

Politecnico di Torino
Laurea Triennale in Ingegneria Informatica

appunti di
Teoria ed elaborazione dei segnali

Autori principali: Luca Ghio
Docenti: Guido Montorsi, Gabriella Bosco
Anno accademico: 2012/2013
Versione: 1.0.1.0
Data: 5 novembre 2018

Ringraziamenti

Oltre agli autori precedentemente citati, quest'opera può includere contributi da opere correlate su [WikiAppunti](#) e su [Wikibooks](#), perciò grazie anche a tutti gli utenti che hanno apportato contributi agli appunti *Teoria ed elaborazione dei segnali* e ai libri *Teoria dei segnali2* e *Elaborazione numerica dei segnali*.

Informazioni su quest'opera

Quest'opera è pubblicata gratuitamente. Puoi scaricare l'ultima versione del documento PDF, insieme al codice sorgente \LaTeX , da qui: <http://lucaghio.webege.com/redirs/m>

Quest'opera non è stata controllata in alcun modo dai professori e quindi potrebbe contenere degli errori. Se ne trovi uno, sei invitato a correggerlo direttamente tu stesso realizzando un commit nel [repository Git](#) pubblico o modificando gli appunti *Teoria ed elaborazione dei segnali* su WikiAppunti, oppure alternativamente puoi contattare l'autore principale inviando un messaggio di posta elettronica a artghio@tiscali.it.

Licenza

Quest'opera è concessa sotto una [licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale](#) (anche le immagini, a meno che non specificato altrimenti, sono concesse sotto questa licenza).

Tu sei libero di:

- condividere: riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare questo materiale con qualsiasi mezzo e formato;
- modificare: remixare, trasformare il materiale e basarti su di esso per le tue opere;

per qualsiasi fine, anche commerciale, alle seguenti condizioni:

- **Attribuzione**: devi attribuire adeguatamente la paternità sul materiale, fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate modifiche. Puoi realizzare questi termini in qualsiasi maniera ragionevolmente possibile, ma non in modo tale da suggerire che il licenziante avalli te o il modo in cui usi il materiale;
- **Condividi allo stesso modo**: se remixi, trasformi il materiale o ti basi su di esso, devi distribuire i tuoi contributi con la stessa licenza del materiale originario.

Tutte le immagini generate da GNU Octave si trovano nel dominio pubblico.

Indice

I	Teoria dei segnali	9
1	Segnali e vettori	10
1.1	Segnali analogici tempo-continui	11
1.1.1	Energia e potenza media	11
1.1.2	Periodicità	11
1.2	Spazio dei segnali	12
1.2.1	Distanza	12
1.2.2	Prodotto scalare	13
1.2.3	Norma	13
1.2.4	Ortogonalità	13
1.2.5	Basi ortonormali	14
1.3	Approssimazione di un segnale	15
1.3.1	Semplificazione formule	15
1.3.2	Procedura di Gram-Schmidt	16
2	Serie e trasformata	18
2.1	Base canonica	18
2.1.1	Funzione porta	18
2.1.2	Seno cardinale	18
2.1.3	Delta di Dirac	19
2.1.4	Definizione della base canonica	20
2.2	Base alternativa sinusoidale	21
2.2.1	Serie di Fourier	21
2.2.2	Trasformata di Fourier	22
3	Proprietà trasformata	24
3.1	Convoluzione	24
3.1.1	Convoluzione di porte	24
3.1.2	Proprietà	25
3.2	Proprietà della delta di Dirac	25
3.2.1	Campionamento	25
3.2.2	Traslazione	25
3.3	Proprietà della trasformata di Fourier	26
3.3.1	Linearità	26
3.3.2	Anticipo o ritardo	26
3.3.3	Modulazione e traslazione	26
3.3.4	Scalamento	26
3.3.5	Relazioni di parità	27
3.3.6	Convoluzione e prodotto	27
3.3.7	Derivazione ed integrazione	27
3.3.8	Dualità	28
3.3.9	Altre proprietà	28
3.3.10	Relazione tempo-frequenza	28

3.4	Esempi di trasformate	29
3.4.1	Funzione porta	29
3.4.2	Segnale numerico	29
4	Sistemi lineari	31
4.1	Classificazione	31
4.1.1	Sistemi lineari	31
4.1.2	Sistemi tempo-invarianti	31
4.1.3	Sistemi causali	31
4.1.4	Sistemi senza memoria	31
4.1.5	Sistemi reali	31
4.1.6	Sistemi stabili	32
4.2	Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI)	32
4.2.1	Sistemi LTI causali	33
4.2.2	Sistemi LTI reali	34
4.2.3	Sistemi LTI stabili	34
4.3	Esempi	35
4.3.1	Filtro RC con una porta di ingresso	35
4.3.2	Canale radio con eco	35
5	Diagrammi a blocchi	36
5.1	Diagrammi a blocchi	36
5.2	Definizioni di banda	37
5.2.1	Misura del supporto	37
5.2.2	Banda a 3 dB	37
5.2.3	Banda equivalente di rumore	39
5.2.4	Banda che contiene una data percentuale di energia	39
5.2.5	Estensione di frequenza	39
5.3	Distorsione lineare	40
5.4	Modulazione e demodulazione	40
5.4.1	Modulazione	40
5.4.2	Demodulazione	40
5.4.3	Moltiplicazione in frequenza	41
6	Segnali periodici	42
6.1	Trasformata di Fourier di un segnale periodico	42
6.2	Treno di impulsi	43
6.2.1	Campionamento nel tempo e periodicizzazione in frequenza	43
6.2.2	Periodicizzazione nel tempo e campionamento in frequenza	43
6.3	Rappresentazioni di un segnale periodico	44
6.3.1	Esempio: segnale periodico costante	44
6.3.2	Esempio	45
7	Campionamento	46
7.1	Filtro anti-aliasing	46
7.2	Campionatori reali	46
7.3	Interpolatori	47
7.3.1	Condizioni ideali	47
7.3.2	Condizioni reali	49

8	Spettro di energia e segnali troncati	50
8.1	Segnali troncati	50
8.1.1	Fenomeno di Gibbs	51
8.2	Spettri di energia e di potenza e funzione di autocorrelazione	51
8.2.1	Segnali a energia finita	51
8.2.2	Segnali periodici	52
8.2.3	Segnali aperiodici a potenza finita	53
9	Processi casuali	54
9.1	Descrizione probabilistica	54
9.1.1	Statistiche	54
9.1.2	Media e autocorrelazione	56
10	Stazionarietà	57
10.1	Stazionarietà	57
10.1.1	Stazionarietà in senso stretto	57
10.1.2	Stazionarietà in senso lato (Wide Sense Stationary [WSS])	57
10.2	Ciclostazionarietà	58
10.2.1	Ciclostazionarietà in senso stretto	58
10.2.2	Ciclostazionarietà in senso lato	58
10.3	Stazionarizzazione	59
11	Trasformazioni e spettro di potenza	60
11.1	Trasformazioni lineari di processi casuali	60
11.1.1	Esempi	60
11.1.2	Trasformazioni lineari tempo-invarianti	61
11.1.3	Trasformazioni lineari tempo-varianti	61
11.2	Densità spettrale di potenza	62
11.2.1	Proprietà	62
11.2.2	Interpretazione fisica	63
11.2.3	Rumore gaussiano bianco	63
12	Medie temporali ed ergodicità	64
12.1	Media	64
12.1.1	Media d'insieme di un processo casuale	64
12.1.2	Media temporale	64
12.1.3	Ergodicità per la media	65
12.2	Autocorrelazione	66
12.2.1	Ergodicità per l'autocorrelazione	66
II	Elaborazione numerica dei segnali	68
13	Segnali a tempo discreto	69
13.1	Classificazione	69
13.1.1	Durata di una sequenza	69
13.1.2	Causalità	69
13.1.3	Parità	69
13.1.4	Periodicità	70
13.1.5	Sequenze limitate in ampiezza	70
13.1.6	Sequenze sommabili	70
13.2	Sequenze elementari	70
13.2.1	Sequenza gradino unitario	70
13.2.2	Delta di Kronecker (impulso unitario)	71
13.2.3	Sequenza rampa	71

13.2.4	Sequenza sinc	72
13.2.5	Sequenza triangolo	72
13.2.6	Sequenza esponenziale	73
13.3	Sinusoidi a tempo discreto	73
13.4	Operazioni elementari	74
13.4.1	Somma e prodotto	74
13.4.2	Traslazione e ribaltamento	74
13.4.3	Scalamento temporale	74
13.4.4	Convoluzione lineare	74
13.5	Energia e potenza media	75
13.5.1	Energia	75
13.5.2	Potenza media	75
13.6	Funzioni di correlazione	76
13.6.1	Esempio: segnale radar	76
14	Campionamento e quantizzazione	79
14.1	79
14.2	Quantizzazione	79
14.2.1	Errore di quantizzazione	80
14.2.2	Rapporto segnale rumore	80
15	Trasformata di Fourier a tempo discreto	83
15.1	Trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT)	83
15.1.1	Definizione di DTFT	83
15.1.2	Inversione della DTFT (IDTFT)	84
15.1.3	Condizioni di esistenza	84
15.2	Proprietà della DTFT	85
15.2.1	Linearità	85
15.2.2	Ribaltamento	85
15.2.3	Ritardo	85
15.2.4	Traslazione in frequenza (modulazione)	85
15.2.5	Derivazione in frequenza	85
15.2.6	Convoluzione lineare	86
15.2.7	Prodotto	86
15.2.8	Relazioni di parità	86
15.2.9	Valore iniziale e somma dei campioni	86
15.2.10	Relazione di Parseval	87
15.2.11	Spettro di energia	87
15.3	DTFT notevoli	87
15.4	Banda di un segnale a tempo discreto	88
15.4.1	Banda assoluta	88
15.4.2	Banda equivalente	88
15.4.3	Banda $B_x\%$	88
15.4.4	Banda a 3 dB	89
16	DFT e FFT	90
16.1	Trasformata di Fourier discreta (DFT)	90
16.1.1	Definizione di DFT	90
16.1.2	Inversione della DFT (IDFT)	90
16.1.3	Estensioni periodiche	90
16.1.4	Tecnica di aggiunta degli zeri	91
16.1.5	Aliasing nel tempo	93
16.2	Proprietà della DFT	94
16.2.1	Accorgimenti	94
16.2.2	Linearità	95

16.2.3	Ritardo	95
16.2.4	Modulazione	95
16.2.5	Convoluzione circolare	95
16.2.6	Proprietà di simmetria	95
16.3	Trasformata di Fourier veloce (FFT)	96
16.3.1	DFT	96
16.3.2	IDFT	98
17	Analisi in frequenza di segnali a tempo continuo campionati	99
17.1	DTFT di un segnale analogico campionato	99
17.2	DFT di un segnale analogico campionato	100
18	Sistemi LTI a tempo discreto	101
18.1	Classificazione dei sistemi a tempo discreto	101
18.1.1	Sistemi lineari	101
18.1.2	Sistemi tempo-invarianti o stazionari	101
18.1.3	Sistemi passivi	101
18.1.4	Sistemi causali	101
18.2	Sistemi LTI	103
18.2.1	Risposta all'impulso	103
18.2.2	Risposta in frequenza	103
18.2.3	Stabilità	106
18.2.4	Realizzabilità fisica	107
18.2.5	Esempio: filtro passa-basso	107
18.2.6	Distorsione	110
18.2.7	Analisi tramite DFT	111
19	Trasformata zeta	113
19.1	Definizione	113
19.1.1	Relazione con la DTFT	113
19.1.2	Relazione con la DFT	113
19.2	Analisi della regione di convergenza	114
19.2.1	Sequenze unilatera e sequenze bilatera	115
19.2.2	Regione di convergenza delle sequenze gradino	115
19.2.3	Regione di convergenza di sequenze a supporto finito	117
19.2.4	Regione di convergenza di sequenze con trasformata zeta espressa come rapporto di polinomi	118
19.3	Proprietà della trasformata zeta	118
19.3.1	Trasformata zeta unilatera	118
19.4	Inversione della trasformata zeta	120
20	Analisi dei sistemi LTI mediante trasformata zeta	122
20.1	Filtri digitali	123
20.1.1	Filtri FIR non ricorsivi	123
20.1.2	Filtri IIR puramente ricorsivi	123
20.2	Sistemi LTI non scarichi	124
20.3	Stabilità di sistemi LTI	124
20.3.1	Sistemi LTI causali	124
20.3.2	Sistemi LTI anti-causali	125
20.3.3	Sistemi LTI bilateri	125
20.4	Realizzabilità fisica di sistemi LTI causali	125
20.5	Sistemi inversi	125

21 Progetto di filtri IIR	127
21.1 Prototipo di filtro analogico	127
21.1.1 Maschera delle specifiche	127
21.1.2 Distribuzione di poli e zeri	129
21.1.3 Filtro di Butterworth	129
21.2 Tecnica della trasformazione bilineare	131
21.3 Trasformazioni spettrali tra diverse tipologie di filtro	134
22 Progetto di filtri FIR	135
22.1 Rotazione di fase lineare	135
22.2 Tecniche a finestra	135
22.2.1 Finestra rettangolare	135
22.2.2 Finestra di Bartlett	137
22.2.3 Finestra di Hanning	137
22.2.4 Finestra di Hamming	138
22.2.5 Finestra di Blackman	139

Parte I

Teoria dei segnali

Capitolo 1

Segnali e vettori

Il **segnale** è una funzione complessa in funzione del tempo che definisce la "forma" del segnale.

Operazioni sui segnali

- **trasmissione:** il trasporto da un punto all'altro dello spazio del segnale;
- **memorizzazione:** il segnale è fruibile anche a distanza di tempo;
- **elaborazione:** eliminazione del rumore, combinazione di più segnali. . .

Esempi di segnali

- **segnale elettrico:** costituito da una tensione o una corrente variante nel tempo, spesso generate da trasduttori, ossia dispositivi che permettono di misurare una grandezza scalare (es. temperatura, altezza, velocità) convertendola in un segnale elettrico;
- **segnale vocale:** si misura fisicamente come variazione della pressione dell'aria in funzione del tempo;
- **segnale video:** è più complesso perché è necessario **discretizzare** due delle tre variabili indipendenti x , y e t e definire le informazioni sul colore (o sulla luminosità se in bianco e nero).

Nel caso di un segnale video, discretizzare il tempo t corrisponde a considerare i singoli fotogrammi, e discretizzare le coordinate y significa suddividere il fotogramma in righe orizzontali.

In generale, una **sequenza** f_n o $f(n)$ è la rappresentazione matematica discretizzata nel tempo del segnale di funzione f .

Il **convertitore A/D** serve per digitalizzare un segnale analogico:

- **campionamento:** il segnale viene campionato in base all'intervallo di campionamento Δt scelto;
- **quantizzazione:** il quantizzatore traduce ogni valore scalare campionato in un simbolo che appartiene a un alfabeto di cardinalità finita, cioè lo approssima al valore più vicino tra quelli scelti da un insieme finito.

Il **processo casuale**¹ è lo strumento matematico che definisce le caratteristiche di una certa classe di segnale (vocali, video, dati. . .). Nel caso dei segnali vocali, teoricamente si dovrebbe registrare un certo numero statistico di parlatori e cercare di capire quali caratteristiche (come la frequenza) sono proprie di un segnale vocale, associando a ciascuna caratteristica di ciascun parlatore una probabilità.

¹Si veda il capitolo 9.

1.1 Segnali analogici tempo-continui

Un segnale analogico tempo-continuo è descritto da una funzione complessa $x(t)$, che si rappresenta graficamente nelle due parti reale $x_R(t)$ e immaginaria $x_I(t)$.

Un segnale è **a supporto limitato** se la sua funzione è nulla al di fuori di un intervallo finito (a, b) detto supporto.

Un segnale è **ad ampiezza limitata** se la funzione assume valori compresi in un intervallo finito.

Un **segnale fisico** si distingue dal segnale matematico per il fatto che è sia ad ampiezza limitata sia a supporto limitato.

I **segnali impulsivi** divergono ad un'ampiezza illimitata all'interno di un supporto infinitesimo.

1.1.1 Energia e potenza media

L'**energia** di un segnale $x(t)$ vale:

$$E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 dt$$

Se l'integrale nella definizione di energia diverge, si prende in considerazione la **potenza media** di un segnale:

$$P(x) \triangleq \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{2a} \int_{-a}^a |x|^2 dt$$

In questo caso $|x|^2 = xx^*$ è detta **potenza istantanea**.

Un segnale fisico ha energia finita. I segnali a energia finita hanno potenza media nulla.

1.1.2 Periodicità

Un segnale è **periodico** di periodo T e funzione $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT)$$

se vale la proprietà seguente:

$$\exists T : x(t) = x(t + T) \quad \forall t$$

Un segnale **aperiodico** si può pensare come come un segnale periodico di periodo $T \rightarrow +\infty$.

Energia L'energia $E(x(t))$ di un segnale periodico è infinita.²

Dimostrazione

$$\begin{aligned} E(x(t)) &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT) \right|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_T^*(t - mT) dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT) x_T^*(t - mT) dt = \\ &= \sum_{n=m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT) x_T^*(t - mT) dt + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m \neq n} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT) x_T^*(t - mT) dt = \end{aligned}$$

²Nel caso ultraparticolare di un segnale identicamente nullo, l'energia converge a 0.

Siccome il prodotto nel secondo integrale è sempre zero perché le due funzioni hanno supporto disgiunto:

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t-nT) x_T^*(t-nT) dt + 0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |x_T(t-nT)|^2 dt =$$

Poiché $x(t)$ è un segnale periodico:

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E(x_T(t)) \rightarrow +\infty$$

Potenza media La potenza media $P(x(t))$ di un segnale periodico dipende dall'energia del segnale all'interno di un singolo periodo $E(x_T(t))$:

$$P(x(t)) = \frac{1}{T} E(x_T(t))$$

Dimostrazione

$$P(x(t)) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \int_{-mT}^{mT} \left| \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_T(t-nT) \right|^2 dt =$$

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \sum_{n=-m}^{m-1} \int_{-mT}^{mT} |x_T(t-nT)|^2 dt = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \sum_{n=-m}^{m-1} E(x_T(t)) =$$

Poiché se per esempio $m = 1$ si ha $\sum_{n=-1}^0 E(x_T(t)) = 2E(x_T(t))$:

$$= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{2mE(x_T(t))}{2mT} = \frac{1}{T} E(x_T(t))$$

La presenza di uno o più impulsi non fa diventare infinita la potenza.

1.2 Spazio dei segnali

Lo spazio dei segnali può essere visto come uno spazio vettoriale: un segnale può essere costruito a partire da più segnali elementari così come un vettore può essere costruito a partire da più vettori.

1.2.1 Distanza

Uno **spazio metrico** è un insieme di elementi su cui è possibile definire una distanza. La **distanza** ha le seguenti proprietà:

- non negativa: $d(x, y) \geq 0 \forall x, y$
- simmetrica: $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

- disuguaglianza triangolare: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Lo spazio dei segnali è uno spazio metrico.

La distanza è utile nel confronto di due segnali $x(t)$ e $y(t)$:

$$d(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y| dt$$

Si usa di solito la distanza euclidea:

$$d(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x - y|^2 dt}$$

1.2.2 Prodotto scalare

Nello spazio dei numeri complessi il **prodotto scalare** è così definito:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle \triangleq \sum_{i=1}^n x_i y_i^* \in \mathbb{C}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$$

Nello spazio dei segnali il prodotto scalare è così definito:

$$\langle x, y \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x y^* dt$$

1.2.3 Norma

La **norma** nello spazio dei segnali è così definita:

$$\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x x^* dt}$$

e ricordando che nei numeri complessi vale $|z|^2 = z z^*$:

$$\|x\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 dt} = \sqrt{E(x)} \Rightarrow E(x) = \|x\|^2$$

1.2.4 Ortogonalità

Secondo la **disuguaglianza di Schwarz**, il modulo del prodotto scalare tra due vettori al quadrato è sempre minore o uguale del prodotto delle loro energie:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2$$

da cui deriva:

$$0 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

L'uguaglianza vale quando \mathbf{x} e \mathbf{y} sono proporzionali:

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \|\mathbf{y}\|^2 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \alpha \mathbf{y}$$

L'**angolo** θ tra due segnali $x(t)$ e $y(t)$ è così definito:

$$\cos \theta \triangleq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Due segnali $x(t)$ e $y(t)$ si dicono **ortogonali** tra loro se l'angolo θ è nullo, cioè se il loro prodotto scalare è nullo:³

$$\theta = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

L'energia della somma di due segnali $x(t)$ e $y(t)$ è data da:

$$E(x + y) = E(x) + E(y) + 2\Re\langle x, y \rangle$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle^* = \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\Re[\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle] \end{aligned}$$

Se i due segnali sono ortogonali:

$$\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow E(x + y) = E(x) + E(y)$$

1.2.5 Basi ortonormali

Una coppia di vettori ($\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j$) appartiene a una **base ortonormale** se e solo se:

- \mathbf{w}_i e \mathbf{w}_j sono ortogonali tra loro:

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$$

- \mathbf{w}_i e \mathbf{w}_j hanno entrambi norma unitaria:

$$\|\mathbf{w}_i\| = 1 \quad \forall i$$

Queste due condizioni possono essere riassunte da questa relazione:

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \delta_{ij}$$

dove δ_{ij} è la **delta di Kronecker**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Data una base ortonormale ($\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$), un generico vettore \mathbf{x} può essere rappresentato come combinazione lineare degli elementi della base:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{w}_i$$

Nello spazio dei segnali esistono infinite basi ortonormali: a partire da una qualsiasi base ortonormale, è possibile ottenere un'altra base ortonormale applicando una rotazione di un certo angolo θ a tutti gli elementi della base. Ad esempio, nello spazio euclideo a 2 dimensioni si applica la trasformazione unitaria partendo dalla base canonica:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \times \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\}$$

Fissata una delle possibili basi ortonormali, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra i segnali ed uno spazio vettoriale euclideo a n dimensioni, associando a ogni segnale $x(t)$ il vettore \mathbf{x} a n dimensioni costituito dai suoi coefficienti:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i w_i(t) \longleftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

³Si suppone che le energie di $x(t)$ e $y(t)$ non siano identicamente nulle.

1.3 Approssimazione di un segnale

Lo spazio dei segnali in realtà ha dimensione infinita, cioè per rappresentare tutti i segnali possibili sarebbe necessaria una base costituita da infiniti versori \Rightarrow si può semplificare approssimando un segnale generico \mathbf{x} a un segnale $\hat{\mathbf{x}}$, formato dalla combinazione lineare dei versori \mathbf{w}_i che sono basi ortonormali di uno spazio ridotto di dimensioni finite n . Si dimostra che la migliore approssimazione, corrispondente alla minima distanza euclidea dal segnale di partenza, si ottiene se i coefficienti della combinazione lineare coincidono con i prodotti scalari tra il segnale generico \mathbf{x} stesso e i versori \mathbf{w}_i della base:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle \mathbf{w}_i$$

1.3.1 Semplificazione formule⁴

Definendo una base ortonormale di n elementi è possibile semplificare il calcolo del prodotto scalare, della distanza e dell'energia.

Prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} xy^* dt = \sum_{i=1}^n x_i y_i^*$$

Dimostrazione

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i w_i(t), \sum_{j=1}^n y_j w_j(t) \right\rangle = \int \sum_{i=1}^n x_i^* w_i^*(t) \sum_{j=1}^n y_j w_j(t) dt =$$

Per linearità:

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j^* \int w_i(t) w_j^*(t) dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j^* \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i y_i^*$$

Energia

$$E(x) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^2 dt = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

$$E(x) = E \left(\sum_{i=1}^n \langle x, w_i \rangle w_i \right) =$$

Ricordando la proprietà dell'energia della somma di segnali ortogonali:

$$= \sum_{i=1}^n E(\langle x, w_i \rangle w_i) =$$

Portando fuori una costante dall'integrale della definizione di energia:

$$= \sum_{i=1}^n |\langle x, w_i \rangle|^2 E(w_i) =$$

⁴In questa sezione si ritorna temporaneamente per comodità alla vecchia notazione per i segnali.

Ricordando che i segnali $w_i(t)$ hanno norma unitaria:

$$= \sum_{i=1}^n |\langle x, w_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Distanza

$$d(x, y) \triangleq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} |x - y|^2 dt} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

	Definizione	Segnale	Vettore
Prodotto scalare	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t) dt$	$\sum_{i=1}^n x_i y_i^*$
Energia	$E(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$	$\int x(t) ^2 dt$	$\sum_{i=1}^n x_i ^2$
Norma	$\ \mathbf{x}\ \triangleq \sqrt{E(\mathbf{x})} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$	$\sqrt{\int x(t) ^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i ^2}$
Distanza	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \ \mathbf{x} - \mathbf{y}\ $	$\sqrt{\int x(t) - y(t) ^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i - y_i ^2}$

1.3.2 Procedura di Gram-Schmidt

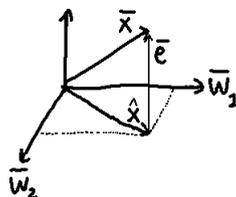


Figura 1.1: In questo esempio il segnale \mathbf{x} viene approssimato in uno spazio bidimensionale generato dai due versori \mathbf{w}_1 e \mathbf{w}_2 .

Il segnale \mathbf{x} perde un po' di energia nella proiezione su $\hat{\mathbf{x}}$:

$$E(\mathbf{e}) = E(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle|^2 \geq 0, \quad \mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$$

$$E(\mathbf{x}) = E(\mathbf{e} + \hat{\mathbf{x}}) =$$

Poiché il segnale errore \mathbf{e} , che è il segnale differenza, è ortogonale al segnale approssimante $\hat{\mathbf{x}}$:

$$= E(\mathbf{e}) + E(\hat{\mathbf{x}}) = E(\mathbf{e}) + \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle|^2$$

Si ricava la **diseguaglianza di Bessel**:

$$E(\mathbf{x}) \geq \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle|^2$$

Se il segnale \mathbf{x} è descritto da una base completa, vale l'**uguaglianza di Parseval**:

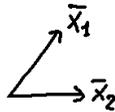
$$E(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}_i \rangle|^2$$

In uno spazio vettoriale a M dimensioni, cioè di cardinalità M , si ha un insieme finito di vettori $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M\}$. La **procedura di Gram-Schmidt** permette di trovare il minimo numero $N \leq M$, detto dimensionalità, di versori $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_N\}$, ortonormali tra di loro, necessario per formare una base per questi vettori:

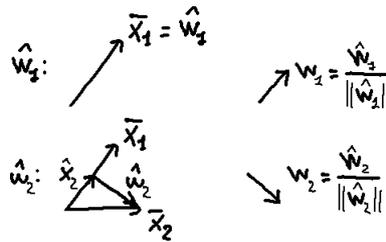
$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 \cdot \|\hat{\mathbf{w}}_1\| &= \hat{\mathbf{w}}_1 = \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \|\hat{\mathbf{w}}_2\| &= \hat{\mathbf{w}}_2 = \mathbf{x}_2 - \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{x}_2 - \langle \mathbf{x}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_i \cdot \|\hat{\mathbf{w}}_i\| &= \hat{\mathbf{w}}_i = \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_N \cdot \|\hat{\mathbf{w}}_N\| &= \hat{\mathbf{w}}_N = \mathbf{x}_N - \hat{\mathbf{x}}_N = \mathbf{x}_N - \sum_{k=1}^{N-1} \langle \mathbf{x}_N, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k \end{aligned}$$

L'algoritmo termina alla N -esima iterazione quando il vettore errore \mathbf{e} è nullo, ovvero quando il vettore proiezione $\hat{\mathbf{x}}_N$ è linearmente dipendente rispetto al vettore \mathbf{x}_N e non si genera un nuovo versore. Se $N < M$ significa che si è riusciti a introdurre una semplificazione. Cambiando l'ordine dei vettori considerati si possono ottenere versori diversi, ma la dimensionalità N non varia.

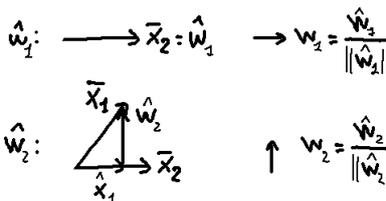
Esempio Si considerano due vettori \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 nello spazio bidimensionale ($M = 2$):



1. viene scelto per primo il vettore \mathbf{x}_1 :



2. viene scelto per primo il vettore \mathbf{x}_2 :

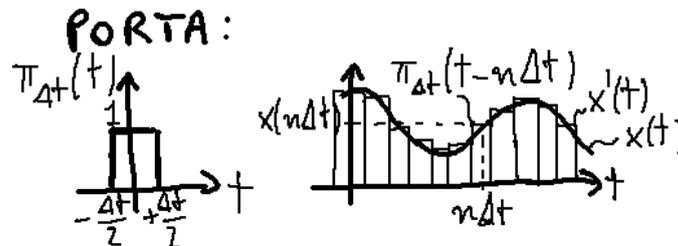


Capitolo 2

Serie e trasformata

2.1 Base canonica

2.1.1 Funzione porta



$\Pi_{\Delta t}(t)$ è la **funzione porta** unitaria di supporto Δt centrato nell'origine. Un segnale $x(t)$ può essere approssimato con un segnale $x'(t)$ costante a tratti ottenuto da una combinazione lineare di infinite porte ortogonali tra di loro (cioè con supporto disgiunto):

$$x(t) \approx x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \Pi_{\Delta t}(t - n\Delta t)$$

Se $\Delta t \rightarrow 0$ l'approssimazione diventa un'identità:

$$x(t) = x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \Pi_{\Delta t}(t - n\Delta t)$$

2.1.2 Seno cardinale

$$\text{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$$

¹Questa immagine è tratta da Wikimedia Commons ([Sinc function \(normalized\).svg](#)), è stata realizzata dall'utente [Omegatron](#), dall'utente [Krishnavedala](#) e dall'utente [Afafla1](#), ed è concessa sotto le licenze Creative Commons [Attribuzione - Condividi allo stesso modo 3.0 Unported](#), [2.5 Generico](#), [2.0 Generico](#) e [1.0 Generico](#).

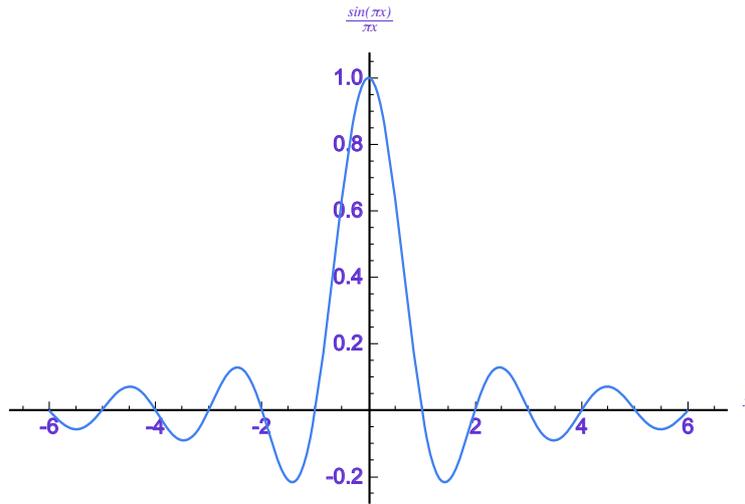


Figura 2.1: ¹

2.1.3 Delta di Dirac

Definizione

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(\tau) d\tau$$

La **delta di Dirac** si può costruire come limite di varie funzioni, tra cui:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pi_{\Delta t}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \text{sinc}\left(\frac{t}{\pi \Delta t}\right)$$

dove:

$$\text{sinc}\left(\frac{t}{\pi \Delta t}\right) = \frac{\sin \frac{t}{\Delta t}}{\frac{t}{\Delta t}}$$

Proprietà

- La delta di Dirac ha area unitaria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

- Traslare la delta di Dirac significa trovare tutti i campioni che assume la funzione $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t)$$

- La delta di Dirac ha energia infinita:

$$E(\delta) \rightarrow +\infty$$

Dimostrazione

$$\delta^2(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \Pi_{\Delta t}(t)$$

$$E(\delta) = \int \delta^2(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \int \Pi_{\Delta t}(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t^2} \Delta t \rightarrow +\infty$$

- La radice della delta di Dirac:

$$\sqrt{\delta(t)} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \Pi_{\Delta t}(t)$$

ha energia unitaria:

$$E(\sqrt{\delta}) = 1$$

Dimostrazione

$$E(\sqrt{\delta}) = \int \sqrt{\delta(t)}^2 dt = \int \delta(t) dt = 1$$

2.1.4 Definizione della base canonica

L'insieme infinito e non numerabile di delta $\delta(t - \tau)$ può essere quindi visto come una **base canonica** non normalizzata per l'insieme dei segnali, cioè un segnale può essere rappresentato come l'insieme dei suoi campioni:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \Delta t \cdot \frac{1}{\Delta t} \Pi_{\Delta t}(t - n\Delta t)$$

dove gli elementi della base (infiniti e non numerabili) sono:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \Pi_{\Delta t}(t - n\Delta t)$$

e i coefficienti (infiniti e non numerabili) sono:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} x(n\Delta t) \Delta t$$

È però una base ortogonale non normalizzata perché ha energia infinita. Le radici della delta invece formano una base ortonormale:

$$x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta t) \sqrt{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \Pi_{\Delta t}(t - n\Delta t)$$

Energia²

$$E(x) = \int x^2(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n\Delta \tau) \Delta \tau$$

Prodotto scalare

$$\langle x, y \rangle = \int x(t) y^*(t) dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n\Delta \tau) y^*(n\Delta \tau) \Delta \tau$$

Tuttavia non conviene usare questa base perché non introduce alcuna semplificazione.

²Si assume un segnale $x(t)$ reale.

2.2 Base alternativa sinusoidale

2.2.1 Serie di Fourier

Un segnale è a **supporto finito** se non è nullo solo nell'intervallo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.³ La base canonica per questa classe di segnali è l'insieme dei campioni ristretto al supporto:

$$x(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

Esiste un'altra base ortonormale completa per tutti i segnali complessi ad energia finita e supporto finito, che è un insieme infinito ma, a differenza della base canonica, numerabile:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x(t), w_n(t) \rangle e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

dove gli elementi della base $w_n(t)$ (infiniti e numerabili) sono:

$$w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

e i coefficienti c_n (complessi, infiniti e numerabili) sono:

$$c_n = \langle x(t), w_n(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\theta) e^{-j\frac{2\pi}{T}n\theta} d\theta$$

Siccome la base è completa vale l'uguaglianza di Parseval:

$$E(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\langle x(t), w_n(t) \rangle|^2$$

Il segnale $x(t)$ è in corrispondenza biunivoca con una sequenza infinita di coefficienti, e si può vedere come un vettore a infinite dimensioni:

$$x(t) \Leftrightarrow (c_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$$

La base ortonormale introdotta precedentemente è la normalizzazione della seguente base ortogonale:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n w'_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x(t), w'_n(t) \rangle e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$$

dove gli elementi della base $w'_n(t)$ sono:

$$w'_n(t) = \sqrt{T} w_n(t) = e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

e i coefficienti μ_n sono:

$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{T}} c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\theta) e^{-j\frac{2\pi}{T}n\theta} d\theta$$

Usando questa base l'energia vale:

$$E(x) = T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\mu_n|^2$$

³Si assume che il supporto sia simmetrico rispetto all'origine.

2.2.2 Trasformata di Fourier

Segnali a supporto T infinito si approssimano con la trasformata di Fourier:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

- $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta$
- $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$

Dimostrazione⁴ Partendo dalla base ortogonale per supporti finiti:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\theta) e^{-j2\pi \frac{n}{T}\theta} d\theta \right] e^{j2\pi \frac{n}{T}t} =$$

facendo tendere a infinito l'ampiezza del supporto T e considerando che la variabile discreta T diventa la variabile continua f (sequenza di infinitesimi df):

$$= \begin{cases} \sum \rightarrow \int \\ \Delta f = \frac{1}{T} \rightarrow df \\ \frac{n}{T} \rightarrow f \end{cases} \Rightarrow x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[df \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta} d\theta \right] e^{j2\pi ft}$$

Condizione di esistenza⁵ Nel dominio delle funzioni, il segnale $x(t)$ deve essere modulo integrabile:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt \in \mathbb{R}$$

Alcune trasformate fondamentali

Delta di Dirac

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \Rightarrow \delta(t) = \mathcal{F}^{-1}\{1\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df$$

Dimostrazione

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f0} = 1$$

Funzione segno

$$\mathcal{F}\{\text{sgnt}\} = \frac{1}{j\pi f}$$

⁴Per semplicità non si considerano alcune condizioni al contorno.

⁵Non si considera l'estensione del dominio delle funzioni al dominio delle distribuzioni.

Dimostrazione

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\text{sgnt}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgnt} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgnt} [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgnt} \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sgnt} \sin(2\pi ft) dt = -2j \int_0^{+\infty} \sin(2\pi ft) dt = \\ &= \frac{j}{\pi f} [\cos(2\pi ft)]_0^{+\infty} = \lim_{a \rightarrow +\infty} ja \frac{\cos(2\pi fa)}{\pi fa} - \frac{j}{\pi f} = -\frac{j}{\pi f} = \frac{1}{j\pi f}\end{aligned}$$

Funzione gradino

$$U(f) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

Capitolo 3

Proprietà trasformata

3.1 Convoluzione

L'operatore **prodotto di convoluzione** è definito in questo modo:

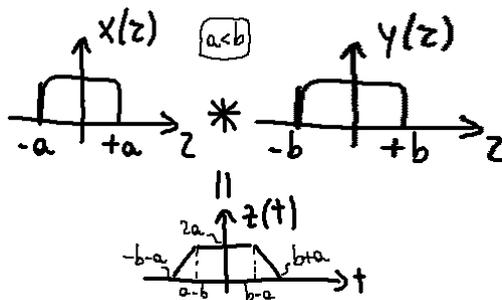
$$z(t) = x(t) * y(t) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

La convoluzione tra due segnali $x(t)$, a supporto finito $[-a, +a]$ e $y(t)$, a supporto finito $[-b, +b]$:

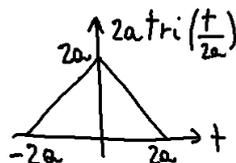
- ha un supporto di ampiezza pari alla somma delle ampiezze: $[-(b+a), +(b+a)]$;
- riduce le discontinuità, e in particolare è di classe C^{n+1} se le due funzioni sono di classe C^n .

3.1.1 Convoluzione di porte

La convoluzione $z(t)$ tra la porta $x(\tau) = \Pi_{2a}(\tau)$ e la porta $y(\tau) = \Pi_{2b}(\tau)$ ha supporto $2(b+a)$ ed è una funzione continua (classe C^0):

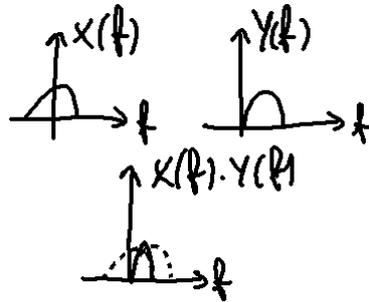


Se $a = b$ la convoluzione $z(t)$ è la funzione $2a \operatorname{tri}\left(\frac{t}{2a}\right)$:



Effettuando infinite convoluzioni si ottiene una gaussiana.

Al contrario, nel dominio delle frequenze il supporto è ristretto all'intervallo di frequenze in cui entrambe le trasformate $X(f)$ e $Y(f)$ non sono nulle:



3.1.2 Proprietà

Commutativa

$$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$$

Associativa

$$x(t) * [y(t) * w(t)] = [x(t) * y(t)] * w(t)$$

Distributiva

$$x(t) * [y(t) + w(t)] = x(t) * y(t) + x(t) * w(t)$$

3.2 Proprietà della delta di Dirac

3.2.1 Campionamento

La moltiplicazione di una funzione $x(t)$ per una funzione delta $\delta(t - \tau)$, traslata di τ , restituisce il campione di $x(t)$ in $t = \tau$:

$$x(t) \delta(t - \tau) = x(\tau) \delta(t - \tau)$$

e pertanto si può introdurre una semplificazione sostituendo $x(t)$ una qualsiasi funzione $y(t)$ che assuma lo stesso valore in $t = \tau$, in particolare la funzione costante $y(t) = x(\tau)$.

3.2.2 Traslazione

La convoluzione di una funzione $x(t)$ con una funzione delta $\delta(t - \tau)$, traslata di τ , restituisce il segnale traslato:

$$x(t) * \delta(t - \tau) = x(t - \tau)$$

Dimostrazione

$$x(t) * \delta(t - \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t' - \tau) x(t - t') dt' = x(t - \tau)$$

3.3 Proprietà della trasformata di Fourier

3.3.1 Linearità

La trasformata di Fourier e la sua inversa sono **operatori lineari**:¹

$$\mathcal{F}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1\mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{F}\{x_2(t)\}$$

3.3.2 Anticipo o ritardo

La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ **ritardato** o **anticipato** di una fase θ vale:

$$\mathcal{F}\{x(t - \theta)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} e^{-j2\pi\theta f}$$

Corrisponde graficamente a una rotazione della fase ($\arg X(f) - 2\pi\theta f$), mentre il modulo $|X(f)|$ non varia.

3.3.3 Modulazione e traslazione

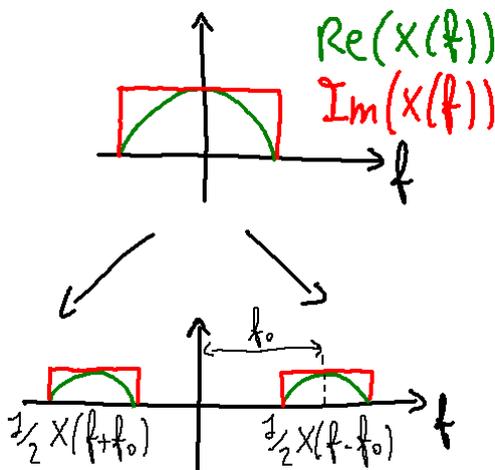
La **modulazione** del segnale $x(t)$, di una frequenza f_0 , corrisponde alla **traslazione** della sua trasformata di Fourier:

$$\mathcal{F}\{x(t) e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$$

e si ottiene dalla composizione di due trasformate del segnale una simmetrica all'altra rispetto all'asse verticale:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \sin(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2j} [X(f - f_0) - X(f + f_0)]$$



3.3.4 Scalamento

Lo **scalamento** corrisponde a una dilatazione o un restringimento sull'asse dei tempi, e a rispettivamente un restringimento o una dilatazione sull'asse delle frequenze:

$$\mathcal{F}\{x(Kt)\} = \frac{1}{|K|} X\left(\frac{f}{K}\right)$$

¹Questa proprietà discende direttamente dalla linearità dell'operatore integrale.

3.3.5 Relazioni di parità

Se il segnale $x(t)$ è reale, allora la sua trasformata di Fourier $X(f)$ ha le seguenti relazioni di parità:

- la parte reale $\Re\{X(f)\}$ è pari:

$$\Re\{X(-f)\} = \Re\{X(f)\}$$

- la parte immaginaria $\Im\{X(f)\}$ è dispari:

$$\Im\{X(-f)\} = -\Im\{X(f)\}$$

- il modulo $|X(f)|$ è pari:

$$|X(f)|^2 = \Re^2\{X(f)\} + \Im^2\{X(f)\} = \text{pari} \times \text{pari} + \text{dispari} \times \text{dispari} = \text{pari}$$

- la fase $\arg X(f)$ è dispari:

$$\arg X(f) = \arctg \frac{\Im\{X(f)\}}{\Re\{X(f)\}} = \arctg(\text{dispari}) = \text{dispari}$$

Se il segnale $x(t)$ è reale vale inoltre la **simmetria hermitiana** (o simmetria coniugata):

$$X^*(-f) = X(f)$$

3.3.6 Convoluzione e prodotto

La trasformata di Fourier della convoluzione è pari al prodotto delle singole trasformate:

$$Z(f) = \mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f)Y(f)$$

3.3.7 Derivazione ed integrazione

Derivazione

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right\} = j2\pi f X(f)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^n}{\partial t^n}x(t)\right\} = (j2\pi f)^n X(f)$$

Integrazione

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(r) dr\right\} = \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

Dimostrazione L'integrale fino a t si può estendere fino a $+\infty$ cancellando la parte a destra di t con una funzione gradino:

$$\int_{-\infty}^t x(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-r)x(r) dt = u(t) * x(t)$$

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t x(r) dr\right\} = \mathcal{F}\{u(t) * x(t)\} = U(f)X(f) =$$

Ricordando la trasformata fondamentale² della funzione gradino $u(t)$:

$$U(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$$

si trova:

$$= \frac{1}{2}X(0)\delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$$

3.3.8 Dualità

$$\mathcal{F}\{X(t)\} = x(-f) \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{x(-f)\}$$

3.3.9 Altre proprietà

Uguaglianza di Parseval

$$E(x) = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$$

Invarianza prodotto scalare

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \langle X(f), Y(f) \rangle$$

Diseguaglianza di Schwarz

$$|\langle X(f), Y(f) \rangle| \leq \|X(f)\| \|Y(f)\|$$

3.3.10 Relazione tempo-frequenza

Secondo la proprietà dello scalamento espandere l'asse dei tempi corrisponde a comprimere l'asse delle frequenze.

Per valutare quantitativamente la compattezza non si può tuttavia usare il supporto, perché si dimostra che:³

- se la funzione $x(t)$ ha supporto finito, la sua trasformata $X(f)$ non ha supporto finito;
- se la funzione $X(f)$ ha supporto finito, la sua antitrasformata $x(t)$ non ha supporto finito.

Si definisce **estensione temporale** d :

$$d^2 = \int t^2 \frac{|x(t)|^2}{E(x)} dt$$

Si definisce **estensione di frequenza** D :

$$D^2 = 4\pi^2 \int f^2 \frac{|X(f)|^2}{E(x)} df$$

È possibile dimostrare che vale:

$$d \cdot D \geq \frac{1}{2}$$

L'estensione è il valore quadratico medio di una variabile casuale con distribuzione pari a:

²Si veda la sezione 2.2.2.

³Si noti che se la funzione o la sua trasformata hanno supporto infinito non si può dire niente sul supporto della corrispondente funzione.

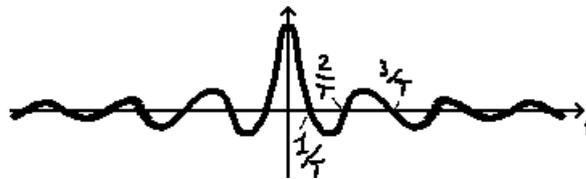
- tempo: $\frac{|x(t)|^2}{E(x)}$
- frequenza: $\frac{|X(f)|^2}{E(x)}$

Supponendo nullo il valor medio, il valore quadratico medio coincide con la varianza.

Linearità	$\mathcal{F}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1\mathcal{F}\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{F}\{x_2(t)\}$
Anticipo o ritardo	$\mathcal{F}\{x(t - \theta)\} = \mathcal{F}\{x(t)\} e^{-j2\pi\theta f}$
Modulazione e traslazione	$\mathcal{F}\{x(t) e^{j2\pi f_0 t}\} = X(f - f_0)$
Scalamento	$\mathcal{F}\{x(Kt)\} = \frac{1}{ K } X\left(\frac{f}{K}\right)$
Relazioni di parità	$x(t) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Re\{X(f)\} \text{ e } X(f) \text{ sono pari} \\ \Im\{X(f)\} \text{ e } \arg X(f) \text{ sono dispari} \end{cases}$
Convoluzione e prodotto	$\mathcal{F}\{x(t) * y(t)\} = X(f) Y(f)$
Dualità	$\mathcal{F}\{X(f)\} = x(-t) \Rightarrow \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{x(-t)\}$

3.4 Esempi di trasformate

3.4.1 Funzione porta



$$\mathcal{F}\{\Pi_T(t)\} = T \text{sinc}(fT)$$

3.4.2 Segnale numerico

Nel trasferimento in modulazione di un segnale digitale, il segnale sagomatore di riferimento viene moltiplicato in ampiezza per +1 o -1 (invertito) a seconda se il bit da trasferire è rispettivamente 1 o 0. Generalizzando da una base binaria a una base qualunque, il segnale sagomatore $r(t - iT)$ viene moltiplicato per una opportuna costante a_i , e il segnale digitale $x(t)$ sia ottenuto dalla seguente combinazione lineare:

$$x(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i r(t - iT) \cos(2\pi f_0 t)$$

Per la proprietà del ritardo:

$$\mathcal{F}\{r(t - iT)\} = R(f) e^{-j2\pi f iT}$$

Per la proprietà di linearità:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i r(t - iT)\right\} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i \mathcal{F}\{r(t - iT)\} = R(f) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a_i e^{-j2\pi f iT} = Z(f)$$

Siccome $R(f)$ è a coefficiente della sommatoria, un segnale numerico $z(t)$ non può avere un'occupazione spettrale maggiore di quella del segnale sagomatore $r(t) \Rightarrow$ l'ampiezza dello spettro $Z(f)$ del segnale è controllabile tramite un opportuno segnale sagomatore.

Infine per la proprietà di modulazione:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{1}{2}[Z(f - f_0) + Z(f + f_0)]$$

Capitolo 4

Sistemi lineari

Un **sistema** è un blocco che trasforma un segnale $x(t)$ in un altro segnale $y(t)$:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\}$$

È una relazione deterministica: a un certo segnale $x(t)$ corrisponde sempre il segnale $y(t)$.

4.1 Classificazione

4.1.1 Sistemi lineari

Un sistema è **lineare** se vale il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\mathcal{T}\{a_1x_1(t) + a_2x_2(t)\} = a_1\mathcal{T}\{x_1(t)\} + a_2\mathcal{T}\{x_2(t)\}$$

La trasformata di Fourier è un sistema lineare.

4.1.2 Sistemi tempo-invarianti

Un sistema è **tempo-invariante** se un ritardo sugli ingressi si traduce in un ritardo sulle uscite:

$$\mathcal{T}\{x(t - \theta)\} = y(t - \theta)$$

4.1.3 Sistemi causali

Un sistema è **causale** se l'uscita in un certo istante t_0 non dipende dagli ingressi negli istanti successivi, ma dipende solo dagli ingressi negli istanti precedenti e nell'istante corrente:

$$y(t_0) = \mathcal{T}\left\{x(t)\Big|_{-\infty}^{t_0}\right\} \quad \forall t_0$$

4.1.4 Sistemi senza memoria

Un sistema è **senza memoria** se l'uscita $y(t)$ dipende solo dal valore assunto dall'ingresso $x(t)$ nel dato istante di tempo t_0 :

$$y(t_0) = \mathcal{T}\{x(t_0)\} \quad \forall t_0$$

4.1.5 Sistemi reali

Un sistema è **reale** se a un ingresso reale corrisponde un'uscita reale.

Un sistema è **fisicamente realizzabile** se è causale e reale.

4.1.6 Sistemi stabili

Un sistema è **stabile** se a un ingresso limitato in ampiezza corrisponde un'uscita limitata in ampiezza, e per questo motivo viene detto Bounded Input Bounded Output (BIBO):

$$\forall x(t) : |x(t)| \in \mathbb{R}, \forall t \Rightarrow |y(t)| \in \mathbb{R}, \forall t$$

4.2 Sistemi lineari tempo-invarianti (LTI)

I **sistemi lineari tempo-invarianti** (LTI) possono essere descritti da un'unica funzione $h(t)$ che è la risposta all'impulso:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = x(t) * h(t)$$

dove:

$$h(t) \triangleq \mathcal{T}\{\delta(t)\}$$

Dimostrazione Ogni segnale è ottenibile come combinazione lineare dell'insieme di delta:

$$x(t) = \int x(u) \delta(t-u) du$$

Perciò:

$$y(t) = \mathcal{T}\{x(t)\} = \mathcal{T}\left\{\int x(u) \delta(t-u) du\right\} =$$

Poiché il sistema \mathcal{T} è lineare:

$$= \int x(u) \mathcal{L}\{\delta(t-u)\} du =$$

Poiché il sistema \mathcal{T} è tempo-invariante:

$$= \int x(u) h(t-u) du = x(t) * h(t)$$

La trasformata di Fourier dell'uscita di un sistema LTI vale:

$$Y(f) = \mathcal{F}\{\mathcal{T}\{x(t)\}\} = H(f) X(f)$$

dove $H(f)$ è detta **funzione di trasferimento**:

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)}$$

I sistemi LTI non alterano la frequenza di un segnale sinusoidale posto all'ingresso, ma solo la fase e l'ampiezza \Rightarrow le sinusoidi sono autofunzioni di un sistema LTI: l'uscita di una sinusoidale è la sinusoidale stessa moltiplicata per una costante (complessa \Rightarrow modulo e fase).

Dimostrazione Considerando la sinusoide complessa $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$:

$$Y(f) = X(f) H(f) = \delta(f - f_0) H(f) =$$

Per la proprietà della delta di Dirac:

$$= \delta(f - f_0) H(f_0)$$

Antitrasformando:

$$y(t) = H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} = x(t) H(f_0)$$

Se $h(t)$ è una funzione reale, vale la simmetria hermitiana:

$$H(-f) = H^*(-f)$$

Se $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) H(f) = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] H(f) = \\ &= \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) H(f_0) + \delta(f + f_0) H(-f_0)] \\ y(t) &= \frac{1}{2} [H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} + H(-f_0) e^{-j2\pi f_0 t}] = \end{aligned}$$

Se $h(t) \in \mathbb{R}$:

$$= \Re\{H(f_0) e^{j2\pi f_0 t}\} = |H(f_0)| \cos[2\pi f_0 t + \arg X(f_0)]$$

Se $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$:

$$\begin{aligned} Y(f) &= X(f) H(f) = \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)] H(f) = \\ &= \frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) H(f_0) - \delta(f + f_0) H(-f_0)] \\ y(t) &= \frac{1}{2j} [H(f_0) e^{j2\pi f_0 t} - H(-f_0) e^{-j2\pi f_0 t}] = \end{aligned}$$

Se $h(t) \in \mathbb{R}$:

$$= \Im\{H(f_0) e^{j2\pi f_0 t}\} = |H(f_0)| \sin[2\pi f_0 t + \arg X(f_0)]$$

4.2.1 Sistemi LTI causali

La risposta all'impulso $h(t)$ di un sistema LTI causale è nulla per $t < 0$:

$$h(t) = u(t) h(t)$$

Dimostrazione

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(\tau) h(t - \tau) d\tau =$$

Siccome il sistema è causale:

$$= \int_{-\infty}^t y(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) h(t - \tau) d\tau$$

4.2.2 Sistemi LTI reali

La risposta all'impulso $h(t)$ di un sistema LTI reale è reale, e la funzione di trasferimento $H(f)$ deve avere:

- parte reale pari;
- parte immaginaria dispari;
- modulo pari;
- fase dispari.

4.2.3 Sistemi LTI stabili

Un sistema LTI è stabile se e solo se la risposta all'impulso $h(t)$ è modulo integrabile:

$$\text{stabile} \Leftrightarrow \int |h(t)| dt \in \mathbb{R} \Rightarrow |H(f)| \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

Condizione sufficiente

$$\text{stabile} \Leftrightarrow \int |h(t)| dt \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} |y(t)| &= \left| \int x(t - \tau) h(\tau) d\tau \right| \leq \int |x(t - \tau)| |h(\tau)| d\tau \leq \int \max |x(t - \tau)| |h(\tau)| d\tau = \\ &= \max |x(t - \tau)| \int |h(\tau)| d\tau \\ &\int |h(\tau)| d\tau \in \mathbb{R} \Rightarrow |y(t)| \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Condizione necessaria

$$\text{stabile} \Rightarrow \int |h(t)| dt \in \mathbb{R}$$

Consideriamo una funzione $x(t)$:

$$x(t) = e^{-j \arg h(-t)}$$

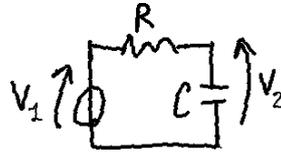
che è di ampiezza limitata:

$$|x(t)| = 1 \forall t$$

$$y(0) = \int x(t - \tau)|_{t=0} h(\tau) d\tau = \int e^{-j \arg h(\tau)} |h(\tau)| e^{j \arg h(\tau)} d\tau = \int |h(\tau)| d\tau$$

4.3 Esempi

4.3.1 Filtro RC con una porta di ingresso



$$v_2(t) = Ri(t) + v_1(t) = RC \frac{dv_1(t)}{dt} + v_1(t)$$

$$V_2(f) = (1 + j2\pi fRC) V_1(f) \Rightarrow H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi fRC}$$

4.3.2 Canale radio con eco

Un segnale radio quando viene trasmesso si propaga in tutte le direzioni, e viene riflesso dagli oggetti fisici dell'ambiente, detti scatterer. Gli echi arrivano perciò al ricevitore ognuno con un certo ritardo τ_i e una certa amplificazione/attenuazione α_i . Trasmettendo un impulso δ , viene ricevuto un segnale con eco $h(t)$:

$$h(t) = \sum_{i=1}^P \alpha_i \delta(t - \tau_i)$$

dove P è il numero di segnali eco che arrivano al ricevitore.

La sua trasformata $H(f)$ vale:

$$H(f) = \sum_{i=1}^P \alpha_i e^{-j2\pi f \tau_i}$$

Si dimostra che il suo modulo al quadrato vale:

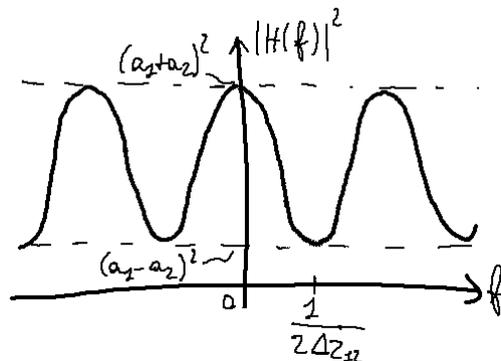
$$|H(f)|^2 = \sum_{i=1}^P |\alpha_i|^2 + \sum_{i=1}^P \sum_{\substack{k=1 \\ k > 1}}^P 2\alpha_i \alpha_k \cos(2\pi f \Delta \tau_{ik})$$

Se $P = 1$, il canale non è selettivo in frequenza, cioè tutte le sinusoidi vengono moltiplicate per la stessa ampiezza:

$$|H(f)| = |\alpha_1|$$

Se $P = 2$ si introduce la selettività in frequenza:

$$|H(f)|^2 = |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 \cos(2\pi f \Delta \tau_{12})$$



Capitolo 5

Diagrammi a blocchi

5.1 Diagrammi a blocchi

Un **diagramma a blocchi** è un sistema LTI costituito da un insieme di sistemi LTI interconnessi tramite dei blocchi fondamentali.

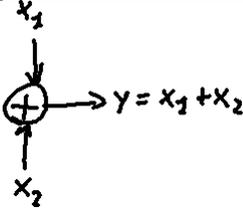
Sommatore		$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $Y(f) = X_1(f) + X_2(f)$	
Ritardatore	$x(t) \rightarrow \boxed{T} \rightarrow y(t) = x(t-T)$	$h(t) = \delta(t-T)$ $H(f) = e^{-j2\pi fT}$	$y(t) = x(t-T)$ $Y(f) = X(f) e^{-j2\pi fT}$
Amplificatore	$x(t) \rightarrow \otimes \rightarrow y(t) = A x(t)$ ↑ A	$h(t) = A\delta(t)$ $H(f) = A$	$y(t) = Ax(t)$ $Y(f) = AX(f)$

Tabella 5.1: Blocchi fondamentali.

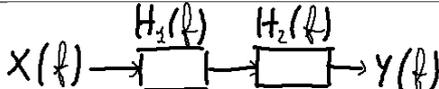
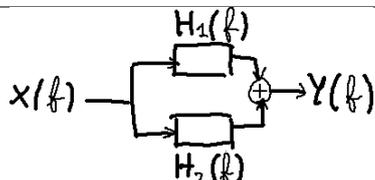
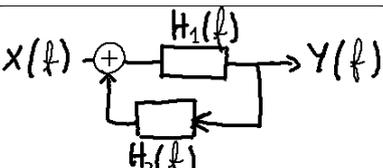
Serie		$y(t) = x(t) * h_1(t) * h_2(t)$ $Y(f) = X(f) H_1(f) H_2(f)$
Parallelo		$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$ $Y(f) = X(f) [H_1(f) + H_2(f)]$
Retroazione (o feedback)		$y(t) = [x(t) + y(t) * h_2(t)] * h_1(t)$ $Y(f) = X(f) \frac{H_1(f)}{1 - H_1(f) H_2(f)}$

Tabella 5.2: Tipi di interconnessione.

Dimostrazione retroazione

$$Y(f) = [X(f) + Y(f) H_2(f)] H_1(f)$$

$$Y(f) [1 - H_2(f) H_1(f)] = X(f) H_1(f)$$

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 - H_2(f) H_1(f)}$$

Con ritardatori e amplificatori opportunamente concatenati si possono ottenere sistemi LTI con funzioni di trasferimento desiderate nella forma:

- senza retroazione (Finite Impulse Response [FIR]):

$$H_{\text{FIR}}(f) = \sum_i \alpha_i e^{-j2\pi f \tau_i}$$

- con retroazione (Infinite Impulse Response [IIR]):

$$H_{\text{IIR}}(f) = \frac{\sum_i \alpha_i e^{-j2\pi f \tau_i}}{\sum_k \beta_k e^{-j2\pi f \tau_k}}$$

5.2 Definizioni di banda

La **banda** di un segnale o di un sistema¹ può essere definita in vari modi a seconda del contesto applicativo.

Siccome la trasformata di Fourier di un segnale o di un sistema reale è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, spesso si considera solo la parte positiva dell'asse delle frequenze misurando la **banda unilatera**, che equivale alla metà della **banda bilatera**.

5.2.1 Misura del supporto

La larghezza di banda è pari al supporto del segnale nel dominio della frequenza, cioè all'intervallo di frequenze in cui il segnale non è nullo.

Spesso la definizione di banda come misura del supporto della trasformata di Fourier è troppo restrittiva, perché molti segnali e sistemi hanno in realtà una trasformata di Fourier con supporto infinito. Molti sistemi tuttavia presentano un intervallo di frequenze dove la funzione di trasferimento è quasi nulla.

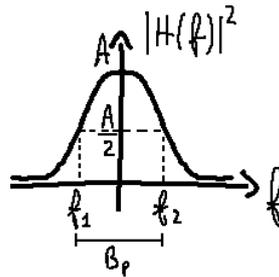
5.2.2 Banda a 3 dB

Questa definizione è usata in particolare quando si parla di filtri.

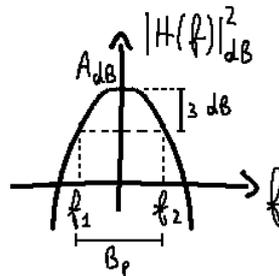
Su scala lineare ($|H(f)|^2$) La larghezza di banda B_p è pari all'intervallo di frequenze compreso tra la frequenza di taglio inferiore f_1 e la frequenza di taglio superiore f_2 :

- la frequenza di taglio inferiore f_1 corrisponde a un dimezzamento rispetto al valore massimo A ;
- la frequenza di taglio superiore f_2 corrisponde a un dimezzamento rispetto al valore massimo A .

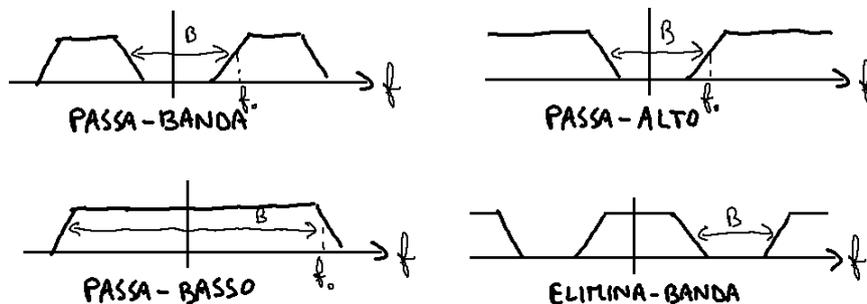
¹Per "banda di un sistema" s'intende la banda della sua funzione di trasferimento $H(f)$.



Su scala logaritmica ($|H(f)|_{dB}^2 = 20 \log_{10} |H(f)|$) La larghezza di banda B_p è pari all'intervallo di frequenze compreso tra la frequenza di taglio inferiore f_1 e la frequenza di taglio superiore f_2 :



- la frequenza di taglio inferiore f_1 corrisponde a un'attenuazione di 3 dB rispetto al valore massimo A_{dB} ;
- la frequenza di taglio superiore f_2 corrisponde a un'attenuazione di 3 dB rispetto al valore massimo A_{dB} .



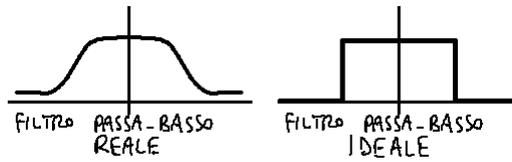
Classificazione dei filtri

- **filtro passa-basso** (detto banda base): il filtro ha banda finita centrata intorno all'origine (DC);
- **filtro passa-banda**: il filtro ha banda finita, che non include l'origine;
- **filtro passa-alto**: il filtro ha banda infinita, che non include l'origine;
- **filtro elimina-banda**: il filtro ha banda infinita, e non include un certo intervallo di frequenze.

Gli ultimi due tipi di filtri sono ideali perché non esistono filtri a banda infinita. Per **filtro ideale** si intende quello che presenta le migliori caratteristiche possibili:

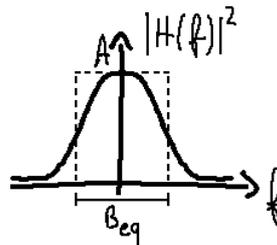
- guadagno unitario nella banda passante;

- guadagno nullo nella banda attenuata (o oscura).



I filtri ideali non sono realizzabili.

5.2.3 Banda equivalente di rumore

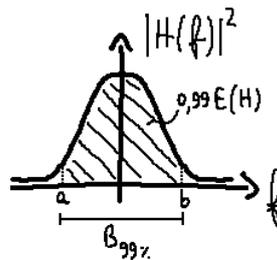


La larghezza di banda B_{eq} è pari alla larghezza del rettangolo:

- la cui altezza è pari al massimo A di $|H(f)|^2$;
- la cui area è uguale all'energia complessiva $E(H)$ della funzione di trasferimento, cioè all'area di $|H(f)|^2$ sull'intero asse delle frequenze:

$$B_{eq} = \frac{E(H(f))}{A}$$

5.2.4 Banda che contiene una data percentuale di energia



La larghezza di banda $B_{x\%}$ è pari al supporto della parte di grafico la cui energia corrisponde all' $x\%$ dell'energia complessiva $E(H)$ della funzione di trasferimento, ovvero dell'area di $|H(f)|^2$ sull'intero asse delle frequenze:

$$B_{x\%} = |a - b| : \int_a^b |H(f)|^2 df = \frac{x}{100} E(H)$$

5.2.5 Estensione di frequenza²

La banda è l'estensione di frequenza D :

$$D^2 = 4\pi^2 \int f^2 \frac{|X(f)|^2}{E(x)} df$$

²Per approfondire, si veda la sezione 3.3.10.

5.3 Distorsione lineare

La **distorsione lineare** è il fenomeno che modifica la forma del segnale di ingresso di un sistema LTI: le sinusoidi che passano per un sistema LTI non sono tutte moltiplicate per uno stesso valore costante. Un sistema LTI non presenta distorsione lineare se introduce solo un'amplificazione e/o un ritardo, senza modificare la forma:

$$y(t) = kx(t - t_D)$$

cioè la funzione di trasferimento $H(f)$ del sistema deve avere modulo costante e fase lineare:

$$H(f) = ke^{-j2\pi t_D f}$$

I blocchi fondamentali ideali, amplificatore e ritardatore, qualsiasi frequenza si consideri non introducono alcuna distorsione lineare. Nella realtà non è possibile realizzare un sistema non distorcente ideale, ma si possono realizzare dei sistemi che non introducono distorsione limitatamente a una certa banda.

Una distorsione lineare è eliminabile con un **equalizzatore** posto in serie. Ad esempio, se un segnale $x(t)$ viene distorto da un **canale**, cioè un sistema LTI la cui funzione di trasferimento $H_c(f)$ non è modificabile, è possibile porre in serie un equalizzatore che abbia una funzione di trasferimento $H_e(f)$ con a denominatore proprio $H_c(f)$ (che si semplifica nel prodotto delle funzioni di trasferimento nella serie):³

$$H_e(f) = \frac{ke^{-j2\pi t_D f}}{H_c(f)}$$

5.4 Modulazione e demodulazione

5.4.1 Modulazione

Si ricorda che la modulazione di un segnale $x(t)$, cioè la sua moltiplicazione con una cosinusoidale⁴, corrisponde nel dominio della frequenza a uno "sdoppiamento" dello spettro:

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

Grazie alla modulazione è possibile trasferire un segnale $x(t)$ in banda base attraverso un canale (ad esempio radio) avente una funzione di trasferimento $H_c(f)$ di tipo passa-banda.

Il segnale modulato $X'(f)$:

$$X'(f) = \frac{1}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

attraversa il canale e viene ricevuto amplificato (o attenuato) dal filtro passa-banda:

$$Y(f) = \frac{A}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

5.4.2 Demodulazione

Il segnale originario può essere ora ricostruito tramite la **demodulazione**:

1. il segnale ricevuto $Y(f)$ viene modulato di nuovo in base alla stessa frequenza f_0 di prima:

$$Y'(f) = \frac{A}{2} X(f) + \frac{A}{4} [X(f - 2f_0) + X(f + 2f_0)]$$

³Il canale non dev'essere nullo.

⁴Non si considera la componente immaginaria sinusoidale.

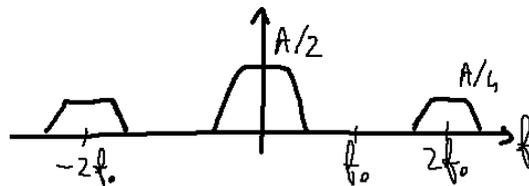
Dimostrazione Assumendo per semplicità che l'ampiezza del segnale $x(t)$ sia pari a 1, il segnale modulato vale:

$$\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Con un'ulteriore modulazione si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t)\} &= \\ &= \left\{ \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \right\} * \left\{ \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] \right\} = \\ &= \frac{1}{4} [\delta(f - f_0) * \delta(f - f_0) + 2\delta(f - f_0) * \delta(f + f_0) + \delta(f + f_0) * \delta(f + f_0)] = \\ &\bullet \delta(f - f_0) * \delta(f - f_0) = \delta(f - 2f_0) \\ &\bullet \delta(f - f_0) * \delta(f + f_0) = \delta(f) \\ &\bullet \delta(f + f_0) * \delta(f + f_0) = \delta(f + 2f_0) \\ &= \frac{1}{4} [\delta(f - 2f_0) + 2\delta(f) + \delta(f + 2f_0)] \end{aligned}$$

ottenendo nel dominio della frequenza tre repliche, di cui quella centrale è proprio il segnale originario solo amplificato (o attenuato):



- le componenti ad alta frequenza vengono eliminate tramite un opportuno filtro passa-basso, riottenendo così il segnale originario.

Perché il sistema funzioni devono essere rispettate le seguenti condizioni:

- la banda passante del canale deve essere più grande della banda del segnale da trasmettere;
- la banda del filtro in ricezione deve essere più grande della banda del segnale trasmesso;
- la frequenza centrale f_0 deve essere maggiore della banda unilatera del segnale da trasmettere.

Se la funzione di trasferimento del canale non è piatta, cioè è distorcente, nell'intervallo di frequenze del segnale trasmesso il filtro di ricezione può, oltre a fare da filtro passa-banda, anche compensare la distorsione e quindi servire da filtro di equalizzazione.

5.4.3 Multiplazione in frequenza

Più segnali con occupazione di banda sovrapposta possono essere multiplati, cioè trasmessi in contemporanea, su un singolo canale modulandoli in base a frequenze f_i diverse, in modo che gli spettri non si sovrappongano l'un l'altro.

Capitolo 6

Segnali periodici

I segnali periodici:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t - nT) = x(t + T)$$

sono un caso particolare dei **segnali ciclici**:

$$x_c(t) = \int_{n_1}^{n_2} x_T(t - nT) \neq x_c(t + T)$$

6.1 Trasformata di Fourier di un segnale periodico

La serie di Fourier derivata per il segnale a supporto finito:

$$x_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \quad \mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt$$

quando interpretata su tutto l'asse dei tempi è anche la serie di Fourier del segnale periodico $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}, \quad \forall t$$

da cui si può ottenere la trasformata di Fourier del segnale periodico:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mu_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

dove:

$$\mu_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt =$$

e poiché $x_T(t)$ è il segnale $x(t)$ troncato in $[0, T]$:

$$= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt} dt = \frac{1}{T} X_T\left(\frac{n}{T}\right)$$

La trasformata di Fourier del segnale $x(t)$ è quindi una sommatoria dei campioni, presi a multipli di $\frac{1}{T}$, della trasformata di Fourier del segnale troncato $x_T(t)$:

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

6.2 Treno di impulsi

Considerando come segnale periodico il **segnale campionatore**, o **treno di impulsi**:

$$c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

secondo la formula appena ricavata la sua trasformata, poiché $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$, è ancora un treno di impulsi:

$$C_T(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Siccome per definizione di trasformata di Fourier vale anche:

$$C_T(f) = \mathcal{F}\{c_T(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT}$$

vale anche la seguente uguaglianza:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fnT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{n}{T}\right)$$

Aumentare il periodo del treno di impulsi nel periodo del tempo corrisponde a diminuire il suo periodo nel dominio della frequenza.

6.2.1 Campionamento nel tempo e periodicizzazione in frequenza

Moltiplicando un segnale $x(t)$ per un treno di impulsi si ottiene:

- nel dominio del tempo una sequenza equispaziata di suoi campioni:

$$x(t) \cdot c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$

- nel dominio della frequenza una trasformata periodica di periodo $\frac{1}{T}$:

$$X(f) * C_T(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Quindi si ottiene la seguente relazione:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - nT)\right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

6.2.2 Periodicizzazione nel tempo e campionamento in frequenza

Facendo il prodotto di convoluzione di un segnale $x(t)$ per un treno di impulsi si ottiene:

- nel dominio del tempo un segnale periodico di periodo pari alla spaziatura degli impulsi:

$$x(t) * c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t - nT)$$

- nel dominio della frequenza una trasformata campionata con spaziatura $\frac{1}{T}$:

$$X(f) \cdot C_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

Quindi si ottiene una relazione parallela alla precedente:

$$\mathcal{F} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t) * \delta(t - nT) \right\} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

6.3 Rappresentazioni di un segnale periodico

Il segnale $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT) = x(t + T)$$

è periodico di periodo T anche quando il segnale $z(t)$ non è a supporto limitato in $[0, T]$, e quindi nella periodizzazione di $z(t)$ alcune parti si vanno a sovrapporre. La sua trasformata di Fourier vale ancora:

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT) = z(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \\ X(f) &= Z(f) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

La seguente rappresentazione di un segnale periodico $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT) = x(t + T)$$

non è univoca, ma possono essere utilizzati tutti i segnali $z(t)$ che:

- nel dominio del tempo: coincidono con il segnale troncato $x_T(t)$ all'interno del periodo T :

$$z(t) : \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z(t - nT) = x_T(t) \quad \forall t \in [0, T]$$

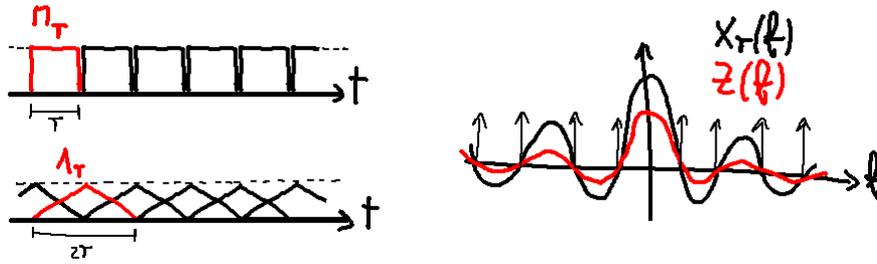
- nel dominio della frequenza: assumono gli stessi valori della trasformata di Fourier nelle frequenze $\frac{n}{T}$, le uniche che contano nel segnale periodico:

$$X(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Z\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

6.3.1 Esempio: segnale periodico costante

Il segnale periodico costante $x(t) = 1$ si può rappresentare come sommatoria di due diverse funzioni periodiche:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Pi_T(t - nT) \\ z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Lambda_T(t - nT) = x(t) \end{cases}$$

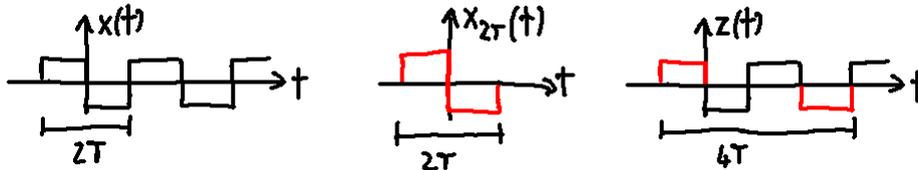


che hanno due differenti supporti (rispettivamente T e $2T$), ma che nella periodizzazione (di egual periodo T) vengono a coincidere.

Nel dominio della frequenza i campioni di $X_T(f)$ e $Z(f)$ coincidono:

$$\begin{cases} X(f) = \mathcal{F}\{\Lambda_T(t)\} = T \operatorname{sinc}(fT) \\ Z(f) = \mathcal{F}\{\Pi_T(t)\} = T \operatorname{sinc}^2(fT) \end{cases}$$

6.3.2 Esempio



Considerando i segnali $x_{2T}(t)$, di supporto $2T$, e $z(t)$, di supporto $4T$:

$$\begin{cases} x_{2T}(t) = \Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right) - \Pi_T\left(t - \frac{T}{2}\right) \\ z(t) = \Pi_T\left(t + \frac{T}{2}\right) - \Pi_T\left(t - \frac{5T}{2}\right) \end{cases}$$

e campionando le loro trasformate di Fourier:

$$\begin{cases} X_{2T}(f) = T \operatorname{sinc}(fT) (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) \\ Z(f) = T \operatorname{sinc}(fT) (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi f5T}) \end{cases}$$

nelle frequenze $\frac{n}{2T}$, i campioni coincidono:

$$\begin{cases} X_{2T}\left(\frac{n}{2T}\right) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) (e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-jn\frac{\pi}{2}}) = jT \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \sin\frac{\pi n}{2} \\ Z\left(\frac{n}{2T}\right) = T \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) (e^{jn\frac{\pi}{2}} - e^{-j\pi n\frac{5}{2}}) = jT \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \sin\frac{\pi n}{2} = X_{2T}\left(\frac{n}{2T}\right) \end{cases}$$

Capitolo 7

Campionamento

Un segnale analogico è più facile da elaborare se viene campionato in un segnale numerico, cioè tempo discreto e discreto in ampiezza. Come campionare un segnale tempo-continuo senza perdere informazione?

Teorema del campionamento (o di Nyquist-Shannon) Un segnale tempo-continuo può essere campionato e perfettamente ricostruito a partire dai suoi campioni se la frequenza di campionamento f_c è maggiore del doppio della banda¹ B del segnale:

$$f_c \triangleq \frac{1}{T_c} > 2B$$

con la condizione che la banda B sia limitata.

Il teorema del campionamento garantisce che il segnale campionato può essere ricostruito perfettamente tramite un **filtro interpolatore** (ricostruttore), e che il segnale ricostruito coinciderà con il segnale tempo-continuo di partenza.

7.1 Filtro anti-aliasing

La maggioranza dei segnali utilizzati nella realtà ha banda illimitata: esiste un intervallo al di fuori del quale il segnale è significativamente vicino a zero, ma non è mai identicamente nullo. Il segnale campionato quindi presenterà nel dominio della frequenza delle sovrapposizioni degli spettri che alla fine non possono essere ricostruite dal filtro interpolatore. Il **filtro anti-aliasing** serve per eliminare le parti ad alta frequenza prima del campionamento:

$$\text{AA}(f) \begin{cases} = 0 & |f| > B_{\text{AA}} \\ \neq 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

con $B_x < B_{\text{AA}} < \frac{f_c}{2}$. La distorsione del filtro anti-aliasing non è ugualmente rimediabile, ma è comunque preferibile rispetto all'effetto di aliasing (o sovrapposizione).

7.2 Campionatori reali

Il campionatore ideale (treno di delta):

$$x'(t) = x(t) * \delta(-t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_c) x(t)$$

¹Per banda si intende qui la lunghezza del supporto in frequenza.



è impossibile da realizzare nella realtà, perché la delta $\delta(t)$ è un impulso con ampiezza illimitata e supporto infinitesimo \Rightarrow si utilizza un impulso $h(t)$ il più possibile simile alla delta, cioè con ampiezza molto grande e supporto molto piccolo:

$$x'(t) = x(t) * h(-t) \Rightarrow x'(nT_c) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau - nT_c) x(\tau) d\tau$$

7.3 Interpolatori

7.3.1 Condizioni ideali

Un segnale campionato²:

$$\begin{cases} x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c) \\ X_c(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T_c}\right) \end{cases}$$

può essere ricostruito tramite un filtro passa-basso ideale, detto **filtro ricostruttore ottimo** $K(f)$:

$$x(t) = x_c(t) * K(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \delta(t - nT_c) \right] * K(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) K(t - nT_c),$$

$$K(f) = \begin{cases} T_c & |f| < B \\ \text{qualsiasi valore} & B < |f| < f_c - B \\ 0 & |f| > f_c - B \end{cases}$$

Il filtro ricostruttore ottimo $K(f)$ deve essere:

- non distorcente nella banda del segnale (piatto);
- nullo al di fuori della banda del segnale per eliminare le componenti ad alta frequenza.

Esempi di interpolatori distorcenti

Costante a tratti Il segnale viene approssimato a una serie di rettangoli:

$$\begin{cases} K(t) = \Pi_{T_c}(t) \\ K(f) = T_c \text{sinc}(fT_c) \end{cases}$$

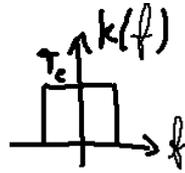
Lineare Il segnale viene approssimato a una serie di trapezi:

$$\begin{cases} K(t) = \Lambda_{T_c}(t) \\ K(f) = T_c \text{sinc}^2(ft_c) \end{cases}$$

²Si veda la sezione 6.2.1.

Esempi di interpolatori non distortenti

Funzione sinc Il filtro interpolatore ideale è il seguente:

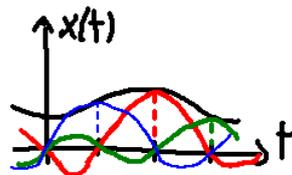


$$\begin{cases} K(t) = BT_c \text{sinc}(tB) \\ K(f) = T_c \Pi_B(f) \end{cases}$$

perché il segnale viene ricostruito da una sommatoria di infinite funzioni sinc, dove per ogni n esiste una sinc che assume esattamente il valore del campione n -esimo all'istante nT_c e un valore nullo in tutti gli altri istanti di campionamento:

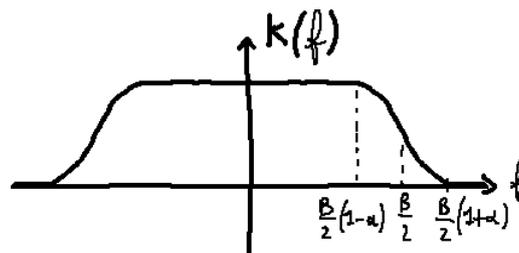
$$x(t) = BT_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_c) \text{sinc}(B(t - nT_c))$$

Tuttavia nei punti intermedi agli istanti di campionamento il segnale $x(t)$ è dato dalla somma dei contributi di infinite funzioni sinc:



Coseno rialzato

$$K(t) = NT_c \text{sinc}(Bt) \cdot \frac{\cos \alpha B\pi t}{1 - \alpha Bt^2}$$



Condizioni:

- roll-off α : $0 < \alpha < 1$ (se $\alpha = 0$ diventa la funzione sinc)
- $\frac{B}{2}(1 - \alpha) > B_x$
- $\frac{B}{2}(1 + \alpha) < f_c - B_x$

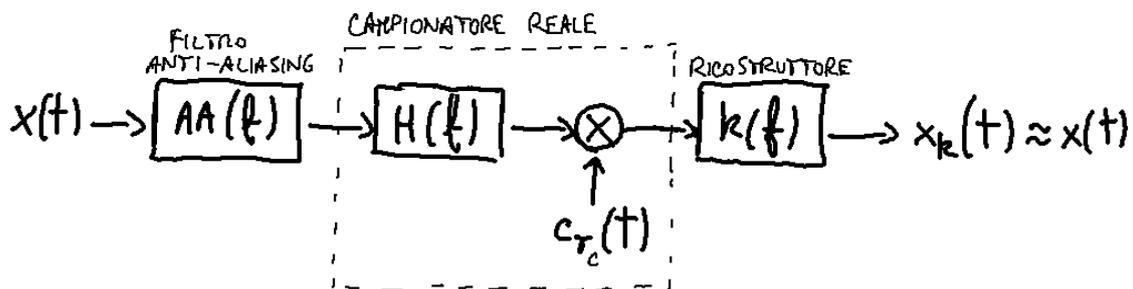
7.3.2 Condizioni reali

Il filtro ricostruttore può integrare anche un filtro equalizzatore che rimedi agli effetti del filtro anti-aliasing e alle distorsioni provocate da un campionatore reale:

$$K(f) = \begin{cases} \frac{T_c}{AA(f)H(f)} & |f| < B_{AA} \\ 0 & |f| > f_c - B_{AA} \end{cases}$$

a patto che $H(f)$, cioè la trasformata di Fourier dell'impulso campionatore $h(t)$, non cancelli definitivamente qualche frequenza compresa nella banda B_{AA} del filtro anti-aliasing:

$$H(f) \neq 0 \quad \forall |f| < B_{AA}$$



Capitolo 8

Spettro di energia e segnali troncati

8.1 Segnali troncati

A volte non si conosce il segnale su tutto il supporto ma solo su un certo intervallo T :¹

$$\begin{cases} x_T(t) = x(t) \cdot \Pi_T(t) \\ X_T(f) = X(f) * \mathcal{F}\{\Pi_T(t)\} = X(f) * T \operatorname{sinc}(fT) \end{cases}$$

Se il segnale $x(t)$ ha una banda limitata in frequenza:

$$X(f) = 0 \quad |f| > \frac{B}{2}$$

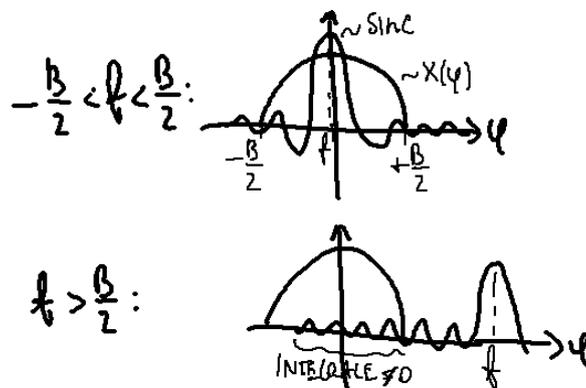
si può scrivere:

$$X_T(f) = T \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(\varphi) \operatorname{sinc}((f - \varphi)T) d\varphi$$

Siccome un segnale a supporto limitato nel tempo non può avere una banda limitata in frequenza e viceversa, il segnale $x(t)$ è a banda limitata e al contrario il segnale troncato ha una banda illimitata:

$$X_T(f) \neq 0 \quad |f| > \frac{B}{2}$$

per effetto delle oscillazioni della funzione sinc:



¹Si sottintende che l'intervallo T è centrato rispetto all'origine.

8.1.1 Fenomeno di Gibbs

Benché facendo tendere la funzione sinc a una delta si eliminano le oscillazioni:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} [T \text{sinc}(fT)] = \delta(f)$$

la seguente relazione:

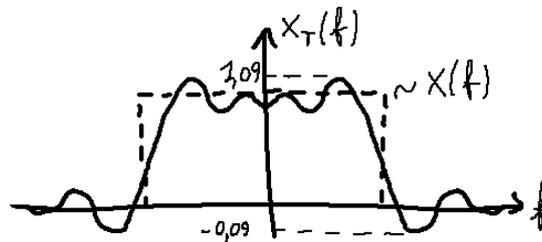
$$\lim_{T \rightarrow +\infty} X_T(f) = X(f)$$

continua a non valere se il segnale $x(t)$ presenta delle discontinuità nel dominio delle frequenze.

Esempio

$$\begin{cases} x(t) = B \text{sinc}(Bt) \\ X(f) = \Pi_B(f) \end{cases}$$

Facendo tendere T a infinito si possono restringere le oscillazioni secondarie fino a rette verticali, come nel segnale di partenza, ma i massimi e i minimi, rispettivamente $1,09$ e $-0,09$, non cambiano e rimangono diversi da quelli del segnale di partenza, rispettivamente 1 e 0 :



8.2 Spettri di energia e di potenza e funzione di autocorrelazione

8.2.1 Segnali a energia finita

Spettro di energia

Lo **spettro di energia** $S_x(f)$ di un segnale dà informazioni sul contenuto di energia alle singole frequenze:

$$S_x(f) \triangleq |X(f)|^2 = X(f) X^*(f) \Rightarrow E(x) = \int S_x(f) df$$

Per un segnale all'uscita di un sistema LTI:

$$Y(f) = H(f) X(f) \Rightarrow S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \Rightarrow E(y) = \int S_y(f) df$$

Funzione di autocorrelazione

La **funzione di autocorrelazione** $R_x(\tau)$ è definita:

$$R_x(\tau) \triangleq \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\} = x(\tau) * x^*(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau) x^*(t) dt = \langle x(t+\tau), x(t) \rangle$$

Nell'origine:

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x^*(t) dt = E(x) \in \mathbb{R}^+$$

Proprietà

- Per la funzione di autocorrelazione vale la simmetria hermitiana:

$$R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$$

Se il segnale $x(t)$ è reale, la funzione di autocorrelazione è pari:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau)$$

- Per la disuguaglianza di Schwarz, la funzione di autocorrelazione ha un massimo nell'origine:

$$|R_x(\tau)|^2 = \left| \int x(t+\tau) x^*(t) dt \right|^2 \leq E^2(x) = R_x^2(0)$$

Mutua correlazione

Considerando una coppia di segnali $x(t)$ e $y(t)$, si definiscono **funzione di mutua correlazione** $R_{xy}(\tau)$:

$$R_{xy}(\tau) \triangleq x(\tau) * y(-\tau) = \int x(t+\tau) y^*(t) dt = R_{yx}^*(\tau)$$

e **spettro di energia mutua** $S_{xy}(f)$:

$$S_{xy}(f) \triangleq \mathcal{F}(R_{xy}(\tau)) = X(f) Y^*(f) = S_{yx}^*(f)$$

Considerando la somma $z(t)$ di questi due segnali:

$$|Z(f)|^2 = |X(f)|^2 + |Y(f)|^2 + 2\Re\{X(f) Y^*(f)\} \Rightarrow \begin{cases} S_z(f) = S_x(f) + S_y(f) + 2\Re\{S_{xy}(f)\} \\ R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\Re\{R_{xy}(\tau)\} \end{cases}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} z(t+\tau) z^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t+\tau) + y(t+\tau)] [x^*(t) + y^*(t)] dt = \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau) + 2\Re\{R_{xy}(\tau)\} \end{aligned}$$

8.2.2 Segnali periodici

Ricordando le formule della potenza² e dell'energia³, la potenza media di un segnale periodico $x(t)$ è finita:

$$\begin{cases} P(x) = \frac{1}{T} E(x_T) \\ E(x_T) = T \sum_i |\mu_i|^2 \end{cases} \Rightarrow P(x) = \sum_i |\mu_i|^2 \in \mathbb{R}$$

²Si veda la sezione 1.1.2.

³Si veda la sezione 2.2.1.

Spettro di potenza

Lo spettro di potenza $G_x(f)$ di un segnale periodico $x(t)$ vale:

$$G_x(f) \triangleq \sum_i |\mu_i|^2 \delta\left(f - \frac{i}{T}\right)$$

La formula dello spettro di potenza $G_x(f)$ ricorda quella della trasformata di Fourier⁴ di $x(t)$:

$$X(f) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mu_i \delta\left(f - \frac{i}{T}\right)$$

Funzione di autocorrelazione

La funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ di un segnale periodico $x(t)$ vale:

$$R_x(\tau) \triangleq \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau) x^*(t) dt$$

Si noti che la formula della funzione di autocorrelazione per un segnale periodico è leggermente diversa da quella per i segnali non periodici definita sopra.

8.2.3 Segnali aperiodici a potenza finita

Tutti i segnali periodici hanno potenza finita, ma non tutti i segnali a potenza finita sono periodici.

Spettro di energia

Per segnali non periodici ma a potenza finita si definisce **periodogramma** lo spettro di energia del segnale troncato⁵ $x_T(t)$ (normalizzato):

$$S_T(f) \triangleq \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

dove T è un intervallo a piacere.

Spettro di potenza

Lo spettro di potenza $G_x(f)$ è definito:

$$G_x(f) \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} S_T(f) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

Anche in questo caso la formula dello spettro di potenza per segnali aperiodici è differente da quella per segnali periodici.

Per un segnale all'uscita di un sistema LTI, lo spettro di potenza è pari a:

$$G_y(f) = G_x(f) |H(f)|^2$$

Funzione di autocorrelazione

La funzione di autocorrelazione $\Phi_x(\tau)$ è definita:

$$\Phi_x(\tau) \triangleq \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau) x^*(t) dt$$

L'integrale $\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau) x^*(t) dt$ cresce linearmente con T , quindi questa crescita è compensata da $\frac{1}{T}$.

⁴Si veda la sezione 6.1.

⁵Si veda la sezione 8.1.

Capitolo 9

Processi casuali

Un **processo casuale** è un'espressione matematica che descrive una classe di segnali (voce, video, dati...), tramite una o più **variabili casuali** che corrispondono alle caratteristiche della classe di segnali. Nel caso dei segnali vocali, teoricamente si dovrebbe registrare un certo numero statistico di parlatori e cercare di capire quali caratteristiche (come la frequenza) sono proprie di un segnale vocale, associando a ciascuna caratteristica di ciascun parlatore una probabilità.

Un processo casuale $X(t)$ è **quasi determinato** se è esprimibile in funzione di un insieme numerabile di variabili casuali.

Il verificarsi dell'evento s_i produce la **realizzazione** $x(t; s_i)$; fissato un certo t_0 , si ottiene una serie di **campioni** $x(t_0, s_i)$.

- processi quasi determinati: segnale numerico, sinusoidale, segnale sample & hold
- processi non quasi determinati: rumore termico, segnale vocale, segnale audio

I segnali determinati sono dei casi degeneri dei processi casuali, perché un segnale determinato è la manifestazione di un'unica realizzazione avente probabilità 1 (non ci sono variabili casuali).

9.1 Descrizione probabilistica

9.1.1 Statistiche

Consideriamo un processo casuale $X(t; s)$ contenente la sola variabile casuale $s \Rightarrow$ a ogni valore s_j è associata una realizzazione $x(t; s_j)$ (con $j = 1, \dots, M$).

Statistica di ordine 1 Fissato un tempo t_1 , l'insieme dei campioni $x_1 = x(t_1, s_j)$ costituisce l'insieme dei valori per la variabile casuale $X_1 = x(t_1)$, per la quale è possibile definire la distribuzione cumulativa $F_{X_1}(x_1; t_1)$ e la densità di probabilità $f_{X_1}(x_1; t_1)$:

$$F_{X_1}(x_1; t_1) = P(X_1 < x_1)$$
$$f_{X_1}(x_1; t_1) = \frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1}(x_1; t_1)$$

Statistica di ordine n Considerando n istanti di tempo t_i , si introduce una probabilità congiunta tra le n variabili casuali X_i :

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = P(X_1 < x_1, \dots, X_n < x_n)$$
$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}; \mathbf{t})$$

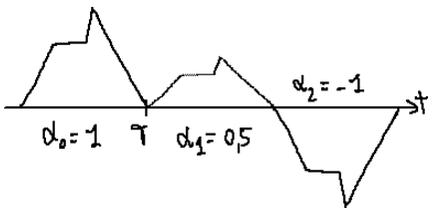
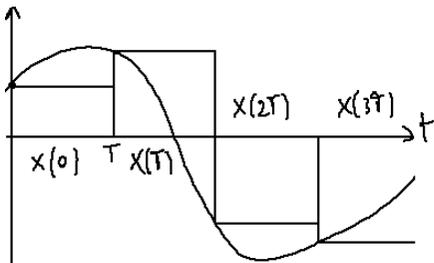
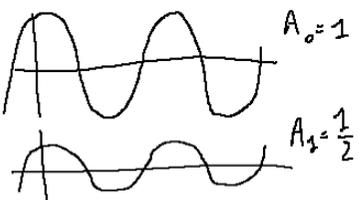
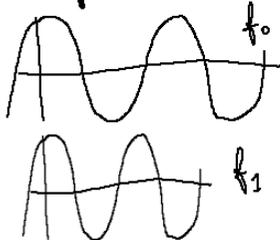
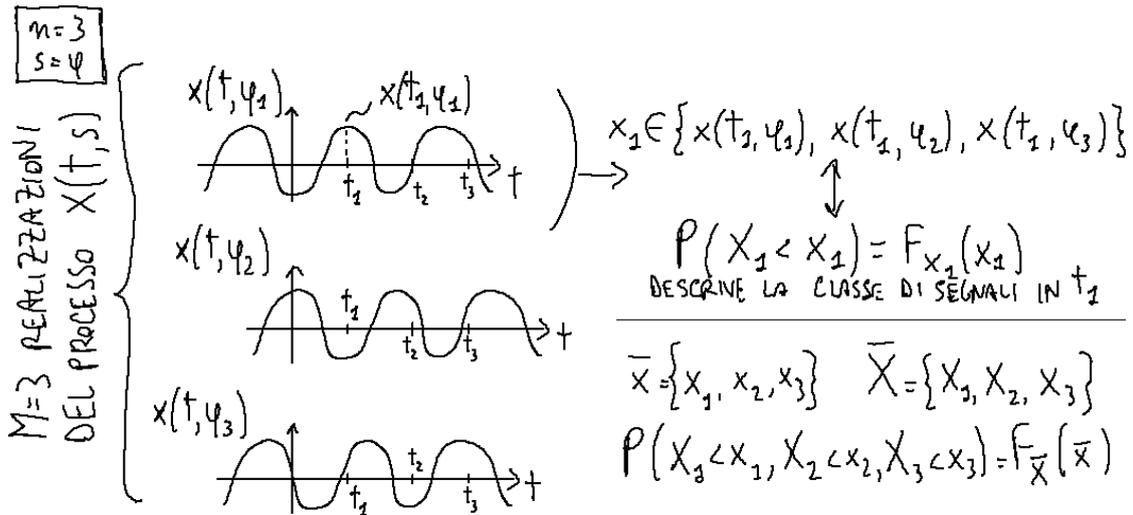
Segnale numerico	Segnale sample & hold	Sinusoide	
		<p data-bbox="1310 494 1355 550">A:</p> 	<p data-bbox="1736 494 1780 550">f:</p> 
$X(t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i r(t - iT)$	$X_S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(nT) h(t - nT)$	$X(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi)$	

Tabella 9.1: Esempi di segnali quasi determinati.



Un processo casuale è completamente caratterizzato/descritto se si conoscono le statistiche di qualsiasi ordine ($n \rightarrow \infty$).

9.1.2 Media e autocorrelazione

Media d'insieme

$$m_X(t) \triangleq E(X(t)) = \int x f_X(x; t) dx$$

Funzione di autocorrelazione

$$R_X(t_1, t_2) \triangleq E(X(t_1) X^*(t_2)) = \iint x_1 x_2^* f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Autocovarianza

$$K_X(t_1, t_2) \triangleq E\{[X(t_1) - m_X(t_1)][X(t_2) - m_X(t_2)]^*\} = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) m_X^*(t_2)$$

Coefficiente di correlazione

$$\rho_X(t_1, t_2) \triangleq \frac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{K_X(t_1, t_1) K_X(t_2, t_2)}}$$

Capitolo 10

Stazionarietà

10.1 Stazionarietà

Un processo è **stazionario** se la traslazione di una sua realizzazione, per un qualsiasi intervallo di tempo, produce un'altra sua possibile realizzazione, e se tutte queste realizzazioni hanno la stessa probabilità:

$$\text{se } x(t) \in \mathcal{P} \Rightarrow \begin{cases} x(t-t_0) \in \mathcal{P} \\ P(x(t)) = P(x(t-t_0)) \end{cases} \quad \forall t_0$$

Esempi

- processi stazionari: senoide con fase variabile casuale, rumore termico
- processi non stazionari: segnale numerico, segnale sample & hold, senoide con ampiezza variabile casuale, segnale determinato

10.1.1 Stazionarietà in senso stretto

Siccome per la densità di probabilità congiunta $f_{\mathbf{X}}$ vale:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n; t_1 + t_0, \dots, t_n + t_0) \quad \forall t_0$$

si può far coincidere il primo istante di tempo con l'origine ($t_0 = -t_1$) eliminando una variabile temporale \Rightarrow le statistiche di ordine n dipendono da $n-1$ variabili, che rappresentano la differenza di tempo rispetto al primo campione, che si può sempre assumere nell'origine. Ad esempio, per un processo **stazionario in senso stretto** di ordine n vale:

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1; t_1) &= f_{X_1}(x_1; t_1 - t_1) = f_{X_1}(x_1; 0) \\ f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; t_1, t_2) &= f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2; 0, \tau) \\ &\vdots \\ f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) &= f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n; \tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \end{aligned}$$

10.1.2 Stazionarietà in senso lato (Wide Sense Stationary [WSS])

- Se il processo è stazionario in senso stretto di ordine 1, la media $m_X(t)$ è una costante e non dipende dal tempo:

$$m_X(t) = m_X$$

Dimostrazione

$$m_X(t) = \int x f_X(x; t) dx = \int x f_X(x; 0) dx = m_X$$

- Se il processo è stazionario in senso stretto di ordine 2, la funzione di autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$ dipende solo dalla differenza $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) = E[X(t) X^*(t + \tau)]$$

Dimostrazione

$$R_X(t_1, t_2) = \int x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \int x_1 x_2^* f_X(x_1, x_2; 0, \tau) dx_1 dx_2 = R_X(\tau)$$

Un processo è **stazionario in senso lato** se la media $m_X(t)$ è una costante, e la funzione di autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$ dipende solo da τ :

$$\begin{cases} m_X(t) = m_X \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau) \end{cases}$$

La stazionarietà in senso lato non implica la stazionarietà in senso stretto.

10.2 Ciclostazionarietà

Un processo è **ciclostazionario** se la traslazione di una sua realizzazione, per multipli di una costante finita T detta **periodo di stazionarietà**, produce un'altra sua possibile realizzazione, e se tutte queste realizzazioni hanno la stessa probabilità:

$$\exists T : \text{se } x(t) \in \mathcal{P} \Rightarrow \begin{cases} x(t - iT) \in \mathcal{P} \\ P(x(t)) = P(x(t - iT)) \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Esempi

- processi ciclostazionari: segnale numerico, segnale sample & hold, sinusoidi con ampiezza variabile casuale, segnale determinato periodico, processi stazionari
- processi non ciclostazionari: segnale determinato non periodico

10.2.1 Ciclostazionarietà in senso stretto

Un processo è **ciclostazionario in senso stretto** se la densità di probabilità congiunta $f_{\mathbf{X}}$ è periodica di periodo T :

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n; t_1 - iT, \dots, t_n - iT) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

10.2.2 Ciclostazionarietà in senso lato

Un processo è **ciclostazionario in senso lato** se la media $m_X(t)$ è periodica, e la funzione di autocorrelazione $R_X(t_1, t_2)$ è periodica rispetto a t_1 e t_2 :

$$\begin{cases} m_X(t) = m_X(t - iT) \\ R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - T, t_2 - iT) \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

10.3 Stazionarizzazione

La stazionarietà implica la ciclostazionarietà, ma non viceversa \Rightarrow l'operazione di **stazionarizzazione** serve per trasformare un processo ciclostazionario in un processo stazionario: si aggiungono tutte le repliche mancanti all'interno del periodo di ciclostazionarietà T , tramite la nuova variabile casuale θ che corrisponde al ritardo casuale uniforme. Questa operazione modifica il processo stesso e può essere fatta solo se ha senso nel sistema considerato: tipicamente si può fare se il sistema che lo processa è stazionario (tempo invariante).

Capitolo 11

Trasformazioni e spettro di potenza

11.1 Trasformazioni lineari di processi casuali

Un sistema¹ deterministico che elabora un processo casuale $X(t)$ fornisce alla sua uscita un processo casuale $Y(t)$.

Se il sistema è lineare, la media:

$$m_Y(t) \triangleq E(Y(t))$$

e la funzione di autocorrelazione:

$$R_Y(t_1, t_2) \triangleq E(Y(t_1)Y^*(t_2))$$

dell'uscita sono esprimibili rispettivamente in funzione della media e dell'autocorrelazione dell'ingresso $X(t)$.²

11.1.1 Esempi

Integrale

$$Y(t) = \int_{T_1}^t X(\tau) d\tau \Rightarrow \begin{cases} m_Y(t) = \int_{T_1}^t m_X(a) da \\ R_Y(t_1, t_2) = \int_{T_1}^{t_1} \int_{T_1}^{t_2} R_X(a, b) dadb \end{cases}$$

Derivata

$$Y(t) = \frac{d}{dt} X(t) \Rightarrow \begin{cases} m_Y(t) = \frac{d}{dt} m_X(t) \\ R_Y(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} R_X(t_1, t_2) \end{cases}$$

È spesso molto difficile determinare la distribuzione di probabilità del processo in uscita. Se il processo $X(t)$ in ingresso è gaussiano, allora il processo $Y(t)$ in uscita da un qualsiasi sistema lineare è ancora gaussiano.

¹Si veda il capitolo 4.

²Sotto certe condizioni sul processo di ingresso e sulle sue statistiche del secondo ordine.

11.1.2 Trasformazioni lineari tempo-invarianti

Se il sistema è LTI³, di funzione di trasferimento $H(f)$, e il processo di ingresso $X(t)$ è stazionario in senso lato, valgono le seguenti espressioni:

- $m_Y = m_X H(0) = m_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$
- $R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau)$
- $R_{XY}(\tau) = R_X(\tau) * h(\tau)$

Si ricorda che la funzione di autocorrelazione⁴ R è definita diversamente per i segnali determinati:

$$R_h(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} h(t+\tau) h^*(t) dt$$

11.1.3 Trasformazioni lineari tempo-varianti

Modulazione di ampiezza

Il segnale analogico è rappresentato dal processo in ingresso $M(t)$ (messaggio). Nella **modulazione di ampiezza**, il messaggio modula l'ampiezza della sinusoide portante (segnale determinato):

$$Y(t) = [a_0 + a_1 M(t)] \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

Sotto le ipotesi:

- il processo $M(t)$ è stazionario in senso lato;
- il valor medio $E[M(t)]$ è nullo;

si ottiene:

$$\begin{cases} m_Y(t) = a_1 E[M(t)] \cos(2\pi f_0 t + \varphi) + a_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi) \\ R_Y(t_1, t_2) = [a_0^2 + a_1^2 R_M(t_1 - t_2)] \cos(2\pi f_0 t_1 + \varphi) \cos(2\pi f_0 t_2 + \varphi) \end{cases}$$

Per stazionarizzare il processo in uscita $Y(t)$, la fase φ diventa una variabile casuale uniforme in $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{cases} m_{Y'}(t) = 0 \\ R_{Y'}(t_1, t_2) = \frac{1}{2} [a_0^2 + a_1^2 R_M(\tau)] \cos(2\pi f_0 \tau) \end{cases}$$

Modulazione di fase

Nella **modulazione di fase**, il messaggio modula la fase della sinusoide portante:

$$Y(t) = a_0 e^{j[a_1 t + a_2 M(t) + \theta]} \Rightarrow \begin{cases} m_Y(t) = a_0 E[a_0 e^{j a_2 M(t)} e^{j(a_1 t + \theta)}] \\ R_Y(t_1, t_2) = a_0^2 e^{j a_1 (t_1 - t_2)} C_\xi(a_2), \quad \xi = M(t_1) - M(t_2) \end{cases}$$

dove $C_\xi(a)$ è la **funzione caratteristica**:

$$C_\xi(a) \triangleq E(e^{j a \xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j a x} f_\xi(x) dx$$

Nel caso di un processo gaussiano, stazionarizzando con θ variabile casuale uniforme in $[-\pi, \pi]$:

$$\begin{cases} m_{Y'}(t) = 0 \\ R_{Y'}(\tau) = a_0^2 e^{j a_1 \tau} e^{-a_2^2 [R_M(0) - R_M(\tau)]} \end{cases}$$

³Si veda la sezione 4.2.

⁴Si veda la sezione 8.2.2.

Dimostrazione La funzione caratteristica del processo gaussiano ξ vale:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f_\xi(t)\} &\triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{t-m_\xi}{\sigma_\xi}\right]^2}\right\} = \\ &= e^{-\frac{1}{2}(2\pi f\sigma_\xi)^2} e^{-j2\pi fm_\xi} \Rightarrow C_\xi(a_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ja_2x} f_\xi(x) dx = e^{-\frac{1}{2}(a_2\sigma_\xi)^2} e^{-ja_2m_\xi}\end{aligned}$$

Siccome ξ è stazionario in senso lato:

$$m_\xi = E(\xi) = 0$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi^2 &= E[\xi^2] = E[(M(t_1) - M(t_2))^2] = \\ &= E[(M(t_1))(M(t_1))] + E[(M(t_2))(M(t_2))] - E[M(t_1)M(t_2)] = \\ &= R_M(0) + R_M(0) - 2R_M(t_1 - t_2)\end{aligned}$$

$$\mathcal{F}\{f_\xi(t)\} = e^{-a_2^2[R_M(0) - R_M(\tau)]}$$

Se la sinusoide portante è reale:

$$Y(t) = a_0 \cos(a_1 t + a_2 M(t) + \theta)$$

la funzione di autocorrelazione (sempre nel caso gaussiano) vale:

$$R_{Y'}(\tau) = \frac{1}{2} a_0^2 \cos(a_1 \tau) e^{-a_2^2[R_M(0) - R_M(\tau)]}$$

11.2 Densità spettrale di potenza

La **densità spettrale di potenza**, o **spettro di potenza**, $S_X(f)$ di un processo $X(t)$ stazionario in senso lato è la trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$:

$$S_X(f) \triangleq \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = \int R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

11.2.1 Proprietà

- $S_X(f)$ è reale e pari;
- $S_X(f)$ è sempre positiva;
- lo spettro di potenza $S_Y(\tau)$ di un processo $Y(t)$ stazionario in senso lato in uscita da un sistema LTI è:

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * R_h(\tau) \Rightarrow S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

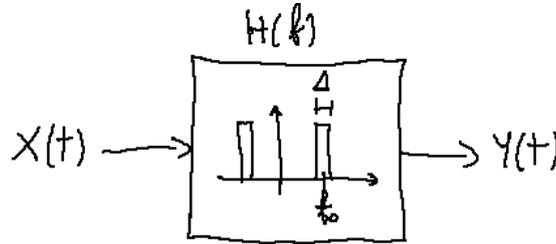
- l'integrale di $S_X(f)$ coincide con la potenza media $P[X(t)]$ del processo:

$$P[X(t)] = \int S_X(f) df = R_X(0) = E[X^2(t)]$$

dove $E[X^2(t)]$ è il valore quadratico medio del processo.

11.2.2 Interpretazione fisica

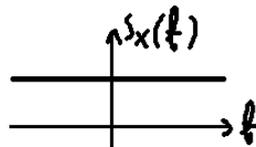
Se il sistema LTI è un filtro $H(f)$ passabanda centrato alla frequenza f_0 con banda infinitesimale Δ :



la densità spettrale $S_X(f_0)$, centrata in f_0 , del processo in ingresso $X(f)$ è proporzionale alla potenza media del processo in uscita $Y(f)$:

$$E[Y^2(t)] = \int S_Y(f) df \approx 2\Delta S_X(f_0)$$

11.2.3 Rumore gaussiano bianco



Il **rumore gaussiano bianco** (White Gaussian Noise [WGN]) è un modello teorico per il processo termico generato ai capi di una resistenza a temperatura T :

- il processo $X(t)$ è stazionario e gaussiano;
- il valor medio è nullo;
- la densità spettrale di potenza è costante con la frequenza:

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}, \quad N_0 = k_B T$$

- la funzione di autocorrelazione $R_X(\tau)$:

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_X(f)\} = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- è nulla per $\tau = t_2 - t_1 \neq 0 \Rightarrow$ qualsiasi coppia di campioni non prelevati allo stesso istante è scorrelata, e quindi statisticamente indipendente;
- diverge se la coppia di campioni è prelevata nello stesso istante di tempo ($\tau = t_2 - t_1 = 0$) \Rightarrow il processo ha potenza media infinita.

Quando un rumore gaussiano bianco $X(t)$ entra in un sistema LTI $H(f)$, il processo di uscita $Y(t)$ è gaussiano colorato (CGN) con spettro di potenza non più costante:

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

Capitolo 12

Medie temporali ed ergodicità

Se il processo è **ergodico**, è sufficiente una sua qualunque realizzazione per estrarne le statistiche. Il sistema che genera il processo può evolvere attraverso tutti i suoi possibili stati partendo da una qualsiasi condizione iniziale.

12.1 Media

12.1.1 Media d'insieme di un processo casuale

Dato un processo casuale $X(t)$ ed una qualsiasi funzione g , la media d'insieme¹:

$$E[g(X(t))] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x(t)) f_X(x(t)) dx$$

su un insieme “discreto” di realizzazioni si può interpretare come la media pesata delle realizzazioni del processo $X(t)$, e a differenza della media temporale restituisce un valore dipendente dal tempo:

$$E[g(X(t))] = \sum_i g[x(t; s_i)] P[x(t; s_i)]$$

12.1.2 Media temporale

Media temporale di un segnale determinato

Dato un segnale determinato $x(t)$ ed una qualsiasi funzione g , l'operatore di **media temporale** è definito:²

$$\langle g[x(t)] \rangle \triangleq \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g[x(t)] dt$$

Valor medio

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) dt = \langle x(t) \rangle$$

Potenza media

$$P(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt = \langle |x(t)|^2 \rangle$$

¹Si veda il capitolo 9.

²Da non confondere con l'operatore di prodotto scalare.

Media temporale di più segnali determinati

La media temporale di una funzione g di n segnali x_1, x_2, \dots, x_n , valutati a istanti di tempo anche differenti, è una funzione di $n - 1$ variabili $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ (la variabile t viene integrata):

$$\langle g[x_1(t), x_2(t + \tau_1), \dots, x_n(t + \tau_{n-1})] \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g[x_1(t), x_2(t + \tau_1), \dots, x_n(t + \tau_{n-1})] dt$$

Media temporale di una realizzazione

Siccome una specifica realizzazione $g[x(t; s_0)]$ di un processo casuale $X(t)$ è un segnale determinato, anche ad esso è possibile applicare l'operatore di media temporale:

$$\langle g[x(t; s_0)] \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} g[x(t; s_0)] dt$$

Il processo è **stazionario per la sua media temporale** se questa non dipende dalla realizzazione.

Esempio: Potenza La media temporale è la potenza istantanea di una certa realizzazione:

$$\langle g[x(t)] \rangle = \langle |x(t; s_0)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t; s_0)|^2 dt$$

La media d'insieme è legata alla potenza media del processo:

non chiaro

$$E[g(X(t))]|_{t=t_i} = E(|X(t_i)|^2)$$

12.1.3 Ergodicità per la media

Un processo $X(t)$ è **ergodico per la media** se la sua media d'insieme coincide con la media temporale di una sua qualsiasi realizzazione:

$$E[g(X(t))] = \langle g[x(t; s_i)] \rangle \quad \forall i$$

Nel caso di g funzione identità, se l'autocovarianza $K_X(\tau)$ è modulo integrabile il processo $X(t)$ è ergodico per la media.

Ergodicità per la media e stazionarietà

- Il processo è stazionario per la sua media temporale se questa non dipende dalla realizzazione.
- Il processo è stazionario in senso stretto di ordine 1³ se la sua media d'insieme è costante nel tempo.

L'ergodicità per la media implica la stazionarietà per la media, ma la stazionarietà per la media non implica l'ergodicità per la media.

³Si veda la sezione 10.1.2.

Esempi

- se il processo \mathcal{P} contiene tutte le traslazioni di un segnale $x(t)$, e tutte le traslazioni hanno la stessa probabilità, allora il processo è ergodico:

$$\mathcal{P} = \{x(t+t_1) \quad \forall t_1\}$$

- se il processo \mathcal{P} contiene tutte le traslazioni di due segnali diversi $x(t)$ e $y(t)$, e tutte le traslazioni hanno la stessa probabilità, allora il processo non è ergodico perché una qualsiasi realizzazione può essere la traslazione o di $x(t)$ o di $y(t)$:

$$\mathcal{P} = \{x(t+t_1), y(t+t_2) \quad \forall t_1, t_2\}$$

- segnale vocale:⁴ non è ergodico perché una persona non può fisicamente generare tutti i segnali generabili da un qualunque essere umano;
- rumore termico⁵ a una temperatura data: è ergodico perché non dipende dalla resistenza scelta.

12.2 Autocorrelazione

Si ricorda che esistono due diverse definizioni per l'autocorrelazione a seconda se si parli di segnali determinati o di processi casuali:

- autocorrelazione per segnali determinati a potenza finita:⁶

$$\Phi_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{G_x(f)\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau) x^*(t) dt = \langle x(t+\tau) x^*(t) \rangle$$

- autocorrelazione per processi casuali:⁷

$$R_X(\tau) \triangleq E(X(t) X^*(t+\tau))$$

12.2.1 Ergodicità per l'autocorrelazione

Un processo $X(t)$ è **ergodico per l'autocorrelazione** se la sua autocorrelazione $R_X(\tau)$ coincide con l'autocorrelazione $\Phi_x(\tau)$ di una sua qualsiasi realizzazione:

$$R_X(\tau) = \Phi_x(\tau) \quad \forall i$$

dove $\Phi_x(\tau)$ è l'autocorrelazione della realizzazione $X(t; s_i)$:

$$\Phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} X(t+\tau; s_i) X^*(t; s_i) dt$$

Se il processo $X(t)$ è ergodico per l'autocorrelazione, allora lo spettro di potenza $S_X(f)$ può essere valutato a partire da una sua qualsiasi realizzazione:

$$S_X(f) \triangleq \mathcal{F}\{R_X(\tau)\} = G_x(f) = \mathcal{F}\{\Phi_x(\tau)\}$$

⁴Un **segnale vocale** è l'insieme dei segnali generabili dall'apparato fonatorio di un umano.

⁵Il **rumore termico** è l'insieme dei segnali generabili da una qualsiasi resistenza posta a temperatura T .

⁶Si veda la sezione 8.2.3.

⁷Si veda la sezione 9.1.2.

Ergodicità per l'autocorrelazione e stazionarietà

- Il processo è stazionario per la sua autocorrelazione $\Phi_x(\tau)$ se questa non dipende dalla realizzazione.
- Il processo è stazionario in senso stretto di ordine 2⁸ se la sua autocorrelazione $R_X(\tau)$ dipende solo da τ .

L'ergodicità per l'autocorrelazione implica la stazionarietà per l'autocorrelazione, ma la stazionarietà per l'autocorrelazione non implica l'ergodicità per l'autocorrelazione.

⁸Si veda la sezione 10.1.2.

Parte II

Elaborazione numerica dei segnali

Capitolo 13

Segnali a tempo discreto

L'**elaborazione numerica dei segnali** (ENS) è l'applicazione di un algoritmo ad una serie di numeri che rappresenta un segnale.

Un segnale $x(nT_c)$ è **a tempo discreto** se è definito rispetto a una variabile indipendente n che assume solo valori interi ($n \in \mathbb{Z}$). Per semplicità si parla di $x(nT_c)$ come la **sequenza** $x(n)$. Il segnale è detto **numerico** o **digitale** se assume solo ampiezze discrete.

13.1 Classificazione

13.1.1 Durata di una sequenza

Una sequenza può avere:

- **durata finita:** la sequenza è identicamente nulla all'esterno di un intervallo finito di tempo $[n_1, n_2]$;
- **durata infinita:** il supporto temporale può essere bilatero $((-\infty, +\infty))$ o monolatero $([n_1, +\infty)$ o $(-\infty, n_2])$.

13.1.2 Causalità

Una sequenza è:

- **casuale** se è identicamente nulla per valori di n minori di 0;
- **anticasuale** se è identicamente nulla per valori di n maggiori o uguali di 0.

13.1.3 Parità

Una sequenza $x(n)$ reale è detta:

- **pari** se $x(n) = x(-n)$;
- **dispari** se $x(n) = -x(-n)$.

Una sequenza $x(n)$ complessa è detta:

- **coniugata simmetrica** se $x(n) = x^*(-n)$;
- **coniugata antisimmetrica** se $x(n) = -x^*(-n)$.

Una qualunque sequenza complessa $x(n)$ può essere scritta come somma di una sequenza coniugata simmetrica $x_p(n)$ e di una sequenza coniugata antisimmetrica $x_d(n)$:

$$x(n) = x_p(n) + x_d(n)$$

dove:

$$\begin{cases} x_p(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x^*(-n) = x_p^*(-n) \\ x_d(n) = \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x^*(-n) = -x_d^*(-n) \end{cases}$$

Dimostrazione

$$x(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x(n) = \underbrace{\frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}x^*(-n)}_{x_p(n)} + \underbrace{\frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}x^*(-n)}_{x_d(n)}$$

13.1.4 Periodicità

Una sequenza $x(n)$ è **periodica** se è possibile trovare un intervallo di tempo N per cui vale la relazione:

$$x(n) = x(n \pm N) \quad N \in \mathbb{N}$$

Il **periodo** è il più piccolo valore intero positivo di N per cui la sequenza è periodica.

13.1.5 Sequenze limitate in ampiezza

Una sequenza $x(n)$ è **limitata** se per qualunque istante di tempo discreto n assume valori contenuti entro un intervallo finito X_0 (costante reale finita positiva):

$$|x(n)| \leq X_0 \quad \forall n$$

13.1.6 Sequenze sommabili

Una sequenza $x(n)$ è **assolutamente sommabile** se:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| \in \mathbb{R}$$

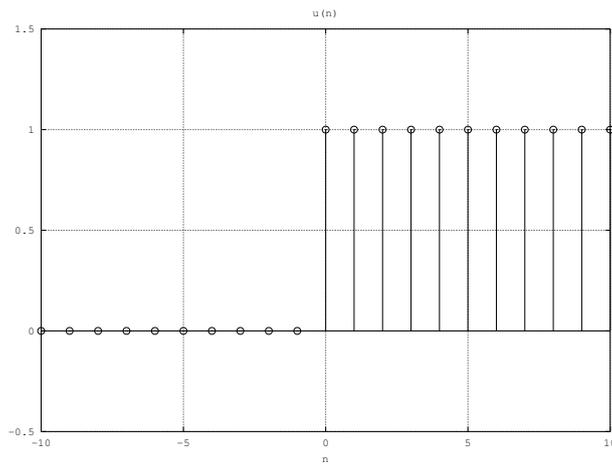
Una sequenza $x(n)$ è **quadraticamente sommabile** se:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \in \mathbb{R}$$

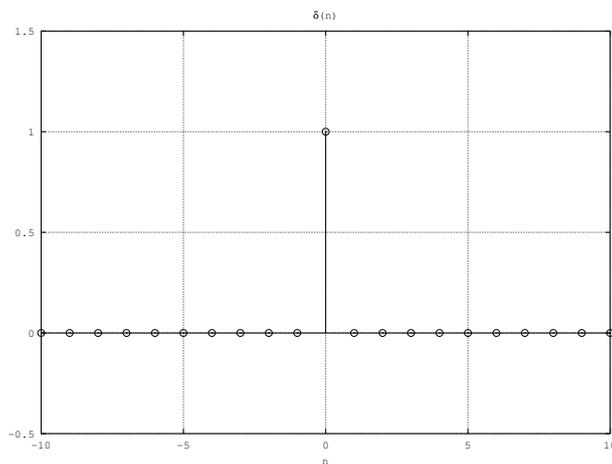
13.2 Sequenze elementari

13.2.1 Sequenza gradino unitario

$$u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



13.2.2 Delta di Kronecker (impulso unitario)



$$\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$

Qualsiasi segnale $x(n)$ può essere espresso come somma di impulsi:

$$x(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \delta(n-i)$$

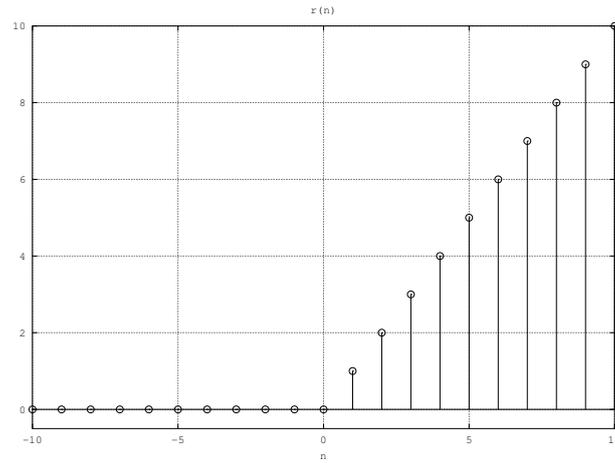
Relazione tra delta numerica e gradino unitario

$$u(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta(n-i) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots$$

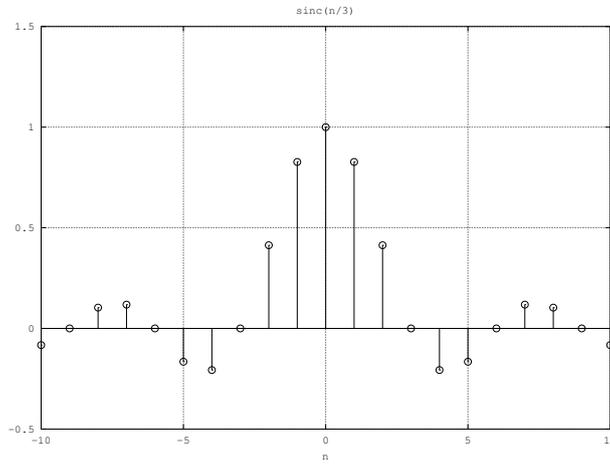
$$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$$

13.2.3 Sequenza rampa

$$r(n) = nu(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & n \geq 0 \end{cases}$$



13.2.4 Sequenza sinc



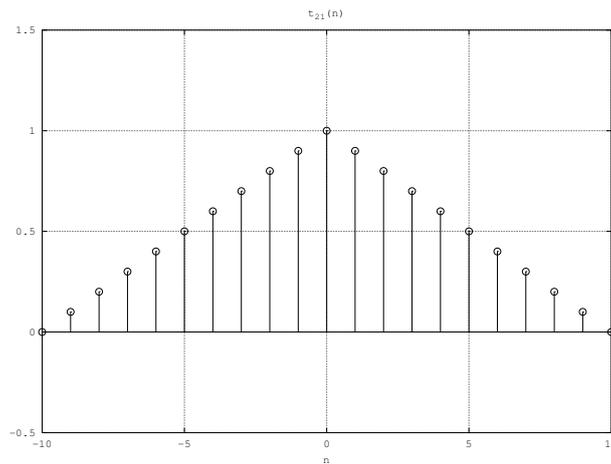
$$\text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right) = \frac{\sin\left(\pi \frac{n}{N}\right)}{\pi \frac{n}{N}}, \quad N \in \mathbb{N}$$

Interseca l'asse orizzontale in N , $2N$, ecc.

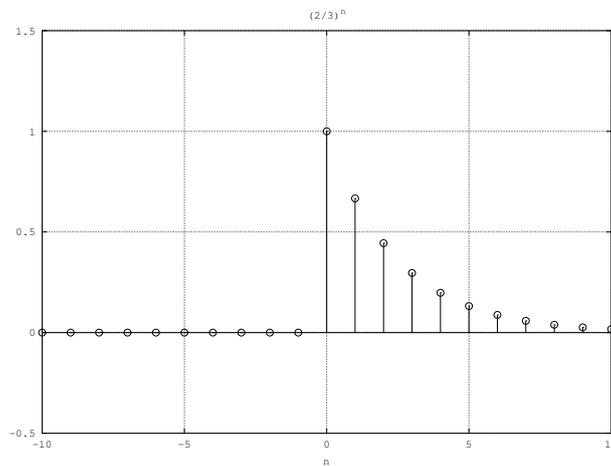
Se $N = 1$, la sequenza $\text{sinc}(n)$ coincide con la delta di Kronecker.

13.2.5 Sequenza triangolo

$$t_{2N+1}(n) = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{N}, & |n| \leq N \\ 0, & |n| > N \end{cases}, \quad N \in \mathbb{N}$$



13.2.6 Sequenza esponenziale



$$x(n) = a^n u(n)$$

Se a è complesso:

$$a = Ae^{j\theta} \Rightarrow x(n) = A^n e^{jn\theta} u(n)$$

13.3 Sinusoidi a tempo discreto

Proprietà 1 Sinusoidi che differiscono per un numero intero di angoli giro sono indistinguibili nel dominio del tempo discreto:

$$A \cos(2\pi f_0 n + 2\pi k n + \theta) = A \cos(2\pi f_0 n + \theta) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Proprietà 2 La frequenza delle oscillazioni di una sinusoide a tempo discreto:

- $0 < f_0 < \frac{1}{2}$: aumenta all'aumentare di f_0 ;
- $\frac{1}{2} < f_0 < 1$: diminuisce all'aumentare di f_0 .

Proprietà 3 Una sinusoide è periodica se il prodotto Nf_0 è un numero intero:

$$x(n+N) = x(n) \Rightarrow A \cos(2\pi f_0 n + 2\pi f_0 N + \theta) = \cos(2\pi f_0 n + \theta) \quad N \in \mathbb{Z}$$

Una sinusoide discreta perciò non necessariamente è periodica di periodo $\frac{1}{f_0}$. Se f_0 non è un numero razionale, la sinusoide non è periodica (N dev'essere intero).

13.4 Operazioni elementari

13.4.1 Somma e prodotto

Le operazioni di somma e prodotto si applicano tra coppie di campioni osservati nei medesimi istanti di tempo.

13.4.2 Traslazione e ribaltamento

Traslazione La traslazione consiste nel cambio di variabile $n \rightarrow n - N$, dove $N \in \mathbb{N}$ è pari al numero di campioni per cui il segnale è ritardato o anticipato:

$$y(n) = x(n - N)$$

Ribaltamento Il ribaltamento consiste nel cambio di variabile $n \rightarrow -n$ e realizza l'inversione dell'asse dei tempi:

$$y(n) = x(-n)$$

L'operazione di traslazione ha la precedenza su quella di ribaltamento:

$$x(n) \rightarrow x(n - N) \rightarrow x(-n - N)$$

13.4.3 Scalamento temporale

Sottocampionamento L'operazione di sottocampionamento corrisponde a costruire la sequenza $y(n)$ prendendo un campione ogni D della sequenza $x(n)$:

$$y(n) = Dx(n) \quad D \in \mathbb{N}$$

Corrisponde all'operazione di compressione nel dominio del tempo continuo. La funzione Matlab è `downsample`.

Sovracampionamento L'operazione di sovracampionamento corrisponde a costruire la sequenza $y(n)$ inserendo $I - 1$ zeri tra ogni campione della sequenza $x(n)$:

$$y(n) = \begin{cases} x\left(\frac{n}{I}\right) & \forall n = \dots, -2I, -I, 0, +I, +2I, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Corrisponde all'operazione di dilatazione nel dominio del tempo continuo. La funzione Matlab è `upsample`.

13.4.4 Convoluzione lineare

La **convoluzione lineare** tra due sequenze discrete $x(n)$ e $y(n)$ è definita:

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n - k)$$

Proprietà Il supporto della convoluzione è pari alla somma dei singoli supporti meno 1.

- commutativa:

$$x(n) * y(n) = y(n) * x(n)$$

- distributiva:

$$x(n) * [y(n) + z(n)] = x(n) * y(n) + x(n) * z(n)$$

- associativa:

$$x(n) * [y(n) * z(n)] = [x(n) * y(n)] * z(n)$$

La funzione Matlab è `conv`.

13.5 Energia e potenza media

13.5.1 Energia

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2$$

Per sequenze a energia finita, l'energia non dipende da traslazioni temporali di $x(n)$:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n-N)|^2 \quad \forall N \in \mathbb{Z}$$

L'energia di un segnale analogico $x(t)$ è approssimabile alla sua sequenza $x(nT_c)$ campionata a intervalli T_c molto piccoli:

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \approx T_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(nT_c)|^2$$

13.5.2 Potenza media

Per sequenze a energia infinita è possibile definire la potenza media:

$$P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2$$

- Le sequenze a energia finita hanno potenza media nulla.
- Le sequenze a potenza media finita (e non nulla) hanno energia infinita.

Esempio La sequenza gradino unitario $u(n)$ ha energia infinita ma potenza media finita:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |u(n)|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 \rightarrow +\infty$$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |u(n)|^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{+N} 1 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1}{2}$$

La potenza media di un segnale periodico è pari alla potenza media calcolata in un suo periodo. La potenza media P_x di un segnale periodico dipende dall'energia del segnale all'interno di un singolo periodo:

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2$$

La potenza di un segnale analogico $x(t)$ è approssimabile alla sua sequenza $x(nT_c)$ campionata a intervalli T_c molto piccoli:

$$P_x = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \cong \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2N+1)\mathcal{T}_c} \sum_{n=-N}^{+N} |x(nT_c)|^2 \mathcal{T}_c$$

Inoltre, se il segnale è periodico:

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt \cong \frac{1}{N\mathcal{T}_c} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_c)|^2 \mathcal{T}_c$$

13.6 Funzioni di correlazione

13.6.1 Esempio: segnale radar

La funzione di mutua correlazione può essere usata per ricavare informazioni sul grado di similarità tra due sequenze a energia finita.

L'eco $r(n)$ di un segnale radar $x(t)$ è del tipo:

$$r(n) = \alpha x(n-D) + g(n)$$

- α è l'attenuazione del segnale;
- D è il ritardo del segnale;
- $g(n)$ è il rumore.

La funzione di mutua correlazione $z(n)$ ha un picco in $n = D \Rightarrow$ sapendo il ritardo è possibile calcolare la distanza dell'oggetto: $d = \frac{D}{2} \cdot c$.

	Mutua correlazione	Autocorrelazione
	$R_{xy}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k+n)y(k)$	$R_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k+n)x(k)$
Sequenze a potenza finita	$\Phi_{xy}(n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x^*(k+n)y(k)$	$\Phi_x(n) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} x^*(k+n)x(k)$
Sequenze periodiche	$\Phi_{xy}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k+n)y(k)$	$\Phi_x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x^*(k+n)x(k)$
Proprietà	se la sequenza è reale: $R_{xy}(n) = R_{yn}(-n)$	$R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) ^2 = E_x$

Tabella 13.1: Funzioni di correlazione.

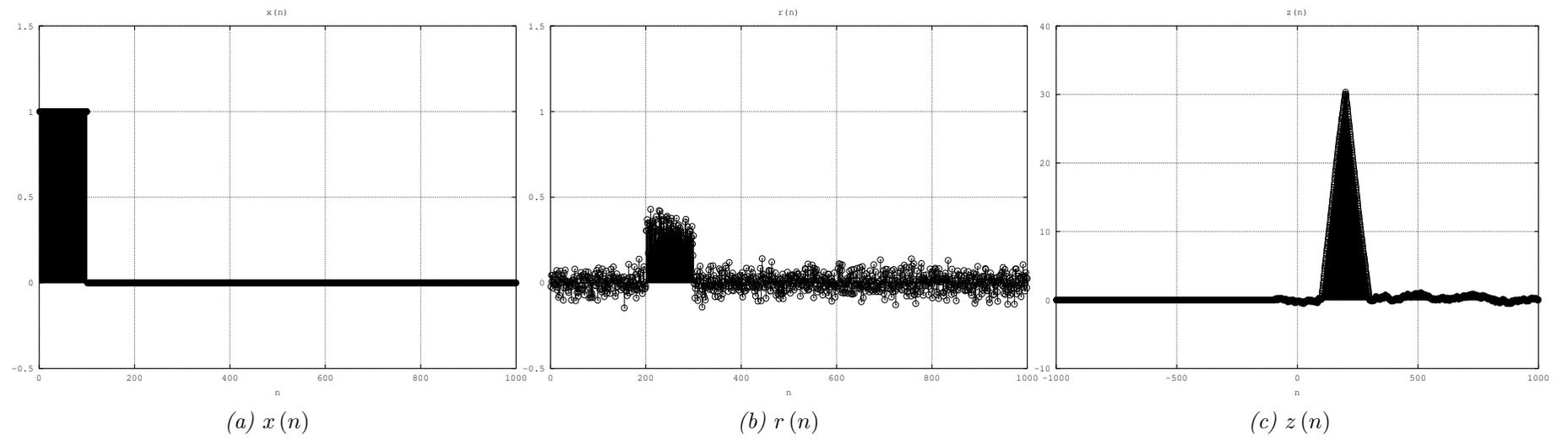


Figura 13.1: Esempio: segnale radar.

Capitolo 14

Campionamento e quantizzazione

14.1 Campionamento¹

14.2 Quantizzazione

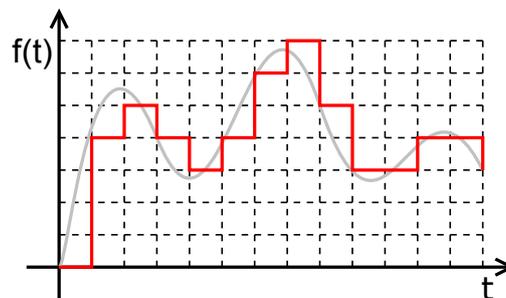


Figura 14.1:²

Un quantizzatore con **risoluzione** n_q suddivide l'intervallo di ampiezze $[-V, V]$ in un numero finito $L = 2^{n_q}$ intervalli di ampiezza uniforme:

$$\Delta = \frac{2V}{L}$$

Al centro di ogni intervallo vi è un livello, che è rappresentato da una sequenza di n_q bit.

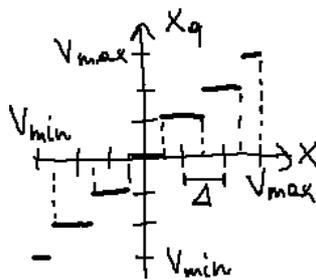
L'operazione di **quantizzazione** permette di rappresentare un segnale in forma numerica: ogni campione della sequenza reale $x[n]$ campionata viene approssimato al livello associato all'intervallo a cui appartiene:

$$y = Q[x(nT_c)] = \begin{cases} -V + \frac{1}{2}\Delta & \text{se } x(nT_c) \in (-V, -V + \Delta) \\ -V + \frac{3}{2}\Delta & \text{se } x(nT_c) \in (-V + \Delta, -V + 2\Delta) \\ \vdots & \vdots \\ V - \frac{3}{2}\Delta & \text{se } x(nT_c) \in (V - 2\Delta, V - \Delta) \\ V - \frac{1}{2}\Delta & \text{se } x(nT_c) \in (V - \Delta, V) \end{cases}$$

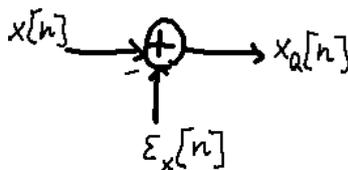
La caratteristica ingresso/uscita di un quantizzatore Q è una scalinata a L livelli:

¹Si veda il capitolo 7.

²Questa immagine è tratta da Wikimedia Commons ([Digital.signal.svg](#)), è stata realizzata da [Petr Adámek](#), dall'utente [Rbj](#) e da [Walter Dvorak](#) e si trova nel dominio pubblico.



14.2.1 Errore di quantizzazione



Si definisce **errore** (o rumore) **di quantizzazione** $\varepsilon_Q[n]$ la differenza fra un campione reale $x[n]$ e la sua versione quantizzata $x_Q[n]$:

$$\varepsilon_Q[n] = x[n] - x_Q[n]$$

14.2.2 Rapporto segnale rumore

La qualità del segnale quantizzato è espressa in termini del **rapporto segnale rumore** SNR:

$$\text{SNR}_Q = \frac{P_S}{P_N}$$

dove:

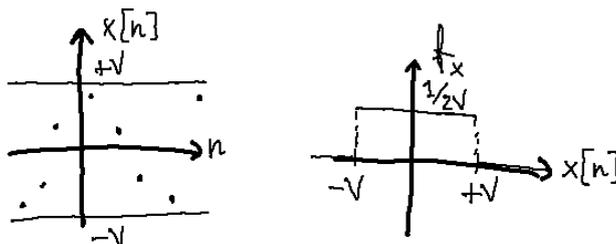
- P_S è la potenza del segnale non ancora quantizzato $x[n]$:

$$P_S = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \frac{V^2}{3}$$

- P_N è la potenza del rumore di quantizzazione $\varepsilon_Q[n]$:

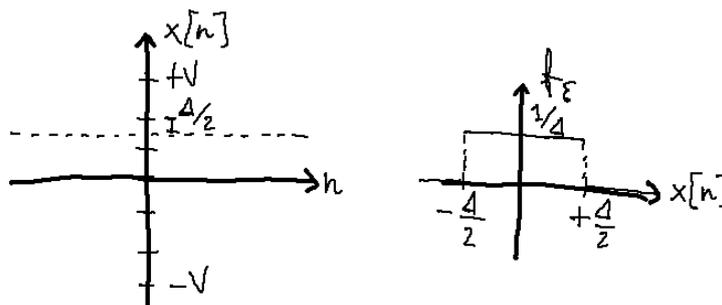
$$P_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |\varepsilon_Q[n]|^2 = \frac{\Delta^2}{12}$$

Dimostrazione Se il segnale $x[n]$ ha una distribuzione delle ampiezze uniforme nell'intervallo $[-V, V]$:



nell'ipotesi di impiegare un numero sufficientemente elevato di livelli di quantizzazione, l'errore di quantizzazione $\varepsilon_Q[n]$ può essere modellato come un processo casuale bianco, ergodico, stazionario in senso lato, statisticamente indipendente (scorrelato) dal segnale $x[n]$, e distribuito uniformemente nell'intervallo $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{se } \varepsilon \in \left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Siccome l'errore di quantizzazione $\varepsilon_Q[n]$ è ergodico:

$$P_N = \sigma_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 f(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

e la potenza del segnale $x[n]$:

$$P_S = \frac{1}{2V} \int_{-V}^V x^2 dx = \frac{1}{2V} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{-V}^V = \frac{V^2}{3}$$

Assumendo che la dinamica del quantizzatore D sia uguale alla dinamica del segnale ($D = 2V$), si ricava che il rapporto segnale rumore SNR si riduce all'aumentare del numero di livelli L :

$$\text{SNR}_Q = L^2$$

Dimostrazione

$$\Delta = \frac{D}{L} = \frac{2V}{L} \Rightarrow \text{SNR}_Q = \frac{P_S}{P_N} = \frac{\frac{V^2}{3}}{\frac{\Delta^2}{12}} = 4 \frac{V^2}{\Delta^2} = L^2$$

Ogni bit aggiuntivo di risoluzione incrementa di 6 dB il rapporto segnale rumore:

$$\text{SNR}_Q|_{\text{dB}} \cong 6n_Q$$

Dimostrazione

$$\text{SNR}_Q|_{\text{dB}} = 10 \log_{10} (L^2) = 10 \log_{10} (2^{2n_Q}) = n \cdot 20 \log_{10} 2 \cong 6n_Q$$

Se invece la dinamica del quantizzatore D è sganciata da quella del segnale ($D < 2V$), compare un addendo logaritmico:

$$\text{SNR}_Q|_{\text{dB}} \cong 6n_Q + 10 \log_{10} \left(\frac{4V^2}{D^2} \right)$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} P_N &= \frac{\Delta^2}{12} = \frac{D^2}{12L^2} \\ \text{SNR}_Q|_{\text{dB}} &= 10 \log_{10} \frac{P_S}{P_N} = 10 \log_{10} \left(\frac{V^2}{3} \frac{12L^2}{D^2} \right) = \\ &= 10 \log_{10} (L^2) + 10 \log_{10} \left(\frac{4V^2}{D^2} \right) \cong 6n_Q + 10 \log_{10} \left(\frac{4V^2}{D^2} \right) \end{aligned}$$

Capitolo 15

Trasformata di Fourier a tempo discreto

15.1 Trasformata di Fourier a tempo discreto (DTFT)

15.1.1 Definizione di DTFT

La **trasformata di Fourier a tempo discreto** (Discrete Time Fourier Transform [DTFT]) $X(e^{j2\pi f})$ è la trasformata di Fourier della sequenza $x(n)$:

$$X(e^{j2\pi f}) = \mathcal{F}\{x(n)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k}$$

dove ω è la pulsazione discreta: $\omega = 2\pi f$.

Dimostrazione Una sequenza $x(n)$ può essere espressa come la somma pesata dei campioni presi negli istanti di tempo k :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)$$

La trasformata di Fourier di $x(n)$ pertanto vale:

$$\mathcal{F}\{x(n)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \mathcal{F}\{\delta(n-k)\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k}$$

La DTFT viene indicata con $X(e^{j2\pi f})$ anziché con $X(f)$ per distinguerla dalla trasformata di Fourier di un segnale continuo, ma è a tutti gli effetti in funzione della variabile continua f .

La DTFT è in realtà il caso particolare per $T_c = 1$ della trasformata di Fourier di un segnale analogico $x(t)$ campionato¹ con frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{T_c}$:

$$X_c(f) = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) e^{-j2\pi f k T_c}$$

¹Si veda la sezione 6.2.1.

che è periodica di periodo $f_c \Rightarrow$ la DTFT è periodica di periodo:

$$\begin{cases} f_c = \frac{1}{T_c} = 1 \\ \omega = 2\pi f_c = 2\pi \end{cases}$$

15.1.2 Inversione della DTFT (IDTFT)

Siccome la DTFT $X(e^{j\omega})$ è periodica, i coefficienti $x(k)$ possono essere interpretati come i coefficienti μ_k dello sviluppo in serie di Fourier² della DTFT:

Tempo continuo	Tempo discreto	
	in funzione di f	in funzione di ω
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$ $\mu_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}kt} dt$	$X(e^{j2\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi fk}$ $x(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi fk} df$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k}$ $x(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega$

Tabella 15.1: Trasformata di Fourier a tempo discreto inversa (IDTFT).

Verifica dell'inversione

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f}) e^{j2\pi fk} df &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi fn} \right] e^{j2\pi fk} df = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-j2\pi f(n-k)} df = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1}{-j2\pi(n-k)} e^{-j2\pi f(n-k)} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{1}{j2\pi(n-k)} \left(e^{j\pi(n-k)} - e^{-j\pi(n-k)} \right) = \end{aligned}$$

Per la formula di Eulero:

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \frac{\sin(\pi(n-k))}{\pi(n-k)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \operatorname{sinc}(n-k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) \delta(n-k) = x(k)$$

15.1.3 Condizioni di esistenza

Se la sequenza $x(k)$ è assolutamente sommabile, allora:

- esiste la sua DTFT:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \in \mathbb{R} \Rightarrow |X(e^{j\omega})| \in \mathbb{R} \quad \forall \omega$$

²Si veda la sezione 2.2.1.

Dimostrazione

$$\begin{aligned} |X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j\omega k} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k) e^{-j\omega k}| = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |X(e^{j\omega})| \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- la sua energia è finita:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \in \mathbb{R} \Rightarrow E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)| \right)^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow E_x \in \mathbb{R}$$

15.2 Proprietà della DTFT

15.2.1 Linearità

La DTFT è un operatore **lineare**:

$$z(n) = a_1 \cdot x(n) + a_2 \cdot y(n) \iff Z(e^{j2\pi f}) = a_1 \cdot X(e^{j2\pi f}) + a_2 \cdot Y(e^{j2\pi f})$$

15.2.2 Ribaltamento

Un **ribaltamento** della $x(n)$ corrisponde a calcolare la sua DTFT invertendo il segno della frequenza f :

$$z(n) = x(-n) \iff Z(e^{j2\pi f}) = X(e^{-j2\pi f})$$

15.2.3 Ritardo

Una **traslazione del tempo** della sequenza $x(n)$ corrisponde a moltiplicare la sua DTFT per un esponenziale complesso:

$$z(n) = x(n - N) \iff Z(e^{j2\pi f}) = X(e^{j2\pi f}) e^{-j2\pi f N}$$

15.2.4 Traslazione in frequenza (modulazione)

Una **traslazione in frequenza** della DTFT di una sequenza $x(n)$ corrisponde a moltiplicare la sequenza per un esponenziale complesso:

$$z(n) = x(n) \cdot e^{j2\pi f_0 n} \iff Z(e^{j2\pi f}) = X(e^{j2\pi(f-f_0)})$$

15.2.5 Derivazione in frequenza

$$z(n) = n \cdot x(n) \iff -2\pi j \cdot Z(e^{j2\pi f}) = \frac{d}{df} X(e^{j2\pi f})$$

15.2.6 Convoluzione lineare

La **convoluzione** tra due sequenze $x(n)$ e $y(n)$ corrisponde al prodotto tra le singole DTFT:

$$z(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k) \iff Z(e^{j2\pi f}) = X(e^{j2\pi f}) \cdot Y(e^{j2\pi f})$$

15.2.7 Prodotto

Il **prodotto** tra due sequenze $x(n)$ e $y(n)$ corrisponde alla convoluzione tra le singole DTFT, con estremi di integrazione $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$ grazie al fatto che la DTFT è periodica:

$$z(n) = x(n) \cdot y(n) \iff Z(e^{j2\pi f}) = X(e^{j2\pi f}) * Y(e^{j2\pi f}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi\eta}) Y(e^{j2\pi(f-\eta)}) d\eta$$

15.2.8 Relazioni di parità

Se la sequenza $x(n)$ è reale vale la simmetria hermitiana per le sue DTFT attorno alle frequenze $f=0$ e $f=\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} X(e^{j2\pi f}) = X^*(e^{-j2\pi f}) \\ X(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) = X^*(e^{-j2\pi(f+\frac{1}{2})}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_R(e^{j2\pi f}) + jX_I(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{-j2\pi f}) - jX_I(e^{-j2\pi f}) \\ X_R(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) + jX_I(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) = X_R(e^{-j2\pi(f+\frac{1}{2})}) - jX_I(e^{-j2\pi(f+\frac{1}{2})}) \end{cases}$$

e quindi entrambe le DTFT hanno le seguenti relazioni di parità:

- la parte reale è pari:

$$\begin{cases} X_R(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{-j2\pi f}) \\ X_R(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) = X_R(e^{-j2\pi(f+\frac{1}{2})}) \end{cases}$$

- la parte immaginaria è dispari:

$$\begin{cases} X_I(e^{j2\pi f}) = -X_I(e^{-j2\pi f}) \\ X_I(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) = -X_I(e^{-j2\pi(f+\frac{1}{2})}) \end{cases}$$

- il modulo è pari:

$$\begin{cases} |X(e^{j2\pi f})|^2 = X_R^2(e^{j2\pi f}) + X_I^2(e^{j2\pi f}) \\ |X(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})})|^2 = X_R^2(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) + X_I^2(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) \end{cases}$$

- la fase è dispari:

$$\begin{cases} \arg X_I(e^{j2\pi f}) = \arctg \frac{X_I(e^{j2\pi f})}{X_R(e^{j2\pi f})} \\ \arg X_I(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})}) = \arctg \frac{X_I(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})})}{X_R(e^{j2\pi(f-\frac{1}{2})})} \end{cases}$$

15.2.9 Valore iniziale e somma dei campioni

Valore iniziale

$$x(n)|_{n=0} = x(0) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f}) df$$

Somma dei campioni

$$X(e^{j2\pi f})|_{f=0} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)$$

Ne consegue che sequenze a valor medio nullo hanno DTFT nulla in $f = 0$.

15.2.10 Relazione di Parseval

La relazione di Parseval nel dominio del tempo discreto ha estremi di integrazione finiti:

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |X(e^{j2\pi f})|^2 df$$

Relazione di Parseval generalizzata

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y^*(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi f}) Y^*(e^{j2\pi f}) df$$

15.2.11 Spettro di energia

Lo spettro di energia $S_x(f)$ dà informazioni sulla distribuzione dell'energia della sequenza $x(n)$ nel dominio della frequenza:

$$S_x(f) = |X(e^{j2\pi f})|^2$$

Proprietà Lo spettro di energia $S_x(f)$:

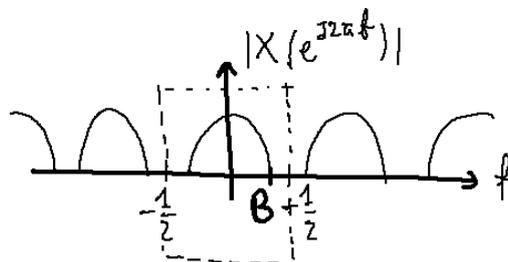
- non può essere negativo;
- se $x(n)$ è reale, è reale e pari;
- è periodico di periodo 1.

15.3 DTFT notevoli

	Sequenza $x(n)$	DTFT $X(e^{j2\pi f})$
Sequenza delta	$\delta(n)$	1
Sequenza costante	1	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f-n)$ $\delta(f) \quad f \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
Sequenza segno	$\text{sgn}(n)$	$\frac{1 + e^{-j2\pi f}}{1 - e^{-j2\pi f}}$
Sequenza gradino	$u(n)$	$\frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{1 - e^{-j2\pi f}}$
Sequenza esponenziale	$e^{j2\pi f_0 n}$	$\delta(f - f_0)$
Sequenza cosinusoidale	$\cos(2\pi f_0 n)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
Sequenza sinusoidale	$\sin(2\pi f_0 n)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
Sequenza sinc	$\text{sinc}\left(\frac{n}{N}\right)$	$N \cdot P_{\frac{1}{N}}(f)$
Sequenza porta	$p_{2K+1}(n)$	$\frac{\sin[\pi f(2K+1)]}{\sin(\pi f)}$

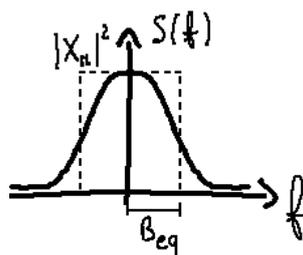
15.4 Banda di un segnale a tempo discreto

15.4.1 Banda assoluta



La **banda assoluta** della sequenza $x(n)$ è la frequenza $B_x \leq \frac{1}{2}$, quindi all'interno del singolo periodo della DTFT, per cui la DTFT $|X(e^{j2\pi f})|$ è identicamente nulla al di fuori dell'intervallo $[-B_x, B_x]$. È l'equivalente della banda unilatera nel dominio del tempo discreto, però si considera solamente un periodo della funzione nel dominio della frequenza (la DTFT ha sempre supporto infinito).

15.4.2 Banda equivalente



La larghezza di banda B_{eq} è pari alla semilarghezza del rettangolo:

- la cui altezza è pari al massimo $|X_M|^2$ dello spettro di energia $S_x(f)$;
- la cui area è uguale all'energia complessiva $E(S_x)$ della DTFT, cioè all'area sottesa da $S_x(f)$ all'interno del singolo periodo della DTFT:

$$2B_{eq}|X_M|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_x(f) df = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |X(e^{j2\pi f})|^2 df$$

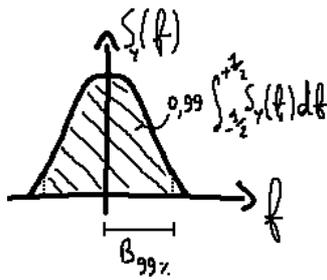
che per la relazione di Parseval è anche uguale all'energia della sequenza $x(n)$, data dalla somma di tutti i suoi campioni:

$$2B_{eq}|X_M|^2 = E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x(k)|^2$$

15.4.3 Banda $B_{x\%}$

La banda $B_{x\%}$ è la frequenza per cui l'intervallo $[-B_{x\%}, B_{x\%}]$ corrisponde all' $x\%$ dell'energia complessiva della sequenza $y(n)$, ovvero all' $x\%$ dell'area sottesa dallo spettro di energia $S_y(f)$ all'interno del singolo periodo della DTFT:

$$\int_{-B_{x\%}}^{+B_{x\%}} S_y(f) df = \frac{x}{100} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_y(f) df = \frac{x}{100} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |y(k)|^2$$



15.4.4 Banda a 3 dB

La **banda a 3 dB** $B_{3 \text{ dB}}$ è la frequenza a cui l'ampiezza dello spettro di energia $S_x(f)$ si riduce di 3 dB rispetto al suo massimo:

$$S_x(B_{3 \text{ dB}}) = \frac{|X_M|^2}{2}$$

Capitolo 16

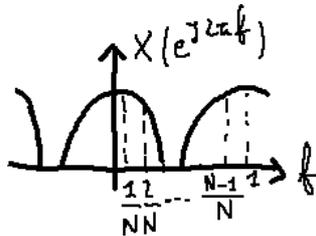
DFT e FFT

16.1 Trasformata di Fourier discreta (DFT)

16.1.1 Definizione di DFT

Data una sequenza $x(n)$ costituita da un numero N finito di campioni, la sua **trasformata di Fourier discreta** (Discrete Fourier Transform [DFT]) $X(k)$, all'interno del suo periodo N , è definita:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$



e può essere interpretata come la discretizzazione in frequenza della DTFT $X(e^{j2\pi f})$, di cui vengono prese N frequenze f_k equispaziate:

$$f_k = \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Dal punto di vista algoritmico, la DFT è di complessità inferiore rispetto alla DTFT, e inoltre è definita in modo discreto \Rightarrow è rappresentabile su un calcolatore.

16.1.2 Inversione della DFT (IDFT)

L'antitrasformata della DFT, all'interno del suo periodo N , è definita:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

16.1.3 Estensioni periodiche

La DFT e la IDFT¹ sono periodiche di periodo N :

$$\begin{cases} X(k) = X(k+N) & k = 0, \dots, N-1 \\ x(n) = x(n+N) & n = 0, \dots, N-1 \end{cases}$$

¹Si noti che la sequenza di partenza $x(n)$ non era periodica, ma aveva durata finita.

Si definiscono le **estensioni periodiche** $\bar{X}(k)$ e $\bar{x}(n)$, rispettivamente di $X(k)$ e $x(n)$:

$$\begin{cases} \bar{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} & \forall k \\ \bar{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} & \forall n \end{cases}$$

16.1.4 Tecnica di aggiunta degli zeri

È possibile teoricamente ricavare per interpolazione la DTFT partendo dagli N campioni della DFT:

$$X(e^{j2\pi f}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{\sin(\pi N f - k\pi)}{\sin(\pi f - \pi \frac{k}{N})} e^{-j\pi(N-1)(f - \frac{k}{N})}$$

Dimostrazione

$$X(e^{j2\pi f}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j2\pi f n} =$$

Siccome $x(n)$ ha per ipotesi durata finita N :

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \right) e^{-j2\pi f n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi f n} e^{j2\pi n \frac{k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi f n} e^{j2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n(f - \frac{k}{N})} = \frac{1 - e^{-j2\pi N(f - \frac{k}{N})}}{1 - e^{-j2\pi(f - \frac{k}{N})}} = \\ &= \frac{e^{-j\pi N(f - \frac{k}{N})} \left(e^{j\pi N(f - \frac{k}{N})} - e^{-j\pi N(f - \frac{k}{N})} \right)}{e^{-j\pi(f - \frac{k}{N})} \left(e^{j\pi(f - \frac{k}{N})} - e^{-j\pi(f - \frac{k}{N})} \right)} = e^{-j\pi(N-1)(f - \frac{k}{N})} \frac{\sin(\pi N f - k\pi)}{\sin(\pi f - \pi \frac{k}{N})} \end{aligned}$$

In pratica la DTFT viene approssimata a una DFT definita su un nuovo periodo $N_1 \gg N$, applicata a una sequenza $x_z(n)$ che non è altro che la sequenza di partenza $x(n)$ a cui sono stati accodati $N_1 - N$ campioni nulli:

$$x_z(n) = \begin{cases} x(n) & n = 0, \dots, N-1 \\ 0 & n = N, \dots, N_1-1 \end{cases}$$

Aggiungere degli zeri in fondo alla sequenza $x(n)$ permette di aumentare artificialmente il periodo della sua DFT senza alterare la DTFT a cui si cerca di approssimare:

$$X(e^{j2\pi f_k}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi f_k n} = \sum_{n=0}^{N_1-1} x_z(n) e^{-j2\pi \frac{k}{N_1} n} \quad k = 0, \dots, N_1-1$$

e siccome il numero di campioni presi dalla DTFT è maggiore, la risoluzione della DTFT risulta molto più alta.

Esempio - Sequenza porta

$$x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \geq N \end{cases}$$

Considerando solamente l'intervallo $[0, N-1]$ si ottiene come DFT $|X(k)|$ una funzione sinc campionata a una frequenza molto bassa:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} = \frac{1 - e^{-j2\pi k}}{1 - e^{-j2\pi \frac{k}{N}}} = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ N & k = 0 \end{cases}$$

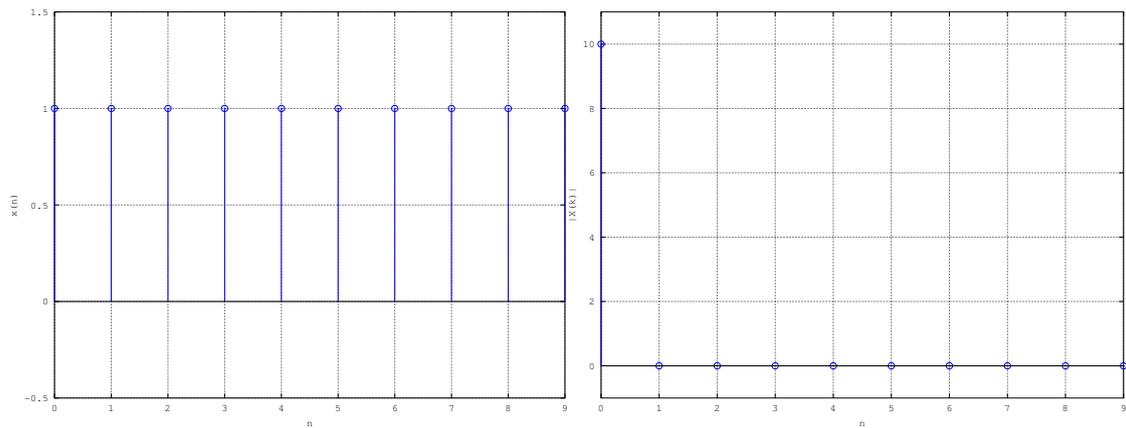


Figura 16.1: $N_1 = N$

Basta però aggiungere degli zeri a destra della porta per migliorare la risoluzione della DTFT:

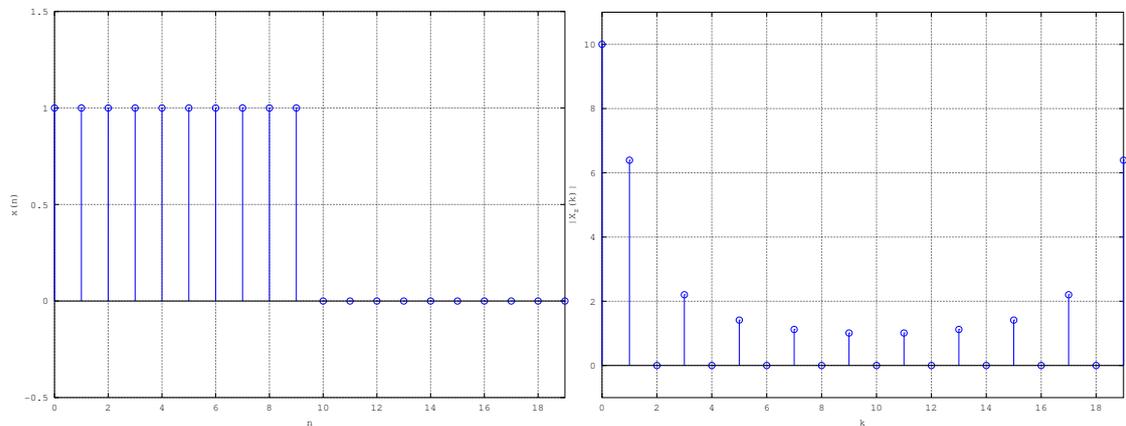


Figura 16.2: $N_1 = 2N$

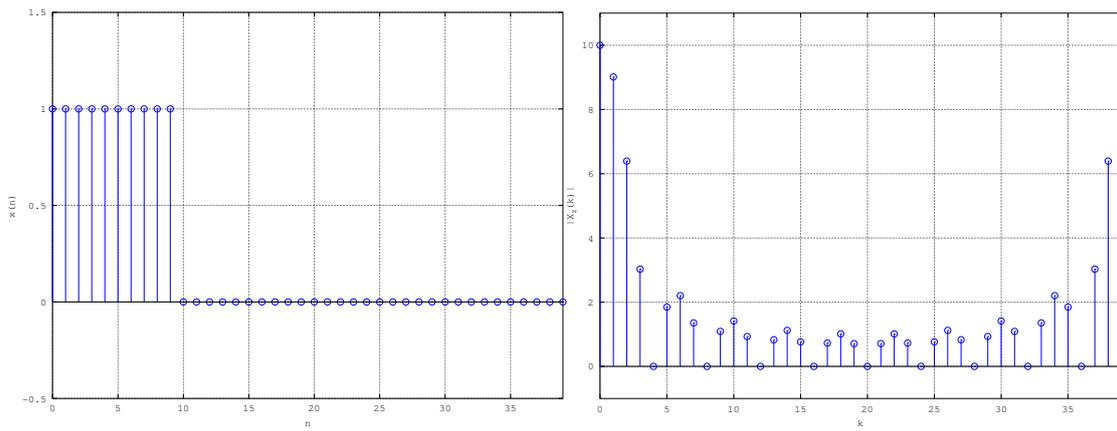


Figura 16.3: $N_1 = 4N$

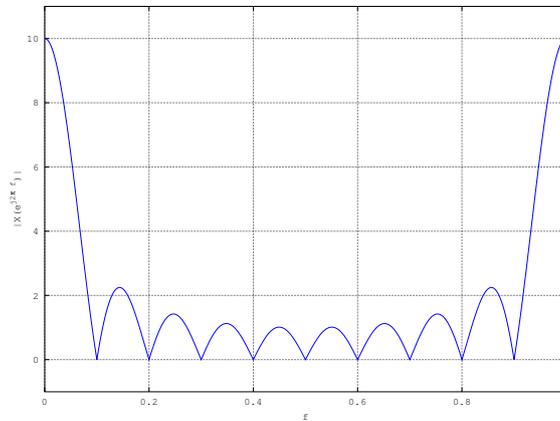


Figura 16.4: $N_1 = 100N$

16.1.5 Aliasing nel tempo

Partendo dalla sequenza $x(n)$ di durata non finita:

$$x(n) = a^n u(n) \quad 0 < a < 1$$

la sua DTFT campionata nel primo periodo N :

$$X(k) = X\left(e^{j2\pi \frac{k}{N}}\right) = \frac{1}{1 - a^{-j2\pi \frac{k}{N}}} \quad k = 0, \dots, N-1$$

non coincide esattamente con la DFT calcolata sulla sequenza troncata:

$$X_N(k) = \frac{1 - a^N}{1 - a^{-j2\pi \frac{k}{N}}} \quad k = 0, \dots, N-1$$

perché vi è un effetto di **aliasing nel tempo** dovuto al fatto che la sequenza $x(n)$ di partenza non ha durata finita.

Al crescere dell'ampiezza del periodo N , la DFT della sequenza troncata tende sempre di più alla DTFT campionata nel primo periodo.

16.2 Proprietà della DFT

16.2.1 Accorgimenti

Le proprietà della DFT sono analoghe a quelle della DTFT, ma ci vogliono alcuni accorgimenti:

- la DFT $X(k)$ è periodica di periodo $N \Rightarrow$ le operazioni sulla DFT $X(k)$ devono condurre a una sequenza periodica di periodo N ;
- la IDFT $x(n)$ è periodica di periodo $N \Rightarrow$ le operazioni sulla IDFT $x(n)$ devono condurre a una sequenza periodica di periodo N .

Operatore di modulo

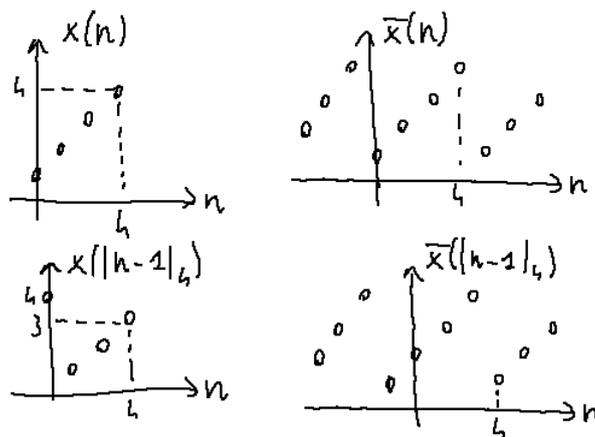
L'operatore di **modulo** restituisce sempre un numero compreso in $[0, N - 1]$:

$$|k|_N = k \bmod N$$

Se k è un numero negativo, si somma N a k tante volte fino a ottenere un numero compreso in $[0, N - 1]$:

$$|-13|_{16} = 3$$

Operatore di ritardo circolare



L'operatore di **ritardo circolare** restituisce una sequenza ritardata che è ancora compresa in $[0, N - 1]$:

$$x((n - N_0)|_k)$$

in quanto i campioni che vanno al di là del primo periodo ricompaiono all'inizio del primo periodo stesso.

Modo operativo

- si genera la sequenza periodicizzata $\bar{x}(n)$;
- si applica il ritardo di N_0 campioni a $\bar{x}(n)$: $\bar{x}(n - N_0)$;
- la sequenza ritardata $x(n - N_0)$ è pari alla sequenza periodicizzata $\bar{x}(n - N_0)$ troncata nel primo periodo N ($n \in [0, N - 1]$).

Convoluzione circolare

La **convoluzione circolare** tra due sequenze $x(n)$ e $y(n)$ è definita:

$$x(n) \otimes y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) y(|n-k|_N)$$

dove N è la più grande tra le durate delle singole sequenze.

Proprietà commutativa

$$x(n) \otimes y(n) = y(n) \otimes x(n)$$

La convoluzione circolare si può rappresentare con un prodotto matrice per vettore. Ad esempio, se la durata N è pari a 4:

$$x(n) \otimes y(n) = \begin{bmatrix} y(0) & y(3) & y(2) & y(1) \\ y(1) & y(0) & y(3) & y(2) \\ y(2) & y(1) & y(0) & y(3) \\ y(3) & y(2) & y(1) & y(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix}$$

16.2.2 Linearità

$$z(n) = a_1 x(n) + a_2 y(n) \Rightarrow Z(k) = a_1 X(k) + a_2 Y(k)$$

16.2.3 Ritardo

$$z(n) = x(|n - N_0|_N) \Rightarrow Z(k) = X(k) e^{-j2\pi \frac{k}{N} N_0}$$

16.2.4 Modulazione

$$z(n) = e^{j2\pi \frac{k_0}{N} n} x(n) \Rightarrow Z(k) = X(|k - k_0|_N)$$

16.2.5 Convoluzione circolare

$$z(n) = x(n) \otimes y(n) \Rightarrow Z(k) = X(k) \cdot Y(k)$$

Accorgimenti

- la convoluzione circolare di due sequenze di durata N campioni ha una uguale durata di N campioni (a differenza della convoluzione lineare della DTFT, la cui sequenza risultante ha durata $2N - 1$ campioni);
- la convoluzione circolare $\bar{z}(k)$ di due IDFT $\bar{x}(k)$ e $\bar{y}(k)$, entrambe di periodo N , è periodica di periodo N :

$$\bar{z}(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}(k) \bar{y}(n+N-k) = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{x}(k) \bar{y}(n-k) = \bar{z}(n)$$

16.2.6 Proprietà di simmetria

Se la sequenza $x(n)$ è reale:

- $X(k) = X_R(k) + jX_I(k)$
 - se $x(n)$ è una sequenza pari: $X_I(k) = 0$;
 - se $x(n)$ è una sequenza dispari: $X_R(k) = 0$;

- per la DFT vale la simmetria hermitiana intorno a 0:

$$X(k) = X^*(|-k|_N)$$

- per la DFT vale la simmetria hermitiana intorno a $\frac{N}{2}$;
- il campione in $k = 0$ della DFT è sempre reale:

$$X^*(0) = X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

16.3 Trasformata di Fourier veloce (FFT)

La DFT ha complessità quadratica (N^2).

La **Fast Fourier Transform** (FFT) è un algoritmo di complessità lineartmica ($N \log N$) che implementa la DFT e la IDFT in maniera più efficiente.

16.3.1 DFT

La DFT può essere rappresentata in termini di matrici:

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}\mathbf{x}; \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & H_N^1 & H_N^2 & \dots & H_N^{N-1} \\ 1 & H_N^2 & H_N^4 & \dots & H_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & H_N^{N-1} & H_N^{2(N-1)} & \dots & H_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

dove:

$$H_N = e^{-j2\pi \frac{1}{N}} \Rightarrow H_N^{nk} = e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$$

Algoritmo della decimazione nel tempo

L'**algoritmo della decimazione nel tempo** è un algoritmo di tipo "divide et impera"² che riduce la complessità dell'algoritmo di DFT.

Ipotesi N è una potenza di 2

Divide La sequenza si suddivide in due sottosequenze costituite da metà campioni:

- la sottosequenza $x_0(n)$ è formata dai campioni pari:

$$x_0(n) = x(2n) \quad n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

- la sottosequenza $x_1(n)$ è formata dai campioni dispari:

$$x_1(n) = x(2n+1) \quad n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

²Si veda il capitolo *Il paradigma "divide et impera"* negli appunti di *Algoritmi e programmazione*.

Ricombinazione Ogni DFT $X(k)$, elemento del vettore \mathbf{x} , si ottiene dalla somma delle DFT delle singole sottosequenze $x_0(n)$ e $x_1(n)$:

$$X(k) = X_0\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) + H_N^k X_1\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) H_{\frac{N}{2}}^{nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) H_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) H_N^{nk} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) H_N^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) H_N^{(2n+1)k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) H_N^{2nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) H_N^{2nk} = \end{aligned}$$

Siccome $H_N^2 = H_{\frac{N}{2}}$:

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n) H_{\frac{N}{2}}^{nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n) H_{\frac{N}{2}}^{nk}$$

Complessità Il numero totale di operazioni (somme e prodotti) complesse è pari a:

$$N + \frac{N^2}{2} < N^2$$

Si può quindi riapplicare ripetutamente il procedimento “divide et impera” sulle sottosequenze. Al passo k -esimo si ha una complessità pari a:

$$k \cdot N + 2^k \left(\frac{N}{2^k}\right)^2 \quad k = 1, \dots, \log_2 N$$

All'ultimo passo ($k = \log_2 N$), quando si arriva a dover valutare le DFT su 1 punto, la complessità totale è lineare:

$$\log_2 N \cdot N + N \approx \log_2 N \cdot N$$

Riduzione di complessità

La complessità può essere ulteriormente ridotta sfruttando le proprietà di simmetria della matrice \mathbf{H} .

Esempio con $N = 4$ campioni

$$\begin{cases} X(0) = x(0) + x(2) + x(1) + x(3) \\ X(1) = x(0) + H_2 x(2) + H_4 [x(1) + H_2 x(3)] \\ X(2) = x(0) + x(2) + H_4^2 [x(1) + x(3)] \\ X(3) = x(0) + H_2 x(2) + H_4^3 [x(1) + H_2 x(3)] \end{cases}$$

Dimostrazione

$$X(k) = X_0\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) + H_N^k X_1\left(\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor\right) = X_0(\lfloor k \rfloor_2) + H_4^k X_1(\lfloor k \rfloor_2) \quad k = 0, \dots, 3$$

$$\begin{cases} X_0(k) = x(0) + x(2) H_2^k \\ X_1(k) = x(1) + x(3) H_2^k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0(0) = x(0) + x(2) \\ X_0(1) = x(0) + x(2) H_2 \\ X_1(0) = x(1) + x(3) \\ X_1(1) = x(1) + x(3) H_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(0) = X_0(0) + X_1(0) = x(0) + x(2) + x(1) + x(3) \\ X(1) = X_0(1) + H_4 X_1(1) = x(0) + H_2 x(2) + H_4 [x(1) + H_2 x(3)] \\ X(2) = X_0(0) + H_4^2 X_1(0) = x(0) + x(2) + H_4^2 [x(1) + x(3)] \\ X(3) = X_0(1) + H_4^3 X_1(1) = x(0) + H_2 x(2) + H_4^3 [x(1) + H_2 x(3)] \end{cases}$$

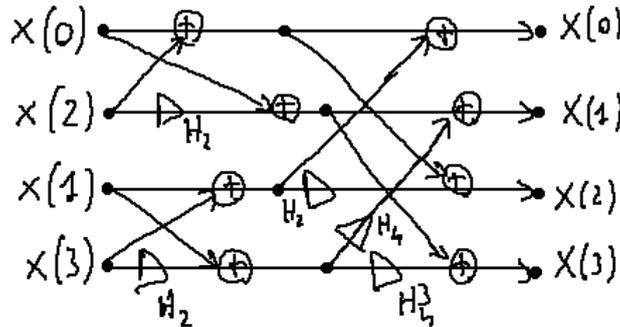


Figura 16.5: Schema circuitale a farfalla.

16.3.2 IDFT

Tutte le considerazioni sulla DFT valgono anche per la IDFT: basta applicare l’algoritmo sul complesso coniugato della DFT e poi dividere per N:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}} = \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{N-1} X^*(k) e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} \right]^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(n) = \text{IDFT}[X(k)] = \frac{1}{N} \text{DFT}[X^*(k)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Capitolo 17

Analisi in frequenza di segnali a tempo continuo campionati

17.1 DTFT di un segnale analogico campionato

La trasformata di Fourier $X_d(f_a)$ del segnale $x_d(t)$, cioè il segnale analogico $x(t)$ campionato a frequenza f_c :

$$x_d(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) \delta(t - kT_c)$$

si può esprimere in due modi del tutto equivalenti:

$$\begin{aligned} X_d(f_a) &= \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - kT_c) \right\} = \\ &= \begin{cases} \mathcal{F} \{x(t)\} * \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_c) \right\} = \dots = \frac{1}{T_c} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X \left(f_a - k \frac{1}{T_c} \right) \\ \mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) \cdot \delta(t - kT_c) \right\} = \dots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) e^{-j2\pi k T_c f_a} \end{cases} \end{aligned}$$

La DTFT $X(e^{j2\pi f})$ del segnale a tempo discreto $x(k)$ può essere ricondotta alla trasformata di Fourier $X_d(f_a)$ del corrispondente segnale analogico $x(kT_c)$, campionato con una frequenza $f_c = \frac{1}{T_c}$ che rispetta il teorema del campionamento:

$$\begin{cases} X(e^{j2\pi f}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi f k} \\ X_d(f_a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_c) e^{-j2\pi k T_c f_a} \end{cases} \Rightarrow X_d(f \cdot f_c) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-j2\pi k f} = X(e^{j2\pi f})$$

Per ricostruire perfettamente il segnale campionato, serve un filtro passa-basso ideale $H(f)$, che è la porta di ampiezza T_c e supporto $\left[-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right]$, per eliminare le repliche dello spettro periodico $X_d(f_a)$ lasciando solo quella centrata intorno all'origine ($k = 0$):

$$X(f_a) = H(f) * X_d(f_a) = T_c X_d(f_a) \quad f_a \in \left[-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right]$$

Quindi il legame tra la DTFT del segnale a tempo discreto $x(k)$ e la trasformata di Fourier del segnale campionato $x(kT_c)$ filtrata con un filtro passa-basso è:

$$X(f \cdot f_c) = T_c \cdot X_d(f \cdot f_c) = T_c \cdot X(e^{j2\pi f}) \quad f_a \in \left[-\frac{f_c}{2}, \frac{f_c}{2}\right]$$

17.2 DFT di un segnale analogico campionato

Ipotesi

- il segnale $x(t)$ ha supporto $(0, T_x)$ limitato nel tempo;
- il segnale $x(t)$ è a banda limitata (pari a B_x);
- il segnale $x(t)$ viene campionato con una frequenza di campionamento $f_c \geq 2B_x$ per evitare l'aliasing in frequenza, generando la sequenza:

$$x(n) = x(nT_c) \quad n = 0, \dots, N-1$$

- si considera un intervallo di tempo T_0 :

$$T_0 = \frac{1}{\Delta f} = NT_c = \frac{N}{f_c}$$

che includa il supporto T_x del segnale $x(t)$, per evitare l'aliasing nel tempo:

$$T_0 \geq T_x$$

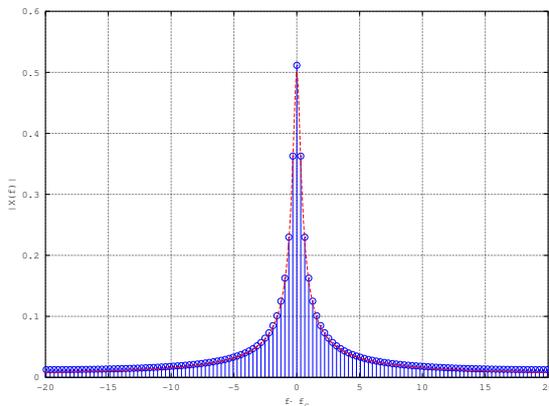
L'uso della DFT al posto della DTFT permette di lavorare su frequenze discrete e su un numero finito di campioni nel tempo:

$$\begin{cases} X(f \cdot f_c) = X\left(f \cdot \frac{N}{T_0}\right) = \frac{T_0}{N} \cdot X(e^{j2\pi f}) \\ X(k) = X\left(e^{j2\pi \frac{k}{N}}\right) \end{cases} \Rightarrow X\left(\frac{k}{T_0}\right) = \frac{T_0}{N} X(k) \quad k = 0, \dots, N-1$$

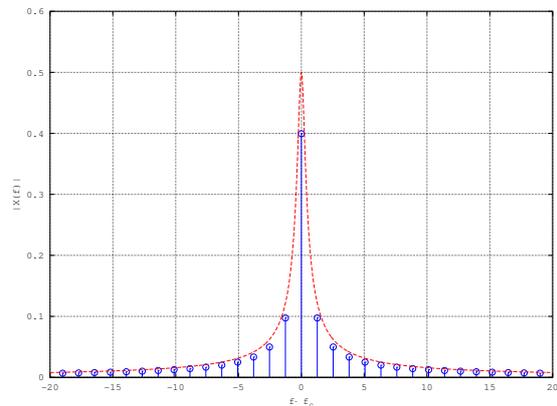
Aumentando l'intervallo T_0 su cui si osserva il segnale con la tecnica dell'aggiunta degli zeri (a parità di frequenza di campionamento), si può aumentare la **risoluzione in frequenza** dello spettro, perché la trasformata di Fourier $X\left(\frac{k}{T_0}\right)$ del segnale viene campionata con una minore spaziatura in frequenza $\Delta f = \frac{1}{T_0}$.

Parametri La scelta dei parametri deve essere fatta in modo da limitare l'aliasing nel tempo e in frequenza:

$$\begin{cases} T_0 = NT_c \\ f_c = \frac{1}{T_c} \\ \Delta f = \frac{1}{T_0} \end{cases}$$



(a) Esempio di aliasing in frequenza (visibile soprattutto agli estremi), dovuto a frequenza di campionamento f_c troppo bassa



(b) Esempio di aliasing nel tempo (visibile soprattutto intorno all'origine), dovuto a intervallo di tempo T_0 troppo basso

Capitolo 18

Sistemi LTI a tempo discreto

18.1 Classificazione dei sistemi a tempo discreto

Un **sistema** per i segnali a tempo discreto è definito tramite la sua relazione ingresso-uscita:

$$y(n) = L[x(n)]$$

18.1.1 Sistemi lineari

Un sistema è **lineare** se soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$L[\alpha_1 x_1(n) + \alpha_2 x_2(n)] = \alpha_1 L[x_1(n)] + \alpha_2 L[x_2(n)]$$

18.1.2 Sistemi tempo-invarianti o stazionari

Un sistema è **tempo-invariante** (o **stazionario**) se un ritardo/anticipo n_0 sull'ingresso $x(n)$ si traduce in un ritardo/anticipo uguale sull'uscita $y(n)$ senza che cambi la forma del segnale di uscita $y(n)$:

$$L[x(n - n_0)] = y(n - n_0) \quad \forall n_0$$

18.1.3 Sistemi passivi

Un sistema è **passivo** se a un ingresso $x(n)$ con energia finita E_x corrisponde un segnale $y(n)$ con energia E_y minore o uguale all'energia dell'ingresso:

$$E_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y(n)|^2 \leq E_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \in \mathbb{R}$$

Il sistema è **senza perdite** se la relazione vale con il segno di uguaglianza: tutta l'energia dell'ingresso $x(n)$ viene conservata:

$$E_y = E_x$$

18.1.4 Sistemi causali

Un sistema è **causale** se l'uscita $y(n)$ non dipende dai valori futuri dell'ingresso $x(n)$, ma solo da quelli passati e da quello corrente.

Il comportamento di sistemi LTI causali a tempo discreto può essere descritto da un'**equazione alle differenze** finite e coefficienti costanti, che esprime l'uscita $y(n)$ all'istante

corrente come combinazione lineare degli ingressi agli istanti passati e a quello corrente e delle uscite agli istanti passati (di solito $a_0 = 1$):

$$\begin{aligned} a_0 y(n) &= - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) = \\ &= -a_1 y(n-1) - a_2 y(n-2) - \dots - a_M y(n-M) + \\ &+ b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + b_2 x(n-2) + \dots + b_N x(n-N) \end{aligned}$$

- Il sistema è **ricorsivo** se l'uscita $y(n)$ dipende da almeno un valore dell'uscita in istanti precedenti.
- Il sistema è **non ricorsivo** se tutti i coefficienti a_i sono nulli.

L'equazione alle differenze di un sistema causale permette di trovare i valori di $y(n)$ per $n \geq 0$, noti i valori di $x(n)$ e le condizioni iniziali $y(-1), \dots, y(-M)$:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) = y_{so}(n) + y_{io}(n)$$

Risposta forzata

$y_{so}(n)$ è detta **risposta allo stato nullo**, e rappresenta l'evoluzione del sistema con condizioni iniziali nulle, tenendo conto solo degli ingressi:

$$y_{so}(n) = - \sum_{k=0}^M a_k y_{so}(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

Trascurare le condizioni iniziali significa studiare il comportamento del sistema a regime (sistema scarico).

Risposta libera

y_{io} è detta **risposta all'ingresso nullo**, e rappresenta l'evoluzione del sistema con ingresso nullo, ma tenendo conto delle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} y_{io}(n) = - \sum_{k=0}^M a_k y_{io}(n-k) \\ y_{io}(k) = y(k) \quad k = -M, \dots, -1 \end{cases}$$

Per sistemi LTI stabili, $y_{io}(n)$ è anche detta **risposta al transitorio** perché siccome l'ingresso è nullo tende a smorzarsi nel tempo fino ad annullarsi.

Sistemi senza memoria

Un sistema è **senza memoria** se l'uscita $y(n)$ dipende solo dal valore corrente dell'ingresso $x(n)$.

Il sistema non ricorsivo:

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k x(n-k)$$

ha memoria pari a N , perché l'uscita $y(n)$ dipende anche da N valori passati dell'ingresso $x(n)$.

18.2 Sistemi LTI

18.2.1 Risposta all'impulso

I sistemi LTI causali scarichi sono caratterizzati da una **risposta all'impulso** $h(n)$, che è la risposta del sistema quando in ingresso è presente la sequenza $x(n) = \delta(n)$:

$$h(n) = L[\delta(n)]$$

La risposta all'impulso $h(n)$ lega l'ingresso $x(n)$ e l'uscita $y(n)$ del sistema:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(n-i)$$

Dimostrazione

$$y(n) = L[x(n)] = L\left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \delta(n-i)\right] =$$

Sfruttando il fatto che il sistema è lineare:

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) L[\delta(n-i)] =$$

Sfruttando il fatto che il sistema è tempo-invariante:

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) h(n-i)$$

Tutti i sistemi LTI possono essere quindi espressi in forma non ricorsiva, dove $b_k = h(k)$. L'uscita del sistema dipende dai contributi causale ($i \geq 0$) e anticausale ($i < 0$):

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) x(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{-1} h(i) x(n-i) + \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) x(n-i)$$

Siccome il sistema è causale, la parte anticausale è nulla:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{+\infty} h(i) x(n-i)$$

18.2.2 Risposta in frequenza

Ipotesi

- $x(n)$ e $h(n)$ sono trasformabili mediante DTFT;
- si trascura la risposta al transitorio $y_{so}(n)$.

La DTFT del segnale in uscita $y(n)$ è pari al prodotto delle DTFT del segnale in ingresso $x(n)$ e della risposta all'impulso $h(n)$ del sistema LTI:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

Dimostrazione

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) * h(n)] e^{-j\omega n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) h(n-i) \right] e^{-j\omega n} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n-i) e^{-j\omega n} \right] =$$

Effettuando il cambio di variabile $m = n - i$ nella sommatoria interna:

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j\omega(m+i)} \right] = \left[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) e^{-j\omega i} \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) e^{-j\omega m} \right] =$$

$$= H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

La DTFT $H(e^{j\omega})$ della risposta all'impulso $h(n)$ è detta **risposta in frequenza** del sistema LTI:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) e^{-j\omega i} = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

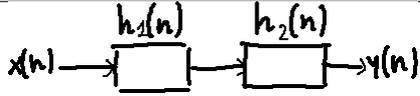
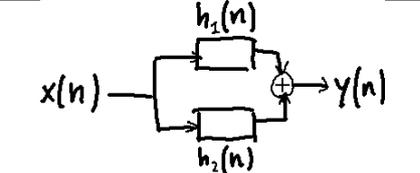
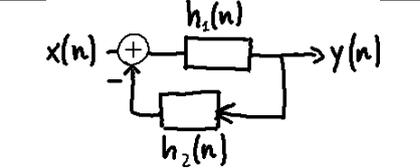
Serie		$y(n) = x(n) * h_1(n) * h_2(n)$ $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})$
Parallelo		$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$ $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) [H_1(e^{j\omega}) + H_2(e^{j\omega})]$
Con reazione		$y(n) = [x(n) - y(n) * h_2(n)] * h_1(n)$ $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \frac{H_1(e^{j\omega})}{1 + H_1(e^{j\omega}) H_2(e^{j\omega})}$

Tabella 18.1: Interconnessione di sistemi LTI.

Risposta a esponenziali complessi

Gli esponenziali complessi sono delle autofunzioni dei sistemi LTI, perché a un ingresso a esponenziale complesso corrisponde ancora un'uscita a esponenziale complesso:

$$x(n) = e^{j\omega_0 n} \Rightarrow y(n) = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0}) = |H(e^{j\omega_0})| \cdot e^{j\omega_0 n + j \arg [H(e^{j\omega_0})]}$$

Dimostrazione

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) e^{j\omega_0(n-i)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} h(i) e^{-j\omega_0 i}$$

Se la risposta all'impulso $h(n)$ è reale, e la sinusoidale $x(n)$ è reale:

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \theta) \Rightarrow y(n) = |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \theta + \arg[H(e^{j\omega_0})])$$

Dimostrazione

$$x(n) = \cos(\omega_0 n + \theta) = \frac{e^{j\omega_0 n + j\theta} + e^{-j\omega_0 n - j\theta}}{2}$$

Applicando il risultato precedente a ciascuno dei due esponenziali complessi:

$$y(n) = \frac{1}{2} \left\{ e^{j\theta} |H(e^{j\omega_0})| \cdot e^{j\omega_0 n + j \arg[H(e^{j\omega_0})]} + e^{-j\theta} |H(e^{-j\omega_0})| \cdot e^{-j\omega_0 n + j \arg[H(e^{-j\omega_0})]} \right\} =$$

Ricordando le proprietà di simmetria della DTFT della sequenza reale $h(n)$ (modulo pari e fase dispari):

$$= \frac{1}{2} |H(e^{j\omega_0})| \left\{ e^{j\theta} e^{j\omega_0 n + j \arg[H(e^{j\omega_0})]} + e^{-j\theta} e^{-j\omega_0 n - j \arg[H(e^{j\omega_0})]} \right\}$$

Sistemi IIR

L'uscita $y(n)$ di un **sistema IIR** (Infinite Impulse Response) dipende non solo dal segnale in ingresso $x(n)$, ma anche dai campioni del segnale in uscita $y(n)$:

$$y(n) = - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-j\omega k}}$$

La risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ del sistema si può scrivere:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k e^{-j\omega k}}$$

Sistemi IIR puramente ricorsivi Un sistema IIR è **puramente ricorsivo** se:

$$y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \quad b_k = 0 \quad \forall k \neq 0$$

La risposta all'impulso $h(n)$ di un sistema IIR puramente ricorsivo è a supporto illimitato.

Esempio: risposta all'impulso di un sistema IIR puramente ricorsivo

$$y(n) = \frac{1}{3} y(n-1) + x(n) \Rightarrow h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Calcoli

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{3} Y(e^{j\omega}) e^{-j\omega} + X(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3} e^{-j\omega}}$$

Sistemi FIR

L'uscita $y(n)$ di un **sistema FIR** (Finite Impulse Response) dipende solo dal segnale d'ingresso $x(n)$:

$$-\sum_{k=1}^M a_k y(n-k) = 0 \Rightarrow y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^N b_k e^{-j\omega k}$$

La risposta all'impulso $h(n)$ di un sistema FIR è a supporto finito $[0, N]$:

$$h(n) \triangleq \sum_{k=0}^N b_k \delta(n-k) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_N \delta(n-N)$$

18.2.3 Stabilità

Un sistema è **stabile secondo il criterio BIBO** (Bounded-Input Bounded-Output) (o BIBO-stabile) se e solo se ad ogni ingresso $x(n)$ di ampiezza limitata corrisponde un'uscita $y(n)$ di ampiezza limitata:

$$|x(n)| \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |y(n)| \in \mathbb{R}$$

La risposta al transitorio di un sistema BIBO-stabile tende a smorzarsi al crescere di n .

Teorema Un sistema LTI è BIBO-stabile se e solo se la sua risposta all'impulso $h(n)$ è sommabile in modulo:

$$\text{stabile} \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione condizione sufficiente

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{stabile}$$

Considerando un ingresso $x(n)$ di ampiezza limitata, il valore dell'uscita $y(n)$ è:

$$|y(n)| = |h(n) * x(n)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(n-k) \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| |x(n-k)| \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione condizione necessaria

$$\text{stabile} \Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \in \mathbb{R}$$

Considerando l'ingresso $x(n)$ di ampiezza limitata:

$$x(n) = \begin{cases} \frac{h^*(-n)}{|h(-n)|} & h(-n) \neq 0 \\ 0 & h(-n) = 0 \end{cases} \Rightarrow |x(n)| = \begin{cases} \frac{|h^*(-n)|}{|h(-n)|} = 1 & h(-n) \neq 0 \\ 0 & h(-n) = 0 \end{cases}$$

il valore dell'uscita $y(n)$ in $n = 0$ è:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) x(-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) \frac{h^*(k)}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{|h(k)|^2}{|h(k)|} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \Rightarrow \\ \text{stabile} \Rightarrow y(n) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| \in \mathbb{R}$$

18.2.4 Realizzabilità fisica

Un sistema LTI è **fisicamente realizzabile** se l'equazione alle differenze è causale e i coefficienti a_i e b_i della sua equazione alle differenze sono tutti reali:

$$y(n) = \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \quad \forall k : a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

Un sistema è fisicamente realizzabile se la sua risposta all'impulso $h(n)$ è reale e causale:

$$\left\{ \begin{array}{l} h(n) \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 0 \\ h(n) = 0 \quad \forall n < 0 \end{array} \right.$$

La risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$ di un sistema fisicamente realizzabile è unilatera:

$$H^+(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) e^{-j\omega n}$$

ed ha le seguenti relazioni di parità:

- la parte reale e il modulo sono pari;
- la parte immaginaria e la fase sono dispari.

18.2.5 Esempio: filtro passa-basso

Si vogliono confrontare tre sistemi LTI che hanno risposte all'impulso $h_1(n)$, $h_2(n)$ e $h_3(n)$:

$$h_i(n) = r_i^n \quad n = 0, \dots, N-1$$

dove:

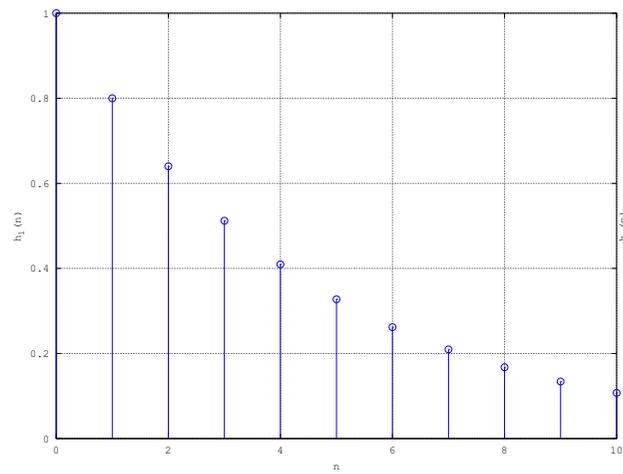
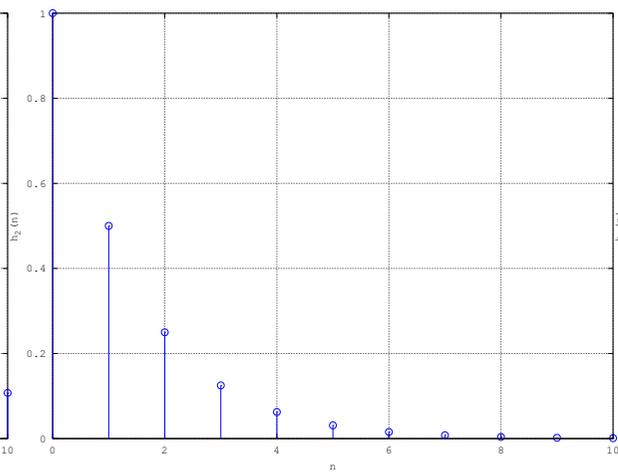
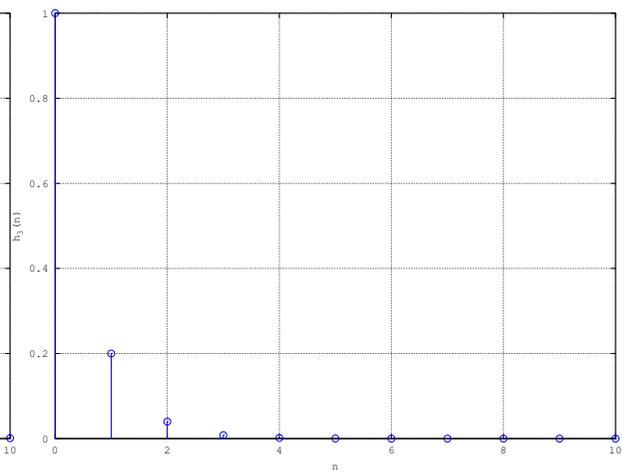
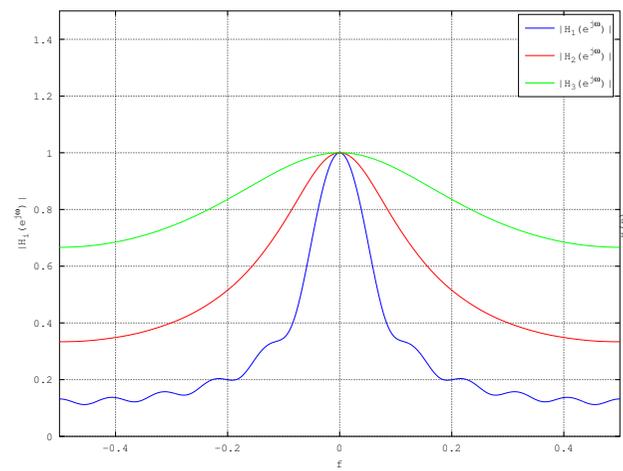
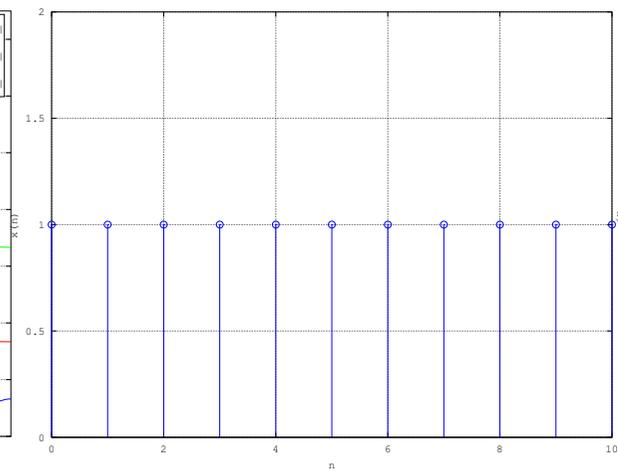
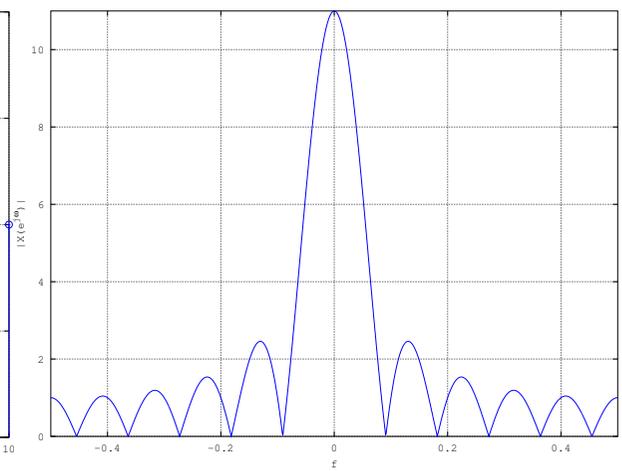
$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = 0,8 \\ r_2 = 0,5 \\ r_3 = 0,2 \end{array} \right.$$

La risposta in frequenza $H_i(e^{j\omega})$ è pari a:

$$H_i(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_i(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} r_i^n e^{-j\omega n} = \frac{1 - (r_i e^{-j\omega})^N}{1 - r_i e^{-j\omega}}$$

Si introduce come ingresso $x(n)$ una porta:

$$x(n) = u(n) - u(n-N) \Rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n} = \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)} e^{-j\pi f(N-1)}$$

(a) $h_1(n)$ (b) $h_2(n)$ (c) $h_3(n)$ (a) $|H_i(e^{j\omega})|$ (b) $x(n)$ (c) $|X(e^{j\omega})|$

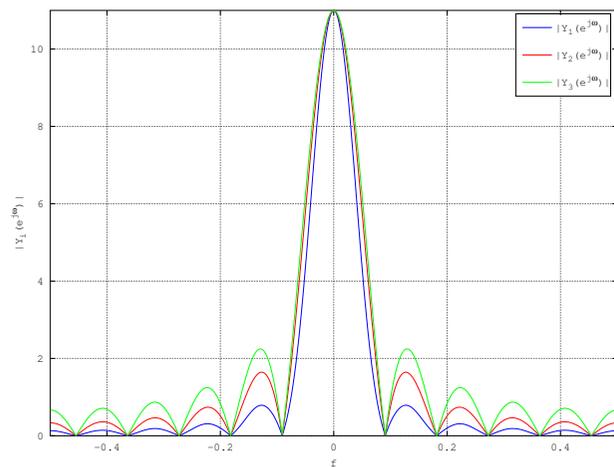
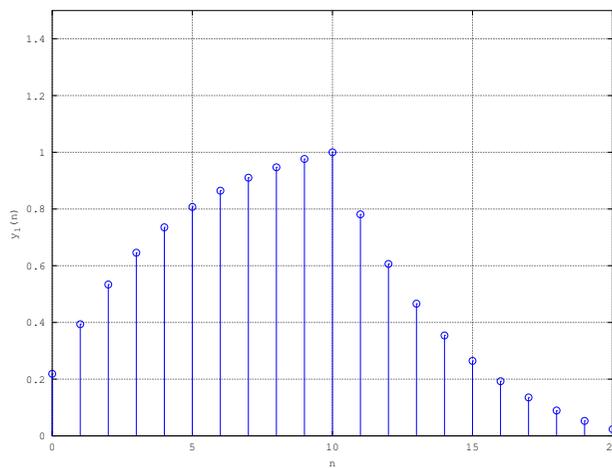
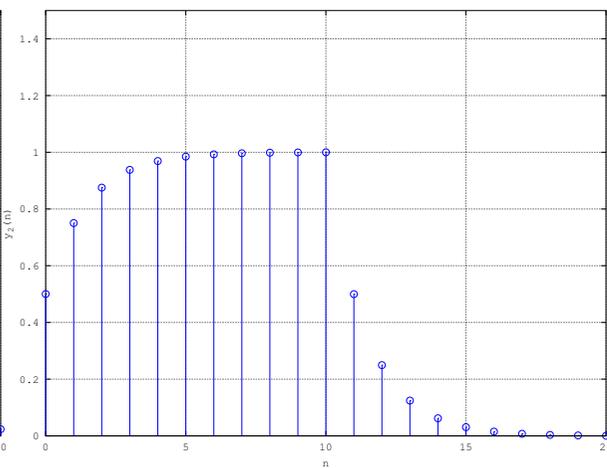


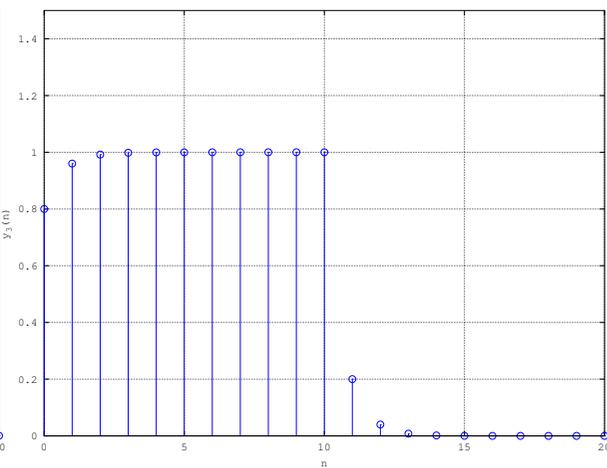
Figura 18.3: $|Y_i(e^{j\omega})|$



(a) $y_1(n)$



(b) $y_2(n)$



(c) $y_3(n)$

Il filtro passa-basso smorza le alte frequenze. L'uscita $y_i(n)$ appare più simile all'ingresso $x(n)$ con il filtro $h_3(n)$.

L'ingresso $x(n)$ risulta quindi meno smorzato con il filtro $h_3(n)$:

$$E(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^2(n) = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N = 11$$

$$E(y_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_1^2(n) \cong 8$$

$$E(y_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_2^2(n) \cong 9,7$$

$$E(y_3) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y_3^2(n) \cong 10,6$$

Questo sistema LTI è di tipo passivo perché l'energia dell'uscita $y_i(n)$ è sempre minore dell'energia dell'ingresso $x(n)$.

18.2.6 Distorsione

- Se il modulo della risposta in frequenza $|H(e^{j\omega})|$ non è costante, il sistema introduce una **distorsione in ampiezza**.
- Se la fase della risposta in frequenza $\arg[H(e^{j\omega})]$ non è lineare in $\omega = 2\pi f$, il sistema introduce una **distorsione di fase**.

Si definisce **ritardo di gruppo** $\tau(\omega)$ il ritardo medio subito dalle componenti armoniche del segnale in ingresso $x(n)$:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \arg[H(e^{j\omega})]$$

Sistema LTI non distorcente

Si vuole realizzare un amplificatore non distorcente:

$$y(n) = A \cdot x(n - N)$$

dove:

- N è il tempo impiegato dal segnale in ingresso $x(n)$ per attraversare il sistema (ritardo);
- A è l'amplificazione.

La sua risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = Ae^{-j\omega N}$$

ha:

- modulo A costante;
- rotazione di fase $-\omega N$ lineare in ω .

La sua risposta all'impulso $h(n)$:

$$h(n) = A\delta(n - N)$$

è una delta di ampiezza A centrata in N .

Se il ritardo di gruppo $\tau(\omega)$ è costante, cioè le componenti armoniche nel segnale di ingresso $x(n)$ subiscono lo stesso ritardo costante, allora la fase è lineare e il sistema è non distorcente.

18.2.7 Analisi tramite DFT

L'uscita $y(n)$ di un sistema LTI si può ottenere dalla IDTFT del prodotto tra la DTFT dell'ingresso $x(n)$ e la risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) \Rightarrow y(n) = x(n) * h(n) \quad n \in [0, N_x + N_h - 2]$$

dove N_x e N_h sono i supporti rispettivamente di $x(n)$ e $h(n)$.

Se si vuole sostituire la DTFT con la DFT, la IDFT non restituisce lo stesso risultato:

$$Y(k) = X(k) \cdot H(k) \Rightarrow y(n) \neq x(n) \otimes h(n) \quad n \in [0, \max\{N_x, N_h\} - 1]$$

perché la convoluzione circolare ha un supporto diverso dalla convoluzione lineare.

Per far sì che il risultato coincida con la convoluzione lineare, occorre procedere all'inserimento di zeri (zero padding) nelle due sequenze $x(n)$ e $h(n)$, in numero tale da garantire la lunghezza di una convoluzione lineare:

$$x_z(n) = \begin{cases} x(n) & n \in [0, N_x - 1] \\ 0 & n \in [N_x, N_x + N_h - 2] \end{cases}$$

$$h_z(n) = \begin{cases} h(n) & n \in [0, N_h - 1] \\ 0 & n \in [N_h, N_x + N_h - 2] \end{cases}$$

In questo modo la convoluzione circolare ottenuta dalla IDFT coincide con la convoluzione lineare, e quindi con l'uscita del sistema $y(n)$:

$$x_z(n) \otimes h_z(n) = x(n) * h(n) = y(n) \quad n = 0, \dots, N_x + N_h - 2$$

Dimostrazione

$$x(n) * h(n) = x_z(n) * h_z(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_z(m) h_z(n-m) =$$

Poiché $x_z(m)$ ha supporto finito $[0, N_y - 1]$:

$$= \sum_{m=0}^{N_y-1} x_z(m) h_z(n-m)$$

- Se $n < 0$:

$$h_z(n-m) = 0 \quad m \geq 0 \Rightarrow x_z(m) h_z(n-m) = 0 \quad \forall m \geq 0$$

- Se $n = N_y$:

$$\begin{cases} h_z(n-m) = 0 & m \in [0, N_y - N_h] = [0, N_x - 1] \\ x_z(m) = 0 & m \geq N_x \end{cases} \Rightarrow x_z(m) h_z(n-m) = 0 \quad \forall m \geq 0$$

- Se $n = N_y + k$ ($k > 0$):

$$\begin{cases} h_z(n-m) = 0 & m \in [0, N_y + k - N_h] = [0, N_x + k - 1] \\ x_z(m) = 0 & m \geq N_x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_z(m) h_z(n-m) = 0 \quad \forall m \geq 0$$

Se il supporto $N_y = N_x + N_h - 1$ viene scelto come potenza di 2, si può impiegare la FFT per il calcolo delle 3 DFT, con complessità finale proporzionale a $N_y \log_2(N_y)$, invece della complessità dell'ordine di $N_h N_x$ operazioni per il calcolo della convoluzione nel dominio del tempo.

Capitolo 19

Trasformata zeta

Vantaggio rispetto alla DTFT La trasformata zeta converge in modo uniforme per una classe di segnali più vasta.

Utilità La trasformata zeta trasforma le equazioni alle differenze in equazioni algebriche più semplici.

19.1 Definizione

La **trasformata zeta** $X(z)$ della sequenza $x(n)$ è un polinomio nella variabile z^{-1} e con i campioni della sequenza $x(n)$ per coefficienti:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

dove z è una variabile complessa di modulo ρ e fase $\omega = 2\pi f$, che può assumere valori in tutto il piano complesso:

$$z = \rho \cdot e^{j\omega}$$

19.1.1 Relazione con la DTFT

La DTFT $X(e^{j\omega})$ è un caso particolare della trasformata zeta perché, nel piano complesso, percorre al variare di ω una circonferenza di raggio unitario:

$$X(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

Come nel dominio del tempo continuo la trasformata di Laplace è la generalizzazione della trasformata di Fourier, così nel dominio del tempo discreto la trasformata zeta è la generalizzazione della DTFT.

19.1.2 Relazione con la DFT

A partire dai campioni della DFT di una sequenza $x(n)$ a supporto limitato $[0, N-1]$ si può risalire alla sua trasformata zeta tramite interpolazione:

$$X(z) = \frac{1}{N} (1 - z^{-N}) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{X(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

Dimostrazione

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} =$$

Sostituendo l'espressione della IDFT:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \right] z^{-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1} \right)^n = \\ \sum_{k=0}^{N-1} x^k &= \frac{1-x^N}{1-x} \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}kN} z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1-e^{j2\pi k} z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} = \\ e^{j2\pi k} &= 1 \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \frac{1-z^{-N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}} \end{aligned}$$

19.2 Analisi della regione di convergenza

L'espressione della trasformata zeta è detta serie di Cauchy-Laurent. La **regione di convergenza** (Region of Convergence [ROC]) della serie è il luogo dei punti per cui essa converge in modo uniforme. Nella regione di convergenza, la trasformata zeta $X(z)$ è una funzione analitica, ossia continua e infinitamente derivabile con derivate continue.

La serie della trasformata zeta converge se e solo se la sequenza $x(n) \rho^{-n}$ è assolutamente sommabile:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| \rho^{-n} \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione La trasformata zeta $X(z)$ della sequenza $x(n)$ equivale alla DTFT della sequenza $x(n) \rho^n$:

$$z = \rho e^{j\omega} \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) [\rho e^{j\omega}]^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [x(n) \rho^{-n}] e^{-j\omega n}$$

Per la condizione di esistenza della DTFT:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n) \rho^{-n}| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)| \rho^{-n} \in \mathbb{R}$$

Le regioni di convergenza nel piano complesso sono delimitate da circonferenze (ossia luoghi dei punti a modulo costante), perché non dipendono dalla fase ω ma solo dal modulo ρ .

Esempio

$$x(n) = \delta(n - n_0) \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n - n_0) z^{-n} = z^{-n_0}$$

- se $n_0 = 0$ converge su tutto il piano complesso:

$$X(z) = 1$$

- se $n_0 > 0$ diverge per $z = 0$:

$$X(z) = \frac{1}{z^{n_0}}$$

- se $n_0 < 0$ diverge per $z \rightarrow +\infty$:

$$X(z) = z^{|n_0|}$$

19.2.1 Sequenze unilatera e sequenze bilatera

La ricerca della regione di convergenza di $X(z)$ equivale alla ricerca della regione in cui la serie $x(n)\rho^{-n}$ risulta assolutamente sommabile:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|\rho^{-n} = \overbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)|\rho^{-n}}^{\text{anti-causale}} + \overbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |x(n)|\rho^{-n}}^{\text{causale}} = \sum_{n=1}^{+\infty} |x(-n)|\rho^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x(n)|}{\rho^n}$$

- la parte anti-causale converge all'interno della circonferenza avente un raggio ρ_1 sufficientemente piccolo;
- la parte causale converge all'esterno di una circonferenza di raggio ρ_2 sufficientemente grande.

Sequenze unilatera anti-causali La parte causale è nulla \Rightarrow la trasformata zeta $X(z)$ converge all'interno della circonferenza di raggio ρ_1 (figura 19.1a).

Sequenze unilatera causali La parte anti-causale è nulla \Rightarrow la trasformata zeta $X(z)$ converge all'esterno della circonferenza di raggio ρ_2 (figura 19.1b).

Sequenze bilatera Esistono sia la parte causale sia la parte anti-causale:

- se $\rho_1 < \rho_2$, la trasformata zeta $X(z)$ non converge (l'intersezione tra le due regioni è nulla);
- se $\rho_1 > \rho_2$, la trasformata zeta $X(z)$ converge nella corona circolare tra ρ_2 e ρ_1 (figura 19.1c).

19.2.2 Regione di convergenza delle sequenze gradino

Il gradino e il gradino anti-causale hanno la stessa trasformata zeta:

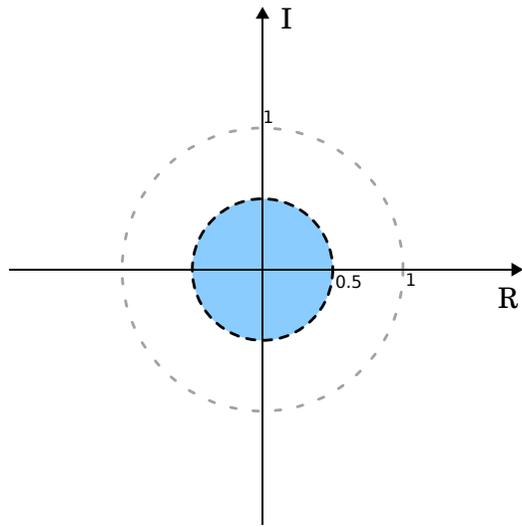
$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

ma regioni di convergenza differenti:

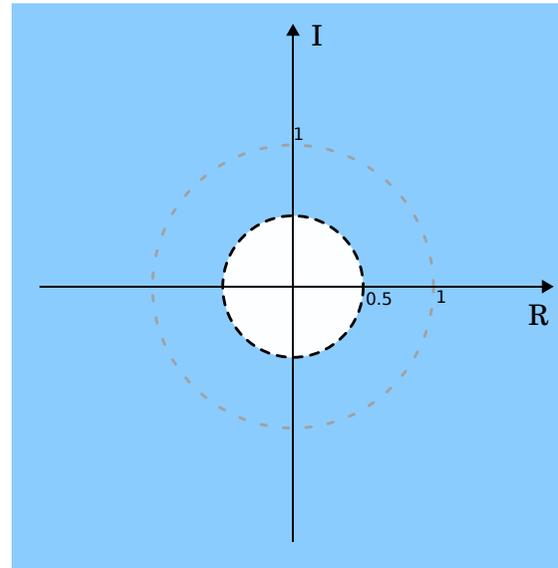
- il gradino $u(n)$ converge all'esterno della circonferenza unitaria: $|z| > 1$;

Calcoli

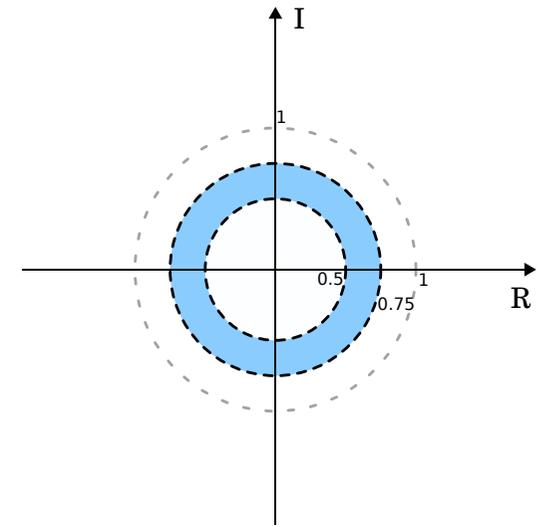
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (z^{-1})^n = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z^{-1}| < 1$$



(a) Sequenza unilatera anti-causale.



(b) Sequenza unilatera causale.



(c) Sequenza bilatera.

Figura 19.1: Sequenze unilatera e bilatera.¹

- il gradino anti-causale $-u(-n-1) = \begin{cases} -1 & n \leq -1 \\ 0 & n > -1 \end{cases}$ converge all'interno della circonferenza unitaria: $|z| < 1$.

Calcoli

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} [-u(-n-1)] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (z^{-1})^n = - \sum_{m=1}^{+\infty} z^m = \\ &= - \sum_{m=0}^{+\infty} z^m + 1 = -\frac{1}{1-z} + 1 = -\frac{z}{1-z} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| < 1 \end{aligned}$$

19.2.3 Regione di convergenza di sequenze a supporto finito

La trasformata zeta $X(z)$ di sequenze a supporto finito $[n_1, n_2]$:

$$X(z) = \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k) z^{-k}$$

Dimostrazione

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k) \delta(n-k) z^{-n} = \\ &= \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(n-k) z^{-n} = \sum_{k=n_1}^{n_2} x(k) z^{-k} \end{aligned}$$

Sequenze unilateri causali ($n_1 \geq 0$) La trasformata zeta $X(z)$ converge in qualunque punto del piano complesso eccetto l'origine ($z = 0$). La regione di convergenza è all'esterno di una circonferenza di raggio infinitesimo.

Sequenze unilateri anti-causali ($n_2 < 0$) La trasformata zeta $X(z)$ converge in qualunque punto nel piano complesso eccetto l'infinito ($z \rightarrow \infty$). La regione di convergenza è all'interno di una circonferenza di raggio infinito.

Sequenze bilateri La trasformata zeta $X(z)$ converge in qualunque punto nel piano complesso eccetto l'origine e l'infinito.

¹Queste immagini sono tratte da Wikimedia Commons ([Region of convergence 0.5 anticausal.svg](#), [Region of convergence 0.5 causal.svg](#), [Region of convergence 0.5 0.75 mixed-causal.svg](#)), sono state realizzate da Colin M.L. Burnett, e sono concesse sotto la [licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 3.0 Unported](#).

19.2.4 Regione di convergenza di sequenze con trasformata zeta espressa come rapporto di polinomi

Nella maggior parte dei casi la trasformata zeta è espressa come rapporto di polinomi:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{p_n} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{p_d} a_i z^{-i}} = z^{p_d - p_n} \frac{\sum_{i=0}^{p_n} b_i z^{p_n - i}}{\sum_{i=0}^{p_d} a_i z^{p_d - i}} = \frac{b_0}{a_0} z^{p_d - p_n} \frac{\prod_{i=1}^{p_n} (z - c_i)}{\prod_{i=1}^{p_d} (z - d_i)}$$

- le radici c_1, \dots, c_{p_n} del numeratore sono gli **zeri** di $X(z)$;
- le radici d_1, \dots, d_{p_d} del denominatore sono i **poli** di $X(z)$.

Sequenze unilateri causali La trasformata zeta $X(z)$ converge all'esterno della circonferenza che racchiude tutti i poli, cioè tutti i poli devono stare all'interno della circonferenza di raggio pari al modulo del polo più vicino all'origine. La circonferenza esiste sempre perché non possono esistere poli per $z \rightarrow \infty$.

Sequenze unilateri anti-causali La trasformata zeta $X(z)$ converge all'interno della circonferenza che esclude tutti i poli, cioè tutti i poli devono stare all'esterno della circonferenza di raggio pari al modulo del polo più distante dall'origine.

Sequenze bilateri La trasformata zeta $X(z)$ converge nella corona circolare tra la circonferenza del polo più distante e quella del polo più vicino.

19.3 Proprietà della trasformata zeta

19.3.1 Trasformata zeta unilatera

La trasformata zeta unilatera $X^+(z)$ è la trasformata della parte causale della sequenza $x(n)$:

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

Per le sequenze unilateri causali, la trasformata zeta $X(z)$ coincide con la trasformata zeta unilatera $X^+(z)$.

	Sequenza $y(n)$	Trasformata zeta $X^+(z)$
Ritardo nel tempo	$x(n - N)$	$z^{-N} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^N x(-n) z^n \right]$
Anticipo nel tempo	$x(n + N)$	$z^N \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^N x(n) z^{-n} \right]$

Tabella 19.1: Proprietà di traslazione nel tempo per trasformate zeta unilateri.

	Sequenza	Trasformata zeta	Regione di convergenza
Linearità	$a_1x(n) + a_2y(n)$	$a_1X(z) + a_2X(z)$	$R_x \cap R_y$
Ritardo nel tempo	$x(n - N)$	$z^{-N}X(z)$	$R_x - \{0\}$
Anticipo nel tempo	$x(n + N)$	$z^N X(z)$	$R_x \in \mathbb{R}$
Ribaltamento nel tempo	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_x}$
Coniugazione complessa	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_x
Scalamento nel dominio trasformato	$a^n x(n)$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$ a R_x$
Derivata nel dominio trasformato	$nx(n)$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$	R_x
Convoluzione nel tempo	$x(n) * y(n)$	$X(z)Y(z)$	$R_x \cap R_y$
Parte reale	$\Re\{x(n)\}$	$\frac{1}{2} [X(z) + X^*(z^*)]$	R_x
Parte immaginaria	$\Im\{x(n)\}$	$\frac{1}{2j} [X(z) - X^*(z^*)]$	R_x
Sequenza cosinusoidale	$\cos(2\pi fn)x(n)$	$\frac{1}{2} [X(ze^{j2\pi f}) + X(ze^{-j2\pi f})]$	—
Sequenza sinusoidale	$\sin(2\pi fn)x(n)$	$\frac{j}{2} [X(ze^{j2\pi f}) - X(ze^{-j2\pi f})]$	—

Tabella 19.2: Proprietà della trasformata zeta.

Dimostrazione proprietà di ritardo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n-N) z^{-N} &= \sum_{m=-N}^{+\infty} x(m) z^{-m-N} = z^{-N} \left[\sum_{m=-N}^{-1} x(m) z^{-m} + \sum_{m=0}^{+\infty} x(m) z^{-m} \right] = \\ &= z^{-N} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^N x(-n) z^n \right]\end{aligned}$$

Dimostrazione proprietà di anticipo

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} x(n+N) z^{-n} &= \sum_{m=N}^{+\infty} x(m) z^{-m+N} = z^N \left[\sum_{m=0}^{+\infty} x(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{N-1} x(m) z^{-m} \right] = \\ &= z^N \left[X^+(z) - \sum_{n=0}^N x(n) z^{-n} \right]\end{aligned}$$

Teorema del valore iniziale

Se $x(n)$ è una sequenza causale:

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = x(0)$$

Dimostrazione

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} X(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left[x(0) + \underbrace{x(1)}_{=0} z^{-1} + \underbrace{x(2)}_{=0} z^{-2} + \dots \right]$$

19.4 Inversione della trasformata zeta

L'antitrasformata zeta è definita attraverso un integrale di circuitazione:

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

dove γ è una [curva di Jordan](#):

- percorsa in senso antiorario;
- appartenente alla regione di convergenza della trasformata zeta $X(z)$;
- comprendente l'origine;
- comprendente N_p poli della funzione $X(z) z^{n-1}$.

Sequenza $x(n)$	Trasformata zeta $X(z)$	Regione di convergenza	Poli e zeri
$\delta(n)$	1	$\forall z$	
$\delta(n-N), N > 0$	z^{-N}	$z \neq 0$	
$\delta(n+N), N > 0$	z^N	$z \in \mathbb{R}$	
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $	• $z = a$: polo
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $	
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $	
$na^{n-1} u(n)$	$\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $	
$(n-1)a^n u(n)$	$\frac{2az^{-1}-1}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $	
$n^2 a^n u(n)$	$\frac{az^{-1}(1+az^{-1})}{(1-az^{-1})^3}$	$ z > a $	
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $	
$a^n \sin(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{a \sin \omega_0 z^{-1}}{1-2a \cos \omega_0 z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a$	<ul style="list-style-type: none"> • $z = 0$: zero • $z = ae^{j\omega_0}$: polo • $z = ae^{-j\omega_0}$: polo
$a^n \cos(\omega_0 n) u(n)$	$\frac{1-a \cos \omega_0 z^{-1}}{1-2a \cos \omega_0 z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z > a$	<ul style="list-style-type: none"> • $z = a \cos \omega_0$: zero • $z = ae^{j\omega_0}$: polo • $z = ae^{-j\omega_0}$: polo
$a^n [u(n) - u(n-N)]$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$ z > 0$	

Tabella 19.3: Trasformata zeta di sequenze elementari

Dimostrazione

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}; \quad \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-k} z^{n-1} dz = \\
 &= \frac{1}{j2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \oint_{\gamma} z^{n-k-1} dz =
 \end{aligned}$$

Per il teorema di Cauchy:

$$\frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} z^{n-1} dz = \delta(n) \Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \delta(n-k) = x(n)$$

Per il teorema dei residui, l'integrale di linea si può esprimere come somma dei residui dovuti agli N_p poli:

$$x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) z^{n-1} dz = \sum_{i=1}^{N_p} \text{Res}_{X(z)z^{n-1}}(z_{0i})$$

Capitolo 20

Analisi dei sistemi LTI mediante trasformata zeta

Un sistema LTI può essere descritto usando la trasformata zeta:

$$\begin{cases} y(n) = h(n) * x(n) \\ Y(z) = H(z) X(z) \end{cases}$$

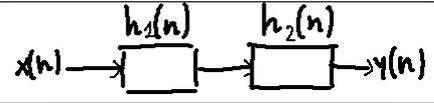
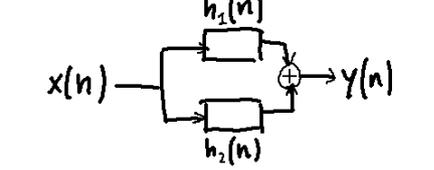
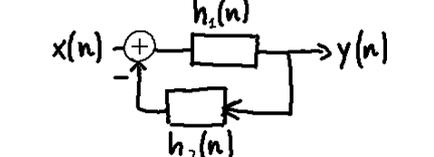
Serie		$y(n) = x(n) * h_1(n) * h_2(n)$ $Y(z) = X(z) H_1(z) H_2(z)$
Parallelo		$y(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]$ $Y(z) = X(z) [H_1(z) + H_2(z)]$
Con reazione		$y(n) = [x(n) - y(n) * h_2(n)] * h_1(n)$ $Y(z) = X(z) \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z) H_2(z)}$

Tabella 20.1: Interconnessione di sistemi LTI.

La regione di convergenza della trasformata $Y(z)$ coincide con l'intersezione tra le regioni di convergenza delle funzioni $X(z)$ e $H(z)$ (la cancellazione di poli e/o zeri estenderà la regione).

20.1 Filtri digitali

Un **filtro**¹ **digitale** è un sistema LTI causale e scarico²:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(n) = - \overbrace{\sum_{k=1}^M a_k y(n-k)}^{\text{ricorsivo}} + \overbrace{\sum_{k=0}^N b_k x(n-k)}^{\text{non ricorsivo}} \\ Y^+(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} X^+(z) = H_N(z) H_R(z) X^+(z) \end{array} \right.$$

20.1.1 Filtri FIR non ricorsivi

Un sistema LTI causale con risposta all'impulso $h(n)$ a supporto finito può essere descritto:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(n) = \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \\ H_N(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \end{array} \right.$$

Vantaggi dei filtri FIR

- Sono sempre stabili perché la funzione di trasferimento:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n z^{-n}$$

possiede solo zeri e un polo multiplo nell'origine (quindi entro il cerchio di raggio unitario).

- Possono essere progettati in modo da avere fase lineare.

20.1.2 Filtri IIR puramente ricorsivi

Un sistema LTI causale puramente ricorsivo può essere descritto:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(n) = - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) \\ H_R(z) = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}} \end{array} \right.$$

Vantaggio dei filtri IIR Generalmente soddisfano le specifiche di progetto con il minor numero possibile di coefficienti.

¹Un **filtro** è un sistema che seleziona una certa banda di frequenze di un segnale.

²Si veda la sezione 18.1.4.

20.2 Sistemi LTI non scarichi

Se le condizioni iniziali $y(-1), y(-1), \dots, y(-M)$ non sono nulle, bisogna considerare anche i campioni di $y(n)$ e $x(n)$ presi in valori negativi (da $-k$ a -1 , con $k > 0$):

$$\begin{cases} y(n) = -\sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^N b_k x(n-k) \\ Y(z) = -\sum_{k=1}^M a_k z^{-k} \left[Y^+(z) + \sum_{n=1}^k y(-n) z^n \right] + \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} \left[X^+(z) + \sum_{n=1}^k x(-n) z^n \right] \end{cases}$$

20.3 Stabilità di sistemi LTI

20.3.1 Sistemi LTI causali

Un sistema LTI causale è BIBO-stabile³ se la sua risposta all'impulso $h(n)$:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} h(k) * x(n-k)$$

è sommabile in modulo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| \in \mathbb{R}$$

Un sistema LTI causale è stabile se e solo se tutti i poli della risposta in frequenza $H(z)$ appartengono al cerchio di raggio unitario.

Dimostrazione

Ipotesi

- $H(z)$ ha poli semplici
- $p_n < p_d$

$$\begin{cases} H(z) = \sum_{i=1}^{p_d} \frac{\text{Res}(z_i)}{1 - d_i z^{-1}} \\ h(n) = \sum_{i=1}^{p_d} \text{Res}(z_i) \cdot d_i^n u(n) \end{cases}$$

Condizione necessaria

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \sum_{i=1}^{p_d} \text{Res}(z_i) \cdot d_i^n u(n) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^{p_d} |\text{Res}(z_i)| |d_i|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |\text{Res}(z_i)| \sum_{i=1}^{p_d} |d_i|^n$$

Se tutti i poli d_i appartengono al cerchio di raggio unitario, il sistema è stabile:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\text{Res}(z_i)| \sum_{i=1}^{p_d} |d_i|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} |\text{Res}(z_i)| \frac{1}{1 - |d_i|} \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| \in \mathbb{R}$$

³Si veda la sezione 18.2.3.

Condizione sufficiente

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |h(n)| \in R \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = 0$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{p_d} \text{Res}(z_i) \cdot d_i^n u(n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p_d} \text{Res}(z_i) \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} d_i^n = 0 \Leftrightarrow d_i < 1 \quad i = 1, \dots, p_d$$

Se un sistema LTI causale è stabile, la sua circonferenza di raggio unitario è inclusa nella regione di convergenza, che per i sistemi causali si estende all'esterno della circonferenza che comprende i poli.

20.3.2 Sistemi LTI anti-causali

Un sistema LTI anti-causale è stabile se e solo se tutti i poli della risposta in frequenza $H(z)$ non appartengono al cerchio di raggio unitario.

Se un sistema LTI anti-causale è stabile, la sua circonferenza di raggio unitario è inclusa nella regione di convergenza, che per i sistemi anti-causali si estende all'interno della circonferenza che comprende i poli.

20.3.3 Sistemi LTI bilateri

Se un sistema LTI bilatero è stabile, la sua circonferenza di raggio unitario è inclusa nella regione di convergenza, che per i sistemi bilateri è un anello circolare.

20.4 Realizzabilità fisica di sistemi LTI causali

Un sistema LTI causale⁴ è fisicamente realizzabile⁵ se la sua risposta all'impulso $h(n)$ è reale, ossia ogni coefficiente b_i e a_i della sua risposta in frequenza $H(z)$:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

è reale o è accoppiato con il suo complesso coniugato.⁶

20.5 Sistemi inversi

Molto spesso nelle applicazioni pratiche è richiesta l'implementazione di un sistema LTI, chiamato **sistema inverso**, che inverta le caratteristiche di un altro sistema caratterizzato dalla

⁴Si suppone scarico.

⁵Si veda la sezione 18.2.4.

⁶Infatti:

$$(z - \alpha)(z - \alpha^*) = z^2 - \alpha z - \alpha^* z + |\alpha|^2 = z^2 - (\alpha + \alpha^*)z + |\alpha|^2 = z^2 - 2\Re\{\alpha\}z + |\alpha|^2$$

trasformata $H(z)$:

$$H_I(z) = H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)}$$

Ad esempio, nella trasmissione di dati attraverso il canale telefonico, al terminale di ricezione è necessario eliminare la distorsione del canale applicando al segnale un sistema inverso a quello del canale.

La cascata di un sistema con il suo inverso è chiamato **sistema identità**:

$$\begin{cases} H_C(z) = H(z) H_I(z) = 1 \\ h_c(n) = \delta(n) \end{cases}$$

Se $H(z)$ ha forma razionale:

$$H(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{p_n} (1 - c_i z^{-1})}{a_0 \prod_{i=1}^{p_d} (1 - d_i z^{-1})}$$

la risposta in frequenza $H_I(z)$ del sistema inverso vale:

$$H_I(z) = \frac{b_0 \prod_{i=1}^{p_d} (1 - d_i z^{-1})}{a_0 \prod_{i=1}^{p_n} (1 - c_i z^{-1})}$$

Se il sistema inverso è causale, gli zeri c_i del sistema originario sono all'esterno della sua regione di convergenza. Se il sistema inverso è anche stabile, gli zeri c_i del sistema originario sono contenuti nel cerchio di raggio unitario.

Quindi un sistema LTI causale e stabile ammette un sistema inverso causale e stabile se anche i suoi zeri sono contenuti nel cerchio di raggio unitario.

Capitolo 21

Progetto di filtri IIR

L'approccio più comune per affrontare il progetto di filtri IIR consiste nel convertire un filtro analogico di funzione di trasferimento $H_a(s)$ in un filtro numerico di funzione di trasferimento $H(z)$ che garantisca le specifiche richieste. Le conversioni devono preservare la causalità e la stabilità del filtro stesso.

1. Si definiscono i requisiti di progetto del filtro analogico passa-basso.
2. Si genera la risposta in frequenza $H_a(s)$ del filtro analogico tramite approssimazione con modelli analogici standard (come il filtro di Butterworth¹).
3. Si applica la trasformazione bilineare² per passare dal tempo continuo al tempo discreto, trovando la risposta in frequenza $H(z)$ del filtro numerico.
4. Si trasforma lo spettro passa-basso in uno spettro passa-alto o passa-banda.

21.1 Prototipo di filtro analogico

Il progetto di un filtro IIR richiede la sintesi di un filtro analogico con funzione di trasferimento $H_a(s)$:

$$H_a(s) = \mathcal{L}\{h_a(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{-st} dt$$

dove $s = \sigma + j\Omega = \sigma + j2\pi f_a$. Siccome il filtro dev'essere fisicamente realizzabile³, la sua risposta all'impulso $h_a(t)$ è causale e la sua risposta in frequenza $H_a(s)$ è unilatera:

$$H_a^+(s) = \int_0^{+\infty} h_a(t) e^{-st} dt$$

L'insieme dei valori di $\sigma = \Re\{s\}$ per cui l'integrale in $H_a(s)$ converge è definita regione di convergenza della trasformata di Laplace. Per sistemi causali, la regione di convergenza della trasformata di Laplace è costituita dal semipiano complesso alla destra di una retta verticale. Se $\sigma = 0$, la regione di convergenza è il semipiano complesso destro:

$$H_a(j\Omega) = \mathcal{F}\{h_a(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_a(t) e^{-j\Omega t} dt = H_a(s)|_{s=j\Omega}$$

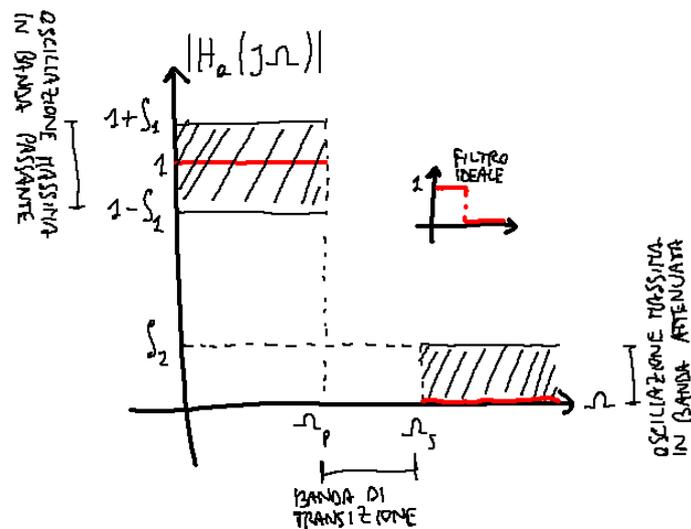
21.1.1 Maschera delle specifiche

Il filtro ideale non è fisicamente realizzabile \Rightarrow le specifiche di progetto devono imporre delle tolleranze della risposta in frequenza $H_a(j\Omega)$ del filtro analogico rispetto al filtro ideale:

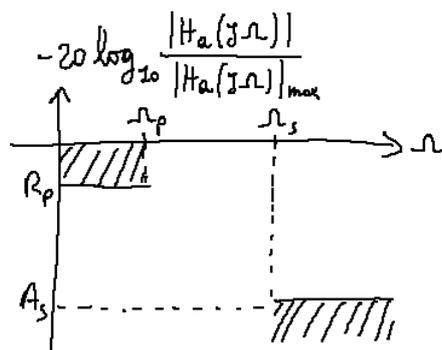
¹Si veda la sezione 21.1.3.

²Si veda la sezione 21.2.

³Si veda la sezione 20.4.



- l'oscillazione massima in banda passante $2\delta_1$, idealmente nulla;
- l'oscillazione massima in banda attenuata δ_2 , idealmente nulla;
- la banda di transizione $\Omega_s - \Omega_p$, idealmente nulla.



Spesso le specifiche di progetto dei filtri vengono date in termini della funzione di trasferimento in modulo, normalizzata rispetto al valore massimo ed espressa in scala logaritmica:

$$-10 \log_{10} \left(\frac{|H_a(j\Omega)|}{\max\{|H_a(j\Omega)|\}} \right)^2 = -20 \log_{10} \frac{|H_a(j\Omega)|}{\max\{|H_a(j\Omega)|\}}$$

con parametri:

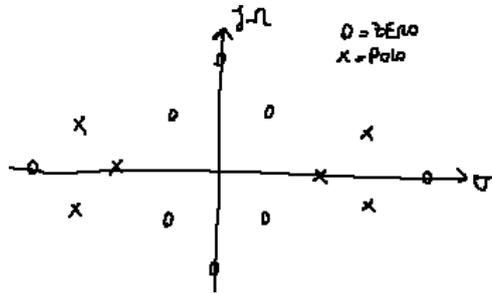
- ripple in banda passante, idealmente nullo:

$$R_p = -20 \log_{10} \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1}$$

- attenuazione in banda attenuata, idealmente infinita:

$$A_s = -20 \log_{10} \frac{\delta_2}{1 + \delta_1}$$

21.1.2 Distribuzione di poli e zeri



Le specifiche del filtro analogico sono tipicamente fornite in termini del suo spettro di energia $|H_a(s)|^2$:

$$|H_a(s)|^2 = |H_a(\sigma + j\Omega)|^2 = H_a(\sigma + j\Omega) H_a^*(\sigma + j\Omega) =$$

Siccome un filtro fisicamente realizzabile ha una risposta all'impulso $h_a(t)$ reale, e quindi tutti i poli e gli zeri sono reali o a coppie complesse coniugate (quindi simmetrici rispetto all'asse reale):

$$= H_a(\sigma + j\Omega) H_a(\sigma - j\Omega) = H_a(s) H_a(-s)$$

L'obiettivo del progetto consiste nell'assegnare metà dei poli a $H_a(s)$ e l'altra metà a $H_a(-s)$.

Un filtro causale e stabile ha tutti i poli nel semipiano di sinistra ($\sigma < 0$) \Rightarrow i poli di $H_a(s)$, che sono simmetrici rispetto all'asse reale, devono giacere tutti nel semipiano di sinistra. $H_a(-s)$ ha gli stessi zeri e poli di $H_a(s)$ ma ribaltati rispetto all'asse immaginario.

21.1.3 Filtro di Butterworth

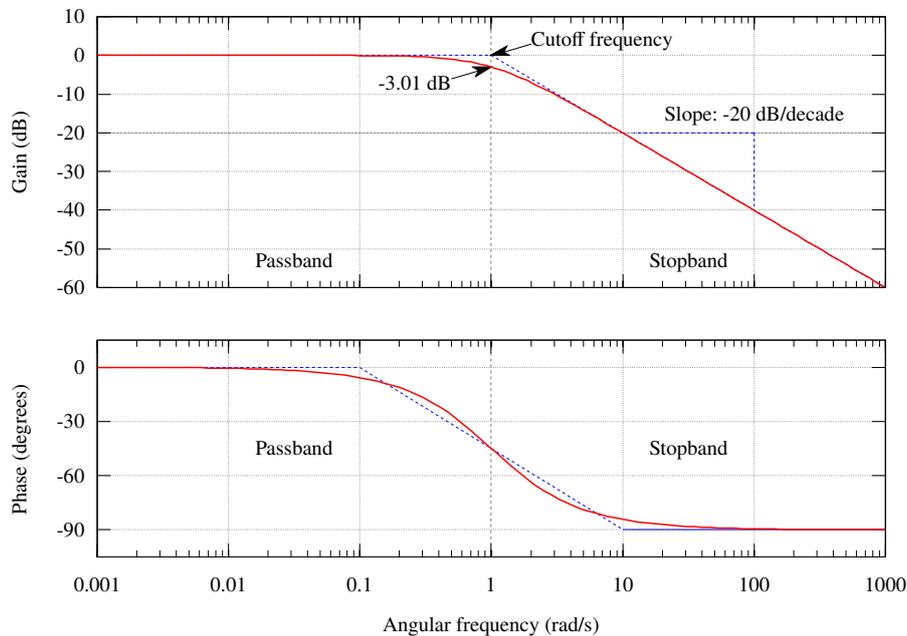


Figura 21.1:⁴

⁴Questa immagine è tratta da Wikimedia Commons ([Butterworth filter bode plot.svg](#)), è stata realizzata dall'utente [Omegatron](#) e da [Alessio Damato](#) ed è concessa sotto la [licenza Creative Commons Attribuzione - Condividi allo stesso modo 3.0 Unported](#).

Il **filtro di Butterworth** passa-basso di ordine N è un prototipo di filtro analogico:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

dove la **pulsazione di taglio** Ω_c è contenuta all'interno della banda di transizione:

$$\Omega_p \leq \Omega_c \leq \Omega_s$$

Proprietà La risposta in frequenza in modulo $|H(j\Omega)|$ è:

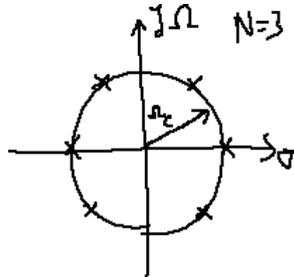
- quasi piatta sia in banda passante sia in banda attenuata;
- una funzione sempre decrescente della variabile $j\Omega$;
- al crescere dell'ordine N si avvicina sempre di più all'idealità;
- nell'origine ($\Omega = 0$) è sempre pari a 1:

$$|H_a(0)|^2 = 1$$

- alla frequenza di taglio ($\Omega = \Omega_c$) è sempre pari a $\frac{1}{2}$:

$$|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$$

Distribuzione dei poli



Il filtro di Butterworth non ha zeri, ma solo poli, che sono posizionati in modo equispaziato lungo la circonferenza di raggio Ω_c nel piano s :

$$p_k = \Omega_c e^{j\frac{k\pi}{N}} e^{j\frac{\pi(N+1)}{2N}} \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Dimostrazione

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{(j\Omega_c)^{2N}}{(j\Omega)^{2N} + (j\Omega_c)^{2N}}$$

I poli p_k sono:

$$p_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi+2k\pi}{2N}} = \Omega_c e^{j\frac{\pi}{2N}(2k+N+1)} \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$

Progetto del filtro

Il progetto del filtro consiste nel ricavare l'ordine N e la pulsazione di taglio Ω_c partendo dalle specifiche, ossia dai valori di Ω_p , Ω_s , R_p e A_s :

$$\begin{cases} N = \frac{\log_{10} \frac{10^{\frac{R_p}{10}} - 1}{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}{2 \log_{10} \frac{\Omega_p}{\Omega_s}} \\ \Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{\frac{R_p}{10}} - 1}} = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}} \end{cases}$$

Dimostrazione La funzione di trasferimento in modulo, espressa in scala logaritmica, deve passare per i punti (Ω_p, R_p) e (Ω_s, A_s) :

$$\begin{cases} -10 \log_{10} \left(\frac{|H_a(j\Omega_p)|}{\max\{|H_a(j\Omega)|\}} \right)^2 = R_p \\ -10 \log_{10} \left(\frac{|H_a(j\Omega_s)|}{\max\{|H_a(j\Omega)|\}} \right)^2 = A_s \\ |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = 10^{\frac{R_p}{10}} \\ \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = 10^{\frac{A_s}{10}} \end{cases}$$

L'ordine N dev'essere un numero intero \Rightarrow si approssima all'intero superiore in modo da soddisfare le specifiche per eccesso:

$$N = \left\lceil \frac{\log_{10} \frac{10^{\frac{R_p}{10}} - 1}{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}{2 \log_{10} \frac{\Omega_p}{\Omega_s}} \right\rceil$$

Se avviene questa approssimazione, però, i valori di Ω_c non sono univoci:

$$\frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{\frac{R_p}{10}} - 1}} \neq \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{\frac{A_s}{10}} - 1}}$$

- la scelta del valore per Ω_p produce un filtro più vicino a 0 in banda attenuata;⁵
- la scelta del valore per Ω_s produce un filtro più vicino a 1 in banda passante.⁵

Le specifiche sono soddisfatte per qualunque Ω_c scelto tra questi due valori \Rightarrow conviene scegliere il valore medio come compromesso.

21.2 Tecnica della trasformazione bilineare

La **trasformazione bilineare** consente di ottenere un filtro numerico $H(z)$ partendo da un filtro analogico $H_a(s)$:

$$H(z) = H_a\left(s = \frac{2}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

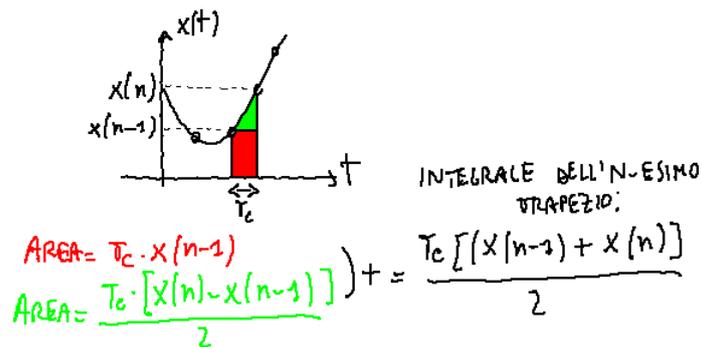
⁵in scala lineare

Dimostrazione Sia $x(t)$ un generico segnale causale a tempo continuo, e sia $y(t)$ il suo integrale:

$$y(t) = \int_0^t x(\theta) d\theta$$

Per le proprietà della trasformata di Laplace (a condizioni iniziali nulle):

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s}$$



Sia $x(n)$ il segnale campionato $x(nT_c)$. Il suo integrale $y(n)$ può essere ricavato tramite la regola dei trapezi:

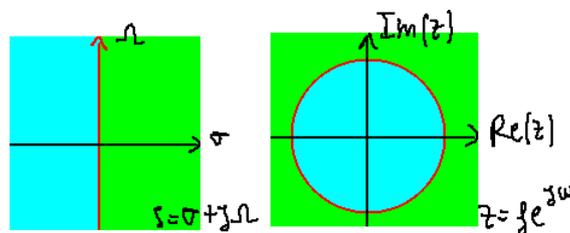
$$y(n) = y(n-1) + \frac{x(n) + x(n-1)}{2} T_c$$

Confrontando la trasformata zeta $Y(z)$:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + \frac{X(z) + z^{-1}X(z)}{2} T_c; \quad Y(z) = X(z) \frac{T_c}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

con l'espressione della trasformata di Laplace $Y(s)$:

$$\begin{cases} s = \frac{2}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\ z = \frac{1 + s \frac{T_c}{2}}{1 - s \frac{T_c}{2}} \end{cases}$$



Esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano s e i punti del piano z :

- l'asse immaginario $j\Omega$ nel piano complesso s corrisponde alla circonferenza di raggio unitario nel piano complesso z ;

- le pulsazioni complesse $\sigma < 0$ sono mappate all'interno del cerchio di raggio unitario;
- le pulsazioni complesse con $\sigma > 0$ sono mappate all'esterno del cerchio di raggio unitario.

Dimostrazione

$$|z| = \left| \frac{1 + (\sigma + j\Omega) \frac{T_c}{2}}{1 - (\sigma + j\Omega) \frac{T_c}{2}} \right| = \sqrt{\frac{(1 + \sigma \frac{T_c}{2})^2 + (\Omega \frac{T_c}{2})^2}{(1 - \sigma \frac{T_c}{2})^2 + (\Omega \frac{T_c}{2})^2}}$$

Lungo l'asse immaginario ($\sigma = 0$):

$$|z| = \sqrt{\frac{1 + (\Omega \frac{T_c}{2})^2}{1 + (\Omega \frac{T_c}{2})^2}} = 1$$

Un filtro causale è stabile se:

- tutti i poli di $H_a(s)$ appartengono al semipiano sinistro nel piano complesso s ;
- tutti i poli di $H(z)$ appartengono al cerchio di raggio unitario nel piano complesso z .

La trasformazione bilineare impone la seguente relazione tra la risposta in frequenza analogica $H_a(j\Omega)$ e la risposta in frequenza numerica $H(e^{j\omega})$:

$$\begin{cases} H(e^{j2\pi f}) = H_a(j2\pi f_a = j \frac{2}{T_c} \tan(\pi f)) \\ H(e^{j\omega}) = H_a(j\Omega = j \frac{2}{T_c} \tan \frac{\omega}{2}) \end{cases}$$

Dimostrazione

$$\begin{cases} H_a(j2\pi f_a) = H(s)|_{s=j2\pi f_a} \\ H(e^{j2\pi f}) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f}} \\ s = \frac{2}{T_c} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \end{cases} \Rightarrow j2\pi f_a = \frac{2}{T_c} \frac{1 - e^{-j2\pi f}}{1 + e^{-j2\pi f}}$$

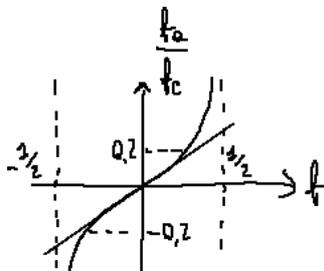


Figura 21.2: $f_a = \frac{1}{\pi T_c} \tan(\pi f)$

I valori che la funzione $H_a(j2\pi f_a)$ assume sull'asse immaginario f_a sono mappati sull'intervallo $[-\frac{1}{2}T_c; \frac{1}{2}T_c]$ mediante la relazione non lineare:

$$\begin{cases} f = \frac{1}{\pi} \arctan(\pi f_a T_c) \\ \omega = 2 \arctan \frac{\Omega T_c}{2} \end{cases}$$

Il filtro numerico ricavato è molto approssimato al filtro analogico per bassi valori di $f_a T_c$, mentre differisce tanto più ci si allontana dalla linearità. Se la frequenza analogica f_a data è alta, è possibile aumentare la frequenza di campionamento f_c per migliorare l'approssimazione del filtro numerico.

La trasformazione bilineare non introduce aliasing.

21.3 Trasformazioni spettrali tra diverse tipologie di filtro

Tramite le seguenti trasformazioni spettrali è possibile ricavare, a partire da un filtro con pulsazione di taglio ω_t , un filtro di diversa tipologia con pulsazione di taglio $\hat{\omega}_t$ e stessi parametri di progetto ω_p , ω_s , A_s e R_p :

Tipo di filtro desiderato	Trasformazione spettrale
	$G(z^{-1}) = \pm \prod_{p=1}^n \frac{z^{-1} - \alpha_p}{1 - \alpha_p z^{-1}}, \quad \alpha_p < 1$
Passa-basso	$z^{-1} = \frac{\hat{z}^{-1} - \alpha}{1 - \alpha \hat{z}^{-1}}, \quad \alpha = \frac{\sin \frac{\omega_t - \hat{\omega}_t}{2}}{\sin \frac{\omega_t + \hat{\omega}_t}{2}}$
Passa-alto	$z^{-1} = -\frac{\hat{z}^{-1} + \alpha}{1 + \alpha \hat{z}^{-1}}, \quad \alpha = -\frac{\cos \frac{\omega_t + \hat{\omega}_t}{2}}{\cos \frac{\omega_t - \hat{\omega}_t}{2}}$

La trasformazione di un filtro causale e stabile deve portare a un filtro causale e stabile:

- l'interno del cerchio unitario si deve mappare in se stesso;
- i poli all'interno del cerchio di raggio unitario devono rimanere all'interno.

Capitolo 22

Progetto di filtri FIR

22.1 Rotazione di fase lineare

Un filtro FIR non causale può essere reso causale semplicemente ritardandone la risposta all'impulso $h(n)$ (che è a supporto finito) in modo che tutti i campioni siano a destra dell'asse delle ordinate ($n > 0$). Il ritardo temporale di k campioni conduce ad una nuova sequenza $h(n-k)$ che introduce in frequenza solo una rotazione di fase lineare:

$$\mathcal{F}\{h(n-k)\} = H(e^{j\omega}) e^{-j\omega k}$$

senza variare il modulo della risposta in frequenza, e di conseguenza senza variare la maschera del filtro $|H_a(j\Omega)|$.

La rotazione di fase lineare introdotta introduce un ritardo costante sulla sequenza $x(n)$ di ingresso:

$$\begin{aligned} y(n) = x(n) * h(n-k) &\Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \cdot [H(e^{j\omega}) e^{-j\omega k}] = [X(e^{j\omega}) e^{-j\omega k}] \cdot H(e^{j\omega}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(n) = x(n-k) * h(n) \end{aligned}$$

Nel caso la risposta all'impulso $h(n)$ abbia simmetria pari o dispari rispetto all'asse delle ordinate, con conseguente simmetria pari della risposta in frequenza $H(e^{j\omega})$, allora basta determinare il nuovo asse di simmetria della risposta all'impulso traslata $h(n-k)$.

22.2 Tecniche a finestra

La risposta all'impulso $h(n)$, ottenuta mediante IDTFFT della risposta in frequenza $H(e^{j2\pi f})$, oltre a non essere causale è solitamente di durata infinita \Rightarrow affinché il filtro sia fisicamente realizzabile, la risposta all'impulso deve essere troncata tramite una **finestra**.

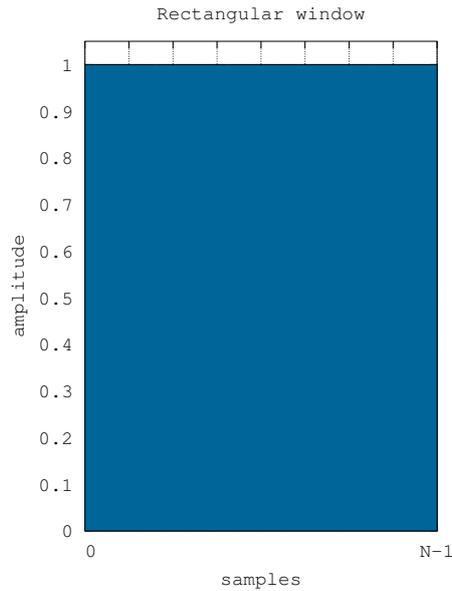
22.2.1 Finestra rettangolare

Alla risposta in frequenza $H_{id}(e^{j2\pi f})$ del filtro passa-basso ideale (provvista di rotazione di fase lineare):

$$H_{id}(e^{j2\pi f}) = \begin{cases} e^{-j2\pi \frac{M-1}{2} f} & |f| \leq f_c \\ 0 & |f| > f_c \end{cases}$$

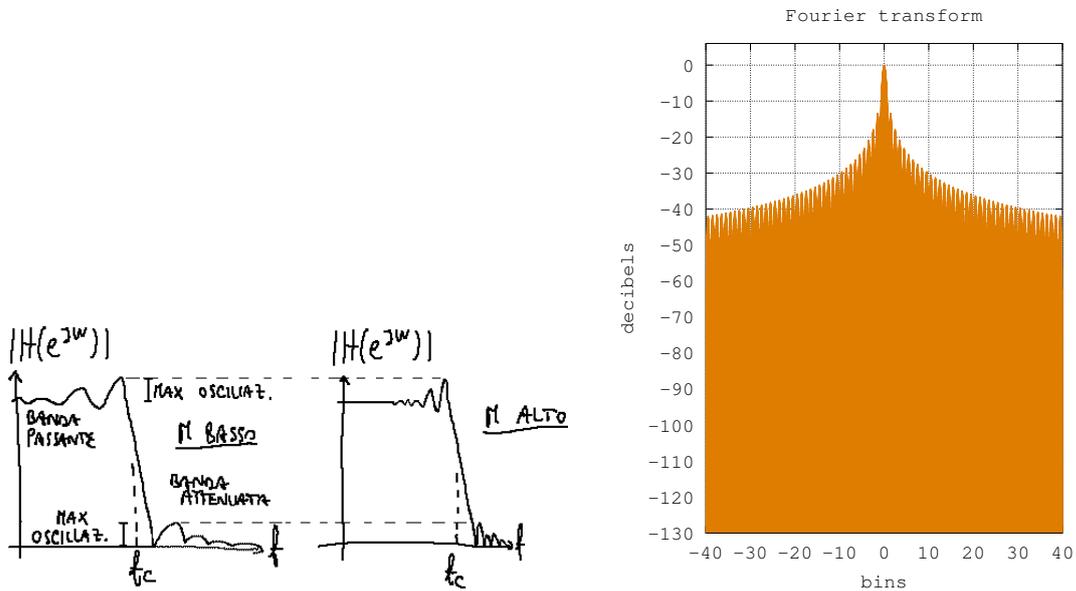
corrisponde una risposta all'impulso h_{id} a supporto infinito (traslata):

$$h_{id} = 2f_c \text{sinc} \left[2f_c \left(n - \frac{M-1}{2} \right) \right]$$



La risposta all'impulso h_{id} viene troncata a un numero finito M di campioni con la moltiplicazione per la porta $p_M(n)$ (**finestra rettangolare**):

$$h(n) = h_{id}(n) \cdot p_M(n) = \begin{cases} h_{id} & n = 0, \dots, M-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Una troncatura così brutale però si manifesta in frequenza con la comparsa di oscillazioni (**effetto di Gibbs**):

$$H(e^{j2\pi f}) = H_{id}(e^{j2\pi f}) * P_M(e^{j2\pi f})$$

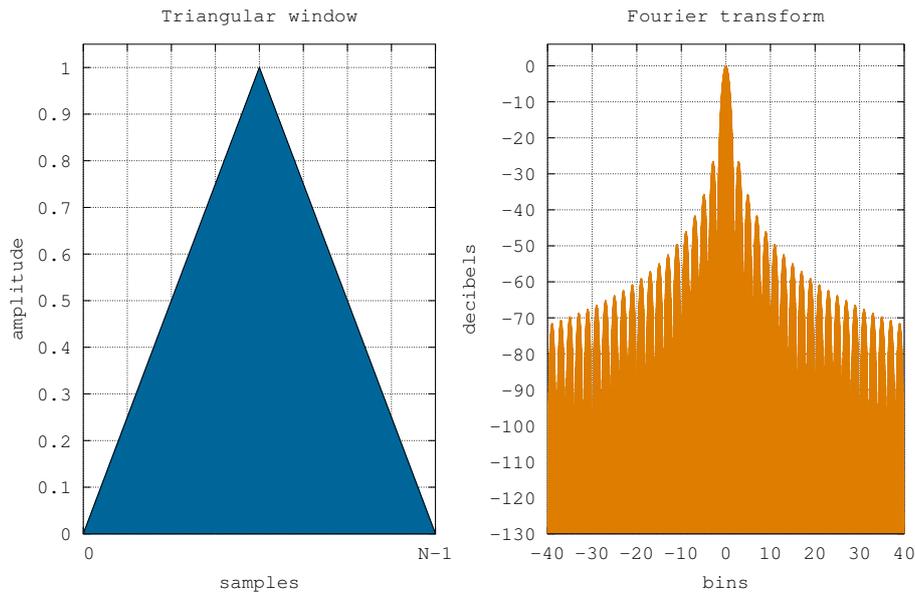
dove:

$$P_M(e^{j2\pi f}) = \frac{1 - e^{-j2\pi f M}}{1 - e^{-j2\pi f}} = e^{-j2\pi f \frac{M-1}{2}} \frac{\sin(M\pi f)}{\sin(\pi f)}$$

Osservazioni

- L'ampiezza massima delle oscillazioni in banda attenuata coincide con l'ampiezza massima delle oscillazioni in banda passante.
- All'aumentare di M aumenta la frequenza di ripetizione delle oscillazioni, non la loro ampiezza massima \Rightarrow la riduzione dell'oscillazione massima nella risposta in frequenza può essere ottenuta solamente cambiando il tipo di finestra di troncamento, non la sua lunghezza.

22.2.2 Finestra di Bartlett



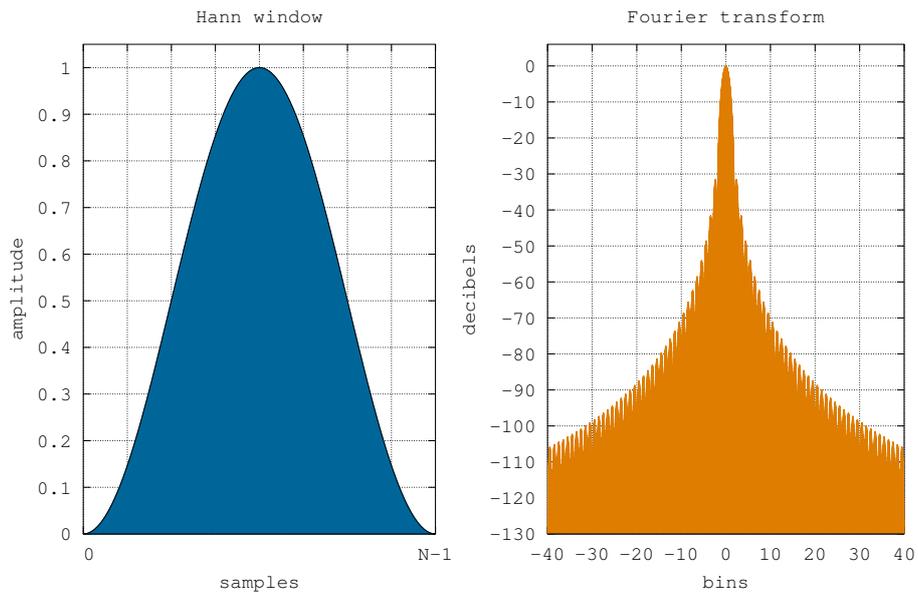
La **finestra di Bartlett** riduce leggermente le oscillazioni:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{2n}{M-1} & 0 \leq n \leq \frac{M-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{M-1} & \frac{M-1}{2} \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

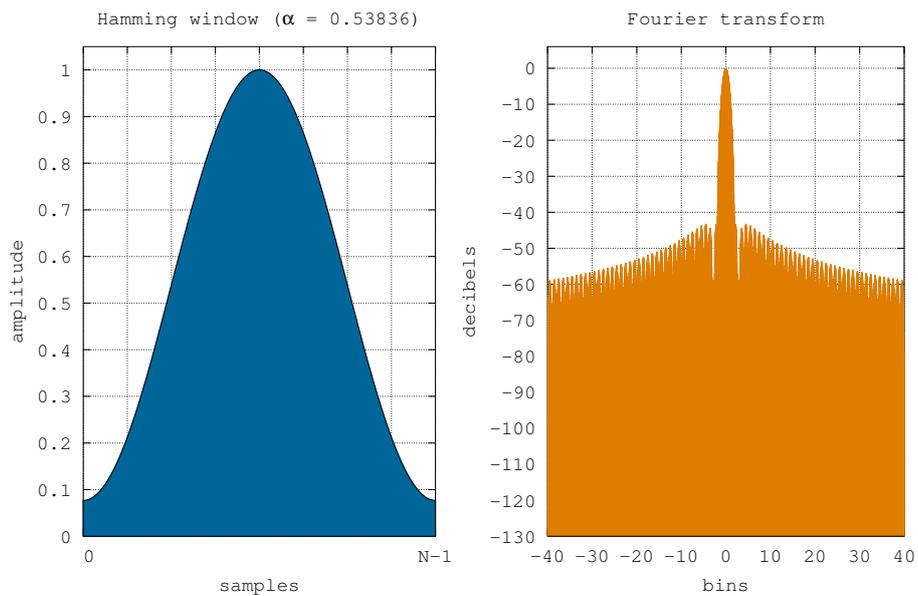
22.2.3 Finestra di Hanning

La **finestra di Hanning** è una funzione triangolo, e riduce ulteriormente le oscillazioni:

$$p(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi n}{M-1} \right) \right] & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



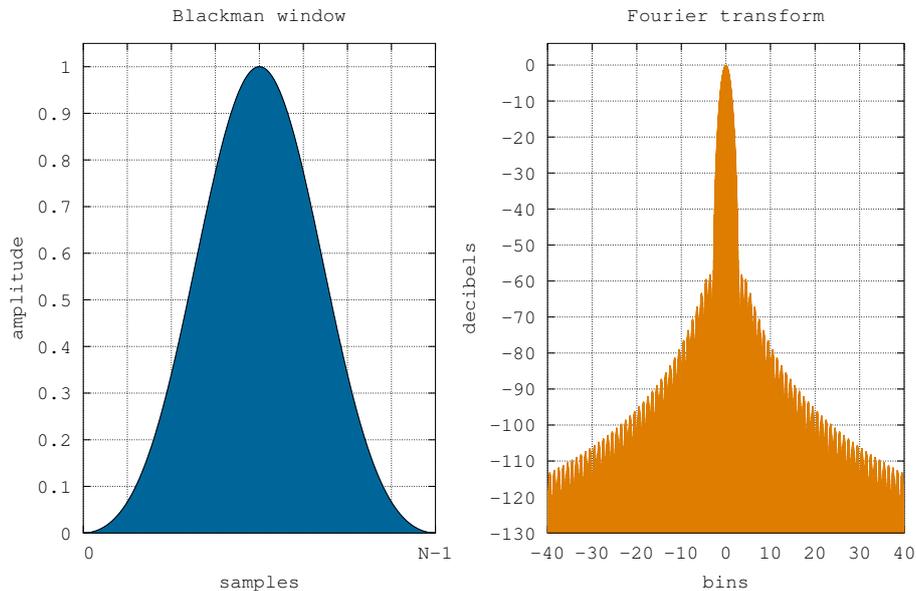
22.2.4 Finestra di Hamming



La **finestra di Hamming** è una finestra di Hanning più attenuata verso gli estremi del supporto, e riduce ulteriormente le oscillazioni:

$$p(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right) & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

22.2.5 Finestra di Blackman



La **finestra di Blackman** è una finestra di Hamming più attenuata verso gli estremi del supporto, e riduce ulteriormente le oscillazioni:

$$p(n) = \begin{cases} 0,42 - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right) + 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{M-1}\right) & 0 \leq n \leq M-1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Un aumento della minima attenuazione in banda attenuata A_s si paga però con l'aumento della banda di transizione B_T :

Finestra	Banda di transizione B_T	Minima attenuazione in banda attenuata A_s
Rettangolare	$\frac{1,8\pi}{M}$	21 dB
Bartlett	$\frac{6,1\pi}{M}$	25 dB
Hanning	$\frac{6,2\pi}{M}$	44 dB
Hamming	$\frac{6,6\pi}{M}$	53 dB
Blackman	$\frac{11\pi}{M}$	74 dB