Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Körper- und Galoistheorie

Arbeitsblatt 2

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 2.1.*

Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Zeige, dass L ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 2.2.*

Bestimme den Grad der Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Aufgabe 2.3. Es sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung vom Grad 1. Zeige, dass $L = K$ ist.

Aufgabe 2.4. Berechne im Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ das Produkt

$$(-2 + \sqrt{7}) \cdot (4 - \sqrt{7})\,.$$

Aufgabe 2.5. Bestimme in $\mathbb{Q}[\sqrt{7}]$ das Inverse von $2 + 5\sqrt{7}$.

Aufgabe 2.6. Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und seien $v_1, \ldots, v_n \in L$ Elemente, die eine K-Basis von L bilden. Sei $x \in L$, $x \neq 0$. Zeige, dass auch $xv_1, \ldots, xv_n \in L$ eine K-Basis von L bilden.

Aufgabe 2.7.*

Es sei K ein Körper mit einer Charakteristik $\neq 2$ und es sei $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung. Zeige, dass es dann ein $x \in L$, $x \notin K$, mit $x^2 \in K$ gibt.

Aufgabe 2.8. Es sei $X^3 + pX + q \in \mathbb{Q}[X]$ und es seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ die Nullstellen dieses Polynoms. Konstruiere unter Bezug auf die Formel von Cardano eine Kette

$$\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq L \subseteq M$$

von endlichen Körpererweiterungen von „möglichst kleinem“ Grad, so dass M alle Nullstellen und alle „Hilfszahlen“, die in dieser Formel auftreten, enthält. Welche Grade können dabei auftreten?

Aufgabe 2.9. Es sei $\mathbb{C} \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung. Zeige $\mathbb{C} = L$.

Aufgabe 2.10. Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nicht endlich ist.

Aufgabe 2.11. Zeige, dass die Menge der rationalen Funktionen über $\mathbb{R}$ einen Körper bildet.

(Dieser Körper wird mit $\mathbb{R}(X)$ bezeichnet.)

Aufgabe 2.12. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und sei M die Menge der n-ten Einheitswurzeln in K. Zeige, dass M eine Untergruppe der Einheitengruppe $K^\times$ ist.

Aufgabe 2.13.*

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

mit der Cardanoschen Formel und drücke diese Lösungen mit Hilfe der neunten primitiven komplexen Einheitswurzel aus.

Aufgabe 2.14. Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweise die folgenden Aussagen.

(1) Wenn $b_1, b_2 \in K$ zwei Lösungen der Gleichung $X^n = a$ sind und $b_2 \neq 0$, so ist ihr Quotient b_1/b_2 eine n-te Einheitswurzel.
(2) Wenn $b \in K$ eine Lösung der Gleichung $X^n = a$ und ζ eine n-te Einheitswurzel ist, so ist auch ζb eine Lösung der Gleichung $X^n = a$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 2.15. (3 Punkte)

Es sei $K \subseteq \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Zeige, dass dann auch $K[\mathrm{i}]$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2.16. (2 Punkte)

Bestimme in $\mathbb{Q}[\sqrt{11}]$ das Inverse von $3 + 5\sqrt{11}$.

Aufgabe 2.17. (2 Punkte)

Sei $K \subseteq L$ eine endliche Körpererweiterung und sei $x_1, \ldots, x_n \in L$ eine K-Basis von L. Zeige, dass die Multiplikation auf L durch die Produkte

$$x_i x_j, 1 \leq i \leq j \leq n,$$

eindeutig festgelegt ist.

Aufgabe 2.18. (3 Punkte)

Es seien $\mathbb{Q} \subseteq K \subset \mathbb{C}$ und $\mathbb{Q} \subseteq L \subset \mathbb{C}$ zwei endliche Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad d bzw. e. Es seien d und e teilerfremd. Zeige, dass dann

$$K \cap L = \mathbb{Q}$$

ist.

Aufgabe 2.19. (3 Punkte)

Zeige, dass man $\sqrt{3}$ nicht als $\mathbb{Q}$-Linearkombination von 1 und $\sqrt{2}$ schreiben kann.

Aufgabe 2.20. (3 Punkte)

Berechne die Quadratwurzeln, die vierten Wurzeln und die achten Wurzeln von i.

Aufgabe 2.21. (3 Punkte)

Zeige, dass die Körpererweiterung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}(X)$, wobei $\mathbb{R}(X)$ den Körper der rationalen Funktionen bezeichnet, nicht endlich ist.

Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 5

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 5