Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 19

Übungsaufgaben

AUFGABE 19.1. Sei $b \in \mathbb{N}_+$. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei der Eingabe von $(r_1, \ldots, r_k)$ in den ersten k Registern die Zahl $\sum_{i=1}^{k} r_i b^i$ berechnet, ausdruckt und anhält.

AUFGABE 19.2. Sei $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das bei Eingabe von z im ersten Register die b-adische Ziffernentwicklung $z = \sum_{i=0}^{k} s_i b^i$ (mit $0 \leq r_i \leq b-1$) berechnet, nach und nach die Ziffern s_i (beginnend mit $i = 0$) ausdruckt und schließlich anhält.

AUFGABE 19.3. Sei $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Entwerfe ein Programm für eine Registermaschine, das zur Eingabe von z im ersten Register die b-adische Ziffernentwicklung $z = \sum_{i=1}^{k} s_i b^i$ (mit $0 \leq r_i \leq b-1$) berechnet, nach und nach die Exponenten i und die zugehörigen Ziffern s_i (beginnend mit k und s_k) ausdruckt und schließlich anhält.

Wir nennen ein Registerprogramm *Zustands-periodisch*, wenn zwei identische Zustände (d.h. identische Inhalte in allen Registern und identische Befehlszeilennummern) zu unterschiedlichen Zeitpunkten im Programmablauf eingenommen werden (bei leerer Anfangsbelegung).

AUFGABE 19.4. Man gebe ein Beispiel für ein Zustands-periodisches Programm.

AUFGABE 19.5. Seien $T, S \subseteq \mathbb{N}$ entscheidbare Mengen. Zeige, dass dann auch die Vereinigung $T \cup S$, der Durchschnitt $T \cap S$ und auch das Komplement $\mathbb{N} \setminus T$ entscheidbar sind.

AUFGABE 19.6. Zeige, dass es nur abzählbar viele entscheidbare Teilmengen von $\mathbb{N}$ gibt.

AUFGABE 19.7. Sei $\alpha \in L^{\mathrm{Ar}}$ ein Ausdruck in der Sprache der Arithmetik (mit den Konstanten $0, 1$, den Funktionssymbolen $+, \cdot$ und dem Relationssymbol $\geq$), der keine Quantoren enthält und nur eine einzige Variable x.

Zeige: Die Menge T aller $n \in \mathbb{N}$ die α erfüllen, d.h.

$$T = \left\{ n \in \mathbb{N} |\, \mathbb{N}\frac{n}{x} \vDash \alpha \right\},$$

ist entscheidbar.

In den folgende Aufgaben verwenden wir den Begriff der Aufzählbarkeit nicht nur für Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}$, sondern auch für Teilmengen aus L^S.

AUFGABE 19.8. Es sei S ein Symbolalphabet mit einer R-Aufzählung der in S vorkommenden Variablen, Konstanten und Funktionssymbole. Zeige, dass es auch eine R-Aufzählung der S-Terme gibt.

AUFGABE 19.9. Es sei S ein Symbolalphabet mit einer R-Aufzählung der in S vorkommenden Variablen, Konstanten, Funktionssymbole und Relationssymbole. Zeige, dass es auch eine R-Aufzählung der S-Ausdrücke gibt.

AUFGABE 19.10. Es sei S ein Symbolalphabet mit einer R-Aufzählung der in S vorkommenden Variablen, Konstanten, Funktionssymbole und Relationssymbole. Zeige, dass es auch eine R-Aufzählung der S-Tautologien gibt.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 19.11. (4 Punkte)

Zeige, dass ein nicht anhaltendes, Register-beschränktes Programm (d.h. es gibt eine Schranke $S \in \mathbb{N}$, die die Registerinhalte zu keinem Zeitpunkt des Programmablaufes überschreiten) Zustands-periodisch ist.

AUFGABE 19.12. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für ein nicht anhaltendes Registerprogramm, das keine Periodizität im Ablauf der Befehlsnummern besitzt.

AUFGABE 19.13. (2 Punkte)

Zeige, dass jede endliche Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen entscheidbar ist.

Aufgabe 19.14. (3 Punkte)

Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}$ Teilmengen, deren symmetrische Differenz $A \triangle B$ endlich sei. Zeige, dass A genau dann aufzählbar bzw. entscheidbar ist, wenn B aufzählbar bzw. entscheidbar ist.

Aufgabe 19.15. (3 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen. Es gebe ein Programm für eine Registermaschine, das die Elemente von T in aufsteigender Reihenfolge ausgibt. Zeige, dass T entscheidbar ist.