Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 38

Übungsaufgaben

Aufgabe 38.1. Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Zeige

$$\langle 0, v \rangle \,=\, 0$$

für alle $v \in V$.

Aufgabe 38.2. Überprüfe, ob die folgenden Abbildungen

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

Bilinearformen sind.

(1)
$$\Psi(v, w) \,= ||\, v \,||\, .$$

(2)
$$\Psi(v, w) \,= ||\, v - w \,||\, .$$

(3)
$$\Psi(v, w) \,= ||\, v \,|| \cdot ||\, w \,||\, .$$

(4)
$$\Psi(v, w) \,=\, \angle(v, w).$$

Aufgabe 38.3. Zeige, dass ein Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

Aufgabe 38.4. Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum. Zeige, dass die Form genau dann linksausgeartet ist, wenn sie rechtsausgeartet ist.

Aufgabe 38.5. Betrachte die Linearform

$$L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x,y,z) |\, 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E. Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

Aufgabe 38.6. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, der mit dem induzierten Skalarprodukt versehen sei. Es sei

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und $v \in V$ der zugehörige Gradient im Sinne von Lemma 38.5 (3). Zeige, dass der Gradient $u \in U$ zur Einschränkung $f|_U$ die orthogonale Projektion von v auf U ist.

Aufgabe 38.7. Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 38.8.*

Bestimme die Gramsche Matrix zur Determinante auf dem K^2 bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 38.9. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Zeige, dass $\langle -, - \rangle$ genau dann symmetrisch ist, wenn es eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V mit

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle v_j, v_i \rangle$$

für alle $1 \leq i,j \leq n$ gibt.

Aufgabe 38.10. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$. Zeige, dass diese Form genau dann symmetrisch ist, wenn die Gramsche Matrix von ihr bezüglich einer Basis symmetrisch ist.

Aufgabe 38.11. Zeige, dass die Determinante in der Dimension zwei, also die Abbildung

$$K^2 \times K^2 \longrightarrow K,\ (\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}) \longmapsto x_1y_2 - x_2y_1,$$

keine symmetrische Bilinearform ist.

Aufgabe 38.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass der Ausartungsraum ein Untervektorraum von V ist.

AUFGABE 38.13. Es sei K ein Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik und sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Zeige

$$\langle v, w \rangle \,=\, \frac{1}{2} \left(\langle v+w, v+w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle \right).$$

AUFGABE 38.14.*

Es sei K ein Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik und sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Zeige

$$\langle v, w \rangle \,=\, \frac{1}{4} \left(\langle v+w, v+w \rangle - \langle v-w, v-w \rangle \right).$$

AUFGABE 38.15.*

Zeige, dass es eine Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem Vektorraum V geben kann, die nicht die Nullform ist, für die aber

$$\langle v, v \rangle \,=\, 0$$

für alle $v \in V$ ist.

AUFGABE 38.16.*

Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zeige, dass V eine Orthogonalbasis besitzt.

AUFGABE 38.17. Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

(1) $\varphi(x, y) := x_1 y_1$.
(2) $\varphi(x, y) := x_1 x_2 + y_1 y_2$.
(3) $\varphi(x, y) := 2x_1 y_2 + 3x_2 y_1$.

AUFGABE 38.18. a) Zeige, dass die Summe von Bilinearformen Ψ_1 und Ψ_2 auf einem K-Vektorraum V wieder eine Bilinearform ist.

b) Zeige ebenso, dass das skalare Vielfache einer Bilinearform wieder eine Bilinearform ist.

AUFGABE 38.19. Zeige, dass die Menge der Bilinearformen auf einem K-Vektorraum V einen K-Vektorraum bilden.

AUFGABE 38.20. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zeige, dass es eine natürliche Isomorphie

$$\mathrm{Hom}_K\left(V, V^*\right) \longrightarrow \mathrm{Bilin}\left(V\right)$$

gibt.

Wie im Fall eines Skalarproduktes nennt man lineare Abbildung, die Bilinearformen respektieren, Isometrien.

Es seien V und W Vektorräume über K, auf denen jeweils eine Bilinearform Φ_V bzw. Φ_W gegeben sei. Man nennt eine K-lineare Abbildung $f\colon V \to W$ eine *Isometrie*, wenn

$$\Phi_W(f(u), f(v)) = \Phi_V(u, v)$$

für alle $u, v \in V$ gilt.

Aufgabe 38.21. Es seien U, V Vektorräume über K mit Bilinearformen Φ_U und Φ_V und sei $\varphi\colon U \to V$ eine Isometrie. Ist φ injektiv?

Aufgabe 38.22. Es seien U, V, W Vektorräume über K mit mit Bilinearformen Φ_U, Φ_V, Φ_W. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Die Identität $V \to V$ ist eine Isometrie.
(2) Wenn $\varphi\colon U \to V$ eine bijektive Isometrie ist, so ist auch die Umkehrabbildung φ^{-1} eine Isometrie.
(3) Wenn $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ Isometrien sind, so ist auch die Hintereinanderschaltung $\psi \circ \varphi$ eine Isometrie.

Aufgabe 38.23. Es sei V ein K-Vektorraum mit einer Bilinearform Φ. Zeige, dass die Menge der Isometrien auf V eine Gruppe unter der Hintereinanderschaltung von Abbildungen bildet.

Aufgabe 38.24.*

Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und es seien

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

und

$$\psi\colon V \longrightarrow V$$

antilineare Abbildungen. Zeige, dass die Verknüpfung $\varphi \circ \psi$ linear ist.

Aufgabe 38.25.*

Zeige, dass für eine hermitesche Form $\langle -, - \rangle$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V die Werte $\langle v, v \rangle$ zu $v \in V$ stets reell sind.

Aufgabe 38.26. Zeige, dass eine Sesquilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V genau dann hermitesch ist, wenn die Gramsche Matrix der Form bezüglich einer Basis von V hermitesch ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 38.27. (4 Punkte)

Untersuche, welche der folgenden Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bilinear sind. Wenn ja, so untersuche die jeweilige Abbildung auch auf die Eigenschaften alternierend und symmetrisch.

(1) $\varphi(x, y) := x_1 - y_1$.
(2) $\varphi(x, y) := x_1 y_1 - x_2 y_2$.
(3) $\varphi(x, y) := 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1$.

Aufgabe 38.28. (3 Punkte)

Bestimme die Gramsche Matrix des Standardskalarproduktes im $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 38.29. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper, dessen Charakteristik nicht 2 sei. Es sei $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf einem K-Vektorraum V, die sowohl symmetrisch als auch alternierend sei. Zeige, dass es sich um die Nullform handelt.

Aufgabe 38.30. (2 Punkte)

Zeige, dass der Ausartungsraum zu einer symmetrischen Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem K-Vektorraum V gleich dem Kern der linearen Abbildung

$$V \longrightarrow V^*, \, v \longmapsto \langle v, - \rangle ,$$

ist.

Aufgabe 38.31. (3 (1+1+1) Punkte)

Wir betrachten die Linearform

$$L \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (x, y) \longmapsto 4x + 7y.$$

(1) Bestimme den Linksgradienten von L bezüglich der Determinante.
(2) Bestimme den Rechtsgradienten von L bezüglich der Determinante.
(3) Bestimme den Gradienten von L bezüglich des Standardskalarproduktes.

Aufgabe 38.32. (3 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum. Zeige, dass die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf V einen Untervektorraum des Raumes aller Bilinearformen bildet. Welche Dimension besitzt dieser Raum, wenn

$$\dim(V) = n$$

ist?

Aufgabe 38.33. (1 Punkt)

Es sei V ein reeller Vektorraum. Bildet die Menge der Skalarprodukte auf V einen Untervektorraum des Raumes aller Bilinearformen auf V?