大學叢書

實用最小二乘法

唐藝菁著

商務印書館發行

大學叢書

實用最小二乘式

大學叢書委員會

委　員

大學叢書

實用最小二乘式

唐藝菁著

商務印書館發行

序

本書理論與實用並重,前三章詳論或是率曲線之基本公式,並略及統計學中事物之實證,以示大自然界無不可入數學公式.第七章所論經驗公式,殆各種科學成立之基礎,尤爲社會科學化之媒介.余信千百年後,舉凡人之智愚,世之治亂,莫不有公式以範之.四五六各章,專論最或是值及其精度,實例計算,多憑表解,井然有序,偶有錯誤,能隨時查檢,不致有毫釐千里之失.

本書初稿付印,謬誤在所難免,尚望讀者賜書指正.

中華民國二十二年十月著者識於嶽麓山湖南大學.

目　次

實用最小二乘式

第一章

概　論

1. **量及數量.** 設有二量,如距離 AB 及 CD. 今研究二者長之關係,若不採用單位,則除 $AB \gtreqless CD$ 外,餘無方法,可資表示.若以尺度之,而設 $AB=10$尺,$CD=5$尺,則 $AB=\frac{10}{5}CD=2\cdot CD$,卽 AB 之量爲 CD 之量之2倍. AB 及 CD 曰量,10及5曰數,10尺,5尺曰數量.又如某物質之質量爲 n 磅,n 磅曰某物質之數量.

2. **觀測及觀測值(Observation and observed value).** 用各種測器,以以直接或間接方法,求距離之長度,物體之體積,物質之質量,時間之分秒,稱曰觀測.觀測所得之數量曰觀測值.

3. **眞值及最或是值(True value and most probable value).** 凡一量祇有一眞值.但就一量返復施行若干次觀測,無論同一測器,同一方法,同一注意,其所得結果,恆一不致.此從事觀測者雖甚小心,因之於各觀測值中,難得量之眞值,卽令有之,亦不能決定何者爲是.實際又不能不取一值以代之.不得已,祇

能由平均法求與眞值最近之一值耳.此最近之一值曰最或是值.

4. **精密及精度**(Precision and measure of precision). 就同一量而言,若觀測結果有多組觀測值,且各組觀測之情狀,又各互異,則每組將有一最或是值.設對各最或是值不加研究,將不知應取何值以代眞值.是則當先研究各組觀測之精密程度,以比較其優劣,用以研究精密之量曰精度.(見後27節).

5. **最小二乘式之目的.**

(1) 求最或是值.

(2) 求精度.

(3) 若觀測值有多組,則利用精度以比較各最或是值之優劣.或利用精度,合併各最或是值,以求最後之最或是值,以代眞值.

6. **直接觀測及間接觀測**(Direct observation and indirect observation). 觀測方法有二:曰直接觀測,曰間接觀測.

(1) 直接觀測者,就所求量逕行觀測之謂.例如用測尺直接測定一距離之長,用經緯儀直接測定一角之大小.

(2) 間接測量者,不測其應測定之量,而測其有關係之量.卽就原量之函數,施行觀測之謂.如求一角之大小,觀測其他諸角之和或差以定之;觀測恆星之高,以定地點之經緯度;調查一國之人口,以算定全國所需糧食之總額.

7. **獨立觀測及規約觀測** (Independent observation and

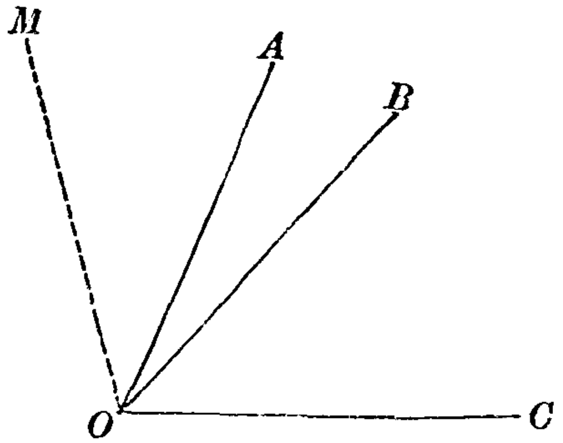
conditioned observation). 觀測種類亦有二:曰獨立觀測,曰規約觀測.

(1) 規約觀測者,不問測法爲直接或間接,惟其結果,須合於理論上嚴密之規約.例如測一平面三角形之各角,其和必爲180°;測一點周圍各角,其和必爲360°.

(2) 獨立觀測者,不拘於嚴格之規約,有時亦分直接間接兩法.例如測一平面三角形,僅測其二角,其餘一角,不施行觀測,則所測二角,彼此毫無關係,是曰**直接獨立觀測**.

又如測一線之長,分爲兩段測之,彼此仍爲獨立.是曰**間接獨立觀測**.

8. 以上諸項觀測之區別,更舉例以明之如下:



(圖1)

欲測 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 兩角(圖1),若直置經緯儀於O點而分別測之,其所測二角爲直接獨立觀測.若取他之補助方向OM,測$\angle MOA$, $\angle MOB$, $\angle MOC$三角,由此決定

$$\angle AOB = \angle MOB - \angle MOA,$$

$$\angle BOC = \angle MOC - \angle MOB.$$

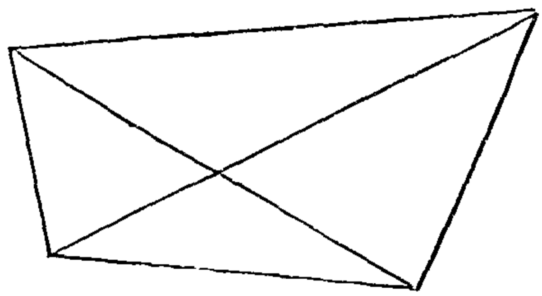
是謂間接獨立觀測.

今於測定 $\angle AOB$, $\angle BOC$ 外,再測 $\angle AOC$,則三角有一嚴格之規約.

卽
$$\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC.$$

三角之觀測值,必合乎此規約,方能適用,是謂規約觀測.

又舉例以明之如下:



(圖 2)

欲測定一四邊形(圖2).若僅測各邊各角,則爲直接獨立觀測.若由各邊各角,測定四邊形之面積,則爲間接獨立觀測.

僅測兩邊或兩角,自然各無關係而爲獨立.若測邊角全體,必合乎多數幾何規約,然後依觀測值所製之圖,在紙上方無錯誤,是爲規約觀測.

9. 觀測誤差(Errors of observation). 眞値與觀測值之差,曰觀測誤差.吾人日常欲測定一量,同一測器,同一方法,同一注意,返復觀測 n 次,其 n 個觀測値,將有偶同者,有相異者.召

途人而告之,莫不信以爲然.但一量僅有一値,故異觀測値之觀測誤差因而各異.即凡觀測値必附有觀測誤差.諸觀測誤差中,是否有一爲零,無從推知.故量之眞值,決難求得.所可求者,誤差最小之近似値耳,是即最或是值.然此値果與眞値最近與否,仍是疑問,惟勉強利用之,以代眞値而已.

附於觀測値之觀測誤差,其成因不一,玆類別之如下:

(1) 定誤差.

(2) 過失誤差(或曰錯誤).

(3) 不定誤差(或曰不期誤差).

10. 定誤差(Constant error). 凡定誤差,可由精密方法或物理公式改正之.其改正法類別之如下:

理論改正 (Theoretical correction). 如測定基線(base line),測尺因温度增減而有伸縮,此可據物理公式,由計算改正之.

測器改正 (Instrumental correction). 如測尺刻度不合標準,可求其差數改正之.如水準儀水平時,汽泡不在中點,可返復檢點改正之.

辭差改正 (Personal correction). 如持測尺者,習用大力,或不喜用力,可利用多人互測,彼此消除改正之.如視準者,或習於偏左,或習於偏右,可利用左右眼互易改正之.

上述改正,旣可推知,自可消除,故不屬本書研究之範圍.

11. 過失誤差 (Mistakes). 過失誤差,或因忽略,或未熟練所致,乃觀測者偶不留意所發生之誤差,縱細心而且熟練者,

亦難保其必無.如誤9爲6誤a爲b,測水平者誤樹枝爲標桿,記載者誤記數字,消除此種誤差,不外事先留意,事後檢點,或返復觀測多次,比較其異同.過失誤差,設偶入觀測值內,則全局皆誤,必盡力設法除去之,故亦不屬本書研究之範圍.

12. **不定誤差**(Accidental error). 一定誤差及過失誤差,經多方改正,既已盡行除去,而尚存餘於觀測值中之誤差,曰不定誤差.其成因,或由測器之急劇伸縮,或由天氣不正,致折光偶起不規則之變化,或由整理器械,尚欠精密,或由觀測未能適中目的.總之,觀測者無論若何注意,終存於觀測值中,而不能免.果欲去之,非用最小二乘式不爲功.驟觀之,此種誤差,似極不規則,非數學所能研究,然由或是率推之,竟得一意外精密之法.此最小二乘式之所以作也.不定誤差分眞差及眞值減觀測值.

13. **眞值及眞差**(True value and true errors). 設T爲某量之眞值,$M_1, M_2, M_3,\cdots\cdots M_n$爲其觀測值,$x_1, x_2, x_3,\cdots\cdots x_n$爲其眞差.則
$$T-M_1=x_1,\ T-M_2=x_2,\ T-M_3=x_3,\cdots\cdots T-M_n=x_n.$$

14. **最或是值及殘差**(The most probable value and residuel errors). 最或是值減觀測值之差曰殘差.設z爲某量之最或是值,$M_1, M_2, M_3\cdots\cdots M_n$爲其觀測值,$v_1, v_2, v_3\cdots\cdots v_n$爲其殘差,則
$$z-M_1=v_1,\ z-M_2=v_2,\ z-M_3=v_3,\cdots\cdots z-M_n=v_n.$$

觀測次數愈增,z愈近於T.若次數無限增大,視z爲T,當無大誤.同時$v_1v_2v_3\cdots\cdots v_n$將各與$x_1x_2x_3\cdots\cdots x_n$一致,而無大差別.然

盡吾人之力,殊難達到$n=\infty$之事實.是則z永不能適合於T,僅能謂兩者之差能達到最小可也.

15. 或是率原理 (Principle of probabilitiy). 在數學中,或是率爲小於一之數.即一狀況(way)之或出現之數,或不出現之數,與兩數之和之比

(例一) 擲一銅元,或現表面,或現裏面,其狀況有二.然出現之狀況雖不外表裏二面,究得表面,或得裏面,殊難預知.但可決定其機會相等,各得$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{2}$曰現表面狀況之或是率,同時亦曰現裏面狀況之或是率.就表面而言,出現之數爲1,不出現之數亦爲1,其和爲2.

出現表面之或是率$=\frac{1}{2}$.

不出現表面之或是率$=\frac{1}{2}$.

舛差兩種之差值曰眞差.今設一事出現之或是率曰成率,不出現之或是率曰敗率.

則 出現表面之成率$=\frac{1}{2}$.

出現表面之敗率$=\frac{1}{2}$.

(例二) 擲一骰子,其面有6(卽狀況有6).向上之面,僅6面之一.至於何面應向上,則毫無輕重之別.故各面向上之機會必相等,而各爲$\frac{1}{6}$.

就一點而言,出一點之或是率$=\frac{1}{6}$.

不出一點之或是率$=\frac{5}{6}$.

卽 出一點之成率$=\frac{1}{6}$.

出一點之敗率$=\frac{5}{6}$.

(例三)設一事出現狀況之數爲a,不出現狀況之數爲b,則其和爲$a+b$.

$$\therefore\quad 事之成率=\frac{a}{a+b},$$

$$事之敗率=\frac{b}{a+b}.$$

今
$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

即
$$成率+敗率=1$$

1者,謂事若不論成敗,其遇可必,故曰必率(Certainty). $\frac{a}{a+b}$之值,因a減小而變小.若$a=0$,則$\frac{a}{a+b}=0$者,謂事決不成,而必失敗.

$$\therefore\quad 1>或是率>0.$$

由此推知,或是率無負値.

(例四)設
$$P=一狀況之成率,$$
$$Q=其狀況之敗率.$$

則
$$P+Q=1.$$

或
$$Q=1-P.$$

(例五)抽籤博彩,設2000號中有一頭彩,

$$則得頭彩之成率=\frac{1}{2000},$$

$$得頭彩之敗率=1-\frac{1}{2000}=\frac{1999}{2000}.$$

今$\frac{1999}{2000}$幾等於1,即謂得頭彩之希望太小,而必至失敗也.

16. 單純事件 (Single event). 1單純事件中,有多數狀況之可能.其中幾個狀況之或是率,等於各該狀況或是率之和.

(例一)一袋中容有白球二個,紅球三個,黑球五個.今自袋中任取一球,則取得

$$白球之成率=\frac{2}{2+3+5}=\frac{2}{10}.$$

$$紅球之成率=\frac{3}{2+3+5}=\frac{3}{10}.$$

$$黑球之成率=\frac{5}{2+3+5}=\frac{5}{10}.$$

∴取得

$$白球或紅球之成率=\frac{2+3}{2+3+5}=\frac{5}{10}=\frac{2}{10}+\frac{3}{10},$$

$$紅球或黑球之成率=\frac{3+5}{2+3+5}=\frac{8}{10}=\frac{3}{10}+\frac{5}{10},$$

$$黑球或白球之成率=\frac{5+2}{2+3+5}=\frac{7}{10}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}.$$

(例二)一袋中容有白球a個,紅球b個,黑球c個,自袋中任取一球,則取得

$$白球或紅球之成率=\frac{a+b}{a+b+c},$$

$$白球或紅球之敗率=1-\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{c}{a+b+c}.$$

17. 組合事件 (Compound events). 組合多個事件,其相互關聯諸狀況之或是率,等於各該狀況之或是率之乘積.

(例一)有甲乙二袋,甲袋內容二白球,三紅球;乙袋內容四

白球,五紅球.今同時自二袋各取一球,則

$$自甲取得白球之或是率=\frac{2}{2+3}=\frac{2}{5},$$

$$\cdots\cdots\cdots紅\cdots\cdots\cdots=\frac{3}{2+3}=\frac{3}{5},$$

$$自乙取得白球之或是率=\frac{4}{4+5}=\frac{4}{9},$$

$$\cdots\cdots\cdots紅\cdots\cdots\cdots=\frac{5}{4+5}=\frac{5}{9}.$$

但甲袋諸球與乙袋諸球組合狀況之總數$=(2+3)(4+5)$.

甲袋白球與乙袋白球組合狀況之數$=2\times4$.

$$\therefore\ 自兩袋俱取得白球之或是率=\frac{2\times4}{(2+3)(4+5)},$$

$$=\frac{2}{2+3}\times\frac{4}{4+5}.$$

$$同理,自甲得白球,自乙得紅球之或是率=\frac{2}{2+3}\times\frac{5}{4+5}.$$

$$自甲得紅球,自乙得白球之或是率=\frac{3}{2+3}\times\frac{4}{4+5}.$$

$$自甲乙俱得紅球之或是率=\frac{3}{2+3}\times\frac{5}{4+5}.$$

(例二)有甲乙二袋,甲袋內容白球a_1個,紅球b_1個;乙袋內容白球a_2個,紅球b_2個.今同時自二袋各取一球,則

$$自甲乙俱得白球之或是率=\frac{a_1}{a_1+b_1}\times\frac{a_2}{a_2+b_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots紅\cdots\cdots\cdots=\frac{b_1}{a_1+b_1}\times\frac{b_2}{a_2+b_2},$$

自甲得白球,自乙得紅球之或是率 $=\frac{a_1}{a_1+b_1}\times\frac{b_2}{a_2+b_2}$,

…………紅…………白………………… $=\frac{b_1}{a_1+b_1}\times\frac{a_2}{a_2+b_2}$,

兩球同色之或是率 $=\frac{a_1a_2}{(a_1+b_2)(a_2+b_2)}+\frac{b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$

$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}.$$

…………異………………… $=\frac{a_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}+\frac{a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$

$$=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}.$$

今 $\frac{a_1a_2+b_1b_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}+\frac{a_1b_2+a_2b_1}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=1$,即若不論兩球同色,與不同色,其取得兩球之事實可必也.

(例三) 有甲乙丙三事件.設 P_1, P_2, P_3. 各爲其成率,則

甲乙丙俱成之或是率 $=P_1P_2P_3$,

甲乙成而丙敗……………… $=P_1P_2(1-P_3)$,

乙丙成而甲敗……………… $=(1-P_1)P_2P_3$,

丙甲成而乙敗……………… $=P_1(1-P_2)P_3$,

甲成而乙丙敗……………… $=P_1(1-P_2)(1-P_3)$,

乙成而甲丙敗……………… $=(1-P_1)P_2(1-P_3)$,

丙成而甲乙敗……………… $=(1-P_1)(1-P_2)P_3$,

甲乙丙俱敗……………… $=(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)$.

18. 或是率與曲線 (Probability and curve). 組合多個相同事件,其中某狀況關聯之成率或敗率,可依解析幾何坐標

法作圖以明之.

(例一)擲兩銅圓,則

兩銅圓俱現表面之或是率 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

一現表面,一現裏面之或是率 $=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$.

兩銅圓俱現裏面之或是率 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

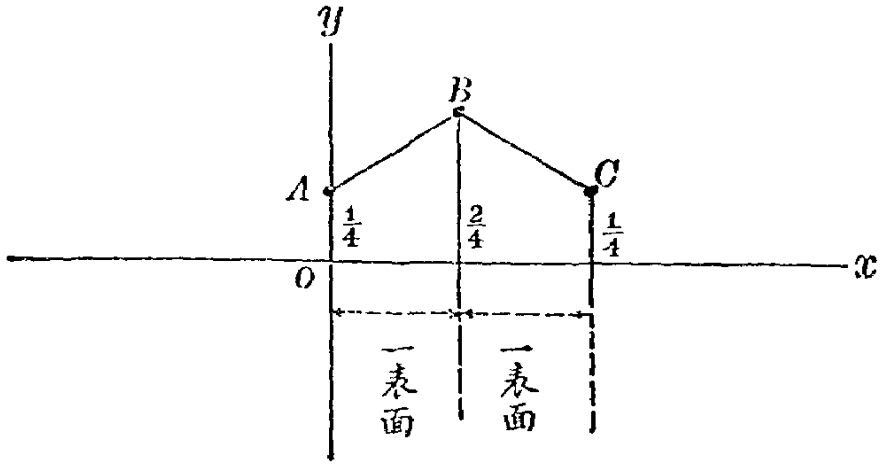
今兩銅圓現表裏之狀況相同,故兩銅圓爲二相同事件.就表面言之,則

現兩表面之或是率 $=\frac{1}{4}$,

現一表面之或是率 $=\frac{2}{4}$,

不現表面之或是率 $=\frac{1}{4}$.

在 x 軸上假定相當單位,以一單位代一表面,在 y 軸上取相當單位,以一單位代必率,作下圖



(圖 3)

y軸上之單位(即必率)$=4\cdot AO$.

(例二) 擲六粒骰子,就一點言之,則擲得指定兩個一點之或是率(即四個非一點)$=\left[\frac{1}{6}\right]^2\left[1-\frac{1}{6}\right]^{6-2}$. 但六粒骰子中任取二粒之組合爲${}_6C_2$個.

$$\therefore\ \text{擲得任意兩個一點之或是率} = {}_6C_2\left[\frac{1}{6}\right]^2\left[\frac{5}{6}\right]^4.$$

依同理,擲得

無一點之或是率 $={}_6C_0\left[\frac{1}{6}\right]^0\left[\frac{5}{6}\right]^6=\frac{5^6}{6^6}$,

1 個一點……………$={}_6C_1\left[\frac{1}{6}\right]^1\left[\frac{5}{6}\right]^5=6\left[\frac{1}{6}\right]\left[\frac{5}{6}\right]^5=\frac{6\times5^5}{6^6}$,

2 個一點……………$={}_6C_2\left[\frac{1}{6}\right]^2\left[\frac{5}{6}\right]^4=\frac{6\times5}{1\times2}\left[\frac{1}{6}\right]^2\left[\frac{5}{6}\right]^4=\frac{15\times5^4}{6^6}$,

3 個一點……………$={}_6C_3\left[\frac{1}{6}\right]^3\left[\frac{5}{6}\right]^3=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}\left[\frac{1}{6}\right]^3\left[\frac{5}{6}\right]^3=\frac{20\times5^3}{6^6}$,

4 個一點……………$={}_6C_4\left[\frac{1}{6}\right]^4\left[\frac{5}{6}\right]^2=\frac{6\times5\times4\times3}{1\times2\times3\times4}\left[\frac{1}{6}\right]^4\left[\frac{5}{6}\right]^2$

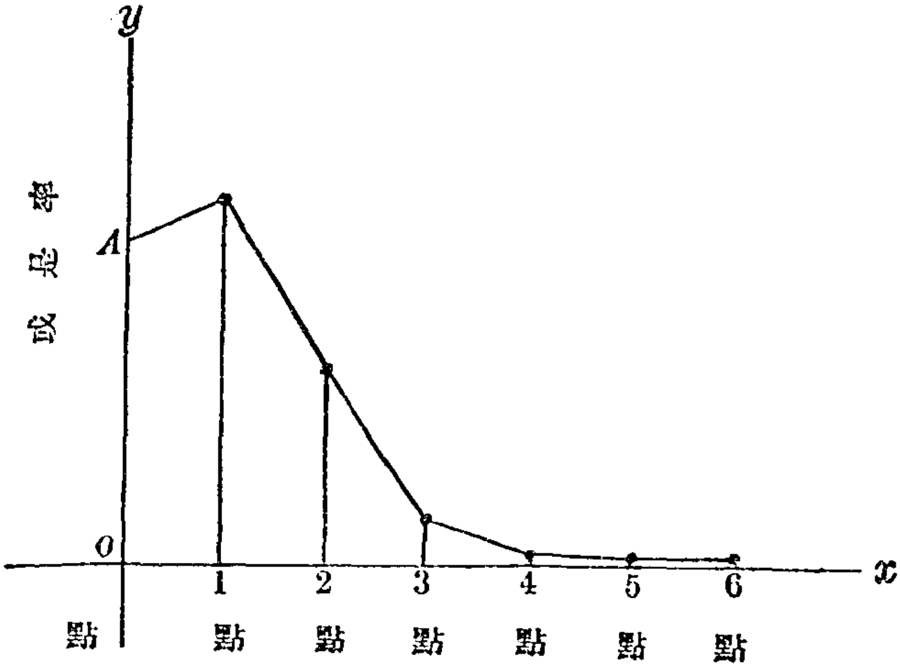
$=\frac{15\times5^2}{6^6}$,

5 個一點……………$={}_6C_5\left[\frac{1}{6}\right]^5\left[\frac{5}{6}\right]=\frac{6\times5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4\times5}\left[\frac{1}{6}\right]^5\left[\frac{5}{6}\right]$

$=\frac{6\times5}{6^6}$,

6 個一點……………$={}_6C_6\left[\frac{1}{6}\right]^6\left[\frac{5}{6}\right]^0=\frac{1}{6^6}$.

據上列結果,作圖如下:



(圖 4)

y 軸上之單位 $=\left[\dfrac{6}{5}\right]^6\cdot AO.$

(例三) 擲八銅圓,就表面言之,則

無表面之或是率 $={}_8C_0\left[\dfrac{1}{2}\right]^0\left[\dfrac{1}{2}\right]^8=\ 1\cdot\dfrac{1}{2^8},$

1個表面…………… $={}_8C_1\left[\dfrac{1}{2}\right]^1\left[\dfrac{1}{2}\right]^7=\ 8\cdot\dfrac{1}{2^8},$

2………………………… $={}_8C_2\left[\dfrac{1}{2}\right]^2\left[\dfrac{1}{2}\right]^6=28\cdot\dfrac{1}{2^8},$

3………………………… $={}_8C_3\left[\dfrac{1}{2}\right]^3\left[\dfrac{1}{2}\right]^5=56\cdot\dfrac{1}{2^8},$

$$4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_8C_4\left[\frac{1}{2}\right]^4\left[\frac{1}{2}\right]^4 = 70\cdot\frac{1}{2^8},$$

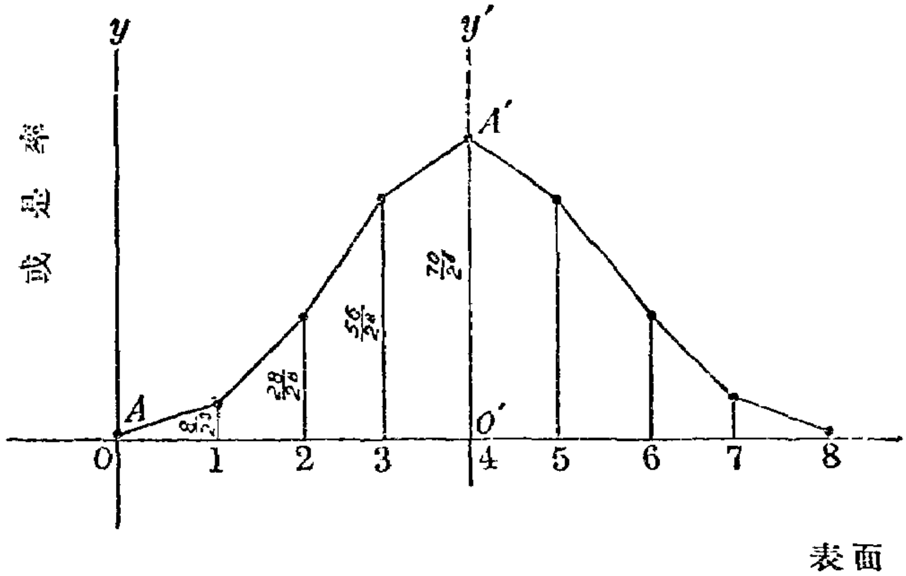
$$5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_8C_5\left[\frac{1}{2}\right]^5\left[\frac{1}{2}\right]^3 = 26\cdot\frac{1}{2^8},$$

$$6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_8C_6\left[\frac{1}{2}\right]^6\left[\frac{1}{2}\right]^2 = 28\cdot\frac{1}{2^8},$$

$$7 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_8C_7\left[\frac{1}{2}\right]^7\left[\frac{1}{2}\right]^1 = 8\cdot\frac{1}{2^8},$$

$$8 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_8O_8\left[\frac{1}{2}\right]^8\left[\frac{1}{2}\right]^0 = 1\cdot\frac{1}{2^8},$$

表面個數與其或是率之關係其圖如下:



(圖5)

y 軸上之單位 $= 2^8 \cdot AO$.

若取 $A'O'$ 為 y 軸,則圖形依 y 軸而對稱

細案上圖,以4個表面之或是率為最大.故4個表面為最或

是值,卽擲得4個表面4個裏面,爲最有希望.餘皆希望漸小或至於無.

(例四) 設 n 相同事件,每事件有兩狀況,又設

$P=$ 每事件某狀況之成率,

$Q=$ 每事件某狀況之敗率.

則 $$P+Q=1.$$

設某狀況有 r 個同時出現,其不出現之個數將爲 $n-r$.

組合 n 事件,r 個某狀況關聯之或是率 $={}_nC_rP^rQ^{n-r}$,

今就某狀況而言,則

無該狀況之或是率 $={}_nC_0P^0Q^{n-0}$,

1個……………………$={}_nC_1P^1Q^{n-1}$,

2……………………$={}_nC_2P^2Q^{n-2}$,

……………………$=$……………

r…… ……………$={}_nC_rP^rQ^{n-r}$,

……………………$=$……………

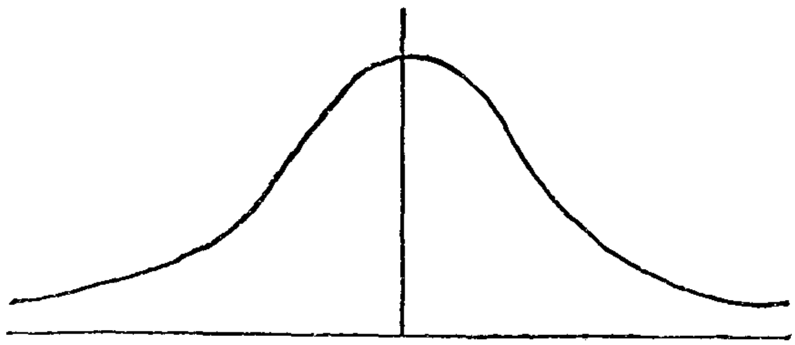
n……………………$={}_nC_nP^nQ^{n-n}$.

但 $${}_nC_0P^0Q^n+{}_nC_1P^1Q^{n-1}+{}_nC_2P^2Q^{n-2}+\cdots\cdots+$$

$${}_nC_rP^rQ^{n-r}+\cdots\cdots=(P+Q)^n=(1)^n=1.$$

故展開 $(P+Q)^n$,可得各或是率之分配.

若$P=Q=\frac{1}{2}$而$n=\infty$,其圖略如下:



(圖 6)

觀以上諸例,以數表或是率之分配,常不易得其觀念,若以圖表之,則一目了然矣.

習題一

1. 一骰擲兩次,求擲得一點之或是率.(一個一點及兩個俱為一點)

答: $\frac{11}{36}$.

2. 一袋容有三白球,四紅球,五黑球.今任取二球,求俱得紅球之或是率.

答: $\frac{1}{11}$.

3. 同時擲六骰,求不多於兩個一點之或是率,及最少有兩個一點之或是率.

答: $2\cdot 8\times\left(\frac{5}{6}\right)^6, 1-2\cdot 2\times\left(\frac{5}{6}\right)^6$.

4. 同時擲兩骰,求表面點數和為2至12諸數之或是率.

答: $\frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}, \frac{5}{36}, \frac{4}{36}, \frac{3}{36}, \frac{2}{36}, \frac{1}{36}$.

5. 每人同時擲二十個銅圓,人數若干,方能有一人能擲得全表面之機會.

答: 2^{20}人.

6. 每班學生二十人.每學生智力,平均八題能答一題.求全班答其一題之或是率. 答: 0.9308.

7. 袋內容有紅黃白黑四色球各一三個.同時取五個,求取得者俱爲紅色之或是率,及取得者無一紅球之或是率. 答: 495.2×10^{-6}, 221633×10^{-6}.

8. 袋內容有十三色球各四個,同時取五個,求取得者有四個同某色之或是率. 答: 3.693×10^{-6}.

第 二 章

誤 差 定 律

19. 不定誤差及其或是率(Accidental error and its probability). 一組觀測值中,每值各附有誤差(9節).但各誤差大小不同,則其發生之機會(即或是率),亦因以各異.故凡誤差各有其或是率.(本章所用誤差二字,全指不定誤差而言.)

某誤差之或是率,等於該誤差之個數,與誤差總個數之比(15節).就多數經驗,細心考察,觀測值附有之誤差,其分配常適合於下列三定律.玆舉例詳細說明之,以爲最小二乘式理論之基礎.

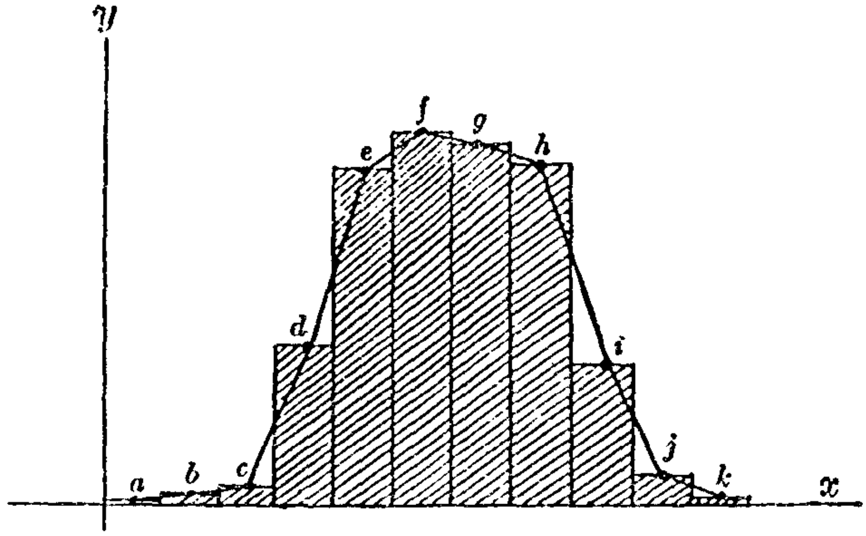
(定律一)小誤差之或是率,幾常大於大誤差之或是率. (即小誤差之個數幾常多於大誤差之個數.)

(定律二)同數量之正負誤差,其或是率幾常相等. (即正誤差之個數,幾常等於同數量之負誤差之個數.)

(定律三)無極大誤差. (即極大誤差之個數,殆等於零.)

(例一) 1878年,據美國某礮臺報告:於相距200碼打靶,靶爲長方形,長52呎,高11呎,上下分成11等部分,每部分高一呎,共

連續射擊1000發,目的在打中中部分.計得彈痕數分配如下表.



部分	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
彈痕數	1	4	10	89	190	212	204	193	79	16	2	1000
或是率	$\frac{1}{1000}$	$\frac{4}{1000}$	$\frac{10}{1000}$	$\frac{89}{1000}$	$\frac{190}{1000}$	$\frac{212}{1000}$	$\frac{204}{1000}$	$\frac{193}{1000}$	$\frac{79}{1000}$	$\frac{16}{1000}$	$\frac{2}{1000}$	共1

(圖7)

依表作圖(圖7),在x軸上,取1呎爲單位,在y軸上,取1000彈爲單位,作11個長方形,其底$=1$呎,其高$=$彈數,則

第1長方形之面積$=1$彈$\times 1$呎$=\frac{1}{1000}$(1000彈$\times$呎),

第2 .... $=4$彈$\times 10$呎$=\frac{4}{1000}$(1000彈$\times$呎),

第3長方形之面積 $=10$彈$\times 1$呎$=\frac{10}{1000}$(1000彈×呎),

……………………………=…………………=……………………,

中……………………………=212彈×1呎$=\frac{212}{1000}$(1000彈×呎),

……………………………=…………………=……………………,

第11…………………………=2彈×1呎$=\frac{2}{1000}$(1000彈×呎),

11個長方形面積之和 $=\frac{1+4+10+\cdots\cdots+16+2}{1000}$(1000彈×呎)

$=1\times$(1000彈×呎),

但打靶目的,在打中中部之中點,則誤中上下部分,皆附有誤差.今設中部之上爲(−),中部之下爲(+),則誤中第五部分中點之誤差將爲(−1呎),其或是率爲$\frac{190}{1000}$,誤中第七部分之誤差將爲(+1呎),其或是率爲$\frac{204}{1000}$.

∴ 誤差(−1呎)之或是率 $=\frac{190}{1000}$

$=\frac{\text{第五長方形之面積}}{(1000\text{彈}\times\text{呎})}$

$=\frac{\text{第五長方形之面積}}{\text{長方形面積之和}}$.

誤差(+1呎)之或是率 $=\frac{204}{1000}$

$=\frac{\text{第七長方形之面積}}{(1000\text{彈}\times\text{呎})}$

$=\frac{\text{第七長方形之面積}}{\text{長方形面積之和}}$.

若設長方形面積之和爲單位面積，則各長方形之面積，可代表相當誤差之或是率. 且諸誤差或是率之和 =1.

觀(圖7)，以第六面積爲最大，上下各漸次減小，至第一面積及第11面積爲最小(定律一).

第一部分之上，與第11部分之下，全無彈痕，圖中因無面積(定律三).

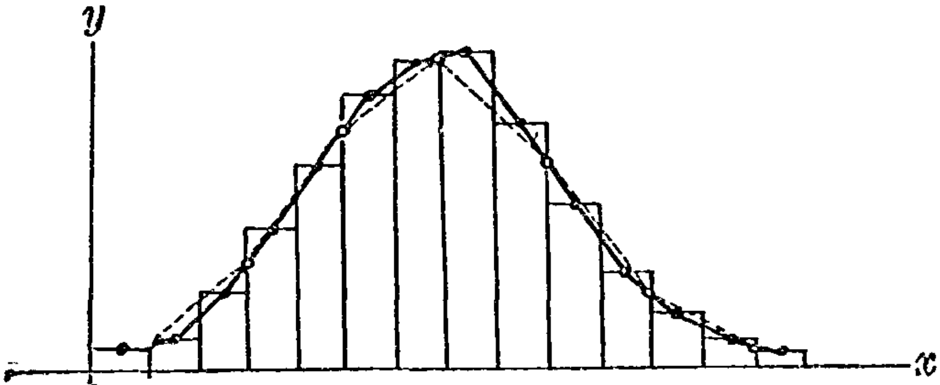
第五面積與第七面積殆等，第四與第八殆等(定律二).

中部下各面積各較中部上對應面積略大，則必地心吸力有以致之，是屬於定誤差而非不定誤差.

又據(定律一)反案之，或是率大者，其誤差小. 今第六面積爲最大，故中部內各彈痕之誤差爲最小. 打中中部，本是打靶目的. 故最或是值必在中部.

今於各長方形頂邊取中點，$a, b, c, \cdots\cdots k$，次第以直線聯之，殆成一曲線，曲線下之面積，適等於長方形面積之和，案圖自明. 各頂點之位置表示各部分誤差之大小. 曲線下之面積，即單位面積 (1000 彈 × 呎)，以表示必率 (Certainty.) (15 節之例 3).

(例二) 1869 年，美國紐約統計 18,780 兵士之高度，得下表. 以 1 吋爲 x 軸上之單位. 18,780 兵士爲 y 軸上之單位 (圖 8).



統計號數	高度(吋)	人數	或是率
1	61	197	0.0105
2	62	317	0.0169
3	63	692	0.0369
4	64	1289	0.0686
5	65	1961	0.1044
6	66	2613	0.1391
7	67	2974	0.1584
8	68	3017	0.1607
9	69	2287	0.1218
10	70	1599	0.0852
11	71	878	0.0467
12	72	520	0.0277
13	73	262	0.0139
14	74	174	0.0092
		共18780	1.0000

(圖 8)

按上表,高度之差為1吋.統計第6號,高66吋之兵士2613人實際2613人非全體高66吋.乃高度在65·5吋至66·5吋間之兵士共有此數.特取其中數66吋,代表全體兵士之高度耳.

圖中第6長方形之面積$=2613$人$\times$吋

$$=\frac{2613}{18780}(18780\text{人}\times\text{吋})$$

$$=0.1391(18780\text{人}\times\text{吋}).$$

諸長方形之面積之和$=1\times(18780$人$\times$吋$)$.

今取面積之和為單位,

則　　66吋高度之或是率$=\frac{2613}{18780}=0.1391.$

若僅比較各高度或是率之大小,比較代表面積之數字可也.今數字以3017爲最大,卽第 8 長方形之面積爲最大,故有最小誤差者,必爲68吋之高度,卽全體兵士之最或是高度.

凡觀測值有權者,帶權平均數,公認爲最或是值.計算結果,

帶權均數 $=67.285$ 吋.(見後39節之例1)

又算術均數 $=67.5$ 吋.

衆數 $=68.0$吋.(人數最多之高度見後27節)

中數 $=67.5$吋.(依高度順次排列居中之高度)

衆數中數爲統計學上名辭,均可權代最或是值,然以帶權均數爲最合理,惟計算繁難,常不合實用,因採用他數以代之.查上列四數,相差極微,實際則可任擇也.

1 2	61.5	514	1.0274
3 4	63.5	1981	0.1055
5 6	65.5	4574	0.2435
7 8	67.5	5991	0.3191
9 10	69.5	3886	0.2070
11 12	71.5	1398	0.0744
13 14	73.5	436	0.0231
	共	17.780	1.0000

將原統計表每兩號關聯,則得上表.第7及第8兩號平均高度爲67·5吋,其或是率 $=\frac{5991}{18.780}=0.3191$.

第7及第8兩長方形面積之和 $=5991$ (人 × 吋)

$=\frac{1}{2}\times 5991$ (人數 ×2吋)

$=2995.5$ 人 ×2吋

長方形面積之和,今以(圖8)中之虛線代表之,其數量仍爲18780 (人 × 吋).

據上統計,此18780兵士,率其遠代,必共一始祖,其高度或爲67.285吋.經千百代後,因天時人事,差異漸生,遂不齊一,而成此高矮不同之現象.但高度較最或是值之差大者,其人數愈小(定律1).高度之正負差相等者,人數殆等(定律2).無高度達61以下,及74吋以上者(定律3).

(例三)案 18節之 例三 以擲得四表面,四裏面之或是率爲最大.實際以8銅元擲2^8次,出現表面之次數,將與1:8:28:56:70:56:28:8:1無大差異.實得四表面四裏面之次數,將極近70而爲最大(定律1),故可決定其誤差爲最小.但同時實得九表面,或九裏面,則絕無事(定律3).

20. **誤差之極限.** 上節(定律3)中無極大誤差之極大兩字,與數學中之無窮大(∞)判然有別.今舉例說明之.

角度能讀至1″之經緯儀,誤差大至20″,卽稱極大.蓋20″之刻劃,在測微器(Vernier)上,明顯易讀,故不致發生20″以上之

誤差.過此限度,則屬於過失誤差,已出本書研究之範圍.

同理,角度能讀1′之經緯儀,5′將爲極大誤差.上節(例二)高度之極大誤差,竟達6.7吋.此種誤差,非量度不精之咎,乃時代久遠之天時人事,有以致之.是將求之於長人矮人實際之差.

故凡觀測,總有一極大誤差L,其他正誤差在O與$(+L)$之間,負誤差在O與$(-L)$之間.

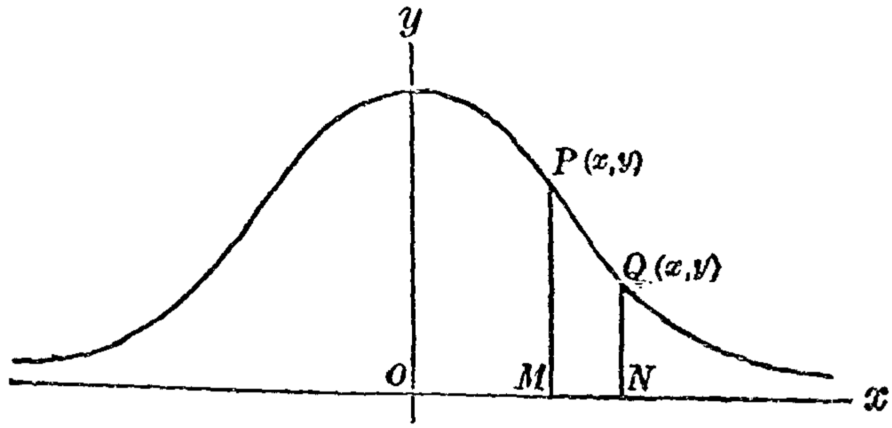
21. 或是率曲線(Probability curve). 就以上兩節按之,誤差之或是率,將爲誤差之函數.

今設 $x=$ 誤差,

$y=$ 其或是率,

則 $y=f(x)$.

$f(x)$究爲何種函數,俟下兩節,由Hagen及Gauss兩氏方法求之.今祇知其曲線,形狀略如下圖.是曰或是率曲線.



(圖 9)

(1) 曲線爲聯積曲線.蓋x兩聯積值之差Δx,可任意減小.如(19節之例一),靶每等部分之高,可自1呎減至$\frac{1}{2}$呎,$\frac{1}{4}$呎,$\frac{1}{8}$呎,……又(19節之例二)……高度之差,可由1吋減至$\frac{1}{2}$吋,$\frac{1}{4}$吋,$\frac{1}{8}$吋,…….

(2) $x=\pm L$時,旣可$y=0$.(定律3).則$x>L$時,y之各值必俱等於0.似不合理.但L之值,極難確定.實際殊無$L=\pm\infty$之事實.惟因便於研究,俾曲線有連續性質起見,仍得假定L之值可至$\pm\infty$.

(3) OY之右,爲降曲線(定律1)

(4) OY爲曲線之對稱軸(定律2).

22. **或是率曲線海格(Hagen)氏求法.** 如(19節)之(例一),射在第5第7兩部分各彈痕,離目標(中部分)之誤差,約各爲1呎.所以發生此誤差者,原因不一.或由地心吸力,或由風力,或由手之動搖不定,或由視線偏斜,以及其他不可考究之細微事項.各原因中,有使之誤向上方者,有使之誤向下方者.惟此1呎之誤差,假定由各原因集合而成,殊無可疑之點.今假定各原因皆由同量之原子誤差Δx所組成,並假定共有m個原子,但其量有正有負.

$$\therefore\quad (+\Delta x)\text{ 之或是率 }=\tfrac{1}{2},$$

$$(-\Delta x)\text{ 之或是率 }=\tfrac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad m\text{ 個 }(+\Delta x),\text{ 無 }(-\Delta x),\text{ 入誤差之或是率 }=(\tfrac{1}{2})^m,$$

$(m-1)$ 個 $(+\Delta x)$, 1 個 $(-\Delta x)$. $\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_mC_1(\frac{1}{2})^m$,

$(m-2)$ 個 $(+\Delta x)$, 2 個 $(-\Delta x)$, $\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_mC_2(\frac{1}{2})^m$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots$,

$(m-r)$ 個 $(+\Delta x)$, r 個 $(-\Delta x)$, $\cdots\cdots\cdots\cdots = {}_mC_r(\frac{1}{2})^m$,

$(m-r-1)$ 個 $(+\Delta x)$,$(r+1)$ 個 $(-\Delta x)$, $\cdots\cdots = {}_mC_{r+1}(\frac{1}{2})^m$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots$.

再依以上各式,列表如下:

原子之分配	誤差	或是率
$m(+\Delta x)+0\times(-\Delta x)$	$m\Delta x$	${}_mC_0(\frac{1}{2})^m$
$(m-1)(+\Delta x)+1\times(-\Delta x)$	$(m-2)\Delta x$	${}_mC_1(\frac{1}{2})^m$
$(m-2)(+\Delta x)+2\times(-\Delta x)$	$(m-4)\Delta x$	${}_mC_2(\frac{1}{2})^m$
$(m-3)(+\Delta x)+3\times(-\Delta x)$	$(m-6)\Delta x$	${}_mC_3(\frac{1}{2})^m$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$
$(m-r)(+\Delta x)+r(-\Delta x)$	$(m-2r)\Delta x$	${}_mC_r(\frac{1}{2})$
$(m-r-1)(+\Delta x)+(r+1)(-\Delta x)$	$(m-2r-2)\Delta x$	${}_mC_{r+1}(\frac{1}{2})^m$
$\cdots\cdots\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$	$\cdots\cdots$

23. 在曲線 $y=f(x)$ 內,

設誤差 $x=OM=(m-2r)\cdot\Delta x$, (圖 9).

誤差 $x'=ON=(m-2r-2)\cdot\Delta x$.

則或是率 $y=PM={}_mC_r(\frac{1}{2})^m$.

或是率 $y'=QN={}_mC_{r+1}(\frac{1}{2})^m$.

$\therefore \quad x-x'=2\cdot\Delta x.$

$$\frac{y'}{y}=\frac{{}_mC_{r+1}\left(\frac{1}{2}\right)^m}{{}_mC_r\left(\frac{1}{2}\right)^m}=\frac{\left[\frac{\underline{|m}}{\underline{|r+1}\ \underline{|m-r-1}}\right]}{\left[\frac{\underline{|m}}{\underline{|r}\ \underline{|m-r}}\right]}=\frac{m-r}{r-1}.$$

$$\frac{y-y'}{y}=\frac{(r+1)-(m-r)}{r+1}=\frac{2r+1-m}{r+1}.$$

$$\therefore \quad y-y'=y\frac{2r+1-m}{r+1}$$

已知

$$x=(m-2r)\Delta x.$$

$$\therefore \quad 2r=m-\frac{x}{\Delta x}.$$

代入之,

$$y-y'=y\frac{\left[m-\frac{x}{\Delta x}\right]+1-m}{\frac{1}{2}\left[m-\frac{x}{\Delta x}\right]+1}=2y\frac{\Delta x-x}{m\Delta x-x+2\Delta x}.$$

今 Δx 比較 x 爲極小,故分子可省去 Δx. $m\Delta x$ 在上表中,爲 $(m-2r)\cdot\Delta x$ 之最大値,則 x 及 $2\Delta x$ 比較爲不足輕重.故分母可省去 x 及 $2\cdot\Delta x$.

$$\therefore \quad y-y'=2y\frac{-x}{m\Delta x}.$$

$$\therefore \quad \frac{y-y'}{x-x'}=-\frac{xy}{m(\Delta x)^2}.$$

但

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\left[\frac{y-y'}{x-x'}\right].$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x=0}\left[-\frac{xy}{m(\Delta x)^2}\right].$$

$$=-\frac{xy}{m(\Delta x)^2}+\epsilon.$$

ϵ 爲極小,與 Δx 同時消滅,因比較爲不足輕重.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{m(\Delta x)^2}.$$

今設
$$\frac{1}{2m(\Delta x)^2}=h^2,$$

則
$$\frac{dy}{dx}=-2h^2xy,$$

或
$$\frac{dy}{y}=-2h^2xdx,$$

積分之,得

$$\log y=-h^2x^2+k_1,$$

或
$$y=e^{-h^2x^2+k_1}=ke^{-h^2x^2}, \quad [k=e^{k_1}].$$

$$\therefore \quad y=ke^{-h^2x^2} \qquad \text{(1)}$$

(1) 曰或是率曲線適合誤差三定律,即

x 愈大,y 愈小. (定律一)

$x=\infty$ 時,$y=0$. (定律三)

oy 爲對稱軸. (定律二)

24. 或是率曲線葛斯(Gauss)氏求法. 凡一量,以同一測器,同一方法,同一注意,觀測 n 次,是否有一眞值,含於測值中,殊難斷定.惟用算術均數代眞值,久爲衆所公認.蓋算術均數

與眞值之差,究有若干,雖不得知,但依吾人憶度,必爲最小耳.因認算術均數爲眞值之最或是值(The most probable value).

設 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 爲某量之觀測值, z 爲其算術均數,即最或是值.

則 $$z=\frac{M_1+M_2+M_3+\cdots\cdots+M_n}{n}.$$

或 $$nz=M_1+M_2+M_3+\cdots\cdots+M_n,$$

或 $$(z-M_1)+(z-M_2)+(z-M_3)+\cdots\cdots+(z-M_n)=0.$$

即 $$v_1+v_2+v_3+\cdots\cdots+v_n=0.$$

故眞差之和,雖不知小至若何程度,但知外差之和,必等於零.

(例一) 設某距離之觀測值爲 $730\overset{m}{.}4$, $730\overset{m}{.}5$, $730\overset{m}{.}9$,

則 $$z=\frac{730.4+730.5+730.9}{3}=730.6$$

$$\therefore \quad v_1=730.6-730.4=0.2,$$

$$v_2=730.6-730.5=0.1,$$

$$v_3=730.6-730.9=-0.3.$$

$$\therefore \quad v_1+v_2+v_3=0.$$

25. 設有二量 z_1, z_2,不能直接觀測,祇能間接觀測其函數

$$u_1=\psi_1(z_1, z_2),\ u_2=\psi_2(z_1, z_2), \cdots\cdots u_n=\psi_n(z_1, z_2)$$

以求之.

今設 $u_1, u_2, u_3 \cdots\cdots u_n$ 之觀測值爲

$$M_1 M_2 M_3 \cdots\cdots M_n.$$

其眞差爲 $x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n$.

則
$$x_1 = u_1 - M_1 = \psi_1(z_1, z_2) - M_1,$$
$$x_2 = u_2 - M_2 = \psi_2(z_2, z_2) - M_2,$$
$$x_3 = u_3 - M_3 = \psi_3(z_3, z_3) - M_3,$$
$$\cdots = \cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$x_n = u_n - M_n = \psi_n(z_1, z_2) - M_n.$$

又設 $y_1, y_2, y_3, \cdots\cdots y_n$ 爲

$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots y_n$ 之或是率.

則
$$y_1 = f(x_1) = f[\psi_1(z_1, z_2) - M_1],$$
$$y_2 = f(x_2) = f[\psi_2(z_1, z_2) - M_2],$$
$$y_3 = f(x_3) = f[\psi_3(z_1, z_2) - M_3],$$
$$\cdots = \cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$y = f(x_n) = f_n[\psi_n(z_1, z_2) - M_n].$$

今組合 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$, 而設 P 爲其或是率.

則
$$P = y_1 y_2 y_3 \cdots\cdots y_n$$
$$= f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot f(x_3) \cdots\cdots f(x_n).$$

取對數,
$$\log P = \log f(x_1) + \log f(x_2) + \log f(x_3) + \cdots\cdots + f(x_n).$$

因 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ 各爲 $z_1 z_2$ 之函數,上式得依 z_1, z_2 微分之如下:
$$\begin{cases} \dfrac{1}{P}\dfrac{\delta P}{\delta z_1} = \dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}\dfrac{\delta x_1}{\delta z_1} + \dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}\dfrac{\delta x_2}{\delta z_1} + \cdots\cdots + \dfrac{f'(x_n)}{f(x_n)}\dfrac{\delta x_n}{\delta z_1}, \\ \dfrac{1}{P}\dfrac{\delta P}{\delta z_2} = \dfrac{f'(x_1)}{f(x_1)}\dfrac{\delta x_1}{\delta z_2} + \dfrac{f'(x_2)}{f(x_2)}\dfrac{\delta z_2}{\delta x_2} + \cdots\cdots + \dfrac{f'(x_n)}{f(x_n)}\dfrac{\delta x_n}{\delta z_2}. \end{cases}$$

欲令 z_1, z_2 成最或是值,必其觀測時之誤差為最小,即其或是率為最大(定律一).欲求 P 之最大值,必有

$$\frac{\delta P}{\delta z_1}=0,\ \frac{\delta P}{\delta z_2}=0.$$

又設
$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\phi(x).$$

則
$$\begin{cases}\phi(x_1)\dfrac{\delta x_1}{\delta z_1}+\phi(x_2)\dfrac{\delta x_2}{\delta z_1}+\phi(x_3)\dfrac{\delta x_3}{\delta z_1}+\cdots\cdots+\phi(x_n)\dfrac{\delta x_n}{\delta z_1}=0,\\ \phi(x_1)\dfrac{\delta x_1}{\delta z_2}+\phi(x_2)\dfrac{\delta x_2}{\delta z_2}+\phi(x_3)\dfrac{\delta x_3}{\delta z_2}+\cdots\cdots+\phi(x_n)\dfrac{\delta x_n}{\delta z_2}=0.\end{cases}$$

經上列理論,若 $z_1, z_2, z_3\cdots\cdots z_n$ 有 n 個,則上式有 n 個方程式.因之 $z_1, z_2,\cdots\cdots z_n$ 祇餘一個 z_1,則方程式亦祇餘一個如下:

$$\phi(x_1)\frac{dx_1}{dz_1}+\phi(x_2)\frac{dx_2}{dz_1}+\phi(x_3)\frac{dx_3}{dz_1}+\cdots\cdots+\phi(x_n)\frac{dx_n}{dz_1}=0.$$

z_2 既不存在,則

$$\begin{aligned}x_1&=\psi_1(z_1)-M_1,\\ x_2&=\psi_2(z_1)-M_2,\\ x_3&=\psi_3(z_1)-M_3,\\ \cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n&=\psi_n(z_1)-M_n.\end{aligned}$$

在最小二乘式中,能討論之函數,限於線形函數(Linear function). $\psi(z_1)$ 即為線形,則可直令

$$\psi(z_1)=z_1$$

蓋所求祇有一量,非間接觀測,而為直接觀測矣.

$$\therefore \quad x_1 = z_1 - M_1,$$
$$x_2 = z_1 - M_2,$$
$$x_3 = z_1 - M_3,$$
$$\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots,$$
$$x_n = z_1 - M_n.$$

微分之,

$$\frac{dx_1}{dz_1} = 1, \frac{dx_2}{dz_1} = 1, \frac{dx_3}{dz_1} = 1, \cdots\cdots \frac{dx_n}{dz_1} = 1.$$

$$\therefore \quad \phi(x_1) + \phi(x_2) + \phi(x_3) + \cdots\cdots + \phi(x_n) = 0.$$

設 $v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots v_n$ 爲 z_1 各觀測値之舛差,則由(24節),得

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots + v_n = 0.$$

若觀測次數無限增大,v 與 x 將無大差別.

$$\therefore \quad x_1 + x_2 + x_3 + \cdots\cdots + x_n = 0.$$

因 $$0 = C \times 0. \quad (C \text{ 爲任意常數})$$

$$\therefore \quad \phi(x_1) + \phi(x_2) + \cdots\cdots + \phi(x_n) = C(x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n).$$

上式之成立,對於觀測次數之多少,原無限制.多次可成立,一次自可成立.

$$\therefore \quad \phi(x_1) = Cx_1,$$

或 $$\phi(x) = Cx.$$

但 $$\phi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = Cx,$$

或
$$\frac{dy}{y}=Cxdx.$$

積分之,得
$$\log y=\tfrac{1}{2}Cx^2+k_1,$$

或
$$y=e^{\frac{1}{2}Cx^2+k_1}=e^{k_1}e^{\frac{1}{2}Cx^2}.$$

設
$$e^{k_1}=k,\qquad \tfrac{1}{2}C=-h^2.$$

則
$$y=ke^{-h^2x^2}. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

此結果與上節同.所不同者,惟$\frac{1}{2}C$之值爲負,未能得其證耳.

26. 曲線$y=ke^{-h^2x^2}$之討論.

(1) y爲x之偶函數(Even function).故Oy爲對稱軸.

(2) $x=0$時,y之值爲最大而等於k.故k爲$x=0$之或是率.

(3) $x=\pm\infty$時,y之值爲最小而等於0.故0爲$x=\pm\infty$之或是率.

(4)
$$\frac{dy}{dx}=-2kh^2xe^{-h^2x^2}.$$

$$x=0\text{時},\ \frac{dy}{dx}=0.$$ 故曲線在最高點成水平.

(5) $x=\pm\infty$時,$\frac{dy}{dx}=0$.故Ox爲漸近線(Asymptote).

(6)
$$\frac{d^2y}{dx^2}=-2kh^2e^{-h^2x^2}(1-2h^2x^2).$$

$$1-2h^2x^2=0\text{時},\ \frac{dy^2}{dx^2}=0.$$ 故拗點

(Point of inflection)在
$$x=\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

曲線之實狀,可由下表求之,表中設 $h=1$, $k=1$,

$y=e^{-x^2}$			
x	y	x	y
±0.0	1.0000	±1.8	0.0392
±0.2	0.9608	±2.0	0.0183
±0.4	0.8521	±2.2	0.0079
±0.6	0.6977	±2.4	0.0032
±0.8	0.5273	±2.6	0.0012
±0.10	0.3679	±2.8	0.0004
±0.12	0.2370	±3.0	0.0001
±0.14	0.1409	....	....
±0.16	0.0773	±∞	0.0000

(圖 9) 即依此表製成.

27. 精度(Measure of precision). 如(19 節)之(例一),假令另一報告,仍連續射擊1000發,惟打中部分之彈痕數增至400,則上下各部分之彈痕數必減少無疑.例如第四部分之彈痕數必少於80,第一及第十一部分,或竟無彈痕.依常人觀念,自認第二報告,技術精熟.在最小二乘式,則謂第二報告之**精度**,大於第一報告.

統計學謂彈痕衆多之部分曰**衆數(Mode)**. 故衆數有最大或是率.據上述事實,衆數之或是率愈大,愈能代表眞值,而成最或是值.

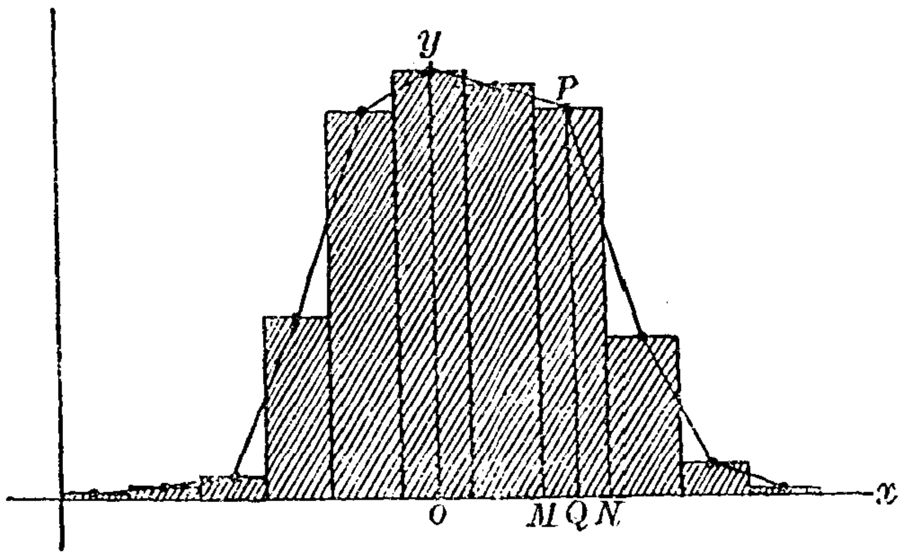
$$y=ke^{-h^2x^2}$$

式中,k 與 h 之性質,茲討論之如下:

h^2x^2 爲 e 之指數，爲無名數．故 h 與 $\frac{1}{x}$ 將同單位．h 之求法，見後(42節)．今第知誤差 x 之値不變，y 將因 h 增大而減小，如第四部分之彈痕數將小於89．**故 h 愈大，觀測愈精密**．h 曰觀測之精度．

又 k 爲 $x=0$ 時之或是率，且爲 y 之最大值．故0爲 x 之最或是值．下節有 $k=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}$．**故 k 愈大，觀測愈精密**．(參觀圖16)

28. 或是率積分(Probability integral). 再研究(19節之圖7)．



(圖10)

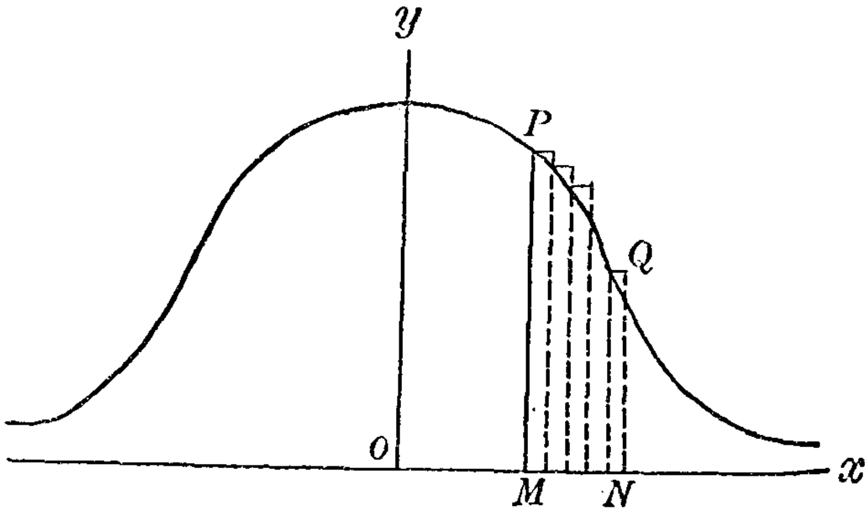
設取第6面積之中線爲 yO (圖10)，又作第8面積之中線 PQ，底邊 MN．

則
$$OM=1.5\text{ 呎},$$
$$ON=2.5\text{ 呎}.$$

$\therefore$ 第 8 面積 $=PQ\cdot MN=\frac{193}{1000}$(1000 彈 × 呎).

或第 8 面積 $=PQ\,(ON-OM)=\frac{193}{1000}(2.5-1.5)$(1000 彈 × 呎).

同理,研究 $y=ke^{-h^2x^2}$ 曲線下 x 及 x_1 間之面積.



(圖 11)

取 $OM=x_1$ 及 $ON=x_2$. 則 $PM=ke^{-h^2x_1^2}$, $QN=ke^{-h^2x_2^2}$.

設
$$MN=n\cdot\Delta x.$$

則面積 $PMNQ=\lim\limits_{\Delta x=0}\sum_{x_1}^{x_2}ke^{-h^2x^2}.\,\Delta x=\int_{x_1}^{x_2}ke^{-h^2x^2}dx.$

又面積 $PMNQ=[ke^{-h^2x^2}+ke^{-h^2(x_1+dx)^2}+ke^{-h^2(x_1+2dx)^2}+\cdots\cdots\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots+ke^{-h^2(x_2-dx)^2}]dx=P\,dx.$ (P 爲 x_1 與 x_2 間或是率之和.)

$$\therefore\quad P\,dx=\int_{x_1}^{x_2}ke^{-h^2x^2}\,dx,$$

或
$$P=\frac{k}{dx}\int_{x_1}^{x_2}e^{-h^2x^2}\,dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(2)}$$

若　　$x_1=-\infty, x_2=\infty$, Pdx 將爲全面積,而 P 爲必率

$$\therefore \quad 1=\frac{k}{dx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

設　　$hx=t$, 則 $dx=\dfrac{dt}{h}$.

$x=x_1=-\infty$ 時, $t=-\infty$. $x=x_2=+\infty$ 時, $t=+\infty$.

$$\therefore \quad 1=\frac{k}{h\,dx}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

但　　$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\sqrt{\pi}$. (見後29節)

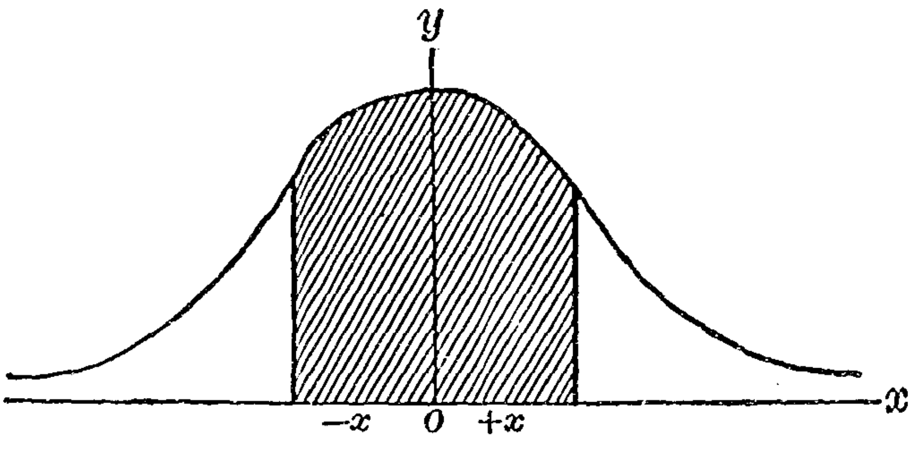
$$\therefore \quad 1=\frac{k}{h\,dx}\sqrt{\pi}.$$

或

$$k=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}. \quad \cdots\cdots\cdots(3)$$

代入(2),得

$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2} e^{-h^2x^2}\,dx. \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$



(圖 12)

設 $$x_1 = -x', \qquad x_2 = +x'.$$

則 $$P = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x'}^{+x'} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x'} e^{-h^2x^2}\,dx.$$

又設 $hx = t$, 則 $dx = \frac{dt}{h}$. $x = 0$ 時, $t = 0$; $x = x'$ 時, $t = hx'$.

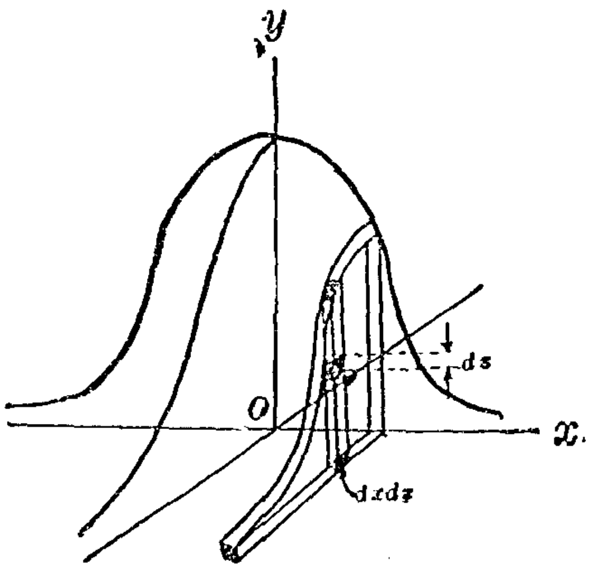
則 $$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt \qquad\qquad (5)$$

29. 證 $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}.$$

設 $$A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

則 A 爲曲線 $y = e^{-x^2}$ 下之面積.

又設 V 爲旋轉曲面 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ 下之體積.



(圖 13)

則

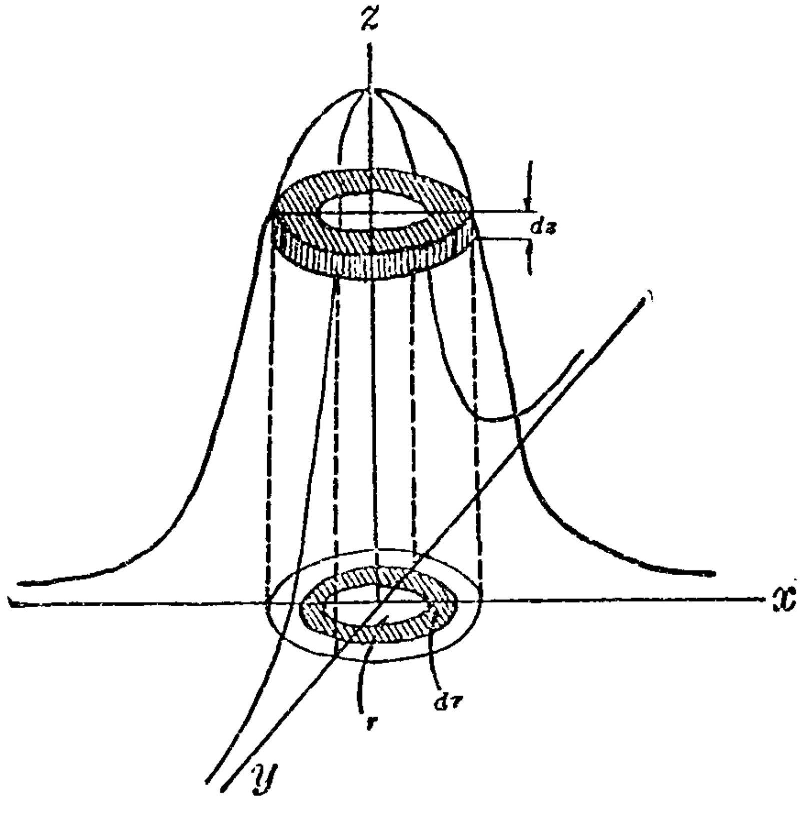
$$V=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{e^{-(x^2+y^2)}}dx\,dy\,dz$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}e^{-y^2}dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy$$

$$=A\cdot A=A^2.$$



(圖 14)

但　$z=e^{-(x^2+y^2)}$ 爲旋轉面，其軸爲 oz. 設 $x^2+y^2=r^2$.

故又得
$$v=\int_0^\infty\int_0^{e^{-(x^2+y^2)}}2\pi r\,dr\,dz$$

$$=\int_0^\infty 2\pi r e^{-r^2}dr$$

$$=\left[-\pi e^{-r^2}\right]_0^\infty=\pi.$$

$$\therefore\quad A^2=\pi.$$

或
$$A=\sqrt{\pi},$$

卽
$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$$

30. 求 $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^t e^{-t^2}dt$ 之值.

因
$$e^{-t^2}=1-t^2+\frac{t^4}{\underline{|2}}-\frac{t^6}{\underline{|3}}+\frac{t^8}{\underline{|4}}-\cdots\cdots.$$

$$\therefore\quad P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\left[1-t^2+\frac{t^4}{\underline{|2}}-\frac{t^6}{\underline{|3}}-\frac{t^8}{\underline{|4}}-\cdots\cdots\right]dt,$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[t-\frac{t^3}{3\underline{|0}}+\frac{t^5}{5\underline{|2}}-\frac{t^7}{7\underline{|3}}+\frac{t^9}{9\underline{|4}}\cdots\cdots\right].$$

若t之值極小,用上式可求得P.若t之值較大,則由部分積分法,得

$$\int e^{-t^2}dt=-\tfrac{1}{2}\int t^{-1}de^{-t^2}$$

$$=-\frac{e^{-t^2}}{2t}-\int\frac{e^{-t^2}}{2t^2}dt,$$

$$=-\frac{e^{-t^2}}{2t}+\frac{e^{-t^2}}{2^2t^2}+\frac{3}{2^2}\int\frac{e^{-t^2}}{t^4}dt,$$

$$=\left[-\frac{1}{2t}+\frac{1}{2^2t^3}-\frac{3}{2^3t^5}+\frac{3\cdot5}{2^4t^7}-\cdots\cdots\right]e^{-t^2},$$

$$\therefore\quad \int_0^t e^{-t^2}dt=\int_0^\infty e^{-t^2}dt+\int_\infty^t e^{-t^2}dt,$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}dt+\left[-\frac{e^{-t^2}}{2t}+\frac{e^{-t^2}}{2^2t^3}-\frac{3e^{-t^2}}{2^3t^5}+\cdots\right]_\infty^t$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{e^{-t^2}}{2t}-\left[1-\frac{1}{2t^2}+\frac{1\cdot3}{(2t^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2t^2)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2t^2)^4}-\cdots\cdots\cdots\cdots\right].$$

$$\therefore\quad P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt,$$

$$=1-\frac{e^{-t^2}}{t\sqrt{\pi}}\left[1-\frac{1}{2t^2}+\frac{1\cdot3}{(2t^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2t^2)^3}\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{(2t^2)^4}+\cdots\cdots\cdots\cdots\right].$$

上式t之值,任何增大,皆可適用.(附表I)卽由上式求得P之値.

(例一) $t=0.483$時,求P之值.

由(附表I)第一行t之下,求0.4.由第九行8之下求得

$$P=0.5027.$$

第十一行之比差為92.得$92\times0.3=27.6=28$.

$$\therefore\quad P=0.5027+0.0028=0.5055.$$

(例二) $P=0.5$時,求t之值.

$P=0.5$時,(由附表I) t之値在0.47與0.48之間.

令 $t=0.47$, 則 $P=0.4937$.

且比差$=92$.設0.47下第三位小數為x.

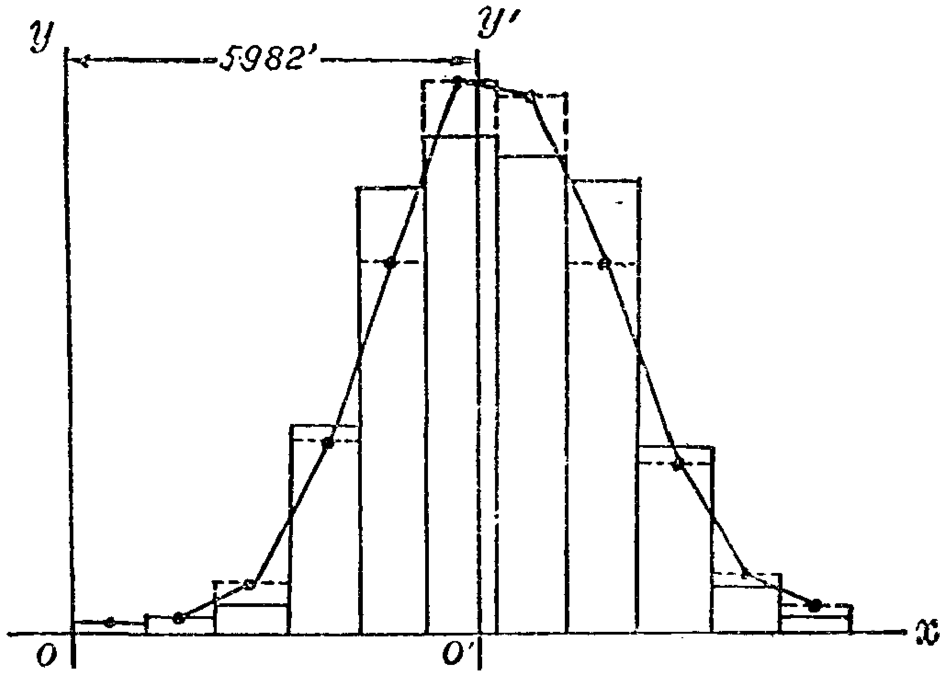
則 $$x:10:(0.5-0.4937):0.0092.$$

$$\therefore\quad x=6.9.$$

$$\therefore\quad t=0.47+0.0069=0.4769.$$

31 理論與實際之比較. 若知h之值,由(附表I),可求P,以資比較理論與實際之結果.求h之法見後(43節).

(例一) 求(19節)之(例1)彈數之理論分配.



(圖 15)

以每部分之中線,代該部份彈痕之位置,

則　　彈痕之最或是位置 $=5.982$. 見後(47節)之(例1)

$$h=\frac{0.4391}{1\text{呎}}.$$ 見後(47節)之(例1)

今依該位置求原點O',並作$O'x$及$O'y'$兩軸.

則中部分將在誤差

$$6.0-5.982=0.018,$$

$$5.0-5.982=-0.982,$$

之間,第7部分將在

$$7.0-5.982=1.018,$$

$$6.0-5.982=0.018,$$

之間.同理,求各部分界限誤差x,得下表.

部分	誤差之界限 x	hx	由(附表I)求P得之值	P連續兩值之差	以500乘上行各差	理論誤差	實際誤差	前兩行之差
	$-\infty$	$-\infty$	1.0000					
0				0.0001	0.05	0	0	
	-5.982	-2.626	0.9999					
1				0.0019	0.95	1	1	0
	-4.982	-2.187	0.9980					
2				0.0114	5.70	6	4	$+2$
	-3.982	-1.748	0.9866					
3				0.0507	25.35	25	10	$+15$
	-2.982	-1.309	0.9359					
4				0.1545	77.25	77	89	-12
	-1.982	-0.870	0.7814					
5				0.3236	161.80	162	190	-28
	-0.982	-0.431	0.4578					
6				0.4578	228.90	233	212	$+21$
	0.000	0.000	0.0000					
6				0.0089	4.45			
	$+0.018$	$+0.008$	0.0089					
7				0.4638	231.90	232	204	$+28$
	$+1.018$	$+0.447$	0.4727					
8				0.3170	158.50	159	193	-34
	$+2.018$	$+0.886$	0.7897					
9				0.1493	74.65	75	79	-4
	$+3.018$	$+1.325$	0.9390					
10				0.0484	24.20	24	16	$+8$
	$+4.018$	$+1.764$	0.9874					
11				0.0107	5.35	5	2	$+3$
	$+5.018$	$+2.203$	0.9981					
12				0.0019	0.95	1	0	1
	$+\infty$	$+\infty$	1.0000					
共				2.0000		1000	1000	0

由上計算結果,理論與實際兩誤差之差,最大者爲 $+28$.若依理論誤差,作或是率曲線,如(圖 15)虛線所示,自較(圖 7)之或是率曲線,分配合度.

(例二)求(19 節)之(例 2)兵士高度之理論分配.

歸權平均高度 $=67.285$ 吋.見後(39 節)之(例 1)

$$h=\frac{0.28192}{1\text{ 吋}}$$

61吋高之兵士197人,非此197兵士各人適高61吋,乃謂60.5吋至61.5吋高度之兵士,共有197人.

故此197兵士高度之界限,在

$$60.5-67.285=-6.785\text{吋}$$

$$61.5-67.285=-5.785\text{吋}$$

之間.

同理,62吋高度之兵士317人,其高度之界限,在

$$61.5-67.285=-5.785\text{吋}$$

$$62.5-67.285=-4.785\text{吋}$$

之間.

兵士高度	界限誤差 x	hx	由(附表I)求得P之值	P連接兩值之差	以5000乘上行各差	理論人數之分配	實際人數之分配	前兩行之差
	$-\infty$	$-\infty$	1.0000					
				0.0068	34.0			
	-6.785	-1.9128	0.9932			106	105	1
61				0.0143	71.5			
	-5.785	-1.6300	0.9789					
62				0.0353	176.5	176	169	7
	-4.785	-1.3490	0.9436					
63				0.0749	374.5	374	369	-35
	-3.785	-1.0671	0.8637					
64				0.1355	677.5	677	686	$+9$
	-2.785	-0.7851	0.7332					
65				0.2124	1062.0	1062	1044	18
	-1.785	-0.5032	0.5203					
66				0.2754	1377.0	1377	1391	-14
	-0.785	-0.2213	0.2454					
67				0.2454	1227.0			
	0.000	0.0000	0.0000			1571	1584	-13
67				0.0687	343.5			
	0.215	$+0.0606$	0.0687					
68				0.3032	1516.0	1516	1607	-91
	1.215	$+0.3425$	0.3719					
69				0.2506	1253.0	1253	1218	35
	2.215	$+0.6244$	0.9225					
70				0.1771	885.5	886	852	34
	3.215	$+0.9064$	0.7996					
71				0.1776	538.0	538	467	71
	4.215	$+1.1883$	0.9072					
72				0.0552	276.0	276	277	-1
	5.215	$+1.4702$	0.9624					
73				0.0244	122.0	122	139	-17
	6.215	$+1.7521$	0.9868					
74				0.0092	46.0			
	7.215	$+2.0341$	0.9960			66	92	-26
				0.0040	20.0			
	$+\infty$	$+\infty$	1.0000					
共				2.0000	10000	10000	10000	0

上項計算,以67 285吋作原點,理論與實際兩項人數之差,其最大數爲 +71.上值愈小愈好,即謂實際符合理論,而不相違背.

32. 公式之討論.

既知
$$k=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}.\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

代入
$$y=ke^{-h^2x^2},$$

得
$$y=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

dx 爲觀測組距,如(19節之例一),$dx=1$ 呎.

(19節之例二),$dx=1$ 吋.如測角之大小,經緯儀能測至$1''$.則 $dx=1''$.能測至 $0.01''$,則 $dx=0.01''$.在一問題中,dx 只有一值,而爲常數.

$$\therefore\quad k\propto h.$$

又
$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}e^{-h^2x^2}\,dx\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

及
$$P=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-x'}^{+x'}e^{-h^2x^2}\,dx\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

用(4)求 $x=x_1$ 至 $x=x_2$ 間之或是率,用(5)求 $x=-x_1'$ 至 $x=+x_1'$ 之或是率,即 $x>x'_1$ 之或是率,如求 $x=-1$ 至 $x=+3$ 間之或是率,當求

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+1}e^{-h^2x^2}\,dx+\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+3}e^{-h^2x^2}\,dx\text{ 之值.}$$

又
$$P=ke^{-h^2x_1^2}+ke^{-h^2(x+dx)^2}+\cdots\cdots+ke^{-h^2(x_2-dx)}$$
$$=\Sigma y\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故 Pdx 爲或是率曲線下之面積,P 僅爲諸組距間 y 各值之和也.如(19節)之(例1)第7至第10部分之或是率

$$=\Sigma y$$

$$=204+193+79+16$$

$$=492\text{ 人}.$$

而 $$Pdx=492\text{ 人}\times 1\text{ 呎}=\frac{492}{1000}(1000\text{ 人}\times\text{呎}).$$

33. 再論 k 與 h 之關係. 設有兩次觀測,其組距相等,惟

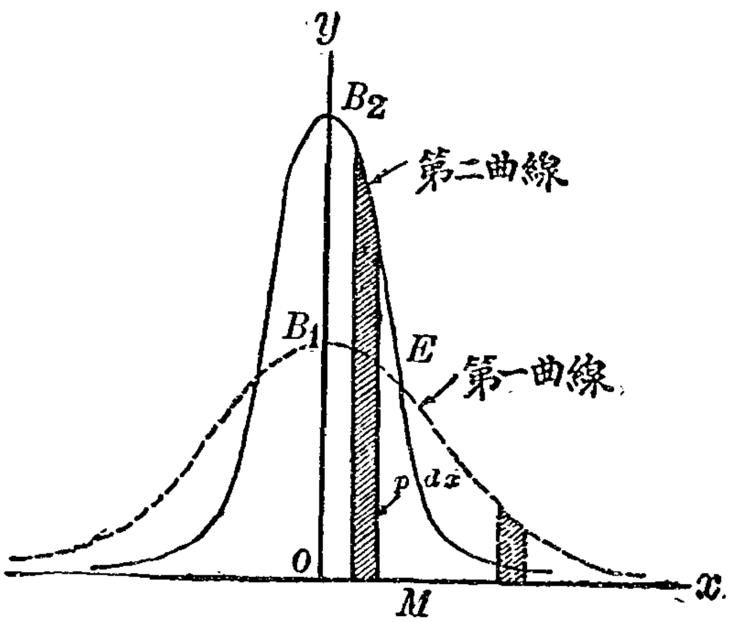
第一次得 $h=h_1$,

第二次得 $h=2h_1$.

代入(1),得第一曲線, $y=\frac{h_1dx}{\sqrt{\pi}}e^{-h_1^2x^2}$,

第二曲線, $y=\frac{2h_1dx}{\sqrt{\pi}}e^{-4h_1^2x^2}$.

但兩曲線下之面積,必各俱等於1.故得兩曲線之形狀如下:



(圖 16)

兩曲線之交點E在$x=OM=\frac{1}{h_1}\sqrt{\frac{1}{3}\log 2}$.

若$0<x<\frac{1}{h_1}\sqrt{\frac{1}{3}\log 2}$,第一次觀測之$P<$第二次觀測之$P$,

若$x>\frac{1}{h_1}\sqrt{\frac{1}{3}\log 2}$第一次觀測之$P>$第二次觀測之$P$.

若$x=0$,則$OB_1=\frac{h_1dx}{\sqrt{\pi_1}}$及$OB_2=\frac{2h_1dx}{\sqrt{\pi}}$. $\therefore\quad OB_2=2\cdot OB_1$

如(19節)之(例一),若中部分內之彈痕數愈增,而總數又限於1000,則第1及第11兩部分內之彈痕數,必漸減少.若中部分中之彈痕數,幾增至1000,非特第1及第11兩部分不見彈痕,即第5及第7兩部分內,或無發見彈痕之機會.其時可謂打靶者,技術精熟,而彈彈中的也.或打靶距離,非爲200碼,而近在咫尺.標的範圍過大,可不至誤中的外也.

如(19節)之(例二),若兵士高度,集中於66.5吋及68.5吋之間,則必其共同先祖,歷時不遠,經天時人事變遷之影響,尙不甚大也.

習題二

1, 測量一角,經緯儀能讀至0′′.1,第一組測得之h,爲第二組測得者之三倍.作兩組之或是率曲綫,並說明x及y兩軸上之單位.

2 說明用公式(3)由實驗求π之法.

3. 大三角測量,其角實測100次,其報告如下:

誤差	次數
+6″ 至 +5″	1
+5″ 至 4″	2
+4″ 至 3″	2
+3″ 至 2″	3
+2″ 至 1″	13
+1″ 至 0″	26
0″ 至 −1″	26
−1″ 至 −2″	17
−2″ 至 −3″	8
−3″ 至 −4″	2
共	100

已求得$h=\frac{1}{2''.236}$. 比較理論與實際次數之支配.

4. 某校學生514名,其考試成績如下表:

分數	人數	分數	人數
1—5	5	36—40	79
6—10	9	40—45	50
11—15	28	46—50	37
16—20	49	51—55	21
21—25	58	56—60	6
26—30	82	61—65	3
31—35	87	總計……	514

已求得$h=\frac{0.0614}{1\text{分}}$及平均分數$=31.41$分. 比較理論與實際人數之支配.

5. 兩校學生各為8585名,其考試成績如下表,用曲線比較兩校辦理之優劣.

(甲)

分數	人數
57	2
58	4
59	14
60	41
61	83
62	169
63	394
64	669
65	990
66	1223
67	1329
68	1230
69	1063
70	646
71	392
72	202
73	79
74	32
75	16
76	5
77	2
總計……8585	

(乙)

分數	人數
57	33
58	60
59	102
60	175
61	285
62	388
63	560
64	689
65	780
66	843
67	856
68	836
69	759
70	677
71	507
72	392
73	290
74	163
75	100
76	61
77	29
總計……8585	

第三章

直接觀測

34. 權(Weights of observations). 同一方法,同一注意,同一測尺,測量某距離,共20次.其中10次之結果,得934.2呎,8次之結果,得934.0呎,2次之結果,得934.6呎.今研究三結果之優劣.人必認第一結果934.2呎爲最可靠.蓋測量之次數較多,則必多耗金錢,多費時間,可令人增加信任.但他二結果,雖信任減少,然既耗金錢,既費時間,自不能棄置不用.惟認定其信任之分量,有10:8:2之比也.10:8:2或5:4:1曰觀察值之權.

欲由三結果,而求其或是值,將由(24節)有如下之計算.

最或是值

$$=\frac{(934.2+934.2+\cdots\text{至 }10\text{ 項})+(934.0+934.0+\cdots\text{至 }8\text{ 項})+(934.6+934.6)}{10+8+2}$$

$$=\frac{10\times934.2+8\times934.0+2\times934.6}{10+8+2}$$

故謂一觀測值有權p,卽該值應重寫p次.

35. 帶權觀測值及帶權誤差(Weighted observations and wighted errors). 設p爲某觀測值M之權,則pM曰帶權觀測值.如n個觀測值

$$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n,$$

有權　$p_1, p_2, p_3 \cdots\cdots p_n.$

其n個倚權觀測值爲

$$p_1M_1,\ p_2M_2,\ p_3M_3 \cdots\cdots p_nM_n.$$

若　$x_1, x_2, x_3 \cdots\cdots x_n.$

爲　$M_1, M_2, M_3 \cdots\cdots M_n.$

之眞差.

則由(12節),得

$$p_1x_1 = p_1(T-M_1) = p_1T - p_1M_1,$$

$$p_2x_2 = p_2(T-M_2) = p_2T - p_2M_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_nx_n = p_n(T-M_2) = p_nT - p_nM_n.$$

$$p_1x_1,\ p_2x_2,\ p_3x_3, \cdots\cdots p_nx_n$$

曰倚權眞差.

若　$v_1, v_2, v_3 \cdots\cdots v_n$

爲　$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$

之舛差.

則

$$p_1v_1 = p_1z - p_1M_1,$$

$$p_2v_2 = p_2z - p_2M_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_nv_n = p_nz - p_nM_n.$$

$$p_1v_1,\ p_2v_2,\ p_3v_3 \cdots\cdots p_nv_n$$

曰倚權舛差.

權 p 與精度 h 之性質,完全不同. p 爲無名數,用以比較觀測值之信任. h 有單位,用以定觀測之精粗.其關係見後(37 節).

36. 最小二乘式原理. 同一測器,同一方法,同一注意,觀測函數 $f_1,(z_1, z_2), f_2(z_1, z_2), \cdots\cdots f_n(z_1, z_2)$,

而設其觀測值爲 $M_1, M_2, \cdots\cdots M_n$.

則 $f_1(z_1,z_2)-M_1=x_1, f_2(z_1,z_2)-M_2=x_2, \cdots\cdots f_n(z_1,z_2)=M_n=x_1$.

又設 $y_1, y_2, y_3\cdots\cdots y_n$ 爲 $x_1, x_2, x_3\cdots\cdots x_n$ 之或是率.因觀測之精度相同,故或是率曲線有同一 h. 卽

$$y_1=ke^{-h^2x_1^2},\ y_2=ke^{-h^2x_2^2},\ y_3=ke^{-h^2x_3^2},\ \cdots\cdots y_n=ke^{-h^2x_n^2}.$$

今組合誤差 $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$, 而

設 $P=$ 各舛差相互關聯之或是率.

則由(17)節得, $P=y_1y_2y_3\cdots\cdots y_n=k^ne^{-h^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2)}$.

必 P 爲最大, $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ 方能使 z_1, z_2 爲最或是值.

但 P 爲最大,必

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=\text{最小}.$$

$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$ 原爲眞誤差.今旣能使 z_1, z_2 爲最或是值,則已非眞差,而爲舛差矣.

$$\therefore\quad v_1^2+v_2^2+v_3^2-\cdots\cdots-v_n^2=\text{最小}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(7)爲使 z_1, z_2 爲最或是值之重要條件,此處雖以二量 z_1, z_2 爲例.然 z 可推廣至 n 個,亦復合理.

若觀測值 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$

有權 $p_1, p_2, p_3\cdots\cdots p_n$,

則 $$P=k^{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}\cdot e^{-h^2\Sigma px^2},$$

式中 $$px^2=(x_1^2+x_1^2+\cdots\text{至 } p_1 \text{ 項})+(x_2^2+x_2^2+\cdots\text{至 } p_2 \text{ 項})+\cdots$$
$$+(x_n^2+\cdots\text{至 } p_n \text{ 項})=p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2+\cdots+p_nx_n^2.$$
$$\therefore\quad p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2+\cdots\cdots+p_nx_n^2=\text{最小},$$

或 $$p_1v_1^2+p_2v_2^2+p_3v_3^2+\cdots\cdots+p_nv_n^2=\text{最小},\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (8)$$

(8) 爲使 z_1, z_2 成最或是值之條件.最小二乘式卽由此得名.

37. p 與 h 之關係. 如上節,若觀測值有權,則因觀測之精度不同,故或是率曲線中之 h 各異.

卽 $$y_1=k_1e^{-h_1^2x_1^2},\ y_2=k_2e^{-h_2^2x_2^2},\ y_2=k_3e^{-h_3^2x_3^2},\cdots\cdots,\ y_n=k_ne^{-h_n^2x_n^2},$$
$$\therefore\quad P=k_1k_2k_3\cdots k_ne^{-(h_1^2x_1^2+h_2^2x_2^2+h_3^2x_3^2+\cdots+h_n^2x_n^2)}$$

因之 $$h_1^2x_1^2+h_2^2x_2^2+h_3^2x_3^2+\cdots\cdots+h_n^2x_n^2=\text{最小},$$

或 $$h_1^2v_1^2+h_2^2v_2^2+h_3^2v_3^2+\cdots\cdots+h_n^2v_n^2=\text{最小}.\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

(9) 爲使 z_1, z_2 成最或是值之條件.今 (8) 之最小條件爲

$$\begin{cases}2p_1v_1\dfrac{\delta v_1}{\delta z_1}+2p_2v_2\dfrac{\delta v_2}{\delta z_1}+2p_3v_3\dfrac{\delta v_3}{\delta z_1}+\cdots\cdots+2p_nv_n\dfrac{\delta v_n}{\delta z_1}=0,\\ 2p_1v_1\dfrac{\delta v_1}{\delta z_2}+2p_2v_2\dfrac{\delta v_2}{\delta z_2}+2p_3v_3\dfrac{\delta v_3}{\delta z_2}+\cdots\cdots+2p_nv_n\dfrac{\delta v_n}{\delta z_2}=0.\end{cases}$$

而 (9) 之最小條件爲

$$\begin{cases}2h_1^2v_1\dfrac{\delta v_1}{\delta z_1}+2h_2^2v_2\dfrac{\delta v_2}{\delta z_1}+2h_3^2v_3\dfrac{\delta v_3}{\delta z_1}+\cdots\cdots+2h_n^2v_n\dfrac{\delta v_n}{\delta z_1}=0,\\ 2h_1^2v_1\dfrac{\delta v_1}{\delta z_2}+2h_2^2v_2\dfrac{\delta v_2}{\delta z_2}+2h_3^2v_3\dfrac{\delta v_3}{\delta z_2}+\cdots\cdots+2h_n^2v_n\dfrac{\delta v_n}{\delta z_2}=0.\end{cases}$$

比較上兩組方程式之係數,得

$$\frac{p_1}{h_1^2}=\frac{p_2}{h_2^2}=\frac{p_3}{h_3^2}=\cdots\cdots=\frac{p_n}{h^2_n}.$$

或 $$p_1:p_2:p_3:\cdots\cdots:p_n=h_1^2:h_2^2:h_3^2:\cdots\cdots:h_n^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

h便於理論,不合實用,其值爲有單位之量.p合實用,不便於理論,其值爲無名數.

38. 同精度之單量直接觀測(Direct observations of equal precision on a single quantity). 觀測值之算術均數,爲最或是值,久爲衆所公認(24節).今據最小二乘式原理,亦可證明之如下:

設z爲某量之最或是值,

$M_1, M_2, M_3,\cdots\cdots M_n$爲同精度或同權之觀測值,

$v_1, v_2, v_3,\cdots\cdots v_n$爲舛差.

則 $$v_1=z-M_1,\ v_2=z-M_2,\ v_3=z-M_3,\cdots\cdots v_n=z-M_n.$$

但由(7),必有

$$(z-M_1)^2+(z-M_2)^2+(z-M_3)^2+\cdots\cdots+(z-M_n)^2=\text{最小}.$$

上式之最小條件爲

$$2(z-M_1)+2(z-M_2)+2(z-M_3)+\cdots\cdots+2(z-M_n)=0.$$

$$\therefore\quad z=\frac{M_1+M_2+M_3+\cdots\cdots+M_n}{n},$$

或 $$z=\frac{\Sigma M}{n}. \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

(11)曰算術均數(Arithmatic mean).

39. 不同精度之單量直接觀測(Direct observations of

unequal precision on a single quantity). 上節之觀測值,若有權,

則由 (8) 得

$$p_1(z-M_1)^2+p_2(z-M_2)^2+p_3(z-M_3)^2+\cdots\cdots+p_n(z-M_n)^2=\text{最小.}$$

上式之最小條件爲

$$2p_1(z-M_1)+2p_2(z-M_2)+2p_3(z-M_3)+\cdots\cdots+2p_n(z-M_n)=0.$$

$$\therefore\quad z=\frac{p_1M_1+p_2M_2+p_3M_3+\cdots+p_nM_n}{p_1+p_2+p_3+\cdots+p_n}$$

或

$$z=\frac{\Sigma pM}{\Sigma p}.\qquad\cdots\cdots(12)$$

(12) 曰餘權均數 (Weighted mean).

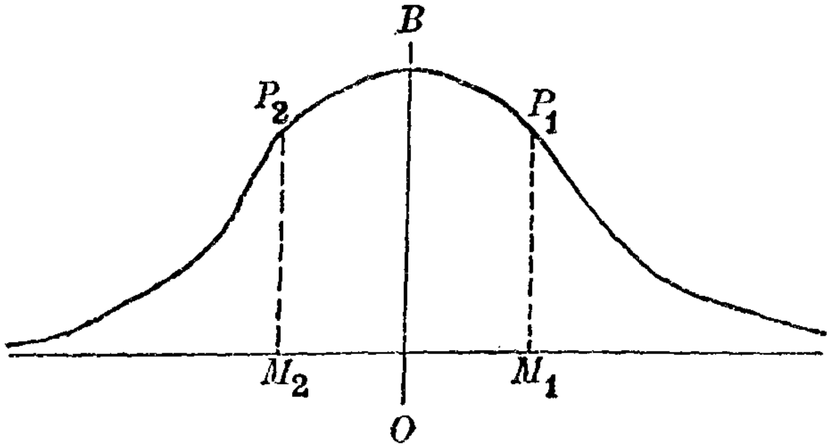
(例一) 求 (16 節) 之 (例二) 兵士之平均高度.

此題若用算術均數,則人數失其效用,故應求餘權均數,其計算如下:

M 吋	p	pM
61	197	12,017
62	317	19,654
63	692	43,596
64	1289	82,496
65	1961	127,465
66	2613	172,458
67	2974	199,258
68	3017	205,156
69	2287	157,803
70	1599	111,930
71	878	62,338
72	520	37,440
73	262	19,126
74	147	12,876
$\Sigma p=18,780$		$\Sigma pM=1,263,613$

$$\therefore\quad z=\frac{\Sigma pM}{\Sigma p}=\frac{1,263,613}{18,780}=67.2851\text{ 吋.}$$

40. 或是舛差 (Probable error). 作縱坐標 P_1M_1 二等分 y 軸右或是率曲線下之面積, 及 P_2M_2 二等分 y 軸左或是率曲線下之面積.



(圖 17)

設 $OM_1=OM_2=r.$

則 (4) 之 $x=r$ 而 $P=\frac{1}{2}.$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{hr}e^{-h^2r^2}dr.$$

由 (附表 1), $p=0.5$ 時. $hx=0.4769.$

今 $x=r.$

$$\therefore\quad hr=0.4769. \qquad\qquad (13)$$

r 曰或是舛差.

r 乃一舛差,其 $x=0$ 至 $x=r$ 間之或是率,等於 $x=r$ 至 $x=\pm\infty$ 間之或是率.卽以 $x=\pm r$ 爲界限,分必率爲四等分也.

或是舛差之定義,以文字述之如下:

若大於某舛差之諸舛差或是率之和,與小於該舛差之諸舛差或是率之和相等,則某舛差曰或是舛差.

41. 或是舛差 r 之應用. 某量分 n 組觀測,設求得各組之最或是值爲 $z_1, z_2, \cdots z_n$ (38 節, 39 節),其精度爲 $h_1, h_2, \cdots h_n$,其權爲 $p_1, p_2, \cdots p_n$,其或是舛差爲 $r_1, r_2, \cdots r_n$.

則 $$h_1 r_1 = 0.4769,\ h_2 r_2 = 0.4769, \cdots\cdots h_n r_n = 0.4769.$$

$$\therefore\quad h_1 r_1 = h_2 r_2 = \cdots\cdots = h_n r_n,$$

或 $$h_1 : h_2 : h_3 : \cdots h_n = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_3} : \cdots : \frac{1}{r_n}. \qquad (14)$$

但由 (10), $h_1^2 : h_2^2 : h_3^2 : \cdots\cdots : h_n^2 = p_1 : p_2 : p_3 \cdots\cdots : p_n$.

$$\therefore\quad p_1 : p_2 : p_3 \cdots : p_n = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} : \frac{1}{r_3^2} : \cdots : \frac{1}{r_n^2}. \qquad (15)$$

因得

$$p \propto h^2 \cdots (10),\ p \propto \frac{1}{r^2} \cdots (14),\ h \propto \frac{1}{r} \cdots (15).$$

卽權與精度之平方成正比例.權與或是舛差之平方成反比例.精度與或是舛差成反比例.

由 (33 節),知 h 愈大,觀測愈精密.

由 (14), r 愈小,觀測愈精密.

由 (10), p 愈大,觀測愈精密.

42. 算術均數之或是舛差. 設某量 z 之觀測值

$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 同樣,卽其權俱爲 1,

則 z 之權當然爲 n.

又設 r= 一觀測值之或是舛差，

r_0= 算術均數之或是舛差.

則由(15)，
$$n:1=\frac{1}{r_0^2}:\frac{1}{r^2}.$$

$$\therefore\quad r_0=\frac{r}{\sqrt{n}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

故 n 愈大，r_0 愈小，即觀測次數愈多，z 愈近於眞值.

43. **r 及 h 之求法.** 於(36節)，已求得

$$P=k^n e^{-h^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2)}.$$

設
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+\cdots\cdots+x_n^2=\Sigma x^2.$$

且由(3)，
$$k=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}.$$

$$\therefore\quad P=\left[\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right]^n h^n e^{-x^2\Sigma x^2}$$

必 P 爲最大，h 方能使 z_1，z_2 爲最或是值.

但 P 爲最大，必有 $\frac{dP}{dh}=0$.

令
$$\frac{dP}{dh}=\left[\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right]^n(n-2h^2\Sigma x^2)^{n-1}e^{-h^2\Sigma x^2}=0.$$

$$\therefore\quad n-2h^2\Sigma x^2=0.$$

或
$$h=\pm\sqrt{\frac{n}{2\Sigma x^2}}$$

由(13)，
$$hr=0\cdot4769.$$

$$\therefore\quad r=\frac{0.4769}{h}=\pm0.4769\sqrt{\frac{2\Sigma x^2}{n}}.$$

今 $$0.4769\sqrt{2}=0.6745.$$

$$\therefore\quad r=\pm0.6745\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}}.$$

上式Σx^2爲眞差平方之和,其值無法可求,不合實用.今研究Σx^2與Σv^2之關係如下:

若n無限增大,則Σv^2將與Σx^2相等,自可直以Σv^2代Σx^2,然n之值,實際不能無限增大.且據最小二乘式原理,Σv^2爲Σx^2之最小值.

$$\therefore\quad \Sigma x^2>\Sigma v^2.$$

因之設 $$\frac{\Sigma x^2}{n}=\frac{\Sigma v^2}{n-s}.$$

上式中s爲一未知常數.

若 $$n=\infty,$$

則 $$\frac{\Sigma x^2}{\Sigma v^2}=\frac{n}{n-s}=\frac{1}{1-\frac{s}{n}}=1.$$

縱$s=1$.上式結果仍同.

若 $$n=1,\ 則\ \Sigma v^2=0.$$

但 $$\Sigma x^2\neq0.$$

故必 $$\frac{n-s}{n}=0.$$

即 $$\frac{1-s}{1}=0.$$

或 $$s=1,$$

$$\therefore\quad \frac{\Sigma x^2}{n}=\frac{\Sigma v^2}{n-1}.$$

$$\therefore \qquad r = \pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

代入(16),得

$$r_0 = \pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

(例一) 某角觀測24次,其觀測值如下表.求 r 及 h,并求舛差之理論支配.

觀測值 M	v	v^2
116°43′44″.45	5.19	29.94
50″.55	−0.91	0.83
50 .95	−1.31	1.72
48 .90	0.74	0.55
49 .02	0.44	0.19
48 .85	0.79	0.63
47 .40	2.24	5.02
47 .75	1.80	3.57
51 .05	−1.41	2.00
47 .85	1.79	3.20
50 .60	−0.96	0.92
48 .45	1.19	1.42
51 75	−2.11	4.45
49 .00	0.64	0.41
52 .35	−2.71	7.34
51 .30	−1.66	2.75
51 .05	−1.41	2.00
51 .70	−2.06	4.24
49 .05	0.59	0.35
50 .55	−0.19	0.83
49 .25	0.39	0.15
46 .75	2.89	8.35
49 .25	0.39	0.15
53 .40	−3.76	14.14
z=116°43′49″.64	0	Σv^2=92.15

平均第一行之秒數,得49″.64.加於116°43′,得

$$z=116°43'49''.64.$$

是爲某角之最或是值.

由z減第一行M之值,得第二行v之值.由(附表III)得第三行v^2之值.

相加,得

$$\Sigma v^2=92.15.$$

代入(17),得

$$r=\pm 0.6745\sqrt{\frac{92.15}{24-1}}$$

$$=\pm 1''.35.$$

是爲單位權觀測值之或是舛差.

由(18), $$r_0=\frac{\pm 1''.35}{\sqrt{24}}=\pm 0''.28.$$

依習慣應作 $$z=116°43'49''.64\pm 0''.28.$$

凡一量之值,應如上式記出.前部爲代表某量之值,後部僅表示觀測之精粗.後部愈小,觀測愈精密.

查上表第二行,可檢出每秒間舛差個數之實際支配.如自0″.00至1″.00間之舛差共有10個.1″.00至2″.00間共有7個.2″.00至3″.00間共有5個.3″.00以上共有2個.

又 $$h=\frac{0.4769}{r}$$

$$=\frac{0.4769}{1''.35}$$

$$=\frac{0.3532}{1''.00}.$$

因由下之計算,求得舛差之理論支配.

舛差 x	hx	P(附表I)	差	21× 差	理論舛差數	實際舛差數	差
0″.00	0.0000	0.0000					
			0.3826	9.132	9	10	−1
1″.00	0.3532	0.3826					
			0.2980	6.956	7	7	0
2″.00	0.7064	0.6806					
			0.1854	4.450	5	5	0
3″.00	1.0599	0.8660					
			0.1340	3.216	3	2	1
∞	∞	1.0000					

今理論與實際,殆相符合.(31節)之兩例,以中數代觀測值.故理論與實際,差別較大.若知實際觀測值,實際殆將合乎理論.

44. 帶權均數之或是舛差. 設某量之觀測值

$$M_1,\ M_2,\ M_3,\cdots\cdots M_n$$

帶權 $p_1,\ p_2,\ p_3,\cdots\cdots p_n.$

則權之和 $=p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n=\Sigma p.$

$$\therefore\quad 1:\Sigma p=\frac{1}{r^2}:\frac{1}{r_0^2}.$$

或
$$r_0=\frac{r}{\sqrt{\Sigma p}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

45. r 及 h 之求法. 於(37節),已求得

$$P=k_1,\ k_2,\ k_3,\cdots\cdots k_n e^{-(h_1^2x_1^2+h_2^2x_2^2+\cdots\cdots h_n^2x_n^2)}$$

今設 $\Sigma px^2=p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2+\cdots\cdots+p_nx_n^2.$

及 $\dfrac{p_1}{h_1^2}=\dfrac{p_2}{h_2^2}=\dfrac{p_3}{h_3^2}=\cdots\cdots=\dfrac{p_n}{p_n^2}=\dfrac{1}{h^2}.$

上式中h爲單位權觀測值之精度.

則 $$h_1^2=p_1h^2,\ h_2^2=p_2h^2,\cdots\cdots h_n^2=p_nh^2.$$

$$\therefore\quad k_1=\frac{h_1dx}{\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}}h\,dx,$$

$$k_2=\frac{\sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}}h\,dx,$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_n=\frac{\sqrt{p_n}}{\sqrt{\pi}}h\,dx.$$

$$\therefore\quad h_1^2x_1^2+h_2^2x_2^2+\cdots\cdots+h_n^2x_n^2=h^2(p_1x_1^2+p_2x_2^2+\cdots\cdots+p_nx_n^2)=h^2\Sigma px^2.$$

$$\therefore\quad P=\left[\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right]^n\sqrt{p_1p_2p_3\cdots\cdots p_n}\cdot h^ne^{-h^2\Sigma px^2}.$$

必P爲最大,h方能使z_1z_2爲最或是值.

但P爲最大,必$\frac{dP}{dh}=0$.

令 $$\frac{dP}{dh}=\left[\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right]^n\sqrt{p_1p_2\cdots\cdots p_n}(n-2h^2\Sigma px^2)h^{n-1}e^{-h^2\Sigma px^2}.$$

$$\therefore\quad n-2h^2\Sigma px^2=0,$$

或 $$h=\pm\sqrt{\frac{n}{2\Sigma px^2}}.$$

$$\therefore\quad r=\frac{0.4769}{h}=\pm0.0745\sqrt{\frac{\Sigma px^2}{n}}.$$

同(43節)之法則,可證

$$\frac{\Sigma px^2}{n}=\frac{\Sigma pv^2}{n-1}.$$

$$\therefore \quad r=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-1}} \cdots\cdots(20)$$

$$r_0=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{(n-1)\Sigma p}} \cdots\cdots(21)$$

46. 標準舛差 (Standard error). (或曰均方舛差).

由(26節),拗點在

$$x=\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

設此x之值爲s,

則 $$s=\pm\frac{1}{h\sqrt{2}}.$$

但 $$h=\sqrt{\frac{n}{2\Sigma px^2}}.$$

$$\therefore \quad s=\pm\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n}}.$$

又 $$\frac{\Sigma px^2}{n}=\frac{\Sigma pv^2}{n-1}.$$

$$\therefore \quad s=\pm\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-1}} \cdots\cdots(22)$$

s曰單位權觀測值之標準舛差.

同理,賦權均數之標準舛差爲

$$s_0=\pm\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{(n-1)\Sigma p}} \cdots\cdots(23)$$

若(21),(23)兩式中之p俱等於一.

則單位權觀測值之標準舛差將爲

$$s = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots (24)$$

算術均數之標準舛差將爲

$$s_0 = \pm\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n(n-1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

47. 或是舛差與標準舛差之關係. 比較 (20) 與 (22),

得 $$r = 0.6745\,s. \cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

但 $$h = \frac{0.4769}{r} = \frac{0.4769}{0.6745\,s} = \frac{0.70704}{s}.$$

$$\therefore \quad hs = 0.70704 \cdots\cdots\cdots\cdots (27)$$

德國習用 s, 英美多用 r. 統計學中亦用 s.

s 缺一乘數 0.6745. 故 s 較便於 r.

(例一) 求 (19節) 之 (例一) 中 r, s, h 之值.

部分	每部分中點之值 M	p	v	v^2	px^2
1	0.5	1	5.482	30.05	30.05
2	1.5	4	4.482	20.08	80.32
3	2.5	10	3.482	12.12	121.20
4	3.5	89	2.482	6.16	548.24
5	4.5	190	1.482	2.19	416.10
6	5.5	212	0.482	0.23	48.76
7	6.5	204	−0.518	0.26	53.04
8	7.5	193	−1.518	2.30	443.90
9	8.5	97	−2.518	6.34	614.98
10	9.5	16	−3.518	12.37	197.92
12	10.5	2	−4.518	20.41	40.82
$z = 5.982$		1000		$\Sigma vp^2 = 2595.33$	

∴ 由(17), $$r=0.6745\sqrt{\frac{2595.33}{1000-1}}=1.086\text{呎},$$

由(26), $$s=\frac{1.086}{0.6745}=1.610\text{呎},$$

由(27), $$h=\frac{0.4769}{1.086\text{呎}}=\frac{0.4391}{1\text{呎}}.$$

本例以0.5呎代表第一部分各彈痕之觀測值,實極勉強.蓋各彈痕之位置,各有其觀測值.惟未曾測出,自不能用之以作計算之標準.故應取 $n=1000$,不應取 $n=11$.即觀測實有1000次,而非11次也.

(例二)求(習題二)之(4)中 r, s, h 之值.

分數	平均分數 M	人數 p	pM	v	v^2	pv^2
1—5	2.5	5	12.5	+28.91	835.8	4,179.0
6—10	7.5	9	67.5	+23.91	517.7	5,145.3
11—15	12.5	28	350.0	+18.91	357.6	10,012.8
16—20	17.5	49	857.5	+13.91	193.5	9,481.5
21—25	22.5	58	1,305.0	+ 8.91	79.4	4,605.2
26—30	27.5	82	2,255.0	+ 3.91	15.3	1,254.6
31—35	32.5	87	2,827.5	− 1.09	1.2	104.4
36—40	37.5	79	2,962.5	− 6.09	37.1	2,930.9
41—45	42.5	50	2,125.0	−11.09	123.1	6,155.0
46—50	47.5	37	1,757.5	−16.09	259.2	9,590.4
51—55	52.5	21	1,102.5	−21.09	445.1	9,347.1
56—60	57.5	6	345.0	−26.09	681.2	4,147.2
61—65	62.5	3	187.5	−31.09	967.1	2,901.3
$z=3.141$		514	$\Sigma pM=16,155.0$		$\Sigma pv^2=69,854.7$	

$$\therefore\quad z=\frac{16,155.0}{514}=31.41\text{分}.$$

$$r=\pm 0.6745\sqrt{\frac{69,854.7}{514-1}}=\pm 7.871\text{分}.$$

$$s=\frac{r}{0.6745}=\pm 11.67\text{分}.$$

$$h=\frac{0.4769}{7.871\text{分}}.$$

1分至5分者5人,中數2.5分殊不能代表此5人之平均分數.旣無詳細記載,不得已取而代之耳.故$n=514$而非$n=13$.

(例三) 用重複測法,測得一角如下表,求其r.

p	M	v	v^2	pv^2
5	87°51′18″.26	−0″.10	0.010	0.05
4	16 .30	+1 .86	3.460	13.84
1	21 .06	−2 .90	8.410	8.41
4	17 .95	+0 .21	0.044	0.18
3	16 .20	+1 .96	3.842	11.53
4	20 .85	−2 .69	7.236	28.94
$\Sigma p=21$	$z=87°51'18''.16$		$\Sigma pv^2=62.95$	

第一例,乃重複觀測5次,其結果俱是87°51′18″.26.卽5實爲該觀測值之權.故$n=6$.

∴　由(17),　　$r=0.6745\sqrt{\frac{62.95}{6-1}}=2''.39.$

由(19),　　$r_0=\frac{2''.39}{\sqrt{21}}=0''.52.$

(例四) A, B 兩測量隊,測得一角之值如下表.但 A 隊之經緯儀能讀 20″, B 隊之經緯儀祇能讀 1′, 每值俱重複十一次. 求兩隊之 r 及 p, 並合併兩隊之結果, 而求其最或是值及或是舛差.

A 隊

M	v	v^2
34°55′35″	2	4
35	2	4
20	13	169
05	28	784
75	42	1764
40	7	49
10	13	169
30	3	9
50	17	289
30	3	9
z_1=34°55′33″		Σv^2=3250

B 隊

M	v	v^2
34°56′15″	39	1521
55 30	6	36
54 30	66	4356
55 15	21	441
56 00	24	576
55 45	9	81
55 30	6	36
55 30	6	36
56 00	24	576
55 45	9	81
z_2=34°55′36″		Σv^2=7740

由 (18),

$$r_1 = \pm 0.9745\sqrt{\frac{3250}{10(10-1)}} = \pm 4''.1$$

$$r_2 = \pm 0.6745\sqrt{\frac{7740}{10(10-1)}} = \pm 6''.3$$

由 (15), $\quad p_1 : p_2 = \frac{1}{4\cdot 1^2} : \frac{1}{6\cdot 3^2} = 12 : 5.$

$\therefore$ 由(12)，
$$z=\frac{p_1z_1+p_2z_2}{p_1+p_2}$$
$$=34°55'+\frac{12\times33''+5\times36''}{12+5}=34°55'33''\cdot9.$$

又由(15)．$p:p_1:p_2=\frac{1}{r^2}:\frac{1}{r_1^2}:\frac{1}{r_2^2}.$

$$\therefore\quad r=r_1\sqrt{\frac{p_1}{p}}$$
$$=\pm4''.1\sqrt{\frac{12}{12+5}}=3''.4.$$

$$\therefore\quad\begin{cases}z_1=34°55'33''\pm4''.1.\\ z_2=34°55'36''\pm6''.4.\\ z_3=34°55'33''.9\pm3''.4.\end{cases}$$

48. **又證．** 就 Σpx^2 論之，任取其中一項，如 $p_3x_3^2$．於 n 觀測之一，$p_3x_3^2$ 之或是率爲 y_3，故於 n 觀測全體，$p_3x_3^2$ 之或是率將爲 ny_3

$$\therefore\quad\Sigma pv^2=p_1x_1^2\cdot ny_1+p_2x_2^2\cdot ny_2+p_3x_3^2\cdot ny_3^2+\cdots\cdots+p_nx_n^2\cdot ny,$$

或
$$\frac{\Sigma px^2}{n}=p_1x_1^2\cdot\frac{h_1dx}{\sqrt{\pi}}e^{-h_1^2x_1^2}+p_2x_2^2\cdot\frac{h_2dx}{\sqrt{\pi}}e^{-h_2^2x_2^2}+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+p_nx_n^2\frac{h_ndx}{\sqrt{\pi}}e^{-h_n^2x_n^2}.$$

但 $h_1^2=p_1h^2,\ h_2^2=p_2h^2,\ h_3^2=p_3^2h^2,\cdots\cdots h_n^2=p_nh^2.$

$$\therefore\quad\frac{\Sigma px^2}{n}=p_1x_1^2\cdot\frac{h\sqrt{p_1}}{\sqrt{\pi}}e^{-p_1^2h^2x_1^2}\,dx$$

$$+p_2x_2^2\cdot\frac{h\sqrt{p_2}}{\sqrt{\pi}}e^{-p_2{}^2hx_2^2}\,dx$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+p_nx_n^2\cdot\frac{h\sqrt{p_n}}{\sqrt{\pi}}e^{-p_nh_n^2x_n^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum p(hx\sqrt{p})^2e^{-(hx\sqrt{p})^2}dx.$$

設 $\qquad hx\sqrt{p}=t$, 則 $dx=\dfrac{dt}{h\sqrt{p}}$.

$$\therefore\quad \frac{\Sigma px^2}{n}=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-t^2}\,dt$$

$$=-\frac{1}{2h^2\sqrt{\pi}}\Big[te^{-t^2}-\int e^{-t^2}\,dt\Big]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$=-\frac{1}{2h^2\sqrt{\pi}}\Big[0-\sqrt{\pi}\Big]=\frac{1}{2h^2}.$$

或 $\qquad r=\dfrac{0.4768}{h}=\pm0.4769\sqrt{\dfrac{2\Sigma px^2}{n}}.$

由上節, $\quad 0.4769\sqrt{2}=0.6745$ 及 $\dfrac{\Sigma x^2}{n}=\dfrac{\Sigma pv^2}{n-1}$.

$$\therefore\quad r=\pm0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-1}}.$$

$$r_0=\pm0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{(n-1)\Sigma p}}.$$

上項結果同 (20) 及 (21).

49. 或是幷差之簡式. 就 Σx 論之, 任取一項, 如 x_3, 於 n 觀測之一, x_3 之或是率爲 y_3, 於 n 觀測全體, x_3 之或是率爲 ny_3.

$$\therefore \quad \Sigma x = x_1 \cdot ny_1 + x_2 \cdot ny_2 + x_3 \cdot ny_3 + \quad + x_n \cdot ny_n.$$

或
$$\frac{\Sigma x}{n} = x_1 \frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_1^2} + x_2 \frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x_2^2} + \cdots\cdots$$

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-h^2 x^2}\, dx$$

$$= \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-h^2 x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

$$\therefore \quad r = \frac{0.4769}{h} = 0.4769\sqrt{\pi} \cdot \frac{\Sigma x}{n}.$$

但
$$\frac{\Sigma x^2}{n} = \frac{\Sigma v^2}{n-1}.$$

$$\therefore \quad \frac{\Sigma x}{\sqrt{n}} = \frac{\Sigma v}{\sqrt{n-1}} \text{ 爲近似.}$$

$$\therefore \quad r = 0.8453 \frac{\Sigma v}{\sqrt{n(n-1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$r_0 = 0.8453 \frac{\Sigma v}{n\sqrt{(n-1)}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

上式Σv爲舛差絕對值之和,計算極便.而(17),(18)兩公式,須求各舛差平方之和,又加開方,其手續繁難多矣.

(例一)求(43節)之(例一)之或是舛差.

取各v之絕對值,得$\Sigma v = 38''.38$.

$\therefore$ 由(28),
$$r = \frac{0.8453 \times 38.38}{\sqrt{24(24-1)}} = 1''.55.$$

由(29),
$$r_0 = \frac{1''.55}{\sqrt{24}} = 0''.32.$$

與(43節)內兩結果1''.35及0''.28比較,相差尚不甚大,自合乎實用.

習 題 三

1. 求(19節之例二)之最或是高度,及或是舛差.

答: 67.285吋 ±0.012吋.

2. 一角觀測64次,其計算結果爲49°01'09''.11±0''.051. 求一觀測之或是舛差. 答: ±0''.403.

3. 用甲乙兩經緯儀,測量某角,其結果如下:

甲……24°13'36''±3''.1.

乙……24°13'24''±13''.8.

求某角之最或是值及或是舛差. 答: 24°13'35'',.43±2''.95.

4. 測量某距離,第一次以能讀一分之鋼尺測五次,第二次以能讀一寸之鐵鍊測五次,其結果分別如下:

鋼尺	鐵鍊
741.17 呎	741.2 呎
741.09 呎	741.4 呎
741.22 呎	741.0 呎
741.12 呎	741.3 呎
741 10 呎	741.1 呎

求各次之或是舛差及其權,並求某距離之長. 答: 741.146±0.015.

5. 某量之觀測值爲

769, 768, 767, 766, 765, 764, 763, 762. 其權爲

1 3 5 7 8 6 4 2

求帶權均數之或是舛差,及每觀測之或是舛差. 答: ±0.440, ±2.637.

6. 甲乙兩隊,各測某距離,甲隊得683.4±0.3. 乙隊得683.9±0.3. 問兩隊之優劣.並求某距離之長. 答: 無優劣之分,其距離 =684.15±0.21.

7. 甲乙兩隊分別測量某角,經緯儀俱能讀0''.01. 計算結果,得

甲之或是外差 $=\pm 0''.65$,

乙之或是外差 $=\pm 1''.45$.

求兩隊外差0''.00時之或是率,及外差2''.00時之或是率.

(注意) 先求精度h. 答: 甲 0.004, 0.000047. 乙 0.002, 0.0015.

8 一角測20次,得或是外差 $\pm 0''.38$. 問增測若干次,其或是外差方成 $\pm 0''.25$. 答: 26.2 次.

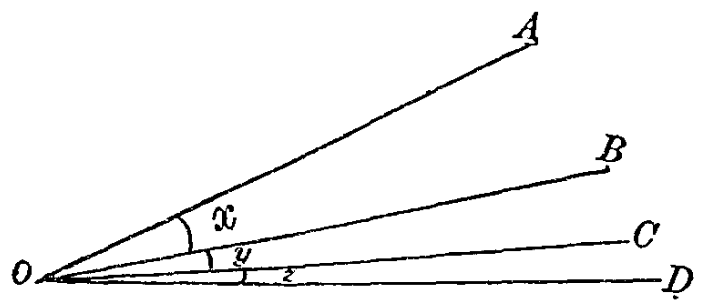
9. 一距離測500次,其計算所得之或是外差爲 $\pm 0.6\,cm.$,問外差在 $0.4\,cm.$ 與 $0.8\,cm.$ 間者,共有若干次? 答: 71.4 次.

第四章

間接觀測

50. 觀測方程 (Observation equations). 設有三鄰角

$$\angle AOB,\ \angle BOC,\ \angle COD.$$



(圖 18)

若僅測得

$$\angle AOB = 25^\circ 27' 19''.5, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

$$\angle BOC = 13^\circ 24' 15''.0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

$$\angle COD = \ \ 8^\circ 39' 29''.5. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

則手續是否錯誤,無從查考.

若再測得

$$\angle AOC = 38^\circ 51' 33''.0, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (D)$$

$$\angle BOD = 22^\circ 03' 42''.5, \quad \cdots\cdots (E)$$

$$\angle AOD = 47^\circ 31' 06''.0. \quad \cdots\cdots (F)$$

則疑竇生焉.然細心考查,反可借以斷定有無大誤.

緣據幾何學,應有

$$\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC \text{ 之條件.}$$

(A),(B),(D) 雖不合此條件,然所差不過 $1''.5$. 究是何值,發生錯誤,殊難斷定.或各值俱有錯誤,亦未可知.今旣無大誤,則可加以相當改正,俾合實用,其法詳以下各節.若發現極大誤差,是觀測含有定誤差,或過失誤差,則全局皆錯,祗得另行觀測,盡棄前功.縱所差極小,或恐各觀測值同一錯誤,亦不能謂無誤差.再加 (E), (F) 兩觀測爲之補救,則誤差發生之機會愈少,而信任之程度愈增.

今設　$\angle AOB = x,$

$\angle BOC = y,$

$\angle COD = z.$

則

$$x = 25^\circ 27' 19''.5, \quad \cdots\cdots (A)$$

$$y = 13^\circ 24' 15''.0, \quad \cdots\cdots (B)$$

$$z = 8^\circ 39' 29''.5, \quad \cdots\cdots (C)$$

$$x + y = 38^\circ 51' 33''.0, \quad \cdots\cdots (D)$$

$$y + z = 22^\circ 03' 42''.5, \quad \cdots\cdots (E)$$

$$x + y + z = 47^\circ 31' 06''.0. \quad \cdots\cdots (F)$$

以上含三未知量之六方程曰觀測方程.

觀測方程可任意增多.故觀測方程之個數,常多於未知量之個數.

51. 法方程 (Normal equations). 觀測方程既多於未知量,則未知量之值莫由確定,必減少方程之個數,使與未知量之個數相等,方合實用.減少後之方程曰**法方程**,其個數常等於未知量之個數.

52. 間接觀測之種類. 間接觀測,分獨立與規約兩種,每種又分同權不同權兩類.玆列表於下:

$$
\text{間接觀測}\begin{cases}\text{獨立觀測}\begin{cases}\text{同權獨立觀測}\\ \text{不同權獨立觀測}\end{cases}\\ \text{規約觀測}\begin{cases}\text{同權規約觀測}\\ \text{不同權規約觀測}\end{cases}\end{cases}
$$

53. 同權之獨立觀測. 設 q 個未知量之最或是值

$$z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots\cdots\cdots z_q$$

有 n 個觀測方程

$$
\left.\begin{aligned}
a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1z_q&=M_1,\\
a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2z_q&=M_2,\\
a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3z_q&=M_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&=\cdots\cdots,\\
a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_nz_q&=M_n,
\end{aligned}\right\}(30)
$$

上式中 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 爲觀測值,

而 $a_1, b_1, c_1, \cdots\cdots\cdots q_n$ 爲已知係數,

令 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots\cdots z_n$ 爲未知量之最或是值，則(30)之左方將不等於 M，而設

$$\left.\begin{array}{l} a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1z_q-M_1=v_1, \\ a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2z_q-M_2=v_2, \\ a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3z_q-M_3=v_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots \\ a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_n\ z_q-M_n=v_n, \end{array}\right\} \tag{31}$$

上式中 $v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots\cdots v_n$ 爲舛差.

(31)曰舛差方程.

欲使 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q$ 成最或是值，據(7)必有

$$\Sigma v^2 = \text{最小}.$$

設
$$\begin{aligned} Q=\Sigma v^2 &= v_1{}^2 v_2{}^2+v_3{}^2+\cdots\cdots+v_n{}^2 \\ &= (a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1zq-M_1)^2 \\ &+(a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2zq-M_2)^2 \\ &+(a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3zq-M_3)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+(a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_nzq-M_n)^2. \end{aligned}$$

若 Q 爲最小，必有 $\frac{\delta Q}{\delta z_1}=0, \frac{\delta Q}{\delta z_2}=0, \frac{\delta Q}{\delta z_3}=0, \frac{\delta Q}{\delta z_n}=0.$

令 $$\frac{1}{2}\frac{\delta Q}{\delta z_1}=[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+\cdots\cdots+[aq]z_q-[aM],$$

上式中,

$$\left.\begin{aligned}[aa]&=a_1a_1+a_2a_2+a_3a_3+\cdots\cdots+a_na_n,\\ [ab]&=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots\cdots+a_nb_n,\\ \cdots\cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [aq]&=a_1q_1+a_2q_2+a_3q_3+\cdots\cdots+a_nq_n,\\ [aM]&=a_1M_1+a_2M_2+a_3M_3+\cdots+a_nM_n,\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad [aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+\cdots\cdots+[aq]z_q=[aM],$$

同理

$$\left.\begin{aligned}&[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+\cdots\cdots+[aq]z_q=[aM],\\ &[ba]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3+\cdots\cdots+[bq]z_q=[bM],\\ &[ca]z_1+[cb]z_2+[cc]z_3+\cdots\cdots+[cq]z_q=[cM],\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\\ &[qa]z_1+[qb]z_2+[qc]z_3+\cdots\cdots+[qq]z_q=[qM].\end{aligned}\right\}\quad(32)$$

(32) 有 q 個方程 q 個未知量,曰 (30) 之法方程.

54. 法方程之表解. 一問題中,常遇數十個觀測方程,則依 (32) 組成法方程,手續繁雜,最易發生錯誤.今列表計算,既有系統,又備檢點一行,偶有錯誤,可隨時查出.其進行之手續如下:

改觀測方程 (30) 爲下表

觀測號數	z_1	z_2	z_3	……	z_q	觀測值	檢點
	a	b	c		q	M	s
1	a_1	b_1	c_1	……	q_1	M_1	s_1
2	a_2	b_2	c_2	……	q_2	M_2	s_2
3	a_3	b_3	c_3	……	q_3	M_3	s_3
⋮	⋮	⋮	⋮	……	⋮	⋮	⋮
n	a_n	b_n	c_n	……	q_n	M_n	s_n

上表中,檢點值s,爲各方程各係數之和,

即

$$\left.\begin{aligned}
s_1 &= a_1+b_1+c_1+\cdots\cdots+q_1+M_1,\\
s_2 &= a_2+b_2+c_2+\cdots\cdots+q_2+M_2.\\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_n &= a_n+b_n+c_n+\cdots\cdots+q_n+M_n.
\end{aligned}\right\}$$

改法方程(32)爲下表

	z_1 a]	z_2 c]	z_3 c]	……	z_q q]	常數 M]	檢點 s]
[a	[aa]	[ab]	[ac]	……	[aq]	[aM]	[as]
[b		[bb]	[bc]	……	[bq]	[bM]	[bs]
[c			[cc]	……	[cq]	[cM]	[cs]
⋮					⋮	⋮	⋮
[q					[qq]	[qM]	[qs]
[M						[MM]	[Ms]
[s							[ss]

上表中,　$[aa]+[ab]+[ac]+\cdots\cdots+[aq]+[aM]$

$$\left.\begin{aligned}
&= a_1a_1+a_1b_1+a_1c_1+\cdots\cdots+a_1q_1+a_1M_1\\
&+a_2a_2+a_2b_2+a_2c_2+\cdots\cdots+a_2q_2+a_2M_2\\
&+a_3a_3+a_3b_3+a_3c_3+\cdots\cdots+a_3q_3+a_3M,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_na_n+a_nb_n+a_nc_n+\cdots\cdots+a_nq_n+a_nM
\end{aligned}\right\}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&=a_1(a_1+b_1+c_1+\cdots\cdots+q_1+M_1)\\
&+a_2(a_2+b_2+c_2+\cdots\cdots+q_2+M_2)\\
&+a_3(a_3+b_3+c_3+\cdots\cdots+q_3+M_3)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+a_n(a_n+b_n+c_n+\cdots\cdots+q_n+M_n)
\end{aligned}\right\}
$$

$$=a_1s_1+a_2s_2+a_3s_3+\cdots\cdots a_ns_n$$

$$=[as].$$

同理，
$$[ba]+[bb]+[bc]+\cdots\cdots+[bq]+[bM]=[bs],$$

$$[ca]+[cb]+[cc]+\cdots\cdots+[cq]+[cM]=[cs],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

$$[Ma]+[Mb]+[Mc]+\cdots+[Mq]+[MM]=[Ms],$$

$$[sa]+[sb]+[sc]+\cdots\cdots\cdots+[sq]+[sM]=[ss],$$

(注意) $[ab]=[ba],\cdots\cdots[sM]=[Ms]$.

在對角線 $[aa],[bb],[cc],\cdots\cdots[ss]$ 兩側，完全對稱.故左下角諸式，可不必寫出，如計算第三列之和，則自 z_3 之下 $[ac]$ 起算，依曲尺進行可也.

(例一) 求 (50節) 觀測方程中 $x, y, z,$ 之最或是值.

觀測方程

設數	x a	y b	z c	觀測值 M
A	1	0	0	25°27′19″.5
B	0	1	0	13 24 15 .0
C	0	0	1	8 39 29 .5
D	1	1	0	38 51 33 .0
E	0	1	1	22 03 42 .5
F	1	1	1	47 31 03 .0

法方程

	x $a]$	y $b]$	z $c]$	常數 $M]$
$[a$	3	2	1	111°49′58″.5
$[b$		4	2	121 50 36 .5
$[c$			3	78 14 18 .0

用行列式解之,得

$$\begin{vmatrix} 321 \\ 242 \\ 123 \end{vmatrix} = 16.$$

$$\therefore \quad x = \frac{\begin{vmatrix} 111°49'58''.5,2,1 \\ 121\ 50\ 36\ \ .5,4,2 \\ 78\ 14\ 18\ \ .0,2,3 \end{vmatrix}}{16} = 25°27'20''.125,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3,111°49'58''.5,1 \\ 2,121\ 50\ 36\ \ .5,2 \\ 1,\ 78\ 14\ 18\ \ .0,3 \end{vmatrix}}{16} = 13°24'14''.125,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}3,2,111°49'58''.5\\2,4,121\ 50\ 36\ \ .5\\1,2,\ \ 78\ 14\ 18\ \ .0\end{vmatrix}}{16}=8°39'29''.875.$$

爲三角之最或是值.

(例二)再求上例之最或是值.

上例M行數字過多,計算困難.且M行與他行不同單位,不便相加,又檢點行未曾算出,發生錯誤,莫由查考.今利用舛差爲改正值,其法如下:

設
$$x=25°27'19''.5+v_x,$$
$$y=13\ 24\ 15\ \ .0+v_y,$$
$$z=\ \ 8\ 39\ 29\ \ .5+v_z,$$

代入$(D),(E),(F)$各式,得

$$38°51'34''.5+\ v_x\ \ +v_y=38°51'33''.0,$$
$$22\ 03\ 44\ \ .5+\ v_y\ \ +v_z=22\ 03\ 42\ \ .5,$$
$$47\ 31\ 04\ \ .0+v_x+v_y+v_z=47\ 31\ 06\ \ .0.$$

因得含舛差之觀測方程

$$\left.\begin{array}{lr}(A) & v_x=0,\\(B) & v_x=0,\\(C) & v_z=0,\\(D) & v_x+v_y=-\ 1.5,\\(E) & v_y+v_z=-\ 2.0,\\(F) & v_x+v_y+v_z=\ \ 2.0,\end{array}\right\}$$

茲表解之如下:

觀測方程

號數	v_x a	v_y b	v_z c	觀測值 M	檢點 s
A	1	0	0	0	1
B	0	1	0	0	1
C	0	0	1	0	1
D	1	1	0	—1.5	0.5
E	0	1	1	—2.0	0
F	1	1	1	2.0	5

法方程

	v_x $a]$	v_y $b]$	v_z $c]$	常數 $M]$	檢點 $s]$
$[a$	3	2	1	0.5	6.5
$[b$		4	2	—1.5	6.5
$[c$			3	0	6.0
$[M$				10.25	9.25
$[s$					28.25

上表檢點各值,適等於本列以上各行之和.因知計算無誤.

解法方程,得

$$v_x=\frac{\begin{vmatrix} 0.5, & 2, & 1 \\ -1.5, & 4, & 2 \\ 0, & 2, & 3 \end{vmatrix}}{16}=0.625,$$

$$v_y = \frac{\begin{vmatrix} 3, & 0.5, 1 \\ 2, & -1.5, 2 \\ 1, & 0, 3 \end{vmatrix}}{16} = -0.875,$$

$$v_z = \frac{\begin{vmatrix} 3, 2, & 0.5 \\ 2, 4, & -1.5 \\ 1, 2, & 0 \end{vmatrix}}{16} = 0.375.$$

$$\therefore \quad x = 25°27'19''.5 + 0''.625 = 25°27'20''.125,$$

$$y = 13\ 24\ 15\ \ .0 - 0\ \ .875 = 13\ 24\ 14\ \ .125,$$

$$z = \ \ 8\ 39\ 29\ \ .5 + 0\ \ .375 = \ \ 8\ 39\ 29\ \ .875.$$

設 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 爲六觀測方程之殘差.

則
$$v_1 = v_x = \quad 0.625 = \frac{5''}{8},$$

$$v_2 = v_y = - \ 0.875 = \frac{7'}{8},$$

$$v_3 = v_z = \quad 0.375 = \frac{3''}{8}.$$

$$v_4 = (23°27'20''.125 + 13°24'14''.125) - 38°51'33''.0$$

$$= 1''.25 = \frac{5''}{4},$$

$$v_5 = (13°24'14''.125 + 8°39'9''.875) - 22°63'42''.5$$

$$= 1''.5 = \frac{3''}{2},$$

$$v_6 = 25°27'20''.125 + 13°24'14''.125 + 8°39'29''875$$

$$-47°31'06''.0 = -1''.875. = \frac{15''}{8}.$$

$$\therefore \quad \Sigma v^2=\left[\frac{5}{8}\right]^2+\left[-\frac{7}{8}\right]^2+\left[\frac{3}{8}\right]^2+\left[\frac{10}{8}\right]^2+\left[\frac{12}{8}\right]^2+\left[\frac{15}{8}\right]^2$$

$$=\frac{552}{64}=8.625.$$

若取觀測值為x, y, z之值.

則
$$v_1=0,$$
$$v_2=0,$$
$$v_3=0,$$
$$v_4=-1''.5,$$
$$v_5=-2\ .0,$$
$$v_6=\ \ 2\ \ 0.$$

$$\therefore \quad \Sigma v^2=0+0+0+(-1.5)^2+(-2\ 0)^2+(2.0)^2=10.25.$$

今
$$8.625<10\ 25.$$

故x, y, z,之最或是值,能使$\Sigma v^2=$最小,適符最小二乘式之原理.

(例三) 測水平標點G_1, G_2, G_3, G_4, G_5之高,得下列觀測值.(假定觀測值同權).

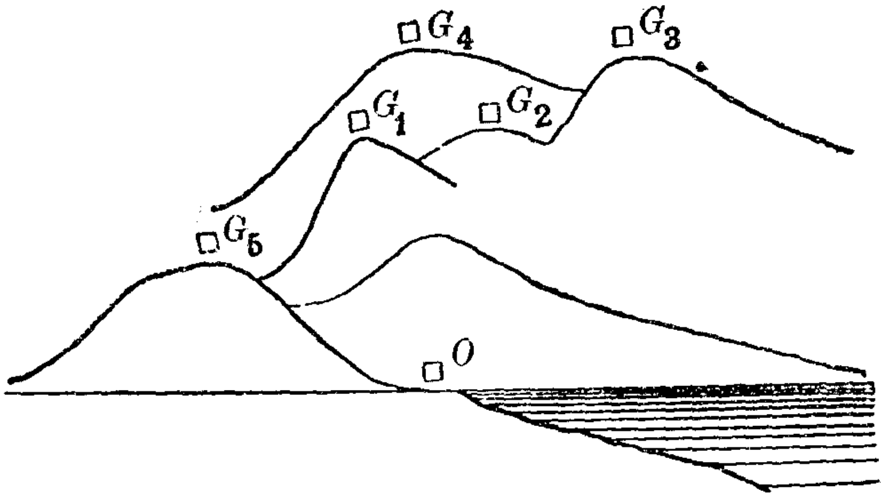
1. G_1在O上……573.08呎.
2. G^2在G_1上…………2.60呎.
3. G_3在O上……575.27呎.
4. G_3在G_2上……167.33呎.
5. G_4在G_3上…………3.80呎.
6. G_4在G_2上……170.28呎.

7. G_4 在 G_5 上……425.00 呎.

8. G_5 在 O 上……319.91 呎.

9. G_5 在 O 上……319.75 呎.

求各標點之高.



(圖 19)

設 z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 為 G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 在 O 上之高.

則得觀測方程

$$\left.\begin{array}{lr}
1. & z_1=573.08,\\
2. & z_2-z_1=\quad 2.60,\\
3. & z_2=575.27,\\
4. & z_3-z_2=167.33,\\
5. & z_4-z_3=\quad 3.80,\\
6. & z_4-z_2=170.28,\\
7. & z_4-z_5=425.00,\\
8. & z_5=319.75,\\
9. & z_5=319.91.
\end{array}\right\}$$

其表解如下：

觀測方程

觀測號數	z_1 a	z_2 b	z_3 c	z_4 d	z_5 e	觀測值 M	檢點 s
1	1	0	0	0	0	573.08	574.08
2	—1	1	0	0	0	2.60	2.60
3	0	1	0	0	0	575.27	576.27
4	0	—1	1	0	0	167.33	167.33
5	0	0	—1	1	0	3.80	3.80
6	0	—1	0	[illegible]	0	170.28	170.28
7	0	0	0	1	—1	425.00	425.00
8	0	0	0	1	1	319.75	320.75
9	0	0	0	0	1	319.91	320.91

法方程

	z_1 $a]$	z_2 $b]$	z_3 $c]$	z_4 $d]$	z_5 $e]$	常數 M	檢點 $s]$
$[a$	2	—1	0	0	0	570.48	571.48
$[b$		4	—1	—1	0	240.26	241.26
$[c$			2	—1	0	163.53	163.53
$[d$				3	—1	599.08	599.08
$[e$					3	216.66	216.66
$[M$						793,870.12	795,110.18
$[s$							796,356.24

解法方程，得

$$z_1=\frac{\begin{vmatrix}570.48 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 240.26 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 163.53 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 599.08 & -1 & -1 & 3 & -1\\ 214.66 & 0 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{29213.27}{51}=572.81\text{呎.}$$

同理，

$$z_2=575.14\text{呎,}$$

$$z_3=742.05\text{呎,}$$

$$z_4=745.43\text{呎,}$$

$$z_5=320.03\text{呎.}$$

(例四) 再求上例之最或是值.

以 $z_2=575.27$ 代入 4, 得

$$z_3=742.60$$

以 $z_5=319.91$ 代入 7, 得

$$z_4=744.91$$

故設

$$\left.\begin{aligned} z_1&=573+v_1,\\ z_2&=575+v_2,\\ z_3&=742+v_3,\\ z_4&=745+v_4,\\ z_5&=320+v_5,\end{aligned}\right\}$$

則

$$\left.\begin{array}{ll}
1. & v_1 = 0.08, \\
2. & v_2 - v_1 = 0.60, \\
3. & v_2 = 0.27 \\
4. & v_3 - v_2 = 0.33, \\
5 & v_4 - v_3 = 0.80, \\
6. & v_4 - v_2 = 0.28, \\
7. & v_4 - v_5 = 0.00, \\
8. & v_5 = -0.25, \\
9. & v_5 = -0.09.
\end{array}\right\}$$

求解如下:

觀 測 方 程

號數	v_1 a	v_2 b	v_3 c	v_4 d	v_5 e	觀測值 M	檢點 s
1	1	0	0	0	0	0.08	1.08
2	—1	1	0	0	0	0.60	0.60
3	0	1	0	0	0	0.27	1.27
4	0	—1	1	0	0	0.33	0.33
5	0	0	—1	1	0	0.80	0.80
6	0	—1	0	1	0	0.28	0.28
7	0	0	0	1	—1	0.00	0.00
8	0	0	0	0	1	—0.00	0.91
9	0	0	0	0	1	—0.25	0.75

法方程

	v_1 a]	v_2 b]	v_3 c]	v_4 d]	v_5 e]	常數 [M	檢點 s]
[a	2	−1	0	0	0	−0.52	0.48
[b		4	−1	−1	0	0.26	1.26
[c			2	−1	0	−0.47	−0.47
[d				3	−1	1.03	1.03
[e					3	−0.34	1.66
[M						1.3372	1.3472
[s							5.3572

解法方程,得

$$v_1=-0.19,\ v_2=0.14,\ v_3=0.05,\ v_4=0.43, v_5=0.03.$$

$$\therefore\quad z_1=572.81,\ z_2=575.14,\ z_3=742.05,\ z_4=745.43,\ z_5=320.03,$$

(例四)之M行,祇有兩位數.而(例三)之M行,則有五位,是難易判然矣.因之實際計算時,總以(例四)之法則爲妥,時間約省三分之一.

55. 不同權之獨立觀測. 若(50節)各觀測值之精度不同,則各值之權各異.設2, 1, 3, 5, 4, 6爲權.則

(i) $x=25°27'19''.5$ 帶權2,

(ii) $y=13\ 24\ 15\ .0$ 帶權1,

(iii) $z=\ 8\ 39\ 29\ .5$ 帶權3,

(iv) $x+y=38\ 51\ 33\ .0$ 帶權5,

(v) $y+z=22\ 03\ 42\ .5$ 帶權 4,

(vi) $x+y+z=47\ 31\ 06\ .0$ 帶權 6.

(i)帶權 2, 謂(i)應複寫二次,因是觀測方程適成(2+1+3+5+4+6=)21方程,可用上節方法解之.但觀測方程過多,計算殊不容易,因以另造公式爲便.

56. **法方程.** 設有觀測方程及其權爲

$$\left.\begin{array}{l} a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1z_q=M_1 \text{ 帶權 } p_1, \\ a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2z_q=M_2 \text{ 帶權 } p_2, \\ a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3z_q=M_3 \text{ 帶權 } p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots \text{ 帶權 } \cdots, \\ a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_nz_q=M_3 \text{ 帶權 } p_n. \end{array}\right\} (33)$$

則殘差方程將成

$$\left.\begin{array}{l} a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1z_q-M_1=v_1 \text{ 帶權 } p_1, \\ a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2z_q-M_2=v_2 \text{ 帶權 } p_2, \\ a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3z_q-M_3=v_3 \text{ 帶權 } p_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots \text{ 帶權 } \cdots \\ a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_nz_q-M_n=v_n \text{ 帶權 } p_n. \end{array}\right\} (34)$$

欲使 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_n$ 成最或是值,由(8)必有

$$Q=\Sigma pv^2= \text{最小}.$$

$$\frac{\delta Q}{\delta z_1}=0, \frac{\delta Q}{\delta z_2}=0, \frac{\delta Q}{\delta z_3}=0, \cdots\cdots \frac{\delta Q}{\delta z_q}=0.$$

但 $$\frac{\delta Q}{\delta z_1}=2p_1v_1\frac{\delta v_1}{\delta z_1}+2p_2v_2\frac{\delta v_2}{\delta z_1}+\cdots\cdots+2p_nv_n\frac{\delta v_n}{\delta z_1}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad 0=&p_1(a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1z_q-M_1)a_1\\&+p_2(a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2z_q-M_2)a_2\\&+p_3(a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3z_q-M_3)a_3\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&+p_n(a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_nz_q-M_n)a_n\\&=[paa]z_1+[pab]z_2+[pac]z_3+\cdots+[paq]z_q-[paM].\end{aligned}$$

上式中, $$\begin{aligned}[paa]&=p_1a_1a_1+p_2a_2a_2+\cdots\cdots+p_na_na_n,\\[pab]&=p_1a_1b_1+p_2a_2b_2+\cdots\cdots+p_na_nb_n,\\\cdots\cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[paM]&=p_1a_1M_1+p_2a_2M_2+\cdots+p_na_nb_n.\end{aligned}$$

故由 q 個微分,得 q 個法方程如下:

$$\left.\begin{aligned}&[paa]z_1+[pab]z_2+[pac]z_3+\cdots+[paq]z_q=[paM],\\&[pba]z_1+[pbb]z_2+[pbc]z_3+\cdots+[pbq]z_q=[pbM],\\&[pca]z_1+[pcb]z_2+[pcc]z_3+\cdots+[pcq]z_q=[pcM],\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots\\&[pqa]z_1+[pqb]z_2+[pqc]z_3+\cdots+[pqq]z_q=[pqM].\end{aligned}\right\}(35)$$

57. 法方程之表解.

觀測方程

觀測號數	權	z_1 a	z_2 b	z_3 c	… …	z_q q	觀測值 M	檢點 s
1	p_1	a_1	b_1	c_1	…	q_1	M_1	s_1
2	p_2	a_2	b_2	c_2	…	q_2	M_2	s_2
3	p_3	a_3	b_3	c_3	…	q_3	M_3	s_3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮
n	p_n	a_n	b_n	c_n	…	q_n	M_n	s_n

法方程

	z_1 $a]$	z_2 $b]$	z_3 $c]$	…… ……	z_q $q]$	常數 $[M]$	檢點 $s]$
$[pa$	$[paa]$	$[pab]$	$[pac]$	……	$[paq]$	$[paM]$	$[pas]$
$[pb$		$[pbb]$	$[pbc]$	……	$[pbq]$	$[pbM]$	$[pbs]$
$[pc$			$[pcc]$	……	$[pcq]$	$[pcM]$	$[pcs]$
⋮					⋮	⋮	⋮
$[pq$					$[pqq]$	$[pqM]$	$[pqs]$
$[pM$						$[pMM]$	$[pMs]$
ps							$[pss]$

上式中，
$$[paa]+[pab]+\cdots\cdots+[paM]=[pas],$$
$$[pba]+[pbb]+\cdots\cdots+[pbM]=[pbs],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots$$
$$[pas]+[pbs]+\cdots\cdots+[pMs]=[pss].$$

(例一) 由 (55 節) 之觀測方程，求 x, y, z 之最或是值.

設　　v_x, v_y, v_z 爲 x, y, z 之改正值,得

觀測方程

號數	權	v_x a	v_y b	v_z c	觀測值 M	檢點 s
1	2	1	0	0	0	1
2	1	0	1	0	0	1
3	3	0	0	1	0	1
4	5	1	1	0	—1.5	0.5
5	4	0	1	1	—2.0	0
6	6	1	1	1	2.0	5

法方程

	v_x $a]$	v_y $b]$	v_z $c]$	常數 $M]$	檢點 $s]$
$[pa$	13	11	6	4.5	34.5
$[pb$		16	10	—3.5	33.5
$[pc$			13	4.0	33.0
$[pM$				51.25	56.25
$[ps$					157.25

解法方程,得

$$v_x = 1''.44, \qquad v_y = -1''.45, \qquad v_z = 0''.84.$$

$$\therefore \quad x = 25^\circ 27' 19''.94,\ y = 13^\circ 24' 13''.55,\ z = 8^\circ 39' 30''.34,$$

爲最或是值.

(例二) 若 (54 節) 之 (例三) 有權

$$p_1 = p_2 = 25,$$

$$p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = p_8 = p_9 = 4$$

求高之最或是值.

加權於(54節)之(例四)之觀測方程,得

觀測方程

號數	權 p	v_1 a	v_2 b	v_3 c	v_4 d	v_5 e	觀測值 M	檢點 s
1	25	1	0	0	0	0	0.08	1.08
2	25	—1	1	0	0	0	0.60	0.60
3	4	0	1	0	0	0	0.27	1.27
4	4	0	—1	1	0	0	0.33	0.33
5	4	0	0	—1	1	0	0.80	0.80
6	4	0	—1	0	1	0	0.28	0.28
7	4	0	0	0	1	—1	0.00	0.00
8	4	0	0	0	0	1	—0.09	0.91
9	4	0	0	0	0	1	—0.25	0.75

法方程

	v_1 $a]$	v_2 $b]$	v_3 $c]$	v_4 $d]$	v_5 $e]$	常數 $M]$	檢點 $s]$
$[pa$	50	—25	0	0	0	—13.00	12.00
$[pb$		37	—4	—4	0	13.64	17.64
$[pc$			8	—4	0	—1.88	—1.88
$[pd$				12	—4	4.32	4.32
$[pe$					12	1.36	6.64
$[pM$						13.0432	14.7632
$[ps$							53.4832

解法方程,得

$$v_1=0.02,\quad v_2=0.48,\quad v_3=0.36,\quad v_4=0.72,\quad v_5=0.25.$$

$$\therefore\quad x_1=572.8,\ x_2=575.48,\ x_3=724.36,\ x_4=745.72,\ x_5=320.25.$$

(注意) 法方程之未知量過多,用行列式解之,手續亦不容易.

Gauss氏曾用排列式解之,組織較有統系,且能檢點錯誤,其用甚廣,將於第八章詳論之.專習測量者宜詳讀之.

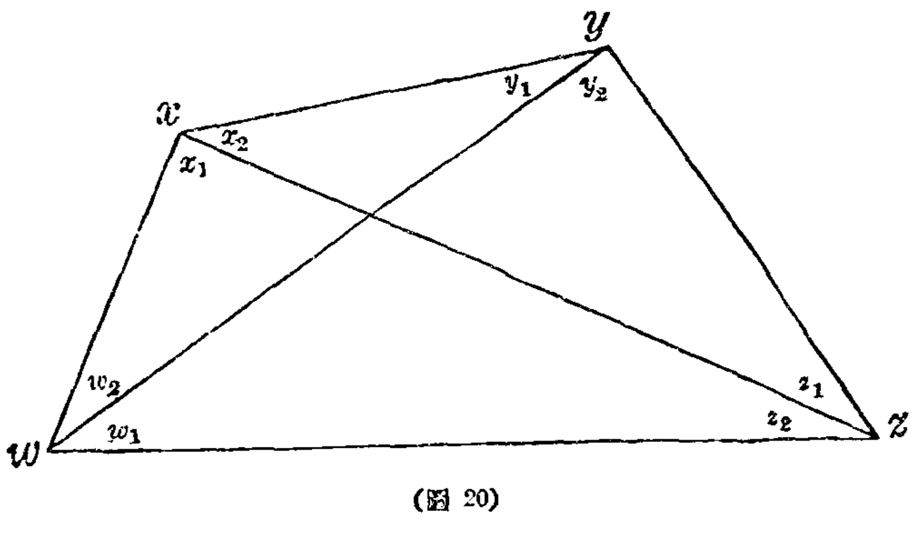
58. 規約觀測. (同權或不同權)設 z_1, z_2, z_3 為一三角形之三角, M_1, M_2, M_3 為其觀測值,則有三觀測方程

$$z_1=M_1,\ z_2=M_2,\ z_3=M_3.$$

及一規約方程 $\qquad z_1+z_2+z_3=180°.$

但 $M_1+M_2+M_3$ 不等於 180°,故三觀測值有改正之必要.改正後合乎規約之值,曰三角之最或是值.

又設 $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2, w_1, w_2$ 為一四邊形之各角.



(圖 20)

$Mx_1, Mx_2, My_1, My_2, Mz_1, Mz_2, Mw_1, Mw_2$ 爲其觀測值,則有八個觀測方程

$$x_1 = Mx_1, \qquad z_1 = Mz_1,$$
$$x_2 = Mz_2, \qquad z_2 = Mz_2,$$
$$y_1 = My_1, \qquad w_1 = Mw_1,$$
$$y_2 = My_2, \qquad w_2 = Mw_2,$$

其規約方程,似有以下七個,卽

(i) $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + w_1 + w_2 = 360°$,

(ii) $x_1 + w_2 = z_1 + y_2$,

(iii) $y_1 + x_2 = w_1 + z_2$,

(iv) $x_1 + x_2 + y_1 + w_2 = 180°$,

(v) $y_1 + y_2 + z_1 + z_2 = 180°$,

(vi) $z_1 + z_2 + w_1 + y_2 = 180°$,

(vii) $w_1 + w_2 + x_1 + z_2 = 180°$.

但細加考究,則 (iv)+(vi)=(i), (v)+(vii)=(i),

(iv)−(v)=(ii), (v)−(i)=(iii).

故規約方程祇有 $3=7-4$ 個. (i), (ii), (iii) 旣由 (iv), (v), (vi), (vii) 化出,最好在後四式中任取三式爲規約方程.前三式亦可取用.惟 (i) 之項數過多. (ii), (iii) 之係數有正有負.究不如選用後四式,計算較便.

59. 由規約觀測求未知量之法有二.

1. 法方程法

2. 不定係數法

法方程法,雖應用時計算較難,然可因以求得各未知量之權(見後70節).若祇求各未知量之最或是值,自以不定係數法爲便.

60. 法方程法(Method by Normal Equations). 設 z_1, z_2, z_3 爲三角形三角之最或是值,其觀測值爲 M_1, M_2, M_3,其權爲 P_1, P_2, P_3,則得觀測方程

1. $z_1 = M_1$ 帶權 P_1,

2. $z_2 = M_2$ 帶權 P_2,

3. $z_3 = M_3$ 帶權 P_3.

變規約方程爲

$$z_1 + z_2 = 180° - z_3.$$

即

$$z_1 + z_2 = 180° - M_3 \text{ 帶權 } P_3.$$

今三未知量旣去 z_3,其餘二未知量 z_1, z_2 有三觀測方程

(i) $z_1 = M_1$ 帶權 P_1,

(ii) $z_2 = M_2$ 帶權 P_2,

(iii) $z_1 + z_2 = \pi - M_3$ 帶權 P_3.

由(57節)之表解法,得

觀測方程

號數	權	x_1 a	x_2 b	觀測值 M	檢點 s
1	p_1	1	0	M_1	$1+M_1$
2	p_2	0	1	M_2	$1+M_2$
3	p_3	1	1	$\pi-M_3$	$2+\pi-M_3$

法方程

	x_1 $a]$	x_2 $b]$	常數 M	檢點 $s]$
$[pa$	p_1+p_3	p_3	$p_1M_1+\pi q_3-p_3M_3$	$p_1+p_1M_1+2p_3+\pi p_3-p_3M_3$
$[pb$	p_3	p_2+p_3	$p_2M_2+\pi p_3-p_3M_3$	$p_2+p_2M_2+2p_3+\pi p_3-p_3M_3$
$[pM$			$p_1M_1^2+p_2M_2^2+p_3(\pi-M_3^2)$	$p_1(M_1+M_1^2)+p_2(M_2+M_2^2)+p_3(2\pi-2M_3)+p_2(\pi-M_3)^2$
$[ps$				$p_1(1+M_1)^2+p_2(1+M_2)^2+p_3(2+\pi-M_3)^2$

解法方程，得

$$z_1=\frac{\begin{vmatrix} P_1M_1+\pi P_3-P_3M_3, & P_3 \\ P_2M_2+\pi P_3-P_3M_3, & P_2+P_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_1+P_3, & P_3 \\ P_3, & P_2+P_3 \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1)M_1+P_2P_3[\pi-(M_1+M_2+M_3)]}{P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1}$$

$$=M_1+\frac{\dfrac{d}{p_1}}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}},$$

上式中，　　$d=\pi-(M_1+M_2+M_3)$.

同理，

$$z_2=M_2+\frac{\dfrac{d}{p_2}}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}},$$

$$z_3=M_3+\frac{\dfrac{d}{p_3}}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}}.$$

$$\therefore\quad z_1+z_2+z_3=M_1+M_2+M_3+d=\pi.$$

若三權俱等於1，則

$$z_1=M_1+\frac{d}{3},$$

$$z_2=M_2+\frac{d}{3},$$

$$z_3=M_3+\frac{d}{3}.$$

61. 不定係數法(Method of Correlatves) 此法係葛斯(Gauss)氏所發明.規約方程祇限於線形(Linear).

設 $$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$$

爲未知量 $$z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_n$$

之觀測值,其權爲

$$p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots p_n.$$

其改正值(卽舛差)爲

$$v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots v_n.$$

則有 n 個舛差方程

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= M_1 + v_1 \text{ 帶權 } p_1,\\
z_2 &= M_2 + v_2 \text{ 帶權 } p_2,\\
z_3 &= M_3 + v_3 \text{ 帶權 } p_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_n &= M_n + v_n \text{ 帶權 } v_n.
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

又設有λ個規約方程

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \cdots\cdots + \alpha_n z_n &= 0,\\
\beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \beta_3 z_3 + \cdots\cdots + \beta_n z_n &= 0,\\
\gamma_0 + \gamma_1 z_1 + \gamma_2 z_2 + \gamma_3 z \ + \cdots\cdots + \gamma_n z_n &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\\
\lambda_0 + \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \cdots\cdots + \lambda_n z_n &= 0.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_0+\alpha_1(M_1+v_2)+\alpha_2(M_2+v_2)+\alpha_3(M_3+v_3)+\cdots+\alpha_n(M_n+v_n)=0,\\ \beta_0+\beta_1(M_1+v_1)+\beta_2(M_2+v_2)+\beta_3(M_3+v_3)+\cdots+\beta_n(M_n+v_n)=0,\\ \gamma_0+\gamma_1(M_1+v_1)+\gamma_2(M_2+v_2)+\gamma_3(M_3+v_3)+\cdots+\gamma_n(M_n+v_n)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_0+\lambda_1(M_1+v_1)+\lambda_2(M_2+v_2)+\lambda_3(M_3+v_3)+\cdots+\lambda_n(M_n+v_n)=0.\end{array}\right\}(A)$$

設

$$\left.\begin{array}{l}f_\alpha(v)=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\cdots\cdots+\alpha_nv_n+d_\alpha=0,\\ f_\beta(v)=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3v_3+\cdots\cdots+\beta_nv_n+d_\beta=0,\\ f_\gamma(v)=\gamma_1v_1+\gamma_2v_2+\gamma_3v_3+\cdots\cdots+\gamma_nv_n+d_\gamma=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\\ f_\lambda(v)=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\lambda_3v_3+\cdots\cdots+\lambda_nv_n+d_\lambda=0.\end{array}\right\}(B)$$

上式中

$$\left.\begin{array}{l}d_\alpha=\alpha_0+\alpha_1M_1+\alpha_2M_2+\alpha_3M_3+\cdots\cdots+\alpha_nM_n,\\ d_\beta=\beta_0+\beta_1M_1+\beta_2M_2+\beta_3M_3+\cdots\cdots+\beta_nM_n,\\ d_\gamma=\gamma_0+\gamma_1M_1+\gamma_2M_2+\gamma_3M_3+\cdots\cdots+\gamma_nM_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ d_\lambda=\lambda_0+\lambda_1M_1+\lambda_2M_2+\lambda_3M_3+\cdots\cdots+\lambda_nM_n.\end{array}\right\}(C)$$

欲使(36)中之$z_1, z_2, z_3,\cdots\cdots z_n$爲最或是値,必有$\Sigma pv^2=$最小.今$\Sigma pv^2$含有$n$個未知量,且另有$\lambda$個規約方程(37).故欲使$\Sigma pv^2$爲最小,必有

$$Q=\Sigma pv^2-2k_1f_\alpha(v)-2k_2f_\beta(v)-\cdots-2k_\lambda f_\lambda(v)=\text{最小},$$

上式中$k_1, k_2, k_3,\cdots\cdots k_\lambda$爲不定係數.

即 $\frac{\delta Q}{\delta v_1}=0, \frac{\delta Q}{\delta v_2}=0, \frac{\delta Q}{\delta v_3}=0, \cdots\cdots\frac{\delta Q}{\delta v_n}=0.$

今 $\frac{\delta Q}{\delta v_1}=2P_1v_1-2k_1\alpha_1-2k_2\beta_1-2k_3\gamma_1-\cdots\cdots-2k_\lambda\lambda_1=0.$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned} v_1&=\frac{\alpha_1}{p_1}k_1+\frac{\beta_1}{p_1}k_2+\frac{\gamma_1}{p_1}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_1}{p_1}k_\lambda.\\ v_2&=\frac{\alpha_2}{p_2}k_1+\frac{\beta_2}{p_2}k_2+\frac{\gamma_2}{p_2}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_2}{p_2}k_\lambda,\\ v_3&=\frac{\alpha_3}{p_3}k_1+\frac{\beta_3}{p_3}k_2+\frac{\gamma_3}{p_3}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_3}{p_3}k_\lambda,\\ \cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=\frac{\alpha_n}{p_n}k_1+\frac{\beta_n}{p_n}k_2+\frac{\gamma_n}{p_n}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_n}{p_n}k_\lambda. \end{aligned}\right\}(38)$$

同理,

代入 (B), 得

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]k_1+\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]k_2+\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]k_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\alpha\lambda}{p}\right]k_\lambda+d_\alpha=0,\\ &\left[\frac{\beta\alpha}{p}\right]k_1+\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]k_2+\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]k_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\beta\lambda}{p}\right]k_\lambda+d_\beta=0,\\ &\left[\frac{\gamma\alpha}{p}\right]k_1+\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right]k_2+\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]k_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\gamma\lambda}{p}\right]k_\lambda+d\gamma=0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\\ &\left[\frac{\lambda\alpha}{p}\right]k_1+\left[\frac{\lambda\beta}{p}\right]k_2+\left[\frac{\lambda\gamma}{p}\right]k_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\lambda}{p}\right]k_\lambda+d_\lambda=0. \end{aligned}\right\}(39)$$

上式中

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]&=\frac{\alpha_1\alpha_1}{p_1}+\frac{\alpha_2\alpha_2}{p_2}+\frac{\alpha_3\alpha_3}{p_3}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_n\alpha_n}{p_n}\\ \left[\frac{\beta\alpha}{p}\right]=\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]&=\frac{\alpha_1\beta_1}{p_1}+\frac{\alpha_2\beta_2}{p_2}+\frac{\alpha_3\beta_3}{p_3}+\cdots\cdots+\frac{\alpha_n\beta_n}{p_n}\\ \cdots\cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left[\frac{\lambda\lambda}{p}\right]&=\frac{\lambda_1\lambda_1}{p_1}+\frac{\lambda_2\lambda_2}{p_2}+\frac{\lambda_3\lambda_3}{p_3}+\cdots\cdots+\frac{\lambda_n\lambda_n}{p_n}\end{aligned}\right\}(E)$$

今(39)含λ個不定係數,共λ個方程,曰不定係數之法方程.不定係數既已求得,代入(38),卽得改正值,因得最或是值.

62. **不定係數之檢點式.** 以$k_1,k_2,k_3,\cdots\cdots k_\lambda$順次乘$(B)$之各項而相加,得

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha_1k_1+\beta_1k_2+\gamma_1k_3+\cdots\cdots+\lambda_1k_\lambda)v_1\\ &+(\alpha_2k_1+\beta_2k_2+\gamma_2k_3+\cdots\cdots+\lambda_2k_\lambda)v_2\\ &+(\alpha_3k_1+\beta_3k_2+\gamma_3k_3+\cdots\cdots+\lambda_3k_\lambda)v_3\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+(\alpha_nk_1+\beta_nk_2+\gamma_nk_3+\cdots\cdots+\lambda_nk_\lambda)v_n\\ &=k_1d\alpha+k_2d\beta+k_3d\gamma+\cdots\cdots+k_\lambda d\lambda.\end{aligned}\right\}$$

但由 $\frac{\delta Q}{\delta v_1}=0,\frac{\delta Q}{\delta v_2}=0,\frac{\delta Q}{\delta v_3}=0,\cdots\cdots\frac{\delta Q}{\delta v_n}=0$, 得

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1k_1+\beta_1k_2+\gamma_1k_3+\cdots\cdots+\lambda_1k_\lambda&=p_1v_1,\\ \alpha_2k_1+\beta_2k_2+\gamma_2k_3+\cdots\cdots+\lambda_2k_\lambda&=p_2v_2,\\ \alpha_3k_1+\beta_3k_2+\gamma_3k_3+\cdots\cdots+\lambda_3k_\lambda&=p_3v_3,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&=\cdots\cdots\\ \alpha_nk_1+\beta_nk_2+\gamma_nk_3+\cdots\cdots+\gamma_nk_\lambda&=p_nv_n.\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad \Sigma pv^2+[kd]=0.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

上式中 $$\Sigma kd=k_1d_\alpha+k_2d_\beta+k_3d_\gamma+\cdots\cdots+k_\lambda d_\lambda.$$

(40) 爲 p, v, k, d 之關係,備以檢點計算是否有誤,雖其手續較難,然不可忽略不顧.

(例一) 求 (60節) 之三角形各角之最或是值.

有三舛差方程

$$z_1=M_1+v_1 \text{ 帶權 } p_1,$$

$$z_2=M_2+v_2 \text{ 帶權 } p_2,$$

$$z_3=M_3+v_3 \text{ 帶權 } p_3.$$

一規約方程

$$z_1+z_2+z_3=\pi,$$

或 $$v_1+v_2+v_3+d=0,$$

上式中 $$d\ =M_1+M_2+M_3-\pi,$$

故由 (39),得不定係數之法方程

$$\left[\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right]k_1+d=0,$$

$$\therefore\quad k_1=-\frac{d}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}}$$

代入 (38),得

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{p_1}k_1 = -\frac{\dfrac{d}{p_1}}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}}, \\ v_2 &= \frac{1}{p_2}k_1 = -\frac{\dfrac{d}{p_2}}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}}, \\ v_3 &= \frac{1}{p_3}k_1 = -\frac{\dfrac{d}{p_3}}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}}, \end{aligned}\right\}$$

又
$$\Sigma pv^2 = \frac{1}{\left[\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}\right]^2}\left(p_1\left[\frac{d}{p_1}\right]^2 + p^2\left[\frac{d}{p_2}\right]^2 + p_3\left[\frac{d}{p_3}\right]^2\right)$$

$$= \frac{d^2}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}}.$$

及
$$kd = k_1 d = -\frac{d^2}{\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3}}$$

$$\therefore\quad \Sigma pv^2 + [kd] = 0.$$

(例二)設有五量之觀測值,及其權如下:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= M_1 = 2.02 \text{ 帶權 } 3, \\ z_2 &= M_2 = 4.13 \text{ 帶權 } 2, \\ z_3 &= M_3 = 2.52 \text{ 帶權 } 5, \\ z_4 &= M_4 = 2.67 \text{ 帶權 } 7, \\ z_5 &= M_5 = 2.84 \text{ 帶權 } 4, \end{aligned}\right\}$$

並須符合下列規約方程

$$\left.\begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4+z_5=14.0, \\ z_2 \quad -z_4 \quad = \ 1.5. \end{array}\right\}$$

求各量之最或是値.

設 $z_1=M_1+v_1,\quad z_2=M_2+v_2,\quad z_3=M_3+v_3,$

$z_4=M_4+v_4,\quad z_5=M_5+v_5.$

則得 v 之規約方程

$$\left.\begin{array}{l} v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+0.18=0, \\ v_2 \quad - \quad v_4 \quad -0.04=0. \end{array}\right\}$$

表解之如下:

規約方程

	p	a	b	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{bb}{p}$
v_1	3	1	0	$\frac{1}{3}$	0	0
v_2	2	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
v_3	5	1	0	$\frac{1}{5}$	0	0
v_4	7	1	-1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
v_5	4	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0
				$\frac{599}{420}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{9}{14}$

代入 (39), 得不定係數之法方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{599}{420}k_1+\frac{5}{14}k_2+0.18=0,\\ \frac{5}{14}k_1+\frac{9}{14}k_2-0.04=0.\end{aligned}\right\}$$

解之,得

$$k_1=-0.1647,$$
$$k_2=\quad 0.1537.$$

∴　由 (38),

$$\left.\begin{aligned}v_1&=\frac{1}{3}k_1+\frac{0}{3}k_2=-0.0549,\\ v_2&=\frac{1}{2}k_1+\frac{1}{2}k_2=-0.0055,\\ v_3&=\frac{1}{5}k_2\quad\frac{0}{5}k_2=-0.0329,\\ v_4&=\frac{1}{7}k_1-\frac{1}{7}k_2=-0.0455,\\ v_5&=\frac{1}{4}k_1+\frac{0}{4}k_2=-0.0412.\end{aligned}\right\}$$

∴　$z_1=1.9651$

$z_2=4.1245$

$z_3=2.4871$

$z_4=2.6245$

$z_5=\dfrac{2.7988}{14.0000}$ 檢點.

習　題　四

1. 欲定三種物體之重量 z_1, z_2, z_3, 而無標準外差之法碼,則置各物於天

平之二盤而稱之,得以下各結果

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= s_2+1.7\text{ 公釐} \\ s_3 &= 3.4\text{ 公釐} \\ s_2+s_3 &= s_1+1.0\text{ 公釐} \\ s_2 &= s_3+3.0\text{ 公釐} \end{aligned}\right\}$$

求三物體之最或是重量.

答: $s_1=7.1$ 公釐,
$s_2=5.5$ 公釐,
$s_3=2.5$ 公釐.

2 若上題觀測方程帶權4, 9, 1, 4, 求三物體重量之最或是值.

答: $s_1=7.07$ 公釐,
$s_2=5.42$ 公釐,
$s_3=2.42$ 公釐.

3. 觀測四邊形$ABCD$之四角,其觀測值及其權如下:

$$\left.\begin{aligned} A &= 101°13'22'' \text{ 帶權 } 3, \\ B &= 93\ 49\ 17 \text{ 帶權 } 2, \\ C &= 87\ 05\ 39 \text{ 帶權 } 2, \\ D &= 77\ 52\ 40 \text{ 帶權 } 1. \end{aligned}\right\}$$

求四角之最或是值.

$$\text{答: }\left.\begin{aligned} A &= 101°13'13''.71 \\ B &= 93\ 49\ 04\ .57 \\ C &= 87\ 05\ 26\ .57 \\ D &= 77\ 62\ 15\ .15 \end{aligned}\right\}$$

4. 美國測量經度,得每兩城時間之差如下:

(1) Cambridge 與 Washington 間……$23^m41^s.041$ 帶權 30.

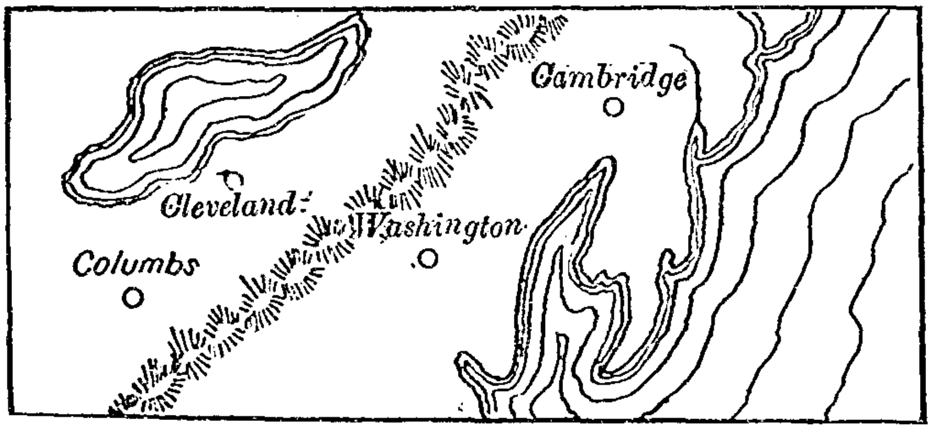
(2) Cambridge 與 Cleveland 間……$42^m14^s.875$ 帶權 7.

(3) Cambridge 與 Columbus 間……$47^m27^s.703$ 帶權 8.

(4) Washington 與 Columbus 間……$23^m46^s.816$ 帶權 7.

(5) Cleveland 與 Columbus 間…… $5^m12.929$ 帶權 5.

已知 Washington 之經度 $=5^h8^m12^s.15$, 求最或是時間差,並求各城之經度.



(圖 21)

(注意) 本題用規約觀測計算較易.

觀測值中 h 代時, m 代分, s 代秒.

經差 $1^\circ=$ 時差 4^m. 時差 1^h 經差 $=15^\circ$.

答: Cambridge 之經度 $=4^h44^m31^s.125=71^\circ\,7'46''.872$.

Cleveland 之經度 $=5^h26^m45^s.987=81^\circ41'29''.806$.

Columbus 之經度 $=5^h31^m58^s.898=82^\circ59'43''.473$.

第五章

舛差之推移

63. 凡直接觀測,其或是舛差,由(17),(18),(20),(21)四式,已可直接求得.而間接觀測,必先求各量之權.然後各觀測值之或是舛差及最或是值之或是舛差,方可因而求之.

64. 二量和差之或是舛差. 設二量 z_1, z_2 之或是舛差爲 v_1, v_2. $z_1 \pm z_2$ 之或是舛差爲 R.

又設 $Z = z_1 \pm z_2$,

$x_1', x_1'', x_1''', \cdots\cdots$ 爲組成 z_1 之原子誤差,

$x_2', x_2'', x_2''', \cdots\cdots$ 爲組成 z_2 之原子誤差,

$X', X'', X''', \cdots\cdots$ 爲組成 X 之原子誤差,

則 $X' = x_1' \pm x_2', X'' = x_1'' \pm x_2'', X''' = x_1''' \pm x_2''', \cdots\cdots$

平方之,

$$(X')^2 = (x_1')^2 + (x_2')^2 \pm 2x_1'x_2',$$

$$(X'')^2 = (x_1'')^2 + (x_2'')^2 \pm 2x_1''x_2'',$$

$$(X''')^2 = (x_1''')^2 + (x_2''') \pm 2x_1'''x_2''',$$

$$\cdots\cdots = \cdots\cdots\cdots\cdots.$$

相加,得

$$\Sigma X^2 = \Sigma x_1^2 + \Sigma x_2^2 \pm 2\Sigma x_1 x_2.$$

x_1', x_2' 兩原子誤差,加入 X' 之機會有正有負.且 Σx_1x_2 之各項,成正負之機會殆相同.

$$\therefore \quad \Sigma x_1x_2=0.$$

因之 $$\Sigma X^2=\Sigma x_1{}^2+\Sigma x_2{}^2.$$

若 n 爲觀測次數,則

$$\frac{\Sigma X^2}{n}=\frac{\Sigma x_1{}^2}{n}+\frac{\Sigma x_2{}^2}{n}.$$

但由 (43 節), $(0.6745)^2\dfrac{\Sigma X^2}{n}=R^2$,

$$(0.6745)^2\frac{\Sigma x_1{}^2}{n}=r_1{}^2(0.6745)^2\frac{\Sigma x_2{}^2}{n}=r_2{}^2.$$

$$\therefore \quad R^2=r_1{}^2+r_2{}^2.$$

同理,若 $$Z=z_1\pm z_2\pm z_3\pm\cdots\cdots\pm z_n.$$

則 $$R^2=r_1{}^2+r_2{}^2+r_3{}^2+\cdots\cdots+r_n{}^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

(例一) 測量 A, B, C 三城之經度, G 爲英國 (Gieenwich) 天文臺(卽世界經度之起點),得

(1) A 在 G 西, $5^h44^m30^s.99\pm0^s.22$.

(2) B 在 A 西, $1^h39^m15^s 04\pm0^s.06$.

(3) C 在 B 東, $25^m8^s69\pm.0^s.11$.

求 C 城之經度 (h 代時, m 代分, s 代秒)

由 (41), $$R=\sqrt{(0.23)^2+(0.06)^2+(0.11)^2}=0^s.26.$$

$$GA+AB-BC=5^h58^m37^s34.$$

$$\therefore \quad C\text{ 之經度}=5^h58^m37^s.34\pm0^s.26.$$

65. 一量 A 倍之或是舛差. 用上節符號,並同一理論.

設 $$Z=Az_1,$$

則 $$X'=Ax_1',$$

平方之, $$(X')^2=(Ax_1')^2=A^2(x_1')^2,$$

$$\therefore\quad \frac{\Sigma X^2}{n}=A^2\frac{\Sigma x^2}{n}.$$

即 $$R^2=A^2r^2 \quad\cdots\cdots(42)$$

合併 (41),(42) 兩式,若

$$Z=A_1z_1\pm A_2z_2\pm A_3z_3\pm\cdots\cdots+A_nz_n^2,$$

則 $$R^2=A_1^2z_1^2+A_2^2z_2^2+A_3^2z_3^2+\cdots\cdots+A_n^2z_n^2\quad\cdots\cdots(43)$$

(例一) 求算術均數之或是舛差.

$$z=\frac{\Sigma M}{n}=\frac{1}{n}M_1+\frac{1}{n}M_2+\frac{1}{n}M_3+\cdots\cdots+\frac{1}{n}M_n.$$

因 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 同權,設 r 爲其共同或是舛差,卽單位權之或是舛差. r_0 爲 z 之或是舛差.

故由 (43), $$r_0^2=\left[\frac{1}{n}\right]^2r^2+\left[\frac{1}{n}\right]^2r^2+\left[\frac{1}{n}\right]^2r^2+\cdots\cdots \text{至 } n \text{ 項}.$$

$$=n\left[\frac{1}{n}\right]^2r^2$$

$$=\frac{r^2}{n}.$$

$$\therefore\quad r_0=\frac{r}{\sqrt{n}}.\quad\cdots\cdots(16)$$

(例二) 求觭權均數之或是舛差.

$$z=\frac{\Sigma pM}{\Sigma p}=\frac{p_1}{\Sigma p}M_1+\frac{p_2}{\Sigma p}M_2+\frac{p_3}{\Sigma p}M_3+\cdots\cdots+\frac{p_n}{\Sigma p}M_n.$$

設　　　$r_1, r_2, r_3\cdots\cdots r_n$

爲　　　$M_1, M_2, M_3,\cdots\cdots M_n$ 之或是舛差.

r 爲單位權之或是舛差,

r_0 爲舫權均數之或是舛差.

則由 (16), $r_1=\frac{r}{\sqrt{p_1}}$, $r_2=\frac{r}{\sqrt{p_2}}$, $\cdots\cdots r_n=\frac{r}{\sqrt{p_n}}$.

$$\begin{aligned} r_0^2 &= \left[\frac{p_1}{\Sigma p}\right]^2 r_1^2+\left[\frac{p_2}{\Sigma p}\right]^2 r_2^2+\left[\frac{p_3}{\Sigma p}\right]^2 r_3^2+\cdots\cdots+\left[\frac{p_n}{\Sigma p}\right]^2 r_n^2 \\ &= \left[\frac{p_1}{\Sigma p}\right]^2 \frac{r^2}{p_1}+\left[\frac{p_2}{\Sigma p}\right]^2 \frac{r^2}{p_2}+\left[\frac{p_3}{\Sigma p}\right]^2 \frac{r^2}{p_3}+\cdots\cdots+\left[\frac{p_n}{\Sigma p}\right]^2 \frac{r^2}{p_n} \\ &= \frac{r^2}{\Sigma q}. \end{aligned}$$

$$\therefore\quad r_0=\frac{r}{\sqrt{\Sigma p}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

(例三) 温度在 $20^\circ C$ 時,一金屬尺之長爲

$$75\overset{\text{吋}}{.}0041\pm0\overset{\text{吋}}{.}0037.$$

其每 $1^\circ C$ 之膨脹率爲

$$0\overset{\text{吋}}{.}0036\pm0\overset{\text{吋}}{.}0018.$$

求温度在 $56^\circ F$ 時,金屬尺之長.

$$20^\circ C=\frac{9}{5}\times20+30=68^\circ F.$$

由 (42), 每 $1^\circ F$ 之膨脹率

$$=\frac{5}{9}\times 0.0036\pm\frac{5}{9}\times 0.0018.$$

$$=\overset{\text{吋}}{0.002}\pm\overset{\text{吋}}{0.001}.$$

∴ 尺之最或是長度

$$=75.0041+(56-68)\times 0.002$$

$$=\overset{\text{吋}}{74.9801}.$$

由 (43), $$R=\sqrt{1^2\times(0.0037)^2+(56-68)^2\times(0.001)^2}$$

$$=\overset{\text{吋}}{0.013}.$$

∴ 尺之長 $=\overset{\text{吋}}{74.9801}\pm\overset{\text{吋}}{0.013}.$

66. 二量乘積之或是誤差. 用(64節)各符號,

設 $$Z=z_1z_2$$

又設 X',x_1',x_2', 爲 Z,z_1,z_2 之原子誤差.

則 $$Z+X'=(z_1+x_1')(z_2+x_2')$$

$$=z_1z_2+z_1x_2'+z_2x_1'+x_1'x_2,$$

或 $$X'=z_1x_2'+z_2x_1'+x_1'x_2'.$$

$x_1'x_2'$ 比較 $z_1x_2'+z_2x_1'$ 爲極小,因之不足輕重.

$$\therefore\quad X'=z_1x_2'+z_2x_1' \text{ 近似.}$$

平方之, $$X'^2=z_1^2x_2'^2+z_2^2x_1'^2+2z_1z_2x_1'x_2'.$$

同理, $$X''^2=z_1^2x_2''^2+z_2^2x_1''^2+2z_1z_2x_1''x_2''.$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\therefore\quad \Sigma X^2=z_1^2\Sigma x_2^2+z_2^2\Sigma x_1^2+2z_1z_2\Sigma x_1x_2.$$

但 $\Sigma x_1 x_2$ 各項有正有負.

$\therefore\ \Sigma x_1 x_2 = 0$. 近似.

因之, $$R^2 = z_2^2 r_1^2 + z_1^2 r_2^2 \qquad\qquad (44)$$

(例一) 一矩形之

$$長 = 1000^{尺} \pm 0.012^{尺},$$

$$寬 = 100^{尺} \pm 0.002^{尺},$$

求面積.

由 (44), $$R = \sqrt{(1000 \times 0.002)^2 + (100 \times 0.012)^2}$$

$$= 2.33 \text{ 方尺}.$$

$$\therefore\ 面積 = 1000 \times 100 \pm 2.33$$

$$= 100{,}000 \text{ 方尺} \pm 2.33 \text{ 方尺}.$$

67. 多量函數之或是幷差. 設有 n 量

$$z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_n,$$

其函數爲

$$Z = f(z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_n).$$

又設 $X' x_1', x_2', x_3', \cdots\cdots x_n'$ 各爲

$Z, z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_n$ 之一原子誤差,

則 $$Z + X' = f(z_1 + x_1', z_2 + x_2', z_3 + x_3', \cdots\cdots z_n + x_n').$$

展開之, 得

$$X' = \frac{\delta Z}{\delta z_1} x_1' + \frac{\delta Z}{\delta z_2} x_2' + \frac{\delta Z}{\delta z_3} x_3' + \cdots\cdots + \frac{\delta Z}{\delta z_n} x_n'.$$

$$+ (x_1', x_2', \cdots\cdots \text{之高次項,可棄去})$$

平方之,得

$$X_2'^2=\left[\frac{\delta Z}{\delta z_1}x_1'\right]^2+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_2}x_2'\right]^2+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_3}x_3'\right]^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_n}x_n'\right]^2+2\left[\frac{\delta Z}{\delta z_1}\frac{\delta Z}{\delta z_2}x_1'x_2'+\frac{\delta Z}{\delta z_1}\frac{\delta Z}{\delta z_2}x_1'x_3'+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\frac{\delta Z}{\delta z_{n-1}}\frac{\delta Z}{\delta z_n}x'_{n-1}x'_n\right].$$

$$\therefore\quad \Sigma X^2=\left[\frac{\delta Z}{\delta z_1}\right]^2\Sigma x_1^2+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_2}\right]^2\Sigma x_2^2+\cdots\cdots+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_n}\right]^2\Sigma x_n^2+$$

(各項其和近於0).

$$\therefore\quad R_2=\left[\frac{\delta Z}{\delta z_1}\right]^2 r_1^2+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_2}\right]^2 r_2^2+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_3}\right]^2 r_3^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\left[\frac{\delta Z}{\delta z_n}\right]^2 r_n^2.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

上式中　$R, r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots r_n$ 各爲

$Z, z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_n$ 之或是舛差.

(例一) 直角三角形之高與底之値爲

$a=49.53\pm0.59,$

$b=50.38\pm0.93,$

求斜邊 c 之最或是値及其或是舛差.

今　$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(49.53)^2+(50.38)^2}=70.65.$

$$\frac{\delta c}{\delta a}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \frac{\delta c}{\delta b}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

又　$r_a=0.59,\qquad r_b=0.93.$

$$\therefore \quad r_c^2=\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 r_a^2+\left[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^2 r_b^2$$

$$=\left[\frac{49.53}{70.65}\right]^2(0.59)^2+\left[\frac{50.38}{70.65}\right]^2(0.93)^2.$$

卽 $\qquad r_c=0.78.$

$$\therefore \quad c=70.65\pm0.78.$$

(例二) 若r若爲z之或是舛差,求$\log_{10}z$之或是舛差.

設 $\qquad Z=\log_{10}z$,其或是舛差爲R.

則 $$\frac{dZ}{dz}=\frac{1}{z}\log_{10}e$$

$$\therefore \quad R^2=\left[\frac{dZ}{dz}\right]^2 r^2=\left[\frac{1}{z}\log_{10}e\right]^2 r^2.$$

卽 $$R=\frac{r}{z}\log_{10}e.$$

(例三) 若p爲z之權,求$\sin z$之權p_1.

設 $$Z=\sin z,$$

則 $$\frac{dZ}{dz}=\cos z.$$

又設 r, R各爲z, Z之或是舛差.

則由(45), $$R^2=\left[\frac{dZ}{dz}\right]^2 r^2=\cos^2 z\cdot r^2.$$

但由(15), $$\frac{p_1}{p}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{r^2}{r^2\cos^2 z}=\sec^2 z.$$

$$\therefore \quad p_1=p\sec^2 z.$$

(例四)三角形兩邊及夾角之值爲

$$a = \overset{\text{呎}}{536.5} \pm \overset{\text{呎}}{0.6}$$

$$b = \overset{\text{呎}}{177.5} \pm \overset{\text{呎}}{0.5}$$

$$C = 38°47' \pm 1'$$

求面積之最或是值及其或是舛差.

設 Δ 爲三角形之面積.

則 $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C = 63804.69$ 方呎.

今 $\frac{\delta\Delta}{\delta a} = \frac{1}{2} b \sin C,\ \frac{\delta\Delta}{\delta b} = \frac{1}{2} a \sin C,\ \frac{\delta\Delta}{\delta c} = \frac{1}{2} ab \cos C.$

$$\therefore\quad R^2 = \left(\frac{1}{2} b \sin C\right)^2 (0.6)^2 + \left(\frac{1}{2} a \sin C\right)^2 (0.5)^2$$

$$+ \left(\frac{1}{2} ab \cos C\right)^2 \left[\frac{\pi}{180 \times 60}\right]^2$$

即 $R = \frac{1}{2} \sin C \sqrt{(0.6\, b)^2 + (0.5a)^2 + \left[\frac{\pi ab}{180 \times 60} \cot C\right]^2}$

$= 123.01$ 方呎.

$\therefore\quad \Delta = 63804.69 \pm 123.01$ 方呎.

68. 間接觀測權與或是舛差之關係. 由(35), (38), (39), 已可求得間接觀測之最或是值,今求各最或是值之或是舛差及各觀測值之或是舛差.

設 $r =$ 單位權之或是舛差.

又設 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q$ 之或是舛差爲

$$r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots r_q$$

及其權爲 $p_{z_1}, p_{z_2}, p_{z_3}, \cdots\cdots p_{z_q}$.

又設 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 之或是舛差爲

$$r_{M_1}, r_{M_2}, r_{M_3}, \cdots\cdots r_{M_q}$$

及其權爲 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots p_n$.

則由(15), $p_{z_1} : 1 : : \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r^2}$ 及 $p_1 : 1 : : \frac{1}{r^2_{M_1}} : \frac{1}{r^2}$.

$$\therefore \quad r_1 = \frac{r}{\sqrt{p_{z_1}}} \text{ 及 } r_{M_1} = \frac{r}{\sqrt{p_1}}. \qquad \cdots\cdots(46)$$

69. 間接獨立觀測之權. 設有觀測方程

$$\left.\begin{array}{l}
a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 + \cdots\cdots + q_1z_q = M_1 \text{ 帶權 } p_1, \\
a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 + \cdots\cdots + q_2z_q = M_2 \text{ 帶權 } p_2, \\
a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 + \cdots\cdots + q_3z_q = M_3 \text{ 帶權 } p_3, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots \text{ 帶權 } \cdots \\
a_nz_1 + b_nz_2 + c_nz_3 + \cdots\cdots + q_nz_q = M_n \text{ 帶權 } p_n.
\end{array}\right\} \cdots\cdots(33)$$

其法方程爲

$$\left.\begin{array}{l}
[paa]z_1 + [pab]z_2 + [pac]z_3 + \cdots\cdots + [paq]z_q = [paM], \\
[pba]z_1 + [pbb]z_2 + [pbc]z_3 + \cdots\cdots + [pbq]z_q = [pbM], \\
[pca]z_1 + [pcb]z_2 + [pcc]z_3 + \cdots\cdots + [pcq]z_q = [pcM], \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots\cdots \\
[pqa]z_1 + [pqb]z_2 + [pqc]z_3 + \cdots\cdots + [pqq]z_q = [pqM],
\end{array}\right\} (35)$$

今以不定係數 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots\cdots Q_q$ 順次乘(35)各式,而按 z 集列之,得

$$\left.\begin{aligned}
&z_1(Q_1[paa]+Q_2[pab]+Q_3[pac]+\cdots\cdots+Q_q[paq])\\
&+z_2(Q_2[pba]+Q_2[pbb]+Q_3[pbc]+\cdots\cdots+Q_q[pbq])\\
&+z_3(Q\ \ [pca]+Q_2[pcb]+Q_3[pcc]+\cdots\cdots+Q_q[pcq])\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+z_q(Q_1[pqa]+Qq_2[pb]+Qq_3[pqc]+\cdots+Qq_q[pq])\\
&=Q_1[paM]+Q_2[pbM]+Q_8[pcM]+\cdots+Q_q[pqM].
\end{aligned}\right\}(A)$$

如求 z_1 之值,可令 z_1 之係數爲 $1.z_2, z_3,\cdots\cdots z_q$ 之係數爲 0,則得

$$z_1=Q_1[paM]+Q_2[pbM]+Q_3[pcM]+\cdots+Q_r[prM].\cdots(B)$$

$$\text{及}\left.\begin{aligned}
&Q_1[paa]+Q_2[pab]+Q_3[pac]+\cdots\cdots+Q_q[paq]=1,\\
&Q_1[pba]+Q_2[pbb]+Q_3[pbc]+\cdots\cdots+Q_q[pbq]=0,\\
&Q_1[pca]+Q_2[pcb]+Q_3[pcc]+\cdots\cdots+Q_q[pcq]=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=0,\\
&Q_1[pqa]+Q_2[pqb]+Q_3[pqc]+\cdots\cdots+Q_q[pqq]=0.
\end{aligned}\right\}(C)$$

(C) 含 q 個方程,可用以求 $Q_1, Q_2, Q_3,\cdots\cdots Q_q$ 之值.代入 (B),卽得 z_1 之值.

今設 z_1 之權爲 pz_1. 求證 $\dfrac{1}{pz_1}=Q_1$.

展開 (B),得

$$\left.\begin{aligned}
z_1=&Q_1(p_1a_1M_1+p_2a_2M_2+p_3a_3M_3+\cdots\cdots+p_na_nM_n),\\
&+Q_2(p_1b_1M_1+p_2b_2M_2+p_3b_3M_3+\cdots\cdots+p_nb_nM_n),\\
&+Q_3(p_1c_1M_1+p_2b_2M_2+p_3c_3M_3+\cdots\cdots+p_nc_nM_n),\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
&+Q_q(p_1q_1M_1+p_2q_2M_2+p_3q_3M_3+\cdots\cdots+p_nq_nM_n).
\end{aligned}\right\}(D)$$

按 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 彙列之，得

$$\left.\begin{aligned}
z_1 = M_1p_1(a_1Q_1 + b_1Q_2 + c_1Q_3 + \cdots\cdots + q_1Q_q)\\
+ M_2p_2(a_2Q_1 + b_2Q_2 + c_2Q_3 + \cdots\cdots + q_2Q_q),\\
+ M_3p_3(a_3Q_1 + b_3Q_2 + c_3Q_3 + \cdots\cdots + q_3Q_q),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
+ M_np_n(a_nQ_1 + b_nQ_2 + c_nQ_3 + \cdots\cdots + q_nQ_q).
\end{aligned}\right\}(E)$$

又設
$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= p_1(a_1Q_1 + b_1Q_2 + c_1Q_3 + \cdots\cdots + q_1Q_q),\\
\alpha_2 &= p_2(a_2Q_1 + b_2Q_2 + c_2Q_3 + \cdots\cdots + q_2Q_q),\\
\alpha_3 &= p_3(a_3Q_1 + b_3Q_2 + c_3Q_3 + \cdots\cdots + q_3Q_q),\\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\alpha_n &= p_n(a_nQ_1 + b_nQ_2 + c_nQ_3 + \cdots\cdots + q_nQ_q).
\end{aligned}\right\}(F)$$

則 (E) 變為

$$z_1 = \alpha_1M_1 + \alpha_2M_2 + \alpha_3M_3 + \cdots\cdots + \alpha_nM_n \cdots (G)$$

以 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$ 順次乘 (F) 各式而相加，得

$$[a\alpha] = Q_1[paa] + Q_2[pab] + Q_3[pac] + \cdots\cdots + Q_q[paq] = 1.$$

以 $b_1, b_2, b_3 \cdots\cdots b_n$ 順次乘 (F) 各項，由 (C) 之第二式得

$$[b\alpha] = Q_1[pba] + Q_2[pbb] + Q_3[pbc] + \cdots\cdots + Q_q[pbq] = 0$$

同理，$[c\alpha] = 0 \quad [d\alpha] = 0, \cdots\cdots [q\alpha] = 0$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned}
[a\alpha] &= 1,\\
[b\alpha] &= 0,\\
[c\alpha] &= 0,\\
\cdots\cdots &= 0,\\
[q\alpha] &= 0.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(H)$$

以 $\frac{a_1}{p_1}, \frac{a_2}{p_2}, \frac{a_3}{p_3} \cdots\cdots \frac{a_n}{p_n}$ 順次乘 (F) 各式，由 (H) 得

$$\left[\frac{aa}{p}\right] = Q_1[aa] + Q_2[ba] + Q_3[ca] + \cdots\cdots Q_q[qa]$$

$$= Q_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (I)$$

設　　$r=$ 單位權之或是舛差.

$r_{z_1} = z_1$ 之或是舛差，$r_{M_1} = M_1$ 之或是舛差.

$p_{z_1} = z_1$ 之權.

則就 (G) 言之，

$$r^2{}_{z_1} = a_1{}^2 r^2{}_{M_1} + a_2{}^2 r^2{}_{M_2} + a_3 r^2{}_{M_3} + \cdots\cdots + a_n{}^2 r^2{}_{M_n} \cdots\cdots\cdots (J)$$

但　　$r^2{}_{z_1} = \frac{r^2}{p_{z_1}},\ r^2{}_{M_1} = \frac{r^2}{p_1},\ r^2{}_{M_2} = \frac{r^2}{p_2},\ \cdots\cdots r^2{}_{M_n} = \frac{r^2}{p_n}.$

代入 (J) 得

$$\frac{1}{p_{z_1}} = \frac{a_1{}^2}{p_1} + \frac{a_2{}^2}{p_2} + \frac{a_3{}^2}{p_3} + \cdots\cdots + \frac{a_n{}^2}{p_n} = \left[\frac{aa}{p}\right]. \cdots\cdots\cdots (K)$$

由 (I) 與 (K)，得

$$\frac{1}{p_{z_1}} = Q_1. \cdots\cdots\cdots\cdots (L)$$

70　求權之實用法　設上節法方程 (35) 之右邊

$$[paM] = A,\ [pbM] = B,\ [pcM] = C,\ [pqM] = Q$$

則得

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]z_1 + [pab]z_2 + [pac]z_3 + \cdots\cdots + [paq]z_q = A,\\
&[pba]z_1 + [pbb]z_2 + [pbc]z_3 + \cdots\cdots + [pbq]z_q = B,\\
&[pca]z_1 + [pcb]z_2 + [pcc]z_3 + \cdots\cdots + [pcq]z_q = C,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = \cdots,\\
&[pqa]z_1 + [pqb]z_2 + [pqc]z_3 + \cdots\cdots + [pqq]z_q = Q.
\end{aligned}\right\}\cdots(35)$$

因之於(B)之Q加以記號$(')$,得

同理
$$\left.\begin{aligned}
z_1&=Q_1'\ A+Q_2'\ B+Q_3'\ C+\cdots\cdots+Q_q'\ Q.\\
z_2&=Q_1''\ A+Q_2''\ B+Q_3''\ C+\cdots\cdots+Q_q''\ Q,\\
z_3&=Q_1'''\ A+Q_2'''\ B+Q_3'''\ C+\cdots\cdots+Q_q'''\ Q,\\
\cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
z_q&=Q_1^{(q)}A+Q_2^{(q)}B+Q_3^{(q)}C+\cdots\cdots+Q_q^{(q)}\ Q.
\end{aligned}\right\}(M)$$

由(L),既知$\dfrac{1}{pz_1}=Q_1'$,則依同理,

$$\frac{1}{pz_2}=Q_2'',\cdots\cdots\frac{1}{pz_q}=Q_q^{(q)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(N)$$

若按定列式解(31),而設

$$\Delta=\begin{vmatrix}
[paa], [pab], [pac] & \cdots\cdots[paq],\\
[pba], [pbb], [pbc], & \cdots\cdots[pbq],\\
[pca], [pcb], [pcc], & \cdots\cdots[pcq]\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots,\\
[pqa], [pqb], [pqc]. & \cdots\cdots[pqq]
\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{[paa]}=\begin{vmatrix}
[pbb], [pbc], & \cdots\cdots\cdots\cdots[pbq],\\
[pcb], [pcc], & \cdots\cdots\cdots\cdots[pcq],\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots,\\
[pqb]\ [pqc], & \cdots\cdots\cdots\cdots[pqq],
\end{vmatrix},$$

$$\Delta_{[pbb]}=\begin{vmatrix}[paa], [pac], \cdots\cdots\cdots\cdots[paq],\\ [pba], [pbc], \cdots\cdots\cdots\cdots[pbq],\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\ [pqa], [pqc], \cdots\cdots\cdots\cdots[pqq],\end{vmatrix},$$

$$\cdots\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

則

$$\left.\begin{aligned}z_1&=\frac{\Delta[paa]}{\Delta}A+\frac{\Delta[pba]}{\Delta}B+\frac{\Delta[pca]}{\Delta}C+\cdots\cdots+\frac{\Delta[pqa]}{\Delta}Q,\\ z_2&=\frac{\Delta[pab]}{\Delta}A+\frac{\Delta[pbb]}{\Delta}B+\frac{\Delta[pcb]}{\Delta}C+\cdots\cdots+\frac{\Delta[pqb]}{\Delta}Q,\\ z_3&=\frac{\Delta[pac]}{\Delta}A+\frac{\Delta[pcb]}{\Delta}B+\frac{\Delta[pcc]}{\Delta}C+\cdots\cdots+\frac{\Delta[pqc]}{\Delta}Q,\\ \cdots&=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ z_q&=\frac{\Delta[paq]}{\Delta}A+\frac{\Delta[pbq]}{\Delta}B+\frac{\Delta[pcq]}{\Delta}C+\cdots\cdots+\frac{\Delta[pqq]}{\Delta}Q.\end{aligned}\right\}\quad(O)$$

比較(M),(O)兩式 $A, B, C,\cdots\cdots,Q$ 之係數,得

$$\frac{1}{pz_1}=Q_1'=\frac{\Delta[paa]}{\Delta},\ \frac{1}{pz_2}=Q_2''=\frac{\Delta[pbb]}{\Delta},\cdots\cdots\frac{1}{pzq}=Qq^{(q)}=\frac{\Delta[pqq]}{\Delta}.$$

$$\therefore\quad \left.\begin{aligned}p_{z_1}&=\frac{\Delta}{\Delta[paa]},\\ p_{z_2}&=\frac{\Delta}{\Delta[pbb]},\\ p_{z_3}&=\frac{\Delta}{\Delta[pcc]},\\ \cdots&=\cdots\cdots,\\ p_{z_q}&=\frac{\Delta}{\Delta[pqq]}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

(例一)有法方程

$$\left.\begin{aligned} 3z_1-\ z_2-\ z_3&=A,\\ -z_1+3z_2-\ z_3&=B,\\ -z_1-\ z_2+2z_3&=C.\end{aligned}\right\}$$

求 z_1, z_2, z_3 之權.

令
$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=8,$$

$$\Delta[paa]=\begin{vmatrix} 3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=5,$$

$$\Delta[pbb]=\begin{vmatrix} 3, & -1\\ -1, & 2\end{vmatrix}=5,$$

$$\Delta[pcc]=\begin{vmatrix} 3, & -1\\ -1, & 3\end{vmatrix}=8.$$

$$\therefore\quad\left\{\begin{aligned} p_{z_1}&=\frac{\Delta}{\Delta[paa]}=\frac{8}{5},\\ p_{z_2}&=\frac{\Delta}{\Delta[pbb]}=\frac{8}{5},\\ p_{z_3}&=\frac{\Delta}{\Delta[pcc]}=\frac{8}{8}=1.\end{aligned}\right.$$

(例二)有觀測方程

$$\left.\begin{aligned} x&=0 \text{ 帶權 } 4,\\ y&=0 \text{ 帶權 } 6,\\ z&=0 \text{ 帶權 } 6,\\ x-y+10&=0 \text{ 帶權 } 4,\\ y+z+20&=0 \text{ 帶權 } 6,\end{aligned}\right\}$$

求 x, y, z 之權.

由(35), 求得法方程

$$\left.\begin{aligned} 8x - 4y \qquad &= -40 \\ -4x + 16y + 6z &= -80 \\ 6y + 12z &= -120 \end{aligned}\right\}$$

令
$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & -4 & 0 \\ -4 & 16 & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix} = 96 \times 11,$$

$$\Delta[paa] = \begin{vmatrix} 16 & 6 \\ 6 & 12 \end{vmatrix} = 12 \times 13,$$

$$\Delta[pbb] = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 12 \times 8,$$

$$\Delta[pcc] = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 16 \times 7$$

$$\therefore \quad p_x = \frac{\Delta}{\Delta[paa]} = \frac{96 \times 11}{12 \times 13} = \frac{88}{13} = 6\frac{10}{13},$$

$$p_y = \frac{\Delta}{\Delta[pbb]} = \frac{96 \times 11}{12 \times 8} = 11,$$

$$p_z = \frac{\Delta}{\Delta[pcc]} = \frac{96 \times 11}{16 \times 7} = \frac{66}{7} = 9\frac{3}{7}.$$

71. 間接獨立觀測之或是舛差. 由上節求得 p_{z_1}, 而 p_1 本為已知.若能求 r, 則(46)之 r_1 及 r_{M_1} 等為已知. 本節係求 r 之法.

設最或是值 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q$ 之眞值為

$$z_1 + dz_1,\ z_2 + dz_2,\ z_3 + dz_3 \cdots\cdots z_q + dz_q.$$

觀測值 $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 之眞差為

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 \cdots\cdots \theta_n.$$

代入(30),則得

$$\left.\begin{aligned}
&a_1(z_1+dz_1)+b_1(z_2+dz_2)+c_1(z_3+dz_3)+\cdots,\\
&\cdots\cdots+q_1(z_q+dz_q)=M_1+\theta_1,\\
&a_2(z_1+dz_1)+b_1(z_2+dz_2)+c_2(z_3+dz_3)+\cdots,\\
&\cdots\cdots+q_2(z_q+dz_q)=M_2+\theta_2,\\
&a_3(z_1+dz_1)+b_3(z_2+dz_2)+c_3(z_3+dz_3)+\cdots,\\
&\cdots\cdots+p_2(z_p+dz_p)=M_3+\theta_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots,\\
&a_n(z_1+dz_1)+b_n(z_2+dz_2)+c_n(z_3+dz_3)+\cdots,\\
&\cdots\cdots+zq_n(z_q+dz_n)=M_n+\theta_n.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(P)$$

以p_1a_1, p_2a_2 p_3a_3,$\cdots\cdots p_na_n$順次乘(P)之各式而相加,得

$$\begin{aligned}
&[paa]z_1+[pab]z_2+[pac]z_3+\cdots\cdots+[paq]z_q\\
&\quad+[paa]dz_1+[pab]dz_2+[pac]dz_3+\cdots\cdots+[paq]dz_q\\
&=[paM]+[pa\theta].
\end{aligned}$$

由上式減去(35)之第一式,得

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]dz_1+[pab]dz_2+[pac]dz_3+\cdots+[paq]dz_q=[pa\theta].\\
\text{同理,}\ &[pba]dz_1+[pbb]dz_2+[pbc]dz_3+\cdots+[pbq]dz_q=[pb\theta],\\
&[pca]dz_1+[pcb]dz_2+[pcc]dz_3+\cdots\cdots\cdots\cdots=[pc\theta],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots,\\
&[pqa]dz_1+[pqb]dz_2+[pqc]dz_3+\cdots+[pqq]dz_q=[pq\theta].
\end{aligned}\right\}\cdots(Q)$$

(Q)與(35)完全一致,惟以dz代z,以θ代M耳.

因之與(G)比較,得

$$dz_1=a_1\theta_1+a_2\theta_2+a_3\theta_3+\cdots\cdots+a_n\theta_n\cdots\cdots\cdots\cdots(R)$$

又設 $M_1, M_2, M_3,\cdots\cdots M_n$ 之舛差為

$$v_1, v_2, v_3,\cdots\cdots v_n.$$

則有

$$\left.\begin{aligned}
a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1z_q&=M_1+v_1 \text{ 帶權 } p_1,\\
a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2z_q&=M_2+v_2 \text{ 帶權 } p_2,\\
a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3z_q&=M_3+v_3 \text{ 帶權 } p_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&=\cdots\cdots \text{ 帶權 } \cdots,\\
a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_nz_q&=M_n+v_n \text{ 帶權 } p_n.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(34)$$

以 $p_1v_1, p_2v_2, p_3v_3,\cdots\cdots p_nv_n$ 順次乘 (P) 之式各項而相加,得

$$[pav](z_1+dz_1)+[pbv](z_2+dz_2)+[pcv](z_3+dz_3)+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+[pqv](z_q+dz_q)=[pMv]+[p\theta v]\cdots\cdots\cdots\cdots(S)$$

以 $p_1a_1, p_2a_2, p_3a_3,\cdots\cdots p_na_n$ 順次乘 (34) 之各式而相加,由 (35),得

$$[pav]=[paa]z_1+[pab]z_2+[pac]z_3+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+[paq]z_q-[paM]=0,$$

同理,
$$\left.\begin{aligned}
[pbv]&=0,\\
[pcv]&=0,\\
\cdots\cdots&=0,\\
[pqv]&=0.
\end{aligned}\right\}$$

以上各值代入 (S),得

$$[pMv]+[p\theta v]=0.\cdots\cdots\cdots\cdots(T)$$

以 $p_1v_1, p_2v_2, p_3v_3,\cdots\cdots p_nv_n$ 順次乘 (34) 之各式而相加,得

$$[pav]z_1+[pbv]z_2+[pcv]z_3+\cdots\cdots+[pqv]z_q=[pMv]+[pvv].$$

$$\therefore\quad [pMv]+[pvv]=0.$$

因之， $[y\theta v]=[pvv]$. ……………………………………………………………(U)

以 $p_1\theta_1, p_2\theta_2\ p_3\theta_3,\cdots\cdots p_n\theta_n$ 順次乘(34)之各式而相加，得

$$[pa\theta]z_1+[pb\theta]z_2+[pc\theta]z_3+\cdots\cdots+[pq\theta]z_q$$

$$=[pM\theta]+[zv\theta]=[pM\theta]+[pvv]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (V)$$

又以 $p_1\theta_1, p_2\theta_2, p_3\theta_3,\cdots\cdots p_n\theta_n$ 順次乘 (P) 之各式而相加，得

$$[pa\theta]z_1+[pb\theta]z_2+[pc\theta]z_3+\cdots\cdots+[pq\theta]z_q$$

$$+[pa\theta[dz_1+[pb\theta]dz_2+[pb\theta]dz_3+\cdots\cdots+[pq\theta]dz_q$$

$$=[pM\theta]+[p\theta\theta]\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (W)$$

由 (V) 減 (W)，得

$$[p\theta\theta]=[pvv]+[pa\theta]dz_1+[pb\theta]dz_2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+[pq\theta]dz_q\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (X)$$

(46節)之 x，本為真差，故能以 θ 代 x 入

$$S=\pm\sqrt{\frac{\Sigma px^2}{n}},\text{ 得}$$

$$S=\pm\sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}$$

$$\therefore\quad s^2=\frac{[p\theta\theta]}{n}$$

$$=\frac{[pvv]}{n}+\frac{[pa\theta]dz_1+[pb\theta]dz_2+\cdots\cdots+[pq\theta]dz_q}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots (Y)$$

展開 $[pa\theta]$，得

$$[pa\theta]=p_1a_1\theta_1+p_2a_2\theta_2+p_3a_3\theta_3+\cdots\cdots+p_na_n\theta_n.$$

由 (R),

$$dz_1=a_1\theta_1+a_2\theta_2+a_3\theta_3+\cdots\cdots+a_n\theta_n.$$

相乘,得

$$[pa\theta]dz_1=\beta_1a_1\alpha_1\theta_1^2+p_2a_2\alpha_2\theta_2^2+p_3a_3\alpha_3\theta_3^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+p_na_n\alpha_n\theta_n^2+(\text{含 }\theta_1\theta_2,\ \theta_1\theta_3,\ \theta_2\theta_3,\cdots\cdots\theta_{n-1},\ \theta_n\text{ 各項}).$$

若 $z_1, z_2,\cdots\cdots z_n$ 爲最或是值,括弧內各項成正成負之機會殆相等,因之其和爲0. 又 s^2 爲 $p_1\theta_1^2, p_2\theta_2^2, p_3\theta_3^2,\cdots\cdots p_n\theta_n^2$ 之算術均數,今以 s^2 代各值,當無大誤.

$$\therefore\quad [pa\theta]dz_1=a_1\alpha_1\cdot s^2+a_2\alpha_2\cdot s^2+a_3\alpha_3\cdot s^2+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+a_n\alpha_n\cdot s^2=[a\alpha]s^2.$$

但由 (H) 之第一式 $[a\alpha]=1$, 得

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore & [pa\theta]dz_1=s^2,\\ \text{同理,} & [pb\theta]dz_2=s^2,\\ & [pc\theta]dz_3=s^2,\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\\ & [pq\theta]dz_q=s^2,\end{array}\right\}$$

$\therefore$ (Y) 變爲

$$s^2=\frac{[pvv]}{n}+\frac{qs^2}{n}.$$

因之,

$$s=\pm\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-q}}.\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (48)$$

$$\therefore \quad r=0.6745s=\pm 0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-q}} \cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

單位權之 r 既已求得,由(68節)求 $r, r_a, \cdots\cdots r_q$ 及 $r_{M_1}, r_{M_2}, r_{M_3}$.

(例一) 求(57節)之(例一)之或是舛差.

法方程爲

$$\left.\begin{aligned} 13v_x+11v_y+\ 6v_z &= \ \ 4''.5, \\ 11v_x+16v_y+10v_z &= -3''.5, \\ 6v_x+10v_y+13v_z &= \ \ 4''.0. \end{aligned}\right\}$$

今 $$\Delta=\begin{vmatrix} 13, & 11, & 6 \\ 11, & 16, & 10 \\ 6, & 10, & 13 \end{vmatrix}=575, \quad \Delta[paa]=\begin{vmatrix} 16, & 10 \\ 10, & 13 \end{vmatrix}=108,$$

$$\Delta[pbb]=\begin{vmatrix} 13, & 6 \\ 6, & 13 \end{vmatrix}=133, \quad \Delta[pcc]=\begin{vmatrix} 13, & 11 \\ 11, & 16 \end{vmatrix}=87.$$

故 x, y, z 之權爲

$$p_x=\frac{\Delta}{\Delta[paa]}=\frac{575}{108}, \; p_y=\frac{575}{133}, \; p_z=\frac{575}{87}.$$

於(57節)已求得

$$v_x=1''.44, \quad v_y=-1''.45, \quad v_z=0''.84$$

且已知 $p_1=2, \quad p_2=1, \quad p_3=3, \quad p_4=5, \quad p_5=4, \quad p_6=6.$

今設 $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ 爲各觀測值之舛差即改正值.

則
$$\left.\begin{aligned}
v_1&=v_x=\quad 1''.44,\\
v_2&=v_y=-1''.45,\\
v_3&=v_z=\quad 0''.84,\\
v_4&=v_x+v_y+1.5=1.49,\\
v_5&=v_y+v_z+2.0+1.30,\\
v_6&=v_x+v_y+v_z-2.0=1.17.
\end{aligned}\right\}$$

由下表求單位權之或是舛差 r

號數	v	v^2	p	pv^2
1	1.41	2.074	2	4.148
2	−1.45	2.103	1	2.103
3	0.84	0.706	3	2.118
4	1.49	2.220	5	11.100
5	1.39	1.932	4	7.728
6	−1.17	1.369	6	8.214

$$\Sigma pv^2=35.411.$$

由(49)，
$$r=\pm 0.6745\sqrt{\frac{33.411}{6-3}}=\pm 2''.32,$$

故最或是值之或是舛差爲

$$\left.\begin{aligned}
r_x&=\frac{r}{\sqrt{p_x}}=\pm 2.32\sqrt{\frac{108}{575}}=\pm 1''.01.\\
r_y&=\frac{r}{\sqrt{p_y}}=\pm 2.32\sqrt{\frac{133}{575}}=\pm 1''.12.\\
r_z&=\frac{r}{\sqrt{p_z}}=\pm 2.32\sqrt{\frac{87}{575}}=\pm 0''.90.
\end{aligned}\right\}$$

觀測值之或是舛差爲

$$\left.\begin{aligned}
r_{M_1}&=\frac{r}{\sqrt{p_1}}=\pm\frac{2.32}{\sqrt{2}}=\pm1''.65\\
r_{M_2}&=\frac{r}{\sqrt{p_2}}=\pm\frac{2.32}{\sqrt{1}}=\pm2''.32.\\
r_{M_3}&=\frac{r}{\sqrt{p_3}}=\pm\frac{2.32}{\sqrt{3}}=\pm1''.34\\
r_{M_4}&=\frac{r}{\sqrt{p_4}}=\pm\frac{2.32}{\sqrt{5}}=\pm1''.03.\\
r_{M_5}&=\frac{r}{\sqrt{p_5}}=\pm\frac{2.32}{\sqrt{4}}=\pm1''.16\\
r_{M_6}&=\frac{r}{\sqrt{p_6}}=\pm\frac{2.32}{\sqrt{6}}=\pm0''.95.
\end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\qquad\left.\begin{aligned}
x&=25^\circ27'19''.94\pm1''.01\\
y&=13^\circ24'13''.55\pm1''.12.\\
z&=\ \ 8^\circ39'30''.34\pm0''.90.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
M_1&=25^\circ27'19''.\ 5\pm1''.65.\\
M_2&=13^\circ34'15''.\ 0\pm2''.32\\
M_3&=\ \ 8^\circ39'29''.\ 5\pm1''.34.\\
M_4&=38^\circ51'33''.\ 0\pm1''.03.\\
M_5&=22^\circ03'42''.\ 5\pm1''.16.\\
M_6&=47^\circ31'06''.\ 0\pm0''.95.
\end{aligned}\right\}$$

查上結果,以z之精度爲最大,M_6次之M_2爲最小.

72. 規約觀測之權. 合併(61節)之λ個規約方程(37)於n個觀測方程(36),而消去λ個未知量.則餘$(q-\lambda)$個未知量.因之n個觀測方程祇含$(q-\lambda)$個未知量.由(70節)之法則,可求得各未知量之權.但已消去之未知量之權,尚不能求.若另消λ個未知量,依法再算一次,卽可求得已消去之未知量之權.

73. 規約觀測之或是舛差. (49)之q,在規約觀測應爲$(q-\lambda)$.故以$(q-\lambda)$代q,得

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{n-q+\lambda}}.\qquad(50)$$

若觀測方程之個數,等於未知量之個數.

則 $$n=q.$$

$$\therefore\quad r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv^2}{\lambda}}.\qquad(51)$$

(例一) 測得$\triangle ABC$之邊

$$AB=875\overset{\text{呎}}{.}27\pm1\overset{\text{呎}}{.}24,$$

及其角

$$\left.\begin{aligned}\angle A&=58^\circ34'27''\text{ 帶權 }2,\\ \angle B&=74^\circ23'54''\text{ 帶權 }3,\\ \angle C&=47^\circ01'42''\text{ 帶權 }5.\end{aligned}\right\}$$

求BC及AC.

三角有下之規約

$$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ.$$

設 v_a, v_b, v_c 爲三角之改正值(即舛差),

p_a, p_b, p_c 爲改正後三角之權,

r_a, r_b, r_c 爲改正後三角之或是舛差.

則得觀測方程

$$\left.\begin{aligned} v_a &= 0 \text{ 帶權 } 2, \\ v_b &= 0 \text{ 帶權 } 3, \\ v_a+v_b &= -3'' \text{ 帶權 } 5. \end{aligned}\right\}$$

其法方程爲

$$\left.\begin{aligned} 7v_a+5v_b &= -15'', \\ 5v_a+8v_b &= -15''. \end{aligned}\right\}$$

解之,得改正值

$$\left.\begin{aligned} v_a &= -\frac{45}{31} = -1''.45, \\ v_b &= -\frac{30}{31} = -0''.97 \end{aligned}\right\}$$

及

$$\left.\begin{aligned} p_a &= \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{8} = \frac{31}{8}, \\ p_b &= \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}}{7} = \frac{31}{7}. \end{aligned}\right\}$$

又得觀測方程

$$\left.\begin{aligned} v_a &= 0 \text{ 帶權 } 2, \\ v_a+v_c &= -3'' \text{ 帶權 } 3, \\ v_c &= 0 \text{ 帶權 } 5. \end{aligned}\right\}$$

其法方程爲

$$\left.\begin{aligned}5v_a+3v_c&=-9'',\\3v_a+8v_c&=-9''.\end{aligned}\right\}$$

解之,得改正值

$$\left.\begin{aligned}v_a&=-\frac{45}{31}=-1''.45,\\v_c&=-\frac{18}{31}=-0''.57.\end{aligned}\right\}$$

及

$$\left.\begin{aligned}p_a&=\frac{\begin{vmatrix}5&3\\3&8\end{vmatrix}}{8}=\frac{31}{8},\\p_c&=\frac{\begin{vmatrix}5&3\\3&8\end{vmatrix}}{5}=\frac{31}{5}.\end{aligned}\right\}$$

求單位權之或是舛差 r 如下:

	v	v^2	p	pv^2
a	−1.45	2.103	2	6.206
b	−0.97	0.941	3	2.823
c	−0.57	0.325	5	1.625

$$\Sigma pv^2=10.654.$$

代入(51),得

$$r=0.6745\sqrt{\frac{10.654}{1}}=2''.201.$$

$$\therefore \qquad r_a = \frac{r}{\sqrt{p_a}} = 2''.201\sqrt{\frac{8}{31}} = 1''.120,$$

$$r_b = \frac{r}{\sqrt{p_b}} = 2''.201\sqrt{\frac{7}{31}} = 1''.044,$$

$$r_c = \frac{r}{\sqrt{p_c}} = 2''.201\sqrt{\frac{5}{31}} = 0''.882.$$

故三角之最或是值爲

$$\left.\begin{aligned} \angle A &= 58^\circ 34' 25''.55 \pm 1''.12 \\ \angle B &= 74^\circ 23' 53''.03 \pm 1''.04, \\ \angle C &= 47^\circ 01' 41''.42 \pm 0''.88. \end{aligned}\right\}$$

$$\text{和} = 180^\circ 00' 00''.00 \text{ 檢點}$$

令 $$AC = AB\frac{\sin B}{\sin C} \quad \text{及} \quad BC = AB\frac{\sin A}{\sin C}.$$

設 a, b, c 爲三角形之三邊. r_{ac}, r_{bc} 爲 AC, BC 之或是舛差,則上式之第一式變爲

$$b = c\frac{\sin B}{\sin C} = 1152\overset{\text{呎}}{.}14.$$

$$\frac{\delta b}{\delta c} = \frac{\sin B}{\sin C}, \quad \frac{\delta b}{\delta B} = \frac{c\cos B}{\sin C}, \quad \frac{\delta b}{\delta C} = -\frac{c\sin B\cos C}{\sin^2 C},$$

由 (45), $$r^2_{ac} = \left[\frac{\sin B}{\sin C}\right]^2 (1\overset{\text{呎}}{.}24)^2 + \left[\frac{c\cos B}{\sin C}\right]^2 (1''.04)^2$$

$$+\left[-\frac{c\sin B\cos C}{\sin^2 C}\right]^2 (0''.88)^2 = 2.657(1'')^2.$$

$$\therefore \qquad r_{ac} = \overset{\text{呎}}{1}.632.$$

$$\therefore \quad AC = 1152\overset{\text{呎}}{.}14 \pm 1\overset{\text{呎}}{.}63.$$

同理, $$a = c\frac{\sin A}{\sin C} = 1020\overset{\text{呎}}{.}69.$$

$$\frac{\delta a}{\delta c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{\delta a}{\delta A} = \frac{c\cos A}{\sin C}, \quad \frac{\delta a}{\delta C} = -\frac{c\sin A\cos C}{\sin^2 G}.$$

由(45), $$r^2_{tc} = \left[\frac{\sin A}{\sin C}\right]^2 (1\overset{\text{呎}}{.}24)^2 + \left[\frac{c\cos A}{\sin C}\right]^2 (1''.12)^2$$

$$+ \left[-\frac{c\sin A\cos C}{\sin^2 C}\right]^2 (0''.88)^2 = 2.089(1'')^2.$$

$$\therefore \quad r_{bc} = 1\overset{\text{呎}}{.}443.$$

$$\therefore \quad BC = 1020\overset{\text{呎}}{.}96 \pm 1\overset{\text{呎}}{.}45.$$

74. 用不定係數求規約觀測之權. (72 節) 所述法則,已能解此問題.所不便者,諸未知量之權,不能祇用一組法方程,一次求得.且由 n 個觀測方程,λ 個規約方程,消去 λ 個未知量,實際發生困難,常遇不可能之事實.有時或須增加觀測方程以赴之.今用不定係數法,則無消去未知量之手續,而直接由規約方程以求之.

設 $z_1, z_2, z_3 \cdots\cdots z_n$ 爲各未知量之最或是值.

且設諸最或是值間之關係,爲次之線狀式 (Linear Form).

$$F = f_0 + f_1 z_1 + f_2 z_2 + f_3 z_3 + \cdots\cdots + f_n z_n \cdots\cdots\cdots\cdots (52)$$

上式中 $f_0, f_1, f_2 \cdots\cdots f_n$ 爲不定係數, F 爲 $z_1, z_2, \cdots\cdots z_n$ 之線形函數.

若令 $F = z_1$, 則必 $f_1 = 1$ 及 $f_0 = f_2 = \cdots\cdots = f_n = 0$.

同理,可令 $F=z_2$, 或 $F=z_3$……, 或 $F=z_n$.

又設 $M_1, M_2, M_3,$……M_n 爲各未知量之觀測值.

並設 $F=F_0+F_1M_1+F_2M_2+F_3M_3+\cdots\cdots+F_nM_n$. ……………………… (53)

上式中 F_0, F_1, F_2……F_n 亦爲不定係數. 但與 f_0, f_1, f_2……f_n 有別. 惟 F 則仍爲 (52) 中之 F. 細案 (52), (53) 兩式, 兩項假設俱可成立.

再設 $M_1, M_2, M_3,$……M_n, F 之權爲

$p_1, p_2, p_3,$……p_n, p_F, 及其或是舛差爲

$r_1, r_2, r_2,$……r_n, r_F.

則由 (43), 得

$$r_F^2=F_1^2r_1^2+F_2^2r_2^2+F_3^2r_3^2+\cdots\cdots+F_n^2r_n^2.$$

故由 (15), 得

$$\frac{1}{p_F}=F_1^2\cdot\frac{1}{p_1}+F_2^2\cdot\frac{1}{p_2}+F_3^2\cdot\frac{1}{p_3}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdot+F_n^2\cdot\frac{1}{p_n}=\left[\frac{FF}{p}\right]. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

以 (36) 之 $z_1, z_2, z_3,$……z_n 之值代入 (52), 得

$$F=f_0+[fM]+f_1v_1+f_2v_2+f_3v_3+\cdots\cdots+f_nv_n.$$

再以 (38) 之 v_1, v_2, v_3……v_n 之值代入之, 得

$$F=f_0+[fM]$$

$$+f_1\left[\frac{\alpha_1}{p_1}k_1+\frac{\beta_1}{p_1}k_2+\frac{\gamma_1}{p_1}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_1}{p_1}k_\lambda\right]$$

$$+f_2\left[\frac{\alpha_2}{p_2}k_1+\frac{\beta_2}{p_2}k_2+\frac{\gamma_2}{p_2}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_2}{p_2}k_\lambda\right]$$

$$+f_3\left[\frac{\alpha_3}{p_3}k_1+\frac{\beta_3}{p_3}k_2+\frac{\gamma_3}{p_3}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_3}{p_3}k_\lambda\right]$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+f_n\left[\frac{\alpha_n}{p_n}k_1+\frac{\beta_n}{p_n}k_2+\frac{\gamma_n}{p_n}k_3+\cdots\cdots+\frac{\lambda_n}{p_n}k_\lambda\right].$$

或
$$F=f_0+[fM]+\left[\frac{f\alpha}{p}\right]k_1+\left[\frac{f\beta}{p}\right]k_2+\left[\frac{f\gamma}{p}\right]k_3+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\left[\frac{f\lambda}{p}\right]k_\lambda.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

今又以不定係數 $Q_1, Q_2, Q_3,\cdots\cdots Q_\lambda$ 順次乘(39)之各式而相加,然後加於(A)之右,得

$$\left.\begin{aligned}
F=f_0&+[fM]\\
&+\left\{\left[\frac{fp}{\alpha}\right]+\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\alpha}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\alpha}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\alpha}{p}\right]Q_\lambda\right\}k_1\\
&+\left\{\left[\frac{f\beta}{p}\right]+\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\beta}{p}\right]Q_\lambda\right\}k_2\\
&+\left\{\left[\frac{f\gamma}{p}\right]+\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\gamma}{p}\right]Q_\lambda\right\}k_3\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\left\{\left[\frac{f\lambda}{p}\right]+\left[\frac{\alpha\lambda}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\lambda}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\lambda}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\lambda}{p}\right]Q_\lambda\right\}k_\lambda
\end{aligned}\right\}(B)$$

$$+d_\alpha Q_1+d_\beta Q_2+d_\gamma Q_3+\cdots\cdots+d_\lambda Q.$$

欲消去(B)含 $k_1, k_2, k_3\cdots\cdots k_\lambda$ 之各項,非令其係數爲零不可.今令

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\frac{f\alpha}{p}\right]+\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\alpha}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\alpha}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\alpha}{p}\right]Q_\lambda=0,\\
&\left[\frac{f\beta}{p}\right]+\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\beta}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\beta}{p}\right]Q_\lambda=0,\\
&\left[\frac{f\gamma}{p}\right]+\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\gamma}{p}\right]Q_\lambda=0.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\left[\frac{f\lambda}{p}\right]+\left[\frac{\alpha\lambda}{p}\right]Q_1+\left[\frac{\beta\lambda}{p}\right]Q_2+\left[\frac{\gamma\lambda}{p}\right]Q_3+\cdots\cdots+\left[\frac{\lambda\lambda}{p}\right]Q_\lambda=0.
\end{aligned}\right\}\cdots(55)$$

則 $F=f_0+[fM]$

$$+d_\alpha Q_1+d_\beta Q_2+d_\gamma Q_3+\cdots\cdots+d_\lambda Q_\lambda \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

(55) 曰不定係數 Q 之法方程.

以 (61 節) 之 (C) 之 $d_\alpha, d_\beta, d_\gamma\cdots\cdots d_\lambda$ 之值代入本節之 (C), 得

$$\left.\begin{aligned}
F=&f_0+f_1M_1+f_2M_2+f_3M_3+\cdots\cdots\cdots\cdots+f_nM_n\\
&+(\alpha_0+\alpha_1M_1+\alpha_2M_2+\alpha_3M_3+\cdots\cdots+\alpha_nM_n)Q_1\\
&+(\beta_0+\beta_1M_1+\beta_2M_2+\beta_3M_3+\cdots\cdots+\beta_nM_n)Q_2\\
&+(\gamma_0+\gamma_1M_1+\gamma_2M_2+\gamma_3M_3+\cdots\cdots+\gamma_nM_n)Q_3\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(\lambda_0+\lambda_1M_1+\lambda_2M_2+\lambda_3M_3+\cdots\cdots+\lambda_nM_n)Q_\lambda.
\end{aligned}\right\}$$

或

$$\left.\begin{aligned}
F=&(f_0+\alpha_0Q_1+\beta_0Q_2+\gamma_0Q_3+\cdots\cdots\cdots+\lambda_0Q_\lambda)\\
&+(f_1+\alpha_1Q_1+\beta_1Q_2+\gamma_1Q_3+\cdots\cdots+\lambda_1Q_\lambda)M_1\\
&+(f_2+\alpha_2Q_1+\beta_2Q_2+\gamma_2Q_3+\cdots\cdots+\lambda_2Q_\lambda)M_2\\
&+(f_3+\alpha_3Q_1+\beta_3Q_2+\gamma_3Q_3+\cdots\cdots+\lambda_3Q_\lambda)M_3\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(f_n+\alpha_nQ_1+\beta_nQ_2+\gamma_nQ_3+\cdots\cdots+\lambda_nQ_\lambda)M_n
\end{aligned}\right\}(D)$$

比較(53)與(D)之係數,得

$$\left.\begin{aligned}F_0&=f_0+\alpha_0Q_1+\beta_0Q_2+\gamma_0Q_3+\cdots\cdots+\lambda_0Q_\lambda,\\F_1&=f_1+\alpha_1Q_1+\beta_1Q_2+\gamma_1Q_3+\cdots\cdots+\lambda_1Q_\lambda,\\F_2&=f_2+\alpha_2Q_2+\beta_2Q_2+\gamma_2Q_3+\cdots\cdots+\lambda_2Q_\lambda,\\F_3&=f_3+\alpha_3Q_1+\beta_3Q_2+\gamma_3Q_3+\cdots\cdots+\lambda_3Q_\lambda,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\F_n&=f_n+\alpha_nQ_1+\beta_nQ_3+\gamma_nQ_3+\cdots\cdots+\lambda_nQ_\lambda.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

今假定(52)之$f_1=1$及$f_0=f_3=\cdots\cdots f_n=0$.

則(55)中各式之第一項俱爲已知,因之求得$Q_1,Q_2,Q_3\cdots\cdots\cdots\cdots Q_\lambda$之值.然後以各值代入(56),得$F_0,F_1,F_2,F_3,\cdots\cdots F_n$之值.代入(54),得$p_F$之值.

但 $f_1=1$及$f_0=f_2=f_3=\cdots\cdots=f_n=0$時,

$F=z_1$而p_F爲F之權.

$\therefore$ p_F爲z_1之權.

同理,假定(52)之$f_2=1$,及$f_0=f_1=f_3=\cdots\cdots=f_n=0$.

則p_F之值將爲z_2之權.

同理,依次求$z_3,z_4,\cdots\cdots z_n$之權.

(注意) 本節觀測方程之個數,等於未知量之個數,故單位權之或是舛差爲

$$r=0.6745\sqrt{\frac{\Sigma pv_2}{\lambda}}.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

$v_1,v_2,v_3,\cdots\cdots v_n$之值,應由(38)求之.

若規約方程之個數不多,求權自以本節之法爲便.若規約方程之個數增多,其時聯立方程(55)將有n個含λ個方程.解方程之手續繁難.

反不如(72節)之法,祇解兩組$(n-\lambda)$個聯立方程,手續較易在計算者,事先愼擇之.

(例一)求(62節)之(例一)中z_1, z_2, z_3之權pz_1, pz_2, pz_3.先求pz_1假定(52)之

$$f_1=1\text{ 及 }f_0=f_2=f_3=0.$$

令規約方程$z_1+z_2+z_3=\pi$.

$$\therefore\quad a_1=1\quad a_2=1\quad a_3=1.$$

故(54)之常數項爲

$$\left[\frac{fa}{p}\right]=\frac{1\times 0}{p_1}+\frac{0\times 1}{p_2}+\frac{0\times 1}{p_3}=\frac{1}{p_1}.$$

$\therefore$ 不定係數Q之法方程爲

$$\frac{1}{p_1}+\left(\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}\right)Q_1=0.$$

設
$$s=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}.$$

則
$$Q_1=-\frac{1}{p_1 s}$$

代入(56),得

$$F_1=1+Q_1,\ F_2=Q_1,\ F_3=Q_1.$$

代入(54),得

$$\therefore\quad \frac{1}{p_{z_1}}=\frac{1}{p_F}=\frac{(1+Q_1)^2}{p_1}+\frac{Q_1{}^2}{p_2}+\frac{Q_1{}^2}{p_3}$$

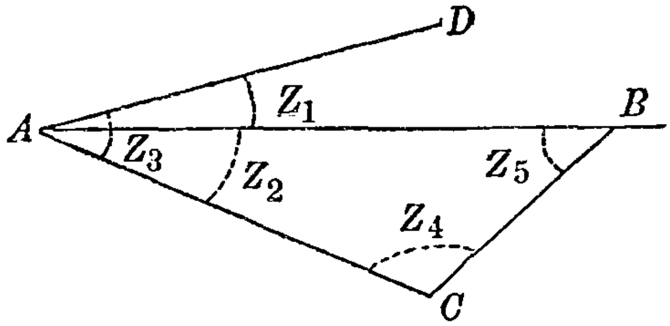
$$=\frac{\left[1-\frac{1}{p_1 s}\right]^2}{p_1}+\frac{\left[-\frac{1}{p_1 s}\right]^2}{p_2}+\frac{\left[-\frac{1}{p_1 s}\right]^2}{p_3}.$$

$$\therefore\quad \frac{1}{p_{z_1}}=\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_1{}^2 s},$$

同理，
$$\frac{1}{p_{z_2}}=\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_2{}^2 s},$$

$$\frac{1}{p_{z_3}}=\frac{1}{p_3}-\frac{1}{p_3{}^2 s}.$$

(例二) 自$\triangle ABC$之頂點A，作補助線AD.測得次之結果.



(圖 22)

$$\left.\begin{aligned}
\angle DAB &= z_1 = 20°15'10'' \text{ 帶權 } 4\\
\angle DAC &= z_2 = 64°55'10'' \text{ 帶權 } 4\\
\angle BAC &= z_3 = 44°39'50'' \text{ 帶權 } 6\\
\angle ACB &= z_4 = 91°27'40'' \text{ 帶權 } 6\\
\angle CBA &= z_5 = 43°52'50'' \text{ 帶權 } 6
\end{aligned}\right\}$$

求各角之最或是值，及其或是舛差.

設 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 爲各角之改正值,則得觀測方程

$$\left.\begin{aligned} v_1&=0 \text{ 帶權 } 4\\ v_2&=0 \text{ 帶權 } 4\\ v_3&=0 \text{ 帶權 } 6\\ v_4&=0 \text{ 帶權 } 6\\ v_5&=0 \text{ 帶權 } 6\end{aligned}\right\}$$

因各角有次之規約

$$\left.\begin{aligned} z_1+z_3&=z_2,\\ z_3+z_4+z_5&=\pi.\end{aligned}\right\}$$

故改正值之規約方程爲

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_3-v_2&=\quad 10'',\\ v_3+v_4+v_5&=-20''.\end{aligned}\right\}$$

表解之,得規約方程

	v_1 1	v_2 2	v_3 3	v_4 4	v_5 5	常數
p	4	4	6	6	6	
α	1	-1	1	0	0	$10''$
β	0	0	1	1	1	$-20''$

由 (39),得不定係數 k 之規約方程

	k_1 $\alpha]$	k_2 $\beta]$	常數
$\left[\frac{\alpha}{p}\right.$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$10''$
$\left[\frac{\beta}{p}\right.$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$-12''$

解之,得

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{300''}{11}, \\ k_2 &= -\frac{540''}{11}. \end{aligned}\right\}$$

由 (38),得

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{4}k_1 &&= 6''.82, \\ v_2 &= -\frac{1}{4}k_1 &&= -6''.82, \\ v_3 &= \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2 &&= -3''.64, \\ v_4 &= \frac{1}{6}k_2 &&= 8''.18, \\ v_5 &= \frac{1}{6}k_2 &&= 8''.18. \end{aligned}\right\}$$

故各角之最或是值為

$$z_1 = 20°15'10'' + 6''.82 = 20°16'16''.82,$$

$$z_2 = 64°55'10'' - 6''.82 = 64°55'\ 3''.18,$$

$$z_3 = 64°39'50'' - 3''.64 = 44°39'46''.36,$$

$$z_4 = \ 1°27'40'' - 8''\ 18 = 91°27'31''.82,$$

$$z_5 = 43°52'50'' - 8''\ 18 = 43°52'41''.82.$$

查上得結果,適符兩規約方程.

求權 p_{z_1}. 設 (52) 之 $f_1 = 1, f_0 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$ 則 (55) 之常數項為

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{f\alpha}{p}\right]&=\frac{1}{4},\\ \left[\frac{f\beta}{p}\right]&=0.\end{aligned}\right\}$$

因之由(55),得不定係數Q之法方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{4}{6}Q_1+\frac{1}{6}Q_2&=-\frac{1}{4}\\ \frac{1}{6}Q_1+\frac{3}{6}Q_2&=0.\end{aligned}\right\}$$

解之,得 $$Q_1=-\frac{9}{22},\quad Q_2=\frac{3}{22}.$$

代入(56),得

$$\left.\begin{aligned}F_1&=f_1+Q_1 &&=1-\frac{9}{22} &&=\frac{13}{22},\\ F_2&=f_2-Q_1 &&=0-\frac{9}{22} &&=-\frac{9}{22},\\ F_3&=f_2-Q_1+Q_2 &&=0-\frac{9}{22}+\frac{3}{22} &&=-\frac{6}{22},\\ F_4&=f_4\quad+Q_2 &&=0\quad+\frac{3}{22} &&=\frac{3}{22},\\ F_5&+f_5\quad+Q_2 &&=0\quad+\frac{3}{22} &&=\frac{3}{22}.\end{aligned}\right\}$$

代入(54),得

$$\frac{1}{p_{z_1}}=\frac{1}{p_F}=\left[\frac{FF}{p}\right]=\frac{1}{4}\left[\frac{13}{22}\right]^2+\frac{1}{4}\left[-\frac{9}{22}\right]^2+\frac{1}{6}\left[-\frac{6}{22}\right]$$

$$+\frac{1}{6}\left[\frac{3}{22}\right]^2+\frac{1}{6}\left[\frac{3}{22}\right]^2=\frac{13}{88}.$$

同理,求 $p_{z_1}, p_{z_2}, p_{z_3}, p_{z_4}$. 其完全表解如下.

求 p	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	$\left[\frac{f\alpha}{p}\right]$	$\left[\frac{f\beta}{p}\right]$	Q_1	Q_2
z_1	1	0	0	0	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{9}{22}$	$\frac{3}{22}$
z_2	0	1	0	0	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{9}{22}$	$-\frac{3}{22}$
z_3	0	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{4}{22}$	$-\frac{6}{22}$
z_4	0	0	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{22}$	$-\frac{8}{22}$
z_5	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{22}$	$-\frac{8}{22}$

因之求得未知量之權

求 p	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	$\frac{FF}{p}$	p
z_1	$\frac{13}{22}$	$\frac{9}{22}$	$-\frac{6}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{13}{88}$	$\frac{88}{13}=6''.77$
z_2	$\frac{9}{22}$	$\frac{13}{22}$	$\frac{6}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$-\frac{3}{22}$	$\frac{13}{88}$	$\frac{88}{13}=6''.77$
z_3	$-\frac{4}{22}$	$\frac{4}{22}$	$\frac{12}{22}$	$-\frac{6}{22}$	$-\frac{6}{22}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{11}{1}=11''.00$
z_4	$\frac{2}{22}$	$-\frac{2}{22}$	$-\frac{6}{22}$	$\frac{14}{22}$	$-\frac{8}{22}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{66}{7}=9''.43$
z_5	$\frac{2}{22}$	$-\frac{2}{22}$	$-\frac{6}{22}$	$-\frac{8}{22}$	$\frac{14}{22}$	$\frac{7}{66}$	$\frac{66}{7}=9''.43$

又求或是舛差如下:

	v	v^2	p	pv^2
1	6.82	46.51	4	186.04
2	−6.82	46.51	4	186.04
3	−3.64	13.25	6	79.50
4	8.18	66.91	6	401.46
5	8.18	66.91	6	401.46

$$\Sigma pv^2 = 1264.50$$

$$\therefore \quad r = 0.6745\sqrt{\frac{1254.5}{2}} = 16''.89.$$

$$\therefore \quad r_1 = r_2 = \frac{16.89}{\sqrt{6.77}} = 6''.47.$$

$$r_3 = \frac{16.89}{\sqrt{11.00}} = 5''.12.$$

$$r_4 = r_5 = \frac{16.89}{\sqrt{9.46}} = 5''.50.$$

故五角之值為

$$\left.\begin{aligned}
z_1 &= 20°15'16''.82 \pm 6''.47,\\
z_2 &= 64°55'\ 3''.18 \pm 6''.47,\\
z_3 &= 44°39'46''.36 \pm 5''.12,\\
z_4 &= 91°27'31''.82 \pm 5''.50,\\
z_5 &= 43°52'41''.82 \pm 5''.50.
\end{aligned}\right\}$$

習　題　五

1. 測得圓之半徑 $=1000.0\pm2.0$. 求圓周及面積之或是舛差.

答: 圓周 $=2000\pi\pm4\pi$

面積 $=1,000,000\pi\pm4000\pi$.

2. 測三角形 ABC, 得

$$\left.\begin{aligned} a&=252.52\pm0.06,\\ b&=300.01\pm0.06,\\ C&=42^\circ13'00''\pm30''.\end{aligned}\right\}$$

求面積之最或是值,及其或是舛差.

答: 25452.59 ± 8.90.

3. 若 A 之或是舛差 $=20''$, 求 $\sin A+\cos A$ 之最大或是舛差.

答: 0.00014, 其時 $A=135^\circ$.

4. 長方形之兩邊爲 $a\pm r_a$, $b\pm r_b$. 求面積之或是舛差.

答: $\sqrt{a^2r_b^2+b^2r_a^2}$.

5. 三角 A, B, C 之權爲 3, 3, 1. 求三角和之權.

答: 0.6.

6. 測 t 及 l. 由公式

$$t=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

可定 g 之值. 今爲 r_t, r_l 爲 t, l 之或是舛差. 求 g 之或是舛差.

7. 設有觀測方程

$$\left.\begin{aligned} z_1-2z_2+z_3-3&=0,\\ 2z_1+3z_2-4z_3-2&=0,\\ 3z_1+z_2+2z_3-17&=0,\\ -z_1+4z_2+3z_3-10&=0.\end{aligned}\right\}$$

求各量之最或是值,權,及或是舛差.

答: $z=3.541\pm0.024$, $z_2=1.546\pm0.016$, $z_3=2.439\pm0.017$,

$p_{z_1}=14.2$, $p_{z_2}=29.4$, $p_{z_3}=29.0$.

8. 求(54.節)之(例三)之最或是值及其或是舛差.

答: $z_1=572.98\pm$

$z_2=575.48\pm$

$z_3=742.36\pm$

$z_4=715.72\pm$

$z_5=320.25\pm$

9. 測A, B二點高差,置水平儀於AB中途,則

標桿在A	標桿在B
7次得7.229呎	3次得9.806呎
8次得7.230呎	12次得9.807呎
5次得7.231呎	5次得9.808呎

求AB間之最或是高差及其或是舛差.

答: 2.5772±0.00015呎.

10. 測得$\triangle ABC$之三角

$$\left.\begin{aligned}\angle A&=36°25'47''\ \text{帶權}\ 4\\ \angle B&=90°36'28''\ \text{帶權}\ 2\\ \angle C&=52°57'57''\ \text{帶權}\ 3\end{aligned}\right\}$$

求三角之最或是值,及其或是舛差.

答: $\angle A=36°25'44''.23\pm3''.41$

$\angle B=90°36'22''.46\pm4''.05$

$\angle C=52°57'53''.31\pm3''.73$

$$\left.\begin{aligned}p_A&=\frac{26}{5},\\ p_B&=\frac{26}{7},\\ p_C&=\frac{26}{6}.\end{aligned}\right\}$$

11. 設A點在海面,其高爲0. 自A測B, C二點之高, 則

置水平儀於A, B間.

標桿在A, 12次得 8.7342 呎.

標桿在B, 9次得 2.3671 呎.

置水平儀於B, C間.

標桿在B, 7次得 5.0247 呎.

標桿在C, 4次得 11.2069 呎.

置水平儀於C, A.

標桿在C, 5次得 0.467 呎.

標桿在C, 3次得 0.6510 呎.

求B, C二點之最或是高,及其或是舛差

依題意,其實際測量記載應如下式:

測站	後視 *B.S.*	*p*	前視 *F.S.*	*p*	測器高 *H.I.*	高 *EIV*
A	8.7342	12				0.0
B	5.0247	7	2.3671	9	8.7342	6.3671
C	0.4572	5	11.2069	4	11.3918	0.1840
A			0.6510	3	0.6521	0.0041

答:

測站	*B.S.*	*F.S.*	高
A	8.73412		0.0
B	5.02456	2.36721	6.36691±0.00036
C	0.46700	11.20714	0.18433±0.00048
A		0.65133	0.0

12. 測得(58節)(圖20)之各角

角	觀測值	p
W	106°07′27″	3
W_1	41°58′47″	3
W_2	64°08′34″	3
X	66°34′08″	1
X_1	36°34′21″	1
X_2	29°59′45″	1

角	觀測值	p
Y	103°11′15″	2
Y_1	49°17′30″	2
Y_2	53°53′51″	2
Z	84°07′30″	4
Z_1	46°49′16″	1
Z_2	37°18′18″	2

求各角之最或是值,及其或是幷差.

答: $W_1=41°58'48''.5\pm$ $\quad Y_1=49°17'25''.5\pm$

$W_2=64°08'35''.9\pm$ $\quad Y_2=53°53'45''.9\pm$

$X_1=36°34'19''.6\pm$ $\quad Z_1=46°49'09''.6\pm$

$X_2=29°59'39''.0\pm$ $\quad Z_2=37°18'16''.0\pm$

第六章

法方程之葛斯氏排列式解法

75. 解法方程,自以應用行列式爲最便(54 節, 57 節).但觀測方程未知量之個數增多,行列式之次數,亦因之增高.高次行列式之解法,手續艱難,人所共知,且常爲人力所不能致.葛斯(Gauss)氏因創排列式以解之.不特節省人工,且組織有序.偶有計算之錯誤,可逐式檢點,不虞有毫釐千里之失.

(注意) 歐美各書,原無排列式一名辭.茲便於敘述起見,特由著者創立之.

76. **排列式之定義.** 觀測方程

$$\left.\begin{aligned}
a_1z_1+b_1z_2+c_1z_3+\cdots\cdots+q_1z_q&=M_1,\\
a_2z_1+b_2z_2+c_2z_3+\cdots\cdots+q_2z_q&=M_2,\\
a_3z_1+b_3z_2+c_3z_3+\cdots\cdots+q_3z_q&=M_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&=\cdots,\\
a_nz_1+b_nz_2+c_nz_3+\cdots\cdots+q_nz_q&=M_n.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

之法方程式爲

$$\left.\begin{array}{l}[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+\cdots\cdots+[aq]z_q=[aM],\\ [ba]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3+\cdots\cdots+[bq]z_q=[bM],\\ [ca]z_1+[cb]z_2+[cc]z_3+\cdots\cdots+[cq]z_q=[cM],\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots,\\ [qa]z_1+[qb]z_2+[qc]z_3+\cdots\cdots+[qq]z_q=[qM].\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

依常法由(32)消去z_1,則變(32)之第一式爲

$$z_1=-\frac{[ab]}{[aa]}z_2-\frac{[ac]}{[aa]}z_3-\frac{[ad]}{[aa]}z_4-\cdots\cdots+\frac{[aM]}{[aa]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

代入其餘$(q-1)$式,得

$$\left.\begin{array}{l}\left([bb]-\frac{[ba][ab]}{[aa]}\right)z_2+\left([bc]-\frac{[ba][ac]}{[aa]}\right)z_3+\cdots\cdots\\ \cdots\cdots=\left([bM]-\frac{[ba][aM]}{[aa]}\right),\\ \left([cb]-\frac{[ca][ab]}{[aa]}\right)z_2+\left([cc]-\frac{[ca][ac]}{[aa]}\right)z_3+\cdots\cdots\\ \cdots\cdots=\left([cM]-\frac{[ca][aM]}{[aa]}\right),\\ (\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots,)\\ \left([qb]-\frac{[qa][ab]}{[aa]}\right)z_2+\left([qc]-\frac{[qa][ac]}{[aa]}\right)z_3+\cdots\cdots\\ \cdots\cdots=\left([qM]-\frac{[qa][aM]}{[aa]}\right).\end{array}\right\}\cdots\cdots(B)$$

今設

$$\left.\begin{aligned}
[bb\cdot1]&=[bb]-\frac{[ba][ab]}{[aa]}\\
[bc\cdot1]&=[bc]-\frac{[ba][ac]}{[aa]}\\
[bd\cdot1]&=[bd]-\frac{[bd][ad]}{[aa]}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[qM\cdot1]&=[qM]-\frac{[qa][aM]}{[aa]}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

則(F)變為

$$\left.\begin{aligned}
&[bb\cdot1]z_2+[bc\cdot1]z_3+[bd\cdot1]z_4+\cdots\cdots+[bq\cdot1]z_q=[bM\cdot1],\\
&[cb\cdot1]z_2+[cc\cdot1]z_3+[cd\cdot1]z_4+\cdots\cdots+[cq\cdot1]z_q=[cM\cdot1],\\
&[db\cdot1]z_2+[dc\cdot1]z_3+[dd\cdot1]z_4+\cdots\cdots+[dq\cdot1]z_q=[dM\cdot1],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots,\\
&[qb\cdot a]z_2+[qc\cdot1]z_3+[qd\cdot1]z_4+\cdots\cdots+[qq\cdot1]z_q=[qM\cdot1],
\end{aligned}\right\}\cdots(C)$$

(注意)　(57)各式曰一級排列式.每式右邊之第二項,其分母之字母,爲消去之未知量之係數.其分子兩因數,後前兩字母,與分母同.前後兩字母與第一項同.

同法設

$$\left.\begin{aligned}
[cc\cdot2]&=[cc\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]},\\
[cd\cdot2]&=[cd\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][bd\cdot1]}{[bb\cdot1]},\\
[ce\cdot2]&=[ce\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][be\cdot1]}{[bb\cdot1]},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[qM\cdot2]&=[qM\cdot1]-\frac{[qb\cdot1][bM\cdot1]}{[bb\cdot1]}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

$$\left.\begin{aligned}
[dd\cdot 3] &= [dd\cdot 2]-\frac{[dc\cdot 2][cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\\
[de\cdot 3] &= [de\cdot 2]-\frac{[dc\cdot 2][ce\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\\
\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[qM\cdot 3] &= [qM\cdot 2]-\frac{[qc\cdot 2][cM\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(59)$$

$$\left.\begin{aligned}
[qq\cdot q-1] &= [qq\cdot q-2]-\frac{[qp\cdot q-2][pq\cdot q-2]}{[pp\cdot q-2]},\\
[qM\cdot q-1] &= [pM\cdot q-2]-\frac{[qp\cdot q-2][pM\cdot q-2]}{[pp\cdot q-2]}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(60)$$

(58)曰二級排列式,(59)曰三級排列式,(60)曰$(q-1)$級排列式.其字母之分配,俱如一級排列式.

77. 由(C)消去z_2得

$$\left.\begin{aligned}
[cc\cdot 2]z_3+[cd\cdot 2]z_4+\cdots\cdots+[cq\cdot 2]z_q &= [cM\cdot 2],\\
[dc\cdot 2]z_3+[dd\cdot 2]z_4+\cdots\cdots+[dq\cdot 2]z_q &= [dM\cdot 2],\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots\\
[qc\cdot 2]z_3+[qd\cdot 2]z_4+\cdots\cdots+[qq\cdot 2]z_q &= [qM\cdot 2].
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(D)$$

由(D)消去z_3,得

$$\left.\begin{aligned}
[dd\cdot 3]z_4+\cdots\cdots\cdots\cdots+[dq\cdot 3]z_q &= [dM\cdot 3],\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots\cdots\\
[qd\cdot 3]z_4+\cdots\cdots\cdots\cdots+[qq\cdot 5]z_q &= [qM\cdot 3].
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(E)$$

依法,繼續消去之,得

$$\left.\begin{aligned}
[pp\cdot q-2]z_{q-1}+[pq\cdot q-2]z_q &= [pM\cdot q-2],\\
[qp\cdot q-2]z_{q-1}+[qq\cdot q-2]z_q &= [qM\cdot q-2].
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(F)$$

最後得　　　$[qq\cdot q-1]zq=[qM\cdot q-1]$.……………………$(G)$

由(G)求zq之值.代入(F)之任一式,求z_{q-1}之值.

同理,由(E)求z_4.由(D)求z_3.由(C)求z_2.由(A)求z_1.

78. 排列方程. 今選擇$(A),(C),(D),(E),(F),(G)$之第一式而組合之,得

$$\left.\begin{array}{r}[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+\cdots\cdots+[ap]z_{q-1}+[aq]z_q=[aM],\\ [bb\cdot1]z_2+[bc\cdot1]+\cdots\cdots\cdots+[bp.1]z_{q-1}+[bq\cdot1]z_q=[bM\cdot1],\\ [cc\cdot2]z_3+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+[cp.2]z_{q-1}+[cq\cdot2]z_q=[cM\cdot2],\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ [qq.q-1]z_q=[qM\cdot q-1].\end{array}\right\}(61)$$

於(61)各式,自上而下,求各係數.自下而上,求得z_q, z_{q-1},……z_3, z_2, z_1之值.

79. 排列方程之表解及其檢點. 列(78節)之(C)爲表式,得

(C)

	z_2 b·1]	z_3 c·1]	z_4 d·1]	………	zq q·1]	常數 M·1]	檢點 s·1]
[b	[bb·1]	[bc·1]	[bd·1]	………	[bq·1]	[bM·1]	[bs·1]
[c		[cc·1]	[cd·1]	………	[cq·1]	[cM·1]	[cs·1]
[d			[dd·1]	………	[dq·1]	[dM·1]	[ds·1]
					⋮	⋮	[qs·1]
[q					[qq·1]	[qM·1]	⋮
[M						[MM·1]	[Ms·1]
[s							

上表中

$$
\begin{aligned}
&[bb\cdot 1]+[bc\cdot 1]+[bd\cdot 1]+\cdots\cdots+[bq\cdot 1]+[bM\cdot 1]\\
&\quad=[bb]-\frac{[ba][ab]}{[aa]}+[pc]-\frac{[ba][ac]}{[aa]}+[bd]-\frac{[ba][ad]}{[aa]}\\
&\quad+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad+[bp]-\frac{[ba][aq]}{[aa]}+[bM]-\frac{[ba][aM]}{[aa]}\\
&\quad=[bb]+[bc]+[bd]+\cdots\cdots+[bq]+[bM]\\
&\qquad-\frac{[ba]}{[aa]}\{[ab]+[ac]+[ad]+\cdots\cdots+[aq]+[aM]\}\\
&\quad=\{[bs]-[ba]\}-\frac{[ba]}{[aa]}\{[as]-[aa]\}\\
&\quad=[bs]-\frac{[ba][as]}{[aa]}=[bs\cdot 1].
\end{aligned}
$$

同理，

$$
\left.\begin{aligned}
&[cb\cdot 1]+[cc\cdot 1]+[cd\cdot 1]+\cdots\cdots+[cq\cdot 1]+[cM\cdot 1]=[cs\cdot 1],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots,\\
&[Mb\cdot 1]+[Mc\cdot 1]+[Md\cdot 1]+\cdots\cdots+[Mq\cdot 1]+[MM\cdot 1]=[Ms\cdot 1],\\
&[sb\cdot 1]+[sc\cdot 1]+[sd\cdot 1]+\cdots\cdots+[sq\cdot 1]+[sM\cdot 1]=[ss\cdot 1].
\end{aligned}\right\}
$$

列(78節)之(D)爲表式，得

(D)

	z_3 $c\cdot 2]$	z_4 $d\cdot 2]$	………	z_q $q\cdot 2]$	常數 $M\cdot 2]$	檢點 $s\cdot 2]$
$[c$	$[cc\cdot 2]$	$[cd\cdot 2]$	………	$[cq\cdot 2]$	$[cM\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$
$[d$		$[dd\cdot 2]$	………	$[dq\cdot 2]$	$[dM\cdot 2]$	$[ds\cdot 2]$
				⋮	⋮	⋮
$[q$				$[qq\cdot 2]$	$[qM\cdot 2]$	$[qs\cdot 2]$
$[M$					$[MM\cdot 2]$	$[Ms\cdot 2]$
$[s$						

上表中，

$$[cc\cdot2]+[cd\cdot2]+\cdots\cdots+[cq\cdot2]+[cM\cdot2]$$

$$=[cc\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}+[cd\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+[cq\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][bq\cdot1]}{[bb\cdot1]}+[cM\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][bM\cdot1]}{[bb\cdot1]}$$

$$=[cc\cdot1]+[cd\cdot1]+\cdots\cdots+[cq\cdot1]+[cM\cdot1]$$

$$-\frac{[cb\cdot1]}{[bb\cdot1]}\{[bc\cdot1]+[bd\cdot1]+\cdots\cdots+[bq\cdot1]+[bM\cdot1]$$

$$=[cs\cdot1]-[cb\cdot1]-\frac{[cb\cdot1]}{[bb\cdot1]}\{[bs\cdot1]-[bb\cdot1]\}$$

$$=[cs\cdot1]-\frac{[cb\cdot1][bs\cdot1]}{[bb\cdot1]}=[cs\cdot2].$$

同理，
$$\left.\begin{aligned}&[dc\cdot2]+[dd\cdot2]+\cdots\cdots+[dq\cdot2]+[dM\cdot2]=[ds\cdot2],\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots\cdots,\\&[Mc\cdot2]+[Md\cdot2]+\cdots\cdots+[Mq\cdot2]+[MM\cdot2]=[Ms\cdot2],\\&[sc\cdot2]+[sd\cdot2]+\cdots\cdots+[sq\cdot2]+[sM\cdot2]=[ss\cdot2],\end{aligned}\right\}$$

依此數推，得
$$\left.\begin{aligned}&[dd\cdot3]+\cdots\cdots+[dq\cdot3]+[dM\cdot3]=[ds\cdot3],\\&[sd\cdot3]+\cdots\cdots+[sq\cdot3]+[sM\cdot3]=[ss\cdot3].\end{aligned}\right\}$$

最後，得
$$\left.\begin{aligned}&[qq\cdot q-1]+[qM\cdot q-1]=[qs\cdot q-1]\\&[sq\cdot q-1]+[sM\cdot q-1]=[ss\cdot q-1]\end{aligned}\right\}$$

及
$$\left.\begin{aligned}[MM\cdot q]&=[Ms\cdot q],\\ [sM\cdot q]&=[ss\cdot q].\end{aligned}\right\}$$

查以上證明,檢點方法,與(54節)所示完全一致.於是逐式檢點,縱有錯誤,可隨時發見,不虞有毫釐千里之失.

80. $[vv]$之值. 改舛差方程(31)為

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= a_1z_1 + b_1z_2 + c_1z_3 + \cdots\cdots + q_1z_q - M_1,\\
v_2 &= a_2z_1 + b_2z_2 + c_2z_3 + \cdots\cdots + q_2z_q - M_2,\\
v_3 &= a_3z_1 + b_3z_2 + c_3z_3 + \cdots\cdots + q_3z_q - M_3,\\
\cdots &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
v_n &= a_nz_1 + b_nz_2 + c_nz_3 + \cdots\cdots + q_nz_q - M_n.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

以$M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$順次乘(31)之各項而相加,得

$$[Mv]=[aM]z_1+[bM]z_2+[cM]z_3+\cdots\cdots+[qM]z_q-[MM].$$

以$a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n$順次乘(31)之各項而相加,得

$$[av]=[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+\cdots\cdots+[aq]z_q-[aM]=0.$$

同理$[bv]=0, [cv]=0, \cdots\cdots$

以$v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots v_n$順次乘(31)之各項而相加,得

$$\begin{aligned}
[vv] &= [av]z_1+[bv]z_2+[cv]z_3+\cdots\cdots+[qv]z_q-[Mv]\\
&= 0-[Mv]\\
&= -[Mv].
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad -[vv]=[aM]z_1+[bM]z_2+[cM]z_3+\cdots\cdots+[qM]z_q-[MM].$$

由(32)之第一式,得

$$z_1=-\frac{[ab]}{[aa]}z_2-\frac{[ac]}{[aa]}z_3-\frac{[ad]}{[aa]}z_3-\cdots\cdots-\frac{[aq]}{[aa]}z_q+\frac{[aM]}{[aa]}.$$

$$\therefore\quad -[vv]=\left([bM]-\frac{[ba][ab]}{[aa]}\right)z_2$$
$$+\left([cM]-\frac{[ca][aM]}{[aa]}\right)z_3$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\left([qM]-\frac{[qa][aM]}{[aa]}\right)z_q$$
$$-\left([MM]-\frac{[Ma][aM]}{[aa]}\right)$$
$$=[bM\cdot1]z_2+[cM\cdot1]z_3+[dM\cdot1]z_4+\cdots\cdots$$
$$+[qM\cdot1]z_q-[MM\cdot1].$$

同理,由(76節)之(C)之第二式,求得z_2之值,代入上式,則得

$$-[vv]=[cM\cdot2]z_3+[dM\cdot2]z_4+\cdots\cdots+[qM\cdot2]z_q-[MM\cdot2]$$
$$=[dM\cdot3]z_4+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+[qM\cdot3]z_q-[MM\cdot3]$$
$$=[eM\cdot4]z_5+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+[qM\cdot4]z_q-[MM\cdot4]$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$=[qM\cdot q-1]z_q-[MM\cdot q-1]$$
$$=-[MM\cdot q].$$
$$\therefore\quad [vv]=[MM\cdot q]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(62)$$

81. **排列式之計算表.** 集合(79節)各式,作一總表,俾計算時,眉目清楚.若未知量過多,則表式複雜,反難了解.茲祇舉四未知量者爲例,餘可類推,凡乘除以用對數爲便,表中並及之.若觀測方程之係數,不甚複雜,對數各欄,當然省去

排列式計算表

	z_1 a	z_2 b	z_3 c	z_4 d	常數 M	檢點 s	
1 2 3 ⋮ n	a_1 a_2 a_3 ……… a_n	b_1 b_2 b_3 ……… b_n	c_1 c_2 c_3 ……… c_n	d_1 d_2 d_3 ……… d_n	M_1 M_2 M_3 ……… M_n	s_1 s_2 s_3 ……… s_n	觀測方程
a	$[aa]$ $\log[aa]$	$[ab]$ $\log[ab]$	$[ac]$ $\log[ac]$	$[ad]$ $\log[ad]$	$[aM]$ $\log[aM]$	$[as]$ $\log[as]$	法方程
b	$\log\Delta_b$	$[bb]$ $\Delta_b[ab]$ $\log\Delta_b[ab]$	$[bc]$ $\Delta_b[ac]$ $\log\Delta_b[ad]$	$[bd]$ $\Delta_b[ad]$ $\log\Delta_b[ad]$	$[bM]$ $\Delta_b[aM]$ $\log\Delta_b[aM]$	$[bs]$ $\Delta_b[as]$ $\log\Delta_b[as]$	$\Delta_b=\frac{[ab]}{[aa]}$
c	$\log\Delta_c$		$[cc]$ $\Delta_c[ac]$ $\log\Delta_c[ac]$	$[cd]$ $\Delta_c[ad]$ $\log\Delta_c[ad]$	$[cM]$ $\Delta_c[aM]$ $\log\Delta_c[aM]$	$[cs]$ $\Delta_c[as]$ $\log\Delta_c[as]$	$\Delta_c=\frac{[ac]}{[aa]}$
d	$\log\Delta_d$			$[dd]$ $\Delta_d[ad]$ $\log\Delta_d[ad]$	$[dM]$ $\Delta_d[aM]$ $\log\Delta_d[aM]$	$[ds]$ $\Delta_d[as]$ $\log\Delta_d[as]$	$\Delta_d=\frac{[ad]}{[aa]}$
M	$\log\Delta_m$				$[MM]$ $\Delta_m[aM]$ $\log\Delta_m[aM]$	$[Ms]$ $\Delta_m[as]$ $\log\Delta_m[as]$	$\Delta_m=\frac{[aM]}{[aa]}$

b		$[bb\cdot1]$ $\log[bb\cdot1]$	$[bc\cdot1]$ $\log[bc\cdot1]$	$[bd\cdot1]$ $\log[bd\cdot1]$	$[bM\cdot1]$ $\log[bM\cdot1]$	$[bs\cdot1]$ $\log[bs\cdot1]$	第一排列方程
c	$\log B_c$		$[cc\cdot1]$ $B_c[bc\cdot1]$ $\log B_c[bc\cdot1]$	$[cd\cdot1]$ $B_c[bd\cdot1$ $\log B_c[bd\cdot1]$	$[cM\cdot1]$ $B_c[bM\cdot1]$ $\log B_c[bM\cdot1]$	$[cs\cdot1]$ $B_c[bs\cdot1]$ $\log B_c[bs\cdot1]$	$B_c=\frac{[bc\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
d	$\log B_d$			$[dd\cdot1]$ $B_d[bd\cdot1]$ $\log B_d[bd\cdot1]$	$[dM\cdot1]$ $B_d[bM\cdot1]$ $\log B_d[bM\cdot1]$	$[ds\cdot1]$ $B_d[bs\cdot1]$ $\log B_d[bs\cdot1]$	$B_d=\frac{[bd\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
M	$\log B_m$				$[MM\cdot1]$ $B_m[bM\cdot1]$ $\log B_m[bM\cdot1]$	$[Ms\cdot1]$ $B_m[bs\cdot1]$ $\log B_m[bs\cdot1]$	$B_m=\frac{[bM\cdot1]}{[bb\cdot1]}$
c			$[cc\cdot2]$ $\log[cc\cdot2]$	$[cd\cdot2]$ $\log[cd\cdot2]$	$[cM\cdot2]$ $\log[cM\cdot2]$	$[cs\cdot2]$ $\log[cs\cdot2]$	第二排列方程
d	$\log C_d$			$[dd\cdot2]$ $C_d[cd\cdot2]$ $\log C_d[cd\cdot2]$	$[dM\cdot2]$ $C_d[cM\cdot2]$ $\log C_d[cM\cdot2]$	$[ds\cdot2]$ $C_d[cs\cdot2]$ $\log C_d[cs\cdot2]$	$C_d=\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
M	$\log C_m$				$[MM\cdot2]$ $C_m[cM\cdot2]$ $\log C_m[cM\cdot2]$	$[Ms\cdot2]$ $C_m[cs\cdot2]$ $\log C_m[cs\cdot2]$	$C_m=\frac{[cM\cdot2]}{[cc\cdot2]}$
d				$[dd\cdot3]$ $\log[db\cdot3]$	$[dM\cdot3]$ $\log[dM\cdot3]$	$[ds\cdot3]$ $\log[ds\cdot3]$	第三排列方程
M	$\log D_m$				$[MM\cdot3]$ $D_m[dM\cdot3]$ $\log D_m[dM\cdot3]$	$[ds\cdot3]$ $D_m[Ms\cdot3]$ $\log D_m[ds\cdot3]$	$D_m=\frac{[dM\cdot3]}{[dd\cdot3]}$
M				$[vv]=$	$[MM\cdot4]$	$[Ms\cdot4]$	

(說明) 上表之計算手續如下:

(i) 依常法作觀測方程表.置法方程之係數於法方程欄內.

(ii) 查對數表,得 $\log[aa]$, $\log[ab]$,........$\log[as]$ 各值.

(iii) 由 $\log A_b=\log[ab]-\log(aa)$, 求 $\log A_b$.

(iv) 由 $\log A_b[ab]=\log A_b+\log[ab]$, 求 $\log A_b[aa]$. 同理,求法方程欄內第二列各對數.

(v) 查對數,得 $A_b[ab]$, $A_b[ac]$,........$A_b[as]$ 各值.

(vi) 由 $\log A_c=\log[ac]-\log[aa]$, 求 $\log A_c$.

(vii) 由 $\log A_c[ac]=\log A_c+\log[ac]$, 求 $\log A_c[ac]$.

(viii) 同理,求法方程欄內各值.

(ix) 由 $[bb\cdot 1]=[bb]-\dfrac{[ba][ab]}{[aa]}=[bb]-A_b[ab]$,

求 $[bb\cdot 1]$　同理,求 $[bc\cdot 1]$........$[Ms\cdot 1]$,

(x) 由 $[cc\cdot 1]=[cc]-\dfrac{[ca][ac]}{[aa]}=[cc]-A_c[ac]$, 求 $[cc\cdot 1]$.

同理,求第一排列方程欄內各值.

(xi) 由 $[cc\cdot 2]=[cc\cdot 1]-\dfrac{[cb\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=[cc\cdot 1]-B_c[bc\cdot 1]$,

求 $[cc\cdot 2]$. 同理,求 $[cd\cdot 2]$,........$[Ms\cdot 2]$.

(xii) 由 $[dd\cdot 3]=[dd\cdot 2]-\dfrac{[dc\cdot 2][cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=[dd\cdot 2]-C_d[cd\cdot 2]$,

求 $[dd\cdot 3]$. 同理,求 $[dM\cdot 3]$,........$[Ms\cdot 3]$.

(xiii) 最後,由

$$[MM\cdot4]=[MM\cdot3]-\frac{[Md\cdot3][dM\cdot3]}{[dd\cdot3]}=[MM\cdot3]-D_M[dM\cdot3],$$

求 $[MM\cdot4]$. 同理,求 $[Ms\cdot4]$.

(xiv) 由 $[dd\cdot3]z_4=[dM\cdot3]$, 求 $z_4=\frac{[dM\cdot3]}{[dd\cdot3]}=D_M$.

故 z_4 之值,可由 $\log D_M$ 查對數求之.

(xv) 由 (63), $[vv]=[MM\cdot4]$.故單位權之或是舛差(46)

$$r=\pm0.6745\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{n-q}}$$

內之 $\Sigma v^2=[vv]$, 毋須另求.

(xvi) $[dd\cdot3]$ 爲 z_4 之權(見後 83 節).實際求權,以 (70 節) 及 (74 節) 之法爲便,此結果僅用之以檢點其錯誤而已.

(例一) 有下列觀測方程,求各量之最或是值及或是舛差

$$\left.\begin{array}{lrl}
1. & -z_1+z_2+z_3+z_4 & =+0.1,\\
2. & z_1+z_2-z_3-z_4 & =+0.6,\\
3. & z_1+2z_2-z_3+z_4 & =+0.1,\\
4. & z_1-z_2\qquad-2z_4 & =+0.3,\\
5. & z_2-z_3+z_4 & =-0.1,\\
6. & z_1\qquad-z_3\qquad & =+0.4,
\end{array}\right\}$$

(I) 觀測方程

號數	z_1 a	z_2 b	z_3 c	z_4 d	常數 M	檢點 s
1	−1	1	1	1	0.1	2.1
2	1	1	−1	−1	0.6	0.6
3	1	−2	−1	1	0.1	−0.9
4	1	−1	0	−2	0.3	−1.7
5	0	+1	−1	1	−0.1	0.9
6	1	0	−1	0	0.4	0.4
共	3	0	−3	0	1.4	1.4

(II) 法方程之計算

號數	aa	ab	ac	ad	aM	as	bb	bc	bd	bM
1	1	−1	−1	−1	−0.1	−2.1	1	1	1	+0.1
2	1	1	−1	−1	0.6	0.6	1	−1	−1	0.6
3	1	−2	1	1	0.1	−0.9	4	2	−2	−0.2
4	1	−1	−2	−2	0.3	−1.7	1	0	2	−0.3
5	1	0	0	0	0	0	1	−1	1	−0.1
6	0	0	−1	0	0.4	0.4	0	0	0	0
共	5	−3	−4	−3	1.3	−3.7	8	1	1	0.1

號數	bs	cc	cd	cM	cs	dd	dM	ds	MM	Ms
1	2.1	1	1	0.1	2.1	1	0.1	2.1	0.01	0.21
2	0.6	1	1	−0.6	−0.6	1	−0.6	−0.6	0.36	0.36
3	1.8	1	−1	−0.1	0.9	1	0.1	−0.9	0.01	−0.09
4	1.7	0	0	0	0	4	−0.6	3.4	0.09	−0.51
5	0.9	1	−1	0.1	−0.9	1	−0.1	0.9	0.01	−0.09
6	0	1	0	−0.4	−0.4	0	0	0	0.16	0.16
共	7.1	5	0	−0.9	1.1	8	−1.1	4.9	0.64	0.04

(III) 法方程及其排列方程

	z_1 a	z_2 b	z_3 c	z_4 d	常數 M	檢點 s	
a	5	−3	−4	−3	1.3	−3.7	法方程
b		8	1	1	0.1	7.1	本欄計算,因數字
	−0.6	1.8	2.4	1.8	−0.78	2.22	簡單,不用對數
c			5	0	−0.9	1.1	
	−0.8		3.2	2.4	−1.04	2.96	
d				8	−1.1	4.9	
	−0.6	A		1.8	−0.78	2.22	
M					0.64	0.04	
	0.26				0.338	−0.962	
b		6.2	−1.4	−0.8	0.88	4.88	第一排列方程
		0.7924	0.1641	$\bar{1}$.9031	$\bar{1}$.9445	0.6884	
c			1.8	−2.4	0.14	−1.86	$\bar{1}$.9031 = 9.9031 − 10,
			0.316	0.181	−0.199	−1.102	餘類推,
	$\bar{1}$.3537(−)		$\bar{1}$.4998	$\bar{1}$.2568	1.2982	0.0421	
d				6.2	−0.32	2.68	(+)及(−)爲眞數
		B		0.103	−0.114	−0.63	之符號
	$\bar{1}$.1107(−)			$\bar{1}$.0138	$\bar{1}$.0552	$\bar{1}$.7991	
M					0.300	1.002	
					0.125	0.693	
	$\bar{1}$.1521(+)				1.0966	$\bar{1}$.8405	
c			1.484	−2.581	0.339	−0.758	第二排列方程
			0.1715	0.4118	$\bar{1}$.5302	$\bar{1}$.8797	
d				6.007	+0.206	3.310	
		C		4.489	−0.589	1.318	
	0.2403(−1)			0.6521	$\bar{1}$.7705	0.1200	
M					0.175	0.309	
					0.077	−0.173	
	$\bar{1}$ 3587(+)				$\bar{2}$.8889	$\bar{1}$.2384	
d				1.608	+0.385	1.99	第三排列方程
		D		0.2063	$\bar{1}$.5832	0.2993	
M					0.048	0.482	$P_{z_4}=[dd\cdot 3]=1.6$
					0.091	0.475	$z_4=0.2382$
	$\bar{1}$.3769(+) = $\log z_4$				$\bar{2}$.9601	$\bar{1}$.6762	
M					0.007	0.007	$=[vv]$

以[vv]之值代入(49),得

$$r \ =0.6745\sqrt{\frac{0.007}{6-4}}=0.03986,$$

$$r_{z_4}=\frac{r}{\sqrt{1.6}}=\frac{0.03986}{1.26}=0.0317$$

$$\therefore \quad z_5=0.238\pm0.032.$$

z_1, z_2, z_3 之值,俟於下節求之.

82. 由排列式求未知量之值. 由(81節)之表,得

$$A_b=\frac{[ab]}{[aa]},\ A_c=\frac{[ac]}{[aa]},A_d=\frac{[ad]}{[aa]},\ A_M=\frac{[aM]}{[aa]}.$$

$$B_c=\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\ B_d=\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},\ B_M=\frac{[bM\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}.$$

$$C_d=\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]},\ C_M=\frac{[cM\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}.$$

$$D_M=\frac{[dM\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}.$$

以上各值,代入(61),得

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -A_b z_2 - A_c z_3 - A_d z_4 + A_M, \\ z_2 &= -B_c z_3 - B_d z_4 + B_M, \\ z_3 &= -C_d z_3 + C_M, \\ z_4 &= D_M. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

改(63)為表如下:

	D	C	B	A
M	D_m	C_m	B_m	A_m
d		$-C_d z_4$	$-B_d z_4$	$-A_d z_4$
c			$-B_c z_3$	$-A_c z_3$
b				$-A_b z_2$
z	z_4	z_3	z_2	z_1
$\log Z$	$\log z_4$	$\log z_3$	$\log z_2$	
$\log C$	$\log C_d$			
$\log B$	$\log B_d$	$\log B_c$		
$\log A$	$\log A_d$	$\log A_c$	$\log A_b$	
$\log(Cz)$	$\log C_d z_4$			
$\log(Bz)$	$\log B_d z_4$	$\log B_c z_3$		
$\log(Az)$	$\log A_d z_4$	$\log A_c z_3$	$\log A_b z_2$	

上表之計算手續如下:

(i) 由(81節)之表,檢得 A_M, B_M, C_M, D_M.

(ii) 又檢點 $\log A_b$, $\log A_c$, $\log A_d$, $\log B_c$, $\log B_d$, $\log C_d$.

(iii) 由 $\log D_M$, 求 $\log z_4$. 因得 z_4.

(iv) 由 $\log(C_d z_4)=\log C_d+\log z_4$, 求 $\log(C_d z_4)$ 等.

(v) 由 $\log(C_d z_4)$, 求 $-C_d z_4$. 同理, 求 $-B_d z_4$, $-A_a z_4$.

(vi) 由(66)之第三式,求 z_3, 因得 $\log z_3$.

(vii) 由 $\log B_c z_3=\log B_c+\log z_3$, 求 $\log B_c z_3$.

(viii) 由 $\log B_c z_3$, 求 $-B_c z_3$. 同理, 求 $-A_c z_3$.

(ix) 由 (63) 之第二式，求 z_2. 因得 $\log z_2$.

(x) 由 $\log(A_b z_2) = \log A_b + \log z_2$, 求 $\log A_b z_2$.

(xi) 由 $\log(A_b z_2)$, 求 $-A_b z_2$.

(xii) 由 (63) 之第一式，求 z_1.

(例一) 求前節 (例 1) 各未知量之值.

	D	C	B	A
M	0.238	0.228	0.142	0.260
d		0.414	0.031	0.143
c			0.145	0.514
b				0.191
z	0.238	0.642	0.318	1.108
$\log z$	$\bar{1}.3769$	$\bar{1}.8075$	$\bar{1}.5024$	
$\log C$	0.2403			
$\log B$	$\bar{1}.1107$	$\bar{1}.3537$		
$\log A$	$\bar{1}.7782$	$\bar{1}.9031$	$\bar{1}.7782$	
$\log(Cz)$	1.6172			
$\log(Bz)$	$\bar{2}.4876$	1.1612		
$\log(Az)$	$\bar{1}.1551$	$\bar{1}.7106$	$\bar{1}.2806$	

$$\therefore \quad z_1 = 1.108,\ z_2 = 0.318,\ z_3 = 0.642,\ z_4 = 0.238$$

83. 由排列式求未知量之權.

設 (35) 之 $n=4$, 及 $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1$. 則 (35a) 應爲

$$\left.\begin{aligned}
[aa]z_1+[ab]z_2+[ac]z_3+[ad]z_4&=A,\\
[ba]z_1+[bb]z_2+[bc]z_3+[bd]z_4&=B,\\
[ca]z_1+[cb]z_2+[cc]z_3+[cd]z_4&=C,\\
[da]z_1+[db]z_2+[dc]z_3+[dd]z_4&=D.
\end{aligned}\right\}$$

而(70節)之(M)應爲

$$\left.\begin{aligned}
z_1&=Q_1'\,A+Q_2'\,B+Q_3'\,C+Q_3'\,D,\\
z_2&=Q_1''\,A+Q_2''\,B+Q_3''\,C+Q_4'\,D,\\
z_3&=Q_1'''A+Q_2'''B+Q_3'''C+Q_4'''D,\\
z_4&=Q_1^{iv}A+Q_2^{iv}B+Q_3^{iv}C+Q_4^{iv}D.
\end{aligned}\right\}$$

由(70節)之(N),知

$$\frac{1}{p_{z_1}}=Q_1',\ \frac{1}{p_{z_2}}=Q_2'',\ \frac{1}{p_{z_3}}=Q_3''',\ \frac{1}{p_{z_4}}=Q_4^{iv}.$$

卽　$A=B=C=0$ 及 $D=1$ 時,z_4 之值卽 $\frac{1}{p_{z_4}}$ 之值.

但　$A=[aM],B=[bM],C=[cM],D=[dM]\,z_4=D_M=\frac{[dM\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}.$

故　$[aM]=[bM]=[cM]=0$ 及 $[dM]=1$ 時,

$$\left.\begin{aligned}
[bM\cdot 1]&=[bM]-\frac{[ba][aM]}{[aa]}=0-0=0,\\
[cM\cdot 1]&=[cM]-\frac{[ca][aM]}{[aa]}=0-0=0,\\
[dM\cdot 1]&=[dM]-\frac{[aa][aM]}{[aa]}=1-0=1.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
[cM\cdot 2]&=[cM\cdot 1]-\frac{[cb\cdot 1][bM\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0-0=0,\\
[dM\cdot 2]&=[dM\cdot 1]-\frac{[bd\cdot 1][bM\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=1-0=1,\\
[dM\cdot 3]&=[dM\cdot 2]-\frac{[dc\cdot 2][cM\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=1-0=1.
\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{1}{p_{z_4}}=D_M=\frac{[dM\cdot 3]}{[dd\cdot 3]}=\frac{1}{[dd\cdot 3]}.$$

$$\therefore\quad p_{z_4}=[dd\cdot 3].$$

同理，　$A=B=D=0$ 及 $C=1$ 時，z_3 之值 Q_3''' 將爲 $\frac{1}{p_{z_3}}$ 之值.

故　　$[aM]=[bM]=[dM]=0$ 及 $[cM]=1$ 時，

$$\left.\begin{aligned}
[bM\cdot 1]&=\frac{[bM][aM]}{[aa]}=0-0=0,\\
[dM\cdot 1]&=[cM]-\frac{[ca][aM]}{[aa]}=1-0=1,\\
[dM\cdot 1]&=[dM]-\frac{[da][aM]}{[aa]}=0-0=0.
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
[cM\cdot 2]&=[cM\cdot 1]-\frac{[cb\cdot 1][bM\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=1-0=1,\\
[dM\cdot 1]&=[dM]-\frac{[da][aM]}{[aa]}=0-0=0,
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
[cM\cdot 2]&=[cM\cdot 1]-\frac{[cb\cdot 1][bM\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=1-0=1,\\
[dM\cdot 2]&=[dM\cdot 1]-\frac{[db\cdot 1][dM\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=0-0,
\end{aligned}\right\}$$

$$[dM\cdot3]=[dM\cdot2]-\frac{[dc\cdot2][cM\cdot2]}{[cc\cdot2]}=0-\frac{[dc\cdot2]}{[cc\cdot2]}.$$

$$\frac{1}{p_{z_3}}=-C_d z_4+C_M=-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}\cdot\frac{[dM\cdot3]}{[dd\cdot3]}+\frac{[cM\cdot2]}{[cc\cdot2]}$$

$$=-\frac{[cd\cdot2]}{[cc\cdot2]}\cdot\frac{\left(-\frac{[dc\cdot2]}{[cc\cdot2]}\right)}{[dd\cdot3]}+\frac{1}{[cc\cdot2]}$$

$$=\frac{\frac{[cd\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}+[dd\cdot3]}{[cc\cdot2][dd\cdot3]}$$

$$=\frac{\frac{[cd\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}+\left([dd\cdot2]-\frac{[cd\cdot2]^2}{[cc\cdot2]}\right)}{[cc\cdot2][dd\cdot3]}$$

$$=\frac{[dd\cdot2]}{[cc\cdot2][dd\cdot3]}.$$

$$\therefore\quad p_{z_3}=\frac{[dd\cdot3][cc\cdot2]}{[dd\cdot2]}.$$

同理，　$[aM]=[cM]=[dM]=0$ 及 $[bM]=1$ 時，

$$p_{z_2}=\frac{[dd\cdot3][cc\cdot2][bb\cdot1]}{[dd\cdot2]_c[cc\cdot1]}.$$

又　$[bM]=[cM]=[dM]=0$ 及 $[aM]=1$ 時，

$$p_{z_1}=\frac{[dd\cdot3][cc\cdot2][bb\cdot1][aa]}{[dd\cdot2]_c[cc\cdot1]_d[bb]}.$$

彙列四未知量之權，得

$$\left.\begin{aligned}
p_{z_4}&=[dd\cdot 3],\\
p_{z_3}&=\frac{[dd\cdot 3][cc\cdot 2]}{[dd\cdot 2]},\\
p_{z_2}&=\frac{[dd\cdot 3][cc\cdot 2][bb\cdot 1]}{[dd\cdot 2]_c[cc\cdot 1]},\\
p_{z_1}&=\frac{[dd\cdot 3][cc\cdot 2][bb\cdot 1][aa]}{[dd\cdot 2]_c[cc\cdot 1]_b[bb]}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(64)$$

(注意) $[dd\cdot 2]=[dd\cdot 1]-\dfrac{[db\cdot 1][bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$,

而 $[dd\cdot 2]_c=[dd\cdot 1]-\dfrac{[dc\cdot 1][cd\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}$,

$[cc\cdot 1]=[cc]-\dfrac{[ca][ac]}{[aa]}$,

而 $[cc\cdot 1]_b=[cc]-\dfrac{[cb][bc]}{[bb]}$.

若未知量有 q 個,則

$$p_{z_q}=[qq.q-1],$$

$$p_{z_1}=\frac{[qq.q-1][pp.q-2]\cdots\cdots\cdots[bb\cdot 1][aa]}{[qq.q-2]_p[pp.q-3]_q\cdots\cdots[cc\cdot 1]_b[bb]}.$$

(例一) 求(81節)之(例1)之權及或是殆差.

由(81節)之計算表,檢出

$\log[dd\cdot 3]=0.2063$, $\log[dd\cdot 2]=0.7851$,

$\log[cc\cdot 2]=0.1715$, $\log[cc\cdot 1]=0.2553$,

$\log[bb\cdot 1]=0.7924$, $\log[bb]=0.9031$,

$\log[aa]=0.6990$.

又
$$[dd\cdot 2]_c=[dd\cdot 1]-\frac{[dc\cdot 1][cd\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}$$
$$=6.2-\frac{(-2.4)^2}{1.8}$$
$$=3$$
$$[cc\cdot 1]_b=[cc]-\frac{[cb][bc]}{[bb]}$$
$$=5-\frac{1^2}{8}$$
$$=\frac{39}{8}=4.875.$$
$$\log[dd\cdot 2]_c=0.4771$$
$$\log[cc\cdot 1]_b=0.6880$$
$$\therefore\ \left.\begin{aligned}\log p_{z_4}&=0.2063,\\ \log p_{z_3}&=\bar{1}.5927,\\ \log p_{z_2}&=0.4378,\\ \log p_{z_1}&=\bar{1}.8010.\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}p_{z_4}&=1.61\\ p_{z_3}&=0.38\\ p_{z_2}&=2.74\\ p_{z_1}&=0.63\end{aligned}\right\}$$

但
$$\left.\begin{aligned}r&=0.03986\\ \therefore\ r_{z_4}&=\frac{r}{\sqrt{1.6}}=0.0317\\ r_{z_3}&=\frac{r}{\sqrt{0.38}}=0.0637\\ r_{z_2}&=\frac{r}{\sqrt{2.74}}=0.0248\\ r_{z_1}&=\frac{r}{\sqrt{0.63}}=0.0498\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}z_1&=1.108\pm0.050\\ z_2&=0.318\pm0.025\\ z_3&=0.643\pm0.064\\ z_4&=0.238\pm0.032\end{aligned}\right\}$$

84. 用排列式解帶權之觀測方程而有規約者.

因 $[paa]=[a\sqrt{p}\cdot a\sqrt{p}]$, $[pab]=[a\sqrt{p}\cdot b\sqrt{p}]$,…………………

故視 $a_1\sqrt{p_1}$, $a_2\sqrt{q_2}$, $b_1\sqrt{p_1}$, $b_2\sqrt{p_2}$, 等爲(31)之係數,而依(32)所作之法方程,卽(35).因之法方程帶權與不帶權,於排列式計算法,殊無區別.

又每一規約方程,本可利用之以消去一未知量,而觀測方程之個數,仍無增減.故有無規約方程,於排列式計算法,仍無妨礙.

(例一) 用葛斯氏排列式,求(75節)之(例2)之最或是值及或是外差.

已知改正值之觀方程爲

$$\left.\begin{aligned} v_1&=0 \text{ 帶權 } 4\\ v_2&=0 \text{ 帶權 } 4\\ v_3&=0 \text{ 帶權 } 6\\ v_4&=0 \text{ 帶權 } 6\\ v_5&=0 \text{ 帶權 } 6\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

且改正值之規約方程爲

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_3+v_2&=10'',\\ v_3+v_4+v_5&=-20''.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

由(A)及(B)消去 v_1, v_5, 得

$$\left.\begin{aligned}
-v_2+v_3 &= 0 \text{ 帶權 } 4\\
v_2 &= 0 \text{ 帶權 } 4\\
v_3 &= 0 \text{ 帶權 } 6\\
v_4 &= 0 \text{ 帶權 } 6\\
v_2+v_4 &= 0 \text{ 帶權 } 6
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots (C)$$

茲表解之如次：

(I) 觀測方程

號數	權 p	v_2 a	v_3 b	v_4 c	常數 M	檢點 s
1	4	−1	1	0	10	10
2	4	1	0	0	0	1
3	6	0	1	0	0	1
4	6	0	0	1	0	1
5	6	0	1	1	−20	−18

(II) 法方程之計算

號數	paa	pab	pac	paM	pas	pbb	pbc	pbM	pbs	pcc	pcM	pcs	pMM	pMs
1	4	−4	0	−40	−40	4	0	40	40	0	0	0	400	400
2	4	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	6	0	0	6	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	6	0	0
5	0	0	0	0	0	6	6	−120	−108	6	−120	−108	2400	2160
總計	8	−4	0	−40	−36	16	6	−80	−62	12	−120	−102	2800	2560

(III) 排列式之計算

	v_2 a	v_3 b	v_4 c	常數 M	檢點 s	法方程
pa	8	-4	0	$+40$	-36	
pb		16	6	-80	-62	
	-0.5	2	0	20	18	
pc			12	-120	-102	
	0	A	0	0	0	
pM				2800	2560	
	-5				180	
pb		14	6	-100	-80	第一排列方程
pc			12	-120	-102	
	$\frac{3}{7}$		$\frac{18}{7}$	$-\frac{300}{7}$	$-\frac{240}{7}$	
pM		B		2600	2380	
	$-\frac{50}{7}$			$\frac{5000}{7}$	$\frac{4000}{7}$	
pc			$\frac{66}{7}$	$-\frac{540}{7}$	$-\frac{474}{7}$	第二排列方程
pM		C		$\frac{13200}{7}$	$\frac{12660}{7}$	$pv_4=\frac{66}{7}$
	$-\frac{90}{11}$			$+\frac{48600}{77}$	$+\frac{42660}{77}$	$v_4=-\frac{90''}{11}$
pM				$\frac{96600}{77}$	$\frac{96600}{77}$	$=[pvv]=[pMM\cdot3]$

(IV) 求未知量之值

	C	B	A
M	$-\frac{90}{11}$	$-\frac{50}{7}$	-5
c		$\frac{270}{77}$	$-\frac{20}{11}$
b			0
r	$-\frac{90}{11}$	$-\frac{40}{11}$	$-\frac{75}{11}$
B	$\frac{3}{7}$		
A	0	$-\frac{1}{2}$	
B_2	$-\frac{270}{77}$		
A_2	0	$\frac{20}{11}$	

$\therefore\quad v_4=-\frac{90}{11}=-8''.13$

$v_3=-\frac{40}{11}=-3''.64$

$v_2=-\frac{75}{11}=-6''.82$

由 (B), $v_1=10''+v_2-v_3=6''.82 v_5=-20''=v_3-v_4=-8.''18.$

與(75題)之結果適合.

(V) 求未知量之權.

由(III)檢得

$$[pcc\cdot 2]=\frac{66}{7},\qquad [pcc\cdot 1]=12,$$

$$[pbb\cdot 1]=14,\qquad [pbb]=16,$$

$$[paa]=\ 8,\qquad [pcc]=12.$$

$$[pcc\cdot 1]_b=[pcc]-\frac{[pcb][pbc]}{[pbb]}$$

$$=12-\frac{6^2}{16}=\frac{39}{4}.$$

$$\therefore \quad p_{z_4}=[pcc\cdot 2]=\frac{66}{7}.$$

$$p_{z_3}=\frac{[pcc\cdot 2][pbb\cdot 1]}{[pcc\cdot 1]}=\frac{\frac{66}{7}\times 14}{12}=11.$$

$$p_{z_2}=\frac{[pcc\cdot 2][pbb\cdot 1][paa]}{[pcc\cdot 1][pbb]}=\frac{\frac{66}{7}\times 14\times 8}{\frac{39}{4}\times 16}=\frac{88}{13}.$$

習 題 六

1\. 由10個觀測方程求得法方程

$$\left.\begin{aligned}5.2485\,z_1-1.7472\,z_2-2.1954\,z_3+0.5399=0,\\ -1.7472\,z_1+1.8859\,z_2+0.8041\,z_3-1.4493=0,\\ -2.1954\,z_1+0.8041\,z_2+4.0440\,z_3-1.8681=0.\end{aligned}\right\}$$

且知 $[MM]=2.6322$.

求未知量之最或是值及其或是舛差.

答: $z_1=0.4222\pm0.11$. $z_2=0.9451\pm206$, $z_3=0.5034\pm0.113$.

2\. 有法方程

$$\left.\begin{aligned}459\,z_1-308\,z_2-389\,z_3+244\,z_4-507=0,\\ -308\,z_1+464\,z_2+408\,z_3-269\,z_4+695=0,\\ -389\,z_1+408\,z_2+679\,z_3-331\,z_4+653=0,\\ 244\,z_1-269\,z_2-331\,z_3+469\,z_4-283=0.\end{aligned}\right\}$$

且知 $[MM]=1129$.

求未知量之最或是值及其權.

答: $z_4=-0.488$, $pz_4=281$.

3\. 由13個觀測方程求得法方程

$$\left.\begin{aligned}
17.50\,z_1-\ 6.50\,z_2-\ 6.50\,z_3-\ 2.14&=0,\\
-\ 6.50\,z_1+17.50\,z_2-\ 6.50\,z_3-13.96&=0,\\
-\ 6.50\,z_1-\ 6.50\,z_2+20.50\,z_3+\ 5.40&=0.
\end{aligned}\right\}$$

且知 $[MM]=100.34$.

求未知量之最或是值及其或是舛差.

答：$z_1=0.67\pm0.60$,

$z_2=1.17\pm0.60$,

$z_3=0.32\pm0.55$.

4. 有6觀測方程

$$\left.\begin{aligned}
-z_1+z_2+z_3+z_4&=\ \ 0.1,\\
z_1+z_2-z_3-z_4&=\ \ 0.6,\\
z_1-2z_2-z_3+z_4&=\ \ 0.1,\\
z_1-z_2\qquad-2z_4&=\ \ 0.8,\\
z_2-z_3+z_4&=-0.1,\\
z_1\qquad-z_3\qquad&=\ \ 0.4.
\end{aligned}\right\}$$

求未知量之最或是值及其權與或是舛差.

答：$\left.\begin{aligned}z_1&=0.260,\\ z_2&=0.142,\\ z_3&=0.228,\\ z_4&=0.238.\end{aligned}\right\}$

$pz_4=1.6$.

第七章

經驗公式及非線形函數

85. 方程與曲線 (Equation and curve). 已知一方程$y=f(x)$而求其曲線,祇須求x, y之對應值,卽得其形狀.若知x, y之各組對應值而欲知$f(x)$究爲何種函數,事之可能,雖不成問題.然實際手續,殊非易易,是非最小二乘式莫爲功.今於本章專論及之.

86. 經驗常數 (Empirical constant). 依二量之對應值,在坐標紙上作圖,卽得圖形之大概.如圖似直線,則假定$y=ax+b$,而定a, b之值.如圖似拋物線,則假定$y=a+bx+cx^2$而定a, b, c之值.若x, y對應值之組數等於常數a, b, c之個數,用聯立方程卽可解此問題.然組數可任意任加,常多於常數之個數,是則法方程尙矣.此種常數,全從測驗得來,故曰**經驗常數**.

(例一) 測得四點 (0.4, 0.5), (0.6, 0.8), (0.8, 1.0), (0.9, 1.2). 四點雖近似一直線,而非眞在一直線上,求最或是直線之方程.

設 $$y=ax+b \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

爲所求之方程,且設x之值無誤差.

則得

$$\left.\begin{aligned}0.5&=0.4a+b,\\0.8&=0.6a+b,\\1.0&=0.8a+b,\\1.2&=0.9a+b.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

其法方程為

$$\left.\begin{aligned}1.97a+2.70b&=2.56,\\2.70a+4.00b&=3.50.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

解 (C),得

$$a=1.339,\quad b=-0.029.$$

故得所求之方程為

$$y=1.339x-0.029\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(D)$$

變 (A) 為

$$x=\frac{1}{a}y=\frac{b}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

設 $$a'=\frac{1}{a},\quad b'=-\frac{b}{a}.$$

則 $$x=a'y+b'.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(F)$$

設 y 之值無誤差,則得

$$\left.\begin{aligned}0.4&=0.5a'+b',\\0.6&=0.8a'+b',\\0.8&=1.0a'+b',\\0.9&=1.2a'+b'.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(G)$$

由(G)求法方程而解之,得

$$a'=0.7383,\ b'=0.3832.$$

故得所求之方程

$$x=0.7383y+0.03832.$$

或 $$y=1.353x-0.0518 \cdots\cdots (H)$$

(例二)有水槽段面爲矩形.水流於其內,設$v=$平均流速(Mean velocity),$h=$水浸半徑(Hydraulic radius).若測得h,v之對應值如下表,求關聯h,v之公式.

觀測號數	h (呎)	v (呎/秒)
1	0.1144	1.731
2	0.1312	1.853
3	0.1445	1.984
4	0.1579	2.081
5	0.1501	2.171
6	0.1813	2.258
7	0.1925	2.326
8	0.2026	2.397
9	0.2123	2.460

設公式爲$v=Ah^B$,式中A,B爲未知常數.取對數,得

$$\log v=\log A+B\log h,$$

以上表各觀測值代入,得

$$\left.\begin{array}{ll}
1 & 0.2382=\log A-0.9416B, \\
2 & 0.2979=\log A-0.8821B, \\
3 & 0.2971=\log A-0.8401B, \\
4 & 0.3183=\log A-0.8016B, \\
5 & 0.3367=\log A-0.7694B, \\
6 & 0.3537=\log A-0.7416B, \\
7 & 0.3666=\log A-0.7156B, \\
8 & 0.3797=\log A-0.6933B, \\
9 & 0.3909=\log A-0.6731B.
\end{array}\right\}$$

由以上觀測方程求得兩法方程,其解爲

$$\log A=0.7767,\ B=0.572.$$

$$\therefore\quad A=5.98,\quad B=0.572.$$

因得所求之經驗公式

$$v=5.98h^{0.572}.$$

87. **經驗公式 (Empirical formula).** 上節已知公式之形狀,僅求關聯之常數而已.若未知公式之形狀,則當審查曲線圖形,與何種曲線相似,以便假定.依 Taylor's theorem, 凡函數 $f(x)$ 皆可展開成 $f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots\cdots$. 故最普通之假定公式當爲

$$y=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

凡記載有循環性者,如多年寒暑之變遷,氣壓之昇降,潮汐之起落,其公式值假定爲

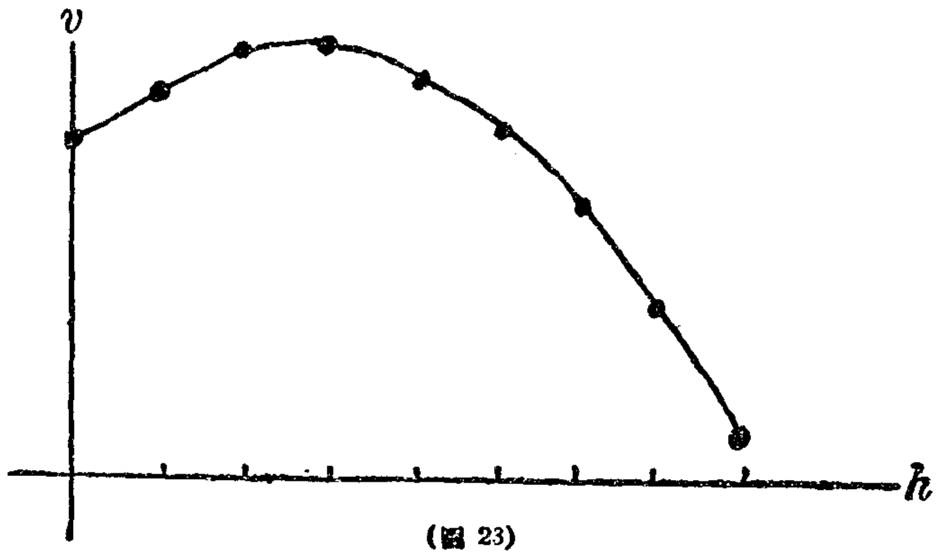
$$y=A+B_1\sin\frac{360^\circ}{n}\cdot x+B_2\ \cos\frac{360^\circ}{n}\cdot x$$
$$+C_1\sin\frac{360^\circ}{n}\cdot 2x+C_2\ \cos\frac{360^\circ}{n}\cdot 2x$$
$$+D_1\sin\frac{360^\circ}{n}\cdot 3x+D_2\ \cos\frac{360^\circ}{n}\cdot 3x$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

(例一)測量河之流速得結果如下表:

水深 h (呎)	流速 v (呎/秒)
0	4.25
1	4.86
2	5.14
3	5.15
4	4.85
5	4.24
6	3.36
7	2.16
8	0.67

求流速之公式.

設 h 爲橫軸, v 爲縱軸,作圖如下:



(圖 23)

今圖似拋物線,故設

$$v=A_0+A_1h+A_2h^2.$$

但 $A_0=4.25$ 而 A_1, A_2 爲未知常數.故各觀測方程應成下之形狀

$$hA_1+h^2A_2=v-A_0.$$

其法方程爲

$$\left.\begin{aligned}\Sigma h^2\cdot A_1+\Sigma h^3\cdot A_2&=\Sigma(hv)-A_0\Sigma h,\\ \Sigma h^3\cdot A_1+\Sigma h^4\cdot A_2&=\Sigma h^2v-A_0\Sigma h^2.\end{aligned}\right\}$$

其計算如下表:

h	v	vh	h^2	vh^2	h^3	h^4
1	4.86	4.86	1	4.86	1	1
2	5.14	10.28	4	20.56	8	8
3	5.15	15.45	9	46.35	27	81
4	4.85	19.45	16	77.60	64	256
5	4.24	21.20	25	106.00	125	625
6	3.36	20.16	36	120.96	216	1296
7	2.16	15.12	49	105.84	343	2401
8	0.67	5.36	64	42.88	512	4104
36		111.83	204	525.05	1296	8772
Σh		Σvh	Σh^2	Σvh^2	Σh^3	Σh^4

因得法方程

$$\left.\begin{aligned}204A_1+1296A_2+\ \ 41.17&=0,\\ 1296A_1+8772A_2+341.95&=0.\end{aligned}\right\}$$

其解為

$$A_1=0.7465,\quad A_2=-0.1493.$$

故得所求之經驗公式

$$v=4.25+0.7465h-0.1493h^2.$$

以各值代入上得公式,得

$$v_1=4.8472,\text{等等}.$$

其計算如下表:

h	最或是流速	觀測流速	差 v	v^2
1	4.8472	4.86	0.0128	0.000164
2	5.1458	5.14	0.0058	0.000034
3	5.1458	5.15	−0.0042	0.000018
4	4.8472	4.85	−0.0028	0.000009
5	4.2500	4.24	0.0100	0.000100
6	3.3542	3.36	−0.0058	0.000034
7	2.1598	2.16	−0.0002	0.000000
8	0.6668	0.67	−0.0002	0.000010

$$\Sigma v^2=0.000373$$

$$\therefore\quad r=0.6745\sqrt{\frac{0.000373}{8-2}}$$

$$=0.0054.$$

故每觀測流速之或是舛差 $=\pm0.0054$.

(例二) 據 1882 年美國大地測量之報告,測哈佛地方之磁向偏差,有以下之記載.

時　　間	偏　　差		
1786 年	5°	25′	西
1810 年	4°	46′	
1824 年	5°	45′	
1828–29 年	6°	03′	
1850 年 6 月 27 日	7°	17′	
1867 年 8 月 16 日	7°	49′.3	
1879 年 6 月 25 日	8°	34′.0	

在多數地方之常細觀測,經過長久時間,知磁向偏差之增減,約自250年至400年一循環.

設　　$x=$ 時間(以1850年1月1日爲起點)

　　　$y=$ 偏差(度).

且設經驗公式爲

$$y=A+B_1\sin\frac{360^\circ}{m}x+B_2\cos\frac{360^\circ}{n}x.$$

若取 $m=288$ 年,則 $\frac{360^\circ}{m}=1^\circ.25.$

$$x=1786.5-1850.0=-63.5\text{ 年}.$$

$$1^\circ.25\,x=-79^\circ.4,$$

$$\sin 1.25\,x=-0.983.$$

$$\cos 1.25\,x=+0.184,$$

$$y=5^\circ.42.$$

故以以上x, y之值代入經驗公式,得第一觀測方程為

$$A-0.983B_1+0.184B_2=5.42.$$

同理,得次之計算

觀測號數	時間	x	$1.25\,x$	$\sin 1.25\,x$	$\cos 1.25\,x$	y
1	1786.5	−63.5	−79°.4	−0.983	+0.184	+5°.42
2	1810.5	−39.5	−49°.4	−0.759	+0.651	+4°.77
3	1824.5	−25.5	−31°.9	−0.528	+0.849	+5°.75
4	1829.0	−21.0	−26°.25	−0.442	+0.897	+6°.05
5	1859.6	+ 9.6	+12°.0	+0.208	+0.978	+7°.29
6	1867.6	+17.6	+22°.0	+0.375	+0.927	+7°.82
7	1879.6	+29.6	+37°.0	+0.602	+0.799	+8°.57

由上表之後三行,得7觀測方程,其法方程為

$$\left.\begin{aligned}+7.00A-1.53B_1+5.28B_2-45.67&=0,\\-1.53A+2.56B_1-0.51B_2+\ 5.03&=0,\\+5.28A-0.51B_1+4.53B_2-35.64&=0.\end{aligned}\right\}$$

解之,得

$$A=+8°.06,\ B_1=+2°.60,\ B_2=-1°.29.$$

故所求之經驗公式為

$$y=+8°.06+2°.60\sin 1.25\,x-1°.29\cos 1.25\,x.$$

或 $$y=+8°.06+2°.90\sin(1°.25x-26°.4).$$

比較觀測與計算所得y之值,得

時 間	x	觀測 y	計算 y	差 v	v^2
1786.5	-63.5	$+5°.42$	$5°.28$	$+0.14$	0.0196
1810.5	-39.5	$4°.77$	$5°.25$	-0.48	0.2304
1824.5	-25.5	$5°.75$	$5°.60$	$+0.15$	0.0225
1829.0	-21.0	$6°.05$	$5°.76$	$+0.29$	0.0841
1859.6	$+9.6$	$7°.29$	$7°.34$	-0.05	0.0025
1867.6	$+17.6$	$7°.82$	$7°.84$	-0.02	0.0004
1879.6	$+29.6$	$8°.57$	$8°.59$	-0.02	0.0004

$$\Sigma v^2=0.3589.$$

$$\therefore\quad r=.6745\sqrt{\frac{0.3589}{7-3}}$$

$$=0°.19.$$

即每一觀測之或是舛差.

88. 循環值 m 之討論. m 之值之假定,全賴觀察事實,審查圖形.如求每年寒暑之變遷,則假定

$$m=365.2422\text{ 日}.$$

如求潮汐之漲落,則假定

$$m=12\text{ 時}.$$

若假定之值,以爲與事實相差尙遠,則另假定數值而取 r 值之最小者.雖計算艱難,然爲眞確起見,務必全力赴之.

如上節之(例 2), $m=288$ 年時, $r=0°.19$. 若另取 $m=289$ 年或 $m=287$ 年,而求得 r 之值比 $0°.19$ 大,則 288 年之假定,認爲眞確.

若r之值比0°.19小,則取用r值之最小者.

89 非線形函數之觀測 (The observation of nonlinear functions). 本書以上各節所述,限於線形函數.若觀測方程非線形,則可據戴勞氏定理 (Taylor's theorem,) 化非線形而爲線形.

設有非線形函數之觀測方程

$$\left.\begin{aligned} f_1(z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q) &= M_1, \\ f_2(z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q) &= M_2, \\ f_3(z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q) &= M_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &= \cdots, \\ f_n(z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q) &= M_n. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (A)$$

上式中 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q$ 爲未知量. $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdots f_n$ 爲已知函數. $M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots M_n$ 爲觀測值.

設 $z_1', z_2', z_3', \cdots\cdots z_q'$ 爲 $z_1, z_2, z_3, \cdots\cdots z_q$ 之近似值,其改正值爲 $v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots v_q$, 則

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z_1' + v_1, \\ z_2 &= z_2' + v_2, \\ z_3 &= z_3' + v_3, \\ \cdots &= \cdots\cdots\cdots, \\ z_q &= z_q' + v_q. \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

代入(A)之第一式,得

$$f_1(z_1' + v_1, z_2' + v_2, v_3' + v_3, \cdots\cdots z_q' + v_q) = M_1.$$

展開之,得

$$k_1+\left(v_1\frac{\partial}{\partial z_1'}+v_2\frac{\partial}{\partial z_2'}+v_3\frac{\partial}{\partial z_3'}+\cdots\cdots+v_q\frac{\partial}{\partial z_q'}\right)k_1$$

$$+\frac{1}{\underline{|2}}\left(v_1\frac{\partial}{\partial z_1'}+v_2\frac{\partial}{\partial z_2'}+v_3\frac{\partial}{\partial z_3'}+\cdots\cdots+v_q\frac{\partial}{\partial z_q'}\right)^2 k_1$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=M_1.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(C)$$

上式中　$k_1=f_1(z_1',z_2',z_3',\cdots\cdots z_q')$,

同理,設　$k_2=f_2(z_1',z_2',z_3',\cdots\cdots z_q')$,

$$k_3=f_3(z_1',z_2',z_3',\cdots\cdots z_q'),$$

$$\cdots=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k_n=f_n(z_1',z_2',z_3',\cdots\cdots z_q')$$

(C) 中 $v_1, v_2, v_3,\cdots\cdots v_q$ 之值極小.棄去其含高次方各項,全式所受影響極小.故變 (C) 為

同理

$$\left.\begin{aligned}
&k_1+\frac{\partial k_1}{\partial z_1'}v_1+\frac{\partial k_1}{\partial z_2'}v_2+\frac{\partial k_1}{\partial z_3'}v_3+\cdots\cdots+\frac{\partial k_1}{\partial z_q'}v_q=M_1,\\
&k_2+\frac{\partial k_2}{\partial z_1'}v_1+\frac{\partial k_2}{\partial z_2'}v_2+\frac{\partial k_2}{\partial z_3'}v_3+\cdots\cdots+\frac{\partial k_2}{\partial z_q'}v_q=M_2,\\
&k_3+\frac{\partial k_3}{\partial z_1'}v_1+\frac{\partial k_3}{\partial z_2'}v_2+\frac{\partial k_3}{\partial z_3'}v_3+\cdots\cdots+\frac{\partial k_3}{\partial z_q'}v_q=M_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\cdots,\\
&k_n+\frac{\partial k_n}{\partial z_1'}v_1+\frac{\partial k_n}{\partial z_2'}v_2+\frac{\partial k_n}{\partial z_3'}v_3+\cdots\cdots+\frac{\partial k_n}{\partial z_q'}v_q=M_n.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(D)$$

(D) 對 $v_1, v_2, v_3,\cdots\cdots v_q$ 為線形觀測方程,可依常法解之. $v_1, v_2,$

$v_3,\cdots\cdots v_q$ 之值既經求得,代入(B)卽得未知量之最或是值.

(例一)設有觀測方程

$$\left.\begin{aligned}\sin x+\cos 2y&=1.5,\\ \cos x+3\sin y&=1.7,\\ x^2+\ 5y\quad&=2.1.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

由試驗得 x,y 之近似值 $42^\circ,18^\circ$(試驗以作圖求其交點爲最妥),則

$$\left.\begin{aligned}x&=42^\circ+v_1,\\ y&=18^\circ+v_2.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(B)$$

展開(A)之各函數,得

$$\left.\begin{aligned}k_1&=\sin 42^\circ+\cos 36^\circ=1.48,\\ \frac{\partial k_1}{\partial x}&=\cos 42^\circ=0.74,\\ \frac{\partial k_1}{\partial y}&=-2\sin 36^\circ=-1.18.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}k_2&=\cos 42^\circ+3\sin 18^\circ=1.67,\\ \frac{\partial k_2}{\partial x}&=-\sin 42^\circ=-0.67,\\ \frac{\partial k_2}{\partial y}&=3\cos 18^\circ=2.85.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}k_3&=\left(\frac{42\pi}{180}\right)^2+5\cdot\frac{18\pi}{180}=2.11,\\ \frac{\partial k_3}{\partial y}&=2\cdot\frac{42\pi}{180}=1.47\\ \frac{\partial k_3}{\partial y}&=5.\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1-k_1&=\ \ 0.02,\\ M_2-k_2&=\ \ 0.03,\\ M_3-k_3&=-0.01.\end{aligned}\right\}$$

故得觀測方程

$$\left.\begin{aligned} 0.74v_1-1.18v_2&=\ \ 0.02,\\ -0.67v_1+2.85v_2&=\ \ 0.03,\\ 1.47v_1+\ \ \ 5v_2&=-0.01.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(D)$$

其法方程爲

$$\left.\begin{aligned} 3.16v_1+\ \ 4.57v_2&=-0.020,\\ 4.57v_1+34.51v_2&=-0.012.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$$

解之,得

$$\left.\begin{aligned} v_1&=-0.00845=-29'.0,\\ v_2&=\ \ \ 0.00147=\ \ \ 5'.1.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(F)$$

代入(B),得

$$\left.\begin{aligned} x&=42°-29'.0=41°31',\\ y&=18°+\ \ 5'.1=18°54'.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(G)$$

90. 非線形函數之規約觀測. 若未知量受非線形規約之限制,則照上節手續,化規約方程爲線形.其他手續照常法解之.

非線形函數化爲線形,有時毋須應用戴勞氏定理.如(86節)之(例2),利用對數即可化成線形函數.

習題七

1. 經過以下各點作曲線,求其方程.

x	0.0	0.5	1.0	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
y	0.00	0.04	0.31	2.56	4.99	8.65	13.72	20.47

2. 經過以下各點作曲線,求其方程.

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y	4.51	4.44	4.31	4.09	3.76	3.42
x	0.6	0.8	1.0	1.2	1.5	2.0
y	3.03	2.21	1.49	0.92	0.38	0.05

3. 砲彈由山頂平射,測得距離 s 及其經過之時間 t. 求彈道之公式.

t (秒)	0.5	1.0	1.5	2.0
s (呎)	1.2	4.0	9.1	15.0

4. 測得酒精加熱膨脹後之體積 v, 及其對應溫度 $t°c$. 求膨脹率公式.

v	1.04	1.12	1.19	1.24	1.27	立方糎
t	3.9	43.0	67.8	89.0	99.2	華氏溫度

5. 有單擺之擺過時間 T, 擺長 L, 且設 $T=mL^n$. 求 m,n 之最或是值.

T	12.9	11.6	10.4	9.7	5.3	4.6
L	164.4	132.9	107.6	93.5	28.4	20.6

答: $T=1.0044L^{.5}$.

6. 一年溫度之變遷,其每月平均溫度($t^\circ c$)如下:

一月	$4^\circ.66$	五月	$9^\circ.83$	九月	$8^\circ.16$
二月	$5^\circ.42$	六月	$10^\circ.09$	十月	$6^\circ.55$
三月	$6^\circ.77$	七月	$9^\circ.71$	十一月	$5^\circ.10$
四月	$8^\circ.59$	八月	$9^\circ.14$	十二月	$4^\circ.41$

求任一日之平均溫度.

答: 若 $x=$ 月數, $y=$ 溫度 ($t^\circ c$).

則
$$y=7.369+0.9854\sin 30x-2.7084\cos 30x$$
$$+0.0100\sin 60x-0.1950\cos 60x$$
$$-0.0133\sin 90x+0.1783\cos 90x.$$

第八章

附錄

91. 觀測值之討論. 以上各章所注重者,乃如何改正觀測值以求最或是值.並求或是舛差,以比較各觀測值之精密程度.至於各觀測值中,是否有某值不合實用.是否定誤差事先未曾銷除.是否無心之錯誤,未能留心避免.殊未嘗加以研究.今特於本章詳論及之.所憑依立論者,乃誤差定律,非最小二乘式.

92. 由或是舛差 r 求或是率 p. 於(31節),曾利用 h,已得理論與實際之比較.其法先由(17),求或是舛差 r.次由(13),求精度 h.再由(附表I),求理論誤差之支配.據此計算,似手續較難,不便實用.今更設法,直接利用 r,由(附表II)以求之.

設測得某角之值爲

$$37°42' \quad 13''.92 \pm 0''.25.$$

謂凡舛差之絕對值小於 $0''.25$ 者,其所得之個數,應占全數之半,或小於全數之半,卽 $p=\frac{1}{2}$.舛差之絕對值小於 $0''.5$ 者,及小於 $1''.0$ 者,各有若干,是否能由 r 直接求之,乃下節討論之範圍.

93. 由(4),得 $$P=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x'}e^{-h^2x^2}dx.$$

設 $$hx=t,\text{ 則 }hdx=dt.$$

若 $x=0$ 時,$t=0$. 若 $x=x'$ 時,$t=hx'$.

但 $$hr=0.4769.$$

$$\therefore\quad \frac{t}{0.4769}=\frac{x'}{r}\qquad\cdots\cdots(67)$$

而 $P=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x'}e^{-t^2}dt.$ (x' 與 x 原無區別,故應用時以 x 代 x'.)

(附表II)第一行為 $\frac{x}{r}$ 之值,表內各數爲 P 之值

如 $r=0''.25$ 及 $x=0''.50$, 則 $\frac{x}{r}=\frac{0.50}{0.25}=2.$

由(附表II),檢得 $P=0.823$.

謂1000個觀測值中,823個之舛差將小於0″.50, 177個之舛差將大於0″.50.

又 $r=0''.25$ 及 $x=1''.00$, 則 $\frac{x}{r}=\frac{1.00}{0.25}=4.$

由(附表II),檢得 $P=0.993$.

謂1000個觀測值中,993個之舛差將小於1″.00, 7個之舛差將大於1″.00.

同理,於1000個觀測值中,將有

264個之舛差 $<\frac{1}{2}r$, 736個之舛差 $>\frac{1}{2}r$,

500 個之舛差 $< r$,	500 個之舛差 $> r$,
823 個之舛差 $<2r$,	177 個之舛差 $>2r$,
957 個之舛差 $<3r$,	43 個之舛差 $>3r$,
993 個之舛差 $<4r$,	7 個之舛差 $>4r$,
999 個之舛差 $<5r$,	1 個之舛差 $>5r$.

(附表 II)祇有四位小數,故結果如上.若記算至六位小數,則應得

95698 個之舛差 $<3r$,	4302 個之舛差 $>3r$,
99302 個之舛差 $<4r$,	698 個之舛差 $>4r$,
99926 個之舛差 $<5r$,	74 個之舛差 $>5r$,
99995 個之舛差 $<6r$,	5 個之舛差 $>6r$.

故舛差爲 r 之五,六倍者,其存在之機會極小.

94. 若 (1) 之 $x=0$, 則 $y_0=\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}$. 即舛差 0 之或是率爲 $\frac{h\,dx}{\sqrt{\pi}}$

但
$$h=\frac{0.4769}{r}.$$

$$\therefore\quad y_0=0.2691\frac{dx}{r}.$$

上式 dx 爲 x 聯續兩值之差.若共有 N 個舛差,則在 dx 範圍內各舛差或是率之和,或在該範圍內舛差之個數,約爲

$$N_0 = 0.2691\frac{dx}{r}N \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (68)$$

r 為單位權觀測值之或是舛差.

(例一) 求(19節)之(例1)之中部彈痕數.

約計之,設中部之舛差為0,5及7兩部之舛差為+1,4及8兩部之舛差為+2,等.得

x	x^2	p	px^2
0	0	212	0
1	1	394	394
2	4	282	1,128
3	9	89	801
4	16	20	320
5	25	3	75

$$\Sigma px^2 = 2,718$$

$$\therefore \quad r = 0.6745\sqrt{\frac{2718}{1000-1}} = 1.1.$$

$$\therefore \quad N_0 = 0.2691 \times \frac{1}{1.1} \times 1000 = 245.$$

此結果與實得彈痕數212相差不遠.與(31節)之(例1)所得相符合,而由(附表II)算得者亦同.

95. 觀測值之取捨 (Rejection of observation). 一組觀測值中,有舛差大者,有舛差小者.舛差小者,其或是率大.舛差大者,其或是率小.

凡舉行一觀測,必費時間,必耗金銀,因有其價值,卽有其附帶之權.故舛差大者之觀測值,雖價值低落,究不能棄置不用.然舛差過大,有出乎情理之外者,如云某人高一丈,則必羣相驚駭,莫能置信.是蓋事之所必無,雖欲強信,殊不可能.然則舛差過大者,又將捨棄矣.何取何捨,其間有一界限焉,茲詳論之.

(93節)之1000個觀測值中,舛差大於$5r$之觀測值祇有一個.舛差大於$6r$者,不足一個明矣.又100,000個觀測值中,舛差大於$6r$者.觀測值祇有5個.舛差大於$7r$者,觀測值或將小於一個.觀測值旣小於一個,去之可也.因得公式(69).其證明如下.

設 $P=$舛差小於x各觀測值或是率之和.

$n=$全體觀測值之個數.

則 $nP=$舛差小於x各觀測值之個數,

及 $n-nP=$舛差大於x各觀測值之個數.

若舛差大於x之觀測值不足一個,則應在捨棄之列.

故設$n-nP=\frac{1}{2}$,舛差大於x之觀測值祇有半個,則x可為取捨之境界甚明.

$$\therefore\quad P=\frac{2n-1}{2n}\quad\cdots\cdots\cdots(69)$$

由(69)求P.檢(附表II),得$\frac{x}{r}$之值.由(17)求r,因求x.凡大於x之舛差俱可捨去.

(例一)某角觀測15次,其結果如下.求可捨去之觀測值.

觀測值 M	殘差 v	v^2	v'	v'^2	v''	v''^2
2°23′.90	−0.30	0.090	−0.41	0.168	−0.33	0.109
23′.76	−0.44	0.194	−0.55	0.303	−0.47	0.221
25′.21	+1.01	1.0 0	+0.90	0.810		
24′.68	+0.48	0.230	+0.37	0.137	+0.45	0.203
23′.96	−0.24	0.058	−0.35	0.123	−0.27	0.073
24′.26	+0.06	0.004	−0.05	0.003	+0.03	0.001
24′.83	+0.63	0.397	+0.52	0.270	+0.60	0.360
24′.07	−0.13	0.017	−0.24	0.058	−0.16	0.026
23′.98	−0.22	0.048	−0.33	0.109	−0.25	0.063
24′.14	−0.06	0.004	−0.17	0.029	−0.09	0.008
24′.40	+0.20	0.040	+0.09	0.008	+0.17	0.029
24′.38	+0.18	0.032	+0.07	0.005	+0.15	0.023
24′.59	+0.39	0.152	−0.28	0.078	+0.36	0.130
24′.10	−0.10	0.010	+0.21	0.014	−0.13	0.017
22′.80	−1.40	1.960				
2°24′.20		4.256		2.145		1.263
z		Σv^2		$\Sigma v'^2$		$\Sigma v''^2$

取各觀測值之平均值,得

$$z=2°24'.20.$$

$$r=0.6745\sqrt{\frac{4.256}{15-1}}=0.37$$

由 (69), $$P=\frac{2\times 15-1}{2\times 15}=0.967.$$

檢 (附表 II), $$\frac{x}{r}=3.17.$$

$$\therefore \quad x = 3.17r = 3.17 \times 0.37 = 1.17.$$

舛差 -1.40 之絕對值大於 1.17, 因之觀測值 $2^\circ 22'.80$ 可捨去.

由其餘 14 觀測值, 求得

$$z' = 2^\circ 24'.31.$$

$$r' = 0.6745\sqrt{\frac{2.145}{14-1}} = 0.27.$$

由 (69), $$P = \frac{2 \times 14 - 1}{2 \times 14} = 0.964.$$

檢 (附表 II), $$\frac{x}{r} = 3.11.$$

$$\therefore \quad x = 0.84.$$

舛差 $+0.90$ 之絕對值大於 0.84, 因之觀測值 $2^\circ.25'.21$ 可捨去.

由其餘 13 觀測值, 求得

$$z'' = 2^\circ 24'.23.$$

$$r'' = \sqrt{\frac{1.263}{13-1}} = 0.22.$$

由 (69) $$P = \frac{2 \times 13 - 1}{2 \times 13} = 0.962.$$

檢 (附表 II), $$\frac{x}{r} = 3.08.$$

$$\therefore \quad x = 0.63.$$

今 13 舛差俱小於 0.63. 故各觀測值俱保存應用, 可不再捨去.

96. 巨舛差 (Huge error). 1000 觀測值中, 設有 999 個舛差

小於x,1個大於x.此舛差曰巨舛差,今以H代之.

$$\therefore \quad P=0.999.$$

檢(附表II),得 $$\frac{H}{r}=4.9.$$

$$\therefore \quad H=4.9r$$

由(26), $$H=4.9\times 0.6745s=3.3s$$

據巨舛差判定觀測之取捨,則無檢表之繁,尤稱便利,惟舛差較小者,不能判定爲可惜耳.

(例一) 上節之$r=0.37$.

$$\therefore \quad H=4.9r=1.81.$$

97. 據海格(Hagen)氏或是率求法,判定觀測值之取捨.

(22節)之$m\cdot\Delta x$爲極大舛差.

且 $$m(\Delta x)^2=\frac{1}{2h^2}.$$

$$\therefore \quad m\Delta x=\frac{m(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{1}{2n^2\Delta x}.$$

但由(13), $$\frac{1}{h}=\frac{r}{0.4769}.$$

$$\therefore \quad m\Delta x=\frac{r^2}{2\times(0.4769)^2dx}=4.4\frac{r^2}{dx}.$$

(94節)之(例1)之$r=1.1$及$dx=1$.

$$\therefore \quad m\Delta x=4.4\times 1.21=5.3$$

據此極大舛差5.3以判定觀測值之取捨,與事實相差不遠.若dx之值不能決定,此法不能應用.

98. 定誤差. 以上各節,假定根據(10節)各種改正,定誤差,已盡行除去.但極微之定誤差,不易覺察,常含於最或是值中妨礙觀測之精度.若每觀測所含定誤差大略相同,將有顯然之現象.如(31節)之(例1),以下各部較以上各部彈痕數較多,理論與事實相同.最小二乘式所研究者,限於不定誤差.對此種誤差,無能為力.

但定誤差存在之範圍,亦可應用附表II,大概判定,如用各種精密器械,經過各種精密觀測,已知某角為90°.今僅觀測25次而得$89°59'57''\pm0''.8$,則定誤差存在之範圍將不出$-3''$.

今假定某未知角之真值,而欲知最或是值之界限舛差不出$2''$,即在$89°59'55''$與$89°59'59''$之間,則$\frac{x}{r}=\frac{2}{0.8}=2.5$.檢附表II,得$P=0.908$.定誤差存在之機會不過$\frac{92}{1000}$或$\frac{1}{10}$,其值在$-1''$與$-5''$之間.又欲知某角最或是值之界限誤差不出$3''$即在$89°59'54''$與$90°$之間.則$\frac{x}{r}=\frac{3}{0.8}=3.75$.檢附表II,得$P=0.987$.故定誤差存在之機會不過$\frac{13}{1000}$或$\frac{1}{100}$,其值在$0''$與$-6''$之間.

99. 觀測值之權. 經多次觀測,由r可得多組之權.但每組僅觀測一次,其觀測值亦必各有其價值,即有其權.是則必據所費時間,所耗金錢,及其他有關係之事件,由觀測者判定之.初次判定者,經多方考查,常至大加增減.甲判定給以大權

者,乙或削減之.此種判定,全憑觀測者之經驗.

100. 附表之說明. (附表I)專備比較理論與實際舛差之支配.(附表II)定舛差之範圍,以判定觀測值之取捨.(附表III)備以求或是舛差 r, 使計算手續迅速容易.(附表IV)備排列式數字過多者之計算.(附表V)備解非線形函數之用.

附　表

I. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$ 及 t 之值.

II. $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt$ 及 $\frac{t}{0.4769}=\frac{x}{r}$ 之值.

III. 平方表.

IV. 四位對數表.

V. 三角函數表.

附 表 (I)

t或hx之值	0	1	2	3	4
0.0	0.0000	0.0113	0.0226	0.0338	0.0451
0.1	1125	1236	1348	1459	1560
0.2	2227	2335	2443	2550	2657
0.3	3286	3389	3491	3593	3694
0.4	4284	4380	4475	4569	4662
0.5	0.5205	0.5292	0.5379	0.5465	0.5549
0.6	6039	6117	6194	6270	6346
0.7	6778	6847	6914	6981	7047
0.8	7421	7480	7538	7595	7651
0.9	7969	8019	8068	8116	8163
1.0	0.8427	0.8468	0.8508	0.8548	0.8586
1.1	8802	8835	8868	8900	8931
1.2	9103	9130	9155	9181	9205
1.3	9340	9361	9381	9400	9419
1.4	9523	9539	9554	9569	9583
1.5	0.9661	0.9673	0.9684	0.9695	0.9706
1.6	9763	9772	9780	9788	9796
1.7	9836	0844	9850	9856	9861
1.8	9891	9895	9899	9903	9907
1.9	9928	9931	9934	9937	9939
2.0	0.9953	0.9955	0.9957	0.9959	0.9961
2.1	9970	9972	9973	9974	9975
2.2	9981	9982	9983	9984	9985
2.3	9989	9989	9990	9990	9991
2.4	9993	9993	9994	9994	9994
2.	0.9953	0.9970	0.9981	0.9989	0.9993
∞	1.0000				
t或hx之值	0	1	2	3	4

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}dt \text{ 及 } t \text{ 之值}$$

5	6	7	8	9	比差
0.0564	0.6760	0.0789	0.0901	0.1013	113
1680	1790	1900	2009	2118	110
2763	2869	2974	3079	3183	106
3794	3893	3992	4090	4187	100
4755	4847	4937	5027	5117	92
0.5633	0.5716	0.5798	0.5879	0.5959	83
6420	6494	6566	6638	6708	74
7112	7175	7238	7300	7361	64
7707	7761	7814	7867	7918	55
8209	8254	8299	8342	8385	45
0.6824	0.8661	0.8698	0.8733	0.8768	37
8931	8991	9020	9048	9076	30
9229	9252	9275	9297	9319	23
9438	9456	9473	9490	9507	18
9597	9611	9624	9637	9649	14
0.9716	0.9726	0.9736	0.9745	0.9755	10
9804	9811	9818	9825	9832	7
9867	9872	9877	9882	9886	5
9911	9915	9918	9922	9925	4
9942	9944	9947	9949	9951	3
0.9963	0.9964	0.9966	0.9967	0.9969	2
9976	9977	9979	9980	9980	1
9985	9986	9987	9987	9988	1
9991	9992	9992	9992	9993	
9995	9995	9995	9995	9996	
0.9996	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	
5	7	7	8	9	比差

附 表 (II)

$\frac{x}{r}$	0	1	2	3	4
0.0	0.0000	0.0054	0.0108	0.0161	0.0215
0.1	0538	0591	0645	0699	0752
0.2	1073	1126	1180	1233	1286
0.3	1603	1656	1709	1761	1814
0.4	2127	2179	2230	2282	2334
0.5	0.2641	0.2691	0.2742	0.2793	0.2843
0.6	3143	3192	3242	3291	3340
0.7	3632	3680	3728	3775	3823
0.8	4105	4152	4198	4244	4290
0.9	4562	4606	4651	4695	4739
1.0	0.5000	0.5043	0.5085	0.5128	0.5170
1.1	5419	5460	5500	5540	5581
1.2	5817	5856	5894	5232	5970
1.3	6194	6231	6267	6303	6339
1.4	6550	6584	6618	6652	6685
1.5	0.6883	0.6915	0.6947	0.6979	0.7011
1.6	7195	7225	7255	7284	7313
1.7	7485	7512	7540	7567	7594
1.8	7753	7778	7804	7829	7854
1.9	8000	8023	8047	8070	8093
2.0	0.8227	0.8248	0.8270	0.8291	0.8312
2.1	8433	8453	8473	8492	8511
2.2	8622	8639	8657	8674	8692
2.3	8792	8808	8824	8840	8855
2.4	8945	8960	8974	8988	9002
2.5	0.9082	0.9095	0.9108	0.9121	0.9133
2.6	9205	9217	9228	9239	9250
2.7	9314	9324	9334	9344	9354
2.8	9410	9419	9428	9437	9446
2.9	9495	9503	9511	9519	9526
3.0	0.9570	0.9577	0.9583	0.9590	0.9597
3.1	9635	9641	9647	9652	9658
3.2	9691	9696	9701	9706	8711
3.3	9740	9744	9749	9753	9757
3.4	9782	9786	9789	9793	9797
3.	0.9570	0.9635	0.9691	0.9740	0.9782
4.	9930	9943	9954	9963	9970
5.	9993	9994	9996	9997	9997
∞	1.0000				

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-t^2}\,dt \text{ 及 } \frac{t}{0.4769}=\frac{x}{r} \text{ 之值}$$

5	6	7	8	9	差
0.0269	0.0323	0.0377	0.0430	0.0484	54
0806	0859	0913	0966	1020	54
1339	1392	1445	1498	1551	53
1866	1918	1671	2023	2075	52
2385	2436	2488	2537	2590	51
0.2893	0.4944	0.2994	0.3043	0.3093	50
3389	3438	3487	3535	3583	49
3870	3918	3965	4012	4059	46
4336	4381	4427	4472	4517	45
4783	4827	4860	4914	4957	43
0.5212	0.5254	0.5295	0.5337	0.5378	41
5620	5660	5700	5739	5778	39
6008	6046	6083	6120	6157	37
6375	6410	6445	6480	6515	35
6719	6753	6786	6818	6851	32
0.7042	0.7073	0.7104	0.7134	0.7165	30
7342	7371	7400	7428	7457	28
7621	7648	7675	7701	7727	26
7879	7904	7928	7952	7976	24
8116	8138	8161	8183	8205	22
0.8332	0.8353	0.8373	0.8394	0.8414	19
8530	8549	8567	8585	8604	18
8709	8726	8742	8759	8775	17
8870	8886	8901	8916	8930	15
9016	9029	9046	9056	9069	13
0.9146	0.9158	0 9170	0.9182	0.9193	12
9261	9272	9283	9293	9304	10
9364	9373	9383	9393	9401	9
9454	9463	9471	9479	9487	8
9534	9541	9548	9556	9563	7
0.9603	0.9610	0.9616	0.9622	0.9629	6
9664	9669	9675	9680	9686	5
9716	9721	9726	9731	9735	5
9761	9765	9770	9774	9778	4
9800	9804	9807	9811	9814	4
0.9818	0.9848	0.9874	0.9896	0.9915	
9976	9981	9985	9988	9990	
9998	9998	9999	9999	9999	

附表 (III)

n	0	1	2	3	4
1.0	1.000	1.020	1.040	1.061	1.082
1.1	1.210	1.232	1.254	1.277	1.300
1.2	1.440	1.464	1 488	1.513	1.538
1.3	1.690	1.716	1.742	1.769	1.796
1.4	1.960	1.988	2.016	2.045	2.074
1.5	2.250	2.280	2.310	2.341	2.372
1.6	2.560	2.592	2.625	2.657	2.690
1.7	2.890	2.924	2.958	2.993	3.028
1.8	3.240	3.276	3.312	3.349	3.386
1.9	3.610	3.648	3.686	3.725	3.764
2.0	4.000	4.040	4.808	4.121	4.162
2.1	4.410	4.452	4.494	4.537	4.580
2.2	4.840	4.884	4.928	4.973	5.018
2.3	5.290	5.336	5.382	5.429	5.476
2.4	5.760	5.808	5.856	5.905	5.954
2.5	6.250	6.300	6.350	6.401	6.452
2.6	6.760	6.812	6.864	6.917	6.970
2.7	7.290	7.344	7.398	7.453	7.503
2.8	7.840	7.896	7.952	8.009	8.066
2.9	8.410	8.468	8.526	8.585	8.644
3.0	9.000	9.060	9.120	9.181	9.242
3.1	9.610	9.672	9.734	9.797	9.860
3.2	10.24	10.30	10.37	10.43	10.50
3.3	10.89	10 96	11.02	11.09	11.16
3.4	10.56	11.63	11.70	11.76	11.83
3.5	12.25	12.32	12.39	12.46	12.53
3.6	12.96	13.02	13.10	13.18	13.25
3.7	13.69	13.76	13.84	13.91	13.99
3.8	14.44	14.52	14.59	14.67	14.75
3.9	15.21	15.29	15.37	15.44	15.52
4.0	16.00	16.08	16.16	16.24	16.32
4.1	16.81	16.98	16.97	17.06	17.14
4.2	17.64	17.72	17.81	17.89	17.98
4.3	18.49	18 58	18.66	18.75	18.84
4.4	19.36	19.45	19.54	19.62	19.71
4.5	20.25	20.34	20.43	20.52	20.61
4.6	21.16	21.25	21.34	21.44	21.53
4.7	22.09	22.18	22.28	22.37	22.47
4.8	23.04	23.14	23.23	23.33	23.43
4.9	24.01	24.11	24.21	24.30	24.40
5.0	25.00	25.10	25.20	25.30	25.40
5.1	26.01	26.11	26.21	26.32	26.42
5.2	27.04	27.14	27.25	27.35	27.46
5.3	28.09	28.20	28.30	28.41	28.52
5.4	29.16	29.27	29.38	29.48	29.59

平 方 表

5	6	7	8	9	差
1.103	1.124	1.145	1.166	1.188	22
1.323	1.346	1.369	1.392	1.416	24
1.563	1.588	1.613	1.638	1.664	26
1.823	1.850	1.877	1.904	1.932	28
2.103	2.132	2.161	2.190	2.220	30
2.403	2.434	2.465	2.496	2.528	32
2.723	2.756	2.789	2.822	2.856	34
3.063	3.098	3.133	3.168	3.204	36
3.423	3.460	3.497	3.534	3.572	38
3.803	3.842	3.881	3.920	3.960	40
4.203	4.244	4.284	4.326	4.368	42
4.623	4.666	4.709	4.752	4.796	44
5.063	5.108	5.158	5.198	5.244	46
5.523	5.570	5.617	5.664	5.712	48
6.003	6.052	6.101	6.150	6.200	50
6.503	6.554	6.605	6.656	6.708	52
7.023	7.076	7.129	7.182	7.236	54
7.563	7.618	7.673	7.728	7.784	56
8.123	8.180	8.237	8.294	8.352	58
8.703	8.762	8.821	8.880	8.940	60
9.303	9.364	9.425	9.486	9.548	62
9.923	9.986	10.05	10.11	10.18	6
10.56	10.63	10.69	10.76	10.82	7
11.22	11.29	11.36	11.42	11.49	7
11.90	11.97	12.04	12.11	12.18	7
12.60	12.67	12.74	12.82	12.89	7
13.32	13.40	13.47	13.54	13.62	7
14.06	14.14	14.21	14.29	14.36	8
14.82	14.90	15.98	15.05	15.13	8
15.60	15.68	15.76	15.84	15.92	8
16.40	16.48	16.56	16.65	16.73	8
17.22	17.31	17.39	17.47	17.56	8
18.06	18.15	18.23	18.32	18.40	9
18.92	19.01	19.10	19.18	19.27	9
18.80	19.89	19.98	20.07	20.16	9
20.70	20.79	20.88	20.98	21.07	9
21.62	21.72	21.81	21.90	22.00	9
22.56	22.66	22.75	22.85	22.94	10
23.52	23.62	23.72	23.81	23.91	10
24.50	24.60	24.70	24.80	24.90	10
25.50	25.60	25.70	25.81	25.91	10
26.52	26.63	26.73	26.83	26.94	10
27.56	27.67	27.77	27.88	27.98	11
28.62	28.73	28.84	28.94	28.05	11
29.70	29.81	29.92	29.03	29.14	11

附 表 (III)

n	0	1	2	3	4
5.5	30.25	30.36	30.47	30.58	30.69
5.6	31.36	31.47	31.58	31.70	31.81
5.7	32.49	32.60	32.72	32.83	32.95
5.8	33.64	33.76	33.87	33.99	33.11
5.9	34.81	34.93	34.05	34.16	34.28
6.0	36.00	36.12	36.24	36 36	36.48
6.1	37.21	37.33	37.45	37.58	37.70
6.2	38.44	38.56	38.69	38.81	38.94
6.3	39.69	39.82	39.94	40.07	40.20
6.4	40.96	41.09	41.22	41.34	41.47
6.5	42.25	42.38	42.51	42.64	42.77
6.6	43.56	43.69	43.82	43.96	44.09
6.7	44.89	45.02	44.16	45.29	45.43
6.8	46.24	46.38	46.51	46.65	46.79
6.9	47.61	47.75	47.89	48.02	48.16
7.0	49.00	49.14	49.28	49.42	49.56
7.1	50.41	50.55	50.69	50.84	50.98
7.2	51.84	51.98	52.13	52.27	52.42
7.3	53.29	53.44	53.58	53.73	53.88
7.4	54.76	54.91	55.06	55.20	55.35
7.5	56.25	56.40	56.55	56.70	56.85
7.6	57.76	57.91	58.06	58.22	58.37
7.7	59.29	59.44	59.60	59.75	59.91
7.8	60.84	61.00	61.15	61.31	61.47
7.9	62.41	62.57	62.73	62.88	63.04
8.0	64.00	64.16	64.32	64.48	64.64
8.1	65.61	65.77	65.93	66.10	86.26
8.2	67.24	67.40	67.57	67.73	67.90
8.3	68.89	69.06	69.22	69.39	69.56
8.4	70.56	70.73	70.90	71.06	71.23
8.5	72.25	72.42	72.59	72.76	72.93
8.6	73.96	74.13	74.30	74.48	74.65
8.7	75.69	75.86	76.04	76.21	76.39
8.8	77.44	77.62	77.79	77.97	78.15
8.9	79.21	79.39	79.57	79.74	79.92
9.0	81.00	81.18	81.36	81.54	81.72
9.1	82.81	82.99	83.17	83.36	83.54
9.2	84.64	84.82	85.01	85.19	85.38
9.3	89.49	86.68	86.86	87.05	87.24
9.4	88.36	88.55	88.74	88.92	89.11
9.5	90.25	90.44	90.63	90.82	91.01
9.6	92.16	92.35	92.54	92.74	92.93
9.7	94.09	84.28	94.48	94.67	94.87
9.8	96.04	96.24	96.43	96.63	96.83
9.9	98.01	98.21	98.41	98.60	98.80

平 方 表

5	6	7	8	9	差
30.80	30.91	31.02	31.15	31.25	11
31.92	32.04	32.15	32.26	32.38	12
33.06	33.18	33.29	33.41	33.52	12
34.22	34.34	34.46	34.57	34.69	12
35.40	35.52	35.64	35.76	35.88	12
36.60	36.72	36.84	36.97	37.09	12
37.82	37.95	38.07	38.19	38.32	12
39.06	39.19	39.31	39.44	36.56	13
40.32	40.45	40.58	40.70	40.83	13
41.60	41.73	41.86	41.99	42.12	13
42.90	43.03	43.16	43.30	43.43	13
44.22	44.36	44.49	44.62	44.76	13
45.56	45.70	45.83	45.97	46.10	14
46.92	47.06	47.20	47.33	47.47	14
48.30	48.44	48.58	48.72	48.86	14
49.70	49.84	49.98	50.13	50.27	14
51.12	51.27	51.41	51.55	51.70	14
52.56	52.71	52.85	53.00	53.14	15
54.20	54.17	54.32	54.46	54.61	15
55.50	55.65	55.80	55.95	56.10	15
57.00	57.15	57.30	57.46	57.61	15
58.52	58.68	58.83	58.98	59.14	15
60.06	60.22	60.37	60.53	60.68	16
61.62	61.73	61.94	62.09	62.25	16
63.20	63.36	63.52	63.68	63.84	16
64.80	64.96	65.12	65.29	65.45	16
66.42	66.59	66.75	66.91	67.08	16
68.06	68.23	68.39	68.56	68.72	17
69.72	69.89	60.06	70.22	70.39	17
71.40	71.57	71.74	71.91	72.08	17
73.10	73.27	73.44	73.62	73.79	17
74.82	75.00	75.17	75.34	75.52	17
76.56	76.74	76.91	77.09	77.26	18
78.32	78.50	78.68	78.85	79.03	18
80.10	80.28	80.46	80.64	80.82	18
81.90	82.08	82.26	82.45	82.63	18
83.72	83.91	84.09	84.26	84.46	18
85.56	85.75	85.93	86.12	86.30	19
87.42	87.61	87.80	87.98	88.17	19
89.30	89.49	89.68	89.87	90.06	19
91.20	91.39	91.58	91.78	91.97	19
93.12	93.32	93.51	93.70	93.90	19
95.06	95.26	95.45	95.65	95.84	20
97.02	97.22	97.42	97.61	97.81	20
99.00	99.20	99.40	99.60	99.80	20

附 表 (IV)

眞數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	1833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4394	4409	4425	4410	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4569	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5353	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5464	5478	5490	5502	5515	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5728	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6035	6098	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6720	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7034	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7303	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

四位對數表

比例部								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
4	8	12	17	21	25	29	33	37
4	8	11	15	19	23	26	30	34
3	7	10	14	17	21	24	28	31
3	6	10	13	16	19	23	26	29
3	6	9	12	15	18	21	24	27
3	6	8	11	14	17	20	22	25
3	5	8	11	13	16	18	21	24
2	5	7	10	12	15	17	20	22
2	5	7	9	12	14	16	19	21
2	4	7	9	11	13	16	18	20
2	4	6	8	11	13	15	17	19
2	4	6	8	10	12	14	16	18
2	4	6	8	10	12	14	15	17
2	4	6	7	9	11	13	15	17
2	4	5	7	9	11	12	14	16
2	3	5	7	9	10	12	14	15
2	3	5	7	8	10	11	13	15
2	3	5	6	8	9	11	13	14
2	3	5	6	8	9	11	12	14
1	3	4	6	7	9	10	12	13
1	3	4	6	7	9	10	11	13
1	3	4	6	7	8	10	11	12
1	3	4	5	7	8	9	11	12
1	3	4	5	6	8	9	10	12
1	3	4	5	6	8	9	10	11
1	2	4	5	6	7	9	10	11
1	2	4	5	6	7	8	10	11
1	2	3	5	6	7	8	9	10
1	2	3	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	7	8
1	2	3	4	5	5	6	7	8
1	2	3	4	4	5	6	7	8
1	2	3	4	4	5	6	7	8
1	2	3	3	4	5	6	7	8
1	2	3	3	4	5	6	7	8
1	2	2	3	4	5	6	7	7
1	2	2	3	4	5	6	6	7
1	2	2	3	4	5	6	6	7

附表 (IV)

真数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	2875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8035	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8454	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8517	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	7633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	9774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9026
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9409	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	6562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9690	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9741	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

四位對數表

比例部								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	2	3	4	5	5	6	7
1	2	2	3	4	5	5	6	7
1	2	2	3	4	5	5	6	7
1	1	2	3	4	4	5	6	7
1	1	2	3	4	4	5	6	7
1	1	2	3	4	4	5	6	6
1	1	2	3	4	4	5	6	6
1	1	2	3	3	4	5	6	6
1	1	2	3	3	4	5	5	6
1	1	2	3	3	4	5	5	6
1	1	2	3	3	4	5	5	6
1	1	2	3	3	4	5	5	6
1	1	2	3	3	4	5	5	6
1	1	2	3	3	4	4	5	6
1	1	2	2	3	4	4	5	6
1	1	2	2	3	4	4	5	6
1	1	2	2	3	4	4	5	5
1	1	2	2	3	4	4	5	5
1	1	2	2	3	4	4	5	5
1	1	2	2	3	4	4	5	5
1	1	2	2	3	3	4	5	5
1	1	2	2	3	3	4	5	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
1	1	2	2	3	3	4	4	5
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	4	4
0	1	1	2	2	3	3	3	4

附表 (V) 三角函數表

角度	真數			對數		
	sin	cos	tan	sin	cos	tan
0.0	0.0000	1.0000	0.0000	−∞	0.0000	−∞
0.5	0.0087	1.0000	0.0087	7.9408	0.0000	7.9409
1.	0.0175	0.9998	0.0175	8.2419	9.9999	8.2419
1.5	0.0262	0.9997	0.0262	8.4179	9.9999	8.4181
2.	0.0349	0.9994	0.0349	8.5428	9.9997	8.5431
2.5	0.0436	0.9990	0.0437	8.6307	9.9996	8.6401
3.	0.0523	0.9986	0.0524	8.7183	9.9994	8.7194
4.	0.0698	0.9976	0.0699	8.8436	9.9989	8.8446
5.	0.0872	0.9962	0.0875	8.9403	9.9983	8.9420
10.	0.1736	0.9848	0.1763	9.2397	9.9934	9.2463
15.	0.2588	0.9659	0.2679	9.4130	9.9849	9.4281
20.	0.3420	0.9397	0.3640	9.5341	9.9730	9.5611
25.	0.4226	0.9063	0.4663	9.6259	9.9573	6.6687
30.	0.5000	0.8660	0.5774	9.6990	9.9375	9.7614
35.	5.5736	0.8192	0.7002	9.7586	9.9134	9.8452
40.	0.6428	0.7660	0 8391	9.8081	9.8843	9.9233
45.	0.7071	0.7071	1.0000	9.8495	9.8495	0.0000
50.	0.7660	0.6428	1.1918	9.8843	9.8081	0.0762
55.	0.8192	0.5736	1.4281	9.9134	9.7586	0.1548
60.	0.8660	0.5000	1.7321	9.9375	9.6990	0.2386
65.	0.9063	0.4226	2.1445	9.9573	9.6259	0.3313
70.	0.9397	0.3420	2.7475	9.9730	9.5341	0.4389
75.	0.9659	0.2588	3.7321	9.9849	9.4130	0.5719
80.	0.9848	0.1736	5.6713	9.9934	9.2397	0.7537
85.	0.9962	0.0872	11.43	9.9983	8.9403	1.0580
90.	0.0000	0.0000	∞	0.0000	−∞	∞