

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

AUFGABE 9.1. Zeige $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$.

AUFGABE 9.2.*

Es sei

$$x_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

(1) Finde das kleinste n mit

$$x_n \geq 2.$$

(2) Finde das kleinste n mit

$$x_n \geq 2,5.$$

AUFGABE 9.3.*

Karl möchte mit seinem programmierbaren Taschenrechner den Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ annähernd berechnen. Die Anzeige des Rechners besitzt 8 Nachkommastellen. Der Rechner schafft pro Sekunde eine Addition (also ein Reihenglied wird zur bisherigen Summe draufaddiert) der Reihe und zeigt das neue Ergebnis direkt an. Karl hat richtig programmiert und denkt sich folgende Strategie aus: „Wenn die Anzeige eine ganze Stunde lang immer das gleiche anzeigt, so wird das wohl ziemlich nah am Ergebnis sein, so dass ich das als eine gute Annäherung nehmen kann. Der Rechner soll dann aufhören“.

(1) Was ist ungefähr das letzte Reihenglied, das aufaddiert wird?

(2) Was ist von der Strategie zu halten?

AUFGABE 9.4. Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

AUFGABE 9.5. Es seien $a, b \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

AUFGABE 9.6. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

AUFGABE 9.7.*

Zeige die Abschätzung

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 3\sqrt{n}.$$

AUFGABE 9.8.*

Es seien

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

konvergente Reihen von reellen Zahlen mit den Summen s und t . Beweise die folgenden Aussagen.

- (1) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k = a_k + b_k$ ist ebenfalls konvergent mit der Summe $s + t$.
- (2) Für $r \in \mathbb{R}$ ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ mit $d_k = ra_k$ konvergent mit der Summe rs .

AUFGABE 9.9.*

Beweise das Cauchy-Kriterium für Reihen reeller Zahlen.

AUFGABE 9.10. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe mit $a_k \geq 0$ für alle k . Zeige, dass die Reihe genau dann konvergent ist, wenn sie nach oben beschränkt ist.

AUFGABE 9.11. Man gebe ein Beispiel für eine reelle Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, die (als Folge von Partialsummen) beschränkt ist, aber nicht konvergiert.

AUFGABE 9.12. Es sei $k \geq 2$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$$

konvergiert.

AUFGABE 9.13. Beweise das folgende *Minorantenkriterium*.

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei Reihen von nichtnegativen reellen Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sei divergent und es gelte $a_k \geq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

AUFGABE 9.14.*

Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine reelle Reihe. Eine *Umordnung* dieser Reihe ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ mit $b_k = a_{\sigma(k)}$ zu einer bijektiven Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Bei einer Umordnung einer Reihe kommen zwar genau die gleichen Summanden vor, es ändert sich aber die Folge der Partialsummen und damit eventuell auch das Konvergenzverhalten.

AUFGABE 9.15. Zeige, dass bei einer reellen Folge die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert, und dass bei Reihen die Änderung von endlich vielen Reihengliedern zwar die Konvergenz nicht ändert, wohl aber die Summe.

AUFGABE 9.16. In einer Studenten-WG bereitet Studi 1 Kaffee zu, und füllt die Menge x_1 Kaffee in den Kaffeefilter. Dies sieht entsetzt Studi 2 und sagt: „Willst Du, dass wir alle schon total wach werden?“ und nimmt die Kaffeemenge $x_2 < x_1$ wieder aus dem Filter heraus. Danach kommt Studi 3 und sagt: „Bin ich hier in einer Weicheier-WG gelandet?“ und kippt wieder eine Kaffeemenge $x_3 < x_2$ dazu. So geht es unendlich weiter, wobei sich Kaffeeherausnehmer und Kaffeefüller abwechseln. Wie kann man charakterisieren, ob die Kaffeemenge im Filter konvergiert?

AUFGABE 9.17. Nachdem der Kaffee am Vortag für die Befürworter eines starken Kaffees zu schwach geworden ist, entwickeln sie eine neue Strategie: Sie wollen etwas früher aufstehen, so dass am Tagesanfang und zwischen je zwei Kaffeereduzierern immer zwei Kaffeeauffüller zum Zuge kommen. Dabei bleibt die interne Reihenfolge der beiden Lager als auch die hinzuzufügende bzw. wegzunehmende Kaffeemenge einer Person unverändert. Können sie mit dieser Strategie den Kaffee stärker machen, beispielsweise bei $x_n = \frac{1}{n}$?

AUFGABE 9.18.*

Wir betrachten die alternierende Reihe der Stammbrüche $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ mit

$$x_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n},$$

also

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} \cdots,$$

die bekanntlich konvergiert.

a) Zeige, dass die umgeordnete Reihe

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \cdots,$$

konvergiert.

b) Man gebe eine Umordnung der Reihe an, die divergiert.

AUFGABE 9.19. Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente reelle Reihe. Zeige, dass dann auch jede Umordnung der Reihe gegen den gleichen Grenzwert konvergiert.

AUFGABE 9.20. Berechne die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$$

AUFGABE 9.21.*

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

AUFGABE 9.22. Zwei Personen, A und B , sitzen in der Kneipe. A will nach Hause gehen, aber B will noch ein Bier trinken. „Na gut, dann trinken wir eben noch ein Bier, das ist aber das allerletzte“ sagt A . Danach möchte B immer noch Bier, aber da das vorhergehende Bier definitiv das letzte war, einigen sie sich auf ein allerletztes halbes Bier. Danach trinken sie noch ein allerletztes Viertelbier, danach noch ein allerletztes Achtelbier, u.s.w. Wie viel „allerletztes Bier“ trinken sie insgesamt?

AUFGABE 9.23. Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{5^n} = \frac{45}{14}$.

AUFGABE 9.24.*

Es sei $z \in \mathbb{R}$, $|z| < 1$. Bestimme und beweise eine Formel für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k.$$

AUFGABE 9.25.*

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine reelle Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle n . Die Folge der Quotienten

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

konvergiere gegen eine reelle Zahl x mit $-1 < x < 1$. Zeige unter Verwendung des Quotientenkriteriums, dass die Reihe konvergiert.

AUFGABE 9.26. Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

- (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3 - n^2 - n + 2}$,
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - \sqrt{n} + 1}$,
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 9.27. (4 Punkte)

Untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{n^3-4n^2+3n-5}$$

auf Konvergenz.

AUFGABE 9.28. (3 Punkte)

Berechne die Summe

$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

AUFGABE 9.29. (3 Punkte)

Es sei $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$. Eine *Ziffernfolge*, die durch

$$z_i \in \{0, 1, \dots, g-1\} \text{ für } i \in \mathbb{Z}, i \leq k,$$

(wobei $k \in \mathbb{N}$ ist) gegeben ist, definiert eine reelle Reihe¹

$$\sum_{i=k}^{-\infty} z_i g^i.$$

Zeige, dass eine solche Reihe gegen eine eindeutig bestimmte nichtnegative reelle Zahl konvergiert.

AUFGABE 9.30. (4 Punkte)

In einen Klärteich mit einem Fassungsvermögen von 2000 m^3 werden zu Beginn eines jeden Tages 200 m^3 Wasser eingelassen, das einen bestimmten Schadstoff in einer Volumen-Konzentration von 10 % enthält und vollständig mit dem vorhandenen Wasser vermischt. Im Laufe eines Tages reduziert sich durch biologische Reaktion die vorhandene Schadstoffmenge jeweils um 20 %. Gegen Ende eines Tages werden dann 200 m^3 Wasser aus dem Klärteich abgepumpt. Welche Schadstoffkonzentration (in Prozent) stellt sich auf Dauer bei dem abgepumptem Wasser ein, wenn ganz am Anfang der Teich mit 1800 m^3 klarem Wasser gefüllt war?

AUFGABE 9.31. (4 Punkte)

Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

konvergiert.

¹Hier läuft also der Index in die umgekehrte Richtung.

AUFGABE 9.32. (5 Punkte)

Die Situation im Schildkröten-Paradoxon von Zenon von Elea ist folgendermaßen: Eine langsame Schildkröte (mit der Kriechgeschwindigkeit $v > 0$) hat einen Vorsprung $s > 0$ gegenüber dem schnelleren Achilles (mit der Geschwindigkeit $w > v$ und dem Startpunkt 0). Sie starten gleichzeitig. Achilles kann die Schildkröte nicht einholen: Wenn er beim Ausgangspunkt der Schildkröte $s_0 = s$ ankommt, so ist die Schildkröte nicht mehr dort, sondern ein Stück weiter, sagen wir an der Stelle $s_1 > s_0$. Wenn Achilles an der Stelle s_1 ankommt, so ist die Schildkröte wieder ein Stück weiter, an der Stelle $s_2 > s_1$, u.s.w.

Berechne die Folgenglieder s_n , die zugehörigen Zeitpunkte t_n , sowie die jeweiligen Grenzwerte. Vergleiche diese Grenzwerte mit den direkt berechneten Überholungsdaten.

Abbildungsverzeichnis

Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt.

7