始

# 高等
# 三角法

東京高等工學校編

東京 有文閣 發行

# 高等三角法

## 目次

**附　錄**（第一）

**測　量　問　題**

## 附錄（第二）
## 球面三角法

# 高等三角法

## 第一章
## 角ノ測定法

### 1. 六十分法

或量ノ大サヲ測定スルニハ一定ナル單位ヲ必要トス。角ノ大サヲ測ルニハ一直角ヲ單位トスレド，直角ハ餘リニ大ナルタメ實用上ニハ不便ノコトアリ。實際ニ角ヲ測定スルニハ**度，分，秒**ヲ用フ。1度ハ1直角ノ90分ノ1，1分ハ1度ノ60分ノ1，1秒ハ1分ノ60分ノ1ナリ。1度，1分，1秒ヲ表ハスノニ

$$1°,\ 1',\ 1''$$

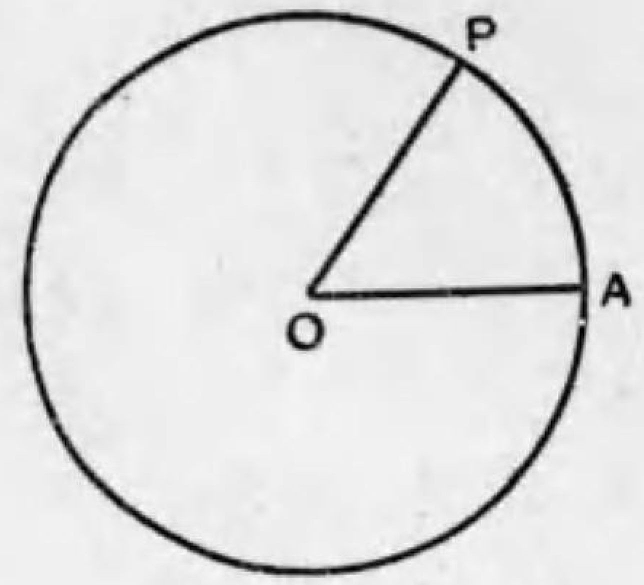
ノ如キ記號ヲ用フルコトアリ。度分秒ヲ單位トシテ角ノ大サヲ測定スル方法ヲ**六十分法**トイフ。

### 2. 弧度法

六十分法ハ實用上角ノ大サヲ測定スルトキニ用フル方法ナレドモ，理論上又ハ高等數學ニテハ**弧度法**ヲ用フ。

弧度法ニ於ケル角ノ單位ハ1らぢあん(Radian)ナリ。之レヲ次ニ說明セン。

一ツノ點Oヲ中心トシ任意ノ長サOAヲ半徑トシテ圓APヲ畫キ，弧APノ長サヲOAニ等シクトル。OトPヲ結ブ。



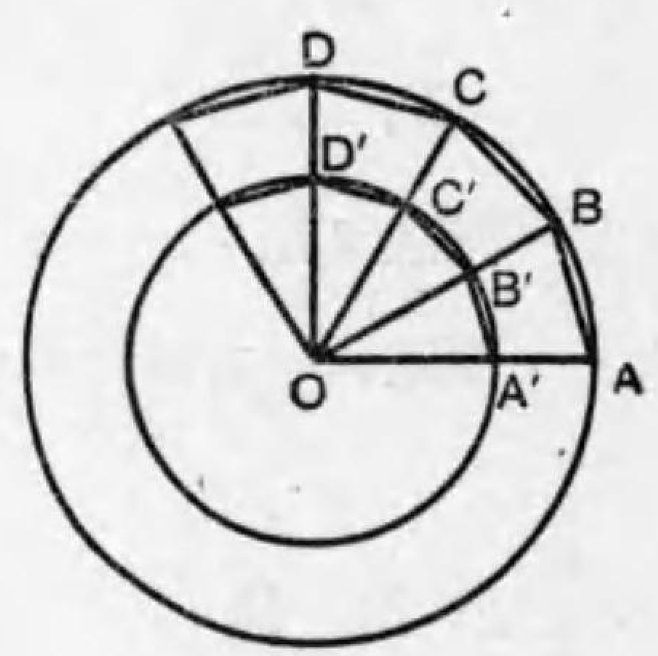
第 1 圖

弧APニ對スル中心角AOPヲ1らぢあんト云ヒ，此角ヲ角ノ單位ニ用フ。

弧度法ニ於テ注意スベキコトハ，此角ノ大サハ一定ナルコトナリ。ソレヲ證明スルニハ次ノ定理ヲ必要トス。

〔定理 1〕 圓周ト其圓ノ半徑トノ比ハ一定ナリ。

〔證明〕 Oヲ中心トシ，任意ノ長サヲ半徑トシテ二ツノ圓ヲ畫キ，大ナル圓ニ內接スル正$n$邊形 ABCD……ヲ作ル。OA, OB, OC, OD, ……ヲ結ベバ小ナル圓ト A′, B′, C′, D′,……ニテ交ハル。



第 2 圖

A′B′, B′C′, C′D′,……ヲ結ブ。多角形 A′B′C′D′……ハ



正$n$邊形ナリ。

△AOB ト △A′OB′ トハ互ニ相似ナレバ

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{OA}{OA'}$$

$$\therefore \quad \frac{n\cdot AB}{n\cdot A'B'}=\frac{OA}{OA'}$$

上ノ式ニテ$n$ヲ限リナク大ニスレバ，$n\cdot AB$ ハ大ナル圓周ノ長サトナリ，$n\cdot A'B'$ ハ小ナル圓周ノ長サトナル。故ニ

$$\frac{\text{大圓周}}{\text{小圓周}}=\frac{OA}{OA'}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{大圓周}}{OA}=\frac{\text{小圓周}}{OA'}$$

玆ニ OA, OA′ ノ長サハ完ク任意ナレバ，一般ニ圓周ニ對スル半徑ノ比ハ一定ナルベシ。此ノ比ノ値ヲ $2\pi$ ニテ表ハス。シカラバ半徑$r$ナル圓周ハ $2\pi r$ ニテ表ハサルベシ。 $\pi$ハ不盡數ニシテ

$$\pi=3.14159265\ldots\ldots$$

$\pi$ノ近似値トシテ次ノ二數ヲ用フルコトアリ。

$$\frac{22}{7}=3.14285\ldots\ldots$$

$$\frac{355}{113}=3.1415929203\ldots\ldots$$

〔定理 2〕 1らぢあんハ一定ノ大サノ角ナリ。

〔證明〕 Oヲ中心トシ，$r$ヲ半徑トスル圓ヲ畫ク。

$\angle AOB$ ヲ直角ニ等シクトル。弧 AB ハ圓周ノ 4 分ノ 1 ナリ。

弧 AP ヲ半徑 $r$ ニ等シクトレバ $\angle AOP$ ハ 1 らぢあんニシテ

$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB}=\frac{\widehat{AP}}{\widehat{AB}}=\frac{r}{\frac{\pi r}{2}}=\frac{2}{\pi}$$

$$\therefore\quad \angle AOP=\frac{2}{\pi}\times\angle AOB$$

$$\therefore\quad 1\text{ らぢあん}=\frac{2}{\pi}\angle AOB=\frac{2}{\pi}\angle R$$

シカルニ $\angle R$ ハ一定，$\pi$ ハ一定ナレバ 1 らぢあんハ一定ノ大サノ角ニシテ

$$\begin{aligned}1\text{ らぢあん}&=\frac{1}{\pi}2\angle R=\frac{180^\circ}{\pi}\\&=180^\circ\times 0.31830988\cdots\cdots\\&=57^\circ.2957795\cdots\cdots\\&=57^\circ17'44''.8\cdots\cdots\end{aligned}$$

次ニ，度數ヲらぢあんニ變ヘルニハ

$$\angle R=\frac{\pi}{2}\text{ らぢあん}$$

ナレバ

$$90^\circ=\frac{\pi}{2}\text{ らぢあん}$$

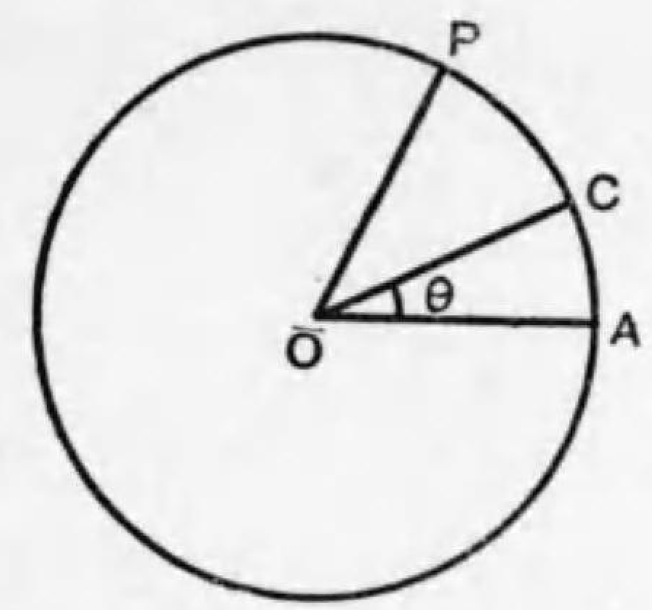
$$\therefore\quad 180^\circ=\pi\text{ らぢあん},\quad 360^\circ=2\pi\text{ らぢあん}$$



角ヲ測定スルニらぢあんヲ單位トシテ弧度法ヲ用フレバ都合ノヨキコト多シ。例ヘバ，$\theta$ らぢあんノ角ガ與ヘラレタルモノトス。ソノ角ノ頂點ヲ中心トシ，半徑 $r$ ナル圓ヲ作リ，$\angle\theta$ ニ對スル弧ヲ AC トシ，弧 AP ヲ $r$ ニ等シクトレバ

$$\frac{\widehat{AC}}{\widehat{AP}}=\frac{\theta\ rad}{1\ rad}=\theta$$

$$\therefore\quad \widehat{AC}=\theta\times\widehat{AP}=\theta r$$




第 3 圖

故ニ，弧度法ニヨリ一ツノ角ノ大サヲ測定シ，$\theta$ らぢあんトスレバ，任意ノ長サ $r$ ヲ半徑トシ，角頂ヲ中心トシテ畫ケル圓ガ其角ニヨリ截リ取ラルル圓ノ弧ノ長サハ $\theta r$ ニ等シ。

**問題**

1. らぢあんヲ單位トシテ測定セル次ノ各角ヲ六十分法ニテ表ハセ。

$$\frac{\pi}{3},\quad \frac{4\pi}{3},\quad 10\pi,\quad \frac{\pi}{4}$$

2. 六十分法ニテ表ハセル次ノ各角ヲ弧度法ニ直セ。

$$60^\circ,\quad 110^\circ30',\quad 395^\circ,\quad 175^\circ45'$$

3. 直角三角形ノ二ツノ鋭角ノ差ハ $\frac{3}{5}\pi$ らぢあんナリ。

其二角ノ大サヲ弧度法ニテ表ハセ。

4. 半徑 5 糎ナル圓ニ於テ弧ノ長サ 1 糎ニ對スル中心角ヲ六十分法ニテ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トセヨ。

5. 半徑 5 糎ナル圓ニ於テ中心角 $33°15'$ ニ對スル弧ノ長サヲ求メヨ。但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トセヨ。

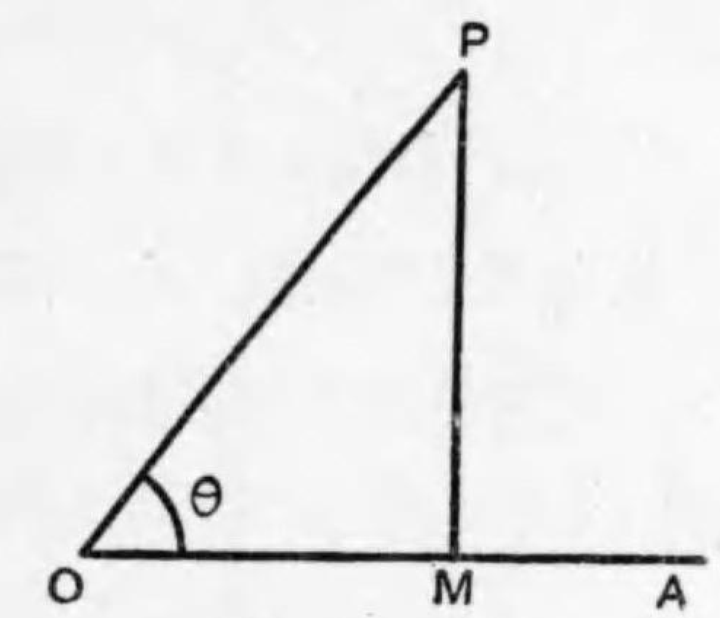


# 第二章
## 鋭角ノ三角函數

### 1. 三角函數ノ定義

線分 OP ガ OA ノ位置ヨリ出發シ，∠AOP ヲ作リ OP ノ位置マデ來レルモノトス。

今，∠AOP ヲ鋭角トス。OP 上ノ一點 P ヨリ OA ニ垂線 PM ヲ下ス。△MOP ニ於テ OP ハ直角 PMO ニ對スル斜邊，PM ハ垂線，OM ハ底邊ナリ。



第 4 圖

$$\frac{MP}{OP}=\frac{垂}{斜}=\mathit{sine}\ \mathit{of}\ \angle AOP=\sin\angle AOP$$

$$\frac{OM}{OP}=\frac{底}{斜}=\mathit{cosine}\ \mathit{of}\ \angle AOP=\cos\angle AOP$$

$$\frac{MP}{OM}=\frac{垂}{底}=\mathit{tangent}\ \mathit{of}\ \angle AOP=\tan\angle AOP$$

$$\frac{OM}{MP}=\frac{底}{垂}=\mathit{cotangent}\ \mathit{of}\ \angle AOP=\cot\angle AOP$$

$$\frac{OP}{OM}=\frac{斜}{底}=\mathit{secant}\ \mathit{of}\ \angle AOP=\sec\angle AOP$$

$$\frac{OP}{MP}=\frac{斜}{垂}=\mathit{cosecant}\ \mathit{of}\ \angle AOP=\mathrm{cosec}\,\angle AOP$$

是等六ツノ比ヲ$\angle$AOPノ**三角函數又ハ圓函數**トイフ。此ノ中，特ニ必要ナルハ $sin, cos, tan$ ノ三ツノ函數ナリ。

上ノ定義ニヨリ

$$cosec\,\angle AOP=\frac{1}{sin\,\angle AOP}$$

$$sec\,\angle AOP=\frac{1}{cos\,\angle AOP}$$

$$cot\,\angle AOP=\frac{1}{tan\,\angle AOP}$$

## 2. 三角函數ノ基礎ノ關係

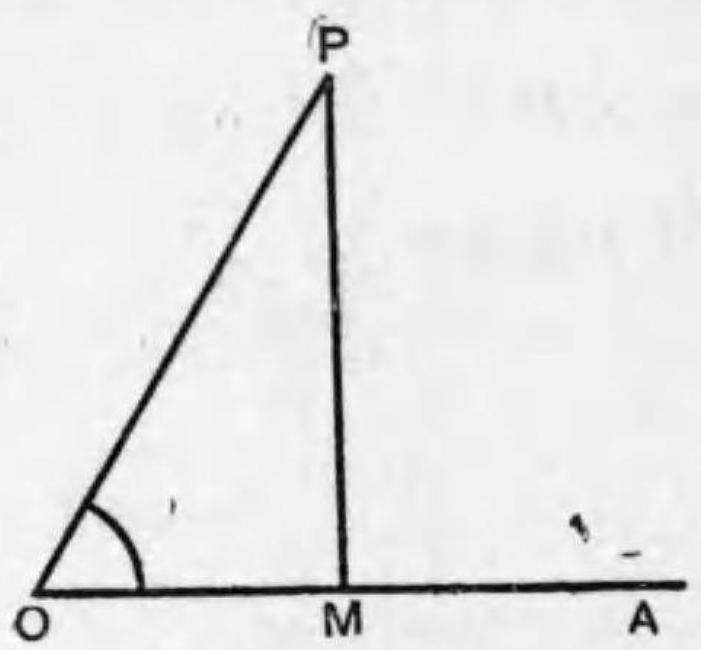
或角ノ三角函數ノ中，其一ツノ値ガ既知ナラバ他ノ五ツノ三角函數ノ値ヲ求ムルコトヲ得。其ノ基礎トナル公式ハ次ノ如シ。

$\angle$AOP ヲ $\theta$ トス。P ヨリ OA ニ垂線 PM ヲ下ス。

直角三角形 MPO ニ於テ

$$MP^2+MO^2=PO^2$$

$$\therefore\ \left(\frac{MP}{PO}\right)^2+\left(\frac{MO}{PO}\right)^2=1$$




第 5 圖

$$\therefore\ (sin\,\theta)^2+(cos\,\theta)^2=1$$

之レヲ次ノ如ク書ク。

$$sin^2\theta+cos^2\theta=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $sin\,\theta=\frac{MP}{PO},\quad cos\,\theta=\frac{OM}{PO}$ ナレバ



$$\frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}=\frac{MP}{PO}\div\frac{OM}{PO}=\frac{MP}{OM}=tan\,\theta$$

$$\therefore\ tan\,\theta=\frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $cot\,\theta=\frac{1}{tan\theta}$ ナレバ

$$cot\,\theta=\frac{cos\,\theta}{sin\,\theta}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又 $sec^2\theta=\frac{1}{cos^2\theta}=\frac{sin^2\theta+cos^2\theta}{cos^2\theta}$

$$=tan^2\theta+1\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$cosec^2\theta=\frac{1}{sin^2\theta}=\frac{sin^2\theta+cos^2\theta}{sin^2\theta}$$

$$=1+cot^2\theta\ \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

上ノ五ツノ公式ハ三角法全部ニ亘リテ必要ナル公式ナリ。是等ノ公式ニヨリ六ツノ三角函數ノ中ノ一ツヲ知レバ他ノ函數ノ値ヲ計算スルコトヲ得。例ヘバ $tan\,\theta=1$ ナルトキ他ノ函數ノ値ヲ求メンニ，(2) ニヨリ

$$\frac{sin\,\theta}{cos\,\theta}=1$$

$$\therefore\ sin\,\theta=cos\,\theta\ \cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

故ニ，公式 (1) ニヨリ

$$2sin^2\theta=1$$

$$\therefore\ sin\,\theta=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(A) ニヨリ

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{1}=1$$

(4) ニヨリ

$$\sec^2\theta=1+1=2$$

$$\therefore\quad \sec\theta=\sqrt{2}$$

同様ニ (5) ニヨリ

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**例**　次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\operatorname{cosec}A-\cot A$$

(解)　$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}=\sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A}}=\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$=\operatorname{cosec}A-\cot A$$

## 問　題

次ノ各等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

1. $(\sin A+\cos A)(1-\sin A\cos A)=\sin^3 A+\cos^3 A$

2. $\cos^6 A+\sin^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$

3. $2(\sin^6\theta+\cos^6\theta)-3(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+1=0$

4. $\dfrac{1}{\tan\theta+\cot\theta}=\sin\theta\cos\theta$

5. $\dfrac{\sec\alpha-\tan\alpha}{\sec\alpha+\tan\alpha}=1-2\sec\alpha\tan\alpha+2\tan^2\alpha$

6. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$



7. $(\sin\theta+\cos\theta)(\cot\theta+\tan\theta)=\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$

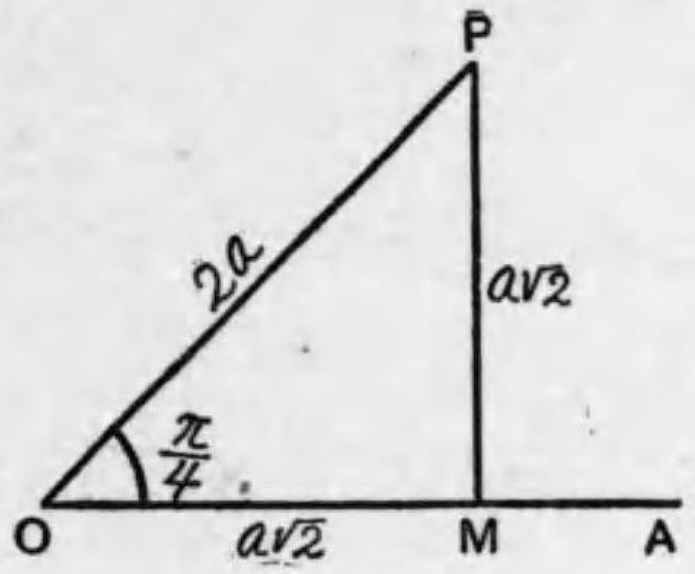
8. $\sin^2\theta\tan\theta+\cos^2\theta\cot\theta+2\sin\theta\cos\theta=\tan\theta+\cot\theta$

9. $\dfrac{\cos\alpha\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha\sec\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha-\sec\alpha$

10. $(1+\cot A+\tan A)(\sin A-\cos A)=\dfrac{\sec A}{\operatorname{cosec}^2 A}-\dfrac{\operatorname{cosec}A}{\sec^2 A}$

### 3. 特別ナル角ノ三角函數

**(1) $\frac{\pi}{4}$ ノ三角函數**



第　6　圖

圖ニ於テ $\angle AOP=\frac{\pi}{4}$ トスレバ

$\angle MPO=\frac{\pi}{4}$ ニシテ

$OM=PM$

今, $OP=2a$ トスレバ

$$OP^2=OM^2+PM^2=2OM^2$$

又　$$OP^2=(2a)^2=4a^2$$

$$\therefore\quad 2OM^2=4a^2$$

$$OM=a\sqrt{2}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\pi}{4}=\frac{MP}{OP}=\frac{a\sqrt{2}}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{OM}{OP}=\frac{a\sqrt{2}}{2a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\tan\frac{\pi}{4}=\frac{MP}{OM}=1$$

**(2) $\frac{\pi}{6}$ ノ三角函數**

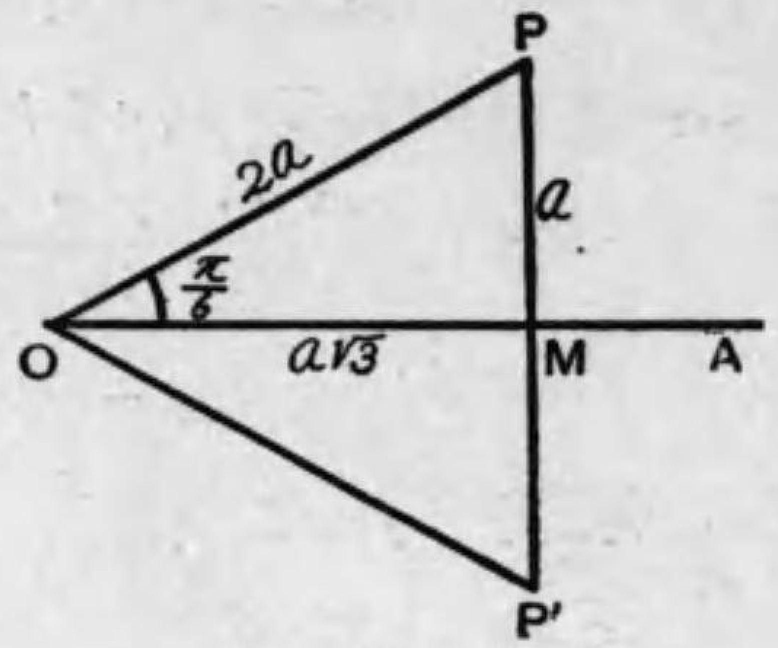
$\angle AOP$ ヲ $\frac{\pi}{6}$ トシ，P ヨリ OA ニ垂線 PM ヲ下シ，ソレヲ延長シテ MP′ ヲ MP ニ等シクトル。

O, P′ ヲ結ブ。

シカラバ $\angle MOP' = \frac{\pi}{6}$ ニシテ

$$\angle P'OP = \frac{\pi}{3}$$

又 $\angle OPM = \angle OP'M = \frac{\pi}{3}$



第 7 圖

故ニ △POP′ ハ正三角形ナリ。今 $OP=2a$ トスレバ $MP=a$ ニシテ

$$OM = \sqrt{OP^2 - MP^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{MP}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{OM}{OP} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{MP}{OM} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(=\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

### (3) $\frac{\pi}{3}$ ノ三角函數

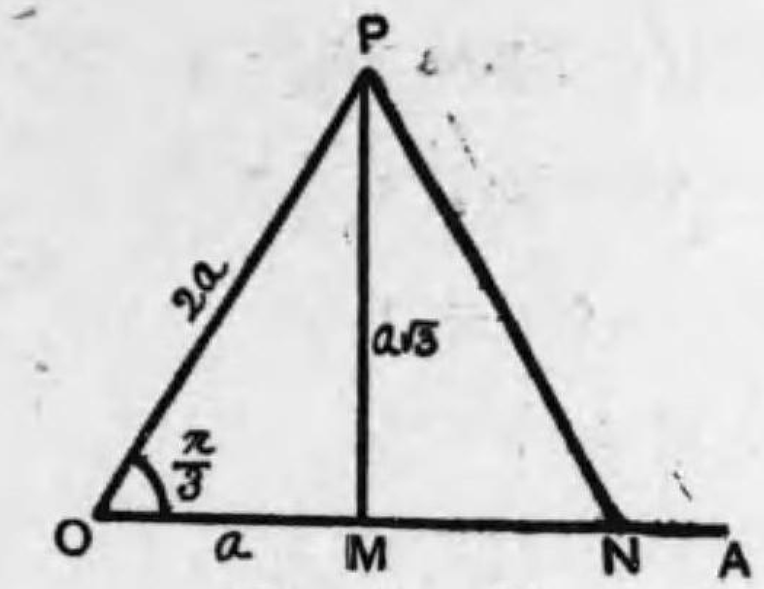
$\angle AOP$ ヲ $\frac{\pi}{3}$ トシ，OA 上ニ OM ニ等シク MN ヲトリ，$OM=a$ トス。△PON ハ正三角形ニシテ



$$OP = ON = 2OM = 2a$$

$$MP = \sqrt{OP^2 - OM^2}$$
$$= \sqrt{4a^2 - a^2}$$
$$= a\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{MP}{OP}$$
$$= \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



第 8 圖

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{OM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

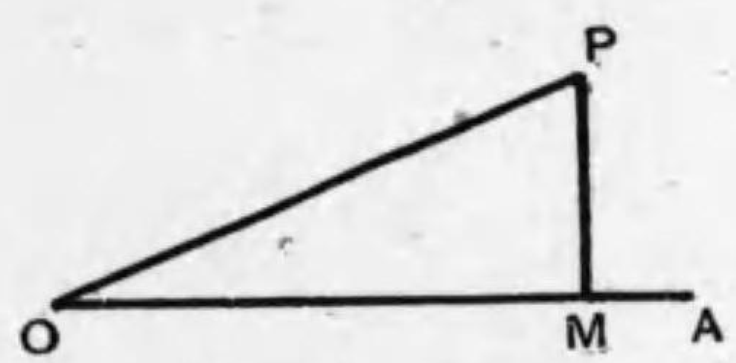
$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{MP}{OM} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

### (4) 0 ノ三角函數

廻轉直線 OP ガ OA ノ位置ヨリ始メテ極メテ僅カ廻轉スルトキハ，$\angle AOP$ ハ甚ダ小ナル角ニシテ，垂線 PM ノ長サハ殆ド 0 ト見ルコトヲ得。此時ハ

$$\sin\angle AOP = \sin 0 = \frac{MP}{OP}$$
$$= \frac{0}{OP} = 0$$

$$\cos 0 = \frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OP}$$
$$= 1$$



第 9 圖

$$\tan 0 = \frac{0}{1} = 0$$

$\cot 0$ ハ $\frac{OM}{MP}$ ノ MP ガ 0 ニ近迫セルトキノ値ニシテ，其

時ハ此分數ノ分子 OM ハ一定，分母 MP ガ限リナク 0 ニ近ヅクヲ以テ全體トシテ限リナク大トナルベシ。ソレヲ ∞ ニテ示ス。シカラバ

$$\cot 0=\infty$$

トナルベシ。

(5) $\frac{\pi}{2}$ ノ三角函數

∠AOP ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ近ヅクトキハ，M ハ殆ド O ニ合シ，MP ハ OP ニ等シクナル。

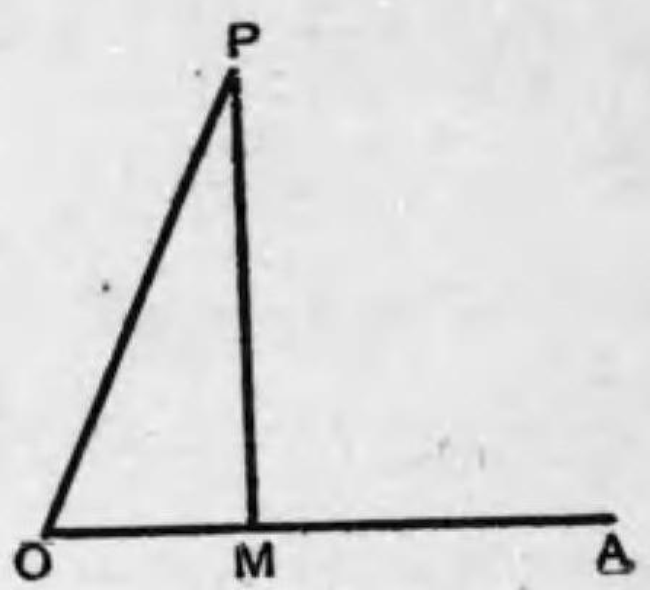
$$\sin\frac{\pi}{2}=\frac{MP}{OP}=\frac{OP}{OP}=1$$

$$\cos\frac{\pi}{2}=\frac{OM}{OP}=\frac{0}{OP}=0$$

$\tan\frac{\pi}{2}$ ハ $\frac{PM}{OM}$ ニシテ，此分數ノ分子 PM ハ ∠AOP ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ近ヅクトキ PO ト重ナリ，OM ハ零ニ近迫スベシ。故ニ

$$\tan\frac{\pi}{2}=\infty$$

トナル。




第 10 圖

以上ノ結果ヲ表ニスレバ次ノ如シ。



| 角 | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *sin* | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| *cos* | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| *tan* | 0 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | ∞ |

## 4. 餘角ノ三角函數

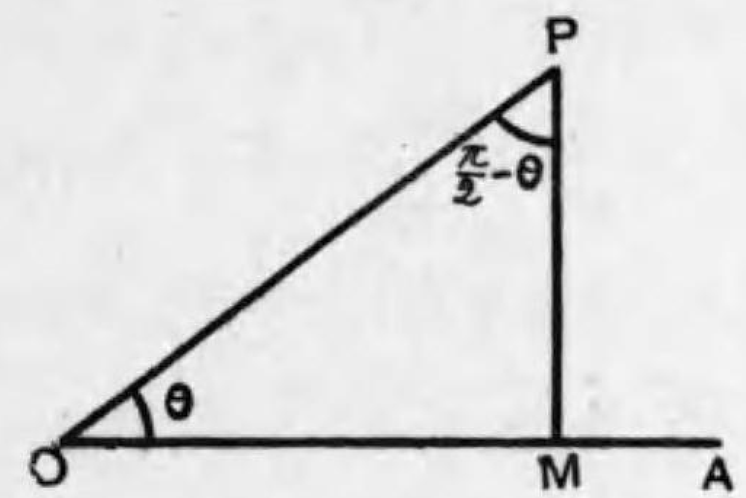
二ツノ角アリ，其和ガ直角ニ等シキトキ，ソノ二ツハ互ニ他ノ餘角 (Complementary Angle) ナリトイフ。

故ニ，一ツノ角ヲ $\theta$ トスレバ，其餘角ハ $\frac{\pi}{2}-\theta$ ナリ。

∠AOP ヲ $\theta$ トスレバ，圖ニ於テ ∠MPO ハ其餘角ニシテ

$$\angle MPO=\frac{\pi}{2}-\theta$$

ナリ。




第 11 圖

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\angle MPO=\frac{MP}{PO}=\cos\angle AOP=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\angle MPO=\frac{PM}{PO}=\sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\angle MPO=\frac{OM}{PM}=\cot\theta$$

故ニ
$$\left.\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\cos\theta \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)&=\cot\theta \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

同樣ニシテ
$$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta,\quad \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\operatorname{cosec}\theta,$$
$$\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

**問　題**

(1) $A=\frac{\pi}{6}$ナルトキ次ノ等式ノ成立スルコトヲ示セ。

(i) $\cos 2A=\cos^2 A-\sin^2 A=2\cos^2 A-1$

(ii) $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$

(2) $\sin^2 30°+\sin^2 45°+\sin^2 60°=\frac{3}{2}$

(3) $4\cot^2 45°-\sec^2 60°+\sin^2 30°=\frac{1}{8}$

(4) $\cos 45°\cos 60°-\sin 45°\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(5) 垂直ニ立テル旗竿アリ。30米ヲ距タレル地點ニテ頂上ヲ望ミシトキ，其角度30°ナリシトイフ。旗竿ノ高サヲ求メヨ。但シ$\sqrt{3}=1.7321$トシテ計算セヨ。

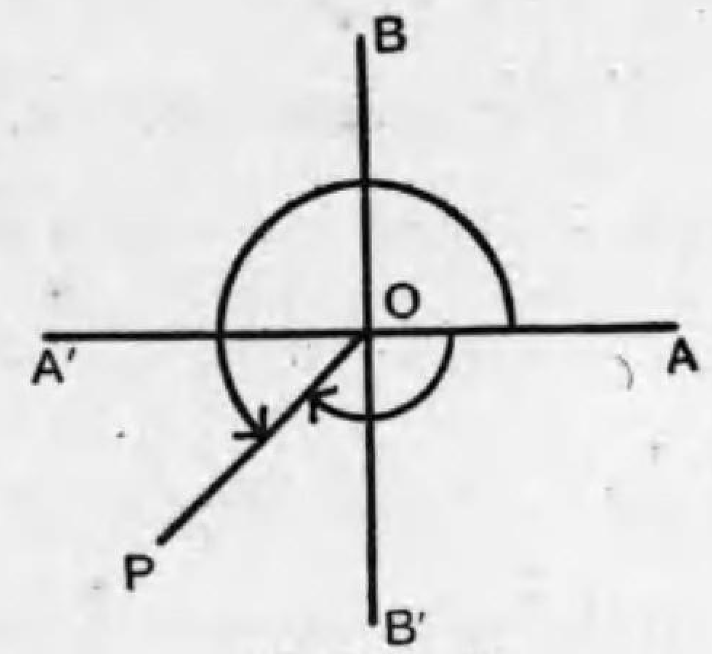
(6) 煙突ノ高サヲ測ルタメ，其基底ヲ通ル水平線ニ沿ヒ50米ヲ距テタル二點ニテ其頂上ヲ望ミ，30°及ビ45°ヲ得タリ。其高サヲ求メヨ。



# 第 三 章
## 一般角ノ三角函數

### 1. 正角及ビ負角

廻轉スル線分ガ時計ノ針ト反對ノ方向 (Counter-clockwise) ニ廻轉スルトキ，正方向ニ廻轉シ，正角ヲ畫クトイフ。反之，廻轉線分ガ時計ノ針ト同方向ニ廻轉スルトキ負角ヲ畫クトイフ。例ヘバ OP ガ OA ヨリ初メテ正方向ニ ∠A′OB′ ヲ二等分スル所マデ廻轉セルモノトスレバ，OP ハ +225° ヲ作リ，又負方向ニ廻轉シテ OP ノ位置マデ來レルモノトスレバ，−135° ヲ作レルコトトナル。



第 12 圖

### 2. 直線ノ方向

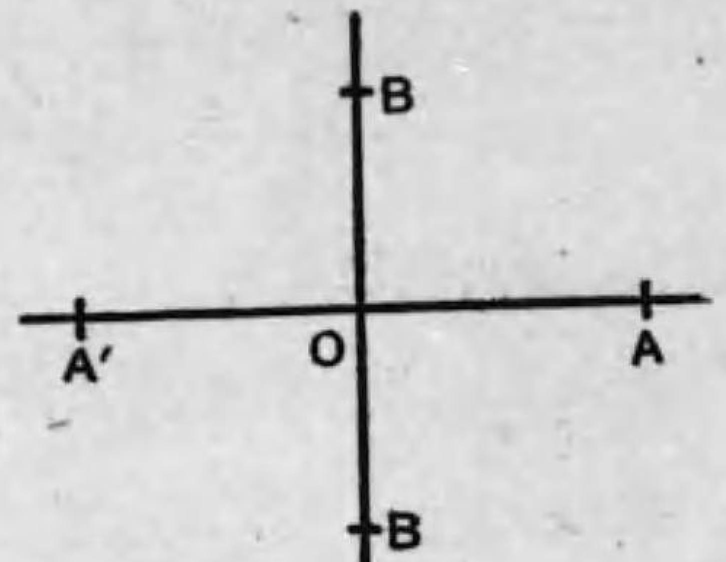
一ツノ直線ニ於テ左ヨリ右ノ方向ヲ正，右ヨリ左ノ方向ヲ負トス。

直線AA′ノ上ニ，一點Oヲトレバ，Oヨリ右ノ方向ハ正ニシテ，Oヨリ左ノ方向ハ負ナリ。カクノ如キ點Oヲ原點トイフ。

今，OA, OA′ノ長サヲ共ニ$a$（$a$ハ正數）トスレバ

$OA=+a$，$OA'=-a$、

又直線BB′ニ於テハOノ上ノ方向ヲ正トシ，下ノ方向ヲ負トス。



第 13 圖

OB, OB′ノ長サヲ共ニ$b$（$b$ハ正數）トスレバ

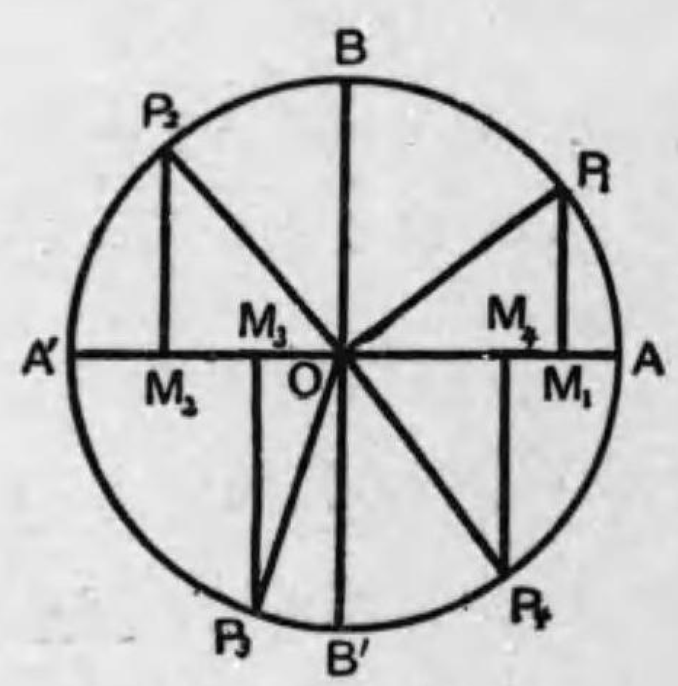
$OB=+b$，$OB'=-b$

ナリ。$+a$又ハ$+b$ヲ表ハスノニ，單ニ$a, b$ト書クコトアリ。

### 3. 一般角ノ三角函數

OAヲ原線 (Initial line) トシ，反對ノ方向ニ延長セルモノヲOA′トス。

Oヲ通リAOA′ニ垂線BOB′ヲ引ク。



第 14 圖



OPガOAノ位置ヨリ初メテOP ($OP_1$, $OP_2$, $OP_3$又ハ$OP_4$) ノ位置マデ來レルモノトシ，PヨリAOA′ニ垂線PMヲ下ス。

其ノトキ，$\dfrac{MP}{OP}$ヲ$\angle AOP$ノ*sine*ト云ヒ，$\sin\angle AOP$ト書ク。卽チ

$$\frac{MP}{OP}=\sin\angle AOP$$

同樣ニシテ

$$\frac{OM}{OP}=\cos\angle AOP$$
$$\frac{MP}{OM}=\tan\angle AOP$$
$$\frac{OM}{MP}=\cot\angle AOP$$
$$\frac{OP}{OM}=\sec\angle AOP$$
$$\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec}\angle AOP$$

$\angle AOP$ガ銳角ノトキハ，第二章ノ銳角ノ三角函數ト一致シ，又$\angle AOP$ヲ$\theta$トスレバ前ト同樣ニ次ノ關係アルベシ。

$$\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$
$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}$$
$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$$

$$\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta$$

## 4. 三角函數ノ符號

相交ル二ツノ垂線 AOA′ 及ビ BOB′ ハ平面ヲ四ツノ部分ニ分ツ。

AOB ノ部分ヲ**第一象限**,

BOA′ ノ部分ヲ**第二象限**,

A′OB′ ノ部分ヲ**第三象限**,

B′OA ノ部分ヲ**第四象限**,

ト云フ。

第 15 圖

次ニ，各象限ニ於ケル角ノ三角函數ノ符號ニツキ考ヘンニ，OP ガ $OP_1$ ノ如ク，第一象限ニアルトキハ $OM_1$，$P_1M_1$ ハ共ニ正ニシテ，廻轉スル線分ヲ常ニ正ニトレバ，$OP_1$ ハ正ニシテ，總テノ三角函數ハ正數ナリ。

第二象限ニ於テハ $OM_2$ ハ $(-)$，$P_2M_2$ ハ $(+)$

第三象限ニ於テハ $OM_3$ ハ $(-)$，$P_3M_3$ ハ $(-)$

第四象限ニ於テハ $OM_4$ ハ $(+)$，$P_4M_4$ ハ $(-)$

ナレバ，各三角函數ノ符號ハ次ノ如クナルベシ。



| | |
|---|---|
| $\sin(+)$ | $\sin(+)$ |
| $\cos(-)$ | $\cos(+)$ |
| $\tan(-)$ | $\tan(+)$ |
| $\sin(-)$ | $\sin(-)$ |
| $\cos(-)$ | $\cos(+)$ |
| $\tan(+)$ | $\tan(-)$ |

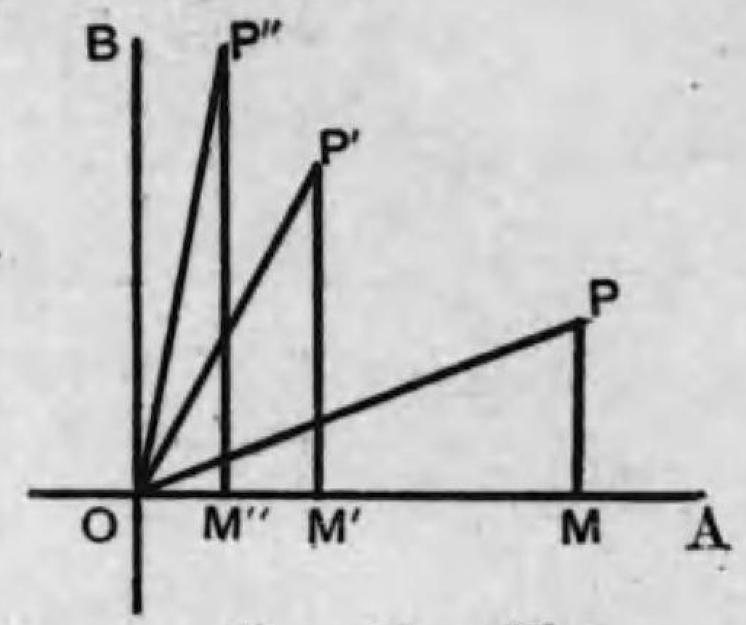
## 5. 三角函數ノ値ノ變化

(I) Sine 前節ノ圖ニ於テ，$OP=a$, $\angle AOP=\theta$ トスレバ，$\sin\theta$ ハ $\theta$ ガ $0$ ヨリ $\frac{\pi}{2}$ マデ次第ニ増加スルト共ニ，$\frac{0}{a}$ 卽チ $0$ ヨリ，$\frac{a}{a}$ 卽チ $1$ マデ増加ス。次ニ $\theta$ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ $\pi$ マデ増加スルトキ，$\frac{a}{a}$ 卽チ $1$ ヨリ，$\frac{0}{a}$ 卽チ $0$ マデ減少ス。更ニ第三象限ニ進ミ，$\theta$ ガ $\pi$ ヨリ $\frac{3\pi}{2}$ マデ増加スレバ $0$ ヨリ $-1$ マデ減少シ，第四象限ニ於テ，$\theta$ ガ $\frac{3\pi}{2}$ ヨリ $2\pi$ マデ増加スレバ，$-1$ ヨリ $0$ マデ増加ス。

(II) Cosine $\cos\theta$ ハ第一象限ニテハ $\frac{a}{a}$ ヨリ $\frac{0}{a}$，卽チ $1$ ヨリ $0$ マデ減少シ，第二象限ニテハ $0$ ヨリ $-1$ マデ減少ス。次ニ，第三象限ニテハ $-1$ ヨリ $0$ マデ増加シ，第四象限ニテハ $0$ ヨリ $1$ マデ増加ス。

(III) Tangent $\tan\theta$ ハ $\theta$ ガ $0$ ノトキハ $0$ ニシテ，$\theta$ ガ $\frac{\pi}{2}$ ニ近ヅクト共ニ其値ハ次第ニ増加シテ $+\infty$ トナル。

第二象限ニ於テハ，$\tan\theta$ ハ其函數ノ性質上負數ナリ。シカシテ，$\theta$ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ大キクシテ $\frac{\pi}{2}$ ニ近カキトキハ，其數値ハ限リナク大ナリ。從テ，$\theta$ ガ $\frac{\pi}{2}$ ヨリ少シク大ナラバ，$\tan\theta$ ハ $-\infty$ トナルベシ。$\theta$ ガ $\pi$ ノトキハ 0 トナル。故ニ，$\tan\theta$ ハ第二象限ニ於テ $-\infty$ ヨリ 0 マデ增加ス。




第 16 圖

第三象限ニテハ 0 ヨリ $\infty$ マデ，第四象限ニテハ $-\infty$ ヨリ 0 マデ增加ス。

斯クノ如ク，或函數ノ値ガ順次ニ變化スルコトナク，急激ニ $+\infty$ ヨリ $-\infty$ ノ如ク變ハル場合，其函數ハ不連續ナリトイフ。$\tan\theta$ ハ $\theta$ ガ $\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$ ノトキ不連續ナリ。

| | |
|---|---|
| $\sin$ $1\to0$ | $\sin$ $0\to1$ |
| $\cos$ $0\to-1$ | $\cos$ $1\to0$ |
| $\tan$ $-\infty\to0$ | $\tan$ $0\to\infty$ |
| $\sin$ $0\to-1$ | $\sin$ $-1\to0$ |
| $\cos$ $-1\to0$ | $\cos$ $0\to1$ |
| $\tan$ $0\to\infty$ | $\tan$ $-\infty\to0$ |



Sine, Cosine, Tangent ノ値ノ變化ノ有樣ヲ表ニシテ示セバ以上ノ如シ。

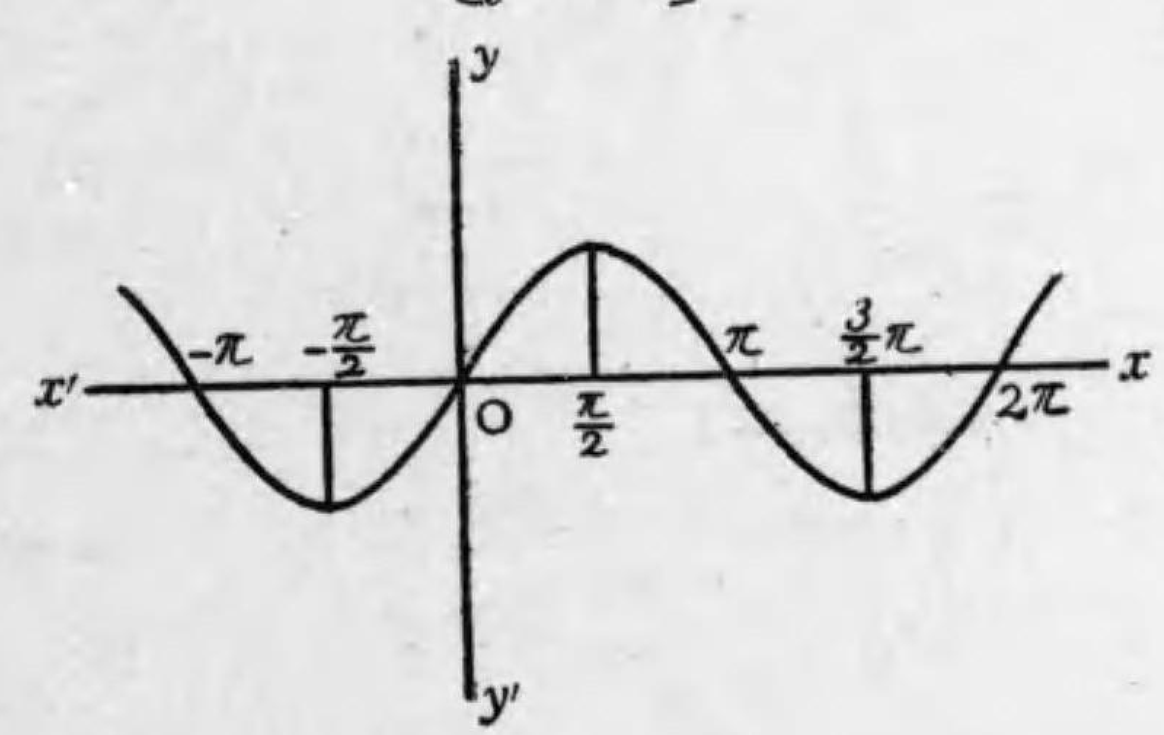
### 6. 三角函數ノ週期

$\theta$ ガ 0 ヨリ $2\pi$ マデ增加シ，更ニ $2\pi$ ヨリ $4\pi$ マデ增加スルトキ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ ノ値ノ變化ハ 0 ヨリ $2\pi$ マデノ間ノ變化ト完ク同ジカルベシ。卽チ是等ノ函數ハ $\theta$ ガ $2\pi$ ヲ越ユルト共ニ前ト同ジ値ヲトル。此ノ $2\pi$ ヲ是等ノ函數ノ**週期** (Period) トイフ。

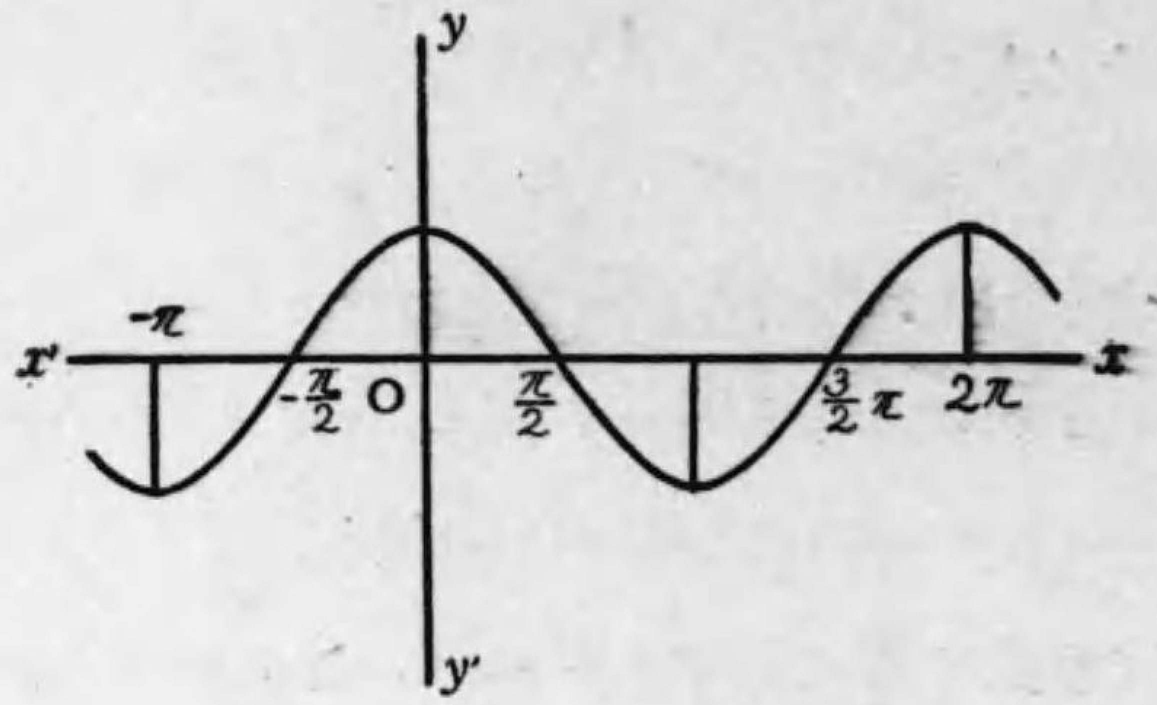
$\tan\theta$ 及ビ $\cot\theta$ ニテハ $\theta$ ガ 0 ヨリ $\pi$ マデ增加スルトキト $\pi$ ヨリ $2\pi$ マデ變ハルトキト變化ノ有樣ハ全ク同ジ。故ニ $\tan\theta$, $\cot\theta$ ノ週期ハ $\pi$ ナリ。

以上ノ諸性質ニヨリ $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ ノぐらふヲ得ベシ。

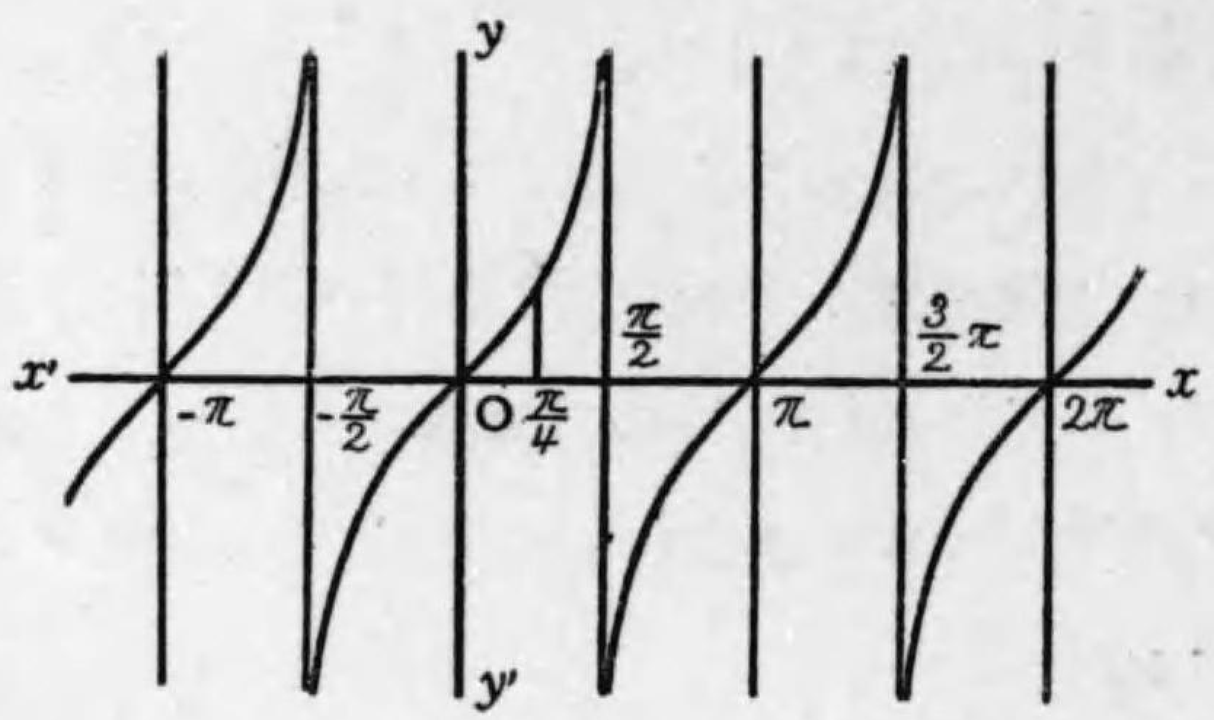
[$y=\sin x$]



［$y=\cos x$］




［$y=\tan x$］




### 問題

1. $\sin\theta$ ガ $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ナルトキ，$\cos\theta$ 及ビ $\cot\theta$ ヲ求メヨ。

2. $\sin\theta$ ガ $\dfrac{m^2+2mn}{m^2+2mn+2n^2}$ ナルトキ

$$\tan\theta=\frac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。



3. $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ ナラバ

$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$$

ナルコトヲ證明セヨ。

4. $3\operatorname{cosec}^2\theta=2\sec\theta$ ニ適スル $\theta$ ヲ求メヨ。

5. 次ノ恒等式ヲ證明セヨ。

$$\operatorname{cosec}^6\alpha-\cot^6\alpha=3\operatorname{cosec}^2\alpha\cot^2\alpha+1$$

6. $x$ ガ實數ナラバ，次ノ方程式ノ成立セザルコトヲ示セ。

$$\sin\theta=x+\frac{1}{x}$$

### 7. 負角ノ三角函數

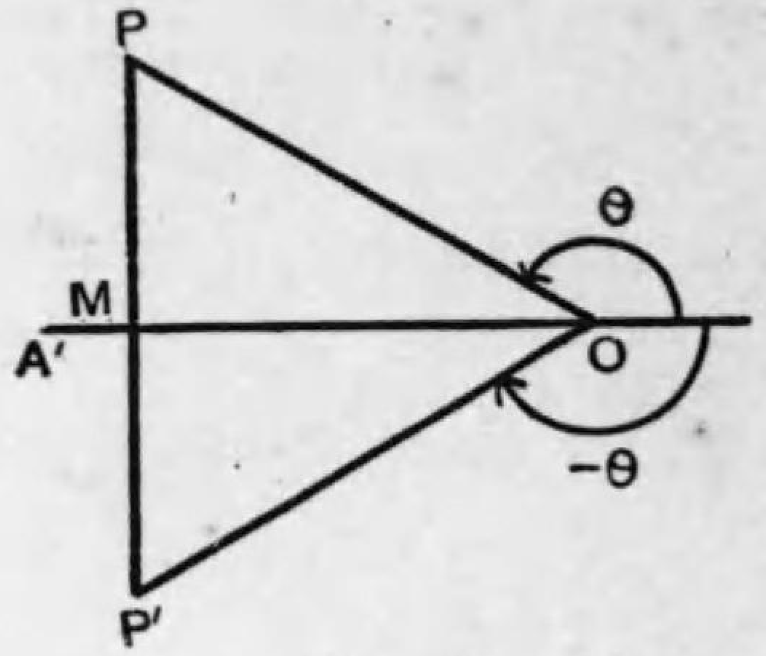
$\angle AOP$ ヲ $\theta$ トシ，P ヨリ OA ニ垂線 PM ヲ下シ，延長シテ MP′ ヲ MP ニ等シクトル。

O, P′ ヲ結ブ。

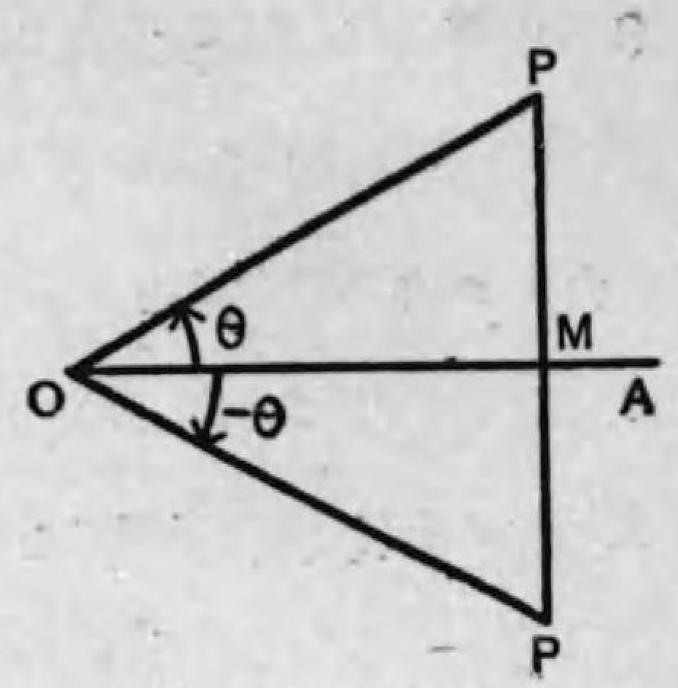
$\triangle MOP$ ト $\triangle MOP'$ ハ合同ナレバ $\angle AOP'$ ノ大サハ $\angle AOP$ ニ等シ。シカシ符號ガ反對ナレバ

$$\angle AOP'=-\theta$$

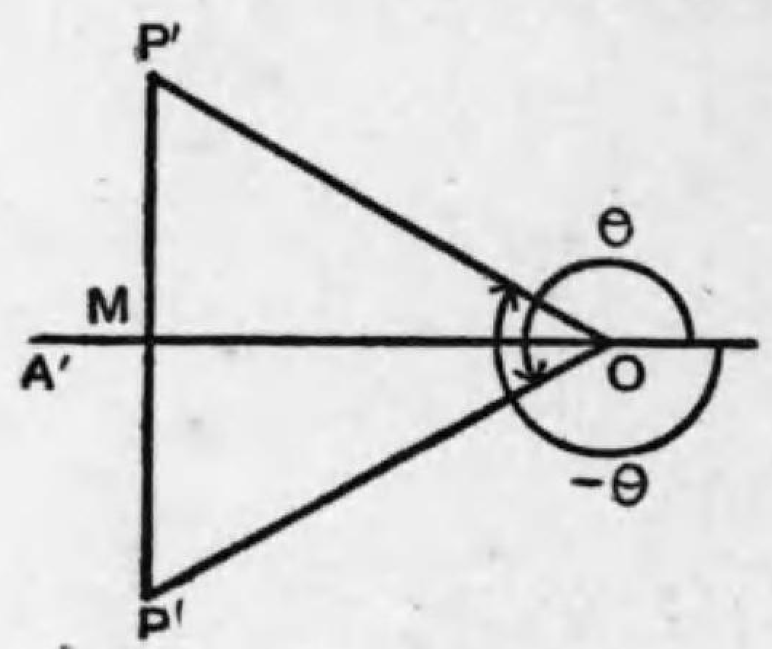
又　$MP'=-MP$ ナリ。



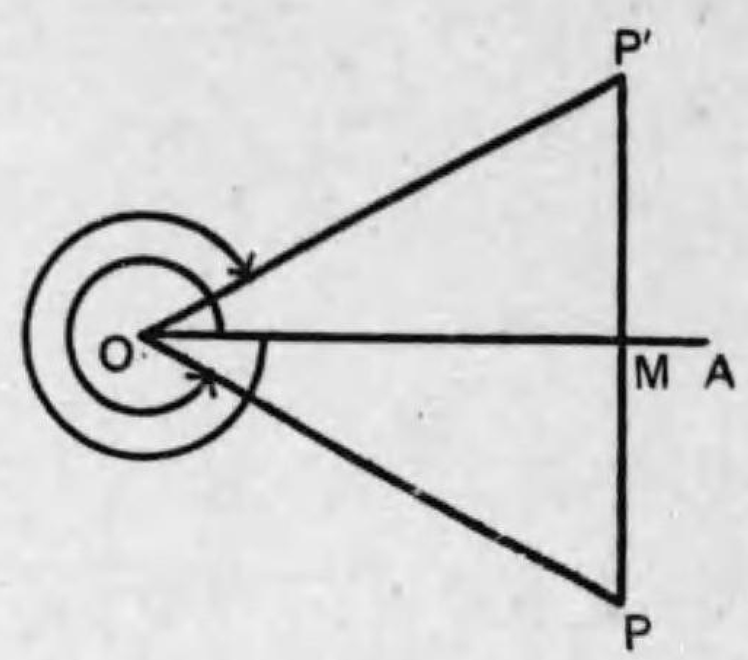

第　21　圖




第　20　圖




第　22　圖




第　23　圖

$$\sin(-\theta)=\sin\angle \mathrm{AOP}'=\frac{\mathrm{MP}'}{\mathrm{OP}'}$$

$$=\frac{-\mathrm{MP}}{\mathrm{OP}}=-\sin\theta$$

$$\cos(-\theta)=\cos\angle \mathrm{AOP}'=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}'}$$

$$=\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OP}}=\cos\theta$$

$$\tan(-\theta)=\frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)}=\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=-\tan\theta$$



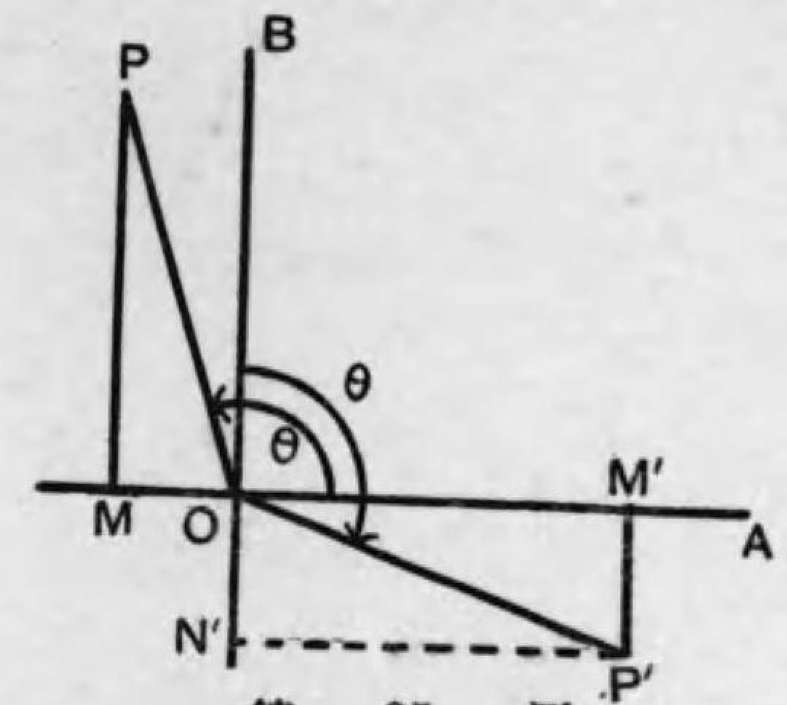
## 8. $90°-\theta$ ノ三角函數

次ノ各圖ニ於テ$\angle$MOP ニ等シク$\angle$N'OP' ヲトリ，OP ニ等シク OP' ヲトル。P, P' ヨリ AA' ニ垂線 PM, P'M' ヲ下ス。シカラバ

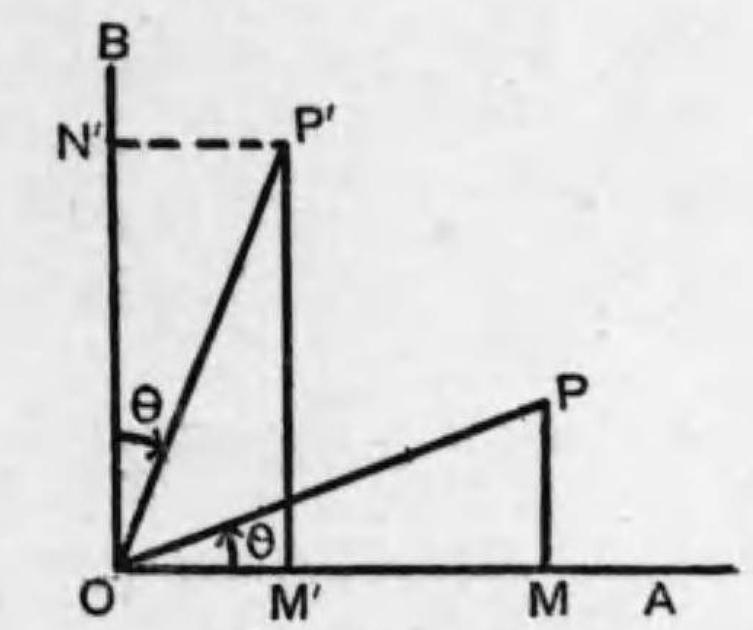
$$\triangle \mathrm{MOP} \equiv \triangle \mathrm{M'OP'}$$

$$\therefore\quad \mathrm{OM}=\mathrm{M'P'}\quad(\text{數值})$$

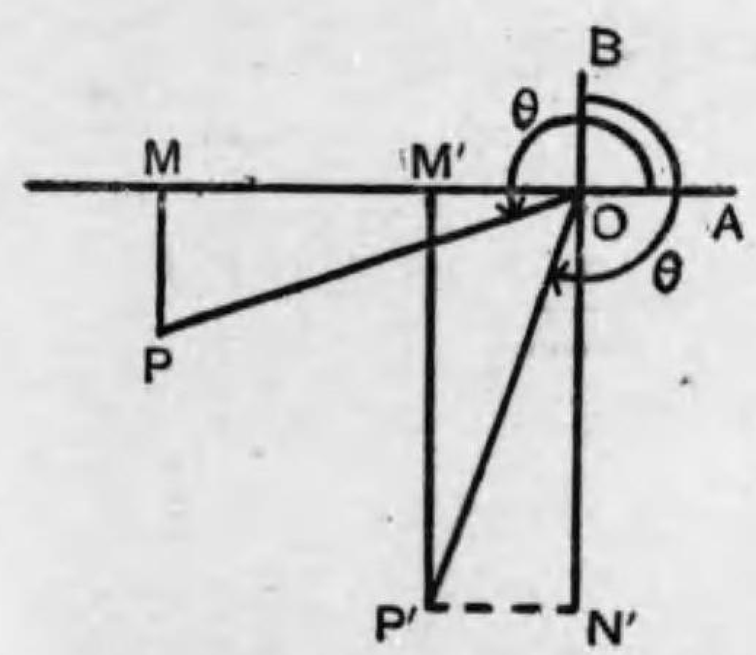
$$\mathrm{OM'}=\mathrm{MP}\quad(\text{數值})$$



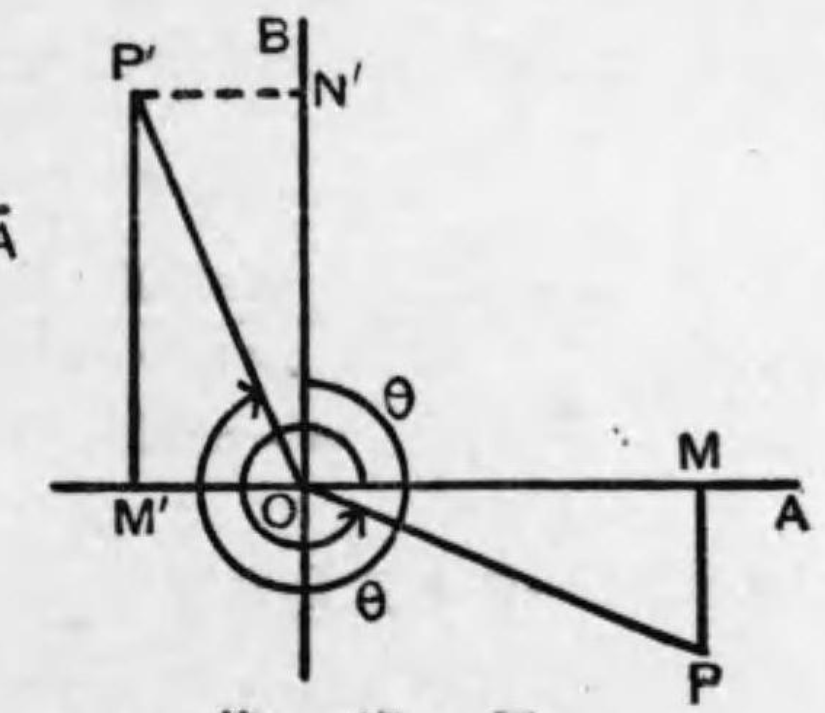

第　25　圖




第　24　圖




第　26　圖




第　27　圖

又，OM ト M'P' トハ同符號，MP ト OM' トハ同符號ナレバ

$$OM=+M'P',\quad OM'=+MP$$

$$\sin(90^\circ-\theta)=\sin\angle AOP'=\frac{M'P'}{OP'}$$

$$=\frac{OM}{OP}=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ-\theta)=\cos\angle AOP'=\frac{OM'}{OP'}$$

$$=\frac{MP}{OP}=\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{\sin(90^\circ-\theta)}{\cos(90^\circ-\theta)}$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\tan\theta$$

**9.** $90^\circ+\theta$ **ノ三角函數**

$$\sin(90^\circ+\theta)=\sin\{90^\circ-(-\theta)\}=\cos(-\theta)$$

$$=\cos\theta$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos\{90^\circ-(-\theta)\}=\sin(-\theta)$$

$$=-\sin\theta$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\frac{\sin(90^\circ+\theta)}{\cos(90^\circ+\theta)}=\frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$=-\cot\theta$$

**10.** $180^\circ-\theta$ **ノ三角函數**

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin(90^\circ+\overline{90^\circ-\theta})$$



$$=\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=\cos(90^\circ+\overline{90^\circ-\theta})$$

$$=-\sin(90^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ-\theta)=\frac{\sin(180^\circ-\theta)}{\cos(180^\circ-\theta)}=\frac{\sin\theta}{-\cos\theta}$$

$$=-\tan\theta$$

**11.** $180^\circ+\theta$ **ノ三角函數**

$$\sin(180^\circ+\theta)=\sin(90^\circ+\overline{90^\circ+\theta})$$

$$=\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=\cos(90^\circ+\overline{90^\circ+\theta})$$

$$=-\sin(90^\circ+\theta)=-\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ+\theta)=\frac{\sin(180^\circ+\theta)}{\cos(180^\circ+\theta)}=\frac{-\sin\theta}{-\cos\theta}$$

$$=\tan\theta$$

**問 題**

次ノ各函數ノ値ヲ求メヨ。(1)—(4)

**1.** $\sin 168^\circ$　　**2.** $\cos(-928^\circ)$

**3.** $\cos 1410^\circ$　　**4.** $\tan 1145^\circ$

次ノ各等式ノ成立スルコトヲ示セ。

**5.** $\cos A+\sin(270^\circ+A)-\sin(270^\circ-A)+\cos(180^\circ+A)=0$

**6.** $\cot A+\tan(180^\circ+A)+\tan(90^\circ+A)+\tan(360^\circ-A)=0$

# 第四章

## 二角ノ和又ハ差ノ三角函數

### 1. 加法定理

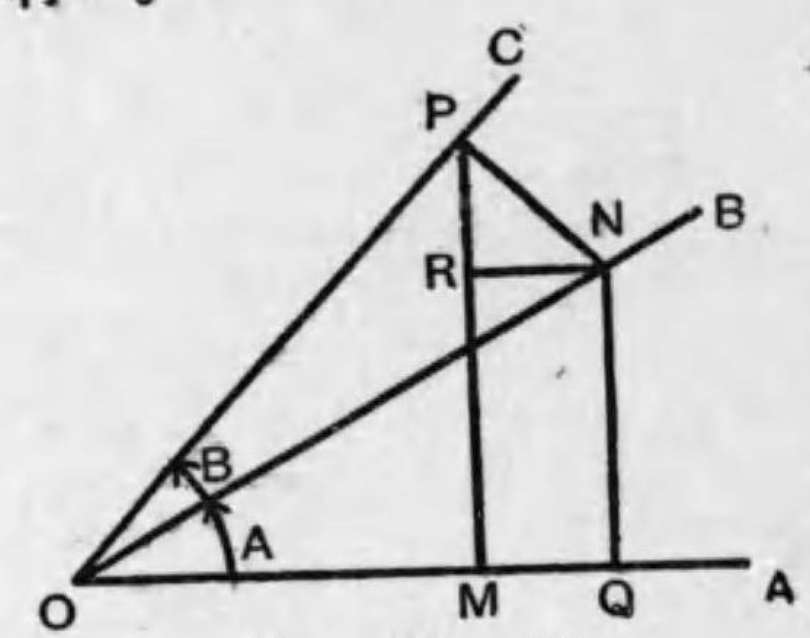
廻轉スル線分OPガOAノ位置ヨリ初メテ$\angle AOB$ヲ畫キ，更ニ$\angle BOC$ヲ畫クモノトス。シカラバOPハOCノ上ニアリ。今次ノ作圖ヲ行フ。

$PM \perp OA$,

$PN \perp OB$,

$NQ \perp OA$,

$NR \perp PM$.




第 28 圖

便宜ノタメ，

$\angle AOB = \angle A$, $\angle BOC = \angle B$ トス。

$$\angle RPN = \frac{\pi}{2} - \angle PNR = \angle RNO$$
$$= \angle NOQ = \angle A$$

ナルコトニ注意スレバ

$$\sin(A+B) = \sin\angle AOP = \frac{MP}{OP}$$
$$= \frac{MR+RP}{OP}$$
$$= \frac{QN}{OP} + \frac{RP}{OP}$$



$$= \frac{QN}{ON}\,\frac{ON}{OP} + \frac{RP}{NP}\,\frac{NP}{OP}$$
$$= \sin A \cos B + \cos\angle RPN \sin B$$

$$\therefore \quad \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

次ニ，二角$\angle A$, $\angle B$ノ和ノ cosine ヲ考ヘン。

$$\cos(A+B) = \cos\angle AOP = \frac{OM}{OP}$$
$$= \frac{OQ - MQ}{OP}$$
$$= \frac{OQ}{OP} - \frac{RN}{OP}$$
$$= \frac{OQ}{ON}\,\frac{ON}{OP} - \frac{RN}{NP}\,\frac{NP}{OP}$$
$$= \cos A \cos B - \sin\angle RPN \sin B$$

$$\therefore \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$\sin(A+B)$, $\cos(A+B)$ ノ公式ヨリシテ

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$
$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

$$\therefore \quad \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

上ノ三ツノ公式ハ極メテ必要ニシテ，是等ヲ二角ノ和ノ加法定理トイフ。

**例 1.** $\tan 75^\circ$ ヲ求メヨ。

**(解)** $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1+\tan 30^\circ}{1-\tan 30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3}$$

$$=3.73205\cdots\cdots\cdots\cdots$$

**例 2.** $a\sin x+b\cos x$ ヲ $R\sin(x+\alpha)$ ノ形ニ變ヘルニハ R ト $\alpha$ ヲ如何ニトレバヨキカ。

(解) $a\sin x+b\cos x=R\sin(x+\alpha)$

$$=R(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)$$

$$=R\cos\alpha\cdot\sin x+R\sin\alpha\cdot\cos x$$

故ニ，若シ $R\cos\alpha=a$，　$R\sin\alpha=b$ トスレバ，上ノ等式ハ恒ニ成立スベシ。從テ

$$a^2+b^2=R^2\cos^2\alpha+R^2\sin^2\alpha=R^2$$

$$\therefore\ R=\pm\sqrt{a^2+b^2}$$

又 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{R\sin\alpha}{R\cos\alpha}=\tan\alpha$

故ニ，R ヲ $\pm\sqrt{a^2+b^2}$，$\tan\alpha$ ヲ $\dfrac{b}{a}$ ニナルヤウニ R，$\alpha$ ヲ定ムレバ可ナリ。

## 2. 減 法 定 理

二角ノ和 (A+B) ノ三角函數ノ公式ヨリシテ，二角ノ差 (A−B) ノ三角函數ノ公式ヲ導クコトヲ得。

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$

$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$



$$\therefore\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

同樣ニシテ

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}$$

$$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

$$\therefore\ \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

**例** $\tan 15^\circ$ ヲ求メヨ。

$$\tan 15^\circ=\tan(45^\circ-30^\circ)$$

$$=\frac{\tan 45^\circ-\tan 30^\circ}{1+\tan 45^\circ\tan 30^\circ}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}$$

$$=2-\sqrt{3}=0.26795\cdots\cdots\cdots\cdots$$

## 3. 積ヲ和又ハ差ニテ表ハス公式

加法及ビ減法ノ定理ニヨリ

$$\begin{cases}\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B\\ \sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B\end{cases}$$

此二ツノ式ノ各邊ノ和及ビ差ヲ作リ

$$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$$

$$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$$

故ニ

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\} \qquad (1)$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\} \qquad (2)$$

同様ニシテ

$$\begin{cases}\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\\ \cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B\end{cases}$$

是等ノ各邊ノ和及ビ差ヲ作リ

$$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$$

$$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$$

故ニ

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\} \qquad (3)$$

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\} \qquad (4)$$

**例** $\sin 43^\circ \sin 59^\circ$ ヲ二ツノ函數ノ和ヲ以テ表ハセ。

公式(4)ニヨリ

$$\sin 43^\circ \sin 59^\circ=\frac{1}{2}\{\cos(43^\circ-59^\circ)-\cos(43^\circ+59^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos(-16^\circ)-\cos 102^\circ\}$$

$$=\frac{1}{2}\{\cos 16^\circ-\cos(90^\circ+12^\circ)\}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos 16^\circ+\sin 12^\circ)$$



## 4. 和又ハ差ヲ積ニテ表ハス公式

前節ノ公式 (1), (2), (3), (4) ニ於テ

$$A+B=C, \qquad A-B=D$$

トスレバ

$$A=\frac{C+D}{2}, \quad B=\frac{C-D}{2}$$

故ニ，次ノ公式ヲ得。

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (\mathrm{I})$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \qquad (\mathrm{II})$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \qquad (\mathrm{III})$$

$$\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \qquad (\mathrm{IIII})$$

**例** $\dfrac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}$ ヲ簡單ニセヨ。

$$\frac{\sin 8\theta\cos\theta-\sin 6\theta\cos 3\theta}{\cos 2\theta\cos\theta-\sin 3\theta\sin 4\theta}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 7\theta)-\frac{1}{2}(\sin 9\theta+\sin 3\theta)}{\frac{1}{2}(\cos 3\theta+\cos\theta)-\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 7\theta)}$$

$$=\frac{\sin 7\theta-\sin 3\theta}{\cos 3\theta+\cos 7\theta}=\frac{2\cos 5\theta\sin 2\theta}{2\cos 5\theta\cos 2\theta}$$

$$=\tan 2\theta$$

### 問　題

次ノ各等式ノ成立スルコトヲ示セ。

1. $\sin(45^\circ+A)\sin(45^\circ-A)=\frac{1}{2}\cos 2A$
2. $\sin 50^\circ-\sin 70^\circ+\sin 10^\circ=0$

3. $(\sin 3A+\sin A)\sin A+(\cos 3A-\cos A)\cos A=0$

4. $2\cos\dfrac{\pi}{13}\cos\dfrac{9\pi}{13}+\cos\dfrac{3\pi}{13}+\cos\dfrac{5\pi}{13}=0$

5. $\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{7\theta}{2}+\sin\dfrac{3\theta}{2}\sin\dfrac{11\theta}{2}=\sin 2\theta\,\sin 5\theta$

6. $\sin A+\cos A=\sqrt{2}\,\sin\left(A+\dfrac{\pi}{4}\right)$

7. $\sin A-\cos A=\sqrt{2}\,\sin\left(A-\dfrac{\pi}{4}\right)$

8. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha$

$$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}\sin 3\alpha$$

9. $\dfrac{\sin(\theta+\varphi)-2\sin\theta+\sin(\theta-\varphi)}{\cos(\theta+\varphi)-2\cos\theta+\cos(\theta-\varphi)}=\tan\theta$

10. $\dfrac{\sin A-\sin 5A+\sin 9A-\sin 13A}{\cos A-\cos 5A-\cos 9A+\cos 13A}=\cot 4A$



# 第　五　章

# 倍角及ビ分角ノ三角函數

## 1. 二倍角ノ三角函數

加法定理ノ公式ニヨリ

$$\sin 2A=\sin(A+A)$$
$$=\sin A\,\cos A+\cos A\,\sin A$$
$$=2\sin A\,\cos A$$

$$\cos 2A=\cos(A+A)$$
$$=\cos A\,\cos A-\sin A\,\sin A$$
$$=\cos^2 A-\sin^2 A$$

此ノ $\cos^2 A$ 又ハ $\sin^2 A$ ヲ變形シテ

$$\cos 2A=(1-\sin^2 A)-\sin^2 A=1-2\sin^2 A$$

$$\cos 2A=\cos^2 A-(1-\cos^2 A)=2\cos^2 A-1$$

$$\tan 2A=\frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\,\tan A}=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

**例**　$\cos^4\theta$ ヲ $\theta$ ノ倍角ニテ表ハセ。

$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

ナルニヨリ

$$\cos^4\theta=\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}+2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)$$

$$=\frac{1}{8}(3+4\cos 2\theta+\cos 4\theta)$$

**2. 三倍角ノ三角函數**

$$\sin 3A=\sin(A+2A)=\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A$$

$$=\sin A(1-2\sin^2 A)+\cos A.\ 2\sin A\cos A$$

$$=\sin A(1-2\sin^2 A)+2\sin A(1-\sin^2 A)$$

$$=3\sin A-4\sin^3 A$$

$$\cos 3A=\cos(A+2A)=\cos A\cos 2A-\sin A\sin 2A$$

$$=\cos A(2\cos^2 A-1)-\sin A.\ 2\sin A\cos A$$

$$=\cos A(2\cos^2 A-1)-2\cos A(1-\cos^2 A)$$

$$=4\cos^3 A-3\cos A$$

**3. 半角ニテ表ハス公式**

$$\sin A=\sin 2\left(\frac{A}{2}\right)=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos A=\cos 2\left(\frac{A}{2}\right)=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=2\cos^2\frac{A}{2}-1$$

$$=1-2\sin^2\frac{A}{2}$$



$$\tan A=\tan 2\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}$$

**4. $\frac{A}{2}$ノ三角函數ヲ $\cos A$ ニテ表ハス公式**

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$$

ナルニヨリ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

又，$\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ ヨリ

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

上ノ諸公式ニ於ケル正負ノ記號ハ，次ノ例ノ如クシテ定ムベシ。

**例 1.** $\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ知リテ $\sin 22^\circ.5$ ヲ求メヨ。

$$\sin 22^\circ.5=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$\sin 22^\circ.5$ ハ正數ナレバ正號ヲトリテ

$$\sin 22^\circ.5=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

**例 2.** $\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ヲ知リテ $\cos 165^\circ$ ヲ求メヨ。

$$\cos 165^\circ=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 330^\circ}{2}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{8}}=\pm\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$165^\circ$ ハ第二象限ノ角ナレバ，$\cos$ ハ負數ナリ．故ニ

$$\cos 165^\circ=-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

## 5. $\frac{A}{2}$ ノ三角函數ヲ $\sin A$ ニテ表ハス公式

$$\begin{cases}\sin^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}=1\\ 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=\sin A\end{cases}$$

ノ各邊ノ和及ビ差ヲ作リ

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2=1+\sin A$$

$$\left(\sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}\right)^2=1-\sin A$$

故ニ

$$\begin{cases}\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A} & (1)\\ \sin\frac{A}{2}-\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1-\sin A} & (2)\end{cases}$$



此ノ各邊ノ和及ビ差ヲ作リテ

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$$

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}$$

故ニ

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A})$$

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A})$$

此ノ正負ノ記號ハ次ノ例ノ如クシテ定ムベシ。

**例** $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$ ヲ知リテ $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ ヲ求メヨ。

(1)ト(2)ニヨリ

$$\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\pm\sqrt{1+\sin 30^\circ}=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ-\cos 15^\circ=\pm\sqrt{1-\sin 30^\circ}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

玆ニ，$\sin 15^\circ$ 及ビ $\cos 15^\circ$ ハ共ニ正數ニシテ，$\cos 15^\circ$ ハ $\sin 15^\circ$ ヨリ大ナレバ

$$\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin 15^\circ-\cos 15^\circ=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\quad \sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}},\quad \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

### 問題

1. $\tan 3A$ ヲ $\tan A$ ニテ表ハセ。

2. $\sin(45^\circ-30^\circ)$, $\cos(45^\circ-30^\circ)$ ニヨリ $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$ ヲ求

メヨ。

3. $tan\theta=\dfrac{b}{a}$ナルトキ，$a\cos 2\theta+b\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ。

4. $\cos^3\theta$ ヲ $\theta$ ノ倍角ノ cosine ニテ表ハセ。

次ノ各恒等式ヲ證明セヨ。

5. $\cot(A+15°)-\tan(A-15°)=\dfrac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}$

6. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

7. $\tan(45°+A)=\sqrt{\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}}=\sec A+\tan A$

8. $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B)$

9. $\sin\alpha\sin(60°-\alpha)\sin(60°+\alpha)=\dfrac{1}{4}\sin 3\alpha$

10. $\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}=\dfrac{5}{16}$



# 第六章

# 三角ノ和ノ三角函數

## 1. 三角ノ和ノ三角函數

$$\sin(A+B+C)=\sin(A+B)\cos C+\cos(A+B)\sin C$$
$$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\cos C$$
$$+(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\sin C$$
$$=\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C$$
$$+\cos A\cos B\sin C-\sin A\sin B\sin C \qquad (1)$$

$$\cos(A+B+C)=\cos(A+B)\cos C-\sin(A+B)\sin C$$
$$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\cos C$$
$$-(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\sin C$$
$$=\cos A\cos B\cos C-\sin A\sin B\cos C$$
$$-\sin A\cos B\sin C-\cos A\sin B\sin C \qquad (2)$$

$$\tan(A+B+C)=\frac{\tan(A+B)+\tan C}{1-\tan(A+B)\tan C}$$
$$=\frac{\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}+\tan C}{1-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\times\tan C}$$
$$=\frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan C} \qquad (3)$$

**例**　$A+B+C=180^\circ$ ナラバ，次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

公式(3)ニ於テ，$A+B+C=180^\circ$ ナラバ $\tan(A+B+C)=0$

ナルヲ以テ

$$\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C=0$$

$$\therefore\quad \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

## 2. 三倍角ノ三角函數

前節ノ公式(1), (2), (3)ニ於テ，$A=B=C$ トシ，$B, C$ ノ代リニ $A$ トオケバ

$$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$$

$$\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$$

是等ノ公式ハ $3A$ ヲ $2A+A$ トシ，二角ノ和及ビ二倍角ノ公式ヲ應用シテモ容易ニ得ラルベシ。

## 3. 三角形ノ三角ニ關スル恆等式

$A, B, C$ ヲ一ツノ三角形ノ三ツノ角トスレバ

$$A+B+C=180^\circ$$

ナリ。此場合ニ $A, B, C$ ノ三角函數ニ就テ種々ノ恆等式アリ，其二三ヲ例示スベシ。

**例 1.**　$A+B+C=180^\circ$ ナラバ

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

ナルコトヲ證明セヨ。



$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$$

$$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$

然ルニ　$A+B+C=180^\circ$，卽チ $A+B=180^\circ-C$ ナレバ

$$\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$$

$$\cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$$

$$\therefore\quad \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$$

$$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$$

$$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$$

$$=2\sin C.\ 2\sin A\sin B$$

$$=4\sin A\sin B\sin C$$

**例 2.**　$A+B+C=180^\circ$ ナラバ

$$\cos A+\cos B-\cos C=-1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

$$\cos A+\cos B-\cos C$$

$$=\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)+2\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{C-B}{2}$$

玆ニ，$A+B+C=180^\circ$ ナレバ

$$=\frac{A+B+C}{2}=90^\circ,\qquad \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

$$\therefore\quad \cos A+c^{o}sB-\cos C$$

$$=\left(2\cos^2\frac{A}{2}-1\right)+2\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)\sin\frac{C-B}{2}$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{C-B}{5}\right)-1$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left\{\cos\left(90^\circ-\frac{B+C}{2}\right)+\sin\frac{C-B}{2}\right\}-1$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\left(\sin\frac{B+C}{2}+\sin\frac{C-B}{2}\right)-1$$

$$=2\cos\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}-1$$

$$=-1+4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

**問題**

$A+B+C=180^\circ$ ナルトキ，次ノ各等式ノ成立スルコトヲ示セ。

1. $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

2. $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1$

3. $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$

4. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

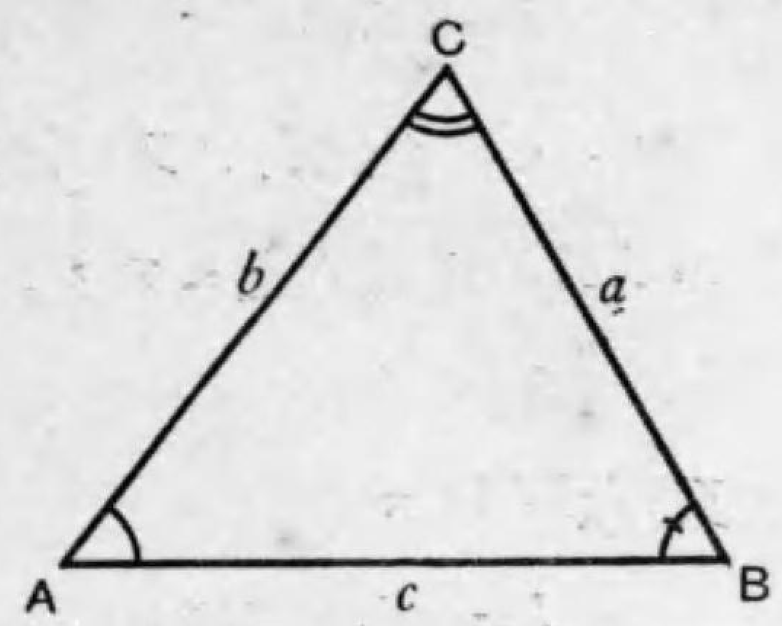
5. $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C$



# 第七章
# 三角形ノ性質

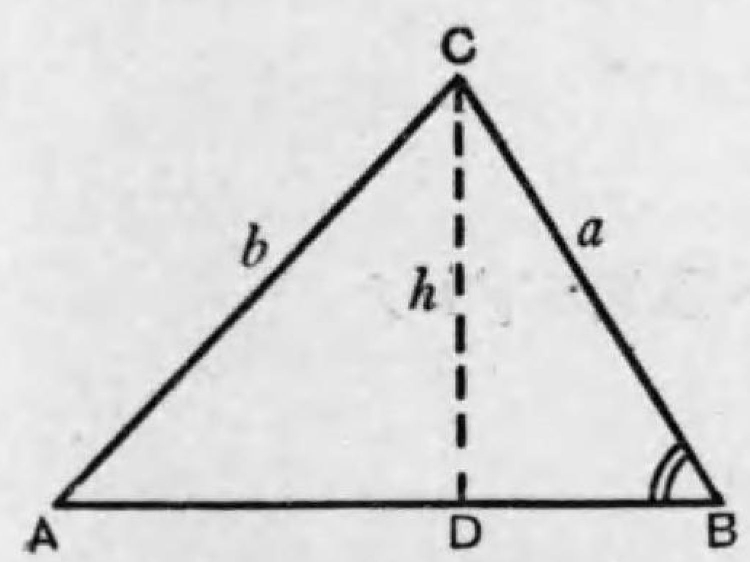
### 1. 正弦ノ法則

三角形 ABC ニ於テ三ツノ角 A, B, C 及ビ其等ニ對スル邊 $a, b, c$, ヲ其三角形ノ要素トイフ。

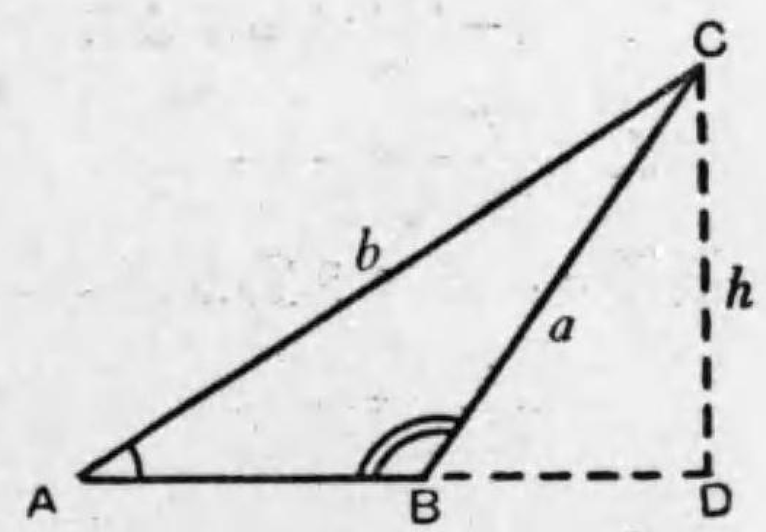


第 29 圖

六ツノ要素ノ中，何レカ三ツノ要素ヲ與ヘレバ，他ノ三ツノ要素ハ自ラ定マル。次ニ其公式ニ付キ説明セン。但シ，三ツノ角ガ既知ナルトキニ限リ，殘リノ三ツノ要素ナル三邊ノ値ハ定マラズ。



第 30 圖



第 31 圖

是等ノ公式ノ中，最モ多ク用ヒラルルハ正弦ノ法則ナリ。

$\angle$B ガ鋭角ナルトキハ，C ヨリ AB ニ下セル垂線CD ノ足 D ハ AB ノ上ニアリ。此場合ニハ

$$h=b\,sin\mathrm{A}$$

又 $\triangle$BCD ヨリ

$$h=a\,sin\mathrm{B}$$

若シ，$\angle$B ガ鈍角ナラバ第二ノ圖ノ如ク垂線 CD ノ足 D ハ AB ノ延長ノ上ニアリ。此時モ

$$h=b\,sin\mathrm{A}$$

又 $\triangle$BCD ヨリ

$$\begin{aligned} h&=a\,sin\angle\mathrm{CBD}\\ &=a\,sin(180^\circ-\mathrm{B})\\ &=a\,sin\mathrm{B} \end{aligned}$$

故ニ，上ノ二ツノ場合ノ何レニ於テモ

$$h=b\,sin\mathrm{A}=a\,sin\mathrm{B}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{sin\mathrm{A}}=\frac{b}{sin\mathrm{B}}$$

同様ニ，B ヨリ其對邊 AC ニ垂線ヲ下シテ

$$\frac{a}{sin\mathrm{A}}=\frac{c}{sin\mathrm{C}}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{sin\mathrm{A}}=\frac{b}{sin\mathrm{B}}=\frac{c}{sin\mathrm{C}}$$



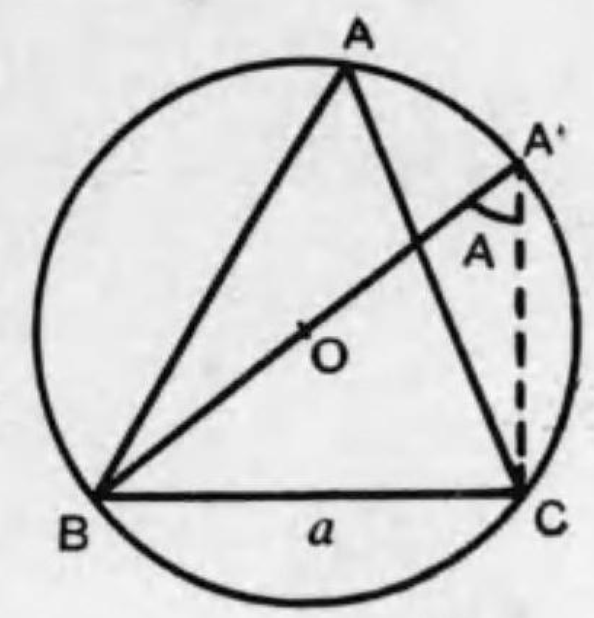
或ハ

$$a:b:c=sin\mathrm{A}:sin\mathrm{B}:sin\mathrm{C}$$

之レヲ**正弦** (*sine*) **ノ法則**トイフ。

正弦ノ法則ハ又次ノ如クシテモ得ラル。

$\triangle$ABC ニ外接スル圓ヲ作リ，BA$'$ ヲソノ直徑トシ，$\triangle$A$'$BC ヲ作ル。直徑 A$'$B ノ長サヲ D トスレバ，$\angle$BA$'$C ハ直角ニシテ




第 32 圖

$$sin\angle\mathrm{BA'C}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{A'B}}$$

$$\therefore\quad sin\angle\mathrm{BA'C}=sin\mathrm{A}=\frac{a}{\mathrm{D}}$$

同様ニシテ

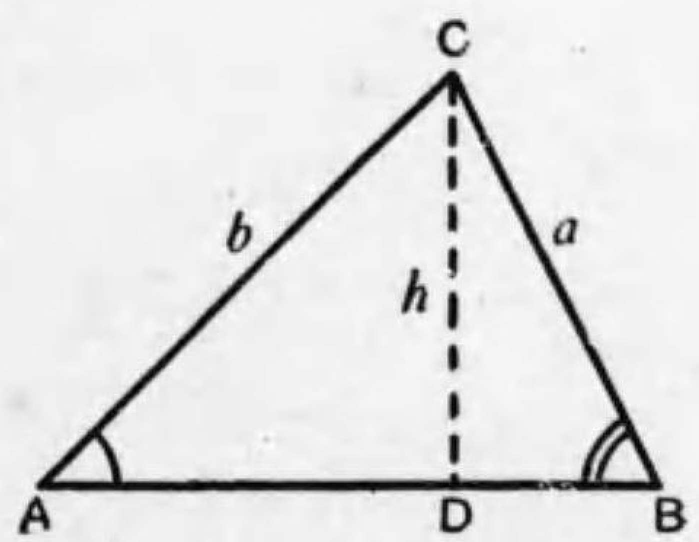
$$sin\mathrm{B}=\frac{b}{\mathrm{D}},\qquad sin\mathrm{C}=\frac{c}{\mathrm{D}}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{sin\mathrm{A}}=\frac{b}{sin\mathrm{B}}=\frac{c}{sin\mathrm{C}}(=\mathrm{D})$$

**2. 餘弦ノ法則**

三角形 ABC ニ於テ，$\angle$B ガ鋭角ノトキハ

$$b^2=h^2+\mathrm{AD}^2$$




第 33 圖

玆ニ

$$h^2=a^2-\mathrm{DB}^2$$

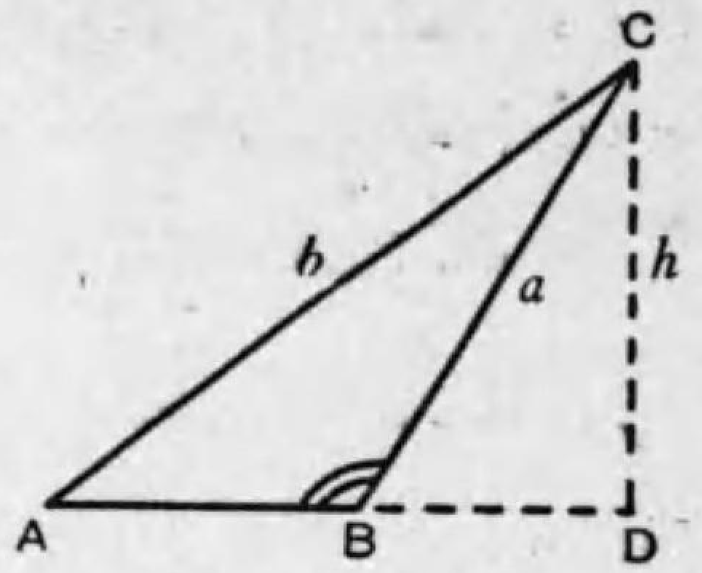
$$AD^2=(c-DB)^2$$
$$=c^2-2c\cdot DB+DB^2$$
$$\therefore\quad b^2=(a^2-DB^2)+(c^2-2c\cdot DB+DB^2)$$
$$=a^2+c^2-2c\cdot DB$$
$$=a^2+c^2-2c\cdot a\cos B$$

$\triangle$ABC ニ於テ，∠B ガ鈍角ナラバ

$$b^2=h^2+AD^2$$

茲ニ

$$h^2=a^2-BD^2$$
$$AD^2=(c+BD)^2$$
$$=c^2+2c\cdot BD+BD^2$$



第 34 圖

$$\therefore\quad b^2=(a^2-BD^2)+(c^2+2c\cdot BD+BD^2)$$
$$=a^2+c^2+2c\cdot BD$$
$$=a^2+c^2+2c\cdot a\cos(180^\circ-B)$$
$$=a^2+c^2-2c\cdot a\cos B$$

故ニ，上ノ二ツノ場合ノ何レニ於テモ

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

同様ニシテ

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

是等ノ公式ヲ**餘弦** (*cosine*) **ノ法則**ト云フ。

## 3. 三角形ノ解法

一ツノ三角形ノ六ツノ要素ノ中，三ツノ角ノ外，他ノ三ツノ要素ヲ知リテ，殘リノ三ツノ要素ヲ求メルコトヲ**三角形ヲ解ク**トイフ。

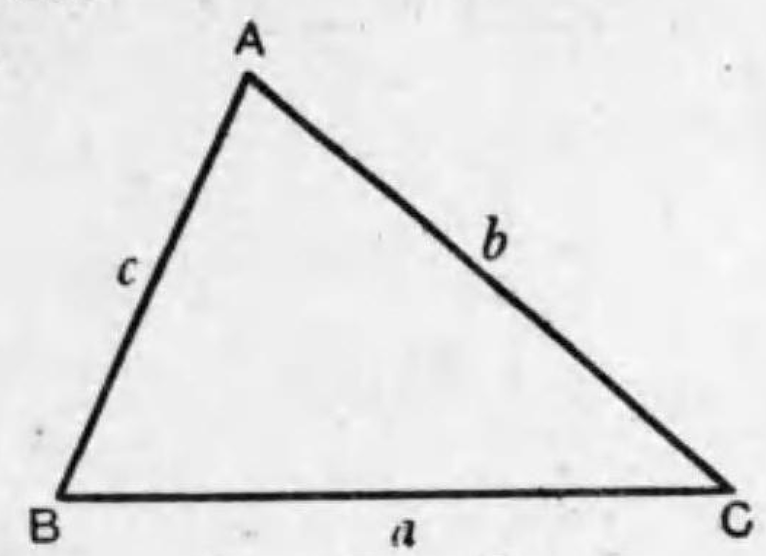
正弦ノ法則及ビ餘弦ノ法則ヲ用ヒテ，總ベテ三角形ヲ解クコトヲ得。其場合四ツアリ。

(1) 邊 $a$ ト二角ガ既知ナル場合

殘リノ角ハ　$A+B+C=180^\circ$

ヨリ求メラル。$b, c$ ハ正弦ノ法則ニヨリ

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A},$$
$$a=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

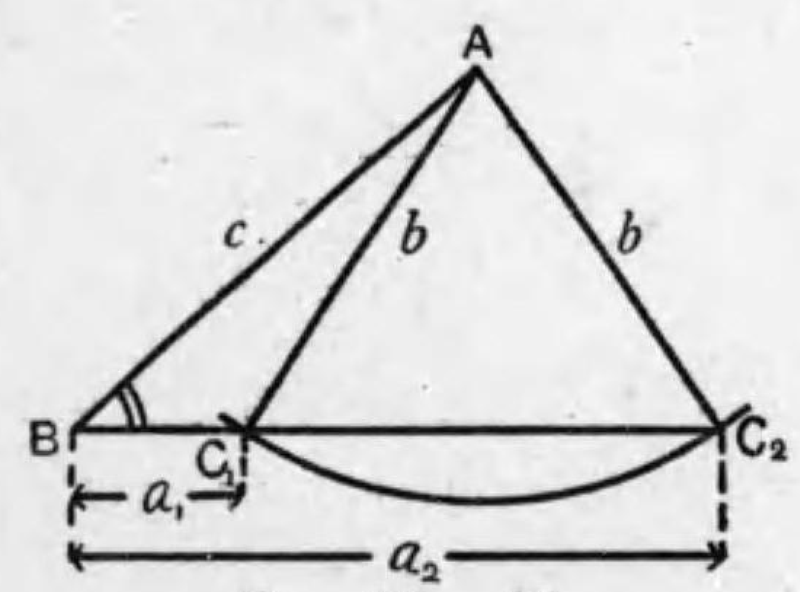


第 35 圖

(2) 二邊 $b, c$ ト其二邊ノ中ノ何レカ一ツニ對スル角，例ヘバ B ガ既知ナル場合

邊 $a$ ハ餘弦ノ法則

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$



第 36 圖

ニヨリ，$a$ ノ二次方程式ヲ解キ

$$a=c\cos\mathrm{B}\pm\sqrt{b^2-c^2\sin\mathrm{B}}$$

故ニ，$a$ ノ値ハ $a_1, a_2$ ノ如ク，一般ニ 2 ツアリ。

A 及ビ C ハ正弦ノ法則ニヨリ

$$\sin\mathrm{A}=\frac{a}{b}\sin\mathrm{B},\qquad \sin\mathrm{C}=\frac{c}{b}\sin\mathrm{B}.$$

(3)　二邊 $b, c$ ト其夾角 A ガ既知ナル場合

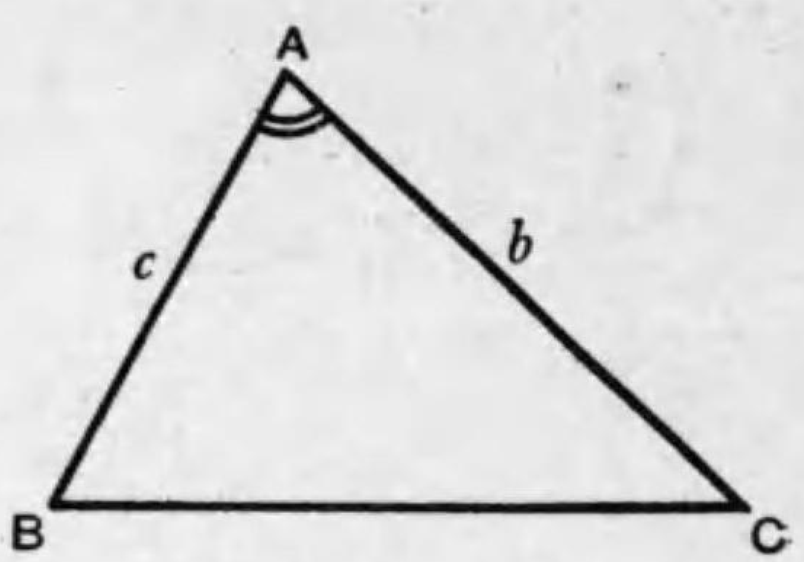
一邊 $a$ ハ餘弦ノ法則ニヨリ

$$a=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\mathrm{A}}$$

又二角 B,C ハ正弦ノ法則ニヨリ

$$\sin\mathrm{B}=\frac{b}{a}\sin\mathrm{A},$$

$$\sin\mathrm{C}=\frac{c}{a}\sin\mathrm{A}.$$



第　37　圖

(4)　三邊 $a, b, c$ ガ既知ナル場合

此ノトキハ次ノ各公式ニヨリ A, B, C ガ求メラル。

$$\cos\mathrm{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\qquad \cos\mathrm{B}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C}=180^\circ.$$

〔注意〕　對數表ヲ用ヒテ，實際ニ三角形ヲ解キ，各要素ノ數値ヲ求メルニハ，餘弦ノ法則ハ極メテ不便ナリ。之ニ代ハル公式トシテ次ノ正切ノ法則ヲ用フ。

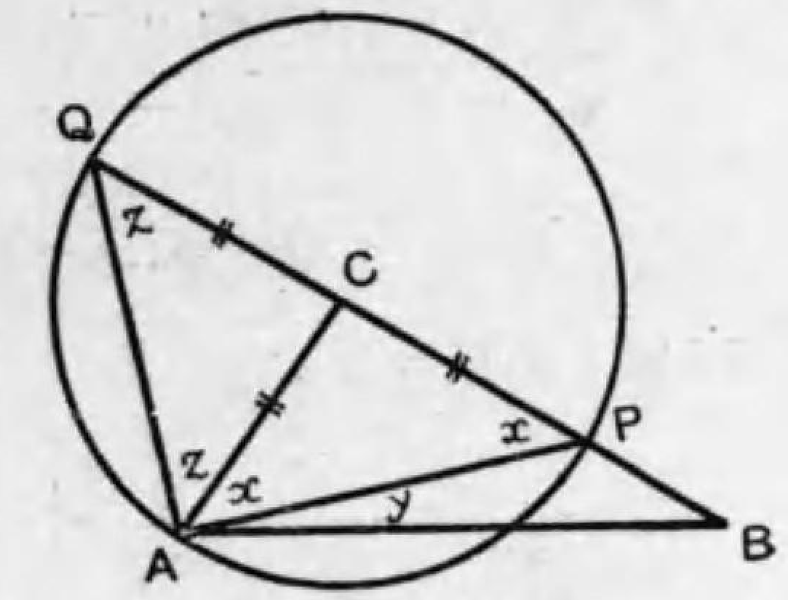


## 4. 正切ノ法則

三角形 ABC ノ一ツノ頂點 C ヲ中心トシ，C ヲ通ル二邊 CA, CB ノ中，短カキ邊 CA ヲ半徑ニ圓ヲ畫ク。

BC 及ビ其延長ト圓トノ交點ヲ P, Q トス。

△ACP, △ACQ ハ二等邊ニシテ，△PAQ ハ直角三角形ナリ。



第　38　圖

∠BAQ ヲ $w$ トシ，且ツ A ヲ角頂トスル三ツノ角ヲ圖ノ如ク $x, y, z$ トス。

然ラバ

$$x+y=\mathrm{A},\qquad x-y=\mathrm{B},\qquad x+z=90^\circ,$$

$$x+y+z=w$$

是等ノ方程式ヨリ

$$x=\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}),\qquad y=\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

$$z=90^\circ-\frac{1}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$

$$w=90^\circ+\frac{1}{2}(\mathrm{A}-\mathrm{B})$$

△APB 及ビ △AQB ニ正弦ノ法則ヲ應用シテ

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}=\frac{\sin(180^\circ-x)}{\sin y}=\frac{\sin x}{\sin y}$$

$$\frac{AB}{BQ}=\frac{\sin z}{\sin w}$$

故ニ，$BP=BC-PC=a-b$,　$BQ=BC+CQ=a+b$　ナルコトニ注意シテ

$$\left.\begin{aligned}\frac{c}{a-b}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\\ \frac{c}{a+b}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

之レト同様ニシテ

$$\left.\begin{aligned}\frac{a}{b-c}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(B+C)}{\sin\frac{1}{2}(B-C)}\\ \frac{a}{b+c}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(B+C)}{\cos\frac{1}{2}(B-C)}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{b}{c-a}&=\frac{\sin\frac{1}{2}(C+A)}{\sin\frac{1}{2}(C-A)}\\ \frac{b}{c+a}&=\frac{\cos\frac{1}{2}(C+A)}{\cos\frac{1}{2}(C-A)}\end{aligned}\right\}$$

(1)　各邊ノ比ヲ取リ

$$\frac{\dfrac{c}{a-b}}{\dfrac{c}{a+b}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}\times\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\therefore\quad\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}\qquad(2)$$

同様ニシテ

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\tan\frac{1}{2}(B+C)}{\tan\frac{1}{2}(B-C)}\qquad(3)$$



$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\tan\frac{1}{2}(C+A)}{\tan\frac{1}{2}(C-A)}\qquad(4)$$

故ニ，一ツノ三角形ノ二邊ノ和ニ對スル其等二邊ノ差ノ比ハ其等ニ對スル角ノ和ノ半分ノ正切(*tangent*)ト，差ノ半分ノ正切トノ比ニ等シ。(2), (3), (4) ヲ**正切ノ法則**トイフ。

正切ノ法則ヲ用ヒテ三角形ヲ解クニハ次ノ如クスベシ

例ヘバ，二邊$a, b$及ビ其夾角$C$ガ既知ナル場合ニハ

(1)　$A+B=180°-C$ ヨリ $\frac{1}{2}(A+B)$ ヲ求メ，

(2)　正切ノ法則 (2) ヨリ $\frac{1}{2}(A-B)$ ヲ求メ，

(3)　第一，第二ノ結果ヲ加ヘ又減ジテ A, B ヲ求メ，

(4)　公式 (1) ヨリ $c$ ヲ求メヨ。

## 5. 半角及ビ邊ノ關係

三角形ノ或角ノ二分ノ一ト邊ノ間ノ公式ヲ導クニハ，餘弦ノ法則ヨリ

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

玆ニ

$$\cos A=1-2\sin^2\frac{A}{2}$$

ナルヲ以テ

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}$$

$$=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc}$$

今，$a+b+c=2s$ トスレバ

$$a+b-c=(a+b+c)-2c=2(s-c)$$

$$a-b+c=(a+b+c)-2b=2(s-b)$$

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(s-c)\cdot 2(s-b)}{2bc}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

平方ニ開クトキハ，正負二ツノ値ヲ取ル必要アルモ，$\frac{A}{2}$ハ勿論 $90°$ ヨリ小ナルベキヲ以テ，負號ヲ捨テテ正號ノミヲトル。同樣ニシテ

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

又 $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ ヨリ

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A$$

$$=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$



$$=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}$$

$$=\frac{2s\cdot 2(s-a)}{2bc}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

同樣ニ

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

斯クノ如クシテ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\div\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

又 $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\times\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

### 6. 三角形ノ面積

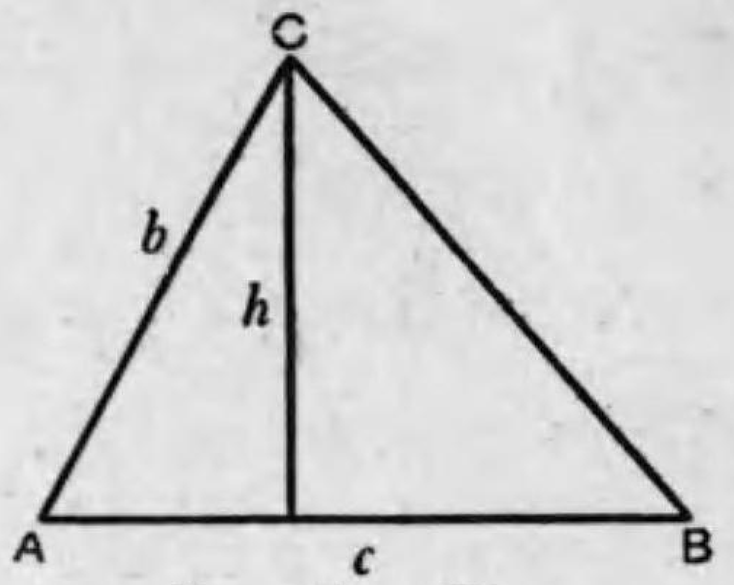
(1)　底邊 $c$ 及ビ高サ $h$ ガ既知ナル場合

三角形ノ面積ヲ $T$ トスレバ

$$T=\frac{1}{2}ch$$

(2) 二邊 $b, c$ 及ビ其夾角

A ガ既知ナル場合



第 39 圖

$h=b\sin A$ ナレバ

$$T=\frac{1}{2}bc\sin A$$

同様ニシテ

$$T=\frac{1}{2}ca\sin B,$$

$$T=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

(3) 一邊 $c$ 及ビ三角ガ既知ナル場合

$$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$ ナレバ

$$T=\frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sin A\sin B}{\sin C}$$

同様ニシテ

$$T=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin B\sin C}{\sin A},\quad T=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{\sin C\sin A}{\sin B}$$

(4) 三邊ガ既知ナル場合

$a+b+c=2s$ トスレバ, 第二ノ場合ノ公式及ビ前節ノ $\sin A$ ノ公式ニヨリ

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

**問　題**

1. $a=25,\ b=52,\ c=63$ ナルトキ $\tan\frac{A}{2}$ ヲ求メヨ。

2. $a=13,\ b=14,\ c=15$ ナルトキ $\sin\frac{A}{2}$ ヲ求メヨ。



3. 次ノ等式ヲ證セヨ。

$$a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$$

4. 次ノ等式ノ成立スルコトヲ證明セヨ。

$$(a+b+c)\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)=2c\cot\frac{C}{2}$$

5. 一ツノ三角形ニ於テ三ツノ角ノ比ガ 1:2:3 ナラバソレニ對スル邊ノ比ハ $1:\sqrt{3}:2$ ナルコトヲ證明セヨ。

6. $\tan\frac{A}{2}=\frac{5}{6},\ \tan\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$ ナラバ $a+b=2b$ ナルコトヲ示セ。

7. $C=60°$ ナラバ

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

ナルコトヲ證セヨ。

8. 一ツノ三角形ノ三邊ガ $x^2+x+1,\ 2x+1,\ x^2-1$ ナラバ, 最大ナル角ハ 120° ナルコトヲ示セ。

9. 三角形 ABC ノ外接圓ノ半徑ヲ $r$ トシ, 面積ヲ $T$ トスレバ

$$T=\frac{abc}{2r}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

10. 三角形 ABC ノ内切圓ノ半徑ヲ $k$ トシ, $2s=a+b+c$, 面積ヲ $T$ トスレバ, 次ノコトヲ證明セヨ。

$$k=\frac{T}{s}$$

# 第八章
# 三角形ノ解法

## 1. 對數

$x$ ガ正數ニシテ

$$x=a^n$$

ナルトキ，$a$ ノ指數 $n$ ヲ $a$ ヲ底數トスル $x$ ノ對數トイヒ次ノ記號ヲ以テ表ハス。

$$n=\log_a x$$

特ニ，底數 $a$ ガ 10 ナルトキノ對數ヲ常用對數トイヒ，底數 10 ヲ省略スルヲ常トス。

## 2. 對數ノ性質

(1) 積ノ對數ハ各因數ノ對數ノ和ニ等シ，例ヘバ

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y$$

之ヲ證明スルニハ

$$\log_a x=m, \qquad \log_a y=n$$

トスレバ定義ニヨリ

$$x=a^m, \qquad y=a^n$$



$$\therefore\ xy=a^m\times a^n=a^{m+n}$$

$$\therefore\ \log_a xy=m+n$$

$$=\log_a x+\log_a y$$

三ツ以上ノ因數ノ場合ニモ此性質ハ成立ス。即チ

$$\log_a xyz=\log_a xy+\log_a z=\log_a x+\log_a y+\log_a z$$

(2) 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ引キタル差ニ等シ。

$$\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$$

之レヲ證明スルニハ

$$\log_a x=m, \qquad \log_a y=n$$

トスレバ

$$x=a^m, \qquad y=a^n$$

$$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$$

$$\therefore\ \log_a\frac{x}{y}=m-n=\log_a x-\log_a y$$

(3) $\log_a x^p=p\log_a x$

今，$\log_a x=m$ トスレバ

$$x=a^m, \qquad x^p=(a^m)^p=a^{mp}$$

$$\therefore\ \log_a x^p=mp=p\log_a x$$

(4) $\log_a\sqrt[n]{x}=\frac{1}{n}\log_a x$

前ト同様ニ

$$\log_a x = m$$

トスレバ

$$x = a^m, \qquad \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\therefore \quad \log_a \sqrt[n]{x} = \frac{m}{n} = \frac{1}{n}\log_a x$$

## 3. 三角形ノ解法(對數使用)

對數ヲ用ヒテ三角形ヲ解クニハ，次ノ例ニ示スガ如クスレバヨシ。

**例 1.** $A=71°13'30''$,　$B=40°34'15''$,　$c=236.54$ ヲ知リテ $C$, $a, b$ ヲ求メヨ。

(1) $C=180°-(A+B)=68°12'15''$

(2) $a, b$ ハ正弦ノ法則

$$a=\frac{c\sin A}{\sin C}, \qquad b=\frac{c\sin B}{\sin C}$$

ヨリ求ムレバヨシ。

$$\begin{aligned} \log c &= 2.3739 \\ \log \sin A &= 9.97625-10 \\ -\log \sin C &= -9.96779+10 \\ \hline \log a &= 2.38236 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a=\underline{241.23}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 2.3739 \\ \log \sin B &= 9.81317-10 \\ -\log \sin C &= -9.96779+10 \\ \hline \log b &= 2.21928 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad b=\underline{165.7}$$



**例 2.** $b=302$,　$c=636$,　$A=44°$ ヲ知リテ $B, C$ 及ビ $a$ ヲ求メヨ。

(1) $B, C$ ヲ求メルニハ正切ノ法則

$$\frac{\tan\frac{C-B}{2}}{\tan\frac{C+B}{2}}=\frac{c-b}{c+b}$$

ニヨリ

$$\tan\frac{C-B}{2}=\frac{c-b}{c+b}\tan\frac{C+B}{2}$$

茲ニ

$$\tan\frac{C+B}{2}=\tan\frac{180°-A}{2}=\tan 68°$$

$$\therefore \quad \tan\frac{C-B}{2}=\frac{(c-b)\tan 68°}{c+b}$$

$$\begin{aligned} \log(c-b) &= 2.52375 \\ \log \tan 68° &= 0.39359 \\ -\log(c+b) &= -2.97220 \\ \hline \log \tan\frac{C-B}{2} &= -0.05486 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{C-B}{2}=41°23'24''$$

$$又 \quad \frac{C+B}{2}=68°$$

此ノ二ツノ和ヲ作リ

$$C=\underline{109°23'24''}$$

差ヲ求メテ

$$B=\underline{26°36'36''}$$

(2) $a$ ヲ求メルニハ正弦ノ法則ニヨリ

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}$$

$$\begin{aligned} \log b &= 2.48001 \\ \log \sin A &= 9.84177-10 \\ -\log \sin B &= -9.65120+10 \\ \hline \log a &= 2.67058 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a=\underline{468.4}$$

**例 3.** $a=12.653,\ b=17.213,\ c=23.106$ ヲ知リテ A, B, C ヲ求メヨ。

$$2s=a+b+c$$

$$k=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

トスレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{k}{s-a},\qquad \tan\frac{B}{2}=\frac{k}{s-b},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{k}{s-c}$$

| | |
|---|---|
| $s=26.486$ | $-\log s=\bar{1}.62302$ |
| $s-a=13.833$ | $\log(s-a)=1.14092$ |
| $s-b=\ \ 9.273$ | $\log(s-b)=0.96722$ |
| $s-c=\ \ 3.380$ | $\log(s-c)=0.52892$ |
| | $\log k^2=1.21404$ |
| | $\therefore\ \log k=0.60702$ |

$$\log k=0.60702$$
$$\log(s-a)=1.14092$$
$$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.46610$$
$$\therefore\ \frac{A}{2}=16°18'11''$$
$$\therefore\ A=\underline{32°36'22''}$$

$$\log k=0.60702$$
$$\log(s-b)=0.96722$$
$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.63980$$
$$\therefore\ \frac{B}{2}=23°34'21''$$
$$\therefore\ B=\underline{47°08'42''}$$



$$\log k=0.60702$$
$$\log(s-c)=0.52892$$
$$\log\tan\frac{C}{2}=0.07810$$
$$\therefore\ \frac{C}{2}=50°07'28''$$
$$\therefore\ C=\underline{100°14'56''}$$

## 問 題

三角形ノ次ノ要素ヲ知リテ，他ノ要素ヲ求メヨ。

1. $A=46°36',\quad B=54°18',\quad c=479$
2. $a=840,\quad b=485,\quad C=79°06'$
3. $a=32,\quad A=47°,\quad B=62°$
4. $a=26.4,\quad b=31.4,\quad A=57°13.'2$
5. $a=430,\quad c=542,\quad B=46°$
6. $a=26,\quad b=39,\quad c=49$
7. $a=21,\quad b=34,\quad c=43$

## 4. 三角形ノ面積

**例 1.** $a=24.2,\ b=35.4,\ C=40°11'$ ナルトキ其三角形ノ面積ヲ求メヨ。

$$T=\frac{1}{2}ab\sin C$$

ニヨリ，$\frac{a}{2}$ ハ 12.1 ナルコトニ注意シ

$$\log 12.1=1.08279$$
$$\log 35.4=1.54900$$

$$\log\sin 40°11' = 9.80972-10$$
$$\log T = 12.44151-10$$
$$\therefore \quad T = \underline{276.4}$$

**例 2.** $a=12$, $B=37°20'$, $C=42°15'$ ナルトキ其三角形ノ面積ヲ求メヨ。

$$T = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin A}$$

ニヨリ, $\sin A = \sin(180° - \overline{B+C}) = \sin(B+C)$ ナレバ

$$T = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin B \sin C}{\sin(B+C)}$$

茲ニ, $\frac{a^2}{2}$ ハ $\frac{144}{2}$ 卽チ 72 ナルコトニ注意シ

$$\log 72 = 1.85733$$
$$\log\sin 37°20' = 9.78280-10$$
$$\log\sin 42°15' = 9.82761-10$$
$$-\log\sin 79°35' = -9.99278+10$$
$$\log T = 1.47496$$
$$\therefore \quad T = 29.85$$

**例 3.** $a=7.42$, $b=9.26$, $c=12.34$ ナルトキ, 其三角形ノ面積ヲ求メヨ。

$$T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ニ於テ

$$s = \frac{a+b+c}{2} = 14.51$$
$$s-a = 7.09$$
$$s-b = 5.25$$
$$s-c = 2.17$$

ナルコトニ注意シ



$$\log 14.51 = 1.16167$$
$$\log 7.09 = 0.85065$$
$$\log 5.25 = 0.72016$$
$$\log 2.17 = 0.33646$$
$$\log T^2 = 3.06894$$
$$\therefore \quad \log T = 1.53447$$
$$\therefore \quad T = 34.23$$

## 問題

次ノ各要素ヲ知リテ, 其三角形ノ面積ヲ求メヨ。

1. $a=43.54$, $c=55.46$, $B=47°44'$
2. $b=21.76$, $c=37.96$, $A=66°6'.6$
3. $a=42.2$, $b=24.3$, $A=21°31'$
4. $a=56$, $b=82$, $c=64$
5. $a=1.732$, $b=1.414$, $c=2.222$

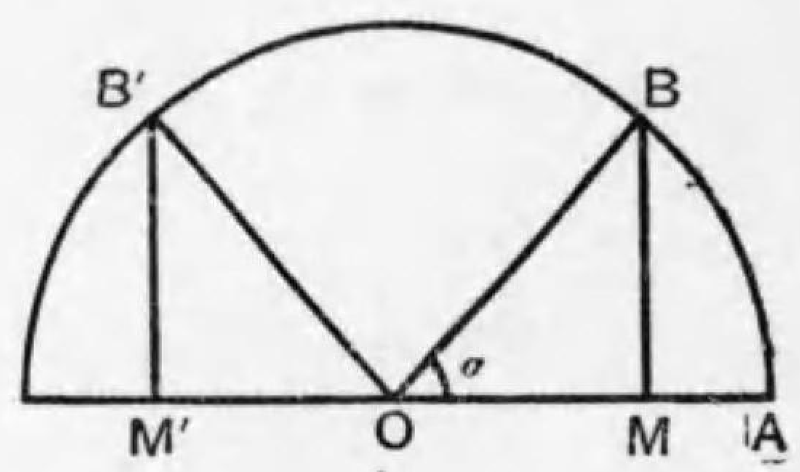
# 第九章
# 反三角函數

## 1. 同ジ正弦ヲ有スル總テノ角

一ツノ角ガ與ヘラレタルトキ，其角ノ sine ハ一定ノ値ヲ有ス。例ヘバ，$\sin\frac{\pi}{6}$ ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。シカシ，sine ガ $\frac{1}{2}$ ニ等シキ角ハ 30° ノミニハ限ラズ，150°, 390°, −210° 等ノ sine ハ總テ $\frac{1}{2}$ ナリ。

一般ニ，$\sin x=a$ ニ適スル角 $x$ ノ一般式ヲ求メンニ，其條件ニ應ズル最小正角ヲ ∠AOB トシ，ソレヲ $\alpha$ トス。

圖ニ於テ，AO ノ延長上ニ OM ニ等シク OM′ ヲトレバ




第 40 圖

$$\triangle OB'M' \equiv \triangle OBM$$

$$\therefore\ \angle B'OM'=\angle BOA=\alpha$$

$$\therefore\ \angle AOB'=\pi-\alpha$$

$$\sin\angle AOB'=\frac{M'B'}{OB'}=\frac{MB}{OB}=\sin\alpha=a$$

$$\therefore\ \sin(\pi-\alpha)=a$$

又，OB ガ OA トナス角ハ單ニ $\alpha$ ニ非ズシテ，動線 OB



ガ點 O ノ周リヲ正方向又ハ負方向ニ幾回カ回轉シテ OB ノ位置ニ來レルモノト見レバ，OB ガ OA トナス角ハ $2\pi+\alpha$ トモ，$4\pi+\alpha$ トモ又ハ $-2\pi+\alpha$ トモ見ルコトヲ得。故ニ

$$\sin(2m\pi+\alpha)=a$$

同樣ニシテ

$$\sin(2m\pi+\overline{\pi-\alpha})=a$$

茲ニ，$m$ ハ 0 又ハ正負ノ整數ヲ表ハス。故ニ $\sin x=a$ ニ適スル $x$ ハ

$$x=2m\pi+\alpha,\quad (2m+1)\pi-\alpha$$

ニテ表ハサルベシ。之レヲ一ツノ式ニ纏メレバ

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha \quad (n\ \text{ハ 0 又ハ正負ノ整數})$$

ト書クコトヲ得。何トナラバ，$n$ ガ偶數又ハ 0 ニシテ $2m$ ニ等シキトキハ，$(-1)^{2m}$ ハ $+1$ ニシテ $x$ ハ $2m\pi+\alpha$ トナリ，$n$ ガ奇數ニシテ $2m+1$ ニ等シキトキハ，$(-1)^{2m+1}$ ハ $-1$ ニシテ $(2m+1)-\alpha$ トナレバナリ。

例ヘバ，$\sin x=\frac{1}{2}$ ニ適スル $x$ ヲ求メルニハ，$\frac{\pi}{6}$ ノ sine ハ $\frac{1}{2}$ ニ等シケレバ

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$$

又，sine ノ値ガ同ジキ總テノ角ノ cosecant ハ總テ等シケ

レバ, $\operatorname{cosec} x=a$ ニ適スル $x$ ノ一ツノ値ヲ $\alpha$ トスレバ

$$x=n\pi+(-1)^n\alpha$$

ニテ表ハサル。

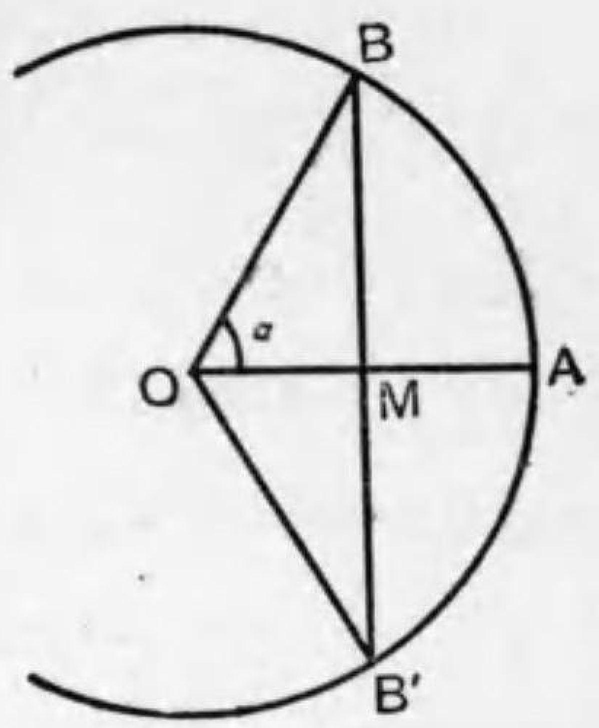
## 2. 同ジ餘弦ヲ有スル總テノ角

$\cos x=a$ ニ適スル $x$ ノ最小正角ヲ $\angle AOB=\alpha$ トス。

BM ヲ延長シ, B′M ヲ MB ニ等シクトリ, O ト B′ ヲ結ブ。

$\angle AOB'=-\alpha$ ニシテ

$$\cos\angle AOB'=\frac{OM}{OB'}=a$$



第 41 圖

然ラバ, 前節ト同ジク動線ガ O 點ノ周リヲ幾回カ回轉シテ結局 OB 又ハ OB′ ノ位置ニアレバ, 其等ガ OA トナス角ノ cosine ハ總テ $a$ ニ等シ。故ニ

$$\cos(2m\pi+\alpha)=a$$

$$\cos(2m\pi-\alpha)=a$$

故ニ, $\cos x=a$ ニ適スル $x$ ノ總テノ値ハ次ノ式ニテ示サル。

$$x=2n\pi\pm\alpha \quad (n\ ハ\ 0\ 又ハ正負ノ整數)$$

例 $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ ニ適スル $x$ ノ値ヲ求メヨ。



$$\cos 120^\circ=\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

又, cosine ノ値ガ同ジキ總テノ角ノ secant ハ總テ等シケレバ, $\sec x=a$ ニ適スル $x$ ノ一ツノ値ヲ $\alpha$ トスレバ

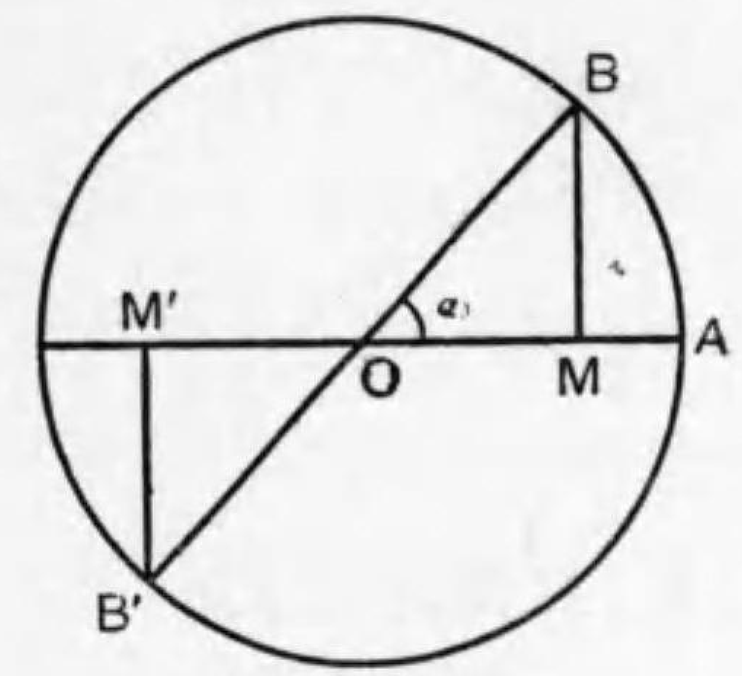
$$x=2n\pi\pm\alpha$$

ニテ表ハサル。

## 3. 同ジ正切ヲ有スル總テノ角

$\tan x=a$ ニ適スル $x$ ノ最小正角ヲ $\angle AOB=\alpha$ トシ, BO ヲ延長シ, OB′ ヲ OB ニ等シクトリ, B′ ヨリ AO ニ垂線 B′M′ ヲ下セバ $\angle AOB'$ ハ $\pi+\alpha$ ニ等シクシテ

$$\tan\angle AOB'=\frac{B'M'}{OM'}=a$$



第 42 圖

故ニ

$$\tan(\pi+\alpha)=a$$

然ラバ前節ト同ジク動線ガ O 點ノ周リヲ幾回カ回轉シテ OB 又ハ OB′ ノ位置ニ來レバ, 其等ガ OA トナス角ノ正切ハ總テ $a$ ニ等シ。故ニ

$$\tan(2m\pi+\alpha)=a$$

$$\tan(2m\pi+\overline{\pi+\alpha})=a$$

故ニ，$\tan x=a$ ニ適スル $x$ ハ

$$x=2m\pi+\alpha,\ (2m+1)\pi+\alpha$$

是等ヲ一ツニ纒メテ次ノ如ク書キ表ハスコトヲ得。

$$x=n\pi+\alpha \qquad (n \text{ ハ } 0 \text{ 又ハ正負ノ整數})$$

例　$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ニ適スル $x$ ノ總テノ値ヲ求メヨ。

$$\tan 30^\circ=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ x=n\pi+\frac{\pi}{6}$$

又，正切ノ値ノ同ジキ總テノ角ノ餘切ハ總テ等シケレバ，$\cot x=a$ ニ適スル $x$ ノ値ノ一ツヲ $\alpha$ トスレバ，$x$ ノ一般ノ値ハ

$$x=n\pi+\alpha$$

ニテ表ハサル。

## 4. 三角方程式

方程式ノ中ニ，未知角ノ三角函數ヲ含ムモノヲ**三角方程式**トイフ。三角方程式ヲ解クニハ一定ノ方法ナシト雖モ，普通ノ場合ハソレヲ變化シ，簡約シテ

$$\sin x=a,\quad \cos x=b,\quad \tan x=c$$

ノ形ニ變ヘテ前節ノ結果ヲ用ヒ，$x$ ノ一般ナル値ヲ求ムレバ，ソレガ與ヘラレタル三角方程式ノ根ナリ。



**例 1.** $\sin^2 x=\frac{1}{4}$ ヲ解ケ。

與ヘラレタル方程式ヲ變形スレバ

$$\sin x=\pm\frac{1}{2}$$

正號ヲトレバ

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

ナルニヨリ

$$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6} \qquad (1)$$

又負號ヲトレバ

$$\sin 210^\circ=\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

ナルニヨリ

$$x=n\pi+(-1)^n\left(\frac{7\pi}{6}\right) \qquad (2)$$

此ノ (1) 及ビ (2) ガ求ムル根ナリ。

**例 2.** $\sin x+\sin 5x=\sin 3x$ ヲ解ケ。

前邊ヲ變形スレバ

$$2\sin 3x\cos 2x=\sin 3x$$

$$\therefore\quad \sin 3x(2\cos 2x-1)=0$$

故ニ

$$\sin 3x=0 \quad \text{又ハ} \quad \cos 2x=\frac{1}{2}$$

$\sin 3x=0$ ナルタメニハ $3x=n\pi$ ナラバヨシ。

又　$\cos 2x=\frac{1}{2}$ ナルタメニハ

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

ナレバ

$$2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$$

故ニ，求ムル根ハ

$$x=\frac{n\pi}{3}\quad 又ハ\quad n\pi\pm\frac{\pi}{6}$$

例 3. $\sin x=-\frac{1}{2}$ 及ビ $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ニ適スル $x$ ノ一般ナル値ヲ求メヨ。

$0°$ ト $360°$ ノ間ニテ $\sin x=-\frac{1}{2}$ ニ適スル $x$ ハ $210°$ 及ビ $330°$ ナリ。又 $\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ニ適スル $x$ ハ $30°$ 及ビ $210°$ ナリ。故ニ，與ヘラレタル二ツノ方程式ニ共通ナル角ハ $210°$ 卽チ $\frac{7\pi}{6}$ ナリ。從テ一般角ハ之レニ $2\pi$ ノ幾倍カヲ加ヘタルモノニシテ，求ムル値ハ

$$x=2n\pi+\frac{7\pi}{6}.$$

### 問　題

次ノ各式ニ適スル $x$ ノ一般ノ値ヲ求メヨ。(1)−(4)

1. $\sin x=\frac{1}{2}$　　2. $\cos x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\tan x=1$　　4. $\cot x=\sqrt{3}$

次ノ各三角方程式ヲ解ケ。(5)−(8)

5. $\tan^2 x=\frac{1}{3}$　　6. $4\sin^2 x=3$

7. $\cos x-\sin 3x=\cos 2x$

8. $\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$

## 5. 消　去　法

二ツ又ハ二ツ以上ノ方程式ノ間ニ，一ツ又ハ一ツ以上ノ量ヲ消去スルトハ，其量ノ値ノ如何ニ拘ラズ是等ノ方程式ガ聯立シ得ルタメニ，其等ノ方程式ニ含マルル他ノ量ノ間ノ關係式ヲ求ムルコトナリ。



特ニ，消去スベキ量ガ三角函數又ハ三角函數ニ關スルモノナルトキ，ソレヲ**三角的消去法**トイフ。

**例**　次ノ方程式ヨリ $x$ ヲ消去セヨ。

$$\begin{cases}\sin x(1-\cos x)=a & (1)\\ \cos x(1-\sin x)=b & (2)\end{cases}$$

(1)ヨリ(2)ヲ引キテ

$$\sin x-\cos x=a-b$$

之レヲ平方シ，$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ナルコトニ注意シテ

$$1-2\sin x\cos x=(a-b)^2$$

$$\therefore\quad \sin x\cos x=\frac{1-(a-b)^2}{2}\qquad(3)$$

之レヲ(1)ノ前邊ノ $\sin x\cos x$ ニ代入シテ

$$\sin x=a+\frac{1-(a-b)^2}{2}$$

又(2)ノ前邊ノ $\sin x\cos x$ ニ代入シテ

$$\cos x=b+\frac{1-(a-b)^2}{2}$$

是等ノ値ヲ(3)ノ $\sin x$, $\cos x$ ニ代入シテ

$$\left\{a+\frac{1-(a-b)^2}{2}\right\}\left\{b+\frac{1-(a-b)^2}{2}\right\}=\frac{1-(a-b)^2}{2}$$

$$\therefore\quad 4ab+2\{1-(a-b)^2\}(a+b)+\{1-(a-b)^2\}^2$$
$$=2\{1-(a-b)^2\}$$

$$\therefore\quad 4ab+2\{1-(a-b)^2\}(a+b-1)+\{1-(a-b)^2\}^2=0$$

### 問　題

次ノ各方程式ヨリ $x$ ヲ消去セヨ。

1. $\begin{cases} a\cos x + b\sin x = c \\ d\cos x + e\sin x = f \end{cases}$

2. $\begin{cases} a\cos 2x = b\sin x \\ c\sin 2x = d\cos x \end{cases}$

3. $\begin{cases} a = \cos(x-\alpha) \\ b = \cos(x-\beta) \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin x + \sin 2x = a \\ \cos x + \cos 2x = b \end{cases}$

## 6. 反三角函數

$x$ノ函數$y$ガ

$$y = 3x - 1$$

ナル關係ニアルトキ，$x$ヲ$y$ノ函數トシテ表ハセバ

$$x = \frac{1}{3}(y+1)$$

此ノ函數ノ形式ノミニ注意シテ，$\frac{1}{3}(y+1)$ノ$y$ヲ$x$ニテ置換セルモノ

$$\frac{1}{3}(x+1)$$

ト元ノ$3x-1$トハ互ニ他ノ**反函數**（又ハ**逆函數**）ナリトイフ。

三角函數$y=\sin x$ニ於テ，$x$ヲ知リテ$y$ヲ求ムルハ普



通ノ場合ナルガ，逆ニ$y$ヲ知リテ$x$ヲ求ムル必要ノ起ルコトアリ。ソレニハ$x$ヲ$y$ノ函數トシテ表ハスノガ便利ナリ。ソノ爲ニ次ノ記號ヲ用フ。

$$x = \sin^{-1} y$$

之レヲ$y=\sin x$ノ$x$ニ代入スレバ

$$y = \sin(\sin^{-1} y)$$

ナル性質アリ。

此ノ$\sin^{-1}y$ノ$y$ヲ$x$ニテ置換セルモノ$\sin^{-1}x$ハ$\sin x$ノ反函數ニシテ，之レヲ"arc sine"ト讀ミ，**反三角函數**（又ハ**反圓函數**）トイフ。$\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$等モ同樣ニ定義ス。

$x$ガ與ヘラルルトキ$\sin x$ノ値ハ唯一ツナルモ，$\sin^{-1}x$ハ多クノ値ヲ有ス。例ヘバ，$x=\frac{\pi}{6}$ナル場合ニハ$\sin x$ハ唯一ツノ値$\frac{1}{2}$ナルモ，逆ニ$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ハ

$$\frac{\pi}{6},\quad \frac{5\pi}{6},\quad \frac{13\pi}{6},\quad \frac{17\pi}{6},\ \ldots\ldots$$

ノ値ヲ有ス。之等ハ一般ニ$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ノ形ニ書キ表ハシ得ルヲ以テ

$$\sin^{-1}\frac{1}{2} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$$ （$n$ハ0又ハ正負ノ整數）

斯クノ如クシテ　$\sin\alpha = a$ナラバ

$$\sin^{-1}a = n\pi + (-1)^n\alpha$$

ニテ表ハサル。

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ ハ上ニ説明セシガ如ク多値函數ナルモ，ソノ値ヲ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ ノ間ノ値ト制限スレバ $\frac{\pi}{6}$ ノミトナル。

一般ニ $-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ ノ間ニアル $\sin^{-1}a$ ノ値ヲ其主値トイフ。

同樣ニシテ，$\cos\alpha=a$ ナラバ

$$\cos^{-1}a=2n\pi\pm\alpha$$

又，$\tan\alpha=a$ ナラバ

$$\tan^{-1}a=n\pi+\alpha$$

玆ニ，0 ト $\pi$ ノ間ノ $\cos^{-1}a$ ノ値ハ其主値ニシテ，$-\frac{\pi}{2}$ ト $\frac{\pi}{2}$ ノ間ノ $\tan^{-1}a$ ノ値ハ其主値ナリ。

**例 1.** $\tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$ ナルコトヲ證明セヨ。

$\tan^{-1}m=A$, $\tan^{-1}n=B$ トスレバ

$$m=\tan A,\quad n=\tan B$$

$$\therefore\ \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$=\frac{m+n}{1-mn}$$

$$\therefore\ A+B=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}$$

$$\therefore\ \tan^{-1}m+\tan^{-1}n=\tan^{-1}\frac{m+n}{1-mn}.$$

**例 2.** $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$ ノ値ヲ求メヨ。

$\tan^{-1}\frac{1}{2}=A$, $\tan^{-1}\frac{1}{3}=B$ トスレバ

$$\tan A=\frac{1}{2},\quad \tan B=\frac{1}{3}$$

シカルニ



$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$$

$$\therefore\ A+B=\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}1$$

$\tan^{-1}1$ ノ一ツノ値ハ $\frac{\pi}{4}$ ナレバ

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=n\pi+\frac{\pi}{4}$$

**例 3.** 次ノ方程式ヲ解ケ。

$$\sin^{-1}2x+\sin^{-1}3x=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$\sin^{-1}2x=A$, $\sin^{-1}3x=B$ トスレバ

$$\sin A=2x,\quad \sin B=3x$$

$$\therefore\ \cos A=\pm\sqrt{1-4x^2},\qquad \cos B=\pm\sqrt{1-9x^2}$$

與ヘラレタル方程式ヨリ

$$A+B=\cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore\ \cos(A+B)=-\frac{2}{3}$$

故ニ，

$$\cos A\cos B-\sin A\sin B=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \pm\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-9x^2}-2x\cdot3x=-\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ (1-4x^2)(1-9x^2)=\left(6x^2-\frac{2}{3}\right)^2$$

$$1-13x^2+36x^4=36x^4-\frac{24}{3}x^2+\frac{4}{9}$$

$$(13-8)x^2=1-\frac{4}{9}$$

$$5x^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore\ x=\pm\frac{1}{3}$$

## 問題

次ノ各等式ヲ證明セヨ。但シ三角圓函數ハ總テ主値ヲトルモノトス。(1)−(5)

1. $\tan^{-1}\frac{3}{2}-\tan^{-1}\frac{1}{5}=\frac{\pi}{4}$

2. $\sin^{-1}a=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}a$

3. $\cos^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{15}{17}=\frac{\pi}{2}$

4. $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+3\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}(-3)$

5. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{13}=\frac{\pi}{4}$

次ノ各方程式ヲ解ケ。

6. $\sin^{-1}2x+\sin^{-1}x=\frac{\pi}{3}$

7. $\tan^{-1}(1+x)+\tan^{-1}(1-x)=\tan^{-1}\frac{2}{25}$

8. $\sin^{-1}x+2\cos^{-1}x=\tan^{-1}\sqrt{3}$



# 第十章

## ど・もあぶるノ定理

### 1. 複素數ノ圖示

一ツノ複素數 $z=x+iy$ ヲ一ツノ平面ノ上ニ圖示スルニハ，$(x, y)$ ヲ點ノ座標トシテトリ，其點ヲ以テ $z$ 卽チ $x+iy$ ノ像 (*Image*) トスルコトヲ得ベシ。

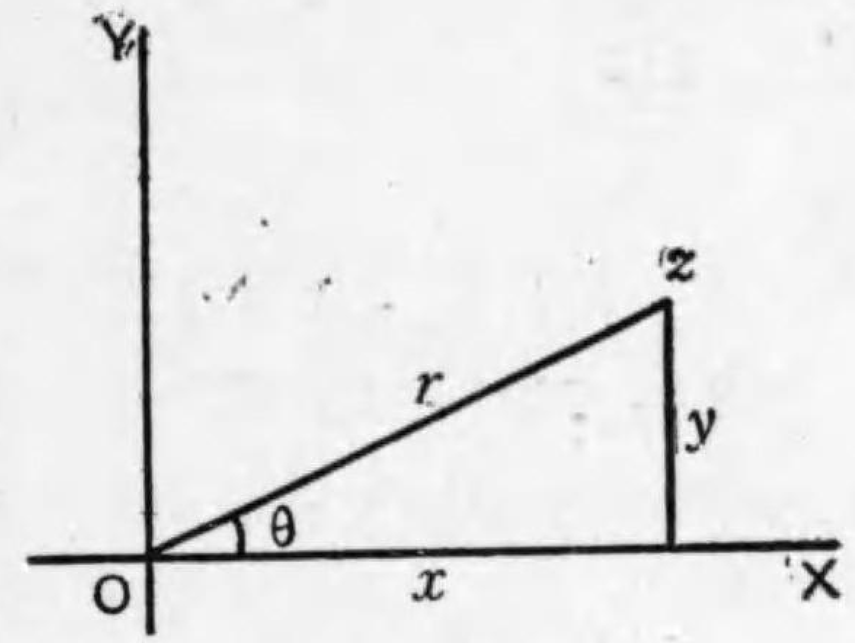
今，直交座標 $(x, y)$ ヲ極座標ニ直スニハ

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

トスレバヨシ。シカラバ

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

トナリ，$r$ ハ $z$ ノ絕對値ヲ表ハシ，$\theta$ ヲ $z$ ノ引數 (*Argument*) トイフ。但シ，$r$ ハ常ニ正數トス。




第 43 圖

二ツノ複素數 $z_1$ 及ビ $z_2$ ノ積及ビ商ヲ求メンニ，

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$$

$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

トスレバ

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$$
$$=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

故ニ，二ツノ複素數ノ積ハ各絶對値ノ積ヲ絶對値トシ，各引數ノ和ヲ引數トセルモノナリ。

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\times\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$$
$$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}$$

故ニ，二ツノ複素數ノ商ハ絶對値ノ商ヲ絶對値トシ，引數ノ差ヲ引數トセルモノナリ。

## 2. ど・もあぶるノ定理

$n$ ガ正整數ナルトキ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \qquad (1)$$

ナルコトヲ證明センニ，假リニ $n=2$ トスレバ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2i\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta$$



$$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+i\cdot 2\sin\theta\cos\theta$$
$$=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

故ニ，$n=2$ ノトキハ公式(1)ハ成立ス。

次ニ，$n$ ノ場合ニハ公式(1)ノ成立スルコトヲ假定シ，$n+1$ ノ場合ヲ考ヘンニ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{n+1}=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$
$$=\{(\cos\theta\cos n\theta-\sin\theta\sin n\theta)$$
$$+i(\sin\theta\cos n\theta+\sin n\theta\cos\theta)\}$$
$$=\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta$$

故ニ，$n$ ノトキ公式(1)ガ成立スレバ，$n+1$ ノトキモ成立ス。シカモ $n=2$ ノ場合ニハ成立スルニヨリ，數學的歸納法ニヨリ，一般ニ $n$ ハ如何ナル正整數ニテモ公式(1)ハ成立ス。

公式(1)ヲ**ど・もあぶる**(*De Moivre*)ノ**定理**トイフ。

ど・もあぶるノ定理ニ於テ $n$ ハ正整數ト限ラズ負ノ整數ニテモ，又分數ニテモ成立ス。ソレヲ次ニ證明セン。

(I). $n$ ガ負ノ整數ナルトキハ

$$n=-m \qquad (m\text{ ハ正整數})$$

トス。シカラバ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^{-m}$$
$$=\frac{1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^m}$$
$$=\frac{1}{\cos m\theta+i\sin m\theta}$$
$$=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{(\cos m\theta+i\sin m\theta)(\cos m\theta-i\sin m\theta)}$$
$$=\frac{\cos m\theta-i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta+\sin^2 m\theta}$$
$$=\cos m\theta-i\sin m\theta$$
$$=\cos(-m)\theta+i\sin(-m)\theta$$

$$\therefore\quad (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(II) $n$ ガ正又ハ負ノ分數ナルトキハ

$$n=\frac{p}{q}$$

トシ，$q$ ハ正整數，$p$ ハ正又ハ負ノ整數トス。シカラバ

$$\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^q=\cos\left(q\times\frac{\theta}{q}\right)+i\sin\left(q\times\frac{\theta}{q}\right)$$
$$=\cos\theta+i\sin\theta$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}=(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{1}{q}}$$

兩邊ヲ $p$ 羃シテ

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{\frac{p}{q}}=\left(\cos\frac{\theta}{q}+i\sin\frac{\theta}{q}\right)^p$$
$$=\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta$$

$$\therefore\quad (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

故ニ，ど・もあぶるノ定理ハ $n$ ガ有理數ナラバ正數ニテ



モ，負數ニテモ成立ス。

### 3. 複素數ノ $n$ 羃根

與ヘラレタル複素數ヲ

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

トシ，$z$ ノ $n$ 羃根ヲ求メントス。卽チ $x^n=z$ ノ根ヲ求メントス。

$k$ ヲ 0 又ハ正負ノ整數トスレバ，上ノ $z$ ハ次ノ如ク書キ表ハスコトヲ得。

$$z=r\{\cos(\theta+2k\pi)+i\sin(\theta+2k\pi)\}$$

$r$ ハ正數ナレバ，ソノ $n$ 羃根ノ中，正數ナルモノハ必ズ一ツアリ。ソレヲ $r^{\frac{1}{n}}$ トス。然ラバ，次ノ各數ハ $n$ 羃スレバ總テ $z$ トナルベシ。

$$x_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),\qquad (k=0)$$
$$x_2=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),\quad (k=1)$$
$$x_3=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+4\pi}{n}\right),\quad (k=2)$$

............................

$$x_n=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right),$$
$$(k=n-1)$$

$k$ ヲ $n, n+1, \ldots\ldots$ トスレバ，單ニ上ノ値ヲ反復スルニ過ギズ。例ヘバ $k=n$ ニ應ズルモノハ

$$r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2n\pi}{n}\right)$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)\right\}$$

$$=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right)=x_1$$

トナルガ如シ。

一般ニ，$x^n=z$ ニ適スル $x$ ノ値ハ $n$ 個ヨリ多カラズ。故ニ，上ノ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ハ此方程式ノ根ニシテ $z$ ノ $n$ 冪根ナリ。

例 1. 1ノ立方根ヲ求メヨ。

（解） 上ノ一般ノ場合ニ比較シ，$n=3$ ニシテ

$$z=\cos\theta+i\sin\theta=1$$

$$\therefore\quad r=1,\quad \theta=0$$

故ニ，求ムル立方根ハ

$$\begin{cases} x_1=\cos\frac{0}{3}+i\sin\frac{0}{3} \\ x_2=\cos\frac{0+2\pi}{3}+i\sin\frac{0+2\pi}{3} \\ x_3=\cos\frac{0+4\pi}{3}+i\sin\frac{0+4\pi}{3} \end{cases}$$

卽チ

$$x_1=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$=\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ$$



$$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ$$

$$=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 2. $i$ ノ平方根ヲ求メヨ。

（解） 一般ノ場合ニ比較シ，$n=2$ ニシテ

$$z=\cos\theta+i\sin\theta=i$$

$$\therefore\quad r=1,\quad \theta=\frac{\pi}{2}$$

故ニ，求ムル値ハ

$$x_1=\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=0.707+0.707\,i$$

$$x_2=\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)+i\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\pi\right)$$

$$=\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ$$

$$=-\cos 45^\circ-i\sin 45^\circ$$

$$=-0.707-0.707\,i$$

例 3. 方程式 $x^5-1=0$ ヲ解ケ。

（解） 此場合ハ $n=5$ ニシテ

$$z=\cos\theta+i\sin\theta=1$$

$$\therefore\quad r=1,\quad \theta=0$$

故ニ，求ムル根ハ

$$x_1=\cos\frac{0}{5}+i\sin\frac{0}{5}=1$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$$

$$=0.313+0.309\,i$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}$$

$$=\cos 144^\circ+i\sin 144^\circ$$

$$=-0.618+0.588\,i$$

$$x_4=\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$=\cos 216^\circ+i\sin 216^\circ$$

$$=-0.618-0.588\,i$$

$$x_5=\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}$$

$$=\cos 288^\circ+i\sin 288^\circ$$

$$=0.313-0.309\,i$$

**問　題**

1. 1ノ四冪根ヲ求メヨ。
2. $i$ ノ立方根ヲ求メヨ。
3. 方程式 $x^3+1=0$ ヲ解ケ。
4. 方程式 $x^5+1=0$ ヲ解ケ。

### 4. $\sin n\theta$ 及ビ $\cos n\theta$ ノ展開

ど・もあぶるノ定理ニヨリ

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

後邊ヲ二項定理ニヨリ展開スレバ

$$\cos n\theta+i\sin n\theta=\cos^n\theta+n\cos^{n-1}\theta\cdot i\sin\theta$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\cdot i^2\sin^2\theta$$



$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\theta\cdot i^3\sin^3\theta+\cdots\cdots$$

$$=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

$$\times\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$

$$+i\Big\{n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$\times\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots\cdots\Big\}$$

兩邊ノ實數ノ部分，虚數ノ部分ヲ互ニ等シク置キテ*

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots(1)$$

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$\times\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$n=3$ トスレバ

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-\frac{3(3-1)}{1.2}\cos\theta\sin^2\theta$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\frac{3.2.1}{1.2.3}\sin^3\theta$$

$$=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$$

* $a, b, c, d$ ガ實數ニシテ $a+id=c+id$ ナラバ，$a-c=i(d-b)$.
此等式ガ成立スルタメニハ $a-c=0$，$d-b=0$ ナラザル可ラズ

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

## 5. 三次方程式ノ解法

三次方程式ノ一般ノ形ハ

$$y^3+3ay^2+3by+c=0$$

ナルガ，$y=x-a$ ト置ケバ

$$x^3-3(a^2-b)x+(2a^3-3ab+c)=0$$

トナル。故ニ，三次方程式ハ總テ次ノ形ニ書キ表ハスコトヲ得ベシ。

$$x^3-3px+q=0 \qquad (1)$$

此方程式ニ於テ

$$x=\frac{z}{n}$$

トオケバ

$$z^3-3pn^2z+qn^3=0 \qquad (2)$$

トナル。シカルニ前節ノ説明ニヨリ，次ノ恒等式ガ成立ス。

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

卽チ

$$\cos^3\theta-\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos 3\theta=0 \qquad (3)$$

故ニ，若シモ，



$$z=\cos\theta,\quad pn^2=\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4}\cos 3\theta=qn^3$$

ナラバ，(2)ト(3)トハ全ク同ジ方程式トナル。此ノ後ノ三ツノ等式ノ第二ヨリ

$$n=\left(\frac{1}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

之レヲ最後ノ式ニ代入シテ

$$\cos 3\theta=-4q\left(\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}} \qquad (4)$$

故ニ，此ノ方程式ヲ解キ $\theta$ ガ求メラレレバ，$\cos\theta$ ハ(2)ノ根トナル。(4)ハ $p$ ガ正數ニシテ且ツ

$$-1\leqq 4q\left(\frac{1}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}\leqq 1$$

卽チ

$$q^2\leqq 4p^3$$

ナラバ解クコトヲ得ベシ。

方程式(4)ノ $\theta$ ノ一ツノ値ヲ $\alpha$ トスレバ

$$\alpha,\quad \alpha+\frac{2\pi}{3},\quad \alpha+\frac{4\pi}{3}$$

ハ總テ(4)ノ根ニシテ，方程式(1)ノ根ハ

$$\frac{1}{n}\cos\alpha,\quad \frac{1}{n}\cos\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right),\quad \frac{1}{n}\cos\left(\alpha+\frac{4\pi}{3}\right)$$

ニテ表ハサル。

例 $x^3+6x^2+9x+3=0$ ヲ解ケ。

(解) $x=y-2$ ト置ケバ

$$y^3-3y+1=0$$

今，$y=\frac{z}{n}$ トスレバ

$$z^3-3n^2z+n^3=0 \qquad \text{(I)}$$

シカルニ

$$\cos^3\theta-\frac{3}{4}\cos\theta-\frac{1}{4}\cos3\theta=0 \qquad \text{(II)}$$

故ニ

$$z=\cos\theta,\quad n^2=\frac{1}{4},\quad -\frac{1}{4}\cos3\theta=n^3$$

ナラバ，(I)ト(II)トハ同ジ方程式トナル。此ノ第二ノ式ヨリ

$$n=\frac{1}{2}$$

之レヲ第三ノ式ニ代入シテ

$$\cos3\theta=-\frac{1}{2}=\cos120^\circ \qquad \text{(III)}$$

(III)ノ根ハ

$$40^\circ,\quad 40^\circ+120^\circ,\quad 40^\circ+240^\circ$$

$$\therefore\quad z=\cos40^\circ,\quad \cos160^\circ,\quad \cos280^\circ$$

$$\therefore\quad y=2\cos40^\circ,\quad 2\cos160^\circ,\quad 2\cos280^\circ$$

故ニ，

$$x_1=y_1-2=-2+2\cos40^\circ$$

$$x_2=y_2-2=-2+2\cos160^\circ$$

$$x_3=y_3-2=-2+2\cos280^\circ$$

## 6. 三角級數

本章第4節ノ公式(1)及ビ(2)ニヨリ

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots\cdots$$

$$\sin n\theta=n\cos^{n-1}\theta\sin\theta-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$$



$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots$$

是等ノ式ニ於テ $n\theta=x$，卽チ $\theta=\frac{x}{n}$ ト置ケバ

$$\cos x=\cos^n\frac{x}{n}-\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\frac{x}{n}\sin^2\frac{x}{n}$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\frac{x}{n}\sin^4\frac{x}{n}-\cdots\cdots$$

$$\sin x=n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$\times\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}$$

$$\times\cos^{n-5}\frac{x}{n}\sin^5\frac{x}{n}-\cdots\cdots$$

今，$x$ ヲ一定ノ有限値トシテ $n$ ヲ限リナク大ニスレバ

$$\frac{x}{n}\to0$$

トナリ，

$$\cos^n\frac{x}{n}\to1$$

$$n\cos^{n-1}\frac{x}{n}\sin\frac{x}{n}=x\cos^{n-1}\frac{x}{n}\;\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\to1^{※}$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}\cos^{n-2}\frac{x}{n}\sin^2\frac{x}{n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2}\cos^{n-2}\frac{x}{n}$$

$$\times\left(\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^2\to\frac{x^2}{2}$$

同様ニシテ

※ $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=0$ ニ依ル。

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cos^{n-3}\frac{x}{n}\sin^3\frac{x}{n}\longrightarrow\frac{x^3}{3!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\cos^{n-4}\frac{x}{n}six^4\frac{x}{n}\longrightarrow\frac{x^4}{4!}$$

斯クノ如ク，$n$ ヲ限リナク大ニシテ，上ノ cosine 及ビ sine ノ級數ハ次ノ如クナルベシ。

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots\cdots$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\cdots\cdots$$

是等ノ公式ニヨリ，$x$ ガ小ナル値ノトキハ略近的ニ

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}$$

ト見ルコトヲ得ベシ。

**例** $\sin 10''$ 及ビ $\cos 10''$ ヲ求メヨ。

（解） 上ノ公式ニ於ケル角 $x$ ノ單位ハ「らぢあん」ナリ。之レヲ六十分法ニ直スニハ

$$\alpha^0=x(Radian)$$

トスレバ

$$\frac{\alpha}{180}=\frac{x}{\pi}$$

$$\therefore\quad x=\frac{\pi}{180}\alpha$$

故ニ

$$10''=\frac{\pi}{180}\times\frac{10}{60\times 60}$$

$$=\frac{\pi}{64800}\ (Radian)$$

$\sin x$, $\cos x$ ノ展開式ニヨリ



$$\sin 10''=\frac{\pi}{64800}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$\cos 10''=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{\pi}{64800}\right)^2+\cdots\cdots$$

玆ニ $\frac{\pi}{64800}=0.000048481368\cdots\cdots$

$$\left(\frac{\pi}{64800}\right)^2=0.0000000023504\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{\pi}{64800}\right)^3=0.000000000000113928\cdots\cdots$$

故ニ $\sin 10''=0.000048481368$

$$\cos 10''=1-\frac{0.0000000023504}{2}$$

$$=1-0.00000001175$$

$$=0.99999998825$$

是等ノ結果ハ小數點以下 12 桁マデ正確ナリ。

## 問題

1. $\cos 4\theta$ 及ビ $\sin 4\theta$ ヲ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ノ項ニテ表ハセ。

2. 次ノ等式ヲ證明セヨ。

$$\tan 5\theta=\frac{\tan\theta(\tan^4\theta-10\tan^2\theta+5)}{5\tan^4\theta-10\tan^2\theta+1}$$

3. 方程式 $2x^3-3x-1=0$ ヲ解ケ。

4. 方程式 $x^3-7x+5=0$ ヲ解ケ。

5. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)=0.49$ ニ適スル $\theta$ ハ極メテ小ナルコトヲ知リ，$\theta$ ノ略近値ヲ求メヨ。

6. $x$ ガ限リナク零ニ近ヅクトキノ次ノ式ノ極限ヲ求メヨ。

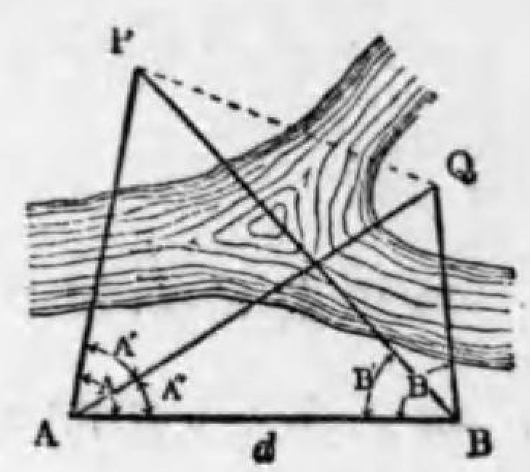
(1) $\frac{x-\sin x}{x^3}$　　　(2) $\frac{x^2}{1-\cos mx}$

# 附　　録 (第一)
## 測　量　問　題

### 1. 三角形ノ解法ニ歸スル問題

三角形ノ解法ヲ實際ニ應用スルトキ，二ツ以上ノ三角形ヲ解ク必要ノ起ルコトアリ。

例ヘバ，A ニ於テ P, Q 二點間ノ距離ヲ測定スルニ當リ，A ヨリハソレニ到達シ得ザルモノトス。ソノトキニハ，基線 AB ヲ選ビ，ソノ長サ $d$ ヲ測定シ，次ニ A ニ於テ圖ノ如ク，∠A, ∠A′, ∠A″ ヲ測リ，B ニ於テ ∠B, ∠B′ ヲ測定スレバ，△ABP ニ於テ ∠APB＝180°−(A＋B′) ナルコトニ注意シ



第 43 圖

$$\mathrm{AP}=\frac{d\,sin\mathrm{B}'}{sin(\mathrm{A}+\mathrm{B}')} \qquad (1)$$

又，△ABQ ニ於テ

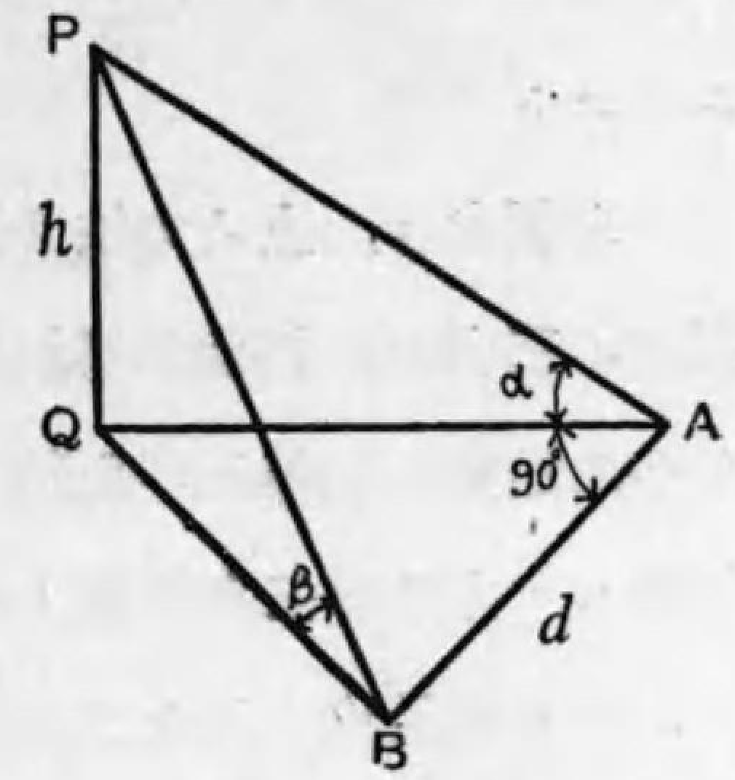
$$\mathrm{AQ}=\frac{d\,sin\mathrm{B}}{sin(\mathrm{A}''+\mathrm{B})} \qquad (2)$$

(1), (2) ニヨリ，△AQP ノ二邊 AP, AQ ガ分カリ，其夾角 A′ ガ既知ナレバ，PQ ノ長サヲ求ムルコトヲ得ベ



シ。

又，基底 Q ニ近ヅクコトヲ得ザルトキ高サ PQ ヲ求メンニハ，先ヅ便宜ニ一點 A ヲ定メ仰角 $\alpha$ ヲ測定シ，次ニ AQ ト同水平面上ニ直角ノ方向ニ地點 B ヲ定メ，AB ノ距離 $d$ ヲ求メ，B ニ於ケル PQ′ ノ仰角 $\beta$ ヲ測定スレバ PQ ノ高サ $h$ ハ



第 44 圖

$$\mathrm{BQ}=h\,cot\beta$$

$$\mathrm{AQ}=h\,cot\alpha,$$

$$d^2=\overline{\mathrm{BQ}}^2-\overline{\mathrm{AQ}}^2=h^2(cot^2\beta-cot^2\alpha)$$

$$=h^2(cot\beta+cot\alpha)(cot\beta-cot\alpha)$$

$$=\frac{h^2(sin\alpha\cdot cos\beta+cos\alpha\cdot sin\beta)(sin\alpha\cdot cos\beta-cos\alpha\cdot sin\beta)}{sin^2\alpha\cdot sin^2\beta)}$$

$$=\frac{h^2\cdot sin(\alpha+\beta)\cdot sin(\alpha-\beta)}{sin^2\alpha\cdot sin^2\beta}$$

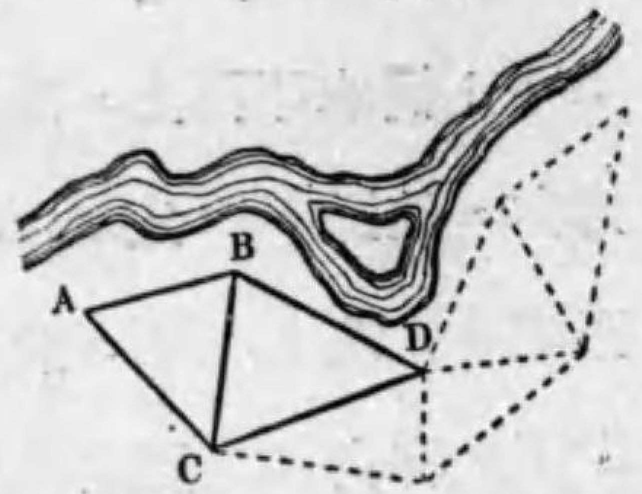
$$\therefore\quad h=\frac{d\cdot sin\alpha\cdot sin\beta}{\sqrt{sin(\alpha+\beta)\cdot sin(\alpha-\beta)}}$$

### 2. 三角測量

或地域ヲ測量シテ地圖ヲ作ルニハ，先ヅ A, B 二點ヲ選ビ，距離 AB ヲ正確ニ測定シ，次ニ A,B 二點ヨリ見ユ

ル地點Cヲ選ビ，∠CAB及ビ∠CBAヲ測リ，△ABCニ於テAC, BCノ距離ヲ求メ，次ニB,C二點ヨリ見ユル地點Dヲ選ビ∠CBD, ∠BCDヲ測定シテ，BD, CDノ距離ヲ定ムルコトヲ得。

カク順次ニ，上ノ方法ヲ繰返シ，三角形ノ解法ヲ應用シテ各地點間ノ距離又ハ面積ヲ計算スル方法ヲ**三角測量**ト云ヒ，常ニ測量術ニ用ヒラルル方法ナリ。



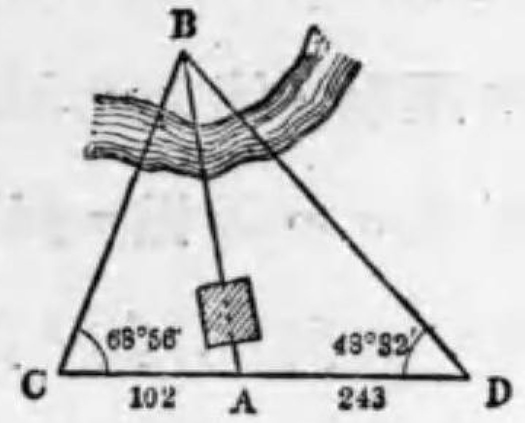

第 45 圖

**問題**

1. A,B二點ノ間ノ距離ヲ測定セントスルニ，其ノ間ニ障害物アリ。A,Bヨリ見ルコトヲ得ル地點Cヲ定メ，AC=200米，BC=321米 ∠ACB=68°41′ナリト云フ。A,B二點間ノ距離ヲ求メヨ。
2. 池ヲ隔テテA,B二點アリ。A,Bト同一水平面上ニ地點Cヲ選ビ AC=250尺 ∠CAB=44°13′, ∠ACB=51°9′ナリ。ABノ距離ヲ求メヨ。
3. AヨリBヲ見ルコトヲ得ズ。距離ABヲ求メルタメニ，Bヲ見ルコトヲ得ル二ツノ地點C,DヲAト同一



直線上ニ取リ CA=102間，DA=243間 DCB=68°56′,∠CDB=48°32′ナリ。ABノ距離ヲ求メヨ。

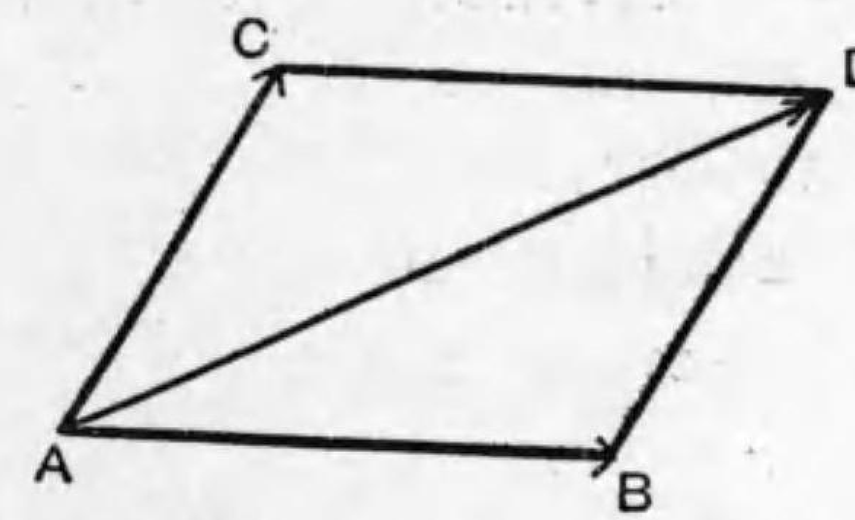



第 46 圖

4. 三角測量ノ方法ヲ用ヒテ測定シ，基線ABノ長サ 248米，∠ABC=62°30′, ∠BAC=52°15′ナリト云フ。三角形ABCノ面積ヲ求メヨ。
5. 或丘稜ノ高サヲ測定セシニ $d=100$米，$\alpha=48°23'$，$\beta=32°8'$ナリト云フ。其ノ高サヲ求メヨ。

### 3. 速度ノ合成

圖ニ示スガ如ク，或物體ガAノ位置ニアリテ，毎秒4單位ノ速サデABノ方向ニ進行シ，同時ニ毎秒三單位ノ速サデACノ方向ニ進行スルモノトスレバ，一秒ノ後ニハ如何ナル位置ニ到達スルカ。




第 47 圖

今線分AB, ACヲ以テ，一秒間ニ於ケル速サノ大サト

方向トヲ表ハスモノトシ，平行四邊形 ABDC ヲ作レバ，其ノ運動ノ速サハ AB, 及ビ BD ヲ合成セルモノニ等シク一秒後ニハ D 點ニ到達スルコトトナルベシ。之ハ對角線 AD ノ方向ニ，其ノ長サノ表ハス速サデ進行セル結果ト完ク一致ス。此ノ AD ニヨリ代表サレル速サヲ二ツノ速サ AB, AC ヲ**合成セルモノ**ト云フ。

上ト同様ニシテ二ツノ力ヲ合成スルコトヲ得。

**例**　60° ノ角ヲナシテ，一ツノ點ニ 26「ダイン」及ビ 19「ダイン」ノ力ガ作用スルトキ，其ノ二ツノ力ヲ合成セル力ノ大サト方向トヲ求メヨ。

與ヘラレタル二ツノ力ハ長サ 26, 19, 角 60°ヲナス二ツノ線分ヲ以テ示サル可シ。

三角形 ABD ニ於テ，$AB=26$, $BD=19$, $\angle ABD=180°-60°=120°$ ナレバ，二邊ト其夾角既知ナリ。此三角形ヲ解キ邊 AD ト角 $\alpha$ ヲ求メンニ，餘弦ノ法則ニヨリ

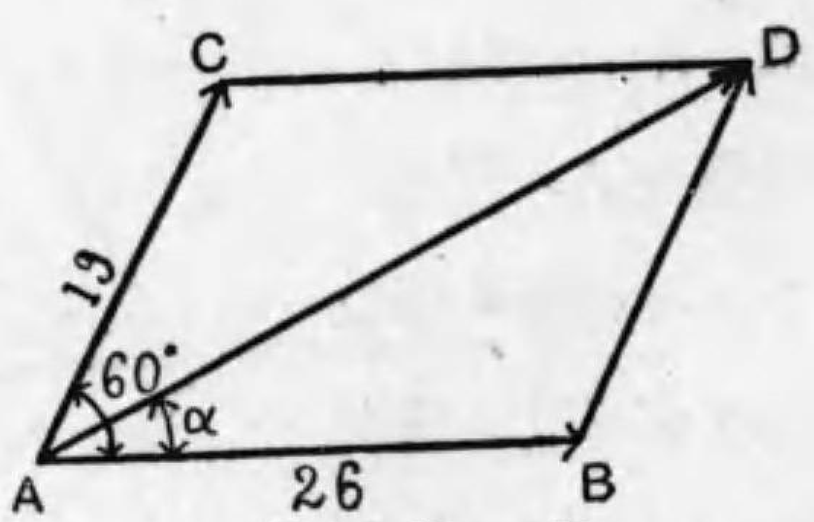
$$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos ABD$$

$$\therefore\ AD^2=26^2+19^2-2\times26\times19\times\cos120°$$

$$=26^2+19^2-2\times26\times19\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$=26^2+19^2+26\times19=1531.$$

$$\therefore\quad AD=30.13$$



第　48　圖

次ニ，角 $\alpha$ ハ正弦ノ法則ニヨリ

$$\frac{BD}{\sin\alpha}=\frac{AD}{\sin ABD}$$



$$\therefore\ \sin\alpha=\frac{19}{30.13}\times\sin120°$$

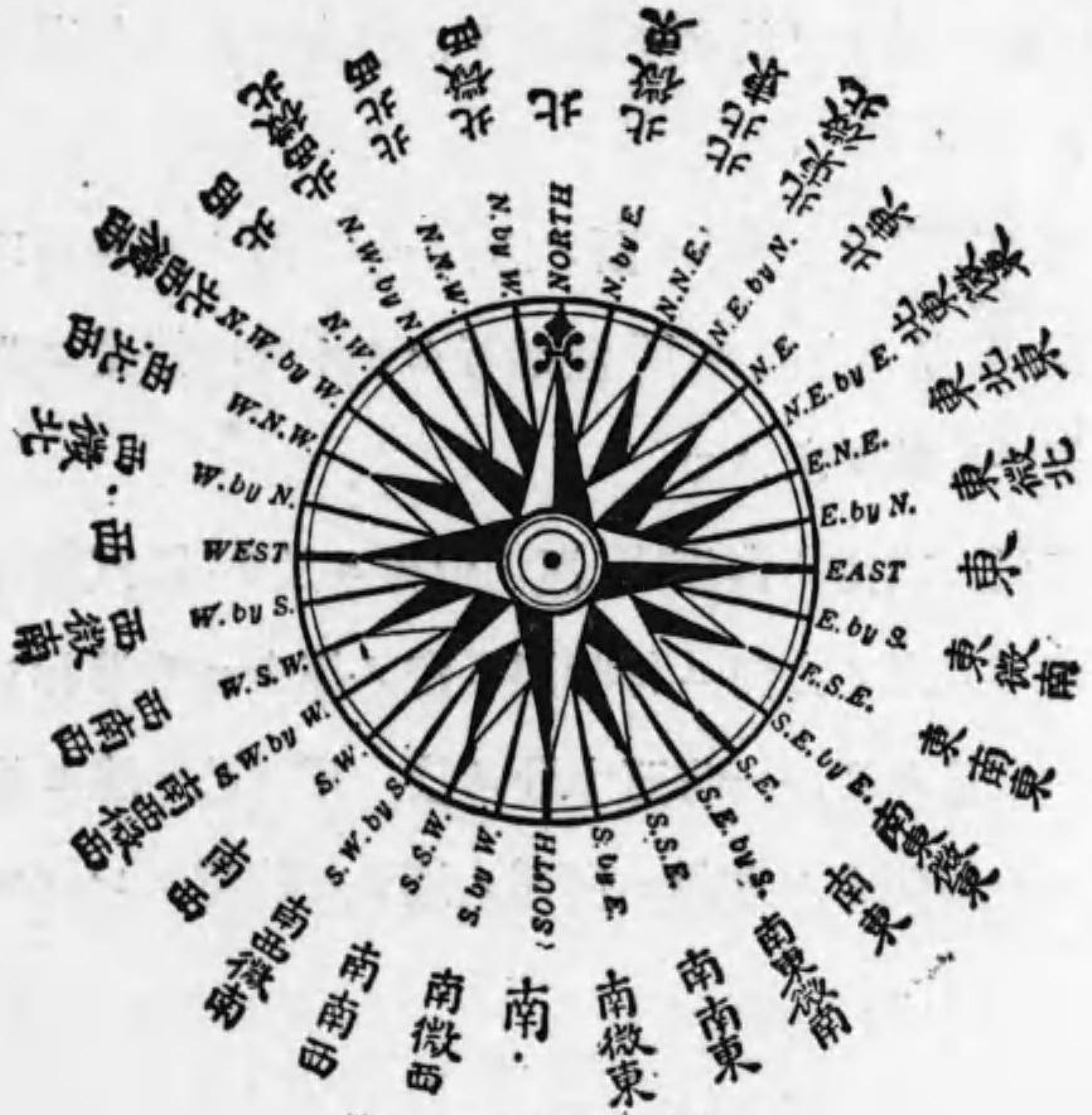
$$=\frac{19}{30.13}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0.421$$

$$\therefore\ \alpha=24°51'$$　〔眞數表ニヨレリ〕

故ニ，合力ノ方向ハ 26「ダイン」ノ力ガ作用スル方向ト角 24°51′ ヲナシ，其大サ 39.13「ダイン」ナリ。

## 4. 航海用羅針盤

航海中進行ノ方向ヲ定メルニハ羅針盤ヲ用フ。盤面ハ東西南北ヲ基ニ 32 ニ等分シ，圖ノ如キ名稱ヲ以テ呼ブ。相隣接セル二方位ノ間ノ角ハ 360°÷32, 卽チ 11°15′ ナリ。



第　49　圖

**問題**

1. 水流ノ速サ毎時間 4.8 哩ノ河ヲ，毎時間 3.5 哩ヲ進ム「ボート」ニテ横斷セントス。其河流ニ於テ「ボート」ハ何程ノ速サニテ進ムカ。

2. 毎秒40尺ノ速サニテ地面ニ沿フテ進ム横7尺，縦30尺ノ箱ノ底面ノ對角線ニ沿ヒ，後カラ前ノ方ニ一ツノ球ガ毎秒30尺ノ速サヲ以テ轉動セリ。其球ガ地面ニ對シテ運動スル速サヲ求メヨ。

3. 13「ダイン」，22「ダイン」，28「ダイン」ノ三力ガ或物體ノ一點ニ働キテ釣合ヲ保テリ。各力ノナス角度ヲ求メヨ。

4. 或船ガ燈臺ヨリ南 44°西ノ方向ニ 12 浬ノ距離ニアリ船ガ南 52°東ノ方向ニ 15 浬進行セルトキ，燈臺ヨリ其船マデノ距離ヲ求メヨ。

5. 甲汽船，或港ノ南西 10 浬ノ位置ニ於テ，乙汽船ガ港ヨリ南 80°東ノ方向ニ毎時間 8 浬ノ速サニテ進行シ始メタルヲ見タリ。一時三十分ノ後，甲ガ乙ニ追ヒ付クタメニハ如何ナル方向ニ何程ノ速サデ航行スレバヨキカ。



# 附　　錄（第二）

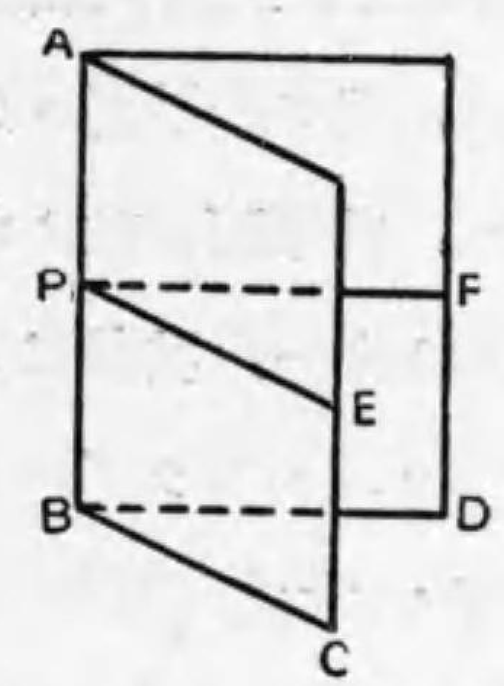
# 球面三角法

## 第一章

## 球面三角形

### 1. 二面角，三面角

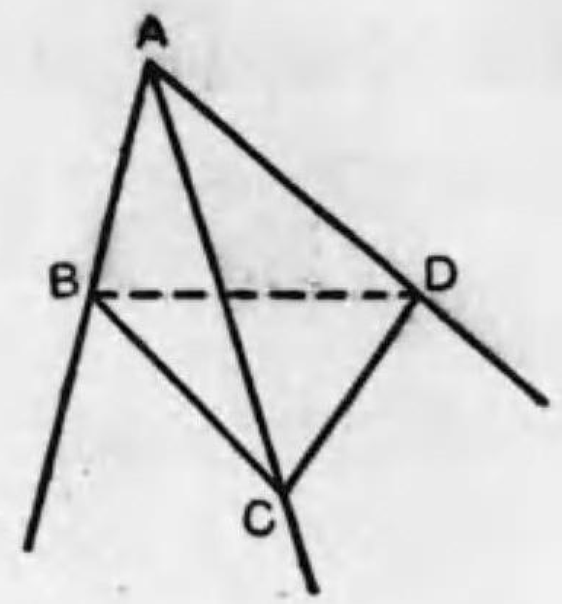
一直線 AB ニ於テ終ル二平面 ABC, ABD ハ**二面角**ヲナストイヒ，直線 AB ヲ二面角ノ**稜**，二平面ヲ二面角ノ**面**トイフ。




二面角ノ各面 ABC, ABD ノ上ニ，稜 AB 上ノ任意ノ一點 P ヲ通リ，AB ニ夫々垂線 PE, PF ヲ引キ，角 EPF ヲ作レバ，之レハ點 P ノ位置ニ關セズ大サ一定ナリ。此角ヲ二面角ノ**平面角**トイヒ，平面角ノ大サヲ以テ二面角ノ大サトス。

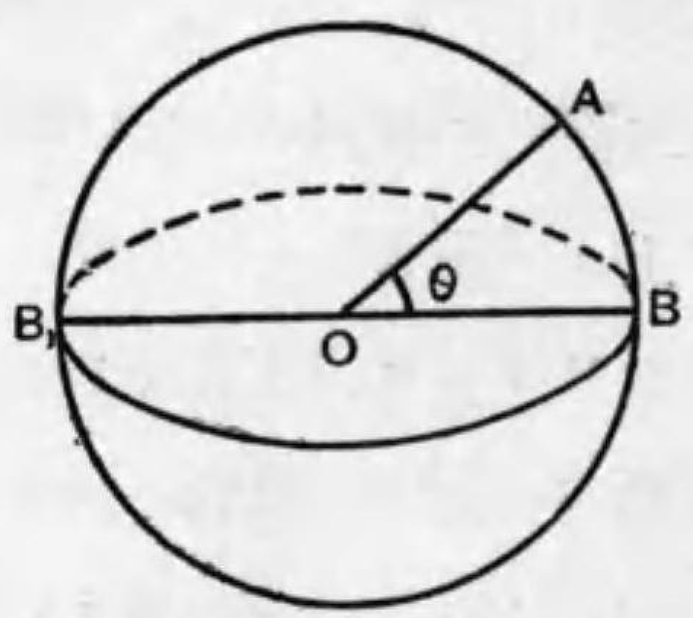
點 A ニテ出合フ三平面 ABC, ACD, ADB ハ**三面角**ヲナ

ストイヒ，點Aヲ三面角ノ**頂點**，三平面ノ二ツ宛ノ交ハリナル三直線 AB, AC, AD ヲ三面角ノ**稜**，相隣ル二稜ノ間ニアル角 BAC, CAD, DAB ヲ三面角ノ**面角**トイフ。又，二面角 DABC ノ如ク，一ツノ稜ニ於ケル二面角ヲ，三面角ノ**二面角**トイフ。




## 2. 球面上ノ二點ノ距離

一般ニ，球ヲ一平面ニテ截レバ，其截口ハ一ツノ圓ナリ。特ニ，其平面ガ球ノ中心ヲ通ルトキハ，其截口ヲ**大圓**トイヒ，シカラザルトキハ**小圓**トイフ。




球面上ニ二點 A, B ヲトリ，此二點ノ間ニ球面上ニテ引キ得ル線ノ中ニテ最小ナルモノハ，A, B ヲ通ル半圓周ヨリ大ナラザル大圓ノ弧ナリ。斯ル大圓ノ弧ノ長サヲ球面上ノ二點 A, B ノ**距離**トイフ。



又，球ノ中心OトA, Bヲ結ビテ作ラルル角 AOB ヲ二點A, Bノ**角距離**トイフ。

次ニ，二點 A, B ノ距離ト角距離トノ關係ニツキ説明セン。

圖ニ於テ，BO ノ延長ト球面トノ交點ヲ $B_1$，球ノ半徑ヲ $r$，$\angle AOB$ ノ大サヲ $\theta^\circ$ トスレバ

$$弧\ AB : 弧\ BB_1 = \theta : 180$$

シカルニ

$$弧\ BB_1 = 半圓周 = \pi r$$

$$\therefore\quad 弧\ AB = \frac{\pi r\theta}{180}$$

故ニ，球面上ノ二點ノ距離ハ，其角距離ト球ノ半徑トガ與ヘラルレバ，直ニ算出スルコトヲ得。

二點ノ角距離ガ 90° ナルトキ，此二點ハ**象限距離**ニアルトイフ。

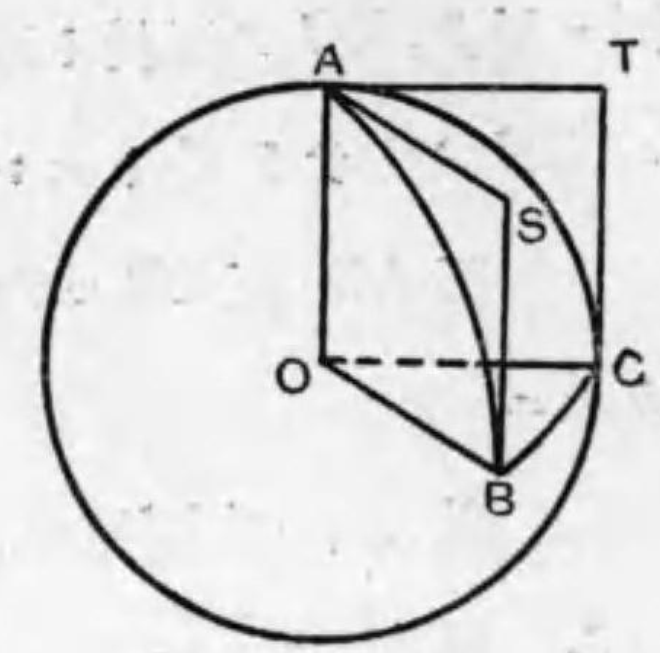
球面上ノ任意ノ圓ニ於テ，其平面ニ垂直ナル球ノ直徑ノ兩端ノ點ヲ，此圓ノ**極**トイフ。

大圓ノ各極ハ其大圓ノ周上ノ任意ノ點ヨリ象限距離ニアリ。

## 3. 球面角

球面上ノ二圓ノナス角ハ，其等ノ交點ニ於ケル各圓ノ切線ノナス角ニテ表ハスモノトス。特ニ，二圓ガ大圓ナラバ，其ナス角ヲ球面角トイヒ，二圓ノ交點ヲ球面角ノ頂點，其二圓ヲ球面角ノ邊トイフ。

二ツノ弧 AB, AC ヲ大圓ノ弧トシ，AS, AT ヲ A ニ於ケル各圓ノ切線トス。シカラバ，弧 AB, AC ノナス球面角ハ角 SAT ニテ表ハサル。然ルニ，圓ノ切線ハ其切點ヲ通ル半徑ニ垂直ナルヲ以テ，AT, AS ハ共ニ OA ニ垂直ナリ。




故ニ，角 SAT ハ二面角 TAOS ノ平面角ナリ。

依テ，球面角ハ其二圓ノ平面ニテ作ラルル二面角ノ平面角ニテ表ハサレル。

二平面 AOB, AOC 上ニ，點 O ヲ通ル OA ノ垂線ヲ夫々 OB, OC トスレバ

$$\angle TAS = \angle BOC$$

然ルニ，角 BOC ハ大圓ノ弧 BC ニテ表ハサルル。

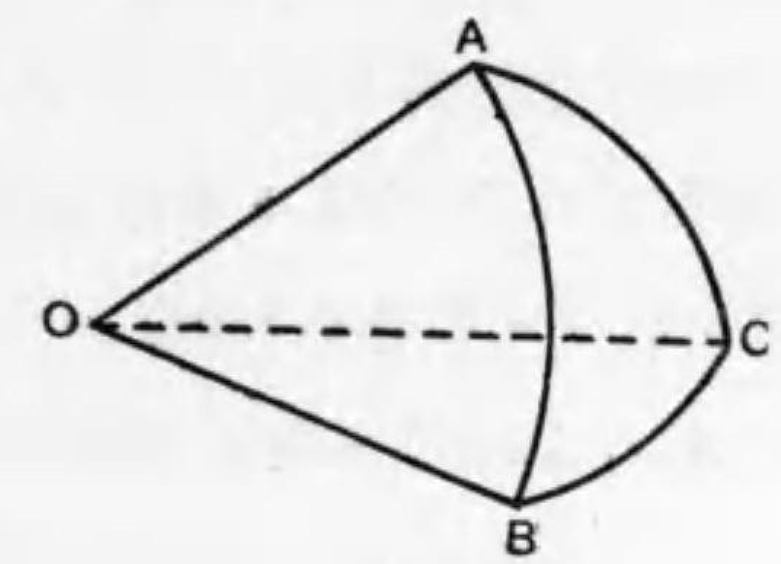
故ニ，A ハ大圓ノ弧 BC ノ極ナルコトニ注意シテ，球



面角ハ其頂點ヲ極トスル二邊ノ間ニアル大圓ノ弧ニテ表ハサルルコトヲ知ルベシ。

## 4. 球面三角形

三ツノ大圓ノ弧ニヨリ圍マレタル球面上ノ圖形ヲ球面三角形トイヒ，各弧ヲ球面三角形ノ邊，相隣ル二邊ノナス球面角ヲ球面三角形ノ角トイフ。又，此三邊及ビ三角ヲ球面三角形ノ原素トイフ。

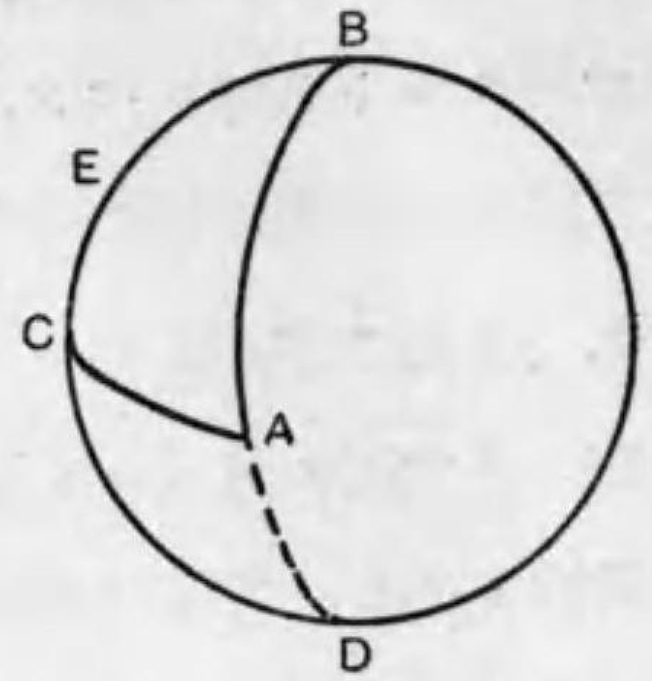



今，ABC ヲ球面 O 上ノ球面三角形トシ，半徑 OA, OB, OC ヲ引ク。シカラバ，三平面 OAB, OAC, OBC ハ一ツノ三面角ヲ作ル。

故ニ，球面三角形ノ各角ハ此三面角ノ二面角ノ平面角ニテ表ハサレ，各邊ハ三面角ノ面角ニテ表ハサル。

今後說明スル球面三角形ノ各邊ハ總テ 180° ヨリ小ナリト假定スルコトヲ得ベシ。何故ナラバ，例ヘバ圖ニ於テ球面三角形 ABDC ハ 180° ヨリ大ナル邊 BC ヲ有スルモノトス。シカラバ

優弧 BC＝360°－劣弧 BC




故ニ，優弧 BC ノ代リニ劣弧 BC ヲトリテ作レル球面三角形 ABEC ノ各邊ハ 180° ヨリ小ナリ。

球面三角形 ABEC ト元ノ球面三角形 ABDC トノ關係ヲ考フルニ，元ノ角 B 及ビ C ハ其對應角ノ補角ニシテ邊 BDC ハ 360° ト邊 BEC トノ差ニ等シ。故ニ，球面三角形 ABDC ノ代リニ各邊ガ 180度ヨリ小ナル ABEC ニ就キ研究スレバ, ABDC ニ關スル事項ヲ知ルコトヲ得ベシ。

シカラバ球面三角形ノ各邊ハ 180°ヨリ小ナルモノト假定スルコトヲ得ルヲ以テ，ソレニ對應スル三面角ハ總ベテ凸ナリ。

次ニ，球面三角形ニ關スル一，二ノ性質ヲ述ベン。

〔定理 1〕球面三角形ノ任意ノ二邊ノ和ハ他ノ邊ヨリ大ナリ。

何故ナラバ，凸三面角ノ任意ノ二ツノ面角ノ和ハ他ノ面角ヨリ大ニシテ，各邊ハソレニ對應スル面角ニテ表ハサルルヲ以テナリ。



〔定理 3〕球面三角形ノ各邊ノ和ハ四直角ヨリ小ナリ。

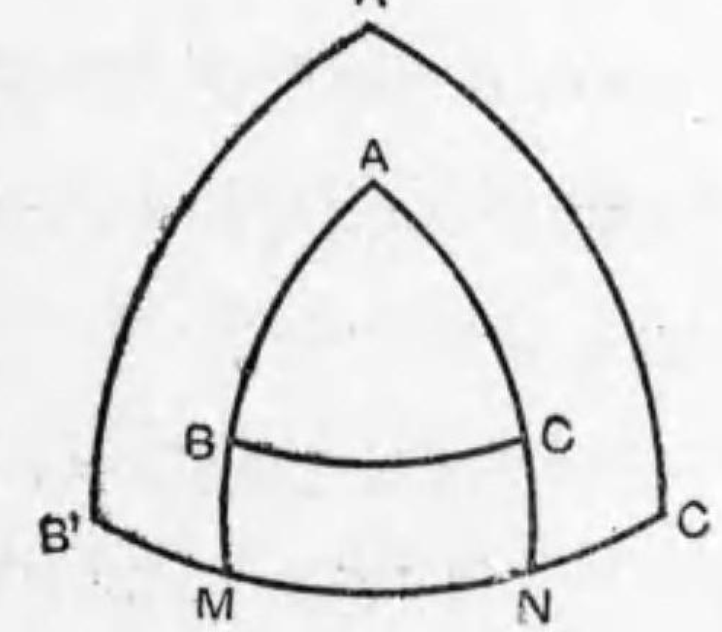
凸三面角ノ三ツノ面角ノ和ハ四直角ヨリ小ナルコトニ注意シ，容易ニ證明セラルベシ。

### 5. 極三角形

球面三角形 ABC ニ於テ，邊 BC, CA, AB ノ極ヲ夫々 A′, B′, C′ トシ，且ツ A, A′ ハ邊 BC ニ對シ同側ニ; B,B′ ハ邊 CA ニ對シ同側ニ; C,C′ ハ邊 AB ニ對シ同側ニアルモノトス。此トキ球面三角形 A′B′C′ ヲ ABC ノ**極三角形**トイフ。

〔定理 3〕球面三角形 ABC ノ極三角形ヲ A′B′C′ トスレバ，ABC ハ A′B′C′ ノ極三角形ナリ。

此定理ハ，極及ビ極三角形ノ定義ヲ用ヒテ容易ニ證明セラルベシ。




〔定理 4〕二ツノ球面三角形ニ於テ，一ツガ他ノ極三角形ナルトキ，一ツノ三角形ノ各角(又ハ邊)ガ他ノ三角形ノソレニ對應スル邊(又ハ角)ト互ニ補角ヲナス。

ABC, A'B'C' ヲ互ニ他ノ極三角形トス。次ニ

$$A=180^\circ-a'$$

ナルコトヲ證明セン。

弧 AB, AC ヲ延長シテ，弧 B'C' トノ交點ヲ夫々 M, N トス。B' ハ弧 ACN ノ極ナルヲ以テ

$$\text{弧 } B'N=90^\circ$$

同様ニ，

$$\text{弧 } MC'=90^\circ$$

$$\therefore \text{弧 } B'N+\text{弧 } MC'=180^\circ$$

$$\therefore \text{弧 } B'N+\text{弧 } NC'=\text{弧 } MN=180^\circ$$

然ルニ

$$\text{弧 } B'N+\text{弧 } NC'=\text{弧 } B'C'=a'$$

$$\text{弧 } MN=\angle A \text{ ノ測度}$$

$$\therefore a'+A=180^\circ$$

$$\therefore A=180^\circ-a'$$

〔定理 5〕球面三角形ノ三角ノ和ハ二直角ヨリ大ニシテ六直角ヨリ小ナリ。

ABC ヲ球面三角形トス。今

$$180^\circ<\angle A+\angle B+\angle C<540^\circ$$

ナルコトヲ證明セントス。



ABC ノ極三角形 A'B'C' ヲ作ル。シカラバ

$$\angle A=180^\circ-a',\quad \angle B=180^\circ-b',\quad \angle C=180^\circ-c'.$$

此三式ヲ加フレバ

$$\angle A+\angle B+\angle C=540^\circ-(a'+b'+c')$$

又，定理 (2) ニヨリ

$$0^\circ<a'+b'+c'<360^\circ$$

$$\therefore \angle A+\angle B+\angle C>540^\circ-360^\circ=180^\circ$$

$$\angle A+\angle B+\angle C<540^\circ$$

故ニ，

$$180^\circ<\angle A+\angle B+\angle C<540^\circ$$

球面三角形ノ三ツノ角ノ和ヨリ 180° ヲ引去リシ殘リヲ此三角形ノ**球面過剰**トイフ。

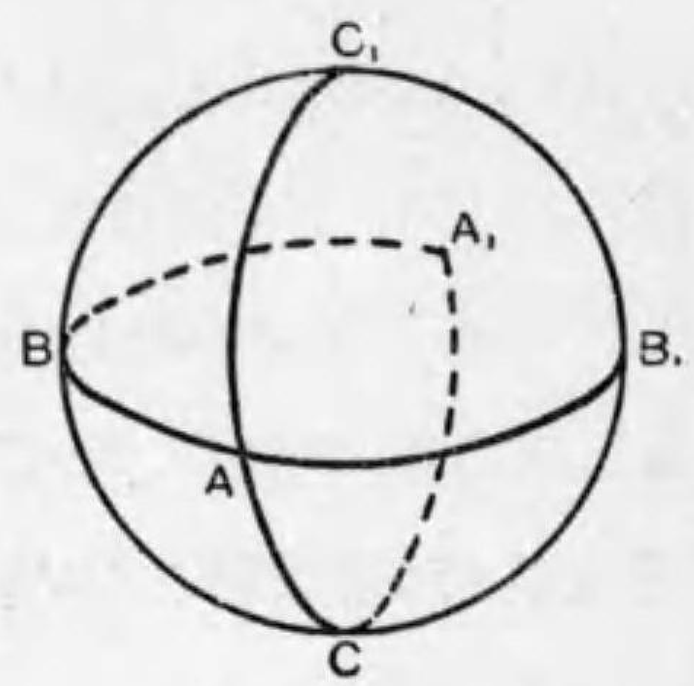
### 6. 月形及ビ球面三角形ノ面積

球ノ一ツノ直徑ノ兩端ヲ通ル二ツノ大圓ノ弧ニテ圍マレタル球面上ノ圖形ヲ**月形**トイヒ，直徑ノ端點ヲ月形ノ頂點，大圓ノ弧ガ頂點ニ於テナス球面角ヲ月形ノ**角**トイフ。

今，A,B ヲ各頂點トシ，其角ガ 1° ノ月形ヲ考フレバ，之レノ面積ハ球ノ表面積ノ三百六十分ノ一ナリ。若シモ，

A,B ヲ極トスル大圓ノ弧 CD ヲ作レバ，月形 ACBD ハ二ツノ等シキ球面三角形ニ分タルベシ。是等ノ一ツノ三角形ノ面積ヲ 1 **球面度** (*Spherical degree*) トイヒ，球面上ノ圖形ノ面積ヲ測ル單位トス。球ノ表面積ハ 720 球面度ナリ。

同一又ハ等シキ球面上ノ二ツノ月形ノ面積ハ，其等ノ角ニ比例スルヲ以テ，角 $A^\circ$ ノ月形ノ面積ハ 2A 球面度ナリ。




次ニ，球面三角形ノ面積ヲ求メン。

弧 AB, BC, CA ヲ含ム大圓ヲ作リ，A ヲ通ル二ツノ弧ノ交點ヲ $A_1$, B ヲ通ル二ツノ弧ノ交點ヲ $B_1$, C ヲ通ル二ツノ弧ノ交點ヲ $C_1$ トス。弧 $AC_1$, $A_1C$ ハ共ニ半圓周ト AC トノ差ニ等シ。故ニ

$$AC_1=A_1C$$

同様ニ，

$$BC=B_1C_1,\qquad AB_1=A_1B$$

故ニ，二ツノ球面三角形 $A_1BC$, $AB_1C_1$ ハ合同ナリ。故ニ

月形 $ABA_1C=ABC+AB_1C_1=2A$ 球面度



同様ニシテ

月形 $BAB_1C=ABC+AB_1C=2B$ 球面度

月形 $CAC_1B=ABC+AC_1B=2C$ 球面度

是等三式ヲ加フレバ

$2ABC+$半球面 $CBC_1B_1=2(A+B+C)$

∴ 球面三角形 $ABC=(A+B+C-180)$ 球面度

故ニ，球面度ニテ表ハセル球面三角形ノ面積ハ，其球面過剰ニ等シ。

半徑 $r$ ノ球ノ表面積ハ $4\pi r^2$ ナリ。又，球ノ表面積ノ球面度ハ 720 ナリ。故ニ，1 球面度ノ面積ハ

$$\frac{4\pi r^2}{720} \quad 即チ \quad \frac{\pi r^2}{180}$$

故ニ，球面三角形ノ面積ハ次ノ公式ニテ與ヘラルル。

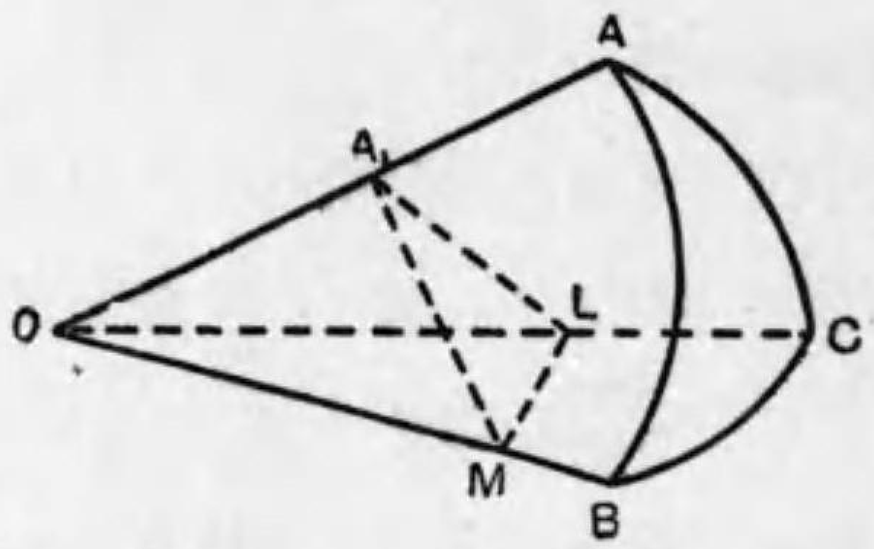
球面三角形 $ABC=\dfrac{(A+B+C-180)\pi r^2}{180}$

# 第二章
## 球面三角形ノ邊ト角トノ關係

### 1. 餘弦法則

ABC ヲ球面 O 上ノ球面三角形トシ，二邊 $b, c$ ハ鋭角ナリトス。

OA 上ノ任意ノ點 $A_1$ ニ於テ OA ニ垂直ナル平面ヲ作リ，平面 OAC, OAB, OBC トノ交ハリヲ夫々




$A_1L$, $A_1M$, ML トス。シカラバ $MA_1L$ ハ二面角 BOAC ノ平面角ナルヲ以テ，ソレハ球面角 A ノ測度ヲ表ハス。又，角 $OA_1M$, $OA_1L$ ハ作圖ニヨリ共ニ直角ナリ。

三角形 $MA_1L$ ニ於テ

$$ML^2 = MA_1^2 + LA_1^2 - 2MA_1 \cdot LA_1 \cos A$$

三角形 MOL ニ於テ

$$ML^2 = MO^2 + LO^2 - 2MO \cdot LO \cos a$$

故ニ，上ノ二式ヲ邊々減ジ，移項スレバ



$$2MO \cdot LO \cos a = MO^2 - MA_1^2 + LO^2 - LA_1^2$$
$$+ 2MA_1 \cdot LA_1 \cos A \qquad (1)$$

然ルニ，三角形 $MOA_1$, $LOA_1$ ハ直角三角形ナルヲ以テ

$$MO^2 - MA_1^2 = OA_1^2, \quad LO^2 - LA_1^2 = OA_1^2$$

是等ノ値ヲ (1) ニ代入スレバ

$$MO \cdot LO \cos a = OA_1^2 + MA_1 \cdot LA_1 \cos A$$

$$\therefore \quad \cos a = \frac{OA_1}{MO} \cdot \frac{OA_1}{LO} + \frac{MA_1}{MO} \cdot \frac{LA_1}{LO} \cos A$$

然ルニ

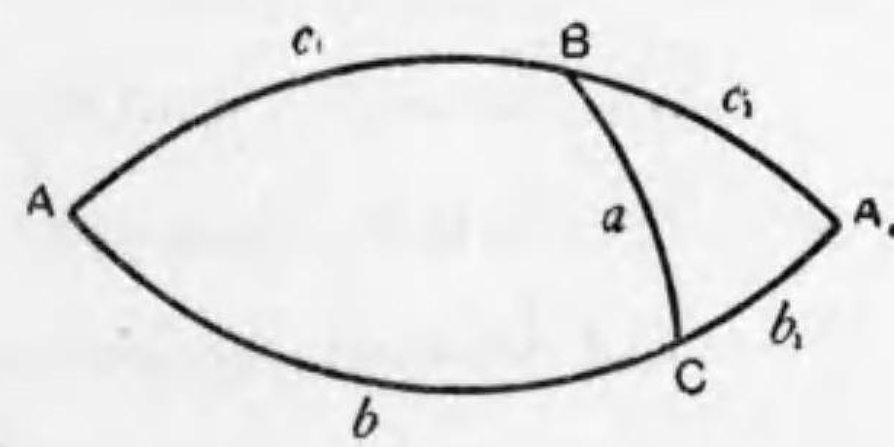
$$\frac{OA_1}{MO} = \cos MOA_1 = \cos c, \quad \frac{MA_1}{MO} = \sin MOA_1 = \sin c,$$

$$\frac{OA_1}{LO} = \cos LOA_1 = \cos b, \quad \frac{LA_1}{LO} = \sin LOA_1 = \sin b,$$

$$\therefore \quad \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \qquad (2)$$

圖ニ於テ，直角三角形 $LOA_1$, $MOA_1$ ヲ作圖シ得ルタメニハ，二邊 $b, c$ ハ鋭角ナルコトヲ要スルモ，公式 (2) ハ一般ナル球面三角形ニ關シテモ成立ス。次ニ，ソレヲ說明セン。

先ヅ，ABC ヲ $b$ 及ビ $c$ ガ共ニ鈍角ナル球面三角形トス。




二ツノ弧 AB, AC

ヲ延長シテ月形 $AA_1$ ヲ作レバ, 三角形 $A_1BC$ ニ於テ, $b_1, c_1$ ハ鋭角ニシテ, 且ツ夫々 $180°-b, 180°-c$ ニ等シ。故ニ, 公式(2)ハ此三角形ニ關シテ成立ス。即チ

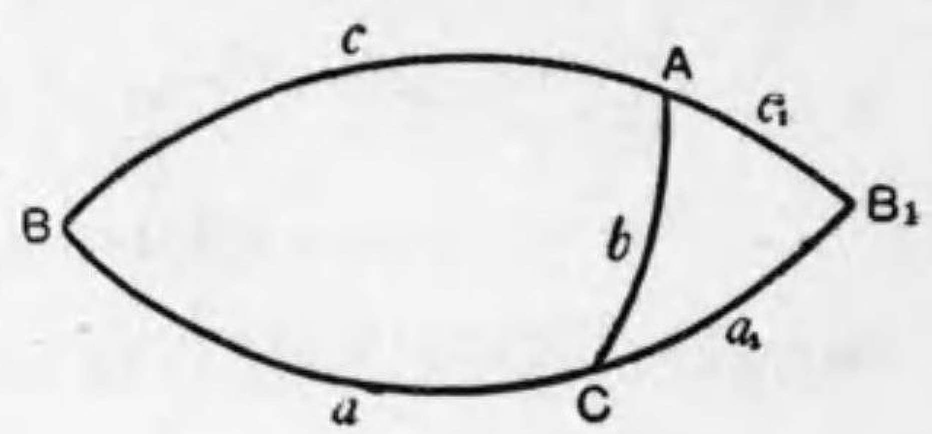
$$\cos a=\cos(180°-b)\cos(180°-c)$$
$$+\sin(180°-b)\sin(180°-c)\cos A$$

$$\therefore\quad \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

故ニ, $b, c$ ガ共ニ鈍角ナル球面三角形 ABC ニ關シテモ公式(2)ハ成立ス。

次ニ, ABC ヲ $b$ ハ鋭角, $c$ ハ鈍角ナル球面三角形トス。

弧 BA, BC ヲ延長シテ月形 $BB_1$ ヲ作レバ, 球面三角形 $AB_1C$ ニ於テ, $b, c_1$ ハ鋭角ナリ。故ニ




$$\cos a_1=\cos b\cos c_1+\sin b\sin c_1\cos CAB_1$$

然ルニ

$$a_1=180°-a,\qquad c_1=180°-c$$
$$CAB_1=180°-CAB=180°-A$$

$$\therefore\quad \cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

故ニ, 任意ノ球面三角形ニ就キテ



$$\left.\begin{aligned}&\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ &\text{同樣ニ,}\\ &\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\\ &\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I})$$

之レヲ球面三角法ノ**餘弦法則**トイフ。

公式(I)ハ任意ノ球面三角形ニ關シテ成立スルヲ以テ, 與ヘラレタル三角形 ABC ノ極三角形 $A'B'C'$ ニ就テモ成立ス。故ニ

$$\cos a'=\cos b'\cos c'+\sin b'\sin c'\cos A'$$

然ルニ

$$a'=180°-A,\quad b'=180°-B,\quad c'=180°-C$$
$$A'=180°-a$$

故ニ

$$-\cos A=(-\cos B)(-\cos C)+\sin B\sin C(-\cos a)$$

依テ

$$\left.\begin{aligned}&\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\\ &\text{同樣ニ,}\\ &\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b\\ &\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{II})$$

## 2. 正弦法則

公式(I)ノ第一式ヨリ

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

$$\therefore\quad 1-\cos^2 A=1-\frac{(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$\sin^2 A=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}}{\sin a\sin b\sin c}$$

玆ニ A, $a$ ハ共ニ 180° ヨリ小ナルヲ以テ根號 $\theta$ ノ前ノ符號ハ正ヲトレリ。

上式ノ右邊ハ文字 $a, b, c$ ニ就キ對稱式ナリ。卽チ,右邊ノ式ハ文字 $a, b, c$ ニ於ケル任意ノ二ツヲ交換シテモ其値ハ變ラズ。故ニ,公式(I)ノ第二又ハ第三式ヲ元トシテ,上述ト同ジヤウニスレバ $\frac{\sin B}{\sin b}$ 又ハ $\frac{\sin C}{\sin c}$ ヲ左邊トシ,右邊ハ上式ノ右邊ト完ク同一ナル等式ヲ得ベシ。故ニ

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}\qquad\text{(III)}$$

之レヲ,球面三角法ノ**正弦法則**トイフ。



## 3. 正切ノ法則

公式(I)ノ第一式ヨリ

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$

又,平面三角法ノ公式ヨリ

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

此式ノ $\cos A$ ノ代リニ上ノ式ヲ代入スレバ

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{1-\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}}{\sqrt{1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos b\cos c+\sin b\sin c-\cos a}{\cos a-(\cos b\cos c-\sin b\sin c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{\cos a-\cos(b+c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b-c)}{\cos(b+c)-\cos a}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b-c)\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin\frac{1}{2}(b+c+a)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}}$$

今, $a+b+c=2s$

トオケバ

$$-a+b+c=2s-2a$$

$$\tfrac{1}{2}(-a+b+c)=s-a$$

$$\tfrac{1}{2}(a-b+c)=s-b$$

$$\tfrac{1}{2}(a+b-c)=s-c$$

故ニ,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}}$$

$$=\frac{1}{\sin(s-a)}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

又,

$$K=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

トオケバ, K ハ $a, b, c$ ニ關シ對稱ナリ。

同様ニ,

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\frac{K}{\sin(s-a)}\\ \tan\frac{B}{2}&=\frac{K}{\sin(s-b)}\\ \tan\frac{C}{2}&=\frac{K}{\sin(s-c)}\end{aligned}\right\}\qquad\text{(III)}$$

### 4. ねぴーあノ比例式

公式(III)ノ初メノ二式ヲ邊々乘ズレバ

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=\frac{K^2}{\sin(s-a)\sin(s-b)}$$

此式ノ左邊ノ *tangent* ヲ *sine* ト *cosine* トノ比ニ變形シ, 右邊ニ $K^2$ ノ値ヲ代入スレバ



$$\frac{\sin\frac{A}{2}\,\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin(s-c)}{\sin s}\qquad(1)$$

$$\therefore\quad 1-\frac{\sin\frac{A}{2}\,\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}}=1-\frac{\sin(s-c)}{\sin s}$$

$$\frac{\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\,\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}}=\frac{\sin s-\sin(s-c)}{\sin s}$$

$$\therefore\quad \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}}=\frac{2\cos\frac{1}{2}(2s-c)\sin\frac{C}{2}}{\sin s}\qquad(2)$$

(1) ノ兩邊ニ 1 ヲ加ヘ, 上ト同様ニシテソレヲ書キ直ホセバ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{A}{2}\,\cos\frac{B}{2}}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(2s-c)\cos\frac{C}{2}}{\sin s}\qquad(3)$$

(2) ヲ (3) ニテ除シ, 且ツ

$$2s-c=(a+b+c)-c=a+b$$

ナルコトニ注意スレバ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\cot\frac{1}{2}(a+b)\tan\frac{C}{2}$$

故ニ,

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{1}{2}(a+b)} \qquad (\mathrm{V}_a)$$

又, 公式(IIII)ヨリ

$$\frac{\tan\frac{A}{2}}{\tan\frac{B}{2}}=\frac{\sin(s-b)}{\sin(s-a)}$$

$$\therefore \quad \frac{\sin\frac{A}{2}\ \cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\ \sin\frac{B}{2}}=\frac{\sin(s-b)}{\sin(s-a)} \qquad (4)$$

(1) ニ施セル手續ヲ (4) ニ適用シテ, 次ノ等式ヲ得。

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{1}{2}(a-b)} \qquad (\mathrm{V}_b)$$

公式$(\mathrm{V}_a)$ハ任意ノ球面三角形ニ關シテ成立スルヲ以テ, 與ヘラレタル三角形 ABC ノ極三角形 A′B′C′ ニ關シテモ成立ス。卽チ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+B')}{\cos\frac{1}{2}(A'-B')}=\frac{\tan\frac{C'}{2}}{\tan\frac{1}{2}(a'+b')} \qquad (5)$$

然ルニ,



$$\frac{1}{2}(A'+B')=\frac{1}{2}(180^\circ-a+180^\circ-b)=180^\circ-\frac{1}{2}(a+b)$$

$$\frac{1}{2}(A'-B')=\frac{1}{2}(180^\circ-a-180^\circ+b)=-\frac{1}{2}(a-b)$$

$$\frac{1}{2}(a'+b')=\frac{1}{2}(180^\circ-A+180^\circ-b)=180^\circ-\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\frac{C'}{2}=\frac{1}{2}(180^\circ-C)=90^\circ-\frac{C}{2}.$$

是等ノ値ヲ (5) ニ代入スレバ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{1}{2}(A+B)} \qquad (\mathrm{V}_c)$$

同樣ニ, 公式$(\mathrm{V}_b)$ヲ極三角形ニ適用シテ

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}=\frac{\cot\frac{C}{2}}{\tan\frac{1}{2}(A-B)} \qquad (\mathrm{V}_d)$$

上ニ導入セル公式$(\mathrm{V}_a)$, $(\mathrm{V}_b)$, $(\mathrm{V}_c)$, $(\mathrm{V}_d)$ヲ**ねぴーあ** (*Napier*) ノ**比例式**トイフ。是等各公式ニ於テ, 文字ノ交換ヲ行ヘバ二ツ宛ノ新ラシキ公式ガ得ラルベク, 從ツテ都合 12 個ノ公式ガ得ラルル。

### 5. 種類ノ法則

與ヘラレタル二角ニ於テ, 其等ガ共ニ鋭角ナルカ, 又ハ鈍角ナルトキハ, 此二角ハ**同種類**ナリトイヒ, 一ツハ

銳角ニシテ，他ハ鈍角ナルトキハ，異種類ナリトイフ。

球面三角形ノ任意ノ二邊ノ和ノ半及ビ其對應角ノ和ノ半ハ同種類ナリ。

何故ナラバ，公式($\mathrm{V}_a$)ニヨリ

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{1}{2}(a+b)}$$

球面三角形ノ名角及ビ各邊ハ何レモ $180°$ ヨリ小ト見做スコトヲ得ルニヨリ

$$\frac{1}{2}(A+B),\qquad \frac{1}{2}(a+b)$$

ハ共ニ $180°$ ヨリ小ニシテ，

$$\frac{1}{2}(A-B),\qquad \frac{C}{2}$$

ハ共ニ $90°$ ヨリ小ナリ。

故ニ，上ノ等式ノ右邊ノ分子及ビ左邊ノ分母ハ共ニ正數ナリ。

故ニ，

$$\cos\frac{1}{2}(A+B),\qquad \tan\frac{1}{2}(a+b)$$

ハ共ニ正數ナルカ，又ハ共ニ負數ナリ。從ツテ，$\frac{1}{2}(A+B)$ ト $\frac{1}{2}(a+b)$ トハ同種類ナリ。



# 第三章
## 直角球面三角形

### 1. 直角球面三角形ニ關スル公式

一角ガ直角ナル球面三角形ヲ**直角球面三角形**トイヒ，三ツノ角ガ何レモ直角ナラザルモノヲ一般球面三角形，又ハ**斜角球面三角形**トイフ。

直角球面三角形 ABC ニ於テ $C=90°$ トシ，重要ナル公式ヲ導入セントス。

公式(I)ノ第三式ニ於テ $C=90°$ トオケバ

$$\cos c=\cos a\cos b \tag{1}$$

公式(II)ノ第三式ニ於テ $C=90°$ トオケバ

$$0=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c$$

$$\therefore\quad \cos c=\cot A\cot B \tag{2}$$

公式(II)ノ始メノ二式ニ於テ $C=90°$ トオケバ

$$\cos A=\sin B\cos a \tag{3}$$

$$\cos B=\sin A\cos b \tag{4}$$

正弦ノ法則(III)ニ於テ $C=90°$ トオケバ

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{1}{\sin c}$$

$$\therefore \quad \sin a=\sin c \sin A \qquad (5)$$

$$\sin b=\sin c \sin B$$

$$\sin a=\frac{\sin b \sin A}{\sin B}$$

此式ニ(4)ノ $\sin A$ ノ値ヲ代入シテ

$$\sin a=\tan b \cot B \qquad (7)$$

同様ニ，

$$\sin b=\tan a \cot A \qquad (8)$$

又，(8)ヨリ

$$\tan a=\sin b \tan A$$

$$\therefore \quad \frac{\sin a}{\cos a}=\frac{\sin b \sin A}{\cos A}$$

此式ニ(5)及ビ(1)ノ $\sin a$ 及ビ $\cos a$ ノ値ヲ代入スレバ

$$\frac{\sin c \sin A \cos b}{\cos c}=\frac{\sin b \sin A}{\cos A}$$

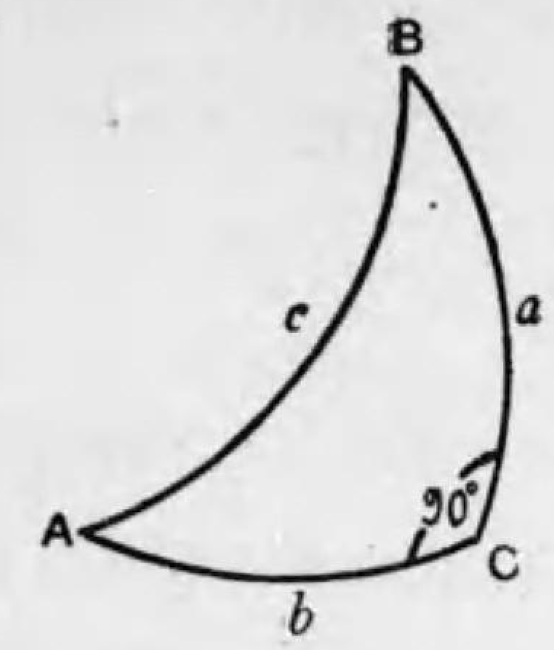
$$\therefore \quad \cos A=\tan b \cot c \qquad (9)$$

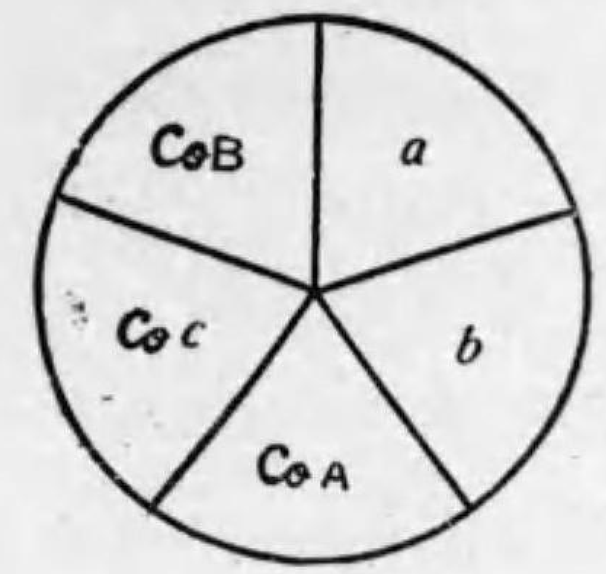
同様ニ，

$$\cos B=\tan a \cot c \qquad (10)$$

以上記載セル(1)乃至(10)ノ10個ノ公式ハ直角球面三角形ノ解法ニ於テ重要ナルモノナルガ，此公式ノ記憶法トシテ，ねぴーあノ圓部分ノ法則(*Rule of circular parts*)アリ。次ニ，ソレヲ説明セン。






圖ノ如クーツノ圓ヲ五ツノ部分ニ分チ，各部分ニ順ニ $a$, co−B, co−$c$, co−A, $b$ ト記ス。玆ニ，記號 co−B ハ角 B ノ餘角卽チ 90°−B ヲ表ハス。

此五ツノ圓部分ノ中ノ任意ノ一ツヲ取リ出シ，之レヲ中央部，ソノ兩隣リノ部分ヲ隣部分，殘リノ部分ヲ對部分トイヘバ，公式(1)−(10)ハ次ノ法則ニ從フ。

(第一) 中央部ノ sine ハ隣部分ノ *tangent* ノ積ニ等シ。

(第二) 中央部ノ sine ハ對部分ノ cosine ノ積ニ等シ。

例ヘバ，公式(4)ヲ求メンニハ，co−B ヲ中央部トシ，$b$, co−A ハ對部分ナルコトニ注意シテ，法則(第二)ヲ用ヒ

$$\sin(90°-B)=\cos(90°-A)\cos b$$

$$\therefore \quad \cos B=\sin A=\cos b$$

又，公式(10)ヲ求メンニハ，co−B ヲ中央部トシ，$a$, co−$c$ ハ隣部分ナルコトニ注意シテ法則(第一)ニ從ヒ

$$\sin(90°-B)=\tan a\tan(90°-c)$$

$$\therefore\ \cos B=\tan a\cot c$$

### 2. 種類ノ法則

(第一)直角球面三角形ノ一邊ト其對角トハ同種類ナリ。

(第二)直角球面三角形ノ斜邊ガ鋭角ナルトキハ，他ノ二邊ハ同種類ニシテ，若シモ斜邊ガ鈍角ナルトキハ他ノ二邊ハ異種類ナリ。

**(第一)ノ證明**

$$\sin b=\tan a\cot A.$$

$b$ ハ 180° ヨリ小ナルニヨリ $\sin b$ ハ正數ナリ。故ニ $\tan a$ ト $\cot A$ トハ同符號，從ツテ $a$ ト A トハ同種類ナリ。

**(第二)ノ證明**

$$\cos c=\cos a\cos b$$

若シ，$c$ ガ 90° ヨリ小ナラバ $\cos c$ ハ正數ナリ。故ニ $\cos a$ ト $\cos b$ トハ同符號，從ツテ $a$ ト $b$ トハ同種類ナリ。又，$c$ ガ 90° ヨリ大ナラバ，$\cos c$ ハ負數ナリ。故ニ $\cos a$ ト $\cos b$ トハ異符號，從ツテ $a$ ト $b$ トハ異種類ナリ。

### 3. 直角球面三角形ノ解法

直角球面三角形ノ二ツノ原素(C=90° ノ外ニ)ガ與ヘラ



ルレバ，殘リノ原素ハねぴーあノ圓部分ノ法則及ビ種類ノ法則ヲ用ヒテ算出スルコトヲ得。次ニ，例ヲ以テ説明スベシ。

**例 1.** $a=47°30'40''$

$c=120°20'30''$

ヲ與ヘテ他ノ原素ヲ求メヨ。

此場合ニ，解法ニ用フル公式ハ

$$\sin A=\frac{\sin a}{\sin c},\qquad \cos B=\tan a\cot c$$

$$\cos b=\frac{\cos c}{\cos a}.$$

$c$ ハ鈍角ナルヲ以テ $a$ ト $b$ トハ異種類ナリ。故ニ，$b$ ト B トハ鈍角ニシテ，A ハ鋭角ナリ。

$$\log\sin a=9.86771$$
$$\log\sin c=9.93603$$
$$\log\sin A=9.93168$$
$$\therefore\ A=58°41'55''$$

$$\log\tan a=0.03812$$
$$\log\cot c=9.76740$$
$$\log\cos B=9.80552$$
$$\therefore\ B=180°-15°16'50''$$
$$=129°43'10''$$

$$\log\cos c=9.70342$$
$$\log\cos a=9.82959$$
$$\log\cos b=9.87383$$
$$\therefore\ b=180°-41°35'35''$$
$$=138°24'25''$$

〔驗〕 $\cos B=\cos b\sin A$

ノ右邊ニ前ニ求メタル値ヲ代入スレバ

$$\log\cos b=9.87383$$
$$\log\sin \mathrm{A}=9.93168$$
$$\overline{\log\cos \mathrm{B}=9.80551}$$

**例 2.** $a=103°12'$, $\mathrm{A}=97°24'$

ヲ與ヘテ他ノ原素ヲ求メヨ。

此場合ニ用フル公式ハ

$$\sin b=\tan a\cot \mathrm{A},\qquad \sin \mathrm{B}=\frac{\cos \mathrm{A}}{\cos a}$$

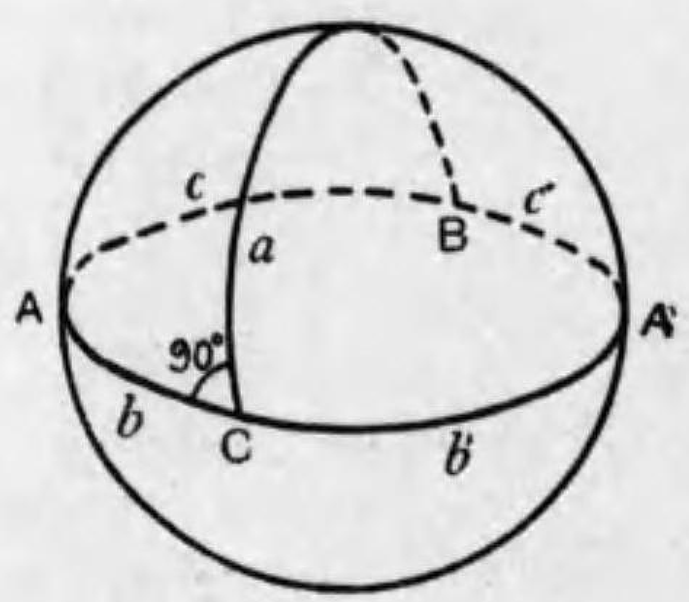
$$\sin c=\frac{\sin a}{\sin \mathrm{A}}$$

$$\log\tan a=0.62977$$
$$\log\cot \mathrm{A}=9.11353$$
$$\overline{\log\sin b=9.74330}$$

$$\log\cos \mathrm{A}=9.10990$$
$$\log\cos a=9.35860$$
$$\overline{\log\sin \mathrm{B}=9.75130}$$

$$\log\sin a=9.98837$$
$$\log\sin \mathrm{A}=9.99637$$
$$\overline{\log\sin c=9.99200}$$

$a$ ハ鈍角ナルニヨリ，若シモ $b$ ガ鈍角ナラバ，$c$ ハ鋭角ニシテ，若シモ $b$ ガ鋭角ナラバ，$c$ ハ鈍角ナルヲ要ス。故ニ，此場合ニハ，與ヘラレタル原素 $a$, A ヲ有スル三角形ハ二ツアリ。是等ハ，圖ノ如ク合シテ角 A ノ月形ヲ作ル。求ムル二ツノ解ハ次ノ如シ。






(1) $b=33°37'25''$

$\mathrm{B}=34°20'5''$

$c=100°58'$

(2) $b'=180°-b=146°22'35''$

$\mathrm{B}=180°-\mathrm{B}=145°39'55''$

$c'=180°-c=79°2'$

〔驗〕

$$\sin b=\sin c\sin \mathrm{B}$$

$$\log\sin c=9.99200$$
$$\log\sin \mathrm{B}=9.75130$$
$$\overline{\log\sin b=9.74330}$$

## 4. 象限三角形

一邊ガ一象限，卽チ 90° ナル球面三角形ヲ**象限三角形**トイフ。

象限三角形ニテハ任意ノ二ツノ原素 ($c=90°$ ノ外ニ) ヲ知レバ，他ノ原素ハ求メラル。其求メ方ヲ次ニ說明セン。

先ヅ，與ヘラレタル象限三角形ノ極三角形ヲ考フルニ $c=90°$ ナレバ其對應角 C′ ハ 90° ナリ。故ニ，象限三角形ノ極三角形ハ直角三角形ナリ。

依テ，斯ル極三角形ヲ直角球面三角形ノ解法ニ倣ヒテ解キ，其得タル解ノ補角ヲ求ムレバ，ソレハ與ヘラレタル象限三角形ノ求ムル原素ナリ。或ハ，象限三角形ニ關

スル公式ヲ用ヒテ直接ニ解クモ可ナリ。

象限三角形ニ關スルねぴーあノ圓部分ノ法則ヲ適用スルニハ，五ツノ圓部分ニ順ニ

$$A,\ B,\ 90^\circ-a,\ -(90^\circ-C),\ 90^\circ-b$$

ヲ置ケバヨシ。又，種類ノ法則ハ次ノ如シ。

(第一) 象限三角形ノ邊ト其對應角トハ同種類ナリ。

(第二) 象限ニ等シキ邊ニ對スル角ガ鋭角ナルトキハ，他ノ二ツノ角ハ異種類ニシテ，鈍角ナルトキハ同種類ナリ。



# 第四章
## 一般球面三角形ノ解法

### 1. 一般球面三角形ノ解法

一般球面三角形ノ解法ニハ次ノ六ツノ場合アリ。

(1) 三邊 $a, b, c$ ガ與ヘラレタル場合。

(2) 三角 A, B, C ガ與ヘラレタル場合。

(3) 二邊ト夾角，例ヘバ $a, b$, C ガ與ヘラレタル場合。

(4) 一邊ト其兩端ノ二角，例ヘバ $c$, A, B ガ與ヘラレタル場合。

(5) 二邊ト其ノ一對角，例ヘバ $a, b$, A ガ與ヘラレタル場合。

(6) 二角ト其一對邊，例ヘバ A, B, $a$ ガ與ヘラレタル場合。

次ニ，是等ノ各場合ヲ例題ヲ以テ説明セン。

### 2. 三邊 $a, b, c$ ガ與ヘラレタル場合

公式(Ⅲ):

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{K}{\sin(s-a)},\qquad \tan\frac{B}{2}=\frac{K}{\sin(s-b)},$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{K}{\sin(s-c)},$$

$$K=\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}$$

ヲ用ヒテ，$\frac{A}{2}$，$\frac{B}{2}$，$\frac{C}{2}$ヲ求ム。茲ニ，注意スベキコトハ，角 A, B, C ハ何レモ 180° ヨリ小ナレバ，$\frac{A}{2}$，$\frac{B}{2}$，$\frac{C}{2}$ハ 90° ヨリ小ナルコトナリ。故ニ，此場合ニハ，種類ノ法則ヲ用フル必要ナシ。又，A, B, C ノ値ノ精確度ヲ調ベルニハ，A, B, C ヲ含ム他ノ公式ヲ用フレバヨシ。

ソレニハ正弦ノ法則(Ⅲ)

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

ガ最モ便宜ナリ。

**例.** $a=58°$,　$b=80°$,　$c=96°$

ヲ知リテ，A, B, C ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{rl}
a=58° & s-a=59° \\
b=80° & s-b=37° \\
c=96° & s-c=21° \\
\hline
2s=234° & s=117° \\
s=117° &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log\sin(s-a)=9.93307 \\
\log\sin(s-b)=9.77946 \\
\log\sin(s-c)=9.55433 \\
\hline
9.26686 \\
\log s=9.94988
\end{array}$$



$$\log K^2=9.31698$$

$$\log K=9.65849$$

$$\log\tan\frac{A}{2}=9.72542$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=9.87903$$

$$\log\tan\frac{C}{2}=0.10416$$

$$\frac{A}{2}=27°59'10'' \qquad A=55°58'26''$$

$$\frac{B}{2}=37°7'20'' \qquad B=74°14'40''$$

$$\frac{C}{2}=51°48'20'' \qquad C=103°36'40''$$

〔驗〕

$$d=\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\begin{array}{r}
\log\sin A=9.91843 \\
\log\sin a=9.92842 \\
\hline
\log d=9.99001
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log\sin B=9.98337 \\
\log\sin b=9.99335 \\
\hline
\log d=9.99001
\end{array}$$

$$\begin{array}{r}
\log\sin C=9.98763 \\
\log\sin c=9.99761 \\
\hline
\log d=9.99002
\end{array}$$

### 3. 三角 A, B, C ガ與ヘラレタル場合

A, B, C ヲ知リテ三邊 $a, b, c$ ヲ求ムルニハ，次ノ如クスレバヨシ。

球面三角形ノ各角ハ，其極三角形ノ對應邊ノ補角ナルコトニ注意シ，此場合ニ，極三角形ノ三邊ハ

$$180°-A,\quad 180°-B,\quad 180°-C$$

ナルベシ。

故ニ，上ノ場合ニ倣ヒテ極三角形ノ各角ヲ求ムルコトヲ得。其ノ各角ノ補角ハ求ムル三邊ナリ。

**例** $A=78°40'$，$B=63°50'$，$C=46°20'$ ヲ知リテ $a, b, c$ ヲ求メヨ。

極三角形ニ於テ

$$a'=101°20'$$
$$b'=116°10'$$
$$c'=133°40'$$
$$2s'=350°70'$$
$$s'=175°35'$$

$$(s-a)'=74°15'$$
$$(s-b)'=59°25'$$
$$(s-c)'=41°55'$$
$$s'=175°35'$$

$$\log\sin(s-a)'=9.98338$$
$$\log\sin(s-b)'=9.93495$$
$$\log\sin(s-c)'=9.82481$$
$$9.74314$$

$$\log\sin s'=8.88654$$
$$\log K'^2=0.85660$$
$$\log K=0.42830$$



$$\log\tan\frac{A'}{2}=0.44492$$
$$\log\tan\frac{B'}{2}=0.49335$$
$$\log\tan\frac{C'}{2}=0.60349$$

$$\frac{A'}{2}=70°15'10''\qquad A'=140°30'20''$$
$$\frac{B'}{2}=72°11'50''\qquad B'=144°23'40''$$
$$\frac{C'}{2}=76°0'30''\qquad C'=152°1'$$

故ニ，元ノ三角形ニ於テ

$$a=180°-A'=39°29'40''$$
$$b=180°-B'=35°36'20''$$
$$c=180°-C'=27°59'$$

〔驗〕

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\log\sin A=9.99145$$
$$\log\sin a=9.80346$$
$$0.18799$$

$$\log\sin B=9.95304$$
$$\log\sin b=9.76507$$
$$0.18796$$

$$\log\sin C=9.85936$$
$$\log\sin c=9.67137$$
$$0.18798$$

### 4. 二邊ト夾角，$a, b, C$ ガ與ヘラレタル場合

ねぴーあノ比例式：

$$\tan\frac{1}{2}(A+B)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cot\frac{C}{2}}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-B)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\cot\frac{C}{2}}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)\tan\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}$$

ニ於テ第一式及ビ第二式ヲ用ヒテ未知ノ角 A, B ノ和ノ半分及ビ差ノ半分ヲ求ムルコトヲ得。從ツテ，ソレヨリ A, B ハ求メラルル。

次ニ，其ノ A, B ノ値ヲ用ヒテ，第三式ヨリ $\frac{C}{2}$，即チ C ヲ求ムルコトヲ得。

求メテ得タル結果ノ精確度ヲ驗メスニハ，正弦ノ法則ヲ用フレバヨシ。

〔注意〕 $\frac{1}{2}(A-B)$, $\frac{C}{2}$ ハ常ニ銳角ナリ。之レニ反シ，$\frac{1}{2}(A+B)$ ハ $\frac{1}{2}(a+b)$ ガ銳角又ハ鈍角ナルニ從ヒ，銳角又ハ鈍角ナリ。

**例** $c=40°20'$, $a=100°30'$, $B=46°40'$ ヲ知リテ A, C, $b$ ヲ求メヨ，

茲ニ

$$\frac{1}{2}(a+c)=70°25' \qquad \frac{1}{2}(a-c)=30°5'$$

$$\frac{B}{2}=23°20'$$



公式：

$$\tan\frac{1}{2}(A+C)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-c)\cot\frac{B}{2}}{\cos\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\tan\frac{1}{2}(A-C)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-c)\cot\frac{B}{2}}{\sin\frac{1}{2}(a+c)}$$

$$\tan\frac{b}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A+C)\tan\frac{1}{2}(a-c)}{\sin\frac{1}{2}(A-C)}$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(a-c)=9.93717$$

$$\log\cot\frac{B}{2}=0.36516$$

$$0.30233$$

$$\log\cos\frac{1}{2}(a+c)=9.52527$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A+C)=0.77706$$

$$\frac{1}{2}(A+C)=80°30'50''$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(a-c)=9.70006$$

$$\log\cot\frac{B}{2}=0.36516$$

$$0.06522$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(a+c)=9.97412$$

$$\log\tan\frac{1}{2}(A-C)=0.09110$$

$$\frac{1}{2}(A-C)=50°58'$$

故ニ

$$A=131°28'50''$$

$$C=29°32'50''$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(A+C)=9.99402$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(a-c)\ \ =\underline{9.76290}$$

$$9.75692$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(A-C)=\underline{9.89030}$$

$$\log \tan \frac{b}{2}=9.86662$$

$$\frac{b}{2}=36°20'15''$$

$$b=72°40'30''$$

〔驗〕

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\log \sin A=9.87459$$
$$\log \sin a=\underline{9.99267}$$
$$9.88192$$

$$\log \sin B=9.86176$$
$$\log \sin b=\underline{9.97984}$$
$$9.88192$$

$$\log \sin C=9.69297$$
$$\log \sin c=\underline{9.81106}$$
$$9.88191$$

### 5. 一邊ト其兩端ノ二角，例ヘバ $c$, A, B ガ與ヘラレタル場合

此場合ノ解法ハ前ノ場合ト完ク同樣ナリ。

**例** C=110°40′, B=100°36′, $a$=76°38′ ヲ知リテ A, $b$, $c$ ヲ求メヨ。

茲ニ



$$\frac{1}{2}(C+B)=105°38', \qquad \frac{1}{2}(C-B)=5°2'$$

$$\frac{a}{2}=38°19',$$

公式：

$$\tan \frac{1}{2}(c+b)=\frac{\cos \frac{1}{2}(C-B)\tan \frac{a}{2}}{\cos \frac{1}{2}(C+B)},$$

$$\tan \frac{1}{2}(c-b)=\frac{\sin \frac{1}{2}(C-B)\tan \frac{a}{2}}{\sin \frac{1}{2}(C+B)},$$

$$\cot \frac{A}{2}=\frac{\sin \frac{1}{2}(c+b)\tan \frac{1}{2}(C-B)}{\sin \frac{1}{2}(c-b)}$$

$$\log \cos \frac{1}{2}(C-B)=9.99832$$
$$\log \tan \frac{a}{2}=\underline{9.89775}$$
$$9.89607$$

$$\log \cos \frac{1}{2}(C+B)=\underline{9.43053}$$
$$\log \tan \frac{1}{2}(c+b)=0.46554$$
$$\frac{1}{2}(c+b)=180°-71°6'5''=108°53'55''$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(C-B)=8.94317$$
$$\log \tan \frac{a}{2}=\underline{9.89775}$$
$$8.84092$$

$$\log \sin \frac{1}{2}(C+B)=\underline{9.98303}$$
$$\log \tan \frac{1}{2}(c-b)=8.85729$$
$$\frac{1}{2}(c-b)=4°7'5''$$

故ニ，

$c=113°1'$ $\qquad b=104°46'50''$

$$\log\sin\frac{1}{2}(c+b)=9.97593$$
$$\log\tan\frac{1}{2}(C-B)=8.94485$$
$$8.92078$$

$$\log\sin\frac{1}{2}(c-b)=8.85617$$
$$\log\cot\frac{A}{2}=0.06461$$
$$\frac{A}{2}=40°45'15''$$
$$A=81°30'30''$$

〔驗〕 $$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\log\sin A=9.99521$$
$$\log\sin a=9.98807$$
$$0.00714$$

$$\log\sin B=9.99252$$
$$\log\sin b=9.98539$$
$$0.00713$$

$$\log\sin C=9.97111$$
$$\log\sin c=9.96397$$
$$0.00714$$

### 6. 二邊ト其一對角, 例ヘバ $a, b, A$ ガ與ヘラレタル場合

公式(III)ニヨリ

$$\sin B=\frac{\sin b\sin A}{\sin a}$$

之ヲ用ヒテ $\log\sin B$ ノ値ヲ求ムルコトヲ得。併シ $\sin B$



$=\sin(180°-B)$ ナルニヨリ種類ノ法則ヲ適用シ,求ムル角 B ハ鋭角ナルカ又ハ鈍角ナルカヲ定メザル可ラズ。

今, 三角對數表ヨリ $\log\sin B$ ノ値ヲ求メ, 之ヨリ得ラルル B ノ値ノ中, 鋭角ノモノヲ B トシ, 鈍角ノモノヲ B′ トス。茲ニ, $B'=180°-B$ ナリ。シカラバ, 種類ノ法則ニヨリ, B ガ求ムル解ナルタメニハ $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(A+B)$ ハ同種類ナルコトヲ要シ, 又 B′ ガ求ムル解ナルタメニハ $\frac{1}{2}(a+b)$, $\frac{1}{2}(A+B')$ ハ同種類ナルヲ要ス。故ニ, 二邊ト其一對角トガ與ヘラレタル場合ニハ, 其解ハ二ツ, 又ハ一ツ, 又ハ解ノナキ場合ニ分タル。

角 B ガ求メラルレバ, 次ニ, ねぴーあノ比例式$(V_b)$, $(V_a)$ヲ用ヒテ, $c$ 及ビ C ヲ求ムルコトヲ得。

驗算ニハ正弦ノ法則ヲ用フレバヨシ。

**例** $a=30°20'$, $b=46°30'$, $A=36°40'$ ヲ知リテ B, C, $c$ ヲ求メヨ。

公式:

$$\sin B=\frac{\sin b\sin A}{\sin a}$$

$$\cot\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(b+a)\tan\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(b-a)}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B+A)\tan\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(B-A)}$$

$$\log\sin b=9.86056$$
$$\log\sin\mathrm{A}=9.77609$$
$$9.63665$$

$$\log\sin a=9.70332$$
$$\log\sin\mathrm{B}=9.93333$$
$$\mathrm{B}=59^\circ 3'30''$$
$$\mathrm{B}'=180^\circ-59^\circ 3'30''$$
$$=120^\circ 56'30''$$

$$\frac{1}{2}(b+a)=38^\circ 25' \qquad \frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=11^\circ 11'45''$$
$$\frac{1}{2}(b-a)=8^\circ 5' \qquad \frac{1}{2}(\mathrm{B}'+\mathrm{A})=78^\circ 48'15''$$
$$\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{A})=47^\circ 51'45'' \qquad \frac{1}{2}(\mathrm{B}'-\mathrm{A})=42^\circ 8'15''$$

茲ニ $\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{A})$ 及ビ $\frac{1}{2}(\mathrm{B}'+\mathrm{A})$ ハ共ニ $\frac{1}{2}(b+a)$ ト同種類ナリ。故ニ，此場合ニハ二ツノ解アリ。

| | 〔第一ノ解〕 | 〔第二ノ解〕 |
|---|---|---|
| $\log\sin\frac{1}{2}(b+a)=$ | 9.79335 | 9.79335 |
| $\log\tan\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=$ | 9.29651 | 9.95653 |
| | 9.08986 | 9.74988 |
| $\log\sin\frac{1}{2}(b-a)=$ | 9.14803 | 9.14803 |
| $\log\cot\frac{\mathrm{C}}{2}=$ | 9.94183 | 0.60185 |

$$\frac{\mathrm{C}}{2}=48^\circ 49'30'', \qquad \frac{\mathrm{C}'}{2}=14^\circ 2'35''$$
$$\mathrm{C}=97^\circ 39', \qquad \mathrm{C}'=28^\circ 5'10''$$

| | | |
|---|---|---|
| $\log\sin\frac{1}{2}(\mathrm{B}+\mathrm{A})=$ | 9.87013 | 9.99166 |
| $\log\tan\frac{1}{2}(b-a)=$ | 9.15236 | 9.15236 |
| | 9.02249 | 9.14402 |



| | | |
|---|---|---|
| $\log\sin\frac{1}{2}(\mathrm{B}-\mathrm{A})=$ | 9.28817 | 9.82666 |
| $\log\tan\frac{\mathrm{C}}{2}=$ | 9.73432 | 9.31736 |

$$\frac{\mathrm{C}}{2}=28^\circ 28'30'', \qquad \frac{\mathrm{C}'}{2}=11^\circ 43'55''$$
$$\mathrm{C}=56^\circ 57' \qquad \mathrm{C}'=23^\circ 27'50''$$

故ニ，求ムル解ハ次ノ二組ナリ。

(1) $\mathrm{B}=59^\circ 3'30''$　　(2) $\mathrm{B}'=120^\circ 56'30''$

$\mathrm{C}=97^\circ 39'$　　$\mathrm{C}'=28^\circ 5'10''$

$c=56^\circ 57'$　　$c'=23^\circ 27'50''$

〔驗〕
$$\frac{\sin\mathrm{B}}{\sin b}=\frac{\sin\mathrm{C}}{\sin c}=\frac{\sin\mathrm{C}'}{\sin c'}$$

$$\log\sin\mathrm{B}=9.93333$$
$$\log\sin b=9.86056$$
$$0.07277$$

$$\log\sin\mathrm{C}=9.99612$$
$$\log\sin c=9.92335$$
$$0.07277$$

$$\log\sin\mathrm{C}'=9.67284$$
$$\log\sin c'=9.60007$$
$$0.07277$$

## 7. 二角ト其一對邊，例ヘバ A, B, $a$ ガ與ヘラレタル場合.

此場合ノ解法ハ，前ノ場合ト完ク同樣ナリ。

**例** $\mathrm{B}=69^\circ$, $\mathrm{C}=132^\circ$, $b=65^\circ$ ヲ知リテ，A, $a$, $c$ ヲ求メヨ。

公式：

$$\sin c=\frac{\sin\mathrm{C}\sin b}{\sin\mathrm{B}}$$

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(c+b)\tan\frac{1}{2}(C-B)}{\sin\frac{1}{2}(c-b)}$$

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(C+B)\tan\frac{1}{2}(c-b)}{\sin\frac{1}{2}(C-B)}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin C&=9.87107\\
\log\sin b&=\underline{9.95728}\\
&\phantom{=}9.82835\\
\log\sin B&=\underline{9.97015}\\
\log\sin c&=9.85820
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c&=46^\circ10'25''\\
c'&=180^\circ-46^\circ10'25''\\
&=133^\circ49'35''
\end{aligned}$$

$\frac{1}{2}(C+B)=100^\circ30'$　　$\frac{1}{2}(c'+b)=99^\circ24'50''$

$\frac{1}{2}(C-B)=31^\circ30'$　　$\frac{1}{2}(c'-b)=34^\circ24'50''$

$\frac{1}{2}(c+b)=55^\circ35'15''$

二ツノ値 $c, c'$ ノ中，$c$ ノミガ種類ノ法則ニ従フニヨリ $c$ ガ一ツノ解ナリ。故ニ，此場合ニハ唯一ツノ解アルノミニシテ，$c$ ノ値ハ

$$c=133^\circ49'35''$$

$\frac{1}{2}(C+B)=100^\circ30'$,　　$\frac{1}{2}(c+b)=99^\circ24'50''$

$\frac{1}{2}(C-B)=31^\circ30'$,　　$\frac{1}{2}(c-b)=34^\circ24'50''$

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(c+b)&=9.99411\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(C-B)&=\underline{9.78732}\\
&\phantom{=}9.78143
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(c-b)&=\underline{9.75218}\\
\log\cot\tfrac{A}{2}&=0.02925\\
\tfrac{A}{2}&=43^\circ4'20''\\
A&=86^\circ8'40''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log\sin\tfrac{1}{2}(C+B)&=9.99267\\
\log\tan\tfrac{1}{2}(c-b)&=\underline{9.83573}\\
&\phantom{=}9.82840\\
\log\sin\tfrac{1}{2}(C-B)&=\underline{9.71809}\\
\mathrm{loj}\tan\tfrac{a}{2}&=0.11031\\
\tfrac{a}{2}&=52^\circ10'\\
a&=104^\circ24'
\end{aligned}$$

〔驗〕 $\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin C}{\sin c}$

$$\begin{aligned}
\log\sin A&=9.99902\\
\log\sin g&=\underline{9.98614}\\
&\phantom{=}0.01288\\
\log\sin C&=9.87107\\
\log\sin c&=\underline{9.85820}\\
&\phantom{=}0.01287
\end{aligned}$$

## 問題

球面三角形 ABC ニ於テ，次ノ各原素ヲ與ヘテ，殘リノ原素ヲ求メヨ。

1. $a=53^\circ12'35''$,　　$b=75^\circ14'25''$

　$c=69^\circ27'20''$

2. $A=105°14'20''$, $B=80°0'10''$
$C=68°23'35''$

3. $b=109°12'10''$, $c=131°18'25''$
$A=46°14'55''$

4. $A=59°19'15''$, $B=76°14'15''$
$c=130°14'15''$

5. $b=32°18'10''$, $c=50°14'15''$
$C=48°12'10''$

# 表

三角函數ノ眞數
三角函數ノ對數
數ノ對數

| 度 | 分 | *sin* | *tan* | *cot* | *cos* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0.0000 | 0.0000 | ∞ | 1.0000 | 0 | **90** |
| | 10 | 0.0029 | 0.0029 | 343.7737 | 1.0000 | 50 | |
| | 20 | 0.0058 | 0.0058 | 171.8854 | 1.0000 | 40 | |
| | 30 | 0.0087 | 0.0087 | 114.5887 | 1.0000 | 30 | |
| | 40 | 0.0116 | 0.0116 | 85.9398 | 0.9999 | 20 | |
| | 50 | 0.0145 | 0.0145 | 68.7501 | 0.9999 | 10 | |
| **1** | 0 | 0.0175 | 0.0175 | 57.2900 | 0.9998 | 0 | **89** |
| | 10 | 0.0204 | 0.0204 | 49.1039 | 0.9998 | 50 | |
| | 20 | 0.0233 | 0.0233 | 42.9641 | 0.9997 | 40 | |
| | 30 | 0.0262 | 0.0262 | 38.1885 | 0.9997 | 30 | |
| | 40 | 0.0291 | 0.0291 | 34.3678 | 0.9996 | 20 | |
| | 50 | 0.0320 | 0.0320 | 31.2416 | 0.9995 | 10 | |
| **2** | 0 | 0.0349 | 0.0349 | 28.6363 | 0.9994 | 0 | **88** |
| | 10 | 0.0378 | 0.0378 | 26.4316 | 0.9993 | 50 | |
| | 20 | 0.0407 | 0.0407 | 24.5418 | 0.9992 | 40 | |
| | 30 | 0.0436 | 0.0437 | 22.9038 | 0.9990 | 30 | |
| | 40 | 0.0465 | 0.0466 | 21.4704 | 0.9989 | 20 | |
| | 50 | 0.0494 | 0.0495 | 20.2056 | 0.9988 | 10 | |
| **3** | 0 | 0.0523 | 0.0524 | 19.0811 | 0.9986 | 0 | **87** |
| | 10 | 0.0552 | 0.0553 | 18.0750 | 0.9985 | 50 | |
| | 20 | 0.0581 | 0.0582 | 17.1693 | 0.9983 | 40 | |
| | 30 | 0.0610 | 0.0612 | 16.3499 | 0.9981 | 30 | |
| | 40 | 0.0640 | 0·0641 | 15.6048 | 0.9980 | 20 | |
| | 50 | 0.0669 | 0.0670 | 14.9244 | 0.9978 | 10 | |
| **4** | 0 | 0.0698 | 0.0699 | 14.3007 | 0.9976 | 0 | **86** |
| | 10 | 0.0727 | 0.0729 | 13.7267 | 0.9974 | 50 | |
| | 20 | 0.0756 | 0.0758 | 13.1969 | 0.9971 | 40 | |
| | 30 | 0.0785 | 0.0787 | 12.7062 | 0.9969 | 30 | |
| | 40 | 0.0814 | 0.0816 | 12.2505 | 0.9967 | 20 | |
| | 50 | 0.0843 | 0.0846 | 11.8262 | 0.9964 | 10 | |
| **5** | 0 | 0.0872 | 0.0875 | 11.4301 | 0.9962 | 0 | **85** |
| | | *cos* | *cot* | *tan* | *sin* | 分 | 度 |

| 度 | 分 | sin | tan | cot | cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 0 | 0.0872 | 0.0875 | 11.4301 | 0.9962 | 0 | **85** |
| | 10 | 0.0901 | 0.0904 | 11.0594 | 0.9959 | 50 | |
| | 20 | 0.0929 | 0.0934 | 10.7119 | 0.9957 | 40 | |
| | 30 | 0.0958 | 0.0963 | 10.3854 | 0.9954 | 30 | |
| | 40 | 0.0987 | 0.0992 | 10.0780 | 0.9951 | 20 | |
| | 50 | 0.1016 | 0.1022 | 9.7882 | 0.9948 | 10 | |
| **6** | 0 | 0.1045 | 0.1051 | 9.5144 | 0.9945 | 0 | **84** |
| | 10 | 0.1074 | 0.1080 | 9.2553 | 0.9942 | 50 | |
| | 20 | 0.1103 | 0.1110 | 9.0098 | 0.9939 | 40 | |
| | 30 | 0.1132 | 0.1139 | 8.7769 | 0.9936 | 30 | |
| | 40 | 0.1161 | 0.1169 | 8.5555 | 0.9932 | 20 | |
| | 50 | 0.1190 | 0.1198 | 8.3450 | 0.9929 | 10 | |
| **7** | 0 | 0.1219 | 0.1228 | 8.1443 | 0.9925 | 0 | **83** |
| | 10 | 0.1248 | 0.1257 | 7.9530 | 0.9922 | 50 | |
| | 20 | 0.1276 | 0.1287 | 7.7704 | 0.9918 | 40 | |
| | 30 | 0.1305 | 0.1317 | 7.5958 | 0.9914 | 30 | |
| | 40 | 0.1334 | 0.1346 | 7.4287 | 0.9911 | 20 | |
| | 50 | 0.1363 | 0.1376 | 7.2687 | 0.9907 | 10 | |
| **8** | 0 | 0.1392 | 0.1405 | 7.1154 | 0.9903 | 0 | **82** |
| | 10 | 0.1421 | 0.1435 | 6.9682 | 0.9899 | 50 | |
| | 20 | 0.1449 | 0.1465 | 6.8269 | 0.9894 | 40 | |
| | 30 | 0.1478 | 0.1495 | 6.6912 | 0.9890 | 30 | |
| | 40 | 0.1507 | 0.1524 | 6.5606 | 0.9886 | 20 | |
| | 50 | 0.1536 | 0.1554 | 6.4348 | 0.9881 | 10 | |
| **9** | 0 | 0.1564 | 0.1584 | 6.3138 | 0.9877 | 0 | **81** |
| | 10 | 0.1593 | 0.1614 | 6.1970 | 0.9872 | 50 | |
| | 20 | 0.1622 | 0.1644 | 6.0844 | 0.9868 | 40 | |
| | 30 | 0.1650 | 0.1673 | 5.9758 | 0.9863 | 30 | |
| | 40 | 0.1679 | 0.1703 | 5.8708 | 0.9858 | 20 | |
| | 50 | 0.1708 | 0.1733 | 5.7694 | 0.9853 | 10 | |
| **10** | 0 | 0.1736 | 0.1763 | 5.6713 | 0.9848 | 0 | **80** |
| | | cos | cot | tan | sin | 分 | 度 |



| 度 | 分 | sin | tan | cot | cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 0 | 0.1736 | 0.1763 | 5.6713 | 0.9848 | 0 | **80** |
| | 10 | 0.1765 | 0.1793 | 5.5764 | 0.9843 | 50 | |
| | 20 | 0.1794 | 0.1823 | 5.4845 | 0.9838 | 40 | |
| | 30 | 0.1822 | 0.1853 | 5.3955 | 0.9833 | 30 | |
| | 40 | 0.1851 | 0.1883 | 5.3093 | 0.9827 | 20 | |
| | 50 | 0.1880 | 0.1914 | 5.2257 | 0.9822 | 10 | |
| **11** | 0 | 0.1908 | 0.1944 | 5.1446 | 0.9816 | 0 | **79** |
| | 10 | 0.1937 | 0.1974 | 5.0658 | 0.9811 | 50 | |
| | 20 | 0.1965 | 0.2004 | 4.9894 | 0.9805 | 40 | |
| | 30 | 0.1994 | 0.2035 | 4.9152 | 0.9799 | 30 | |
| | 40 | 0.2022 | 0.2065 | 4.8430 | 0.9793 | 20 | |
| | 50 | 0.2051 | 0.2095 | 4.7729 | 0.9787 | 10 | |
| **12** | 0 | 0.2079 | 0.2126 | 4.7046 | 0.9781 | 0 | **78** |
| | 10 | 0.2108 | 0.2156 | 4.6382 | 0.9775 | 50 | |
| | 20 | 0.2136 | 0.2186 | 4.5736 | 0.9769 | 40 | |
| | 30 | 0.2164 | 0.2217 | 4.5107 | 0.9763 | 30 | |
| | 40 | 0.2193 | 0.2247 | 4.4494 | 0.0757 | 20 | |
| | 50 | 0.2221 | 0.2278 | 4.3897 | 0.9750 | 10 | |
| **13** | 0 | 0.2250 | 0.2309 | 4.3315 | 0.9744 | 0 | **77** |
| | 10 | 0.2278 | 0.2339 | 4.2747 | 0.9737 | 50 | |
| | 20 | 0.2306 | 0.2370 | 4.2193 | 0.9730 | 40 | |
| | 30 | 0.2334 | 0.2401 | 4.1653 | 0.9724 | 30 | |
| | 40 | 0.2363 | 0.2432 | 4.1126 | 0.9717 | 20 | |
| | 50 | 0.2391 | 0.2462 | 4.0611 | 0.9710 | 10 | |
| **14** | 0 | 0.2419 | 0.2493 | 4.0108 | 0.9703 | 0 | **76** |
| | 10 | 0.2447 | 0.2524 | 3.9617 | 0.9696 | 50 | |
| | 20 | 0.2476 | 0.2555 | 3.9136 | 0.9689 | 40 | |
| | 30 | 0.2504 | 0.2586 | 3.8667 | 0.9681 | 30 | |
| | 40 | 0.2532 | 0.2617 | 3.8208 | 0.9674 | 20 | |
| | 50 | 0.2560 | 0.2648 | 3.7760 | 0.9667 | 10 | |
| **15** | 0 | 0.2588 | 0.2679 | 3.7321 | 0.9659 | 0 | **75** |
| | | cos | cot | tan | sin | 分 | 度 |

| 度 | 分 | *sin* | *tan* | *cot* | *cos* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | 0 | 0.2588 | 0.2679 | 3.7321 | 0.9659 | 0 | **75** |
| | 10 | 0.2616 | 0.2711 | 3.6891 | 0.9652 | 50 | |
| | 20 | 0.2644 | 0.2742 | 3.6470 | 0.9644 | 40 | |
| | 30 | 0.2672 | 0.2773 | 3.6059 | 0.9636 | 30 | |
| | 40 | 0.2700 | 0.2805 | 3.5656 | 0.9628 | 20 | |
| | 50 | 0.2728 | 0.2836 | 3.5261 | 0.9621 | 10 | |
| **16** | 0 | 0.2756 | 0.2867 | 3.4874 | 0.9613 | 0 | **74** |
| | 10 | 0.2784 | 0.2899 | 3.4495 | 0.9605 | 50 | |
| | 20 | 0.2812 | 0.2931 | 3.4124 | 0.9596 | 40 | |
| | 30 | 0.2840 | 0.2962 | 3.3759 | 0.9588 | 30 | |
| | 40 | 0.2868 | 0.2994 | 3.3402 | 0.9580 | 20 | |
| | 50 | 0.2896 | 0.3026 | 3.3052 | 0.9572 | 10 | |
| **17** | 0 | 0.2924 | 0.3057 | 3.2709 | 0.9563 | 0 | **73** |
| | 10 | 0.2952 | 0.3089 | 3.2371 | 0.9555 | 50 | |
| | 20 | 0.2979 | 0.3121 | 3.2041 | 0.9546 | 40 | |
| | 30 | 0.3007 | 0.3153 | 3.1716 | 0.9537 | 30 | |
| | 40 | 0.3035 | 0.3185 | 3.1397 | 0.9528 | 20 | |
| | 50 | 0.3062 | 0.3217 | 3.1084 | 0.9520 | 10 | |
| **18** | 0 | 0.3090 | 0.3249 | 3.0777 | 0.9511 | 0 | **72** |
| | 10 | 0.3118 | 0.3281 | 3.0475 | 0.9502 | 50 | |
| | 20 | 0.3145 | 0.3314 | 3.0178 | 0.9492 | 40 | |
| | 30 | 0.3173 | 0.3346 | 2.9887 | 0.9483 | 30 | |
| | 40 | 0.3201 | 0.3378 | 2.9600 | 0.9474 | 20 | |
| | 50 | 0.3228 | 0.3411 | 2.9319 | 0.9465 | 10 | |
| **19** | 0 | 0.3256 | 0.3443 | 2.9042 | 0.9455 | 0 | **71** |
| | 10 | 0.3283 | 0.3476 | 2.8770 | 0.9446 | 50 | |
| | 20 | 0.3311 | 0.3508 | 2.8502 | 0.9436 | 40 | |
| | 30 | 0.3338 | 0.3541 | 2.8239 | 0.9426 | 30 | |
| | 40 | 0.3365 | 0.3574 | 2.7980 | 0.9417 | 20 | |
| | 50 | 0.3393 | 0.3607 | 2.7725 | 0.9407 | 10 | |
| **20** | 0 | 0.3420 | 0.3640 | 2.7475 | 0.9397 | 0 | **70** |
| | | *cos* | *cot* | *tan* | *sin* | 分 | 度 |



| 度 | 分 | *sin* | *tan* | *cot* | *cos* | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **20** | 0 | 0.3420 | 0.3640 | 2.7475 | 0.9397 | 0 | **70** |
| | 10 | 0.3448 | 0.3673 | 2.7228 | 0.9387 | 50 | |
| | 20 | 0.3475 | 0.3706 | 2.6985 | 0.9377 | 40 | |
| | 30 | 0.3502 | 0.3739 | 2.6746 | 0.9367 | 30 | |
| | 40 | 0.3529 | 0.3772 | 2.6511 | 0.9356 | 20 | |
| | 50 | 0.3557 | 0.3805 | 2.6279 | 0.9346 | 10 | |
| **21** | 0 | 0.3584 | 0.3839 | 2.6051 | 0.9336 | 0 | **69** |
| | 10 | 0.3611 | 0.3872 | 2.5826 | 0.9325 | 50 | |
| | 20 | 0.3638 | 0.3906 | 2.5605 | 0.9315 | 40 | |
| | 30 | 0.3665 | 0.3939 | 2.5386 | 0.9304 | 30 | |
| | 40 | 0.3692 | 0.3973 | 2.5172 | 0.9293 | 20 | |
| | 50 | 0.3719 | 0.4006 | 2.4960 | 0.9283 | 10 | |
| **22** | 0 | 0.3746 | 0.4040 | 2.4751 | 0.9272 | 0 | **68** |
| | 10 | 0.3773 | 0.4074 | 2.4545 | 0.9261 | 50 | |
| | 20 | 0.3800 | 0.4108 | 2.4342 | 0.9250 | 40 | |
| | 30 | 0.3827 | 0.4142 | 2.4142 | 0.9239 | 30 | |
| | 40 | 0.3854 | 0.4176 | 2.3945 | 0.9228 | 20 | |
| | 50 | 0.3881 | 0.4210 | 2.3750 | 0.9216 | 10 | |
| **23** | 0 | 0.3907 | 0.4245 | 2.3559 | 0.9205 | 0 | **67** |
| | 10 | 0.3934 | 0.4279 | 2.3369 | 0.9194 | 50 | |
| | 20 | 0.3961 | 0.4314 | 2.3183 | 0.9182 | 40 | |
| | 30 | 0.3987 | 0.4348 | 2.2998 | 0.9171 | 30 | |
| | 40 | 0.4014 | 0.4383 | 2.2817 | 0.9159 | 20 | |
| | 50 | 0.4041 | 0.4417 | 2.2637 | 0.9147 | 10 | |
| **24** | 0 | 0.4067 | 0.4452 | 2.2460 | 0.9135 | 0 | **66** |
| | 10 | 0.4094 | 0.4487 | 2.2286 | 0.9124 | 50 | |
| | 20 | 0.4120 | 0.4522 | 2.2113 | 0.9112 | 40 | |
| | 30 | 0.4147 | 0.4557 | 2.1943 | 0.9100 | 30 | |
| | 40 | 0.4173 | 0.4592 | 2.1775 | 0.9088 | 20 | |
| | 50 | 0.4200 | 0.4628 | 2.1609 | 0.9075 | 10 | |
| **25** | 0 | 0 4226 | 0.4663 | 2.1445 | 0.9063 | 0 | **65** |
| | | *cos* | *cot* | *tan* | *sin* | 分 | 度 |

| 度 | 分 | sin | tan | cot | cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **25** | 0 | 0.4226 | 0.4663 | 2.1445 | 0.9063 | 0 | **65** |
| | 10 | 0.4253 | 0.4699 | 2.1283 | 0.9051 | 50 | |
| | 20 | 0.4279 | 0.4734 | 2.1123 | 0.9038 | 40 | |
| | 30 | 0.4305 | 0.4770 | 2.0965 | 0.9026 | 30 | |
| | 40 | 0.4331 | 0.4806 | 2.0809 | 0.9013 | 20 | |
| | 50 | 0.4358 | 0.4841 | 2.0655 | 0.9001 | 10 | |
| **26** | 0 | 0.4384 | 0.4877 | 2.0503 | 0.8988 | 0 | **64** |
| | 10 | 0.4410 | 0.4913 | 2.0353 | 0.8975 | 50 | |
| | 20 | 0.4436 | 0.4950 | 2.0204 | 0.8962 | 40 | |
| | 30 | 0.4462 | 0.4986 | 2.0057 | 0.8949 | 30 | |
| | 40 | 0.4488 | 0.5022 | 1.9912 | 0.8936 | 20 | |
| | 50 | 0.4514 | 0.5059 | 1.9768 | 0.8923 | 10 | |
| **27** | 0 | 0.4540 | 0.5095 | 1.9626 | 0.8910 | 0 | **63** |
| | 10 | 0.4566 | 0.5132 | 1.9486 | 0.8897 | 50 | |
| | 20 | 0.4592 | 0.5169 | 1.9347 | 0.8884 | 40 | |
| | 30 | 0.4617 | 0.5206 | 1.9210 | 0.8870 | 30 | |
| | 40 | 0.4643 | 0.5243 | 1.9074 | 0.8857 | 20 | |
| | 50 | 0.4669 | 0.5280 | 1.8940 | 0.8843 | 10 | |
| **28** | 0 | 0.4695 | 0.5317 | 1.8807 | 0.8829 | 0 | **62** |
| | 10 | 0.4720 | 0.5354 | 1.8676 | 0.8816 | 50 | |
| | 20 | 0.4746 | 0.5392 | 1.8546 | 0.8802 | 40 | |
| | 30 | 0.4772 | 0.5430 | 1.8418 | 0.8788 | 30 | |
| | 40 | 0.4797 | 0.5467 | 1.8291 | 0.8774 | 20 | |
| | 50 | 0.4823 | 0.5505 | 1.8165 | 0.8760 | 10 | |
| **29** | 0 | 0.4848 | 0.5543 | 1.8040 | 0.8746 | 0 | **61** |
| | 10 | 0.4874 | 0.5581 | 1.7917 | 0.8732 | 50 | |
| | 20 | 0.4899 | 0.5619 | 1.7796 | 0.8718 | 40 | |
| | 30 | 0.4924 | 0.5658 | 1.7675 | 0.8704 | 30 | |
| | 40 | 0.4950 | 0.5696 | 1.7556 | 0.8689 | 20 | |
| | 50 | 0.4975 | 0.5735 | 1.7437 | 0.8675 | 10 | |
| **30** | 0 | 0.5000 | 0.5774 | 1.7321 | 0.8660 | 0 | **60** |
| | | cos | cot | tan | sin | 分 | 度 |



| 度 | 分 | sin | tan | cot | cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | 0 | 0.5000 | 0.5774 | 1.7321 | 0.8660 | 0 | **60** |
| | 10 | 0.5025 | 0.5812 | 1.7205 | 0.8646 | 50 | |
| | 20 | 0.5050 | 0.5851 | 1.7090 | 0.8631 | 40 | |
| | 30 | 0.5075 | 0.5890 | 1.6977 | 0.8616 | 30 | |
| | 40 | 0.5100 | 0.5930 | 1.6864 | 0.8601 | 20 | |
| | 50 | 0.5125 | 0.5969 | 1 6753 | 0.8587 | 10 | |
| **31** | 0 | 0.5150 | 0.6009 | 1.6643 | 0.8572 | 0 | **59** |
| | 10 | 0.5175 | 0.6048 | 1.6534 | 0.8557 | 50 | |
| | 20 | 0.5200 | 0.6088 | 1.6426 | 0.8542 | 40 | |
| | 30 | 0.5225 | 0.6128 | 1.6319 | 0.8526 | 30 | |
| | 40 | 0.5250 | 0.6168 | 1.6212 | 0.8511 | 20 | |
| | 50 | 0.5275 | 0.6208 | 1.6107 | 0.8496 | 10 | |
| **32** | 0 | 0.5299 | 0.6249 | 1.6003 | 0.8480 | 0 | **58** |
| | 10 | 0.5324 | 0.6289 | 1.5900 | 0.8465 | 50 | |
| | 20 | 0.5348 | 0.6330 | 1.5798 | 0.8450 | 40 | |
| | 30 | 0.5373 | 0.6371 | 1.5697 | 0.8434 | 30 | |
| | 40 | 0.5398 | 0.6412 | 1.5597 | 0.8418 | 20 | |
| | 50 | 0.5422 | 0.6453 | 1.5497 | 0.8403 | 10 | |
| **33** | 0 | 0.5446 | 0.6494 | 1.5399 | 0.8387 | 0 | **57** |
| | 10 | 0.5471 | 0.6536 | 1.5301 | 0.8371 | 50 | |
| | 20 | 0.5495 | 0.6577 | 1.5204 | 0.8355 | 40 | |
| | 30 | 0.5519 | 0.6619 | 1.5108 | 0.8339 | 30 | |
| | 40 | 0.5544 | 0.6661 | 1.5013 | 0.8323 | 20 | |
| | 50 | 0.5568 | 0.6703 | 1.4919 | 0.8307 | 10 | |
| **34** | 0 | 0.5592 | 0.6745 | 1.4826 | 0.8290 | 0 | **56** |
| | 10 | 0.5616 | 0.6787 | 1.4733 | 0.8274 | 50 | |
| | 20 | 0.5640 | 0.6830 | 1.4641 | 0.8258 | 40 | |
| | 30 | 0.5664 | 0.6873 | 1.4550 | 0.8241 | 30 | |
| | 40 | 0.5688 | 0.6916 | 1 4460 | 0.8225 | 20 | |
| | 50 | 0.5712 | 0.6959 | 1.4370 | 0.8208 | 10 | |
| **35** | 0 | 0.5736 | 0.7002 | 1.4281 | 0.8192 | 0 | **55** |
| | | cos | cot | tan | sin | 分 | 度 |

| 度 | 分 | sin | tan | cot | cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **35** | 0 | 0.5736 | 0.7002 | 1.4281 | 0.8192 | 0 | **55** |
| | 10 | 0.5760 | 0.7046 | 1.4193 | 0.8175 | 50 | |
| | 20 | 0.5783 | 0.7089 | 1.4106 | 0.8158 | 40 | |
| | 30 | 0.5807 | 0.7133 | 1.4019 | 0.8141 | 30 | |
| | 40 | 0.5831 | 0.7177 | 1.3934 | 0.8124 | 20 | |
| | 50 | 0.5854 | 0.7221 | 1.3848 | 0.8107 | 10 | |
| **36** | 0 | 0.5878 | 0.7265 | 1.3764 | 0.8090 | 0 | **54** |
| | 10 | 0.5901 | 0.7310 | 1.3680 | 0.8073 | 50 | |
| | 20 | 0.5925 | 0.7355 | 1.3597 | 0.8056 | 40 | |
| | 30 | 0.5948 | 0.7400 | 1.3514 | 0.8039 | 30 | |
| | 40 | 0.5972 | 0.7445 | 1.3432 | 0.8021 | 20 | |
| | 50 | 0.5995 | 0.7490 | 1.3351 | 0.8004 | 10 | |
| **37** | 0 | 0.6018 | 0.7536 | 1.3270 | 0.7986 | 0 | **53** |
| | 10 | 0.6041 | 0.7581 | 1.3190 | 0.7969 | 50 | |
| | 20 | 0.6065 | 0.7627 | 1.3111 | 0.7951 | 40 | |
| | 30 | 0.6088 | 0.7673 | 1.3032 | 0.7934 | 30 | |
| | 40 | 0.6111 | 0.7720 | 1.2954 | 0.7916 | 20 | |
| | 50 | 0.6134 | 0.7766 | 1.2876 | 0.7898 | 10 | |
| **38** | 0 | 0.6157 | 0.7813 | 1.2799 | 0.7880 | 0 | **52** |
| | 10 | 0.6180 | 0.7860 | 1.2723 | 0.7862 | 50 | |
| | 20 | 0.6202 | 0.7907 | 1.2647 | 0.7844 | 40 | |
| | 30 | 0.6225 | 0.7954 | 1.2572 | 0.7826 | 30 | |
| | 40 | 0.6248 | 0.8002 | 1.2497 | 0.7808 | 20 | |
| | 50 | 0.6271 | 0.8050 | 1.2423 | 0.7790 | 10 | |
| **39** | 0 | 0.6293 | 0.8098 | 1.2349 | 0.7771 | 0 | **51** |
| | 10 | 0.6316 | 0.8146 | 1.2276 | 0.7753 | 50 | |
| | 20 | 0.6338 | 0.8195 | 1.2203 | 0.7735 | 40 | |
| | 30 | 0.6361 | 0.8243 | 1.2131 | 0.7716 | 30 | |
| | 40 | 0.6383 | 0.8292 | 1.2059 | 0.7698 | 20 | |
| | 50 | 0.6406 | 0.8342 | 1.1988 | 0.7679 | 10 | |
| **40** | 0 | 0.6428 | 0.8391 | 1.1918 | 0.7660 | 0 | **50** |
| | | cos | cot | tan | sin | 分 | 度 |



| 度 | 分 | sin | tan | cot | cos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **40** | 0 | 0.6428 | 0.8391 | 1.1918 | 0.7660 | 0 | **50** |
| | 10 | 0.6450 | 0.8441 | 1.1847 | 0.7642 | 50 | |
| | 20 | 0.6472 | 0.8491 | 1.1778 | 0.7623 | 40 | |
| | 30 | 0.6494 | 0.8541 | 1.1708 | 0.7604 | 30 | |
| | 40 | 0.6517 | 0.8591 | 1.1640 | 0.7585 | 20 | |
| | 50 | 0.6539 | 0.8642 | 1.1571 | 0.7566 | 10 | |
| **41** | 0 | 0.6561 | 0.8693 | 1.1504 | 0.7547 | 0 | **49** |
| | 10 | 0.6583 | 0.8744 | 1.1436 | 0.7528 | 50 | |
| | 20 | 0.6604 | 0.8796 | 1.1369 | 0.7509 | 40 | |
| | 30 | 0.6626 | 0.8847 | 1.1303 | 0.7490 | 30 | |
| | 40 | 0.6648 | 0.8899 | 1.1237 | 0.7470 | 20 | |
| | 50 | 0.6670 | 0.8952 | 1.1171 | 0.7451 | 10 | |
| **42** | 0 | 0.6691 | 0.9004 | 1.1106 | 0.7431 | 0 | **48** |
| | 10 | 0.6713 | 0.9057 | 1.1041 | 0.7412 | 50 | |
| | 20 | 0.7734 | 0.9110 | 1.0977 | 0.7392 | 40 | |
| | 30 | 0.6756 | 0.9163 | 1.0913 | 0.7373 | 30 | |
| | 40 | 0.6777 | 0.9217 | 1.0850 | 0.7353 | 20 | |
| | 50 | 0.6799 | 0.9271 | 1.0786 | 0.7333 | 10 | |
| **43** | 0 | 0.6820 | 0.9325 | 1.0724 | 0.7314 | 0 | **47** |
| | 10 | 0.6841 | 0.9380 | 1.0661 | 0.7294 | 50 | |
| | 20 | 0.6862 | 0.9435 | 1.0599 | 0.7274 | 40 | |
| | 30 | 0.6884 | 0.9490 | 1.0538 | 0.7254 | 30 | |
| | 40 | 0.6905 | 0.9545 | 1.0477 | 0.7234 | 20 | |
| | 50 | 0.6926 | 0.9601 | 1.0416 | 0.7214 | 10 | |
| **44** | 0 | 0.6947 | 0.9657 | 1.0355 | 0.7193 | 0 | **46** |
| | 10 | 0.6967 | 0.9713 | 1.0295 | 0.7173 | 50 | |
| | 20 | 0.6988 | 0.9770 | 1.0235 | 0.7153 | 40 | |
| | 30 | 0.7009 | 0.9827 | 1.0176 | 0.7133 | 30 | |
| | 40 | 0.7030 | 0.9884 | 1.0117 | 0.7112 | 20 | |
| | 50 | 0.7050 | 0.9942 | 1.0058 | 0.7092 | 10 | |
| **45** | 0 | 0.7071 | 1.0000 | 1.0000 | 0.7071 | 0 | **45** |
| | | cos | cot | tan | sin | 分 | 度 |

| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | 分 | 度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | | | | | | 0 | 0.0000 | 0 | **90** |
| | 10 | $\bar{3}$.4637 | 3011 | $\bar{3}$.4637 | 3011 | 2.5363 | 0 | 0.0000 | 50 | |
| | 20 | $\bar{3}$.7648 | 1760 | $\bar{3}$.7648 | 1761 | 2.2352 | 0 | 0.0000 | 40 | |
| | 30 | $\bar{3}$.9408 | 1250 | $\bar{3}$.9409 | 1249 | 2.0591 | 0 | 0.0000 | 30 | |
| | 40 | $\bar{2}$.0658 | 969 | $\bar{2}$.0658 | 969 | 1.9342 | 0 | 0.0000 | 20 | |
| | 50 | $\bar{2}$.1627 | 792 | $\bar{2}$.1627 | 792 | 1 8373 | 1 | 0.0000 | 10 | |
| **1** | 0 | $\bar{2}$.2419 | 669 | $\bar{2}$.2419 | 670 | 1.7581 | 0 | $\bar{1}$.9999 | 0 | **89** |
| | 10 | $\bar{2}$.3088 | 580 | $\bar{2}$.3089 | 580 | 1.6911 | 0 | $\bar{1}$.9999 | 50 | |
| | 20 | $\bar{2}$.3668 | 511 | $\bar{2}$.3669 | 512 | 1.6331 | 0 | $\bar{1}$.9999 | 40 | |
| | 30 | $\bar{2}$.4179 | 458 | $\bar{2}$.4181 | 457 | 1.5819 | 1 | $\bar{1}$.9999 | 30 | |
| | 40 | $\bar{2}$.4637 | 413 | $\bar{2}$.4638 | 415 | 1.5362 | 0 | $\bar{1}$.9998 | 20 | |
| | 50 | $\bar{2}$.5050 | 378 | $\bar{2}$.5053 | 378 | 1.4947 | 1 | $\bar{1}$.9998 | 10 | |
| **2** | 0 | $\bar{2}$.5428 | 348 | $\bar{2}$.5431 | 348 | 1.4569 | 0 | $\bar{1}$.9997 | 0 | **88** |
| | 10 | $\bar{2}$.5776 | 321 | $\bar{2}$.5779 | 322 | 1.4221 | 1 | $\bar{1}$.9997 | 50 | |
| | 20 | $\bar{2}$.6097 | 300 | $\bar{2}$.6101 | 300 | 1.3899 | 0 | $\bar{1}$.9996 | 40 | |
| | 30 | $\bar{2}$.6397 | 280 | $\bar{2}$.6401 | 281 | 1.3599 | 1 | $\bar{1}$ 9996 | 30 | |
| | 40 | $\bar{2}$.6677 | 263 | $\bar{2}$.6682 | 263 | 1.3318 | 0 | $\bar{1}$.9995 | 20 | |
| | 50 | $\bar{2}$.6940 | 248 | $\bar{2}$.6945 | 249 | 1.3055 | 1 | $\bar{1}$.9995 | 10 | |
| **3** | 0 | $\bar{2}$.7188 | 235 | $\bar{2}$.7194 | 235 | 1.2806 | 1 | $\bar{1}$.9994 | 0 | **87** |
| | 10 | $\bar{2}$.7423 | 222 | $\bar{2}$.7429 | 223 | 1.2571 | 0 | $\bar{1}$.9993 | 50 | |
| | 20 | $\bar{2}$.7645 | 212 | $\bar{2}$.7652 | 213 | 1.2348 | 1 | $\bar{1}$.9993 | 40 | |
| | 30 | $\bar{2}$.7857 | 202 | $\bar{2}$.7865 | 202 | 1.2135 | 1 | $\bar{1}$.9992 | 30 | |
| | 40 | $\bar{2}$.8059 | 192 | $\bar{2}$.8067 | 194 | 1.1933 | 1 | $\bar{1}$.9991 | 20 | |
| | 50 | $\bar{2}$ 8251 | 185 | $\bar{2}$.8261 | 185 | 1.1739 | 1 | $\bar{1}$.9990 | 10 | |
| **4** | 0 | $\bar{2}$.8436 | 177 | $\bar{2}$.8446 | 178 | 1.1554 | 0 | $\bar{1}$.9989 | 0 | **86** |
| | 10 | $\bar{2}$.8613 | 170 | $\bar{2}$.8624 | 171 | 1.1376 | 1 | $\bar{1}$.9989 | 50 | |
| | 20 | $\bar{2}$.8783 | 163 | $\bar{2}$.8795 | 165 | 1.1205 | 1 | $\bar{1}$.9988 | 40 | |
| | 30 | $\bar{2}$.8946 | 158 | $\bar{2}$.8960 | 158 | 1.1040 | 1 | $\bar{1}$.9987 | 30 | |
| | 40 | $\bar{2}$.9104 | 152 | $\bar{2}$.9118 | 154 | 1.0882 | 1 | $\bar{1}$.9986 | 20 | |
| | 50 | $\bar{2}$.9256 | 147 | $\bar{2}$.9272 | 148 | 1.0728 | 2 | $\bar{1}$.9985 | 10 | |
| **5** | 0 | $\bar{2}$.9403 | | $\bar{2}$.9420 | | 1.0580 | | $\bar{1}$.9983 | 0 | **85** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |



| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | 分 | 度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **5** | 0 | $\bar{2}$.9403 | 142 | $\bar{2}$.9420 | 143 | 1.0580 | 1 | $\bar{1}$.9983 | 0 | **85** |
| | 10 | $\bar{2}$.9545 | 137 | $\bar{2}$.9563 | 138 | 1.0437 | 1 | $\bar{1}$.9982 | 50 | |
| | 20 | $\bar{2}$.9682 | 134 | $\bar{2}$.9701 | 135 | 1.0299 | 1 | $\bar{1}$.9981 | 40 | |
| | 30 | $\bar{2}$.9816 | 129 | $\bar{2}$.9836 | 130 | 1.0164 | 1 | $\bar{1}$.9980 | 30 | |
| | 40 | $\bar{2}$.9945 | 125 | $\bar{2}$.9966 | 127 | 1.0034 | 2 | $\bar{1}$.9979 | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}$.0070 | 122 | $\bar{1}$.0093 | 123 | 0.9907 | 1 | $\bar{1}$.9977 | 10 | |
| **6** | 0 | $\bar{1}$.0192 | 119 | $\bar{1}$.0216 | 120 | 0.9784 | 1 | $\bar{1}$.9976 | 0 | **84** |
| | 10 | $\bar{1}$.0311 | 115 | $\bar{1}$.0336 | 117 | 0.9664 | 2 | $\bar{1}$.9975 | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}$.0426 | 113 | $\bar{1}$.0453 | 114 | 0.9547 | 1 | $\bar{1}$.9973 | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}$.0539 | 109 | $\bar{1}$.0567 | 111 | 0.9433 | 1 | $\bar{1}$.9972 | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}$.0648 | 107 | $\bar{1}$.0678 | 108 | 0.9322 | 2 | $\bar{1}$.9971 | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}$.0755 | 104 | $\bar{1}$.0786 | 105 | 0.9214 | 1 | $\bar{1}$.9969 | 10 | |
| **7** | 0 | $\bar{1}$.0859 | 102 | $\bar{1}$.0891 | 104 | 0.9109 | 2 | $\bar{1}$.9968 | 0 | **83** |
| | 10 | $\bar{1}$.0961 | 99 | $\bar{1}$.0995 | 101 | 0.9005 | 2 | $\bar{1}$.9966 | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}$.1060 | 97 | $\bar{1}$.1096 | 98 | 0.8904 | 1 | $\bar{1}$.9964 | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}$.1157 | 95 | $\bar{1}$.1194 | 97 | 0.8806 | 2 | $\bar{1}$.9963 | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}$.1252 | 93 | $\bar{1}$.1291 | 94 | 0.8709 | 2 | $\bar{1}$.9961 | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}$.1345 | 91 | $\bar{1}$.1385 | 93 | 0.8615 | 1 | $\bar{1}$.9959 | 10 | |
| **8** | 0 | $\bar{1}$.1436 | 89 | $\bar{1}$.1478 | 91 | 0.8522 | 2 | $\bar{1}$.9958 | 0 | **82** |
| | 10 | $\bar{1}$.1525 | 87 | $\bar{1}$.1569 | 89 | 0.8431 | 2 | $\bar{1}$.9956 | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}$.1612 | 85 | $\bar{1}$.1658 | 87 | 0.8342 | 2 | $\bar{1}$.9954 | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}$.1697 | 84 | $\bar{1}$.1745 | 86 | 0.8255 | 2 | $\bar{1}$.9952 | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}$.1781 | 82 | $\bar{1}$.1831 | 84 | 0.8169 | 2 | $\bar{1}$.9950 | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}$.1863 | 80 | $\bar{1}$.1915 | 82 | 0.8085 | 2 | $\bar{1}$.9948 | 10 | |
| **9** | 0 | $\bar{1}$.1943 | 79 | $\bar{1}$.1997 | 81 | 0.8003 | 2 | $\bar{1}$.9946 | 0 | **81** |
| | 10 | $\bar{1}$.2022 | 78 | $\bar{1}$.2078 | 80 | 0.7922 | 2 | $\bar{1}$.9944 | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}$.2100 | 76 | $\bar{1}$.2158 | 78 | 0.7842 | 2 | $\bar{1}$.9942 | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}$.2176 | 75 | $\bar{1}$.2236 | 77 | 0.7764 | 2 | $\bar{1}$.9940 | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}$.2251 | 73 | $\bar{1}$.2313 | 76 | 0.7687 | 2 | $\bar{1}$.9938 | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}$.2324 | 73 | $\bar{1}$.2389 | 74 | 0.7611 | 2 | $\bar{1}$.9936 | 10 | |
| **10** | 0 | $\bar{1}$.2397 | | $\bar{1}$.2463 | | 0.7537 | | $\bar{1}$ 9934 | 0 | **80** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |

| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | 分 | 度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **10** | 0 | $\bar{1}.2397$ | 71 | $\bar{1}.2463$ | 73 | 0.7537 | 3 | $\bar{1}.9934$ | 0 | **80** |
| | 10 | $\bar{1}.2468$ | 70 | $\bar{1}.2536$ | 73 | 0.7464 | 2 | $\bar{1}.9931$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.2538$ | 68 | $\bar{1}.2609$ | 71 | 0.7391 | 2 | $\bar{1}.9929$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.2606$ | 68 | $\bar{1}.2680$ | 70 | 0.7320 | 3 | $\bar{1}.9927$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.2674$ | 66 | $\bar{1}.2750$ | 69 | 0.7250 | 2 | $\bar{1}.9924$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.2740$ | 66 | $\bar{1}.2819$ | 68 | 0.7181 | 3 | $\bar{1}.9922$ | 10 | |
| **11** | 0 | $\bar{1}.2806$ | 64 | $\bar{1}.2887$ | 66 | 0.7113 | 2 | $\bar{1}.9919$ | 0 | **79** |
| | 10 | $\bar{1}.2870$ | 64 | $\bar{1}.2953$ | 67 | 0.7047 | 3 | $\bar{1}.9917$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.2934$ | 63 | $\bar{1}.3020$ | 65 | 0.6980 | 2 | $\bar{1}.9914$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.2997$ | 61 | $\bar{1}.3085$ | 64 | 0.6915 | 3 | $\bar{1}.9912$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.3058$ | 61 | $\bar{1}.3149$ | 63 | 0.6851 | 2 | $\bar{1}.9909$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.3119$ | 60 | $\bar{1}.3212$ | 63 | 0.6788 | 3 | $\bar{1}.9907$ | 10 | |
| **12** | 0 | $\bar{1}.3179$ | 59 | $\bar{1}.3275$ | 61 | 0.6725 | 3 | $\bar{1}.9904$ | 0 | **78** |
| | 10 | $\bar{1}.3238$ | 58 | $\bar{1}.3336$ | 61 | 0.6664 | 2 | $\bar{1}.9901$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.3296$ | 57 | $\bar{1}.3397$ | 61 | 0.6603 | 3 | $\bar{1}.9899$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.3353$ | 57 | $\bar{1}.3458$ | 59 | 0.6542 | 3 | $\bar{1}.9896$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.3410$ | 56 | $\bar{1}.3517$ | 59 | 0.6483 | 3 | $\bar{1}.9893$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.3466$ | 55 | $\bar{1}.3576$ | 58 | 0.6424 | 3 | $\bar{1}.9890$ | 10 | |
| **13** | 0 | $\bar{1}.3521$ | 54 | $\bar{1}.3634$ | 57 | 0.6366 | 3 | $\bar{1}.9887$ | 0 | **77** |
| | 10 | $\bar{1}.3575$ | 54 | $\bar{1}.3691$ | 57 | 0.6309 | 3 | $\bar{1}.9884$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.3629$ | 53 | $\bar{1}.3748$ | 56 | 0.6252 | 3 | $\bar{1}.9881$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.3682$ | 52 | $\bar{1}.3804$ | 55 | 0.6196 | 3 | $\bar{1}.9878$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.3734$ | 52 | $\bar{1}.3859$ | 55 | 0.6141 | 3 | $\bar{1}.9875$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.3786$ | 51 | $\bar{1}.3914$ | 54 | 0.6086 | 3 | $\bar{1}.9872$ | 10 | |
| **14** | 0 | $\bar{1}.3837$ | 50 | $\bar{1}.3968$ | 53 | 0.6032 | 3 | $\bar{1}.9869$ | 0 | **76** |
| | 10 | $\bar{1}.3887$ | 50 | $\bar{1}.4021$ | 53 | 0.5979 | 3 | $\bar{1}.9866$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.3937$ | 49 | $\bar{1}.4074$ | 53 | 0.5926 | 4 | $\bar{1}.9863$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.3986$ | 49 | $\bar{1}.4127$ | 51 | 0.5873 | 3 | $\bar{1}.9859$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.4035$ | 48 | $\bar{1}.4178$ | 52 | 0.5822 | 3 | $\bar{1}.9856$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.4083$ | 47 | $\bar{1}.4230$ | 51 | 0.5770 | 4 | $\bar{1}.9853$ | 10 | |
| **15** | 0 | $\bar{1}.4130$ | | $\bar{1}.4281$ | | 0.5719 | | $\bar{1}.9849$ | 0 | **75** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |



| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | 分 | 度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **15** | 0 | $\bar{1}.4130$ | 47 | $\bar{1}.4281$ | 50 | 0.5719 | 3 | $\bar{1}.9849$ | 0 | **75** |
| | 10 | $\bar{1}.4177$ | 46 | $\bar{1}.4331$ | 50 | 0.5669 | 3 | $\bar{1}.9846$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.4223$ | 46 | $\bar{1}.4381$ | 49 | 0.5619 | 4 | $\bar{1}.9843$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.4269$ | 45 | $\bar{1}.4430$ | 49 | 0.5570 | 3 | $\bar{1}.9839$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.4314$ | 45 | $\bar{1}.4479$ | 48 | 0.5521 | 4 | $\bar{1}.9836$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.4359$ | 44 | $\bar{1}.4527$ | 48 | 0.5473 | 4 | $\bar{1}.9832$ | 10 | |
| **16** | 0 | 1.4403 | 44 | $\bar{1}.4575$ | 47 | 0.5425 | 3 | $\bar{1}.9828$ | 0 | **74** |
| | 10 | 1.4447 | 44 | $\bar{1}.4622$ | 47 | 0.5378 | 4 | $\bar{1}.9825$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.4491$ | 42 | $\bar{1}.4669$ | 47 | 0.5331 | 4 | $\bar{1}.9821$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.4533$ | 43 | $\bar{1}.4716$ | 46 | 0.5284 | 3 | $\bar{1}.9817$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.4576$ | 42 | $\bar{1}.4762$ | 46 | 0.5238 | 4 | $\bar{1}.9814$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.4618$ | 41 | $\bar{1}.4808$ | 45 | 0.5192 | 4 | $\bar{1}.9810$ | 10 | |
| **17** | 0 | $\bar{1}.4659$ | 41 | $\bar{1}.4853$ | 45 | 0.5147 | 4 | $\bar{1}.9806$ | 0 | **73** |
| | 10 | $\bar{1}.4700$ | 41 | $\bar{1}.4898$ | 45 | 0.5102 | 4 | $\bar{1}.9802$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.4741$ | 40 | $\bar{1}.4943$ | 44 | 0.5057 | 4 | $\bar{1}.9798$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.4781$ | 40 | $\bar{1}.4987$ | 44 | 0.5013 | 4 | $\bar{1}.9794$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.4821$ | 40 | $\bar{1}.5031$ | 44 | 0.4969 | 4 | $\bar{1}.9790$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.4861$ | 39 | $\bar{1}.5075$ | 43 | 0.4925 | 4 | $\bar{1}.9786$ | 10 | |
| **18** | 0 | $\bar{1}.4900$ | 39 | $\bar{1}.5118$ | 43 | 0.4882 | 4 | $\bar{1}.9782$ | 0 | **72** |
| | 10 | $\bar{1}.4939$ | 38 | $\bar{1}.5161$ | 42 | 0.4839 | 4 | $\bar{1}.9778$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.4977$ | 38 | $\bar{1}.5203$ | 42 | 0.4797 | 4 | $\bar{1}.9774$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.5015$ | 37 | $\bar{1}.5245$ | 42 | 0.4755 | 5 | $\bar{1}.9770$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.5052$ | 38 | $\bar{1}.5287$ | 42 | 0.4713 | 4 | $\bar{1}.9765$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.5090$ | 36 | $\bar{1}.5329$ | 41 | 0.4671 | 4 | $\bar{1}.9761$ | 10 | |
| **19** | 0 | $\bar{1}.5126$ | 37 | $\bar{1}.5370$ | 41 | 0.4630 | 5 | $\bar{1}.9757$ | 0 | **71** |
| | 10 | $\bar{1}.5163$ | 36 | $\bar{1}.5411$ | 40 | 0.4589 | 4 | $\bar{1}.9752$ | 50 | |
| | 20 | 1.5199 | 36 | $\bar{1}.5451$ | 40 | 0.4549 | 5 | $\bar{1}.9748$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.5235$ | 35 | $\bar{1}.5491$ | 40 | 0.4509 | 4 | $\bar{1}.9743$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.5270$ | 36 | $\bar{1}.5531$ | 40 | 0.4469 | 5 | $\bar{1}.9739$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.5306$ | 35 | $\bar{1}.5571$ | 40 | 0.4429 | 4 | $\bar{1}.9734$ | 10 | |
| **20** | 0 | $\bar{1}.5341$ | | $\bar{1}.5611$ | | 0.4389 | | $\bar{1}.9730$ | 0 | **70** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |

| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | 分 | 度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **20** | 0 | $\bar{1}.5341$ | 34 | $\bar{1}.5611$ | 39 | 0.4389 | 5 | $\bar{1}.9730$ | 0 | **70** |
| | 10 | $\bar{1}.5375$ | 34 | $\bar{1}.5650$ | 39 | 0.4350 | 4 | $\bar{1}.9725$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.5409$ | 34 | $\bar{1}.5689$ | 38 | 0.4311 | 5 | $\bar{1}.9721$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.5443$ | 34 | $\bar{1}.5727$ | 39 | 0.4273 | 5 | $\bar{1}.9716$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.5477$ | 33 | $\bar{1}.5766$ | 38 | 0.4234 | 5 | $\bar{1}.9711$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.5510$ | 33 | $\bar{1}.5804$ | 38 | 0.4196 | 4 | $\bar{1}.9706$ | 10 | |
| **21** | 0 | $\bar{1}.5543$ | 33 | $\bar{1}.5842$ | 37 | 0.4158 | 5 | $\bar{1}.9702$ | 0 | **69** |
| | 10 | $\bar{1}.5576$ | 33 | $\bar{1}.5879$ | 38 | 0.4121 | 5 | $\bar{1}.9697$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.5609$ | 32 | $\bar{1}.5917$ | 37 | 0.4083 | 5 | $\bar{1}.9692$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.5641$ | 32 | $\bar{1}.5954$ | 37 | 0.4046 | 5 | $\bar{1}.9687$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.5673$ | 31 | $\bar{1}.5991$ | 37 | 0.4009 | 5 | $\bar{1}.9682$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.5704$ | 32 | $\bar{1}.6028$ | 36 | 0.3972 | 5 | $\bar{1}.9677$ | 10 | |
| **22** | 0 | $\bar{1}.5736$ | 31 | $\bar{1}.6064$ | 36 | 0.3936 | 5 | $\bar{1}.9672$ | 0 | **68** |
| | 10 | $\bar{1}.5767$ | 31 | $\bar{1}.6100$ | 36 | 0.3900 | 6 | $\bar{1}.9667$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.5798$ | 30 | $\bar{1}.6136$ | 36 | 0.3864 | 5 | $\bar{1}.9661$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.5828$ | 31 | $\bar{1}.6172$ | 36 | 0.3828 | 5 | $\bar{1}.9656$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.5859$ | 30 | $\bar{1}.6208$ | 35 | 0.3792 | 5 | $\bar{1}.9651$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.5889$ | 30 | $\bar{1}.6243$ | 36 | 0.3757 | 6 | $\bar{1}.9646$ | 10 | |
| **23** | 0 | $\bar{1}.5919$ | 29 | $\bar{1}.6279$ | 35 | 0.3721 | 5 | $\bar{1}.9640$ | 0 | **67** |
| | 10 | $\bar{1}.5948$ | 30 | $\bar{1}.6314$ | 34 | 0.3686 | 6 | $\bar{1}.9635$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.5978$ | 29 | $\bar{1}.6348$ | 35 | 0.3652 | 5 | $\bar{1}.9629$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.6007$ | 29 | $\bar{1}.6383$ | 34 | 0.3617 | 6 | $\bar{1}.9624$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.6036$ | 29 | $\bar{1}.6417$ | 35 | 0.3583 | 5 | $\bar{1}.9618$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.6065$ | 28 | $\bar{1}.6452$ | 34 | 0.3548 | 6 | $\bar{1}.9613$ | 10 | |
| **24** | 0 | $\bar{1}.6093$ | 28 | $\bar{1}.6486$ | 34 | 0.3514 | 5 | $\bar{1}.9607$ | 0 | **66** |
| | 10 | $\bar{1}.6121$ | 28 | $\bar{1}.6520$ | 33 | 0.3480 | 6 | $\bar{1}.9602$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.6149$ | 28 | $\bar{1}.6553$ | 34 | 0.3447 | 6 | $\bar{1}.9596$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.6177$ | 28 | $\bar{1}.6587$ | 33 | 0.3413 | 6 | $\bar{1}.9590$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.6205$ | 27 | $\bar{1}.6620$ | 34 | 0.3380 | 5 | $\bar{1}.9584$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.6232$ | 27 | $\bar{1}.6654$ | 33 | 0.3346 | 6 | $\bar{1}.9579$ | 10 | |
| **25** | 0 | $\bar{1}.6259$ | | $\bar{1}.6687$ | | 0.3313 | | $\bar{1}.9573$ | 0 | **65** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |



| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | 分 | 度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **25** | 0 | $\bar{1}.6259$ | 27 | $\bar{1}.6687$ | 33 | 0.3313 | 6 | $\bar{1}.9573$ | 0 | **65** |
| | 10 | $\bar{1}.6286$ | 27 | $\bar{1}.6720$ | 32 | 0.3280 | 6 | $\bar{1}.9567$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.6313$ | 27 | $\bar{1}.6752$ | 33 | 0.3248 | 6 | $\bar{1}.9561$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.6340$ | 26 | $\bar{1}.6785$ | 32 | 0.3215 | 6 | $\bar{1}.9555$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.6366$ | 26 | $\bar{1}.6817$ | 33 | 0.3183 | 6 | $\bar{1}.9549$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.6392$ | 26 | $\bar{1}.6850$ | 32 | 0.3150 | 6 | $\bar{1}.9543$ | 10 | |
| **26** | 0 | $\bar{1}.6418$ | 26 | $\bar{1}.6882$ | 32 | 0.3118 | 7 | $\bar{1}.9537$ | 0 | **64** |
| | 10 | $\bar{1}.6444$ | 26 | $\bar{1}.6914$ | 32 | 0.3086 | 6 | $\bar{1}.9530$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.6470$ | 25 | $\bar{1}.6946$ | 31 | 0.3054 | 6 | $\bar{1}.9524$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.6495$ | 26 | $\bar{1}.6977$ | 32 | 0.3023 | 6 | $\bar{1}.9518$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.6521$ | 25 | $\bar{1}.7009$ | 31 | 0.2991 | 7 | $\bar{1}.9512$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.6546$ | 24 | $\bar{1}.7040$ | 32 | 0.2960 | 6 | $\bar{1}.9505$ | 10 | |
| **27** | 0 | $\bar{1}.6570$ | 25 | $\bar{1}.7072$ | 31 | 0.2928 | 7 | $\bar{1}.9499$ | 0 | **63** |
| | 10 | $\bar{1}.6595$ | 25 | $\bar{1}.7103$ | 31 | 0.2897 | 6 | $\bar{1}.9492$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.6620$ | 24 | $\bar{1}.7134$ | 31 | 0.2866 | 7 | $\bar{1}.9486$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.6644$ | 24 | $\bar{1}.7165$ | 31 | 0.2835 | 6 | $\bar{1}.9479$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.6668$ | 24 | $\bar{1}.7196$ | 30 | 0.2804 | 7 | $\bar{1}.9473$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.6692$ | 24 | $\bar{1}.7226$ | 31 | 0.2774 | 7 | $\bar{1}.9466$ | 10 | |
| **28** | 0 | $\bar{1}.6716$ | 24 | $\bar{1}.7257$ | 30 | 0.2743 | 6 | $\bar{1}.9459$ | 0 | **62** |
| | 10 | $\bar{1}.6740$ | 23 | $\bar{1}.7287$ | 30 | 0.2713 | 7 | $\bar{1}.9453$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.6763$ | 24 | $\bar{1}.7317$ | 31 | 0.2683 | 7 | $\bar{1}.9446$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.6787$ | 23 | $\bar{1}.7348$ | 30 | 0.2652 | 7 | $\bar{1}.9439$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.6810$ | 23 | $\bar{1}.7378$ | 30 | 0.2622 | 7 | $\bar{1}.9432$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.6833$ | 23 | $\bar{1}.7408$ | 30 | 0.2592 | 7 | $\bar{1}.9425$ | 10 | |
| **29** | 0 | $\bar{1}.6856$ | 22 | $\bar{1}.7438$ | 29 | 0.2562 | 7 | $\bar{1}.9418$ | 0 | **61** |
| | 10 | $\bar{1}.6878$ | 23 | $\bar{1}.7467$ | 30 | 0.2533 | 7 | $\bar{1}.9411$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.6901$ | 23 | $\bar{1}.7497$ | 29 | 0.2503 | 7 | $\bar{1}.9404$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.6923$ | 23 | $\bar{1}.7526$ | 30 | 0.2474 | 7 | $\bar{1}.9397$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.6946$ | 22 | $\bar{1}.7556$ | 29 | 0.2444 | 7 | $\bar{1}.9390$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.6968$ | 22 | $\bar{1}.7585$ | 29 | 0.2415 | 8 | $\bar{1}.9383$ | 10 | |
| **30** | 0 | $\bar{1}.6990$ | | $\bar{1}.7614$ | | 0.2386 | | $\bar{1}.9375$ | 0 | **60** |
| | | logcos | 差 | logcot | 差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |

| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **30** | 0 | $\bar{1}.6990$ | 22 | $\bar{1}.7614$ | 30 | 0.2386 | 7 | $\bar{1}.9375$ | 0 | **60** |
| | 10 | $\bar{1}.7012$ | 21 | $\bar{1}.7644$ | 29 | 0.2356 | 7 | $\bar{1}.9368$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7033$ | 22 | $\bar{1}.7673$ | 28 | 0.2327 | 8 | $\bar{1}.9361$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7055$ | 21 | $\bar{1}.7701$ | 29 | 0.2299 | 7 | $\bar{1}.9353$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7076$ | 21 | $\bar{1}.7730$ | 29 | 0.2270 | 8 | $\bar{1}.9346$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7097$ | 21 | $\bar{1}.7759$ | 29 | 0.2241 | 7 | $\bar{1}.9338$ | 10 | |
| **31** | 0 | $\bar{1}.7118$ | 21 | $\bar{1}.7788$ | 28 | 0.2212 | 8 | $\bar{1}.9331$ | 0 | **59** |
| | 10 | $\bar{1}.7139$ | 21 | $\bar{1}.7816$ | 29 | 0.2184 | 8 | $\bar{1}.9323$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7160$ | 21 | $\bar{1}.7845$ | 28 | 0.2155 | 7 | $\bar{1}.9315$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7181$ | 20 | $\bar{1}.7873$ | 29 | 0.2127 | 8 | $\bar{1}.9308$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7201$ | 21 | $\bar{1}.7902$ | 28 | 0.2098 | 8 | $\bar{1}.9300$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7222$ | 20 | $\bar{1}.7930$ | 28 | 0.2070 | 8 | $\bar{1}.9292$ | 10 | |
| **32** | 0 | $\bar{1}.7242$ | 20 | $\bar{1}.7958$ | 28 | 0.2042 | 8 | $\bar{1}.9284$ | 0 | **58** |
| | 10 | $\bar{1}.7262$ | 20 | $\bar{1}.7986$ | 28 | 0.2014 | 8 | $\bar{1}.9276$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7282$ | 20 | $\bar{1}.8014$ | 28 | 0.1986 | 8 | $\bar{1}.9268$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7302$ | 20 | $\bar{1}.8042$ | 28 | 0.1958 | 8 | $\bar{1}.9260$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7322$ | 20 | $\bar{1}.8070$ | 27 | 0.1930 | 8 | $\bar{1}.9252$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7342$ | 19 | $\bar{1}.8097$ | 28 | 0.1903 | 8 | $\bar{1}.9244$ | 10 | |
| **33** | 0 | $\bar{1}.7361$ | 19 | $\bar{1}.8125$ | 28 | 0.1875 | 8 | $\bar{1}.9236$ | 0 | **57** |
| | 10 | $\bar{1}.7380$ | 20 | $\bar{1}.8153$ | 27 | 0.1847 | 9 | $\bar{1}.9228$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7400$ | 19 | $\bar{1}.8180$ | 28 | 0.1820 | 8 | $\bar{1}.9219$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7419$ | 19 | $\bar{1}.8208$ | 27 | 0.1792 | 8 | $\bar{1}.9211$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7438$ | 19 | $\bar{1}.8235$ | 28 | 0.1765 | 9 | $\bar{1}.9203$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7457$ | 19 | $\bar{1}.8263$ | 27 | 0.1737 | 8 | $\bar{1}.9194$ | 10 | |
| **34** | 0 | $\bar{1}.7476$ | 18 | $\bar{1}.8290$ | 27 | 0.1710 | 9 | $\bar{1}.9186$ | 0 | **56** |
| | 10 | $\bar{1}.7494$ | 19 | $\bar{1}.8317$ | 27 | 0.1683 | 8 | $\bar{1}.9177$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7513$ | 18 | $\bar{1}.8344$ | 27 | 0.1656 | 9 | $\bar{1}.9169$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7531$ | 19 | $\bar{1}.8371$ | 27 | 0.1629 | 9 | $\bar{1}.9160$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7550$ | 18 | $\bar{1}.8398$ | 27 | 0.1602 | 9 | $\bar{1}.9151$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7568$ | 18 | $\bar{1}.8425$ | 27 | 0.1575 | 8 | $\bar{1}.9142$ | 10 | |
| **35** | 0 | $\bar{1}.7586$ | | $\bar{1}.8452$ | | 0.1548 | | $\bar{1}.9134$ | 0 | **55** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |



| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **35** | 0 | $\bar{1}.7586$ | 18 | $\bar{1}.8452$ | 27 | 0.1548 | 9 | $\bar{1}.9134$ | 0 | **55** |
| | 10 | $\bar{1}.7604$ | 18 | $\bar{1}.8479$ | 27 | 0.1521 | 9 | $\bar{1}.9125$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7622$ | 18 | $\bar{1}.8506$ | 27 | 0.1494 | 9 | $\bar{1}.9116$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7640$ | 17 | $\bar{1}.8533$ | 26 | 0.1467 | 9 | $\bar{1}.9107$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7657$ | 18 | $\bar{1}.8559$ | 27 | 0.1441 | 9 | $\bar{1}.9098$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7675$ | 17 | $\bar{1}.8586$ | 27 | 0.1414 | 9 | $\bar{1}.9089$ | 10 | |
| **36** | 0 | $\bar{1}.7692$ | 18 | $\bar{1}.8613$ | 26 | 0.1387 | 10 | $\bar{1}.9080$ | 0 | **54** |
| | 10 | $\bar{1}.7710$ | 17 | $\bar{1}.8639$ | 27 | 0.1361 | 9 | $\bar{1}.9070$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7727$ | 17 | $\bar{1}.8666$ | 26 | 0.1334 | 9 | $\bar{1}.9061$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7744$ | 17 | $\bar{1}.8692$ | 26 | 0.1308 | 10 | $\bar{1}.9052$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7761$ | 17 | $\bar{1}.8718$ | 27 | 0.1282 | 9 | $\bar{1}.9042$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7778$ | 17 | $\bar{1}.8745$ | 26 | 0.1255 | 10 | $\bar{1}.9033$ | 10 | |
| **37** | 0 | $\bar{1}.7795$ | 16 | $\bar{1}.8771$ | 26 | 0.1229 | 9 | $\bar{1}.9023$ | 0 | **53** |
| | 10 | $\bar{1}.7811$ | 17 | $\bar{1}.8797$ | 27 | 0.1203 | 10 | $\bar{1}.9014$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7828$ | 16 | $\bar{1}.8824$ | 26 | 0.1176 | 9 | $\bar{1}.9004$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7844$ | 17 | $\bar{1}.8850$ | 26 | 0.1150 | 10 | $\bar{1}.8995$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7861$ | 16 | $\bar{1}.8876$ | 26 | 0.1124 | 10 | $\bar{1}.8985$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7877$ | 16 | $\bar{1}.8902$ | 26 | 0.1098 | 10 | $\bar{1}.8975$ | 10 | |
| **38** | 0 | $\bar{1}.7893$ | 17 | $\bar{1}.8928$ | 26 | 0.1072 | 10 | $\bar{1}.8965$ | 0 | **52** |
| | 10 | $\bar{1}.7910$ | 16 | $\bar{1}.8954$ | 26 | 0.1046 | 10 | $\bar{1}.8955$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.7926$ | 15 | $\bar{1}.8980$ | 26 | 0.1020 | 10 | $\bar{1}.8945$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.7941$ | 16 | $\bar{1}.9006$ | 26 | 0.0994 | 10 | $\bar{1}.8935$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.7957$ | 16 | $\bar{1}.9032$ | 26 | 0.0968 | 10 | $\bar{1}.8925$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.7973$ | 16 | $\bar{1}.9058$ | 26 | 0.0942 | 10 | $\bar{1}.8915$ | 10 | |
| **39** | 0 | $\bar{1}.7989$ | 15 | $\bar{1}.9084$ | 26 | 0.0916 | 10 | $\bar{1}.8905$ | 0 | **51** |
| | 10 | $\bar{1}.8004$ | 16 | $\bar{1}.9110$ | 25 | 0.0890 | 11 | $\bar{1}.8895$ | 50 | |
| | 20 | $\bar{1}.8020$ | 15 | $\bar{1}.9135$ | 26 | 0.0865 | 10 | $\bar{1}.8884$ | 40 | |
| | 30 | $\bar{1}.8035$ | 15 | $\bar{1}.9161$ | 26 | 0.0839 | 10 | $\bar{1}.8874$ | 30 | |
| | 40 | $\bar{1}.8050$ | 16 | $\bar{1}.9187$ | 25 | 0.0813 | 11 | $\bar{1}.8864$ | 20 | |
| | 50 | $\bar{1}.8066$ | 15 | $\bar{1}.9212$ | 26 | 0.0788 | 10 | $\bar{1}.8853$ | 10 | |
| **40** | 0 | $\bar{1}.8081$ | | $\bar{1}.9238$ | | 0.0762 | | $\bar{1}.8843$ | 0 | **50** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |

| 度 | 分 | logsin | 差 | logtan | 通差 | logcot | 差 | logcos | 分 | 度 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **40** | 0 | Ī.8081 | 15 | Ī.9238 | 26 | 0.0762 | 11 | Ī.8843 | 0 | **50** |
| | 10 | Ī.8096 | 15 | Ī.9264 | 25 | 0.0736 | 11 | Ī.8832 | 50 | |
| | 20 | Ī.8111 | 14 | Ī.9289 | 26 | 0.0711 | 11 | Ī.8821 | 40 | |
| | 30 | Ī.8125 | 15 | Ī.9315 | 26 | 0.0685 | 10 | Ī.8810 | 30 | |
| | 40 | Ī.8140 | 15 | Ī.9341 | 25 | 0.0659 | 11 | Ī.8800 | 20 | |
| | 50 | Ī.8155 | 14 | Ī.9366 | 26 | 0.0634 | 11 | Ī.8789 | 10 | |
| **41** | 0 | Ī.8169 | 15 | Ī.9392 | 25 | 0.0608 | 11 | Ī.8778 | 0 | **49** |
| | 10 | Ī.8184 | 14 | Ī.9417 | 26 | 0.0583 | 11 | Ī.8767 | 50 | |
| | 20 | Ī.8198 | 15 | Ī.9443 | 25 | 0.0557 | 11 | Ī.8756 | 40 | |
| | 30 | Ī.8213 | 14 | Ī.9468 | 26 | 0.0532 | 12 | Ī.8745 | 30 | |
| | 40 | Ī.8227 | 14 | Ī.9494 | 25 | 0.0506 | 11 | Ī.8733 | 20 | |
| | 50 | Ī.8241 | 14 | Ī.9519 | 25 | 0.0481 | 11 | Ī.8722 | 10 | |
| **42** | 0 | Ī.8255 | 14 | Ī.9544 | 26 | 0.0456 | 12 | Ī.8711 | 0 | **48** |
| | 10 | Ī.8269 | 14 | Ī.9570 | 25 | 0.0430 | 11 | Ī.8699 | 50 | |
| | 20 | Ī.8283 | 14 | Ī.9595 | 26 | 0.0405 | 12 | Ī.8688 | 40 | |
| | 30 | Ī.8297 | 14 | Ī.9621 | 25 | 0.0379 | 11 | Ī.8676 | 30 | |
| | 40 | Ī.8311 | 13 | Ī.9646 | 25 | 0.0354 | 12 | Ī.8665 | 20 | |
| | 50 | Ī.8324 | 14 | Ī.9671 | 26 | 0.0329 | 12 | Ī.8653 | 10 | |
| **43** | 0 | Ī.8338 | 13 | Ī.9697 | 25 | 0.0303 | 12 | Ī.8641 | 0 | **47** |
| | 10 | Ī.8351 | 14 | Ī.9722 | 25 | 0.0278 | 11 | Ī.8629 | 50 | |
| | 20 | Ī.8365 | 13 | Ī.9747 | 25 | 0.0253 | 12 | Ī.8618 | 40 | |
| | 30 | Ī.8378 | 13 | Ī.9772 | 26 | 0.0227 | 12 | Ī.8606 | 30 | |
| | 40 | Ī.8391 | 14 | Ī.9798 | 25 | 0.0202 | 12 | Ī.8594 | 20 | |
| | 50 | Ī.8405 | 13 | Ī.9823 | 25 | 0.0177 | 13 | Ī.8582 | 10 | |
| **44** | 0 | Ī.8418 | 13 | Ī.9848 | 26 | 0.0152 | 12 | Ī.8569 | 0 | **46** |
| | 10 | Ī.8431 | 13 | Ī.9874 | 25 | 0.0126 | 12 | Ī.8557 | 50 | |
| | 20 | Ī.8444 | 13 | Ī.9899 | 25 | 0.0101 | 13 | Ī.8545 | 40 | |
| | 30 | Ī.8457 | 12 | Ī.9924 | 25 | 0.0076 | 12 | Ī.8532 | 30 | |
| | 40 | Ī.8469 | 13 | Ī.9949 | 26 | 0.0051 | 13 | Ī.8520 | 20 | |
| | 50 | Ī.8482 | 13 | Ī.9975 | 25 | 0.0025 | 12 | Ī.8507 | 10 | |
| **45** | 0 | Ī.8495 | | 0.0000 | | 0.0000 | | Ī.8495 | 0 | **45** |
| | | logcos | 差 | logcot | 通差 | logtan | 差 | logsin | 分 | 度 |

# 對數表

| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9379 | 9484 | 9489 |
| 504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 694 | 9699 | 9703 | 6708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 741 | 9745 | 9750 | 6754 | 6759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |

比例部分

| | 26 | 25 | 24 | 23 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.6 | 2.5 | 2.4 | 2.3 |
| 2 | 5.2 | 5.0 | 4.8 | 4.6 |
| 3 | 7.8 | 7.5 | 7.2 | 6.9 |
| 4 | 10.4 | 10.0 | 9.6 | 9.2 |
| 5 | 13.0 | 12.5 | 12.0 | 11.5 |
| 6 | 15.6 | 15.0 | 14.4 | 13.8 |
| 7 | 18.2 | 17.5 | 16.8 | 16.1 |
| 8 | 20.8 | 20.0 | 19.2 | 18.4 |
| 9 | 23.4 | 22.5 | 21.6 | 20.7 |

| | 22 | 21 | 19 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.2 | 2.1 | 1.9 | 1.8 |
| 2 | 4.4 | 4.2 | 3.8 | 3.6 |
| 3 | 6.6 | 6.3 | 5.7 | 5.4 |
| 4 | 8.8 | 8.4 | 7.6 | 7.2 |
| 5 | 11.0 | 10.5 | 9.5 | 9.0 |
| 6 | 13.2 | 12.6 | 11.4 | 10.8 |
| 7 | 15.4 | 14.7 | 13.3 | 12.6 |
| 8 | 17.6 | 16.8 | 15.2 | 14.4 |
| 9 | 19.8 | 18.9 | 17.1 | 16.2 |

| | 17 | 16 | 15 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.7 | 1.6 | 1.5 | 1.4 |
| 2 | 3.4 | 3.2 | 3.0 | 2.8 |
| 3 | 5.1 | 4.8 | 4.5 | 4.2 |
| 4 | 6.8 | 6.4 | 6.0 | 5.6 |
| 5 | 8.5 | 8.0 | 7.5 | 7.0 |
| 6 | 10.2 | 9.6 | 9.0 | 8.4 |
| 7 | 11.9 | 11.2 | 10.5 | 9.8 |
| 8 | 13.6 | 12.8 | 12.0 | 11.2 |
| 9 | 15.3 | 14.4 | 13.5 | 12.6 |

| | 13 | 12 | 11 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.3 | 1.2 | 1.1 |
| 2 | 2.6 | 2.4 | 2.2 |
| 3 | 3.9 | 3.6 | 3.3 |
| 4 | 5.2 | 4.8 | 4.4 |
| 5 | 6.5 | 6.0 | 5.5 |
| 6 | 7.8 | 7.2 | 6.6 |
| 7 | 9.1 | 8.4 | 7.7 |
| 8 | 18.4 | 9.6 | 8.8 |
| 9 | 11.7 | 10.8 | 9.9 |

| logcos | |
|---|---|
| .8843 | 0 50 |
| .8832 | 50 |
| .8821 | 40 |
| .8810 | 30 |
| .8800 | 20 |
| .8789 | 10 |
| .8778 | 0 49 |
| .8767 | 50 |
| .8756 | 40 |
| .8745 | 30 |
| .8733 | 20 |
| .8722 | 10 |
| 8711 | 0 48 |
| 8699 | 50 |
| 8688 | 40 |
| 8676 | 30 |
| 8665 | 20 |
| 8653 | 10 |
| 8641 | 0 47 |
| 8629 | 50 |
| 8618 | 40 |
| 8606 | 30 |
| 8594 | 20 |
| 8582 | 10 |
| 8569 | 0 46 |
| 8557 | 50 |
| 8545 | 40 |
| 8532 | 30 |
| 8520 | 20 |
| 8507 | 10 |
| 8495 | 0 45 |
| min | 分度 |

# 對數表

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4665 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 |
| 37 | 5685 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 |

比例部分

| | 43 | 42 | 41 | 39 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.3 | 4.2 | 4.1 | 3.9 |
| 2 | 8.6 | 8.4 | 8.2 | 7.8 |
| 3 | 12.9 | 12.6 | 12.3 | 11.7 |
| 4 | 17.2 | 16.8 | 16.4 | 15.6 |
| 5 | 21.5 | 21.0 | 20.5 | 19.5 |
| 6 | 25.8 | 25.2 | 24.6 | 23.4 |
| 7 | 30.1 | 29.4 | 28.7 | 27.3 |
| 8 | 34.4 | 23.6 | 32.8 | 31.2 |
| 9 | 38.7 | 37.8 | 36.9 | 35.1 |

| | 38 | 37 | 36 | 35 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.8 | 3.7 | 3.6 | 3.5 |
| 2 | 7.6 | 7.4 | 7.2 | 7.0 |
| 3 | 11.4 | 11.1 | 10.8 | 10.5 |
| 4 | 15.2 | 14.8 | 14.4 | 14.0 |
| 5 | 19.0 | 18.5 | 18.0 | 17.5 |
| 6 | 22.8 | 22.2 | 21.6 | 21.0 |
| 7 | 26.6 | 25.9 | 25.2 | 24.5 |
| 8 | 30.4 | 29.6 | 28.8 | 28.0 |
| 9 | 34.2 | 33.3 | 32.4 | 31.5 |

| | 34 | 33 | 32 | 31 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.4 | 3.3 | 3.2 | 3.1 |
| 2 | 6.8 | 6.6 | 6.4 | 6.2 |
| 3 | 10.2 | 9.9 | 9.6 | 9.3 |
| 4 | 13.6 | 13.2 | 12.8 | 12.4 |
| 5 | 17.0 | 16.5 | 16.0 | 15.5 |
| 6 | 20.4 | 19.8 | 19.2 | 18.6 |
| 7 | 23.8 | 23.1 | 22.4 | 21.7 |
| 8 | 27.2 | 26.4 | 25.6 | 24.8 |
| 9 | 30.6 | 29.7 | 28.8 | 27.9 |

| | 29 | 28 | 27 |
|---|---|---|---|
| 1 | 2.9 | 2.8 | 2.7 |
| 2 | 5.8 | 5.6 | 5.4 |
| 3 | 8.7 | 8.4 | 8.1 |
| 4 | 11.6 | 11.2 | 10.8 |
| 5 | 14.5 | 14.0 | 13.5 |
| 6 | 17.4 | 16.8 | 16.2 |
| 7 | 20.3 | 19.6 | 18.9 |
| 8 | 23.2 | 22.4 | 21.6 |
| 9 | 26.1 | 25.2 | 24.3 |

| 數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 55 | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 |
| 56 | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 |
| 57 | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 |
| 58 | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 |
| 59 | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 |
| 60 | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 |
| 61 | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 |
| 62 | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 |
| 63 | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 |
| 64 | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 |
| 65 | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 |
| 66 | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 |
| 67 | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 |
| 68 | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 |
| 69 | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 |
| 70 | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 |
| 71 | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 |
| 72 | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 |
| 73 | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 |
| 74 | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 |
| 75 | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 |
| 76 | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 |
| 77 | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 |
| 78 | 8921 | 8927 | 8032 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 |
| 79 | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 |
| 80 | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 |
| 81 | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 |
| 82 | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 |
| 83 | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 |
| 84 | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 |
| 85 | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 |
| 86 | 9345 | 6350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 |
| 87 | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 |
| 88 | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9379 | 9484 | 9489 |
| 89 | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 |
| 90 | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 |
| 91 | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 |
| 92 | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 |
| 93 | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 6708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 |
| 94 | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 6754 | 6759 | 9763 | 9768 | 9773 |
| 95 | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 |
| 96 | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 |
| 97 | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 |
| 98 | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 |
| 99 | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 |

比例部分

| | 26 | 25 | 24 | 23 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.6 | 2.5 | 2.4 | 2.3 |
| 2 | 5.2 | 5.0 | 4.8 | 4.6 |
| 3 | 7.8 | 7.5 | 7.2 | 6.9 |
| 4 | 10.4 | 10.0 | 9.6 | 9.2 |
| 5 | 13.0 | 12.5 | 12.0 | 11.5 |
| 6 | 15.6 | 15.0 | 14.4 | 13.8 |
| 7 | 18.2 | 17.5 | 16.8 | 16.1 |
| 8 | 20.8 | 20.0 | 19.2 | 18.4 |
| 9 | 23.4 | 22.5 | 21.6 | 20.7 |

| | 22 | 21 | 19 | 18 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2.2 | 2.1 | 1.9 | 1.8 |
| 2 | 4.4 | 4.2 | 3.8 | 3.6 |
| 3 | 6.6 | 6.3 | 5.7 | 5.4 |
| 4 | 8.8 | 8.4 | 7.6 | 7.2 |
| 5 | 11.0 | 10.5 | 9.5 | 9.0 |
| 6 | 13.2 | 12.6 | 11.4 | 10.8 |
| 7 | 15.4 | 14.7 | 13.3 | 12.6 |
| 8 | 17.6 | 16.8 | 15.2 | 14.4 |
| 9 | 19.8 | 18.9 | 17.1 | 16.2 |

| | 17 | 16 | 15 | 14 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.7 | 1.6 | 1.5 | 1.4 |
| 2 | 3.4 | 3.2 | 3.0 | 2.8 |
| 3 | 5.1 | 4.8 | 4.5 | 4.2 |
| 4 | 6.8 | 6.4 | 6.0 | 5.6 |
| 5 | 8.5 | 8.0 | 7.5 | 7.0 |
| 6 | 10.2 | 9.6 | 9.0 | 8.4 |
| 7 | 11.9 | 11.2 | 10.5 | 9.8 |
| 8 | 13.6 | 12.8 | 12.0 | 11.2 |
| 9 | 15.3 | 14.4 | 13.5 | 12.6 |

| | 13 | 12 | 11 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.3 | 1.2 | 1.1 |
| 2 | 2.6 | 2.4 | 2.2 |
| 3 | 3.9 | 3.6 | 3.3 |
| 4 | 5.2 | 4.8 | 4.4 |
| 5 | 6.5 | 6.0 | 5.5 |
| 6 | 7.8 | 7.2 | 6.6 |
| 7 | 9.1 | 8.4 | 7.7 |
| 8 | 18.4 | 9.6 | 8.8 |
| 9 | 11.7 | 10.8 | 9.9 |

## 比 例 部 分 表

| | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4.4 | 4.5 | 4.6 | 4.7 | 4.8 | 4.9 | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.4 | 5.5 | 5.6 |
| 2 | 8.8 | 9.0 | 9.2 | 9.4 | 9.6 | 9.8 | 10.2 | 10.4 | 10.6 | 10.8 | 11.0 | 11.2 |
| 3 | 13.2 | 13.5 | 13.8 | 14.1 | 14.4 | 14.7 | 15.3 | 15.6 | 15.9 | 16.2 | 16.5 | 16.8 |
| 4 | 17.6 | 18.0 | 18.4 | 18.8 | 19.2 | 19.6 | 20.4 | 20.8 | 21.2 | 21.6 | 22.0 | 22.4 |
| 5 | 22.0 | 22.5 | 23.0 | 23.5 | 24.0 | 24.5 | 25.5 | 26.0 | 26.5 | 27.0 | 27.5 | 28.0 |
| 6 | 26.4 | 27.0 | 27.6 | 28.2 | 28.8 | 29.4 | 30.6 | 31.2 | 31.8 | 32.4 | 33.0 | 33.6 |
| 7 | 0.8 | 31.5 | 32.2 | 32.9 | 33.6 | 34.3 | 35.7 | 36.4 | 37.1 | 37.8 | 38.5 | 39.2 |
| 8 | 35.2 | 36.0 | 36.8 | 37.6 | 38.4 | 39.2 | 40.8 | 41.6 | 42.4 | 43.2 | 44.0 | 44.8 |
| 9 | 39.6 | 40.5 | 41.4 | 42.3 | 43.2 | 44.1 | 45.9 | 46.8 | 47.7 | 48.6 | 49.5 | 50.4 |

| | 57 | 58 | 59 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5.7 | 5.8 | 5.9 | 6.1 | 6.2 | 6.3 | 6,4 | 6.5 | 6.6 | 6.7 | 6.8 | 6.9 |
| 2 | 11.4 | 11.6 | 11.8 | 12.2 | 12.4 | 12.6 | 12.8 | 13.0 | 13.2 | 13.4 | 13.6 | 13.8 |
| 3 | 17.1 | 17.4 | 17.7 | 18.3 | 18.6 | 18.9 | 19.2 | 19.5 | 19.8 | 20,1 | 20.4 | 20.7 |
| 4 | 22.8 | 23.2 | 23.6 | 24.4 | 24.8 | 25.2 | 25.6 | 26.0 | 26.4 | 26.8 | 27.2 | 27.6 |
| 5 | 28.5 | 29.0 | 29.5 | 30.5 | 31.0 | 31.5 | 32.0 | 32.5 | 33.0 | 33.5 | 34.0 | 34.5 |
| 6 | 34.2 | 34.8 | 35.4 | 36.6 | 37.2 | 37.8 | 38.4 | 39.0 | 39.6 | 40.2 | 40.8 | 41.4 |
| 7 | 39.9 | 40.6 | 41.3 | 42.7 | 43.4 | 44.1 | 44.8 | 45.5 | 46.2 | 46.9 | 47.6 | 48.3 |
| 8 | 45.6 | 46.4 | 47.2 | 48.8 | 49.6 | 50.4 | 51.2 | 52.0 | 52.8 | 53.6 | 54.4 | 55.2 |
| 9 | 51.3 | 52.2 | 53.1 | 54.9 | 55.8 | 56.7 | 57.6 | 58.5 | 59.4 | 60.3 | 61.2 | 62.1 |

| | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 81 | 82 | 83 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7.1 | 7.2 | 7.3 | 7.4 | 7.5 | 7.6 | 7.7 | 7.8 | 7.9 | 8.1 | 8.2 | 8.3 |
| 2 | 14.2 | 14.4 | 14.6 | 14.8 | 15.0 | 15.2 | 15.4 | 15.6 | 15.8 | 16.2 | 16.4 | 16.6 |
| 3 | 21.3 | 21.6 | 21.9 | 22,2 | 22.5 | 22.8 | 23.1 | 23.4 | 23.7 | 24.3 | 24.6 | 24.9 |
| 4 | 28.4 | 28.8 | 29.2 | 29.6 | 30.0 | 30.4 | 30.8 | 31.2 | 31.6 | 32.4 | 32.8 | 33.2 |
| 5 | 35.5 | 36.0 | 36.5 | 37.0 | 37.5 | 38.0 | 38.5 | 39.0 | 39.5 | 40.5 | 41.0 | 41.5 |
| 6 | 42.6 | 43.2 | 43.8 | 44.4 | 45.0 | 45.6 | 46.2 | 46.8 | 47.4 | 48.6 | 49.2 | 49.8 |
| 7 | 49.7 | 50.4 | 51.1 | 51.8 | 52.5 | 53.2 | 53.9 | 54.6 | 55.3 | 56.7 | 57.4 | 58.1 |
| 8 | 56.8 | 57.6 | 58.4 | 59.2 | 60.0 | 60.8 | 61.6 | 62.4 | 63.2 | 64.8 | 65.6 | 66.4 |
| 9 | 63.9 | 64.8 | 65.7 | 66.6 | 67.5 | 68.4 | 69.3 | 70.2 | 71.1 | 72.9 | 73.8 | 74.7 |

| | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8.4 | 8.5 | 8.6 | 8.7 | 8.8 | 8.9 | 9.1 | 9.2 | 9.3 | 9.4 | 9.5 | 9.6 |
| 2 | 16.8 | 17.0 | 17.2 | 17.4 | 17.6 | 17.8 | 18.2 | 18.4 | 18.6 | 18.8 | 19.0 | 19.2 |
| 3 | 25.2 | 25.5 | 25.8 | 26.1 | 26.4 | 26.7 | 27.3 | 27.6 | 27.9 | 28.2 | 28.5 | 28.8 |
| 4 | 33.6 | 34.0 | 34.4 | 34.8 | 35.2 | 35.6 | 36.4 | 36.8 | 37.2 | 37.6 | 38.0 | 38.4 |
| 5 | 42.0 | 42.5 | 43.0 | 43.5 | 44.0 | 44.5 | 45.5 | 46.0 | 46.5 | 47.0 | 47.5 | 48.0 |
| 6 | 50.4 | 51.0 | 51.6 | 52.2 | 52.8 | 53.4 | 54.6 | 55.2 | 55.8 | 56.4 | 57.0 | 57.6 |
| 7 | 58.8 | 59.5 | 60.2 | 60.9 | 61.6 | 62.3 | 63.7 | 64.4 | 65.1 | 65.8 | 66.5 | 67.2 |
| 8 | 67.2 | 68.0 | 68.8 | 69.6 | 70.4 | 71.2 | 72.8 | 73.6 | 74.4 | 75.2 | 76.0 | 76.8 |
| 9 | 75.6 | 76.5 | 77.4 | 78.3 | 79.2 | 80.1 | 81.9 | 82.8 | 83.7 | 84.6 | 85.5 | 86.4 |

昭和六年四月十日　印刷
昭和六年四月廿二日　發行



高等三角法

定價金貳圓

編纂　東京高等工學校

編輯兼發行者　北村一郎
東京市本郷區追分町五十七

印刷者　小川義一
東京市牛込區市谷台町廿二

印刷所　成武堂印刷所
東京市牛込區市谷台町廿二

發行所（東京市本郷區追分町五七）有文閣

終