初高中學生必備

代數難題詳解

上海大方書局印行

初高中學生必備

代數難題詳解

全一冊 實價

編纂者 楊家景

出版者 大方書局

發行人 李協和

總發行所 大方書局

代售處 全國各大書局

上海大方書局印行

編 輯 大 意

1. 本書編輯之目的，在適應中學生參考之需要，使讀者以最短之時間，最少之精力，而能獲得最大之成效。
2. 本書網羅各教科書之項目，殆悉蒐無遺，篇幅雖少，然精華皆已採取，極便復習與記憶。
3. 本書不另設習題，惟注重舉例，學者能留意於此，便可舉一反三。（末章之應用問題百條詳解，已另闢單行本，名代數習題詳解，其解答詳明，且附驗算，以求喚起讀者之興趣，而為準備之幫助。）
4. 本書編輯之時間，非常匆促，謬訛之處，恐屬難免，尚望愛讀諸君有以正之幸甚！

代數難題詳解

上册目次

下　册

代數難題詳解

上　册

第一章　緒論

1. <u>代數之定義</u>　代數爲算學之一分科，繼續算術，而用記號以研究數之關係及性質者也。

2. <u>代數與算術之區別</u>　算術專論特殊之數，而代數除討論特殊之數外，同時用 a, b, c, ……x, y, z 等文字，簡明其計算之路徑，以代說明，且其所研究之範圍較算術爲廣。

3. <u>代數之需要</u>　算術與代數，同爲研究數之科學，吾人既習算術，爲何又要學代數呢？簡而言之，用算術解題，着手很難，或無求解之可能，即算術解法有時而窮，尚有莫大之缺點，而代數絕無上述之弊，故欲救濟此種缺點，對於代數之研求，實爲一件很需要之事，茲舉二例，以證算術解法着手之難與有時不能解決。

例 1. 某人坐船由家至蕉嶺，去時逆水，每時二里，回時順水，每時五里，來回共費七時，求某人之家至蕉嶺之距離?

例 2. $\sqrt[5]{100}=?$

本來例 1 可用算術方法去解，然而已使學者想了許久矣，至於例 2，在算術，便無法解決。倘吾人熟習代數，則毫無困難，其中妙趣，習後自能領會，現在不必先說。

4. 代數之特點　代數之特點很多，難以盡述，其原因就在應用活的文字符號來表數，不比算術上宥於十個死的數字(1, 2, 3, ……9, 0.)。約舉其要，可分三點:

(1) 使演算簡單而顯明。

(2) 使結果能普遍適用。

(3) 使解法方便而敏捷。

茲各舉一例，以證所言。

例 1. 魚每斤值銀 5 角，則魚 3 斤值銀幾角?
4, 5, 6, ……斤各值幾角?

在算術，欲表明魚之價值，須用下之許多式子:

魚 3 斤所值之銀數 $=5\times3$

魚 4 斤所值之銀數 $=5\times4$

魚 5 斤所值之銀數 $=5\times5$

魚 6 斤所值之銀數 $=5\times6$

………………………………。

上列之式中，每式僅有一用；然在代數，用 p 代表魚之任何斤數之價值，w 代表所買之斤數，前面之式子，就可用符號改寫成 $p=5w$，此式不比前面諸式來得簡單而顯明嗎？

〔註：5w 就是 $5\times w$ 之省寫，在代數，凡數字與文字相乘，或文字與文字相乘，或一數與括號內之數相乘，其乘號恆略而不寫。〕

例 2. 大小二數之和爲 10，差爲 4，求兩數？

在算術，

大數 $=(10+4)\div2=7$

小數 $=(10-4)\div2=3$

每一式只有一用，若將數字改變，效用就會消失。在代數，用 a 表兩數之和，b 表兩數之差，x 表大數，y 表小數，則上兩式可改寫成：

$$x=(a+b)\div2$$

$$y=(a-b)\div2$$

無論和差如何變更，均可適用，代入便得，故代數所得之結果能普遍適用。

例 3. 甲數 2 倍於乙數，乙數 3 倍於丙數，而甲丙兩數之差爲 75，求各數？

〔解〕 設丙數爲 x，則乙數爲 $3x$，甲數爲 $6x$，依題意，得右之關係：

$6x-x=75$， 卽 $5x=75$

$\therefore\ x=15$

$\therefore$ 丙數 $=15$， 乙數 $=3\times15=45$

甲數 $=6\times15=90$

用文字表數立式，其答數立卽可求，豈非方便而敏捷！

5. 代數符號 代數之符號有五：一爲運算號——加 $+$，減 $-$，乘 $\times$，除 $\div$，開方 $\sqrt{\ }$．但乘法符號，恆略而不記，如 $a\times b\times c=abc$，$3\times a=3a$，$7\times b\times y=7by$，又除法符號，常以括線代之，如 $x\div4=\dfrac{x}{4}$，

$(a+b)\div(x+y)=\dfrac{a+b}{x+y}$．二爲關係號——等 $=$，不等 $\neq$，大於 $>$，小於 $<$，不大於 $\not>$，不小於 $\not<$。三爲括號——括線——，圓括 ( )，

方括〔 〕，曲括{ }。四爲性質號——正＋，負－。五爲語言號——∵代因爲，∴代所以。

6. 代數之文字使用法　代數所以比算術來得簡單而有用，其要點即在應用活的文字符號來表數，前已言之，然則文字如何使用，當爲學者所樂聽，實則學習文字之使用法，即爲代數之基礎。

茲舉數例，以推其餘：

(a) 以 x 表一數，則 ax 就表這數之 a 倍。

(b) 以 x 表連續三整數之中間數，則 $x-1$ 表他之前一數，$x+1$ 表他之後一數。

(c) 以 a 表一人今年之年齡，則 $a-x$ 就表他 x 年前之年齡，$a+x$ 就表他 x 年後之年齡。

(d) 以 a 表甲所有銀之元數，b 表乙所有銀之元數，則甲給乙 x 元後，甲有銀 $a-x$ 元，乙有銀 $a+x$ 元。

(e) 以 x 表每日行路里數，a 表日數，則 ax 就表所行之路程。

(f) 以 x, y, z 順次表一個三位數之單位、十位、百位數，則 $100z+10y+x$ 就表這個

數，$100x+10y+z$ 就表這個數單位和百位調換後之數。

7. 代數式及其種類　將若干個數及文字聯以加減乘除等運算符號，便成一代數式，簡稱為式。如 $2+3-x$, $9x+5a$. 其種類有二：(以整式而言)

(a) 單項式——僅含一項之代數式。(項之意義見下。)

如　$3ab$,　a^2bc^3.

(b) 多項式——含二項以上之代數式。

如　x^2+y,　$x+2y-z$ 等(其中二項者，特稱二項式；三項者，稱三項式。)

8. 代數式之項及其次數　代數式中用加減號隔離之各部，稱為項，如 a^2+b^2c-4d 中有 a^2, b^2c, $4d$ 三項。項之次數，如係單項式，應看該項中文字因式之指數來決定，如 $3x^2y$ 是 x, y 之三次式。如係多項式，應看式中最高次項之次數為標準，如 x^3+2x^2+x-4, 就叫做三次式。

9. 代數式之值　對於代數式之某文字，代以某特別值，以求此式之數值，謂之此代數式之

值。此法則，常用以精密試驗代數演算法之結果。

例 1. 設 $a=3,\ b=4,\ c=5,\ d=6$

則 $ab+c-d=3\times4+5-6=11$

例 2. 設圓之半徑爲 γ，圓周率爲 π，面積爲 s，則由圓面積公式，得 $s=\pi\gamma^2$

令 $\gamma=2$，則 s 之值爲何？$(\pi=3.1416)$

〔解〕 $s=\pi\gamma^2=3.1416\times2^2=12.5664$

10. 因數，指數，係數　若干個數或文字相乘而得一項，則此若干個數或文字稱爲該項之因數，如 $5xy$ 中，5 爲 $5xy$ 之因數；$x,\ y,\ 5x,\ 5y$ 亦皆爲 $5xy$ 之因數。

a 之 2 乘，3 乘，……n 乘，順次用 $a^2,\ a^3,\ \ldots\ldots a^n$ 表示，此在 a 右上角之數字或文字，皆稱曰 a 之指數。

一中項中以某因數爲主，其他諸因數之積稱爲該因數之係數。如 ax 中，a 爲 x 之係數。$5xy$ 中，$5x$ 爲 y 之係數，$5y$ 也爲 x 之係數，5 爲 xy 之係數。對於係數之規定，學者應注意下之兩個慣例：

(a) 凡係數爲 1 者，該係數恆省而不寫。

如 1x 應寫爲 x, 1xy 應寫爲 xy。

(b) 凡數字之係數,恆置於文字之前。

如 4x 不應寫爲 x4, 7xy 不應寫爲 xy7 或 x7y.

11. 同類項　兩項中,至多只有係數不同的,稱爲同類項。如 3x 與 7x 爲同類項。7y 與 13y 也爲同類項。至於 3x 與 7y 則非同類項,7x 與 13y 也非同類項。

12. 零之四則

(a) 加法: 任何數加零或零加任何數均爲任何數。

如　$a+0=a$,　$0+a=a$.

(b) 減法: 任何數減零爲任何數, 任何數減任何數爲零。

如　$a-0=a$,　$a-a=0$.

(c) 乘法: 任何數乘零,或零乘任何數。其結果均爲零;若干個數之連乘積爲零時,則其中至少有一因數爲零。

如　$a\times 0=0$,　$0\times a=0$.

又　$a\times b=0$,　則 $a=0$ 或 $b=0$.

(d) 除法: 任何數(除零外)除零,其商爲零;

零除不等於零之任何數，均為不可能；零除零，其商為任何數。

如 $\frac{0}{a}=0$， $\frac{0}{0}=n\cdots\cdots$任何數，

$\frac{a}{0}$ 無意義可言。

13. 括號之除去與插入

(a) 去括號法 括號前為加號，除去時，括號內各項之記號不變；括號前為減號，除去時，括號內各項之記號一律改變，即變加為減，變減為加；若括號前有係數，可以此係數遍乘括號內各項而去其括號。

如 $a+(b-c)=a+b-c$

$a-(b-c)=a-b+c$

$a+m(b-c)=a+mb-mc$

(b) 插入括號法 括號前用加號，括入各項不必改變記號；括號前用減號，括入各項前面之記號，均須改變。

如 $a+b-c=a+(b-c)$

$a-b+c=a-(b-c)$

14. 運算之順序 僅由加減或乘除所成之式，運算之順序自左而右，如加減乘除混雜之式，

則先乘除後加減。

如 $8+12-10+6=20-10+6$

$=10+6=16$

$8\times12\div6\times4=96\div6\times4$

$=16\times4=64$

$6+4\times9-12\div3=6+36-4$

$=42-4=38.$

15. 等式及其分類　A, B 兩式(或數)之值如相等，便可用等號"＝"聯結 A, B. 而得 $A=B$, 此 $A=B$ 稱爲等式，A 與 B 各稱爲等式之一邊，等式分三類：

(a) 所含未知數(未知其值者)可任表何值者，稱爲恆等式。

如 $y+3y=4y$ 中，y 可表任何值。

(b) 所含未知數只能表適當之值而不能任表何值者，稱爲方程式。

如 $x+2x=6$ 中，x 只能爲 2.

(c) 書以表示關於計算法則之等式，稱爲公式。

如 三角形之底邊長 a 寸，高 b 寸，面積 s 平方寸時，則公式爲 $s=\frac{1}{2}ab.$

16. 等量公理及其應用　　等量公理（顯而易見之道理）有四：

(a) 等量加等量，其和仍相等。

如　$a=b$　則　$a+c=b+c$

(b) 等量減等量，其差仍相等。

如　$a=b$　則　$a-c=b-c$

(c) 等量乘等量，其積仍相等。

如　$a=b$　則　$ac=bc$

(d) 等量除等量，其商仍相等。

如　$a=b$　則　$a\div c=b\div c$

其應用，就在解簡易方程式，舉例如下：

例 1.　解　$\frac{2}{3}x=32$

〔**解法**〕依 (c) 得　$\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}x=32\times\frac{3}{2}$

$\therefore\ x=48$

例 2.　解　$3x+14=15x-10$

〔**解法**〕依 (b)　$3x+14-3x$

$=15x-10-3x$

再依(a)　$3x+14-3x+10$

$=15x-10-3x+10$

卽　$14+10=15x-3x$

$$\text{即}\quad 12x=24$$

$$\text{由}\quad (d)\ x=\frac{24}{12}=2.$$

17. 負數,正數,絕對值。

2－5＝?在算術上,因被減數太小,不能相減。然仔細考究,被減數雖嫌太小,但所少幾何,又豈無大小之分別!所以代數上,乃就這所少之量加以推求。於是因

2－5 所少爲 3, 就說 2－5 得"負 3" 以"－3"記之。

由此可知減法運算在算術有時而窮,而在代數,因爲增加了負數,於是任何不名數之減法,便無不可運算之例外了。

故　比 0 小之數,在前面用－號表示,稱爲負數。

如 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ 此(－)稱負號。

反之,比 0 大之數,在前面用＋號表示,稱爲正數。

如 $+1, +2, +3, \cdots\cdots$ 此(＋)稱正號。

0 介乎正數與負數之間,不屬於正數或負數,正負數及 0, 稱爲代數數。置於正負數前之

$+$、$-$號，稱為數之性質符號。數之前面，沒有數之性質符號的，稱其數的絕對值。

如 $+5$ 之絕對值為 5，

-10 之絕對值為 10.

正負數之大小，從左到右，順序如下：

$\cdots\cdots +5, +4, +3, +2, +1,\ \ 0, -1, -2, -3, -4, -5, \cdots\cdots$

故正數愈大，其絕對值愈大；負數愈大，其絕對值愈小。關於正負數之實例很多，茲舉二例如下：

(a) 如正數表寒暑表 0 度以上之度數，則 0 度以下之度數以負數表之。

(b) 如正數表某人所有之資產，則其所欠人之債款以負數表之。

18. 正負數之四則

(a) 加法

1. 同號二數之和，等於其絕對值之和，記以公共之符號。

如 $(+2)+(+3)=+5,$

$(-5)+(-4)=-9.$

2. 異號二數之和，等於其絕對值之差，記

以絕對值較大之符號。

如 $(+6)+(-4)=+2$,

$(-15)+(+7)=-8$.

3. 絕對值相等,而符號相異之二數,其和爲零。

如 $(-3)+(+3)=0$

(b) 減法 減法爲加法之反求,故二數相減,可變其符號而加於被減數。

如 $9-(-5)=9+(+5)=14$

$9-(+5)=9+(-5)=4$

(c) 乘法

1. 同號二數之積,等於二數絕對值之積,記以正號。

如 $(+2)(+5)=+10$,

$(-7)(-6)=+42$.

2. 異號二數之積,等於二數絕對值之積,記以負號。

如 $(-2)(+5)=-10$,

$(+7)(-6)=-42$.

3. 二以上之數相乘,若負數之個數爲奇,其積爲負;爲偶則其積爲正。

如 $(-2)(-5)(-6)(+8)=-480$

$(-3)(-4)(+4)(+5)=+240$

(d) 除法 除法爲乘法之反求，故二數相除，其符號規則與乘法同，卽同號爲正，異號爲負。

如 $(+6)\div(+2)=+3,$

$(-9)\div(-3)=+3.$

$(+6)\div(-2)=-3,$

$(-9)\div(+3)=-3.$

由 (a), (b), (c), (d) 可得符號定則如下：(設 $a>b>0$)

1. $(+a)+(+b)=+(a+b)$
2. $(-a)+(-b)=-(a+b)$
3. $(+a)+(-b)=+(a-b)$
4. $(-a)+(+b)=-(a-b)$
5. $(+a)+(-a)=0$
6. $a-(+b)=a+(-b)$
7. $a-(-b)=a+(+b)$
8. $(+a)(+b)=+ab$
9. $(-a)(-b)=+ab$
10. $(+a)(-b)=-ab$

11. $(-a)(+b)=-ab$

12. $(+ab)\div(+a)=+b$

13. $(-ab)\div(-a)=+b$

14. $(-ab)\div(+a)=-b$

15. $(+ab)\div(-a)=-b$

19. 運算定律

(a) 交換律

1. 諸數之和,不拘其被加數之順序。

如 $a+b+c=b+a+c$
$=c+b+a=\cdots\cdots$

2. 諸數之積,可不拘其因數之順序。

如 $a\times b\times c=a\times c\times b$
$=b\times c\times a=\cdots\cdots$

(b) 結合律

1. 求諸數之和, 可任意集合若干項爲若干羣,而後相加。

如 $a+b+c+d=a+(b+c+d)$
$=(a+b)+(c+d)=\cdots\cdots$

2. 求諸數之積, 可任意集合若干因數爲若干羣,而後相乘。

如 $a\times b\times c=a\times(b\times c)$

$$=b\times(a\times c)=\cdots\cdots$$

(c) 分配律

1. 以某數乘由若干項所成之式，可以此數乘其各項。

如 $(a+b+c+d)m$

$$=am+bm+cm+dm.$$

2. 以某數除由若干項所成之式，可以此數除其各項。

如 $(a+b+c+d)\div n$

$$=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}+\frac{d}{n}.$$

20. 簡單之加減乘除法　根據前節之定律，便可解決簡單之加減乘除，學者務須熟練，切勿因其淺易而忽略之。

例 1. 求 $7x+6x-9x=?$

〔解〕 由前節分配律之 1.立得下面之公式

$$am+bm-cm=(a+b-c)m$$

據此，便得

$$7x+6x-9x=(7+6-9)x=4x.$$

例 2. 求 $8(5m+3n-7)=?$

〔解〕 由例 1.

$$(a+b+c)m=am+bm-cm$$

據此，立得

$$8(5m+3n-7)$$

$$=8\times5m+8\times3n-8\times7$$

$$=40m+24n-56.$$

例 3. 求 $36m\div3=?$

〔**解**〕 除法爲乘法之還原，在乘法既有

$$by\times a=aby$$

在除法應得

$$aby\div a=by=(ab\div a)y$$

卽 $my\div n=(m\div n)y$

據此，立得

$$36m\div3=(36\div3)m=12m.$$

第二章 整式四則

加 法

1. 單項式之加法 許多單項式相加，卽以性質之符號爲計算之符號，順次連接書許多單項式爲多項式，若多項式中有同類項，須化合

同類項爲一項。

例1. 求　$4xy, -5x^2y, -2xy, -7xy,$ $2x^2y$ 之和。

〔解〕　先順次書各單項式爲次之多項式。

$$4xy-5x^2y-2xy-7xy+2x^2y.$$

次分求同類項之和。

$4xy, -2xy, -7xy$ 之和爲 $-5xy$.

$-5x^2y, +2x^2y$ 之和爲 $-3x^2y$.

故所求之和爲 $-5xy-3x^2y$.

例2. 求　$4a^2b, -3ab^2, b^3, -2c$ 之和。

〔解〕　書爲次之多項式。

$$4a^2b-3ab^2+b^3-2c.$$

此多項式中無同類項，故此多項式卽所求之和。

例3. 求　$5(a+b), -4(a+b), -6(a+b)$ 之和。

〔解〕　書爲次之多項式。

$$5(a+b)-4(a+b)-6(a+b).$$

此多項式之各項，同有因數 $(a+b)$，故其和爲

$$(5-4-6)(a+b), \text{卽 } -5(a+b).$$

2. 多項式之加法　加多項式於他一多項式，即於被加之多項式之右，接書加之多項式，若加得之多項式中，有同類項，須併同類項。多項式相加，通常爲便利計，恆將各式上下書之，使其同類項在同一縱列，然後用心算集其同類。

例 1. 求 $a^2+3ab-5b^2$ 與 $-2a^2-4ab+7b^2$ 與 $13a^2-10ab-3b^2$ 之和。

解 1.
$$\begin{aligned}&a^2+3ab-5b^2-2a^2-4ab+7b^2\\&+13a^2-10ab-3b^2\\&=a^2-2a^2+13a^2+3ab-4ab\\&-10ab-5b^2+7b^2-3b^2\\&=12a^2-11ab-b^2.\end{aligned}$$

解 2.
$$\begin{array}{r}a^2+\ \ 3ab-5b^2\\-2a^2-\ \ 4ab+7b^2\\13a^2-10ab-3b^2\\\hline 12a^2-11ab-b^2.\end{array}$$

例 2. 求 $2x^3-5x^2+7x+6$,

$-6x-4+3x^2-3x^3$,

$-3x-5x^3-7$ 之和。

〔解〕 多項式 $-6x-4+3x^2-3x^3$, 等於

$-6x$, -4, $+3x^2$, $-3x^3$ 之和，因與各項之先後次序無關係，故變換其次序為 $-3x^3+3x^2-6x+4$, 以便運算。又 $-3x-5x^3-7$, 亦變換其次序為 $-5x^3-3x+7$, 此多項式，無含 x^2 之一項，在運算式中，宜空含 x^2 之項之位置。

$$
\begin{array}{rrrr}
2x^3 & -5x^2 & +7x & +6 \\
-3x^3 & +3x^2 & +6x & +4 \\
-5x^3 & & -3x & -7 \\
\hline
-6x^3 & -2x^2 & -2x & -5.
\end{array}
$$

例 3.　求　a^3-a^2+a, a^2-a+1, a^4-a^3-1 之和。

〔**解**〕

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & a^3 & -a^2 & +a & \\
 & & a^2 & -a & +1 \\
a^4 & -a^3 & & & -1 \\
\hline
a^4 & & & &
\end{array}
$$

例 4.　求　$\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{3}x^4$,　$\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$,

$\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x+1$ 之和。

〔解〕

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{2}x^5-\frac{1}{3}x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\\
\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2 \qquad\qquad\qquad\\
\frac{1}{3}x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{1}{2}x+1\\
\hline
\frac{1}{2}x^5+\frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^5+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1
\end{array}
$$

減 法

1. 單項式之減法　單項式之減法，即變換所減之單項式之符號，而加於被減數。

例 1. 從 $14ab$ 減 $-4ab$.

〔解〕 變換 $-4ab$ 之符號爲 $+4ab$, 以之加於 $14ab$, 因 $14ab+4ab=18ab$, 故答爲 $18ab$.

例 2. 從 $+2abc$ 減 $6ab$.

〔解〕 變換 $6ab$ 之符號爲 $-6ab$, 以之加於 $2abc$, 得 $2abc-6ab$, 此例無同類項，不能合併，故 $2abc-6ab$ 即所求之答.

2. 多項式之減法　從多項式減多項式，即變換減之多項式之符號，而加於被減數。多項式相

減，通常為便利計，亦如加法，變減式各項之符號，置於被減式之下，使其同類項在同一縱列，然後用心算集其同類項。

例 1. 試從 $4a^2+5ab-b^2$ 減 $a^2-2ab+3b^2$.

解 1. $4a^2+5ab-b^2-a^2+2ab-3b^2$

$$=3a^2+7ab-4b^2$$

解 2.

$$\begin{array}{r} 4a^2+5ab-b^2 \\ -a^2+2ab-3b^2 \\ \hline 3a^2+7ab-4b^2 \end{array}$$

例 2. 從 $4a^2-6ab+6b^2-1$, 減 $-3a^2-4ab+6b^2+6$.

〔解〕

$$\begin{array}{r} 4a^2-6ab+6b^2-1 \\ -3a^2-4ab+6b^2+6 \\ \hline 7a^2-2ab\qquad\quad-7 \end{array}$$

例 3. 從 $x^4-3x^3+2x^2-5x-1$, 減 $-2x^3+x^2-5x-1$.

〔解〕

$$\begin{array}{r} x^4-3x^3+2x^2-5x-1 \\ -2x^3+x^2-5x-1 \\ \hline x^4-x^3+x^2\qquad\qquad \end{array}$$

例 4. 從 $\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^2+x$, 減 $\frac{1}{3}x^5+2x^2$

$$+\frac{1}{2}xy+2y^2$$

〔解〕 $$\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3+\frac{2}{3}x^2+x$$

$$\frac{1}{3}x^5 \qquad\qquad +2x^2 \qquad +\frac{1}{2}xy+2y^2$$

$$-\frac{1}{3}x^5+\frac{1}{3}x^4-\frac{1}{2}x^3-1\frac{1}{3}x^2+x-\frac{1}{2}xy-2y^2$$

乘 法

1. 單項式與單項式之乘法 書若干單項式之積,第一項注意符號,先求各單項式之數係數之積,次於求得積之數係數之右,書各單項式之文字因數。其各文字因數中,若有同文字之冪,則用各指數之和爲指數,而併同文字之冪爲一文字之冪。

例 1. 計算 $\frac{4}{5}xy^2\times\left(-\frac{1}{4}yz\right)\times 5x^2z^2.$

〔解〕 數係數之積爲 $\frac{4}{5}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times 5=-1$

文字因數之積爲 $xy^2yzx^2z^2$ 卽 $x^3y^3z^3$,

故 $\frac{4}{5}xy^2\times\left(-\frac{1}{4}yz\right)\times 5x^2z^2$

$$= -x^3y^3z^3$$

例 2. 試證 $(abcd)^3 = a^3b^3c^3d^3$.

〔證〕 $(abcd)^3 = (abcd)(abcd)(abcd)$

$$= abcdabcdabcd$$

$$= aaabbbcccddd = a^3b^3c^3d^3.$$

例 3. 化 $(a^3)^2$ 為簡單之式。

〔解〕 $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^{3\times 2} = a^6.$

例 4. 化 $(-a)^3 \times (-a^4)$ 為簡單之式。

〔解〕 因 $(-a)^3 = (-1)^3 \times a^3$

$$= -1 \times a^3 = -a^3$$

$$(-a)^4 = (-1)^4 \times a^4$$

$$= +1 \times a^4 = +a^4$$

故 $(-a)^3 \times (-a)^4 = (-a^3)(+a^4)$

$$= (-1) \times a^3 \times (+1) \times a^4$$

$$= (-1) \times (+1) \times a^3 \times a^4$$

$$= -a^7.$$

2. 單項式與多項式之乘法　以單項式乘多項式,即以單項式乘多項式之各項,然後求其諸積之和。

例 1. $(-5b)(2a - 5bc + b^2)$

$$= (-5b)2a - 5b(-5bc) - 5b(b^2)$$

$$= -10ab+25b^2c-5b^3.$$

例 2. $-pq\left(-\frac{1}{3}p^3+\frac{2}{5}p^2q-3pq^2+q^3\right)$

$$=+\frac{1}{3}p^4p-\frac{2}{5}p^3q^2+3p^2q^3-pq^4.$$

3. 多項式與多項式之乘法　兩多項式相乘，以乘數之各項，一一乘被乘數之各項，諸積相加為所求之積。

例 1. 以 $-4x\times x^2+11$ 乘 $4x^2+5x-24+x^3$.

〔解〕 先以被乘數與乘數，同依 x 之降冪排列，然後以乘數之第一項 x^2 乘被乘數之各項，得 $x^5+4x^4+5x^3-24x^2$，又以乘數之第二項 $-4x$，乘被乘數之各項，得 $-4x^4-16x^3-20x^2+96x$，又以乘數之第三項 $+11$，乘被乘數之各項，得 $11x^3+44x^2+55x-264$，三次乘得之式相加，得 $x^5+151x-264$ 為所求之積。

$$\begin{array}{l}
x^3+4x^2+5x-24 \\
\underline{x^2-4x+11} \\
x^5+4x^4+5x^3-24x^2
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x^4-16x^3-20x^2+96x \qquad\qquad \\ 11x^3+44x^2+55x-264 \\ \hline x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad +151x-264. \end{array}$$

例 2. 求 $x-a^2, x+a^2, x^2+a^4$ 之連乘積。

〔解〕

$$\begin{array}{r} x-a^2 \qquad \\ x+a^2 \qquad \\ \hline x^2-a^2x \qquad \\ +a^2x-a^4 \\ \hline x^2 \qquad -a^4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2-a^4 \qquad \\ x^2+a^4 \qquad \\ \hline x^4-a^4x^2 \qquad \\ +a^4x^2-a^8 \\ \hline x^4 \qquad -a^8 \end{array}$$

答　其連乘積爲 x^4-a^8.

例 3. 化 $(a-b)(a-c)-(b-c)(b-a)+(c-a)(c-b)-c(-2a+b+c)$ 爲簡單之式。

〔解〕　實行乘法

$$(a-b)(a-c)=a^2-ab-ac+bc$$

$$(b-c)(b-a)=b^2-bc-ab+ac$$

$$(c-a)(c-b)=c^2-ac-bc+ab$$

$$c(-2a+b+c)=-2ac+bc+c^2$$

$$\text{故題式}=(a^2-ab-ac+bc)$$
$$-(b^2-bc-ab+ac)$$
$$+(c^2-ac-bc+ab)$$

$$-(-2ac+bc+c^2)$$
$$=a^2-ab-ac+bc-b^2+bc$$
$$+ab-ac+c^2-ac-bc+ab$$
$$+2ac-bc-c^2$$
$$=a^2+ab-ac-b^2.$$

4. 公式　一式表一定之結果，可以通用於一切者，曰公式。茲彙列以下，用公式而求乘法之積，甚爲便利。

(A) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

例 求 $2x+3y$ 之平方。

解 第一數 $2x$ 之平方爲 $2x\times2x=4x^2$

第一數 $2x$ 乘第二數 $3y$ 之積之二倍爲

$2\times2x\times3y=12xy.$

第二數 $3y$ 之平方爲 $3y\times3y=9y^2$

故 $(2x+3y)^2=4x^2+12xy+9y^2.$

(B) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

例 求 x^2-y 之平方。

解 第一數 x^2 之平方爲 x^4

第一數 x^2 乘第二數 y 之積之二倍爲

$2\times x^2\times y=2x^2y.$

第二數 y 之平方爲 y^2

故 $(x^2-y)^2=x^4-2x^2y+y^2$.

(C)　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

例　化 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$ 為簡單之式。

解　$(x-1)(x+1)=x^2-1^2=x^2-1$

$(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1^2=x^4-1$

$(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1^2=x^8-1$

故 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$=x^8-1$。

(D)　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

例　求 $(x+5)$ 與 $(x+2)$ 之積。

解　兩括弧內之二項式，相同之項為 x，不同之項為 $+5$ 與 $+2$，依公式得：

積之第一項為 x^2

積之第二項為 $+(5+2)x=+7x$

積之第三項為 $+(+5)(+2)=+10$

故 $(x+5)(x+2)=x^2+7x+10$.

(E)　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+bcx+adx+bd$

例　求 $(5x+3)(3x+2)$ 之積。

解　$(5x+3)(3x+2)=5\times3\times x^2+3\times3\times x+5\times2\times x+3\times2$

$$=15x^2+9x+10x+6$$
$$=15x^2+19x+6.$$

(F) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

例 求 $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$ 之積。

解 $(9a^2=(3a)^2,\ 4b^2=(2b)^2,$
$6ab=(3a)(2b)$

故 $(3a+2b)(9a^2-6ab+4b^2)$
$$=(3a)^3+(2b)^3=27a^3+8b^3.$$

(G) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

例 求 $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$ 之積。

解 $2xy=x(2y),\ 4y^2=(2y)^2$

故 $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$
$$=x^3-(2y)^3=x^3-8y^3.$$

(H) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

例 計算 $3x+\frac{1}{2}$ 之立方。

解 $$\left(3x+\frac{1}{2}\right)^3=(3x)^3+3(3x)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$+3(3x)\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3$$
$$=27x^3+\frac{27}{2}x^2+\frac{9}{4}x+\frac{1}{8}.$$

(I)　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

例　計算 $2a-b$ 之立方。

解　$(2a-b)^3=(2a)^3-3(2a)^2(b)$

$+3(2a)(b)^2-(b)^3$

$=8a^3-12a^2b+6ab^2-b^3$.

除　法

1. 單項式除單項式之法　以單項式除他單項式，第一注意符號，以除數之數係數，除被除數之數係數，得商之數係數，其右接書從被除數之文字因數減除數與之相同之文字因數所餘之文字因數。

例 **1.**　以 $-10x^3yz$ 除 $4x^4y^2z$.

〔解〕　$4\div(-10)=-\dfrac{4}{10}=-\dfrac{2}{5}$

$x^4\div x^3=x,\ y^2\div y=y,\ z\div z=1$

故　$\dfrac{4x^4y^2z}{-10x^3yz}=-\dfrac{2}{5}xy$.

例 **2.**　以 $5x(y+z)$ 除 $30x^3(y+z)^2$.

〔解〕　$(y+z)$ 爲 y 與 z 之和，可視爲一數，依前法求之。

$$30 \div 5 = 6,\quad x^3 \div x = x^2,$$

$$(y+z)^2 \div (y+z) = (y+z)$$

故 $\dfrac{30x^3(y+z)^2}{5x(y+z)} = 6x^2(y+z).$

2. 單項式除多項式之法　以單項式除多項式之商,即以單項式除多項式之各項之商之和。

例 1. 以 $-8a^2x^3$ 除 $12a^2b^3x^5 - 24a^3b^2x^3 + 8a^3bx^3 - 16a^2x^4$.

〔解〕 $\dfrac{12a^2b^3x^5}{-8a^2x^3} = -\dfrac{3}{2}b^3x^2,$

$\dfrac{-24a^3b^2x^3}{-8a^2x^3} = +3ab^2,$

$\dfrac{+8a^3bx^3}{-8a^2x^3} = -ab,$

$\dfrac{-16a^2x^4}{-8a^2x^3} = +2x,$

故 $\dfrac{12a^2b^3x^5 - 24a^3b^2x^3 + 8a^3bx^3 - 16a^2x^4}{-8a^2x^3}$

$$= -\frac{3}{2}b^3x^2 + 3ab^2 - ab + 2x.$$

例 2. $(6a^2b^6 - 24a^3b^5 + 42a^5b^3) \div 6a^2b^3.$

$= 6a^2b^6 \div 6a^2b^3 - 24a^3b^5 \div 6a^2b^3$

$+ 42a^5b^3 \div 6a^2b^3$

$$=b^3-4ab^2+7a^3.$$

例 3. 以 $x+y$ 除 $5x^2(x+y)^3+2xy(x+y)^2+y^2(x+y)$.

〔解〕 以 $(x+y)$ 為一數計算

$$\frac{5x^2(x+y)^3}{x+y}=5x^2(x+y)^2,$$

$$\frac{2xy(x+y)^2}{x+y}=2xy(x+y),$$

$$\frac{y^2(x+y)}{x+y}=y^2$$

故 $$\frac{5x^2(x+y)^3+2xy(x+y)^2+y^2(x+y)}{x+y}$$

$$=5x^2(x+y)^2+2xy(x+y)+y^2.$$

3. 多項式除多項式之法　以多項式除他多項式，此二多項式，同順某文字之降冪排列或昇冪排列書之，以除數之第一項，除被除數之第一項，為商之第一項，又以除數之第一項，除從被除數減除數乘商之第一項之積之賸餘第一項，為商之第二項，又以除數之第一項，除從初次賸餘減除數乘商之第二項之積之二次賸餘第一項，為商之第三項，以下類推。

例 1. 以 $2a-b$ 除 $6a^3-7a^2b+4ab^2-b^3$.

〔解〕

$$
\begin{array}{r|l|l}
2a-b & 6a^3-7a^2b+4ab^2-b^3 & 3a^2-2ab+b^2(\text{商}) \\
 & \underline{6a^3-3a^2b} & \\
 & -4a^2b+4ab^2 & \\
 & \underline{-4a^2b+2ab^2} & \\
 & 2ab^2-b^3 & \\
 & \underline{2ab^2-b^3} &
\end{array}
$$

例 2. 以 a^2+ab+b^2 除 $a^4+a^2b^2+b^4$.

〔解〕

$$
\begin{array}{r|l|l}
a^2+ab+b^2 & a^4+a^2b^2+b^4 & a^2-ab+b^2 \\
 & \underline{a^4+a^3b+a^2b^2} & (\text{商}) \\
 & -a^3b+b^4 & \\
 & \underline{-a^3b-a^2b^2-ab^3} & \\
 & a^2b^2+ab^3+b^4 & \\
 & \underline{a^2b^2+ab^3+b^4} &
\end{array}
$$

例 3. 以 $2x^2-3x+2$ 除 $10x^4-11x^3-2x^2+13x$ -6.

〔解〕

$$
\begin{array}{l|l}
10x^4-11x^3-2x^2+13x-6 & \underline{2x^2-3x+2} \\
\underline{10x^4-15x^3+10x^2} & 5x^2+2x-3(\text{商}) \\
4x^3-12x^2+13x-6 & \\
\underline{4x^3-6x^2+4x} & \\
-6x^2+9x-6 & \\
\underline{-6x^2+9x-6} &
\end{array}
$$

例 4. 以 $a+x$ 除 $a^2+3ax+x^2$.

〔解〕

$$\begin{array}{r|l} a^2+3ax+x^2 & a+x \\ \cline{2-2} a^2+ax & a+2x\text{(商)} \\ \hline 2ax+x^2 & \\ 2ax+2x^2 & \\ \cline{1-1} -x^2 & \end{array}$$

此餘式 $-x^2$ 不含特別文字 a，即不能以 $a+x$ 除絕，可記爲

$$(a^2+3ax+x^2)\div(a+x)=a+2x-\frac{x^2}{a+x}$$

上例若將除式被除式皆順 x 之降冪排列，則

$$\begin{array}{r|l} x^2+3ax+a^2 & x+a \\ \cline{2-2} x^2+ax & x+2a\text{(商)} \\ \hline 2ax+a^2 & \\ 2ax+2a^2 & \\ \cline{1-1} -a^2 & \end{array}$$

即 $(x^2+3ax+a^2)\div(x+a)=x+2a-\dfrac{a^2}{x+a}$

上二式皆爲除法當然之結果，惟前者係順 x 之昇冪排列，後者係順 x 之降冪排列，遂致商式餘式之外形，判然不同，故在不能除絕之除法，其結果每因文字之排列而異。

4. 公式

(A) $(a^2+2ab+b^2)\div(a+b)=a+b$

例 $(4x^2+12xy+9y^2)\div(2x+3y)$

$=[(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2]$

$\div(2x+3y)=2x+3y.$

(B) $(a^2-2ab+b^2)\div(a-b)=a-b$

例 $(x^4-2x^2y+y^2)\div(x^2-y)$

$=[(x^2)^2-2(x^2)(y)+(y)^2]\div(x^2-y)$

$=x^2-y.$

(C) $(a^2-b^2)\div(a+b)=a-b$

例 $(9a^2-4b^2)\div(3a+2b)$

$=[(3a)^2-(2b)^2]\div(3a+2b)=3a-2b.$

(D) $[x^2+(a+b)x+ab]\div(x+a)=x+b$

例 $(x^2+7x+10)\div(x+5)$

$=[x^2+(5+2)x+(5\times2)]\div(x+5)$

$=x+2.$

(E) $(a^3+b^3)\div(a+b)=a^2-ab+b^2$

例 $(27a^3+8b^3)\div(3a+2b)$

$=[(3a)^3+(2b)^3]\div(a+b)$

$=(3a)^2-(3a)(2b)+(2b)^2$

$=9a^2-6ab+4b^2.$

(F) $(a^3-b^3)\div(a-b)=a^2+ab+b^2$

例　$(x^3-8y^3)\div(x-2y)$

$=[(x)^3-(2y)^3]\div(x-2y)$

$=(x)^2+(x)(2y)+(2y)^2$

$=x^2+2xy+4y^2.$

(G)　$(a^3+b^3+c^3-3abc)\div(a+b+c)$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

例　$(8x^3+27y^3+64c^3-72cxy)$

$\div(2x+3y+4c)$

$=[(2x)^3+(3y)^3+(4c)^3$

$-3(2x)(3y)(4c)]\div(2x+3y+4c)$

$=(2x)^2+(3y)^2+(4c)^2-(2x)(3y)$

$-(3y)(4c)-(4c)(2x)$

$=4x^2+9y^2+16c^2-6xy-12cy-8cx.$

第三章　一次方程式

一次方程式與應用問題

1. 方程式　　等式中之文字，非以特別之值代之,兩邊不能相等者,謂之方程式。

例　$x+1=4$, 任意以 1 代其 x, 則 $1+1=4$,不

合於理。惟以 3 代 x, 則 $4=4$, 故 3 爲 x 之特別之値。凡等式限定以特別之値代其文字,兩邊始能相等者,卽爲方程式。

2. 未知數與旣知數及方程式之根　凡方程式中之文字,須以特別之値代之,始成能等式,其文字謂之未知數。至於文字之値,或爲問題中所已言者,或能改易他數者,其文字謂之旣知數。而未知數之特別之値,謂之方程式之根。旣知數有時以數字表之,或以羅馬文字次序在前之 a, b, c, d 等文字表之。而未知數常以次序在後之 x, y, z, u, v 等文字表之。

3. 方程式之元及方程式之次數　含一未知數之方程式,謂之一元方程式,如 $3y^2+2y+4=0$. 含二未知數之方程式,謂之二元方程式,如 $3x+2y=7$. 依此類推,凡含幾未知數之方程式,卽爲幾元方程式,如 $3x+5xyz=3$ 爲三元方程式。

全移整方程式之各項於一邊,以 A 表其項,則 $A=0$, 視 A 爲幾次式,卽稱爲幾次方程式,如

$3x+1=0$……………………一元一次方程式

$3x+2y+3=0$……………二元一次方程式

$3x+2y+z-3=0$……三元一次方程式

$2x^2+3x+4=0$…………一元二次方程式

$3x^2+5xy+1=0$………二元二次方程式

$4xy+2z^2+3=0$………三元二次方程式

依此區別方程式爲幾元幾次方程式甚易。

4. 公理　解方程式，常用下之公理。

(a) 相等之二數，各以同數或等數加之，其和仍相等。

(b) 相等之二數，各以同數或等數減之，其差仍相等。

(c) 相等之二數，各以同數或等數乘之，其積仍相等。

(d) 相等之二數，各以同數或等數除之，其商仍相等。

例　設 $a=b$, $c=d$, 則

$a+c=b+d$ 或 $a+c=b+c$

$a-c=b-d$ 或 $a-c=b-c$

$a\times c=b\times d$ 或 $a\times c=b\times c$

$a\div c=b\div d$ 或 $a\div c=b\div d$

5. 一元一次方程式之解法　先將未知數各項盡移於左邊，已知數之各項盡移於右邊，如方

程式有分數者，則先以分母之最小公倍數乘之，化爲整數，然後移項，次集其同類項，而以未知數之係數除兩邊，即得。解後，欲知其所得之根果適合於方程式否，可用驗算法驗之。

例 1. 解 $3(x-2)+5=2(x-3)+11$.

〔解〕 先撤去兩邊之括弧，則 $3x-6+5=2x-6+11$，又以右邊含 x 之項移於左邊，以左邊之已知數移於右邊，得

$3x-2x=-6+11+6-5$，即 $x=6$

驗 以 6 代題式左邊及右邊之 x，分爲二式如次：

$$3(x-2)+5=3(6-2)+5=17$$

$$2(x-3)+11=2(6-3)+11=17$$

故 $x=6$，滿足原方程式。

例 2. 解 $2(x-3)(2x+5)=(2x+3)^2-109$.

〔解〕 依法變化，得 $4x^2-2x-4x^2-12x=9-109+30$. 即 $-14x=-70$，兩邊同以 -14 除之，得 $x=\frac{-70}{-14}=5$.

驗 左邊 $=2(5-3)(2\times5+5)$

$=4\times15=60$

右邊 $=(2\times5+3)^2-109$

$=169-109=60$

故 $x=5$, 滿足原方程式。

例 3. 解 $\frac{x}{2}-3=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}$.

〔解〕 先去分數之分母，故以分母之最小公倍數 20 乘之，

$$\frac{20x}{2}-3\times20=\frac{20x}{4}+\frac{20x}{5},$$

即 $10x-60=5x+4x$,

移項 $10x-5x-4x=60$, 即 $x=60$.

驗 $\frac{x}{2}-3=\frac{60}{2}-3=30-3=27$

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=\frac{60}{4}+\frac{60}{5}=15+12=27$$

故 $x=60$, 滿足原方程式。

例 4. 解 $\frac{3x^2-2x-8}{5}=\frac{(7x-2)(3x-6)}{35}$.

〔解〕 以分母之最小公倍數 35 乘之，得

$7(3x^2-2x-8)=(7x-2)(3x-6)$,

去兩邊之括弧，

$21x^2-14x-56=21x^2-4x+12$,

以含未知數之項移於左邊，以已知數之項移於右邊，得

$21x^2-14x-21x^2+48x=12+56,$

即 $34x=68$, 兩邊同以 34 除之，得

$$x=\frac{68}{34}=2.$$

驗 $$\frac{3x^2-2x-8}{5}=\frac{3\times 2^2-2\times 2-8}{5}$$

$$=\frac{12-4-8}{5}=0$$

$$\frac{(7x-2)(3x-6)}{35}=\frac{(7\times 2-2)(3\times 2-6)}{35}$$

$$=\frac{12\times 0}{35}=0$$

故 $x=2$, 滿足原方程式。

例 5. 解 $x+4.\dot{3}=0.\dot{6}x+0.5x-0.\dot{3}.$

〔**解**〕 先化小數分數，得

$$x+4\frac{3}{9}=\frac{6}{9}x+\frac{5}{10}x-\frac{3}{9}$$

次化帶分數爲假分數，幷約諸分數爲簡分數，得 $x+\frac{13}{9}=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3},$

以分母之最小公倍數 6 乘之，得

$6x+26=4x+3x-2,$

移項 得 $6x-4x-3x=-2-26,$

卽 $-x=-28,$ 變兩邊之符號，得

$x=28.$

驗 $x+4.\dot{3}=28+4.\dot{3}=32.\dot{3}=32\frac{1}{3}$

$0.\dot{6}x+0.5x-0.\dot{3}$

$=\frac{2}{3}\times 28+0.5\times 28-\frac{1}{3}$

$=\frac{56}{3}+14-\frac{1}{3}=\frac{56-1}{3}+14=32\frac{1}{3}$

故 $x=28,$ 滿足原方程式。

6. 一元一次方程式之公式形狀及根之研究

一元一次方程式右邊之各項，全移於左邊，化爲最簡，常得 $ax+b=0$，此爲公式。如移不含未知數之項於右邊，以 x 之係數 a 除其兩邊，則 $x=-\frac{b}{a}$，此爲根之公式。在公式中，如常數項爲 0，則根亦爲 0，如 x 之係數與常數項之符號相同，則其根爲負數。又 x 之係數與常數項之符號不同，則根爲正數。卽

(1) 若 $b=0$，則 $-\frac{b}{a}=\frac{0}{a}=0$，而根爲 0.

(2) 若 $b>0$, 則從 a 之正負，有次之二種區別:

(a) $a>0$, 則$\frac{b}{a}$爲正數，而$-\frac{b}{a}$爲負數，故根爲負。

(b) $a<0$, 則$\frac{b}{a}$爲負數，而$-\frac{b}{a}$爲正數，故根爲正。

(3) 若 $b<0$, 則從 a 之正負，有次之二種區別:

(a) $a>0$, 則$\frac{b}{a}$爲負數，而$-\frac{b}{a}$爲正數，故根爲正。

(b) $a<0$, 則$\frac{b}{a}$爲正數，而$-\frac{b}{a}$爲負數，故根爲負。

7. 定理

(1) 以 c 代方程式 $ax+b=0$ 左邊之 x, 若 $ac+b=0$, 則 c 卽方程式之根。

例 以 2 代 $3x+\frac{2-7x}{3}-2$ 之 x, 則

$$3x+\frac{2-7x}{3}-2=3\times2+\frac{2-7\times2}{3}-2=0$$

故 2 即此方程式之根。

(2) 以 c 代方程式 $ax+b=0$ 左邊之 x，若 $ac+b$ 與 a 之符號相同，則 c 大於方程式之根。

例　以 2 代 $7x+3=0$ 之 x，則

$7x+3=7\times2+3>0$

因 $7\times2+3$ 與 x 之係數 7，同爲正數，知 2 大於此方程式之根。

(3) 以 c 代方程式 $ax+b=0$ 左邊之 x，若 $ac+b$ 與 a 之符號不同，則 c 小於方程式之根。

例　以 2 代 $-11x+32=0$ 之 x，則

$-11x+32=-11\times2+32=10>0$

因 $-11\times2+32$ 與 x 之係數 -11，一爲正數，一爲負數，知 2 小於此方程式之根。

8. 不定方程式及不能方程式

(1) 若 $ax+b=0\cdots\cdots(a)$ 之 a 與 b 皆爲 0，則 (a) 式變爲 $0.x+0=0\cdots\cdots(b)$

(b)式 x 之值，無論爲何數，皆能成立，故根不定。

又先解(a)式，得 $x=-\frac{b}{a}$，然後以 0 代 a 與 b，則 $x=\frac{0}{0}$，凡方程式之結果，成如是之形狀者，謂之不定方程式。

(2) 若 $ax+b=0\cdots\cdots(a)$ 之 a 為 0，b 不為 0，則(a)式變為 $0.x+b=0\cdots\cdots(b)$
(b)式 x 之值，無論為何數，皆不能成立，故不能有根。

又先解(a)式，得 $x=-\frac{b}{a}$，然後以 0 代 a，則 $x=\frac{-b}{0}$，凡方程式之結果，成如是之形狀者，謂之不能方程式。

9. 應用問題解法之次序

(1) 定未知數

(2) 立方程式　以未知數作為已知數，依題中所言作表問題中某數之式，令等於問題中之某數，即成方程式，有時須用兩方法，求得同表一數之式，而形狀不同，以等號 = 連接之為方程式。

例　有人從甲地往乙地，乘每點鐘行 3 哩之

人力車，行至半路，下車步行，每點鐘祗行 2 哩，共行 21 點鐘，始達乙地，求甲乙兩地間之路程。

〔解〕　命所之路程為 2x 哩，則路之半為 x 哩，

乘車鐘點數為 $\frac{x}{3}$，步行鐘點數為 $\frac{x}{2}$，

此人共行之鐘點數為 $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}$，由此成

立次之等式，即 $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}=21$

此關係式，為解此問題所須之方程式。

(3) 解方程式

(4) 驗算答之恰合與否

例　(a) 某校分甲乙兩班，共有 325 人，乙班所有人數，比甲班所有人數之三分之一少 22 人，求乙班所有人數。

(b) 甲乙二人共有銀 325 元，乙所有銀，比甲所有之銀之三分之一少 22 元，求乙所有之銀數。

以上(a)，(b)二問題之方程式，同為

$x+22=\frac{1}{3}(325-x)$ 解此方程式，得

$x=64.75$，此根不合於問題(a)，而合於問題(b)，因問題(a)之答，須爲整數，但乙之所有銀爲64元7角7分，不得謂之不合理也。

如上之方程式，表問題中未知數與已知數之關係，並無錯誤，而未知數之限制，由於事實上之某條件，非方程式所能具備，雖方程式有包括性，然不能使問題中本合理之未知數變爲合理之數，故驗算方程式之根，若恰合於方程式而不合於題，則設題不合理，非運算者之咎也。

10. 應用問題解法示例

例 1. 長一尺八寸之繩。欲截爲兩段，使此段等於彼段之二倍，問各段之長。

〔解〕 設 x 爲小段之寸數，則 $18-x$ 爲大段之寸數，由題意得方程式 $18-x=2x$

移項 $3x=18$

故 $x=6$，卽小段長6寸。

又$18-x=18-6=12$，卽大段長12寸。

驗 6寸之二倍爲12寸，而小段之長與大段之長爲6寸 +12寸 =18寸 =1尺

8 寸，故求得二數，恰合題意。

例 2. 求鐘之兩針，在三時與四時間相重之時刻。

〔解〕 設三時後經 x 分，爲兩針相重之時刻，在三點鐘時，時針在分針前 15 分，故分針轉至 x 分時，時針漸轉至 $x-15$ 分，然分針之速度，爲時針速度之 12 倍，故無論何時，分針迴轉之間隔，恆爲時針迴轉間隔之 12 倍，故

$$x=12(x-15),\ 即\ x=12x-180,$$

移項 $11x=180$，即 $x=\frac{180}{11}=16\frac{4}{11}$

故所求之時間爲 3 時 $16\frac{4}{11}$ 分。

驗　可用鐘錶實地驗之。

例 3. 某工程，甲乙二人合作，4 日可成，分而作之，甲須乙 4 倍之日數，問各人作成之日數若干？

〔解〕 令乙一人成就之日數爲 x，則甲一人成就之日數爲 $4x$，甲一日之工程，爲全量 $\frac{1}{4x}$，乙一日之工程，爲全量 $\frac{1}{x}$，

二人一日之工程爲$\frac{1}{4}$，故得

$$\frac{1}{4x}+\frac{1}{x}=\frac{1}{4}$$

以 4x 乘各項，得 $1+4=x$，$\therefore x=5$，

$4x=4\times5=20$

答 甲 20 日，乙 5 日。

驗 $\frac{1}{20}+\frac{1}{5}=\frac{1+4}{20}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

例 4. 龜鶴之頭數 25，足數 70，問龜鶴各幾隻？

〔解〕 以 x 代鶴數，則 $25-x$ 爲龜數，$2x$ 爲鶴足之總數，$4(25-x)$ 爲龜足之總數，$2x+4(25-x)$ 爲鶴與龜之足之總數，題云足數 70，故得方程式爲

$$2x+4(25-x)=70$$

去括弧 $2x+100-4x=70$

移項 $-2x=-30$

兩邊以 -2 除之，得

$x=15$，　$25-x=10$.

答 鶴 15 隻，龜 10 隻。

驗 $15\times2+10\times4=30+40=70$，與題恰

合。

例 5. 有二位之數，其數字之和爲 12，而一位之數字之 6 倍，與其二位之數相等，求此二位之數。

〔解〕 設以 x 代十位之數字，則一位之數字爲 $12-x$，所以二位之數爲 $10x+(12-x)$，而一位數字之 6 倍爲 $6(12-x)$，此與二位之數相等，故得方程式爲 $10x+(12-x)=6(12-x)$

去括號，移項，則

$10x-x+6x=72-12$，即 $15x=60$

故 $x=4$，所求之二位數爲

$10\times4+(12-4)=48$.

驗 $4+8=12$，$8\times6=48$，與題恰合。

例 6. 有犬追狐，其狐行 4 步之時間，犬僅行 3 步，但犬 2 步之距離，等於狐 3 步之距離，今狐在犬前 50 步，問犬追若干步可以追及？

〔解〕 設犬追及狐之時，犬行之步數爲 $3x$，則在同時間狐行之步數爲 $4x$，因狐先行 50 步，故犬行 $3x$ 步，狐已共行

$(50+4x)$步，而犬與狐之 1 步之長，得以 3 與 2 表之，則犬行 $3x$ 步之長為 $3(3x$ 步$)$，狐行 $(50+4x)$ 步之長為 $2(50+4x)$步，故得方程式

$$3(3x)=2(50+4x)$$

去括弧，移項，得

$9x-8x=100$, 即 $x=100$

故 $3x=3\times100=300$.

答 犬行 300 步，可追及狐。

一次聯立方程式與應用問題

1. 聯立方程式　凡含二未知數以上之一組方程式，其未知數之值，同時能恰合一組之式者，其一組之方程式，謂之聯立方程式。

例 設 $a, b, c\cdots\cdots$ 為已知數，

$x, y, z\cdots\cdots$ 為未知數，則

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c\cdots\cdots(1) \\ a'x+by+c'\cdots(2) \end{array}\right\}\text{謂之聯立二元一次方程式。}$$

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=d\cdots\cdots\cdots(1) \\ a'x+b'y+c'z=d'\cdots\cdots(2) \\ a''x+b''y+c''z=d''\cdots(3) \end{array}\right\}\text{謂之聯立三元一次方程式。}$$

餘可類推。

2. 方程式之種類

(a) 如 $x+y=7\cdots\cdots(1)$

$x-y=3\cdots\cdots(2)$

(1) 式與 (2) 式所表未知數 x 與 y 之係數不同，謂之獨立方程式。

(b) 如 $x+y=7\cdots\cdots\cdots(1)$

$2x+2y=14\cdots(2)$

因(1)式之各項以 2 乘之，可得(2)式。即從第一式能引伸而得第二式，故謂之非獨立方程式。

(c) 如 $x+y=5\cdots\cdots\cdots(1)$

$3x+3y=12\cdots(2)$

以 3 除第二式之兩邊，則 $x+y=4$，此與第一式不能兩立，故此兩方程式，雖獨立而矛盾，謂之矛盾方程式。

又未知數之數，與方程式之數同，如含二未知數，有兩方程式，含三未知數，有三方程式，其方程式獨立而不矛盾，始爲聯立方程式。

3. 聯立二元一次方程式之解法

(a) 加減消去法　先以適宜之數，乘方程式之一式或兩式，使兩式中有一未知數之

項之係數相等，依加法或減法，消去一未知數，而用一元一次式之解法，定所餘一未知數之值，以求得之一未知數之值，代入原方程式較簡單之一式中，定他一未知數之值。

例 1. $3x+2y=16\cdots\cdots(1)$

$x-4y=24\cdots\cdots(2)$

〔解〕 以消去 y 爲目的，必使 y 之係數相同，

以 $2\times(1)$，得 $6x+4y=32\cdots\cdots(3)$

$(2)+(3)$，得 $7x=56$， $\therefore x=8$.

以 x 之值，代入於(1)或(2)，可得

$y=-4$.

驗 $\begin{cases}3(8)+2(-4)=24-8=16\\8-4(-4)=8+16=24\end{cases}$

故 $x=8$, $y=-4$ 與(1)，(2)兩式皆恰合。

例 2. $3x+4y=30\cdots\cdots(1)$

$5x-6y=12\cdots\cdots(2)$

〔解〕 以消去 x 爲目的，必使 x 之係數相同。

以 $5\times(1)$，得 $15x+20y=150\cdots(3)$

$3\times(2)$，得 $15x-18y=36\cdots(4)$

$(3)-(4)$，得 $38y=114$，　$\therefore y=3$.

以 y 之值，代入(1)或(2)，可得 $x=6$.

驗　$\begin{cases}3(6)+4(3)=18+12=30\\5(6)-6(3)=30-18=12\end{cases}$

故 $x=6$, $y=3$ 與(1),(2)皆恰合。

(b) 代入消去法　先從兩方程式中之一式，令一未知數之項，獨居於左邊，而以其係數除兩邊，然後以右邊代他一式中此一未知數之值，則消去一未知數。若兩方程式中有一式之一未知數無係數，則消去此一未知數較便。

例 1.　$2x+7y=35 \cdots\cdots (1)$

$5x-3y=26 \cdots\cdots (2)$

〔解〕　從(1)，得 $x=\dfrac{35-7y}{2} \cdots\cdots (3)$

以(3)式 x 之值，代入於(2)式，得

$5\left(\dfrac{35-7y}{2}\right)-3y=26 \cdots\cdots (4)$

以 2 乘(4)式之各項，得

$175-35y-6y=52$

移項，$-41y=-123$，$\therefore y=\dfrac{-123}{-41}=3$.

以 y 之值，代入(3)式，得

$$x=\frac{35-7\times3}{2}=\frac{35-21}{2}=\frac{14}{2}=7.$$

驗 $\begin{cases}2\times7+7\times3=14+21=35\\5\times7-3\times3=35-9=26\end{cases}$

故 $x=7,y=3$ 與(1),(2)皆恰合。

例 2. $3x-4y=18\cdots\cdots(1)$

$8x+2y=0\cdots\cdots(2)$

〔解〕 由(2)移項，得 $2y=-8x$，以 2 除兩邊，得 $y=-4x\cdots\cdots(3)$

以右邊代(1)式中之 y，得

$3x-4(-4x)=18,$

即 $3x+16x=18,\ \therefore x=\frac{18}{19}.$

以 $\frac{18}{19}$ 代(3)式中右邊之 x，

得 $y=-4\times\frac{18}{19}=-\frac{72}{19}.$

答 $x=\frac{18}{19},\ y=-\frac{72}{19}.$

驗

$$\begin{cases}3\times\frac{18}{19}-4\left(-\frac{72}{19}\right)=\frac{54}{19}+\frac{288}{19}=\frac{342}{19}=18\end{cases}$$

$$\left(8\times\frac{18}{19}+2\left(-\frac{72}{19}\right)=\frac{144}{19}-\frac{144}{19}=0\right.$$

故 $x=\frac{18}{19}$, $y=-\frac{72}{19}$ 與(1),(2)兩式皆恰合。

(c) 比較消去法　先從兩方程式中各求得同一未知數之等式，次以此二等式列爲方程式，卽得一元方程式，依法解之，卽得。

例 1. $4x-3y=5\cdots\cdots(1)$

$3x-2y=4\cdots\cdots(2)$

〔解〕 由(1)得 $x=\frac{5+3y}{4}\cdots\cdots(3)$

由(2)得 $x=\frac{4+2y}{3}\cdots\cdots(4)$

置(3)與(4)之 x 之值相等，得

$$\frac{5+3y}{4}=\frac{4+2y}{3}$$

以 12 乘等式之兩邊，得

$3(5+3y)=4(4+2y)$,

去括號，移項，

$9y-8y=16-15$, 卽 $y=1$.

以 y 之值，代入(3)或(4)，可得 $x=2$.

驗 $\begin{cases}4\times2-3\times1=8-3=5\\3\times2-2\times1=6-2=4\end{cases}$

故 $x=2$, $y=1$ 與(1),(2)兩式皆恰合。

例 2. $y=3(9-x)\cdots\cdots(1)$

$2x=11-\dfrac{y}{3}\cdots\cdots(2)$

〔解〕 移(2)式含 y 之項及含 x 之項,得

$\dfrac{y}{3}=11-2x$, 兩邊同以 3 乘之,則

$y=3(11-2x)\cdots\cdots(3)$

從(1),(3)兩式,得

$3(9-x)=3(11-2x)$

兩邊以 3 除之, 則 $9-x=11-2x$,

移項得 $2x-x=11-9$, 即 $x=2$.

以 2 代(1)式右邊之 x, 可得

$y=3(9-2)=21$.

驗 $\begin{cases}3(9-x)=3(9-2)=21\\11-\dfrac{y}{3}=11-\dfrac{21}{3}=11-7=4=2\times2\end{cases}$

(d) 公式解法 聯立二元一次方程式, 經整頓後,其標準形式為

$a_1x+b_1y+c_1=0\cdots\cdots(1)$

$a_2x+b_2y+c_2=0\cdots\cdots(2)$

解此聯立方程式,得一組根爲

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1} \\ y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1} \end{cases}$$

例 1. $2x-9y=11\cdots\cdots(1)$

$3x-4y=7\cdots\cdots(2)$

〔解〕 $a_1=2,\ b_1=-9,\ c_1=-11$

$a_2=3,\ b_2=-4,\ c_2=-7$

$$\therefore\quad x=\frac{(-9)\times(-7)-(-4)\times(-11)}{(2)\times(-4)-(3)\times(-9)}$$

$$=\frac{63-44}{-8+27}=\frac{19}{19}=1$$

$$y=\frac{(-11)\times(3)-(-7)\times(2)}{(2)\times(-4)-(3)\times(-9)}$$

$$=\frac{-33+14}{-8+27}=\frac{-19}{19}=-1$$

例 2. $ax+by=c+d\cdots\cdots(1)$

$bx+ay=c-d\cdots\cdots(2)$

〔解〕 $a_1=a,\ b_1=b,\ c_1=c+d$

$a_2=b,\ b_2=a,\ c_2=c-d$

$$\therefore \quad x=\frac{a(c+d)-b(c-d)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a-b)c+(a+b)d}{(a-b)(a+b)}$$

$$y=\frac{a(c-d)-b(c+d)}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{(a-b)c-(a+b)d}{(a-b)(a+b)}$$

注意： 例2之解法爲用下之公式，即

$$a_1x+b_1y=c_1\cdots\cdots(1')$$

$$a_2x+b_2y=c_2\cdots\cdots(2')$$

其根之公式爲 $x=\dfrac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

$$y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

上之兩公式，形式雖不同，其實際用法卻相同，如用行列式表示，則爲

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

此簡單聯立方程式之解法，與較複雜之解法類似，觀察以下三則，可更為明瞭。

1.　諸分母之行列式相同，各含x及y之係數，其排列之順序與原方程式(1′)及(2′)內者同。

2.　x之値之分子行列式，由在分母行列式內，以常數項 $\begin{matrix}c_1\\c_2\end{matrix}$ 代x之係數，即 $\begin{matrix}a_1\\a_2\end{matrix}$ 得來。

3.　y之値之分子行列式，由在分母行列式內，以常數項 $\begin{matrix}c_1\\c_2\end{matrix}$ 代y之係數，即 $\begin{matrix}b_1\\b_2\end{matrix}$ 得來。

4.　聯立三元一次方程式之解法

(a)　普通解法　先從第一與第二方程式消去其一未知數，次從第三與第一或第二方程式消去其同未知數，而得二未知數之二個新方程式，然後將此二方程式依二元一次方程式之解法解之，得二未知數之値，再以此二値代入三方程式之一，可得又一未知數之値。

例 1. $3x - y + z = 4 \cdots\cdots(1)$

$5x + 2y + 3z = 18 \cdots\cdots(2)$

$3x + 4y + 2z = 17 \cdots\cdots(3)$

〔解〕 先於此三方程式中，用(1),(2)兩式消去 y, 即

$(2)+(1)\times 2$ 得 $11x + 5z = 26 \cdots\cdots(4)$

次用(2),(3)兩式消去 y, 即

$2\times(2)-(3)$ 得 $7x + 4z = 19 \cdots\cdots(5)$

以所得(4),(5)兩方程式，依二元一次方程式之解法解之，即

$11\times(5) - 7\times(4)$, 得 $9z = 27$,

$\therefore z = 3$. 以 $z = 3$ 之值，代入(4)或(5)得 $x = 1$. 再以 $z = 3$, $x = 1$ 之值代入(1),(2),(3)任何一式，即可得 $y = 2$.

例 2. $5x + 4y - 3z = 4 \cdots\cdots(1)$

$4x - 3y + 5z = 13 \cdots\cdots(2)$

$3x + 7y - 4z = 5 \cdots\cdots(3)$

〔解〕 先從(1),(2)兩式消去 z. 即

$5\times(1) + 3\times(2)$

得 $37x + 11y = 59 \cdots\cdots(4)$

次從(1),(3)兩式消去 z. 即

$4\times(1)-3\times(3)$

得 $11x-5y=1\cdots\cdots(5)$

再從(4),(5)兩式消去 y. 即

$5\times(4)+11\times(5)$ 得 $306x=306$,

故 $x=1$. 以 x 之值代入(5)

得 $11\times1-5y=1$, 即 $y=2$.

以 x, y 之值代入(1)

得 $5\times1+4\times2-3z=4$, 即 $z=3$.

(b) 公式解法 聯立三元一次方程式經整頓後,皆能化成下列之一般形式。

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0\cdots\cdots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z+d_3=0\cdots\cdots(3)$$

解此聯立方程式,得一組根爲

$$x=-\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}$$

$$y=-\frac{d_1(c_2a_3-c_3a_2)+d_2(c_3a_1-c_1a_3)+d_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}$$

$$z=-\frac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)+d_2(a_3b_1-a_1b_3)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}$$

記憶上列聯立方程式之根之公式，亦可採用行列式爲便，卽其根之公式可書作：

$$x=-\frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=-\frac{d_1(b_2c_3-b_3c_2)+d_2(b_3c_1-b_1c_3)+d_3(b_1c_2-b_2c_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}$$

$$y=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}=-\frac{d_1(c_2a_3-c_3a_2)+d_2(c_3a_1-c_1a_3)+d_3(c_1a_2-c_2a_1)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}$$

$$z=-\frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}}=-\frac{d_1(a_2b_3-a_3b_2)}{a_1(b_2c_3-b_3c_2)}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\frac{+d_2(a_3b_1-a_1b_3)+d_3(a_1b_2-a_2b_1)}{+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)}$$

5. 應用問題解法示例

例 1. 有分數，分子加 3 則爲$\frac{1}{2}$，分母加 3 則爲$\frac{2}{7}$，求原分數。

〔解〕 以 $\frac{x}{y}$ 代所求之分數，依題意得次之方程式

$$\frac{x+3}{y}=\frac{1}{2}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{x}{y+3}=\frac{2}{7}\cdots\cdots(2)$$

化(1)得 $2x-y=-6\cdots\cdots(3)$

化(2)得 $7x-2y=6\cdots\cdots(4)$

$(4)-2\times(3)$ 得 $3x=18,\ \therefore\ x=6.$

以 6 代(3)式之 x，則

$2\times6-y=-6,\quad \therefore\ y=18.$

答 原分數爲$\frac{6}{18}$.

驗 $\left\{\frac{6+3}{18}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}.\right.$

$$\left\{\frac{6}{18+3}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}.\right.$$

例 2. 原有二位之整數，其數字之和爲 10，而以數字交換其位置之二位之整數，比原數多 18，求原數。

〔解〕 以 x 代十位之數字，以 y 代一位之數字，則原數爲 $10x+y$，又交換數字之位置所得之二位數爲 $10y+x$，故得次之方程式

$$x+y=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$10y+x=10x+y+18\cdots\cdots(2)$$

化 (2) 得 $y-x=2\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)+(3) 得 $2y=12$, $\therefore y=6$.

以 6 代 (1) 式中之 y，得

$x=10-6=4$.

答 原數爲 46.

驗 $64-46=18$.

例 3. 茶葉 15 斤，咖啡 5 斤，其價共計 7.5 元，咖啡 15 斤，茶葉 5 斤，其價共計 6.5 元，問茶葉及咖啡每一斤各值價若干？

〔解〕 設每斤之價，茶葉爲 x 元，咖啡爲 y

元，依題意得方程式如下：

$$15x+5y=7.5\cdots\cdots(1)$$

$$5x+15y=6.5\cdots\cdots(2)$$

(1)+(2) 得 $20x+20y=14$,

$$\therefore\ x+y=\frac{14}{20}=0.7\cdots\cdots(3)$$

(1)−(2) 得 $10x-10y=1$,

$$\therefore\ x-y=\frac{1}{10}=0.1\cdots\cdots(4)$$

(3)+(4) 得 $2x=0.8$, $\therefore\ x=0.4$

(3)−(4) 得 $2y=0.6$, $\therefore\ y=0.3$

答　茶葉每斤 4 角，咖啡每斤 3 角。

驗 $\begin{cases}15\times0.4+5\times0.3=6+1.5=7.5\text{ 元。}\\5\times0.4+15\times0.3=2+4.5=6.5\text{ 元。}\end{cases}$

例 4. 甲乙二人競走 400 米突之地，甲讓乙先走 25 米突，則尚比乙早到 15 秒鐘，若讓乙先行 36 秒鐘，則落後 40 米突，求各人走此路之時刻。

〔解〕 設甲須行 x 秒鐘，乙須行 y 秒鐘，甲以 x 秒鐘走路 400 米突，則每秒鐘走 $\frac{400}{x}$ 米突，乙以 $x+15$ 秒鐘走路 400−

25 米突，則每秒鐘走 $\frac{400-25}{x+15}$ 米突，從別一方面觀察，乙以 y 秒鐘走路 400 米突，則每秒鐘走 $\frac{400}{y}$ 米突，甲以 y−36 秒鐘走路 400−40 米突，則每秒鐘走 $\frac{400-40}{y-36}$ 米突，合上二者，得方程式

$$\frac{375}{x+15}=\frac{400}{y}\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{360}{y-36}=\frac{400}{x}\cdots\cdots(2)$$

化(1) 得 $16x-15y=-240\cdots\cdots(3)$

化(2) 得 $9x-10y=-360\cdots\cdots(4)$

$(3)\times 2-(4)\times 3$ 得

$5x=600,\qquad \therefore x=120.$

以 120 代(4)中之 x，得

$$y=\frac{9\times 120+360}{10}=\frac{1440}{10}=144.$$

答 甲走 120 秒，乙走 144 秒。

例 5. 工人甲、乙、丙從事於某工作，此工作甲乙二人爲之，要 12 日，甲丙二人爲之，要 15 日，甲乙丙三人共作，要 10 日，問甲

乙丙三人獨作，各需幾日？

〔解〕　設甲乙丙三人各需之日數為 x, y, z，則依題意，可得方程式如下：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}\cdots\cdots(3)$$

從(3)－(1) 得 $\frac{1}{z}=\frac{1}{60}$.

以 $\frac{1}{60}$ 代入(2) 得

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{15}-\frac{1}{60}=\frac{1}{20}.$$

又以 $\frac{1}{20}$ 代入(1) 得

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{1}{30}.$$

$\therefore\ x=20,\ y=30,\ z=60.$

答　甲 20 日，乙 30 日，丙 60 日。

例 6.　甲乙丙三人，各有銀不知其數，甲謂乙曰，爾與我 700 元，則我所有為爾所餘之

2 倍，乙謂丙曰，爾與我 1400 元，則我所有可爲爾所餘之 3 倍，丙謂甲曰，爾與我 420 元，則我所有可爲爾所餘之 5 倍，問三人各有銀若干元?

〔解〕 設 x, y, z 順次爲甲乙丙原有之元數，則由題意可得

$$x+700=2(y-700)\cdots\cdots(1)$$

$$y+1400=3(z-1400)\cdots\cdots(2)$$

$$z+420=5(x-420)\cdots\cdots(3)$$

將(1),(2),(3)各式簡作

$2y-x=2100\cdots\cdots(4)$

$3z-y=5600\cdots\cdots(5)$

$5x-z=2520\cdots\cdots(6)$

$(4)+2\times(5)$ 得

$6z-x=13300\cdots\cdots(7)$

$(6)+5\times(7)$ 得 $z=2380.$

以 z 之値代入(5)式，得

$3\times2380-y=5600$

解之，得 $y=1540.$

又以 z 之値代入(6)式，得

$5x-2380=2520$, 解之，得 $x=980.$

答 甲有 980 元，乙有 1540 元，丙有 2380 元。

應用問題之解法及問題之研究

例 以每斤價銀 a 元之甲酒與價銀 b 元之乙酒，和成每斤 c 元之丙酒 d 斤，問用甲酒乙酒各幾何？

〔解〕 設甲酒爲 x 斤，乙酒爲 y 斤，則甲酒之共價爲 ax 元，乙酒之共價爲 by 元，而丙酒之共價爲 cd 元，依題得

$$x+y=d \cdots\cdots(1)$$

$$ax+by=cd \cdots\cdots(2)$$

解之，得 $x=\dfrac{(c-b)d}{a-b}$，$y=\dfrac{(a-c)b}{a-b}$

即甲酒 $\dfrac{(c-b)d}{a-b}$ 斤，乙酒 $\dfrac{(a-c)b}{a-b}$ 斤。

研究： 此問題須注意之事項，各酒之價 a, b, c 及斤數 d 皆爲正數，答之斤數亦爲正數。因甲乙酒之斤數 $\dfrac{(c-b)d}{a-b}$，$\dfrac{(a-c)b}{a-b}$ 爲正數，故有次之條件。

(1) $a>b$，須 $c>b$，$a>c$ 即 $a>c>b$

(2) $a<b$, 須 $c<b$, $a<c$ 卽 $a<c<b$ 故成立此問題，c 之値須在 a 與 b 之間，若 c 非 a 與 b 之間之數，則 x 與 y 之値爲負數，卽爲不能之問題。

(3) 若 $a=b$. 有次之二種區別:

1. c 與 a 不等於 b, 卽不能之問題。
2. c 與 a 等於 b, 則於 $x+y=d$ 之範圍內，x 與 y 之値，可多至無窮，卽不定之問題。

7. 二元一次聯立方程式之根之研究

$$a_1x+b_1x+c_1=0\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2x+c_2=0\cdots\cdots(2)$$

根之公式 $x=\dfrac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$, $y=\dfrac{c_1a_2-c_2a_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

以 A 代 $a_1b_2-a_2b_1$, B 代 $b_1c_2-b_2c_1$, C 代 $c_1a_2-c_2a_1$

根之公式用略記法則 $x=\dfrac{B}{A}$, $y=\dfrac{C}{A}$

研究: (1) $A=a_1b_2-a_2b_1\neq 0$

(1),(2) 兩式惟有一組有限而確定之根。

(2) $A=a_1b_2-a_2b_1=0$

〔a〕 a_1, b_1, a_2, b_2 皆爲 0

c_1 與 c_2 有一不爲 0,不能有根。

又 $c_1=c_2=0$, 根爲不定。

〔b〕 a_1, b_1, a_2, b_2 不全爲 0

B 與 C 極少有一不爲 0, 不能有根。

又 B 與 C 同爲 0, 根爲不定。

第四章　因數分解法

1. 定義　將一代數式化爲他二式及諸式之積之方法,名曰因數分解法,即知其積,而計算以求其因數者也。

因數分解法無一定之法則,初學深感困難,習之既熟,則覺此法爲必不可少,蓋因數分解法與代數學中諸演算,有莫大之利便也。

2. 因數分解法

(1) 公共因數　多項式之各項,有相同之因數者,以所同之因數,括出於括弧之外,

其公式爲 $ax+bx-cx=x(a+b-c)$.

例 1. a^2bx+ab^2x+adx

$=ax(ab+b^2+d)$.

例 2. $3a(x+y)-4b(x+y)(x-y)+c(x+y)^2$

$=(x+y)\{3a-4b(x-y)+c(x+y)\}$

$=(x+y)\{3a-(4b-c)x+(4b+c)y\}$.

例 3. $3a(x+y)-4b(x+y)+c(x+y)$

$=(x+y)(3a-4b+c)$.

(2) **分羣分解法** 各項雖無公共因數，但全式可以分爲數羣，使每羣有一公共因數，而全式之因數，因此求得。

例 1. $a^2bx-a^2c-b^2cx+bc^2$

$=(a^2bx-b^2cx)-(a^2c-bc^2)$

$=bx(a^2-bc)-c(a^2-bc)$

$=(a^2-bc)(bx-c)$.

例 2. $a^3y-a^2x(1+y)+ax^2(1+xy)-x^4$

$=a^3y-a^2x-a^2xy+ax^2+ax^3y-x^4$

$=(a^3y-a^2xy+ax^3y)-(a^2x-ax^2+x^4)$

$=ay(a^2-ax+x^3)-x(a^2-ax+x^3)$

$=(a^2-ax+x^3)(ay-x)$.

例 3. $xy^2+xz^2+x^2y+x^2z+y^2z+yz^2+3xyz$

$$=(x^2y+xy^2+xyz)+(x^2z+xyz+xz^2)$$
$$+(xyz+y^2z+yz^2)$$
$$=xy(x+y+z)+xz(x+y+z)$$
$$+yz(x+y+z)$$
$$=(x+y+z)(xy+xz+yz).$$

(3) 公式分解法

(A) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(B) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(C) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

(D) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(E) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(F) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

(G) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

例 1. $a^4-b^4=(a^2)^2-(b^2)^2$
$$=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$$
$$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b). \qquad \text{(用 C)}$$

例 2. $4x^2-20xy+25y^2$
$$=(2x)^2-2(2x)(5y)+(5y)^2$$
$$=(2x-5y)^2. \qquad \text{(用 B)}$$

例 3. $4x^2+12xy+9y^2$
$$=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2$$

$= (2x+3y)^2$. (用 A)

例 4. $a^3b^3 + x^3y^3 = (ab)^3 + (xy)^3$

$= (ab+xy)\{(ab)^2 - (ab)(xy) + (xy)^2\}$

$= (ab+xy)(a^2b^2 - abxy + x^2y^2)$. (用 D)

例 5. $27x^3 - 8 = (3x)^3 - (2)^3$

$= (3x-2)\{(3x)^2 + (3x)(2) + (2)^2\}$

$= (3x-2)(9x^2+6x+4)$. (用 E)

例 6. $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$

$= (2x)^3 + 3(2x)^2(1) + 3(2x)(1)^2 + (1)^3$

$= (2x+1)^3$. (用 F)

例 7. $64a^3 - 144a^2b + 108ab^2 - 27b^3$

$= (4a)^3 - 3(4a)^2(3b) + 3(4a)(3b)^2 - (3b)^3$

$= (4a-3b)^3$. (用 G)

(4) 二次三項式之分解法

(A) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

(B) $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$

(C) $x^2 + (a-b)x - ab = (x+a)(x-b)$

(其 $a>b$)

(D) $x^2 - (a-b)x - ab = (x-a)(x+b)$

(其 $a>b$)

(E) $acx^2 + (ad+bc)x + bd$

$$=(ax+b)(cx+d)$$

(F)　$acx^2-(ad+bc)x+bd$

$$=(ax-b)(cx-d)$$

(G)　$acx^2+(ad-bc)x-bd$

$$=(ax-b)(cx+d)\quad (\text{其 } ad>bc)$$

(H)　$acx^2-(ad-bc)x-bd$

$$=(ax+b)(cx-d)\quad (\text{其 } ad>bc)$$

例 1.　$x^2+7x+12=x^2+(3+4)x+3\times4$

$$=(x+3)(x+4).$$

例 2.　x^2-5x+6

$$=x^2-(2+3)x+(-2)\times(-3)$$

$$=(x-2)(x-3).$$

例 3.　$x^2+2x-35=x^2+(7-5)x-7\times5$

$$=(x+7)(x-5).$$

例 4.　$x^2-5x-36=x^2-(9-4)x-9\times4$

$$=(x-9)(x+4).$$

例 5.　$6x^2+13x+6$

$$=2\times3\times x^2+(2\times2+3\times3)x+3\times2$$

$$=(2x+\overset{3}{b})(3x+2).$$

例 6.　$3x^2-22x+7$

$$=1\times3\times x^2-(1\times1+7\times3)x+7\times1$$

$=(x-7)(3x-1).$

例 7. $6x^2+7x-20$

$=3\times2\times x^2+(3\times5-4\times2)x-4\times5$

$=(3x-4)(2x+5).$

例 8. $9x^2-21x-44$

$=3\times3\times x^2-(3\times11-4\times3)x-4\times11$

$=(3x+4)(3x-11).$

(5) 應用剩餘定理分解法

定理：將多項式整列爲降冪，以 $x-a$ 除之，則所得剩餘，等於以 a 代替此多項式中 x 而得之數值。

例 x^2+3x+5 以 $x-2$ 除之，設其剩餘爲 R，則 $R=2^2+3\times2+5=15.$

例 1. 求 x^3-7x+6 之因數。

〔解〕 因 $6=1\times6=(-1)(-6)=2\times3=(-2)(-3)$，於是一一以 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$ 代原式中之 x 而求得其剩餘，經試驗後，知以 1 代 x 時，$R=1^3-7\times1+6=0$，故以 $x-1$ 除上式可除盡，用除法得其商爲 x^2+x-6，

$\therefore x^3-7x+6$

$=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+3).$

例 2. 求 $x^4-9x^2+4x+12$ 之因數。

〔**解**〕 以 2 代 x，則

$R=2^4-9\times 2^2+4\times 2+12=0$

以 $x-2$ 除原式，得 x^3+2x^2-5x-6

$\therefore$ 原式 $=(x-2)(x^3+2x^2-5x-6)$

又以 2 代 x^3+2x^2-5x-6 之 x，則

$R=2^3+2\times 2^2-5\times 2-6=0$

$\therefore x^3+2x^2-5x-6$

$=(x-2)(x^2+4x+3)$

$=(x-2)(x+1)(x+3).$

故原式 $=(x-2)^2(x+1)(x+3).$

(6) 二次三項式因數分解法

A. x^2+px+q 分解其因數。

〔**解**〕 x^2+px+q

$$=x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)^2$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$$\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{p+\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

$$\left(x+\frac{p-\sqrt{p^2-4q}}{2}\right).$$

B. ax^2+bx+c 分解其因數。

〔解〕 $$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left\{x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$\left\{x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$=a\left\{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$

$$\left\{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}.$$

若 b^2-4ac 爲完全平方，則二因數不含根號；如非完全平方，則二因數皆含無理數。

例 1. x^2+6x-7

$$=\left(x+\frac{6+\sqrt{6^2-4\times(-7)}}{2}\right)\left(x+\frac{6-\sqrt{6^2-4\times(-7)}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{6+\sqrt{64}}{2}\right)\left(x+\frac{6-\sqrt{64}}{2}\right)$$

$$=\left(x+\frac{6+8}{2}\right)\left(x+\frac{6-8}{2}\right)$$

$$=(x+7)(x-1).$$

例 2. $6x^2+11x+3$

$$=6\left(x+\frac{11+\sqrt{11^2-4\times6\times3}}{2\times6}\right)\left(x+\frac{11-\sqrt{11^2-4\times6\times3}}{2\times6}\right)$$

$$=6\left(x+\frac{11+\sqrt{49}}{12}\right)\left(x+\frac{11-\sqrt{49}}{12}\right)$$

$$=6\left(x+\frac{11+7}{12}\right)\left(x+\frac{11-7}{12}\right)$$

$$=6\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=(2x+3)(3x+1).$$

(7) 雜例

例 1. $x^4+x^2+1=x^4+x^2+1+x^2-x^2$

$=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1).$

例 2. 求 $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$ 之因數。

〔解〕 令 $p=x^2+x$

則原式 $=p^2+4p-12=(p-2)(p+6)$

$=(x^2+x-2)(x^2+x+6)$

$=(x+2)(x-1)(x^2+x+6).$

例 3. 求 $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ 之因數。

〔解〕 $(x+1)(x+7)=x^2+8x+7$

$(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$

令 $x^2+8x+7=p$,

則 $p+8=x^2+8x+15$

而原式 $=p(p+8)+15=p^2+8p+15$

$=(p+3)(p+5)$

$=(x^2+8x+7+3)$

$(x^2+8x+7+5)$

$=(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

$=(x^2+8x+10)(x+2)(x+6).$

例 4.　$48x^5+32x^4y-3xy^4-2y^5$

$=(48x^5+32x^4y)-(3xy^4+2y^5)$

$=16x^4(3x+2y)-y^4(3x+2y)$

$=(3x+2y)(16x^4-y^4)$

$=(3x+2y)(4x^2+y^2)(4x^2-y^2)$

$=(3x+2y)(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$.

例 5.　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)+(b^2c-bc^2)-(ab^2-ac^2)$

$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)$

$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b+c)(b-c)$

$=(b-c)\{a^2+bc-a(b+c)\}$

$=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

第五章　最高公因數,最低公倍數

最高公因數

1.　定義　　諸整式公有之因數,曰公因數,公因

數或不止一式，其中次數最高者，曰最高公因數，簡記爲 H. C. F.

例 a, a^2, b, ab, a^2b 皆能除盡 a^2b^3, a^3bc^2 二式，故各爲此二式之公因數，而其中 a^2b 之次數最高，故爲最高公因數。

2\. 單項式求法　首求數係數之最大公約數，次列記各通有之各文字，而附以最小之指數。

例 1. 求 $6a^3b^3c^4$, $4a^2b^3$, $10a^5bc^2$ 之 H. C. F.

〔解〕此三式中所含數係數 6, 4, 10 之最大公約數爲 2，又其所含同文字 a, b 之最小指數爲 a^2, b.

故所求之 H. C. F $=2a^2b$.

例 2. 求 $12a^2b^3c^2x^5y^3z^3$, $18a^4bcx^2y^3$, $24a^3c^2x^2y^4$ 之 H. C. F.

〔解〕此三式中所含數係數 12, 18, 24 之最大公約數爲 6，又其所含同文字 a, c, x, y 之最小指數爲 a^2, c, x^2, y^3.

故所求之 H. C. F $=6a^2cx^2y^3$

3\. 用因數分解法求多項式之最高公因數　求諸多項式之 H. C. F，其因數如容易分解，則將各式分解之，然後取其共通因數之積，而附

以共通指數之最低者。

例 1. 求 x^2-7x+6 與 $2x^2-13x+6$ 之 H. C. F.

〔解〕 $x^2-7x+6=x^2-(1+6)x+1\times6$

$=(x-1)(x-6)$,

$2x^2-13x+6=(2x-1)(x-6)$.

$\therefore$ 所求之 H. C. F $=x-6$.

例 2. 求 $3a^2-9ab$ 與 a^3-9ab^2 與 $a^3-6a^2b+9ab^2$ 之 H. C. F.

〔解〕 $3a^2-9ab=3a(a-3b)$,

$a^3-9ab^2=a(a^2-9b^2)$

$=a(a+3b)(a-3b)$,

$a^3-6a^2b+9ab^2=a(a^2-6ab+9b^2)$

$=a(a-3b)^2$.

$\therefore$ 所求之 H. C. F $=a(a-3b)$.

4. 二多項式之 H. C. F. 之求法　二個多項式 A, B, 如其因數不易分解，可用互除法求之，卽先以 B 除 A, 得剩餘 C, 次以 C 除 B, 得剩餘 D, 再以 D 除 C, 如此輾轉互除，至最後之除式，卽爲 A, B 二多項式之 H. C. F.

例 1. 求 x^3+2x^2-3 與 x^3+x^2-2 之 H. C. F.

〔解〕

$$
\begin{array}{r|l|l}
x^3+x^2-2 & x^3+2x^2-3 & 1 \\
 & x^3+x^2-2 & \\
\hline
x^2-1 & x^3+x^2-2 & x+1 \\
 & x^3-x & \\
\hline
 & x^2+x-2 & \\
 & x^2-1 & \\
\hline
\underbrace{x-1} & x^2-1 & x+1 \\
 & x^2-x & \\
\hline
 & x-1 & \\
 & x-1 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F $=x-1$.

例 2. 求 $2x^4+x^3-20x^2-7x+24$ 及 $2x^4+3x^3-13x^2-7x+15$ 之 H. C. F.

〔解〕

$$
\begin{array}{r|l}
x & 2x^4+x^3-20x^2-7x+24 \\
 & 2x^4+7x^3-9x \\
\hline
-3 & -6x^3-20x^2+2x+24 \\
 & -6x^3-21x^2+27 \\
\hline
 & \underbrace{x^2+2x-3}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-13x^2-7x+15 & 1 \\
2x^4+x^3-20x^2-7x+24 & \\
\hline
2x^3+7x^2-9 & 2x \\
2x^3+4x^2-6x & \\
\hline
3x^2+6x-9 & 3 \\
3x^2+6x-9 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F $= x^2 + 2x - 3.$

例 3. 求 $3x^3 - x^2 + 7x + 6$ 與 $2x^3 - 7x^2 + 11x - 15$ 之 H. C. F.

〔解〕 此二式爲同次，而第一式首項爲 $3x^3$，第二式首項爲 $2x^3$，無論以何式爲除式，皆不能得整數之商，故以 3 乘第二式，而得 $6x^3 - 21x^2 + 33x - 45$，以此式與第一式求 H. C. F.

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
3x & 3x^3 - x^2 + 7x + 6 & 6x^3 - 21x^2 + 33x - 45 & 2 \\
 & 3x^3 - 3x^2 + 9x & 6x^3 - 2x^2 + 14x + 12 & \\
\hline
2 & 2x^2 - 2x + 6 & -19)\,-19x^2 + 19x - 57 & \\
 & 2x^2 - 2x + 6 & \qquad \underbrace{x^2 - x + 3} & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F $= x^2 - x + 3.$

5. 諸多項式之最高公因數　先求二式之 H. C. F，而後以所得之 H. C. F. 與其餘之式求 H. C. F，如此順次求之，最後所得之除式，卽所求之 H. C. F.

例 1. 求 $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$，$3x^3 + 2x^2 - 3x - 2$，$5x^3 - 4x - 1$ 之 H. C. F.

〔解〕 $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$

$$= 2x(x^2 - 1) + 3(x^2 - 1)$$

$$=(x^2-1)(2x+3)$$

$$=(x+1)(x-1)(2x+3),$$

$$3x^3+2x^2-3x-2$$

$$=3x(x^2-1)+2(x^2-1)$$

$$=(x^2-1)(3x+2)$$

$$=(x+1)(x-1)(3x+2),$$

$\therefore$ $2x^3+3x^2-2x-3$ 與 $3x^3+2x^2-3x-2$ 之 H. C. F $=(x+1)(x-1)=x^2-1,$

又

$$\begin{array}{r|l|l|l}
x & x^2-1 & 5x^3-4x-1 & 5x \\
 & x^2-x & 5x^3-5x & \\
\hline
1 & x-1 & \underbrace{x-1} & \\
 & x-1 & & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}$$

即所求之 H. C. F $=x-1.$

例 2. 求 x^3-x^2-4x+4 與 x^3+4x^2+x-6 與 $x^3+3x^2-4x-12$ 之 H. C. F.

〔**解**〕 先求第一式與第二式之 H. C. F, 得 x^2+x-2, 再求此式與第三式之 H. C. F, 得 $x+2$, 故所求諸式之 H. C. F. 爲 $x+2$.

最低公倍數

1. 定義　一代數式能以其他諸整式中任一式除盡者，曰此諸整式之公倍數，公倍數可多至無限，其中次數最低者，曰最低公倍數，簡記爲 L. C. M.

例　a^3b^2c, $a^3b^2c^2$, $a^3b^3c^2$, a^4b^4c 諸式，各能以 a^3b, ab^2, abc 三式中之任一式除盡，則前諸式皆爲後三式之公倍數，而 a^3b^2c 之次數最低，故爲後三式之最低公倍數。

2. 單項式求法　將各式中之各文字連書之，並附各式中之最大指數，如有數字係數，則先求各數之 L. C. M, 以之置於文字之前，卽得。

例 1.　$3x^2yz$, $27x^3y^2z^2$, $6xy^2z^4$

之 L. C. M $=54x^3y^2z^4$.

例 2.　$6a^2b^3c^4d^5x^4$, $12a^5b^4c^3d^2x^4y$,

$18a^4b^3c^2dx^5y^2$

之 L. C. M $=36a^5b^4c^4d^5x^5y^2$.

3. 用因數分解法求多項式之最低公倍數　將各式分解因數，悉取其不同之因數，而附其各因數所有之最高指數，作其積。

例 1.　求 x^3+x^2-2 與 x^3+2x^2-3 之 L. C. M.

〔解〕 $x^3+x^2-2=x^3-1+x^2-1$

$=(x-1)[(x^2+x+1)+(x+1)]$

$=(x-1)(x^2+2x+2)$,

$x^3+2x^2-3=x^3-1+2x^2-2$

$=(x-1)[(x^2+x+1)+2(x+1)]$

$=(x-1)(x^3+3x+3)$,

$\therefore$ L. C. M $=(x-1)(x^2+2x+\ \ )$

(x^3+3x+3).

例 2. 求 x^3-5x^2+4x 與 $2x^3-4x^2+2x$ 與 $2x^2-x-1$ 之 L. C. M.

〔解〕 $x^3-5x^2+4x=x(x^2-5x+4)$

$=x(x-1)(x-4)$,

$2x^3-4x^2+2x=2x(x^2-2x+1)$

$=2x(x-1)(x-1)$

$=2x(x-1)^2$,

$2x^2-x-1=(x-1)(2x+1)$,

$\therefore$ L. C. M $=2x(x-1)^2(x-4)$

$(2x+1)$.

4. 二多項式之 L. C. M. 之求法　先求二式之積，以其 H. C. F 除之。或二式中之一式，以其 H. C. F 除之，其商以他一式乘之。

例 1. 求 $2x^4-3x^3-3x^2+4$ 與 $2x^4-x^3-9x^2+4x+4$ 之 L. C. M.

〔**解**〕 先求此二式之 H. C. F.

$$
\begin{array}{r|l|l|l}
x^2 & 2x^4-3x^3-3x^2+4 & 2x^4-x^3-9x^2+4x+4 & 1 \\
 & 2x^4-6x^3+4x^2 & 2x^4-3x^3-3x^2+4 & \\
\hline
3x & 3x^3-7x^2+4 & 2x^3-6x^2+4x & 2x \\
 & 3x^3-9x^2+6x & \underbrace{x^2-3x+2} & \\
\hline
2 & 2x^2-6x+4 & & \\
 & 2x^2-6x+4 & & \\
\hline
 & 0 & &
\end{array}
$$

$\therefore$ H. C. F $=x^2-3x+2$,

由是 L. C. M.

$$=\frac{(2x^4-3x^3-3x^2+4)(2x^4-x^3-9x^2+4x+4)}{x^2-3x+2}$$

$$=(2x^2+3x+2)(2x^4-x^3-9x^2+4x+4).$$

例 2. 求 x^3+5x^2+7x+2 與 x^2+6x+8 之 L. C. M.

〔**解**〕 先求得此二式之 H. C. F 爲 $x+2$

由除式 得 x^3+5x^2+7x+2

$$=(x+2)(x^2+3x+1),$$

$$x^2+6x+8$$

$$=(x+2)(x+4),$$

$\therefore$ L. C. M $=(x+2)(x^2+3x+1)(x+4)$

$$=(x^2+3x+1)(x^2+6x+8)$$

或 $$=(x^3+5x^2+7x+2)(x+4).$$

5. 諸多項式之最低公倍數　三個以上之多項式，先求其中任二式之 L. C. M. 次以此 L. C. M. 與其餘之式求 L. C. M. 如此順次求之，最後所得，即為所要求之 L. C. M.

例 求 $x^2-7xy+12y^2$, $x^2-6xy+8y^2$, $x^2-5xy+6y^2$ 之 L. C. M.

〔解〕 $x^2-7xy+12y^2=(x-3y)(x-4y)$

$x^2-6xy+8y^2=(x-2y)(x-4y)$

$\therefore x^2-7xy+12y^2$

與 $x^2-6xy+8y^2$ 之

L. C. M $=(x-4y)(x-3y)(x-2y)$

又 $x^2-5xy+6y^2=(x-2y)(x-3y)$

$\therefore (x-4y)(x-3y)(x-2y)$

與 $x^2-5xy+6y^2$ 之

L. C. M $=(x-4y)(x-3y)(x-2y)$

即所求三式之

L. C. M $=(x-2y)(x-3y)(x-4y)$.

第六章　分數式之四則

分數加減

1. 同母兩分數之和或差，恆以兩分子之和或差爲分子，而以公分母爲分母。若兩分數爲異分母，則先通分，化爲同分母等值之分數，然後依同母分數之求法求之；即以所通得之兩分子之和或差爲分子，而以所通得之公分母爲分母。

例 1. $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}=\frac{a+b}{x}$

例 2. $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=\frac{a-b}{x}$

例 3. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}=\frac{ay+bx}{xy}$

例 4. $\frac{a}{x}-\frac{b}{y}=\frac{ay}{xy}-\frac{bx}{xy}=\frac{ay-bx}{xy}$

例 5. $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}-\frac{c}{z}=\frac{a\times yz}{x\times yz}+\frac{b\times xz}{y\times xz}-\frac{c\times xy}{z\times xy}$

$$=\frac{ayz}{xyz}+\frac{bxz}{xyz}-\frac{cxy}{xyz}=\frac{ayz+bxz-cxy}{xyz}$$

2. 凡用為加減之分數，其諸分母，皆當依其特別文字之遞降方乘或遞昇方乘整列之。

例 求 $\frac{a}{a-x}+\frac{ax}{x^2-a^2}$ 之值。

〔**解**〕 降方乘整列，則

$$\frac{ax}{x^2-a^2}=\frac{ax}{-(a^2-x^2)}=\frac{-ax}{a^2-x^2},$$

$$\therefore\ \frac{a}{a-x}+\frac{-ax}{a^2-x^2}=\frac{a(a+x)}{a^2-x^2}+\frac{-ax}{a^2-x^2}$$

$$=\frac{a(a+x)-ax}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

3. 諸分母之次數不同，不可一時通分。

例 1. 求 $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}+\frac{2a}{a^2+x^2}+\frac{4a^3}{a^4+x^4}$ 之和。

〔**解**〕 $\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}=\frac{a+x+a-x}{a^2-x^2}=\frac{2a}{a^2-x^2}$

則 $\frac{2a}{a^2-x^2}+\frac{2a}{a^2+x^2}$

$$=\frac{2a(a^2+x^2)+2a(a^2-x^2)}{a^4-x^4}$$

$$=\frac{4a^3}{a^4-x^4},$$

終得 $\dfrac{4a^3}{a^4-x^4}+\dfrac{4a^3}{a^4+x^4}$

$$=\frac{4a^3(a^4+x^4)+4a^3(a^4-x^4)}{a^8-x^8}$$

$$=\frac{8a^7}{a^8-x^8}.$$

卽所求之和爲 $\dfrac{8a^7}{a^8-x^8}$.

例 2. 求 $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{x+3}$ 之結果。

〔解〕 $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{(x+3)-(x-3)}{x^2-9}$

$$=\frac{6}{x^2-9},$$

$$\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x-1}=\frac{3(x-1)-3(x+1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{-6}{x^2-1},$$

$$\frac{6}{x^2-9}+\frac{-6}{x^2-1}$$

$$=\frac{6(x^2-1)-6(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-1)}$$

$$=\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}.$$

即所求之結果爲 $\dfrac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$.

4. 分子爲零，則其分母無論爲何數，此分數之值必等於零。

例 1. 求 $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}$

$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)}$ 之值。

〔解〕 先換 $b-a$ 爲 $-(a-b)$，換 $c-a$ 爲 $-(a-c)$，又換 $c-b$ 爲 $-(b-c)$，則

$$\frac{1}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{-(a-b)(b-c)}$$

$$=\frac{-1}{(a-b)(b-c)},$$

$$\frac{1}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{[-(a-c)][-(b-c)]}$$

$$=\frac{1}{(a-c)(b-c)},$$

由是化次式爲簡式，即

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{-1}{(a-b)(b-c)}$$

$$+\frac{1}{(a-c)(b-c)}$$

分母之 L.C.M. 爲

$(a-b)(a-c)(b-c)$

因而

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}=\frac{b-c}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{-1}{(a-b)(b-c)}=\frac{-(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$\frac{1}{(a-c)(b-c)}=\frac{a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

由是 $\dfrac{b-c-(a-c)+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$

$$=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

例 2. 求 $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}$

$+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$ 之結果。

〔解〕 欲求此諸母之 L.C.M, 可先將其文字依 a, b, c 順列，卽 $(b-a)=-(a-b)$, $(c-a)=-(a-c)$, $(c-b)=-(b-c)$.

由是原式可記爲

$$\frac{b+c}{(a-b)(a-c)}-\frac{a+c}{(b-c)(a-b)}+\frac{a+b}{(a-c)(b-c)}$$

∴ 原式

$$=\frac{(b+c)(b-c)-(a+c)(a-c)+(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{(b^2-c^2)-(a^2-c^2)+(a^2-b^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$=\frac{0}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

分數乘除

1. 反數　有兩分數,其一分數之分子,各爲他一分數之分母,則互謂之反數。

例 $\frac{b}{a}$ 爲 $\frac{a}{b}$ 之反數。

$\frac{1}{a}$ 爲 $\frac{a}{1}$ (卽 a)之反數。

2. 分數之乘法

(a) 任意兩代數分數之積, 以兩分子之積爲分子,兩分母之積爲分母。

例　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$.

(b) 諸分數式之連乘積，等於以其諸分子之連乘積為分子，諸分母之連乘積為分母所成之一分數式。

例　$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}$.

3. 分數乘法示例　（如積之兩項有公因數，則約之為最簡。）

例 1. 求 $\frac{x^3-1}{4x^2-9}\times\frac{(2x-3)^2}{x^2+x+1}$ 之積。

〔解〕　原式 $=\frac{(x-1)(x^2+x+1)\times(2x-3)^2}{(2x+3)(2x-3)\times(x^2+x+1)}$

$$=\frac{(x-1)(2x-3)}{2x+3}.$$

例 2. 求 $\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\times\frac{(a-b)^2}{(x+y)^2}$ 之積。

〔解〕　原式 $=\frac{(x^2-y^2)(a-b)^2}{(a^2-b^2)(x+y)^2}$

$$=\frac{(x+y)(x-y)(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)(x+y)(x+y)}$$

$$=\frac{(x-y)(a-b)}{(a+b)(x+y)}.$$

例 3. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}\times\dfrac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}$

$$=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)}\times\frac{(x+3)(x+4)}{(x+1)(x+4)}=1.$$

例 4. $\left(1+\dfrac{12}{x+1}-\dfrac{4}{x+3}\right)$

$$\times\left(1+\frac{4}{x+5}-\frac{12}{x+7}\right)$$

$$=\left(\frac{12}{x+1}+\frac{x-1}{x+3}\right)\left(\frac{4}{x+5}+\frac{x-5}{x+7}\right)$$

$$=\frac{12x+36+x^2-1}{(x+1)(x+3)}\times\frac{4x+28+x^2-25}{(x+5)(x+7)}$$

$$=\frac{(x+5)(x+7)(x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)}=1.$$

例 5. $\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1\right)\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1\right)$

$$=\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2-1=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2-1$$

$$=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+1=\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2y^2}$$

4. 分數之除法　先將除式之分子分母顛倒，然後再與被除式相乘。卽以任意之分數除者，恆與乘其反數同。

例 1. 以 $\dfrac{x^3-a^3}{x+a}$ 除 $\dfrac{x-a}{x^3+a^3}$.

〔解〕 $\dfrac{x-a}{x^3+a^3}\div\dfrac{x^3-a^3}{x+a}=\dfrac{x-a}{x^3+a^3}\times\dfrac{x+a}{x^3-a^3}$

$$=\frac{(x-a)(x+a)}{(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{1}{(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)}$$

$$=\frac{1}{x^4+a^2x^2+a^4}.$$

例 2. 求 $\dfrac{6x^2-ax-2a^2}{ax-a^2}\times\dfrac{x-a}{9x^2-4a^2}$

$\div\dfrac{2x+a}{3ax+2a^2}$ 之結果。

〔解〕 原式 $=\dfrac{(3x-2a)(2x+a)}{a(x-a)}$

$$\times\frac{x-a}{(3x-2a)(3x+2a)}$$

$$\times\frac{a(3x+2a)}{2x+a}$$

$$=\frac{(3x-2a)(2x+a)(x-a)a(3x+2a)}{a(x-a)(3x-2a)(3x+2a)(2x+a)}=1.$$

例 3. 計算 $\left(1+\dfrac{x^3}{y^3}\right)\div\left(1+\dfrac{x}{y}\right)\div(x^2-xy+y^2)$.

〔解〕 原式 $=\dfrac{x^3+y^3}{y^3}\div\dfrac{x+y}{y}\div\dfrac{x^2-xy+y^2}{1}$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{y^3}$$

$$\times\frac{y}{x+y}\times\frac{1}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{y^2}.$$

例 4. 化簡 $\dfrac{x^4-16}{x^4+4x^2+16}\times\dfrac{x^3-8}{x^2+4}$

$$\div\frac{(x-2)^2(x+2)}{x^2-2x+4}.$$

〔解〕 原式 $=\dfrac{(x^2+4)(x+2)(x-2)(x-2)}{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}$

$$\frac{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)}{(x^2+4)(x-2)^2(x+2)}=1.$$

例 5. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}\right)\div\left(a+b-\dfrac{2ab}{a+b}\right)=?$

〔解〕 原式 $=\dfrac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}$

$$\div\frac{(a+b)^2-2ab}{a+b}$$

$$=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\times\frac{a+b}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{2}{a-b}.$$

5. 繁分數之化簡問題　用分子分母中各式之分母之 L. C. M. 乘繁分式之分子分母，則繁分式之分子分母悉行化簡，而不復爲繁分式矣。

例 1.
$$\frac{\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}\right)(a-x)(a+x)}{\left(\dfrac{a+x}{a-x}+\dfrac{a-x}{a+x}\right)(a-x)(a+x)}$$

$$=\frac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a+x)^2+(a-x)^2}=\frac{4ax}{2(a^2+x^2)}$$

$$=\frac{2ax}{a^2+x^2}.$$

例 2.
$$\frac{x}{x-\dfrac{x+2}{x+2-\dfrac{x+1}{x}}}$$

$$=\frac{x}{x-\dfrac{(x+2)x}{(x+2)x-(x+1)}}$$

$$= \frac{x}{x - \frac{x^2+2x}{x^2+x-1}}$$

$$= \frac{x(x^2+x-1)}{x(x^2+x-1)-(x^2+2x)}$$

$$= \frac{x(x^2+x-1)}{x^3-3x} = \frac{x(x^2+x-1)}{x(x^2-3)}$$

$$= \frac{x^2+x-1}{x^2-3}.$$

代數難題詳解

下　册

第七章　平方根，立方根

平方根

1. 開方法爲乘方法之還原，即自某數之若干乘方而逆求其原數也，其所求之原數，曰方根。

2. 根號之形狀爲$\sqrt{\ }$，凡欲開方之式，常記於此號之後，根號之左角，書一根指數以記其當開第幾方之根也，惟平方恆略其根指數。如$\sqrt{a}$即a之平方根，$\sqrt[3]{a}$即a之立方根。

3. 根之指數定則，得以下列四式表明之：

(1)　$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^{mn\div n}=a^m$

(2)　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

(3)　$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$

(4) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

4. 開平方法

(1) 單式開平方法　根之係數爲原式係數之平方根，根之指數爲原指數半，分數式開平方，可將其分子分母各自開平方。

例 1. $\sqrt{16a^4b^2c^6} = \pm 4a^2bc^3.$

例 2. $\sqrt{\dfrac{400a^4b^2}{81x^6y^8}} = \pm \dfrac{20a^2b}{9x^3y^4}.$

(2) 應用 $(a+b)^2$ 及 $(a+b+c)^2$ 等公式，由視察而知之。

例 1. $\sqrt{4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4}$

$= \sqrt{(2x^2)^2 - 2(2x^2)(3y^2) + (3y)^2}$

$= \sqrt{(2x^2 - 3y^2)^2} = 2x^2 - 3y^2.$

例 2. $\sqrt{9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab + 6ac + 4bc}$

$= \sqrt{(3a)^2 + (2b)^2 + (c)^2 + 2(3a)(2b) + 2(3a)(c) + 2(2b)(c)}$

$= \sqrt{(3a+2b+c)^2} = 3a + 2b + c.$

(3) 多項式開平方法

a.　將原式各項順某文字之降冪或昇冪序排列之。

b.　第一項之平方根為根之第一項。

c.　從原式減巳得根之平方，得差爲第一餘積。

d.　巳得根之二倍，爲第一除數，以除餘積，得根之後一項。

e.　第一除數加得新根，以新得根乘之，從第一餘積減其積，得第二餘積。

f.　以後照(d),(e),之法，累次進行。

例 1.　求 $25a^2x^2-12a^3x+16x^4+4a^4-24ax^3$ 之平方根。

〔解〕　依 x 之降冪序排列，則得

$16x^4-24ax^3+25a^2x^2-12a^3x+4a^4$

其算式爲

$$\begin{array}{l|l|l}
 & 16x^4-24ax^3+25a^2x^2-12a^3x+4a^4 & 4x^2-3ax+2a^2 \\
 & \underline{16x^4} & \text{平方根} \\
8x^2-3ax & -24ax^3+25a^2x^2-12a^3x+4a^4 & \\
 & \underline{-24ax^3+9a^2x^2} & \\
8x^2-6ax+2a^2 & \qquad 16a^2x^2-12a^3x+4a^4 & \\
 & \qquad \underline{16a^2x^2-12a^3x+4a^4} & \\
 & \qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

例 2. 求 $4x^4-12x^3+13x^2-6x+1$ 之平方根。

〔解〕

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 4x^4-12x^3+13x^2-6x+1 & 2x^2-3x+1 \\
 & \underline{4x^4\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \text{平方根} \\
4x^2-3x & -12x^3+13x^2-6x+1 & \\
 & \underline{-12x^3+9x^2\qquad\qquad} & \\
4x^2-6x+1 & 4x^2-6x+1 & \\
 & \underline{4x^2-6x+1} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

例 3. 求 $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}$ 之平方根。

〔解〕

$$
\begin{array}{lr|l}
 & x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}} & x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}} \\
 & \underline{x^{\frac{5}{3}}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \underline{+x^{\frac{1}{3}}} \\
 & & \text{平方根} \\
2x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}} & -4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}} & \\
 & \underline{-4x^{\frac{4}{3}}\qquad\quad+4x\qquad\qquad\qquad} & \\
2x^{\frac{5}{6}}-4x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}} & 2x^{\frac{7}{6}}\qquad-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}} & \\
 & \underline{2x^{\frac{7}{6}}\qquad-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

5. 根之符號定則有三

(1) 正數之偶數方根爲(±)複符號。

如 $\sqrt{+a^2}=\pm a$.

(2) 負數無偶乘方根。

如 $\sqrt{-x^2}$, 其根已非 $+x$, 又非 $-x$, 僅名曰虛數。

(3) 凡數之奇數方根,與原數符號相同。

如 $\sqrt[3]{a^3}=+a$, $\sqrt[3]{-a^3}=-a$.

立方根

1. 單式開立方法　　根之係數爲原係數之立方根,根之指數爲原指數之三分之一,正數之立方根爲正,負數之立方根爲負,分數開立方,可以將分子分母各自開立方。

例 1. $\sqrt[3]{27a^6b^3c^3}=3a^2bc$.

例 2. $\sqrt[3]{-\dfrac{x^{12}y^6}{125}}=-\dfrac{x^4y^2}{5}$.

2. 由 $(a\pm b)^3$ 之公式視察而知之

例 1. 求 $x^3-6x^2+12x-8$ 之立方根。

〔解〕 $\sqrt[3]{x^3-6x^2+12x-8}$

$=\sqrt{(x)^3-3(x)^2(2)+3(x)(2)^2-(2)^3}$

$$=\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2.$$

例 2. 求 $27x^6+54x^5y+36x^4y^2+8x^3y^3$ 之立方根。

〔解〕 $\sqrt[3]{27x^6+54x^5y+36x^4y^2+8x^3y^3}$

$$=\sqrt[3]{(3x^2)^3+3(3x^2)^2(2xy)+3(3x^2)(2xy)^2+(2xy)^3}$$

$$=\sqrt[3]{(3x^2+2xy)^3}=3x^2+2xy.$$

3. 多項式開立方法

a. 先將式之各項，順某文字之降羃或昇羃序排列之。

b. 求其首項之立方根，爲所求立方根之首項。

c. 自原式中減其立方，即得餘式。

d. 以首項平方之三倍，除餘式諸項，得立方根之次項。

e. 以 (3× 首項 ^{2}+3× 首項 × 次項 + 次項 ^{2}) × 次項，自前之餘式減之，得第二餘式。

f. 以後照(d)(e)之法累次進行。

例 1. 求 $27+108x+90x^2-86x^3-60x^4+48x^5-8x^6$ 之立方根。

〔解〕

$$27+108x+90x^2-86x^3-60x^4+48x^5-8x^6 \mid 3+4x-2x^2$$

立方根

$$27$$

$$108x+90x^2-86x^3-60x^4+48x^5-8x^6$$

$$3(3)^2=27$$

$$3(3)(4x)=36x$$

$$(4x)^2=16x^2$$

$$27+36x+16x^2 \quad \Big| \quad 108x+144x^2+64x^3$$

$$3(3+4x)^2=27+72x+48x^2 \qquad -54x^2-144x^3-60x^4+48x^5-8x^6$$

$$3(3+4x)(-2x^2)=-18x^2-24x^3$$

$$(-2x^2)^2=4x^4$$

$$27+72x+30x^2-24x^3+4x^4 \quad \Big| \quad -54x^2-144x^3-60x^4+48x^5-8x^6$$

$$0$$

例 2. 求 $9x^4-3x^5+18x^2-12x+8-13x^3+x^6$ 之立方根。

〔解〕 依 x 之降羃序排列，則得

$x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8.$

$$
\begin{array}{l|l|l}
 & x^6-3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 & x^2-x+2 \text{ 立方根} \\
 & x^6 & \\
\hline
3(x^2)^2=3x^4 & -3x^5+9x^4-13x^3+18x^2-12x+8 & \\
3(x^2)(-x)=-3x^3 & & \\
(-x)^2=x^2 & & \\
\hline
3x^4-3x^3+x^2 & -3x^5+3x^4-x^3 & \\
\hline
3(x^2-x)^2=3x^4-6x^3+3x^2 & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 & \\
3(x^2-x)(2)=6x^2-6x & & \\
2^2=4 & & \\
\hline
3x^4-6x^3+9x^2-6x+4 & 6x^4-12x^3+18x^2-12x+8 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}
$$

第八章　二次方程式

二次方程式與應用問題

1. 一元二次方程式之解法

(1) 特別解法

(a)二次方程式一般之形爲

$ax^2+bx+c=0\cdots\cdots(1)$

如 $c=0$, 此時方程式 (1) 成爲如次之形

$$ax^2+bx=0 \text{ 卽 } x(ax+b)=0$$

然欲使二數之積爲 0, 則其中任意一方之因數爲 0, 爲必要而且充分之條件,

卽 $x=0$ 或 $ax+b=0$

故得二組根爲 $x=0$ 及 $x=-\dfrac{b}{a}$.

例 解 $10x^2-3x=0$.

〔**解**〕 於此方程式,將 x 置於括弧外時。

$$x(10x-3)=0$$

故 $x=0$ 及 $x=\dfrac{3}{10}$

(b)如 $b=0$,此時方程式(1),成爲 ax^2+c

$=0$

移 c 於右，$ax^2=-c$, 然 a 不等於 0, 故以 a 除時，$x^2=-\frac{c}{a}$, 當 $-\frac{c}{a}$ 爲完全平方數時，可得絕對值相等，而符號反對之二根。當 $-\frac{c}{a}$ 爲正數而不爲完全平方時，則得不盡根數，而不盡根數，通例放置而不開方。

例 1. 解 $5x^2-80=0$.

〔解〕 移項 $5x^2=80$

以 5 除時 $x^2=\frac{80}{5}=16$

$\therefore\ x=\pm\sqrt{16}=\pm-4.$

例 2. 解 $x^2-8=0$.

〔解〕 $x^2=8,\quad \therefore\ x=\pm\sqrt{8}$

二數之積之平方根，等於各因數平方根之積，故 $x=\pm2\sqrt{2}$

例 3. 解 $\frac{5x^2-1}{3}-\frac{3x^2+2}{7}=\frac{8}{21}$.

〔解〕 以分母之最小公倍數 21 乘各項，得

$7(5x^2-1)-3(3x^2+2)=8$

去括弧 $35x^2-7-9x^2+6=8$,

即 $26x^2=21$　　$\therefore x^2=\frac{21}{26}$

而 $x=\pm\sqrt{\frac{21}{26}}=\pm\frac{\sqrt{546}}{26}$.

(2) 一般解法　欲解一元二次方程，須先移未知項於左邊，已知項於右邊，以 x^2 之係數兩邊除之。又因欲完成左邊之平方，加一次項係數之半之平方於兩邊，然後求兩邊之平方根，而解所得之二個一次方程式。

例 1.　解 $15x^2+11x-12=0$.

〔**解**〕　移已知項於右邊 $15x^2+11x=12$

以 x^2 之係數除各項　$x^2+\frac{11}{15}x=\frac{12}{15}$

欲完成左邊之平方，加$\left(\frac{11}{30}\right)^2$於兩邊，

$$x^2+\frac{11}{15}x+\left(\frac{11}{30}\right)^2=\frac{12}{15}+\left(\frac{11}{30}\right)^2,$$

即 $\left(x+\frac{11}{30}\right)^2=\frac{841}{900}$

$$\therefore x+\frac{11}{30}=\pm\sqrt{\frac{841}{900}}=\pm\frac{29}{30}$$

如 $x+\frac{11}{30}=+\frac{29}{30}$, 則 $x=\frac{3}{5}$

如 $x+\frac{11}{30}=-\frac{29}{30}$, 則 $x=-\frac{4}{3}$

故 $\frac{3}{5}$ 及 $-\frac{4}{3}$ 皆爲所求之根。

例 2. 解 $(3x+5)^2-(4x-3)^2$
$=(5x+2)(10x-1)$.

〔**解**〕 去括弧,得

$$9x^2+30x+25-16x^2+24x-9$$
$$=50x^2+15x-2,$$

移項,整理, $-57x^2+39x=-18$,

即 $19x^2-13x=6$, $\therefore x^2-\frac{13}{19}x=\frac{6}{19}$

欲完成左邊之平方,加$\left(\frac{13}{38}\right)^2$於左邊,

$$\left(x-\frac{13}{38}\right)^2=\frac{625}{1444}$$

$$\therefore x-\frac{13}{38}=\pm\sqrt{\frac{625}{1444}}=\pm\frac{25}{38}$$

如 $x-\frac{13}{38}=+\frac{25}{38}$, 則 $x=1$

如 $x-\frac{13}{38}=-\frac{25}{38}$, 則 $x=-\frac{6}{19}$

即 1 及 $-\frac{6}{19}$ 爲所求之根。

(3) 因數分解法　簡單之二次方程式，每以用因數分解，較爲簡便。

例 1. 解 $x^2-10x+16=0$.

〔解〕 $x^2-10x+16=(x-2)(x-8)$

$\therefore (x-2)(x-8)=0$

欲使左邊爲 0，則二因數中，須有一因數爲零，爲必要而充分之條件。

如 $x-2=0$，則 $x=2$

如 $x-8=0$，則 $x=8$

故 2 及 8 皆爲所求之根。

例 2. 解 $6x^2+x-2=0$.

〔解〕 $(2x-1)(3x+2)=0$

如 $2x-1=0$，則 $x=\frac{1}{2}$

如 $3x+2=0$，則 $x=-\frac{2}{3}$

故 $\frac{1}{2}$ 及 $-\frac{2}{3}$ 皆爲所求之根.

(4) 一元二次方程式根之公式　一元二次方程式一般之形，爲 $ax^2+bx+c=0$

移 c 於右邊，則 $ax^2+bx=-c$

以 x^2 之係數 a，除兩邊，則得

$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$，加 $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ 於兩邊，

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$，

$$\therefore\ x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

由是得一元二次方程式根之公式爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ \cdots\cdots(1)$$

次，如於一元二次方程式之一般形

$ax^2+bx+c=0$

中，以 $2b'$ 代 b 時，則得其形爲

$ax^2+2b'x+c=0$

故此根 $x=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}$

$$=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

$$=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$$

卽 x 之一次項之係數爲偶數時，其根之公式爲 $x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ ......(2)

例 1. 解 $x^2-4x+4=0.$

〔解〕 如用(1)式，則

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4^2-4\times1\times4}}{2\times1}=\frac{4}{2}=2$$

如用(2)式，則

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4\times1}}{1}=\frac{2}{1}=2.$$

故 2 爲所求之根。

例 2. 解 $(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0.$

〔解〕

$$x=\frac{-(c-a)\pm\sqrt{(c-a)^2-4(b-c)(a-b)}}{2(b-c)}$$

$$=\frac{-(c-a)\pm(c+a-2b)}{2(b-c)}$$

$$\therefore\ x=\frac{a-b}{b-c}\text{ 或 }1.$$

2. 虛數 如 $x^2+5=0$, 移項，則得 $x^2=-5$ 然無論何數之平方皆爲正數，故此方程式無根，爲使解法成普遍化，設平方爲負數之數

(稱爲虛數)以表之。-1 之平方根爲 $\pm\sqrt{-1}$，此 $\sqrt{-1}$ 特以 i 表之，稱爲虛數單位。其變形，乘方，乘除法則舉例如下：

例 1. $\sqrt{-a^2-b^2+2ab}=\sqrt{-(a^2+b^2-2ab)}$

$=\sqrt{-(a-b)^2}=\sqrt{(-1)(a-b)^2}$

$=(a-b)\sqrt{-1}=(a-b)i$

例 2. $\sqrt{-1}=+\sqrt{-1}=i$

例 3. $(\sqrt{-1})^2=-1=i^2$

例 4. $(\sqrt{-1})^3=(\sqrt{-1})^2\sqrt{-1}$

$=-1\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}=-i=i^3$

例 5. $(\sqrt{-1})^4=(\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1})^2$

$=(-1)(-1)=+1=i^4$

例 6. $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=(\sqrt{a}\times\sqrt{-1})$

$\times(\sqrt{b}\times\sqrt{-1})=\sqrt{ab}\times(\sqrt{-1})^2$

$=\sqrt{ab}\times(-1)=-\sqrt{ab}$

例 7. $\sqrt{-ab}\div\sqrt{-a}=\sqrt{ab}\sqrt{-1}$

$\div\sqrt{a}\sqrt{-1}=\sqrt{b}$

3. 一元二次方程式根之研究

(1) 判別式

$ax^2+bx+c=0$ 之根，爲

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

然此二根

a. 如 $b^2-4ac>0$ 則爲實數而值不相等

b. 如 $b^2-4ac=0$ 則爲實數而值相等

c. 如 $b^2-4ac<0$ 則爲虛數

如此，b^2-4ac 對於一元二次方程式根之種類之判別，極關重要，稱爲判別式。

例 1. 試判別 $100x^2+20x+1=0$ 之根之種類。

〔解〕 判別式 $=20^2-4\times100\times1=0$

故其根爲等根。

例 2. 試判別 $9x^2+17x+4=0$ 之根之種類。

〔解〕 判別式 $=17^2-4\times9\times4=45>0$

故其根爲相異之二實根。

例 3. 試判別 $4x^2+11x+10=0$ 之根之種類。

〔解〕 判別式 $=11^2-4\times4\times10=-49<0$

故其根爲虛根。

(2) 一元二次方程式根及係數之關係

$ax^2+bx+c=0$ 之二根，如以 $\alpha_1\beta$ 表之，

則可得 $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,

$$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

故 $\alpha+\beta=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

即 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

如方程式 $x^2+7x+10=0$

二根之和爲 $-\left(\dfrac{-7}{1}\right)=-(-7)=7.$

二根之積爲 $\dfrac{10}{1}=10.$

由上所述，可知 α, β 爲二根之方程式爲
$(x-\alpha)(x-\beta)=0$, 即
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0.$

例 1. 試作以 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{3}$ 爲根之二次方程式。

〔解〕 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

故所求之方程式爲 $x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$

去分母，則得 $6x^2-5x+1=0.$

例 2. 設 $x^2+px+q=0$ 之二根爲 α, β,
試作以 $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$ 爲根之二次方程式。

〔解〕 α, β 爲 $x^2+px+q=0$ 之根，故
$\alpha+\beta=-p$, $\alpha\beta=q$
由是

$$\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{(-p)^2-2q}{q}=\frac{p^2-2q}{q}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{\alpha}{\beta}=1$$

故所求之方程式爲

$$x^2-\left(\frac{p^2-2q}{q}\right)x+1=0$$

即 $qx^2-(p^2-2q)x+q=0.$

4. 一元二次方程式之問題

解問題之手續有四:

〔1〕 按問題作方程式。

〔2〕 解方程式，求根。

〔3〕 討論此根之數之性質，可否採爲問題之答數，不可用者棄之。

〔4〕 將最後所得之數，而行檢驗。

方程式之根爲虛數時，則問題爲不可能.

例 1. 一矩形之地面，面積爲 288 平方里，底比高長 2 里，求其底及高。

〔**解**〕 設此矩形底長 x 里，則高長 $x-2$ 里，而面積爲 $x(x-2)$ 平方里，從題，得

$x(x-2)=288$, 即 $x^2-2x-288=0$

$(x-18)(x+16)=0$,

$\therefore\ x=18$ 及 $x=-16$

$x=18$, 則 $x-2=16$, 即底長 18 里，高長 16 里，$x=-16$ 不合理，棄之。

驗　$18(18-2)=18\times 16=288.$

例 2. 某人持銀圓不知其數，但云圓數之10倍，等於其平方數加 9, 問此人持銀若干元?

〔**解**〕 設 x 爲所求之元數，則由題意，得下之方程式 $10x=x^2+9$

即 $x^2-10x+9=0,$

即 $(x-1)(x-9)=0$

$\therefore\ x=1$ 或 $x=9.$

此二根皆能合題，故知此人持銀 1 元或 9 元。

驗　$10\times 1=1^2+9,\ 10\times 9=9^2+9.$

例 3. 有二數，其和爲 12, 其平方之和爲 74, 問各數如何?

〔**解**〕 設所求之一數爲 x, 則他數爲 $12-x$, 由題意，得方程式 $x^2+(12-x)^2=74$

去括弧，$2x^2-24x+70=0$

即 $x^2-12x+35=0$

$(x-5)(x-7)=0$

$\therefore\ x=5$ 或 $x=7.$

如 $x=7$ 則 $12-x=12-7=5$

$x=5$ 則 $12-x=12-5=7$

無論如何所求之數爲 7 與 5.

驗 $7+5=12,\ 7^2+5^2=74.$

例 4. 多人聚餐，餐費 20 元，一客不出費，衆人等分而代出之，則比人皆出費時每人多出銀 1 元，求人數。

〔解〕 設 x 爲所求之人數，由題意，得方程式

$$\frac{x+20}{x}=\frac{20}{x-1}$$

去分母 $20x=(x-1)(x+20)$

去括弧，化簡 $x^2-x-20=0$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1-4(-20)}}{2}=\frac{1\pm 9}{2}$$

$=5$ 或 $-4.$

然人數當爲正整數，-4 不合理，應棄之。

答 共客 5 人。

驗 $\frac{5+20}{5}=5,\quad \frac{20}{5-1}=5.$

二次聯立方程式與應用問題

1. 二元聯立二次方程式之解法

(1) 一個一次方程式與一個二次方程式所成聯立方程式之解法：先由一次方程式將含有一未知數之式表他一未知數，而代入於二次方程式，誘出一元二次方程式。由此所得之二根可定對應之他未知數之值。

例 1. 解下列聯立方程式：

$$x+y=a \cdots\cdots(1)$$

$$xy=b \cdots\cdots\cdots(2)$$

〔解〕 將(1)式之兩邊平方之，

$(x+y)^2=(a)^2$，即

$$x^2+2xy+y^2=a^2$$

$$(2)\times 4 \qquad 4xy \qquad =4b$$

$$x^2-2xy+y^2=a^2-4b，即$$

$(x-y)^2=a^2-4b$，

$\therefore\ x-y=\pm\sqrt{a^2-4b} \cdots\cdots(3)$

由(1)，(3)兩式，$x+y=a$，

$x-y=\sqrt{a^2-4b}$

則 $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$，$y=\dfrac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$

$$x+y=a,\ x-y=-\sqrt{a^2-4b}$$

則 $x=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $y=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$

此二組卽所求之根。

例 2. 解下列聯立方程式:

$$3x+2y=8\cdots\cdots(1)$$
$$2x^2-3y^2=5\cdots\cdots(2)$$

〔**解**〕 從(1)式得 $x=\frac{8-2y}{3}$, 以代入(2)式

$$2\left(\frac{8-2y}{3}\right)^2-3y^2=5$$

卽 $19y^2+64y-83=0$

$$(y-1)(19y+83)=0$$

$\therefore$ $y=1$ 或 $y=-4\frac{7}{19}$.

從(1)式 $y=1$, 則 $x=2$.

$y=-4\frac{7}{19}$, 則 $x=5\frac{11}{19}$.

故所求之二組根爲

$$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\qquad\begin{cases}x=5\frac{11}{19}\\y=-4\frac{7}{19}\end{cases}$$

例3.　解 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7\cdots\cdots\cdots(1)$

$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=25\cdots\cdots(2)$

〔解〕　將(1)式自乘減(2)式

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2-\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=7^2-25$$

即 $\frac{2}{xy}=24\cdots\cdots(3)$

(2)－(3)　$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{2}{xy}$

$=25-24=1$

開平方　$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\pm 1$

從 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7,\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$

得 $x=\frac{1}{4},\quad y=\frac{1}{3}.$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=7,\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-1$

得 $x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{1}{4}.$

例4.　解 $3x+4=18\cdots\cdots\cdots(1)$

$5x^2-3xy=2\cdots\cdots(2)$

〔解〕 從(1)得 $y=\dfrac{18-3x}{4}$

代入(2)得 $5x^2-3x\left(\dfrac{18-3x}{4}\right)=2$

即 $20x^2-54x+9x^2=8,$

解之 $x=2$ 或 $-\dfrac{4}{29}$.

以 x 之值代入(1)式，$x=2$ 則 $y=3.$

$x=-\dfrac{4}{29}$, 則 $y=-\dfrac{267}{58}$.

(2) 二個二次方程式所成之聯立二次方程式之解法:

兩個二次聯立方程式之普通形式常爲

$ax^2+bxy+cy^2=d\cdots\cdots(1)$

$a'x^2+b'xy+c'y^2=d'\cdots\cdots(2)$

其解法乃用$(1)\times d'-(2)\times d$, 則變爲 $Ax^2+B\times y+cy^2=0$ 之形，故可以分解因數法解之，得兩個一次二元聯立方程式，於其中任取一式，與原式中之任一式，依法解之，即得。

例 1. 解 $5x^2+6x-6y+1=0\cdots\cdots(1)$

$3x^2-4x+5y-9=0\cdots\cdots(2)$

〔解〕 以 $5\times(1)-6\times(2)$, 得

$$43x^2+6x-49=0$$

$$\therefore\ x=\frac{-3\pm\sqrt{9-43\times(-49)}}{43}$$

$$=\frac{-3\pm 46}{43}=1\ \text{或}\ -\frac{49}{43}.$$

代入(1)或(2)得 $y=2$ 或 $-\frac{202}{1849}$.

由是得其二組根爲

$$\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-\dfrac{49}{43}\\y=-\dfrac{202}{1849}\end{cases}$$

例 2. 解 $y^2-xy=15\cdots\cdots(1)$

$x^2+xy=14\cdots\cdots(2)$

〔解〕 以(2)式左邊乘(1)式右邊,以(2)式右邊乘(1)式左邊,

$$14(x^2-xy)=15(x^2+xy)$$

卽 $15x^2+20xy-14y^2=0$,

卽 $(5x-2y)(3x+7y)=0$

$$\therefore\ x=\frac{2}{5}y\ \text{或}\ x=-\frac{7}{3}y$$

以 $x=\frac{2}{5}y$ 代入(1)，得

$y^2-\frac{2}{5}y^2=15$ 解之，$y=\pm 5$，

如 $y=5$ 則 $x=2$

$y=-5$ 則 $x=-2$

又以 $x=-\frac{7}{3}y$ 代入(1)，得

$y^2+\frac{7}{3}y^2=15$ 解之，$y=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

如 $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}$， 則 $x=-\frac{7\sqrt{2}}{2}$。

如 $y=-\frac{3\sqrt{2}}{2}$，則 $x=\frac{7\sqrt{2}}{2}$。

故所求之根有四組。

例 3. 解 $3x^2-5y^2=28\cdots\cdots(1)$

$3xy-4y^2=8\cdots\cdots(2)$

〔**解**〕 設 $y=mx\cdots\cdots(3)$

從(1)及(2)，得

$x^2(3-5m^2)=28\cdots\cdots\cdots(4)$

$x^2(3m-4m^2)=8\cdots\cdots(5)$

$(4)\div 5 \quad \frac{3-5m^2}{3m-4m^2}=\frac{7}{2}$

簡約之，得 $6m^2-7m+2=0$,

即 $(3m-2)(2m-1)=0$,

$\therefore\ m=\dfrac{2}{3}$ 及 $m=\dfrac{1}{2}$

由此二值及(5)得 $x^2=36$, 及 $x^2=16$

即 $x=\pm 6$ 及 $x=\pm 4$.

從此及(3)，所得四組根爲

$$\left.\begin{array}{l}x=6\\y=4\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=-6\\y=-4\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=4\\y=2\end{array}\right\},\quad\left.\begin{array}{l}x=-4\\y=-2\end{array}\right\}$$

例 4.　解 $x^2+y^2+3xy-4x-4y+3=0\cdots(1)$

$xy+2x+2y-5=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

〔解〕　寫(1)爲 $(x+y)^2+xy-4(x+y)+3=0$

(2)爲 $xy+2(x+y)-5=0$

故設 $x+y=u$, $xy=v$

得 $u^2+v-4u+3=0\cdots\cdots(3)$

$v+2u-5=0\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3), (4)兩式，解得 $x=1$, $y=1$;

$x=1$, $y=1$; $x=2+\sqrt{7}$, $y=2-\sqrt{7}$;

$x=2-\sqrt{7}$, $y=2+\sqrt{7}$

就以上四例而言，可知解聯立方程式，不

必拘守定法，但視原方程式相互之關係，而以適宜之法，擇便施之可耳。

2. 多元聯立方程式之解法示例

例 1. 解 $xy=12\cdots\cdots(1)$

$yz=20\cdots\cdots(2)$

$xz=15\cdots\cdots(3)$

〔解〕 (1),(2),(3) 各邊相乘， $x^2y^2z^2=3600$

$\therefore\ xyz=\pm60\cdots\cdots(4)$

以(2)之兩邊除(4)之兩邊，則得

$x=\pm3.$

以(3)之兩邊除(4)之兩邊，則得

$y=\pm4.$

以(1)之兩邊除(4)之兩邊，則得

$z=\pm5.$

故得二組根爲 $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=4\\z=5\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}x=-3\\y=-4\\z=-5\end{array}\right\}$

例 2. 解 $(x+y)(x+z)=a^2\cdots\cdots(1)$

$(x+y)(y+z)=b^2\cdots\cdots(2)$

$(y+z)(x+z)=c^2\cdots\cdots(3)$

〔解〕 (1)式以(2)式乘之，而以(3)式除之，

得 $(x+y)^2=\dfrac{a^2\times b^2}{c^2}$

故 $x+y=\pm\dfrac{ab}{c}\cdots\cdots(1)$

同法 $x+z=\pm\dfrac{ac}{b}\cdots\cdots(2)$

$y+z=\pm\dfrac{bc}{a}\cdots\cdots(3)$

(1)+(2)−(3) 得

$$2x=\pm\frac{a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2}{abc}$$

$$x=\pm\frac{a^2b^2+a^2c^2-b^2c^2}{2abc}$$

同法 $y=\pm\dfrac{a^2b^2+b^2c^2-a^2c^2}{2abc}$,

$$z=\pm\frac{a^2c^2+b^2c^2-a^2b^2}{2abc}$$

故所求之根有二組。

例3. 解 $x+y+z=6\cdots\cdots\cdots(1)$

$x^2+y^2+z^2=14\cdots\cdots(2)$

$yz=6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

〔解〕 (1)式自乘得 $x^2+y^2+z^2+2x(y+z)$
$+2yz=36\cdots\cdots(4)$

又由(1)移項 $y+z=6-x \cdots\cdots (5)$

故以(2)、(3)、(5)代入於(4)，得

$14+2x(6-x)+12=36$

即 $2x^2-12x+10=0$,

亦即 $x^2-6x+5=0$,

分解因數 $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore\ x=1$ 或 $x=5$.

如 $x=1$，則 $y+z=5$，故與(3)聯立，

則得 $\begin{cases} y=2 \\ z=3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3 \\ z=2 \end{cases}$

又如 $x=5$，則 $y+z=1$，故與(3)聯

立，則得 $\begin{cases} y=\dfrac{1\pm i\sqrt{23}}{2} \\ z=\dfrac{1\mp i\sqrt{23}}{2} \end{cases}$

故所求之根為

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=5 \\ y=\dfrac{1\pm i\sqrt{23}}{2} \\ z=\dfrac{1\mp i\sqrt{23}}{2} \end{cases}$$

例 4. 解 $\frac{2}{xy}=\frac{1}{100}\cdots\cdots(1)$

$\frac{3}{xz}=\frac{1}{100}\cdots\cdots(2)$

$\frac{6}{yz}=\frac{1}{100}\cdots\cdots(3)$

〔解〕 (1),(2),(3)兩邊各自相乘

$$\frac{2}{xy}\times\frac{3}{xz}\times\frac{6}{yz}=\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{100}$$

即 $\frac{36}{x^2y^2z^2}=\frac{1}{1000000}$,

開平方 $\frac{6}{xyz}=\pm\frac{1}{1000}$

$\therefore\ xyz=\pm 6000$

又從 (1) $xy=200$, (2) $xz=300$,

(3) $yz=600$,

故 $$\begin{cases}x=xyz\div yz=6000\div 600=10\\ y=xyz\div xz=6000\div 300=20\\ z=xyz\div xy=6000\div 200=30\end{cases}$$

或 $$\begin{cases}x=xyz\div yz=-6000\div 600=-10\\ y=xyz\div xz=-6000\div 300=-20\\ z=xyz\div xy=-6000\div 200=-30\end{cases}$$

3. 問題解法示例

(1) 按題意，作方程式。

(2) 解此方程式，而求其根。

(3) 方程式之根，揆之題意，不適用者棄之。

(4) 須行驗算。

其次，吾人須注意者，即未知數之數與方程式之數不同時，則此問題無一定之解法。吾人應不厭未知數之多，蓋多用未知數，則解方程式比較容易，且可使問題之徑路明瞭。

例 1. 有大小二數，其和與大數之乘積爲 144，其差與小數之乘積爲 14，求此二數。

〔**解**〕 設大數爲 x，小數爲 y，依題意，則得

$$x(x+y)=144\cdots\cdots(1)$$

$$y(x-y)=14\cdots\cdots(2)$$

$(1)\times7-(2)\times72$，得

$7x^2-65xy+72y^2=0$

即 $(x-8y)(7x-9y)=0$

$\therefore\ x=8y$ 及 $x=\dfrac{9}{7}y$

從 $x=8y$ 代入(2) $y^2=2$

$\therefore\ y=\pm\sqrt{2},\ x=\pm8\sqrt{2}.$

從 $x=\dfrac{9}{7}y$ 代入(2) $y^2=49$

$\therefore\ y=\pm 7,\ x=\pm 9.$

故得 $\left.\begin{array}{l}x=8\sqrt{2}\\y=\sqrt{2}\end{array}\right\}$　　$\left.\begin{array}{l}x=-8\sqrt{2}\\y=-\sqrt{2}\end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l}x=9\\y=7\end{array}\right\}$　　$\left.\begin{array}{l}x=-9\\y=-7\end{array}\right\}$

例 2. 某地溫度之 x 倍爲攝氏 80 度，若此溫度昇高 4 度，則其$(x-1)$倍亦爲 80 度，問某地溫度幾何?

〔解〕 設某地溫度爲 y 度，依題意得

$$xy=80\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$(x-1)(y+4)=80\cdots\cdots(2)$$

由(2) $xy+4x-y-4=80\cdots\cdots(3)$

(3)−(1)　　$4x-y-4=0$

$$y=4x-4=4(x-1)$$

以此代入(1) $4x(x-1)=80,$

卽 $x(x-1)=20$

$x^2-x-20=0,\ (x-5)(x+4)=0$

$\therefore\ x=5$ 或 $x=-4.$

若 $x=5$, 則 $y=16.$

若 $x=-4$, 則 $y=-20.$

負根可解釋爲零度以下，卽某地溫度

爲 16 度或零下 20 度。

例 3. 用車若干輛，運石料於某地，須 8 時間，若增車 8 輛，每次每車之載重量減 5 斤，則須 7 時，又若減車 9 輛，每次每車之載重量增 11 斤，則須 9 時，問車輛之數及每次每車之載重量。

〔**解**〕 設車數爲 x，各車之載重量爲 y，依題意得 $8xy=7(x+8)(y-5)\cdots\cdots(1)$

$$8xy=9(x-8)(y+11)\cdots\cdots(2)$$

從(1) $xy=56y-35x-280$

$$\therefore\ y=\frac{35x+280}{56-x}$$

以此代入(2)而簡單之，則

$x^2-64x+1008=0$,

解之 $x=36,\ 28$

從而 $y=77,\ 45$

故 $\begin{cases}\text{車 36 輛}\\\text{載重 77 斤}\end{cases}$ $\begin{cases}\text{車 28 輛}\\\text{載重 45 斤}\end{cases}$

例 4. 有地面成直角三角形，其周圍爲 180 丈，面積爲 720 方丈，問三邊之長。

〔**解**〕 設夾直角之二邊爲 x, y，丈斜邊

丈，則 $x+y+z=180\cdots\cdots(1)$

$x^2+y^2=z^2\cdots\cdots\cdots(2)$

$xy=2\times720\cdots\cdots\cdots(3)$

從(1) $x+y=180-z$

平方之，

$x^2+y^2+2xy=32400-360z+z^2$

代入(2),(3)而簡單之，則 $z=82$

代入(1) $x+y=98$ 與 $xy=1440$

故得 $x=80,\ y=18,\ z=82.$

即斜邊長 82 丈，夾直角二邊之長爲 18, 80 丈。

第九章 比,比例,變數

比

1. 定義　　二量大小之關係，以一量所含他量之倍數測之，名爲二量之比。

欲量 a 與 b 之比，則以 a:b 記之，而 a 稱爲比之第一項。b 稱爲比之第二項，或稱比之第一項爲前率，第二項爲後率。

2. 比之值　　後項除前項之商，謂之比之值，亦即同於分數之值，如 $a:b$ 同於 $\frac{a}{b}$.

比之值大於 1 者，曰優比，小於 1 者，曰劣比。等於 1 者，曰等比。

3. 比之大小　　比較二比之大小，各以分數表其值，再通分而比較其分子。

例如，欲比較 $a:b$ 與 $c:d$ 之大小，則

$\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$，$\frac{c}{d}=\frac{bc}{bd}$，故 $ad>bc$，則前比大於後比，$ad=bc$，則二比相等，$ad<bc$，則前比小於後比。

4. 比之定理

(a) 比之兩項，同以等數乘之，比值不變。

如 $\frac{ma}{mb}=\frac{a}{b}$，m 爲任何數。

(b) 比之兩項，同以等數加之，在優比其值減少，在劣比其值增加。

如 $a>b$ 則 $\frac{a}{b}>\frac{a+x}{b+x}$

$a<b$ 則 $\frac{a}{b}<\frac{a+x}{b+x}$

a, b, x 為正數。

(c) 比之兩項,同減較小於各項之等數,在優比其值增加,在劣比其值減少。

$$\text{如 } a>b \text{ 則 } \frac{a}{b}<\frac{a-x}{b-x}$$

$$a<b \text{ 則 } \frac{a}{b}>\frac{a-x}{b-x}$$

5. 複比　有諸比,其諸前項之積與諸後項之積之比,謂之諸比之複比。

如 $a:b$ 及 $c:d$ 之複比為 $ac:bd$

$a^2:b^2$ 為 $a:b$ 之二乘比

$a^3:b^3$ 為 $a:b$ 之三乘比

$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ 為 $a:b$ 之平方根比

6. 不可通約數　比之二項,不可以精密之整數表之者,謂之不可通約,如正方形之對角線與其一邊之比若$\sqrt{2}:1$, 此$\sqrt{2}$不能求其相等之整數或分數,僅可求其近似值而已。

比 例

1. 定義　設 a, b, c, d 四數,其a與b之比,等於c與d之比,則此四數成比例,以$a:b=c:d$

表之。a, b, c, d 曰比例數，a 與 d 曰外項，b 與 c 曰內項。

2. 定理

(1) 比例中兩外項之積等於兩內項之積。

$a:b=c:d$ 即 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

兩節以 bd 乘之，即得 $ad=bc\cdots\cdots(1)$

(2) 四數中兩兩之積相等，則此四數成比例，而成一積之二數爲外項，成他一積之二數爲內項。

從(1)移乘作除，即可得 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

及 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\cdots\cdots(2)$

$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}\cdots\cdots(3)$

(3) 二數之比例中項等於此二數積之平方根。

$a:b=b:c$ 則 $b^2=ac$

$\therefore\ b=\pm\sqrt{ac}$

(4) 交換比例之兩內項或兩外項，比例仍能成立。

從(1)及(2)可知其眞確。

(5) 二比相等，則比反比亦相等。

從(1)及(3)可知其眞確。

(6) 等比之複比相等。

因 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$, 乘之可得

$\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$ 故也。

(7) 若 $a:b=c:d$ 及 $b:x=d:y$, 則

$a:x=c:y$

(8) 二比相等，則其各前項與後項之和或差對於後項之比亦相等。

令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則 $\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1$

即可得 $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$

(9) 二比相等，則各比中兩項和與差之比亦相等。

$a:b=c:d$

則 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,

以後一式除前一式，即得 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

3. 例解

例 1. 三個正數 a, b, c 成比例，則 $a+c>2b$. 證之。

〔解〕 $a:b=b:c$, 得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}$

由 $(a-b)^2>0$, 得 $\dfrac{a^2+b^2}{ab}>2$

但 $\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{b}=\dfrac{a+c}{b}$

$\therefore\ a+c>2b.$

例 2. 若 $a:b=c:d$, 求證 $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}$.

〔解〕 $\because\ \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\quad \therefore\ \dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$.

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-2ab+b^2}=\frac{c^2+2cd+d^2}{c^2-2cd+d^2}$$

$$\therefore\ \frac{a^2+b^2}{2ab}=\frac{c^2+d^2}{2cd}$$

$$\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{2cd}{c^2+d^2},$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2+2cd+d^2}{c^2+d^2},$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2},$$

$$\therefore \frac{a+b}{c+d}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}}.$$

例 3.　若 $a:b=c:d$

求證 $a+b:\dfrac{a^2}{a+b}=c+d:\dfrac{c^2}{c+d}$.

〔解〕 $\because \dfrac{a+b}{a}=\dfrac{c+d}{c}$

平方之 $\dfrac{(a+b)^2}{a^2}=\dfrac{(c+d)^2}{c^2}$

或 $\dfrac{a+b}{\dfrac{a^2}{a+b}}=\dfrac{c+d}{\dfrac{c^2}{c+d}}$

$\therefore a+b:\dfrac{a^2}{a+b}=c+d:\dfrac{c^2}{c+d}$.

例 4.　設 $a:b=c:d$

試證 $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

〔解〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=x$. 則 $a=bx$, $c=dx$

由是

$$ab+cd=bx\cdot b+dx\cdot d=(b^2+d^2)x$$

$$ab-cd=bx\cdot b-dx\cdot d=(b^2-d^2)x$$

$$a^2+c^2=b^2x^2+d^2x^2=(b^2+d^2)x^2$$

$$a^2-c^2=b^2x^2-d^2x^2=(b^2-d^2)x^2$$

故 $\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{(b^2+d^2)x}{(b^2-d^2)x}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

又 $\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}=\dfrac{(b^2+d^2)x^2}{(b^2-d^2)x^2}=\dfrac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

故 $\dfrac{ab+cd}{ab-cd}=\dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$

卽 $ab+cd:ab-cd=a^2+c^2:a^2-c^2$.

變 數

1. 常數,變數　　數之一定不易者,曰常數。隨時消長者,曰變數。常數恆如已知數,以 a, b, c 等表之。變數恆如未知數,以 x, y, z 等表之。

有二量,其一量之任意兩數値之比,等於他一量之相當數値之比,則謂之第一量,因他一量變。如設一量中所度得之兩數爲 a_1, a_2 之比,他量中所度得相當之兩數爲 b_1, b_2 之比,則

$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ 從而 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$

由是二量之相當數値,恆爲常比。

2. 記號　　「因變」一語,可用記號 $\propto$ 代之。如 $A\propto B$ 宜讀爲 A 因 B 變。

3. 正變　設 x 及 y 為變數，其比為常數，則 y 謂從 x 而正變，常以 $y \propto x$ 表之。

由是若設其比為 k，則 $y:x=k$，即 $\frac{y}{x}=k$

$\therefore\ y=kx.$

4. 反變　設 x 及 y 為變數，而 y 與 $\frac{1}{x}$ 之比為常數，則 y 謂從 x 而反變，常以 $y \propto \frac{1}{x}$ 表之。

由是 $y:\frac{1}{x}=k$，故 $y=\frac{k}{x}$ 及 $xy=k$

5. 定理　如 a 唯與 b 及 c 有關係，若 c 為常數，則 a 因 b 變，又 b 為常數，則 a 因 c 變，若 b 與 c 俱變，則 a 因 bc 變。例如三角形之面積，若其高為常數，則從其底邊而變，若其底邊為常數，則從其高而變，若其底與高俱變，則從二者之積而變。

設 高 $=H$，面積 $=A$，底 $=B$

即 H 為常數，則 $A \propto B$

B 為常數，則 $A \propto H$

而 B 與 H 俱為變數，則 $A \propto BH$.

6. 例解

例 1.　若 $A \propto B$ 及 $A \propto C$，則 $B \propto C$ 求證。

〔解〕　$\because A \propto B \quad \therefore A = mB$ 但 m 爲常數

又 $\because A \propto C \quad \therefore A = nC$ 但 n 爲常數

由是 $mB = nC$，即 $B = \frac{n}{m}C$

但 $\frac{n}{m}$ 爲常數，$\therefore B \propto C$.

例 2.　氣體之體積，與其絕對溫度爲正比例，與壓力爲反比例，今有壓力 3 氣壓，絕對溫度 280 度時 20 公升之氣體，問壓力 4 氣壓，絕對溫度 300 度時爲幾公升？

〔解〕　設氣體之體積爲 v 公升，壓力爲 p 氣壓，絕對溫度爲 t 度，則

$v \propto \frac{t}{p}$，即 $v = \frac{mt}{p}$

$\therefore 20 = \frac{m \times 280}{3}$，$\therefore m = \frac{3}{14}$

$$v = \frac{3}{14} \times \frac{300}{4} = \frac{225}{14} = 16\frac{1}{14}.$$

故此時氣體爲 $16\frac{1}{14}$ 公升。

例 3.　氣體之體積，從其絕對溫度而正變，從其壓力而反變。今壓力 15，溫度 260，體積

200 立方吋，問壓力 18，溫度 390，則體積如何？

〔解〕 設 V 爲體積，P 爲壓力，T 爲絕對溫度，則 $V \propto T \times \frac{1}{P}$，即 $V = kT \times \frac{1}{P}$

$\because 200 = k \times 260 \times \frac{1}{15}$，　$\therefore k = \frac{150}{13}$，

$V = \frac{150}{13} \times 390 \times \frac{1}{18} = 250.$

故所求之體積爲 250 立方吋。

第十章　級數

等差級數

1. 等差級數者，其級數之任一項與其前項之差，恆爲一定之謂也，略記爲 A. P. 普通以 a, a+d, a+2d, a+3d, …… 表示之，a 名曰首項，d 名曰公差。

例　3, 5, 7, 9……。

首項爲 3，公差爲 2.

(a) 以 l 表其第 n 項，則

$l=a+(n-1)d\cdots\cdots(1)$

例 有等差級數 4, 7, 10 等，求其第 8 項。

〔解〕 $a=4,\ d=7-4=3,\ n=8$

$\therefore\ l=4+(8-1)\times 3=25.$

(b) 以 s 表總和，則 $s=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots(2)$

例 有等差級數，首項爲 5，末項爲 37，項數爲 9，求總和。

〔解〕 $a=5,\ l=37,\ n=9$

$\therefore\ s=\frac{9}{2}(5+37)=\frac{9}{2}\times(42)=189.$

(c) 以(1)式 l 之值代入(2)式，則可得

$s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots(3)$

例 有等差級數，首項爲 4，公差爲 3，項數爲 10，求總和。

〔解〕 $a=4,\ d=3,\ n=0$

$\therefore\ s=\frac{10}{2}\{2\times 4+(10-1)\times 3\}$

$=5\{8+27\}=5\times 35=175.$

(d) 從(1),(2),(3)三公式，則於 a, d, l, n, s 五數中，任知其三，卽可求其餘二數，茲

立表於下：

已知 a, d, n, 則 $l=a+(n-1)d$

已知 a, d, s, 則

$$l=\frac{1}{2}\left[-d\pm\sqrt{8ds+(2a-d)^2}\right]$$

已知 a, n, s, 則 $l=\frac{2s}{n}-a$

已知 d, n, s, 則 $l=\frac{s}{n}+\frac{(n-1)d}{2}$

已知 a, d, n, 則 $s=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d]$

已知 a, d, l, 則 $s=\frac{l+a}{2}+\frac{l^2-a^2}{2d}$

已知 a, n, l, 則 $s=\frac{n}{2}(a+l)$

已知 d, n, l, 則 $s=\frac{1}{2}n[2l-(n-1)d]$

已知 d, n, l, 則 $a=l-(n-1)d$

已知 d, n, s, 則 $a=\frac{s}{n}-\frac{(n-1)d}{2}$

已知 d, l, s, 則

$$a=\frac{1}{2}\left[d\pm\sqrt{(2l+d)^2-8ds}\right]$$

已知 n, l, s, 則 $a=\frac{2s}{n}-l$

已知 a, n, l, 則 $d=\frac{l-a}{n-1}$

已知 a, n, s, 則 $d=\frac{2(s-an)}{n(n-1)}$

已知 a, l, s, 則 $d=\frac{l^2-a^2}{2s-l-a}$

已知 n, l, s, 則 $d=\frac{2(nl-s)}{n(n-1)}$

已知 a, d, l, 則 $n=\frac{l-a}{d}+1$

已知 a, d, s, 則

$$n=\frac{d-2a\pm\sqrt{(2a-d)^2+8ds}}{2d}$$

已知 a, l, s, 則 $n=\frac{2s}{l+a}$

已知 d, l, s, 則

$$n=\frac{2l+d\pm\sqrt{(2l+d)^2-8ds}}{2d}$$

上之公式 20 條，中有 4 條求項數(n)者，苟求得之數，如有分數值或負數值，宜棄去之，蓋項數(n)必爲正整數也。

2. 問題例解

例 1. 有三數，成等差級數，其和爲 6，其各數之平方和爲 14，求各數。

〔解〕 設三數爲 $x-y,\ x,\ x+y$，則

$$(x-y)+x+(x+y)=6\cdots\cdots(1)$$

$$(x-y)^2+x^2+(x+y)^2=14\cdots(2)$$

從(1)，$3x=6$，$\therefore x=2$

從(2)，$3x^2+2y^2=14$

以 $x=2$ 代入，得 $y=\pm 1$

即 $y=1$ 時，三數爲 1, 2, 3；

$y=-1$ 時，三數爲 3, 2, 1，

故所求三數爲 1, 2, 3.

例 2. 等差級數之第 7 項爲 15，第 21 項爲 8，求此級數。

〔解〕 依題意得

$$15=a+(7-1)d\cdots\cdots(1)$$

$$8=a+(21-1)d\cdots\cdots(2)$$

聯立(1)，(2)而解之，$d=-\frac{1}{2}$，$a=18$

故所求之級數爲

$18,\ 17\frac{1}{2},\ 17,\ 16\frac{1}{2}\cdots\cdots$。

例 3. 有四邊形，各角度成等差級數，設每角相差 10 度，求四角之度幾何？

〔解〕 設初項度數為 x，而四角之和為 360 度，共為四項，差數為 10 度，由公式

$$s=\frac{n}{2}[2a+(n+1)d]$$

得 $$360=\frac{4}{2}[2x+(4-1)\times 10]$$

$$180=2x+30, \quad \therefore x=75^\circ$$

故此四角為 $75^\circ, 85^\circ, 95^\circ, 105^\circ$.

等比級數

1. 等比級數者，若干級數，依一定之順序排列，其中任一數與前一數之比，俱相等之謂也。略記為 G. P. 普通以 $a, ar, ar^2, ar^3 \cdots\cdots$ 表之。a 名曰初項，r 名曰公比。

例 3, 6, 12, ……。

3 曰初項，$\frac{6}{3}=2$ 曰公比。

(a) 設末項為 l，項數為 n，則

$$l=ar^{n-1} \cdots\cdots(1)$$

例 有 G. P. 3, 6, 12, ……。試求其第 8 項。

〔解〕　$a=3,\ r=\dfrac{6}{3}=2,\ n=8$

$\therefore\ l=3\times 2^{8-1}=384.$

(b) 設 s 表 n 項之和，則

$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\ \cdots\cdots(2)$$

例　有級數 3, 6, 12……。求其 10 項之和。

〔解〕　$a=3,\ r=2,\ n=10$

$$\therefore\ s=\frac{3(1-2^{10})}{1-2}=3(2^{10}-1)=3069$$

(c) 因 $lr=ar^{n-1}r=ar^n$

故由(2)可變爲 $s=\dfrac{a-lr}{1-r}\ \cdots\cdots(3)$

例　有 G. P. 3, 6, 12,……384. 求總和。

〔解〕　$a=3,\ r=2,\ l=384$

$$\therefore\ s=\frac{3-384\times 2}{1-2}=765.$$

(d) 無窮項之和（r 必須小於 1）

即 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots$ 至無窮項

$$=\frac{a}{1-r}\ \cdots\cdots(4)$$

例　有 G. P. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots\cdots$。求其無窮項

之和。

〔解〕 $a=1,\ r=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ s=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

(e) 從(1),(2),(3)三公式，則於 a,r,l,n,s 五數中，任知其三數，即可求其餘二數，茲立表於下：

已知 $a,\ r,\ n$, 則 $l=ar^{n-1}$

已知 $a,\ r,\ s$, 則 $l=\frac{a+(r-1)s}{r}$

已知 $a,\ n,\ s$, 則

$$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$$

已知 $r,\ n,\ s$, 則 $l=\frac{(r-1)sr^{n-1}}{r^n-1}$

已知 $a,\ r,\ n$, 則 $s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$

已知 $a,\ r,\ l$, 則 $s=\frac{rl-a}{r-1}$

已知 $a,\ n,\ l$, 則 $s=\frac{\sqrt[n-1]{l^n}-\sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}$

已知 r, n, l, 則 $s=\dfrac{lr^n-l}{r^n-r^{n-1}}$

已知 r, n, l, 則 $a=\dfrac{l}{r^{n-1}}$

已知 r, n, s, 則 $a=\dfrac{(r-1)s}{r^n-1}$

已知 r, l, s, 則 $a=rl-(r-1)s$

已知 n, l, s, 則

$$a(s-a)^{n-1}-l(s-l)^{n-1}=0$$

已知 a, n, l, 則 $r=\sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$

已知 a, n, s, 則 $r^n-\dfrac{s}{a}r+\dfrac{s-a}{a}=0$

已知 a, l, s, 則 $r=\dfrac{s-a}{s-l}$

已知 n, l, s, 則

$$r^n-\frac{s}{s-l}r^{n-1}+\frac{l}{s-l}=0$$

已知 a, r, s, 則

$$n=\frac{\log[a+(r-1)s]-\log a}{\log r}$$

已知 a, r, l, 則 $n=\dfrac{\log l-\log a}{\log r}+1$

已知 a, l, s, 則

$$n=\frac{\log l-\log a}{\log(s-a)-\log(s-l)}+1$$

已知 r, l, s, 則

$$n=\frac{\log l-\log[lr-(r-1)s]}{\log r}+1$$

2. 問題例解

例 1. 有三數成等比級數，其和為 14, 其平方之和為 84, 求各數。

〔解〕 設三數為 a, ar, ar^2, 則

$$a+ar+ar^2=14\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a^2+a^2r^2+a^2r^4=84\cdots\cdots(2)$$

$(2)\div(1)$, 得 $a-ar+ar^2=6\cdots\cdots(3)$

$(1)\div(3)$, 得 $\dfrac{1+r+r^2}{1-r+r^2}=\dfrac{7}{3}$

去分母化簡，$2r^2-5r+2=0$

$$(2r-1)(r-2)=0$$

$\therefore\ r=\dfrac{1}{2}$ 及 2.

如 $r=\dfrac{1}{2}$時, $a=8$, 三數為 8, 4, 2.

如 $r=2$ 時, $a=2$, 三數為 2, 4, 8.

故三數為 2, 4, 8.

例 2. 等比級數之第 5 項爲 18, 第 7 項爲 162, 求此級數。

〔解〕 因第 5 項爲 18, $\therefore 18=ar^4\cdots\cdots(1)$

又第 7 項爲 162, $\therefore 162=ar^6\cdots\cdots(2)$

$(2)\div(1)$, 得 $9=r^2$, $\therefore r=\pm 3$

代入(1), 得 $18=a(\pm 3)^4$, $\therefore a=\dfrac{2}{9}$

故此級數爲 $\dfrac{2}{9}, \pm\dfrac{2}{3}, \pm 6, 18\cdots\cdots$。

例 3. 求等比級數 $\dfrac{5}{7}+\dfrac{10}{21}+\dfrac{20}{63}+\dfrac{40}{189}+\cdots\cdots$ 無窮項之和。

〔解〕 因 $r=\dfrac{10}{21}\div\dfrac{5}{7}=\dfrac{2}{3}$

$$\therefore \text{無窮項之和}=\frac{\dfrac{5}{7}}{1-\dfrac{2}{3}}=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}.$$

調和級數

1. 調和級數者，若干之數，依一定之順序排列，其各數之倒數成等差級數之謂也。恆以 H. P. 表之，其解法可從等差級數求之。如 a, b, c

成 H. P, 則 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 成 A. P.

2. 問題例解

例 1. 調和級數之前三項爲 6, 3, 2, 試求次之二項。

〔解〕 $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ 爲 A. P.

而其公差爲 $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

故所求次之二項爲 $\frac{3}{2}, \frac{6}{5}$.

例 2. a, b, c 爲調和級數，則 $\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}$ 之值如何？

〔解〕 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲 A. P.

$$\therefore \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}, \quad \frac{b-a}{ab}=\frac{c-b}{bc}$$

$$\frac{b-a}{a}=\frac{c-b}{c}, \quad \frac{a}{b-a}=\frac{c}{c-b},$$

$$\frac{a}{b-a}=\frac{-c}{b-c} \quad \therefore \frac{a}{b-a}+\frac{c}{b-c}=0$$

$$\therefore \frac{a}{b-a}+1+\frac{c}{b-c}+1=2,$$

即 $\frac{b}{b-a}+\frac{b}{b-c}=2.$

例 3. a, b, c 爲調和級數，則 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}$

$+\frac{1}{c-b}=0$ 試證之。

〔**解**〕 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 爲 A. P. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$

$$\frac{a-b}{ab}+\frac{c-b}{bc}=0,$$

$$\therefore \frac{a}{a-b}+\frac{c}{c-b}=0$$

$$\frac{a}{a-b}-1+\frac{c}{c-b}-1=-2,$$

$$\frac{b}{a-b}+\frac{b}{c-b}=-2$$

$$\therefore \frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=-\frac{2}{b}$$

然 $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b},$

$$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{c-b}=0.$$

3. 三級數中項之關係 設 A. G. H. 順次爲 a 及 b 之等差中項，等比中項，調和中項，則

$$A=\frac{a+b}{2},\ G=\sqrt{ab},\ H=\frac{2ab}{a+b}$$

$$\therefore\ A.H=\frac{a+b}{2}\times\frac{2ab}{a+b}=ab=G^2$$

即 $A.H=G^2$, 且 $A>G>H$.

4. 三級數中項之插入法

(1) 等差中項：若 a, l 中間有 m 個等差中項，則 $n=m+2$. 先求 d, 再求各中項。

例 求在 -1 與 2 中間，插入 5 個等差中項。

〔解〕 因 $a=-1,\ l=2,\ n=5+2=7$

$$\therefore\ 2=-1+(7-1)d,\ 即\ d=\frac{1}{2}$$

故所求各項爲 $-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2}$.

(2) 等比中項：若 a, l 中間有 m 個等比中項，則 $n=m+2$, 先求 r, 再求各中項。

例 求在 6 與 $\frac{2}{27}$ 中間，插入 3 個等比中項。

〔解〕 $a=6,\ l=\frac{2}{27},\ n=3+2=5$

$$\therefore\ \frac{2}{27}=6r^{5-1},\ \text{即}\ r=\pm\frac{1}{3}$$

故所求各項，

當 $r=\frac{1}{3}$ 時為 $2,\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{9}.$

$r=-\frac{1}{3}$ 時為 $-2,\ -\frac{2}{3},\ -\frac{2}{9}.$

(3) 調和中項：欲於 a, l 中間插入若干個調和中項，可取各項倒數所成之等差級數來研究。

例 求在 6 與 24 中間，插入 2 個調和中項。

〔解〕 先在 $\frac{1}{6}$ 與 $\frac{1}{24}$ 中間，插入兩個等差中項，得 $\frac{1}{8},\ \frac{1}{12}.$ 所以調和中項為 8, 12.

即此調和級數為 6, 8, 12, 24.

第十一章　圖解

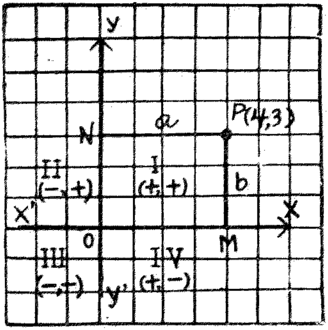
定　義

1. 常數與變數　在一問題中恆一成而不變，

如 1,2,3 等,及當作已知數看待之文字如 a, b, c 等,稱爲常數。反之,一種數量在不同情形之下有不同之値,非一定不變者,稱爲變數,常以 x, y 等表之。如一點在一數尺上運動,則此點所表之數,亦從之變遷,如是之數爲變數;原點在數尺上定而不動,則其所表之數爲常數。

2. 函數　有互相關係之二數,一數變,他一數隨之而變,一數定,他一數因之亦定,則自變自定之一數,曰自變數。因自變數之變而變,定而定之一數,曰因變數或曰函數。如 $y=5x+2$, x 之數若變,則 y 隨之而變,x 之數若定,則 y 亦隨之而定,故 x 可以視作自變數而以 y 視作 x 之函數,常以 $f(x)$ 記號表示。變數之一次式,曰該變數之一次函數,二次式曰二次函數,餘可類推。

3. 坐標軸與坐標　在一平面中取互相垂直二直線 XX', YY',二線相交於 O,名此 O 爲原點。XX', YY' 皆曰軸,XX' 曰橫軸,YY' 曰縱軸,二軸分平面成四部分,此各部分曰象限。如下圖:

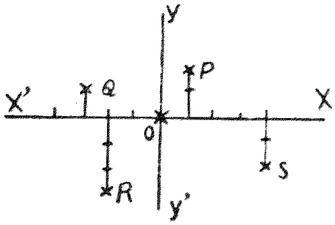


橫坐標如 PN(＝a) 又稱橫距，縱坐標如 PM(＝b)又稱縱距，P 點之坐標，以 P(a, b) 表，橫坐標寫在前面，縱坐標在後。X＝4, Y＝3, 故 P 點坐標為 P(4, 3).

4. 坐標之正負　　橫坐標在縱軸之右邊為正，在縱軸之左邊為負；縱坐標在橫軸之上面為正，在橫軸之下面為負。故點在第一象限(I)內為 (＋a, ＋b)，第二象限 (II) 內為 (－a, ＋b)，第三象限(III)內為(－a, －b)，而第四象限(IV)內為(＋a, －b)。

5. 描點　　若先有坐標，欲描寫其點，可先在橫軸上取 M 點，令 OM 之長表所設之橫坐標。

於是從 M 引橫軸之垂線，在此垂線上量 MP，令 MP 之長表所設縱坐標之數，則其止點 P 即為所欲描寫之點。



茲舉數例於下：

例 1. 點(0, 0)為 O.

例 2. 點(1, 2)為 P.

例 3. 點(−3, 1)為 Q.

例 4. 點(−2, −3)為 R.

例 5. 點(4, −2)為 S.

一次方程式之圖解

1. 方程式之圖解　方程式中之未知數，恆以 x 或 y 表之，今若以橫線代其 X 之值，縱線代其 Y 之值，則依上述之描點法，可得若干

點，通過此諸點，作直線或曲線，則此線即謂方程式之圖解。

2. 一元一次方程式之圖解

(1) 方程式 $ax+b=0$ 之根為函數 $f(x)=ax+b$ 之圖形與橫坐標交點之橫坐標。

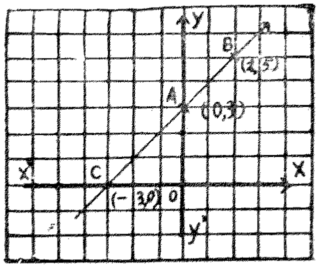
例　描寫 $f(x)=x+3$ 之圖形。

〔解〕　使 $y=f(x)=x+3$

則

點	A	B
x	0	2
y	3	5

於圖上定出二點(0, 3)(2, 5)，而連結此二點，引直線 AB，即為所求之圖形，其形如下：

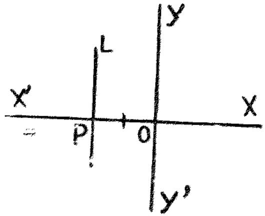


故 $f(x)=x+3$ 之圖形交橫軸於點 $(-3,0)$，即 $x+3=0$ 之根為 $x=-3$ 又此函數中 x 之係數為正，則直線自左至右恆向上而行。反之，x 之係數為負，則直線自左至右恆向下而行。

(2) 方程式 $x=a$，或 $y=b$ 之圖解，為平行於其軸之直線。

例 1. 作 $x=-2$ 之圖解。

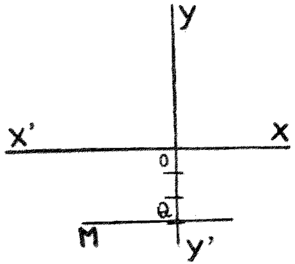
〔解〕 因 x 為負，故如圖在橫軸上準 OX' 之方向，自 O 點起，取 2 單位如 OP，於 P 作 PL 直線，與 YY' 軸平行，則此 PL 線為所求之圖解。



例 2. 作 $y=-3$ 之圖解。

〔解〕 因 y 為負，故如圖在縱軸上準 OY' 之方向，自 O 點起，取 3 單位如 OQ，於

Q 作 QM 直線，與 XX' 軸平行，則此 QM 線爲所求之圖解。



3. <u>二元一次方程式之圖解</u>　凡含二未知數 x 及 y 之一次方程式，皆可化爲

$$Ax+By=c \quad \text{即} \quad y=-\frac{A}{B}x+\frac{c}{B}$$

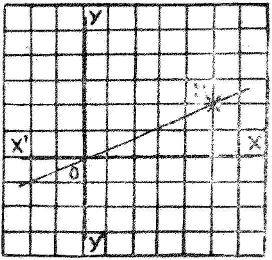
若設 $a=-\frac{A}{B}$，$b=\frac{c}{B}$ 則 $y=ax+b$

此 a 及 b 可代任何二已知數，若 a 爲 0，則爲平行於 XX' 之直線，若 b 爲 0，則 $y=ax$，故其圖解，可分爲二種如下：

(1) $y=ax$　可取適宜之單位，使縱線與橫線之比爲 a，求得 M 點，聯結 OM 作直線，即得。

例 作 $y=\frac{2}{5}x$ 之圖解。

〔解〕 設 $x=5$，則 $y=2$ 如右圖，依坐標 $(5, 2)$ 定 M 點，作 OM 直線，即爲所求之圖解。



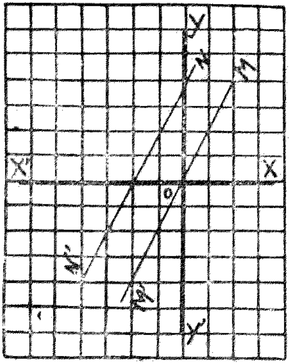
故 $y=ax$ 之圖解，即爲通過坐標原點之直線。

(2) $y=ax+b$ 可先依(1)作 MM'，次令 $b=QO$，從 O 點起，依 b 之符號，定 QO 等於 b，乃於 Q 點作 NN' 直線與 MM' 平行，即得。

例 作 $y=2x+4$ 之圖解。

〔解〕 先依(1)作 $y=2x$ 之圖解爲 MM' 直線，次因 $b=4$，故自原點 O 起，準 OY

之方向，取 4 單位如 OQ，從 Q 點作 NN′ 直線與 MM′ 平行，則此 NN′ 直線卽爲所求之圖解。



故 $y=ax+b$ 之圖解，卽爲與 y 軸相交之直線，其交點與原點之距離等於 b.

4. 聯立一次方程式之圖解

(1) 二元聯立一次方程式之圖解爲一點，由此點之坐標，可得其未知數之值。

例 作 $\begin{cases} x-y=-2\cdots\cdots(1) \\ x+y=6\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

兩方程式之圖解。

〔解〕 由(1)

x	0	1
y	2	3

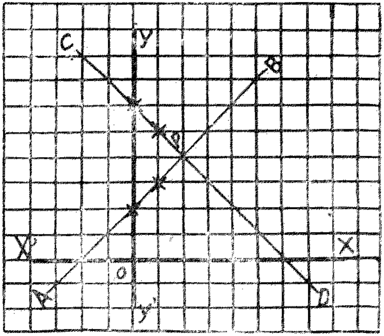
得 AB 線

由(2)

x	0	1
y	6	5

得 CD 線

其圖形如下:



此 AB 直線與 CD 直線相交於 P,則 P 點即爲所求之圖解。

P 點之坐標爲(2, 4)

故其根爲 $x=2,\ y=4.$

(2) 二個矛盾方程式之圖解爲平行線,此二線必無同具之點,於是不能得解。

例　作 $\begin{cases} x+y=5\cdots\cdots(1) \\ x+y=7\cdots\cdots(2) \end{cases}$

兩方程式之圖解。

〔解〕　由(1)

x	0	5
y	5	0

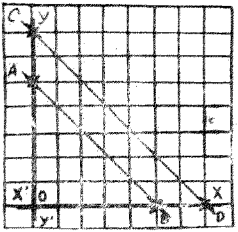
得 AB 線

由(2)

x	0	7
y	7	0

得 CD 線

其圖形如右



(3) 聯立方程式中含有附庸方程式者，其根不定，而有無限多個數值。因其兩線完全相合爲一個直線，線中各點皆可視作二線之交點故也。

例　作 $\begin{cases} 3x+6y=15\cdots\cdots(1) \\ x+2y=5\cdots\cdots(2) \end{cases}$

兩方程式之圖解。

〔解〕 由(1)

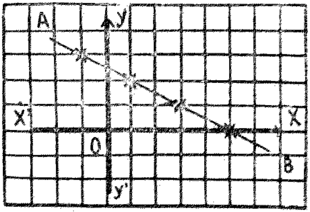
x	5	1
y	0	2

得 AB 線

由(2)

x	3	−1
y	1	3

得 AB 線



二次方程式之圖解

1. 一元二次方程式之圖解　x之二次式，其圖形爲曲線，此曲線謂之拋物線。如橫軸與曲線會於二點，則方程式可得二根。相會於一點，則可得一相等之二根。不會曲線，則不能得根。

茲各舉一例於下：

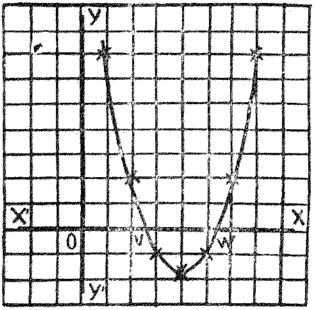
例 1. 用圖解求 $x^2-8x+14=0$ 之根。

〔解〕 先任意假定自變數 x 之值，再依關係式求出函數之相應值，得許多對之數值，用坐標法將各對數值以點表之，然後經過連續各點，畫一平滑曲線。

令 $y = x^2 - 8x + 14$

則

x	1	2	3	4	5	6	7
y	7	2	−1	−2	−1	2	7



與 X 軸交於 V, W 兩點，即方程式之根爲 OV = 2.6 及 OW = 5.4（略）

故二根爲實數而不等。

例 2. 用圖解求 $x^2 - 8x + 16 = 0$ 之根。

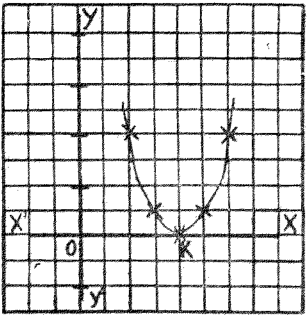
〔解〕 令 $y = x^2 - 8x + 16$

則

x	2	3	4	5	6
y	4	1	0	1	4

與 X 軸交於 K 點，卽方程式之根爲 OK=4，故二根爲實數而相等。

其形如下：



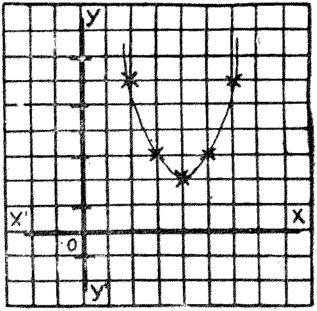
例 3. 用圖解求 $x^2-8x+18=0$ 之根。

〔**解**〕 令 $y=x^2-8x+18$

則

x	2	3	4	5	6
y	6	3	2	3	6

與 X 軸不相交，卽方程式之根非實數而爲虛數。其圖形如下：



2.　二元聯立二次方程式之圖解

(1)　如 $x^2+y^2=r^2$ 之圖解皆爲圓，而 r 卽其半徑。

含 x 及 y 之聯立方程式中，其一爲一次方程式，又一爲二次方程式者，其根有二對。若二圖解相交，則根爲實數而不等，若二圖解相切，則根爲實數而相等，若二圖解不相交亦不相切，則根爲虛數。

例　求聯立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \cdots\cdots(1) \\ x-y=-1 \cdots\cdots(2) \end{cases}$ 之圖解。

〔解〕　由(1)　$y=\pm\sqrt{25-x^2}$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±5	±4.9	±4.6	±4	±3	0

得一 ABCD 圓

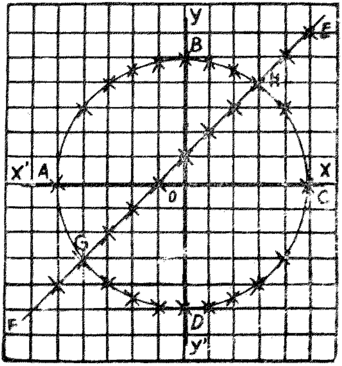
由(2) $y=x+1$

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5
y	1	2	0	3	-1	4	-2	5	-3	6	-4

得一 EF 直線

此 EF 直線與 ABCD 圓交於 G, H 兩點,則此兩點為聯立方程式之圖解。由 H 點之坐標 (3, 4). G 點之坐標 $(-4, -3)$ 得聯立方程式之二對值為 $x=3$, $y=4$ 及 $x=-4$, $y=-3$.

其圖形如下:



(2) 如 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 之圖解皆爲橢圓。

例 求聯立方程式 $\begin{cases} 9x^2+25y^2=225 \cdots\cdots(1) \\ y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$ 之圖解。

〔**解**〕 由(1) $y=\pm\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}$

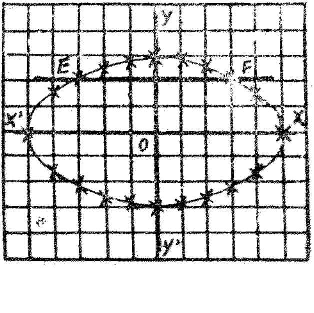
x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±3	±2.9	±2.8	±2.4	±1.8	0

得一 ABCD 橢圓

由(2) $y=2$

得一直線 EF

此 EF 直線與 ABCD 橢圓交於 E, F 兩點，則此兩點爲所求之圖解，由其坐標得方程式之二對根爲：——



$$\begin{cases}x=3.7\\y=2\end{cases} \text{及} \begin{cases}x=-3.7\\y=2\end{cases}$$

故其根皆爲實數而不等，圖形如上。

(3) 如 $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ 方程式之圖解，皆爲雙曲線。

含 x 及 y 之聯立方程式，其中二方程式皆爲二次者，其根有四對。若二圖解相交，則根爲實數，若二圖解相切，則根爲實數有二對相等。若二圖解不相交亦不相切，則根爲虛數。

例 求聯立方程式 $\begin{cases}4x^2-9y^2=36\cdots\cdots(1)\\x^2+y^2=25\cdots\cdots(2)\end{cases}$ 之圖解。

〔解〕 由(1) $y=\pm\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$

x	±3	±4	±5	±7	±8
y	0	±1.8	±2.7	±4.2	±4.9

得 BAC 及 B′A′C′ 兩支曲線

由(2) $y=\pm\sqrt{25-x^2}$

x	0	±1	±2	±3	±4	±5
y	±5	±4.9	±4.6	±4	±3	0

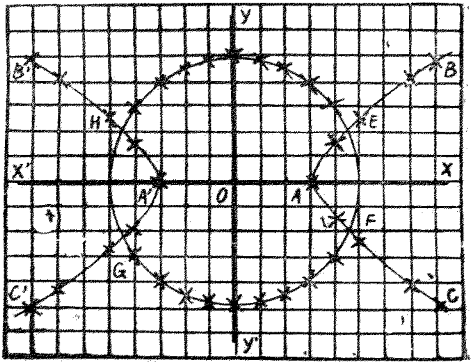
得 EFGH 圓

此 EFGH 圓與雙曲線相交於 E, F, G, H 四點，則此四點為所求之圖解。由其坐標得方程式四對之值，即

$\begin{cases} x=4.5 \\ y=2.2 \end{cases}$　$\begin{cases} x=4.5 \\ y=-2.2 \end{cases}$　$\begin{cases} x=-4.5 \\ y=2.2 \end{cases}$

及 $\begin{cases} x=-4.5 \\ y=-2.2 \end{cases}$

圖形如下：



第十二章　對數

對數之性質

1. 定義　　如 $a^x=n$ 之式，其 x 謂之 n 以 a 為底之對數。n 以 a 為底之對數，亦可簡稱為 a 底 n 之對數，恆以 $\log_a n$ 表之，故 $a^x=n$ 與 $\log_a n=x$，其所表相同。

例 1.　$10^3=1000$ 故以 10 為底，千之對數為 3.

例 2.　$2^5=32$ 故以 2 為底，32 之對數為 5.

2. 對數之性質

(1) 不論底數如何，1 之對數必為 0.

$\because\ a^2\div a^2=a^{2-2}=a^0$

然 $a^2\div a^2=1,\ \therefore\ a^0=1.$

即 $\log_a 1=0.$

(2) 不論底數如何，底數本身之對數等於 1.

$\because\ a^1=a$ 故 $\log_a a=1.$

(3) 積之對數，等於其各因數之對數之和。

設 $x=\log_a M,\ y=\log_a N$

即 $M=a^x,\ N=a^y$

故 $M \cdot N = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

即 $\log_a(M \cdot N) = x + y = \log_a M + \log_a N.$

例 $\log_2(4 \times 32 \times 128)$

$= \log_2 4 + \log_2 32 + \log_2 128$

$= \log_2 2^2 + \log_2 2^5 + \log_2 2^7$

$= 2 + 5 + 7 = 14.$

(4) 商之對數，等於從被除數之對數中，減去除數之對數所得之差。

設 $x = \log_a M,\ y = \log_a N$

即 $a^x = M,\ a^y = N$

故 $\frac{M}{N} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

即 $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = x - y = \log_a M - \log_a N.$

例 $\log_5\left(\frac{3125}{25}\right) = \log_5 3125 - \log_5 25$

$= \log_5 5^5 - \log_5 5^2 = 5 - 2 = 3.$

(5) 某數乘冪之對數，等於其數之對數乘其冪指數。

設 $\log_a M = x$，即 $a^x = M$

由是 $M^n = a^{nx}$

故 $\log_a M^n = nx = n \log_a M.$

例 1. $\log_3 27^4 = 4\log_3 27$

$$= 4\log_3 3^3 = 4\times 3 = 12.$$

例 2. $\log_3 \sqrt[6]{27} = \log_3 (27)^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}\log_3 27$

$$= \frac{1}{6}\log_3 3^3 = \frac{1}{6}\times 3 = \frac{1}{2} = 0.5.$$

(6) a 底 M 之對數，等於 b 底 M 之對數，與 a 底 b 之對數之積，又 a 底 b 之對數，等於 b 底 a 之對數之倒數。

設 $\log_a M = x$，$\log_b M = y$

即 $M = a^x$，$M = b^y$，$\therefore a^x = b^y$

又 $a^{\frac{x}{y}} = b^{\frac{y}{y}} = b$，$\therefore \log_a b = \frac{x}{y}$

或 $x = y\cdot \log_a b$

故 $\log_a M = x = y\cdot\log_a b = \log_b M \times \log_a b$.

又由 $a^x = b^y$　可得 $b^{\frac{y}{x}} = a^{\frac{x}{x}} = a$

即 $\log_b a = \frac{y}{x}$

$\therefore \log_a b \times \log_b a = \frac{x}{y}\times\frac{y}{x} = 1$

即 $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

例　已知 $\log_2 4096=12$，求 $\log_8 4096$

解　$\log_8 4096=\log_2 4096\times\log_8 2$

$$=\log_2 2^{12}\times\log_8 8^{\frac{1}{3}}=12\times\frac{1}{3}=4.$$

3.　對數之種類　對數有二種，一爲常用對數，卽以 10 爲底者，用於實地計算。二爲訥白爾對數，卽以 $e=2.71828\cdots\cdots$ 爲底者，用於理論數學。

4.　指標及其定則　對數之整數部分爲指標，小數部分爲假數。大於 1 之數之對數指標，等於比其整數之位數少 1 之數，小於 1 之數之對數指標，等於比小數首位下之 0 之個數多 1，而爲負數，換言之，卽整數有 n 位，其對數之指標爲 $n-1$，小數之首位與小數點相隔有 n 個 0 者，其對數之指標爲 $-(n+1)$.

例　如已知 $\log 3=0.47712$

則 $\log 30=1.47712$

$\log 300=2.47712$

$\log 0.003=\bar{3}.47712$

（常用對數，簡稱常對，其底數 10，恆不記。）

5.　對數表　凡數非 10 之完全羃數者，其對數

普徧爲不盡小數，昔之疇人乃算出其小數若干位，列表以供實用，故排列整數之對數所作之表曰對數表。

對數之目的，在令算法簡便，卽用對數表時，可以加法減法代乘法除法，以乘法除法代求羃求根也。

玆列五行對數表於下：

log

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.00	0.0000	0004	0009	0013	0017	0022	0026	0030	0035	0039	0043
1.01	0043	0048	0052	0056	0060	0065	0069	0073	0077	0082	0086
1.02	0086	0090	0095	0099	0103	0107	0111	0116	0120	0124	0128
1.03	0128	0133	0137	0141	0145	0149	0154	0158	0162	0166	0170
1.04	0170	0175	0179	0183	0187	0191	0195	0199	0204	0208	0212
1.05	0212	0216	0220	0224	0228	0233	0237	0241	0245	0249	0253
1.06	0253	0257	0261	0265	0269	0273	0278	0282	0286	0290	0294
1.07	0294	0298	0302	0306	0310	0314	0318	0322	0326	0330	0334
1.08	0334	0338	0342	0346	0350	0354	0358	0362	0366	0370	0374
1.09	0374	0378	0382	0386	0390	0394	0398	0402	0406	0410	0414
1.10	0414	0418	0422	0426	0430	0434	0438	0441	0445	0449	0453
1.11	0453	0457	0461	0465	0469	0473	0477	0481	0484	0488	0492

log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.12	0.0492	0496	0500	0504	0508	0512	0515	0519	0523	0527	0531
1.13	0531	0535	0538	0542	0546	0550	0554	0558	0561	0565	0569
1.14	0569	0573	0577	0580	0584	0588	0592	0596	0599	0603	0607
1.15	0607	0611	0615	0618	0622	0626	0630	0633	0637	0641	0645
1.16	0645	0648	0652	0656	0660	0663	0667	0671	0674	0678	0682
1.17	0682	0686	0689	0693	0697	0700	0704	0708	0711	0715	0719
1.18	0719	0722	0726	0730	0734	0737	0741	0745	0748	0752	0755
1.19	0755	0759	0763	0766	0770	0774	0777	0781	0785	0788	0792
1.20	0792	0795	0799	0803	0806	0810	0813	0817	0821	0824	0828
1.21	0828	0831	0835	0839	0842	0846	0849	0853	0856	0860	0864
1.22	0864	0867	0871	0874	0878	0881	0885	0888	0892	0896	0899
1.23	0899	0903	0906	0910	0913	0917	0920	0924	0927	0931	0934
1.24	0934	0938	0941	0945	0948	0952	0955	0959	0962	0966	0969
1.25	0969	0973	0976	0980	0983	0986	0990	0993	0997	1000	1004
1.26	1004	1007	1011	1014	1017	1021	1024	1028	1031	1035	1038
1.27	1038	1041	1045	1048	1052	1055	1059	1062	1065	1069	1072
1.28	1072	1075	1079	1082	1086	1089	1092	1096	1099	1103	1106
1.29	1106	1109	1113	1116	1119	1123	1126	1129	1133	1136	1139
1.30	1139	1143	1146	1149	1153	1156	1159	1163	1166	1169	1173
1.31	1173	1176	1179	1183	1186	1189	1193	1196	1199	1202	1206

log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.32	0.1206	1209	1212	1216	1219	1222	1225	1229	1232	1235	1239
1.33	1239	1242	1245	1248	1252	1255	1258	1261	1265	1268	1271
1.34	1271	1274	1278	1281	1284	1287	1290	1294	1297	1300	1303
1.35	1303	1307	1310	1313	1316	1319	1323	1326	1329	1332	1335
1.36	1335	1339	1342	1345	1348	1351	1355	1358	1361	1364	1367
1.37	1367	1370	1374	1377	1380	1383	1386	1389	1392	1396	1399
1.38	1399	1402	1405	1408	1411	1414	1418	1421	1424	1427	1430
1.39	1430	1433	1436	1440	1443	1446	1449	1452	1455	1458	1461
1.40	1461	1464	1467	1471	1474	1477	1480	1483	1486	1489	1492
1.41	1492	1495	1498	1501	1504	1508	1511	1514	1517	1520	1523
1.42	1523	1526	1529	1532	1535	1538	1541	1544	1547	1550	1553
1.43	1553	1556	1559	1562	1565	1569	1572	1575	1578	1581	1584
1.44	1584	1587	1590	1593	1596	1599	1602	1605	1608	1611	1614
1.45	1614	1617	1620	1623	1626	1629	1632	1635	1638	1641	1644
1.46	1644	1647	1649	1652	1655	1658	1661	1664	1667	1670	1673
1.47	1673	1676	1679	1682	1685	1688	1691	1694	1697	1700	1703
1.48	1703	1706	1708	1711	1714	1717	1720	1723	1726	1729	1732
1.49	1732	1735	1738	1741	1744	1746	1749	1752	1755	1758	1761
1.50	1761	1764	1767	1770	1772	1775	1778	1781	1784	1787	1790
1.51	1790	1793	1796	1798	1801	1804	1807	1810	1813	1816	1818

log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.52	0.1818	1821	1824	1827	1830	1833	1836	1838	1841	1844	1847
1.53	1847	1850	1853	1855	1858	1861	1864	1867	1870	1872	1875
1.54	1875	1878	1881	1884	1886	1889	1892	1895	1898	1901	1903
1.55	1903	1906	1909	1912	1915	1917	1920	1923	1926	1928	1931
1.56	1931	1934	1937	1940	1942	1945	1948	1951	1953	1956	1959
1.57	1959	1962	1965	1967	1970	1973	1976	1978	1981	1984	1987
1.58	1987	1989	1992	1995	1998	2000	2003	2006	2009	2011	2014
1.59	2014	2017	2019	2022	2025	2028	2030	2033	2036	2038	2041
1.60	2041	2044	2047	2049	2052	2055	2057	2060	2063	2066	2068
1.61	2068	2071	2074	2076	2079	2082	2084	2087	2090	2092	2095
1.62	2095	2098	2101	2103	2106	2109	2111	2114	2117	2119	2122
1.63	2122	2125	2127	2130	2133	2135	2138	2140	2143	2146	2148
1.64	2148	2151	2154	2156	2159	2162	2164	2167	2170	2172	2175
1.65	2175	2177	2180	2183	2185	2188	2191	2193	2196	2198	2201
1.66	2201	2204	2206	2209	2212	2214	2217	2219	2222	2225	2227
1.67	2227	2230	2232	2235	2238	2240	2243	2245	2248	2251	2253
1.68	2253	2256	2258	2261	2263	226[illegible]	2269	2271	2274	2276	2279
1.69	2279	2281	2284	2287	2289	2292	2294	2297	2299	2302	2304
1.70	2304	2307	2310	2312	2315	2317	2320	2322	2325	2327	2330
1.71	2330	2333	2335	2338	2340	2343	2345	2348	2350	2353	2355

log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.72	0.2355	2358	2360	2363	2365	2368	2370	2373	2375	2378	2380
1.73	2380	2383	2385	2388	2390	2393	2395	2398	2400	2403	2405
1.74	2405	2408	2410	2413	2415	2418	2420	2423	2425	2428	2430
1.75	2430	2433	2435	2438	2440	2443	2445	2448	2450	2453	2455
1.76	2455	2458	2460	2463	2465	2467	2470	2472	2475	2477	2480
1.77	2480	2482	2485	2487	2490	2492	2494	2497	2499	2502	2504
1.78	2504	2507	2509	2512	2514	2516	2519	2521	2524	2526	2529
1.79	2529	2531	2533	2536	2538	2541	2543	2545	2548	2550	2553
1.80	2553	2555	2558	2560	2562	2565	2567	2570	2572	2574	2577
1.81	2577	2579	2582	2584	2586	2589	2591	2594	2596	2598	2601
1.82	2601	2603	2605	2608	2610	2613	2615	2617	2620	2622	2625
1.83	2625	2627	2629	2632	2634	2636	2639	2641	2643	2646	2648
1.84	2648	2651	2653	2655	2658	2660	2662	2665	2667	2669	2672
1.85	2672	2674	2676	2679	2681	2683	2686	2688	2690	2693	2695
1.86	2695	2697	2700	2702	2704	2707	2709	2711	2714	2716	2718
1.87	2718	2721	2723	2725	2728	2730	2732	2735	2737	2739	2742
1.88	2742	2744	2746	2749	2751	2753	2755	2758	2760	2762	2765
1.89	2765	2767	2769	2772	2774	2776	2778	2781	2783	2785	2788
1.90	2788	2790	2792	2794	2797	2799	2801	2804	2806	2808	2810
1.91	2810	2813	2815	2817	2819	2822	2824	2826	2828	2831	2833

log	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.92	0.2833	2835	2838	2840	2842	2844	2847	2849	2851	2853	2856
1.93	2856	2858	2860	2862	2865	2867	2869	2871	2874	2876	2878
1.94	2878	2880	2882	2885	2887	2889	2891	2894	2896	2898	2900
1.95	2900	2903	2905	2907	2909	2911	2914	2916	2918	2920	2923
1.96	2923	2925	2927	2929	2931	2934	2936	2938	2940	2942	2945
1.97	2945	2947	2949	2951	2953	2956	2958	2960	2962	2964	2967
1.98	2967	2969	2971	2973	2975	2978	2980	2982	2984	2986	2989
1.99	2989	2991	2993	2995	2997	2999	3002	3004	3006	3008	3010

複利及年金

1. 複利　於利息，某期間之利息，於其期之末，算入本金以爲次期之本金；次期之利息，於其期之末又算入本金，以爲第三期之本金；如是類推，此種利息，謂之複利。

命本金爲 P，本利合計爲 A，利率爲 r，期間爲 n，則　$A=P(1+r)^n$

2. 年金　年金者，每年可領取或交付之金錢之謂也。年金有確實年金及生命年金二種。確實年金爲一定年限中連續者，其計算無確實；生

命年金爲其人之生存中連續者，人之生命不能預先確定其年限。

(a) 設利率 r, $1+r=R$, 期間爲 n 年，年金爲 S 圓，n 年間未取年金時，則於 n 年終，其本利合計 $A=\dfrac{S(R^n-1)}{r}$

(b) 連續 n 年間年金 S 圓之現價

$$P=\frac{S}{R-1}\cdot\frac{R^n-1}{R^n}$$

(c) 若年金續至無限期時，於上式 $\dfrac{R^n-1}{R^n}$ 之極限爲 1, 故其現價爲 $P=\dfrac{S}{r}$

(d) 暫停 p 年，其後連續 q 年，年金 S 圓之現價 $P=\dfrac{S}{R^{p+q}}\cdot\dfrac{R^q-1}{R-1}$

(e) 若暫停 p 年，其後永遠連續，則年金 S 圓之現價 $P=\dfrac{S}{R^p(R-1)}$