工業叢書　基礎科学〔3〕

三角

工業専门学校編

1948

工業叢書

基礎科學

三角

關東工業專門學校編

工業叢書1948年出版預告

1. 代　　數
2. 幾　　何
3. 三　　角
4. 普通物理
5. 普通化學
6. 機械畫

工業叢書 基礎科學〔3〕 三角

1948年10月 初版

編輯者　關東工業專門學校 工業叢書編輯委員會

出版者　大連市廣和街 關東工業專門學校

印刷者　新生印刷廠

工業叢書卷頭語

舊中國是一個半殖民地半封建的社會。因此，舊中國的科學技術教育與科學技術工作也帶着濃厚的殖民地性買辦性，科學教材與參考書籍多係外國文原版或中文譯本，眞正根據中國實際需要並聯系中國實際的科學技術出版物則爲數不多。至於關東地區在日寇統治時代則從未出版中文科學技術書籍，現在被封鎖情况，內地出版的一些中文科學技術書籍，亦難於購到以作教材或供參考。本校爲此，特計劃編輯工業叢書，分別出版基礎科學，專門技術科學與其他科學技術參考書籍，以作本校或其他工業學校教材，並供生產技術工作者學習參考之用。編輯方針力求切合實際需要與聯系中國實際，俾有助於新中國科學技術事業的發展。

屈伯川

一九四八年三月於大連關東工專

前　　言

本書是本校平面三角講義，由本校機械系教師張世鈞先生所編，在教學過程中曾經過刪補，內容較精練，易於理解，可作中學及工業學校教材之用。

關東工業專門學校工業叢書編輯委員會

1948年10月於大連

目　　次

第一章　銳角的三角函數

§1.　銳角的三角函數

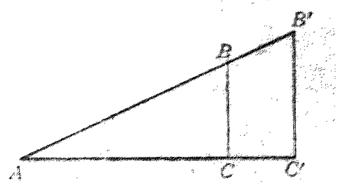
在任意的銳角 BAC 的一邊上，取任意的兩點 B，B′，由 B，B′向 AC 作垂線BC，B′C′時，則BC∥B′C′。

因此，　$\triangle BAC \backsim \triangle B'A'C'$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'},$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'},$$

$$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'},$$



就是說只要銳角 BAC 的大小不變，則上列各比的值也不能變，它們和 B，B′點的位置並無任何關係。因此，對於一個銳角 A的下列各量可下定義。

(i)　角 A的垂線對斜邊的比稱爲角 A 的**正弦**（sine）以符號sinA表示

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\cdots\cdots$$

(ii)　角A的底邊對斜邊的比稱爲角A的**餘弦**（cosine）以符號cosA表示，

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\cdots\cdots$$

(iii)　角 A的垂線對底邊的比稱爲角 A 的**正切**（tangent）以符號 tanA 表示

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}=\cdots\cdots$$

(IV) 角A的底邊對垂線的比稱爲角A的**餘切**(cotangent)以符號cotA表示，

$$\cot A=\frac{AC}{BC}=\frac{AC'}{B'C'}=\cdots\cdots$$

(V) 角A的斜邊對底邊的比稱爲角A的**正割**（secant）以符號secA表示，

$$\sec A=\frac{AB}{AC}=\frac{AB'}{AC'}=\cdots\cdots$$

(VI) 角A的斜邊對垂線的比稱爲角A的**餘割**（cosecant）

$$\operatorname{cosec}A=\frac{AB}{BC}=\frac{AB'}{B'C'}=\cdots\cdots$$

根據以上的定義，就能得出下列各式：

$$\left.\begin{aligned}\cot A&=\frac{1}{\tan A}\quad\text{或}\quad \tan A\cdot\cot A=1,\\ \sec A&=\frac{1}{\cos A}\quad\text{或}\quad \cos A\cdot\sec A=1,\\ \operatorname{cosec}A&=\frac{1}{\sin A}\quad\text{或}\quad \sin A\cdot\operatorname{cosec}A=1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

以上所定義的sinA，cosA，tanA，cotA，secA，cosecA 等六個量就稱爲銳角A的三角函數。

其次，再把三角函數和實際問題聯系起來。我們常常聽到「某某電車路的坡度爲1/40」，這就是說：「這個電車路線在相隔40m 之間有 1 m 的高度差」，也就是說「這個電

車路線的坡的角度之正弦爲1/40」。再是光線從直上直下射來的時候，物體的影長對實長的比爲物體與水平面構成的角的餘弦。因此，物體的影長等於實長乘此角的餘弦。但假如光線要從斜面射來，而和水平面構成角度 θ 時，則直立於地面的物體的實長對其影長的比爲 $\tan\theta$。因此，物體的實長等於影長乘 $\tan\theta$。

習　　題

1. 於三角形 ABC，設 $\angle C=90^\circ$，$AC=12cm$，$BC=5cm$ 時，試求 $\angle A$ 的正弦，餘弦，正切。
2. 於三角形 ABC，設 $\angle C=90^\circ$，$AC:BC=\sqrt{3}:1$ 時，試求 $\angle A$ 的三角函數。
3. 直角三角形三邊的比爲25：24：7時，試求其最小角的三角函數。
4. $\sin A=0.5$ 時，試求 $\cos A$，$\tan A$ 的值。
5. $\cos A=\frac{5}{13}$ 時，試求 $\sin A$，$\tan A$ 的值。
6. $\tan A=\frac{3}{5}$ 時，試求 $\sin A$，$\cos A$ 的值。
7. $\sin\alpha=\frac{2mn}{m^2+n^2}$，且 $m>n$ 時，求 $\cos\alpha$，$\tan\alpha$ 的值。
8. 有斷面爲等腰梯形的壕溝，其深爲h m，溝底寬爲a m，傾斜角爲 α 度時，求此溝的上寬。
9. 等腰三角形的相等邊及底邊的長短各爲10cm，7cm時，求底角及頂角的正弦與餘弦。
10. 設半徑各爲 a，b $(a>b)$ 的二圓互相外切時，試求其外

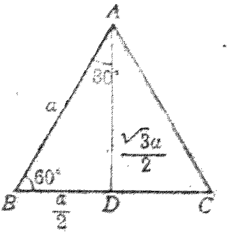
公切線與中心線所構成的角度的正弦，餘弦，正切。

§2. 30°，45°，60°角的三角函數

現在我們要研究幾個特殊的角的三角函數。首先從正三角形 ABC 的頂點 A 向底邊 BC 作垂線 AD。設 AB，BC，CA之長爲a，則於直角三角形 ABD：

$\angle ADB=90^\circ$，$\angle B=60^\circ$，$\angle BAD=30^\circ$，

而$AB=a$，$BD=a/2$。因此由幾何學的畢氏定理



$$AD=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

因此

$$\sin 60^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \sin 30^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2}$$

$$\cos 60^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2},\qquad \cos 30^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3},\qquad \tan 30^\circ=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

其次於等腰直角三角形 ABC，設 $AC=BC=a$，$\angle ACB=90^\circ$時，由幾何學的畢氏定理

$$AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$$

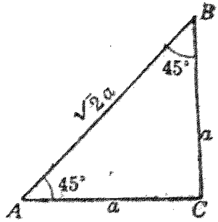
因此

$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$

$= \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 45^\circ = \cot 45^\circ$

$= \frac{a}{a} = 1$



把以上的結果綜合起來就能得到下列的各式：

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2},\ \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots (2)$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan 45^\circ = 1 \cdots\cdots (3)$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \frac{1}{2},\ \tan 60^\circ = \sqrt{3} \cdots (4)$$

習　題

1. 有一個煙筒，於距其基底100m處仰視其頂，得仰角30°。問此煙筒有多高？
2. 有30呎長的梯子，在距牆15呎遠的地面上放其下端而架之於牆上時，試求梯子和水平面構成的角度。
3. 在河岸上，有相距 100m 的二點 A，B。自 A，B 望對岸的一點 P，得 ∠PAB=60°，∠PBA=45°。試求兩岸的垂直距離。
4. 有一個10m高的大樓，從大樓的基底仰望某塔頂時，得仰角45°，而從樓頂仰望時，則得仰角30°，試求塔高。
5. 有大小二塔，大塔之高為36m，從大塔頂尖俯視小塔頂

尖及基底時，各得俯角30°及60°。試求小塔之高。

6. 從35m高的塔上，俯視在地面上位於正東的二亭，得俯角各爲45°，60°。問二亭間的距離爲若干？

7. 試求下列三角函數的和。

(i) $\sin 30^\circ + \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$

(ii) $\sin 60^\circ + \cos 30^\circ + \tan 30^\circ$

(iii) $\cos 60^\circ + \sin 45^\circ + \tan 45^\circ$

(iv) $\tan 30^\circ + \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

8. 試證下列等式，

(i) $\tan 30^\circ\ (\tan 45^\circ + \cos 30^\circ) = \cot 60^\circ + \cos 60^\circ$

(ii) $\dfrac{\sin 60^\circ + \cot 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \tan 45^\circ + \sec 30^\circ$

§ 3. 三角函數的眞數表

特殊角的三角函數在前節已經求出。但是其他角的三角函數是不能像那樣簡單求出來的。以往的數學家，曾利用微分積分學把各種角的三角函數計算出來，作成了一個表。所以現在我們只要利用這個表就能求出任意角的三角函數的值。這個表稱爲**三角函數的眞數表**。在本書卷末列有正弦表，餘弦表，正切表。

例1： $\sin 32^\circ 48' = 0.5417$

先在正弦表左端上下欄裡找出 32°，由此水平地往右看，再在上邊的示分欄裡找出 48′，由此鉛直地往下看，在這個水平線和鉛直線的交點處得5417，

例2： 求$\sin 57^\circ 28'$的值。

用例1的方法，先查出$\sin 57^\circ 24' = 0.8425$，再順着$57^\circ$的水平線往右看，就可以找到比例部分表。在上邊的示分欄裡找出$4'$，由此鉛直的往下看，和57°的水平線相交處得6,把6加到8425裡得8431。即

$$\begin{array}{rl} \sin 57^\circ 24' = 0.8425 & \\ 4' \qquad\quad 6 & (+ \\ \hline \sin 57^\circ 28' = 0.8431 & \end{array}$$

在這裡應當注意「比例部分的數字，併不限於加，也有應當減去這個數的時候」。例如先查出$\sin 57^\circ 30' = 0.8434$

$$\begin{array}{rl} \sin 57^\circ 30' = 0.8434 & \\ 2' \qquad\quad 3 & (- \\ \hline \sin 57^\circ 28' = 0.8431 & \end{array}$$

因為　$\sin 57^\circ 24' = 0.8425$　，$\sin 57^\circ 30' = 0.8434$　，而所求的$\sin 57^\circ 28'$是在此二數之間。我們要根據這些具體情況來判斷是應當加還是應當減。

例3:　求$\cos 78^\circ 35'$的值。

由餘弦表

$$\begin{array}{rl} \cos 78^\circ 30' = 0.1994 & \\ 5' \qquad -14 & (+ \\ \hline \cos 78^\circ 35' = 0.1980 & \end{array}$$

例4:　求滿足$\cos x = 0.6423$的x的值。

由餘弦表中找出和0.6423最接近的數，得

$$0.6428 > 0.6423 > 0.6414$$

而

$$\cos 50^\circ 0' = 0.6428$$

$$\cos 50^\circ 6' = 0.6414$$

$$0.6423 - 0.6414 = 0.0009$$

$$\begin{array}{ll} \cos 50^\circ 6' = 0.6414 & \\ \underline{\quad -4' \qquad\quad 9} & (+ \\ \cos 50^\circ 2' = 0.6423 & \qquad \therefore \quad x = 50^\circ 2' \end{array}$$

例 5: 求滿足$\tan x = 0.9211$的x的值。

由正切表 $\tan 42^\circ 36' = 0.9195$

$$\begin{array}{ll} \underline{\qquad 3' \qquad\quad 16} & (+ \\ \tan 42^\circ 39' = 0.9211 & \qquad \therefore \quad x = 42^\circ 39' \end{array}$$

習　　題

1. 爲什麼不需要餘切表，正割表，餘割表？
2. 在幾何講義上的三角函數表只取到45°，够不够用？爲什麼？
3. 試求下列各三角函數的值。

   (i) $\sin 18^\circ 52'$ (ii) $\cos 38^\circ 48'$ (iii) $\sin 73^\circ 36'$

   (iv) $\sin 27^\circ 42'$ (v) $\cot 65^\circ 23'$ (vi) $\cos 81^\circ 28'$
4. 試求滿足下列各式的x的值，但設x爲銳角。

   (i) $\sin x = 0.7282$ (ii) $\cos x = 0.5165$

   (iii) $\tan x = 2.2709$ (iv) $\cot x = 0.3225$
5. 設$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$，試求$a = 42$，$b = 78$，$c = 6$時，A是多少度？
6. 於距某樹 25m處仰視樹尖，得仰角 $25^\circ 30'$時，問樹多高？
7. 某道路的坡度爲1/60。求其傾斜角是多少度？
8. 日光與地面所構成的角爲55°時，某塔的影長是28m。求塔高。
9. 有一圓錐形的薄洋鐵桶，其含軸斷面的頂角爲54°。現在

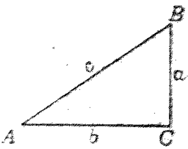
把半徑 2.6cm 的球裝入桶內，試求球的最下點和圓錐頂點之間的距離。

§4. 直角三角形的解法

三角形是由三個邊和三個角所構成的。在這六個要素中若知道三個要素（但必包含一個邊），則其餘的三個要素就能計算出來，這就是所謂「三角形的解法」。但於直角三角形，一角爲直角，因此，只要知其一邊和另一個要素，就能解這個三角形。

(I) **知其斜邊與一銳角時**：

例如，知其斜邊 c 及一銳角 A，



因 $\sin A=\dfrac{a}{c}$， $\cos A=\dfrac{b}{c}$

$$\therefore\quad a=c\sin A，b=c\cos A，B=90^\circ-A\cdots\cdots(5)$$

(II) **知其直角的一邊及一銳角時**：

例如，知其一邊b及一銳角A，

因 $\tan A=\dfrac{a}{b}$， $\cos A=\dfrac{b}{c}$

$$\therefore\quad a=b\tan A，c=\frac{b}{\cos A}，B=90^\circ-A\cdots\cdots\cdots(6)$$

(III) **知其斜邊及另外一邊時**：

例如，知其斜邊 c 及另外一邊 a，

因 $\sin A=\dfrac{a}{c}$， $\cos A=\dfrac{b}{c}$，

設以符號 $\sin^{-1}k$表示滿足$\sin\theta=k$的角度θ時，則

$$A=\sin^{-1}\frac{a}{c}\ ,\ b=c\ \cos A\ ,\ B=90^\circ-A\cdots\cdots\cdots(7)$$

(IV) **知其直角的二邊時：**

因 $\tan A=\frac{a}{b}$ ， $\sin A=\frac{a}{c}$

$$\therefore\quad A=\tan^{-1}\frac{a}{b}\ ,\ c=\frac{a}{\sin A}\ ,\ B=90^\circ-A\cdots\cdots\cdots(8)$$

習　　題

1. 試解下列各直角三角形，但設$\angle C=90^\circ$。
   (i) $c=10m$ ，$\angle A=36^\circ$
   (ii) $a=20m$ ，$\angle B=35^\circ12'$
   (iii) $c=50m$ ， $b=40m$
   (iv) $a=4m$ ， $b=3m$
2. 於前圖， $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ ， 求證。
3. 有1英里長的坡路，某物體以等速度順此坡路下降，費時1小時，試求此物體的鉛直速度是多少呎/秒？但坡路的坡度爲1/100，1英里=5280呎。
4. 在距塔120呎處仰視塔頂，得仰角25°。求塔高？
5. 某登山電車路的最大坡度爲1/7，試求此時坡路和水平面成多少度角？
6. 有一條坡路，直達某山頂，其長爲100m，而和水平面構成30°的傾斜角。今擬鋪設一環道，使其傾斜角爲15°。試求新環道有多長？
7. 沿某河岸取40m長的基線AB，遙望對岸的一點P，測

得$\angle PAB=45^\circ$，$\angle PBA=75^\circ$。試求河寬？

8. 在海濱的一點A望某山兩側的二村莊B，C，得$\angle BAC=23^\circ$，A，B的距離爲3.5公里，$AC\perp BC$時，求二村間的距離。

§5. 三角函數的基本公式

於本章§1中已經講過

$$\tan A=\frac{BC}{AC}$$

以AB除右邊的分母及分子，則

$$\tan A=\frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}}$$

然因 $\frac{BC}{AB}=\sin A$，$\frac{AC}{AB}=\cos A$

$$\therefore\quad \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

因此，$$\cot A=\frac{1}{\tan A}=\frac{\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

再由幾何學的畢氏定理

$$BC^2+AC^2=AB^2$$

以AB^2除兩邊，$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2+\left(\frac{AC}{AB}\right)^2=1$$

$$\therefore\quad (\sin A)^2+(\cos A)^2=1$$

普通以$\sin^2A$，$\cos^2A$表示$(\sin A)^2$，$(\cos A)^2$

$$\therefore\quad \sin^2A+\cos^2A=1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

以$\cos^2A$除(11)式的兩邊，則得$\left(\frac{\sin A}{\cos A}\right)^2+1=\left(\frac{1}{\cos A}\right)^2$

然因　$\frac{\sin A}{\cos A}=\tan A$，$\frac{1}{\cos A}=\sec A$

$$\therefore\quad 1+\tan^2A=\sec^2A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

以$\sin^2A$除(11)式的兩邊，則得$1+\left(\frac{\cos A}{\sin A}\right)^2=\left(\frac{1}{\sin A}\right)^2$

$$\therefore\quad 1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

§6. 恆等式的証明

在§5中所求的諸公式主要是用於三角函數的變形。在本§裡，將作恆等式的證明，以資熟習和掌握公式。「證明恆等式」並沒有一般的普遍的方法。普通都用旣知的公式把各式中的三角函數盡量化簡，而且也須要把三角函數的種類盡量減少。以下舉例說明。

例1:試證 $(\sin A+\cos A)^2=1+2\sin A\cos A$

〔證明〕左邊$=\sin^2A+2\sin A\ \cos A+\cos^2A$

$=\sin^2A+\cos^2A+2\sin A\ \cos A$

$=1+2\sin A\ \cos A$

例2:試證　$\tan A+\cot A=\sec A\operatorname{cosec}A$

〔證明〕左邊$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{\sin^2A+\cos^2A}{\sin A\cos A}$

$$=\frac{1}{\sin A\cos A}=\sec A\operatorname{cosec}A$$

例 3:試證　$\sec^4A+\tan^4A=1+2\sec^2A\tan^2A$

〔證明〕左邊$=(\sec^2A)^2+\tan^4A$

$$=(1+\tan^2A)^2+\tan^4A$$

$$=1+2\tan^2A+2\tan^4A$$

右邊$=1+2(1+\tan^2A)\tan^2A$

$$=1+2\tan^2A+2\tan^4A$$

∴　左邊＝右邊

例 4:試證$\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

〔證明〕左邊－右邊$=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$$\frac{\sin^2\theta-(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\theta-(1-\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-1}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=0$$

∴　左邊＝右邊

習　　題

試證下列各恒等式（1－10）

1. $(\cos^2\theta+\cot^2\theta)\tan^2\theta=\sec^2\theta+(\cos^2\theta-1)\tan^2\theta$
2. $2(1+\sin A)(1+\cos A)=(1+\sin A+\cos A)^2$
3. $\sin^4x-\cos^4x=1-2\cos^2x$

4. $\tan^2 A+\cot^2 A=\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A-2$

5. $\dfrac{\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta}=\tan\theta$

6. $\dfrac{1+\cos\theta}{\sec\theta-\tan\theta}-\dfrac{1-\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=2(1+\tan\theta)$

7. $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}}=\sec A-\tan A$

8. $\sin^4 A+\cos^4 A=2\sin^4 A-2\sin^2 A+1$

9. $\dfrac{\sin^2 A}{\cos A}+\dfrac{\tan A}{\cot A}=\dfrac{\sin^2 A(1+\cos A)}{\cos^2 A}$

10. $\sin^3 A-\cos^3 A=(\sin A-\cos A)(1+\sin A\cos A)$

11. $x\sin A+y\cos A=1$，$x\cos A-y\sin A=1$ 時，試證，$x=\sin A+\cos A$，$y=\cos A-\sin A$。

12. 試證 $2(\sin^6 A+\cos^6 A)-3(\sin^4 A+\cos^4 A)=$一定。

13. $3\sin\theta+5\cos\theta=5$ 時，試證

$$(3\cos\theta-5\sin\theta)^2=9$$ 。

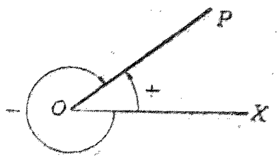
14. 試證 $\sin\theta\tan\theta\geqq 2(1-\cos\theta)$。

15. $\sin\theta+\sin^2\theta=1$ 時，試證 $\cos^2\theta+\cos^4\theta=1$。

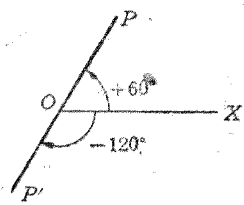
第二章　一般角的三角函數

§1.　一般角

以上已經把銳角的三角函數概略地講完了，從現在我們更進一步來研究一般角。半直線OX在O點周圍回轉，回轉到OP的位置時就構成角XOP。但是回轉有兩個方向，假如回轉的方向和錶針方向相反時，稱爲**正角**，要和錶針方向相同時，則稱爲**負角**。表示正角時用加號，表示負角時則用減號。



因此，對角XOP有兩種想法，就是有正負兩種角，設一角爲$+45^\circ$時，他角則爲-315°。於下圖，$\angle XOP=+60^\circ$時，則$\angle XOP'=-120^\circ$。



再是因爲OP的回轉可以向正或負的方向無限地繼續，同樣的一個角XOP可以取正負無限個的值。例如右圖的XOP爲$+60^\circ$，向正的方向再回轉一次，仍回到OP的位置，所以也能認爲是$+60^\circ+360^\circ=+420^\circ$，向負的方向回轉一次也能回到原位置，所以也能認爲是$+60^\circ-360^\circ=-300^\circ$。

一般來講，　$60^\circ\pm360^\circ\times n$（$n$爲正整數）

都能表示$\angle XOP$。像這樣廣義的角就稱爲**一般角**。

於一般角，O稱爲**原點**，OX稱爲**始邊**，OP稱爲**終邊**或**動徑**。一般角經過適當的變形後，就可以使之爲$0^\circ\sim360^\circ$

間之角。例如，$1740^\circ = 360^\circ \times 4 + 300^\circ$ 因此，1740° 角的動徑和 300° 角的動徑相同；$-1350^\circ = -360^\circ \times 3 - 270^\circ$ $= -360^\circ \times 4 + 90^\circ$ 因此，-1350° 角的動徑和 -270° 角及 90° 角的動徑也相同。

一般角既可變爲 $0^\circ \sim 360^\circ$ 間之角，它就必然地存在於第一象限（$0^\circ \sim 90^\circ$），第二象限（$90^\circ \sim 180^\circ$），第三象限（$180^\circ \sim 270^\circ$），第四象限（$270^\circ \sim 360^\circ$）中之一。例如

$405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$；$-300^\circ = -360^\circ + 60^\circ$ 皆爲第一象限之角，

$510^\circ = 360^\circ + 150^\circ$；$-225^\circ = -360^\circ + 135^\circ$ 皆爲第二象限之角，

$570^\circ = 360^\circ + 210^\circ$；$-135^\circ = -360^\circ + 225^\circ$ 皆爲第三象限之角，

$675^\circ = 360^\circ + 315^\circ$；$-60^\circ = -360^\circ + 300^\circ$ 皆爲第四象限之角。

習　　題

試求與下列諸角動徑相同的最小正角。

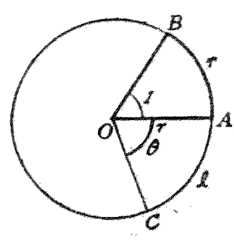
(i) 840°　(ii) 765°　(iii) -240°　(iv) -405°　(v) -1380°

§ 2. 弧度法

在 § 1，我們使用的角的單位爲**六十分法**，就是說：

$$周角 = 360^\circ，1^\circ = 60'，1' = 60''$$

但是在工學的理論上經常用另一種單位**弧度角**（Radian），其定義如下：



於半徑 r 的圓周上，取弧 AB，使 $\overset{\frown}{AB} = r$，取此時的 $\angle AOB$ 爲角的單位，稱爲 1 Radian。在這裡值得注意的就是角的大小和半徑 r

的大小無關。在平面幾何上我們已經學過了：於等圓（或同圓），弧長與其圓心角恒成比例。

$$\frac{\angle AOB}{360^\circ}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{\text{全圓周}}=\frac{r}{2\pi r}=\frac{1}{2\pi}\ (\pi\text{ 爲圓周率})$$

$$\therefore\quad \angle AOB=\frac{360^\circ}{2\pi}=\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{3.1416}=57^\circ 17' 44.8''$$

就是說： $1\ \textbf{Radian}=57^\circ 17' 44.8'' \doteq 57^\circ 17.7'$

$$\pi\ \text{Radian}=180^\circ$$

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\ \textbf{Radian}$$

例如，於半徑 r 的圓 O，取圓心角 AOC $=\theta$ Radian，設 $\overset{\frown}{AC}=\ell$，扇形AOC的面積爲S時，則

$$\frac{\ell}{r}=\frac{\theta}{1}\qquad\therefore\quad \ell=r\theta$$

$$\frac{S}{\pi r^2}=\frac{\theta}{2\pi}\qquad\therefore\quad S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\ell r$$

習　　　題

1. 試以弧度法表示下列各角。

 (i) 36° (ii) 45° (iii) 60° (iv) 135° (v) 270°

2. 試以六十分法表示下列各角。

 (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{2}{3}\pi$ (iii) $\frac{5}{6}\pi$ (iv) $\frac{\pi}{2}$ (v) 2π

3. 於半徑10cm 的圓周上取弧AB，使 $\overset{\frown}{AB}=5\text{cm}$，問弧的圓心角是幾度幾分？

4. 於某圓O，取圓心角AOB，使 $\angle AOB=1.8$ Radian，

而得 $\overset{\frown}{AB}=9cm$時，問圓的半徑有多長？

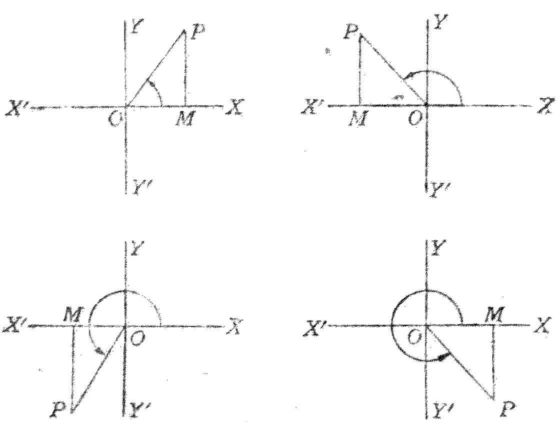
5. 試證半徑r，圓心角 θ Radian的弓形的面積為

$$\frac{1}{2}r^2(\theta-\sin\theta)$$

6. 在12時15分，長短二錶針所構成的銳角是多少Radian？
7. 試求緯度的差是 1 度的南北二地點的距離，但設地球的半徑為3960英里。

§ 3. 一般角的三角函數

如下圖所示，於角的動徑 OP 上取一點 P，由P 點向始邊OX或其延長OX′上，作垂線PM，使垂足為M，設 $\angle XOP=\theta$ 時，則一般角的三角函數如下：



$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}，\cos\theta=\frac{OM}{OP}，\tan\theta=\frac{MP}{OM}$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{OP}{MP},\ \sec\theta=\frac{OP}{OM},\ \cot\theta=\frac{OM}{MP}$$

但是MP有時向上有時向下，OM有時向左有時向右，因此，設下列規定加以區別。

(1). **動徑 OP 恒為正。**

(2). **垂線 MP 於 XOX' 的上方時為正，於其下方時為負。**

(3). **底邊 OM 於 YOY' 的右方時為正，於其左方時為負。**

由於以上的三個規定，可以得到下列結論。

第一象限的三角函數皆取正值。

第二象限角的正弦，餘割皆取正值，其他皆取負值。

第三象限角的正切，餘切皆取正值，其他皆取負值。

第四象限角的餘弦，正割皆取正值，其他皆取負值。

其次由於上述定義，$\sin\theta\operatorname{cosec}\theta=1$，$\cos\theta\sec\theta=1$，$\tan\theta\cot\theta=1$ 以及 §5 中的諸基本公式，於一般角亦皆成立。由上述規定更可得出下列諸公式：

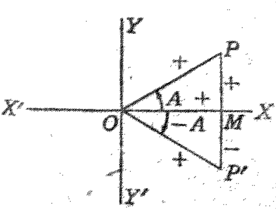
(i) 設n為正整數時，

$$\left.\begin{aligned}\sin(A\pm360^\circ\times n)&=\sin A\\ \cos(A\pm360^\circ\times n)&=\cos A\\ \tan(A\pm360^\circ\times n)&=\tan A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(ii)設A為第一象限角，於直角三角形OPM，使∠MOP＝A，延長PM，使PM＝－MP′

則 $\triangle OPM\equiv\triangle OP'M$

$\therefore\ \angle MOP'=-A$



因此，$\sin A=\sin\angle MOP=\dfrac{MP}{OP}$

$$\sin(-A)=\sin\angle MOP'$$

$$=\frac{MP'}{OP}=-\frac{MP}{OP}=-\sin A$$

$$\cos A=\frac{OM}{OP}，\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\cos A，$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}，\quad \tan(-A)=\frac{\sin(-A)}{\cos(-A)}$$

$$=\frac{-\sin A}{\cos A}=-\tan A$$

$$\therefore\ \left.\begin{aligned}\sin(-A)&=-\sin A\\ \cos(-A)&=\cos A\\ \tan(-A)&=-\tan A\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

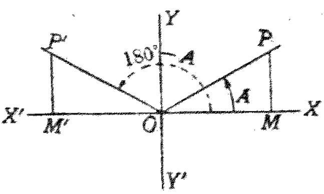
若A爲其他象限角時亦可用同樣方法證明。

(iii)設A爲第一象限角，取點P′，使

$\angle XOP'=180^\circ-A$，

$OP=OP'$，

$\angle MOP=A$，



由P′向OX′作垂線P′M′，

則 $\triangle MOP\equiv\triangle M'OP'$

$$\therefore\ MP=M'P'，\quad OM'=-OM$$

$$\sin(180^\circ-A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{MP}{OP}=\sin A$$

$$\cos(180^\circ - A) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{-OM}{OP} = -\cos A$$

$$\tan(180^\circ - A) = \frac{\sin(180^\circ - A)}{\cos(180^\circ - A)}$$

$$= \frac{\sin A}{-\cos A} = -\tan A$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \sin(180^\circ - A) &= \sin A \\ \cos(180^\circ - A) &= -\cos A \\ \tan(180^\circ - A) &= -\tan A \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

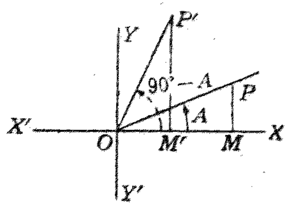
若A爲其他象限角時，亦可用同樣方法證明。

(iv)設A爲第一象限角，使

$\angle MOP = A$，

$\angle M'OP' = 90^\circ - A$，

$OP = OP'$



則$\triangle OPM \equiv \triangle P'OM'$

$\therefore$ $M'P' = OM$，

$OM' = MP$

$$\sin(90^\circ - A) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos A$$

$$\cos(90^\circ - A) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin A$$

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{\sin(90^\circ - A)}{\cos(90^\circ - A)}$$

$$= \frac{\cos A}{\sin A} = \cot A$$

$$\therefore \left.\begin{aligned} \sin(90^\circ-A)&=\cos A \\ \cos(90^\circ-A)&=\sin A \\ \tan(90^\circ-A)&=\cot A \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

若A爲其他象限角時，亦可用同樣方法證明。

於(3)式，以（－A）代替A，則得下式：

$$\left.\begin{aligned} \sin(180^\circ+A)&=\ \sin(-A)=-\sin A \\ \cos(180^\circ+A)&=-\cos(-A)=-\cos A \\ \tan(180^\circ+A)&=-\tan(-A)=\ \tan A \end{aligned}\right\}\cdots(5)$$

於(4)式，以(－A）代替A，則得下式：

$$\left.\begin{aligned} \sin(90^\circ+A)&=\ \cos(-A)=\ \cos A \\ \cos(90^\circ+A)&=\ \sin(-A)=-\sin A \\ \tan(90^\circ+A)&=\ \cot(-A)=-\cot A \end{aligned}\right\}\cdots(6)$$

由以上的公式，任何大角的三角函數，都可用 0°～90° 的三角函數眞數表把它求出來。首先用(1)式把任意角改變爲360° 以下的正角，再用(5)式把它改變爲180° 以下的正角，再由(3)或(6)式改變爲 90° 以下的正角。如果有必要時，可用(4)式再把宅改變爲 45° 以下的正角。改變順序，無須死記，可隨機應變取適當的順序即可。

例題1. 試求sin750°的值。

解：$\sin 750^\circ=\sin(360^\circ\times 2+30^\circ)=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$

例題2. 試求sin（－330°)及cos（－330°）的值。

解：$\sin(-330^\circ)=-\sin 330^\circ=-\sin(360^\circ-30^\circ)$

$$=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos(-330°) = \cos 330° = \cos(360° - 30°)$$
$$= \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

例題3. 試求 $\sin 225°$，$\cos 210°$，$\tan 240°$ 的值。

解：$\sin 225° = \sin(180° + 45°) = -\sin 45° = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 210° = \cos(180° + 30°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 240° = \tan(180° + 60°) = \tan 60° = \sqrt{3}$

例題4. 試求 $\sin 120°$，$\cos 135°$，$\tan 120°$ 的值。

解：$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

或 $\sin 120° = \sin(90° + 30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

或 $\cos 135° = \cos(90° + 45°) = -\sin 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

或 $\tan 120° = \tan(90° + 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$

例題5. 試求 $\sin(-314°)$，$\cos 920°$，$\tan(-1231°)$ 的值。

解：$\sin(-314°) = \sin(360° - 314°)$

$$= \sin 46° = 0.7193$$

$$\cos 920^\circ = \cos(360^\circ \times 2 + 200) = \cos 200^\circ$$
$$= \cos(180^\circ + 20^\circ) = -\cos 20^\circ = -0.9397$$
$$\tan(-1231^\circ) = \tan(360^\circ \times 4 - 1231^\circ)$$
$$= \tan 209^\circ = \tan(180^\circ + 29^\circ) = \tan 29^\circ = 0.5543$$

習　　題

1. 試將下列三角函數改變爲同名的，正銳角的三角函數。

(i) $\sin(-735^\circ)$　(ii) $\cos 2125^\circ$

(iii) $\tan(-3345^\circ)$　(iv) $\sin 475^\circ$

(v) $\cos 485^\circ$　(vi) $\tan 490^\circ$

2. 試求下列三角函數的值。

(i) $\sin(-390^\circ)$　(ii) $\cos(-765^\circ)$

(iii) $\tan 585^\circ$　(iv) $\sin 665^\circ$

(v) $\cos 500^\circ$　(vi) $\tan(-680^\circ)$

3. 設 $360^\circ > \theta > 0$時，試求滿足下列各方程式的θ。

(i) $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(ii) $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

(iii) $\sin\theta = 0.52$　(iv) $\cos\theta = 0.8$

(v) $\tan\theta = -1$　(vi) $\tan\theta = 0.7$

4. 試求下列各角的動徑的位置。

(i) $n\pi$，(ii) $\dfrac{n\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$　(iii) $n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$

5. $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$，$\cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$時，求$\theta$的一般值。

6. 試證　(i) $\sin 100^\circ = \cos 10^\circ$　(ii) $\sec 420^\circ = 2$

(iii) $\tan 135^\circ = -1$

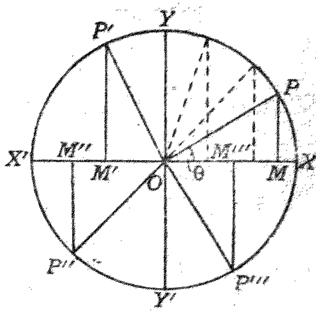
§ 4. 三角函數值的變化

三角函數是角的函數，因此設角的大小發生變化時，則該角的三角函數值亦必發生變化。以下我們將對於隨着角的變化而發生的三角函數值的變化狀況加以研究。

(I) 正弦的變化（正弦曲線）

設圓O由於直交二直徑XOX′，YOY′被分爲四個象限，取OX爲始邊 OP 爲動徑，再設OX爲 1 時，則任意角θ的正弦如下：

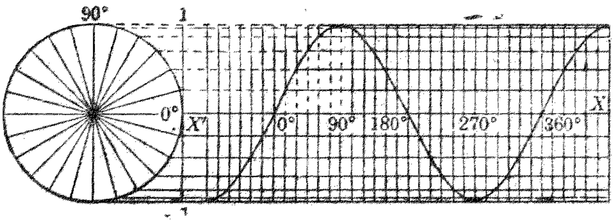
$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{MP}{1}=MP$$



$\theta=0^\circ$時，OP 與OX相重合，MP =0即 $\sin 0^\circ=0$。其次θ由 0° 漸往90°增加時，MP 亦由0漸增，$\theta=90^\circ$ 時 OP 與OY相重合，MP 達其最大值，$\sin 90^\circ=1$。θ由90°再往前開始增加時，MP 逐開始減少，即 $\sin\theta$ 的值由 1 開始減少，至$\theta=180^\circ$ 時，OP 與OX′ 相重合，即$\sin 180^\circ=0$。 其次，θ由180°再往前增加時，OP至第三象限，$\sin\theta$的值變爲負數，MP 漸長，$\theta=270^\circ$時，OP與OY′ 相重合，即 MP 達其最小值，$\sin 270^\circ=-1$。最後θ由270°開始增加時，MP漸短，$\theta=360^\circ$時，$\sin 360^\circ=0$。

把以上的變化狀況列表如下，表下的圖就是正弦的圖線，稱爲**正弦曲線**。

θ	0°	一象限	90°	二象限	180°	三象限	270°	四象限	360°
$\sin\theta$	0	增加(+)	1	減少(+)	0	減少(−)	−1	增加(−)	0



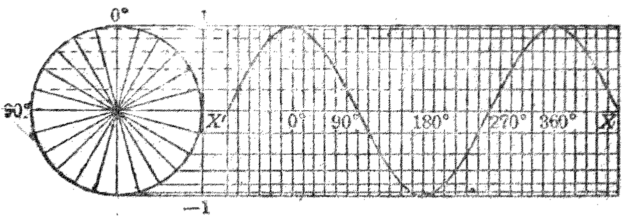
(II) **餘弦的變化**（**餘弦曲線**）

於前圖 $\cos\theta=\frac{OM}{OP}=\frac{OM}{1}=OM$

$\theta=0^\circ$ 時，OP 與 OX 相重合，$OM=OP=1$，即 $\cos 0^\circ=1$。其次，θ 由0° 漸往90° 增加時，OM漸短，$\theta=90^\circ$時，OP與OY相重合，$OM=0$ 即 $\cos 90^\circ=0$。θ 由90°再往前開始增加時，OM漸長，但因入第二象限，$\cos\theta$ 的值變爲負數，所以 $\cos\theta$ 的值漸減，$\theta=180°$時，OP與OX'相重合，OM 遂達其最小值，$\cos 180^\circ=-1$。θ 由180°再往前增加時，OP至第三象限，$\cos\theta'$ 的值仍爲負數，但OM漸短，至 $\theta=270^\circ$時，OP與 OY相重合，即 $\cos 270^\circ=0$。 最後 θ 由270° 再向前增

加時，OP 入第四象限，cos θ 的值變爲正數，而OM漸長，所以cos θ 的值漸增，$\theta=360^\circ$ 時，$\cos 360^\circ=1$。把以上的變化狀況列表如下，表下的圖就是餘弦的圖線，稱爲餘弦曲線。

θ	0°	一象限	90°	二象限	180°	三象限	270°	四象限	360°
$\cos\theta$	1	減少(+)	0	減少(−)	−1	增加(−)	0	增加(+)	1



(III) **正切的變化（正切曲線）**

於半徑1的圓 O，取始邊 OX，於 X 對圓畫切線與動徑延長的交點爲Q時，

$$PM \parallel QX \quad \therefore \quad \triangle OPM \backsim \triangle OQX$$

因此，$\tan\theta=\dfrac{MP}{OM}=\dfrac{XQ}{OX}=\dfrac{XQ}{1}=XQ$

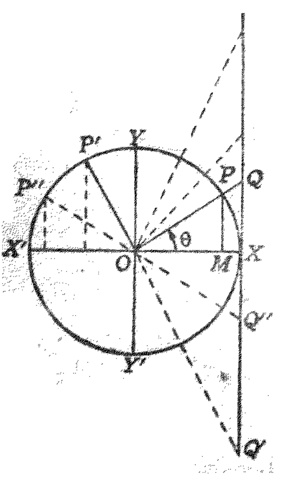
$\theta=0^\circ$ 時，OP與OX相重合，XQ=0即 $\tan 0^\circ=0$。

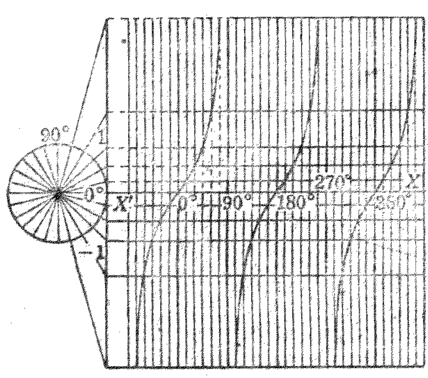
θ 由 0° 漸往 90° 增加時，XQ漸長，$\theta=90^\circ$ 時，$XQ \parallel OY$ 即 $XQ=+\infty$。其次 θ 由 90° 稍增而入第二象限時，正切的值變爲負數，而 $XQ=-\infty$ 因此，$\tan 90^\circ=\pm\infty$。

超過 90° 以後，θ漸增時，則XQ漸短，$\theta = 180°$時，OP與OX′相重合，XQ＝0，即 $\tan 180° = 0$。θ由 180° 開始進入第三象限時，tan θ的值又變爲正數，其變化狀況又和第一象限取同樣的傾向。$\theta = 270°$時，XQ＝$+\infty$。其次，θ由 270° 稍增加而進入第四象限時，tan θ的值又變爲負數，而XQ＝$-\infty$，因此，$\tan 270° = \pm\infty$。最後θ由270°向360°增加時，XQ漸短，tan θ由$-\infty$增至0，$\tan 360° = 0$。

把以上的變化狀況列表如下，表下右圖就是正切的圖線，稱爲正切曲線。

θ	0	一象限	90°	二象限	180°	三象限	270°	四象限	360°
tan θ	0	增加(＋)	$\pm\infty$	增加(－)	0	增加(＋)	$\pm\infty$	增加(－)	0





習　　　題

1. 試求餘切，正割，餘割的圖線。
2. 三角函數的圖線有什麼特點？試分別加以考察。
3. 試畫出$y=A\sin x$的圖線（但A為常數）。
4. 試畫下列函數的圖線

(i) $|\sin x|$　(ii) $|\cos x|$　(iii) $|\tan x|$

(iv) $\sin 2x$　(v) $1+\cos x$　(vi) $-\tan x$

(vii) $\dfrac{1-\cos x}{2}$　(viii) $\sin\dfrac{1}{x}$　(ix) $\cos\dfrac{1}{x}$

5. 設$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$時，試證$\sin\theta<\theta<\tan\theta$。

第三章　加法定理

§1. 加法定理的證明

設A，B爲任意二角時，則（A±B）的三角函數如下：

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B\cdots\cdots(1)$$

$$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B\cdots\cdots(2)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B\cdots\cdots(3)$$

$$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B\cdots\cdots(4)$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdots\cdots(5)$$

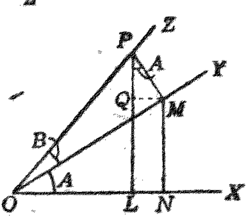
$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\cdots\cdots(6)$$

這幾個公式在三角法裡非常重要，普通稱之爲**加法定理**。

〔證明〕先證(1)，(3)兩式：

(I) $0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<A+B<\frac{\pi}{2}$時

於右圖，設$\angle XOY=A$，$\angle YOZ=B$，則$\angle XOZ=A+B$。於OZ上取任意一點P，由P點向OX，OY各作垂線PL，PM；由M點向OX，PL各作垂線MN，MQ。



$$\sin(A+B)=\frac{PL}{OP}=\frac{PQ+QL}{OP}=\frac{MN+PQ}{OP}$$

$$=\frac{MN}{OP}+\frac{PQ}{OP}$$

但因 $MN=OM\sin A$，

$PQ=PM\cos A$ （$\because \angle NOM=\angle MPQ=\angle A$）

$$\therefore\quad \sin(A+B)=\frac{OM\sin A}{OP}+\frac{PM\cos A}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OP}\sin A+\frac{PM}{OP}\cos A$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

因此，(1)式成立。同樣地

$$\cos(A+B)=\frac{OL}{OP}=\frac{ON-LN}{OP}=\frac{ON}{OP}-\frac{MQ}{OP}$$

（$\because MQ=LN$）

但因，$ON=OM\cos A$，$MQ=PM\sin A$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\frac{OM\cos A}{OP}-\frac{PM\sin A}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OP}\cos A-\frac{PM}{OP}\sin A$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

因此，(3)式成立。

(II) $0<A<\frac{\pi}{2}$，$0<B<\frac{\pi}{2}$，$A+B>\frac{\pi}{2}$時

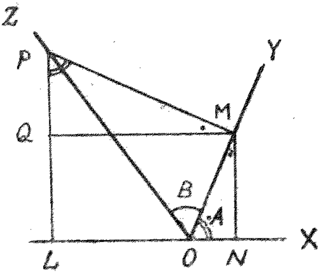
於下圖，

$$\sin(A+B)=\frac{PL}{OP}=\frac{PQ+QL}{OP}=\frac{PQ+MN}{OP}$$

$$=\frac{PQ}{OP}+\frac{MN}{OP}$$

但因 $MN=OM\sin A$，

$PQ=PM\cos A$



$\therefore\quad \sin(A+B)$

$$=\frac{OM\sin A}{OP}+\frac{PM\cos A}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OP}\sin A+\frac{PM}{OP}\cos A$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

因此，(1)式成立。同樣地

$$\cos(A+B)=\frac{OL}{OP}=\frac{ON-LN}{OP}=\frac{ON}{OP}-\frac{MQ}{OP}$$

$(\because MQ=LN)$

但因 $ON=OM\cos A$，$MQ=PM\sin A$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\frac{OM\cos A}{OP}-\frac{PM\sin A}{OP}$$

$$=\frac{OM}{OP}\cos A-\frac{PM}{OP}\sin A$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

因此，(3)式成立。

除了以上所舉的(I)，(II)兩個範圍以外，A，B為任意角

時(1)，(3)兩式亦同樣成立（證明從略）。

其次，(1)÷(3)則得

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$=\frac{\sin A\ \cos B+\cos A\ \sin B}{\cos A\ \cos B-\sin A\ \sin B}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\ \tan B}$$

$$\therefore\quad \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

因此，(5)式成立。

於(1)，(3)，(5)各式中，以 $-B$ 代替 B 時，則

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$

$$=\sin A\ \cos(-B)+\cos A\ \sin(-B)$$

$$=\sin A\ \cos B-\cos A\ \sin B$$

因此，(2)式成立。

$$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$$

$$=\cos A\ \cos(-B)-\sin A\ \sin(-B)$$

$$=\cos A\ \cos B+\sin A\ \sin B$$

因此，(4)式成立。

$$\tan A\ (A-B)=\tan\{A+(-B)\}$$

$$=\frac{\tan A+\tan(-B)}{1-\tan A\ \tan(-B)}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\ \tan B}$$

因此，(6)式成立。

§ 2. $p\sin\theta+q\cos\theta$的變形 (附) 逆三角函數

設p，q 爲既知的實數時，$p\sin\theta+q\cos\theta$型的三角函數很難求其圖線。但若用加法定理時，就可以把它化爲$\sqrt{p^2+q^2}\ \sin(\theta+\phi)$。而$\phi$爲決定於p，q的常數。

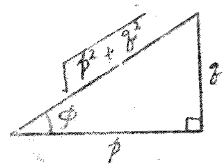
即 $p\sin\theta+q\cos\theta$

$$=\sqrt{p^2+q^2}\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\theta+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\theta\right)$$

再畫如右圖所示的三角形，則

$$\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}=\sin\phi,$$

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}=\cos\phi,\quad \frac{q}{p}=\tan\phi$$



因此，取$\tan\phi=\dfrac{q}{p}$時，則

$$p\sin\theta+q\cos\theta$$

$$=\sqrt{p^2+q^2}\ (\sin\theta\cos\phi+\cos\theta\sin\phi)$$

$$=\sqrt{p^2+q^2}\sin(\theta+\phi)$$

式 $\sin x=\dfrac{1}{2}$是表示角x的正弦之值爲$\dfrac{1}{2}$，換句話說：就是x是正弦之值爲$\dfrac{1}{2}$的角，普通用符號

$$x=\sin^{-1}\frac{1}{2} \quad 或 \quad x=\arcsin\frac{1}{2}$$

表示這個關係。

一般地：以 $\sin^{-1}a$ 表示正弦之值爲 $a(-1\leqq a\leqq 1)$ 的角，稱爲 a 的**逆正弦**（Inverse sine）。上例的 $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ 就是正弦之值爲 $\frac{1}{2}$ 的角，　$\sin^{-1}\frac{1}{2}=30^\circ,\ 150^\circ,\ \cdots\cdots$ 等。

同樣地，以 $\cos^{-1}a$ 表示餘弦之值爲 $a(-1\leqq a\leqq 1)$ 的角，稱爲**逆餘弦**（Inverse cosine）。以 $\tan^{-1}a$ 表示正切之值爲 a（a 實爲數）的角，稱爲**逆正切**(Inverse tangent)。**逆餘切**，**逆正割**，**逆餘割**等亦可依此類推。 $\sin^{-1}a$，$\cos^{-1}a$，$\tan^{-1}a$，……等總稱爲**逆三角函數**。逆三角函數是**無限多價函數**，因此，對 a 的一值，$\sin^{-1}a$，$\cos^{-1}a$，$\tan^{-1}a$……等皆可取無數個值，但在下列範圍內時，特稱爲**逆三角函數之主值**(Principal value)，以 $Sin^{-1}a$，$Cos^{-1}a$，$Tan^{-1}a$，……等表示。

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\sin^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots Sin^{-1}a$$

$$0\leqq\cos^{-1}a\leqq\pi\cdots\cdots\cdots\cdots Cos^{-1}a$$

$$-\frac{\pi}{2}\leqq\tan^{-1}a\leqq\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots Tan^{-1}a$$

在此範圍內的逆三角函數，只有一個值。

由於以上的說明可知，$\tan\phi=\frac{q}{p}$ 時，$\phi=\tan^{-1}\frac{q}{p}$。

$\therefore\quad p\sin\theta+q\cos\theta$

$$=\sqrt{p^2+q^2}\sin(\theta+\phi)\ ,\ \left[\phi=\tan^{-1}\frac{q}{p}\right]$$

$$=\sqrt{p^2+q^2}\sin\left(\theta+\mathrm{Tan}^{-1}\frac{q}{p}\right)\text{〔取}\phi\text{的主值〕}$$

習　　題

1. $\sin A=0.5$，$\cos B=0.23$時，試求 $\sin(A+B)$ 及 $\cos(A+B)$ 的值。但A，B皆設爲正的銳角。
2. $\sin B=0.16$，$\cos A=0.29$時，試求$\sin(A-B)$的值。但設A，B皆爲正的銳角。
3. 設A，B皆爲第一象限角，而$\sec A=\sqrt{2}$，$\operatorname{cosec}B=\sqrt{3}$，試求$\tan(A+B)$的值。
4. 試證 (i) $\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

   (ii) $\sin 15^\circ=\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
5. 試證 (i) $\sqrt{2}\sin(45^\circ+A)=\cos A+\sin A$

   (ii) $\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)=\cos A-\sin A$
6. 試將$\sin(\alpha+\beta+\gamma)$，$\cos(\alpha+\beta+\gamma)$展開，以$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\sin\beta$，$\cos\beta$，$\sin\gamma$，$\cos\gamma$表示之。
7. 化簡 $10\sin\theta+\sqrt{300}\cdot\cos\theta$。
8. α爲銳角，β爲鈍角，$\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$，$\sin\beta=\dfrac{4}{5}$時，試求$\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$之值。

9. 試證 $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)+\sin\left(\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)=0$。

10.試證 $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\alpha+\frac{4}{3}\pi\right)=0$。

11.試證 $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$。

12.試證

$\sin^2A+\sin^2B=\sin^2(A+B)-2\sin A\sin B\cos(A+B)$。

13. $\sin x^{-1}=y$時，試求$\cos y$，$\tan y$的值。

14.試畫出 $y=3\sin x+\cos x$的圖線。

§ 3. 二倍角及半角的三角函數

於本章§1的公式(1)，設$B=A=\theta$時，則

$$\sin2\theta=\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta$$

即 $$\boldsymbol{\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta}\quad\cdots\cdots(7)$$

於公式(2)，設$B=A=\theta$時，則

$$\begin{aligned}\cos2\theta&=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta\sin\theta\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=(1-\sin^2\theta)-\sin^2\theta\\&=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)\end{aligned}$$

即 $$\begin{aligned}\boldsymbol{\cos2\theta}&\boldsymbol{=\cos^2\theta-\sin^2\theta}\\&\boldsymbol{=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1}\quad\cdots\cdots(8)\end{aligned}$$

同樣地，於公式(5)，設$B=A=\theta$時，則

$$\boldsymbol{\tan2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}\quad\cdots\cdots(9)$$

由公式(7)，(8)，(9)，若知任意角θ的三角函數，則可求其二倍角即2θ的三角函數。

其次，設以$\frac{\theta}{2}$來代替(1)，(3)，(5)式中的A時，則

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$$

因此，
$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \quad \cdots\cdots (10)$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \quad \cdots\cdots (11)$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \quad \cdots\cdots (12)$$

由公式(10)，(11)，(12)可求出任意角θ之半角即$\frac{\theta}{2}$的三角函數。

習　　題

1.設$\sin A = \frac{3}{5}$，試求$\sin 2A$及$\cos 2A$的值。

2.設$\cos A = 0.918$，試求$\sin 2A$的值。但A為正的銳角。

3.設$\cos A = 0.96$，試求$\tan 2A$的值。但A為正的銳角。

4.設$\tan A = \frac{1}{1+z}$，$\tan\frac{A}{2} = 2z$，試求z的值。

5.設$\sin\theta + \cos\theta = \frac{5}{4}$，試求$\sin 2\theta$的值。

6.試求滿足$\frac{4}{\cos\phi} = 8\sin\phi$的$\phi$。但設$\phi$為正的銳角。

7.試證下列各式：

(i) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

8.設$\cos A = -\dfrac{1}{6}$，試求$\cos\dfrac{A}{2}$，$\sin\dfrac{A}{2}$的值。

但設$90^\circ < A < 180^\circ$。

9.設A爲正的銳角，$\sin A = 0.85$，試求$\dfrac{A}{2}$的正弦，餘弦，正切的值。

10. 設 2A 爲正的銳角，$\sin 2A = 0.504$，試求 $\sin A$，$\tan A$ 的值。

11. 試證 $\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1+\sin\theta}$。

12. 試證 $\sin\dfrac{\theta}{2} - \cos\dfrac{\theta}{2} = \pm\sqrt{1-\sin\theta}$。

13. 試證 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2\theta}}{\tan\theta}$。

14. 試證 $\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta}$。

§ 4. 正弦及餘弦的和與積

由加法定理

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \cdots (1)$

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \cdots (2)$

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \cdots (3)$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \cdots (4)$

$(1)+(2)\quad \sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B\cdots(a)$

$(1)-(2)\quad \sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B\cdots(b)$

$(3)+(4)\quad \cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B\cdots(c)$

$(3)-(4)\quad \cos(A+B)-\cos(A-B)=-2\sin A\sin B\cdots(d)$

今設　$A+B=C$，$A-B=D$，

則
$$A=\frac{(A+B)+(A-B)}{2}=\frac{C+D}{2}$$

$$B=\frac{(A+B)-(A-B)}{2}=\frac{C-D}{2}$$

將此式代入(a)，(b)，(c)，(d)，則得下列各式：

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\cos C-\cos D=-2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots\cdots(16)$$

再以 2 除(a)，(b)，(c)，(d)之邊則得下列各式：

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\left\{\sin(A+B)+\sin(A-B)\right\}(17)$$

$$\cos A\sin B=\frac{1}{2}\left\{\sin(A+B)-\sin(A-B)\right\}(18)$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left\{\cos(A+B)+\cos(A-B)\right\}(19)$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left\{\cos(A+B) - \cos(A-B)\right\} \quad (20)$$

習　　　題

1.試將下式變爲正弦，餘弦之積的形狀。

(i) $\sin 15t + \sin 3t$　　(ii) $\sin 65^\circ - \sin 15^\circ$

(iii) $\cos 99^\circ + \cos 176^\circ$　　(iv) $\cos 25^\circ - \cos 55^\circ$

2.試證 $E\{\sin s\theta - \sin(\theta - 120^\circ)\} = \sqrt{3} E \cos(\theta - 60^\circ)$

3.求 $\dfrac{\cos 20^\circ - \cos 70^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 20^\circ}$ 的值。

4.化簡 $\sin 15t + \sin 3t + \cos 11t - \cos 7t$

5.化簡 $\dfrac{\sin A + \sin 2A + \sin 3A}{\cos A + \cos 2A + \cos 3A}$

6.試將 $\cos 57^\circ + \cos 23^\circ - \sin 34^\circ$ 變爲正弦，餘弦之積。

7.求 $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ$ 的值。

8.試將下列各式變爲正弦，餘弦之和的形狀。

(i) $17 \sin 56^\circ \sin 148^\circ$

(ii) $(4 \sin 5t)(5 \cos 3t)$

(iii) $157 \cos 160^\circ \sin 29^\circ$

(iv) $\cos 5\phi \cos 7\phi$

第四章　三角形

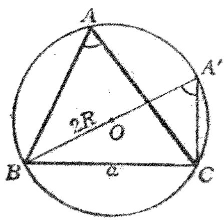
§1.　正弦定律與三角形的解法

設三角形的三邊爲a，b，c；其外接圓的半徑爲R時，則

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

這個公式稱爲**正弦定律**，以下加以證明。

(i)　$A<90^{\circ}$時，



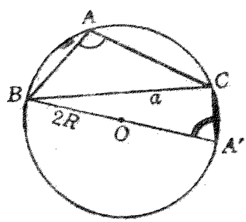
通過B畫直徑BA′，則

$\angle BAC=\angle BA'C$，

$\angle BCA=90^{\circ}$。

因此，$\sin A=\sin\angle BA'C=\dfrac{a}{2R}$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R$$



再畫通過C，A的直徑，則可同樣證出

$$\frac{b}{\sin B}=2R，\frac{c}{\sin C}=2R。$$

(ii) $A<90^{\circ}$時，

此時直徑BA′處於三角形外，而$A+A'=180^{\circ}$，

$$\therefore\quad A'=180^{\circ}-A$$

$$\therefore\quad \sin A'=\sin(180^{\circ}-A)=\sin A=\frac{a}{2R}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=2R$$

同樣可以證出， $\dfrac{b}{\sin B}=2R$，$\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

以下想利用正弦定律來解三角形。

(I)知三角形的一邊與兩端角時的解法：

例如 a，B，C為既知時，$A=180^\circ-(B+C)$，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\therefore\quad b=a\frac{\sin B}{\sin A},\quad c=a\frac{\sin C}{\sin A}$$

取兩邊的對數

$\log b=\log a+\log\sin B-\log\sin A$

$\log c=\log a+\log\sin C-\log\sin A$

A 可由上式馬上求出，但求 b，c 時須查三角函數的對數表。表的查法和三角函數的眞數表相同。在本書卷末列有**正弦對數表，餘弦對數表，正切對數表**。

例題 1. 試求 $\log\sin 28^\circ 27'$

解： $\log\sin 28^\circ 24'=\bar{1}.6773$

由比例部分表 $\qquad 3' \qquad +7 \qquad$ (+

$\therefore\quad \log\sin 28^\circ 27'=\bar{1}.6780$

或 $\log\sin 28^\circ 30'=\bar{1}.6787$

由比例部分表 $\qquad -3' \qquad -7 \qquad$ (+

$\therefore\quad \log\sin 28^\circ 27'=\bar{1}.6780$

例題 2. 求 $\log\cos 37^\circ 45'$

解：　　$\log\cos37°42' = \bar{1}.8983$

由比例部分表　　$+3'$　　-3　　(+

$\therefore$　$\log\cos37°45' = \bar{1}.8980$

或　　$\log\cos37°48' = \bar{1}.8977$

由比例部分表　　$-3'$　　$+3$　　(+

$\therefore$　$\log\cos37°45' = \bar{1}.8980$

例題 3.　試求　$\log\tan37°16'$

解：　　$\log\tan37°12' = \bar{1}.8803$

由比例部分表　　$4'$　　$+10$　　(+

$\therefore$　$\log\tan37°16' = \bar{1}.8813$

或　　$\log\tan37°18' = \bar{1}.8818$

由比例部分表　　$-2'$　　-5　　(+

$\therefore$　$\log\tan37°16' = \bar{1}.8813$

例題 4.　試求適合於$\log\sin x = \bar{1}.6278$的正銳角

解：　　$\log\sin x \quad = \bar{1}.6278$

$\log\sin25°6' = \bar{1}.6276$

2

由比例部分表　　$+1'$　　$+3$　　(+

$\log\sin25°7' = \bar{1}.6279$　$\therefore$　$x \doteq 25°7'$

例題 5.　試求適合於$\log\cos x = \bar{1}.5435$的正銳角

$\log\cos x \quad = \bar{1}.5435$

$\log\cos69°30' = \bar{1}.5443$

-8

由比例部分表　　$+2'$　　-7　　(+

$\log\cos69°32' = \bar{1}.5436$　$\therefore$　$x \doteq 69°32'$

或 $\log\cos x = \bar{1}.5435$

$\underline{\log\cos 69^\circ 36' = \bar{1}.5423}$

12

由比例部分表 $\underline{-4' \quad\quad +14 \quad (+}$

$\log\cos 69^\circ 32' = \bar{1}.5437 \qquad \therefore x \doteqdot 69^\circ 32'$

例題 6. 試求適合於 $\log\tan x = \bar{1}.5990$ 的正銳角

解： $\log\tan x = \bar{1}.5990$

$\underline{\log\tan 21^\circ 36' = \bar{1}.5976}$

14

由比例部分表 $\underline{+4' \quad\quad +15 \quad (+}$

$\log\tan 21^\circ 40' = \bar{1}.5991 \qquad \therefore x \doteqdot 21^\circ 40'$

例題 7. 既知 $a = 4584$m，$B = 76^\circ 33'$，$C = 43^\circ 18'$，試解三角形ABC。

解： $A = 180^\circ - (76^\circ 33' + 43^\circ 18') = 60^\circ 9'$

$\log a = 3.6613$	$\log a = 3.6613$
$\log\sin B = \bar{1}.9879$ (+	$\log\sin C = \bar{1}.8362$ (+
3.6492	3.4975
$\log\sin A = \bar{1}.9382$ (−	$\log\sin A = \bar{1}.9382$ (−
$\log b = 3.7110$	$\log c = 3.5593$
$\therefore\ b = 5140$m	$\therefore\ c = 3624$m

（答） $A = 60^\circ 9'$， $b = 5140$m，$c = 3624$m

II)知三角形的二邊與其一對角時的解法：

例如a，b，A為既知時，

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \therefore \quad \sin B = \frac{b}{a}\sin A$$

$\therefore \quad \log \sin B = \log b + \log \sin A - \log a$

由上式求出 B，再由 $C = 180^\circ - (A+B)$ 求出 C，最後由下式求出 c 即可。

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A$$

但於式 $\sin B = \frac{b}{a}\sin A$ 中，$\sin B \leqq 1$，因此，

(1) $\frac{b}{a}\sin A > 1$，即 $\log b + \log \sin A > \log a$ 時，

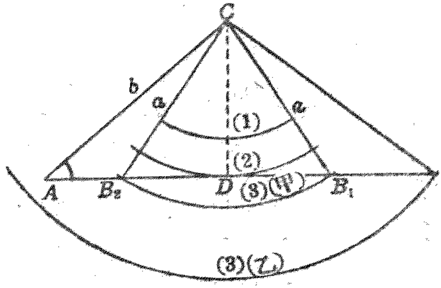
因 $\sin B > 1$ 而無解。

(2) $\frac{b}{a}\sin A = 1$，即 $\log b + \log \sin A = \log a$ 時，

因 $\sin B = 1$，$B = 90^\circ$，故只限於 $A < 90^\circ$ 時有一解。若 $A \geqq 90^\circ$ 時，則無解。

(3) $\frac{b}{a}\sin A < 1$，即 $\log b + \log \sin A < \log a$ 時，

$\sin B < 1$，由正弦曲線可知，適合於這個條件的角 B 有二值；一為銳角，一為鈍角，兩者互成補角。



但是按a，b二數的大小關係如何有時得二解，有時則只得一解。

甲. 若 $a<b$ 時，則 $A<B$。因此，B 能是銳角，也能是鈍角，此時則有二解（如圖之 B_1，B_2）

乙. 若 $a>b$ 時，則 $A>B$。因此，B 只能是銳角而不能是鈍角。此時只有一解（如圖之 B_3）

例題. 知 $a=5.072m$，$b=6.109m$，$A=46^\circ 25'$，試解此三角形。

解： $\log b=0.7859$， $\log \sin A=\bar{1}.8600$，

$\log a=0.7052$

$\therefore \quad \log b+\log \sin A=0.7859+\bar{1}.8600$

$=0.6459<\log a$ ，而 $a<b$。

由（3甲）得知此問題有二解。因此，c，C皆有二值。

$$
\begin{array}{ll}
\log b & =0.7859 \\
\log \sin A & =\bar{1}.8600 \ (+ \\
\hline
 & \quad 0.6459 \\
\log a & =0.7052 \ (- \\
\hline
\log \sin B & =\bar{1}.9407
\end{array}
$$

$\therefore \quad B_1=60^\circ 44'$，$B_2=180^\circ-B_1=119^\circ 16'$，

$C_1=180^\circ-(A+B_1)=72^\circ 51'$，$C_2=180^\circ-(A+B_2)=14^\circ 19'$

$$
\begin{array}{ll}
\log a & =0.7052 \\
\log \sin C_1 & =\bar{1}.9802 \ (+ \\
\hline
 & \quad 0.6854 \\
\log \sin A & =\bar{1}.8600 \ (- \\
\hline
\log c_1 & =0.8254
\end{array}
\qquad \therefore \quad c_1=6.690m
$$

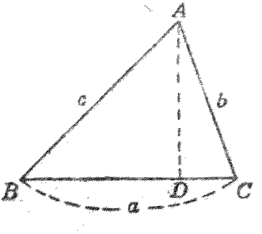
$$\begin{array}{rl} \log a & = 0.7052 \\ \log \sin C_2 & = \overline{1}.3933 \ (+ \\ \hline & \quad 0.0985 \\ \log \sin A & = \overline{1}.8600 \ (- \\ \hline \log c_2 & = 0.2385 \end{array} \qquad \therefore \quad c_2 = 1.732\text{m}$$

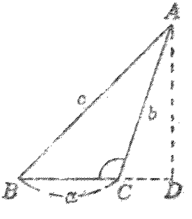
$$（答）\begin{cases} B_1 = 60^\circ 44' \\ C_1 = 72^\circ 51' \\ c_1 = 6.69\text{m} \end{cases} \text{及} \begin{cases} B_2 = 119^\circ 16' \\ C_2 = 14^\circ 19' \\ c_2 = 1.732\text{m} \end{cases}$$

問　　題

1. 知$a = 543.3$m，$B = 67^\circ 29'$，$C = 64^\circ 43'$，
   試解此三角形。
2. 知$b = 1748$m，$c = 1916$m，$C = 59^\circ$
   試解此三角形。
3. 知$a = 12.6$m，$b = 17.8$m，$A = 40^\circ$，
   試解此三角形。

§ 2. 餘弦定律





由三角形的頂點A，向底邊BC作垂線AD。

若∠C爲鈍角時，則　$BC=BD+DC$；而$BC=a$，

$$BD=c\ \cos B,\ DC=b\ \cos C$$

因此，　$a=c\ \cos B+b\ \cos C$。

若∠C爲鈍角時，則　$BC=BD-CD$，而$BC=a$，

$$BD=c\ \cos B,\ CD=b\ \cos(180^\circ-C)$$

因此，$a=c\ \cos B-b\ \cos(180^\circ-C)=c\ \cos B+b\ \cos C$。

依此類推，可得

$$\left.\begin{aligned} a&=c\cos B+b\cos C\\ b&=a\cos C+c\cos A\\ c&=b\cos A+a\cos B\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

這個公式(2)稱爲餘弦第一定律。

其次，$(1)\times a-(2)\times b-(3)\times c$則得

$$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$$

$$\begin{array}{ll} \therefore & \\ \text{同樣地} & \\ & \end{array}\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

這個公式(3)稱爲餘弦第二定律。

這兩個定律是具有和正弦定律同樣的重要性，使用公式(3)時亦可變形如下

$$\left.\begin{aligned} \cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

若知三角形之二邊及其夾角，或知其三邊時，可由餘弦定律解此三角形。

例題 1. 設知$a=5.93m$，$c=2.94m$，$B=65°$時，試求b。

解：知二邊a，c及其夾角B，故由餘弦第二定律

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

$$=(2.94)^2+(5.93)^2-2\times2.94\times5.93\times\cos65°$$

$$\therefore\ b=\sqrt{(2.94)^2+(5.93)^2-2\times2.94\times5.93\times\cos65°}$$

$$=5.40m$$

例題 2. 設$a=4.45m$，$b=7.85m$，$c=11.94m$時，試求C。

解：知其三邊a，b，c，故由餘弦第二定律

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{(4.45)^2+(7.85)^2-(11.94)^2}{2\times4.45\times7.85}$$

$$=-0.8743$$

$$=-\cos29°2'$$

$$\therefore\ C=180°-29°2'=150°58'$$

習　　題

1. (i) $b=8m$，$c=7m$，$A=60°$時，求a。

   (ii) $b=12m$，$c=9m$，$A=120°$時，求a。

2. 設 $a=5m$，$b=7m$，$c=8m$時，求B。

3. 設 三角形之三邊為$7m$，$13m$，$15m$時，求最大角的值。

§ 3. 正切定律與三角形的解法

由正弦定律出發，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$

$$\therefore \quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}$$

再由第三章 § 4 的(13)，(14)兩式

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}=\frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b}&=\frac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} \\ \frac{b-c}{b+c}&=\frac{\tan\dfrac{B-C}{2}}{\tan\dfrac{B+C}{2}} \\ \frac{c-a}{c+a}&=\frac{\tan\dfrac{C-A}{2}}{\tan\dfrac{C+A}{2}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

同樣地

這個公式稱爲**正切定律**。在下列條件下利用這個定律，也能解三角形。

(III)知三角形的二邊與夾角時的解法：

例如b，c，A爲既知時，

先由 $B+C=180^\circ-A$ $\quad\therefore \dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$

由此可求出$\dfrac{B+C}{2}$，再由(5)式

$$\log\tan\frac{B-C}{2}=\log(b-c)+\log\tan\frac{B+C}{2}-\log(b+c)$$

由此可求出$\dfrac{B-C}{2}$，

$$B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},\quad C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}$$

由此可求出B，C。再由正弦定律，

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}$$

$$\therefore\quad \log a=\log b+\log\sin A-\log\sin B$$

由此可以求出a。

例題. 知b＝4222m，c＝1896m，A＝28°38′時，解此三角形。

解：$\dfrac{A}{2}=14^\circ19'$ $\quad\therefore\quad \dfrac{B+C}{2}=90^\circ-14^\circ19'=75^\circ41'$

$$\begin{array}{lr}
\log(b-c) & =3.3666\\
\log\tan\dfrac{B+C}{2} & =0.5931\ (+\\
\hline
 & 3.9597\\
\log(b+c) & =3.7866\ (-\\
\hline
\log\tan\dfrac{B-C}{2} & =0.1731
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
\log b & =3.6255\\
\log\sin A & =\bar{1}.6805\ (+\\
\hline
 & 3.3060\\
\log\sin B & =\bar{1}.8723\ (-\\
\hline
\log a & =3.4337
\end{array}$$

$$\therefore\quad a=2714\text{m}$$

$\because \quad \frac{B-C}{2}=56^\circ 8'，\frac{B+C}{2}=75^\circ 41'$

$\therefore \quad B=131^\circ 49'，C=19^\circ 33'$

（答）$a=2714m，B=131^\circ 49'，C=19^\circ 33'$

習　　題

1. 知$a=14m，b=7m，C=60^\circ$時，求$A，B$。
2. 知$a=12km，b=8km，C=36^\circ 12'$時，試解此三角形。
3. 知$a=35960m，b=98710m，C=35^\circ 18'$時，試解此三角形。

§4. 半角公式

把第三章§3的(10),(11),(12)式和餘弦第二定律聯繫起來，就可以得到三角形的半角公式。先由餘弦第二定律，

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

設$a+b+c=2s$，則$a+b-c=2(s-c)$，

$a-b+c=2(s-b)$，$-a+b+c=2(s-a)$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{4(s-b)(s-c)}{4bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

同樣地

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

其次，$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\dfrac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{4bc}}$

$$=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\therefore \quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

同樣地

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

再其次，$\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{A}{2}}=\sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

同樣地，

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

在下列條件下，利用公式(8)就可以解三角形。

(IV)知三角形的三邊時的解法：

例如a，b，c爲旣知時，取(8)式的對數

$$\log\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{2}\left[\{\log(s-b)+\log(s-c)\}-\{\log s+\log(s-a)\}\right]$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\frac{1}{2}\left[\{\log(s-c)+\log(s-a)\}-\{\log s+\log(s-b)\}\right]$$

由此二式求出A，B，則C＝180°－(A＋B)自可求出。

例題 知a＝737.4m，b＝634.6m，c＝605m，試解此三角形。

解：$a+b+c=737.4+634.6+605=1977=2s$

$\therefore\quad s=988.5,\quad s-a=251.1,$

$s-c=383.5,\ s-b=353.9$

$$\begin{array}{lr}
\log(s-b) & =2.5489 \\
\log(s-c) & =2.5838\ (+ \\ \hline
 & 5.1327 \\
\log s & =2.9950 \\
\log(s-a) & =2.3999\ (+ \\ \hline
 & 5.3949 \\
 & 5.1327 \\
 & 5.3949\ (- \\ \hline
 & 2\,|\,\overline{1}.7378 \\ \hline
 & \overline{1}.8689
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\log(s-a) & =2.3999 \\
\log(s-c) & =2.5838\ (+ \\ \hline
 & 4.9837 \\
\log s & =2.9950 \\
\log(s-b) & =2.5489\ (+ \\ \hline
 & 5.5439 \\
 & 4.9837 \\
 & 5.5439\ (- \\ \hline
 & 2\,|\,\overline{1}.4398 \\ \hline
 & \overline{1}.7199
\end{array}$$

$$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}.8689 \qquad \log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}.7199$$

$$\frac{A}{2}=36^\circ 29' \qquad \frac{B}{2}=27^\circ 41'$$

$$\therefore\quad A=72^\circ 58' \qquad \therefore\quad B=55^\circ 22'$$

$$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(72^\circ 58'+55^\circ 22')=51^\circ 40'$$

（答）　$A=72^\circ 58'$，$B=55^\circ 22'$，$C=51^\circ 40'$

習　　題

1. 知$a=6m$，$b=8m$，$c=10m$時，求C。
2. 知$a=4584m$，$b=5140m$，$c=3624m$時，試解此三角形。
3. 知$a=4.45$呎，$b=7.85$呎，$c=11.94$呎時，求C。

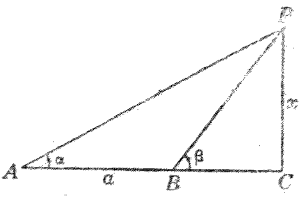
§5.　測量應用例

直接不能測出的二點間的距離或某點的高度若應用三角形的接法，就能間接地計算出來。以下舉例說明：

(甲) 對直立於水平面上的物體之求高法

設PC為直立於水平面上的物体，其高為x，取可透視其基底的二點A，B，測出P點於A，B的仰角α，β（$\beta>\alpha$）及AB之長a時，

則於$\triangle PAB$：



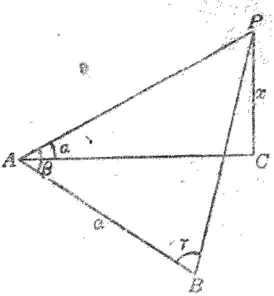
$$\frac{PB}{\sin\alpha}=\frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$$

$$\therefore \quad PB = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\beta - \alpha)}$$

而於△PBC：

$$PC = x = PB \sin \beta = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)}$$

假如A，B，C三點不能取於同一直線上時，可於任意方向取A，B，然後測出∠PAB＝β，∠PBA＝γ時，則於△APB：



$$\frac{AP}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin(\beta + \gamma)}$$

$$\left[\because \sin(180^\circ - \beta - \gamma) = \sin(\beta + \gamma)\right]$$

$$\therefore \quad AP = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

再於△APC，得

$$x = AP \sin \alpha = \frac{a \sin \gamma \sin \alpha}{\sin(\beta + \gamma)}$$

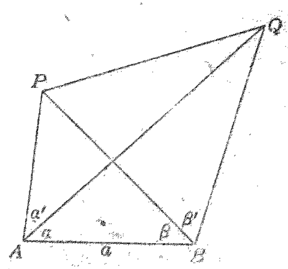
(乙) **雖與觀測者位於同一平面，但不得接近之二點間的求距法。**

設P，Q為觀測者所不得接近的二點，現在取二點A，B為觀測點，而測得

$\angle PAQ = \alpha'$，$\angle QAB = \alpha$

$\angle PBA = \beta$，$\angle PBQ = \beta'$

$AB = a$時，



則於△PAB：

$$\frac{PA}{\sin\beta}=\frac{a}{\sin\{180^\circ-(\alpha+\alpha'+\beta)\}}$$

$$\therefore\quad PA=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\alpha'+\beta)}$$

其次，於△QAB：

$$\frac{QA}{\sin(\beta+\beta')}=\frac{a}{\sin\{180^\circ-(\alpha+\beta+\beta')\}}$$

$$\therefore\quad QA=\frac{a\sin(\beta+\beta')}{\sin(\alpha+\beta+\beta')}$$

因此，於△ PAQ，二邊 PA，QA 及其夾角α'皆爲既知，所以就可以用本章 § 3的(III)來解此三角形而求出PQ。

習　　　題

1. 有高度250m的塔AB，在塔頂A及塔基B，測某塔 CD的仰角，各得50°及75°。求塔CD的高度。
2. 在平原上的一點，仰望前方的山頂，得仰角 45°，由此點後退 500m 再測山頂的仰角時，得 30°。問山的海拔比平原的海拔高多少m？
3. 於某河的西方一點 A，仰覷河東正面的建築物 PC，得仰角 17°，由A點向東前進 86m 再測 PC 的仰角時，得31°，求建築物的高度。
4. 有一坡路，與水平面成 4° 的角，於此坡路上的D點立有一塔 AD。於坡路上取相隔 75m 的二點B，C，測塔於B，C的仰角各得44°，55°。求塔高。
5. 在同一平面上立有二塔甲，乙。從甲塔的基底望乙塔尖

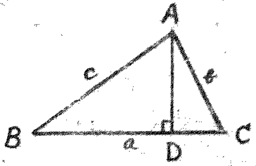
得仰角α。從甲塔的頂點望乙塔的基底得俯角β。設甲塔的高為Hm，求乙塔的高。

6. 順河岸相距ℓm 有二點 P，Q，於對岸相距ℓm 有二點 A，B，而$\angle PAQ=\alpha$，$\angle PBQ=\beta$。求河寬。

§ 6. 三角形的面積，內接圓，傍接圓

設以 a，b，c 表示△ABC 的三邊，而 $a+b+c=2s$；再以S，r表示△ABC的面積及其內接圓的半徑。

由A向BC作垂線AD，則



$$S=\frac{BC\cdot AD}{2}=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$=ab\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

同樣地，可知 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

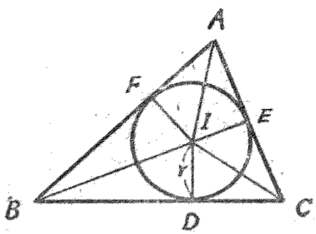
$$\therefore\ \left.\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}bc\sin A\\ &=\frac{1}{2}ca\sin B\\ &=\frac{1}{2}ab\sin C\\ &=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

其次，設△ABC的內心爲I，則

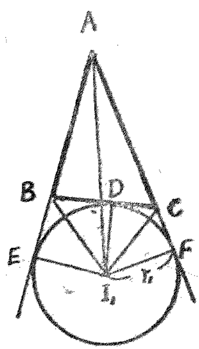
$$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$$

$$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = rs$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore \quad r = \frac{S}{s} &= \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \\ &= \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \\ &= (s-a)\tan\frac{A}{2} \\ &= (s-b)\tan\frac{B}{2} \\ &= (s-c)\tan\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(10)$$



其次，於△ABC，設角A的傍心爲I_1，其傍接圓的半徑爲I_1，則△ABC的面積爲



$$S = \triangle I_1AB + \triangle I_1AC - I_1BC$$

$$= \frac{1}{2}AB \cdot I_1E + \frac{1}{2}AC \cdot I_1F$$

$$- \frac{1}{2}BC \cdot I_1D$$

$$= \frac{1}{2}cr_1 + \frac{1}{2}br - \frac{1}{2}ar_1$$

$$= r_1(s-a)$$

$$\therefore \quad r_1 = \frac{S}{s-a} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$$

$$= \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = s\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$= s \tan\frac{A}{2}$$

同樣地，設角 B，C 內的傍心爲 I_2，I_3，其傍接圓的半徑爲r_2，r_3，則

$$r_2 = \frac{S}{s-b} = s\tan\frac{B}{2}$$

$$r_3 = \frac{S}{s-c} = s\tan\frac{C}{2}$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{S}{s-a} = s\tan\frac{A}{2} \\ r_2 &= \frac{S}{s-b} = s\tan\frac{B}{2} \\ r_3 &= \frac{S}{s-c} = s\tan\frac{C}{2} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

習　　題

1. 試證 $S = \dfrac{abc}{4R}$。

2. 試證 $r = 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

3. 試證 $S = \dfrac{2abc}{a+b+c}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

第五章　三角方程式

1.　三角方程式

三角方程式就是包含未知角的三角函數的方程式。例如，$2\sin^2\theta - 5\cos\theta = 4$ 是以θ爲未知角的三角方程式，

$\tan x + \cot x = 2$ 是以 x 爲未知角的三角方程式。而所謂解某三角方程式，就是求出滿足該方程式的未知角的值。第一章§3的例4，5實際上就是一種銳角的三角方程式。但是因爲角x的範圍被限制在0°～90°之間，所以滿足該方程式的x僅有一值。一般角的三角方程式有無數個根，也就是說滿足方程式的未知角的值有無數個

§2.　基本的三角方程式

(I)　$\sin x = a$

先求出滿足本方程式的任意一根α時，則

$\pi - \alpha$，$2n\pi + \alpha$(n爲正負的整數或零)

$2m\pi + (\pi - \alpha) = (2m+1)\pi - \alpha$(m爲正負的整數或零)

等，都是本方程式的根，而除此以外再沒有別的根。因此，把這些根總括在一起，則得

$$x = n\pi + (-1)^n\alpha \quad (n\text{爲正負的整數或零})\cdots\cdots(1)$$

(1)式的右邊是三角方程式(I)的根的全部，稱爲(I)的**一般解**，其中的α稱爲(I)的**特殊解**。

(II)　$\cos x = a$

先求出滿足本方程式的任意一根α時，則

$-\alpha$，$2n\pi + \alpha$，$2n\pi - \alpha$　(n爲正負的整數或零)

等都是本方程式的根，而除此以外再沒有別的根。因此，把這些根總括在一起，則得

$$x=2n\pi\pm\alpha \quad (n為正負的整數或零)\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)式是三角方程式(II)的根的全部，稱爲(II)的一般解，其中的α稱爲(II)的特殊解。

(III) $\tan x=a$

先求出滿足本方程式的任意一根α時，則

$$n\pi+\alpha \quad (n為正負的整數或零)$$

都是本方程式的根，而除此以外，再沒有別的根。因此，可得

$$x=n\pi+\alpha \quad (n為正負的整數或零)\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)式是三角方程式(III)的根的全部，稱爲(III)的一般解，其中的α稱爲(III)的特殊解。

§ 3. 例題

例題1. 試解 $15\cos^2 x+9\sin x=12.6$（但$360^\circ>x\geqq 0^\circ$）

解：
$$15(1-\sin^2 x)+9\sin x=12.6$$
$$15\sin x^2-9\sin x-2.4=0$$
$$\therefore\quad \sin x=\frac{9\pm\sqrt{9^2+144}}{30}=0.8\ ,\ -0.2$$

(i) $\sin x=0.8$ 時，由正弦表得其一解 $\alpha=53^\circ 8'$，其一般解爲 $x=n\pi+(-1)^n\times 53^\circ 8'$

n	…	-2	-1	0	1	2	3	…
x	…	$-306^\circ 52'$	$-233^\circ 8'$	$53^\circ 8'$	$126^\circ 52'$	$413^\circ 8'$	$486^\circ 52'$	…

(ii) $\sin x=-0.2$ 時，由正弦表得其一解 $\alpha' = 191^\circ 32'$，其一般解爲 $x=n\pi+(-1)^n\times 191^\circ 32'$

n	…	-2	-1	0	1	2	3	…
x	…	$-168^\circ 28'$	$-371^\circ 32'$	**$191^\circ 32'$**	$-11^\circ 32'$	$551^\circ 32'$	**$348^\circ 28'$**	…

參照正弦曲線，可更深刻了解。

（答）$x=53^\circ 8'$，$126^\circ 52'$，$191^\circ 32'$，$348^\circ 28'$

例題2.試解 $\sin\theta+\tan\theta=3\cos\theta\sin\theta$（但 $360^\circ>\theta\geqq 0^\circ$）

解：$$\sin\theta+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=3\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(\cos\theta+1-3\cos^2\theta\right)=0$$

$$\therefore\quad \sin\theta=0 \quad 或 \quad \cos\theta+1-3\cos^2\theta=0$$

(i) $\sin\theta=0$ 即 $\theta=0^\circ$，180°，360°，……

(ii) $\cos\theta+1-3\cos^2\theta=0$ 即 $3\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

$$\therefore\quad \cos\theta=\frac{1\pm\sqrt{1+12}}{6}=0.7677，-0.4343$$

(a) $\cos\theta=0.7677$ 時，由餘弦表得其一解 $\theta=39^\circ 51'$，

其一般解爲 $\theta=2n\pi\pm 39^\circ 51'$

n	…	-1	0	1	…
x	…	$-399^\circ 51'$，$-320^\circ 9'$	**$39^\circ 51'$**，$-39^\circ 51'$	$399^\circ 51'$，**$320^\circ 9'$**	…

(b) $\cos\theta=-0.4343$ 時，$-\cos\theta=0.4343$，

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta=0.4343$，由餘弦表得其一解 $180^\circ-\theta=64^\circ 15'$

$$\therefore\quad \theta=115^\circ 45'$$

其一般解爲 $180^\circ-\theta=2n\pi\pm 64^\circ 15'$

n	…	-1	0	1	…
x	…	$475^\circ45'$，$604^\circ15'$	$115^\circ45'$，$244^\circ15'$	$-244^\circ15'$，$-115^\circ45'$	…

（答）$x=0^\circ$，$39^\circ51'$，$115^\circ45'$，180°，$244^\circ15'$，$320^\circ9'$

例題3. 試解 $\cos5\theta+\cos\theta=0$　（但$360^\circ>\theta\geqq0^\circ$）

解：
$$2\cos\frac{5\theta+\theta}{2}\cos\frac{5\theta-\theta}{2}=0$$

$$\therefore\quad \cos3\theta\cos2\theta=0$$

(i) $\cos3\theta=0$，$3\theta=90^\circ$，270°，450°，630°，810°，990°

$\therefore\quad \theta=30^\circ$，$90^\circ$，$150^\circ$，$210^\circ$，$270^\circ$，$330^\circ$

(ii) $\cos2\theta=0$，$2\theta=90^\circ$，270°，450°，630°

$\therefore\quad \theta=45^\circ$，$135^\circ$，$225^\circ$，$315^\circ$

(答) $\theta=30^\circ$，45°，90°，135°，150°，210°，225°，270°，315°，330°

例題4. 試解 $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$　（但$360^\circ>\theta\geqq0^\circ$）

解：　$\cos\theta=\sqrt{2}-\sin\theta$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=(\sqrt{2}-\sin\theta)^2$

$2\sin^2\theta-2\sqrt{2}\sin\theta+1=0$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2-2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0.7070$$

由表得　$\theta=45^\circ$，一般解 $\theta=n\pi+(-1)^n\times45^\circ$

（n為正負的整數或零）

（答）$\theta=45^\circ$，135°

（注意）解此方程式的過程中，曾作兩邊的平方，故恐有無緣根，須作檢查。

例題5. 試解　$\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1$（但$360^\circ>\theta\geqq0^\circ$）

解：$\sqrt{3}\cos\theta=1-\sin\theta$ 即$3(1-\sin^2\theta)=(1-\sin\theta)^2$

$2\sin^2\theta - \sin\theta - 1 = 0$ 即 $(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)=0$

$\therefore\quad 2\sin\theta+1=0$，或 $\sin\theta-1=0$

(i) $2\sin\theta+1=0$ 時 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$，$\theta=-30^\circ$

一般解爲 $\theta=n\pi+(-1)^n\times(-30^\circ)$

$\therefore\quad \theta=180^\circ+30^\circ=210^\circ$，$\theta=360^\circ-30^\circ=330^\circ$

(ii) $\sin\theta-1=0$，$\sin\theta=1$，$\therefore\quad \theta=90^\circ$

一般解爲 $\theta=n\pi+(-1)^n\times 90^\circ$（n爲正負的整數或零）

共得 $\theta=90^\circ$，210°，330°，但其中 210° 爲無緣根，須捨棄之。

習　　題

試解下列三角方程式（但 θ，x皆設爲 0°～360° 間之角）

1. $\tan\theta=5\sin\theta$
2. $\cos\theta+6\cos^2\frac{\theta}{2}=1$
3. $\tan x\tan 2x=1$
4. $2\sin^2x+4\cos^2x=3$
5. $2\cos^2\theta-3\cos\theta-2=0$
6. $\tan x+\cot x=2$
7. $\sin x+\sin 2x=0$
8. $\cos 2x+\cos x=0$
9. $\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 5\theta=0$
10. $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$
11. $\tan 5x=\cot 2x$
12. $\tan(45^\circ+x)+\tan(45^\circ-x)=4$

正　弦　表

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	.0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	.0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	15
5	.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	.1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	.1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	.1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	.1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	12	14
10	.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	12	14
11	.1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	.2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	.2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	.2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	.2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	.2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	.3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	.3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	.3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	.3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	14
23	.3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	14
24	.4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	.4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	.4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	.4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	.4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	.5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	.5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	.5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	.5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	9	12
36	.5878	[illegible]	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	.6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	.6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	.6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	.6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	.6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	.6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	.6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10
45	.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10

正弦表(續)

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
45	.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	.7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	.7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	.7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	.7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	.7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	.7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	.7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	.8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	.8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	.8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	.8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	.8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	.8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	.8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	.8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	.8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	.9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	.9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	.9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	.9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	.9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	.9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	3	4
73	.9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	.9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	.9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	.9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	.9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	.9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	.9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	.9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	.9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	.9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	2
85	.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	.9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	.9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	1	1
88	.9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	.9998	9999	9999	9999	9999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0	0	0	0	0
90	1.000														

餘弦表

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
0	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.9999	.9999	.9999	.9999	0	0	0	0	0
1	.9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	.9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	1	1
3	.9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	.9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	.9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	2
6	.9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	.9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	.9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	.9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	.9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	.9816	9813	9810	9806	9803	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	.9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	.9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	.9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	.9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	.9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	.9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	3	4
18	.9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	.9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	.9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	.9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	.9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	.9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	.9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	.9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	.8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	.8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	.8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	.8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30	.8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	.8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	.8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	.8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	.8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	.8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	.8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	.7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	.7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	.7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	.7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	.7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	.7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	.7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	.7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10
45	.7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10

餘弦表(續)

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
45	.7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	.6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	.6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	.6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	.6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	.6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	.6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	.6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	.6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	.5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	.5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	.5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	.5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	.5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	.5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60	.5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	.4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	.4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	.4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	.4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	.4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	.4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	14
67	.3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	14
68	.3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	.3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70	.3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	.3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	.3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	.2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	.2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	.2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	.2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	.2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	.2079	2062	2045	2028	2011	1924	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	.1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	12	14
80	.1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	12	14
81	.1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	.1392	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	.1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	.1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	.0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	15
86	.0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	.0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	.0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	.0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15
90	.0000														

正 切 表

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
0	.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	.0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	.0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	.0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	.0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	.0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	.1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	.1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	.1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	.1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	.1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	.2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	.2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	.2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	.2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	.2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	.3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	.3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	.3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	6	10	13	17
20	.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	.3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	.4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	.4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	.4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	10	14	18
25	.4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	.4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	.5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	.5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	.5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	.6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	.6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	.6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	.6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	.7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	.7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	.7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	.7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	.8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	.8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	.9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	.9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	.9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29
45	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30

正　切　表（續）

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
45	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1.0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1.0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1.1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	27	33
49	1.1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1.2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1.2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1.3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1.3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1.4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1.5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1.6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1.6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1.7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1.8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1.8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1.9626	9711	9797	9883	9970	**0057**	0145	0233	0323	0413	15	29	44	58	73
64	2.0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2.1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2.2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2.3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2.4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2.6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	119
70	2.7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	131
71	2.9042	9208	9375	9544	9714	9887	**0061**	0237	0415	0595	29	58	87	116	145
72	3.0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3.2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3.4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	204
75	3.7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	46	93	139	186	232
76	4.0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972					
77	4.3315	3662	4015	4374	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4.7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	**0045**	0504	0970					
79	5.1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5.6713	7297	7894	8502	9124	9758	**0405**	1066	1742	2432					
81	6.3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	**0264**					
82	7.1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	**0285**					
83	8.1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	**0579**	2052	3572					
84	9.514	9.677	9.845	10.02	10.20	10.39	10.58	10.78	10.99	11.20					
85	11.43	11.66	11.91	12.16	12.43	12.71	13.00	13.30	13.62	13.95					
86	14.30	14.67	15.06	15.46	15.89	16.35	16.83	17.34	17.89	18.46					
87	19.08	19.74	20.45	21.20	22.02	22.90	23.86	24.90	26.03	27.27					
88	28.64	30.14	31.82	33.69	35.80	38.19	40.92	44.07	47.74	52.08					
89	57.29	63.66	71.62	81.85	95.49	114.6	143.2	191.0	286.5	573.0					
90	∞														

比例部分變動甚大、已失精確

從粗體數字起整數部變動

正弦對數表

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
0	$-\infty$	$\bar{3}$.2419	5429	7190	8439	9408	0200	0870	1450	1961					
1	$\bar{2}$.2419	2832	3210	3558	3880	4179	4459	4723	4971	5206					
2	.5428	5640	5842	6035	6220	6397	6567	6731	6889	7041					
3	.7188	7330	7468	7602	7731	7857	7979	8098	8213	8326					
4	.8436	8543	8647	8749	8849	8946	9042	9135	9226	9315	16	32	48	64	80
5	.9403	9489	9573	9655	9736	9816	9894	9970	0046	0120	13	26	39	52	65
6	$\bar{1}$.0192	0264	0334	0403	0472	0539	0605	0670	0734	0797	11	22	33	44	55
7	.0859	0920	0981	1040	1099	1157	1214	1271	1326	1381	10	19	29	38	48
8	.1436	1489	1542	1594	1646	1697	1747	1797	1847	1895	8	17	25	34	42
9	.1943	1991	2038	2085	2131	2176	2221	2266	2310	2353	8	15	23	30	38
10	.2397	2439	2482	2524	2565	2606	2647	2687	2727	2767	7	14	20	27	34
11	.2806	2845	2883	2921	2959	2997	3034	3070	3107	3143	6	12	19	25	31
12	.3179	3214	3250	3284	3319	3353	3387	3421	3455	3488	6	11	17	23	28
13	.3521	3554	3586	3618	3650	3682	3713	3745	3775	3806	5	11	16	21	26
14	.3837	3867	3897	3927	3957	3986	4015	4044	4073	4102	5	10	15	20	24
15	.4130	4158	4186	4214	4242	4269	4296	4323	4350	4377	5	9	14	18	23
16	.4403	4430	4456	4482	4508	4533	4559	4584	4609	4634	4	9	13	17	21
17	.4659	4684	4709	4733	4757	4781	4805	4829	4853	4876	4	8	12	16	20
18	.4900	4923	4946	4969	4992	5015	5037	5060	5082	5104	4	8	11	15	19
19	.5126	5148	5170	5192	5213	5235	5256	5278	5299	5320	4	7	11	14	18
20	.5341	5361	5382	5402	5423	5443	5463	5484	5504	6523	3	7	10	14	17
21	.5543	5563	5583	5602	5621	5641	5660	5679	5698	5717	3	6	10	13	16
22	.5736	5754	5773	5792	5810	5828	5847	5865	5883	5901	3	6	9	12	15
23	.5919	5937	5954	5972	5990	6007	6024	6042	6059	6076	3	6	9	12	15
24	.6093	6110	6127	6144	6161	6177	6194	6210	6227	6243	3	6	8	11	14
25	.6259	6276	6292	6308	6324	6340	6356	6371	6387	6403	3	5	8	11	13
26	.6418	6434	6449	6465	6480	6495	6510	6526	6541	6556	3	5	8	10	13
27	.6570	6585	6600	6615	6629	6644	6659	6673	6687	6702	2	5	7	10	12
28	.6716	6730	6744	6759	6773	6787	6801	6814	6828	6842	2	5	7	9	12
29	.6856	6869	6883	6896	6910	6923	6937	6950	6963	6977	2	4	7	9	11
30	.6990	7003	7016	7029	7042	7055	7068	7080	7093	7106	2	4	6	9	11
31	.7118	7131	7144	7156	7168	7181	7193	7205	7218	7230	2	4	6	8	10
32	.7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	7326	7338	7349	2	4	6	8	10
33	.7361	7373	7384	7396	7407	7419	7430	7442	7453	7464	2	4	6	8	10
34	.7476	7487	7498	7509	7520	7531	7542	7553	7564	7575	2	4	6	7	9
35	.7586	7597	7607	7618	7629	7640	7650	7661	7671	7682	2	4	5	7	9
36	.7692	7703	7713	7723	7734	7744	7754	7764	7774	7785	2	3	5	7	9
37	.7795	7805	7815	7825	7835	7844	7854	7864	7874	7884	2	3	5	7	8
38	.7893	7903	7913	7922	7932	7941	7951	7960	7970	7979	2	3	5	6	8
39	.7989	7998	8007	8017	8026	8035	8044	8053	8063	8072	2	3	5	6	8
40	.8081	8090	8099	8108	8117	8125	8134	8143	8152	8161	1	3	4	6	7
41	.8169	8178	8187	8195	8204	8213	8221	8230	8238	8247	1	3	4	6	7
42	.8255	8264	8272	8280	8289	8297	8305	8313	8322	8330	1	3	4	6	7
43	.8338	8346	8354	8362	8370	8378	8386	8394	8402	8410	1	3	4	5	7
44	.8418	8426	8433	8441	8449	8457	8464	8472	8480	8487	1	3	4	5	6
45	.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	1	2	4	5	6

從粗體數字起整數部變動

正弦對數表（續）

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例率分 1′	2′	3′	4′	5′
45	1.8495	8502	8510	8517	8525	8532	8540	8547	8555	8562	1	2	4	5	6
46	.8569	8577	8584	8591	8598	8606	8613	8620	8627	8634	1	2	4	5	6
47	.8641	8648	8655	8662	8669	8676	8683	8690	8697	8704	1	2	3	5	6
48	.8711	8718	8724	8731	8738	8745	8751	8758	8765	8771	1	2	3	4	6
49	.8778	8784	8791	8797	8804	8810	8817	8823	8830	8836	1	2	3	4	5
50	.8843	8849	8855	8862	8868	8874	8880	8887	8893	8899	1	2	3	4	5
51	.8905	8911	8917	8923	8929	8935	8941	8947	8953	8959	1	2	3	4	5
52	.8965	8971	8977	8983	8989	8995	9000	9006	9012	9018	1	2	3	4	5
53	.9023	9029	9035	9041	9046	9052	9057	9063	9069	9074	1	2	3	4	5
54	.9080	9085	9091	9096	9101	9107	9112	9118	9123	9128	1	2	3	4	5
55	.9134	9139	9144	9149	9155	9160	9165	9170	9175	9181	1	2	3	3	4
56	.9186	9191	9196	9201	9206	9211	9216	9221	9226	9231	1	2	3	3	4
57	.9236	9241	9246	9251	9255	9260	9265	9270	9275	9279	1	2	2	3	4
58	.9284	9289	9294	9298	9303	9308	9312	9317	9322	9326	1	2	2	3	4
59	.9331	9335	9340	9344	9349	9353	9358	9362	9367	9371	1	1	2	3	4
60	.9375	9380	9384	9388	9393	9397	9401	9406	9410	9414	1	1	2	3	4
61	.9418	9422	9427	9431	9435	9439	9443	9447	9451	9455	1	1	2	3	3
62	.9459	9463	9467	9471	9475	9479	9483	9487	9491	9495	1	1	2	3	3
63	.9499	9503	9507	9510	9514	9518	9522	9525	9529	9533	1	1	2	3	3
64	.9537	9540	9544	9548	9551	9555	9558	9562	9566	9569	1	1	2	2	3
65	.9573	9576	9580	9583	9587	9590	9594	9597	9601	9604	1	1	2	2	3
66	.9607	9611	9614	9617	9621	9624	9627	9631	9634	9637	1	1	2	2	3
67	.9640	9643	9647	9650	9653	9656	9659	9662	9666	9669	1	1	2	2	3
68	.9672	9675	9678	9681	9684	9687	9690	9693	9696	9699	0	1	1	2	2
69	.9702	9704	9707	9710	9713	9716	9719	9722	9724	9727	0	1	1	2	2
70	.9730	9733	9735	9738	9741	9743	9746	9749	9751	9754	0	1	1	2	2
71	.9757	9759	9762	9764	9767	9770	9772	9775	9777	9780	0	1	1	2	2
72	.9782	9785	9787	9789	9792	9794	9797	9799	9801	9804	0	1	1	2	2
73	.9806	9808	9811	9813	9815	9817	9820	9822	9824	9826	0	1	1	2	2
74	.9828	9831	9833	9835	9837	9839	9841	9843	9845	9847	0	1	1	1	2
75	.9849	9851	9853	9855	9857	9859	9861	9863	9865	9867	0	1	1	1	2
76	.9869	9871	9873	9875	9876	9878	9880	9882	9884	9885	0	1	1	1	2
77	.9887	9889	9891	9892	9894	9896	9897	9899	9901	9902	0	1	1	1	1
78	.9904	9906	9907	9909	9910	9912	9913	9915	9916	9918	0	1	1	1	1
79	.9919	9921	9922	9924	9925	9927	9928	9929	9931	9932	0	0	1	1	1
80	.9934	9935	9936	9937	9939	9940	9941	9943	9944	9945	0	0	1	1	1
81	.9946	9947	9949	9950	9951	9952	9953	9954	9955	9956	0	0	1	1	1
82	.9958	9959	9960	9961	9962	9963	9964	9965	9966	9967	0	0	1	1	1
83	.9968	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	9975	9975	0	0	0	1	1
84	.9976	9977	9978	9978	9979	9980	9981	9981	9982	9983	0	0	0	0	1
85	.9982	9984	9985	9985	9986	9987	9987	9988	9988	9989	0	0	0	0	0
86	.9989	9990	9990	9991	9991	9992	9992	9993	9993	9994	0	0	0	0	0
87	.9994	9994	9995	9995	9996	9996	9996	9997	9997	9997	0	0	0	0	0
88	.9997	9998	9998	9998	9996	9999	9999	9999	9999	9999	0	0	0	0	0
89	.9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0	0	0	0	0
90	0.0000														

從粗體數字起整數部變動

餘弦對數表

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
0	0.0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	9999	0	0	0	0	0
1	$\bar{1}$.9999	9999	9999	9999	9999	9999	9998	9998	9998	9998	0	0	0	0	0
2	.9997	9997	9997	9696	9996	9996	9996	9995	9995	9994	0	0	0	0	0
3	.9994	9994	9993	9993	9992	9992	9991	9991	9990	9990	0	0	0	0	0
4	.9989	9989	9988	9988	9987	9987	9986	9985	9985	9984	0	0	0	0	0
5	.9983	9983	9982	9981	9981	9980	9979	9978	9978	9977	0	0	0	0	1
6	.9976	9975	9975	9974	9973	9972	9971	9970	9969	9968	0	0	0	1	1
7	.9968	9967	9966	9965	9964	9963	9962	9961	9960	9959	0	0	1	1	1
8	.9958	9956	9955	9954	9953	9952	9951	9950	9949	9947	0	0	1	1	1
9	.9946	9945	9944	9943	9941	9940	9939	9937	9936	9935	0	0	1	1	1
10	.9934	9932	9931	9929	9928	9927	9925	9924	9922	9921	0	0	1	1	1
11	.9919	9918	9916	9915	9913	9912	9910	9909	9907	9906	0	1	1	1	1
12	.9904	9902	9901	9899	9897	9896	9894	9892	9891	9889	0	1	1	1	1
13	.9887	9885	9884	9882	9880	9878	9876	9875	9873	9871	0	1	1	1	2
14	.9869	9867	9865	9863	9861	9859	9857	9855	9853	9851	0	1	1	1	2
15	.9849	9847	9845	9843	9841	9839	9837	9835	9833	9831	0	1	1	1	2
16	.9828	9826	9824	9822	9820	9817	9815	9813	9811	9808	0	1	1	2	2
17	.9806	9804	9801	9799	9797	9794	9792	9789	9787	9785	0	1	1	2	2
18	.9782	9780	9777	9775	9772	9770	9767	9764	9762	9759	0	1	1	2	2
19	.9757	9754	9751	9749	9746	9743	9741	9738	9735	9733	0	1	1	2	2
20	.9730	9727	9724	9722	9719	9716	9713	9710	9707	9704	0	1	1	2	2
21	.9702	9699	9696	9693	9690	9687	9684	9681	9678	9675	0	1	1	2	2
22	.9672	9669	9666	9662	9659	9656	9653	9650	9647	9643	1	1	2	2	3
23	.9640	9637	9634	9631	9627	9624	9621	9617	9614	9611	1	1	2	2	3
24	.9607	9604	9601	9597	9594	9590	9587	9583	9580	9576	1	1	2	2	3
25	.9573	9569	9566	9562	9558	9555	9551	9548	9544	9540	1	1	2	2	3
26	.9537	9533	9529	9525	9522	9518	9514	9510	9507	9503	1	1	2	3	3
27	.9499	9495	9491	9487	9483	9479	9475	9471	9467	9463	1	1	2	3	3
28	.9459	9455	9451	9447	9443	9439	9435	9431	9427	9422	1	1	2	3	3
29	.9418	9414	9410	9406	9401	9397	9393	9388	9384	9380	1	1	2	3	4
30	.9375	9371	9367	9362	9358	9353	9349	9344	9340	9335	1	1	2	3	4
31	.9331	9326	9322	9317	9312	9308	9303	9298	9294	9289	1	2	2	3	4
32	.9284	9279	9275	9270	9265	9260	9255	9251	9246	9241	1	2	2	3	4
33	.9236	9231	9226	9221	9216	9211	9206	9201	9196	9191	1	2	3	3	4
34	.9186	9181	9175	9170	9165	9160	9155	9149	9144	9139	1	2	3	3	4
35	.9134	9128	9123	9118	9112	9107	9101	9096	9091	9085	1	2	3	4	5
36	.9080	9074	9069	9063	9057	9052	9046	9041	9035	9029	1	2	3	4	5
37	.9023	9018	9012	9006	9000	8995	8989	8983	8977	8971	1	2	3	4	5
38	.8965	8959	8953	8947	8941	8935	8929	8923	8917	8911	1	2	3	4	5
39	.8905	8899	8893	8887	8880	8874	8868	8862	8855	8849	1	2	3	4	5
40	.8843	8836	8830	8823	8817	8810	8804	8797	8791	8784	1	2	3	4	5
41	.8778	8771	8765	8758	8751	8745	8738	8731	8724	8718	1	2	3	4	6
42	.8711	8704	8697	8690	8683	8676	8669	8662	8655	8648	1	2	3	5	6
43	.8641	8634	8627	8620	8613	8606	8598	8591	8584	8577	1	2	4	5	6
44	.8569	8562	8555	8547	8540	8532	8525	8517	8510	8502	1	2	4	5	6
45	.8495	8487	8480	8472	8464	8457	8449	8441	8433	8426	1	3	4	5	6

從粗體數字起整數部變動

餘弦對數表(續)

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
45	1.8495	8487	8480	8472	8464	8457	8449	8441	8433	8426	1	3	4	5	6
46	.8418	8410	8402	8394	8386	8378	8370	8362	8354	8346	1	3	4	5	7
47	.8338	8330	8322	8313	8305	8297	8289	8280	8272	8264	1	3	4	6	7
48	.8255	8247	8238	8230	8221	8213	8204	8195	8187	8178	1	3	4	6	7
49	.8169	8161	8152	8143	8134	8125	8117	8108	8099	8090	1	3	4	6	7
50	.8081	8072	8063	8053	8044	8035	8026	8017	8007	7998	2	3	5	6	8
51	.7989	7979	7970	7960	7951	7941	7932	7922	7913	7903	2	3	5	6	8
52	.7893	7884	7874	7864	7854	7844	7835	7825	7815	7805	2	3	5	6	8
53	.7795	7785	7774	7764	7754	7744	7734	7723	7713	7703	2	3	5	7	9
54	.7692	7682	7671	7661	7650	7640	7629	7618	7607	7597	2	4	5	7	9
55	.7586	7575	7564	7553	7542	7531	7520	7509	7498	7487	2	4	6	7	9
56	.7476	7464	7453	7442	7430	7419	7407	7396	7384	7373	2	4	6	8	10
57	.7361	7349	7338	7326	7314	7302	7290	7278	7266	7254	2	4	6	8	10
58	.7242	7230	7218	7205	7193	7181	7168	7156	7144	7131	2	4	6	8	10
59	.7118	7106	7093	7080	7068	7055	7042	7029	7016	7003	2	4	6	9	11
60	.6990	6977	6963	6950	6937	6923	6910	6896	6883	6869	2	4	7	9	11
61	.6856	6842	6828	6814	6801	6787	6773	6759	6744	6730	2	5	7	9	12
62	.6716	6702	6687	6673	6659	6644	6629	6615	6600	6585	2	5	7	10	12
63	.6570	6556	6541	6526	6510	6495	6480	6465	6449	6434	3	5	8	10	13
64	.6418	6403	6387	6371	6356	6340	6324	6308	6292	6276	3	5	8	11	13
65	.6259	6243	6227	6210	6194	6177	6161	6144	6127	6110	3	6	8	11	14
66	.6093	6076	6059	6042	6024	6007	5990	5972	5954	5937	3	6	9	12	15
67	.5919	5901	5883	5865	5847	5828	5810	5792	5773	5754	3	6	9	12	15
68	.5736	5717	5698	5679	5660	5641	5621	5602	5583	5563	3	6	10	13	16
69	.5543	5523	5504	5484	5463	5443	5423	5402	5382	5361	3	7	10	14	17
70	.5341	5320	5299	5278	5256	5235	5213	5192	5170	5148	4	7	11	14	18
71	.5126	5104	5082	5060	5037	5015	4992	4969	4946	4923	4	8	11	15	19
72	.4900	4876	4853	4829	4805	4781	4757	4733	4709	4684	4	8	12	16	20
73	.4659	4634	4609	4584	4559	4533	4508	4482	4456	4430	4	9	13	17	21
74	.4403	4377	4350	4323	4296	4269	4242	4214	4186	4158	5	9	14	18	23
75	.4130	4102	4073	4044	4015	3986	3957	3927	3897	3867	5	10	15	20	24
76	.3837	3806	3775	3745	3713	3682	3650	3618	3586	3554	5	11	16	21	26
77	.3521	3488	3455	3421	3387	3353	3319	3284	3250	3214	6	11	17	23	28
78	.3179	3143	3107	3070	3034	2997	2959	2921	2883	2845	6	12	19	25	31
79	.2806	2767	2727	2687	2647	2606	2565	2524	2482	2439	7	14	20	27	34
80	.2397	2353	2310	2266	2221	2176	2131	2085	2038	1991	8	15	23	30	38
81	.1943	1895	1847	1797	1747	1697	1646	1594	1542	1489	8	17	25	34	42
82	.1436	1381	1326	1271	1214	1157	1099	1040	0981	0920	10	19	29	38	48
83	.0859	0797	0734	0670	0605	0539	0472	0403	0334	0264	11	22	33	44	55
84	.0192	0120	0046	9970	9894	9816	9736	9655	9573	9489	13	26	39	52	65
85	2.9403	9315	9226	9135	9042	8946	8849	8749	8647	8543	16	32	48	64	80
86	.8436	8326	8213	8098	7979	7857	7731	7602	7468	7330					
87	.7188	7041	6889	6731	6567	6397	6220	6035	5842	5640					
88	.5428	5206	4971	4723	4459	4179	3880	3558	3210	2832					
89	.2419	1961	1450	0870	0200	9408	8439	7190	5429	2419					
90	—∞														

從粗體數字起整數部變動

正切對數表

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分				
											1′	2′	3′	4′	5′
0	−∞	3.2419	5429	7190	8439	9409	0200	0870	1450	1962					
1	2.2419	2833	3211	3559	3881	4181	4461	4725	4973	5208					
2	.5431	5643	5845	6038	6223	6401	6571	6736	6894	7046					
3	.7194	7337	7475	7609	7739	7865	7988	8107	8223	8336					
4	.8446	8554	8659	8762	8862	8960	9056	9150	9241	9331	16	32	48	64	81
5	.9420	9506	9591	9674	9756	9836	9915	9992	0068	0143	13	26	40	53	66
6	1.0216	0289	0360	0430	0499	0567	0633	0699	0764	0828	11	22	34	45	56
7	.0891	0954	1015	1076	1135	1194	1252	1310	1367	1423	10	20	29	39	49
8	.1478	1533	1587	1640	1693	1745	1797	1848	1898	1948	9	17	26	35	43
9	.1997	2046	2094	2142	2189	2236	2282	2328	2374	2419	8	16	23	31	39
10	.2463	2507	2551	2594	2637	2680	2722	2764	2805	2846	7	14	21	28	35
11	.2887	2927	2967	3006	3046	3085	3123	3162	3200	3237	6	13	19	26	32
12	.3275	3312	3349	3385	3422	3458	3493	3529	3564	3599	6	12	18	24	30
13	.3634	3668	3702	3736	3770	3804	3837	3870	3903	3935	6	11	17	22	28
14	.3968	4000	4032	4064	4095	4127	4158	4189	4220	4250	5	10	16	21	26
15	.4281	4311	4341	4371	4400	4430	4459	4488	4517	4546	5	10	15	20	25
16	.4575	4603	4632	4660	4688	4716	4744	4771	4799	4826	5	9	14	19	23
17	.4853	4880	4907	4934	4961	4987	5014	5040	5066	5092	4	9	13	18	22
18	.5118	5143	5169	5195	5220	5245	5270	5295	5320	5345	4	8	13	17	21
19	.5370	5394	5419	5443	5467	5491	5516	5539	5563	5587	4	8	12	16	20
20	.5611	5634	5658	5681	5704	5727	5750	5773	5796	5819	4	8	12	15	19
21	.5842	5864	5887	5909	5932	5954	5976	5998	6020	6042	4	7	11	15	19
22	.6064	6086	6108	6129	6151	6172	6194	6215	6236	6257	4	7	11	14	18
23	.6279	6300	6321	6341	6362	6383	6404	6424	6445	6465	3	7	10	14	17
24	.6486	6506	6527	6547	6567	6587	6607	6627	6647	6667	3	7	10	13	17
25	.6687	6706	6726	6746	6765	6785	6804	6824	6843	6863	3	7	10	13	16
26	.6882	6901	6920	6939	6958	6977	6996	7015	7034	7053	3	6	9	13	16
27	.7072	7090	7109	7128	7146	7165	7183	7202	7220	7238	3	6	9	12	15
28	.7257	7275	7293	7311	7330	7348	7366	7384	7402	7420	3	6	9	12	15
29	.7438	7455	7473	7491	7509	7526	7544	7562	7579	7597	3	6	9	12	15
30	.7614	7632	7649	7667	7684	7701	7719	7736	7753	7771	3	6	9	12	14
31	.7788	7805	7822	7839	7856	7873	7890	7907	7924	7941	3	6	9	11	14
32	.7958	7975	7992	8008	8025	8042	8059	8075	8092	8109	3	6	8	11	14
33	.8125	8142	8158	8175	8191	8208	8224	8241	8257	8274	3	5	8	11	14
34	.8290	8306	8323	8339	8355	8371	8388	8404	8420	8436	3	5	8	11	14
35	.8452	8468	8484	8501	8517	8533	8549	8565	8581	8597	3	5	8	11	13
36	.8613	8629	8644	8660	8676	8692	8708	8724	8740	8755	3	5	8	11	13
37	.8771	8787	8803	8818	8834	8850	8865	8881	8897	8912	3	5	8	10	13
38	.8928	8944	8959	8975	8990	9006	9022	9037	9053	9068	3	5	8	10	13
39	.9084	9099	9115	9130	9146	9161	9176	9192	9207	9223	3	5	8	10	13
40	.9238	9254	9269	9284	9300	9315	9330	9346	9361	9376	3	5	8	10	13
41	.9392	9407	9422	9438	9453	9468	9483	9499	9514	9529	3	5	8	10	13
42	.9544	9560	9575	9590	9605	9621	9636	9651	9666	9681	3	5	8	10	13
43	.9697	9712	9727	9742	9757	9773	9788	9803	9818	9833	3	5	8	10	13
44	.9848	9864	9879	9894	9909	9924	9939	9955	9970	9985	3	5	8	10	13
45	0.0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	3	5	8	10	13

從粗體數字起整數部變動

正切對數表(續)

度	0′ 0°.0	6′ 0°.1	12′ 0°.2	18′ 0°.3	24′ 0°.4	30′ 0°.5	36′ 0°.6	42′ 0°.7	48′ 0°.8	54′ 0°.9	比例部分 1′	2′	3′	4′	5′
45	0.0000	0015	0030	0045	0061	0076	0091	0106	0121	0136	3	5	8	10	13
46	.0152	0167	0182	0197	0212	0228	0243	0258	0273	0288	3	5	8	10	13
47	.0303	0319	0334	0349	0364	0379	0395	0410	0425	0440	3	5	8	10	13
48	.0456	0471	0486	0501	0517	0532	0547	0562	0578	0593	3	5	8	10	13
49	.0608	0624	0639	0654	0670	0685	0700	0716	0731	0746	3	5	8	10	13
50	.0762	0777	0793	0808	0824	0839	0854	0870	0885	0901	3	5	8	10	13
51	.0916	0932	0947	0963	0978	0994	1010	1025	1041	1056	3	5	8	10	13
52	.1072	1088	1103	1119	1135	1150	1166	1182	1197	1213	3	5	8	10	13
53	.1229	1245	1260	1276	1292	1308	1324	1340	1356	1371	3	5	8	11	13
54	.1387	1403	1419	1435	1451	1467	1483	1499	1516	1532	3	5	8	11	13
55	.1548	1564	1580	1596	1612	1629	1645	1661	1677	1694	3	5	8	11	14
56	.1710	1726	1743	1759	1776	1792	1809	1825	1842	1858	3	5	8	11	14
57	.1875	1891	1908	1925	1941	1958	1975	1992	2008	2025	3	6	8	11	14
58	.2042	2059	2076	2093	2110	2127	2144	2161	2178	2195	3	6	9	11	14
59	.2212	2229	2247	2264	2281	2299	2316	2333	2351	2368	3	6	9	12	14
60	.2386	2403	2421	2438	2456	2474	2491	2509	2527	2545	3	6	9	12	15
61	.2562	2580	2598	2616	2634	2652	2670	2689	2707	2725	3	6	9	12	15
62	.2743	2762	2780	2798	2817	2835	2854	2872	2891	2910	3	6	9	12	15
63	.2928	2947	2966	2985	3004	3023	3042	3061	3080	3099	3	6	9	13	16
64	.3118	3137	3157	3176	3196	3215	3235	3254	3274	3294	3	6	10	13	16
65	.3313	3233	3353	3373	3393	3413	3433	3453	3473	3494	3	7	10	13	17
66	.3514	3535	3555	3576	3596	3617	3638	3659	3679	3700	3	7	10	14	17
67	.3721	3743	3764	3785	3806	3828	3849	3871	3892	3914	4	7	11	14	18
68	.3936	3958	3980	4002	4024	4046	4068	4091	4113	4136	4	7	11	15	19
69	.4158	4181	4204	4227	4250	4273	4296	4319	4342	4366	4	8	12	15	19
70	.4389	4413	4437	4461	4484	4509	4533	4557	4581	4606	4	8	12	16	20
71	.4630	4655	4680	4705	4730	4756	4780	4805	4831	4857	4	8	13	17	21
72	.4882	4908	4934	4960	4986	5013	5039	5066	5093	5120	4	9	13	18	22
73	.5147	5174	5201	5229	5256	5284	5312	5340	5368	5397	5	9	14	19	23
74	.5425	5454	5483	5512	5541	5570	5600	5629	5659	5689	5	10	15	20	25
75	.5719	5750	5780	5811	5842	5873	5905	5936	5968	6000	5	10	16	21	26
76	.6032	6065	6097	6130	6163	6196	6230	6264	6298	6332	6	11	17	22	28
77	.6366	6401	6436	6471	6507	6542	6578	6615	6651	6688	6	12	18	24	30
78	.6725	6763	6800	6838	6877	6915	6954	6994	7033	7073	6	13	19	26	32
79	.7113	7154	7195	7236	7278	7320	7363	7406	7449	7493	7	14	21	28	35
80	.7537	7581	7626	7672	7718	7764	7811	7858	7906	7954	8	16	23	31	39
81	.8003	8052	8102	8152	8203	8255	8307	8360	8413	8467	9	17	26	35	43
82	.8522	8577	8633	8690	8748	8806	8865	8924	8985	9046	10	20	29	39	49
83	.9109	9172	9236	9301	9367	9433	9501	9570	9640	9711	11	22	34	45	56
84	.9784	9857	9932	0008	0085	0164	0244	0326	0409	0494	13	26	40	53	66
85	1.0580	0669	0759	0850	0944	1040	1138	1238	1341	1446	16	32	48	64	81
86	1.1554	1664	1777	1893	2012	2135	2261	2391	2525	2663					
87	1.2806	2954	3106	3264	3429	3599	3777	3962	4155	4357					
88	1.4569	4792	5027	5275	5539	5819	6119	6441	6789	7167					
89	1.7581	8038	8550	9130	9800	0591	1561	2810	4571	7581					
90	∞														

從粗體數字起整數部變動

廣東工業專門学校

工專