總和 Σ 及於體內所有之小份。應用對於 $y\mathrm{O}z$ 平面之矩的定理,且設 ξ, η, ζ 爲重心的坐標,則得:

$$\mathrm{M}g\xi=\Sigma g\mu xdxdydz$$

若將劃分之小體增多至無限,而使其每份之三度量近而爲零時,則:

$$\mathrm{M}=\iiint\mu dxdydz, \qquad \mathrm{M}\xi=\iiint\mu xdxdydz$$

三重積分乃限於體積 (T) 之周界。亦可將固體分爲其他之多數小份 dv, 而非六面體之分法,更可假設坐標軸乃斜交,因對於一平面之矩的定理,亦可實用。於是得普遍之公式如下:——

$$\mathrm{M}\ =\iiint\mu dv, \qquad \mathrm{M}\xi=\iiint\mu xdv,$$

$$\mathrm{M}\eta=\iiint\mu ydv, \qquad \mathrm{M}\zeta=\iiint\mu zdv.$$

若物體爲均勻的,在含 ξ, η, ζ 式內,當其以M之值代入時,μ 則消去。

若固體乃一表面(S), 則有

$$\mathrm{M}\ =\iint\rho da, \qquad \mathrm{M}\xi=\iint\rho xda,$$

$$\mathrm{M}\eta=\iint\rho yda, \qquad \mathrm{M}\zeta=\iint\rho zda.$$

式內da乃表面之微分,ρ乃密度,二重積分須在(S)之界限內.

對於曲線(L),則有

$$\mathrm{M}=\int\lambda ds,\qquad \mathrm{M}\xi=\int\lambda xds,$$

$$\mathrm{M}\eta=\int\lambda yds,\qquad \mathrm{M}\zeta=\int\lambda zds,$$

ds乃曲線之元(即微分) λ乃密度,各積分在(L)之限內.

注意 以上之算法內,假設組成物體之質點之數n增多至無限,且同時設每一點之質量近而爲零,於是不用總和Σ,而用定積分。其算法可由原函數而得,此乃用積分算便利之原因也。總和Σ乃積分之近似值,隨所分之小份之多寡而異,自然以其極限值代之.

95. 有對稱形之物體 本節內所論之物體爲均勻的,且常可設其密度爲1。對稱之條件乃就物體之幾何形狀而言。

注意 I 若物體有一對稱心,則此對稱心即爲重心。

例如以物體爲體積(T),對稱心爲原點。就積分$\iiint xdv$而論,吾人可將(T)分爲多數對於O點兩兩對稱之小元,dv對於二對稱元爲相同,但x之值則相反,Σxdv之和常爲零,故積分爲零,即$\xi=0$。同樣可得$\eta=\zeta=0$,可用同一之推理於表面與曲線的情形。

例 平行六面體之表面或體積,球之表面或體積,邊數爲偶之有規則的多邊形之周界或表面,及平圓等,其重心皆

與各形之對稱心相重合。又一段直線之重心,乃此段線之中點。

注意 II　若一平面薄片有一與一方向之弦相當之徑,則重心在此徑上。

所謂一直線(L),乃與一方向D相當之徑,即使與薄片上之每一點A,有一相當之點A′,俾AA′線段平行於D,且其中點在(L)線上。若D與(L)正交,則直線L乃對稱軸。

就
$$M\eta=\iint y\,da$$
而論,設以直線(L)為x軸,而Oy軸平行於D。吾人可將此薄片分為無數的小份,其每相當之二份同有(L)徑者,其面積相同。因可假想此等小份為平行四邊形,其邊與二軸相平行而相當之y之值為相反,$\Sigma y da$常為零,故積分亦為零,而$\eta=0$。

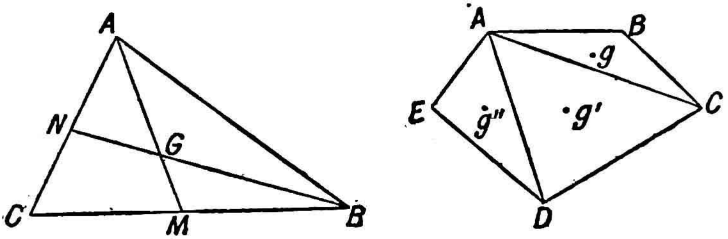
此推理非能常用於曲線的情形,因線之二小段以Ox為徑者,不常為等長。而含ds之式,例如以x之函數表之,則加入切線與Ox所成之角,對於相當之二份,此角之值常相異。

在對稱之情形,此注意可用於曲線。

例　設有一三角形ABC;對於BC向有AM為徑,對於AC向有BN為徑,(圖73)重心G乃此二徑之交點,即三中線之交點。

再論任何平面多邊形,例如ABCDE五邊形。(73圖之右

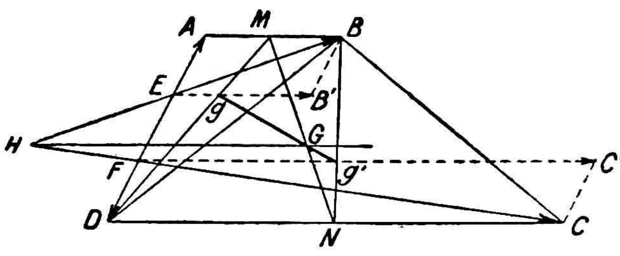
圖)吾人可將此形分爲三個三角形,其重心爲 g, g', g''。原形之重心 G,可組合施於 g, g', g'' 與相當之三角形之面積爲比例之三平行力而得.



(圖 73)

梯形之重心,較易決定,因其有對於與兩底平行之弦的一徑。設 ABCD 爲一梯形,(圖 74)聯接 AB 與 CD 之中點的直線 MN,乃與底邊之方向相當的徑。

對角線 BD 將梯形分爲 ABD 及 BDC 二三角形,其重心 g 與 g' 在中線 DM 與 BN 之上,距 M 與 N 爲全線三分之一處。須組合施於 g 與 g',而與二三角形之面積有比例之二平行力,此二力之心在 gg',故梯形之重心 G 乃 gg' 與 MN 之交點.



(圖 74)

玆再論一便利之作法,常用於圖解的靜力學 (statique

graphique) 上。施於 g 與 g' 之力可以其值等於 AB 及 CD，因二三角之高相同，亦可以此二力平行於 AB，其合力亦平行於 AB。取此二力與 AD 之交點 E，F 爲施力點，於是此二點將 AD 三等分之，二力遂爲 $\overrightarrow{EB'}$ 與 $\overrightarrow{FC'}$。若加入二直接相反之力 $\overrightarrow{EA}$ 與 $\overrightarrow{FD}$，則合力仍不改變。以合力 $\overrightarrow{EB}$ 代 $\overrightarrow{EA}$ 及 $\overrightarrow{EB'}$，以合力 $\overrightarrow{FC}$ 代 $\overrightarrow{FD}$ 與 $\overrightarrow{FC'}$，$\overrightarrow{EB}$ 與 $\overrightarrow{FC}$ 相交於總和上之 H 點。故此作法如下：先將梯形之一邊 AD 分爲三等分，其分點爲 E 與 F，設 BE 與 CF 之交點爲 H，則由 H 平行於底邊之直線，交 MN 徑於 G，即爲所求之重心。

注意 III　若一體積有一與一方向之弦相當之對徑平面(plan diamétral)，則重心在此對徑平面上。

所謂一平面(P)乃與一方向 D 相當之對徑平面，即使與體上之每一點 A，有一相當之點 A′，俾 AA′ 點段平行於 D，且其中點在 (P) 上，若 D 與 (P) 爲正交，則平面 P 乃一對稱平面。就公式：

$$M\zeta=\iiint zdv$$

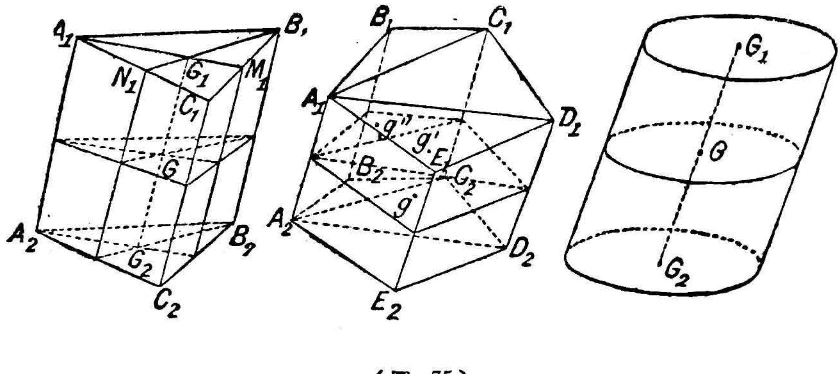
而論，設以(P)平面爲 xy 平面，而 Oz 軸平行於 D。吾人可將此體積 (T) 分爲無數的小份，其每相當之二份同有對徑平面 (P) 者，其體積相同，因可假想此等小份乃各稜平行於各軸之六面體，而相當之 z 的二值乃相反，Σzdv 中常有二項相等而反號，故爲零，因此積分亦爲零，故 $\zeta=0$。

此推理非能常用於表面與曲線的情形,因以(P)爲對徑平面之表面或曲線不常爲相等。含面積da之式,例如以x與y之函數表之,則加入法線與Oz間之角,對於相當之二份,此角之值常相異。

對於對稱之情形,此結果可應用於表面與曲線。

例 1° 設有一三角柱 $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$: B_1C_1 方向有一對徑平面,經過 A_1A_2 與 B_1C_1 之中點 M_1,重心即在此平面上;亦在A_1C_1向之對徑平面上,此即經過B_1B_2與A_1C_1之中點N_1之平面。故重心G在此二平面之交線G_1G_2之上,亦在離兩底等距之平面上,此平面即三稜之方向的對徑平面。故G乃G_1G_2之中點。因G_1與G_2乃兩底之平面的重心,G乃兩底之重心的連線的中點,亦即離兩底等距處之剖面的重心。

茲再論一五角柱 $A_1B_1C_1D_1E_1A_2B_2C_2D_2E_2$。藉二個對角平面之助可將此體分爲三個三角柱,如圖(75)所示者。此三柱

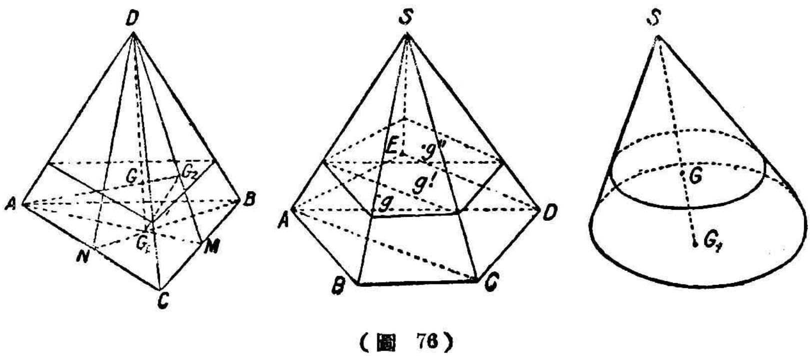


(圖 75)

體之重心g, g', g''與平均橫剖面之重心相合。欲求五角柱之重心G,只須將施於g, g', g''而與相當之三角柱的重量有比例之三平行力組合卽得。但三角柱之重量與其底面三角形之面積爲比例,因固體乃均勻的,而此等三角柱之高相等。故現只須組合與此等三角形之面積有比例而施於其重心g, g', g''上之三平行力卽可。於是得平均橫剖面之重心。此結果可推廣於底面平行之圓柱,因在圓柱內可作一內接多角柱,當其底邊之多角形之邊數增至無限,而使每邊近而爲零時,則其極限爲圓柱也。於是:

多角柱或圓柱之重心,與平均橫剖面之重心相重合。此點亦係二底之重心的連線的中點。

2° 設有一三角錐 DABC。對於每稜之方向有一對徑平面。對於BC對徑平面,經過AD與BC之中點M;對於AC對徑平面,經過BD與AC之中點N。此二平面相交於DG_1線,G_1乃三角形 ABC 之二中線AM與BN之交點,卽ABC之重心。欲



(圖 76)

求之重心在DG_1上,同理亦在AG_2上,G_2乃BCD三角形之重心。此二線皆在ADM平面內,其交點G乃三角錐之重心。因$MG_1=\frac{1}{3}MA$,又$MG_2=\frac{1}{3}MD$,故G_1G_2平行於AD,而等於$\frac{1}{3}$AD。於是GAD與GG_1G_2爲相似之三角形,而其相似比爲$\frac{1}{3}$,即$GG_1=\frac{1}{3}GD$,故G點在DG_1線上,自底面計DG_1線段之四分之一處。

過G點作一平行於ABC之平面。此平面與由D而出之稜相交,於其離底面之四分之一處,且與諸對徑平面相交於橫剖面之三角形的中線上;故G點乃橫剖面之三角形的重心。

現更討論一五角錐SABCDE。藉二個對角平面之助,可將其分爲三個三角錐,與上面對於柱體之推理完全相同,可證明重心G與錐體之高離底面四分之一處,平行於底面之橫剖面的重心相合。且此點在頂點S與底面之重心G之連線上。此結果以上述之極限法,可推廣至圓錐的情形。故:

多角錐或圓錐之重心,與錐體之高離底面的四分之一處平行於底面之橫剖面的重心相合。且此點在頂點與底面之重心之連線上,其離底面四分之一處。

注意　上述之均勻體,具簡單之幾何形,故其重心之決定未用上節之積分式。如下所述之二方法,可應用於他種情形。

1° 先將物體分爲較簡單,而其重心易定之數份。

2° 再尋物體之對稱的所在,而更利用上述之關於對稱與重心之諸項注意。

第五章

不自由的固體之平衡

96. 有連繫之固體 一固體在一範圍內,不能佔有任何之位置時,此固體在此範圍內爲不自由;或與他體接觸,或受其他羈絆,例如一複梯乃不自由的二固體所組成,每梯之每邊,下方依於地上,上方爲一剛硬之條所連。

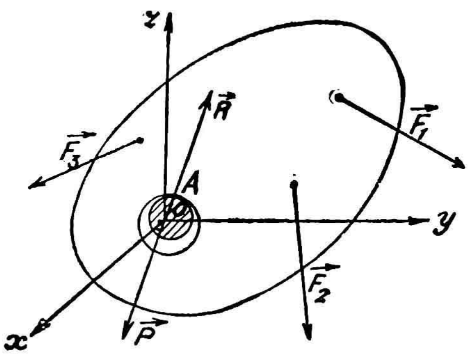
一固體非自由時,稱曰受羈絆(géné),或曰有連繫(soumis à des liaisons)。使固體不能任意改位之體,即所以實現此連繫之體。一體與他體相觸,其每一點上有一作用與反作用。若此作用與二體之公共切平面正交,於是連繫之實現,爲無摩擦力。

不自由之固體的平衡的研究,可歸入自由體的平衡的研究內。對於每一連繫加入一相當之反作用即足。於是固體可視爲自由的,受施於其上之外力的作用,與連繫的反作用。後者亦稱連繫力(forces de liaison)。

一體有連繫時,平常有幾種的改位,改位之使連繫仍爲存在者,稱合於連繫之改位(déplacements compatible avec les liaisons)。例如一體以其一平面靜止於桌上,此體在桌上滑動,是合於連繫的改位。但此體離桌上昇時,則爲不合於連繫的改位矣。

以下研究,固體受幾種簡單的連繫之平衡的條件,即固體之有一定點,一定直線或置於一定平面之上,皆假設摩擦力可略去。

97. 有一定點之固體　設 O 乃此固體之定點。設想吾人在此體掘一甚小球形之孔,而置一中心爲 O 之球形小珠於孔內。此珠之半徑較小孔之半徑略小,故固體得繞珠而轉動。兩球形面接觸於一點 A (圖 77)。珠施於固體一反動力 $\overrightarrow{R}$,而固體施於珠一直接相反之動力 $\overrightarrow{P}$。因摩擦力可忽略,故 $\overrightarrow{R}$ 與 $\overrightarrow{P}$ 二力同過 O 點。$\overrightarrow{R}$ 亦稱爲 O 點之反動力。固體可視爲自由的,僅受 $\overrightarrow{R}$ 力與施於其上之外力 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \cdots\cdots$ 等之作用。此等力應爲平衡,故 $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \cdots\cdots$ 諸力成一系統,與過 O 與 $\overrightarrow{R}$ 相反之單力 $\overrightarrow{R'}$ 相等。平衡之必須及充分之條件乃對於 O 點之合矩 $\overrightarrow{OG}$ 爲零。



(圖 77)

反之,若 $\overrightarrow{OG}$ 爲零,諸外力等於過 O 點之一力 $\overrightarrow{R'}$。固體受

諸外力及與$\overrightarrow{R'}$直接相反之$\overrightarrow{R}$之作用,而爲平衡。吾人認此$\overrightarrow{R}$力乃表接觸處小珠之反動力。

分析式 設以O爲坐標軸之原點,若X,Y,Z與L,M,N乃外力之總和與合矩$\overrightarrow{OG}$之分量,又X',Y',Z'乃反動力之分量,平衡之六條件以式表之如下:——

$$X+X'=0 \qquad L=0$$

$$Y+Y'=0 \qquad M=0$$

$$Z+Z'=0 \qquad N=0$$

後三式表有一定點在O之固體之平衡的條件。前三式乃表反動力之分量爲$-X$, $-Y$, $-Z$。總之:——

欲使有一定點之固體平衡其必須與充分之條件,乃施於此體上之外力,對於定點之合矩爲零。

吾人常假設$\overrightarrow{P}$力非甚大,足以破壞支持之小珠。

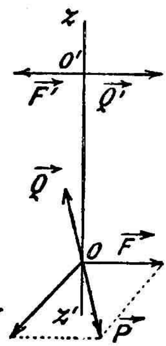
注意 固體在平衡時吾人給與一合於連繫的任意的小改位。此改位乃繞過O點之一軸Δ的旋轉,試求施於固體上之諸外力之原工之和。對於$\overrightarrow{F_1}$力言,其原工等於$\overrightarrow{F_1}$力對於Δ軸之矩與旋轉角$\delta\theta$之乘積。同樣,亦得$\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$,……等諸力之工作。此諸工作之和等於$\delta\theta$與$\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$,……諸力之矩與$\delta\theta$之乘積。換言之卽等於此力系對於Δ軸之合矩,而此矩乃等於$\overrightarrow{OG}$在Δ上之射影,因$\overrightarrow{OG}$爲零,故此工作亦爲零。

反之,若對於所有合於連繫之改位的原工爲零,$\overrightarrow{OG}$在O點之任一軸上之射影爲零;$\overrightarrow{OG}$爲零,故固體爲平衡。

98. 有一定軸之固體　固體之一軸 zz' 爲固定之情形，乃常用之連繫的一例。在固體內掘一圓柱形之空槽，於此槽內置一實在之圓柱，半徑稍小，軸爲 zz'，而使之固定不動。匣之蓋繞其鏈節之軸而開閉，門窗繞其樞軸而啓闔，車輪繞其軸而轉動，皆實際之例。

設固體受外力 $F_1, F_2, F_3, \cdots\cdots$ 等與反動力 $\overrightarrow{R}$ 之作用而平衡，所有諸力對於 zz' 軸之矩之和爲零。因反動力 $\overrightarrow{R}$ 與軸同在一平面上，其矩爲零，又諸外力對於軸之合矩亦爲零也。

反之，若設此矩爲零，以一力 $\overrightarrow{OR}$ 及一力偶 $\overrightarrow{OG}$ 代諸外力 $F_1, F_2, F_3, \cdots\cdots$，O 乃軸上使軸固定之一點。有向量 $\overrightarrow{OG}$ 與 zz' 正交，因其在 zz' 上之射影爲零，力偶之平面過 zz' 軸，可以二相反之力 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{F'}$ 代之。$\overrightarrow{F}$ 施於 O 點，而 $\overrightarrow{F'}$ 施於軸上之任何他一點 O'。設 OO' 爲槓桿臂，於是 $\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{F'}$ 二力與軸正交，$\overrightarrow{F}$ 與 $\overrightarrow{OR}$ 二力之和爲 $\overrightarrow{P}$ (圖 78)。$\overrightarrow{P}$ 與 $\overrightarrow{F'}$ 二力所成之系可與由固定軸而來之直接相反的反動力 $\overrightarrow{Q}$ 及 $\overrightarrow{Q'}$ 相平衡。



(圖 78)

因 O' 點乃軸上之任意的一點，反動力之分配有無限種，僅其中之一與實際相合。假設能尋得 $\overrightarrow{Q}$ 及 $\overrightarrow{Q'}$ 二力，與軸相交，抵消外力，俾物體得達平衡。若固體全不變形，反動力之計算確切的表式爲不可能。

已知反動力$\overrightarrow{Q'}$與軸正交,但非必須。設O′為一固定之點,固體於O′之附近,可在軸上滑動。固定一點O藉zz'軸之助,導引固體於O′之上,則連繫之法得矣。

分析式 設一旋轉之軸為z軸,O為原點,設軸為定點O與他一點O′,其高度為h者所固定。若$X', Y', Z'; X'', Y'', Z''$乃O與O′上之反動力的分量。此二動力之坐標為:

$$X',\quad Y',\quad Z',\qquad 0,\quad 0,\quad 0,$$

$$X'',\quad Y'',\quad Z'',\quad -hY'',\ hX'',\ 0;$$

而平衡之六方程式為:

$$X+X'+X''=0,\qquad L-hY''=0$$

$$Y+Y'+Y''=0,\qquad M+hX''=0$$

$$Z+Z'+Z''=0,\qquad N=0$$

末後之一方程式$N=0$表平衡之條件。其餘之五方程式可用以求反動力。由前二列之四方程式得X', X'', Y', Y'',而求Z'與Z''僅有一方程式:

$$Z'+Z''=-Z$$

僅其和可以求得。當O′點非固定時,$Z''=0$,而$Z'=-Z$。

注意 吾人於此遇不變形之系的靜力學,不能定反動力之一情形.

據幾何學之觀點論,只須以O點為固定,於O′點使固體在OZ上自由滑動,於是連繫可以決定。若固定O′點,則加入一過多的幾何條件。故反動力不能決定。此乃一普遍的事實,

常表現於類似之情形中。

據力學之觀點論,固體於此非爲不變形之體。固定O與O′二點,因OO′之長不變,是阻物體變形之自由,而他方面反動力之決定爲不可能。若於O′點不加以樞紐,吾人可假想物體稍微變形後,原在O之點,復回至O,且在O′之附近OO′之上;原在O′之點,復回至O′,此言變形爲可能。此一普遍的事實;常表現於類似之情形中。若固體得自由變形,靜力學可定反動力。若固體受羈絆,不能自由變形,則反動力之決定爲不可能。

物體能沿軸滑動之情形　在此情形,因摩擦力可忽略,反動力與軸正交,$Z'=Z''=0$,而方程式變爲:

$$
\begin{aligned}
X+X'+X''&=0, & L-hY''&=0,\\
Y+Y'+Y''&=0, & M+hX''&=0,\\
Z&=0, & N&=0.
\end{aligned}
$$

末後一列之二方程式,乃平衡之條件。前二列之四方程式可用以定O及O′處之反動力的分量。

結論　有一固體能繞一定軸旋轉,而不能在此軸上滑動者欲其平衡,其必須與充分之條件乃施於此體上之諸外力對於此軸之合矩爲零。

若固體能沿軸滑動,則必須與充分之條件乃1°諸外力對於軸之合矩爲零,且2°外力在此軸上之射影之和爲零。

注意　在第一情形,合於連繫之改位乃繞OZ之旋轉。

對於繞 OZ 軸旋轉一小角 $\delta\theta$, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots\cdots$ 諸力之原工之和爲 $N\cdot\delta\theta$。若固體爲平衡,則此等工之和爲零。反之,若此和爲零, $N=0$, 而固體爲平衡。

在第二情形,有二種的改位,卽繞OZ之旋轉與順 OZ 軸之滑動。卽一小改位爲旋轉角 $\delta\theta$,與移動度 δZ 所成。對於移動 $\vec{F}_1, \vec{F}_2$, 等之原工爲 $Z_1\delta z, Z_2\delta z$ 等,卽其和爲 $Z\delta z$。對於小改位之原工乃 $Z\delta z+N\delta\theta$。若物體在平衡中, Z 與 N 皆爲零,不論 δz 與 $\delta\theta$ 爲何值,工作爲零。反之,若不論 δz 與 $\delta\theta$ 爲何值,此工爲零,則 $Z=N=0$, 而物體在平衡中。

99. 置於一定平面上之固體 因摩擦力可忽略,在固體與平面接觸之每一點,平面之反動力與平面爲正交。所有之反動力有一合力 $\vec{R}$, 與平面正交,向固體所在之空間的一面,且其與此平面相交之點,乃在包圍諸接觸點之封閉凸出之諸曲線之內。此合力 $\vec{R}$, 應與諸外力 $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \cdots\cdots$ 等相平衡。故諸外力須有一單合力 $\vec{P}$, 與平面正交,且其方向在壓抑物體於平面之上,且其與平面之交點乃在包圍此等支點之一切凸出的周界之內。吾人可特以此周界爲以諸支點爲頂點之凸多角形,且此多角形之外,不當更有支點。此多角形稱爲支點的多角形(polygone de sustentation)。若支點全在一直線上,支點的多角形變爲連接兩極端之支點的一段直線。合力 $\vec{P}$ 應與平面相交於支線多角形之內。

反之,若上列之條件已經滿足:——

1° 只有一支點A。支點的多角形縮爲一點A，而 $\overrightarrow{P}$ 力應過A點，可與直接相反之反動力 $\overrightarrow{R}$ 爲平衡，且設確有此反動力，於是固體在平衡之狀態中。

2° 有二支點 A_1 與 A_2。$\overrightarrow{P}$ 力與 A_1A_2 線段相交於一點A，吾人可以過 A_1 與 A_2 平行而同向之二力 $\overrightarrow{P_1}$ 與 $\overrightarrow{P_2}$ 代替 $\overrightarrow{P}$。此二力可與其直接相反之反動力 $\overrightarrow{R_1}$ 與 $\overrightarrow{R_2}$ 相平衡，且設確有此二反動力之存在，於是固體在平衡之狀態中。

3° 有不在一直線上之三支點 A_1, A_2, A_3。$\overrightarrow{P}$ 力與此三角形交於一點A，在其周界之內或周界之上。A_1A 直線與 A_2A_3 線段相交於 A'，因A在 A_1A' 之內，吾人可以施於 A_1 與 A' 平行而同向之二力 $\overrightarrow{P_1}$ 與 $\overrightarrow{P'}$ 代替 $\overrightarrow{P}$。

同樣，因 A' 在 A_2A_3 之內，吾人可以施於 A_2 與 A_3 之平行而同向的二力 $\overrightarrow{P_2}$ 與 $\overrightarrow{P_3}$ 代替 $\overrightarrow{P'}$。$\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{P_3}$ 三力可與其直接相反之反動力 $\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R_3}$ 相平衡，且設確有此三反動力之存在。於是固體在平衡之狀態中。

若不只二支點同在一直線上，則反動力不能定。據幾何學，一體之二點在平面上，則物體上與此二點同在一直線所有諸點皆在此平面上。更言此諸點中有一點在此平面上，即表示一過多之條件矣。

4° 設有三支點以上，不全在一直線上，$\overrightarrow{P}$ 力與支點多角形相交於不在其外之一點A。此點乃在以支點爲定點之諸三角形之內。若 $A_1A_2A_3$ 乃此等三角形之一。如上所論，吾人可

以施於A_1, A_2, A_3之三力$\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{R_3}$與$\overrightarrow{P}$相平衡,而假想其他諸反動力爲零。斯蓋假設能得一系之反動力,足以抵消外力,而使固體平衡。若支着之平面爲不變形的,且支持之點在三以上,則固體不能自由變形,於是反動力乃不能決定。故靜力學可求三足之桌,而不能求四足之桌的反動力。

分析式 例如有四支點。設支着之平面爲xy平面,Oz軸與此平面正交,且向固體所在之空間的一面,若a_1, b_1, O; a_2, b_2, O; a_3, b_3, O; a_4, b_4, O; 乃此四支點之坐標,則反動力之坐標爲:

$$\begin{array}{ll} 0,\ 0,\ -R_1, & -b_1R_1,\ a_1R_1,\ 0, \\ 0,\ 0,\ -R_2, & -b_2R_2,\ a_2R_2,\ 0, \\ 0,\ 0,\ -R_3, & -b_3R_3,\ a_3R_3,\ 0, \\ 0,\ 0,\ -R_4, & -b_4R_4,\ a_4R_4,\ 0, \end{array}$$

表平衡之六條件的方程式爲:

$$X=0, \qquad L-b_1R_1-b_2R_2-b_3R_3-b_4R_4=0,$$

$$Y=0, \qquad M+a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3+a_4R_4=0,$$

$$Z-R_1-R_2-R_3-R_4=0, \qquad N=0。$$

平衡之條件爲$X=0$, $Y=0$, $N=0$, 於是推出

$$LX+MY+NZ=0。$$

故$\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \cdots\cdots$諸力有一單合力$\overrightarrow{P}$,與$OZ$平行,其值爲$Z$。且

$$Z=R_1+R_2+R_3+R_4 \geqslant 0$$

$\overrightarrow{P}$壓抑固體於平面上。設$A\ (a, b, O)$乃此合力與xy平面相交

之點,則有

$$L=bZ, \qquad M=-aZ,$$

因此

$$bZ=b_1R_1+b_2R_2+b_3R_3+b_4R_4$$

$$aZ=a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3+a_4R_4$$

而

$$b=\frac{b_1R_1+b_2R_2+b_3R_3+b_4R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

$$a=\frac{a_1R_1+a_2R_2+a_3R_3+a_4R_4}{R_1+R_2+R_3+R_4}$$

a 之值在 a_1, a_2, a_3, a_4 諸數之最大值及最小值之中,故A在支點多角形之內。

平衡之三方程式包含反動力者,不足以計算此等反動力。若僅有三支點,而不同在一直線之上,則此三方程式已足求此三反動力。

結論　**置於一平面上之固體,其平衡的必須與充分之條件,乃施於此體之諸外力具一單合力,與此平面正交,其方向俾壓此體於平面之上,且此合力與平面相交之點,須不在支點多角形之外。**

注意　若給固體一合於連繫之改位,即使固體仍在平面上改位。此改位乃繞由轉動瞬時心所引平行於OZ之Δ軸,經過一 $\delta\theta$ 角之轉動。外力之原工之和爲 $N'\delta\theta$, N'表外力對於Δ軸之合矩。若 $x_0\, y_0$ 乃Δ在 xy 平面上之足的坐標,於是

$$N'=N-(x_0Y-y_0X)。$$

若固體在平衡中,則 $N=X=Y=0$, 而 $N'\delta\theta=0$。反之,若不

論如何改位,原工之和為零,則

$$N - x_0Y + y_0X = 0$$

而不論 x_0, y_0 之值為何。故 $N=X=Y=0$, 而固體在平衡之狀態中。

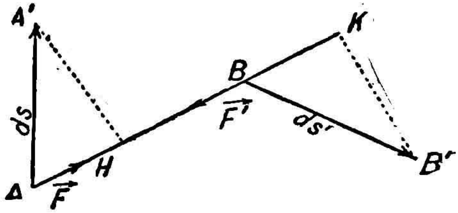
100. 虛功原理 在上述諸簡單之情形中,各注意內說明平衡之必須與充分的條件,乃對任何合於連繫之改位,外力之功之和為零。此種合於連繫之改位稱**虛改位**(déplacement virture)。

以上所得之條件,乃系之靜力學的普遍的一原理,稱為**虛功原理** (principe des travaux virtuels) 其詞如下:

無摩擦力而有連繫之系,其平衡之必須與充分的條件,乃對任何合於連繫之虛改位,施於體上之外力之功之和為零。

此原理內所謂施於體上之力,指外力及內力而言。惟連繫力須除去耳。

對於固體言,內力乃連繫力,此連繫即固體之二點間的距離為恆常不變。吾人易證此等內力之功為零。原理中僅云



(圖 79)

外力已足,因內力皆兩兩直接相反。設 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 與 $\overrightarrow{\mathrm{F}'}$ 乃 A 與 B 二點間相互作用所生之二內力。對於物體之一小改位,$\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 之原功爲 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 與有向量 $\overset{\prime\prime}{\mathrm{AA}'}$ 之無向積,AA′ 之值爲 $ds=vdt$, 在 A 點所作之曲線的切線上,即此積爲 $\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}$(圖 79)。同樣 $\overrightarrow{\mathrm{F}'}$ 之功等於 $\overrightarrow{\mathrm{F}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BK}}=-\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BK}}$。而此二功之和爲 $\overrightarrow{\mathrm{F}}\,(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{BK}})$。但由 27 節 A 與 B 二點上之速度有向量,在 AB 上之射影,乃相等之有向量。故 $\overrightarrow{\mathrm{V}dt}$ 與 $\overrightarrow{\mathrm{V}'dt}$ 二有向量在 AB 上之射影相等,即 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{BK}}$,故功之和爲零。

故固體之內力之虛功之和亦爲零。

練習題

1. 設有A,B,C三點,又M爲任何一點,k爲一定數,則$\overrightarrow{k\cdot MA}$, $\overrightarrow{k\cdot MB}$, $\overrightarrow{k\cdot MC}$之合力爲$\overrightarrow{k\cdot MG}$,G乃ABC三角形之重心。且推廣至普遍的情形。

2. 設k_1, k_2, k_3爲常數,求證$\overrightarrow{k_1\cdot MA}$, $\overrightarrow{k_2\cdot MB}$, $\overrightarrow{k_3\cdot MC}$之合力等於$\overrightarrow{(k_1+k_2+k_3)MI}$,I乃此三平行力之心,爲其值等於$k_1$, k_2, k_3施於A,B,C三點。試研究$k_1+k_2+k_3=0$的情形,且推廣至普遍的情形。

3. 一桿AEM置於一人之肩上,E點處。極端A載一重量P,因手靠於桿上之M點的作用,重物P得維持其不變之位置。當手之位置M在桿上改位時,A與E二點不動,試求肩上之壓力的改變。本題內不計桿之重量與摩擦力。

4. 一均匀的細條AB,其重量爲P,繞其固定之一端A而運動,他端B藉一拉緊之線,繫於A點之鉛垂線上之一點O。此系在平衡中OAB爲等腰三角形,試求線之張力,與定點A之反動力。

5. 一不變形之系AOB,乃二均勻之直桿所成,兩桿每單位長之重量相同。OB之長倍於OA,AOB角爲60度。

此形於AOB角之頂點O,繫於一釘上。在平衡之位置時,求OA與過O之鉛垂線間之角的正切。

6. 一均勻而不變形的平面多角形ABCDEF，乃正六角形之五邊所成。

1° 將此周界在E角頂繫於一水平之釘上，在平衡之位置時，求對角線EB與鉛垂線間之角的正切。

2° 一線繫於A點，引此線使對角線EB爲鉛垂向，而線爲水平。在此新平衡之位置時，試求線之張力，與周界之重量之比。

3° 解同一之問題但設周界繫於頂點D，而且以對角線DA代EB。

7. 一均勻之矩形薄片ABCD，其重量爲P，繞其水平之邊AB旋轉。其兩端A與B爲固定之二點。一細桿OE，其重量可略而不計，其一端O，固定於含AB之水平面內，與AB二點爲等距。藉他一端E，此桿依薄片上之CD邊上之一點。在平衡之位置時薄片之平面與水平面所成之角爲60度。

試求桿在薄片上之壓力及A與B二定點之反動力，在與AB正交向上之分量。

8. 一均勻之球，其半徑爲R，重量爲P，置於完全平滑之斜面上，此斜面與水平面間所成之角爲α。此球爲一不可伸展而長3R之線所繫，於其表面上之一點A。線之他端爲一定點B，離斜面之距爲3R。B點與球皆在斜面之上。

試求平衡之位置，線之張力與斜面之反動力，在上述之條件內，平衡常可能否？

9. 一均勻之球,其重量爲P,置於三硬桿所成之不變形的正三角形之架上。此架之各邊與球相切。球之半徑等於三角形內接圓之半徑。

1° 三角形在水平之位置時,求球與各邊相切處之反動力。

2° BC邊爲水平向,使三角形之平面繞BC旋轉,達一位置,此平面與水平面間所成之角爲 α, 問 α 之角爲何度時,球離開三角形?

本題內摩擦力略而不計。

10. 有一桌,其重量爲P,立於一定水平面(H)之上。此桌之上部乃一圓形(T),其等長之三足與(H)交於三點,乃(T)圓之內接三角形ABC三頂點之射影。此桌藉一可灣曲不能伸展而無重量之線,與一定點O相連,此線繫於桌上之頂點A。假設桌所在之位置,使線拉緊。

求證可於圓周(T)上A外之一點M上,施一水平向之力Q,而不改桌之平衡的情形。試求M點之位置,及Q之位置與方向。且求Q力,使桌失去平衡之極限值。

設 α 爲AO線與鉛垂線間之角,且設O點較A點高,又桌非均勻體,其重心在過ABC三角形之重心的鉛垂上(摩擦力略而不計)。

11. 一均勻體的手杖,其彎曲部乃一半圓形AB,其後隨一直桿BC,在B點與半圓相切。BC之長八倍於AB之直徑。

將此手杖置於桌之邊上,僅使 A 端與水平之桌面上一點相接觸。

試求平衡時,BC 與鉛垂線間之角的一三角函數之值。

12. 設有一均勻的半球形之杯,其半徑爲 R,重爲 P,其厚可略而不計。

1° 求證其重心 G,乃與杯沿之平面正交之半徑 OC 之中點。

2° 在杯沿之圓周(T)上一點 A,置一小質點,其重量爲 p,試求此負重之杯的重心 G_1。

3° 若置此負重之杯於平滑之水平桌上。當平衡時,圓周(T)之平面,與水平面所成之角爲 θ。已知 p 及 P,求 θ。

試研究下列之特別情形:

$$p=P, \qquad p=P\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad p=\frac{P}{2}, \qquad p=\frac{P}{4}.$$

13. 有一兩足規,其相等之兩枝 OA, OB 繫於一樞鈕 O。在一垂直壁上有二釘,同在一水平線上。吾人將規置於二釘之間,其頂點在釘之下方。二釘與二枝之中點相接觸而其間之距等於釘長之半。一細條 AB,其重量可略而不計,置於 A,B 二點之間,以免此規關閉。試求釘與條之反動力(摩擦力略而不計)。

同一問題,但設規之頂點在釘之上方,釘在二枝之間。A, B 二點爲一不能伸展而重量可略之線所連。

14. 一均勻的圓形薄片,其半徑爲R,藉一不能伸展而重量可略,其長爲2R之線,一端繫於壁上之釘C,他端繫於圓周上之一點。又一均勻同質的圓形薄片,其半徑爲2R,藉與上相同之線,其長爲R,一端繫於同一釘C,他端繫於圓周上之一點。此二圓形薄片與垂直壁同居於一平面。

試求平衡時,二線之方向,與過C點之鉛垂線間之角度。

15. 一均勻的橢圓形薄片依垂直向置於一水平向之粗糙的釘上。橢圓之平面與釘正交,摩擦係數爲f。試問橢圓之離心率e應不過何極限,則橢圓上之任何點,選爲接觸點,仍得保持薄片之平衡?

第四篇　系之動力學

第一章

普通方程式

101. 動量　一質量之系,爲 n 點 $M_1, M_2, \cdots\cdots, M_n$ 所組成。吾人可書每一點之運動的微分方程式。此等方程式內含系之外力與內力。此諸方程式之組合,可消去內力,而得系之動力學的普遍方程式。亦如組合 n 點之平衡諸方程式,可消去內力,而得系之平衡的普遍方程式。

爲敍述便利計,特介紹一有向量,稱曰動量(quantité de mouvement)。

所謂一質點 M(其質量爲 m)在 t 時之動量,乃原點在 M 而等於 $\overrightarrow{mV}$ 之有向量。

此有向量之分量爲:

$$m\frac{dx}{dt}, \qquad m\frac{dy}{dt}, \qquad m\frac{dz}{dt}.$$

又點之運動的方程式:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2}=Z.$$

可書爲:

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right)=X,\quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right)=Y,\quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dz}{dt}\right)=Z,$$

若僅就此三方程式之一而論,例如第一,可見:

一點之動量在一軸Δ上之射影對於時間之引數,等於施於此點之諸力之和,在此軸上之射影。

將上列之定理應用於每一坐標軸,即得諸運動的方程式。

由運動的方程式,得導出以下諸式:

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=yZ-zY=L,$$

$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=zX-xZ=M,$$

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=xY-yX=N;$$

此諸式更可書爲:

$$\frac{d}{dt}\left[y\left(m\frac{dz}{dt}\right)-z\left(m\frac{dy}{dt}\right)\right]=L,$$

$$\frac{d}{dt}\left[z\left(m\frac{dx}{dt}\right)-x\left(m\frac{dz}{dt}\right)\right]=M,$$

$$\frac{d}{dt}\left[x\left(m\frac{dy}{dt}\right)-y\left(m\frac{dx}{dt}\right)\right]=N。$$

括號內之式,表動量對於坐標軸之矩。吾人可宣佈下列一定理:——

一點之動量對於一軸Δ之矩等於時間之引數,等於施

於此點之諸力之和,對於此軸之矩。

動量之系　對於一 n 質點之系,在每瞬時,動量成一 n 有向量之系。設 $\overrightarrow{O\rho}$ 爲此系 t 時之總和,而 $\overrightarrow{O\sigma}$ 爲對原點之合矩。$\overrightarrow{O\rho}$ 在 Ox 上之分量爲:——

$$m_1\frac{dx_1}{dt}+m_2\frac{dx_2}{dt}+\cdots\cdots+m_n\frac{dx_n}{dt}$$

$$=\Sigma m_k\frac{dx_k}{dt}=\frac{d}{dt}\Sigma m_k x_k=\frac{d}{dt}(\mathrm{M}\xi)=\mathrm{M}\frac{d\xi}{dt}$$

ξ,η,ζ 表 t 時 n 質點系之重心的坐標, M 表全系之質量。故 $\overrightarrow{O\rho}$ 之分量 α,β,γ 爲:

$$\alpha=\Sigma m_k\frac{dx_k}{dt}=\mathrm{M}\frac{d\xi}{dt},$$

$$\beta=\Sigma m_k\frac{dy_k}{dt}=\mathrm{M}\frac{d\eta}{dt},$$

$$\gamma=\Sigma m_k\frac{dz_k}{dt}=\mathrm{M}\frac{d\zeta}{dt}.$$

又 $\overrightarrow{O\sigma}$ 之分量 λ,μ,ν 爲:

$$\lambda=\Sigma m_k\left(y_k\frac{dz_k}{dt}-z_k\frac{dy_k}{dt}\right),$$

$$\mu=\Sigma m_k\left(z_k\frac{dx_k}{dt}-x_k\frac{dz_k}{dt}\right),$$

$$\nu=\Sigma m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)。$$

102. 動量之射影的定理——重心之運動 先書系內各點之運動的第一方程式:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\frac{dx_1}{dt}\right)=X_1,\ \frac{d}{dt}\left(m_2\frac{dx_2}{dt}\right)=X_2,\cdots\cdots,\ \frac{d}{dt}\left(m_n\frac{dx_n}{dt}\right)=X_n$$

而後將諸方程式之兩端相加,得:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\frac{dx_k}{dt}=\Sigma X_k$$

以上之 $X_1, X_2,\cdots\cdots,X_n$ 乃施於各點之力之和 $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\cdots\cdots,\overrightarrow{F_n}$ 在 Ox 軸上之分量。其中之一,例如 $\overrightarrow{F_k}$,乃內力與外力之和。故總和 ΣX_k,乃及於施於系上所有之諸力。但已知此和內,內力之射影爲零,而所餘者僅外力之射影之和 X,此卽施於系上之諸外力之總和。$\overrightarrow{OR}$ 在 Ox 上之射影,因可以任何一軸 Δ 爲 x 軸,於是有下列之一定理:——

〔定理〕 動量在一軸 Δ 上之射影之和對於時間的引數,等於諸外力在此軸上之射影之和。

應用此定理於各坐標軸,於是得三普遍的方程式如下:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\frac{dx_k}{dt}=X,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\frac{dy_k}{dt}=Y,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\frac{dz_k}{dt}=Z。$$

又動量之總和的射影爲:

$$M\frac{d\xi}{dt}, \qquad M\frac{d\eta}{dt}, \qquad M\frac{d\zeta}{dt}.$$

於是

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2}=X, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2}=Y, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2}=Z。$$

上列之定理遂變爲重心之運動的定理:——

〔定理〕 **質點系之重心的運動,與設想全系之質量全聚於此心而外力之總和施於其上之運動相同。**

例 1° 若無外力,重心之加速度爲零,其運動乃直線等速。若不計恆星之作用,日系之重心的運動,大約如此。

2° 若外力僅係重力,重心之運動如一與全系重量相等之重力點,在眞空中,軌道乃一拋物線。若一礮彈在空中炸裂,其全體之重心,在炸前與炸後,皆作同一拋物線之弧。

3° 若系內所有之外力與 Oz 平行,重心在 xy 平面上之射影爲不動,或作等速直線運動。若物體開始時係靜止,重心僅在與 Oz 平行之線上改位。

一人立於一完全平滑之水平面上,例如一冰製的平面。外力僅係重力與平面之反動力。因無摩擦力,此反動力之向亦係垂直的。此人可昇降其重心,但不能有水平向的改位。換言之,無摩擦力時,人之進行爲不可能。若於起始時,給以一速度,重心在一垂直平面內改位,非遇阻礙時,此平面之方向不改。

4° 設有圓柱形之礮管,其柱爲水平線 Ox, 置於同徑之

半空圓柱上,而共安置於架上。礮管與礮彈成一質體之系,外力乃重量與支柱之反動力。因略去摩擦力,此反動力與圓柱正交。所有之力皆與 Ox 正交。故重心 G 之加速度,在 Ox 上之射影爲零。礮於以前,此點之速爲零,故此點在 Ox 之射影不動。因礮彈與炸裂之氣向前突出,故管須向後退,方使 G 之坐標不變。礮管之質量愈大,此後退之度愈微,因管與彈之重量之和,常過 G 點,與管之重量相當之槓桿臂,將因管愈重而愈短也。

103. 動量之矩的定理 由

$$\frac{d}{dt}\left[m_1\left(y_1\frac{dz_1}{dt}-z_1\frac{dy_1}{dt}\right)\right]=L_1$$

與對於 $M_2, M_3, \cdots\cdots, M_n$ 諸點相類之方程式,將此諸式加之,得:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(y_k\frac{dz_k}{dt}-z_k\frac{dy_k}{dt}\right)=\Sigma L_k$$

第一端乃動量對於 Ox 之矩之和,對於 t 之引數,第二端乃諸力對於 Ox 之矩之和。此和內關於內力之項,因其兩兩相反,彼此抵消而所餘者僅諸外力對於 Ox 之矩之和 L, 卽合矩 $\overrightarrow{OG}$ 在 Ox 上之分量。因吾人可取任一軸爲 x 軸,故有下列之普遍的定理:——

〔定理〕 動量對於一軸 Δ 之矩之和,對於時間之引數,等於諸外力對於此軸之矩之和。

應用此定理於三坐標軸,得三新普遍之方程式如下:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(y_k\frac{dz_k}{dt}-z_k\frac{dy_k}{dt}\right)=\mathrm{L},$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(z_k\frac{dx_k}{dt}-x_k\frac{dz_k}{dt}\right)=\mathrm{M},$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)=\mathrm{N}。$$

結果　設外力對於一軸Δ之矩之和爲零,且以此軸爲 z 軸,則:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)=0,$$

於是

$$\Sigma m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)=\mathrm{C},$$

C 乃一常數。

但 $x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}$ 乃 M_k 點在 xy 平面上之射影 M'_k 的面積引數之二倍。設 A_k 乃向徑 OM'_k 自初時所掃過之面積,則圖 80)

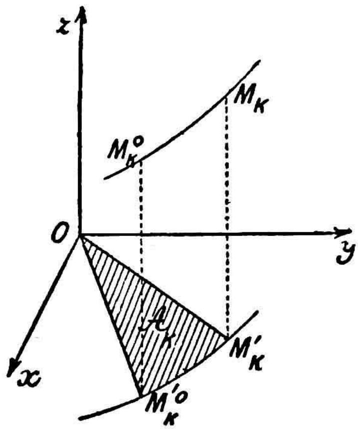
$$\Sigma m_k\frac{d\mathrm{A}}{dt}=\frac{1}{2}\mathrm{C},$$

於是　$$\Sigma m_k\mathrm{A}_k=m_1\mathrm{A}_1+m_2\mathrm{A}_2+m_3\mathrm{A}+\cdots\cdots+m_n\mathrm{A}_n=\frac{1}{2}\mathrm{C}t.$$

因於 $t=0$, 第一端爲零,故不加入常數。

於是稱系之運動在 xOy 平面上之射影,遵守面積定律,若系在初時爲靜止,則初時所有之面積引數爲零,而 $\mathrm{C}=0$,

$\Sigma m_k A_k$ 之和常爲零。M'_k 諸點離其初位置後,非以同一方向繞O旋轉,卽在每瞬時有諸點循一方向轉,其他諸點循反對之方向轉。



(圖 80)

此於若干時後,系上所有諸點,能繞Oz,作一全轉,幷無妨害。例如一人立於冰製之水平面上,所有之外力皆鉛垂向,故 N=0。若人於起始時爲靜止,$\Sigma m_k A_k=0$,但人可在冰面上自轉,而仍能證明面積定律之存在也。

若合矩 $\overrightarrow{OG}$ 爲零,於是得三個第一積分:——

$$\Sigma m_k\left(y_k\frac{dz_k}{dt}-z_k\frac{dy_k}{dt}\right)=C$$

$$\Sigma m_k\left(z_k\frac{dx_k}{dt}-x_k\frac{dz_k}{dt}\right)=C'$$

$$\Sigma m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)=C''$$

在三坐標平面上之射影運動,皆循面積定律。例如外力僅係重力,又設物體起始時爲靜止,重心 G 僅在 Oz 上改位;外力之合力經過 O 點,在過 O 之任一平面上之射影運動,皆繞 O 點,遵守面積定律。

104. 普通方程式之幾何學的解釋　運動之六個普通方程式爲:

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\frac{dx_k}{dt}=X,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\frac{dy_k}{dt}=Y,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\frac{dz_k}{dt}=Z;$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(y_k\frac{dz_k}{dt}-z_k\frac{dy_k}{dt}\right)=L,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(z_k\frac{dz_k}{dt}-x_k\frac{dz_k}{dt}\right)=M,$$

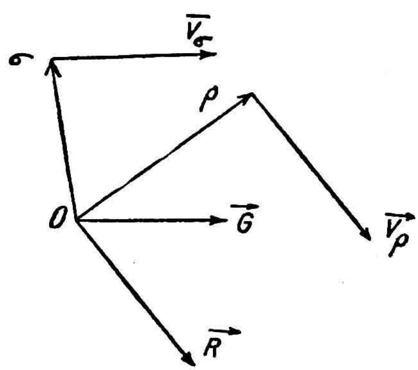
$$\frac{d}{dt}\Sigma m_k\left(x_k\frac{dy_k}{dt}-y_k\frac{dx_k}{dt}\right)=N。$$

設以 α,β,γ 爲動量之總和 $\overrightarrow{O\rho}$ 之分量, λ,μ,ν 爲動量之合矩 $\overrightarrow{O\sigma}$ 之分量,此六方程式遂爲:

$$\frac{d\alpha}{dt}=X,\qquad \frac{d\beta}{dt}=Y,\qquad \frac{d\gamma}{dt}=Z,$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=L,\qquad \frac{d\mu}{dt}=M,\qquad \frac{d\nu}{dt}=N。$$

第一列之三方程式表$\overrightarrow{O\rho}$之末端的速度$\overrightarrow{V\rho}$等於$\overrightarrow{OR}$。第二列之三方程式表$\overrightarrow{O\sigma}$之末端的速度$\overrightarrow{V_\sigma}$等於$\overrightarrow{OG}$(圖81)當諸外力有一合力經過O時,$\overrightarrow{OG}$爲零;$\lambda, \mu, \nu$爲常數C, C′, C″,而$\sigma$點爲不動。面積定律應用於過O之任一平面,與之相當之面積常數,乃不變的向量$\overrightarrow{O\sigma}$在平面之法線上的射影。對於與$\overrightarrow{O\sigma}$正交之平面,此常數之絕對值爲極大,於是有**極大面積之平面**(plan du maximum des aires)之稱。



(圖 81)

105. 活力定理 先書對於M_1點之活力的定理,其微分式爲:

$$d\frac{1}{2}m_1v^2{}_1=X_1dx_1+Y_1dy_1+Z_1dz_1$$

再書其對於$M_2, M_3, \cdots\cdots, M_n$諸點之相同的方程式,各端相加,則得:

$$d\frac{1}{2}\Sigma m_kV_k{}^2=\Sigma X_kdx_k+\Sigma Y_kdy_k+\Sigma Z_kdz_k$$

諸點之活力之和,稱系之活力。此方程式以詞表之,遂爲以下之定理:——

〔定理〕 質點之系的半活力的微分,等於施於此系上之諸力之原功之和。

須注意內力之功之不常爲零,但由 100 節知於固體的情形,此和乃爲零。

運動之六普通方程式,僅含外力。活力之方程式具外力,亦有內力。於固體之情形,僅須算外力之功。

活力之方程式的各項,皆時間之函數,在 t_0 與 t 之間積分之,得其有限形爲:——

$$\frac{1}{2}[\Sigma m_k V_k^2 - \Sigma m_k (V_0^k)^2] = \Sigma \int_{t_0}^{t} X_k dx_k + Y_k dy_k + Z_k dz_k = \Sigma T_k$$

於一時期內,系之半活力之差,等於此時期中施於此系之諸力之功之和。

於固體之情形,有時每一外力自一力函數導出,於是諸力之系亦自爲以上諸力函數之和之力函數所導出:

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots\cdots, x_n, y_n, z_n)$$

因此
$$d\frac{1}{2}\Sigma m_k v_k^2 = dU,$$

或
$$\frac{1}{2}\Sigma m_k V_k^2 - U = h$$

h 乃一常數。系之總能 (énergie totale),即動能 $\frac{1}{2}\Sigma m_k V_k^2$ 與位能 $-U$ 之和,乃一常數。

注意　活力之定理,於機械之研究上,甚爲重要。在

$$\frac{1}{2}\left[\Sigma m_k V_k{}^2-\Sigma m_k (V_k{}^0)^2\right]=\Sigma\ T_k$$

式內,第二端含**動力功** T_m, 與**阻力功** $-T_r$; 後者更分爲有用功,與被動的阻力(如摩擦力)功。故:

$$\frac{1}{2}\left[\Sigma m_k V_k{}^2-\Sigma m_k (V_k{}^0)^2\right]=T_m-T_r$$

若機械之運動在常態下,其運動乃週期的。設 $t=t_0$ 等於一週期,所有諸點之速度,在 t 與 t_0 之時相同,於是

$$T_m=T_r$$

即在一週期內,動力功等於阻力功。

若 $|t-t_0|$ 不足一週期,此等式不復存在。但將速度之改變盡量減小,通常特用飛輪,即以此故。

第二章

固體繞軸之運動

106. 動量與活力　設有一固體,能繞 Oz 軸轉動,而不能在其上滑行。可假想軸上之 O 與 O′ 二點爲樞紐所定;或固體只固定於 O,而在 O′ 點可自由滑動。於第一情形,O 與 O′ 二定點之反動力,具任意之方向。於第二情形,若略去摩擦力,O′點之反動力與軸正交。此種連繫實際用之甚廣。例如機械之輪與軸是。

試求系之活力。固體之一點 M 之速度,等於 $\omega\cdot r$, ω 表旋轉的角速度,r 表此點至 Oz 軸之距離。固體之活力爲:

$$\Sigma m\omega^2r^2=\omega^2\Sigma mr^2$$

再求動量對於旋轉軸 Oz 之矩之和。對於 M 點動量之矩在 Oz 上之值爲 $m\omega r\times r$; 此等矩之和爲

$$\Sigma m\omega r^2=\omega\Sigma mr^2。$$

故計算活力,與動量對於旋轉軸之矩的總和,皆引至求 Σmr^2 之和,此和及於組成固體之所有的質點。下節內將研究此和之幾個性質。

107. 轉動慣量　所謂一質點之系,對於一軸 Δ 之轉動慣量(moment d'inertie),乃每點之質量與至 Δ 軸之距的平方之乘積的總和,常以 $I=\Sigma mr^2$ 表此轉動慣量。此乃一數,爲正

或零。此和之各項爲零,卽系內所有之點同在Δ線上時,此和始爲零。

對於Ox, Oy, Oz三軸之轉動慣量爲:

$$\Sigma m(y^2+z^2)=\mathrm{A},\quad \Sigma m(z^2+x^2)=\mathrm{B},\quad \Sigma m(x^2+y^2)=\mathrm{C}。$$

又 $$\Sigma myz=\mathrm{D},\qquad \Sigma mzx=\mathrm{E},\qquad \Sigma mxy=\mathrm{F}$$

稱**慣量積** (produits d'inertie) 慣量積易改爲轉動慣量。設Ox_1與Oy_1乃將xOy角繞Oz轉過$+\frac{\pi}{4}$而得之二軸。於是M點之新坐標(x_1, y_1, z_1)與舊坐標(x, y, z)間有下列之關係:

$$x=\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},\qquad y=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}},\qquad z=z_1$$

因此 $$xy=\frac{1}{2}(x_1^2-y_1^2)=\frac{1}{2}[(x_1^2+z_1^2)-(y_1^2+z_1^2)]$$

$$\Sigma mxy=\frac{1}{2}[\Sigma m(x_1^2+z_1^2)-\Sigma m(y_1^2+z_1^2)]$$

$$\mathrm{F}=\frac{1}{2}(\mathrm{B}_1-\mathrm{A}_1)$$

A_1與B_1乃對於Ox_1與Oy_1之轉動慣量。

吾人常將轉動慣量寫爲MK^2, M表系之質量:

$$\mathrm{I}=\mathrm{MK}^2$$

k稱對於Δ軸之**迴轉半徑**(rayon de giration)。

注意 欲求一連續體(例如一固體)之轉動慣量,將此體分爲無數小份,每一份小至爲一質點,每份之質量爲μdv,而轉動慣量爲$\Sigma r^2\mu dv$。當此小份之數增至無限,而每份之體

積近而爲零時,則此和可以其極限值代之,爲:

$$I=\iiint \mu r^2 dv$$

對於平行軸之轉動慣量　對於數平行軸之轉動慣量,藉下列定理之助,只須求對於其中之一軸之轉動慣量。

設 I 爲一系對於一軸 Δ 之轉動慣量,又 I_G 乃對於自重心所引,平行於 Δ 之軸之轉動慣量,則

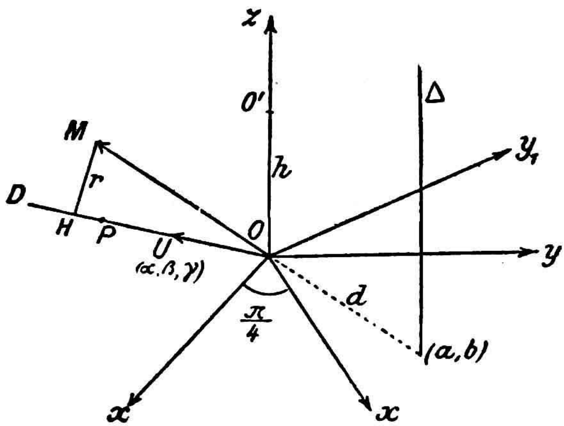
$$I=I_G+Md^2$$

式內 M 表系之總質量,d 乃二軸間之距離。

設以過重心平行於 Δ 之軸爲 z 軸,且設

$$x=a,\qquad y=b$$

爲 Δ 之方程式 (圖 82)



(圖 82)

M 點 (x,y,z) 至 Δ 軸之距離之平方爲:

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2$$

故 $$\Sigma mr^2=\Sigma m(x^2+y^2)-2a\Sigma mx-2b\Sigma my+(a^2+b^2)\Sigma m$$

但 $\Sigma m=\mathrm{M}$; $a^2+b^2=d^2$, 因重心 G 在 Oz 軸上,故 $\Sigma mx=\mathrm{M}\xi=0$, $\Sigma my=\mathrm{M}\eta=0$, 所餘之項即:

$$\mathrm{I}=\mathrm{I}_G+\mathrm{M}d^2$$

設 $\mathrm{I}=\mathrm{MK}^2$, $\mathrm{I}_G=\mathrm{M}\rho^2$, 則二迴轉半徑之關係爲:

$$\mathrm{K}^2=\rho^2+d^2$$

對於相交於一點之諸軸之轉動慣量 試研究對於由同一點發出之諸軸之 I 的變化。設一軸 OD 爲此軸上,長度爲 1 之有向量 $\overrightarrow{\mathrm{OU}}$ 的射影 (α,β,γ) 所定。試求 M 點至 OD 軸之距離 $r=\mathrm{MH}$; 但 MH 表有向量 $\overrightarrow{\mathrm{OU}}\times\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ 之長度,因此乃建於二有向量上之平行四邊形的面積;此乘積之分量爲:

$$\beta z-\gamma y,\qquad \gamma x-\alpha z,\qquad \alpha y-\beta x,$$

故 $$r^2=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2,$$

即 $$r^2=(y^2+z^2)\alpha^2+(z^2+x^2)\beta^2+(x^2+y^2)\gamma^2$$
$$-2yz\beta\gamma-2zx\gamma\alpha-2xy\alpha\beta,$$

$$\Sigma mr^2=\alpha^2\Sigma m(y^2+z^2)+\beta^2\Sigma m(z^2+x^2)+\gamma^2\Sigma m(x^2+y^2)$$
$$-2\beta\gamma\Sigma myz-2\gamma\alpha\Sigma mzx-2\alpha\beta\Sigma mxy,$$

即 $$\mathrm{I}=\mathrm{A}\alpha^2+\mathrm{B}\beta^2+\mathrm{C}\gamma^2-2\mathrm{D}\beta\gamma-2\mathrm{E}\gamma\alpha-2\mathrm{F}\alpha\beta。$$

欲知 I 如何隨 OD 之方向改變,在 OD 軸上取一線段 $\mathrm{OP}=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{I}}}$, P 點之坐標 X, Y, Z 於是爲:

$$X=\frac{\alpha}{\sqrt{I}},\qquad Y=\frac{\beta}{\sqrt{I}},\qquad Z=\frac{\gamma}{\sqrt{I}}$$

在上列方程式中以 $X\sqrt{I}$, $Y\sqrt{I}$, $Z\sqrt{I}$ 代 α,β,γ 得:

$$AX^2+BY^2+CZ^2-2DYZ-2EZX-2FXY=1$$

P點之軌跡乃一二次曲面,易見其爲橢圓曲面(ellipsoide)。此曲面之心在原點,稱爲對於O點之**慣性橢圓面** (ellipsoide d'inertie)。

注意 I　吾人已知對於一軸之I,除系之諸點全在此軸之情形外,不能爲零。此僅於一方向 OD_1 爲然,在此特別之情形,P之軌跡乃圍繞 OD_1 之旋轉圓柱面。在普遍之情形,慣性橢圓面有三對稱軸,稱爲對於O點之**慣性主軸**(axes principaux d'inertie) 若此橢圓面爲旋轉面,則在赤道平面上有無限個主軸。

注意 II　欲使 Oz 爲對於O點之一主軸,其必須與充分之條件,乃橢圓面對於 Oz 爲對稱,即方程式內不含 Yz 與 zx 之項,故條件爲:

$$D=\Sigma myz=0,\qquad E=\Sigma mzx=0.$$

且欲使 Oz 對於高度 h 之他一點 O' 爲一慣性主軸,則須使相當之慣性積 $\Sigma my\,(z-h)$ 與 $\Sigma mx\,(z-h)$ 爲零。但

$$\Sigma my(z-h)=\Sigma myz-h\Sigma my=-hM\eta,$$

$$\Sigma mx(z-h)=\Sigma mxz-h\Sigma mx=-hM\xi,$$

故須 $\xi=\eta=0$。換言之,即須 Oz 過G點,於是無論 h 爲何,

Oz 軸對於 O' 爲主軸。故:

中心橢圓面之一慣性主軸,乃對於此軸上所有之點之主軸。

108. 固體繞定軸之運動 設以 z 軸爲定軸,而使 O 與 O' 爲固定。O 爲坐標軸之原點,O' 之高度爲 h。若固體靠着於 O, O' 二點,則在此二點上受有任何方向之反動力。設其分量對於 O 者爲 X', Y', Z', 對於 O' 者爲 X'', Y'', Z''。六個普遍的方程式爲:

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=X+X'+X'',$$

$$\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+Y'+Y'',$$

$$0=Z+Z'+Z'', \text{(因 } z \text{ 爲常數)}$$

$$-\Sigma mz\frac{d^2y}{dt^2}=L-hY'',$$

$$\Sigma mz\frac{d^2x}{dt^2}=M+hX'',$$

$$\Sigma mr^2\frac{d\omega}{dt}=N。$$

末後一方程式乃求動量對於旋轉軸之矩之和的結果,已詳於106節。因此方程式不含反動力,故規定運動。以 MK^2 代 Σmr^2,則方程式爲:

$$Mk^2\frac{d\omega}{dt}=N$$

若 $N=0$, 則 $\frac{d\omega}{dt}=0$, ω 爲常數,運動爲等速。

注意　由活力定理亦可得同樣之方程式,因活力爲 $Mk^2\omega^2$,而原工爲 $N\omega dt$,又因內力與反動力之工爲零,故:

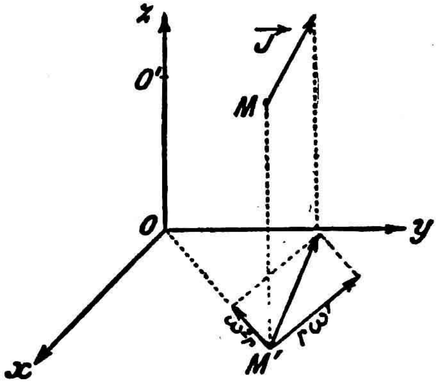
$$d\frac{1}{2}Mk^2\omega^2=N\omega dt$$

卽

$$Mk^2\omega\frac{d\omega}{dt}=N\omega$$

求反動力　可由前五方程式求反動力。

用 21 節之符號, M 點之加速度的分量爲 $\gamma_r=-\omega^2r$, $\gamma_p=r\omega'$, $\gamma_z=0$ (圖 83)。γ_r 在 OM′ 軸上, $\overrightarrow{OM'}$ 之分量爲 x, y, 因 $\overrightarrow{\gamma_r}=-\omega^2\overrightarrow{OM'}$ 故 $\overrightarrow{\gamma_r}$ 之分量爲 $-\omega^2x, -\omega^2y$。同樣,與 $\overrightarrow{OM'}$ 直接正交



(圖 83)

而其長等於 OM′ 之有向量的分量爲 $-y, x$, 故 $\overrightarrow{\gamma_p}$ 之分量爲 $-\omega'y, \omega'x$, 而 M 點之加速度 $\overrightarrow{J}$ 的分量乃:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x-\omega'y, \qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\omega^2y+\omega'x$$

以上之方程式變爲:

$$X+X'+X''=-\omega^2\Sigma mx-\omega'\Sigma my,$$

$$Y+Y'+Y''=-\omega^2\Sigma my+\omega'\Sigma mx$$

$$Z+Z'+Z''=0,$$

$$L-hY''=\omega^2\Sigma myz-\omega'\Sigma mxz,$$

$$M+hX''=-\omega^2\Sigma mxz-\omega'\Sigma myz。$$

由末後二方程式得 X'' 與 Y'',於是由前二方程式得 X' 與 Y',僅餘一方程式以定 Z' 及 Z'':

$$Z'+Z''=-Z$$

此處所遇之情形,與靜力學內相當之題(98節)相同。若固體在 O' 點不受阻擋,反動力與 Oz 軸正交,$Z=0$,而 $Z'=-Z$。

反動力之分量與 ω^2 有關,若角速度增大,則反動力亦增大,可使軸彎曲挫折。故於轉動甚速之機器,寧使反動力與 ω^2 無關,欲其如此,其必須與充分之條件爲:

$$\Sigma mx=0,\quad \Sigma my=0,\quad \Sigma mxz=0,\quad \Sigma myz=0。$$

卽旋轉軸乃對於重心之一慣性主軸,故欲免危險,當使機器繞此軸旋轉。

注意 I　設外力有一合力經過 O 點,則 $L=M=N=0$ 因此 $\omega'=0$, 故:

$$X+X'+X''=-\omega^2\Sigma mx,\qquad -hY''=\omega^2\Sigma myz,$$

$$Y+Y'+Y''=-\omega^2\Sigma my,\qquad hX''=-\omega^2\Sigma mxz,$$

$$Z+Z'+Z''=0.$$

若固體於O'點不受阻擋，$Z''=0$；欲使O'點之反動力爲零，其必須與充分之條件爲：

$$\Sigma myz=\Sigma mxz=0,$$

卽Oz須爲對於O點之慣性主軸；於是不須將固體繫之於O，僅有一定點O已足。故：

若一固體有一定點O，而受有一合力過O之諸力，且繞對於O之一慣性主軸旋轉，則此體繼續以等速繞此軸旋轉。

注意II　若諸外力爲平衡，則：

$$X'+X''=-\omega^2\Sigma mx, \qquad -hY''=\omega^2\Sigma myz,$$

$$Y'+Y''=-\omega^2\Sigma my, \qquad +hX''=-\omega^2\Sigma mxz,$$

$$Z'+Z''=0,$$

可以$Z=0$，於是$Z'=0$，欲使反動力爲零，其必須與充分之條件爲：

$$\Sigma mx=0, \quad \Sigma my=0, \quad \Sigma mxz=0, \quad \Sigma myz=0。$$

卽Oz須爲對於重心之一慣性主軸，在此情形二支點爲不必需，可以取消。故：

若一固體不受任何力之作用，而繞對於重心之一慣性主軸旋轉，則此體繼續以等速繞此軸旋轉。

109. 複擺　所謂複擺(pendule composé)乃僅受重力作用，而繞一水平軸旋轉之固體。設以懸軸(axe de suspension)爲z軸，正交於Oz而含重心之鉛垂面爲xy之平面，且Ox軸爲鉛垂向下。若θ乃OG與Ox間之角，l爲OG之長，M爲複擺

之質量,運動之方程式爲:

$$\mathrm{M}k^2\frac{d\omega}{dt}=\mathrm{N}=-\mathrm{M}gl\sin\theta,$$

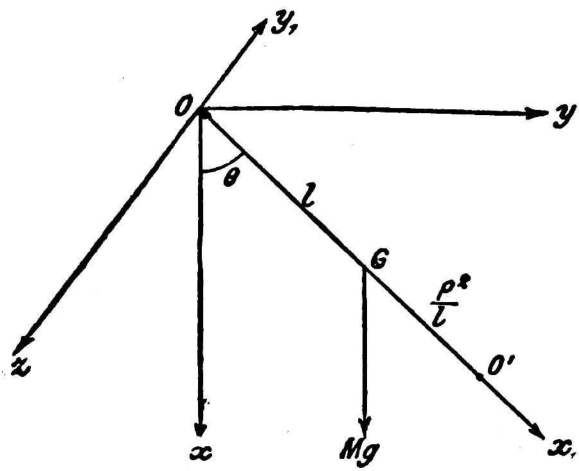
因
$$\omega=\frac{d\theta}{dt},$$

故
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{gl}{k^2}\sin\theta$$

由此方程式可定 θ 爲 t 之函數,而與長 l' 之單擺的方程式:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l'}\sin\theta$$

相同。若取 $l'=\frac{k^2}{l}$, 長 l' 之單擺稱爲複擺之同步擺 (pendule synchrone) 於 OG 上取 $\mathrm{OO'}=l'$, (圖 84) 由 O′ 所引平行於 Oz 之



(圖 84)

線 $O'z'$ 上,各點之運動與長 l' 之單擺的運動相同。$k^2=\rho^2+l^2$, ρ 乃對於 G 與 Oz 平行之線的迴轉半徑。由

$$\frac{k^2}{l}=l+\frac{\rho^2}{l}$$

之關係,可見在 OG 之延長線上,更可得一點 O',使 $GO'=\frac{\rho^2}{l}$。此 $O'z'$ 直線稱擺動軸(axe d'oscillation)。而

$$GO\cdot GO'=\rho^2$$

一關係式,表明若複擺繞 $O'z'$ 軸旋轉,換言之即若以 $O'z'$ 為懸軸,則 Oz 將為擺動軸。故懸軸與擺動軸,可以互相交換.

求反動力　設複擺以 xy 平面為對稱平面,則 Oz 為對於 O 點之一慣性主軸。若以 Ox_1y_1z 為三正交坐標軸,Ox_1 與 t 時 OG 之位置相合,則重量之坐標為:

$$X_1=Mg\cos\theta,\qquad Y_1=-Mg\sin\theta,\qquad Z=0;$$

$L_1=M_1=0$,因此運動之方程式為:

$$Mg\cos\theta+X_1'+X_1''=-\omega^2\Sigma mx_1-\omega'\Sigma my_1=-\omega^2Ml,$$

$$-Mg\sin\theta+Y_1'+Y_1''=-\omega^2\Sigma my_1+\omega'\Sigma mx_1=\quad\omega'Ml;$$

$$Z'+Z''=0,\qquad -hY''_1=0,\qquad hX''_1=0。$$

因 Oz 乃對於 O 之一慣性主軸。因可取 $Z''=0$,可見反動力 X'', Y'', Z'' 為零。對於 O 點之反動力有:

$$X'_1=-\omega^2Ml-Mg\cos\theta,$$

$$Y'_1=\quad\omega^2Ml+Mg\sin\theta,$$

$$Z'\ =0,$$

但 $$\omega' = -\frac{gl}{k^2}\sin\theta$$

且活力之方程式爲:

$$d\frac{1}{2}\mathrm{M}k^2\omega^2 = \mathrm{M}g\, d\xi_1,$$

故 $$\omega^2 - \frac{2g\,\xi_1}{k^2} = \mathrm{C}$$

又因 $$\xi_1 = l\cos\theta,$$

$$\omega^2 = \frac{2g\,l\cos\theta}{k^2} + \mathrm{C}$$

將此ω'與ω^2之值代入含X'_1與Y'_1式內,得:

$$\mathrm{X}'_1 = -\mathrm{M}g\cos\theta\left(1 + \frac{2l^2}{k^2}\right) - \mathrm{M}l\mathrm{C},$$

$$\mathrm{Y}'_1 = \mathrm{M}g\sin\theta\left(1 - \frac{l^2}{k^2}\right) = \mathrm{M}g\sin\theta\,\frac{\rho^2}{k^2}$$

與OG正交之方向上的分量其符號與θ之符號相同。當$\rho=0$,即在單擺之情形時,此分量爲零。於是僅餘分量X'_1,等於連O與G無質量之線的張力。

第三章

碰撞與打擊

110. 衝量 設M爲一質點,質量爲m,受其分量爲(X, Y, Z)之諸力之作用而運動,則運動之方程式爲:

$$(1)\qquad m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{X},\quad m\frac{d^2y}{dt^2}=\mathrm{Y},\quad m\frac{d^2z}{dt^2}=\mathrm{Z},$$

設於X, Y, Z諸函數內,其變數x, y, z, x', y', z'均以其時間t之函數 $x=f(t)$, $y=g(t)$, $z=h(t)$; $x'=f'(t)$, $y'=g'(t)$, $z'=h'(t)$代之; X, Y, Z逐變爲t之函數。將此三運動方程式在$t_0\,t_1$之間積分之得:

$$(2)\quad mx_1'-mx_0'=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{X}dt,\ \ my_1-my_0=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{Y}dt,\ \ mz_1-mz_0=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{Z}dt,$$

x_0', y_0', z_0'乃速度$\overrightarrow{\mathrm{V}_0}$在$t_0$時之分量; x_1', y_1', z_1'乃速度$\overrightarrow{\mathrm{V}_1}$在$t_1$時之分量。令

$$\mathbf{X}=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{X}dt,\qquad \mathbf{Y}=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{Y}dt,\qquad \mathbf{Z}=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{Z}dt$$

則以$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$爲分量之有向量,稱爲對於以(X, Y, Z)爲分量之力$\overrightarrow{\mathrm{F}}$在$t_0\,t_1$間之**衝量有向量**(vecteur impulsion)或簡稱曰**衝量**(impulsion)。若$\overrightarrow{\mathrm{F}}$力乃$\overrightarrow{\mathrm{F}_1}$與$\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$二力之和,則$\overrightarrow{\mathrm{F}}$之衝量$\overrightarrow{\mathrm{J}}$亦爲$\overrightarrow{\mathrm{F}_1}$與$\overrightarrow{\mathrm{F}_2}$之衝量$\overrightarrow{\mathrm{J}_1}$與$\overrightarrow{\mathrm{J}_2}$之和

等式(2)表明衝量,乃M點在某時間內末初二時之動量有向量之差。

若 t_0 固定, t_1-t_0 近而爲零,則有向量 $\overrightarrow{J}$ 之極限亦爲零,因 t_1 時之動量其極限爲 t_0 時之動量也。若設H爲一數大於 $\overrightarrow{F}$ 力之量F,在 t_0-h, t_0+h 時中,衝量之分量小於 $H\,|\,t_0-t_0\,|$,隨 t_1-t_0 近而爲零。

111. 碰撞與打擊 有時動點M之速度之大小與方向驟然改變。軌道上呈一尖點,軌道之每一枝同與該點之速度有向量相切。在進行中之二體忽相接觸,便發生此事實。此種接觸名曰**碰撞** (choc)。在衝突中,固體之一點M的速度驟變。設 t_0 與 t_1 乃衝突之始與末之時,此 t_1-t_0 之時間與百分之一秒有時千分之一秒,或萬分之一秒爲同級數量。在此時內,M之位置改變,但速度爲有限,此改位甚微,而可略去。換言之,在 $t_0\,t_1$ 時中,M點可視爲不動,速度由 $\overrightarrow{V}_0$ 變至 $\overrightarrow{V}_1$。若施於M上之力不是非常之大,衝量甚微,而動量之改變亦微。因於此甚短之時期中,此改變爲有限,故F須有甚大之值,至少 $\overrightarrow{F}$ 合力中之一分力爲甚大。於是謂在碰撞中發生甚大之**瞬間力**(forces instantanées),而有向量

$$\mathbf{X}=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{X}dt,\quad \mathbf{Y}=\int_{t_0}^{t_4}\mathrm{Y}dt,\quad \mathbf{Z}=\int_{t_0}^{t_1}Zdt,$$

稱爲打擊 (percussion) $\overrightarrow{\mathbf{P}}$。

若 $\overrightarrow{F}$ 爲二力 $\overrightarrow{F}_1$ 與 $\overrightarrow{F}_2$ 之和,則打擊 $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ 等於相當之二打擊

$\overrightarrow{P_1}$ 與 $\overrightarrow{P_2}$ 之和。設此二力之一,例如 $\overrightarrow{F_1}$,於 $t-t_0$ 於無限小之時,其值爲有限,與之相當之打擊亦爲無限小,故此力所生之打擊,可以略去。例如M點之重量,於打擊則爲無關。

若此 $t_0\,t_1$ 時中,$\overrightarrow{F}$ 有一恆常之方向 (α, β, γ) 則衝擊 $\overrightarrow{\mathbf{P}}$ 之方向亦同,因

$$X=\alpha F, \qquad Y=\beta F, \qquad Z=\gamma F,$$

則
$$\mathbf{X}=\alpha\int_{t_0}^{t_1} F dt, \quad \mathbf{Y}=\beta\int_{t_0}^{t_1} F dt, \quad \mathbf{Z}=\gamma\int_{t_0}^{t_1} F dt$$

又設
$$\mathbf{F}=\int_{t_0}^{t_1} F dt,$$

則
$$\mathbf{X}=\alpha\mathbf{F}, \qquad \mathbf{Y}=\beta\mathbf{F}, \qquad \mathbf{Z}=\gamma\mathbf{F}。$$

因 $\overrightarrow{P}$ 乃 t_0t_1 時中之衝量,利用上節之公式(2)得:

$$\mathbf{X}+mx_0'-mx_1'=0, \quad \mathbf{Y}+my_0'-my_1'=0, \quad \mathbf{Z}+mz_0'-mz_1'=0,$$

或 (3)
$$\overrightarrow{P}+\overrightarrow{mV_0}-\overrightarrow{mV_1}=0$$

換言之,若將此三有向量視爲施於質點M之力,則 $\overrightarrow{mV_0}, -\overrightarrow{mV_1}$ 與 $\overrightarrow{P}$ 爲平衡。

112. 對於一質系之碰撞　設有一質系,其中發生碰撞。方程式(3)可應用於此系內之每一點,但須以 $\overrightarrow{F}$ 爲所有施於此點之內力及外力之總和。故所有之有向量 $\overrightarrow{mV_0}, -\overrightarrow{mV_1}$ 與 $\overrightarrow{P}$ 爲平衡與74節研究任一質系之平衡的推理相同,對於內力之打擊,兩兩直接相反而相消;且對於有限的外力之項(如重力),亦因其可略而省去。所餘者僅外打擊。故:

有向量 $\overrightarrow{mV_0}$ 及 $-\overrightarrow{mV_1}$ 與外打擊必平衡,或云外打擊之系,等於動量之差 $\overrightarrow{m(V_1-V_0)}$ 有向量之系。

計算外打擊,須毋忘由連繫力而來之打擊,例如一固體繞軸轉,對於因實現此連繫,而於軸上固定之二點上發生有二打擊。

內連繫力之打擊爲零,因系之二體若接觸於一點A,則於此點二體間之相互作用,乃相反之二有向量,因此與之相當之打擊亦然,故其和爲零。

有向量 $\overrightarrow{m(V_1-V_0)}$ 與外打擊之二系既相同,故其總和相等。於是:

〔定理〕 **於碰撞後,動量之和的改變,等於外打擊之和。**

此結果亦可述之如下:——

吾人於103節之研究知若以全系之質量匯聚於其重心G,則G之動量等於全系諸點之動量之和。此動量於 t_1 時乃有向量 $\overrightarrow{mV_1}$ 之總和,於 t_0 時乃有向量 $\overrightarrow{mV_0}$ 之總和,此動量之改變乃有向量 $\overrightarrow{m(V_1-V_0)}$ 之總和。故以上之定理可更述之如次:——

〔定理〕 **於碰撞後,重心之速度的改變,與設全系之質量匯聚於此點,而所有之打擊爲施於此點之有向量所代替相同。**

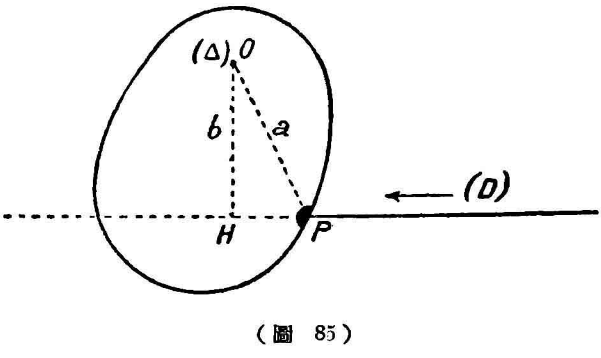
先取 $\overrightarrow{mV_1}$ 對於O點之矩之和,再取 $-\overrightarrow{mV_0}$ 對於同點之矩之和,所得之二有向量之和,乃表碰撞間之動量矩之和之改

變,亦即有向量之系 $\overrightarrow{m(V_1-V_0)}$ 對於O點之合矩,此矩乃等於外打擊之合矩。故:

〔定理〕 於衝突後,一質系之諸點之動量之矩之和之改變,等於外打擊之矩之和。

過O點任作一軸(Δ),一有向量之系對於(Δ)之矩,乃此系對於O點之合矩在(Δ)上之射影。又因有向量 $\overrightarrow{m(V_1-V_0)}$ 與外打擊二系對於O之合矩爲相同,故其在(Δ)上之射影亦同。因此上述之定理可應用於對於一點或一軸之矩。

例　**衝擊擺**　設有一固體(Z),可繞一軸Δ旋轉,此軸與圖之平面正交。一動點P其質量爲 m,以常速度V作與(Δ)正交之直線軌道(D)。此動點與初爲靜止之固體(S)相碰撞,且嵌入此體內,於是固體以角速度 ω 旋轉,試求V與 ω 之關係(圖85)。



(圖 85)

先取固體(S)及動點P所成之質系,對於(Δ)之動量矩之和,在碰撞前(S)不動,P之動量爲 $\overrightarrow{mV}$,而其矩乃 mVb, b 表(D)

與(Δ)間之距離。在碰撞後，全系繞(Δ)旋轉，動量之矩之和對於(S)爲$I\omega$，對於P點爲$a^2\cdot m\omega$，I表固體(S)對於(Δ)之轉動慣量，a表OP之長。故矩之和之改變爲$I\omega+ma^2\omega-mbV$。再論打擊，在P點此乃內打擊，不生關係，在(Δ)軸上與反動力同，此打擊與(Δ)相交，故其矩爲零。因此：

$$(I+ma^2)\omega-mbV=0。$$

此表二速度ω與V之式，若知其一，可以求其他。

例如
$$V=\omega\frac{I+ma^2}{mb}$$

由ω之大小，可以算動點P之速度，此即昔日用以測鎗彈之速度的衝擊擺(pendule balistique)之原理也。

113. 速度改變之決定　設有一固體，在t_0t_1時中，受一碰撞。在t_0時前，力爲已知，固體之運動爲力學之方程式所規定。在t_1時後，又復有其力學之方程式，且若知t_1時之初速度$\overrightarrow{V_1}$，則運動可以決定，因固體之位置仍然與t_0時相同。故由碰撞而生之問題，乃：已知碰撞前之速度，求碰撞後之速度。

吾人於上例得解此題，因二體碰撞後連合爲一。若P點碰撞後躍回而離(S)，則此題將爲不能解。碰撞後P之初速度$\overrightarrow{V_1}$，於此將爲一新未知數，其值與射來之體的物理狀況有關，非由實驗之法則，不能決定。

例如有一小球其質量爲m，設其自高h處下落，至一平滑之地面上。有向量$\overrightarrow{mV_0}$在鉛垂向，而$V_0^2=2gh$。因反動力爲

鉛垂,故打擊 $\overrightarrow{P}$ 亦為鉛垂,故 $\overrightarrow{mV_1}$ 亦係鉛垂。據實驗可定 V_1。設小球復躍回至高 h' 處,於是 $V_1{}^2=2gh'$, 而 $V_1/V_0=\sqrt{h'}/\sqrt{h}$。因 h' h,速度按一比而減小,此比可由零($h'=0$)而至 1 ($h'=h$)。在碰撞時,小球之活力減少: $m(V_0{}^2-V_1{}^2)=2mg(h-h')$。

事實上,在碰撞間二體變形。此變形使二體所成之系之總活力改變,其一部份為此變形所消耗。若此二體係柔輭,稍具彈性,則碰撞後變形仍然存在,此二體合而為一,例如上題之彈P,入固體 (S)。若二體有完全的彈性,則所生之變形,碰撞後消去,組成物體之諸質點仍復原來之位置。內力與接觸之功為零,而總活力不變。在此二極端的情形之中,有一中間的狀况,即總活力減少是。於是變形之現象,在碰撞後尚伴有固體分子之顫動,但此處略而不論。

例 I　一鐵錘,其質量為 m,將一木樁,其質量為 m',打入土內。鐵錘乃一垂直軸之圓柱,舉之至某高度,使其沿鉛垂之滑槽間,而復落下,擊於樁之頭上。設 V_0 乃碰撞時之速度。設此柱體乃一非彈性體,碰撞後附於樁上。全系之質量為 $m+m'$,以初速度 V_1 下墜。對於此系并無外打擊,故動量之和不改。

$$mV_0=(m+m')V_1$$

活力之損失為:

$$mV_0{}^2-(m+m')V_1{}^2=mV_0{}^2-\frac{m^2V_0{}^2}{m+m'}=\frac{mm'V_0{}^2}{m+m'}$$

當樁入土時,全系之活力被土之反動力之功所吸收。實際欲使此份活力至可能的最大之境界。對於與鐵錘下降相

當之功T，mV_0^2爲已知，據活力定理乃2T。故碰撞時活力之損失爲：$\frac{2m'T}{m+m'}$。欲活力之損失減少，須增加鐵錘之質量m，又因$mV_0^2=2T$，故須減少V_0。反之，若運動之體，作用如一撞槌，意欲用以毀壞質量爲m'之體，則於已知之功T，須增加此體變形所吸收之活力，卽增加V_0，因此減少m。

II　設有完全彈性之二球，其質量爲m與m'，各作直線等速運動，且其心常同在一直線(D)之上。設V_0與V_0'乃其速度之代數值。二球相碰而復相離，試求碰撞後之速度V_1與V_1'之代數值。

因無外打擊，故動量之和不變，卽：

(4)　$$mV_0+m'V_0'=mV_1+m'V_1'$$

或　$$m(V_0-V_1)=m'(V_1'-V_0')$$

因二球爲完全彈性體，故總活力不改：

$$mV_0^2+m'V_0'^2=mV_1^2+m'V_1'^2$$

或　(5)　$$m(V_0^2-V_1^2)=m'(V_1'^2-V_0'^2)$$

由(4)與(5)得

(6)　$$V_0+V_1=V_0'+V_1'$$

由(4)與(6)二方程式，可求V_1與V_1'。在特別之情形，如$m=m'$，則$V_1=V_0'$，$V_1'=V_0$卽二球互換其速度，亦如二球彼此插過，繼續進行。此蓋假定碰撞後運動仍爲平行於(D)之移動；此亦易證明，因於二球之心，在碰撞之後亦如碰撞之前，其動量之矩之和爲零。

練習題

1. 同質量之兩環M與M′,其體積小至可略,各在二平行桿(D)與(D′)上滑行。彼此攝引,其力之大小,與其距離爲比例。

1° 初速度爲何,方使MM′之中點不動?

2° 若不計摩擦力,在此情形下,M與M′之運動爲何?

3° 以同樣的初情形討論此運動,但設每環在每桿上之摩擦係數等於f。

2. 同質量之三質點A,B,C互相吸引,與距離爲比例,彼此間吸收之係數亦復相同。

求此三點之重心O之運動。A,B,C三點之初速度應爲如何,方使O點固定不動?於是A,B,C三點之軌道爲何?可以選擇初速度,使O固定,而A,B,C三角形之大小不變否?於此後一情形,此三點之運動如何?

3. 一均勻體之薄片,其重量爲P,其形狀爲一正三角形,邊長爲a。此薄片在一鉛垂面上,BC邊不受摩擦力在一水平線上滑動。一質點其重量爲P,不受摩擦力,在AC邊上滑動。A在BC之上。起始時,質點在A,無初速度。

求質點經行AC時,薄片改位之度。

4. 一可彎曲,不可伸展而質量可略之線,其一端繫於

一定點O,繼經過一動滑車之頸,此滑車之心爲C,重爲P,繼復經過心爲C′之定滑車之頸。線之端S,復繫一重物Q。二滑車皆均勻體,線在其頸上之摩擦力可略去。

1° 試求S點與C點之運動與線之張力。起始時,此系無初速度。

2° 在 t_0 時,於S之附近將線割斷,C點此時所佔之位置爲 C_0,於 Kt_0 時後復回於此位置。K乃小於1之常數,由此求 $\frac{P}{Q}$ 之比。數字的應用:設 $K=\frac{2}{3}$, 與 $K=\frac{1}{2}$。

5. 一均勻之桿AB,長爲 l, 密度爲 λ,其兩端A與B不受摩擦力滑動於二正交軸 Ox, Oy 之上。桿之每小份MM′被 Oy 吸引,而此引力之大小爲 λMM′·MP, MP表M至 Oy 之矩。

試求引力之合力,此合力對於桿之移位的工作,與桿之動能。

書運動之微分方程式。當桿可安置而且移動於 Ox 之上,俾其上之諸點的速度爲零時,積分此方程式。

6. 一可彎曲而不可伸展之線,經過一半徑爲 r, 繞其軸而轉之動滑車。此線僅能在滑車之頸上滑動,一端繫一重量P, 他端繫一重量 $P+p$。試應用動量對於滑車之軸之矩之總和的定理於全系,以求系之運動(阿特武德機 Machine d'Atwood)。

7. 一均勻圓形重薄片,在一平滑之斜面的坡線上運動。薄片之平面與坡線之鉛垂面相合。求薄片之心的運動,且

證薄片旋轉之角速度爲常數。

8. 一蓄水櫃,形式爲一直六面體,其底爲一水平向之矩形,可容25立方米之水。底之長寬爲2.15與3.20米。將此水櫃內之水10立方米,移於他一水櫃內。此第二水櫃爲一旋轉圓柱形,其底爲一水平向之圓,其直徑爲2.20米,高出於第一水櫃之底6.50米。

求因重力而生之功。

9. 一均勻旋轉圓錐,其比重爲μ,其高爲h,其底之半徑爲R。求對於錐頂,及底面之心的慣性橢圓面與慣性中心橢圓面。

10. 一複擺順次繞水平向的二平行軸旋轉。藉一可移動之質量之助,使此二擺動之週期相等,二軸之平面含擺之重心。求證二軸之距等於同步單擺之長。由此求實驗所在地之重力加速度。(開式可逆擺 Pendule réversible de Kater)。

11. 一均勻而受重力之桿OA,其長爲a,在一鉛垂平面內繞其固定之端O旋轉。起始時桿在水平向,以角速度$\sqrt{\frac{3g}{a}}$,向下抛擲。求桿在上下兩鉛垂向時之角速度,及達此兩位置所須之時間

12. 一複擺乃一均勻之直桿 AB 所成,其長爲$2l$,其質量爲m。末端繫一均勻球,中心在A,半徑爲r,質量爲M。又一同樣之球,中心在桿上之任一點,能在此桿上滑動。設O爲AB之中點,令$OO'=x$,懸軸爲水平向,在O點與AB正交。

試研究當x變時,此擺之擺動週期的改變。

求同步單擺之長($\frac{m}{M}$,及$\frac{r}{l}$爲甚小之分數可以忽略)。

13. 一複擺繞一與水平面成角i之一軸(Δ)旋轉。設O乃由重心G至(Δ)之垂直足,以OG與過(Δ)之垂直面所成之角θ爲變數。

求運動之微分方程式,全系平衡之條件,及繞一水平軸之同步單擺之長。當此(Δ)初爲水平,繼與水平面成角i,此複擺之週期的改變爲何?

14. 一彈性體之球,在一完全平滑之版上躍起。每一碰撞時,速度之垂直分量被一小於單位之因子e所倍。起始時,球以速度V與水平線成α角拋出。求證跳躍之時之和,有一極限。自此限後,球不復躍,僅在版上滾動。例設$e=0.8$,初速度之垂直分量$V\sin\alpha=4$米/秒。

15. 一扇門,爲矩形,繞其鉛垂的一邊旋轉。此門被一橡皮球,在其正交之方向,以速度V_0所拍擊。設此門與球爲完全彈性體,試求碰撞後門之角速度。欲使此角速度爲極大,碰撞發生之處,應離軸若干遠?

附　錄

力學之單位

114. **單位之改換——因次式**　由43節說明力學上所用之各種單位,可自三基本單位導出。若將基本單位改變時,導出單位當如何改變,是卽本節所欲研究之問題。

設重量之單位變小 k 倍,則以原單位度某量而得之數 n,應以 nk 代之,卽較前大 k 倍,因含 n 倍於原單位之量,含 nk 倍於新單位也。更普遍言之,若 k 乃兩種單位之比,則一量由原單位量得之數字 n,對於新單位言,應以此比値 k 乘之。設有一量爲一單位之 n 倍,他一單位之 n' 倍,且設U與U′爲此二單位之値量,則:

$$nU = n'U'$$

卽

$$\frac{n'}{n} = \frac{U}{U'} = k$$

若改一基本單位,則以新單位所測之量,立卽有新數字。

對於導來量言,測度此等量而得之數字,隨度導來單位之數字改變。若導來單位原量爲1,新量爲 k,則以新單位量同一之導來量應以 k 倍之。欲求此數 k,可利用一種關係,稱曰**因次式**(formule de dimensions)卽表新原二單位間之關係

式也。例如面積之單位爲建立於單位長度上之面積。若長之單位變爲λ倍小。則單位面積爲λ^2,故面之因次式爲:

$$S=L^2$$

力學上之基本量爲長度L,質量M,與時間T。一導來量U可以下列之因次式表之:

$$U=L^\alpha M^\beta T^\gamma$$

式內α,β,γ爲正或負或零之數。於是稱U對於長度其因次爲α,對於質量其因次爲β,對於時間其因次爲γ。若長度之單位變爲λ倍小,質量單位μ倍小,時間單位τ倍小,則以U單位測得之數應以$\lambda^\alpha\mu^\beta\tau^\gamma$倍之。對於動學之量$\beta=0$,因其僅與長與時有關也。

下列之表乃諸主要導來單位之因次式:——

速度 乃與被時除之商;

$$v=\frac{L}{T}=LT^{-1}$$

加速度 乃速度被時除之商;

$$\gamma=\frac{v}{T}=LT^{-2}$$

例如在巴黎重力加速度爲980.96 C. G. S. 單位;若以米爲長之單位,則$\lambda=10^{-2}$而g之值變爲9.8096;若更以分爲時之單位,則$\lambda=10^{-2}$外且$\tau=\frac{1}{60}$,故新值$g_1=g\lambda\tau^{-2}=36g$。

力 乃質量與加速度之乘積;

$$F=MLT^{-2}$$

動量 乃質量與速度之積,以 MLT^{-1} 表之。

功 乃力與長之積;

$$Z=ML^2T^{-2}$$

活力 乃質量與速度之平方之積;

$$M(LT^{-1})^2=ML^2T^{-2}$$

故活力與功之因次相同。

115. 公式之均勻性 力學上方程式之成立,與基本單位之選定無關。單位雖改,方程式之形不異,其所含之項對於長質時三者各自保有其均勻性。換言之即各對於L, M, T而有同一之因次。例如活力定理表功與活力相等,而此二項之因次相同。

吾人常可討論一關係式內所含之量之因次,以定此式之形狀。例如設已知擺動週期(P)只與擺長(l),質量(m)及重力加速度(g)有關,則可就公式之均勻性證明:

$$P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

據假設 $P=\varphi(l, m, g)$

試將長之單位縮小λ倍,時之單位縮小τ倍,質量之單位縮小μ倍,則無論λ, τ, μ為何,應有:

$$P\tau=\varphi\left(l\lambda, m\mu, \frac{g\lambda}{\tau^2}\right)$$

於是選λ, τ, μ以使φ內之三量皆等於1,即使:

$$\lambda=\frac{1}{l},\quad \mu=\frac{1}{m},\quad \tau=\sqrt{g\lambda}=\sqrt{\frac{g}{l}},$$

則

$$P\sqrt{\frac{g}{l}}=\varphi(1,1,1)$$

上式之第二端爲一數,故:

$$P=k\sqrt{\frac{l}{g}}$$

由實驗或由理論知 $k=2\pi$

因次之討論亦給吾人以一核校演算之方法。因任何一物理式內,其各項須具相同之因次,故演算時須常核校每一等式內各項之因次是否相同,換言之即公式是否均勻,否則理解或演算準有錯誤。

116. **米噸秒制** 一九一九年四月二日法國之法律,同年七月二十六日之部令,因應工商業之需要,公佈新法定單位,稱**米噸秒制**(système M. T. S.),其基本單位亦爲長,質,時三者。與厘米克秒制同,故上述之因次式亦能適用,但須計入二單位之比例。

長之單位爲米,質量之單位爲噸(即1000仟克),時之單位爲平時之秒。

力之單位爲斯敦(Sthène)值10^8達因(dyne),以Sn表之。一仟克之重量等於0.98厘斯敦(Csn 即 Centisthène),即 0.0098 Sn。

功之單位爲仟焦爾(kilojoule)值10^{10}愛格(ergs),以KJ表之;至於焦爾以J表之。一仟克米等於9.8J。

以上之單位乃法國之實用單位,自一九二〇年七月二十六日起用,至今未改。

總練習題

(以下各題乃巴黎大學普通算學學程關於理論力學之歷年試驗題)

1. 設地球爲一均勻球體,其半徑爲R。若自其表面上一點A,掘一直線之穽,至其中中心O。在$t=0$時,自A點向O點拋一質量爲m之重點,其初速度之絕對值爲V_0已知地球對於在其內部之點M之引力F乃向心,而與OM爲正比。試求此點之運動。若不計算空氣之阻力,此引力在地面A處,等於質點之重量mg。試求動點至地心O之時間T,與到該點時之速度。

據下列之二假設作數値的計算.

1° 設 $_0=0$

2° 設重點無初速度,自OA之鉛垂線上,距地心爲2R之一點B下墜,至A點之速度爲V_0地球對於其外部之質點之引力,係與至地心之距離的平方爲反比。

(註) 若取秒爲時之單位,米爲長之單位,則$g=9.8$, $2\pi R=40,000,000$ (1907)

2. 一受重力之質點其質量爲m,在向上之鉛垂線Ox上一點O拋起,其初速度爲v_0。

已知此點受有以下二力,試求其運動: 1° 重力mg, 2° 間

質R之阻力,與速度 v 之方向相反,而與其數值為比例,此阻力之絕對值 $R=mg\frac{v}{\lambda}$,λ 乃一已知常數,時間由動點自O點出發時起算。

數值的應用:時之單位為秒,長之單位為米,$g=9.8$; $v_0=90$; $\lambda=190$

求 $v=180$ 之時,$t_1=$? 與此時期中經行之路程。

又 $v=189$ 之時,$t_2=$? 與此時期中經行之路程。

(註) $M=\log_{10}e=0.43$ $\frac{1}{M}=\log_e 10=2.30$ (1908)

3. 一質點M,其質量為 m,在一定水平線 Ox 上運動。只受間質R之阻力,其方向與速度 v 相反,其絕對值為 $mk\sqrt{v}$,k 乃一已知正常數。

在 $t=0$ 時,動點以初速度 v_0 向 Ox 之正方向運動。

試求1° 至 $v=0$ 時所經過之時T; 2° 在此T時內,動點經行之路程; 3° 此時期內F力所作之工。

數值的應用: $m=3$, $k=1$, $v_0=4$ 單位係C. G. S.制。(1908)

4. 一質量為 m 之質點,在一完全平滑之水平向的直管內運動。此管之軸為 Ox。在管內,質點受空氣之阻力R,與其速度之方向相反,而其絕對值以C. G. S.單位計之為:

$$R=mg\sqrt{\frac{v}{1000}}$$

g 表重力加速度,$g=980$。

設質點自O點,以初速度 $v_0=10$ 米/秒,向 Ox 之正方向發

出,試求其運動。

試求至速度為零時,質點所經過之路程,與所費之時間。

(1909)

5. 一不能伸長而可彎曲且其重量可略之線,全在一固定垂直平面之上。自一定點O,此線垂直向下,繼經過重量為P之動滑車(C)之圓頸。復向上再經過繞水平軸而轉之動滑車(C′)之圓頸。於是在其末端負一均勻而受重力的固體S,其重量為Q,其形狀乃一旋轉圓柱,其軸在線之延長線上。

起始時此系統不受初速度而運動。

1° 求固體S之運動,滑車(C)之運動,與線之張力。并證此張力絕不超過 $\frac{1}{3}(P+Q)$;

2° 設於前運動中 t_0 時,當固體S下降,而截斷負此固體之線的一段,又當滑車(C)再佔其起始之位置時,其經過之時若恰等於 t_0,試求P與Q之比。

(註)設(C)與(C′)二滑車乃均勻體,其圓頸為完全光滑。

(1911)

6. 在一定平面內有二正交坐標軸 Ox 與 Oy。一質量為 m 之質點M,能在此平面上自由運動。但受平行於 Oy 之力的作用,此運動之軌道為一圓周,其心為O,其半徑為R。在 $t=0$ 時,M之初速度為 v_0,其橫坐標為零。

試以時之函數表M點之坐標,以M點之縱坐標表其速度,且求發生此運動之力。 (1911)

7. 設有一不平滑之斜面,與水平面所成之角爲 α。摩擦係數爲 f。一重量爲P之質點,置於此斜面上。試施於此點上以一等於其重量之力,其方向係在斜面上過質點之一水平線上。設 α 爲已知,f 應滿足何條件,質點始得平衡。 (1911)

8. 一受重力,其質量爲 m 之質點M,在一間質中運動,其阻力與M之速度的方向相反,此阻力之數值 $R=mg\frac{v^2}{k^2}$, g 乃地心引力加速度,v 乃M點之速度的代數值, k 乃一常係數.設 $x'Ox$ 乃一定軸,Ox 之正方向係鉛垂向下。

1° 在起始時M自O點出發,其速度 $v_0=-a$ $(a>0)$, 其方向係 Ox', 鉛垂向上。求M點可達之最高處 O_1 之坐標 $x=-h$, $(h>0)$ 與M點由O至 O_1 所須之時。

2° 於是取 O_1 爲坐標之原點, (坐標軸之正向仍係鉛垂向下)M在 O_1 之時爲時之起點,M點因受重力與阻力R之作用,隨 O_1Ox 鉛垂線下降。求於任何 t 時,M點之速度與其坐標爲時之函數: $v=\varphi(t)$, $x=\psi(t)$。

3° 設 k 爲甚大,致在計算中可略去含 $\frac{1}{k}$ 之指數在2以上之項,求證上二式之近似值爲:

$$\varphi(t)=gt-\frac{At^3}{k^2}, \qquad \psi(t)=\frac{gt^2}{2}-\frac{Bt^4}{k^2}$$

A與B乃二係數(只與 g 有關),試求出之。

應用: $g=980$; $k=9.8\times10^5$ 於 $t=1$ 時求 $\varphi(t)$ 與 $\psi(t)$ 在3°情形下之近似值。 (1912)

9. 在一平面內有二正交坐標軸 Ox 與 Oy, 與一質量爲1之一質點M, 其坐標爲 (x, y)。此點受一力F之作用,其分量在兩軸上爲:

$$X=-x, \qquad Y=-4y.$$

1° 問有一力函數 $U(x, y)$ 否? 若有,試定出之。并求F力所成之力場(H)之均勢線。

2° 求M點之運動微分方程式,且解之。

3° 設M不受有初速度,在 $t=0$ 時,由A點 $(x_0=1,\ y_0=1)$ 出發,求在 t 時表M點之坐標之式: $x=f(t)$, $y=g(t)$。作軌道(T),且計算 t 時之速度 v。

4° 求證於 v 爲極大或極小時(非零)之點,軌道(T)與過此等點之均勢線相切。 (1912)

10. 一不受重力,質量爲 m 之質點M,無摩擦力在一平面P上運動。此平面上有二正交軸 Ox 與 Oy。此M點受一力F之作用,其在二軸上之分量爲:

$$X=my, \qquad Y=mx.$$

1° 有一力函數否?若有,試求出之,并作均勢線。

2° 求力線之微分方程式,并解之。試證力線可由均勢線繞O點旋轉某角度得之。

3° 試求M點受F力之作用之微分方程式,并求此等方程式之普遍解。

4° 設初情形爲 $x_0=-1$, $y_0=1$, $\dfrac{dx_0}{dt}=1$, $\dfrac{dy_0}{dt}=-1$, 試證

軌道爲直線,且M點之運動爲週期的。且問此週期爲何?

(1913)

11. 一質點M,其質量$m=1$,不受重力,在xOy平面內,僅受一力F之作用。此力在二正交坐標軸Ox, Oy之分量爲:

$$X=1-\frac{y^2}{x^2},\qquad Y=\frac{2y}{x}$$

1° 求F力所生之力場之力線的方程式,且作出此等力線。

2° 有一力函數否?若有,試定出之,且作均勢線。

3° 設M錮閉於無窮小的剖面的細管內運動,此管之位置在$y=x+1$直線上。此運動中無摩擦力。起始時動點在橫坐標$x=1$之A點,其初速度之分量$x_0'=-(1+\sqrt{2})$。

試說藉活力定理可求M點在任何時之位置。試求動點由A至管與y軸之交點B,所須之時;且求動點自A至B所作之功。 (1913)

12. 一受重力之質點,其質量爲1,在一間質中O點拋起,每瞬時之阻力;可以一有向量表之,其方向與速度相反,其數值等於速度之數值與一正常數k之乘積。

1° 設以v_0表初速度之數值,a表其方向與向上鉛垂線間之角度,試求動點之軌道的方程式。

2° 設自O點同時拋起質點同爲1之數動點,其方向皆與向上鉛垂線成a角,其初速度之數值則異。求證在t時諸

動點皆在平行於初速度之方向之一直線之上。

3° 設動點以初速度 v_0 拋出, M 爲其 t 時之位置。當 t 固定,常數 k 近而爲零時,求 M 之極限位置。 (1914)

13. 一不變形之三脚架,乃三等長細剛桿 OA, OB, OC 所成,其重量可略而不計。A, B, C 三脚同在一水平面上。

1° 於 O 點旋一重物 P, 鉛垂向地。若不計摩擦力,此系統平衡之必須與充分之條件乃 ABC 平面三角形之三角 A,B,C 皆爲銳角。并證地施於 A,B,C 三脚之反動力與 sin 2A, sin 2B, sin 2C 爲比例。

2° 設 φ 表三桿對於地之摩擦角,若三桿與鉛垂線間之角小於 φ 時, 此系統受施於 O 點,而方向在 OABC 三角錐之內任何一力之作用,皆得平衡,試證之。 (1914)

14. 一均匀的細剛直桿,其長爲 $2a$, 其重爲 $2a$K。一端在一完全平滑之平面上,他端 B 被一彈性直線 OB 繫於一定點 O。此點高出水平面之距離爲 $4a$。線之天然長度爲 $2a$。當此線緊張,其長爲 x 時,張力爲伸長度 $x-2a$ 與係數 K 之乘積:

$$T=K(x-2a)$$

求證當桿爲平衡時, OB 線在鉛垂向上。且於此情形,求桿與水平面所成之角度。 (1914)

15. 設有一平面力場。施於質量爲 1, 坐標爲 (x, y) 之一質點 P 上之力,在此平面內之二正交軸上之射影爲:

$$X=a \qquad Y=-y$$

a 乃一正常數。

1° 求作力場之均勢線與力線。

2° 解 P 點之運動微分方程式,設起始時此點自原點出發,其速度之值為 a,而平行於 y 軸。

3° 設 P 更受一間質之阻力,每瞬時可以一有向量表之,其方向與速度相反,其數值等於速度與一正常數 $2\sin\alpha$ 之積。

以同前之初情形,解運動之微分方程式,且求當 α 近而為零時,所得之公式之變化。

16. 自一點 O 以初速度 v_0 與水平面成 α 角發出一射彈 P_0 在 t_1 時後使第二彈 P′ 不受初速度自 A 點下落。

1° 欲使 P′ 與 P 二彈相觸,試求 t_1。

2° A 點應在平面之何部份,俾二彈之接觸處在過 O 之水平面之上。

設 A 點高出過 O 點之水面之距離為 h,距 O 點之鉛垂線之長為 d。

本題不計算空氣之阻力。 (1915)

17. 設有一不變形之正六面體,其對角頂為 A,A′;B,B′;C,C′;與 D,D′。在此體上施以三力,不以 $\overrightarrow{BC'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{CD'}$ 三有向量表之。設 a 表此正六面體每邊的長度。

1° 試作出此三力之合力,且計算其數值。

2° 試求中央軸線與力偶之軸。(中央軸線乃一直線,對

於此線上之任一點之合矩與合力同在一直線上)。

3° 若此體繞AA′或BB′對角線旋轉一全周,此三力所作之工爲何?

設此體每邊長1.50粎,且以1粎表100仟克之力,試求以上之力,力矩與工。

18. 一具彈性之繩長2米,其伸長度與所受之張力爲正比,每仟克之力使其伸長0.10米。此繩之一端繫一物重5仟克,他端繫一物重10仟克。於是使線伸長至L米。且放置此二重物(繩係緊張)於一水平桌上,受一摩擦力,其摩擦係數爲0.2。

在下列之三情形內: 1° L=2.05米; 2° L=2.10米; 3° L=2.15米,問重物是否保持平衡?

若發生運動,試研究之;問此運動是否再驅於一平衡之境?若然,繩之長爲若干?　(1916)

19. 有二礮同時自一點O放出,其初速度相同,其目的地B亦同,與O同在一水平面上離O之距爲 e。一礮之射角爲 α, 他礮之射角爲 $\alpha'>\alpha$。

1° 欲使B被擊中, e 之極限值爲何?

2° α 與 α' 二角間之關係如何?

3° 此二彈誰先中的?

4° 求此二彈中的之間所經之時。

本題不計空氣之阻力。

數值的應用: $v_0=400$ 米, $e=10000$ 米。 (1918)

20. 在一定平面內有一動點 M,對於二正交坐標軸,以時間 t 之函數表其坐標:

$$(\mathrm{M}) \quad \begin{aligned} x &= e^{-t}\cos t \\ y &= e^{-t}\sin t \end{aligned}$$

1° 求作其軌道。

2° 求 M 點之速度與加速度,且以 x 與 y 之函數表之。

(1919)

21. 一點 M 其質量爲 1, 在 xOy 平面內運動。受一力 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 之作用,其位置方向與數值皆與縱坐標 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ (由 M 至 P) 相同. 設此點在 $t=0$ 時, 由 O 出發, 方向爲第一分角線. 其速度 $v_0=1$ 厘米/秒, 試求此運動。 (1919)

22. 一質點 M 其質量爲 1 克,在定直線 Ox 下運動。設在 t 時其坐標爲 x, 其速度爲 $\overrightarrow{\mathrm{MV}}$。

M 點受以下二力之作用: 1° 一力 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 其位置方向與數值皆與 $\overrightarrow{\mathrm{MO}}$ 相同, 2° 間質 R 之阻力與 $\overrightarrow{\mathrm{MV}}$ 相等而相反。

1° 設 $t=0$ 時,M 點不受初速度,自 M_0 點運動,其坐標 $x_0=10$ 厘米,求運動之方程式,且說明此運動之要性。

2° 求速度第一次復爲零時, M_1 點之坐標 x_1。

3° 求動點由 M_0 至 M_1 所須之時, 且計算至秒之十分之一。 (1919)

23. 一受重力之點,在一間質內運動,其阻力 R 與速度

相反,而其數值與速度之絕對值正比: $R=mg\frac{v}{\lambda}$, λ 乃一常數, m 爲點之質量, g 乃重力加速度。

設取一水平線爲 Ox 軸, 與之垂直向上之線爲 Oy 軸。在 $t=0$ 時,動點自 O 以速度 v_0 出發,且與 Ox 成 α 角。試求此運動。

特別情形: 自厘米克秒制,取 $g=1000$, $\lambda=1000$, $v_0=1000$ $\alpha=0$, 求 $t=2$ 秒時,動點之位置(x, y)　　(1919)

24. 在一平面力場內,有二正交軸 Ox, Oy 與一點 M, 其質量爲1,其坐標爲(x, y)。施於其上之力 $\overrightarrow{F}$, 在此二軸上之射影爲:

$$X=2xy, \qquad Y=x^2$$

1° 試證此力自一力函數導來。試求均勢線與力線並作出之。

2° 設 M 點在此一圓周上不受摩擦力滑動,且不能離去之。設圓心在O, 半徑爲1, 試求在 ABA′ 上半圓周內之平衡的位置,且定其爲穩定否?

3° 在 $t=0$ 時 M 不受初速度,自 A 點 (1, 0) 出發。M 點在圓周上不受摩擦力滑行。設 θ 表半徑 OM 與 OA 間之角,試以 θ 之函數表此點之活力。求動點經過 AM 弧所須之時,以 θ 之函數表之,且研究其運動。

4° 求以 θ 之函數表圓周對於 M 點之反動力,且研究在運動中此反動力之變化。

(註)以上諸問內,須注意不計入 M 點之重量。　(1921)

25. 一受重力之質點M,其質量爲m,在不平滑之水平面(H)上運動,摩擦係數爲$f=\operatorname{tg}\varphi$。M點受由(H)上之一定點O發出之引力,此力與M點之質量及OM之距離爲正比。O點在單位質量及單位距離上之引力爲ω^2。

1° M點在平面(H)之何部份內始得平衡?

2° 在$t=0$時,M點在A點不受有初速度而$OA=\frac{3gf}{\omega^2}$;此點於是在AO點上移動。試求平面(H)對於M點之反動力,且研究此點之運動。

3° 在何時以何速度,動點M經過O點?在AO移位內,求引力之功與平面之反動力之工。 (1921)

26. 在一平面內有二正交軸$x'Ox$, $y'Oy$。二不受重力之點M與M',其質量同爲1,不受摩擦力,M點在$x'Ox$,M'點在$y'Oy$軸上移動,此二點被此吸引,其力之値與MM'線段之長相等。

1° 在$t=0$時,M點之橫坐標爲2,速度爲零;M'之縱坐標爲2,速度爲2。求此二點之運動微分方程式且解之。試研究二點之運動,且算平面之反動力。

2° 以時間t之函數表二點之重心G之坐標。作G之軌道(T)。求G對於O之面積速度,且算曲線T之面積。

G點之加速度爲何? 試用重心之運動的定理,以求此結果。

3° 於普遍的情形,設$t=0$時,M點之橫坐標爲a,速度爲

b。設於運動中MM′之長度不變,吾人可定M′點之初時的縱坐標a'與初速度b',試證之。

在此情形下,二點之重心之運動爲何? (1922)

27. 在一鉛垂平面內,有二正交軸: Ox 軸係在水平向,Oy係鉛垂向上。

一點A在xOy角內,其縱坐標HA$=h$,其極角$(Ox, OA)=\alpha$。

在$t=0$時,一質點M,其質量爲m,自O點向OA方出發,其初速度之數值爲v_0。同時另一質點M′,其質點爲m',不受初速度,自A點下墜。

設M與M′二點只受重力之作用。

1° 求證二點相遇於一點P。求達此點時所經之時。求證連此二點之直線MM′,在運動中常保存一不變之向。試以時間t之函數表MM′之距離。

2° v_0之值應爲如何,方使二點在P處之速度的數值相同?證明A點於是應在M點所作之拋物線(T)之準線上。

3° v_0之值應爲如何,方使二點運動至P處時,其重力所作之工之和爲零。此條既滿足後,又設$m=m'$,求證P點乃拋物線(T)之頂點。

4° 仍設$m=m'$,定α與v_0俾2°與3°內之條件同時實現.於是(T)之焦點的坐標爲何?

5° 解釋1°內之諸結果。 (1922)

28. 在一垂直平面(Q)內,有一點M,其質量爲m,受重

力 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$,其值爲 mg,與一向平面內之一定點 O 之引力 $\overrightarrow{\mathrm{MF}}=-\mathrm{K}m\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ 之作用,K 乃一正常數。

平面(Q)乃固定,其上有 $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ 二軸,原點爲 O,$\mathrm{O}x$ 鉛垂向下,$(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$ 間之角爲 $\frac{\pi}{2}$,且以 θ 表 $(\mathrm{O}x, \mathrm{OM})$ 間之角。

1° 求證施於 M 點之二力 $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ 與 $\overrightarrow{\mathrm{MF}}$ 所定之平面力場自一力函數導來,且定均勢線與力線。

2° M 點既受力場內之二力,且設其在完全平滑之固定圓周上移動而不能離去之,此圓周在平面(Q)內,半徑爲 a,其最高點在 O。

試定 M 點之平衡位置,且討論其穩度,更研究 $a=\frac{g}{\mathrm{K}}$ 時之特別情形。

3° 在起初時 M 點置於圓周之最低點 A,初速度之方向與此平面內之正方向相同,其值爲:

$$v_0=2\sqrt{a(g-a\mathrm{K})} \qquad \left(\text{設 } a<\frac{g}{\mathrm{K}}\right)$$

計算 M 點之活力。以 $\cos\theta$ 之函數表此點之速度,更以 θ 之函數表動點經過 AM 弧所須之時 t。此動點能達 O 點否?運動係加速抑係減速?

4° 以 $\cos\theta$ 之函數表圓周對於 M 點之反動力 R 之值。研究此反動力之方向與變化。a 應滿足何條件方使此反動力爲零? (1923)

29. 有二正交軸 $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ 與一拋物線(P),其焦點在 O,其

頂點在 Ox 上之 M_0 點，橫坐標爲 $-\frac{p}{2}$，p 乃一正常數。

1° 求證此拋物線之方程式爲：

$$y^2-2px-p^2=0$$

2° 一不受重力之質點 M，其質量爲 m，無摩擦力在 (P) 上滑動。此點被 O 點所驅，其力之值恆爲 ma。在 $t=0$，動點在 M_0 其初速度爲 $\sqrt{ap}$。

先以 $r=OM$ 之函數，繼以 M 之縱坐標 y 之函數，表 M 點之活力。

3° 求 M 點之速度在 Oy 上之射影，與此點之運動的方程式。

4° 試以 y 之函數表曲線(P)之反動力在兩軸上之射影。且以動點之速度 v 之函數，計算此反動力之數值。

5° 應施何力於質量爲 m 之一自由點上，方使其運動與 M 點之運動相同？且解釋所得之結果。 (1923)

30. 設有一圓周，在一鉛垂平面內，其心爲 O，其半徑爲 R。一受重力之質點 M，其質量爲 1，不受摩擦力，在此圓周上運動，且不能離去之。此點被圓周最低處 A 點所驅，此力之值爲 $\frac{\omega^2}{AM^2}$，ω 乃一常數。

1° 試定 M 點之平衡的位置，且研究此諸位置之穩度。設以 g 表重力加速度，φ 表(OA, OM)間之角。

2° 若 M 點可向內而不能向外離開圓周，則 1° 內所得之結果有改變否？試就 ω^2 之值討論之。

3° 設M點與圓周之連繫如2°所述,係一面的,且ω^2之值在$4R^2g$與$8R^2g$之間。若M_0(在左邊之半圓周ABA′上)乃與φ相當之φ_0的一穩定平衡之位置。在$t=0$時,動點在此位置以初速度v_0循φ增加之方向的切線出發。試以φ之函數表動點以後每瞬時之速度v,與圓周之反動力T。設說明可選定v_0,俾動點得達圓周之最高點A′,且在該點停住不動。

4° 設M_0乃M點之任一穩定平衡之位置,試研究M在圓周上M_0點之附近的微小擺動。於此可假設(1) M_0M弧甚小,至可略去其一次方以上之項;(2)且當$t=0$時,動點不受初速度置於M_0附近之一點M_1。 (1925)

31. 設一垂直平面內,有二正交軸,OX與OY,後者鉛垂向上且有一軸由O發出,與OX成一銳角φ;在此軸上取一點P,使$OP=h$ 0。又有一軸D,經過P,且與前一軸正交。

一質點$M(x,y)$其質量爲m,繫於D直線上運動。此點受重力,且受O點之引力,此力與其質量m及距離OM爲比例,而比例係數爲ω^2。

直線D可以其方向餘弦及D點之坐標(x_0,y_0)定之,且令$\overrightarrow{PM}=\rho$。

1° 以h及φ之函數,表與M點之平衡位置相當之ρ之值。

2° M點不受初速度,自D上之任一點M_0出發,試求其運動。

3° 以h與φ之函數,表每瞬時動點M施於直線D之壓力。

4° 設有摩擦力,令摩擦係數爲 f。於是M點之平衡的位置爲何?

5° 仍設在D直線上有摩擦力。M點應在D上何處,以無初速度出發,使其開始運動當第一次速度爲零時,便停止不復運動? (1926)

32. 在一平面內有二正交軸 Ox 與 Oy。一力場爲下列二式所定:

$$X=x^2+y^2,\qquad Y=xy$$

此即施於質量爲1之一動點 $M(x,y)$ 上之力 $\overrightarrow{F}$ 之射影。

1° 有一力函數否?試求一曲線C,俾動點M繫於其上時,此曲線之每一點爲一平衡之位置。書曲線C之普遍方程式,且作C曲線之一。

2° 若M點繫於平圓周 $x^2+y^2=1$ 上運動,定其受F力之作用而平衡之位置。對此每一平衡之位置,研究其穩度。求證每一平衡的位置係一曲線C與圓周之切點。

3° M點仍繫於上述之圓周上,應以何與圓相切的速度 v_0 方使M點由$(1,0)$點出發,而到$(-1,0)$點停止? 試於運動中將速度V以 $\theta=\widehat{MOX}$ 之函數表之,且研究其變化。

4° 在此運動中,求以 θ 之函數表圓周之反動力,與F力所作之總工。 (1926)

33. 在一平面內有一定點O與一動點M,其質量爲 m。此動點常受在 $\overrightarrow{OM}$ 軸上之一力之作用,其數值在此軸上爲

$m\left(OM-\dfrac{2}{\overline{OM}^2}\right)$。於 $t=0$ 時,M 點佔一已知之位置 M_0 使 $OM_0=\sqrt{2}-1$,受一初速度 $v_0=\sqrt{2}+1$ 與 OM_0 正交。

1° 以 $OM=r$ 之函數,表動點在任何位置之速度 V。

2° 以 r 之函數表速度 V 在 OM 軸及與 OM 正交之軸上之分量(卽移動速度與轉動速度)。

試求 r 爲何值時,移動速度爲零。

3° 求 M 點之軌道(不必作出),與動點經過此曲線之每點之時。

4° 若 $t=0$ 時,$OM_0=1$, $v_0=1$ 仍係與 OM_0 正交,以上所得之結果有何變化? (1927)

34. 有一力場在空間三正交坐標軸內。施於質量爲 1 之 M 點 (x,y,z) 上之力,在三軸上之射影爲:

$$X=y,\qquad Y=x,\qquad Z=-a$$

a 乃一已知正常數。

1° 試證有一力函數。求均勢面與力線。此等力線在三坐標平面上之射影爲何?

2° 假 M 點乃一自由點,受此力 (X, Y, Z) 之作用。且設 $t=0$ 時,M 點在 $M_0\ (a,0,0)$,而其速度爲零。試求其運動,此運動係加速抑或減速。

3° 設 M 點不受摩擦力繫於螺旋線:

$$x=a\cos\theta,\qquad y=a\sin\theta,\qquad z=\frac{1}{2}a\theta$$

之 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 弧上運動,試求其平衡之位置,且討論其穩度。

4° 設M點不受摩擦力繫於球面:

$$x^2+y^2+z^2=3a^2$$

上運動,求其平衡之位置。設連繫乃一面的,即M可向外而不能向內離脫球面,其變化如何? (1927)

35. 設有一曲線Γ,對於直交二軸之方程式為:

$$y^2-2ax+a^2=0,$$

a 乃一正常數。

有一質點M,其質量為 m,其坐標為 (x, y) 此點不受摩擦力在曲線Γ上滑動。此點受一外力之作用,其在二軸上之分量為:

$$X=-\frac{m\mu}{x^2}, \qquad Y=0,$$

μ 乃一正常數。

初起時M點在 Ox 軸上之 M_0 點而所受之初速度為 $2\sqrt{\frac{\mu}{a}}$。

1° 試證曲線Γ乃一拋物線,其準線乃 Oy 軸,其焦點之坐標為 $(a, 0)$。

2° 以 x 之函數表M之活力與速度。且求此點之運動。

3° 以 y 之函數表M之速度在二軸上之射影,與M點經行 M_0M 弧所須之時 t。

4° 以 x 之函數計算曲線之反動力與其在兩軸上之射

影。(本題不計M點之重量) (1921)

36. 一不受重力之點M,其質量為m,其極坐標為(r,θ),其軌道乃一圓周,方程式為:

$$r=a\cos\theta$$

設M在其軌道上之位置在每瞬時為下列方程式所定:

$$t=\frac{1}{4}(2\theta+\sin 2\theta)$$

1° 求M對於原點O之面積速度,且證其為常數。

2° 求M點之速度,以r之函數表此速度,且研究此運動。

3° 求M點之活力,且求動點作圖之第一象限時所成之工。

4° 求施於M上之力且以r之函數表之。

5° 以極坐標表速度圖,且作出之。 (1922)

37. 設在一平面內有二直交軸(Ox, Oy)與一不受重力之質點,其質量為1,其坐標為(x,y),受一力(F)之作用其分量為:

$$X=-4x,\qquad Y=-y+1$$

1° 試證有一力函數,求出之。且求均勢線與力線。

2° 在零時,M點不受初速度,置於$(1,0)$點,作此點受F力之運動的微分方程式,積分之,且研究此運動。

3° 現設M點繫於一完全平滑之直線(D)上運動,而不離去之。此直線之方程式為$y=x-4$,試定此點之平衡的位

置,且研究其穩度。

4° 設直線不平滑,其摩擦係數爲$\frac{1}{3}$,試復研究M點在直線(D)上之平衡。 (1924)

38. 設有Ox, Oy二軸;Ox水平,Oy鉛垂向下。在此平面上一點M之運動的方程式爲:

$$(1)\qquad x=\frac{g}{k^2}(1-e^{-kt}),\qquad y=\frac{gt}{k}$$

式內e乃納氏對數底,k與g爲二正常數。

1° 作M點之軌道。求速度有向量之數值與線坡。研究此運動,係加速抑減速。

2° M點之加速度有向量可視爲二有向量之和,一爲$\overrightarrow{MA}$在過M點之鉛垂線上,他一爲$\overrightarrow{MB}$在過M點之軌道的切線上。

求MA之長度且以M點之速度v之函數表MB之長度。

3° 現設M爲一受重力之自由質點,質量爲m,重量爲mg,在空氣中運動,受一阻力$\overrightarrow{MR}$,其與M點之速度$\overrightarrow{MV}$之關係爲:

$$\overrightarrow{MR}=-mk\overrightarrow{MV}$$

k乃一正常數。起初時M點從xOy平面上之O點拋出,繼續在此平面上運動。初速度之方向數值應爲如何,方使M點之運動可以方程式(1)表之?

4° 試以t之函數表在O與t時間重量所作之工與空氣阻力所作之工。 (1924)

39. 設有Ox, Oy, Oz三直交軸,與一旋轉圓錐,其頂為O其軸為Oz,其半頂角為45°。

一點M其質量為1,不受摩擦力在此錐上運動。設其不受重力影響,在$t=2$時,M點在zOx平面內,緯圈之半徑為r_0而其高為正。初速度v_0與Oy平行。M點受O點之吸引,其力與$\overrightarrow{MO}$相等。

1° 設以O為極,Ox為極軸,試以t之函數表M點在xOy平面上之射影m之極坐標(r, θ)。

2° 試證M點常在二定緯圈之內。求以t之函數表速度之變化。初速度V_0之值為何,方使M點之軌道為一圓周? 在此情形下運動之規律為何?

3° 以M點高度的函數計算圓錐之反動力。

4° 將此圓錐展在一平面上,在此平面上取一極坐標,以頂點為極點,以$t=0$時動點所在之發生線為極軸。

試以m點之極坐標(r, θ)之函數表與M相當之M_1點之極坐標(ρ, ω),且求M_1點所作之曲線。 (1925)

40. 設在一垂直之平面內有二直交軸,Ox水平,Oy向下。一受重力之點M,其質量為m,被O點吸引其力與質量m及距離OM成比例,且此比例係數為ω^2。

1° 設於$t=0$時,M點在O,受一與Ox成α角之初速度v_0,求M點之軌道。試證此軌道之作成對於某一點遵循面積定律,且求定此點。計算此面積速度。

2° 設M點繫於 $x^2+y^2-2Rx=0$ 圓周上,不受摩擦力滑動,求其平衡點之位置。試證有一點 M_1 爲穩定,他一定 M_2 爲不穩定。

3° 仍設M點在此圓周上,應以何速度 v_1 從 M_1 點出發,俾其速度至 M_2 點而爲零?在此情形下,試求動點達 M_1M_2 間之任一點所須之時間。

設 φ 爲OM與 Ox 間之角度,又 φ_1 及 φ_2 爲與 M_1 及 M_2 相當之 φ 之值,且以 g 表重力加速度。 (1928)

41. 一受重力之點M,其質量爲 m,在一垂直平面內之圓周C上運動,其心爲O,其半徑爲R。一不能伸長而可設爲無重之線(其長已知),一端繫於M點,經過置於C圓周最高點A上之一甚小的滑車,再循AO垂直向下,他端更繫一與前同質量 m 之重力點M'。

1° 求M之平衡位置,取 $A\hat{O}M=\theta$ 爲未知角。

2° 設M與M'在運動中,求線之張力,設此張力在線上之到處相同,試以 $\theta, \frac{d\theta}{dt^2}, \frac{d^2\theta}{dt^2}$ 之函數表此張力之值。

3° 設 M_0 乃不在OA垂線上之一平衡位置,且設 $t=0$ 時,M在 M_0 點,初速度爲 v_0,求動點M在任何點之速度。 (1928)

43. 在一垂直平面內有二正交軸,Ox 水平,Oy 由下而上。一受重力之點其質量爲1,被O點吸引,其力與此二點間之距離正比(ω^2 乃此比例係數)。在 $t=0$ 時,M點由O出發,其初速度爲 V_0 與 Ox 所成之角爲 α。

1° 試直接計算動點在其軌道上之任一點(x,y)之速度。且求均勢線。

2° 作M點之運動微分方程式,且積分之,初情形如上所述。求軌道與速度圖。試證軌道遵循面積定律作成,定此面積之心P,且算此面積速度V_A。

3° 設將V_0之絕對值固定,而只改變射角a,動點所能達之平面上之點在何範圍之內?

4° 除重力與O點之引力外,設動點更受一與速度正比之阻力(ω乃比例係數),作運動之新方程式,且積分之。以t之函數計算向徑PM所掃過之面積(M爲動點,P爲以上所定之面積心)。 (1929)

43. 在一垂直平面內有與正交軸,相交於一點O,X'X軸水平,Y'Y軸垂直向上。一質點M其質量爲1,在此平面上運動。此點受動力之作用外,且爲Y'Y軸上每一元(élément)所推斥:設H乃Y'Y軸上坐標爲h之點,又設Y'Y上之元爲dh,此元施於M上之推斥力,方向在HM上,其絕對值爲$\dfrac{\omega^2 dh}{\mathrm{HM}^4}$($\omega^2$乃一已知常數)。

1° 求M點所受之合力在三軸之正射影,表明其一分量Y爲常數,他一分量X與$\dfrac{1}{x^3}$正比。試證有一力函數,且求均勢線。

2° 在$t=0$時,M點在X'X線上之一點A,其坐標爲正a,其初速度V_0與Y'Y平行。作運動之方程式,且積分之。繪M點

之軌道,按 V_0 之符號分爲二情形。

3° 設M點不受摩擦力在一圓周上滑行,其心在O,其半徑爲R,求其在Y'Y線之右方的平衡位置,且說明其是否穩定。

設 φ 爲OM與垂直向下之半徑OA所成之角,欲求平衡之位置,作一含 $z=\cos\varphi$ 之方程式,再討論此方程式之根,說明其根皆爲正,惟有一根在0與1之間。 (1929)

44. 設在一平面上有二正交軸 Ox 與 Oy, 更有一質點,其質量爲1,在此平面上受F力之作用運動,此力在OM軸上,其數值爲:

$$F=-\frac{a}{\overline{OM}^2}\left(1-\frac{b}{\overline{OM}}\right),$$

a 與 b 爲二已知正常數。

設在OX上有一點B,其坐標爲 b, 他一點 M_0 其坐標爲正 $x_0<b$, 更設 M'_0 爲 M_0 對於O,B二點之調和分點,換言之即 M_0' 之坐標 x_0' 爲下列一式所規定:

$$\frac{1}{x_0}+\frac{1}{x_0'}=\frac{2}{b}$$

1° 在 $t=0$ 時,動點M(設其坐標爲 x)在 M_0 點,無初速度。試以 x 之函數表M點之速度 V_0, 若 $\frac{b}{2}<x_0<b$, 求證M常在二極限位置之間,且求出此二極限之坐標。試就 x 之函數討論V之變化。幷問 $x_0=b$ 時,運動之情形如何?

2° 當 $\frac{b}{2}$ x_0 b 時,求運動之規則。將原點移 M_0M_0' 之中點 M_1 (設其坐標爲 x_1),試以 M 點之新坐標 u 之函數表時間 t;計算動點達其程途末端之時間 t_0。當 $t > t_0$ 時,運動之情形如何? 試證運動係週期的,且求其週期。

3° 設於 $t=0$ 時, M 在 B, 其速度 V_0 與 Ox 正交,試求 M 點所作之軌道之極坐標(r, θ)方程式。當 $V_0{}^2=\frac{4a}{5b}$ 時,作此軌道之曲線。 (1930)

45. 一動點 M 在任何時 t 對於三正交軸 Ox, Oy, Oz 之坐標爲:

$$x=\frac{a\cos t}{t},\quad y=\frac{a\sin t}{t},\quad z=\frac{at}{2}$$

a 乃一已知正常數。

1° 求證 M 點之軌道,乃在繞 Oz 軸之旋轉曲面上之一曲線 C, 且求此旋轉面在 zOx 平面上之交線。求曲線 C 在 xOy 平面上之正射影(可以極坐標 r, θ 表此射影曲線之方程式, O 爲極點, Ox 爲極軸)。

2° 先以 t 之函數,繼以 r 之函數計算: (1) M 點之速度; (2) 由 $t=\sqrt{2}$ 至任何一點 M $(t$ $0)$ 在 C 曲線上之弧 S; (3) M 點之切線與法線二加速度; (4) 曲線 C 上各點 $(t > 0)$ 之曲率半徑。

3° 設 T 乃 O 點在過 M 點之切線上之正射影。先以 t 之函數,繼以 S 之函數表 TM 之值。

最後設有一質點P,其質量爲m,在曲線C上無摩擦移動。此點被O點所吸引,其力與距離OP成正比,ω^2乃此比例係數。求P點在曲線C上之運動定律。 (1930)

46. 設有一重力點,不受摩擦力在$r=a\sqrt{\sin 2\theta}$曲線上運動。若以極軸Ox爲垂直向下。在$t=0$時,動點在原點,不受初速度在與Ox相切,y爲正之一支上運動。

1° 求證動點由初位置,到任何一位置M,所須之時,與動點在OM直線上滑行,所須之時相同。

2° 設此點在曲線之內邊滑動,此點能脫離曲線否? 若能應在何處?

3° 求1°問之逆題,卽具有1°之條件,經過O點之平面曲線爲何?

47. 一彗星之重心M之軌道乃一橢圓,其加速度常向此橢圓之焦點F。設A_0與A_1乃長軸之二端,已知$FA_0=r_0$,$FA_1=r_1$與週時T。

試以已知各數與M至F之距離r之函數表M點之速度。

數字的計算: $r_0=506\times10^5$仟米, $r_1=612\times10^6$仟米, T=1205日, 求M在A_0點之速度等於每秒若干仟米。

48. 一質點M,其質量爲1,被一定點O攝引,其力之絕對值爲:

$$\frac{2K^2(a^2+b^2)}{r^5}-\frac{3K^2a^2b^2}{r^7}$$

表向徑OM。

於 $t=0$ 時，M在A點，而 $OA=a$，且其速度爲 $\frac{K}{a}$，與OA正交。

1° 求M點之軌道。

2° 定 t 與極角 θ 之關係。求證運　係週期的，且算週時。

49. 一質點M，其質量爲1，被一定點O吸引，其力與距離OM之平方爲反比。當 $OM=1$ 時，此力等於1。

在起始時，M點在 M_0 而 $OM_0=1$，初速度之數值亦等於1。

試求初速度應與 OM_0 所成之角 α，俾M在其運動中經過一定點P。設P點對於以O爲極點，OM_0 爲極軸之極坐標爲 (r_1, θ_1)。

P點應在平面上何區域內，本題方爲可能？

數字的計算：$r_1=1.3$，$\theta_1=45°$，求 α。

50. 設有一均勻而受重力之薄片，其質量爲M，其形狀乃一正方形，每邊長 $2a$，中掘去一同心之圓孔，其半徑爲R。

此片爲一極細之桿 Ox 所持，此桿係水平向位置，與片正交。圓孔之周可在桿上不受摩擦力滑動。薄片亦能在一垂直固定平面內改位。

1° 求運動之方程式。

2° 求桿對於接觸點O之反動力。

51. 設有一均勻圓形薄片，其心爲O，半徑爲R，不受摩擦力，繞過O點與圓形正交之軸旋轉。薄片之周上一點P被

O點之下,垂直線上距離爲 a 處之一定點A所吸引,此力之數值爲 $K\cdot\overline{PA}$, K乃一常數。求證此薄片之運動可與一單擺作同步擺動,且求此同步單擺之長。

52. 設有一均勻物質薄片,形狀爲等腰三角形ABC,其底 $AB=b$, 其高爲 h, 而 $CA=CB$。

1° 設此薄片繞其水平之底邊旋轉,試求與此複擺同步之單擺之長。

2° 求小擺動之週期。

數字的應用: $h=2$ 米, $g=9.81$ 米/秒^2。

53. 設有一複擺乃 n 個圓柱管所成,此等管中空無厚,皆置於水平向,質量同爲M,直徑同爲D,長同爲 l,彼此各以一母線相接連。此等母線同在一平面內,將此複擺繞最上之一母線旋轉。

求此複擺之微小擺動的週時。

數字的計算: $n=5$, $l=60$ 厘米, $D=12$ 厘米,

$M=800$ 克, $g=981$ 厘米/秒^2。

54. 設有一均勻受重力的直六面體,可依次繞自一頂點發出之三稜置於水平向擺動,其來回小擺動之全週時爲1.2秒,1.4秒,與1.5秒,試求此三稜之長。

取重力加速度 g 爲 981 c.g.s.

55. 設有一均勻之棒AB,其長爲 l,其質量爲 m,位於水平向。其中點O繫於一鉛垂有彈性之細線OO′,O′點爲固

定。此棒在平衡之狀態中，若將此棒繞 OO' 線轉過一角度 θ 時，線對於棒發生一阻力偶，其絕對值為 $K\cdot\theta$，K 乃一常數。

據此假設，且不計空氣之阻力，求棒繞線運動之微分方程式，且求此擺動之週時。

56. 設有一均勻之桿，重 5 仟克，長 3 米，在一垂直面內，可繞其固定之一端 O 旋轉。為簡單計，設 $g=10$，單位乃米與秒。

1° 求此擺之小擺動週時，計算至 $\frac{1}{100}$ 秒。

2° 設於他一端 A 繫一體積可略，重 5 仟克之小球，試求此新擺之週時。

3° 應施於棒之角速度為何，方使桿與球所成之系，離其垂直之位置 OA（A 向下）上行，至對稱之垂直位置 OA'（A' 向上）而速度為零？ 以每秒若干轉表此角速度，且算至 $\frac{1}{100}$（可應用活力定理）。

4° 設桿與球原係分離，桿佔 OA 之位置，球以水平向每秒 5 粎之速度來擊於桿之 A 點，且附於桿上。求碰撞後全系之角速度（每秒若干轉，且計算至 $\frac{1}{100}$）。

57. 設有二均勻而受重力之球，直徑為 0.40 米與 0.20 米，為一 2 米長之桿所連。此桿之質量可略而不計，於其中點 O 裝置有一擺動軸。

在此桿上裝置有一螺螄簧，對於擺動軸發生一阻力距，其值為：

$$M=\lambda P\theta$$

P乃二球之總重量,θ乃對垂直線轉過之角,(大球在下方)λ乃一常數。

1° 求二球之重心。

2° 作此複擺之微小擺動的方程式,計算擺動週期。設$\lambda=1$,求同步單擺之長。

58. 設有一均勻而受重力之薄片,其形狀爲等邊三角形ABC,其AB邊可在OL線上改位。此線與水平面所成之角爲α,俾薄片可在OL上滑動,且繞OL轉動。

在起始時,薄片不受初速度,而置於OL爲最大坡線之平面上。對於重心,與薄片正交,施一衝擊,其值爲M·U,M乃薄片之質量。求由此衝擊而生之速度。

59. 設有一均勻正方形的薄片,每邊$a=1$米,質量$M=10$仟克,繞其一固定之邊轉動。

當角速度爲每秒$\omega=2\pi$ 圓弧度時,此薄片之與旋轉軸相對之邊遇一障礙物,忽然停止。此衝擊經過之時$t=0.01$秒,設此衝擊與薄片正交,試求與此衝擊相當之力之平均值。

60. 設有一均勻受重力之橢圓形薄片,可自由繞過其一焦點與其短軸平行之一水平軸旋轉。在其穩定平衡之位置時,一射彈循垂直於薄片之方向來擊於其心,且附於其上,而成爲一體。於是全系轉動,離垂直線轉過一角α。

已知: 射彈之質量$m=12.25$克, 薄片之質量$M=980$克

長軸 $2a=80$ 厘米，　焦點距離 $2C=50$ 厘米，

最大離開角 $\alpha=17°38'$，重力加速度 $g=979.7$，

求射彈之速度。

名 詞 索 引

法	英	中	節	頁
— relative	—, relative	相對軌道	29	67
Travail	Work	功	48	101
— élémentaire	—, elementary	原功	48	101
— moteur	—, motive	動力功	105	246
— resistant	— against resistance	阻力功	105	246
— total	—, total	總功	50	106
— unité de	—, unity of	功單位	51	108
U				
Unités	Unities	單位	114	271
— de travail	Unity of work	工之單位	51	108
— fondamentales	Fundamental unities	基本單位	43	92
V				
Vecteur	Vector	有向量	1	1
— directement opposés	Directly opposite vectors	直接相反有向量	1	2
— equipollents	Equipollent vectors	相等有向量	1	2
— opposés	Opposite vectors	相反有向量	1	2
Vitesse	Velocity	速度	11	24
— angulaire	—, angular	角速度	12	32
— aréolaire	—, areal	面積速度	13	33
— moyenne	—, mean	平均速度	11	24