遵照三十年修正課程標準編著

新中國教科書

高級中學

代數學

第一册

（乙組第二學年第一學期用）

編著者　李仲珩　孫振憲

正中書局印行

編輯大意

一、本書係遵照教育部於民國三十年頒布之修正高級中學數學課程標準編輯，爲高中二年級乙組學生之課本.

二、按修正標準所規定之授課時間分配表，高中二年級乙組代數，第一學期及第二學期，每週均爲三小時. 全學年以三十六週計算，實際授課時間，至少爲三十二週，卽九十六小時. 本書教材卽按此標準編輯而成，每小時平均授四面，當不致有教材多而授課時間不足之慽.

三、書中取材，除使讀者了解其所必需之各項運算法則而外，並期養成其正確之數學基本觀念. 力矯一般中學生僅記公式及算法，而不求了解定義及定理之弊.

四、敍述力避繁冗，而以簡明扼要爲主，俾便教師講解時，得以盡量引伸其義.

五、習題選取，難易並收，俾使讀者對於已知定理及公式之應用，得以重複練習，且可循序而進，以增其解題之能力.

六、本書所述之數學名詞，在教育部所審定者，尙未公布以前，暫採用目前最通用之譯名，並於篇後附載中英名詞對照表，以便讀者查考.

七、本書因編輯時間匆促，難免掛漏，尙祈高明不吝指正.

李仲珩　孫振憲　三十三年八月

目　　次

第一章
引論

第二章
四則運算

第三章
一次方程式

第四章
因式分解

第五章
最高公因式及最低公倍式

第六章
分式

第七章
開方

第八章
根式運算

第九章
二次方程式

第十章

二次聯立方程式

第十一章

不定方程式

第十二章

不等式

第一章

引論

1. 代數學與算術. 代數學與算術同為論數量的學科，而以代數學所論，特為普循．算術中的數量，僅以數字表示，而為單一定值．代數學中的數量，乃以符號表示，可示任意選定之值．通常表數的符號，為 $a,b,c,\cdots$ 等字母．若已知甲乙二數之差為 2，其和為 34，按算術解法，則為 $(34+2)\div 2$ 等於甲數，$(34-2)\div 2$ 等於乙數．在代數學中，則設甲數為 x，乙數為 y，其和為 a，其差為 b，由算式

$$x=\frac{a+b}{2}, \quad 及 \quad y=\frac{a-b}{2}$$

可得此項問題的一般解答．關於以文字表數所感的便利，其例甚多．故代數學實為算術的擴張，而對於數量或數的計算，與問題的解答，益感便捷．

代數學通用的計算符號，仍為算術中的"＋"，"－"，"×"，"÷"，"( )"及"＝"；最大的差異，在並取"＋"，"－"為性質符號，分別表一數的正負．此外，尚有他種計算符號，俟後分別

敍述.

2. 正負數與0 代數學中的數,除整數,分數及小數外,尚有0,正數,負數,有理數,無理數,實數與虛數.讀者在初中學習代數時,對於上列各數,當已相當了解.茲於進修以前,再將正負數與零,作進一步的解釋如下,其餘無理數,虛數等,留待專章中討論.

在算術中,二數相減,為自大數中減去小數,故其結果無正負的分別.在代數學中,二數相減為 $a-b$, a 大於 b,其差為正; a 小於 b,其差為負; a 等於 b,其差為 0.茲舉實例以釋正負數的意義於下:

例 1. 以前五年,以 $+5$ 表示;今後五年,以 -5 表示.

例 2. 前進六尺,以 $+6$ 表示;後退六尺,以 -6 表示.

例 3. 欠人十元,以 -10 表示;人欠十元,以 $+10$ 表示.

舉凡相反事項所表的數量,可分別以"+","−"符號,置於其數前.如收入5元支出8元之結果,為不足3元,可以 -3 表示;收入8元支出5元之結果,為剩餘3元,可以 $+3$ 表示.此"+","−"稱為性質符號,而3稱為絕對值.絕對值之前,無正負符號,然正數前,通常亦不置符號.正數隨其絕對值增加而增大;負數則隨其絕對值增加而減小.

0為代數學中符號的一種,其重要意義有三:

(1) **0為正數與負數間的界限** 如謂自某點向上及向右

爲正，則自某點向下或向左爲負，而某點卽爲 0. 由正而負，或由負而正，其間必經過 0 的界限. 正數大於 0，負數小於 0，再以大小符號表示如下：

若 a 爲正數，卽以 $a>0$ 表示；b 爲負數，卽以 $b<0$ 表示.

〔2〕 0 爲表示無物的符號　案上僅有書五册，今自此案取去五册，則此案存書的數量爲 0. 幾何學謂無長、無寬、無厚而僅有位置的幾何圖形，稱爲點；是卽點的長、寬、厚三度量均爲 0. 又表數量的數 2030 及表號次的數 00023，前者表示一數量爲一個四位數，惟其百位及個位僅有其位，而無數字存在；後者表示一號碼原有五位數字，而此僅爲起首的第 23 號. 因 0 的符號，爲表示無物的數，與 1,2,3,4,……乃有區別；而 1,2,3,4,……等數，稱爲自然數.

〔3〕 0 爲無限小的極限　無限小與極限二名詞，於本書第一章，自不能作精確解釋. 玆舉一淺易的例，加以詮述，而使讀者得以注意零的又一意義. 我國周代惠施曾說：“一尺之棰日取其半，萬世不絕”. 此日取其半的數量，隨時日綿延而漸減小，稱爲無限小. 所謂不絕者，就是不爲 0. 其意爲此無限小與 0 的距離，雖極度短小，而不爲 0；時日愈久，則相距更近，而以 0 爲其最終的界限或稱極限. 此爲 0 的又一重要意義.

關於 0 在計算時，尙有特異的性質，分述於下：

$$a+0=a,\quad a-0=a,\quad 0-a=-a,\quad 0\times a=0.$$

以上四式，其理易明，讀者可試證之．

3. 符號律 二數量相加時，同號的，其絕對值相加，而以原號置於其前；異號的，其絕對值相減，而以絕對值較大者的符號置於其前．如：

$$(+8)+(+5)=+13,\qquad (+8)+(-5)=+3,$$

$$(-8)+(-5)=-13,\qquad (-8)+(+3)=-3.$$

二數量相減時，同號的，其絕對值相減，異號的，其絕對值相加；其前面所置的符號，一律視被減數大於減數的，結果為正，被減數小於減數的，結果為負．如：

$$(+\overset{\text{大}}{21})-(+\overset{\text{小}}{13})=+8,\qquad (-\overset{\text{小}}{21})-(+\overset{\text{大}}{13})=-34,$$

$$(-\overset{\text{小}}{21})-(-\overset{\text{大}}{13})=-8,\qquad (+\overset{\text{大}}{13})-(-\overset{\text{小}}{21})=+34.$$

一數量乘一倍數，同號的，其絕對值相乘，而置正號於其前；異號的，其絕對值相乘，而置負號於其前．如：

$$(+7)\times(+8)=+56,\qquad (+7)(-8)=-56,$$

$$(-7)\times(-8)=+56,\qquad (-7)(+8)=-56.$$

由此可推得正數的任何次乘冪皆恆為正，而負數的奇次乘冪恆為負，其偶次乘冪，則恆為正．更可推得一正數的奇次方根的主值恆為正，其偶次方根的主值為正或為負；一負數的奇次方根的主值恆為負．關於方根的主值，詳見第 117 節．

一數量爲一數所分，同號時，其絕對值相除，而置正號於其前；異號時，其絕對值相除，而置負號於其前．如：

$$(+56)\div(+8)=+7,\qquad (+56)\div(-8)=-7,$$
$$(-56)\div(-8)=+7,\qquad (-56)\div(+8)=-7.$$

以上符號律的運算原理已詳見初中代數學中，讀者當能自解之．

4. 代數學中的和及積 算術中，二數相加的結果稱爲和，相減的結果稱爲差．在代數學中，均可以 $a+b$ 式以表示；此 $a+b$ 稱爲代數和，a 及 b 可表任意的正數及負數．不特如此，即以加減號連接有理數與無理數，如 $a\pm\sqrt{b}$，及以加減號連接實數與虛數，如 $a\pm bi$，也統稱爲代數和．此常爲代數學中所求得的結果．

代數學中二數或二個以上的數，如 a,b,c,d 四者的積，通常以 $a\times b\times c\times d$ 或 $a\cdot b\cdot c\cdot d$ 表示，或連寫而略其符號，如 $abcd$，而 a,b,c,d 各爲其積的因數．

5. 係數與指數 代數和有時可按算術方法，直求其和．如 $5a+3b-2a+4b=3a+7b$，式的左端，5 及 2 與 3 及 4 各爲 a 與 b 的係數；式的右端，3 與 7 各爲 a 與 b 的係數．係數等於 1 的，可以省略不寫．如 $a+b$ 式在 a 及 b 的前面均應有一係數"1"；惟略而不寫．係數也有以文字表示的，稱爲文字係數．如 $5mxy$ 一式，就 mxy 而言，其係數爲 5；若就 xy 而言，其係數爲 $5m$；若

就 y 而言，則其係數爲 $5mx$.

在乘算式中，若各因數均相等，則其積爲記一因數而寫所有相同因數的個數於其右上角，如 $aaaaa=a^5$ 及 $aaabbbb=a^3b^4$；前例中的 5，稱爲 a 的指數，後例中的 3 及 4，分別稱爲 a 及 b 的指數．指數爲 1 的，則略而不寫；如僅見一式爲 xy 或 b，則此 x、y 及 b 的指數統爲 1.

上列 a^5 稱爲 a 的五次乘冪；a^3b^4 稱爲 a 的 3 次乘冪與 b 的 4 次乘冪之積．若爲 $a^{\frac{1}{2}}$，則稱爲 a 的二次根或平方根.

6.　項與代數式及其類別　代數和中以加減符號連接的數，統稱爲項，如 $3x+4y-5z$ 中的 $3x$，$4y$ 及 $5z$ 皆爲項；而其全式 $3x+4y-5z$，則稱爲代數式.

一項中文字的乘冪指數和爲 1 的，則此項的次數爲一；其和爲 2 的，則此項的次數爲 2；餘類推．如 $5x$，$6a^2b$ 及 $8x^2y^3$ 等項的次數，分別爲一次，三次及五次.

代數式含有一項的，稱爲單項式；含二項的，稱爲二項式；餘類推．又代數式所含各項的最高次數爲 1 的，稱爲一次式；其各項的最高次數爲 2 的，稱爲二次式；餘類推．又各項的次數相等的，稱爲齊次式；例示於下：

ax^2+bx+c 稱爲二次三項式；

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$ 稱爲 n 次多項式；

$a_0x^3+a_1x^2y+a_2xy^2+a_3y^3$ 稱爲三次齊次式.

代數式含有分數，且其分母又爲代數式的，則稱爲分式；若不含分數，或雖含分數而其分母爲單一定值的，則稱爲整式。如 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 爲整式；$\dfrac{cx+d}{ax^2+bx+c}$ 爲分式。

代數式含有根號，而根號內又爲代數式的，則稱爲無理式；若不含根號，或雖含根號而其根號內卻爲單一定值的，則稱爲有理式，如 $\sqrt{3}x^2-2x+5$ 爲有理式；而 $x+\sqrt{x-5}+4$ 則爲無理式。

7.　代數式的值　代數式本爲數字及文字的代數和，其中文字所表示的數，若爲已定，將此已定的數，代式內的文字，依計算符號，即可求得此代數式的值。其演算順序，與算術法則相同，即有括號時，先計算括號內的數，如無括號，則自左而右，先乘除而後加減，例示如下：

例 1.　設 $a=3, b=2, c=1, d=0$，求 $a(b^2-c^2)+b(c^2-d^2)+d(a^2-b^2)$ 的值。

解　原式 $=3\times(4-1)+2\times(1-0)+0\times(9-4)=9+2=11$。

例 2.　設 $a=3, b=2, c=1, d=0$，求 $\dfrac{2a^2}{b+c}-\dfrac{2b^2}{c+a}-\dfrac{2c^2}{b+d}+\dfrac{2d^2}{a+d}$ 的值。

解　原式 $=\dfrac{2\times9}{2+1}-\dfrac{2\times4}{1+3}-\dfrac{2\times1}{2+0}+\dfrac{2\times0}{3+0}=6-2-1=3$。

例 3.　設 $a=5, b=4, c=3$，求 $\sqrt[3]{a^2+4b^2+4c^2}$ 的值。

解　原式 $=\sqrt[3]{25+4\times16+4\times9}=\sqrt[3]{125}=5$。

8.　基本定律　基本運算定律，在初中時，頗爲讀者所忽

視,實則此爲計算時重要的基礎,特摸述於下:

〔一〕加法的可易律: $a+b=b+a$.

如有甲種書 a 册,乙種書 b 册,先自甲種書數起,數至第 a 册,再繼數乙種書,數至第 b 册,所得兩種書的總共册數,乃等於先數乙種書,繼數甲種書,所得的總共册數.故上述定律,常能成立。

〔二〕加法的可羣律: $a+(b+c)=(a+b)+c=(a+c)+b$.

先數 a 個數之後,繼數至第 b 個數,是卽 $a+b$;然後再接連數至第 c 個數,是爲 $(a+b)+c$.或先數 b 個數之後,繼數至第 c 個數,是卽 $b+c$;然後再接連數至第 a 個數,是爲 $(b+c)+a$.此二次所得的總數,當相等,

$$(a+b)+c=(b+c)+a=a+(b+c).$$

同理:

$$(a+b)+c=(a+c)+b.$$

故上述定律,常可成立.

〔三〕乘法的分配律: $m(a+b+c)=ma+mb+mc$.

因

$$\begin{aligned} ma+mb+mc &= (m+m+m+\cdots\cdots\text{至 } a \text{ 項}) \\ &\quad +(m+m+m+\cdots\cdots\text{至 } b \text{ 項}) \\ &\quad +(m+m+m+\cdots\cdots\text{至 } c \text{ 項}) \\ &= m+m+m+\cdots\cdots\text{至 } (a+b+c) \text{ 項} \\ &= m(a+b+c). \end{aligned}$$

故上述定律,常可成立.

〔四〕乘法的可易律：　$ab=ba$.

因　$ab=(1+1+1+\cdots\cdots$至 a 項$)\times b$

$=b+b+b+\cdots\cdots$至 a 項$=ba$.

故上述定律，常可成立。

〔五〕乘法的可遷律：　$(ab)c=a(bc)=(ac)b$.

因　$(ab)c=ab+ab+ab+\cdots\cdots$至 c 項

$=a(b+b+b+\cdots\cdots$至 c 項$)=a(bc)$.

同理，　$a(bc)=(ac)b$.

故上述定律，常可成立。

〔六〕除法的分配律：　$\frac{a+b+c}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}+\frac{c}{n}$.

由乘法的分配律，設 $m=\frac{1}{n}$，則以上定律，即易證其常可成立。

9．　等式律　兩代數式，以等號聯接時，稱為等式。等式實為等數量皆備表示的符號。對於等式的運算，有極重要的規律，在初學時，每為讀者所忽視，而致發生錯誤的結果，茲特複述於下：

〔一〕若 $a=b$，無論 c 為正數或負數，則 $a+c=b+c$；其逆亦常真。

〔二〕若 $a=b$，無論 c 為正數或負數，則 $ac=bc$。

〔三〕若 $ac=bc$，除 $c=0$ 而外，則 $a=b$.

因在等式 $ac=bc$ 中,設 $c=0$,則變為 $a\cdot 0=b\cdot 0$.此式中的 a 及 b,可為任何數,而不必相等,均無妨其式的成立,如 $2\cdot 0=3\cdot 0$,$-5\cdot 0=7\cdot 0$ 均合理,固不必有 $a=b$ 的結果。再由以上第三律,可知凡等式的兩端,除以相同的正數或負數,結果等式不變.若兩端同除以 0,匪特為不可能,且亦不能保持等式的存在。

更由以上第三律,若等式的一端為 0,即可得下列的推論。為:

若 $ab=0$,則 $a=0$ 或 $b=0$,

因 $a\cdot 0=0$,乃有 $ab=a\cdot 0$。

故除 $b=0$ 而外,則 $a=0$;同理,除 $a=0$ 外,則 $b=0$.

習 題 一

1. 列舉代數學與算術異同之點.

2. 以實例解釋下列各式:

$$a+(-b)=a-b;\qquad a-(-b)=a+b;$$

$$a(-b)=-ab;\qquad (-a)(-b)=ab.$$

3. 列舉 0 的重要意義.

4. 按乘法的分配律,試證: $a-3(b-c+d)=a-3b+3c-3d$.

5. 氣壓計中的水銀柱,第一日下降 0.1 厘米,第二日上升 1.5 厘米,第三日再下降 0.1 厘米,問此水銀柱第一日較第三日高若干厘米?

6. 設 $a=-3,b=-2,c=-1$,求 $a-(-b)+(-c)$ 的值.

7. 設 $a=-1,b=-2,c=-3,d=-4$,試求 $2a^2bc-3b^2cd+4c^2da-5d^2ab$

的值.

8. 設 $a=$ [illegible], $b=2, c=3; d=0$, 求下列各式的值

(1) $abc+bcd+cda+dab$;　　　(2) $a^3+b^3+c^3+d^3$,

(3) $18a^2+\frac{11}{9}c^4+30ab-16ac-18bc$;

(4) $6ab-\frac{4}{3}ac^2-2a+\frac{1}{8}b^3-3d+\frac{4}{9}c^2$.

9. 設 $a=8, b=6, c=1, x=9, y=4$, 求下列各式的值:

(1) $\sqrt[3]{\left(\frac{6cy}{x^2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{b^3}\right)}$;　(2) $\frac{7b^2y^3}{12a^2x}-\sqrt[3]{\left(\frac{ax^4}{b^2y^2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{ab^3}{2x}\right)}$

10. 以 $x=a^2-bc, y=b^2-ca, z=c^2-ab$, 分別代入下式

$$(ax+by+cz)-(a+b+c)(x+y+z)$$

而求其結果.

11. 求以一代數式表示某三位數.

12. 已知三個連續整數的最小者爲 m, 求以代數式分別表示其和與積.

13. 子的現年爲 x 歲, 五年後, 其歲數適爲其父年的一半. 求以代數式表示其父的現年.

第 二 章

四 則 運 算

10 **加法與減法** 加法與減法固為分別求二式和差的運算，然彼此亦可謂互為逆運算，如：

$$(a+b)-b=a, \quad 及 \quad (a-b)+b=a$$

二者可以互相核驗其結果.一串的加法與減法,可按任何的順序以完成.茲將所應用的重要規律,摘錄於下:

〔一〕符號律: $a+(-b)=a-b$, $a-(-b)=a+b$.

〔二〕括號律: 括號前為"+"號,可逕去消,而不變其號內各項的符號;括號前為"−"號,則去括號後,號內的各項,正的改為負,負的改為正.如需自某項起,添加括號,則視此項的符號原為正或負,而分別保持或改變此項後各項的符號.

〔三〕加法的可易律及可羣律: 見第 8 節.

由以上三律,得一整式加減算法的法則,為:

二同類項相加(或減)時,只須求其係數的和(或差),再將二項的公有文字附列其後;非同類項,僅能以加號(或減號)聯接.

二個或二個以上的多項式相加時,順次寫出各項,並保持各

項原有的符號，然後合併其同類項.

自一多項式，減去另一多項式，先變減式中各項的符號，而順序寫出，然後合併其同類項.

例 1. 求 $\frac{1}{2}a^3-2a^2b-\frac{3}{2}b^3$，$\frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2+2b^3$ 與 $-\frac{3}{2}a^3+ab^2+\frac{1}{2}b^3$ 的和.

解　$\frac{1}{2}a^3-2a^2b-\frac{3}{2}b^3+\frac{3}{2}a^2b-\frac{3}{4}ab^2+2b^3-\frac{3}{2}a^3+ab^2+\frac{1}{2}b^3$

$$=-a^3-\frac{1}{2}a^2b+\frac{1}{4}ab^2+b^3.$$

本題的解法，亦可列成算式如下:

$$\begin{array}{rrrr}
\frac{1}{2}a^3 & -2a^2b & & -\frac{3}{2}b^3 \\
 & \frac{3}{2}a^2b & -\frac{3}{4}ab^2 & +2b^3 \\
-\frac{3}{2}a^3 & & +ab^2 & +\frac{1}{2}b^3 \\
\hline
-a^3 & -\frac{1}{2}a^2b & +\frac{1}{4}ab^2 & +b^3
\end{array}$$

2. 求自 $x^3+y^3-6x+5y$ 減去 $-2x^2-6x+7y-8$ 與 x^3+2x^2-5y+9 的和，所得的差.

解　$x^3+y^3-6x+5y+2x^2+6x-7y+8-x^3-2x^2+5y-9$

$$=y^3+3y-1.$$

又可列算式為:

$$
\begin{array}{rrrrr}
x^3+y^3 & & -6x & +7y & \\
 & +2x^2 & +6x & -7y & +8 \\
-x^3 & -2x^2 & & +5y & -9 \\
\hline
y^3 & & & +5y & -1
\end{array}
$$

習 題 二

1. 求 $4ax^2y, -5ax^2y, 5bx^2y$ 與 $-2bx^2y$ 的和.

2. 自 $2x^3$ 減去 $5x^2+3x-1$，再加以 $3x^2+3x-1$.

3. 自 $5x^4-8x^3-2x^2+7$ 減去 $x^4+5+x-8x^3$ 所得的結果，再加自 x^3+x^2-x+1 減去 x^3-x^2+x+1 所得的結果.

4. 加何式於 a^3+5a^2b，可得 a^3+b^3?

5. 加何式於 $4x^3-3x^2+2$，可得 $4x^3+7x-9$?

6. 自何式中減去 $11a^2-5ab-7bc$，始得 $5a^2+7ab+7bc$?

7. 自 $2x^2-5x-3$ 減去 $3x^3-7x+1$，再自 0 減去此二者的差，所得結果，復加以 $2x^2-2x^3-4$.

8. 去括號化簡：$-[-\{-(-x)\}]-[-(-y)]$.

9. 去括號化簡：$-4(a+d)+24(b-c)-2[c+d+a-3\{d+a-4(b+c)\}]$.

10. 求 $ax^3-2bx^2+3, bx-cx^3-x^2$ 及 x^3-ax^2+cx 的和.

11. 乘法及分離係數法 乘法爲加法的簡算，如以 b 乘 a 所得的積，即爲 b 個 a 的和. 茲將所應用的重要規律摘錄於下：

〔一〕符號律:　$(a)(-b)=-ab$;　$(-a)(b)=-ab$;

$(-a)(-b)=ab$.

〔二〕乘法的可易律,可羣律及分配律:　見第 8 節.

〔三〕指數律:　$a^m \cdot a^n=a^{m+n}$;　$(a^m)^n=a^{mn}$.

由上列規律,得一般整式乘法的法則,為:

求二單項式的積時,先求其數字的積,再乘以文字的積;遇有同文字,則合併其乘冪的指數;其前面所置的符號之為正或為負,視原二式為同號或異號而定.

求一多項式,與一單項式或另一多項式的積時,卽以乘式的各項,分乘被乘式的各項;其數字,文字及符號的計算,可按照二單項式乘法;然後按加法或減法,得一代數和.

例 1. 求 $-5x^2y^3$, $8y^2z^5$ 與 $-3xz^4$ 的積.

解　積 $=(-5)(-3)\cdot 8\cdot x^{2+1}y^{3+2}z^{5+4}=120x^3y^5z^9$.

例 2. 求 $x^4-x^2y^2+y^4$ 與 x^2+y^2 的積.

解

$$\begin{array}{l}
x^4-x^2y^2+y^4\\
\underline{x^2+y^2\qquad\qquad\quad}\\
x^6-x^4y^2+x^2y^4\\
\underline{\qquad +x^4y^2-x^2y^4+y^6}\\
x^6\qquad\qquad\qquad\quad +y^6
\end{array}$$

此為四次齊次式與二次齊次式相乘,其積當為六次齊次式.

例 3. 求 $\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}$ 與 $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x^2$ 的積.

解　二者俱按 x 的降冪排列於下,然後求積.

$$
\begin{array}{rrrrr}
\frac{1}{2}x^2 & -\frac{2}{3}x & -\frac{3}{4} & & \\
\frac{1}{2}x^2 & +\frac{2}{3}x & -\frac{3}{4} & & \\
\hline
\frac{1}{4}x^4 & -\frac{1}{3}x^3 & -\frac{3}{8}x^2 & & \\
 & +\frac{1}{3}x^3 & -\frac{4}{9}x^2 & -\frac{1}{2}x & \\
 & & -\frac{3}{8}x^2 & +\frac{1}{2}x & +\frac{9}{16} \\
\hline
\frac{1}{4}x^4 & & -\frac{43}{36}x^2 & & +\frac{9}{16}
\end{array}
$$

例 4.　求 $ax+b$ 與 $cx+d$ 的積。

解

$$
\begin{array}{rrr}
ax & +b & \\
cx & +d & \\
\hline
acx^2 & +bcx & \\
 & +adx & +bd \\
\hline
acx^2 & +(bc+ad)x & +bd
\end{array}
$$

此題的結果 $acx^2+(bc+ad)x+bd$ 爲因式分解公式之一。

由上例 2, 3, 4 的算式，所示諸項排列的次序，按某項所在的位置，即知其所含文字的乘冪爲何，故可略去文字，而僅寫係數，俾算式得以稍簡，是爲分離係數法。

分離係數法的法則，爲先將二已知多項式，統按其所含文字的降冪或升冪排列，各按其所排定的次序，寫其係數，如有缺項時，以 0 補足，列成算式，以求其係數相乘的結果；然後順序各附

文字的積於其後.

分離係數乘法,必須合於下列二情形之一,始可運用.否則,採用普通乘法.

(一) 二多項式,俱僅含一個文字.

(二) 二多項式,俱為齊次式,而僅含二個文字.

例 1. 求以 x^3+x-2 乘 $x^5+x^4+x^2+2x+1$ 所得的積.

解 僅寫其係數

$$
\begin{array}{r}
1+1\ \ 0+1+2+1\\
1\ \ 0+1-2\\
\hline
1+1\ \ 0+1+2+1\qquad\qquad\\
+1+1\ \ 0+1+2+1\qquad\\
-2-2\ \ 0-2-4-2\\
\hline
1+1+1\ \ 0\ \ 0+2\ \ 0-3-2
\end{array}
$$

因原二式為 x 的降冪排列,其積也當為 x 的降冪排列;原二式係三次式與五次式,其積當為八次式.由上列係數相乘的結果,順序各附以文字的積,即得

$$x^8+x^7+x^6+2x^3-3x-2.$$

例 2. 求以 $x^2+4xy-5y^2$ 乘 $3x^5+2x^4y-x^3y^2+xy^4$ 所得的積.

解 僅寫其係數

$$
\begin{array}{r}
3+\ 2-\ 1\ \ \ 0+1\\
1+\ 4-\ 5\qquad\\
\hline
3+\ 2-\ 1\ \ \ 0+1\qquad\qquad\\
+12+\ 8-\ 4\ \ \ 0+4\qquad\\
-15-10+5\ \ \ 0-5\\
\hline
3+14-\ 8-14+6+4-5
\end{array}
$$

原二式均爲 x 的降冪排列與 y 的升冪排列，故其積亦當爲 x 的降冪排列與 y 的升冪排列；原二式爲二次式與五次式，其積當爲七次式．故得結果爲

$$2x^7+14x^6y-8x^5y^2-14x^4y^3+6x^3y^4+4x^2y^5-2xy^6.$$

例 8． 求 $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4$ 的結果．

解 諸二項式中各項的係數均爲 1．

$$\begin{array}{r}1+1\\1+1\\\hline 1+1\\+1+1\\\hline 1+2+1\end{array}\qquad\begin{array}{r}1+2+1\\1+1\\\hline 1+2+1\\+1+2+1\\\hline 1+3+3+1\end{array}\qquad\begin{array}{r}1+3+3+1\\1+1\\\hline 1+3+3+1\\+1+3+3+1\\\hline 1+4+6+4+1\end{array}$$

故其結果可寫爲 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

習 題 三

1． 化簡以下各積或乘冪：

$$(-ab^2c^3)(a^3b)^2(-ac^3)^5,\quad (-2x^2y^4)^3(ax^5y^{11})^2,\quad (a^mb^nc^{2n})^n.$$

2． 由 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(bc+ad)x+bd$ 的結果，求下列各題的積

$$(x+7)(x-9),\qquad (x-5)(x+13),$$

$$(3x+7)(2x-3),\qquad (4x-3)(\text{[illegible]}x+\text{[illegible]}).$$

3． 求 $5x^3-3ax^2+a^2x+a^3$ 與 [illegible]x^2-ax-[illegible]a^3 的積．

4． 求 $a^2-2ax+bx-x^2$ 與 $b+x$ 的積．

5. 求 $x^4-2x+5x^2-x^3$ 與 $3+x^2-x$ 的積.

6. 求 $2x^n-3x^{n-2}+5x^{n-3}$ 與 $x^{n-2}-x^{n-3}$ 的積.

7. 求 $x^2+xy+y^2+x-y+1$ 與 $x-y-1$ 的積.

8. 求 $(x+7y-z)(2x+y-8z)$ 的結果.

9. 求 $(x^2+x+1)(x^4-x^2+1)(x^2-x+1)$ 的結果.

10. 求 $(b+x)(b^2+x^2)(b-x)$ 的結果.

11. 求 $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$ 的結果.

12. 求證下列恆等式:

(1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$.

(2) $(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$.

(3) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$.

(4) $(x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

(5) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

(6) $(a^2-b^2)(x^2-y^2)=(ax+by)^2-(bx+ay)^2$.

13. 不必乘出，而求$(2x^6-3x^5+4x^4-7x^3+2x-5)(3x^5-x^3+2x^2+3x-8)$的結果中，所含 x^6, x^5 及 x^4 的係數，各為何?

提示: 結果中含 x^6 的項，乃集合 $x^6\cdot(-8)$, $x^5\cdot x$, $x^4\cdot x^2$ 及 $x^3\cdot x^3$ 各項而成，然後求其係數的和，卽得．求 x^5, x^4 的係數亦如是.

14. 不用算式，求 $(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)(b_0x^2+b_1x+b_2)$ 的結果.

12. 除法及分離係數法　A, B 表示任意二代數式，其中 B 不等於 0，則 $A\div B$ 或 $\frac{A}{B}$ 意義有二：一爲乘法的逆算法，即求 A 須乘以何式始等於 B；一爲迭減法，即自 A 減去 B 的若干倍，所餘爲幾何。

除法所用的基本規律，摘錄如下：

(一) 除法的分配律：　見第八節.

(二) 符號律：　$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b}$, $\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$, $\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}$.

(三) 指數律：　當 $m>n$, 則 $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$.

(四) 分數律：　$\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}$ (b 及 c 均不等於 0).

由上列規律，得一般整式除法的法則，爲：

以一單項式除另一單項式時，寫被除式於除式之上，成一分式，按上列第二，第三及第四諸規律化簡，即得.

以一單項式除一多項式時，按上列第一規律，求以除式分除被除式各項所得之商，然後求各商的代數和.

以一多項式，除另一多項式，除易知被除式與除式有公因式，即先消去以化簡而外，一般通用的算法，乃所謂長除法. 其法則如下：

(1) 將除式及被除式統按其所含相同文字的降冪(或升冪)

排列.

(2) 以除式的第一項,除被除式的第一項,所得的結果,作爲商的第一項.

(3) 以所得商的第一項,通乘除式的各項,將此積,依同類項,順序列於被除式的下,而相減.

(4) 所得的差,再取下被除式的其餘各項(所取項數的多寡,視需用如何而定),列於其後,爲第一次差.再以除式的第一項,除此差的第一項,所得結果,作爲商的第二項.

(5) 以所得商的第二項,通乘除式各項,所得的積,依同類項置於第一次差的下,而相減,以求得第二次差.再以除式的第一項除此差的第一項,所得結果,作爲商的第三項.

依上法逐次相除,若末次的差爲 0,則爲整除.若不能整除,則在商爲整式時,所得末次的差,其式的次數,最高當比除式的次數少一.此末次差,通常稱爲餘式.

例 1. 求 $(-16x^3y^2)\div(-4xy^2)$ 與 $28a^4b^3\div(-4a^3bc)$ 的結果.

解 $\dfrac{-16x^3y^2}{-4xy^2}=4x^2$, $\qquad \dfrac{28a^4b^3}{-4a^3bc}=-\dfrac{7ab^2}{c}$.

例 2. 求 $(4x^4y^4-8x^3y^2+6xy^3)\div(-2xy)$ 所得的商.

解 $\dfrac{4x^4y^4-8x^3y^2+6xy^3}{-2xy}=\dfrac{4x^4y^4}{-2xy}-\dfrac{8x^3y^2}{-2xy}+\dfrac{6xy^3}{-2xy}$

$$=-2x^3y^3+4x^2y-3y^2.$$

例 3. 求以 $1-a-2x$ 除 $1-a^3-8x^3-6ax$ 所得的結果.

解 $1-a-2x)1-6ax-a^3-8x^3(1+a+2x+a^2-2ax+4x^2$

$$1-a-2x$$
$$a+2x-6ax$$
$$a-a^2-2ax$$
$$2x+a^2-4ax$$
$$2x-2ax-4x^2$$
$$a^2-2ax+4x^2-a^3$$
$$a^2-a^3-2a^2x$$
$$-2ax+2a^2x+4x^2$$
$$-2ax+2a^2x+4ax^2$$
$$4x^2-4ax^2-8x^3$$
$$4x^2-4ax^2-8x^3$$
$$0$$

例 4. 求以 x^3-7x+5 除 $x^5-2x^4-4x^3+19x^2$ 所得的結果.

解 $x^3-7x+5)x^5-2x^4-4x^3+19x^2(x^2-2x+3$

$$x^5-7x^3+5x^2$$
$$-2x^4+3x^3+14x^2$$
$$-2x^4+14x^2-10x$$
$$3x^3+10x$$
$$3x^3-21x+15$$
$$31x-15\cdots\text{餘式}$$

例 5. 求以 $a^2-[illegible]ab+[illegible]b^2$ 除 $[illegible]a^4-a^3b+[illegible]a^2b^2+1[illegible]ab^3+[illegible]b^4$ 所得的商及餘式.

解
$$
\begin{array}{r}
2a^2-3ab+4b^2\,\big)\,6a^4-a^3b+2a^2b^2+13ab^3+4b^4\,(\,3a^2+4ab+b^2\\
\underline{6a^4-9a^3b+12a^2b^2\qquad\qquad\qquad}\\
8a^3b-10a^2b^2+13ab^3\qquad\\
\underline{8a^3b-12a^2b^2+16ab^3\qquad}\\
2a^2b^2-3ab^3+4b^4\\
\underline{2a^2b^2-3ab^3+4b^4}\\
0
\end{array}
$$

由以上例 4 及例 5，所示諸項排列的次序，按某項所在的位置，卽知其所含文字的乘冪爲何．故在長除法中，可略去文字，而僅寫其係數，俾算式得以稍簡．

因分離係數除法的法則，爲先將二已知多項式，統按其所含文字的降冪或升冪排列，各按其所排定的次序，寫其係數，如有缺項時，以 0 補足，列成算式，以求其係數相除的結果；然後順序各附文字的商於其後．

分離係數除法，須合於下列二情形之一：

(一) 二多項式，俱僅含一個文字；

(二) 二多項式俱爲齊次式，而僅含二個文字．

始可運用．否則，採用普通除法．

例 1. 求以 $x^3-4x+8-2x^2$ 除 $3x^5-5x^3-8x^4+26x^2-28x+24$ 所得的商及餘式．

解　先按 x 的降冪排列，各寫其係數

$$
\begin{array}{r}
1-2-4+8)\,3-8-5+26-28+24\,(3-2+3 \\
\underline{3-6-12+24} \\
-2+7+2-28 \\
\underline{-2+4+8-16} \\
3-6-12+24 \\
\underline{3-6-12+24} \\
0
\end{array}
$$

因被除式及除式均爲 x 的降羃排列，且分別爲五次與三次，故其商亦當爲 x 的降羃排列，且應爲二次式. 由以上算式，可知商爲 $3x^2-2x+3$，餘式爲 0.

上列算式，又可採用一種簡算法，整列算式的各項，而解算如下：

除式	1	3	−8	−5	+26	−28	+24	····被除式
	2		+6	+12	−24			
	4			−4	−8	+16		
	−8				+6	+12	−24	
		3	−2	+3	0	0	0	
		商			餘式			

此算式中，縱線左側的直行數字，爲除式的係數. 自其第一項後的餘項，均變其符號，其目的乃使在各步演算時，可以加法代替減法.

被除式各項的係數，置於縱線右側的第一水平線上，以除式的第一項，除被除式的第一項得 3，置於橫線下第一位，即商的第一項.

以 3 分乘除式的餘項 2, 4 及 −8, 得算式中第二水平線上各數爲 6, 12 及 −24. 自縱線右側的第二直行起, 順次排列, 然後求此第二直行中各數之和; 復除以除式的第一項, 得 −2, 寫於橫線下第二位, 卽商的第二項.

以 −2 分乘除式的餘項 2, 4 及 −8, 得算式中第三水平線上各數, 爲 −4, −8 及 +16. 自縱線右側的第三直行起, 順次排列, 然後求此第三直行中各數之和; 復除以除式的第一項, 得 +3, 寫於橫線下第三位, 卽商的第三項.

依上法繼續進行, 並求得第四, 第五及第六各直行數字之和, 均各爲 0; 且已知其商爲二次式, 當爲三項. 故知 3, −2 及 3 爲商的各項係數, 而與 3, −2 及 3 同列的各項, 均爲零時, 卽表示餘式爲零, 而適爲整除.

例 2. 求以 $5x^2-3x-1$ 除 $15x^4-19x^3+8x^2-2$ 所得的結果.

解 先將係數分列於下, 再按上法演算.

除式						
5	15	−19	+8	0	−2	……被除式
3		9	3			
1			−6	−2		
				3	+1	
	3	−2	+1	+1	−	
	商			餘式		

因被除式與除式均爲 x 的降冪排列, 且分別爲四次及二次, 故商當爲 x 的降冪排列, 且應爲二次式; 其項數應爲三. 由上列算式, 知商爲 $3x^2-2x+1$, 餘式爲 $x-1$.

習 題 四

1. 乘 $68a^{2}b^{5}c^{3}+8a^{2}b^{5}c^{5}$ 及 $-50y^{3}x^{3}+5x^{2}y^{3}$ 的結果.

2. 求以 $-\frac{5}{6}x$ 除 $-\frac{5}{2}x^{4}+\frac{5}{3}xy+\frac{10}{3}x$ 所得的商

3. 求下列各題的結果:

(1) 以 x^2+2x+8 除 $x^4+x^3+7x^2-6x+8$.

(2) 以 x^2-4x+2 除 $x^5-7x^4+9x^3-6x^2-x+2$.

(3) 以 $4y^2-13y+5$ 除 $20y+9-11y^3+28y^4-25y^2$.

(4) 以 $2x^2+3xy+7y^2$ 除 $14x^4+45x^3y+78x^2y^2+57xy^3+14y^4$.

(5) 以 x^2+xy+y^2 除 x^3-y^3.

(6) 以 $a^4+2a^2b^2+b^4$ 除 $a^{12}+2a^6b^6+b^{12}$.

(7) 以 $\frac{3}{2}a^2-\frac{8}{3}-a$ 除 $\frac{9}{16}a^4-\frac{3}{4}a^3-\frac{7}{4}a^2+\frac{4}{3}x+\frac{16}{9}$.

(8) 以 $6x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}$ 除 $36x^2+\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{4}-4xy-6x+\frac{1}{3}y$

4. 求以 x^2+x+1 除 $x^5+x^5+x^3+x+1+2(x^4+x^2)$ 所得的結果.

5. 已知 $A=2x^3-5x^2-7x+12$ 及 $B=3x^2+x-5$, 試求下式

$$A=QB+R$$

中的 Q 及 R. 式中 R 的次數須低於 B.

6. 設 A 爲被除式, B 爲除式, $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots\cdots$ 等,各爲 $\frac{A}{B}$ 所得商 Q 中的第一項,第二項,第三項……等. R 爲最後餘式,而其次數低於 B. 試證:由長除法所求得的 R 等於

$$A-(Q_1+Q_2+Q_3+\cdots\cdots)B.$$

並由此說明除法的又一意義,實爲遞減法.

7. a 及 b 須爲何值, $x^4+2x^3+[illegible]x^2+ax+b$ 始爲 $x^2+[illegible]x+[illegible]$ 所整除.

8. 求以 $1-x+2x^2$ 除 $1+[illegible]x+[illegible]x^2$ 所得的商至第四項止.

13. 綜合除法　設一多項式 A 爲

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n,$$

除以 $x-a$，所得的商爲

$$b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+b_2x^{n-3}+\cdots\cdots+b_{n-1},$$

其除式爲 R，則有

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$
$$=(x-a)(b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+\cdots\cdots+b_{n-1})+R.$$

將上列等式的右端，按乘法計算，而後整列之，再比較其兩端相當項的係數，而得諸等式爲

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1-ab_0,\ a_2=b_2-ab_1,\ \cdots\cdots,\ a_n=R-ab_{n-1},$$

即　$b_0=a_0,\ b_1=a_1+ab_0,\ b_2=a_2+ab_1,\ \cdots\cdots,\ R=a_n+ab_{n-1}.$

由此諸等式，可順次求得 $b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots R$。此種算法，稱爲綜合除法。凡被除式及除式能合於上列形式的，即用此法演算，當較簡便。

綜合除法演算的法則，爲先將被除式依其降冪的次序排列，缺項時加 0，取其各項的係數，順次並寫於同一列，爲 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$，在此空一列下畫一橫線。

取 a_0 爲 b_0 寫於橫線下的第一位。若除式爲 $x-a$，則以 a 乘 b_0，置於橫線上第二位，而求此第二直行中二數的和，得 b_1，寫於橫線下的第二位。再以 a 乘 b_1，置於橫線上第三位，而求此第三

直行中二數的和,得 b_2,寫於橫線下的第三位. 如此繼續演算,直至最後一位止,此最後的一位,即為所求的餘式. 餘式等於零,即為整除的情形,此餘式以前各項,即所求商之各項的係數.

若除式為 $x+a$, 除以 $-a$ 分乘各項外,其演算的程序均與上同.

若除式為 $mx-a$,可變為 $m\left(x-\dfrac{a}{m}\right)$. 先以 $\dfrac{a}{m}$ 分乘各項,按上列演算程序,求得商與餘式後,再以 m 除此商,即得所求之商,餘式不變. 若除式為 $mx+a$,除先以 $-\dfrac{a}{m}$ 作乘數外,其餘程序均相同.

例 1. 求以 $x-5$ 除 $2x^5-12x^4+14x^3-23x^2+17x-33$ 所得的商與餘式.

解

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2 & -12 & +14 & -23 & +17 & -33 & \underline{5} \\
 & 10 & -10 & 20 & -15 & 10 & \\
\hline
2 & -2 & 4 & -3 & 2 & -23 &
\end{array}
$$

故知商為 $2x^4-2x^3+4x^2-3x+2$, 餘式為 -23.

例 2. 求以 $x+3$ 除 $x^3+6x^2+11x+6$ 所得的結果.

解

$$
\begin{array}{rrrr|l}
1 & +6 & +11 & +6 & \underline{-3} \\
 & -3 & -9 & -6 & \\
\hline
1 & +3 & +2 & 0 &
\end{array}
$$

故知適為整除,其商為 x^2+3x+2.

例 3. 求以 $2x-3$ 除 $2x^3-8x^2+8x-14$ 所得的結果.

解　因 $2x-3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)$，先除以 $x-\frac{3}{2}$，得

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & +8 & -14 & \underline{\frac{3}{2}} \\ & +3 & 0 & +12 & \\ \hline 2 & 0 & +8 & -2 & \end{array}$$

故所求的商爲 $(2x^2+8)\div2$，即 x^2+4，其餘式爲 -2.

14. 餘式定理　設含 x 的多項式以 $f(x)$ 表示，若以 $x=a$ 代入 $f(x)$ 中，所求得的值，則以 $f(a)$ 表示，如:

$$f(x)=x^3+6x^2+11x+6.$$

則當 $x=0,1,2,\cdots\cdots$ 時，卽得 $f(0)=6, f(1)=24, f(2)=60,\cdots\cdots$

定理　以 $x-a$ 除 $f(x)$ 所得的餘式，等於在被除式 $f(x)$ 中以 a 代 x 所得的值. 卽 $R=f(a)$.

因由 $A=B\cdot Q+R$ 的關係式中，設 $f(x)$ 表被除式，$x-a$ 表除式，$g(x)$ 表商，R 表餘式，則得

$$f(x)=(x-a)g(x)+R.$$

此當 R 較 $x-a$ 的次數爲低，故 R 中絕不含有 x，故當 x 爲任何値時. R 的値不變. 現設 $x=a$，上式卽變爲

$$f(a)=(a-a)g(a)+R.$$

因 $a-a=0$，$g(x)$ 爲整式，$g(a)$ 爲有限値，故知 $(a-a)g(b)=0$,

$$\therefore\quad f(a)=R.$$

此定理稱爲餘式定理.

按上列定理,凡求$f(a)$的值,卽等於以$x-a$除$f(x)$所得的餘式.若a的值過大,及$f(x)$的次數過高時,則仍以採用綜合除法求餘式,卽得$f(a)$,較爲簡便.

例　已知$f(x)=5x^5-x^3+x+2$.若$x=3$,求$f(3)$之值.

解　先用直接解法,以$x=3$代入$f(x)$,則得

$$f(3)=5(3)^5-(3)^3+(3)+2=1193.$$

再用綜合除法,得算式爲

$$\begin{array}{rrrrrrl} 5 & 0 & -1 & 0 & +1 & +2 & (3 \\ & 15 & 45 & 132 & 396 & 1191 & \\ \hline 5 & 15 & 44 & 132 & 397 & \big|\ +1193 & \end{array}$$

因餘式爲1193,按餘式定理,乃知$f(3)=1193$.

15. 化$f(x)$爲$f(x+h)$的形式　設以$f(x)$表一多項式$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$,而$h$爲實數,則由$f(x)$可得另一多項式,其形式爲$b_0(x+h)^n+b_1(x+h)^{n-1}+b_2(x+h)^{n-2}+\cdots\cdots+b_n$,而以$f(x+h)$表示.此$f(x+h)$中各項的係數

$$b_0, b_1, b_2, \cdots\cdots\cdots\cdots b_n$$

可按逐次除法以求得.

因由$A=Q\cdot B+R$的關係式中,設以$x+h$第一次除$f(x)$所得的商爲Q_1,餘式爲R_1;以$x+h$第二次除Q_1所得的商爲Q_2,餘式爲R_2;餘類推,最後的商爲Q_n,餘式爲R_n,則有

$$f(x)=Q_1(x+h)+R_1,$$
$$Q_1=Q_2(x+h)+R_2,$$
$$Q_2=Q_3(x+h)+R_3,$$
$$Q_3=Q_4(x+h)+R_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

由上列諸等式，用代入法可得下式為

$$f(x)=Q_n(x+h)^n+R_n(x+h)^{n-1}+\cdots\cdots R_2(x+h)+R_1.$$

此處 $Q_n, R_n, R_{n-1}, \cdots\cdots R_2, R_1$ 卽順次為上式 $f(x+h)$ 中各項的係數. 由是，得化 $f(x)$ 為 $f(x+h)$ 的法則，卽以 $x+h$ 按綜合除法的法則，逐次除 $f(x)$，所得第一次餘數，為 $f(x+h)$ 的最後項；其第二次的餘數，為 $f(x+h)$ 的最後第二項係數；餘類推，直至最後的商，卽 $f(x+h)$ 的第一項係數.

例 1. 化 $2x^3-x^2+4x-5$ 為 $b_0(x+2)^3+b_1(x+2)^2+b_2(x+2)+b_3$ 的形式.

解

$$\begin{array}{rrrr|r}
2 & -1 & +4 & -5 & -2 \\
 & -1 & +10 & -28 & \\
\hline
2 & -5 & 14 & -33 & \\
 & -4 & 18 & & \\
\hline
2 & -9 & 32 & & \\
 & -4 & & & \\
\hline
2 & -13 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
\therefore R_1&=-33,\\
R_2&=32,\\
R_3&=-13.
\end{aligned}$$

故 $2x^3-x^2+4x-5=2(x+2)^3-13(x+2)^2+32(x+2)-33.$

例 2. 化 $4x^4+2x^3+4x^2+x+6$ 爲 $x-1$ 的多項式.

解

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
4 & +2 & +4 & +1 & +6 & \underline{1} \\
 & 4 & +6 & +10 & +11 & \\
\hline
4 & +6 & +10 & +11 & +17 & \\
 & 4 & +10 & +20 & & \\
\hline
4 & +10 & +20 & +31 & & \\
 & 4 & +14 & & & \\
\hline
4 & +14 & +34 & & & \\
 & 4 & & & & \\
\hline
4 & +18 & & & &
\end{array}
$$

故原式 $=4(x-1)^4+18(x-1)^3+34(x-1)^2+31(x-1)+17$.

習 題 五

1. 在綜合除法中，若除式爲 $mx-a$，則先以 $x-\frac{a}{m}$ 除被除式，然後以 m 除所得的商，始爲所求的商，但餘式不變. 試述其理由.

2. 用綜合除法，以 $x-4$ 除 $x^4-8x^3-x^2-11x-4$.

3. 用同法，以 $x+2$ 除 $2x^4+x^3-2$.

4. 用同法，以 $3x+1$ 除 $3x^3+16x^2-13x-6$.

5. 用同法，以 $2x-1$ 除 $2x^3+5x^2+2x-2$.

6. 用同法，以 $x-2y$ 除 $2x^4-x^3y-7x^2y^2+7xy^3-10y^4$.

7. 已知 $f(x)=2x^3-5x+3$，按餘式定理分別求 $f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(-1)$，$f(-2)$ 及 $f(-3)$ 的值.

8. 求證：無論 n 為奇數或偶數，則 $x-y$ 恆可整除 x^n-y^n.

9. 求證：當 n 為偶數時，$x+y$ 可整除 x^n-y^n.

10. 求證：無論 n 為奇數或偶數，$x-y$ 皆不能整除 x^n+y^n.

11. 求證：當 n 為奇數時，$x+y$ 可整除 x^n+y^n.

12. 應用餘式定理，若 $x^3+mx^2-20x+3$ 為 $x-3$ 所整除，試定 m 之值.

13. 應用餘式定理，求證：$3bm+am-2an-6bn$ 可為 $m-2n$ 及 $a+3b$ 所整除.

14. 求化 $x^3+[illegible]x^2+x-1$ 為 $x+1$ 的多項式.

15. 求以 $[illegible]x+[illegible]$ 表 $[illegible]x^3-4x^2+12x+14$.

第三章

一次方程式

16. 一元一次方程式 凡一等式所含文字可爲任何值，而等式不變的，稱爲絕對等式，卽通常所謂恆等式。若一等式所含某文字須爲一定值或若干有限個定值，而等式始不變的，稱爲條件等式，卽通常所謂方程式。

方程式的次數，視其所含某文字最高乘冪的指數而定。某文字稱爲未知數，或稱爲元。方程式含一元而又爲一次的，稱爲一元一次方程式；含二元或多元而又爲一次的，稱爲二元或多元一次方程式；以後倣此命名。

方程式中僅含有理整式，則稱爲有理整方程式；若含無理式，或分式的，則分別稱爲無理方程式或分式方程式。

給與方程式中所含某文字以一個定值，而使其等號兩端的值相等，則稱此定值爲適合於方程式，而爲方程式的一根。凡求方程式之根的算法，稱爲解方程式。

一元一次方程式解法所根據的規律爲：

(一) 符號律: 見第三節.

(二) 基本定律: 見第八節.

(三) 等式律: 見第九節.

(四) 括號律: 見第十節.

根據上列規律,得解法的法則爲:先化簡,如去括號或分數;繼以移項,同時變號;再合併同類項,使成 $ax=b$ 的形式;然後求 x 的值.惟在化成 $ax=b$ 後,讀者須注意下列三種情形:

(1) 若 $a\neq 0$,則此方程式僅有一根 $\dfrac{b}{a}$.

(2) 若 $a=0$,而 $b\neq 0$,則此方程式無根.

(3) 若 $a=0$,且 $b=0$,則此方程式爲一恆等式.

如欲知所求得之根有無錯誤,可以此根代入方程式,而加以核驗.

例 1. 解方程式 $\dfrac{5(x+5)}{8}-\dfrac{2(x-3)}{7}=5\dfrac{19}{28}$.

解 以最小公倍數56遍乘等號的兩端,得

$$35(x+5)-16(x-3)=2\times 159.$$

去括號, $$35x+175-16x+48=318,$$

移項, $$35x-16x=318-175-48,$$

合併同類項, $$19x=95,$$

故得 $$x=5.$$

核驗 以 $x=5$ 代入方程式的左端,得

$$\frac{5(5+5)}{8}-\frac{2(5-3)}{7}=\frac{50}{8}-\frac{4}{7}=\frac{25}{4}-\frac{4}{7}=\frac{159}{28}=5\frac{19}{28}.$$

例 2. 解方程式 $\dfrac{2x+3a}{x+a}=\dfrac{2(3x+2a)}{3x+a}$

解　以最低公倍式，乘等號的兩邊，即得

$$(2x+3a)(3x+a)=2(x+a)(3x+2a).$$

去括號，　$$6x^2+11ax+3a^2=6x^2+10ax+4a^2,$$

移項，　$$6x^2-6x^2+11ax-10ax=4a^2-3a^2,$$

合併同類項，　$$ax=a^2.$$

故得　$$x=a.$$

關於應用問題的求解，亦為代數學中重要問題之一．初學者對此，恆不易解，茲特述其要旨於下：

先求明瞭問題的意義，並充分了解如何運用代數式，以表問題中所示的諸數量，然後注意諸數量間已知的相互關係．尤要者，須切實辨明同單位之同類數量的相等，由此始可獲得方程式的成立．既得方程式以後，即按方程式解法，以求其根；此根之合理與否，並不依方程式而定，乃視其能否適合問題中的需求．如問題中所求為人數，而實際解得此人數的值，為一分數，當不合理，此即表示此為一不合理的問題，而無法求解．

例 1. 某二位數的數字和為 14. 若將其個位及十位數字互易其位置，則所得的數，較原數大 18，求原數.

解　設 x 表原數的個位數字，

則　$14-x$ 當為原數的十位數字.

又　$10(14-x)+x$ 即原數，

$10x+(14-x)$ 為將原數的數字倒置後的數.

再按題中最後條件，得一方程式爲:

$$10x+(14-x)=10(14-x)+x+18.$$

解此方程式，得　　$x=8$ 及 $14-x=6$.

故知原數當爲 $10\cdot6+8=68$.

例2.　甲乙二人合作某事，10日可成，但經七日後，甲因故停止工作，而由乙獨作其剩餘部分，歷五日始完成. 問二人當初獨作此事，各需幾日，方可完成?

解　設 x 爲由甲獨成此事所需的日數,

則　$\frac{1}{x}$ 爲甲每日所成此事的部分,

$\frac{1}{10}-\frac{1}{x}$ 爲乙每日所成此事的部分,

$\dfrac{1}{\frac{1}{10}-\frac{1}{x}}$ 爲乙獨成此事所需的日數.

但由甲乙二人合作此事，經七日後所完成者，當爲此事之 $7\cdot\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$，其剩餘部分，當爲 $1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$. 按題意，由乙完成其剩餘部分，得方程式爲

$$5\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{10}.$$

解方程式，得　　$x=25$ 及 $\dfrac{1}{\frac{1}{10}-\frac{1}{x}}=16\frac{2}{3}$

故知由甲獨成此事，需25日；由乙獨成此事，需 $16\frac{2}{3}$ 日.

例3.　有一不準確的時鐘，時針與分針，每相連兩次重合時，皆相隔66分，問此時鐘每小時應差若干秒?

解　爲解法簡易計,分針與時針,第一次重合在12時.在此問題中當時鐘一項,可給與解題者以若干已知的條件.設自12時後,時針行鐘面的x分劃,分針行$60+x$分劃,二針始重合.又分鐘轉動的速度,爲時針的12倍,由是得

$$60+x=12x.$$

解上方程式,得$x=\frac{60}{11}$;此分針自12時後,須行$60+\frac{60}{11}=\frac{720}{11}$分劃,即一準確的時鐘,自12時二針相重後,第二次相重,須經$\frac{720}{11}$分.但題中所言須經66分者,即在$\frac{720}{11}$分中,相差$66-\frac{720}{11}=\frac{6}{11}$分.故在60分中,相差的分數當爲

$$\left(\frac{6}{11}\times60\right)\div\frac{720}{11}=\frac{1}{2},$$

即等於30秒.

例4.　某二位數的數字和爲a,若互易其數字的位置,則成另一數,又知此數較原數多b.求原數;並加討論.

解　設x爲原數的個位數字,

則　　$a-x$爲原數的十位數字.

按題意,得方程式如下:

$$10(a-x)+x+b=10x+(a-x).$$

解上方程式,得　$x=\frac{9a+b}{18}$.

討論:(1)a恆爲正.

(2)無論b爲正或負,$9a\pm b$須爲正數,即絕對值$9a>b$,問題始有解,因x不能爲負數.

(3)$9a\pm b$須爲18所整除;因x不能爲分數.

習題六

解下列方程式 (1－8):

1. $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{3}(x-3)+\frac{1}{4}(x-4)=4.$

2. $3+\frac{x}{4}=\frac{1}{2}\left(4-\frac{x}{3}\right)-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\left(11-\frac{x}{2}\right)$

3. $x-\left(3x-\frac{2x-5}{10}\right)=\frac{1}{6}(2x-57)-\frac{5}{3}.$

4. $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}x-1\right)-6\right]+4\right\}=1.$

5. $\frac{5x-0.4}{0.3}+\frac{1.5x-0.05}{2}=\frac{13.95-8x}{1.2}$

6. $(b-c)(a-x)+(c-a)(b-x)+(a-b)(c-x)=1-x.$

7. $(a+b)x^2-a(bx+a^2)=bx(x-a)+ax(x-b).$

8. $\left(\frac{m}{n}+\frac{n}{m}\right)x=\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2x.$

9. 解方程式 $(x+a)(x+b)-c(a+c)=(x-c)(x+b)+ab$. 在 a 與 b 同值異號時,方程式即無解,何故?

10. 二數的差為 298,如以小數除大數,所得的商及餘數均為 12. 求此二數.

11. 某二位數,其十位數字為個位數字的二倍. 以其十位數加1,個位數加5,分別為十位數及個位數而成第二數,卻三倍於第二數經易位後十位數減1,個位數減5所成的第三數,求原數.

12. 現時父年四倍於子年,今後 20 年,父年二倍於子年,求父子的年齡. 又父年為子年的三倍時,當在今後何年?

13. 在九時與 10 時之間,時鐘上二針所成的角,何時為 90°? 何時為 150°?

14. 有一工作,甲,乙合作,四日完成,甲、丙合作,六日完成;乙、丙合作,十二日完成.若由甲.乙.丙三人獨作,各需幾日完成?又三人合作,須幾日完成?

15. 分 243 爲三分,第一分的$\frac{1}{2}$,第二分的$\frac{1}{3}$,及第三分的$\frac{1}{4}$,其數相等,求此所分的各數.

16. 正方形的每邊各增 2 公尺,則其面積即增加 10[illegible] 平方公尺,求此正方形的原有面積.

17. 兎行 5 步時,狐行 4 步,又狐 2 步的距離等於兎 3 步的距離.今兎已先行 50 步,狐在後追趕之,問兎須再行幾步,即爲狐追及?

18. 父現年 [illegible]0 歲,子現年 25 歲,問過幾年後父年爲子年的四倍?並解釋所得的答案,仍可符合題意.

19. 有士兵一隊,可列成四層的中空正方陣,或八層的中空正方陣,但第一方陣最外層每邊的人數,較第二方陣最外層每邊的人數多十六名,求此隊的人數.

20. 有矩形 $ABCD$,其周長爲 $2p$,其 AB 邊與線段 a 所包成的矩形,及 AD 邊與線段 b 所包成的矩形,二者面積的和,等於以 p 爲邊的正方形面積.求 AB 及 AD 的長度,並說明此問題在何種情形下,始可成立.

21. A,B,C,D 四人,分1,300圓,B 所得爲 A 的$\frac{2}{3}$,C 所得爲 B 的$\frac{2}{3}$,D 則爲 C 的$\frac{2}{3}$,問各得若干元?

22. 有合金一磅,含銀二分及銅三分,問須加銅若干,方可熔成含銀三分及銅七分的合金?

23. A,B 二人,同路同向而行,其速度各爲每小時行 m 里與 n 里.今 B 先 A 行 c 里,問此二人能否相遇?若相遇,當在何時?並就 m, n 及 c 的各值,而加以討論.

24. 解方程式 $2x+k=\frac{1}{3}(5-3kx)$,並加以討論.

17. 二元一次聯立方程式 在含二元的一次方程式,如 $2x+3y=7$ 中,x 及 y 可有無限組值,均能適合. 此無限組值 $x=0, y=\frac{7}{3}$; $x=1, y=\frac{5}{3}$; ……等,皆爲此方程式的解. 又 $x=2$ 亦可認爲含 x 及 y 的一次方程式;因 $x=2$, y 可爲任何值,故 $x=2$ 亦有無限組的解. 但欲同時適合以上二方程式 $2x+3y=7$ 及 $x=2$,則僅有一組值爲 $x=2$ 及 $y=1$,是即 $x=2$ 與 $2x+3y=7$ 僅有一組公共解.

普漏的說,當二個或多個方程式中所含的諸元,各代以同值,而均適合時,此二個或多個方程式稱爲聯立方程式.一組聯立方程式的解,爲求得諸元的某一組值或數組值,可適合於此組方程式中的一切方程式.

一般聯立方程式解法,所根據的原理,摘錄於下:

(一) 以等式律,施於一組方程式中的各方程式,對於此組方程式的解不變.

(二) 一組方程式 $A=0$ 及 $B=0$,與另一組方程式 $A=0$ 及 $mA+nB=0$,或 $B=0$ 及 $mA+nB=0$ 均有同解; 此處 m 及 n 爲任意的常數.

(三) 一組方程式 $A=0$ 及 $B=0$,與由二者消去一未知數,所得的方程式 $C=0$ 及 $A=0$,或 $C=0$ 及 $B=0$,均有同解.

解二元一次聯立方程式,即按上列公共原理,由二個方程式消去一元,而後解方程式,僅有一組解.其解法有四:

解法一　加減消去法　根據上列公共原理一及二,由二方程式消去一未知數時,先使此未知數之係數的絕對值相同,然後按其爲同號或異號,而施行減法與加法,再按一元一次方程式解法,以解出所餘的另一未知數.

例　解聯立方程式 $\begin{cases} 6x-5y=25, & \text{(I)} \\ 4x-3y=19. & \text{(II)} \end{cases}$

解　先消去 x,二式中 x 係數的最小公倍數爲 12.

(I)×2　$12x-10y=50,$　(III)

(II)×3　$12x-9y=57,$　(V)

(III)−(IV)　$-y=-7,\quad \therefore\quad y=7.$

以 y 的值代入 (I),得　$x=10$(直接解出亦可).

故(I)及(II)的解爲 $x=10,\ y=7.$

解法二　代入消去法　根據上列公共原理一及三,由二方程式中的任一方程式,求以一未知數表示其他未知數的等式,代入另一方程式,然後按一元一次方程式解法以解方程式.

例　解聯立方程式 $\begin{cases} ax+by=c, & \text{(I)} \\ px=qy. & \text{(II)} \end{cases}$

解　由(II),求得 x 的等式爲　$x=\frac{q}{p}y.$　(III)

以 (III) 代入 (I),得　$a\left(\frac{q}{p}y\right)+by=c.$

解上式,得　$y=\frac{pc}{aq+pb}.$

再將 y 的值代入 (III)，
$$x=\frac{qc}{aq+pb}.$$

故 (I) 及 (II) 的解爲 $x=\dfrac{qc}{aq+pb}$， $y=\dfrac{pc}{aq+pb}$

解法三 比較消去法 此法爲解法二的特例，由二方程式，各求以同一未知數表示其他同一未知數的等式，二者相等，卽得含一未知數的方程式，然後求其解答．

例 解聯立方程式 $\begin{cases}3x+4y=10, & \text{(I)}\\ 4x+y=9. & \text{(II)}\end{cases}$

解 由 (I) 解得 x 的等式爲 $x=\dfrac{10-4y}{3}$，

由 (II)，解得 x 的等式爲 $x=\dfrac{9-y}{4}$，

$$\therefore\quad \frac{10-4y}{3}=\frac{9-y}{4}.$$

解上式，得 $y=1$.

以 y 的值代入 (I) 或 (II)，得 $x=2$.

故 (I) 及 (II) 的解爲 $x=2, y=1$.

解法四 公式解法 已知任何一組二元一次聯立方程式爲
$$ax+by=c, \tag{I}$$
$$a'x+b'y=c'. \tag{II}$$
此處 a, b, c, a', b', c' 表示已知數．可依解法一求得
$$(ab'-a'b)x=b'c-bc',$$
及
$$(ab'-a'b)y=ac'-a'c.$$

若 $ab'-a'b\neq 0$, 則可得 (I) 及 (II) 的一組解爲

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b},\qquad y=\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$$

是爲一般解法的公式. 又可書如下列形式:

$$\frac{-1}{ab'-a'b}=\frac{x}{bc'-b'c}=\frac{y}{ca'-c'a}.$$

茲爲便於記憶及計算起見, 特示一圖形, 表示此項公式的運用如下:

$$\begin{array}{ccccccc}
a & & b & & c & & a \\
 & \times & & \times & & \times & \\
a' & & b' & & c' & & a'
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
ab'-a'b & bc'-b'c & ca'-c'a \\
\text{爲} & \text{爲} & \text{爲} \\
-1 & x & y \\
\text{的} & \text{的} & \text{的} \\
\text{分} & \text{分} & \text{分} \\
\text{母} & \text{母} & \text{母}
\end{array}$$

先將已知的一組方程式整列如 (I) 及 (II) 的次序, 分別寫其係數如上圖所示. 按圖上所示的規定, 即得解法的公式, 然後求解.

例 解聯立方程式 $\begin{cases}12x=9+10y, & \text{(I)}\\ 8y=7-9x. & \text{(II)}\end{cases}$

解 整列各項的順序, 然後寫其係數如下圖:

$$\begin{array}{ccccccc}
12 & & 10 & & 9 & & 12 \\
 & \times & & \times & & \times & \\
9 & & 8 & & 7 & & 9
\end{array}$$

$$12\cdot 8-9\cdot 10 \qquad 7\cdot 10-8\cdot 9 \qquad 9\cdot 9-7\cdot 12$$

由是，代入解法公式，得

$$\frac{-1}{12\cdot 8-9\cdot 10}=\frac{x}{7\cdot 10-8\cdot 9}=\frac{y}{9\cdot 9-7\cdot 12}.$$

即
$$-\frac{1}{6}=-\frac{x}{2}=-\frac{y}{3},$$

$$\therefore \quad x=\frac{1}{3}, \qquad y=\frac{1}{2}.$$

故 (I) 與 (II) 的解爲 $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}$.

由上列四種解法，二元一次聯立方程式，通常僅有一組解．惟尚有情形特殊的，卽有無限組解，或竟無解．茲分別討論於下：

〔一〕 **相依方程式** 設一組方程式 $ax+by=c$ 及 $a'x+b'y=c'$，當 k 爲常數，且不等於 0，而有

$$ax+by-c=k(a'x+b'y-c') \tag{I}$$

的關係時，則此組方程式，稱爲**相依方程式**．相依方程式乃有無數組解；因按上列解法，由二式消去 x，同時，y 及常數項亦被消去．此二式實爲同一式，在一個二元一次方程式中，其解數乃爲無限．

按上列解法公式 $(ab'-a'b)x=(b'c-bc')$ 及 $(ab'-a'b)y=ac'-a'c$，欲 x 及 y 的解數爲無限，必須

$$ab'-a'b=0, \quad b'c-bc'=0, \quad 及\ ac'-a'c=0;$$

即
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \tag{II}$$

總上所論，凡合於 (I) 或 (II) 的條件的，皆稱爲相依方程式；其解數爲無限組.

例　討論聯立方程式 $\begin{cases}x+y=a+b\\(a+c)x-by=bc\end{cases}$ 在何種情形下，其解數爲無限組？

解　按下列相依方程式的條件，乃有

$$\frac{1}{a+c}=\frac{1}{-b}=\frac{a+b}{bc}.$$

由　$$\frac{1}{a+c}=-\frac{1}{b}\ \text{及}\ -\frac{1}{b}=\frac{a+b}{bc},$$

均得同式爲　$$a+b+c=0.$$

故若 $a+b+c=0$，則 $\begin{cases}x+y=a+b\\(a+c)x-by=bc\end{cases}$ 有無限組解.

〔二〕 矛盾方程式　設一組方程式 $ax+by=c$ 及 $a'x+b'y=c'$，當 k 及 l 爲常數，且均不爲零，而有

$$ax+by-c=k(a'x+b'y-c')+l \tag{1}$$

的關係時，此組方程式，稱爲矛盾方程式. 矛盾方程式乃爲無解；因按上列解法，由此二式消去 x，同時，y 亦被消去，而常數項仍在，實爲不合理. 此二式有矛盾的情形，因而無解.

按上列解法公式 $(ab'-a'b)x=(b'c-bc')$ 及 $(ab'-a'b)y=ac'-a'c$ 欲 x 及 y 爲無解的情形，必須

$$ab'-a'b=0,\quad b'c-bc'\neq 0\ \text{及}\ ac'-a'c\neq 0;$$

即 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}. \tag{II}$$

總上所論，凡合於 (I) 或 (II) 的條件的，皆稱為矛盾方程式；為無解.

例　討論聯立方程式 $\begin{cases}(\lambda-5)x+2y+3\lambda=0\\(\lambda+1)x-y+5\lambda-4=0\end{cases}$，當 λ 為何值時，此方程式為無解？

解　由 $\dfrac{\lambda-5}{\lambda+1}=\dfrac{2}{-1}$，　$-\lambda+5=2\lambda+2$，　$\therefore\ \lambda=1$.

而 $$\frac{3\lambda}{5\lambda-4}=\frac{3}{1}=3,\quad \frac{\lambda-5}{\lambda+1}=-2,\quad 又\ \frac{2}{-1}=-2,$$

乃得 $$\frac{\lambda-5}{\lambda+1}=\frac{2}{-1}\neq\frac{3\lambda}{5\lambda-4}.$$

故當 $\lambda=1$ 時，則 $\begin{cases}(\lambda-5)x+2y+3\lambda=0\\(\lambda+1)x-y+5\lambda-4=0\end{cases}$ 為無解.

按上列所論各節的結果，乃知一組方程式 $ax+by=c$ 及 $a'x+b'y=c'$，在 $\dfrac{a}{a'}\neq\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$ 的條件下，可有一組解，而僅有一組解.

18. 多元一次聯立方程式　一組方程式，其方程式的個數與其所含的元數相等時，通常可有一解，且僅有一解. 若有一組含 n 元的 n 個一次方程式，可先自 n 個方程式中消去一元，而得含 $n-1$ 個元的 $n-1$ 個一次方程式；再自此消去一元，而得含 $n-2$ 個元的 $n-2$ 個一次方程式；逐次消元，最後，求得含二元的二個一次程方式. 然後按第 17 節的解法，求此二元的值，再

代入各式,而求其餘各元.關於含 n 個元的 n 個一次方程式,當以運用行列消去法,較爲簡便;俟於行列式專章中討論.

例 1. 解聯立方程式 $\begin{cases} x+2y+2z=11, & \text{(I)} \\ 2x-y+z=3, & \text{(II)} \\ 2x+4y+z=14, & \text{(III)} \end{cases}$

解　自 (I) 及 (II) 消去 z,得　$3x-4y=-5,$　(IV)

自 (II) 及 (III) 消去 z,得　$x+5y=11,$　(V)

由 (IV) 及 (V) 解得　$x=1,\quad y=2.$

以 x 及 y 代入 (II),得　$z=3.$

故 (I),(II) 及 (III) 的解爲　$x=1,\quad y=2,\quad z=3.$

例 2. 解聯立方程式 $\begin{cases} y+z-x=2a, & \text{(I)} \\ z+x-y=2b, & \text{(II)} \\ x+y-z=2c. & \text{(III)} \end{cases}$

解　本題可施行特別解法如下:

(I)+(II)+(III),得　$x+y+z=2(a+b+c).$　(IV)

(IV)−(I)　$x=b+c,$

(IV)−(II)　$y=c+a,$

(IV)−(III)　$z=a+b.$

故 (I),(II) 及 (III) 的解爲 $x=b+c,\quad y=c+a,\quad y=a+b$

例 3. 解聯立方程式 $\begin{cases} ax+by+cz=[illegible], & \text{(I)} \\ bx+cy+az=[illegible], & \text{(II)} \\ cx+ay+bz=[illegible]. & \text{(III)} \end{cases}$

解 (I)+(II)+(III),得 $x+y+z=\frac{3}{a+b+c}$. (IV)

由(IV)與(I)消去z,得

$$(a-c)x+(b-c)y=\frac{a+b-2c}{a+b+c}, \quad \text{(V)}$$

由(IV)與(II)消去z,得

$$(b-a)x+(c-a)y=\frac{b+c-2a}{a+b+c}, \quad \text{(VI)}$$

由(V)與(VI),解得

$$x=\frac{1}{a+b+c}, \quad y=\frac{1}{a+b+c},$$

以x及y的值代入(IV),得 $z=\frac{1}{a+b+c}$.

故(I),(II)及(III)的解爲 $x=y=z=\frac{1}{a+b+c}$.

普偏的說,除去若干特殊情形而外,一組含n元的m個一次方程式,當

〔一〕$m=n$時,方程式通常有一解,而僅有一解.

〔二〕$m<n$時,方程式通常有無限組解.

因就含m個元的m個一次方程式求解,只能求得m個元,以所餘$n-m$個元表示;惟此$n-m$個元仍爲未知數,可給以任意值,故其解數當爲無限. 如由方程式$3x+4y+z=5$及$x-y+z=11$,只能求得以z表x與y的等式,z的值爲無限個,故x及y的值也爲無限個.

〔三〕$m>n$時,方程式通常無解.

因就含 n 個元的 n 個一次方程式，解之得 n 個元的值，若以此 n 個元的值，代入其餘 $m-n$ 個方程式中，通常未必能合。故欲求 n 個元的值，盡能適合此 m 個方程式，通常爲不可能；即方程式通常爲無解。

解應用問題時，所得方程式的個數當與其所含之元的個數相等，始有定解。若方程式的個數，多於所含之元的個數，則問題爲無解。若少於所含之元的個數，則問題爲不定解，此不定解，當在不定方程式專章中詳加討論。

習　題　七

解下列各組方程式：

1. $\begin{cases} 6x-\text{[illegible]}y=25, \\ 4x-\text{[illegible]}y=19. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4\text{[illegible]}x-1\text{[illegible]}y=161, \\ 18x+11y=32. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \text{[illegible]}y-\text{[illegible]}x=\text{[illegible]}, \\ 5x-y-2=0. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{1}{c}, \\ \dfrac{x}{a'}-\dfrac{y}{b'}=\dfrac{1}{c'}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1+x, \\ \dfrac{x}{b}+\dfrac{y}{a}=1+y. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{y-x}{2}=5, \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{x+y}{9}=7. \end{cases}$

7. $\begin{cases} (x+2)(y+1)=(x-5)(y-1), \\ x(4+y)=-y(8-x). \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2(\text{[illegible]}x+\text{[illegible]}y)=\text{[illegible]}(\text{[illegible]}x-\text{[illegible]}y)+10, \\ \text{[illegible]}x-\text{[illegible]}y=4(\text{[illegible]}y-\text{[illegible]}x)+8. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{x-y}{4}-\dfrac{x+2y-5}{6}=\dfrac{y-3}{4}-\dfrac{y+2x-5}{6}, \\ 4x-2y+6=0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} ax+by=a^2+2a+b^2, \\ bx+ay=a^2+2b+b^2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2), \\ (a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2). \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dfrac{m}{l}x+\dfrac{l}{m}y=\left(\dfrac{1}{l}+\dfrac{1}{m}\right)(m^2+l^2), \\ (x+y)(m^2+l^2)=2(m^3+l^3)+ml(x+y). \end{cases}$

13. $\begin{cases} bx+cy=a+b, \\ ax\left(\dfrac{1}{a-b}-\dfrac{1}{a+b}\right)+cy\left(\dfrac{1}{b-a}-\dfrac{1}{b+a}\right)=\dfrac{2a}{a+b}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{l}{m-n}, \\ \dfrac{x+m}{y+m}=\dfrac{l+m}{l+n}. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x-2y+3z=2, \\ 2x-3y+z=1, \\ 3x-y+2z=9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 3x-4y=6z-16, \\ 4x-y-z=5, \\ x=3y+2(z-1). \end{cases}$

17. $\begin{cases} \dfrac{y+z}{4}=\dfrac{z+x}{3}=\dfrac{x+y}{2}, \\ x+y+z=27. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{y-z}{3}=\dfrac{y-x}{2}=5z-4x, \\ y+z=2x+1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} ax+by+cz=a, \\ bx+cy+az=b, \\ cx+ay+bz=c. \end{cases}$

20. $\begin{cases} ax+cy+bz=a^2+2bc, \\ cx+by+az=b^2+2ac, \\ bx+ay+cz=c^2+2ab. \end{cases}$

21. 試判別下列二組方程式為何種方程式.

(I) $\begin{cases} 1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}y=10, \\ 6x-10y=15. \end{cases}$　　(II) $\begin{cases} 5x+3y=-6, \\ 10x+6y=-12. \end{cases}$

22. 設有三個含二元的方程式 $A=0, B=0$ 及 $C=0$, 且 $A=kB$, k 為常數,且不等於 0. 試證: $A=0, B=0$, 及 $C=0$ 時,仍可有解.

23. 解下列各組聯立方程式,並加討論:

(I) $\begin{cases}(\lambda-3)x+5y+\lambda-5=0, \\ (\lambda-1)x-5y-2\lambda+7=0,\end{cases}$　(II) $\begin{cases}x-(2\lambda+1)y-\lambda=0, \\ x-(3\lambda-1)y-2\lambda+3=0;\end{cases}$

24. 有二位數,較其二位數字之和的四倍多 3. 若以此數的二倍加 3,適等於倒換其二位數字所成之另一數的二倍減 36,求原數.

25. 有二位數,其單位數字較十位數字多 a. 若倒換其數字的位置,則所得另一數,等於原數的 b 倍,b 為整數,問原數當為何數?

26. A, B 二點各按一定的速度在周長為 150 呎的圓周上運動. 已知其在反向時,每隔 5 秒相遇一次,同向時,則每隔 25 秒相遇一次,求此二點的速度.

27. 長 240 碼與 240 碼的二列貨車,相向而行,彼此在 25 秒中通過;同向而行時,快車需 $3\frac{3}{4}$ 分,越過慢車,求此二車每小時的速度.

28. A 與 B 俱為銀與銅的合金. 取 A 種 5 分,及 B 種 3 分所成的合金,含銀 52%; 若取 A 種 5 分與 B 種 11 分所成的合金,則含銀 42%. 問 A, B 所含銀的百分率原各為若干?

29. 射手在 500 碼外打靶,射擊後,歷 $2\frac{2}{5}$ 秒,即聞中靶聲. 另有一觀測者,距靶 600 碼,又距射手 210 碼,在其聞槍聲後 $2\frac{1}{10}$ 秒,始聞中靶聲. 設聲與槍彈的速度均為常數,求聲與彈的速度.

30. 有一分數,其分子加 2,分母加 1,則其值爲 $\frac{5}{8}$,若其分子分母同減以 1,則其值爲 $\frac{1}{2}$,求原分數.

31. 有三鎮 A,B,C,各位於三角形的頂點,各邊適爲其通路.今有人欲繞行此三角形的周圍,特決定最初所行之邊爲步行,每一里需時 a 分.第二邊爲騎行,每一里需時 b 分,第三邊爲車行,每一里需時 c 分.若自 A 歷 B,C 而回至 A,自 B 歷 C,A 而回至 B,自 C 歷 A,B 而回至 C,各需 a 時,b 時及 c 時,問 $AB+BC+CA$ 有若干里?

32. 某人有三子,其現年爲三子現年的和.九年後,爲長、次二子年齡的和,再經三年,爲長、幼二子年齡的和,又再經三年,則爲次、幼二子年齡的和.求此父子四人的現年.

19. 變數與函數 在代數學中,通常以一文字,可表示一任意的數.實則表示的方法,其間尙有區別.

吾人若以一文字表示問題中的某特殊值,此值在問題討論過程中,恆保持不變,這種文字,稱爲常數.若一文字,於問題研究中,可自由任取一值,或任意由一值而變爲他一值的,稱爲變數.

二個變數 x 及 y 有下列的關係:

(一) x 變時,y 亦隨之而變;

(二) x 定時,y 亦隨之而定;

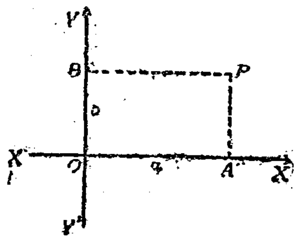
(三) x 每給與一值,y 即隨之而得一對應值.

如是,x 稱爲主變數,或簡稱變數,y 稱爲應變數,即通常所謂函數.此二者的關係,通常以 $y=f(x)$ 表示,意即 y 爲 x 的函數,如 $2x+3=y$, 乃表示 y 爲 x 的函數;此式若變爲 $\frac{y-3}{2}=x$,

則稱 x 為 y 的函數. 函數為有理整式的，稱為有理整函數. 上式中最高次項之次數為一的，稱為一次函數；次數為二的，稱為二次函數；餘類推.

20. 一次函數之圖形　函數與變數，或二變數間，彼此相互的關係，可以幾何圖形來表示.

每組值圖示的方法，乃在平面上作二定直線 XOX' 及 YOY'，垂直相交；其交點 O 稱為原點，XOX' 稱橫軸，YOY' 稱縱軸. 選定一適宜長度，作為測量的單位. 若所示的一組值為 $x=a$ 及 $y=b$，視 a 為正或負，而於 $X'OX$ 上自 O 向右或左，量一線段 OA，其長為 a 的絕對值；同法，視 b 為正或負，而於 $Y'OY$ 上自 O 向上或下，量一線段 OB，其長為 b 的絕對值. 如右圖，過 A 與 B 各作 $Y'OY$ 及 $X'OX$ 的平行線，相交於 P，此 P 點即表示此組值 $x=a$ 及 $y=b$.



$x=a$, $y=b$，與 P 點，三者以符號 $P(a, b)$ 表示；a 稱為 P 的橫坐標，b 稱為 P 的縱坐標，而 a 及 b 合稱為 P 的坐標. 又橫軸亦稱為 x 軸，縱軸亦稱為 y 軸，合稱坐標軸.

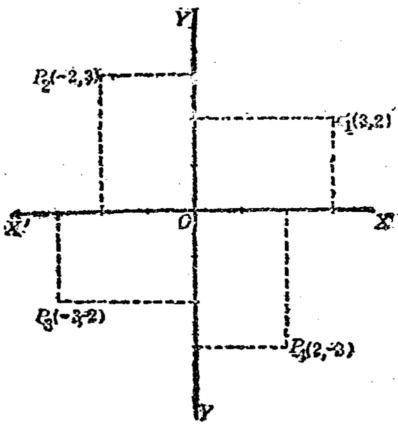
由此圖示法，可使 x 及 y 的各組值與平面上各點，單獨對應，是即每有一組值 (a, b)，即可有一點 P；逆之，每有一點 P，即有一組值. 因選定二坐標軸後，過 P 各作此坐標軸的平行線，使

得 a 及 b 的值.

在 $P(a,b)$ 中,尚有三種特殊情形,即 $P(a,0)$ 表示 P 在 x 軸上,視 a 爲正或負,而定其在 O 的右或左; $P(0,b)$ 表示 P 在 y 軸上,視 b 爲正或負,而定其在 O 的上或下; P $(0,0)$ 表示 P 在原點上.

例 求作各點,分別表示 $(-3,-2)$ 及 $(-2,-3)$ 的各組值.

解 按上列作圖法則,得各組值的圖示如右.



作圖時,有三點須應注意:第一,單位長的度量,必須保持一定長而不變; 其次,須切實注意坐標, 即所與一組值的符號,在作圖時,對於圖形位置的關係;最後,二平行線的作圖,須求正確.如是,$P(a,b)$ 始有正確的圖形.

設 $f(x)$ 表示 x 的函數,其值爲 y,若給 x 以一串數值,y 即得一串對應值.取此若干組值,分別爲橫坐標及縱坐標,可繼續求得若干個點;聯結此諸點,即可得一幾何圖形,爲直線或曲線.

此圖形稱為函數 $f(x)$ 的圖形，或稱為方程式 $y=f(x)$ 的圖形. 函數 $f(x)$ 或方程式 $y=f(x)$ 為一次，其圖形為直線；二次或二次以上的為曲線. 因由二點即可定一直線，而曲線的描畫，須由多數點，始可完成，故一次函數 $f(x)$ 或方程式 $y=f(x)$ 只須求出二組對應值，即可決定其圖形. 立次或二次以上的，須求多數組對應值，始可得較為正確的圖形.

關於一次函數或方程式 $ax+by=c$ 的圖形，其位置與 a,b,c 的關係，為：

(一) $a\neq 0, b\neq 0$ 而 $c=0$，直線通過原點.

(二) $a\neq 0, c\neq 0$ 而 $b=0$，直線與 y 軸平行.

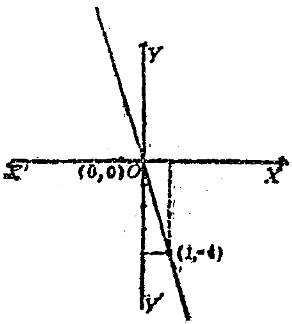
(三) $b\neq 0, c\neq 0$ 而 $a=0$，直線與 x 軸平行.

(四) $a\neq 0$，而 $b=0, c=0$，直線即 y 軸.

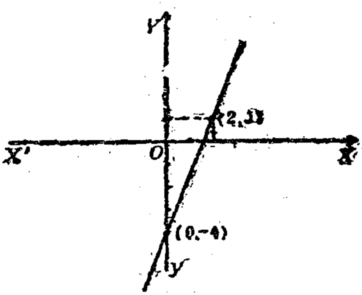
(五) $b\neq 0$，而 $a=0, c=0$，直線即 x 軸.

由 $y=f(x)$ 所求出的若干組對應值，即可求得一幾何圖形，已如上述；逆之，凡在此圖形上取出任一點，即可得其坐標 (x,y) 的值，而能適合於 $y=f(x)$. 此亦為作圖時須應注意之點.

至於含二元的方程式，其圖形的作法，為先將方程式化為 $y=f(x)$ 或 $x=f(y)$ 的形式；次求得 x 及 y 的若干組對應值，列表記出；再由此諸對應值，求得對應的若干個點；然後聯結各點，即得所求的圖形.



圖(1)



圖(2)

例 1.　求作方程式 $4x+y=0$ 的圖形.

解　先寫作　　$y=-4x$.

再求得 x,y 的對應值,為:

x	0	1
y	0	-4

聯結 $(0,0)$ 及 $(1,-4)$, 即得直線如上圖 (1).

例 2.　求作方程式 $5x-2y=8$ 的圖形.

解　先寫作　　$y=\dfrac{5x-8}{2}$

再求得 x,y 的對應值,為:

x	0	2
y	-4	1

聯結 $(0,-4)$ 及 $(2,1)$, 即得直線如上圖 (2).

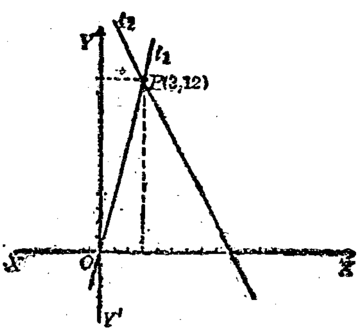
21. 二元一次聯立方程式的圖解法　按第 20 節的作圖法,兩個二元一次方程式,可得二直線,其交點爲二直線的公共點;而此交點的坐標,在代數學上講,必同時適合此已知的二方程式,其意卽爲其公共解.故兩個二元一次方程式之圖形交點的坐標,卽爲其方程式的公共解.然尙有例外情形,如第 17 節所論的矛盾方程式的圖形,爲二平行直線,其交點在無限遠處;相依方程式的圖形,爲二個相互重合的直線,卽有二個以上的交點.綜合前後所論,完全一致.讀者可於作圖時驗明.

二元一次聯立方程式圖解的法則,爲先求出二方程式的圖形;若二者有一交點,則按坐標軸,求得其交點的橫標與縱標,卽分別爲方程式之公解中的 x 及 y.

例　用圖解法,求解方程式

$$\begin{cases} y=4x, \\ 2x+y=18. \end{cases}$$

解　先求得 $y=4x$ 的圖形爲 l_1.再求得 $2x+y=18$ 的圖形爲 l_2,l_1 與 l_2 的交點爲 P;然後按坐標軸求得 P 的橫標爲 3,其縱標爲 12,如右圖.



故方程式的的解 $x=3$, $y=12$.

習題八

1. 求以圖表示 $(0,5),(3,4),(5,0),(4,-3),(-5,0),(0,-5),(-4,3)$ 及 $(-4,-3)$ 諸點，並試證此八點與原點 O 的距離均相等.

2. 求化方程式 $ax+by+c=0$ 及 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 各爲 $y=f(x)$ 或 $x=f(y)$ 的形式.

3. 求以圖表示 $(4,0),(0,4),(-4,0)$ 及 $(0,-4)$. 試證: 聯結此四點，可成一正方形，并求其面積(以單位面積表示).

4. 求下列各方程式的圖形:

$$y=2x+8,\quad y=2x-8,\quad y=-2x+8,\quad y=-2x-8.$$

5. 求下列各方程式的圖形:

(1) $4x=3y$，(2) $5y=6x$，(3) $y=-2x$，(4) $y+x=0$，

(5) $y+x=8$，(6) $x-5=0$，(7) $y-6=0$，(8) $4x+y=9$.

6. 按圖解法，求解下列各組方程式:

(1) $\begin{cases}3x+7y=27,\\5x+2y=16.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x+3y=2,\\3x+9y=8.\end{cases}$ (3) $\begin{cases}4x+3y=1,\\16x+12y=4.\end{cases}$

並按第 17 節所論，分別說明其幾何意義.

7. 按圖解法，求解下列各組方程式，并按代數解法加以核驗.

(1) $\begin{cases}2x-y=3,\\x+y=6.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}3x+2y=16,\\5x-3y=14.\end{cases}$ (3) $\begin{cases}\text{[illegible]}y-\text{[illegible]}x=18,\\x=3y.\end{cases}$

第四章

因式分解

22. 因式 二個或二個以上有理整代數式相乘,所得的結果,稱爲積;此諸代數式稱爲此積的因式. 本章中所論,皆爲有理整式;以下做此.

一有理整代數式,除其本身或常數外,即無其他因式的,稱爲質代數式;苟有其他因式的,稱爲複合代數式.一個 n 次複合代數式,可化爲若干個質代數式的積,其個數不少於 2,亦不多於 n;此諸質代數式,稱爲原複合代數式的質因式.此項分解爲質因式的方法,稱爲**因式分解**.通常謂對於複合代數式,始能分解其因式.

23. 分組分解法 一代數式可集合其適當二項或數項,以期此結合的項,獲有公共因式;然後將此公因式提出,加一括號,所餘各項,另加括號.然後用同法,求後者括號內的因式;繼續進行,至最後爲質因式而止.

例 1. 分解 x^3+3x^2-2x-6 的因式.

解 原式 $=x^2(x+3)-2(x+3)=(x^2-2)(x+3)$.

例 2. 分解 $x^3+6x^2+11x+6$ 的因式.

解 因就原式,不能直接分組以求因式,故須分開其係數如下:

$$x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6.$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式}&=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)=(x+1)(x^2+5x+6)\\&=(x+1)[x^2+2x+3x+6]=(x+1)[x(x+2)+3(x+2)]\\&=(x+1)(x+2)(x+3).\end{aligned}$$

24. 乘法公式及其應用 按乘法可直接求得下列普通公式:

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$

(5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$

(6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$

(7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$

(8) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca.$

(9) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc.$$

(10) 無論 n 為奇數或偶數,則

$$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})=a^n-b^n.$$

(11) n 為偶數,則

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots-b^{n-1})=a^n-b^n.$$

(12) n 為奇數,則

$$(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+b^{n-1})=a^n+b^n.$$

若一代數式,可變成如上列各式中任何一式的右端之形式時,即可各按其左端以分解其因式.

例 1. 分解 $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$ 的因式.

解　原式 $=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$$

$$=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]$$

$$=(a+b-c+d)(a+b+c-d)(c+d-a+b)(c+d+a-b)$$

$$=(a+b+c-d)(b+c+d-a)(c+d+a-b)(d+a+b-c)$$

例 2. 分解 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ 的因式.

解　原式 $=a^2(b-c)+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$

$$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b^2-c^2)$$

$$=(b-c)(a^2+bc-ab-ca)$$

$$=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]$$

$$=(b-c)(a-b)(a-c).$$

例 3. 分解 $x^{15}-y^{15}$ 的因式.

解　原式 $=(x^3)^5-(y^3)^5$

$$=(x^3-y^3)[(x^3)^4+(x^3)^3(y^3)+(x^3)^2(y^3)^2+(x^3)(y^3)^3+(y^3)^4]$$

$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^{12}+x^9y^3+x^6y^6+x^3y^9+y^{12}).$$

其中 $x^{12}+x^9y^3+x^6y^6+x^3y^9+y^{12}$ 是否爲質代數式，可由下列方法決定。即

$$原式=(x^5)^3-(y^5)^3=(x^5-y^5)[(x^5)^2+(x^5)(y^5)+(y^5)^2]$$

$$=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x^{10}+x^5y^5+y^{10}).$$

由此法，知原式尚有一個四次因式，故原式可有因式 $x-y$, x^2+xy+y^2, 及 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$；是即由前法所得的 $x^{12}+x^9y^3+x^6y^6+x^3y^9+y^{12}$ 中，必含有一因式 $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$. 由除法，求得其他一因式爲

$$x^8-x^7y+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8.$$

$$故原式=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)(x^8-x^7y$$
$$+x^5y^3-x^4y^4+x^3y^5-xy^7+y^8).$$

習 題 九

求下列各題的有理整因式：

1. a^4+4a^2+16.
2. $x^2+4y^2+9z^2-4xy-12yz+6zx$.
3. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.
4. $x^4+4x^3+10x^2+12x+9$.
5. $x^3+9xy+y^3-27$.
6. $(x-2y)x^3-(y-2x)y^3$.
7. $a^6-25x^6+8a^3x^3-9+30x^3+16x^4$.
8. $x^4-19x^2y^2+25y^4$.
9. $x^3p^2-8y^3p^2-4x^3q^2+32y^3q^2$.
10. $x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+\cdots+x^3+x^2+x+1$.
11. $x^{16}-y^{16}$.
12. $x^2+z^2-2xz+1-a^2$.
13. $ax(y^3+b^3)+by(bx^3+a^3y)$.
14. $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$.
15. x^6-28x^3+27.
16. $b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+a^2b+ab^2+2abc$.

25.　**二次三項式分解法**　含 x 的二次三項式，若可分解因式，其解法通常有二種：

〔一〕**觀察法**　由乘法所得之恆等式爲

$$(lx+m)(px+q)=lpx^2+(lq+mp)x+mq.$$

通常將所欲分解的二次三項式 ax^2+bx+c，先將 x^2 的係數及常數項，各分爲因數，順次爲 a_1 及 a_2 與 c_1 及 c_2；此二組因數分解能否合於所求，當以 $a_1c_2+a_2c_1$ 能否等於 x 項的係數 b 而後決定。可由下圖觀察其結果。

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & a_2 \\ & \times & \\ c_1 & & c_2 \end{array}$$

a_1a_2　　須等於 x^2 的係數 a，

$a_1c_2+a_2c_1$ 須等於 x 的係數 b，

c_1c_2　　須等於常數項 c。

由此項方法以求得因式，稱爲觀察法。

例.　分解 $24x^2-29xy-4y^2$ 的因式.

$$\begin{array}{ccc} 3 & & 8 \\ & \times & \\ -4y & & +y \end{array}$$

$3\times8=24$,

$3y-32y=-29y$,

$(y)(-4y)=-4y^2$.

故原式 $=(3x-4y)(8x+y)$.

〔二〕**配方法**　將所欲分解的二次三項式 ax^2+bx+c，變爲 A^2-B^2 的形式。其解法如下：

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]\\
&= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]\\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\\
&\quad\times a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).
\end{aligned}
$$

$$
\therefore\ ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).
$$

此處 b^2-4ac 須大於 0，方可分爲二個實因式．

例 分解 x^2-5x+3 的因式．

解 由直接配方法，或代入上列公式，因 $a=1$，$b=-5$ 而 $c=3$．故得

$$
\begin{aligned}
x^2-5x+3 &= \left(x+\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x+\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)\\
&= \left(x-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right).
\end{aligned}
$$

若用觀察法不易分解時，則可採用此法。

習題十

求下列各式的因式：

1．$5x^2+11x+2$．

2．$4x^2-x-14$．

3．$5+32x-21x^2$．

4．$2x^4-9x^2$ [illegible]．

6. $a^2-11a-152$.　　5. $x^2+x-870$.

7. $x^2-2(a+b)x-a^2(a-2)(b+2)$.　　8. $x^2-y^2-4z^2-4zx+4yz$.

9. $a^2-3b^2-3c^2+10bc-2ca-2ab$.

10. $2y^2-5xy+2x^2-ay-ax-a^2$.　　11. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24$.

12. $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

13. $(x^2+x+1)(x^2+x+12)-42$.

14. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$.

15. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

16. $(x-1)(x-2)(x+6)(x+3)-5x^2$.

26. 因式定理及其應用 由第14節所述的餘式定理 $f(x)=(x-a)g(x)+R$，而 $R=f(a)$，可推知以 $x-a$ 整除 $f(x)$ 的情形，即因式定理；其法如下：

若 $R=0$，即 $f(a)=0$，則 $f(x)$ 必為 $x-a$ 所整除。

換句話講，若 $f(a)=0$，則 $x-a$ 必為 $f(x)$ 的一因式；逆之，若 $x-a$ 為 $f(x)$ 的一因式，則 $f(a)=0$。

凡含 x 的 n 次有理整代數式，若可分解其因式時，則可運用上理以求出。其法則為由：

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$

變為
$$f(x)=a_0\left(x^n+\frac{a_1}{a_0}x^{n-1}+\frac{a_2}{a_0}x^{n-2}+\cdots\cdots+\frac{a_n}{a_0}\right),$$

求得 $\frac{a_n}{a_0}$ 的因數，為 $\pm k_1,\pm k_2,\cdots\cdots$ 等，然用綜合除法除之，視餘數為0與否，而決定 $\pm k_1,\pm k_2,\cdots\cdots$ 的取舍，直至此諸數中，無一數可使餘數為0而止。

例 1. 分解 $x^4-3x^3-x^2-11x-4$ 的因式.

解 因 $\frac{a_n}{a_0}=-4$，而 4 的因數為 $\pm1,\pm2,\pm4$.

按綜合除法，逐除於下：

1	−3	−1	−11	−4	4
	4	4	12	4	
1	1	3	1	0	

除以 4 代入 $f(x)$，能使 $f(4)=0$ 而外，所餘他數 故得原式的因式為

$$(x-4)(x^3+x^2+3x+1).$$

例 2. 分解 $5x^6-7x^5-8x^4-x^3+7x^2+8x-4$ 的因式.

解 因 $\frac{a_n}{a_0}=-\frac{4}{5}$，而 $\frac{4}{5}$ 的因數為 $\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{5},\pm\frac{2}{5},\cdots\cdots$

按綜合除法，逐除於下：

5	−7	−8	−1	+7	+8	−4	1	
	5	−2	−10	−11	−4	+4		
5	−2	−10	−11	−4	+4	0	−1	
	−5	+7	+3	+8	−4			
5	−7	−3	−8	+4	0	$\frac{2}{5}$		
	2	−2	−2	−4				
5	−5	−5	−10	0	+2			
	+10	+10	+10					
5	+5	+5	0					

$$\therefore\ 原式=(5x^2+5x+5)(x-2)(x-1)(x+1)\left(x-\frac{2}{5}\right)$$

$$=(x-1)(x-2)(x+1)(5x-2)(x^2+x+1).$$

習　題　十　一

求下列各式的因式:

1. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24$.　　2. $x^3-[illegible]x^2+[illegible]x-2$.

3. $2x^3-[illegible]x^2y-2xy^2+2y^3$.　　4. $4x^6-4[illegible]x^4+4[illegible]x^2-9$.

5. $[illegible]x^5-10x^4-8x^3-[illegible]x^2+10x+8$.

6. $4x^5+4x^4-37x^3-37x^2+9x+9$.

7. $[illegible]x^5+19x^4+22x^3+2[illegible]x^2+16x+4$.

8. 已知 $[illegible]x+1$ 及 $[illegible]x-3$ 為 $ax^3+bx^2-47x-15$ 的因式，求 a 及 b 的值.

27. 未定係數法　如第15節,化 $f(x)$ 為 $f(x+h)$ 的形式後, $f(x+h)$ 中各項的係數,當與 $f(x)$ 所具者不同;其各項係數,當視 $f(x)$ 各項係數及 h 的值以決定. 此諸係數通常稱為未定係數. 故在等式中的未定係數,當以此等式合於某種條件而後決定,此種決定法,稱為未定係數法.

茲將未定係數法所引用的重要定理分述如下:

〔一〕設一有理整函數 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$ 分別以 n 個值 $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots p_n$ 代入 $f(x)$,而能使 $f(p_1)$, $f(p_2)$, $f(p_3)$, $\cdots\cdots f(p_n)$ 俱為 0, 則

$$f(x)=a_0(x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)\cdots\cdots(x-p_n).$$

此理易由第26節定理以證明.

〔二〕若一個 n 次有理整函數 $f(x)$,以多於 n 個的異值代 $f(x)$ 中的 x,而能使 $f(x)$ 俱等於 0, 則 $f(x)$ 各項的係數必等

於0.

因由定理一，在n次有理整函數$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$中，若$p_1, p_2, \cdots\cdots p_n$能使$f(p_1), f(p_2), \cdots\cdots f(p_n)$俱爲零，則

$$f(x)=a_0(x-p_1)(x-p_2)(x-p_3)\cdots\cdots(x-p_n).$$

現除$p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots p_n$ n個值以外，尙有一異值c，亦能使$f(x)$爲0，即$f(c)=0$，由上式，得

$$0=a_0(c-p_1)(c-p_2)(c-p_3)\cdots\cdots(c-p_n).$$

此式右端的因數$c-p_1, c-p_2, c-p_3, \cdots\cdots c-p_n$俱不爲零，欲此式成立，必$a_0$爲0，即$f(x)$各項的係數爲0。

〔三〕若二個n次有理整函數$f(x)$及$g(x)$，以多於n個的數值，代二者中的x，而能保持其相等時，則此二函數的相當項的係數必相等.

因設 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$,

$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_n.$$

以多於n個的數值代二者中的x，而能使其相等，即

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n$$
$$=b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots\cdots+b_n,$$

卽 $$(a_0-b_0)x^n+(a_1-b_1)x^{n-1}+(a_2-b_2)x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n-b_n=0.$$

由定理中所給條件，卽知此式中的 x，可以多於 n 個的異值代 x，而使其式的左端恆爲 0。按定理二，乃知其各項的係數必爲 0，卽

$$a_0-b_0=a_1-b_1=a_2-b_2=\cdots\cdots=a_n-b_n;$$

卽 $$a_0=b_0,\quad a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\quad\cdots\cdots a_n=b_n.$$

例 試求恆等式 $x^2+bx-6=ax^2-5x+c$ 中的 a,b 及 c。

解 因在此等式中，x 可以任意值代入，等式不變，按定理三，乃得

$$a=1,\quad b=-5,\quad c=-6.$$

由定理三，可得一推論如下：

在恆等式 $f(x)=g(x)$ 中，二端相當項的係數必相等。

未定係數法可處理代數學中的若干個問題。如乘法及除法，均可適用；其餘的引用，當在下列各章中，分別敍述。關於因式分解的引用，特舉例以明於下：

例 用未定係數法，求 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$ 的因式。

解 原式爲二次齊次式，若可分解因式，則當爲二個一次齊次式，且因

$$2x^2-7xy+3y^2=(2x-y)(x-3y),$$

乃得恆等式爲

$$2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2=(2x-y+lz)(x-3y+mz).$$

展開其右端，得 $$2x^2-7xy+3y^2+(l+2m)xz-(3l+m)yz+lmz^2.$$

由本節定理三，得 $l+2m=5,\quad 3l+m=5,\quad lm=2.$

$$\therefore\ l=1,\quad m=2.$$

故原式 $=(2x-y+z)(x-3y+2z)$。

附 本題亦可引用恆等式定義，而分別給 x,y,z 以二組特別值，得含 l 及 m 的二個方程式，然後解之，亦可得 l 及 m，惟其算法較繁，故從略。

28. 對稱函數　在 $x^2+y^2+z^2$ 一式中，若任意以 x 與 y，或 y 與 z，或 z 與 x 互換，而不變原式的值，如

$$y^2+x^2+z^2,\quad x^2+z^2+y^2,\quad z^2+y^2+x^2.$$

則 $x^2+y^2+z^2$ 稱為對於 x,y,z 而言的對稱函數.

如 $xy+yz+zx$，及 $(x+y)(y+z)(z+x)$ 二者對於 x,y,z 為對稱.

$(x+a)(x+b)(x+c)/(a+b+c)$ 對於 a,b,c 為對稱.

$a+b+3c,b+c+3a,c+a+3b$ 對 a,b,c 不為對稱.

就 x,y,z 而言，其最普通的一次，二次，與三次的對稱函數為

$l(x+y+z)$;

$l(x^2+y^2+z^2)+m(xy+yz+zx)$;

$l(x^3+y^3+z^3)+m(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2)+nxyz$.

上列 l,m,n 均為常數，每一括號內的各項，稱為同型項.

對稱函數，可以簡式表示，即取"Σ"表示函數中同型項之和的符號. 如就 x,y,z 三文字而言，

$$\Sigma x^2=x^2+y^2+z^2;$$

$$\Sigma x^2y=x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+zx^2.$$

由是，上列對稱函數，可分別改寫為

$$l\Sigma x,\quad l\Sigma x^2+m\Sigma xy,\quad l\Sigma x^3+m\Sigma x^2y+nxyz.$$

例　化簡 $(a+b+c)^2-(a+b)^2-(b+c)^2-(c+a)^2$.

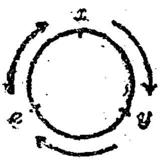
解　此式對於 a, b, c 為二次對稱函數，其結果當為

$$l(a^2+b^2+c^2)+m(ab+bc+ca).$$

此未定係數 l 及 m，可由上列二式中，比較其相當項 a^2 的係數，而得 $l=-1$；再比較其相當項 ab 的係數，而得 $m=0$.

$\therefore$ 原式 $=-(a^2+b^2+c^2)$.

對稱函數中所含各文字，以其任意二個互換而不變其值的，稱為絕對對稱；若按文字的順序，兩兩互換，始不變其值的，稱為輪換對稱。如 $x^2y+y^2z+z^2x$ 中，以 x 換 y，以 y 換 z，以 z 換 x，



而得 $y^2z+z^2x+x^2y$，如是互換文字的方法，稱為輪換法；如是互換的次序，稱為輪換次序，即以式中的第一文字代第二文字，順次以第二代第三，第三代第一，如左圖.

各絕對對稱函數，亦為輪換對稱，惟輪換對稱的，未必為絕對對稱. 如

$(a-b)(b-c)(c-a)$ 對於 a, b, c 僅為輪換對稱.

$(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$ 對於 a, b, c 既為絕對對稱，亦為輪換對稱. 輪換對稱函數，若施以絕對對稱的互換，所得結果乃與原式同值而異號，讀者宜加注意.

關於絕對對稱或輪換對稱的二函數，按四則運算，所得結果

仍爲不變，即二個絕對對稱函數或輪換對稱函數之和，差，積及商，仍爲絕對對稱或輪換對稱函數.

例. 求 $\Sigma ab\cdot\Sigma a$ 的結果.

解 $\Sigma ab\cdot\Sigma a=(ab+bc+ca)(a+b+c)$.

因其由二次對稱函數與一次對稱函數相乘，故其積當爲三次式，再由二者首項之積，可寫其結果爲

$$l\Sigma a^2b+mabc.$$

由上列二式，比較其相當項 a^2b 的係數得 $l=1$；再比較其相當項 abc 的係數，得 $m=3$

故得 $$\Sigma ab\cdot\Sigma a=\Sigma a^2b+3abc.$$

決定 l 及 m，亦可由恆等式定義，以求出如下：

由恆等式 $\Sigma ab\cdot\Sigma a=l\Sigma a^2b+mabc$，先以 $a=0, b=1$，及 $c=1$ 代入，而得 $l=1$. 再以 $a=1$, $b=1$, $c=1$ 代入，而得 [illegible]，∴ $m=3$. 其結果與由前法所得者相同.

28. 對稱函數分解法 對稱函數的性質，已如上述. 再引用第26節因式定理，即可分解其因式. 玆舉例以表明於下：

例1. 求 $(y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3$ 的因式.

解 因原式爲對於 x, y, z 的三次輪換對稱函數，其因式當爲三個一次輪換對稱式. 再用第25節定理，以 $x=y$ 代入原式，原式適爲 0，故 $x-y$ 爲一因式；同理，$y-z$，$z-x$ 亦皆爲因式.

$$\therefore (y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=l(y-z)(z-x)(x-y).$$

比較二端 y^3z 的係數，得 $l=3$.

$$\therefore (y-z)^3+(z-x)^3+(x-y)^3=3(y-z)(z-x)(x-y).$$

例 2. 求 $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$ 的因式.

解 因原式爲對於 x, y, z 的五次輪對對稱式，其因式當爲三個一次及一個二次輪對對稱式. 按第 20 節定理，以 $x=-y$ 代入原式，原式適爲 0，故 $x+y$ 爲一因式；同理，$y+z, z+x$ 亦皆爲因式. 其餘一因式，當爲對於 x, y, z 的二次對稱式.

$$\therefore (x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x)[l\sum x^2+m\sum xy].$$

比較兩端相當項 x^4y 的係數，得 $l=5$;

再設 $x=0, y=1, z=2$ 代入上式，得 $5l+2m=35$.

$$\therefore l=5, \quad m=5.$$

$$\therefore (x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5=5(x+y)(y+z)(z+x)(\sum x^2+\sum xy).$$

例 3. 求 $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz$ 的因式.

解 原式爲對於 x, y, z 的三次輪對對稱式，其因式本可爲三個一次輪對對稱式，但此題在實際上，乃爲一個一次與一個二次輪對對稱式. 因以 $x=-y-z$ 代入原式，原式適爲 0，故得 $x+y+z$ 爲一因式；其餘因式爲 $l\sum x^2+m\sum xy$.

$$\therefore (y+z)(z+x)(x+y)+xyz=(x+y+z)[l\sum x^2+m\sum xy].$$

比較兩端相當項 xyz 的係數，得 $m=1$;

再比較兩端相當項 x^2y 的係數，得 $l+m=1$, $\therefore l=0$.

$$\therefore (y+z)(z+x)(x+y)+xyz=(x+y+z)(xy+yz+zx).$$

習題十二

1. 用未定係數法,求下列二式的因式:

(I) $x^2-8xy+15y^2+2x-4y-3$.

(II) $x^2+3xy+2y^2+3zx+5yz+2z^2$.

2. 用未定係數法,求對稱式 $(x+y+z)^3$ 的展開式.

3. 試決定下列各式,何者爲絕對對稱式,何者爲輪換對稱式?

(I) $a(b-c)^5+b(c-a)^5+c(a-b)^5$.

(II) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

(III) $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$.

(IV) $x(y+z)^2+y(z+x)^2+z(x+y)^2-4xyz$.

4. 二個輪換對稱式的積,爲一輪換對稱式;一個輪換對稱式與一個絕對對稱式的積,爲一輪換對稱式,試分別證明.

5. 求 $yz(y-z)+zx(z-x)+xy(x-y)$ 的因式.

6. 求 $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$ 的因式.

7. 求 $a(b-c)^5+b(c-a)^5+c(a-b)^5$ 的因式.

8. 求 $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$ 的因式.

9. 求 $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5$ 的因式.

10. 求 $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)-(b+c-a)(c+a-b)\times(a+b-c)$ 的因式.

11. 求 $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$ 的因式.

12. 求 $a^2b^2(a-b)+b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)$ 的因式.

13. 求 $(a^2+b^2+c^2)^3-(a^2+b^2-c^2)^3-(b^2+c^2-a^2)^3-(c^2+a^2-b^2)^3$ 的因式.

14. 求證：$(a+b)^3+(a+c)^3+(a+d)^3+(b+c)^3+(b+d)^3+(c+d)^3$
$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

15. 求證：$a^3(b+c-a)^2+b^3(c+a-b)^2+c^3(a+b-c)^2+abc(a^2+b^2+c^2)$
$+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=abc\cdot\Sigma ab$

16. 求 $(b+c-a-d)^4(b-c)(a-d)+(c+a-b-d)^4(c-a)(b-d)$
$+(a+b-c-d)^4(a-b)(c-d)$ 的因式.

第 五 章

最高公因式及最低公倍式

30. 公因式及最高公因式 設 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等表示含一個變數 x, 或數個變數 $x, y, \cdots\cdots$ 等的整函數. 若 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等有相同的因式, 則稱爲公因式. 此諸函數中, 無公因式, 則彼此稱爲互質. 若有公因式, 其中必有一個次數最高的, 稱爲諸函數的最高公因式. 通常以 H. C. F. 表示, 如

a^2+b^2 與 $x-y$ 爲彼此互質,

$2x^4y^3z^5, 3x^5y^4z$ 與 $4x^3y^4$ 的公因式爲 $x, xy, x^2y, \cdots\cdots, x^3y^3$ 等, 其中次數最高的爲 x^3y^3, 即 H. C. F..

31. 關於 H. C. F. 的定理

定理一 $A, B, C, \cdots\cdots$ 諸函數的 H. C. F. 乃 $A, B, C, \cdots\cdots$ 的相異質公因式的連乘積, 此各公因式的次數, 乃取出現於各函數中的最低者.

此理易明, 讀者可自證之.

定理二 設 A 與 B 爲二個已知整函數, 及 M 與 N 爲二個

任意整式或常數,則 A 與 B 的每一公因式必爲 $MA+NB$ 的一因式.

設 A, B 的每一公因式爲 F, 則

$$A=K_1F \quad 及 \quad B=K_2F,$$

$$MA+NB=MK_1F+NK_2F=F(MK_1+NK_2).$$

因 K_1, K_2, M, 及 N 俱爲有理整式,

故 F 爲 $MA+NB$ 的一因式.

由此定理,可得一推論如下:

若 A 與 B 爲已知含 x 的二個整函數, 且 p, q, r, s 爲任意常數, 則 A 與 B 的 H.C.F. 亦爲 $pA+qB$ 與 $rA+sB$ 的H.C.F..

定理三 若 A, B, Q 及 R 四個整函數,均能合於 $A=BQ+R$ 的關係,則 A 及 B 的公因式,亦必與 B 及 R 的公因式相同;其逆亦成立.

$$\because \quad A=BQ+R, \tag{I}$$

$$\therefore \quad A-BQ=R. \tag{II}$$

由 (II), 按上述定理二, 凡 A 及 B 的每一公因式, 必爲 $A-BQ$ 的一因式, 即 R 的一因式. 故知 A 及 B 的一公因式, 亦必與 B 及 R 的一公因式相同.

再由 (I), 依同理, 凡 B 及 R 的一公因式, 亦必與 A 及 B 的一公因式相同. 由是得推論如下:

若 A 及 B 各爲含 x 的二個整函數, 先以 B 除 A, 得商爲 Q_1,

餘式爲 R_1；再以 R_1 除 B，得商爲 Q_2，餘式爲 R_2；再以 R_2 除 R_1，得商爲 Q_3，餘式爲 R_3；依此法逐除，直至最後餘式 R_n 爲 0 而止。其間各個函數的關係，爲：

$$
\begin{aligned}
A&=BQ_1+R_1,\\
B&=R_1Q_2+R_2,\\
R_1&=R_2Q_3+R_3,\\
R_2&=R_3Q_4+R_4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
R_{n-2}&=R_{n-1}Q_n+R_n.
\end{aligned}
$$

若 $R_n=0$，則 R_{n-1} 爲 R_{n-2} 的一因式，即 R_{n-1} 與 R_{n-2} 有一公因式爲 R_{n-1}。按定理三，R_{n-1} 亦爲 R_{n-2} 與 R_{n-3} 的一公因式。由上列關係倒推，則可知 R_{n-1} 亦爲 R_1 與 R_2 的一公因式，即 B 與 R_1 的一公因式，亦即 A 與 B 的一公因式。故由上述逐除法，至 $R_n=0$ 時的除式 R_{n-1}，即爲所求 A 及 B 的一公因式；此公因式即 A 及 B 的 H. C. F.。若 A 與 B 爲互質，則 R_n 爲一常數 C。

32. H.C.F.的求法

解法一　凡二個或二個以上整函數，均能分別化爲若干個質因式的連乘積，且易於分解，則按第 31 節定理一，即可求其 H. C. F.。

例 1. 求 x^2-y^2，$x^2+2xy+y^2$ 及 x^3+y^3 的 H. C. F.。

解　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，

$x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$，

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

故所求的 H.C.F. 爲 $x+y$.

例 2.　求 x^2+5x+6 及 $x^4+6x^3+13x^2+16x+12$ 的 H.C.F..

解　$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

$x^4+6x^3+13x^2+16x+12=(x+2)(x+3)(x^2+x+2)$.

故所求的 H.C.F. 爲 $(x+2)(x+3)$.

解法二　欲求二個次數相等的整函數 A 及 B 的 H.C.F., 可逕按第 31 節定理二及其推論, 由 A 及 B 化爲次數較低的另二個整函數, 然後求其 H.C.F..

例 1.　求 $x^4-x^3+3x^2-4x-12$ 及 $x^4-x^3+2x^2+3x-22$ 的 H.C.F..

解　設 $A=x^4-x^3+3x^2-4x-12$,

$B=x^4-x^3+2x^2+3x-22$.

由 $A-B$, 得　　$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$.

按第 26 節因式定理, 僅 $x-2$ 爲 A 及 B 的公因式, 除此以外, 更無其他公因式.

故所求的 H.C.F. 爲 $x-2$.

本題又可解答如下:

先由 $A-B$, 得　　$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$.

再由 $11A-6B$, 得　　$5x^4-5x^3+21x^2-22x=x(5x^3-5x^2+21x-22)$.

由第 26 節因式定理, 知 $x^2-7x+10$ 及 $5x^3-5x^2+21x-22$ 的公因式爲 $x-2$, 且爲其 H.C.F..

故所求的 H.C.F. 爲 $x-2$.

例 2.　求 $6x^3+25x^2+5x+4$ 及 $4x^3+15x^2-2x+8$ 的 H.C.F..

解 設 $A=6x^3+25x^2+5x+4$,

$B=4x^3+15x^2-2x+8$.

由 $2A-B$,得 $\qquad 8x^3+35x^2+12x=x(8x+3)(x+4)$,

及 $2A-3B$,得 $\qquad 5x^2+16x-16=(5x-4)(x+4)$,

$x+4$ 爲 $8x^3+35x^2+12x$ 及 $5x^2+16x-16$ 的 H.C.F..

故所求的 H.C.F. 爲 $x+4$.

解法三 二個含 x 的整函數 A 及 B, 如易求得其質因式,則先將此諸質因式分出,按第 31 節定理三及其推論,求此分出質因式後之二式的 H.C.F.,即爲所求者.若最初所分出的質因式,爲 A 及 B 的公因式,則以此公因式乘適所得的 H. C. F., 始爲 A 及 B 的 H. C. F..

在除法演算時,凡除式及被除式,或其中任一餘式均可以異於 0 的數字乘之或除之,以免各式的係數爲分數或負數.

按此法求 H. C. F., 以用分離係數法,較爲簡便.

例 1. 求 $x^4-x^3-3x^2+x+2$ 及 $2x^4+3x^3-x^2-3x-1$ 的 H.C.F..

解

$$
\begin{array}{rl}
1-1-3+1+2\,) & 2+3-1-3-1\ (2 \\
 & \underline{2-2-6+2+4} \\
5 & \underline{\ \ 5+5-5-5} \\
 & 1+1-1-1\,)\,1-1-3+1+2\ (1-2 \\
 & \qquad\qquad \underline{1+1-1-1} \\
 & \qquad\qquad -2-2+2+2 \\
 & \qquad\qquad \underline{-2-2+2+2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

故所求的 H.C.F. 為 x^3+x^2-x-1.

若將算式排列如下,則更簡便:

1	1−1−3+1+2	2+3−1−3−1	2
	1+1−1−1	2−2−6+2+4	
−2	−2−2+2+2	5+5−5−5	
	−2−2+2+2	1+1−1−1	
	0		

例 2. 求 $3x^3+8x^2-4x-15$ 及 $6x^4+10x^3-3x^2-2x+5$ 的 H.C.F.

解

	3+ 8− 4− 15	6+10− 3− 2+ 5	2
1	21+56− 28−105	6+16− 8−30	
	21+20− 25	− 6+ 5+28+ 5	−2
12	+36− 3−105	− 6−16+ 8+30	
	252− 21−735	21+20−25	7
	252+240−300	21+35	
	−261−435	−15−25	
	3+ 5	−15−25	−5
		0	

故所求的 H.C.F. 為 $3x+5$.

註 此項算法,通常稱爲輾轉除法,又稱[illegible].

39. 二個以上含 x 的多項式的 H. C. F. 先求諸多項式中任二者的 H. C. F.; 次求所得結果與第三式的 H. C. F.; 依次繼續進行,則最後結果,即為所求的 H. C. F..

例. 求 $2x^3-x^2-12x+$[illegible], x^3-2x^2-5x+6 及 $7x^3+19x^2+8x-4$ 的 H.C.F..

解　按第38節求 H.C.F. 的方法，先求得

$$x^3-2x^2-5x+6 \text{ 及 } 3x^3-x^2-12x+4$$

的 H.C.F. 爲 $x+2$. 再求得

$$x+2 \text{ 及 } 7x^3+19x^2+8x-4$$

的 H.C.F. 爲 $x+2$.

故所求的 H.C.F. 爲 $x+2$.

若諸多項式爲含二元的齊次式，亦可按上法求其 H.C.F.

習 題 十 三

求下列各題中的 H.C.F.:

1. $10x^3y^2z^5$, $4x^2yz^3$, $6x^4y^3z^5$ 及 $8x^4y^4z^4$.
2. x^4-y^4, x^5+y^5 及 $x^3+x^2y+xy^2+y^3$.
3. $(x-1)(x-2)$ 及 $5x^4-15x^3+8x^2+6x-4$.
4. $(x^2-1)^2(x+1)^2$ 及 $(x^3+5x^2+7x+3)(x^2-2x-7)$.
5. x^3-x^2-5x-3 及 $x^3-4x^2-11x-6$.
6. $a^3-5a^2x+7ax^2-3x^3$ 及 $a^3-3ax^2+2x^3$.
7. $2x^3+4x^2-7x-14$ 及 $6x^3-10x^2-21x+35$.
8. $24x^4y+72x^3y^2-6x^2y^3-90xy^4$ 及 $6x^4y^2+13x^3y^3-4x^2y^4-15xy^5$.
9. $4x^5+14x^4+20x^3+70x^2$ 及 $8x^7+28x^6-8x^5-12x^4+56x^3$.
10. x^5-x^3-x+1 及 $x^7+x^6+x^4-1$.
11. $1+x+x^3-x^5$ 及 $1-x^4-x^6+x^7$.
12. $x^3+ax^2-3x-3a$, x^3-x^2-3x+3 及 x^3+x^2-3x-3.
13. $x^4+x^3-x^2+x-2$, $2x^4+5x^3-2x^2-7x+2$ 及 $3x^4-x^3-x^2-3$.
14. 設 ax^2+bx+c 及 $a'x^2+b'x+c'$ 有一公因式爲 $x+k$，求證:

$$(ac'-a'c)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b).$$

17. 第32節解法三，在除法演算中，凡除式及被除式，或其中任一餘式，均可以異於0的數去乘之或除之，對於所求的 H.C.F. 仍不改變．其理由何在？試加說明．

18. 若 A, B 為已知含 x 的二個有理整函數，且 p, q, r, s 為任意常數，則 A 與 B 的 H.C.F. 恆為 $pA+qB$ 與 $rA+sB$ 的 H.C.F. 試證之．又其逆如何？

34. 公倍式及最低公倍式 一整函數若可為二個或二個以上的整函數 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等所整除，即稱為 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等的公倍式．已知 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等函數，其公倍式可多至無限個，此無限個公倍式中，其次數最低的，稱為最低公倍式，而以 L.C.M. 表示．

35. 關於 L.C.M. 的定理

定理一 二個或二個以上的整函數 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等的 L.C.M. 乃 $A, B, C, \cdots\cdots$ 等所有質因式的連乘積，各個質因式的次數，乃取其在各函數中出現的最高的．

由 L.C.M. 的定義，即知其理為真，讀者可自證之．

定理二 二整函數 A 及 B 的 L.C.M.，為由 A, B 的積，除以 A, B 的 H.C.F.．

設 H 為 A 及 B 的 H.C.F.，及 L 為 A 及 B 的 L.C.M.，則

$$A=Q_1H \text{ 及 } B=Q_2H,$$

而

$$L=Q_1Q_2H,$$

$$\therefore L=AB/H.$$

由此定理，可得二推論如下：

A 及 B 的 L.C.M. 與其 H.C.F. 的積，等於 A,B 的積；

A 及 B 的 L.C.M. 等於以其 H.C.F. 除 A,B 中的任一式，再以他式乘之.

37. L.C.M. 的求法

解法一　若 $A,B,C,\cdots\cdots$ 等整函數均能分解爲若干個質因式的連乘積，則按第 35 節定理一，即可求其 L.C.M..

例 1.　求 $(a+b)(a^5-b^5)$ 及 $(a-b)(a^5+b^5)$ 的 L.C.M..

解

$$(a+b)(a^5-b^5)=(a+b)(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4),$$

$$(a-b)(a^5+b^5)=(a-b)(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

故得 L.C.M. 爲

$$(a+b)(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\times(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

例 2.　求 $(x^3-y^3)(x-y)^3$，$(x^4-y^4)(x-y)^2$ 及 $(x^2-y^2)^2$ 的 L.C.M..

解

$$(x^3-y^3)(x-y)^3=(x-y)^4(x^2+xy+y^2),$$

$$(x^4-y^4)(x-y)^2=(x-y)^3(x+y)(x^2+y^2),$$

$$(x^2-y^2)^2=(x-y)^2(x+y)^2.$$

故得 L.C.M. 爲

$$(x+y)^2(x-y)^4(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2).$$

解法二　欲求 A 及 B 二整函數的 L.C.M.，按第 35 節定理二的推論，先求 A,B 的 H.C.F.，繼以所求得的 H.C.F. 除 A，所得的商，然後以 B 乘之，即得.

例　求 x^3+x^2+x+1 及 x^3-x^2+x-1 的 L.C.M..

解 先求得 x^3+x^2+x+1 及 x^3-x^2+x-1 的 H.C.F. 爲 x^2+1. 再以 x^2+1 除第一式 x^3+x^2+x+1, 得 $x+1$, 然後以第二式 x^3-x^2+x-1 乘之, 卽得 L.C.M. 爲

$$(x+1)(x^3-x^2+x-1).$$

若以 x^2+1 除第二式 x^3-x^2+x-1, 得 $x-1$, 然後以第一式 x^3+x^2+x+1 乘之, 卽得 L.C.M. 爲

$$(x-1)(x^3+x^2+x+1).$$

此二結果均可化爲 $(x-1)(x+1)(x^2+1)$, 乃完全相同, 而爲原二式的 L.C.M..

37. 二個以上含 x 的多項式的 L.C.M. 先求諸多項式中任何二個的 L.C.M., 次求所得結果與第三式的 L.C.M., 依次繼續進行, 則最後的結果, 卽爲所求的 L.C.M..

例 1. 求 $x^3-8x^2+11x-6$, $2x^3-7x^2+7x-2$ 及 $2x^3+x^2-13x+6$ 的 L.C.M..

解 先求得第一式與第二式的 L.C.M. 爲

$$(x-1)(x-2)(x-3)(2x-1).$$

再求得此結果與第三式的 L.C.M. 爲

$$(x-1)(x-2)(x-3)(2x-1)(x+3),$$

卽爲所求的 L.C.M.

38. 關於質因式的基本定理 設二個含 x 的多項式 A 及 B, 爲彼此互質, 必可求得二個整函數 M 及 N, 合於下列關係:

$$MA+NB=1.$$

因按第 31 節定理三的推論, 若 A 及 B 爲互質, 則所得最後

餘式，當不含 x，而爲常數 C. 爲便於說明計，設最後餘式爲 R_3，即 $R_3=C$，代入第 31 節定理三推論中的關係式

$$A=BQ_1+R_1, \qquad \therefore\ R_1=A-BQ_1;$$

$$B=R_1Q_2+R_2, \qquad R_2=B-R_1Q_2;$$

$$R_1=R_2Q_3+C, \qquad C=R_1-R_2Q_3.$$

$$\therefore\ C=A-BQ_1-Q_3[B-Q_2(A-BQ_1)],$$

$$C=(1+Q_2Q_3)A-(Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3)B;$$

即
$$\frac{1+Q_2Q_3}{C}\cdot A-\frac{Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3}{C}\cdot B=1.$$

因 Q_1, Q_2, Q_3 爲整函數，而 C 爲常數，故 A 及 B 的係數 $\dfrac{1+Q_2Q_3}{C}$，與 $-\dfrac{Q_1+Q_3+Q_1Q_2Q_3}{C}$ 俱當爲整函數，分別以 M 及 N 表示，得 $MA+NB=1$，而 M, N 俱爲整函數.

由此定理，得推論於下:

設 a 及 b 爲二整數，且彼此爲互質，則必可求得二整數 m 及 n，合於下列關係:

$$ma+nb=1.$$

因 a 及 b 爲互質數，則按輾轉除法所得的最後餘數必爲 1. 用以上定理的證法，即易證明.

例　已知 223 與 125 爲互質數，試求二整數 m 及 n，俾能合於 $223m+125n=1$ 的關係.

解　用展轉除法,以125除223,而得下列諸式:

$$
\begin{aligned}
223 &= 125\cdot1+98, &\quad \text{即}\quad 98 &= 223-125;\\
125 &= 98\cdot1+27, & 27 &= 125-98;\\
98 &= 27\cdot3+17, & 17 &= 98-27\cdot3;\\
27 &= 17\cdot1+10, & 10 &= 27-17;\\
17 &= 10\cdot1+7, & 7 &= 17-10;\\
10 &= 7\cdot1+3, & 3 &= 10-7;\\
7 &= 3\cdot2+1, & 1 &= 7-3\cdot2.
\end{aligned}
$$

次第以3,7,10,17,27,98之等值代入 $1=7-3\cdot2$ 中,而得

$$1=37\cdot223-66\cdot125.$$

故合於 $223m+125n=1$ 之關係中的二整數 m 及 n,為

$$m=37 \text{ 及 } n=-66.$$

習題十四

求下列各題的L.C.M.:

1. $3x^2y^3z$, xy^4z^3 及 $2x^3yz^5$.
2. x^2-3x+2, x^2-5x+6 及 x^2-4x+3.
3. $x^2-(y+z)^2$, $y^2-(z+x)^2$ 及 $z^2-(x+y)^2$.
4. $6x^4+x^3-5x-2$ 及 $6x^3+5x^2-3x-2$.
5. $x^3-9x^2+26x-24$ 及 $x^3-12x^2+47x-60$.
6. $7x^4-46x^3+78x^2-46x+7$ 及 x^4-11x^2+49.

7. x^4-10x^2+9, $x^4+10x^3+20x^2-10x-21$, 及

$x^4+4x^3-22x^2-4x+21$.

8. $2x^4-x^3+2x^2+3x-2$, $2x^4+3x^3-4x^2+15x-$ 及

$x^4+2x^3+x^2+7x+3$.

9. 二式的最低公倍式爲 $x^3-6x^2+11x-6$,最高公因式爲 $x-1$,若此二式的次數相等,求此二式.

10. 由 A,B,C 三代數式中,任取二式,其 H.C.F. 分別爲 H_1,H_2,及 H_3,又其 L.C.M. 分別爲 L_1,L_2,L_3.求證:

$$H_1H_2H_3L_1L_2L_3=(ABC)^2.$$

11. 由已知 A,B,C 三代數式,求得 B,C 的 H.C.F. 爲 H_1,C,A 的 H.C.F. 爲 H_2,A,B 的 H.C.F. 爲 H_3,又 A,B,C 的 H.C.F. 爲 H. 則 A,B,C 的 L.C.M. 爲

$$ABCH\div H_1H_2H_3,$$

試證之.

12. 已知 325 與 196 爲互質數,試求二整數 m 及 n 而能合於 $325m+196n=1$ 的關係.

第六章

分　　式

39. 分式及其基本原則 設 A 及 B 爲任意二代數式，其中 B 不爲 0，則以 B 除 A 所得的商，而用 $\frac{A}{B}$ 表示的，此 $\frac{A}{B}$ 稱爲**分式**．A 爲**分子**，B 爲**分母**，A 及 B 合稱爲**分式的項**．A 及 B 俱爲有理式，$\frac{A}{B}$ 稱爲**有理分式**；A 及 B 俱爲整式，$\frac{A}{B}$ 稱爲**簡分式**；A 及 B 有一爲分式或俱爲分式，$\frac{A}{B}$ 稱爲**繁分式**．在簡分式中，分子的次數較分母的次數爲低或高，而分別稱此分式爲**眞分式**或**假分式**．假分式有時可化爲整式與分式的代數和，此代數和稱爲**帶分式**．如

$$\frac{x-1}{2x^2+1},\qquad \frac{x^2+x+1}{x^3-2x+1},\quad \text{均爲眞分式；}$$

$$\frac{x^3+1}{x+1},\qquad \frac{x^4+1}{x^2+1},\quad \text{均爲假分式；}$$

$$3+\frac{4x}{x^2-x+1},\qquad 2-\frac{1}{x+1},\quad \text{均爲帶分式．}$$

任一整式可視爲以 1 爲分母，以此整式爲分子的假分式．以一整式除 1 所得的分式，稱爲此整式的倒數．

關於分式的基本原則：

〔一〕以一其值不爲 0 的式，同乘一分式的分子分母的全部，此分式的值不變．

〔二〕以一其值不爲 0 的式同除一分式的分子分母的全部，此分式的值不變．

〔三〕兩分式的分母相同，分子較大的分式，其值較大．

〔四〕兩分式的分子相同，分母較大的分式，其值較小．

40. 約分及通分　一分式的分子分母全部同除以一值不爲 0 的式，稱爲約分．若同乘以一值不爲 0 的式，稱爲通分．

若一分式的分子分母有公共的因式，可用約分法化簡，已簡化的分式，稱爲最低項分式，或不可約分式．若化數分式爲同分母的分式，先求諸分式的分母的 L.C.M.，然後按通分法，各以相同倍式，分乘諸分式的分子分母的全部，稱爲通分．

例 1．　化簡分式 $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}$ 爲最低項分式．

解　$$\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{(x^3+y^3)(x^3-y^3)}=\frac{(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)}$$

$$=\frac{1}{(x+y)(x-y)}.$$

例 2．　化 $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$，$\dfrac{2}{x^2-5x+6}$ 及 $\dfrac{x}{x^2-4x+3}$ 爲分母相同的分式．

解 先求係各分式的分母的 L.C.M. 爲 $(x-1)(x-2)(x-3)$.

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}=\frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

$$\frac{2}{x^2-5x+6}=\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2x-2}{(x-1)(x-2)(x-3)};$$

$$\frac{x}{x^2-4x+3}=\frac{x}{(x-1)(x-3)}=\frac{x^2-2x}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

習 題 十 五

化簡下列各分式爲不可約分式:

1. $\frac{15x^2-46x+35}{10x^2-29x+21}$.

2. $\frac{x^2-y^2+z^2+2xz}{x^2+y^2-z^2+2xy}$.

3. $\frac{(1+xy)^2-(x+y)^2}{1-x^2}$.

4. $\frac{x^4+x^3+?x^2+?x+4}{?x^4+?x^3+1?x^2+?x+12}$.

5. $\frac{(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

6. $\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$.

7. $\frac{2x^3-2?ax^2+78a^2x-?2a^3}{2x^3+?ax^2-4a^2x-48a^3}$.

8. $\frac{ax^3-5a^2x^2-6?a^3x+4?a^4}{x^4-6ax^3-1?a^2x^2+?a^3x}$.

化下列各組分式爲分母相同的分式:

9. $\frac{1}{x^2-x-?}$ 及 $\frac{3}{?x^2-x-?}$.

10. $\frac{5}{?+x-8x^2}$ 及 $\frac{?}{?+5x+?x^2}$.

11. $\frac{x}{2(x+1)(x-?)}$, $\frac{1?(x-1)}{1?(x-3)(x-?)}$ 及 $\frac{?(x+?)}{1?(x+?)(x-?)}$.

12. $\frac{a+?b}{?(a+b)(a+2?)}$, $\frac{a+2b}{(a+?)(a+?b)}$ 及 $\frac{a+b}{(a+2b)(a+?b)}$.

41. **分式加法與減法** 分式加減所應用的重要規律,大致與整式加減時所用的相同;特異的點,為尚需應用除法的分配律

即
$$\frac{A_1}{B}+\frac{A_2}{B}-\frac{A_3}{B}=\frac{A_1+A_2-A_3}{B}.$$

在此等式中,左端係表示分母同而分子異的三分式,其右端為表示此三分式的代數和.故求數分式之和及差時,必須此諸分式的分母相同,然後始可施行加減;其不同分母的分式,則不能直接運算.

關於求不同分母的諸分式之和及差,所用的規律為
$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}-\frac{A_3}{B_3}=\frac{A_1B_2B_3+A_2B_1B_3-A_3B_1B_2}{B_1B_2B_3}.$$

因 $B_1\cdot B_2\cdot B_3$ 為三分式的 L.C.M., $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$ 及 $\frac{A_3}{B_3}$ 可按通分法順次化為 $\frac{A_1B_2B_3}{B_1B_2B_3}$, $\frac{A_2B_1B_3}{B_1B_2B_3}$ 及 $\frac{A_3B_1B_2}{B_1B_2B_3}$,然後按除法分配律,即可求得右端的結果.故求不同分母的諸分式之和及差時,須先行通分,然後始可實行加減.

由是得諸分式加減的法則為:先按通分法求諸分式的分母的 L.C.M. 為公分母;以此公分母各對於原分母所增的倍式,各乘其分子為新分子;然後以公分母為分母,以諸新分子的代數和為分子,作成分式,即得所求的結果.分母原相同的,可不通分,而逕按最後步驟進行.

例 1.　化簡 $\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}-\frac{x+2}{(2-x)(x-3)}+\frac{x+3}{(3-x)(1-x)}$

解　各分母的 L.C.M. 爲 $(x-1)(x-2)(x-3)$.

$$\therefore \text{原式}=\frac{x+1}{(x-1)(x-2)}+\frac{x+2}{(x-2)(x-3)}+\frac{x+3}{(x-3)(x-1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-3)+(x+2)(x-1)+(x+3)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{3x^2-11}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

例 2.　化簡 $\frac{1}{2x^4-3x^3-5x^2+7x-2}+\frac{1}{2x^4+3x^3-2x^2-2x+1}$

$$+\frac{1}{x^4-4x^2-x+2}.$$

解　先求得各分母的 L.C.M. 爲 $(x-2)(x+1)(2x-1)(x^2+x-1)$.

$$\text{原式}=\frac{x+1+x-2+2x-1}{(x-2)(x+1)(2x-1)(x^2+x-1)}$$

$$=\frac{2}{(x-2)(x+1)(x^2+x-1)}.$$

求一整式與一分式之和或差時，可視此整式爲分母等於 1 的分式，然後按上列法則，施行加法或減法.

42.　分式乘法　分式乘法，除應用整式乘法所應用的重要規律而外，尚有四個重要規律，爲：

[一]　　$A_1\cdot\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1A_2}{B_2}.$

[二]　　$\dfrac{A_1}{B_1} \cdot \dfrac{A_2}{B_2} = \dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}$.

因分式$\dfrac{A_1}{B_1}$或$\dfrac{A_2}{B_2}$爲表示以B_1除A_1或B_2除A_2所得的商，設$\dfrac{A_2}{B_2}=Q$，則$A_2=QB_2$；兩端以A_1（不等於0）乘之，得$A_1A_2=QA_1B_2$，或$\dfrac{A_1A_2}{B_2}=QA_1$，故得$\dfrac{A_1A_2}{B_2}=\dfrac{A_2}{B_2}\cdot A_1$。

再設$\dfrac{A_1}{B_1}\cdot\dfrac{A_2}{B_2}=Q'$，兩端同以$B_1B_2$乘之（$B_1\neq0$，$B_2\neq0$），得$\dfrac{A_1}{B_1}\cdot\dfrac{A_2}{B_2}\cdot B_1B_2=Q'\cdot B_1B_2$，即$\dfrac{A_1}{B_1}\cdot B_1\cdot\dfrac{A_2}{B_2}\cdot B_2=Q'\cdot B_1B_2$，乃得$A_1A_2=B_1B_2\cdot Q'$. $\therefore$ $Q'=\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}$；故得$\dfrac{A_1A_2}{B_1B_2}=\dfrac{A_1}{B_1}\cdot\dfrac{A_2}{B_2}$.

由上述第二規律，推得

[三]　　$\dfrac{A_1}{B_1}\cdot\dfrac{A_2}{B_2}\cdot\dfrac{A_3}{B_3}\cdot\cdots\cdots=\dfrac{A_1A_2A_3\cdots\cdots}{B_1B_2B_3\cdots\cdots}$.

[四]　　$\left(\dfrac{A_1}{B_1}\right)^n=\dfrac{(A_1)^n}{(B_1)^n}$.

由是得分式乘法的規則爲：若以整式乘分式，等於以整式乘其分子爲分子，以原分母爲分母所成的分式；分式乘分式，等於以分子乘分子爲分子，分母乘分母爲分母所成的分式。一分式的n次乘冪，等於以分子的n次乘冪爲分子，分母的同次乘冪爲分母所成的分式。

例 1.　化簡$\frac{x^2+3x+2}{x^2+9x+20}\times\frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+6}$.

解　原式$=\frac{(x+1)(x+2)}{(x+5)(x+4)}\times\frac{(x+3)(x+4)}{(x+2)(x+3)}=\frac{x+1}{x+5}$.

因分式的分子與分母有公因式時，可按約分法先行化簡，然後求其結果．

例 2.　求$-\frac{2x^2yz^3}{ab}$的五次乘冪.

解　原式的五次乘冪$=-\frac{(2x^2yz^3)^5}{(ab)^5}=-\frac{32x^{10}y^5z^{15}}{a^5b^5}$.

43. 分式除法、分式除法，除應用整式除法所應用的重要規律而外，尚有二種重要規律，爲：

〔一〕　$\frac{A_1}{B_1}\div A_2=\frac{A_1}{B_1A_2}$.

〔二〕　$\frac{A_1}{B_1}\div\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1B_2}{B_1A_2}$.

因$\frac{A_1}{B_1}$爲表示以 B_1 除 A_1 所得的商，設$\frac{A_1}{B_1}=Q$，則 $A_1=B_1Q$；兩端同以 B_1A_2（不等於 0）除之，得$\frac{A_1}{B_1A_2}=\frac{B_1Q}{B_1A_2}=\frac{Q}{A_2}$，故得$\frac{A_1}{B_1A_2}=\frac{A_1}{B_1}\div A_2$.

再設$\frac{A_1}{B_1}\div\frac{A_2}{B_2}=Q'$，則$\frac{A_1}{B_1}=Q'\cdot\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_2Q'}{B_2}$；兩端同以 B_1B_2（不等於 0）乘之，得 $A_1B_2=Q'A_2B_1$．再同以 A_2B_1（不等於

0）除其兩端，得 $Q'=\dfrac{A_1B_2}{A_2B_1}$，故得 $\dfrac{A_1}{B_1}\div\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{A_1B_2}{B_1A_2}$，而 $\dfrac{B_2}{A_2}$ 爲以 $\dfrac{A_2}{B_2}$ 除 1 所得的結果，通常稱 $\dfrac{B_2}{A_2}$ 爲 $\dfrac{A_2}{B_2}$ 的倒數.

由是得分式除法的一般法則爲：二分式相除時，取除式的分式的倒數，與被除式的分式相乘即得．若被除式與除式中，有一式爲整式，則可視此整式爲分母等於 1 的分式，然後按一般法則進行.

例 1.　化簡 $\dfrac{x^3-6x^2+36x}{x^2-49}\div\dfrac{x^4+216x}{x^2-x-42}$.

解　原式 $=\dfrac{x(x^2-6x+36)}{(x+7)(x-7)}\times\dfrac{(x-7)(x+6)}{x(x+6)(x^2-6x+36)}=\dfrac{1}{x+7}$.

例 2.　試以 $\dfrac{x-y+z}{x-y-z}$ 除 $x^2-y^2-z^2+2yz$.

解　$(x^2-y^2-z^2+2yz)\div\dfrac{x-y+z}{x-y-z}=[x^2-(y-z)^2]\times\dfrac{x-y-z}{x-y+z}$

$=(x-y+z)(x+y-z)\times\dfrac{x-y-z}{x-y+z}=(x+y-z)(x-y-z)$

$=x^2+z^2-y^2-2xz$.

44．**繁分式**　通常化簡繁分式的方法，爲先將其兩項化爲最低項分式，然後按分式除法，求其最後簡式.

例 1.　化簡 $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}}\times\dfrac{ab^3-a^3b}{a^2+b^2}$.

解

$$原式=\frac{\dfrac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}}{\dfrac{-4ab}{a^2-b^2}}\times\frac{ab^3-a^3b}{a^2+b^2}=\frac{2(a^2+b^2)}{-4ab}\times\frac{ab(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

例 2. 化簡 $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x}}}$.

解

$$原式=x+\frac{1}{x+\dfrac{1}{\dfrac{x^2+1}{x}}}=x+\frac{1}{x+\dfrac{x}{x^2+1}}=x+\frac{1}{\dfrac{x^3+2x}{x^2+1}}$$

$$=x+\frac{x^2+1}{x^3+2x}=\frac{x^4+3x^2+1}{x^3+2x}.$$

凡如例 2 的繁分式之形式的，稱爲連分式.

習題十六

化簡下列各分式:

1. $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$.

2. $\frac{a^2-bc}{bc}-\frac{ac-b^2}{ac}-\frac{ab-c^2}{ab}$.

3. $\frac{x^2+[illegible]xy-[illegible]y^2}{x^2-16y^2}-\frac{2xy}{2x^2+8xy}$.

4. $\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^3-y^3}+\frac{x^2y+xy^2}{x^3-y^3}$.

5. $\frac{1}{2x^2-x-1}-\frac{3}{6x^2-x-2}$.

6. $\dfrac{1}{2a-3x}-\dfrac{a}{2a^2+18x^2}+\dfrac{1}{2a+3x}$.

7. $\dfrac{7x}{2(x+1)(x-3)}-\dfrac{15(x-1)}{14(x-3)(x-2)}-\dfrac{9(x+3)}{16(x+1)(x-2)}$.

8. $\dfrac{a+3b}{2(a+b)(a+2b)}+\dfrac{a+2b}{(a+b)(a+3b)}-\dfrac{a+b}{3(a+2b)(a+3b)}$.

9. $\dfrac{5(2x-3)}{11(6x^2+x-1)}+\dfrac{7x}{6x^2+7x-3}-\dfrac{12(2x+1)}{11(4x^2+8x+3)}$.

10. $\dfrac{a+y}{(x-a)(a-b)}+\dfrac{a+b+y}{(x-b)(b-a)}-\dfrac{x+y-a}{(x-a)(x-b)}$.

11. $\dfrac{b}{a(a^2-b^2)}+\dfrac{a}{b(a^2+b^2)}+\dfrac{a^4+b^4}{ab(b^4-a^4)}-\dfrac{a^3}{b^3-a^3}$.

12. $\dfrac{y+z}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{z+x}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{x+y}{(z-x)(z-y)}$.

13. $\dfrac{x^2yz}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2zx}{(y-z)(y-x)}+\dfrac{z^2xy}{(z-x)(z-y)}$.

14. $\dfrac{1+a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1+b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{1+c}{(c-a)(c-b)}$.

15. $\dfrac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\dfrac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\dfrac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$.

16. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x-b)}$

$$+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(x-c)}.$$

17. $x-\dfrac{1}{3-2x}-\dfrac{8x^4-33x}{8x^3-27}-\dfrac{2x+6}{4x^2+6x+9}$.

18. $\dfrac{(a+b)^3-c^3}{a-c+b}+\dfrac{(b+c)^3-a^3}{c-a+b}+\dfrac{(c+a)^3-b^3}{c-b+a}$.

19. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2+\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)^2$

$$-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(xy+\frac{1}{xy}\right).$$

20. $(yz+zx+xy)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)-xyz\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}\right).$

21. $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}.$

22. $\dfrac{(y-x)(z-x)}{(x-2y+z)(x+y-2z)}+\dfrac{(z-y)(x-y)}{(x+y-2z)(-2x+y+z)}$

$$+\frac{(z-x)(z-y)}{(-2x+y+z)(x-2y+z)}.$$

23. $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-4}\times\dfrac{x^2+7x+12}{x^2-8x+15}\div\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4x-5}.$

24. $\left(\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}\right)\left(\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a^2+b^2}{a^3-b^3}\right).$

25. $\dfrac{a(a^2-x^2)}{3b(c^2-x^2)}\div\left[\dfrac{a^2-ax}{bc+bx}\times\dfrac{a^2+2ax+x^2}{c^2-2cx+x^2}\right].$

26. $\left(\dfrac{x^2}{1-x^4}+\dfrac{2x^4}{1-x^8}\right)\div\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2.$

27. $\dfrac{x}{2}\left(\dfrac{1}{x-y}-\dfrac{1}{x+y}\right)\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}\div\dfrac{1}{x+y}.$

28. $\dfrac{1}{x+y}\div\left(\dfrac{y}{2}\left(\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{x-y}\right)\right)\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2y+xy^2}.$

29. $\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{a+x}+\dfrac{1}{a-x}\right)\div\left(\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}\right).$

30. $\left(b+\dfrac{a^2}{b-a}\right)\left(b-\dfrac{a^2}{a+b}\right)\left(\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\right).$

31. $16+\left\{\frac{x+a}{x-a}\div\frac{x-a}{x+a}-6\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)\right\}^2$

32. $\left(\frac{2bc}{b+c}-b\right)\div\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b-2c}\right)+\left(\frac{2bc}{b+c}-c\right)\div\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c-2b}\right)$.

33. $\left\{\frac{b+\frac{a-b}{1+ab}}{1-\frac{(a-b)b}{1+ab}}-\frac{a-\frac{a-b}{1-ab}}{1-\frac{(a-b)a}{1-ab}}\right\}\div\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$.

34. $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+1}\times\frac{1+\frac{y}{x}}{x-y}\div\frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{x^2}{y}-\frac{y^2}{x}}$.

35. $\frac{\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x+2}{4}+\frac{x+2}{x-3}}\div\frac{\frac{x+3}{7}-\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{x-1}}$.

36. $\frac{\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)^2-1}{\frac{3x^2-1}{x^3-3x}+1}\div\frac{\frac{9}{x^2}-\frac{33-x^2}{3x^2+1}}{\frac{3}{x^2}-\frac{2(x^2+3)}{(x^3-x)^2}}$.

37. $\frac{a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}{a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$.

38. $\frac{\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}+\frac{8(x+a)(x+b)(x+c)}{(x-a)(x-b)(x-c)}}{\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}-\frac{2[x^3+(ab+bc+ca)x]}{(x-a)(x-b)(x-c)}}$.

39. $\dfrac{x-2}{x-2-\dfrac{x}{x-\dfrac{x-1}{x-2}}}$.

40. 求證: $\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$，此處 A 及 B 均不爲負.

45. 分項分式及其普通定理　由第41節的算法，諸既約的真分式的代數和，可化成另一既約真分式，則諸原分式稱爲此分式的分項分式．由一已知分式求其分項分式，實爲分式加減的逆算法，此項逆算，乃有賴於分項分式的基本定理．

定理一． 二真分式 $\dfrac{A_1}{B_1}$ 及 $\dfrac{A_2}{B_2}$ 之和或差，仍爲真分式．

因 $\dfrac{A_1}{B_1}\pm\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{A_1B_2\pm A_2B_1}{B_1B_2}$，其中 A_1 及 A_2 的次數，各低於 B_1 及 B_2，則 A_1B_2 及 A_2B_1 的次數亦均低於 B_1B_2，因而 $A_1B_2\pm A_2B_1$ 的次數，必低於 B_1B_2，故 $(A_1B_2\pm A_2B_1)/B_1B_2$ 爲真分式．

定理二　設 H 及 K 俱爲整式，而 $\dfrac{A_1}{B_1}$ 及 $\dfrac{A_2}{B_2}$ 均爲真分式，且合於下列的關係時

$$H+\frac{A_1}{B_1}=K+\frac{A_2}{B_2},$$

則 $H=K$, $\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_2}{B_2}$．

因由假設，得 $H-K=\dfrac{A_2}{B_2}-\dfrac{A_1}{B_1}$，且以 $H-K$ 仍爲整式，或

爲 0，及 $\frac{A_2}{B_2}-\frac{A_1}{B_1}$ 仍爲眞分式或爲0；但眞分式決不能等於整式，故若合於假設，必須

$$H-K=0, \qquad \therefore\ H=K;$$

及

$$\frac{A_2}{B_2}-\frac{A_1}{B_1}=0, \qquad \therefore\ \frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1}{B_1}.$$

定理三　設 $\frac{A}{B_1B_2}$ 爲一眞分式，其分母已被分爲彼此互質的二因式 B_1 及 B_2，則此分式必可化爲形如 $\frac{A_1}{B_1}$ 及 $\frac{A_2}{B_2}$ 二眞分式的代數和，且其結果僅有一種。

因按第 38 節的定理，B_1 及 B_2 既爲互質，則必有

$$MB_1+NB_2=1,$$

M 及 N 俱爲整式。兩端各以 A（不等於 0）乘之，得

$$AMB_1+ANB_2=A,$$

$$\therefore\ \frac{A}{B_1B_2}=\frac{AMB_1+ANB_2}{B_1B_2}=\frac{AM}{B_2}+\frac{AN}{B_1}.$$

此式的右端可分兩種情形討論。

1.　若 AM 及 AN 的次數，均各低於其分母，則本定理卽可成立。

2.　若 AM 及 AN 的次數，均各高於其分母，並置

$$\frac{AM}{B_2}=Q_1+\frac{A_2}{B_2} \text{ 及 } \frac{AN}{B_1}=Q_2+\frac{A_1}{B_1},$$

此處$\frac{A_1}{B_1}$及$\frac{A_2}{B_2}$均爲眞分式，則得

$$\frac{A}{B_1B_2}=Q_1+Q_2+\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}.$$

據本節定理二，必$Q_1+Q_2=0$.故本定理仍可成立。

再設$\frac{A}{B_1B_2}$可化爲$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}$或$\frac{C_1}{B_1}+\frac{C_2}{B_2}$俱爲眞分式，則

$$\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}=\frac{C_1}{B_1}+\frac{C_2}{B_2},$$

卽

$$(A_1-C_1)\frac{B_2}{B_1}=C_2-A_2.$$

因A_1-C_1及C_2-A_2俱爲整式，而B_2與B_1爲互質的二式，且A_1-C_1的次數又低於B_1，除$A_1-C_1=0$及$C_2-A_2=0$而外，上列等式決不能成立，卽上述假設不能成立。故由$\frac{A}{B_1B_2}$化爲二眞分式的代數和，其結果僅有一種，讀者對此必須注意。

46. 分項分式解法 由第45節的基本定理，可推得分項分式解法所應用的定理如下：

定理一 若$\frac{A}{B}$爲眞分式，且分母B可化爲r個因式B_1, B_2, B_3, ……B_r，而其中任二個爲彼此互質時，則此分式可化爲r個眞分式的代數和，卽

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{B_1}+\frac{A_2}{B_2}+\frac{A_3}{B_3}+\cdots\cdots+\frac{A_r}{B_r},$$

且僅有此一種結果.

由第 45 節定理三，卽易推得此定理爲眞.

定理二　若$\frac{A}{B}$爲眞分式，且分母 B 可化爲 Q^r 的形式，則此分式可化爲 r 個眞分式的代數和，如

$$\frac{A}{B}=\frac{A}{Q^r}=\frac{A_1}{Q}+\frac{A_2}{Q^2}+\frac{A_3}{Q^3}+\cdots\cdots\frac{A_r}{Q^r}$$

且僅有此一種結果.

因$\frac{A}{B}$爲眞分式，則 A 的次數應低於 B，卽 Q^r 的次數.依一般情形而論，A 可以含 Q 的 $r-1$ 次的代數式表示，卽

$$A=A_1Q^{r-1}+A_2Q^{r-2}+A_3Q^{r-3}+\cdots\cdots+A_r,$$

$$\therefore\ \frac{A}{B}=\frac{A_1Q^{r-1}+A_2Q^{r-2}+A_3Q^{r-3}+\cdots\cdots+A_r}{Q^r}$$

$$=\frac{A_1}{Q}+\frac{A_2}{Q^2}+\frac{A_3}{Q^3}+\cdots\cdots+\frac{A_r}{Q^r}.$$

定理三　若$\frac{A}{B}$爲眞分式，且分母 B 可化爲若干個因式 P，Q^r，R^s，$\cdots\cdots$等，而 P，Q，$R\cdots\cdots$等之中任二個因式，爲彼此互質時，則此分式可化爲若干個眞分式的代數和，爲

$$\frac{A}{B}=\frac{A_1}{P}+\frac{C_1}{Q}+\frac{C_2}{Q^2}+\frac{C_3}{Q^3}+\cdots\cdots+\frac{C_r}{Q^r}$$
$$+\frac{D_1}{R}+\frac{D_2}{R^2}+\frac{D_3}{R^3}+\cdots\cdots+\frac{D_s}{R^s}+\cdots\cdots,$$

且僅有此一種結果.

由定理一及二,即易知此定理恆眞.

據上述三定理,凡僅含x的眞分式,且其分子及分母的係數均爲實數,可就其分母能分解爲互質的任一個一次因式如$x-a$的,或任一個二次因式如x^2+px+q的,而分別述其分項分式的解法如下:

(一)若原分式的分母,其所有互質因式中,有一因式爲$x-a$,即可得一形如$\frac{k}{x-a}$的分項分式;其中k爲實常數.

(二)若原分式的分母,其所有互質因式中,有一因式爲$(x-a)^r$,即可得一羣r個分項分式的代數和,爲

$$\frac{k_1}{x-a}+\frac{k_2}{(x-a)^2}+\frac{k_3}{(x-a)^3}+\cdots\cdots+\frac{k_r}{(x-a)^r},$$

其中$k_1, k_2, k_3, \cdots\cdots k_r$均爲實常數.

(三)若原分式的分母,其所有互質因式中,有一因式爲x^2+px+q,即可得一形如$\frac{lx+k_1}{x^2+px+q}$的分項分式,其中l_1及k_1均爲實常數.

（四）若原分式的分母，其所有互質因式中，有一因式爲 $(x^2+px+q)^r$，即可得一羣 r 個分項分式的代數和，爲

$$\frac{l_1x+k_1}{x^2+px+q}+\frac{l_2x+k_2}{(x^2+px+q)^2}+\frac{l_3x+k_3}{(x^2+px+q)^3}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{l_rx+k_r}{(x^2+px+q)^r};$$

其中 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_r$ 及 $l_1, l_2, \cdots\cdots l_r$ 均爲實常數.

上列各式中的實常數，可用未定係數法解之．按上法所求得的分項分式，稱爲原分式的最簡分項分式，即各分項分式爲簡化的眞分式，且其中各係數均爲實常數.

若原分式爲假分式，須先化爲帶分式，然後將其所含的眞分式部分，按上法求其分項分式.

例 1. 試化 $\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$ 爲最簡分項分式.

解 原式 $=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}+\dfrac{D}{x-4}$.

得
$$\begin{aligned}x^2+2x+3=\,&A(x-2)(x-3)(x-4)\\&+B(x-1)(x-3)(x-4)\\&+C(x-1)(x-2)(x-4)\\&+D(x-1)(x-2)(x-3).\end{aligned}$$

在此恒等式中，設 $x=1$，得 $6=-6A$，$\therefore A=-1$.

再設 $x=2$，得 $11=2B$，$\therefore B=\dfrac{11}{2}$.

又設 $x=3$,得 $18=-2C$, $\therefore\ C=-9$.

更設 $x=4$,得 $27=6D$, $\therefore\ D=\frac{9}{2}$.

$$原式=-\frac{1}{x-1}+\frac{11}{2(x-2)}-\frac{9}{x-3}+\frac{9}{2(x-4)}.$$

例 2. 試化 $\frac{2x^3-3x^2+4x-5}{(x+3)^5}$ 為最簡分項分式.

解 $$原式=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}+\frac{D}{(x+3)^4}+\frac{E}{(x+3)^5}$$

得 $$2x^3-3x^2+4x-5=A(x+3)^4+B(x+3)^3+C(x+3)^2+D(x+3)+E.$$

由此恆等式,設 $x=-3$,得 $E=-98$.

再比較此恆等式兩端的相當項的係數,得

$$A=0,\quad 12A+B=2,\quad 54A+9B+C=-3,$$

$$及\ 108A+27B+6C+D=4.$$

$$\therefore\ A=0,\ B=2,\ C=-21,\ 及\ D=76.$$

$$\therefore\ 原式=\frac{2}{(x+3)^2}-\frac{21}{(x+3)^3}+\frac{76}{(x+3)^4}-\frac{98}{(x+3)^5}.$$

由上列恆等式,易知 $A=0$,故本題可逕按第15節的化法,即得上列結果,其法較簡.

例 3. 試化 $\frac{2x^5-x+1}{(x^2+x+1)^3}$ 為最簡分項分式.

解 $$原式=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^3}.$$

得 $$2x^5-x+1=(Ax+B)(x^2+x+1)^2+(Cx+D)(x^2+x+1)+Ex+F.$$

先比較此恆等式兩端 x^5 的係數,得 $A=2$.

再以 x^2+x+1 同除此恆等式的兩端,而得

$$2x^3-2x^2+2-\frac{3x+1}{x^2+x+1}$$
$$=(Ax+B)(x^2+x+1)+Cx+D+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}.$$

比較其兩端相當項的係數,得

$$A+B=-2,\ A+B+C=0,\ B+D=2,\ E=-3,\ F=-1.$$

$$\therefore\ B=-4,\ C=2,\ D=6,\ E=-3,\ F=-1.$$

$$\therefore\ \text{原式}=\frac{2x-4}{x^2+x+1}+\frac{2x+6}{(x^2+x+1)^2}-\frac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}.$$

例 4. 試化$\dfrac{2x^2-x+1}{(x^2-x)^2}$為最簡分項分式.

解 原式$=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2(x-1)^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-1}+\dfrac{D}{(x-1)^2}.$

得 $$2x^2-x+1=Ax(x-1)^2+B(x-1)^2+Cx^2(x-1)+Dx^2.$$

由此恆等式,設 $x=1$,即得 $D=2$.

再比較此恆等式兩端相當項的係數,得

$$A+C=0,\ A-2B=-1\ \text{及}\ B=1,$$

$$\therefore\ A=1,\ B=1,\ C=-1.$$

$$\therefore\ \text{原式}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

習 題 十 七

求下列各分式的最簡分項分式:

1. $\dfrac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}$.　　2. $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$.

3. $\dfrac{x^2-10x+13}{(x-1)(x^2-5x+6)}$.　　4. $\dfrac{[illegible]+7x-x^2}{([illegible]+[illegible]x)^2(1-10x)}$.

5. $\dfrac{3x^3-8x^2+10}{(x-1)^4}$.　　6. $\dfrac{[illegible]x^3+[illegible]x^2+5x}{(x^2-1)(x+1)^{[illegible]}}$.

7. $\dfrac{x^3-x^2-5x+1}{x^2-2x+2}$.　　8. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x(x-1)^2(x+[illegible])^3}$.

47. 極限　在本書第一章第二節說明 0 的意義時，曾述及極限名詞，惟當時因限於學習的程度，僅以淺近的例，加以詮述使讀者獲有極限概念。本節所論，乃着重於解釋其定義及求法。

一變數 x 無論其為連續增加或遞減，而始終近於一常數 k，在其變易過程中，$k-x$ 的絕對值，可小於任何小而不為 0 的正數，吾人稱 x 趨近於 k，而以 k 為其極限。

如圓的內接 n 邊形，其邊數倍增時，其周長與面積漸大，各漸近於圓的周長及面積；其邊數繼續倍增，其周長與圓周之差，及其面積與圓面積之差，二者的絕對值，均可小於任何小而不為 0 的正量。吾人稱此 n 邊形的周長及面積，各趨近於其外接圓的圓周及面積，而各以此圓的圓周及面積為其極限。至於一圓的外切 n 邊形邊數倍增時，其周長與面積漸小，而各漸近於圓的周長及面積。依同理敍述，此 n 邊形的周長及面積，各趨近於其內切圓的圓周及面積，而各以此圓的圓周及面積為其極限。在幾何學中，求圓的周長及面積，即以此理為計算的根據。

若 x 的極限為 k，通常以 $\lim x=k$ 表示。

若變數 x 連續增加，且大於任何大的正數，吾人特稱 x 趨近於無限大；無限大通常以 ∞ 表示。x 趨近於無限大一語，有時寫為 $\lim x=\infty$，實在就是說 x 無極限值。

設 $f(x)$ 表 x 的任一有理整函數，而 $x=a$ 時，其值為 $f(a)$。則當 x 趨近於 a，而以 a 為其極限時，$f(x)$ 必趨近於 $f(a)$，而以 $f(a)$ 為其極限。通常以下列符號表示：

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a);$$

其中 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 符號，即表示"當 x 趨近於 a 時 $f(x)$ 的極限"一語。

例　當 x 趨近於 2，而以 2 為其極限時，求 $3x^2-2x+1$ 的極限值。

解　$\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x+1)=3(2)^2-2(2)+1=9$。

48. $\dfrac{a}{0},\dfrac{a}{\infty},\dfrac{0}{0}$ 及 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的意義　分式 $\dfrac{A}{B}$，本為表示以 B 除 A 所得的商。然其分子及分母，在幾種特別情形下，如 $\dfrac{a}{0},\dfrac{a}{\infty}$，其中 a 為有限值，及 $\dfrac{0}{0}$ 與 $\dfrac{\infty}{\infty}$，以除法論，則無算術上的意義，即不能由除法直接求得其結果。茲將此四種分式的意義，分別解釋於下：

$\dfrac{a}{0}$ 為表示一分式中，分子的絕對值為常數 a，而分母為變數，並趨近於 0，而以 0 為其極限。在分母未到達其極限以前，給與分母以漸減的異值，此分式值會隨而漸增；在分母為任何小的

正數時，分式值卽大於任何大的正數；迨分母到達其極限 0 時，分式值卽趨近於無限大 ∞. 故以極限原理論，$\frac{a}{0}$的值爲∞.

$\frac{a}{\infty}$爲表示一分式中，分子的絕對值爲常數a，而分母爲變數，且趨近於無限大 ∞. 在分母尙未到達大於任何大的正數以前，給與分母以漸增的異值，此分式值卽隨而漸減；在分母爲任何大的正數時，分式值卽小於任何小的正數；迨分母趨近於無限大∞時，分式值卽趨近於 0，而以 0 爲其極限. 故以極限原理論，$\frac{a}{\infty}$的值爲 0.

$\frac{0}{0}$爲表示一分式的分子及分母均爲變數，且同時趨近於 0，而各以 0 爲其極限. 在二者均未達到其極限以前，各給與漸減的異值，分式值亦因而得種種的異值；惟在分子分母俱爲任何小的正數時，分式值並不因而必然爲任何小的正數，卻漸近於一常數，或 0，或竟爲任何大的正數. 迨分子分母同時到達其極限時，分式值卽趨近於一常數或 0，而以此常數或 0 爲其極限，或竟趨近於無限大∞. 故以極限原理論，$\frac{0}{0}$的值爲常數，或 0，或竟趨近於無限大.

$\frac{\infty}{\infty}$爲表示一分式的分子及分母均爲變數，且同時趨近於無限大 ∞. 在二者均未到達大於任何大的正數以前，各給與漸增

的異值，分式值亦因而得種種異值；惟在分子分母俱爲任何大的正數時，分式值並不因而必然爲任何大的正數，卻漸近於一常數，或 0，或竟爲任何大的正數．迨分子分母同時趨近於無限大 ∞ 時，分式值卽趨近於一常數或 0，而以此常數或 0 爲其極限，或竟趨近於無限大 ∞．故以極限原理論，$\frac{\infty}{\infty}$ 的值爲一常數或 0，或竟趨近於無限大 ∞．

$\frac{0}{0}$ 及 $\frac{\infty}{\infty}$ 稱爲不定形．此不定形之值，可按極限原理求之．設一分式的分子及分母，均各爲有理整函數 $f(x)$ 及 $g(x)$，則此分式可以 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 表示．由此分式所成的不定形，分別述其求值法如下：

(1)　若 x 有一值 a，而能使 $\frac{f(a)}{g(a)}$ 爲 $\frac{0}{0}$ 時，則在未求值以前，先以 $x-a$ 同除 $f(x)$ 及 $g(x)$，所得的結果，再用極限原理求其值．

例 1.　當 $x=1$ 時，求 $\frac{x^2-1}{x-1}$ 的值．

解　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2.$

例 2.　當 $x=2$ 時，求 $\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}$ 的值．

解　$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x}=\frac{2-2}{2}=0.$

例3. 當 $x\to 2$ 時,求 $\dfrac{x-2}{x(x-2)^2}$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x(x-2)^2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x(x-2)}=\dfrac{1}{0}=\infty.$

(2) 若 x 趨近於無限大,$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 得 $\dfrac{\infty}{\infty}$,則在未求值以前,先以 $f(x)$ 及 $g(x)$ 中所含 x 的最高次乘冪,同除 $f(x)$ 及 $g(x)$ 的各項,所得的結果,再用極限原理求其值.

例1. 當 $x\to\infty$ 時,求 $\dfrac{2x^2+3}{3x^2-x-1}$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{3x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3/x^2}{3-1/x-1/x^2}=\dfrac{2}{3}.$

例2. 當 $x\to\infty$ 時,求 $\dfrac{x+2}{x^2+1}$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1/x+2/x^2}{1+1/x^2}=0.$

例3. 當 $x\to\infty$ 時,求 $\dfrac{2x^2-x+5}{x+1}$ 的值.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x+5}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-1/x+5/x^2}{1/x+1/x^2}=\infty.$

習 題 十 八

1. 試以極限原理解釋 $\dfrac{0}{a}$ 的意義.

2. 當 $x\to 1$ 時,試求 $\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x^2+3x-1}$ 的值.

3. 當 $x=2$ 時，試求 $\dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-1)(x^2-3x+2)}$ 的值.

4. 當 $x=\infty$ 時，試求 $\dfrac{2x^2(x^2+1)}{x^4+x+1}$ 及 $\dfrac{x(x-2)}{x+1}$ 的值.

5. 第 17 節中相依方程式及矛盾方程式的解 試各以 $\dfrac{0}{0}$ 及 $\dfrac{a}{0}$ 分別解釋其意義，並按照解法比較之.

49. 分式方程式 凡方程式內含有分式，即所含分數的分母爲代數式的，稱爲分式方程式. 解分式方程式所應用的重要規律，大致與以前解整方程式所用的相同；惟須注意的，即各分式的分母均不得爲 0.

分式方程式的解法，爲先以諸分式的 L.C.M. 徧乘方程式的各項，而消去分式，即得整方程式，然後解之. 但於消去分式以前，須盡量合併若干個分式，或化爲帶分式，有時可得較簡的解法.

聯立方程式含有分式時，其解法與上同.

例 1. 解 $\dfrac{1}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{2}{(x-3)(x+2)}+\dfrac{3}{(x+1)(x+2)}=0.$

解 以各分母的 L.C.M. $(x+1)(x+2)(x-3)$ 分乘各項，得

$$x+2+2(x+1)+3(x-3)=0.$$

解上式，得 $$x=\frac{5}{6}.$$

例 2. 解 $\dfrac{ax+c}{x-p}+\dfrac{bx+d}{x-q}=a+b.$

解　先將方程式的左端化為帶分式，得

$$a+\frac{c+ap}{x-p}+b+\frac{d+bq}{x-q}=a+b,$$

即
$$\frac{c+ap}{x-p}+\frac{d+bq}{x-q}=0.$$

去分式，
$$(c+ap)(x-q)+(d+bq)(x-p)=0.$$

解上式，得
$$x=\frac{cq+pd+pq(a+b)}{c+d+ap+bq}.$$

例 3.　解 $\dfrac{x^2+7x-8}{x-1}+\dfrac{x^2+x+3}{x+2}+\dfrac{2x^2-x+7}{x+3}=4x.$

解　先將方程式的左端化為帶分式，得

$$x+8+x-1+\frac{5}{x+2}+2x-7+\frac{28}{x+3}=4x,$$

即
$$\frac{5}{x+2}+\frac{28}{x+3}=0.$$

去分式，
$$5(x+3)+28(x+2)=0.$$

解上式，得
$$x=-2\frac{5}{33}.$$

例 4.　解
$$\begin{cases}\dfrac{2}{x+2y}+2y+2z=3, & \text{(I)}\\[2ex] \dfrac{y+z}{2}-\dfrac{5}{z-3x}=\dfrac{7}{2}, & \text{(II)}\\[2ex] \dfrac{4}{z-3x}-\dfrac{2}{x+2y}=-1. & \text{(III)}\end{cases}$$

解　本題若按分式方程式的普通解法，運算較繁，現設

$$\frac{1}{x+2y}=X,\quad y+z=Y,\quad \frac{1}{z-3x}=Z,$$

則 (I), (II), (III) 變為

$$2X+2Y=3, \qquad \text{(IV)}$$

$$\frac{1}{2}Y-5Z=\frac{7}{2}, \qquad \text{(V)}$$

$$4Z-2X=-1. \qquad \text{(VI)}$$

解(IV)(V)及(VI),得 $X=-\frac{1}{2}$, $Y=2$ 及 $Z=-\frac{1}{2}$.

亦即

$$x+2y=-2, \qquad \text{(VII)}$$

$$y+z=2, \qquad \text{(VIII)}$$

$$z-3x=-2. \qquad \text{(IX)}$$

再解(VII),(VIII)及(IX),得 $x=2$, $y=-2$ 及 $z=4$.

習 題 十 九

解下列各方程式:

1. $\dfrac{30+6x}{x+1}+\dfrac{60+8x}{x+3}=14+\dfrac{48}{x+1}$.

2. $\dfrac{4}{x+3}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{5}{2x+3}-\dfrac{2\frac{1}{2}}{2x+1}$.

3. $\dfrac{x+1}{6x+1}+\dfrac{2x}{2-3x}=\dfrac{5}{2+9x-18x^2}$.

4. $\dfrac{x+a}{b(x+b)}+\dfrac{x+b}{a(x+a)}=\dfrac{a+b}{ab}$.

5. $\dfrac{x+5}{x+4}-\dfrac{x-6}{x-7}=\dfrac{x-4}{x-5}-\dfrac{x-15}{x-16}$.

6. $\dfrac{x+3}{x+5}-\dfrac{x+5}{x+9}=\dfrac{x+3}{x+5}-\dfrac{x+9}{x+8}$.

7. $\dfrac{5x-8}{x+\ }+\dfrac{6x-14}{x-7}-\dfrac{10x-8}{x-1}=\dfrac{x-8}{x-6}$.

8. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-b)(x-c)}+\dfrac{(x-b)^2}{(x-c)(x-a)}+\dfrac{(x-c)^2}{(x-a)(x-b)}=3$.

9. $\dfrac{4x-1\ }{x-\ }+\dfrac{1\ x-13}{\ x-5}=\dfrac{8x-\ 0}{2x-7}+\dfrac{5x-4}{x-1}$.

10. $\dfrac{b+c}{bc-x}+\dfrac{c+a}{ca-x}+\dfrac{a+b}{ab-x}=\dfrac{a+b+c}{x}$.

11. $\dfrac{x-a}{x-b}+\dfrac{x-b}{x-c}+\dfrac{x-c}{x-a}=3$.

12. $\begin{cases}\dfrac{6}{x}-\dfrac{7}{y}=2,\\[2ex]\dfrac{2}{x}-\dfrac{14}{y}=3.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\dfrac{1}{4x}+\dfrac{1}{3y}=2,\\[2ex]\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=1.\end{cases}$

14. $\begin{cases}\dfrac{xy}{x+y}=a,\\[2ex]\dfrac{yz}{y+z}=b,\\[2ex]\dfrac{zx}{z+x}=c.\end{cases}$

15. $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=36,\\[2ex]\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}-\dfrac{1}{z}=28,\\[2ex]\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3y}+\dfrac{1}{2z}=20.\end{cases}$

16. A,B 合作某事，$5\frac{1}{7}$ 日可成；A,C 合作，$4\frac{4}{5}$ 日可成。現此事經三人合作 2 日後，所餘部分，僅由 B 與 C 二人繼續合作，經 $1\frac{9}{11}$ 日始成，問三人獨作此事，各需幾日可成？

17. 某人自 A 地至 B 地，全程為 20 里，彼於步行全程的一段後，休息 30 分鐘，然後按原速度的 $\frac{7}{8}$ 繼續前進，迨到達 B 地後，共需 6 小時。若此人按原速度多

行4里後，再休息20分鐘．則僅需$5\frac{6}{7}$小時．即可畢其全程．問此人步行的原速度為何？又從最初休息處至A的距離若干？

18．有一水槽，能容水一石二斗．若將甲、乙、丙三管齊開，注水入槽，需時24分，即可注滿；若僅開甲管，則較僅開丙管，多需時20分．現知每1分鐘內，甲、乙二管同時注入的水量，較在同時間內丙管注入的水量多一升．問甲、乙、丙三管單開時，各需若干分鐘始滿？

第七章

開方

50. 乘冪及方根 n 個相同有理整式之積,如 $A^n=B$ 中的 B,稱爲 A 的 n 次乘冪.而 A 稱爲 B 的 n 次方根,常以 $A=\sqrt[n]{B}$ 表示;此處 n 爲正整數.n 爲 2 時,B 稱爲 A 的**二次乘冪或平方**,A 稱爲 B 的**二次方根或平方根**;n 爲 3 時,B 稱爲 A 的**三次乘冪或立方**,A 稱爲 B 的**三次方根或立方根**;餘類推.又在 $A^n=B$ 中,B 稱爲**完全乘冪**.非完全乘冪的方根,稱爲**不盡根**.

已知 A,而求 A 的 n 次乘冪,其法稱爲**乘方**.若已知 B,而求 B 的 n 次方根,稱爲**開方**.無論乘方或開方,均可適用二項式或多項式的展式,以求其結果. 現將直接求一式的平方根及立方根的算法,詳列於下;至於一般直接求一式的 n 次方根的算法,其理雖易明,其法則過於繁冗,故從略. 本章所論的方根,乃指方根的主值,以下倣此.

51. 單項式的方根 關於求單項式的方根,所應用的重要規律,爲

(一)乘法的可易律及可羣律.

(二)符號律: 一正數的奇次方根恆為正; 偶次方根為正或為負; 一負數的奇次方根恆為負.

(三)指數律: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$, $(a^n)^m=a^{mn}$.

由是得求單項式 P 的 n 次方根的法則為: 先以 n 除 P 中各文字因式的乘冪指數, 所得的結果, 再乘以數字的 n 次方根, 即得. 關於負數的奇次方根, 置負號於其前, 正數的奇次或偶次方根, 均置正號於其前.

例 1. 試求 $\sqrt[3]{-\frac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}$ 的結果.

解 $\sqrt[3]{-\frac{27x^6y^{15}}{125a^9z^{12}}}=-\frac{3x^2y^5}{5a^3z^4}$.

例 2. 試求 $\sqrt[6]{(x^4y^2-2x^3y^3+x^2y^4)^3}$ 的結果.

解 $\sqrt[6]{[x^2y^2(x^2-2xy+y^2)]^3}=\sqrt{x^2y^2(x-y)^2}=xy(x-y)$.

52. 多項式的平方根求法 求一多項式 P 的平方根, 除應用第 51 節求單項式的方根的法則而外, 尚需依據一重要恆等式, 為:

$$(a+b+c+\cdots\cdots)^2=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c$$
$$+\{2(a+b+c)+d\}d+\cdots\cdots$$

此式可由 $(a+b)^2=a^2+(2a+b)b$ 推廣以證明.

設一多項式 P 的平方根為 $a+b+c+\cdots\cdots$，則 P 當為 $(a+b+c+\cdots\cdots)^2$. 依上列恆等式，若 P 可化成其右端各項之和的形式，即可求得 $a,b,c,\cdots\cdots$ 等項，則 P 的平方根卽可隨之而定.

由是得求多項式平方根的法則，為:

(1) P 之首項的平方根為 a，即 P 之平方根的第一項.

(2) 自 P 減去 a^2，而得餘式 R_1，其首項為 $2ab$. 再以 $2a$ 除 $2ab$，卽得 b，是為 P 之平方根的第二項.

(3) 自 R_1 減去 $(2a+b)b$，而得餘式 R_2，其首項為 $2ac$. 再以 $2a$ 除 $2ac$，卽得 c，是為 P 之平方根的第三項.

(4) 繼續進行，直至所得餘式的次數低於 a 為止.

若最後餘式為 0，則 P 適為完全平方，其平方根則為 $a+b+c+\cdots\cdots$

若最後餘式不為 0，則 P 為非完全平方，而為

$$(a+b+c+\cdots\cdots)^2+R.$$

R 為一整式，其次數低於 a. 此時 P 的平方根為二次不盡根，仍可按上法繼續進行，直至所需的項數為止. 所得的結果，稱為差近平方根.

若 P 內含有分式時，亦可依上法求其平方根. 又在求 P 的平方根以前，須按 x 的降冪或升冪整列其順序，然後開方.

例 1. 求 $4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6$ 的平方根.

解

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^6+12x^5y+9x^4y^2-4x^3y^3-6x^2y^4+y^6\ (\ \underset{(a)}{2x^3}\underset{(b)}{+3x^2y}\underset{(c)}{-y^3} \\
 & 4x^6 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a^2 \\
\hline
2(2x^3)=4x^3 & 12x^5y+9x^4y^2 \\
3x^2y & \\
\hline
4x^3+3x^2y & 12x^5y+9x^4y^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2a+b)b \\
\hline
2(2x^3+3x^2y)=4x^3+6x^2y & -4x^3y^3-6x^2y^4+y^6 \\
-y^3 & \\
\hline
4x^3+6x^2y-y^3 & -4x^3y^3-6x^2y^4+y^6 \cdots\cdots \{2(a+b)+c\}c \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故所求得的平方根爲 $2x^3+3x^2y-y^3$.

例 2. 求 $16x^6+16x^7-4x^8-4x^9+x^{10}$ 的平方根.

解 原式 $=x^6(x^4-4x^3-4x^2+16x+16)$.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^4-4x^3-4x^2+16x+16\ (\ \underset{(a)}{x^2}\underset{(b)}{-2x}\underset{(c)}{-4} \\
 & x^4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a^2 \\
\hline
2(x^2)=2x^2 & -4x^3-4x^2 \\
-2x & \\
\hline
2x^2-2x & -4x^3+4x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2a+b)b \\
\hline
2(x^2-2x)=2x^2-4x & -8x^2+16x+16 \\
-4 & \\
\hline
2x^2-4x-4 & -8x^2+16x+16 \cdots\cdots \{2(a+b)+c\}c \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故所求的平方根爲 $x^3(x^2-2x-4)$.

53. 數的平方根求法　應用第 52 節求平方根法,可求任一正數的平方根.舉例詳明如下:

例 1.　求 4149369 的平方根.

解　先觀察所求的平方根當在 2000 與 3000 之間,即 a 應為 2000.按第 52 節的法則,即可推求如下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4149369\,(\,2000+30+7 \\
 & \qquad\quad (a)\quad (b)\quad (c) \\
 & 4000000 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a^2 \\
\hline
2(2000)=4000 & 149369 \\
30 & \\
\hline
4030 & 120900 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2a+b)b \\
\hline
2(2030)=4060 & 28469 \\
7 & \\
\hline
4067 & 28469 \cdots\cdots\cdots\cdots 2\{(a+b)+c\}c \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故所求的平方根為 $2000+30+7=2037$.

例 2.　求 2313.61 的平方根.

解　先觀察所求的平方根當在 40 與 50 之間,即 a 應為 40.按第 52 節的法則,即可推求於下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2313.61\ (40+8+.1 \\
 & \qquad\qquad (a)\ (b)\ (c) \\
 & 1600 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ a^2 \\
\hline
2(40)=80 & 713.61 \\
8 & \\
\hline
88 & 704 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2a+b)b \\
\hline
2(48)=96 & 9.61 \\
.1 & \\
\hline
96.1 & 9.61 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \{2(a+b)+c\}c \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

故所求的平方根爲　$40+8+.1=48.1$.

例 3.　求 .01264 的平方根至小數第四位止.

解　　先觀察所求的平方根當在 .1 與 .2 之間;卽 a 應爲 .1.按第 52 節的法則,卽可推求如下:

$$
\begin{array}{r|l}
 & .01264\ (.1+.01+.002+.0004 \\
 & \qquad\qquad (a)\quad (b)\quad (c)\quad (d) \\
 & .01 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ a^2 \\
\hline
2(.1)=.2 & .00264 \\
.01 & \\
\hline
.21 & .0021 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2a+b)b \\
\hline
2(.11)=.22 & .00054 \\
.002 & \\
\hline
.222 & .000444 \cdots\cdots\cdots\cdots\ \{2(a+b)+c\}c \\
\hline
2(.112)=.224 & .000096 \\
.0004 & \\
\hline
.2244 & .00008976 \cdots\cdots\cdots\ \{2(a+b+c)+d\}d \\
\hline
 & .00000624
\end{array}
$$

故所求的平方根爲　$.1+.01+.002+.0004=.1124$.

54. 多項式的立方根求法　求一多項式 P 的立方根,除應用第51節求單項式之方根的法則而外,尚需依據一重要恆等式,爲:

$$
\begin{aligned}
(a+b+c+\cdots\cdots)^3 = a^3 &+ (3a^2+3ab+b^2)b \\
&+ \{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c \\
&+ \{3(a+b+c)^2+3(a+b+c)d+d^2\}d \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

此式可由 $(a+b)^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b$ 推廣以證明.

設一多項式 P 的立方根爲 $a+b+c+\cdots\cdots$,則 P 當爲 $(a+b+c+\cdots\cdots)^3$,依上列恆等式,若 P 可化成其右端各項之和的形式,即可求得 $a,b,c,\cdots\cdots$ 等項,則 P 的立方根即可隨之確定.

由是得求多項式立方根的法則,爲:

(1) P 之首項的立方根爲 a,即 P 之立方根的第一項.

(2) 自 P 減去 a^3,而得餘式 R_1,其首項爲 $3a^2b$,再以 $3a^2$ 除 $3a^2b$,即得 b,是爲 P 之立方根的第二項.

(3) 自 R_1 減去 $(3a^2+3ab+b^2)b$ 而得餘式 R_2,其首項爲 $3a^2c$,再以 $3a^2$ 除 $3a^2c$,即得 c,是爲 P 之立方根的第三項.

(4) 繼續進行,直至所得餘式的次數低於 a^2 爲止.

若最後餘式爲 0 則 P 適爲完全立方,其立方根則爲 $a+b$

$+c+\cdots\cdots$.

若最後餘式不為 0，即 P 為非完全立方，而為

$$(a+b+c+\cdots\cdots)^3+R.$$

R 為一整式，其次數低於 a^2. 此時 P 的立方根為三次不盡根，仍可用上法繼續進行，直至所需的項數為止. 所得的結果，稱為差近立方根.

若 P 內含有分式時，亦可依上法求其立方根. 又在求 P 的立方根以前，須按 x 的降冪或升冪整列其順序，然後開方.

例 求 $27x^6-27x^5-99x^4+71x^3+132x^2-48x-64$ 的立方根.

解

$$\begin{array}{r|l}
 & 27x^6-27x^5-99x^4+71x^3+132x^2-48x-64\;(3x^2-x-4 \\
 & \hphantom{27x^6-27x^5-99x^4+71x^3+132x^2-48x-64\;(}(a)\;\;(b)\;(c) \\
 & 27x^6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a^3 \\
\hline
3(3x^2)^2=27x^4 & -27x^5-99x^4+71x^3 \\
3(3x^2)(-x)=-9x^3 & \\
(-x)^2=x^2 & \\
\hline
27x^4-9x^3+x^2 & -27x^5+9x^4-x^3\cdots\cdots\cdots\cdots(3a^2+3ab+b^2)b \\
\hline
3(3x^2-x)^2=27x^4-18x^3+3x^2 & -108x^4+72x^3+132x^2-48x-64 \\
3(3x^2-x)(-4)=-36x^2+12x & \\
(-4)^2=16 & \\
\hline
27x^4-18x^3-33x^2+12x+16 & -108x^4+72x^3+132x^2-48x-64\cdots\cdots \\
 & \cdots\cdots\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c \\
\hline
 & 0
\end{array}$$

故所求的立方根為 $3x^2-x-4$.

55. 數的立方根求法　應用第 54 節求立方根的法則，可求任一數的立方根．舉例詳明於下：

例 1.　求 60236.288 的立方根．

解　先觀察所求立方根當在 30 與 40 之間，卽 a 應為 30．按第 54 節的法則，卽可推求如下：

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 60236.288 & (\ 30 + 9 + .2 \\
 & & \quad (a)\ (b)\ (c) \\
 & 27000 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ a^3 \\
3(30)^2 = 2700 & 33236 & \\
3(30)9 = \ \ 810 & & \\
(9)^2 = \ \ \ 81 & & \\
\hline
3591 & 32319 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3a^2+3ab+b^2)b \\
3(39)^2 = 4563 & 917.288 & \\
3(39)(.2) = 23.4 & & \\
(.2)^2 = \ \ .04 & & \\
\hline
4586.44 & 917.288 & \cdots\cdots\cdots\ [3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2]c \\
 & 0 &
\end{array}
$$

故所求的立方根為 39.2．

例 2.　求 2.7 8 818 8 的立方根．

解　先觀察所求的立方根當在 1 與 2 之間，卽 a 應為 1．按第 54 節的法則，卽可推求如下：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2.718281828\,(1+.3+.09+.005+.0006 \\
 & \qquad\qquad\quad (a)\ \ (b)\ \ (c)\ \ (d)\ \ \ (e) \\
 & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots a^3 \\ \hline
3(1)^2=3 & 1.718281828 \\
3(1)(.3)=.9 & \\
(.3)^2=.09 & \\ \hline
3.99 & 1.197 \cdots\cdots\cdots\cdots (3a^2+3ab+b^2)b \\ \hline
3(1.3)^2=5.07 & .521281828 \\
3(1.3)(.09)=.351 & \\
(.09)^2=.0081 & \\ \hline
5.4291 & .488619 \cdots\cdots \{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c \\ \hline
3(1.39)^2=5.7963 & .032662828 \\
3(1.39)(.005)=.02085 & \\
(.005)^2=.000025 & \\ \hline
5.817175 & .029085875 \cdots\cdots \{(a+b+c)^2 \\
 & \qquad +3(a+b+c)d+d^2\}d \\ \hline
3(1.395)^2=5.838075 & .003576953 \\
3(1.395)(.0006)=.002511 & \\
(.0006)^2=.00000036 & \\ \hline
5.84058636 & .003504351816 \cdots\cdots \{3(a+b+c+d)^2 \\
 & \qquad +3(a+b+c+d)e+e^2\}e \\ \hline
 & .000072601184
\end{array}
$$

故所求立方根的差近值爲 1.3956.

習　題　二　十

求下列各式的平方根.

1. $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x+2x+1$.

2. $-8a^3+\frac{35}{9}+a^4-7a-\frac{67}{12}a^2$.

3. $\frac{9a^2}{x^2}-\frac{6a}{5x}+\frac{101}{25}-\frac{4x}{15a}+\frac{4x^2}{9a^2}$.

4. $25x^4-30ax^3+49a^2x^2-24a^3x+16a^4$.

5. $1-4x+10x^2-20x^3+25x^4-24x^5+16x^6$.

求下列各式的立方根:

6. $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.

7. $27x^6-54x^5a+117x^4a^2-116x^3a^3+117x^2a^4-54xa^5+27a^6$.

8. $24x^4y^2+96x^2y^4-6x^5y+x^6-96xy^5+64y^6-56x^3y^3$.

9. $\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{3}+2x-7+\frac{18}{x}-\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x^3}$.

10. 求 $1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$ 的六次方根.

提示:先求其平方根,就所得的結果,再求其立方根.

11. 求 a^4-3x^3 的平方根至第四項止.

12. 求 $27x^6-27x^5-18x^4$ 的立方根至第三項止.

13. 求 55824,4149339 及 .00820356 的平方根.

14. 求 57.6 及 293 的平方根各至第三位小數止.

15. 求 614125 及 1672[illegible].151 的立方根.

16. 求 30 及 250 的立方根各至第二位小數止.

17. 求證:$(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ 爲完全平方.

18. 若 $x^4+6x^3+13x^2+ax+b$ 爲完全平方,試決定 a 及 b 的值.

提示:實行開方,令最後的餘式爲 0 卽得.

19. 設 $p^2s=r^2$ 及 $p^3-4pq+8r=0$，求證：$x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 為完全平方．

20. 已知 $4x^4-8x^3y+4xy^3+y^4$ 為完全平方，試按未定係數法求其平方根．

提示：設 $4x^4-8x^3y+4xy^3+y^4=(2x^2+pxy+qy^2)^2$．

第八章

根式運算

56. 零指數負指數及分數指數的意義 以前各章所論一式中所含文字或數字的指數均爲正整數. 惟指數爲 0, 或爲負數, 或爲分數, 其意義如何, 分別敍述於下:

〔一〕指數爲 0: $a^0=1$.

因
$$a^0\cdot a^m=a^{0+m}=a^m,$$

故得
$$a^0=\frac{a^m}{a^m}=1.$$

〔二〕負指數: $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$.

因
$$a^{-m}\cdot a^m=a^{-m+m}=a^0=1,$$

故得
$$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$$

〔三〕分數指數: $a^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{a}$, 及 $a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}$.

因 $$(\sqrt[q]{a})^q=a=a^{\frac{q}{q}}=a^{\frac{1}{q}\cdot q}=(a^{\frac{1}{q}})^q,$$

即 $$(\sqrt[q]{a})^q=(a^{\frac{1}{q}})^q;$$

故得 $$\sqrt[q]{a}=a^{\frac{1}{q}}.$$

又 $$\sqrt[q]{a^p}=(a^p)^{\frac{1}{q}}=a^{p\cdot\frac{1}{q}}=(a^{\frac{1}{q}})^p=a^{\frac{p}{q}},$$

故得 $$a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{a^p}.$$

如 $(x+y)^0=1$, $2x^{-1}=\frac{2}{x}$, $y^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{y^2}}$.

57. 指數定律

〔一〕 對於 m 及 n 爲任何有理值，皆可使

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

的定律成立。

1. 設 m 及 n 俱爲整數，此定律易知其能成立。

2. 設 $m=\frac{p}{q}$ 及 $n=\frac{r}{s}$，而 p,q,r,s 俱爲正整數；則

$$a^m\cdot a^n=a^{\frac{p}{q}}\cdot a^{\frac{r}{s}}=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[s]{a^r}=\sqrt[qs]{a^{ps}}\cdot\sqrt[qs]{a^{qr}}$$

$$=\sqrt[qs]{a^{ps+qr}}=a^{\frac{ps+qr}{qs}}=a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}=a^{m+n}.$$

3. 再設 $m=-\frac{p}{q}$ 及 $n=-\frac{r}{s}$ 則

$$a^m\cdot a^n=a^{-\frac{p}{q}}\cdot a^{-\frac{r}{s}}=1\Big/a^{\frac{p}{q}}a^{\frac{r}{s}}=a^{-\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)}$$

$$=a^{-\frac{p}{q}+\left(-\frac{r}{s}\right)}=a^{m+n}.$$

依同理,設 $m=-\frac{p}{q}$ 及 $n=\frac{r}{s}$,或 $m=\frac{p}{q}$ 及 $n=-\frac{r}{s}$,皆可證明本定律為眞。

〔二〕 對於 m 及 n 為任何有理值,皆可使

$$(a^m)^n=a^{mn}$$

的定律成立。

1. 設 n 為整數,此定律易知其能成立。

2. 設 $n=\frac{p}{q}$,而 p,q 俱為正整數,則

$$(a^m)^n=(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(a^m)^p}=\sqrt[q]{a^{pm}}=a^{\frac{pm}{q}}$$

$$=a^{m\cdot\frac{p}{q}}=a^{mn}.$$

3. 再設 $n=-r$,而 r 為任何正有理數,則

$$(a^m)^n=(a^m)^{-r}=\frac{1}{(a^m)^r}=\frac{1}{a^{mr}}=a^{-mr}$$

$$=a^{m(-r)}=a^{mn}.$$

〔三〕 對於 n 爲任何有理數，皆可使

$$(ab)^n=a^nb^n$$

的定律成立.

1. 設 n 爲整數，此定律易知其能成立。

2. 設 $n=\frac{p}{q}$，而 p,q 俱爲正整數，則

$$(ab)^n=(ab)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{(ab)^p}=\sqrt[q]{a^pb^p}$$

$$=\sqrt[q]{a^p}\cdot\sqrt[q]{b^p}=a^{\frac{p}{q}}\cdot b^{\frac{p}{q}}=a^nb^n.$$

3. 設 $n=-r$，而 r 爲任何正有理數，則

$$(ab)^n=(ab)^{-r}=\frac{1}{(ab)^r}=\frac{1}{a^r}\cdot\frac{1}{b^r}$$

$$=a^{-r}b^{-r}=a^nb^n.$$

例 1. 化簡 $x^{-2}\sqrt{y^{-3}}\div y^{-2}\sqrt{x^{-3}}$.

解 原式 $=x^{-2}y^{-\frac{3}{2}}\div y^{-2}x^{-\frac{3}{2}}=x^{-2}y^{-\frac{3}{2}}\cdot y^2x^{\frac{3}{2}}=x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$

$$=y^{\frac{1}{2}}\div x^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{xy}}{x}.$$

例 2. 化簡 $\sqrt[3]{a^{-1}\sqrt[4]{a^3}}$.

解 原式 $=(a^{-1}\cdot a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}=(a^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{12}}=\frac{1}{\sqrt[12]{a}}$.

例 3. 求 $x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$ 與 $x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$ 的積.

解

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^{\frac{1}{2}} & +x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} & +y^{\frac{1}{2}} & \\
 & x^{\frac{1}{2}} & -x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} & +y^{\frac{1}{2}} & \\
\hline
x & +x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} & +x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & & \\
 & -x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} & -x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & -x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} & \\
 & & +x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & +x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{3}{4}} & +y \\
\hline
x & & +x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} & & +y
\end{array}
$$

故所求的積為 $x+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$。

例 4.　求以 $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}$ 除 a^2-b^3 所得的商。

解

$$
\begin{array}{l}
a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{2}}\,\big)\,a^2-b^3\,\big(\,a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^2+b^{\frac{5}{2}} \\
\qquad\quad \underline{a^2-a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}} \\
\qquad\qquad a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}} \\
\qquad\qquad \underline{a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{4}{3}}b} \\
\qquad\qquad\qquad a^{\frac{4}{3}}b \\
\qquad\qquad\qquad \underline{a^{\frac{4}{3}}b-ab^{\frac{3}{2}}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad ab^{\frac{3}{2}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{ab^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{2}{3}}b^2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a^{\frac{2}{3}}b^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{a^{\frac{2}{3}}b^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}-b^3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{2}}-b^3} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

故所求的商為 $a^{\frac{5}{3}}+a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{2}}+ab+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^{2}+b^{\frac{5}{2}}$.

凡指數式化簡時，先將有根號的，化為分數指數．有分式的，其分母所含文字的指數，改以負指數表示．然後按指數定律化簡．

習題二十一

1. 試按指數定律 $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$，求證 $a^p\div a^q=a^{p-q}$，此處 p 及 q 為任何有理值．

2. 求證：$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$.

3. 求證：$\sqrt[n]{abc\cdots\cdots}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\cdots\cdots$.

4. 求證：$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$.

5. 求以正指數表示下列各式：

(1) $3a^{-\frac{2}{3}}$，　(2) $\frac{1}{5x^{-\frac{1}{2}}}$，　(3) $\frac{1}{16\sqrt[5]{x^{-2}}}$，

(4) $\frac{2a^{-3}x^{2}}{5y^{2}c^{-4}}$，　(5) $\sqrt[4]{a^{-3}}+\sqrt[5]{a^{-1}}$，　(6) $(1/\sqrt[4]{x^{-6}})^{-4}$.

6. 求以根號及正指數表示下列各式：

(1) $x^{-\frac{3}{2}}+2a^{-\frac{1}{2}}$.　　(2) $7a^{-\frac{1}{2}}\times 2a^{-1}$.

(3) $\frac{x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}}$.　　(4) $\sqrt[5]{a^{-4}}+\sqrt[3]{a^{-12}}$.

(5) $\sqrt[24]{x}\times\sqrt[4]{x^{7}}$.　　(6) $\sqrt[4]{a^{3}}\cdot\sqrt[8]{a^{5}}\div\sqrt{a^{-1}}$.

7. 化簡下列各式並各以正指數表示:

(1) $\left(\sqrt[5]{\frac{a^{\frac{1}{2}}x^{-2}}{x^{\frac{1}{2}}a^{-2}}}\times\sqrt[3]{\frac{a\sqrt{x}}{x\sqrt{a}}}\right)^{-4}$.

(2) $(a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[3]{x})^{-3}\times\sqrt{x^{-2}\sqrt{a^{-6}}}$.

(3) $\left(\frac{a^{-2}b}{a^{2}b^{-4}}\right)^{-3}\div\left(\frac{ab^{-1}}{a^{-2}b^{2}}\right)^{5}$.

(4) $a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}\sqrt{ax^{-\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x}}$.

(5) $\sqrt[4]{(a+b)^{6}}\times(a^{2}-b^{2})^{-\frac{1}{2}}$.

(6) $\frac{2^{n+1}}{(2^{n})^{n-1}}\div\frac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$.

8. 求 $2x^{\frac{1}{3}}-5+8x^{-\frac{1}{3}}$ 與 $4x^{\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}$ 的積.

9. 求 $e^{x}+2e^{-x}-7$ 與 $5-3e^{-x}+2e^{x}$ 的積.

10. 求以 $2a^{-1}-1$ 除 $10a^{-3}+$[illegible]$a^{-2}+$[illegible]$a^{-1}-6$ 所得的商.

11. 求以 $b^{\frac{1}{3}}-2b^{-\frac{1}{3}}$ 除 $5b^{\frac{2}{3}}-6b^{\frac{1}{3}}-$[illegible]$b^{-\frac{2}{3}}-$[illegible]$b^{-\frac{1}{3}}-5$ 所得的商.

12. 求 $x^{2}-4x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+$[illegible]$xy^{-1}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-2x+y$ 的平方根.

58. 根式及其化簡　凡求一式的 n 次方根,而僅以方根的符號表示的,如 $\sqrt[n]{A}$ 或 $B\sqrt[n]{A}$,均稱為根式,A 稱為被開方式;n 稱為根指數.在 $B\sqrt[n]{A}$ 中,B 稱為根式的係數,而 $\sqrt[n]{A}$ 的係數

則爲1. B 及 A 俱爲有理式，或 A 的諸因式中，均不能直接求 n 次根的，則 $B\sqrt[n]{A}$ 及 $\sqrt[n]{A}$ 統稱爲簡單根式. A 及 B 有時亦可以數表示. 如 $5\sqrt[3]{24}$ 非簡單根式，因 $5\sqrt[3]{24}=5\sqrt[3]{8\times 3}=5\sqrt[3]{2^3\times 3}=10\sqrt[3]{3}$，此式始爲簡單根式；10 爲係數，3 爲根指數，而 3 爲被開方數. 本節所論，僅變根式的形，使化爲簡易，俾便於計算.

根式運算所應用的重要公式，爲：

(一) $\sqrt[n]{A^m}=\sqrt[pn]{A^{pm}}$.

(二) $\sqrt[n]{AB\cdots\cdots}=\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B}\cdots\cdots$.

(三) $\sqrt[n]{\dfrac{A}{B}}=\dfrac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$.

(四) $(\sqrt[n]{A})^m=\sqrt[n]{A^m}$.

(五) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[mn]{A}$.

以上五公式，在 57 節內已有證明. 由是可得根式化簡的法則，爲：

1. 若被開方式爲一完全乘冪，其指數又與根指數有公因數，則可自乘冪指數與根指數，約去其公因數.

2. 若被開方式的任一因式，爲一完全乘冪，且其指數可以根指數整除時，則以根指數除此因式的乘冪指數，所得的商爲其指數，並將該因式移置於根號的外.

3. 若被開方式爲一分式，可以最簡的式同乘分子分母，在

使分母的乘冪指數適與根指數相等；如是，分母的根號，可以消去，而分子的根號，則仍存在．

例 1. 化簡 $\sqrt[8]{2^{10}a^{2}b^{4}c^{10}}$.

解 $\sqrt[8]{2^{10}a^{2}b^{4}c^{10}}=\sqrt[8]{2^{10}a^{2}b^{4}c^{10}}=\sqrt[8]{(2^{5}ab^{2}c^{5})^{2}}=\sqrt[4]{2^{5}ab^{2}c^{5}}$

$$=\sqrt[4]{2^{4}c^{4}\cdot 2ab^{2}c}=2c\sqrt[4]{2ab^{2}c}.$$

例 2. 化簡 $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}$.

解 $\sqrt[3]{\dfrac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}}=\dfrac{\sqrt[3]{c^{n}\cdot c^{3}}}{\sqrt[3]{a^{3n}}\cdot\sqrt[3]{b^{3n}\cdot b^{2}}}=\dfrac{c\sqrt[3]{c^{n}}}{a^{n}b^{n}\sqrt[3]{b^{2}}}$

$$=\frac{c}{a^{n}b^{n}}\cdot\frac{\sqrt[3]{c^{n}}}{\sqrt[3]{b^{2}}}\cdot\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{c}{a^{n}b^{n}}\cdot\frac{\sqrt[3]{bc^{n}}}{\sqrt[3]{b^{3}}}=\frac{c\sqrt[3]{bc^{n}}}{a^{n}b^{n+1}}.$$

此外尚有一種根式的化法，卽將根式的係數移置於根號的內．其法爲將係數的指數乘以根指數，所得的積，爲此係數的指數，卽可移置於根號內．

例 移置 $2a\sqrt[5]{b}$ 的係數 $2a$ 於根號的內．

解 $2a\sqrt[5]{b}=\sqrt[5]{(2a)^{5}b}=\sqrt[5]{32a^{5}b}.$

59. 同類根式與同次根式 諸根式經化爲最簡形後，其根指數與根號內的式均各相同時，稱爲同類根式；若諸根式僅有根指數相同時，則稱爲同次根式．

同類根式，僅可化簡其形式而後判定，原爲不同類根式的，卻不能化爲同類根式．

例　試定 $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{192}$ 及 $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$ 是否為同類根式，並辨別其大小.

解　$\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\cdot 8}=\sqrt[3]{3\cdot 2^3}=2\sqrt[3]{3}$;

$\sqrt[3]{192}=\sqrt[3]{3\cdot 64}=\sqrt[3]{3\cdot 4^3}=4\sqrt[3]{3}$;

$\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=\sqrt[3]{\frac{24}{27}}=\sqrt[3]{\frac{2^3\cdot 3}{3^3}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.

故知 $\sqrt[3]{24}$, $\sqrt[3]{192}$ 及 $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$ 為同類根式，且 $\sqrt[3]{192}>\sqrt[3]{24}>\sqrt[3]{\frac{8}{9}}$.

同次根式，可由諸不同根指數的根式，按 $A^{\frac{m}{n}}=A^{\frac{pm}{pn}}$ 的公式變形而得．其法則，為：先求出諸根式的根指數的最小公倍數，以此數為諸根式的公共根指數，並以與原根指數所增的倍數，分乘各根式內的式的乘冪指數，即得.

例　化 $3a\sqrt[3]{x}$, $-2x\sqrt[4]{a^3}$ 及 $\sqrt[6]{a^2x^3}$ 為同次根式.

解　先求得各根式的根指數的 L.C.M. 為 12.

$3a\sqrt[3]{x}=3\sqrt[3]{a^3x}=3\sqrt[12]{(a^3x)^4}=3\sqrt[12]{a^{12}x^4}$;

$-2x\sqrt[4]{a^3}=-2\sqrt[4]{a^3x^4}=-2\sqrt[12]{(a^3x^4)^3}=-2\sqrt[12]{a^9x^{12}}$;

$\sqrt[6]{a^2x^3}=\sqrt[12]{(a^2x^3)^2}=\sqrt[12]{a^4x^6}$.

60.　根式加法與減法　諸根式求和或差時，其運算的法則，為：先將諸根式化為最簡形式，然後集合其同類根式，合併其係數；其不同類根式，則寫成代數和.

例 1.　化簡 $\sqrt{[illegible]}-\sqrt{4}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{7\frac{1}{3}}$.

解　$\sqrt{50}-\sqrt{4\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{\frac{1}{9}}=5\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}-2\sqrt[3]{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$

$$=\frac{7}{2}\sqrt{2}-\frac{5}{3}\sqrt[3]{3}$$

例 2.　化簡 $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt[4]{a^4c^2}-\sqrt[6]{b^6c^3}$.

解　$\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt[4]{a^4c^2}-\sqrt[6]{b^6c^3}=(a+b)\sqrt{c}-a\sqrt[4]{c^2}-b\sqrt[6]{c^3}$

$$=(a+b)\sqrt{c}-a\sqrt{c}-b\sqrt{c}=0.$$

讀者於此須應注意,兩個不為0的不同類根式,絕不能集合而成一個根式.

若$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{x+y}$,將兩端平方,得

$$x+y+2\sqrt{xy}=x+y.$$

欲此等式合理,須$2\sqrt{xy}=0$,即$x=0$及$y=0$.在普通情形下,$x\neq0$及$y\neq0$,則上列等式為不合理,即不能成立.故兩個不同類根式相加或相減,僅能以代數和表示.

61. 根式乘法　諸根式相乘,除應用第58節的公式而外,其算法與普通有理整式相同.惟需注意的,即任二個單項根式,須先化為同次根式,然後始可求其積.

例 1.　求 $\frac{2}{3}\sqrt[4]{8}\times\sqrt[3]{2}$ 的積.

解　$\frac{2}{3}\sqrt[4]{8}\times\sqrt[3]{2}=\frac{2}{3}\sqrt[12]{8^3}\cdot\sqrt[12]{2^4}=\frac{2}{3}\sqrt[12]{8^32^4}=\frac{2}{3}\sqrt[12]{2^92^4}$

$$=\frac{2}{3}\cdot2\cdot\sqrt[12]{2}=\frac{4}{3}\sqrt[12]{2}.$$

例 2.　求 $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ 與 $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ 的積.

解 $(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})=a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$

$-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b=a+b.$

例 3. 求 $\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{x^2-2y^2}$ 的平方.

解 $(\sqrt{x^2+2y^2}+\sqrt{x^2-2y^2})^2=x^2+2y^2+x^2-2y^2+2\sqrt{x^4-4y^4}$

$=2(x^2+\sqrt{x^4-4y^4}).$

二個二項二次根式,僅其連接的符號相異時,稱爲**共軛根式**.如$\sqrt{a}+\sqrt{b}$與$\sqrt{a}-\sqrt{b}$,或$-x+\sqrt{y}$與$-x-\sqrt{y}$,俱稱爲共軛根式.由乘法結果,得定理如下:

二共軛根式的積,爲有理式.

由是,欲化一個二項式爲有理式,只須以其共軛根式乘之,即得.按此理,凡任一多項二次根式,亦可以其共軛根式迭乘之,而化爲有理式.

例 化 $2\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$ 爲有理式.

解 取其共軛根式 $2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ 乘之,得

$$(2\sqrt{3}+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2=12+5+4\sqrt{15}-6=11+4\sqrt{15}.$$

再取其共軛根式 $4\sqrt{15}-11$ 乘之,得

$$(4\sqrt{15})^2-11^2=240-121=119.$$

上例中所乘的因式 $2\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}$ 及 $4\sqrt{15}-11$,統稱爲 $2\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6}$ 的有理化因式.凡二根式或數根式相乘爲

積爲有理式，則此二根式或諸根式，互稱爲有理化因式。一般的說，欲求任一二項根式的有理化因式，須根據第 24 節乘法公式：

1. $x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots+y^{n-1})$；

2. $x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+x^{n-3}y^2-\cdots\cdots-y^{n-1})$；

3. $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\cdots\cdots+y^{n-1})$.

若已知根式的形式爲 $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$ 的，可用公式 1 求其有理化因式；若根式爲 $\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{b}$ 的，可用公式 2 或 3 求其有理化因式。

例 1.　求 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ 的有理化因式.

解　設 $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=x$，$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}=y$，則 x^6，y^6 俱爲有理式.

用公式 2，　$x^6-y^6=(x+y)(x^5-x^4y+x^3y^2-x^2y^3+xy^4-y^5)$.

故所求的有理化因式爲

$$3^{\frac{5}{2}}-3^2\cdot2^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{3}{2}}2^{\frac{2}{3}}-3\cdot2+3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{4}{3}}-2^{\frac{5}{3}}.$$

以此式與 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ 相乘的積爲 $27-4=23$.

例 2.　求 $\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}$ 的有理化因式.

解　設 $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}=x$，$\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}=y$，則 x^4，y^4 俱爲有理式.

用公式 3，　$x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$，

故所求的有理化因式爲

$$3^{\frac{3}{2}}+3\cdot2^{\frac{1}{4}}+3^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{3}{4}}.$$

以此式與 $\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}$ 相乘的積爲 $9-2=7$.

62. **根式除法**　二根式相除時，可寫成分式的形式，其運算的法則，爲：先使分母化爲有理式，分母爲單項的，分子分母同乘以最簡的根式；分母爲多項的，分子分母同乘以分母的有理化因式，然後化簡分子，即得。

例 1.　求 $\frac{3\sqrt{48}}{5\sqrt{112}}\div\frac{6\sqrt{84}}{\sqrt{392}}$ 的值。

解　$\frac{3\sqrt{48}}{5\sqrt{112}}\times\frac{\sqrt{392}}{6\sqrt{84}}=\frac{3\sqrt{48\times392}}{30\sqrt{112\times84}}=\frac{1}{10}\sqrt{\frac{48\times392}{112\times84}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$

例 2.　求 $\frac{2\sqrt{15}+8}{\sqrt{15}+5}\div\frac{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$ 的值。

解　$\frac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}}\div\frac{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}}\times\frac{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}$

$$=\frac{6\sqrt{5}-10\sqrt{3}}{-6\sqrt{5}+10\sqrt{3}}=-1.$$

例 3.　化 $\frac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ 的分母爲有理式。

解　原式 $=\frac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}\cdot\frac{2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$

$$=\frac{7a+b+8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}.$$

例 4.　求 $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{1}-\sqrt{5}}$ 的值。

解 $$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

$$=\frac{18+2\sqrt{30}+2\sqrt{15}+2\sqrt{50}}{13+2\sqrt{30}-5}=\frac{9+\sqrt{30}+\sqrt{15}+5\sqrt{2}}{\sqrt{30}+4}$$

$$=\frac{9+\sqrt{30}+\sqrt{15}+5\sqrt{2}}{\sqrt{30}+4}\cdot\frac{\sqrt{30}-4}{\sqrt{30}-4}=\frac{-6+5\sqrt{30}+6\sqrt{15}-5\sqrt{2}}{14}$$

63. 二項二次不盡根式的平方根 在根式內被開方的式爲有理式，而非完全乘冪，則此根式爲不盡根式，或稱無理式。一不盡根式不能變爲一有理式與另一不盡根式的代數和。因設 $\sqrt{n}$ 及 $\sqrt{m}$ 俱爲不盡根式，而 a 爲有理式，若有下列關係，即：

$$\sqrt{n}=a+\sqrt{m},$$

兩端平方，得 $$n=a^2+m+2a\sqrt{m}.$$

$$\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a}.$$

式的右端爲有理式，其左端爲不盡根式，此等式絕不合理，即不能成立。

由是而得定理如下：

設 $\sqrt{b}$ 及 $\sqrt{d}$ 俱爲不盡根式，而 a 及 c 俱爲有理式 若 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$，則 $a=c$ 及 $b=d$.

因在已知條件 $a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$ 中，若 $a=c+m$，則

$$c+m+\sqrt{b}=c+\sqrt{d},\quad 即\ \sqrt{d}=m+\sqrt{b},$$

此爲不合理。

故必 $a=c$，$b=d$，則上列等式始可成立。

由是卽可推得二項不盡根式 $a+2\sqrt{b}$ 或 $a-2\sqrt{b}$ 的平方根的法則如下：

設 $\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$，兩端平方，得

$$a\pm2\sqrt{b}=x+y\pm2\sqrt{xy}.$$

$$\therefore\ x+y=a;\ \text{及}\ xy=b.$$

此卽由 $a\pm2\sqrt{b}$ 求得二有理式 x 及 y，使合於

$$x+y=a\ \text{及}\ xy=b$$

的關係，則 $a\pm2\sqrt{b}$ 的平方根，卽分別爲 $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$.

用此法求 $a\pm2\sqrt{b}$ 的平方根時，須 a^2-4b 爲完全平方式，其結果始仍爲二項不盡根式．又求 x 及 y 可直接用觀察法求得，而不必解方程式 $x+y=a$ 及 $xy=b$.

例 1. 求 $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$ 的平方根.

解 $2(a+\sqrt{a^2-b^2})=2a+2\sqrt{a^2-b^2}=2a+2\sqrt{(a+b)(a-b)}$

$=a+b+2\sqrt{(a+b)(a-b)}+a-b$

$=(\sqrt{a+b})^2+2\sqrt{a+b}\sqrt{a-b}+(\sqrt{a-b})^2=(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2$，

故得 $2(a+\sqrt{a^2-b^2})$ 的平方根爲 $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$.

例 2. 求 $16-6\sqrt{7}$ 的平方根.

解 $16-6\sqrt{7}=16-\sqrt{36\cdot7}=16-2\sqrt{63}\ldots\ \dfrac{2\pm2\sqrt{1\cdots}}{2}$

$$=\frac{1}{2}(32-2\sqrt{175})=\frac{1}{2}(32-2\sqrt{25\times7})$$

$$=\frac{1}{2}(25-2\sqrt{25\cdot7}+7)=\frac{1}{2}(\sqrt{25}-\sqrt{7})^2.$$

故得 $16-5\sqrt{7}$ 的平方根爲 $\dfrac{\sqrt{25}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}(5\sqrt{2}-\sqrt{14})$.

習題二十二

1. 化簡下列各式:

(1) $\sqrt[3]{-108x^4y^3}$.　　(2) $\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6d^{10}}$.

(3) $\sqrt[4]{a^4b^4-2a^3b^5+a^2b^6}$.　　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{a^3+b^3}{32ab^4}}$.

(5) $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$.　　(6) $\sqrt[5]{\dfrac{9}{16}}$.

(7) $\sqrt[n]{a^{2n+1}b^{n+2}c^{4n+3}}$.　　(8) $\dfrac{a}{b}\sqrt[p]{\dfrac{b^{p+1}}{a^{p-1}}}$.

2. 試決定下列各組根式是否爲同類根，並辨別其大小.

(1) $3\sqrt{20},4\sqrt{5},\dfrac{\sqrt[4]{25}}{5}$.　　(2) $\sqrt[3]{-54},\sqrt[3]{-16},\sqrt[3]{686}$.

(3) $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)},\ \sqrt[4]{(x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4)^2}$.

3. 試化下列各組根式的每一組爲同次根式.

(1) $\sqrt{3},\sqrt[3]{4},\sqrt[4]{5}$.　　(2) $\sqrt{ax},\sqrt[6]{a^5x^2},\sqrt[3]{a^2x^2}$.

(3) $\sqrt[4]{\dfrac{y}{x}},\ \sqrt[3]{x^2y},\ \sqrt{xy},\ \sqrt[6]{x^5y^4}$

4. 試將下列各組根式的係數，各移置於其根號內:

(1) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$; (2) $2ax\sqrt[4]{\frac{1}{27a\ x^3}}$;

(3) $\frac{ax}{a-x}\sqrt[3]{\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}}$; (4) $\frac{2x}{y}\sqrt[4]{\frac{a^2y^5}{x^2}}$;

5. 試盡可能化簡下列各式:

(1) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{x\ y^t}}$; (2) $\left(\sqrt[2m]{\sqrt[2n]{a}}\right)^{mnp}$;

(3) $\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{20}}$;

(4) $2\sqrt[3]{189}+3\sqrt[3]{875}-7\sqrt[3]{56}$; (5) $3\sqrt{147}-\frac{7}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{\frac{1}{27}}$;

(6) $x\sqrt[3]{8ax^3}+y\sqrt[3]{-ay^3}-z\sqrt[6]{z^6a^3}$;

(7) $\frac{25}{\sqrt{252}}+\sqrt{\frac{250}{1575}}+\sqrt{\frac{100}{7}}$;

(8) $(\sqrt{7}+5\sqrt{3})(2\sqrt{7}-4\sqrt{3})$;

(9) $(\sqrt{2p+3q}-2\sqrt{q})(\sqrt{2p+3q}+2\sqrt{q})$;

(10) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{x})(\sqrt{5}-\sqrt{x})$; (11) $(\sqrt{2x+a}-\sqrt{2x-a})^2$;

(12) $(3x\sqrt{2}-2\sqrt{7-2x^2})^2$;

(13) $(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}+1)(\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}+1)$;

(14) $(1+\sqrt{3})^3$; (15) $17\div(3\sqrt{7}+2\sqrt{3})$;

(16) $(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)\div(5-\sqrt{5})$;

(17) $(2x-\sqrt{xy})\div(2\sqrt{xy}-y)$; (18) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}}+\frac{7+4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$;

(19) $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(29+11\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$;

(20) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{3}}$.

6. 求下列二式的有理化因式:

(1) $a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}$;　　(2) $6^{\frac{1}{2}}+4^{\frac{1}{3}}$.

7. 化下列各式的分母爲有理式,並各求其結果:

(1) $\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$;　　(2) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}+a}$;

(3) $\dfrac{3+\sqrt{6}}{5\sqrt{3}-2\sqrt{12}-\sqrt{32}+\sqrt{50}}$;

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$.

8. 求下列各式的平方根:

(1) $86+12\sqrt{56}$;　(2) $\sqrt{32}-\sqrt{24}$;　(3) $3\sqrt{5}+\sqrt{40}$;

(4) $75+12\sqrt{21}$;　(5) $4\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$;　(6) $29+6\sqrt{22}$;

(7) $2a-\sqrt{3a^2-2ab-b^2}$;　(8) $1+a^2+(1+a^2+a^4)$

(9) $9+4\sqrt{1+2\sqrt{3}}$;　(10) $\sqrt{248+32\sqrt{60}}$;

(11) $\sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{5}+3}$;　(12) $\sqrt{49-20\sqrt{6}}$.

9. 應用公式 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$,

求 $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 的平方根.

10. 求證: $\dfrac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}}-\dfrac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}-\dfrac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}=0$.

第九章

二次方程式

64. 一元二次方程式解法及根的公式 含一元的二次方程式的普通形式為

$$ax^2+bx+c=0, \quad (a \neq 0)$$

若以 a 同除各項，則得簡形為

$$x^2+px+q=0.$$

通常有二根，且僅有二根．其解法有二：

〔一〕**分解因式解法** 應用第 25 節的視察法，可將已知的一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的左端，分解為二個一次因式，即：

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta).$$

再按第 9 節等式律三的推論，而得

$$x-\alpha=0, \quad 或 \quad x-\beta=0. \quad (\because\ a \neq 0)$$

解此二個一次方程式，而得 $x=\alpha$ 或 β，即為所求方程式的二根．

例 解方程式 $5(x^2+1)=1(x+8)$.

解 先化爲普通形式 $5x^2-4x-12=0$.

分解其左端爲因式的積，即 $5(x+\frac{6}{5})(x-2)=0$,

乃得 $$x+\frac{6}{5}=0,\ 或\ x-2=0.$$

$$x=2,\ 或\ -1\frac{1}{5}.$$

〔二〕**公式解法** 應用第 25 節的配方法，由 $ax^2+bx+c=0$，可得其根的公式如下：

先以 a 除 $ax^2+bx+c=0$ 的各項，而移常數項於等號的右端，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方，
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a},$$

即
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

兩端開方，
$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$\therefore\ x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

此爲 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的公式.

由已知一元二次方程式，即可定 a,b,c 的值，然後以此諸值代入公式，分別取用根號的前置符號，而得二根.

例 解方程式 $2x^2+5x+8=0$.

解 因 $a=2, b=5, c=8$，代入公式，

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{(5)^2-4(2)(8)}}{2(2)}=\frac{-5\pm\sqrt{-39}}{4}=\frac{-5\pm i\sqrt{39}}{4},$$

$$\therefore\quad x=\frac{-5+i\sqrt{39}}{4},\quad 或\ \frac{-5-i\sqrt{39}}{4}$$

上列二種解法，以用公式解法較為普遍，惟在 b^2-4ac 為完全平方數時，則以分解因式法較便．

凡屬於一元二次方程式範圍內的應用問題，按方程式解法，應有二根，惟此二根能否完全適合問題，尚須按照實在情形，分別取舍．

習 題 二 十 三

解下列各方程式(參用二種解法)：

1. $3x^2+121=44x$.　　2. $27x=6x^2+21$

3. $9x^2-143-6x=0$.　　4. $5x^2=8x+21$.

5. $x+22-6x^2=0$.　　6. $3x^2=17x-10$.

7. $2x^2+5x-13=0$.　　8. [illegible]$x^2=\frac{4}{15}x+$[illegible].

9. $x^2-2=\frac{2}{12}x$.　　10. $\frac{x-7}{7x-5}=\frac{x-5}{2x-15}$.

11. $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{7x-11}{2x-1}$.　　12. $\frac{2x^2-10}{3x-4}-7x=5$.

13. $\frac{x+b}{x+c}+\frac{x+c}{x+b}=\frac{5}{2}$.　　14. $\frac{x+3}{2x-7}-\frac{2x-1}{x-3}=0$.

15. $\frac{4}{x-1}-\frac{1}{4-x}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{3-x}$.

16. $\frac{x+7}{2x^2-7x+3}+\frac{x}{x^2-2x-3}+\frac{x+3}{2x^2+x-1}=0$.

17. $\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+c}{x+c}=\frac{2(a+b+c)}{x+b+c}$.　　18. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}+\frac{x+c}{x-c}=3$.

19. $3x^2+(9a-1)x-3a=0$.　　20. $x^2-4ax+4a^2-b^2=0$.

21. $x^2-6acx+a^2(9c^2-4b^2)=0$.

22. $(a^2-b^2)x^2-2(a^2+b^2)x+a^2-b^2=0$.

23. $a^2x^2-2ax+a^2=b$.　　24. $\frac{a^2x^2}{b^2}-\frac{2ax}{c}+\frac{b^2}{c^2}=0$

25. $7(x+2a)^2+3a^2=5a(7x+23a)$.

26. $2cx^2+2d^2(x+c)=dx(x+5c)$.

27. $bx^2-\frac{6d^2}{b+c}=dx-cx^2$.

28. $\frac{x+m}{x-m}+\frac{x-m}{x+m}=\frac{x^2+m^2}{x^2-m^2}+\frac{x^2-m^2}{x^2+m^2}$.

29. $\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}$.

30. $\frac{(x-a)^2-(x-b)^2}{(x-a)(x-b)}+\frac{4ab}{a^2-b^2}=0$.

31. 父子年齡的和為100歲,但知父子年齡的積,較父的年齡多180,求父與子的年齡.

32. 一火車以等速度行200里的全程,若其速度每時增5里,則較原定時

開·早2小時畢此全程，求火車的速度·

33. 大小二水管齊開，$33\frac{1}{3}$分鐘，即可注滿一水槽· 已知大管獨開注滿水槽所需的時間，較小管獨開所需的時間，多 15 分鐘，問二管獨開注滿水槽，各需時若干？

34. 已知三連續整數中，兩兩乘積的和為 587，求此三數·

35. 一汽車的後輪周長較其前輪周長大 8 吋，又知車行 10 哩時，後輪較前輪少轉 88 次，求此二輪的周長·

36. 一人自某處乘甲車行 50 里，即下車等候 5 分鐘，始乘乙車返原地，其速度每小時較甲車快 5 里．現知此人往返共需 $2\frac{4}{9}$ 小時，求甲乙二車的速度·

37. 兩直路互相垂直，A，B 二人自交點分道前進· 已知 A，B 的速度，每小時分別為 2 里及 3 里，且 A 較 B 先行 2 小時，問 B 前進幾小時後，二人始相距 10 里？

38. 在一正方形園地的四周，築一等寬的走道，走道的寬度，較正方形邊長的 $\frac{1}{4}$ 少 1 寸．又其面積的平方寸數，較正方形周界長度的寸數多 64，求此園地與走道的面積·

39. 一腳踏車行 260 碼，其前輪較後輪多轉 135 次·若二輪的周長俱各增一呎，則行 70 碼的距離，其前輪較後輪多轉 27 次，求各輪原有的周長·

40. 甲、乙二工人，以不同的工資，在一定期間內，共同從事於某項工作．若甲始終不息，而乙於中途休息六日，結果甲得工資十九元二角，乙得工資十元八角．倘乙不休息，而甲休息六日，則二人所得工資相等．求此期間的日數，及甲，乙二人每日的工資．

41. 以小石自井口落下，經 t 秒時，聞小石衝擊井中水面的聲音，求自井口至水面的深度．但當小石落下時，空氣的摩擦力不計，落體的加速度為 g 公尺/秒²

聲音的速度爲 v 公尺/秒.

42. 某人自 A 至 B，因自 AB 的中點至 B，全爲山路，故行至此中點後，其速度每時減 $\frac{2}{3}$ 里，計自 A 出發後，歷 10 小時，始抵 B 地．歸於其歸程中，始終保持較初速每時少半里的速度，計需 10 小時 40 分，始返至 A 地．求此人的最初速度及 AB 的距離.

43. 設 AB 及 CD 爲一圓內二平行弦，其長各爲 $2a$ 及 $2b$，而二弦的距離爲 d，求此圓心至此二弦的距離.

44. 設直角三角形 ABC 斜邊 BC 的長度爲 a. 自直角頂 A 至斜邊所引垂線 AD，與邊 AB 及 AC 三者的和爲 l. 試求 AB 及 AC 的長度.

65. 根的判別式及根的性質 由第 64 節所述一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根的公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其根號內的式或數，即

$$b^2-4ac,$$

稱爲 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判別式．因由此式卽可判定其爲實根，抑爲虛根，爲有理根抑爲無理根，其性質如何，不必待完全解出，卽可判定．其判定的條件如下:

[1] $b^2-4ac>0$，方程式有相異二實根.

I. 若 b^2-4ac 爲完全平方，則此二根爲有理數;

II. 若 b^2-4ac 爲非完全平方，則此二根爲無理數.

[2] $b^2-4ac=0$，方程式有相等二實根.

[3] $b^2-4ac<0$ 方程式有二虛根.

以上三種根的判定條件，其逆亦成立；讀者對此亟須注意！茲舉例以明其應用如下：

例 1. 試證：方程式 $3mx^2-(2m+3n)x+2n=0$ 的二根爲有理數，其中 m 及 n 均爲有理數.

解 此處 $a=3m$, $b=-(2m+3n)$ 及 $c=2n$.

$$\therefore\ b^2-4ac=(2m+3n)^2-4\cdot 3m\cdot 2n=(2m-3n)^2.$$

因 m 及 n 俱爲有理數，故 $(2m-3n)^2$ 必大於 0，且爲完全平方. 按上列第一判定條件，故知此方程式的二根，爲有理數.

例 2. 若方程式 $(m+2)x^2-2mx+1=0$ 的二根：爲相異二實根；或二等根，或二虛根，試分別決定 k 的值.

解 此處 $a=m+2$, $b=-2m$ 及 $c=1$，則其根的判別式爲

$$(-2m)^2-4(m+2)=4(m^2-m-2)=4(m-2)(m+1).$$

因 4 爲正數，可略而不計. 故已知方程式之根的判別式爲 $(m-2)(m+1)$.

(1) 若爲相等二實根，則 $(m-2)(m+1)=0$,

$$\therefore\ m=2 \text{ 或 } -1.$$

(2) 若爲相異二實根，則 $(m-2)(m+1)>0$. 按符號律，此二因式 $m-2$ 及 $m+1$ 俱應爲正，或俱爲負，即

$$m-2>0 \text{ 及 } m+1>0, \qquad \therefore\ m>2 \text{ 及 } m>-1;$$

或

$$m-2<0 \text{ 及 } m+1<0, \qquad \therefore\ m<2 \text{ 及 } m<-1.$$

由上列二種情形，卽易決定 m 的值於下：

$$m>2, \text{ 或 } m<-1.$$

(3) 若爲二虛根，則 $(m-2)(m+1)<0$. 按符號律，此二因式 $m-2$ 及 $m+1$ 當爲一正一負，卽：

$$m-2>0 \text{ 及 } m+1<0, \qquad \therefore m>2 \text{ 及 } m<-1;$$

或 $$m-2<0 \text{ 及 } m+1>0, \qquad \therefore m<2 \text{ 及 } m>-1.$$

但由上述結果，得知此二種情形，僅有一種可以成立，即

$$2>m>-1.$$

綜合上列討論結果，可以圖表示於下：

例 3.　在方程式 $x^2-y^2+mx+5y-6=0$ 中 m 應為何值，始可分解因式？

解　視 y 暫為常數，則上式變為

$$x^2+mx-(y^2-5y+6)=0.$$

$$x=\frac{-m\pm\sqrt{m^2+4(y^2-5y+6)}}{2}. \tag{I}$$

欲得 x 的有理等式，須根號內的式為完全平方，即

$$4y^2-20y+24+m^2 \tag{II}$$

為完全平方．設此式為 0，即求 $4y^2-20y+24+m^2=0$ 有等根的條件，乃得

$$(-20)^2-4\cdot 4(24+m^2)=0.$$

$$\therefore m=\pm 1.$$

以 $m=\pm 1$ 分別代入 (II)，則 (II) 可變為完全平方式．由是，(I) 即可表示二個含 x 的有理等式，即原方程式可以分解因式．

66. 根與係數的關係　在一元二次方程式 $x^2+px+q=0$ 中，其二根為 α 及 β，則應有下列恆等式：

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta),$$

故由此可求得下列根與係數 p 及 q 的關係：

$$\alpha+\beta=-p,$$
$$\alpha\beta=q.$$

此關係式，又稱為根的對稱函數。

應用此項對稱函數已知一元二次方程式的二根，即可求其方程式。尤須注意的，求此對稱函數時，須先使原方程式中所含 x^2 的係數為 1，於是以 p 表示所含 x 項的係數，而 q 則表示常數項；

例 1. 已知一方程式的二根為 $3+\sqrt{5}$ 及 $3-\sqrt{5}$，求此方程式。

解 因 $\alpha=3+\sqrt{5}$，$\beta=3-\sqrt{5}$，代入根的對稱函數，得

$$p=-(\alpha+\beta)=-6, \text{ 及 } q=\alpha\beta=4$$

故所求的方程式，為 $$x^2-6x+4=0.$$

例 2. 已知 α 及 β 為 $ax^2+bx+c=0$ 的二根，求以 α^2 及 β^2 為二根的方程式。

解 因 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，$\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

設所求方程式 x 項的係數為 p_1，及其常數項為 q_1，則

$$p_1=-(\alpha^2+\beta^2)=-[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]=-\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right).$$

$$\therefore p_1=-\frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

$$q_1=\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2, \qquad q_1=\frac{c^2}{a^2}.$$

故所求的方程式，當為 $y^2-\frac{b^2-2ac}{a^2}y+\frac{c^2}{a^2}=0$，即

$$a^2y^2-(b^2-2ac)y+c^2=0.$$

例 3.　設 α,β 爲 $ax^2+bx+c=0$ 的二根，試求 $\alpha^4+\beta^4$ 的值.

解　因 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$，及 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

而
$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha+\beta)^4-4\alpha^3\beta-6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3$$
$$=(\alpha+\beta)^4-4\alpha\beta[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta]-6\alpha^2\beta^2$$
$$=\frac{b^4}{a^4}-4\frac{c}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-2\frac{c}{a}\right)-6\frac{c^2}{a^2}.$$
$$\therefore\ \alpha^4+\beta^4=\frac{b^4-4ab^2c+2c^2a^2}{a^4}.$$

67. *無限大根　在方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中，$a\neq0$，尙有種種特殊情形，爲：

$b\neq0$，$c=0$，則有一根爲 0，一根爲有限值；

$b=0$，$c\neq0$，則有二等值異號的根；

$b=0$，$c=0$，則二根俱爲 0.

若 a 爲 0，普通皆視爲一次方程式，而略去不論. 實則在二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中，使 b 及 c 的值固定不變，而獨減小 a 的值，且繼續減小至於 0，而以 0 爲其極限；或僅使 c 的值固定不變，而同時減小 a 及 b 的值，且各繼續減小至於 0，而各以 0 爲其極限. 在此二種情形中，方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的根亦常隨著變化，其結果分述於下：

由第 64 節根的公式，$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 可變爲

$$x=\frac{2c}{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}.$$

再按第 47 節函數極限的求法，而得

$$\lim_{a\to 0} x=\frac{2c}{-b\mp b}=-\frac{c}{b}\text{，或 }\infty;$$

及

$$\lim_{\substack{a\to 0\\ b\to 0}} x=\frac{2c}{0\mp 0}=\infty\text{，或 }\infty.$$

總上二式，乃得結論於下：

當 a 趨近於 0 而以 0 爲其極限，且 b, c 俱不爲 0 時，則 $ax^2+bx+c=0$ 有一根爲無限大．若 a 及 b 同時趨近於 0 而俱以 0 爲其極限，且 c 不爲 0 時，則 $ax^2+bx+c=0$ 的二根均爲無限大．

無限大根在代數學中，可略而不計，惟在解析幾何學中，則不能忽視，因可藉以推得若干重要的公式．

例 當 $m=-1$ 及 0 時，$(m^2+m)x^2+2mx-1=0$ 的根各爲何？

解 當 $m=-1$，即 $m^2+m=0$，則此方程式有一根爲無限大．

當 $m=0$ 時，即 $m^2+m=0$，且 $2m=0$，則此方程式的二根俱爲無限大．

習 題 二 十 四

1． 試按根的判定條件，分別決定下列各方程式中的根的性質．

(1) $x^2+x-87=0$；(2) $\frac{1}{2}x^2=14-2x$；(3) $(x+2)^2=4x+15$．

2． 若 $3x^2-6x+k=0$ 的二根相等，試求 k 的值．

3． 求證：方程式 $x^2-2ax+a^2-b^2+2bc-c^2=0$ 的二根爲有理數，但 a, b 及 c 俱爲有理數．

4. 求證: 方程式 $(a+b)x^2-(a+b+c)x+\frac{c}{2}=0$ 的二根恆為實數, 但 a, b 及 c 俱為實數.

5. 求證: 方程式 $(a+b+c)x^2-2(a+b)x+(a+b-c)=0$ 有二相異的有理根, 但 a, b 及 c 俱為實數.

6. 試分別定 k 的值, 而使方程式 $(1+k)x^2+3kx+1=0$ 的二根為相異實根, 或等根, 或虛根.

7. 若 $(b_1^2+b_2^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2)x+a_1^2+a_2^2=0$ 的二根俱為實根, 則必相等, 試加證明.

8. 求以下列各組值為根的方程式:

(1) $\frac{2}{3}a, -\frac{4}{5}a$.　　(2) $0, \frac{7}{8}$.　　(3) $\sqrt{5}+3, 3-\sqrt{5}$.

(4) $\frac{1}{2}(5\pm\sqrt{7})$.　　(5) $\frac{a}{2b}, \frac{b}{2a}$;　　(6) $\frac{a+b}{a-b}, \frac{a-b}{a+b}$.

9. 設 α 及 β 為方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根, 試求下列各式的值:

(1) $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$,　　(2) $\alpha^5\beta^2+\alpha^2\beta^5$,　　(3) $(\alpha-\beta)^3$,

(4) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$,　　(5) $\alpha^4-\beta^4$,　　(6) $\alpha^5+\beta^5$.

10. 設 α 及 β 為方程式 $x^2+px+q=0$ 的二根, 試求以下列各組值為根的方程式.

(1) α^{-1}, β^{-1};　　(2) $k\alpha, k\beta$;　　(3) $\alpha^2\beta, \alpha\beta^2$;

(4) $\alpha+\beta, \alpha^{-1}+\beta^{-1}$;　　(5) $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\alpha}{\beta}$;　　(6) $\frac{\alpha^2}{\beta}, \frac{\beta^2}{\alpha}$.

11. 求方程式 $ax^2+bx+c=0$ 中的一根為其他一根的 k 倍的條件.

12. 若 $ax^2+bx+c=0$ 所有兩根的比為 $m:n$, 求證:

$$mnb^2=(m+n)^2ac.$$

13. 若 α, β 爲 $x^2+mx+m^2+k=0$ 的二根,求證:

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+k=0.$$

14. 在方程式 $(k^2-5k+6)x^2+(k-2)x+10=0$ 中,k 爲何值時,有一根趨近於無限大,或二根俱趨近於無限大?

68. $y=ax^2+bx+c$ 的值的變化 在函數 $y=ax^2+bx+c$ 中,y 的值乃依 x 的值而定.x 爲變數.y 爲 x 的函數;惟 x 可自 $-\infty$ 增至 $+\infty$,或自 $+\infty$ 減至 $-\infty$,y 的值雖可隨著變化,其變化的情形,則有異於 x,茲將 y 變化時,所具的符號與特殊值分述於下:

〔一〕**符號** 在 $y=ax^2+bx+c$ 中.若 $b^2-4ac>0$,所與 x 的值,在 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 與 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 之間,則 y 與 a 異號.又在同一情形下,所與 x 的值,大於 $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,或小於 $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,則 y 與 a 同號.其次,若 $b^2-4ac=0$,或 $b^2-4ac<0$,則給與 x 以任何實數,y 皆與 a 同號.

因按第 25 節配方法,ax^2+bx+c 可分解爲二個一次因式的積,得

$$ax^2+bx+c=a\left\{x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}\left\{x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\},$$

即 $$y=a\left\{x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}\left\{x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right\}.$$

若$b^2-4ac>0$,而x在$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$與$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$之間,則上式右端二因式的積爲負,故$y$與$a$異號.

若$b^2-4ac>0$,而x大於$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,或竟小於$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,則上式右端二因式的積均爲正,故$y$與$a$同號.

若$b^2-4ac=0$,則上式變爲$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$,則無論給與$x$以任何實數,$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$恆爲正,故$y$均與$a$同號.

若$b^2-4ac<0$,即$4ac-b^2>0$,上式可變形爲$y=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}$,則無論給與$x$以任何實數,上式內所含的二項$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$及$\frac{4ac-b^2}{4a^2}$恆爲正,故$y$與$a$同號.

〔二〕特殊值(極大值與極小值) 在$y=ax^2+bx+c$一式中,當x繼續增大時,y亦隨著增大,惟增大至某值m後,即開始減小;或當x繼續增大時,y竟隨著減小,惟減小至某值m'後,即開始增大.在此二種情形中,y的變化,各須經過一特殊值,爲m或m',此處m稱爲y的極大值,m'稱爲y的極小值.所謂極大與極小,乃表示此二特殊值在y的所有值中,所在的特

殊位置，而非絕對大小之意. 又在 $y=ax^2+bx+c$ 中，當 x 繼續增加時，y 恆有且僅有一特殊值，究爲極大值或極小值，須視 a 的正負而定. 其決定的條件如下:

在 $y=ax^2+bx+c$ 中，若 $a>0$，而 $x=-\frac{b}{2a}$，y 可有一極小值爲 $\frac{4ac-b^2}{4a}$；其次，若 $a<0$，而 $x=-\frac{b}{2a}$，y 可有一極大值爲 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

因 $y=ax^2+bx+c$ 可變爲 $y=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$，即 $y=\frac{4ac-b^2}{4a}+a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$. 在此式中，其右端的第一項爲固定值，其第二項爲 x 的函數. 由此，即易知當 $a>0$ 而 $x+\frac{b}{2a}=0$，或 $x=-\frac{b}{2a}$，則 y 的值等於 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，爲極小；若 $a<0$ 而 $x+\frac{b}{2a}=0$，或 $x=-\frac{b}{2a}$，則 y 的值等於 $\frac{4ac-b^2}{4a}$，爲極大.

例 1. x 須爲何實數，$y=14-(3x-2)(x-1)$ 的值始爲正，或爲負? 試分別判定.

解 化簡所與的等式，得 $y=-3x^2+5x+12$，此處 $a=-3$，$b=5$ 及 $c=12$. 因 $b^2-4ac=169>0$，按上列決定符號的規律，先求出

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5+13}{-6}=-1\frac{1}{3}.$$

$$\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5-13}{-6}=3.$$

故知當 $3>x>-1\frac{1}{3}$ 時，y 與 x^2 的係數異號，即爲正；又當 $x>3$ 或 $x<-1\frac{1}{3}$ 時，y 與 x^2 的係數同號，即爲負.

例 2. 若 x 爲任何實數，求證：$\dfrac{x^2-15}{2x-8}$ 的值必不在 3 與 5 之間.

解 設 $\dfrac{x^2-15}{2x-8}=y$，則 $x^2-15=2xy-8y$，

即 $$x^2-2yx+8y-15=0$$

因在此式中，x 爲實數的條件爲

$$(-2y)^2-4(8y-15)>0,$$

即 $$4(y^2-8y+15)>0.$$

因 $4>0$，故得 $$y^2-8y+15>0,$$

$$(y-3)(y-5)>0.$$

由上式，可得 $y-3>0$ 及 $y-5>0$， $\therefore$ $y>3$ 及 $y>5$.

或 $y-3<0$ 及 $y-5<0$， $\therefore$ $y<3$ 及 $y<5$.

$$\therefore\ y>5\quad 或\quad y<3.$$

故知當 x 爲任何實數時 y 的值必不在 3 與 5 之間.

例 3. 試求 $y=x^2-8x+3$ 的特殊值.

解 此處 $a=1$，$b=-8$，$c=3$. 因 $a>0$，故 y 的特殊值爲極小值，當 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-8}{2}=4$ 時，y 有一極小值爲 $\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{4\cdot3-64}{4}=-13$.

關於 $y=ax^2+bx+c$ 的特殊值，可於第 69 節中驗明.

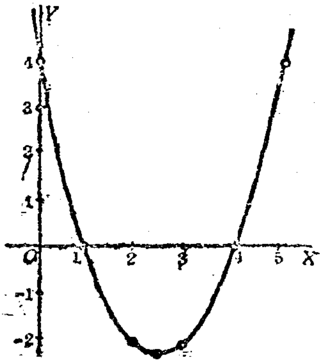
69. $y=ax^2+bx+c$ 的圖解及其應用　按第 29 節一次函數圖形的求法，$y=ax^2+bx+c$ 亦可求作其圖形．其法則，爲：先求出 x 及 y 的多數組對應值，次由此諸值，各求其對應點，然後聯結各點成一平滑的曲線，即爲 $y=ax^2+bx+c$ 的圖解．此圖形稱爲拋物線．

例　求作 $y=x^2-5x+4$ 的圖形．

解　先求出多數組對應值如下

x	0	1	2	$2\frac{1}{2}$	3	4	5	…
y	4	0	-2	$-2\frac{1}{4}$	-2	0	4	…

聯結$(0,4)$，$(1,0)$，$(2,-2)$，$(2\frac{1}{2},-2\frac{1}{4})$，$(3,-2)$ 及 $(4,0)$ 等點所成的平滑曲線，即爲 $y=x^2-5x+4$ 的圖解．此圖形上 $(2\frac{1}{2},2\frac{1}{4})$ 點的縱標，即 y 的極小值．



由 $y=ax^2+bx+c$，令 $y=0$，則成 $ax^2+bx+c=0$．故二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，實爲 $y=ax^2+bx+c$ 的特例．由上圖，可知 $y=0$，即爲圖形與 x 軸相交的情形；同時，由 $ax^2+bx+c=0$ 所解得的二根，即分別爲上列圖形與 x 軸交點的橫標．由是得一結論於下：

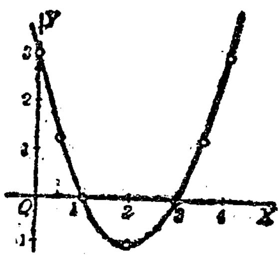
方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的二根，即函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸交點的橫標，且其圖形與 x 軸相交時，表示 $ax^2+bx+c=0$ 有二相異實根；相切時，爲二等根；不相交時，則爲二虛根．

應用上理求 $ax^2+bx+c=0$ 的二根，是爲圖解法。

例　試以圖解法，解 $x^2-4x+3=0$。

解　設 $x^2-4x+3=y$，按上法求其圖形如下。由圖形知在 x 軸上的二交點的橫標爲 1 與 3，故所求的根爲

$$x=1,\quad x=3.$$



習 題 二 十 五

1. x 爲任何實數，$3x^2-2x+5$ 的值當如何？
2. x 須爲何值，$x^2+2x-11$ 的值始爲正數？
3. x 爲任何實數，$\dfrac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$ 的值當如何？
4. 設 x 爲任何實數，求證 $\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+2x+1}$ 的值不小於 $-\dfrac{1}{3}$。
5. 求下列二式的極大值與極小值。

　(1) $2x^2-x+4$;　　　(2) $1+4x-x^2$.

6. 求分一線段 a 爲二部分，使以此二部分爲邊所成矩形的面積爲極大。
7. 求 $(x-a)(x-b)$ 的極小值。
8. 試以圖解法解下列二方程式：

　(1) $x^2+2x-15=0$.　　　(2) $x^2-2x-8=0$.

70. 無理方程式 凡方程式中含有無理式的,稱爲無理方程式.僅係數有根號的,不得稱爲無理方程式.

無理方程式的解法,爲:先集合無理式於等號的一端,再移置有理式於等號的他端.若無理式爲二次根式,則將兩端各自平方;平方後倘仍有無理式,再按上法繼續進行,直至化成有理方程式爲止,然後解出.倘所含根式爲二次以上的根式,則不必移項,逕乘以其有理化因式,直至化成有理式而後求解.

依上項法則,解無理方程式所得的根,未必盡合原方程式,且有完全不合的情形.例如無理方程式$\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}=0$,即無一根可以適合.茲就兩端自乘的情形而加以討論.設一無理方程式爲 $A=B$,兩端自乘的結果,即等於以 $A+B=0$ 乘 $A-B=0$ 所得的結果.

因 $A^2-B^2=0$, 即 $(A+B)(A-B)=0$.

今由 $A^2-B^2=0$ 所解得的根,爲綜合 $A+B=0$ 及 $A-B=0$ 二方程式的根;而 $A+B=0$ 的根,顯見其必不適合原方程式,即 $A=B$.此 $A+B=0$ 的根,稱爲解無理方程式時所生的增根.倘繼續自乘,更有發生增根的可能.若無理方程式所含根式爲二次以上的,則乘以其有理化因式,所得的有理方程式,依同理,亦有發生增根的可能.

欲知所解得的根,何者爲增根,何者爲原方程式的根,須經核驗,始可判定.故解無理方程式時,尚有一極重要的步驟,即於

解方程式後,須將所得的根,逐一代入原方程式,視其適合與否,而定取舍,讀者宜加注意.

例 1. 解方程式 $\sqrt{2x+9}-\sqrt{x-4}=\sqrt{x+1}$.

解 兩端自乘, $2x+9+x-4-2\sqrt{(x-4)(2x+9)}=x+1$.

移項合併, $\sqrt{(x-4)(2x+9)}=x+2$.

再自乘, $2x^2+x-36=x^2+4x+4$.

移項合併, $x^2-3x-40=0$.

解上式,得 $x=8$ 或 -5.

核驗 以 $x=8$ 代入原方程式的兩端,得

$$\sqrt{25}-\sqrt{4}=\sqrt{9}, \text{ 即 } 3=3.$$

再以 $x=-5$ 代入原方程式的兩端,

$$\sqrt{-1}-\sqrt{-9}\neq\sqrt{-4}.$$

故知原方程式的根為 $x=8$.

凡無理方程式有可化為一元二次方程式的形式的,即以其中所含某一根式相當於一元二次方程式的一元,此時即可按二次方程式解法,先解得此根式的值,然後按上法解所得的無理方程式.

例 2 解方程式 $4x^2-2x-1=\sqrt{2x^2-x}$.

解 以 $\sqrt{2x^2-x}$ 表一元,則原方程式可化為,

$$2(\sqrt{2x^2-x})^2-\sqrt{2x^2-x}-1=0.$$

即 $$(2\sqrt{2x^2-x}+1)(\sqrt{2x^2-x}-1)=0.$$

$$\therefore \quad \sqrt{2x^2-x}=1,\ \text{解之，得}\ x=1\ \text{或}\ -\frac{1}{2}.$$

或 $$2\sqrt{2x^2-x}=-1,\ \text{解之，得}\ x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}$$

核驗 次第以 $x=1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ 及 $\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ 代入原方程式而加以驗證；僅1與 $-\frac{1}{2}$ 可以適合。故知原方程式的根為 $x=1$ 或 $-\frac{1}{2}$.

無理方程式除有上項特別形式外，倘各項有公共因式時，可先分解其因式，然後由此任一因式等於0，而得較簡單的無理方程式，再分別按前法解出。

例 3. 解方程式 $\sqrt{5x^2-6x+1}-\sqrt{5x^2+9x-2}=5x-1.$

解 先分解各項的因式，而得

$$\sqrt{(5x-1)(x-1)}-\sqrt{(5x-1)(x+2)}=\sqrt{(5x-1)^2}.$$

此時不可以 $\sqrt{5x-1}$ 偏除各項，因不知 $5x-1$ 是否為0。倘 $5x-1$ 為0，則在除去 $5x-1$ 的因式時即失去一根，而且除式為0，已不合除法的意義的緣故。

上式的合理解法，為集合各項於等號的一端；他端為0，即

$$\sqrt{(5x-1)(x-1)}-\sqrt{(5x-1)(x+2)}-\sqrt{(5x-1)^2}=0.$$

$$\sqrt{5x-1}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-1})=0.$$

故得 $$\sqrt{5x-1}=0, \qquad \text{(I)}$$

及 $$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+2}-\sqrt{5x-1}=0 \qquad \text{(II)}$$

解(I),得 $$x=\frac{1}{5}.$$

解(II),得 $$x=2,\ 或\ 1\frac{1}{5}.$$

核驗 次第以 $x=\frac{1}{5}$, 2, 及 $1\frac{1}{5}$ 代入原方程式加以驗證；僅 $\frac{1}{5}$ 可以適合，故知原方程式的根爲 $x=\frac{1}{5}$.

例 4. 解方程式 $\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x}}+3=0$.

解 先化分母爲有理式，即

$$-(\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x})^2+3=0,$$

$$-4x+1-2\sqrt{2x(2x-1)}+3=0.$$

移項， $$4(x-1)=-2\sqrt{2x(2x-1)},$$

即 $$2(x-1)=-\sqrt{2x(2x-1)}.$$

平方， $$4x^2-8x+4=4x^2-2x.$$

解之，得 $$x=\frac{2}{3}.$$

核驗 以 $x=\frac{2}{3}$ 代入原方程式，而能適合，故原方程式的根爲 $x=\frac{2}{3}$.

71. 可用二次方程式解法的高次方程式 含 x 的高次方程式，若可化爲含 y 的二次方程式之形式時，得依二次方程式解法以求解．此項方程式約分三種：

〔一〕 可化爲 $ay^2+by+c=0$ 之形式的，y 爲 x 的函數．

例 1. 解方程式 $x^6+7x^3=8$.

解 以 x^3 表 y，則原方程式可變為

$$(x^3)^2+7(x^3)-8=0,$$

$$\therefore\quad x^3=-8,\ \text{或}\ 1.$$

$$\therefore\quad x=-2,\ \text{或}\ 1.$$

例 2. 解方程式 $6\sqrt{x}=5x^{-\frac{1}{2}}-13$.

解 原方程式可變形為 $6(x^{\frac{1}{2}})^2+13(x^{\frac{1}{2}})-5=0$

解之，得
$$x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},\ \text{或}\ -\frac{5}{2}.$$

而
$$x=\frac{1}{9},\ \text{或}\ 6\frac{1}{4}.$$

因原方程式為無理方程式，故應以所得 x 的值代入原式以核驗，結果，僅 $x=\frac{1}{9}$ 可以適合，故原方程式的根為 $x=\frac{1}{9}$.

例 3. 解方程式 $\dfrac{x^2+8x+1}{4x^2+6x-1}-\dfrac{3(4x^2+6x-1)}{x^2+8x+1}-2=0$.

解 原方程式可變形為

$$\frac{x^2+8x+1}{4x^2+6x-1}-\frac{3}{\dfrac{x^2+8x+1}{4x^2+6x-1}}-2=0,$$

即
$$\left(\frac{x^2+8x+1}{4x^2+6x-1}\right)^2-2\left(\frac{x^2+8x+1}{4x^2+6x-1}\right)-3=0.$$

解之，得
$$\frac{x^2+8x+1}{4x^2+6x-1}=3, \tag{I}$$

或
$$\frac{x^2+8x+1}{4x^2+6x-1}=-1. \tag{II}$$

解(I)，得　　$x=\dfrac{-15\pm\sqrt{401}}{22}$.

解(II)，得　　$x=0$，或 $-1\dfrac{4}{5}$.

故原方程式的根爲　$x=0,\ -1\dfrac{4}{5}$，或 $\dfrac{-15\pm\sqrt{401}}{22}$.

例 4.　解方程式 $x^4-12x^3+33x^2+18x-28=0$.

解　原方程式可變形爲 $(x^2-6x)^2-3(x^2-6x)-28=0$.

解之，得　　$x^2-6x=7$,　　(I)

或　　$x^2-6x=-4$.　　(II)

解(I)，得　　$x=7$，或 -1.

解(II)，得　　$x=3\pm\sqrt{5}$.

故原方程式的根爲 $x=7,\ -1$，或 $3\pm\sqrt{5}$.

例 5.　解方程式 $x(x-1)(x-2)(x-3)=6\cdot5\cdot4\cdot3$.

解　原方程式可變形爲 $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=360$.

或爲　　$(x^2-3x)^2+2(x^2-3x)-360=0$.

解之，得　　$x^2-3x=18$,　　(I)

或　　$x^2-3x=-20$.　　(II)

解(I)，得　　$x=6$，或 -3.

解(II)，得　　$x=\dfrac{3\pm i\sqrt{71}}{2}$.

故原方程式的根爲 $x=6,\ -3$，或 $\dfrac{3\pm i\sqrt{71}}{2}$.

〔二〕倒數方程式　在含 x 的方程式中，以 $\frac{1}{x}$ 代 x，再化去分式，而不變原方程式之形式的，此方程式通稱爲倒數方程式。一倒數方程式有特異的形式，卽按 x 的降冪整列其各項後，則其首末二項的係數，必等值而同號；順第二項與逆第二項的係數也如此；餘類推。或上列各對係數，爲等值而異號，如

$x^4+x^3+3x^2+x+2=0$ 及 $3x^3-4x^2+4x-3=0$ 皆爲倒數方程式。四次倒數方程式，可按二次方程式解法解出，惟三次或五次的倒數方程式，因恆有一根爲 1 或 -1，除去 $x-1$ 或 $x+1$ 的因式後，所得的他一因式，仍爲一倒數方程式，分別爲二次或四次，仍可按上法求解。

例 1.　解方程式 $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.

解　因其爲倒數方程式，以 $x^2(x\neq 0)$ 同除各項，得

$$x^2-2x+2-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

卽

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\left(x+\frac{1}{x}\right)=0$$

解上式，得

$$x+\frac{1}{x}=2, \qquad \text{(I)}$$

或

$$x+\frac{1}{x}=0. \qquad \text{(II)}$$

解(I)，得　$x=1,\ 1$;

解(II)，得　$x=\pm i$.

故原方程式的根爲 $x=1, 1$ 或 $\pm i$.

例 2.　解方程式　$x^5-11x^4+36x^3-36x^2+11x-1=0$.

解　因其爲奇次倒數方程式，故必有一根爲 1．除去 $x-1$ 的因式，其他因式仍爲一倒數方程式，即

$$x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0.$$

以 $x^2(x\neq 0)$ 同除各項，得

$$x^2-10x+26-\frac{10}{x}+\frac{1}{x^2}=0,$$

即
$$x^2+2+\frac{1}{x^2}-10\left(x+\frac{10}{x}\right)+24=0,$$

或
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+24=0.$$

解上式，得
$$x+\frac{1}{x}=4, \qquad \text{(I)}$$

或
$$x+\frac{1}{x}=6. \qquad \text{(II)}$$

解(I)，得　$x=2\pm\sqrt{3}$;

解(II)，得　$x=3\pm2\sqrt{2}$.

故原方程式的根爲 $x=1, 2\pm\sqrt{3}$ 或 $3\pm2\sqrt{2}$.

〔三〕 **二項方程式**　凡二項方程式 $x^n+a^n=0$ 的左端，若可分解其因式，而有一次或二次因式時，均可按二次方程式解法以解出．

例 1.　解方程式 $x^4+1=0$.

解　分解因式，而得　$x^4+2x^2+1-2x^2=0$.

$$(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2=$$

解上式，得　$x^2+1+\sqrt{2}x=0$，　(I)

或　$x^2+1-\sqrt{2}x=0$．　(II)

解(I)，得　$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$；

解(II)，得　$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$．

故原方程式的根為 $\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$，或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$．

例 2． 解方程式 $x^5+1=0$．

解　分解因式 $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=0$，而得

$$x+1=0 \text{ 或 } x^4-x^3+x^2-x+1=0.$$

解第一式　$\therefore\ x=-1$．

解第二式，而得　$x+\frac{1}{x}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，

$$\therefore\ x=\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) \text{ 或 } \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

故原方程式的根為

$$x=-1,\ \frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right) \text{ 或 } \frac{1}{4}\left(1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

習 題 二 十 六

1． 解下列各方程式：

(1) $\sqrt{x-1}+3=\sqrt{x+11}$．　(2) $\sqrt{25x-29}-\sqrt{4x-11}=3\sqrt{x}$．

(3) $\sqrt{x+4ab}=2a+\sqrt{x}$．　(4) $\sqrt{x}+\sqrt{a+x}=2\sqrt{b+x}$．

(5) $2x^{2}-[illegible]x-3\sqrt{x^{2}-[illegible]x-[illegible]}-[illegible]=[illegible]$

(6) $2x^{2}-[illegible]x+2\sqrt{2x^{2}-7x+3}=[illegible]x-[illegible]$

(7) $[illegible]x([illegible]-x)=11-[illegible]\sqrt{x^{2}-2x+5}$.

(8) $x^{2}-x+[illegible]\sqrt{[illegible]x^{2}-[illegible]x+2}=\frac{x}{2}+7$.

(9) $\sqrt{x^{2}+[illegible]x-12}-\sqrt{x^{2}-[illegible]x+15}=x-3$.

(10) $\sqrt{x^{2}-[illegible]cx+1[illegible]a^{2}}-\sqrt{x^{2}+ax-6a^{2}}=x-[illegible]a$.

(11) $(\sqrt{x}+\sqrt{x-[illegible]})(\sqrt{x}-\sqrt{x-[illegible]})=[illegible]x-5$.

(12) $(\sqrt{x-[illegible]}-\sqrt{x+[illegible]})(\sqrt{x-[illegible]}+\sqrt{x+[illegible]})=x-a$.

(13) $\sqrt[3]{[illegible]+x}+\sqrt[3]{2-x}=[illegible]$.

(14) $(x+a)^{[illegible]}+(x+a)\sqrt{x}=a[illegible]-a\sqrt{x}$.

2. 解下列各方程式:

(1) $(x^{2}-4)(x^{3}-9)=7x^{2}$.

(2) $x^{4}-7[illegible]x^{2}=-1225$.

(3) $1-8x^{\frac{2}{[illegible]}}+9[illegible]x^{[illegible]}=0$.

(4) $8x^{\frac{3}{n}}-8x^{-\frac{3}{n}}=63$.

(5) $27x^{\frac{3}{2}}-4=20x^{\frac{3}{4}}$.

( ) $x^{2}+[illegible]x-\frac{2[illegible]}{x^{2}+[illegible]x}=8$.

(7) $(x+1)(x+2)(x+[illegible])(x+[illegible])=120$.

(8) $([illegible]x^{2}-2x+1)([illegible]x^{2}-2x-7)+[illegible]2=0$.

(9) $x^{4}-[illegible]x^{3}+1[illegible]x^{2}+[illegible]4x+[illegible]=0$.

(10) $[illegible]x^{4}-1[illegible]x^{3}+51x^{2}-8[illegible]x+2[illegible]=0$.

(11) $(a+x)^3+(b+x)^3=(a+b+2x)^3$.

(12) $(a-x)^4-(b-x)^4=(a-b)(a+b-2x)$.

(13) $x^4-6x^3+8x^2+6x=2$.　　(14) $\dfrac{4x^2+2x}{x^2+3}+\dfrac{x^2+6}{2x^2+x}-3=0$.

解下列各方程式:

(1) $2x^4-2x^3+4x^2-2x+2=0$.

(2) $x^5-5x^4+9x^3-9x^2+5x-1=0$.

(3) $x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0$.　　(4) $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.

4. 解下列各方程式:

(1) $x^3+1=0$.　　(2) $x^3-1=0$.　　(3) $x^4+1=0$.

(4) $x^4-1=0$.　　(5) $x^3-27=0$.　　(6) $x^4-81=0$.

(7) $(x-2)^4-81=0$.　　(8) $(2x-1)^3=1$.　　(9) $(1+x)^3=(1-x)^3$.

5. 按第四題中的(1)及(2),各求 -1 與 1 的立方根.

6. 按第四題中的(3)及(4),各求 -1 與 1 的四次方根.

第十章

二次聯立方程式

72. 解法原理 自二次聯立方程式$f(x,y)=0$與$g(x,y)=0$,求其公共解時,卻有類似一次聯立方程式的解法,即自二式中消去一未知數,而得含其他一未知數的二次或高次方程式;然後解此方程式,求其所含未知數的值,再代入原二方程式中的任一式,卽可求得另一未知數的值.

惟一次聯立方程式的公共解僅有一組,而二次聯立方程式的公共解,則有二組或二組以上的解,此公共解的組數,當視原方程式的次數而定.設所與的二次聯立方程式$f(x,y)=0$為二次,而$g(x,y)=0$亦為二次,則按代入消去的結果,應為四次一元方程式.此方程式恆有四根,再以所得的四值,代入原二方程式中的任一式,可得另一未知數的四值.故已知的二次聯立方程式,均為二次時,其公共解當有四組.普徧的說:

若已知聯立方程式$f(x,y)=0$為m次,及$g(x,y)=0$為n次,則其公共解,當有mn組.

然亦有情形特殊的,如聯立方程式

$$x^2+xy-2y^2+x=0 \text{ 與 } y=x+1$$

僅可得一組公共解，因由二式消去 y，所得的方程式，在理論上講，應爲二次式，但實際上，卻爲 $x+1=0$，其二次項不存在．故欲寫其完全方程式，當爲 $0\cdot x^2+x+1=0$．按第 67 節所論的結果，此方程式有一根爲有限值，另一根則爲無限大，亦即原有聯立方程式仍有二組解，一組爲有限值，另一組則爲無限大．在代數學中，無限大解，每不計及，故謂僅可得一組解．又如聯立方程式

$$x^2+xy-2y^2+x=0 \quad 與 \quad y=x+\frac{1}{3},$$

則無公共解．因由二式消去 y，所得的方程式，按照上理可寫爲 $0\cdot x^2+0\cdot x-\frac{2}{9}=0$，再按第 67 節所論的結果，此方程式有二根爲無限大，亦即原有聯立方程式仍有二組解，惟俱爲無限大，故亦可說是無解．惟普通求公共解時，乃指有限值而言；至於無限大的解，卻有極重要的幾何意義，當在解析幾何學中詳加討論．

凡由 $f(x,y)=0$ 及 $g(x,y)=0$ 的二聯立方程式，求得另一含 x 與 y 的方程式，並可寫成 $A\cdot B=0$ 的形式的，則由 $A=0$ 與 $f(x,y)=0$ 及 $B=0$ 與 $f(x,y)=0$，或由 $A=0$ 與 $g(x,y)=0$，及 $B=0$ 與 $g(x,y)=0$ 所求得的公共解，顯見其均爲 $f(x,y)=0$ 與 $g(x,y)=0$ 的公共解，此亦爲解二次聯立方程式時所需的重要原理．

最後，尚須注意的，即由一組聯立方程式中消去一未知數，

而得含另一未知數的方程式，此方程式若為普通三次方程式，或三次以上的方程式且不能由因式分解法求得其根時，則在本章中，不能詳其解法．本章所論的解法，僅對於可用二次方程式解法的範圍內．

又二次聯立方程式，無共同的解法，其解法常依其方程式的形式而定．茲就通常可用二次方程式解法的聯立方程式，分別述其解法於後．

73. 含 x 及 y 的一次式與二次式 一組聯立方程式 $f(x,y)=0$ 及 $g(x,y)=0$，若為一次式與二次式，則就一次式解出一未知數的等式，代入二次式，而得含另一未知數的方程式；再以求得的根代入一次式，則得前一未知數的值．所得的二組對應值，即為所求的解．

例 解 $\begin{cases} 2x^2-[illegible]xy-y^2-[illegible]x-8y+3=0, & \text{(I)} \\ 3x-y-8=0. & \text{(II)} \end{cases}$

解 由(II)，解得 y 的等式為 $y=3x-8$，代入(I)，化簡，得

$$15x^2-44x-3=0.$$

解上式，得
$$x=3,\text{ 或 }-\frac{1}{15}.$$

再以 $x=3$ 或 $-\frac{1}{15}$ 分別代入(II)，而得對應值為

$$y=1,\text{ 或 }-8\frac{1}{5}.$$

故所求的解為 $x=3,\ y=1$，或 $x=-\frac{1}{15},\ y=-8\frac{1}{5}$.

由一次式與二次式所成的一組聯立方程式，其解法可謂普通二次或二次以上的聯立方程式中的基本解法，因若由普通聯立方程式中，求得一次式，卽可用上項代入法解出．

74. 含 x 及 y 的二次齊次式 一對方程式中，除去常數項，其餘各項均為含 x 及 y 的二次項，其解法，爲：先由二式消去常數項而得一含 x,y 的二次齊次式，再分解爲二個一次齊次式，復以此二個一次式與原二式中的任一式，分配成二組聯立方程式，然後按第 73 節解法，求得四組對應值，卽爲所求的解．

例 解 $\begin{cases} x^2+3xy-9y^2=9, & \text{(I)} \\ x^2-13xy+21y^2=-9. & \text{(II)} \end{cases}$

解 (I)+(II)，
$$2x^2-10xy+12y^2=0,$$
卽
$$x^2-5xy+6y^2=0,$$
$$(x-2y)(x-3y)=0.$$
$$x-2y=0, \qquad \text{(III)}$$
或
$$x-3y=0. \qquad \text{(IV)}$$

再由(I)，(III)，求得二組對應解爲
$$x=\pm 6, \qquad y=\pm 3.$$

復由(I)，(IV)，求得二組對應解爲
$$x=\pm 3, \qquad y=\pm 1.$$

故所求的四組解爲 $x=6,y=3$；$x=-6,y=-3$；

$x=3,y=1$；或 $x=-3,y=-1$．

75. 一組含 x 及 y 的對稱式　一組含 x 及 y 的對稱式的基本形式爲

$$x+y=p \text{ 及 } xy=q.$$

其解法，爲：按根的對稱函數，先作一輔助方程式爲

$$X^2-pX+q=0.$$

則 x 及 y 即爲此方程式的二根，然後解此方程式，即得原方程式的解.

例　解 $\begin{cases} x+y=8, \\ xy=15. \end{cases}$

解　先作一輔助方程式　$X^2-8X+15=0.$

解上式，得　　$X=3$，或 $5.$

由是，得原方程式的解爲

$$x=3,\ y=5,\ \text{或}\ x=5,\ y=3.$$

其他對稱式的解法，爲：先由原方程式求得上列的基本形式，然後依上法解出.

例 1.　解 $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{1001}{125}, & \text{(I)} \\[2ex] \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{5}. & \text{(II)} \end{cases}$

解　由(I)，　$\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^3-3\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{1001}{125}.$

以(II)代入，並化簡，得

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{5}. \qquad \text{(III)}$$

由(II)及(III)，先作一輔助方程式 $X^2-\frac{11}{5}X+\frac{2}{5}=0$.

解上式，得 $$X=2,\ 或\ \frac{1}{5}.$$

即 $$\frac{1}{x}=2,\ \frac{1}{y}=\frac{1}{5};\ 或\ \frac{1}{x}=\frac{1}{5},\ \frac{1}{y}=2.$$

由是，得原方程式的解爲

$$x=\frac{1}{2},\ y=5;\ 或\ x=5,\ y=\frac{1}{2}.$$

例 2. 解 $\begin{cases} x^2+xy+y^2=21, & \text{(I)} \\ x+\sqrt{xy}+y=7. & \text{(II)} \end{cases}$

解 (I)÷(II)，得 $$x-\sqrt{xy}+y=3 \qquad \text{(III)}$$

(II)+(III)，再除以 2，得 $$x+y=5; \qquad \text{(IV)}$$

(II)−(III)，再除以 2，得 $$\sqrt{xy}=2,$$

平方，得 $$xy=4. \qquad \text{(V)}$$

由(IV)及(V)，先作一輔助方程式 $X^2-5X+4=0$.

解上式，得 $$X=1\ 或\ 4,$$

由是，得原方程式的解爲

$$x=4,\ y=1;\ 或\ x=1,\ y=4.$$

倘有一對聯立方程式如 $ax+by=c$ 及 $kxy=l$ 的，亦可化成上列基本形式以解出。

例 解 $\begin{cases} 2x-\ y=2, & \text{(I)} \\ xy=1. & \text{(II)} \end{cases}$

解　(I) 可化爲 $(3x)+(-5y)=2$.　　(III)

(II)×(−15), 可化爲　　$(3x)(-5y)=-15$.　　(IV)

由 (III) 及 (IV), 先作一輔助方程式 $X^2-2X-15=0$.

解上式, 得　　$X=5$, 或 -3.

即　　$3x=5$, $-5y=-3$; 或 $3x=-3$, $-5y=5$.

由是, 得原方程式的解, 爲

$$x=1\frac{2}{3},\ y=\frac{3}{5};\ 或\ x=-1,\ y=-1.$$

76.　雜例　凡不屬於第 73, 74 及 75 節所示的二次聯立方程式的形式的, 卽無一定的解法. 在諸雜例中, 若仍可應用一元二次方程式解法以解出的, 其求解的原則, 爲: 自原方程式先求得下列形式中的任一式:

(1)　$ax+by=c$.

(2)　$ax+by=c$, 及 $kxy=l$.

(3)　$x+y=p$, 及 $xy=q$.

凡能求得一式如 (1) 的, 則可按代入消去法, 由此式與原方程式中的任一式, 以求其解. 若能求得二式如 (2) 或 (3) 的, 卽可按第 75 節解法, 以求其解.

例 1.　解 $\begin{cases} 21(x+y)=10xy, & \text{(I)} \\ x+y+x^2+y^2=68. & \text{(II)} \end{cases}$

解　(I)÷5 與 (II) 相加, $x^2+y^2+2xy+x+y-\frac{21}{5}(x+y)=68$,

$$(x+y)^2-\frac{16}{5}(x+y)-68=0.$$

解上式，得 $$x+y=10, \tag{III}$$

或 $$x+y=-\frac{34}{5}. \tag{IV}$$

以(III)代入(I)，得 $$xy=21. \tag{V}$$

以(IV)代入(I)，得 $$xy=-\frac{357}{25}. \tag{VI}$$

解(III)及(V)，得 $x=7,y=3$; 或 $x=3,y=7$.

解(IV)及(VI)，得

$$x=\frac{1}{5}(-17\pm\sqrt{646}),\quad y=\frac{1}{5}(-17\mp\sqrt{646}).$$

故所求的解爲

$$x=7,y=3;\ x=3,y=7;$$

或 $$x=\frac{1}{5}(-17\pm\sqrt{646}),y=\frac{1}{5}(-17\mp\sqrt{646}).$$

例 2. 解 $\begin{cases}x^2+4x-3y=0, & \text{(I)}\\ y^2+10x-9y=0. & \text{(II)}\end{cases}$

解 (I)−(II)， $$x^2-y^2-6x+6y=0.$$

分解因式， $$(x-y)(x+y-6)=0.$$

因得 $$x-y=0, \tag{III}$$

或 $$x+y-6=0. \tag{IV}$$

解(I)與(III)，得 $x=0,y=0$; 或 $x=-1,y=-1$.

解(I)與(IV)，得 $x=2,y=4$; 或 $x=-9,y=15$.

故所求的解爲

$$x=0,\ y=0;\ x=-1,\ y=-1;\ x=2,\ y=4;\ 或\ x=-9,\ y=15.$$

例 3. 解 $\begin{cases} x^2-7y^2=29, & \text{(I)} \\ x^2-6xy+9y^2-2x+6y=3. & \text{(II)} \end{cases}$

解 由(II),得 $(x-3y)^2-2(x-3y)-3=0.$

分解因式, $(x-3y-3)(x-3y+1)=0,$

因得 $x-3y-3=0,$ (III)

或 $x-3y+1=0.$ (IV)

解(I)及(III),得 $x=6,\ y=1;$ 或 $x=-27,\ y=-10.$

解(I)及(IV),得 $x=\dfrac{7\pm3\sqrt{65}}{2},\quad y=\dfrac{3\pm\sqrt{65}}{2}.$

故所求的解爲

$$x=6,\ y=1;\ x=-27,\ y=-10;\ 或\ x=\frac{7\pm3\sqrt{65}}{2},\quad y=\frac{3\pm\sqrt{65}}{2}.$$

例 4. 解 $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{65}{28}, & \text{(I)} \\ 2(x^2+y^2)+(x-y)=34. & \text{(II)} \end{cases}$

解 由(I),可得 $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{65}{28}\left(\dfrac{y}{x}\right)+1=0.$

解上式,得 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{7}{4},$ (III)

或 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{7}.$ (IV)

解(II)及(III),得

$$x=2\frac{6}{65},\quad y=3\frac{43}{65};\ 或\ x=-2,\quad y=-3\frac{1}{2}.$$

解(II)及(IV),得

$$x=3\frac{1}{2},\ y=2;\ \text{或}\ x=-3\frac{43}{65},\ y=-2\frac{6}{65}.$$

故所求的解爲

$$x=3\frac{1}{2},\ y=2;\ x=2\frac{6}{65},\ y=3\frac{43}{65};$$

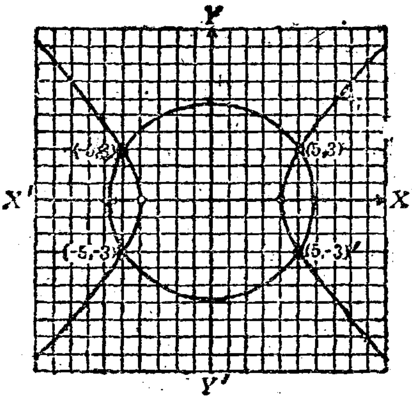
$$x=-2,\ y=-3\frac{1}{2};\ \text{或}\ x=-3\frac{43}{65},\ y=-2\frac{6}{65}.$$

77. 二元二次聯立方程式的圖解法 按第21節圖解法原理,可適用於解二元二次聯立方程式.先求出二方程式的圖形,此二圖形每一交點的坐標,即爲所求的一組解.一次式與二次式成聯立時,其圖形的交點恆爲二點.又兩個二次式成聯立時,其圖形的交點恆爲四點.在特殊情形下,就一次式與二次式而言,二圖形相切時,僅見一交點,實則二交點相重合,即表示二方程式有二組相同的解.又若二圖形並非相切,而僅有一交點,是即表示二方程式亦有二組解,惟一組爲有限值,其他一組則爲無限大.更有二圖形絕不相交時,是即表示二方程式亦有二組解,惟均爲虛數.至於二方程式均爲二次式,其圖形亦有相交,相切或不相交的情形,對應於其公共解,分別爲四組異實數,二組異實數與二組虛數,二組相同實數與二組虛數,或四組均爲虛數.

總上所論,由二圖形的交點,求得二方程式的解,乃以實數或有限值爲限;其餘的解爲無限大或虛數的,仍須就方程式在

難解出，因由圖形無法定其交點的緣故。

例 1. 用圖解法解 $\begin{cases} x^2+y^2=34, & \text{(I)} \\ x^2-y^2=16. & \text{(II)} \end{cases}$



解 由(I)，求得 y 的等式爲 $y=\pm\sqrt{34-x^2}$.

再求 x 及 y 的對應值，爲

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	……
y	±5.8	±5.7	±5.4	±5	±[illegible]	±3	……

聯結(0,5.8)，(0，−5.8)，(1,5.7)；(−1,5.7)，(1，−5.7)，(−1，−5.7)…等點，描成一平滑的曲線，此曲線稱爲圓.

由(II)，求得 y 的等式爲 $y=\pm\sqrt{x^2-16}$. 再求 x 及 y 的對應值，爲

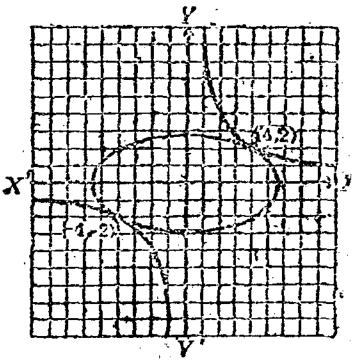
x	±4	±5	±6	±7	±8	±9	……
y	0	±3	±4.4	±5.7	±[illegible].9	±8.1	……

聯結 (4,0)(−4,0),(6,4.4),(6,−4.4),(−6,4.4),(−6,−4.4) .... 等點，而成一平滑的曲線．此曲線稱爲雙曲線．

由上二圖的四個交點坐標(5,3),(5,−3),(−5,3)及(−5,−3)，得所求的解爲

$$x=5,\ y=3;\ x=5,\ y=-3;\ x=-5,\ y=3 \text{ 或 } x=-5,\ y=-3.$$

例 2.　用圖解法解 $\begin{cases} x^2+4y^2=32, & \text{(I)} \\ xy=8. & \text{(II)} \end{cases}$



解　由(I)，求得 x 的等式爲　$x=\pm 2\sqrt{8-y^2}$.

再求得 x 及 y 的對應值爲

y	0	±1	±1.5	±2	±2.5	±2.8	......
x	±5.6	±5.3	±4.8	±4	±2.6	0	......

聯結(5.6,0),(−5.6,0),(5.3,1),(−5.3,1),(4.8,1.5),(−4.8,1.5) .... 等點，而成一平滑的曲線．此曲線稱爲橢圓．

由(II)，求得 y 的等式為 $y=\dfrac{8}{x}$，再求得 x 及 y 的對應值為

x	0	±1	±2	±3	±4	±5	±6	±7	……
y	∞	±8	±4	±2.7	±2	±1.6	±1.3	±1.1	……

聯結$(2,4)$，$(-2,-4)$，$(3,2.7)$，$(-3,-2.7)$，$(5,1.6)$，$(-5,-1.6)$……等點，而成一平滑的曲線，此曲線稱為雙曲線.

由上二圖的二個切點的座標$(4,2)$及$(-4,-2)$，得所求的解為

$$x=4,\ y=2;\ x=4,\ y=2;\ x=-4,\ y=-2\ \text{或}\ x=-4,\ y=-2.$$

78. **多元二次聯立方程式** 按第18節的解法，亦可適用於求解多元二次聯立方程式，惟所給的聯立方程式中，若無一次式，或僅有一個一次式，而不能用代入法消去未知數時，須先求出一次式，然後解出.

例 解
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=21, & \text{(I)}\\ 2xz+2yz-2xy=18, & \text{(II)}\\ x+y-z=5. & \text{(III)}\end{cases}$$

解 僅用(III)不易用代入法消去未知數，故必須另求一個一次式，其法為由(I)−(II)，得

$$x^2+y^2+2xy-2(x+y)z-z^2=3,$$

即 $$(x+y)^2-2(x+y)z-z^2=3. \qquad \text{(IV)}$$

以(III)代入(IV)， $$(z+5)^2-2(z+5)z-z^2=3.$$

解上式，得 $$z=2,\quad \text{或}\quad -3\frac{2}{5}.$$

以 z 的值代入(III)，而得 $$x+y=7, \qquad \text{(V)}$$

或 $$x+y=\frac{4}{3}. \qquad \text{(VI)}$$

再以 $z=2$，及(V)代入(II)，而得 $$xy=12; \qquad \text{(VII)}$$

復以 $z=-2\frac{2}{3}$，及(VI)代入(II)，而得 $$xy=-\frac{49}{3}. \qquad \text{(VIII)}$$

由(V)及(VII)，解得 $$x=3,\ y=4;\ 或\ x=4,\ y=3.$$

由(VI)及(VIII)，解得 $$x=\frac{2\pm\sqrt{151}}{3},\quad y=\frac{2\mp\sqrt{151}}{3}.$$

故所求的四组解為

$$x=4,\quad y=3,\quad z=2;$$

$$x=3,\quad y=4,\quad z=2;$$

$$x=\frac{2+\sqrt{151}}{3},\quad y=\frac{2-\sqrt{151}}{3},\quad z=-2\frac{2}{3};$$

或 $$x=\frac{2-\sqrt{151}}{3},\quad y=\frac{2+\sqrt{151}}{3},\quad z=-2\frac{2}{3}.$$

習 題 二 十 七

求解下列各方程式:

1. $\begin{cases} x^2-xy-y^2=21, \\ x-y=5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=3, \\ 2x^2-xy-y^2=1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x-y=11, \\ x^2-y^2=47. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2-2xy+y^2=17, \\ x-y=11. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2+x=y, \\ x+y=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-xy-y^2-x-y+3=0, \\ x-y-3=0. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+\text{[illegible]}y-\text{[illegible]}x-y=0, \\ x+y=\text{[illegible]}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{x}=1, \\ \dfrac{7}{xy}-\dfrac{1}{\text{[illegible]}y^2}=12. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x+\text{[illegible]}y=\text{[illegible]}7, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{14}{45}. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ (x+\text{[illegible]})^2=(y-1)^2. \end{cases}$

以上1至10題用第73節的解法.

11. $\begin{cases} \text{[illegible]}x^2-xy-\text{[illegible]}y^2=56, \\ x^2-xy-y^2=49. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2-\text{[illegible]}y^2=31, \\ 7x^2-\text{[illegible]}y^2=10. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x^2+\text{[illegible]}xy-\text{[illegible]}y^2=2\text{[illegible]}, \\ \text{[illegible]}x^2+\text{[illegible]}xy-\text{[illegible]}y^2=2\text{[illegible]}0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x(x+\text{[illegible]}y)=18, \\ x^2-\text{[illegible]}y^2=1. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=8, \\ \dfrac{1}{y^2}-\dfrac{4}{x^2}=8. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^2-\text{[illegible]}xy+y^2+1=0, \\ x^2-xy+y^2=13. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2+\text{[illegible]}xy+\text{[illegible]}y^2=3\frac{1}{2}, \\ 2x^2-\text{[illegible]}xy+\text{[illegible]}y^2=2\frac{3}{4}. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 7xy-8x^2=1\text{[illegible]}, \\ 8y^2-9xy=\text{[illegible]}8. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x^2-\text{[illegible]}xy=21, \\ xy+y^2=\text{[illegible]}8. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^2+2xy=54, \\ xy+\text{[illegible]}y^2=115. \end{cases}$

以上11至20題用第74節的解法.

21. $\begin{cases} \text{[illegible]}x-y=17, \\ xy=12. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \text{[illegible]}x+2y=16, \\ xy=10. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{45}{4}, \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

24. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=\dfrac{243}{8}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x^3+y^3=152, \\ x^2y+xy^2=120. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x^2y^2+5xy=84, \\ x+y=8. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x+y=7+\sqrt{xy}, \\ x^2+y^2=133-\sqrt{xy}. \end{cases}$

28. $\begin{cases} x^4+x^2y^2+y^4=931, \\ x^2-xy+y^2=19. \end{cases}$

29. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{10}{3}, \\ x+y=10. \end{cases}$

30. $\begin{cases} xy^{\frac{1}{2}}+yx^{\frac{1}{2}}=20, \\ x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=65. \end{cases}$

31. $\begin{cases} x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=5, \\ 6(x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})=5. \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^3-y^3=56, \\ x^2+xy+y^2=28. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \dfrac{34}{x^2+y^2}=\dfrac{15}{xy}, \\ x+y=8. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^5-y^5=992, \\ x-y=2. \end{cases}$

35. $\begin{cases} x+y=8xy, \\ x^2+y^2=40x^2y^2. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

37. $\begin{cases} x-y=5, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{84}. \end{cases}$

38. $\begin{cases} x+y=5, \\ (x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440. \end{cases}$

以上21至38題用第75節的解法.

39. $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=x^2y^2, \\ 5x^2-11xy+6y^2=12x^2y^2. \end{cases}$

40. $\begin{cases} x^2-7y^2-29=0, \\ x^2-3xy+2y^2-2x+\ y=3. \end{cases}$

41. $\begin{cases} x^2-y^2=x+y+20, \\ xy+10=2(x+y). \end{cases}$

42. $\begin{cases} xy-\dfrac{x}{y}=a, \\ xy-\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{a}. \end{cases}$

43. $\begin{cases} 4x^2+5y=6+20xy-25y^2+2x, \\ 7x-11y=17. \end{cases}$

44. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{17}{4}, \\ x^2+y^2=706. \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^2y^2+400=41xy, \\ y^2+x^2=[illegible]xy. \end{cases}$

46. $\begin{cases} 3x^2-xy+y^2=2y, \\ [illegible]x^2+4xy=[illegible]y. \end{cases}$

47. $\begin{cases} 9x^2+25x-12=12xy-4y^2+22y, \\ x^2-xy=18. \end{cases}$

48. $\begin{cases} xy+ab=2ax, \\ x^2y^2+a^2b^2=2b^2y^2. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x^2+y^2=(x+y+1)^2, \\ x^2+y^2=(x-y+2)^2 \end{cases}$

50. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1-xy}=3, \\ \dfrac{x-y}{1+xy}=\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

51. $\begin{cases} x^2+xy+x=14, \\ y^2+xy+y=28. \end{cases}$

52. $\begin{cases} (x^2-y^2)(x-y)=16xy, \\ (x^4-y^4)(x^2-y^2)=640x^2y^2. \end{cases}$

53. $\begin{cases} xy(3x+y)=10, \\ 27x^3+y^3=35. \end{cases}$

54. $\begin{cases} x-y=a(x^2+y^2), \\ x+y=b(x^2-y^2). \end{cases}$

55. $\begin{cases} x-y-z=2, \\ x^2+y^2-z^2=22, \\ xy=5. \end{cases}$

56. $\begin{cases} x^2+xy+xz=18, \\ y^2+yz+yx=-12, \\ z^2+zx+zy=30. \end{cases}$

57. $\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=a, \\ (z+x)(x+y+z)=b, \\ (x+y)(x+y+z)=c. \end{cases}$

58. $\begin{cases} yz=a+y+z, \\ zx=b+z+x, \\ xy=c+x+y. \end{cases}$

59. 已知二數的立方差為 189，且自其和的平方減去其積，所得的差為 63，求此二數.

60. 試分 37 為三份，其積為 1440，並使其中二份的積，較第三份的三倍多 12.

61. 甲、乙、丙三人合作某項工作，1 小時又 20 分，可以完成，若三人獨作，則丙所需的時間 2 倍於甲，又較乙多 2 小時，問三人獨力完成此工作，各須時若干？

62. 甲、乙、丙三人同時同向，赴同一目的地，甲每小時行 $4\frac{1}{2}$ 里，則先 B 2 小時到達；乙的速度每小時較丙快 1 里，其完成此行程的時間較丙少 3 小時. 求三人所行的距離.

63. 江邊有 A，B 二鎮，相距 24 里，由 A 至 B，須步行半程，舟行半程. 一人自 A 至 B，順流而下，須 5 小時，自 B 至 A，因係逆流而上，則須 7 小時. 若係靜水，則須 $5\frac{2}{3}$ 小時. 求此人步行的速度，舟行的速度，及水流的速度.

64. 甲、乙二人同時各自 P 及 Q 相向而行，適相遇時，甲已較乙多行 12 里；相遇後，甲依其原速再行 $4\frac{2}{3}$ 小時，即至 Q，乙依其原速，須再經 $7\frac{6}{7}$ 小時，始達 P. 求 P 及 Q 間的距離.

65. 試以圖解法，解下列方程式，並用代數解法，以核驗其結果.

(1) $\begin{cases} xy=1, \\ 3x-5y=2. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y^2=\frac{9}{4}x. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x^2+\text{[illegible]}y^2=6, \\ y=x+3. \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 1\text{[illegible]}x^2+y^2=16, \\ y=2x+5. \end{cases}$

第十一章

不定方程式

79. 不定方程式 由第18節所論，在通常情形下，一組含 n 元的 m 個一次方程式，當 $m<n$ 時，其解爲無限組，此 m 個方程式稱爲不定方程式．不定方程式的解，雖爲無限組，但在問題中，常有要求正整數解或整數解的情形，由此種限制所得的解，常爲有限．求此有限組的解，普通稱爲解不定方程式．

80. 二元一次不定方程式 由二元一次方程式 $ax+by=c$，求 x 及 y 的正整數解或整數解，必須應用下列基本定理．

定理一． 設方程式 $ax+by=c$ 的 a,b,c 均爲整數，且 a 與 b 爲互質數，或 a 與 b 有公因數，而此公因數亦能除盡 c 時，則此方程式均有整數解．

因 a 與 b 爲互質數，則按第33節的推論，必可求得二整數 m 及 n 合於 $am+bn=1$ 的關係；再以整數 c 乘此式的各項，而得 $amc+bnc=c$，即 $a(mc)+b(nc)=c$，即表示 $x=mc$ 及 $y=nc$，爲已知方程式的整數解．

若 a 與 b 有公因數,其公因數為 d,而同時能整除 c,則已知的方程式可變為 $a'x+b'y=c'$,其中 a' 與 b' 為整數,且為互質數,而 c' 為整數.按上列證法,$a'x+b'y=c'$ 亦當有整數解.

總上所證得的結果,可知本定理恆真.

定理二. 若 $x=\alpha$ 及 $y=\beta$,為合於上列條件的方程式 $ax+by=c$ 的一組整數解,則此方程式的一切整數解,可由下列的公式

$$x=\alpha+bt \text{ 及 } y=\beta-at,$$

取 t 的所有可能整數值而定.

因以 $x=\alpha+bt$ 及 $y=\beta-at$,代入 $ax+by=c$,並化簡,即得 $a(\alpha)+b(\beta)=c$. 此式中無 t,且 α 及 β 為方程式的一已知整數解,故此式可以成立. 即 $x=\alpha+bt$ 及 $y=\beta-at$,均可以適合方程式,而為其一解.

其次,除已知 α 及 β 為 $ax+by=c$ 的一組整數解而外,設 α' 及 β' 亦為此方程式的又一組整數解,則

$$a(\alpha)+b(\beta)=c \text{ 及 } a(\alpha')+b(\beta')=c.$$

二式相減,得 $$b(\beta'-\beta)=-a(\alpha'-\alpha),$$

且可化為 $$\beta'-\beta=-\frac{a(\alpha'-\alpha)}{b}.$$

因 $\beta'-\beta$ 為整數,而 a 與 b 又為互質數,故自等式中,可知 b 必

整除 $\alpha'-\alpha$；同理 a 必整除 $\beta'-\beta$. 再就上式變化，得

$$-\frac{\beta'-\beta}{a}=\frac{\alpha'-\alpha}{b}.$$

設二者的比值爲 t'，t' 當爲整數. 乃得

$$\alpha'=\alpha+bt',\ 及\ \beta'=\beta-at'.$$

故凡能適合 $ax+by=c$ 的整數解，其形式必爲

$$x=\alpha+bt\ 及\ y=\beta-at.$$

由是，知本定理恆眞.

由定理一及二，可知 $ax+by=c$ 中，a,b,c 若俱爲整數，且 a 與 b 爲互質數，或 a 與 b 有公因數，而此公因數又能同時整除 c 時，則此方程式可有無限組的整數解；因在其一切解的公式中，t 可爲任意整數. 若 a 與 b 爲異號時，則可得無限組正整數解，因若 $a>0$，$b<0$，則一切解變爲 $x=\alpha-bt$ 及 $y=\beta-at$，此時可設 t 爲任意負整數；若 $a<0$，$b>0$，則一切解變爲 $x=\alpha+bt$ 及 $y=\beta+at$，此時可設 t 爲任意正整數. 二者的結果均爲正整數. 若 a 與 b 同號，則其正整數解爲有限的組數，或竟無正整數解. 此由定理二的一切解公式，即易證明.

由定理一，a 與 b 爲互質數，可求得二整數 mc 及 nc，使合於 $a(mc)+b(nc)=c$，即得 $ax+by=c$ 的一組整數解；而 m 及 n，按第 38 節所論，乃由輾轉除法求出. 至於一切解的公式，亦係依同法而得. 茲舉例以詳其解法如下:

例 1. 求 $43x-12y=158$ 的一切整數解及正整數解.

解 就其係數的絕對值較小的變數 y 解之，而得

$$y=\frac{43x-158}{12}=3x-13+\frac{7x-2}{12}.$$

因須 x 與 y 俱為整數，故上式右端所含 $\frac{7x-2}{12}$ 部分，當為整數，即

$$\frac{7x-2}{12}\text{為整數.}$$

現將此分式的分子，試乘一整數，並除以 12，而使其餘式中分子所含 x 的係數的絕對值為 1，則所乘的數當為 7. 由是

$$\frac{49x-14}{12}\text{仍為整數，}$$

即

$$4x-1+\frac{x-2}{12}\text{為整數.}$$

欲此式為整式，其中所含 $\frac{x-2}{12}$ 的部分，必為整數. 設其值以 t 表示，則得

$$\frac{x-2}{12}=t,\quad \therefore\quad x=2+12t.$$

以所得 x 的等式代入原式，而得 $y=-6+43t$.

故所求的一切整數解為

$$x=2+12t \quad \text{及} \quad y=-6+43t.$$

而以 $t=1,2,3,\cdots\cdots$ 等值所得的為正.

例 2. 求 $16x+39y=1$ 的一切整數解及正整數解.

解 就其係數的絕對值較小的變數 x 解之，而得

$$x=\frac{1-39y}{16}=-2y+\frac{1-7y}{16}.$$

因須 x 及 y 均爲整數，故上式右端所含 $\frac{1-7y}{16}$ 的部分，應爲整數，即

$$\frac{1-7y}{16}\text{爲整數}.$$

現將此分式的分子，試乘一整數，並除以 16，以使其餘式中分子所含 y 的係數的絕對值爲 1，則所乘的數當爲 7．由是

$$\frac{7-49y}{16}\text{仍爲整數},$$

即

$$-3y+\frac{7-y}{16}\text{爲整數}$$

欲此式爲整數，則其中所含 $\frac{7-y}{16}$ 的部分，須爲整數．設其值爲 t，乃得

$$\frac{7-y}{16}=t,\qquad\therefore\quad y=7-16t.$$

以所求得 y 的等式代入原式，而得 $x=-17+39t$.

故所求的一切整數解爲

$$x=-17+39t\quad\text{及}\quad y=7-16t.$$

無論 t 爲任何整數，x 及 y 俱爲負，故本題無正整數解．

81．聯立方程式 二個三元一次聯立方程式，各項的係數均爲整數．按第 18 節所論，其解爲無限組．欲求其整數解或正整數解，其法爲：先由二方程式消去一未知數，而得一個含二元的一次不定方程式，可依第 80 節的解法以解出．茲舉例以示其解法如下：

例　求 $\begin{cases} 5x+y+7z=39, & \text{(I)} \\ 2x+4y+9z=63. & \text{(II)} \end{cases}$

的一切整數解.

解　自(I)及(II)消去 y,而得

$$18x+19z=93,\quad 即\ x=\frac{93-19z}{18}=5-z+\frac{3-z}{18}.$$

設以 t 表任意整數,則得

$$\frac{3-z}{18}=t,\qquad \therefore\ z=3-18t.$$

以 z 的等值代入含 x 及 z 的方程式,而得

$$x=2+19t.$$

再以 x 及 z 的等值代入(II),即

$$2(2+19t)+4y+9(3-18t)=63.$$

化簡,得　　$y=8+31t$

故所求的一切整數解為

$$x=2+19t,\quad y=8+31t,\quad 及\ z=3-18t.$$

無論 t 為任何整數, x,y,z 不能俱為正.

若由二個四元一次聯立方程式消去一元,而得一個三元一次方程式,其一切整數解,亦可依同法求出.

例　求 $5x+8y+19z=50$ 的一切整數解.

解　$x=\dfrac{50-8y-19z}{5}=10-y-3z-\dfrac{3y+4z}{5}.$

欲 x 為整數,其等式右端所含的分式值,當為整數.即

$$\frac{3y+4z}{5}\text{爲整數.}$$

設其值爲 s，則得 $$3y+4z=5s. \qquad \text{(I)}$$

又以4乘 $\frac{3y+4z}{5}$ 的分子，其積亦爲整數，化簡，得

$$\frac{12y+16z}{5}=2y+3z+\frac{2y+z}{5}.$$

其式的右端所含分式，當爲整數．設其值爲 t，得

$$2y+z=5t. \qquad \text{(II)}$$

(I)，(II)兩式中的 s 及 t 均爲整數．解此二式，得

$$y=-s+4t \quad 及 \quad z=2s-3t.$$

再以 y 及 z 的等值代入原方程式，即得

$$x=10-6s+5t.$$

故所求的一切整數解爲

$$x=10-6s+5t,\quad y=-s+4t \quad 及 \quad z=2s-3t.$$

當 $s=2$，$t=1$ 時，可得一組正整數解爲

$$x=3,\quad y=2,\quad z=1.$$

習 題 二 十 八

求下列各方程式的一切整數解或正整數解：

1. [illegible]$x+$[illegible]$y=213$.　　2. [illegible]$x+8y=103$.

3. [illegible]$x+$[illegible]$y=$[illegible].　　4. [illegible]$x+$[illegible]$y=414$.

5. [illegible]$x-7y=$[illegible]　　6. [illegible]$x-$[illegible]$y=56$.

7. $77x-30y=295$. 8. $17y-[illegible]z=[illegible]$.

9. $\begin{cases} 5x+2y+3z=[illegible]0, \\ 9x-4y+5z=270. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 5x+7y+[illegible]z=24, \\ 3x-y-4z=4. \end{cases}$

11. $\begin{cases} 5x+5y-8z=27, \\ 3x+2y+z=11. \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 3x+6y-2z=[illegible], \\ 5x+[illegible]y-3z=[illegible]8. \end{cases}$

13. $14x+161y-42z=35$. 14. $4x+3y=2z+3$.

15. 求化一分數$\frac{41}{35}$爲二正分數的和，已知其二者的分母各爲 5 與 7.

16. 一人購筆若干枝，及墨若干錠，共費去 280 元．但知筆每枝的價爲 10 元，墨每錠的價爲 7 元，問所購筆墨的數，各爲若干?

17. 凡除以 5,7,9 而能分別得餘數爲 4,6,8 的諸數中，其最小的爲何?

18. 一人付款，同時以一元及半圓爲單位，問對於 100 元的數，當有若干種付法?

第十二章

不等式

82. 不等式的基本定理 a 及 b 為二實數，其間的關係，若以 $a \neq b$ 表示，則謂為 a 不等於 b. 若 a 大而 b 小，則以 $a > b$，或 $b < a$ 表示，此二種關係式，俱稱為不等式.

不等式的符號為 $>$，其張口處正對大數，他端則置以小數. 此項符號的方向，不能任意改變.

$a > b$，即 $a-b>0$ 的意思，$b<a$，即 $b-a<0$ 的意思，故 0 可視為大於任何負實數，而小於任何正實數.

本章所論不等式中所含的文字，皆以表示實數為限. 以下倣此.

一不等式中所含文字，可代以任何實數或代以合於某種限制的任何實數，而不變其不等式的符號時，稱為絕對不等式. 如 $a^2+b^2>0$ 對於 a 與 b 為任何實數，皆能成立；而 $a^2+b^2>2ab$，在 $a \neq b$ 的情形下，a 與 b 為任何實數，其式俱能成立；故 $a^2+b^2>0$ 及 $a^2+b^2>2ab$ 均稱為絕對不等式. 凡不屬於絕對不等式的不等式，則稱為條件不等式. 如 $x^2-6x+8>0$ 中的 x 就不能代以

任何實數而不改其符號;而代以合於 $x>2$ 的所有實數值,其不等符號,亦非絕不改變,如代以 $x=3$,其不等符號即變向,故 $x^2-6x+8>0$ 稱為條件不等式.

絕對不等式相當於恆等式,而條件不等式則相當於方程式.

關於不等式運算,所應用的基本定理,分述於下:

定理一. 若 $a>b$,則 $a\pm c>b\pm c$. (證略)

定理二. 若 $a>b, c>d$,則 $a+c>b+d$. (證略)

推論 若 $a_1>b_1, a_2>b_2, a_3>b_3, \cdots\cdots$,則

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots>b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots. \text{(證略)}$$

定理三. 若 $m>0, a>b$,則 $ma>mb$.

因 $ma-mb=m(a-b)$,

而 $m>0, a-b>0$, $\therefore m(a-b)>0$;

$\therefore ma-mb>0$, 即 $ma>mb$.

推論 若 $m>0, a>b$,則 $\dfrac{a}{m}>\dfrac{b}{m}$.

定理四. 若 $m<0, a>b$,則 $ma<mb$.

因 $ma-mb=m(a-b)$,

而 $m<0, a-b>0$, $\therefore m(a-b)<0$;

$\therefore ma-mb<0$, 即 $ma<mb$.

推論 1. 若 $m<0, a>b$, 則 $\frac{a}{m}<\frac{b}{m}$.

推論 2. 若 $a>b$, 則 $-a<-b$.

定理五. 若 $a_1>b_1>0, a_2>b_2>0$, 則 $a_1a_2>b_1b_2$

因 $$a_1a_2-b_1b_2=a_1a_2-a_2b_1+a_2b_1-b_1b_2$$
$$=a_2(a_1-b_1)+b_1(a_2-b_2),$$

而 $$a_2>0\ b_1>0, a_1-b_1>0 \text{ 及 } a_2-b_2>0;$$
$$\therefore\ a_1a_2-b_1b_2>0, \text{ 卽 } a_1a_2>b_1b_2.$$

推論 1. 若 $a_1>b_1>0, a_2>b_2>0, a_3>b_3>0, \cdots\cdots$, 則
$$a_1a_2a_3\cdots\cdots>b_1b_2b_3\cdots\cdots.$$

推論 2. 若 $b_1<a_1<0, b_2<a_2<0$, 則 $a_1a_2<b_1b_2$.

定理六. 若 $a>b>0$, 且 n 爲正整數, 則 $a^n>b^n$.

因由定理五推論 1, 卽可證明.

定理七. 若 $a>b>0$, 且 n 爲正整數, 則 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

因其結果若爲 $a^{\frac{1}{n}}<b^{\frac{1}{n}}$, 則按定理六, 卽可得$(a^{\frac{1}{n}})^n<(b^{\frac{1}{n}})^n$,

卽$a<b$ 與原設不合. 若其結果爲$a^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}$, 則$(a^{\frac{1}{n}})^n=(b^{\frac{1}{n}})^n$, 卽$a=b$

亦與原設不合. 故必爲$a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

定理八. 若 $c>0, a>b>0$, 則 $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$. (證略)

83. 絕對不等式證法 應用 $a-b>0$, 即 $a>b$, 及 $a-b<0$ 即 $a<b$ 的定義, 及上列不等式的基本定理, 即可證明任一絕對不等式, 例示如下:

例 1. 設 $a\neq b\neq c$, 求證: $a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca$.

解 $(a-b)^2>0$, $a^2+b^2-2ab>0$, 即 $a^2+b^2>2ab$.

同理, 得 $b^2+c^2>2bc$ 及 $c^2+a^2>2ca$.

三式相加, 再同除以 2, 即得

$$a^2+b^2+c^2>ab+bc+ca.$$

例 2. 求證:

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)>(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2.$$

解 因 $(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2$

$$=(a_1b_2-a_2b_1)^2+(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2,$$

但此式右端恆為正, 故知

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2>0,$$

即 $$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)>(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)^2.$$

例 3. 設 a, b, c 為各不相等的正數, 求證:

$$\frac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc}.$$

解 因 $(a+b+c)^3-27abc=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3b^2c+3bc^2$

$$+3c^2a+3ca^2+6abc-27abc$$

$$=a^3+b^3+c^3-3abc+3b(c-a)^2+3c(a-b)^2+3a(b-c)^2$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

$$+3[b(c-a)^2+c(a-b)^2+a(b-c)^2].$$

因 $a>0$, $b>0$ 及 $c>0$, 且 $a\neq b\neq c$,

$$\therefore\ (a+b+c)^3-27abc>0,\ 即\ (a+b+c)^3>27abc.$$

$$\therefore\ a+b+c>3\sqrt[3]{abc},\ 即\ \frac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc}.$$

註 此題可由不等式 $a^3+b^3+c^3>3abc$ 直接證明.

例4. 設 a,b,c,d 爲各不相等的正數,則

$$\frac{1}{4}(a+b+c+d)>\sqrt[4]{abcd}.$$

解 因 $a^2+b^2>2ab$, 即 $(a+b)^2>4ab$.

$$\therefore\ \frac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}.$$

同理,得 $$\frac{1}{2}(c+d)>\sqrt{cd}.$$

及 $$\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})>\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}.$$

亦即 $$\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})>\sqrt[4]{abcd}.$$

則在 $$\frac{1}{4}(a+b+c+d)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(c+d)\right]$$

中,以上列各關係式,次第代入,則得

$$\frac{1}{4}(a+b+c+d)>\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})>\sqrt[4]{abcd}.$$

$$\frac{1}{4}(a+b+c+d)>\sqrt[4]{abcd}.$$

例 5. 無論 x 為任何實數,則 $x^2+2x+5>0$,試加證明.

解 因 $x^2+2x+5=(x+1)^2+(2)^2$.

而 $(x+1)^2>0$, $\therefore\ x^2+2x+5>0$.

84. 條件不等式解法 在條件不等式中,求其中所含某特別文字的值的界限,以在此界限內所有的實數,代不等式中的某文字,而能不變不等式的符號的,稱為解不等式.解不等式時,須應用 $a-b>0$ 即 $a>b$,與 $a-b<0$ 即 $a<b$ 的定義,以及第 82 節內的基本定理.尤須注意的,即不等式的兩端,同乘或同除以一正數,不等符號不變;倘同乘或同除以一負數,則不等符號須改變方向.例示如下:

例 1. 解不等式 $2x^2-7x+3>0$.

解 分解因式 $(2x-1)(x-3)>0$,

必有 $2x-1>0$ 及 $x-3>0$.由此二式,即易決定

$$x>3.$$

又上列二因式,亦可均為負,即 $2x-1<0$ 及 $x-3<0$.

$$x<\frac{1}{2}$$

故知 x 的界限為 $x<\frac{1}{2}$ 或 $x>3$；若 x 在 $\frac{1}{2}$ 與 3 之間，則上列不等式，不能成立。

例 2.　解不等式 $(x-1)(x-2)(x-3)<0$.

解　此式的三因式，其符號不外二種，卽三式俱為負，及二式為正，餘一式為負，卽

$$x-1<0,\ x-2<0,\ x-3<0,\quad \therefore x<1$$

或　$$x-1>0,\ x-2>0,\ x-3<0,\quad \therefore 3>x>2$$

或　$$x-2>0,\ x-3>0,\ x-1<0,$$

因 $x>3$，上列不等式不能成立，　$\therefore x<1$.

或　$$x-3>0,\ x-1>0,\ x-2<0,$$

因 $x>3$ 及 $x<2$，上列不等式不能成立，故所求 x 的界限為

$$x<1 \text{ 或 } 3>x>2.$$

例 3.　解不等式 $\frac{x-a}{x+a}+\frac{2a}{x-a}-\frac{10a^2}{x^2-a^2}>0$，但 $a>0$.

解　原式可變為 $\frac{(x+2a)(x-2a)}{(x-a)(x+a)}>0$.

此式中四個因式的符號，不外三種．首使四式俱為正；其次，四式俱為負；又次，四式中任二式為正，餘二式為負．依例 2 的試驗方法，而得此式 x 的界限為

$$x<-2a,\quad -a<x<a,\quad \text{或}\quad x>2a.$$

例 4.　解不等式 $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-1}>\sqrt{3x}$，但平方根為正.

解　兩端平方，$2x+1+x-1+2\sqrt{(2x+1)(x-1)}>3x$.

合併，得　$$2\sqrt{(2x+1)(x-1)}>0.$$

卽　$$(2x+1)(x-1)>0.$$

由此必有　$2x+1>0$ 及 $x-1>0$,　$\therefore x>1$.

或　$2x+1<0$ 及 $x-1<0$,　$\therefore x<-\frac{1}{2}$.

但 $x<-\frac{1}{2}$ 時,原不等式不能成立,故所求 x 的界值爲 $x>1$.

習 題 二 十 九

試證下列不等式 (1—9):

1. a,b 爲不等的正數,則 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$.
2. a,b,c 爲不等的正數,則 $a^3+b^3+c^3>3abc$.
3. a,b,c 爲不等的正數,則 $(a+b)(b+c)(c+a)>8abc$.
4. 若 $a^2+b^2=1$ 及 $x^2+y^2=1$,則 $ax+by<1$.
5. 若 $a^2+b^2+c^2=1$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$,則 $ax+by+cz<1$.
6. 若 a,b,c 爲不等的實數,則 $6abc<bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$.
7. 若 a,b,c 爲不等的實數,則 $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>abc(a+b+c)$.
8. 若 a,b,c 爲不等的實數,則 $2(a^3+b^3+c^3)>(a+b+c)(bc+ca+ab)$.
9. 任意正數與其逆數的和,不小於2.
10. 試比較 $3ab^2$ 與 a^3+2b^3 的大小,但 a,b 爲不等的正數.
11. a 與 b 爲不等的正數,試比較 $\frac{a+b}{2}$ 與 $\frac{2ab}{a+b}$ 的大小.

試解下列不等式:

12. $11x-\frac{43}{3}<\frac{5x}{3}+3$.
13. $(x+2)(x+3)>(x-1)(x-5)$.
14. $2x^3+4x>x^2+5x+8$.

15. $(x+1)(x-3)(x-[illegible])>0$.

16. $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-5)}\geqq 0$.

17. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}>0$.

18. $\sqrt{a-x}>x-b$，但 $a>b>0$，而平方根爲正.

中英名詞對照表

第一章

算術 Arithmetic
代數 Algebra
數量 Quantity
數字 Figure
正號 Sign of positive
負號 Sign of negative
加號 Sign of addition
減號 Sign of subtraction
乘號 Sign of multiplication
除號 Sign of division
等號 Sign of equality
不等號 Sign of inequality
正數 Positive number
負數 Negative number
絕對值 Absolute value
零 Zero(數); naught(數字)
整數 Integer
分數 Fraction
有理數 Rational number
無理數 Irrational number
實數 Real number
虛數 Imaginary number
無限小 Infinitesimal
極限 Limit
自然數 Nature number
符號律 Rule of sign
代數和 Algebraic sum
積 Product
因數 Factor
係數 Coefficient
指數 Exponent; index
乘冪 Power
項 Term
項的次數 Degrees of term
單項式 Monomial
二項式 Binomial
多項式 Polynomial
一次式 Linear expression
二次式 Quadratic expression
齊次式 Homogeneous expression
整式 Integral expression
分式 Fractional expression

有理式 Rational expression
有理整式 Rational integral expression
無理式 Irrational expression
括號 Bracket; parenthesis
括線 Vinculum
加法可易律 Commutative law of addition
加法可羣律 Associative law of addition
乘法可易律 Commutative law of multiplication
乘法可羣律 Associative law of multiplication
乘法分配律 Distributive law of multiplication
除法分配律 Distributive law of division
等式 Equality
等式律 Rule of equality
運算 Operation

第二章

加法 Addition
減法 Subtraction
被減式 Minuend
減式 Subtrahend
差 Difference
同類項 Like term
乘法 Multiplication
指數律 Law of exponent
升冪 Ascending power
降冪 Descending power
分離係數法 Method of detached coefficient
被乘式 Multiplicand
乘式 Multiplier
除法 Division
乘法的逆算法 Inverse of multiplication
迭減法 Repeated subtraction
商 Quotient
被除式 Dividend
除式 Divisor
餘式 Remainder
整除 Exact division
長除法 Long division
綜合除法 Synthetic division
餘式定理 Remainder theorem

第三章

恆等式 Identity; identical equation
方程式 Equation
元 Element; unknown quantity
一元方程式 Equation with one unknown quantity
多元方程式 Equation with many unknown quantities

多元 n 次方程式 Equation of nth degree with many unknown quantities

一次方程式 Linear equation; simple equation

有理整方程式 Rational and integral equation

無理方程式 Irrational equation

分式方程式 Fractional equation

根 Root

移項 Transposed

解方程式 To solve equation

二元一次聯立方程式 Simultaneous equation of first degree with two unknown quantities

解的組數 Number of solutions

無限組解 An infinite number of solutions

加減消去法 Elimination by addition and subtraction

代入消去法 Elimination by substitution

比較消去法 Elimination by comparison

公式解法 Solution by formula

相依方程式 Equations are not independent

矛盾方程式 Equations are not consistent

無解 No solution

變數 Variable

函數 Function

常數 Constant

有理整函數 Rational Integral function

一次函數的圖解 Graph of linear function

方程式的圖解 Graph of linear equation

原點 Origin

橫軸 Axis of abscissas, x-axis

縱軸 Axis of ordinates, y-axis

坐標軸 Axis of coördinates

橫標 Abscissa

縱標 Ordinate

坐標 Coördinates

直線 Straight line

曲線 Curve

圖解法 Graphical solution

交點 Point of intersection

第四章

因式 Factor

因式分解 Factorization

質代數式 Prime expression

複合代數式 Composite expression

質因式 Prime factor

二次三項式 Quadratic and trinomial expression

視察法 By inspection
配方法 By completing the square
常數項 Constant term
因式定理 Factor theorem
未定係數 Indeterminate coefficient
對稱函數 Symmetrical function
同類項 Term of the same type
絕對對稱 Absolute symmetry
輪換對稱 Cyclo-symmetry
輪換次序 Cyclic order
輪換法 Cyclic interchange

第五章

公因式 Common factor
互質 Prime to one another
最高公因式 Highest common factor
連乘積 Continued product
輾轉除法 Continued division, Euclidian Algorithm;
公倍式 Common multiple
最低公倍式 Lowest common multiple

第六章

分子 Numerator
分母 Denominator
分式的項 Term of fraction
有理分式 Rational fraction
簡分式 Simple fraction
繁分式 Complex fraction
眞分式 Proper fraction
假分式 Improper fraction
帶分式 Mixed fraction
連分式 Continued fraction
倒數 Reciprocal
約分 Reduction of fraction
不可約分式 Irreducible fraction
通分 Reduction to a common denominator
分項分式 Partial fraction
趨於無限大 Approach infinity
變數的極限 Limit of variable
函數的極限 Limit of function
趨於 k 而以 k 爲極限 Approach to k as a limit
不定形 Indeterminate form

第七章

n 次乘冪 nth power
n 次方根 nth root
平方根 Square root
立方根 Cubic root
n 次方根之主值 Principal nth root
開方 Evolution
乘方 Involution
開平方 Extraction of square root
開立方 Extraction of cubic root

完全乘冪 Perfect power
不盡根 Surd
差近值 Approximate value

第八章

根式 Radical
指數定律 Law of exponent
正指數 Positive exponent
負指數 Negative exponent
分數指數 Fractional exponent
根式化簡 Simplifying radicals
同類根式 Similar radicals
同次根式 Radicals of the same order
共軛根式 Conjugate radicals
有理化因式 Rationalizing factor
二次不盡根 Quadratic surd

第九章

二次方程式 Quadratic equation
判別式 Discriminant
根的性質 Character of the roots
實根 Real roots
等根 Equal roots
虛根 Imaginary roots
根的對稱函數 Symmetric functions of the roots
無限大根 Infinite roots
極大值 Maximum value
極小值 Minimum value
增根 Additional root

高次方程式 Equation of the higher order
倒數方程式 Reciprocal equation
二項方程式 Binomial equation

第十章

二次齊次式 Homogeneous expression of the second order
對稱式 Symmetric expression
二次聯立方程式 Simultaneous quadratic equation
拋物線 Parabola
雙曲線 Hyperbola
圓 Circle
橢圓 Ellipse
重合 Coincide
相切 Touch
對應 Correspondence
對應值 Corresponding value
公解 Common solution

第十一章

不定方程式 Indeterminate equation
整數解 Integral solution
正整數解 Positive integral solution

第十二章

不等式 Inequality
絕對不等式 Absolute inequality
條件不等式 Conditional inequality
界限 Restriction

中華民國三十四年三月初版

新中國教科書 高中代數學(乙組)

第一冊 正中書局道林紙本定價國幣一元
(外埠酌加匯費運費)

編著者 李仲珩 孫振憲

發行人 高明強

印刷所 正中書局

發行所 正中書局
(1903)

數校：：學內

本書用本局自造
之正中紙印刷

$1.00