

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 16

Ableitung von Potenzreihen

Viele wichtige Funktionen wie die Exponentialfunktion oder die trigonometrischen Funktionen werden durch eine Potenzreihe dargestellt. Der folgende Satz zeigt, dass diese Funktionen differenzierbar sind und ihre Ableitung durch diejenige Potenzreihe dargestellt wird, die sich durch gliedweises Ableiten ergibt.

SATZ 16.1. *Es sei*

$$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe, die auf dem offenen Intervall $] - r, r[$ konvergiert und dort die Funktion $f:] - r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ darstellt. Dann ist auch die formal abgeleitete Potenzreihe

$$\tilde{g}(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

auf $] - r, r[$ konvergent. Die Funktion f ist in jedem Punkt dieses Intervalls differenzierbar mit

$$f'(x) = \tilde{g}(x).$$

Beweis. Der Beweis erfordert ein genaues Studium von Potenzreihen. □

Im Satz haben wir g für die Potenzreihe und f für die dadurch festgelegte Funktion geschrieben, um die Rollen deutlicher zu machen. Von nun an ist diese Unterscheidung nicht mehr nötig.

KOROLLAR 16.2. *Eine durch eine Potenzreihe gegebene Funktion ist auf ihrem Konvergenzintervall unendlich oft differenzierbar.*

Beweis. Dies ergibt sich direkt aus Satz 16.1. □

SATZ 16.3. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp x,$$

ist differenzierbar mit

$$\exp'(x) = \exp x.$$

Beweis. Aufgrund von Satz 16.1 ist

$$\begin{aligned}
 \exp'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)' \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 &= \exp x.
 \end{aligned}$$

□

SATZ 16.4. *Die Exponentialfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto a^x,$$

zur Basis $a > 0$ ist differenzierbar mit

$$(a^x)' = (\ln a)a^x.$$

Beweis. Nach Definition 12.15 ist

$$a^x = \exp(x \ln a).$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 16.3 unter Verwendung der Kettenregel gleich

$$(a^x)' = (\exp(x \ln a))' = (\ln a) \exp'(x \ln a) = (\ln a) \exp(x \ln a) = (\ln a)a^x.$$

□

BEMERKUNG 16.5. Bei einer reellen Exponentialfunktion

$$y(x) = a^x$$

gilt nach Satz 16.4 die Beziehung

$$y' = (\ln a)y,$$

es besteht also ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Funktion y und ihrer Ableitung y' mit dem Proportionalitätsfaktor $\ln a$. Dies gilt auch dann, wenn a^x mit einer Konstanten multipliziert wird. Wenn man unter y eine von der Zeit x abhängige Größe versteht, so beschreibt $y'(x)$ das momentane Wachstum zu einem Zeitpunkt. Die Gleichung $y' = (\ln a)y$ bedeutet dann, dass das momentane Wachstum in jedem Zeitpunkt proportional zur momentanen Größe ist. Ein solches Wachstum (bzw. Schrumpfung bei $a < 1$ bzw. $\ln a < 0$) kommt in der Natur bei einer Population dann vor, wenn es keine nennenswerte Nahrungskonkurrenz und vernachlässigbare Sterberaten

gibt (die Anzahl der Mäuse ist dann proportional zur Anzahl der geborenen Mäuse). Eine Bedingung der Form

$$y' = by$$

ist ein Beispiel für eine *Differentialgleichung*. Dies ist eine Gleichung für eine Funktion, die Bedingungen an die Ableitung der Funktion ausdrückt. Eine Lösung einer solchen Differentialgleichung ist eine differenzierbare Funktion, die diese Ableitungsbedingung erfüllt. Die Lösungen der zuletzt formulierten Differentialgleichung sind die Funktionen

$$y(x) = ce^{bx}.$$

Wir werden uns im zweiten Semester mit Differentialgleichungen intensiv beschäftigen.

KOROLLAR 16.6. *Die Ableitung des natürlichen Logarithmus*

$$\ln: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \ln x,$$

ist

$$\ln': \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x}.$$

Beweis. Da der Logarithmus die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist, können wir Satz 14.9 anwenden und erhalten mit Satz 16.3

$$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}.$$

□

KOROLLAR 16.7. *Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^\alpha,$$

differenzierbar und ihre Ableitung ist

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Beweis. Nach Definition 12.15 ist

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x).$$

Die Ableitung nach x ist aufgrund von Satz 16.3 und Korollar 16.6 unter Verwendung der Kettenregel gleich

$$(x^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln x))' = \frac{\alpha}{x} \cdot \exp(\alpha \ln x) = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

□

SATZ 16.8. *Die Sinusfunktion*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \sin x,$$

ist differenzierbar mit

$$\sin'(x) = \cos x$$

und die Kosinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \cos x,$$

ist differenzierbar mit

$$\cos'(x) = -\sin x.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.4. □

SATZ 16.9. *Die Tangensfunktion*

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi \right) \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \tan x,$$

ist differenzierbar mit

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

und die Kotangensfunktion

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \cot x,$$

ist differenzierbar mit

$$\cot'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Beweis. Aufgrund der Quotientenregel, Satz 16.8 und der Kreisgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Das Argument für die Ableitung des Kotangens ist entsprechend. □

Die Zahl π

Die Zahl π ist der Flächeninhalt bzw. der halbe Kreisumfang eines Kreises mit Radius 1. Um darauf eine präzise Definition dieser Zahl aufzubauen müsste man zuerst die Maßtheorie (bzw. die Länge von „krummen Kurven“) entwickeln. Auch die trigonometrischen Funktionen haben eine intuitive Interpretation am Einheitskreis, doch auch diese setzt das Konzept der Bogenlänge voraus. Ein alternativer Zugang ist es, die Zahl π über analytische Eigenschaften der durch ihre Potenzreihen definierten Funktionen Sinus und Kosinus zu definieren und dann erst nach und nach die Beziehung zum Kreis herzustellen.

LEMMA 16.10. *Die Kosinusfunktion besitzt im reellen Intervall $[0, 2]$ genau eine Nullstelle.*

Beweis. Wir betrachten die Kosinusreihe

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Für $x = 0$ ist $\cos 0 = 1$. Für $x = 2$ kann man geschickt klammern und erhält

$$\begin{aligned} \cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \dots \\ &= 1 - \frac{2^2}{2!} \left(1 - \frac{4}{3 \cdot 4}\right) - \frac{2^6}{6!} \left(1 - \frac{4}{7 \cdot 8}\right) - \dots \\ &= 1 - 2(2/3) - \dots \\ &\leq -1/3. \end{aligned}$$

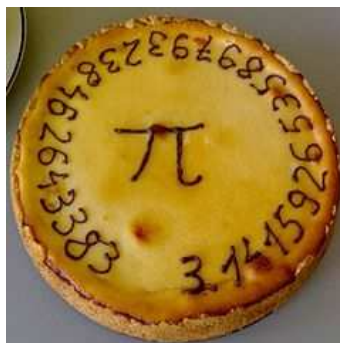
Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also mindestens eine Nullstelle im angegebenen Intervall. Zum Beweis der Eindeutigkeit betrachten wir die Ableitung des Kosinus, diese ist nach Satz 16.8

$$\cos' x = -\sin x.$$

Es genügt zu zeigen, dass der Sinus im Intervall $]0, 2[$ positiv ist, denn dann ist das Negative davon stets negativ und der Kosinus ist dann nach Satz 15.7 im angegebenen Intervall streng fallend, so dass es nur eine Nullstelle gibt. Für $x \in]0, 2]$ gilt

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= x \left(1 - \frac{x^2}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \dots \\ &\geq x \left(1 - \frac{4}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{4}{6 \cdot 7}\right) + \dots \\ &\geq x/3 \\ &> 0. \end{aligned}$$

□



Eine rationale Approximation der Zahl π auf einem π -Pie.

DEFINITION 16.11. Es sei s die eindeutig bestimmte reelle Nullstelle der Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2]$. Die *Kreiszahl* π ist definiert durch

$$\pi := 2s.$$

SATZ 16.12. Die Sinusfunktion und die Kosinusfunktion erfüllen in \mathbb{R} folgende Periodizitätseigenschaften.

- (1) Es ist $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Es ist $\cos(x + \pi) = -\cos x$ und $\sin(x + \pi) = -\sin x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Es ist $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$ und $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (4) Es ist $\cos 0 = 1$, $\cos \pi/2 = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos 3\pi/2 = 0$ und $\cos 2\pi = 1$.
- (5) Es ist $\sin 0 = 0$, $\sin \pi/2 = 1$, $\sin \pi = 0$, $\sin 3\pi/2 = -1$ und $\sin 2\pi = 0$.

Beweis. Aufgrund der Kreisgleichung

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$$

ist $(\sin \frac{\pi}{2})^2 = 1$, also ist $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ wegen der Überlegung im Beweis zu Lemma 16.10. Daraus folgen mit den Additionstheoremen die in (3) angegebenen Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus. Es genügt daher, die Aussagen für den Kosinus zu beweisen. Alle Aussagen folgen dann aus der Definition von π und aus (3). \square

DEFINITION 16.13. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

Die beiden trigonometrischen Funktionen sind also periodische Funktionen mit der Periodenlänge 2π .

Die inversen trigonometrischen Funktionen

KOROLLAR 16.14. Die reelle Sinusfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1],$$

und die reelle Kosinusfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1].$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.12. \square

KOROLLAR 16.15. Die reelle Tangensfunktion induziert eine bijektive, streng wachsende Funktion

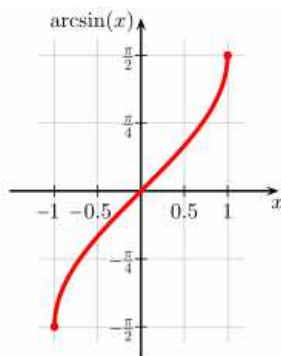
$$]-\pi/2, \pi/2[\longrightarrow \mathbb{R},$$

und die reelle Kotangensfunktion induziert eine bijektive streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.13. □

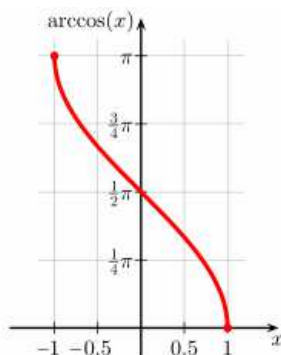
Aufgrund der Bijektivität von Sinus, Kosinus, Tangens und Kotangens auf geeigneten Intervallen gibt es die folgenden Umkehrfunktionen.



DEFINITION 16.16. Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], x \longmapsto \arcsin x,$$

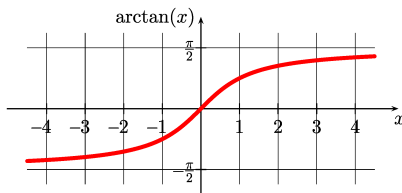
und heißt *Arkussinus*.



DEFINITION 16.17. Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi], x \longmapsto \arccos x,$$

und heißt *Arkuskosinus*.

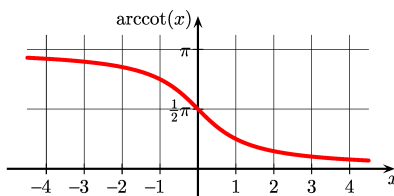


Der Arkustangens

DEFINITION 16.18. Die Umkehrfunktion der reellen Tangensfunktion ist

$$\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, x \longmapsto \arctan x,$$

und heißt *Arkustangens*.



Der Arkuskotangens

DEFINITION 16.19. Die Umkehrfunktion der reellen Kotangensfunktion ist

$$\mathbb{R} \longrightarrow]0, \pi[, x \longmapsto \operatorname{arccot} x,$$

und heißt *Arkuskotangens*.

SATZ 16.20. *Die inversen trigonometrischen Funktionen besitzen die folgenden Ableitungen.*

(1)

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2)

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(3)

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

(4)

$$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Beweis. Für den Arkustangens gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{\frac{\cos^2(\arctan x) + \sin^2(\arctan x)}{\cos^2(\arctan x)}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

□

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Pi pie2.jpg , Autor = Pi pie2 (hochgeladen von Benutzer GJ auf engl. Wikipedia), Lizenz = PD	5
Quelle = Arcsine.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	7
Quelle = Arccosine.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	7
Quelle = Arctangent.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	8
Quelle = Arccotangent.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0	8
Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz.	11
Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.	11